Số gdu!

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ★ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

11 (245)
1997
NĂM THỨ 34

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG

❒ XÂY DỰNG CÔNG THỨC TÍNH TỔNG CÁC SỐ TỰ NHIÊN BẰNG ĐA THỨC

BÀI TOÁN WARING

GIẢI TOÁN HÌNH KHÔNG GIAN

KÌ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP HỒ CHÍ MINH

CẮT VÀ GHÉP BA HÌNH VUÔNG

Đỗ Quốc Anh và Vũ Việt Anh nhận giải thưởng mang tên nhà toán học Lê Văn Thiêm

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
MATHEMATICS AND YOUTH

MỤC LỤC

Cùng bạn đọc

Thể theo nguyện vọng của đông đảo bạn đọc và bạn viết, từ số 247 (Tháng 1.1998) tạp chí Toán học và Tuổi trẻ (THVTT) sẽ tăng lên 28 trang (cả bìa). Như vậy số trang ruột được tăng lên gấp rưỡi. Ngoài các chuyên mục đã có, THVTT sẽ mở thêm các mục mới : Diễn đàn dạy và học toán, Trang Sinh viên, Tiếng Anh và Toán học, Tin tức dạy và học toán, Câu lạc bộ, Lịch sử Toán học, ... Tạp chí được trình bày đẹp, bìa dày hơn. Giá bán lẻ là 3000 đ. Mong các bạn tích cực ủng hộ tạp chí.

Trân trọng cảm ơn các bạn

THVTT

Trụ sở tòa soạn :
81 Trần Hưng Đạo, Hà Nội ĐT : 8.220073
231 NGuyễn Văn Cừ, TP Hồ Chí Minh ĐT : 8.356111

Biên tập và trị sự : VŨ KIM THỦY
LÊ THỐNG NHẤT
Trình bày : HOÀNG LÊ BÁCH

XÂY DỰNG CÔNG THỨC TÍNH TỔNG CÁC SỐ TỰ NHIÊN BẰNG ĐA THỨC

LÊ QUANG TRUNG
(Bạc Liêu)

Giả sử f(x) là một đa thức có bậc n. Xét đẳng thức f(x) – f(x – 1) = g(x) (1)

Ta nhận thấy g(x) là đa thức có bậc (n – 1) và khi thay x lần lượt bằng 1, 2, 3... n và cộng lại ta được tổng : g(1) + g(2) + ... + g(n) = f(n) – f(0). Do đó xuất phát từ yêu cầu tính tổng n số tự nhiên nào đó ta sẽ chọn được g(x) và dẫn đến bài toán : "xác định đa thức f(x) thỏa mãn f(x) – f(x – 1) = g(x)". Sau đây xin nêu một vài ví dụ minh họa.

Ví dụ 1. *Tính tổng : S = 1 + 2 + 3 + ... + n. Từ tổng trên ta chọn g(x) = x và f(x) là đa thức bậc 2. Do đó ta xét bài toán : "Tìm đa thức bậc hai f(x) biết f(x) – f(x – 1) = x"*

Giải. Giả sử $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. Khi đó (1) $\Leftrightarrow 2ax - a + b = x$

suy ra $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{c}$, c tùy ý.

Vậy $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + c$

Thay x lần lượt bằng 1, 2, 3, ..., n ta có : $S = 1 + 2 + 3 + ... + n =$

$$f(n) - f(0) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ví dụ 2. *Tính tổng : S = 1+ 3 + 5 + ... + (2n – 1), Ta chọn g(x) = 2x – 1 và xét bài toán "Tìm đa thức bậc hai f(x) biết f(x) – f(x – 1) = 2x – 1 "*

Giải. Giả sử $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. Khi đó (1) $\Leftrightarrow 2ax - a + b = 2x - 1$

suy ra $a = 1$, $b = 0$, c tùy ý. Vậy $f(x) = x^2 + c$. Thay x lần lượt bằng 1, 2, 3,... n ta có $S = 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 10 = f(n) - f(0) = n^2$

Ví dụ 3. *Tính tổng*

$$S = 1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2n-1)^2$$

Từ tổng trên ta chọn

$g(x) = (2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$ *và xét bài toán : "Tìm đa thức bậc ba f(x) biết*

$$f(x) - f(x-1) = 4x^2 - 4x + 1"$$

Giải . Giả sử $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$. Khi đó (1) $\Leftrightarrow$

$$3ax^2 - (3a-2b)x - b + c + a = 4x^2 - 4x + 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 4 \\ 3a - 2b = 4 \\ a + c - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{3} \\ b = 0 \\ c = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy $f(x) = \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{3}x + d$

Lần lượt thay x bằng 1, 2, 3, ..., n ta được :

$$S = 1^2 + 3^2 + ... + (2n-1)^2 =$$

$$= f(n) - f(0) = \frac{4n^3 - n}{3}$$

Ví dụ 4. *Tính tổng*

$$S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3.$$

Ta chọn $g(x) = x^3$ *và xét bài toán : "Tìm đa thức bậc bốn f(x) biết :*

$$f(x) - f(x-1) = x^3".$$

Giải. Giả sử

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \ (a \neq 0).$$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow$

$$4ax^3 + (3b - 6a)x^2 + (4a - 3b + 2a)x + $$
$$+ b - a + d = x^3$$

giải ra ta được :

$$a = \frac{1}{4},\ b = \frac{1}{2},\ c = \frac{1}{4},\ d = 0,\ e \text{ tùy ý}$$

và $\quad f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x + e$

Thay x lần lượt bằng 1, 2, 3, ..., n ta có :

$$S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$$

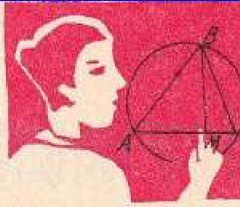
$$= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Qua 4 thí dụ trên, chắc các bạn đã nhận ra cách chọn *g(x)* và từ đó tìm được *f(n)* thỏa mãn mục đích của phương pháp này.

Bây giờ các bạn hãy thử tính hai tổng sau đây nhé !

1) $S_1 = 2 + 4 + 6 + ... + 2n$

2) $S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$.



GIẢI BÀI kì trước

Bài T1/241. *Chứng minh rằng với*
$$\begin{cases} c > 0 \\ (a+c)^2 < ab + bc - 2ac \end{cases}$$
thì phương trình sau đây luôn luôn có nghiệm :
$ax^2 + bx + c + 0$.

Lời giải Từ giả thiết, ta có
$$2(a+c)^2 - 2ab - 2bc + 4ac < 0$$
$$\Leftrightarrow (a+c)^2 - 2b(a+c) + b^2 +$$
$$+ (a+c)^2 + 4ac - b^2 < 0$$
$$\Leftrightarrow (a+c-b)^2 + (a+c)^2 - (b^2 - 4ac) < 0 \ .$$
Suy ra :
$$b^2 - 4ac > (a+c-b)^2 + (a+c)^2 \geqslant 0 (1).$$
Xảy ra :

1) $a = 0$. Phương trình đang xét trở thành phương trình bậc nhất $bx + c = 0$, đồng thời điều kiện đã cho trở thành $b > c > 0$. Vậy phương trình đó có nghiệm $x = -c : b$.

2) $a \neq 0$. Phương trình trở thành bậc hai. Từ (1), ta có biệt thức $b^2 - 4ac$ luôn luôn không âm và phương trình đó có nghiệm.

Vậy phương trình đang xét luôn luôn có nghiệm.

Nhận xét. Có 320 bài giải, phần lớn đều giải đúng, một số không ít bạn mắc thiếu sót do không xét trường hợp $a = 0$. Lời giải tốt gồm có : **Nam Định :** *Trần Đức Hiệu* (8 Toán Hàn Thuyên). **Nghệ An :** *Nguyễn Hồ Xuân Minh Đức* (8A Hưng Dũng, Tp Vinh) ; *Lê Quang Đạo* (9CT Phan Bội Châu). **Hà Tây :** *Lưu Tiến Đức* (8B THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa). **Thái Bình :** *Vũ Quý Nghiệp* (9 Toán Năng Khiếu Kiến Xương). **Đăk Lăk :** *Dương Thành An* (8 Toán Nguyễn Du, Tp Buôn Ma Thuột). **Tp Hồ Chí Minh** : *Trần Ngọc Cường* (9^{H} Nguyễn An Khương, Hoóc Môn) ; *Đặng Trần Trí* (9^{A1} Hưng Phú A, Q.8). **Vĩnh Long :** *Nguyễn Chí Trung Kiên* (9T Nguyễn bỉnh Khiêm, Tx Vĩnh Long). **Bắc Giang :** *Ngô Anh Viễn* (Lạng Giang). **Quảng Ngãi :** *Nguyễn Thị Phương Uyên* (7 Chuyên Nghĩa Hành). **Bình Dương :** *Nguyễn Tiến Hùng* (10 Chuyên Bình Dương). **Tây Ninh :** *Trần Tuấn Hùng* (9^{B} Chuyên Toán THCS Chuyên Gò Dầu).

ĐẶNG VIỄN

Bài T2/241 : *Cho ba số thực $x, y, z \geqslant 0$ thỏa mãn $x^{1997} + y^{1997} + z^{1997} = 3$.*

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức
$$F = x^2 + y^2 + z^2$$

Lời giải : (của các bạn *Trần Thế Minh, Trương Yến Nhi*, 8A, chuyên **Bạc Liêu** ; *Hoàng Tùng*, 9 chuyên Toán, năng khiếu Tiên Sơn, **Bắc ninh** ; *Lưu Tiến Đức*, 8B, THCS Nguyễn Thượng Hiền ; Ứng Hòa **Hà Tây** ; *Cao Lê Mạnh Hà*, 9A, Lê Lợi, **Thanh Hóa** và một số bạn khác)

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 1995 số 1 và 2 số x^{1997}, ta có :
$$\frac{1995 + 2x^{1997}}{1997} \geqslant \sqrt[1997]{x^{2.1997}} = x^2 \qquad (1)$$
Tương tự :
$$\frac{1995 + 2y^{1997}}{1997} \geqslant y^2 \qquad (2)$$
và
$$\frac{1995 + 2z^{1997}}{1997} \geqslant z^2 \qquad (3)$$
Cộng từng vế của (1), (2), (3) ta có :
$$F = x^2 + y^2 + z^2 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{3 \ . \ 1995 + 2(x^{1997} + y^{1997} + z^{1997})}{1997} = 3$$
Ta có : $F = 3 \Leftrightarrow x^2 = y^2 = z^2 = 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = y = z = 1$ (vì x, y, z $\geqslant 0$).
Do đó F đạt giá trị lớn nhất bằng 3.

Nhận xét :

1) Rất nhiều em sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski mở rộng để giải quyết bài toán này :
$$(\underbrace{1 \ . \ 1 \ ... \ 1}_{1995 \text{ chữ số } 1} . x . x + 1 \ . \ 1 \ ... \ 1 \ . y . y +$$
$$+ 1 \ . \ 1 \ ... \ 1 \ . z \ . z)^{1997} \leqslant$$
$$\leqslant 3^{1995} (x^{1997} + y^{1997} + z^{1997})^2$$
$\Rightarrow F^{1997} \leqslant 3^{1997} \Rightarrow F \leqslant 3$. Vì $F = 3$ khi $x = y = z = 1$ nên F lớn nhất bằng 3.

2) Một số em mở rộng kết quả bài toán, đáng khen là *Đào Thị Bích*, 6H, Vân Phú, Phú Ninh, **Phú Thọ** ; *Nguyễn Đức Hải*, 9B, chuyên Yên Lạc, **Vĩnh Phúc** và *Nguyễn Hồ Xuân Minh Đức*, 8A, Hưng Dũng, **Vinh Nghệ An** đã xét và giải đúng bài toán :

"Cho k số $x_1, x_2, ..., x_k > 0$ thỏa mãn :
$$x_1^m + x_2^m + ... + x_k^m = S \ .$$
Tìm giá trị lớn nhất của $F = x_1^n + x_2^n + ... + x_k^n$ với $m > n$ và $m, n \in \mathbb{N}^*$.

3) Đáng lưu ý với các em là một số sai lầm trong các lời giải gửi về :

* *Sai lầm 1 :* "Do vai trò của x, y, z như nhau nên có thể giả sử $3 \geqslant x \geqslant y \geqslant z \geqslant 0 \Rightarrow$
$$3 = x^{1997} + y^{1997} + z^{1997} \geqslant 3z^{1997} \Rightarrow z \leqslant 1.$$
Do vai trò x, y, z như sau nên $x \leqslant 1$; $y \leqslant 1$".

Lý luận "vai trò x, y, z như nhau" lần thứ hai là sai vì sau ki giả sử $x \geqslant y \geqslant z \geqslant 0$ thì điều đó không đúng nữa !

* *Sai lầm 2 :* " $x^{1997} + y^{1997} + z^{1997} = 3 \Rightarrow$
$$(x^{1997} - 1) + (y^{1997} - 1) + (z^{1997} - 1) = 0$$
$$\Rightarrow \{ x^{1997} - 1 = y^{1997} - 1 = z^{1997} - 1 = 0$$
Xin không bình luận (?)

* *Sai lầm 3 :* Xét hai trường hợp (?)
$x \geqslant y \geqslant z \geqslant 1$ và $1 > x \geqslant y \geqslant z$. Tại sao x, y, z lại chỉ có hai trường hợp này ?
Chẳng hạn $x \geqslant 1 > y \leqslant z$ thì sao ?

* *Sai lầm 4 :* "Giả sử $x \geqslant y \geqslant z \geqslant 0$
$$\Rightarrow x^2 \geqslant y^2 \geqslant z^2 \Rightarrow F = x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 3x^2$$
$\Rightarrow \max G = 3x^2$ ". Phải chăng $3x^2$ là một hằng số ?

* *Sai lầm 5 :* $xyz \leqslant 1 \Rightarrow x, y, z \leqslant 1$ " Lấy $x = \sqrt[1997]{3}$; $y = z = 0$ thì thấy ngay điều suy ra ở trên là sai.

4) Các em có lời giải tốt hơn và mở rộng bài toán là : *Hà Văn Đạt*, 9TA, Phan Bội Châu, **Nghệ An** ; *Trần Văn Hà, Trần Trung Hiếu*, 9D2, Lạc Viên, **Hải Phòng** ; *Vũ Đức Nghĩa*, 8a, Đông Cương, **Thanh Hóa** ; *Ngô Anh Viễn*, Lạng Giang, **Bắc Giang** (đề nghị cho biết lớp mấy ?).

LÊ THỐNG NHẤT

Bài T3/241 : *Cho p, q, r là ba số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh phương trình*

$9x - 2y - p^4 - q^4 - x^4 = 0$

Luôn có nghiệm tự nhiên với mọi p, q, r như vậy.

Lời giải : của *Ngô Quốc Anh*, 8T, Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột, **Đắc Lắc**. Phương trình đã cho tương đương với :

$$9(x - p^4 - q^4 - r^4) - \\ - 2(y - 4(p^4 + q^4 + r^4)) = 0 \qquad (1)$$

Từ (1) ta thấy ngay rằng

$$\begin{cases} x = p^4 + q^4 + r^4 \\ y - 4(p^4 + q^4 + r^4) \end{cases}$$

với mọi p, q, r là 3 số nguyên tố lớn hơn 3 là một cặp nghiệm tự nhiên của phương trình đã cho. Ta có đpcm.

Nhận xét :

1. Ở bài toán này thực ra không cần giả thiết p, q, r là 3 số nguyên tố lớn hơn 3 mà chỉ cần $p, q, r \in \mathbf{Z}$ là đủ.

2. Tất cả các lời giải gửi đến đều đúng. Các bạn có lời giải tốt là : *Tạ Văn Chương*, 9A, PTCS Xuân Hòa, Mê Linh, **Vĩnh Phúc** *Đào Thị Hương Giang*, 7T, Chuyên Quốc Oai, **Hà Tây**. *Đào Văn Huy*, 9T, PTTH Nguyễn Trãi ; *Ngô Thế Hùng*, 7C, Amsterdam ; **Hà Nội**. *Nguyễn Hoàng Long* ; 9A1, THCS Hồng Bàng ; *Trần Văn hà*, 9D2, PTCS Lạc Viên, **Hải Phòng**. *Hà Xuân Giáp*, 8TN2, *Hà Thị Phương Thảo*, 9TN, NK Bỉm Sơn, **Thanh Hóa**. *Nguyễn Thanh Mơ*, 8A, THCS Thanh Dương, Thanh Chương, **Nghệ An**, *Nguyễn Xuân Hải*, 9T, NK Lệ Thủy ; *Hoàng Đại Nghĩa*, 9B, Đồng Sơn 1, Đồng Hới, **Quảng Bình**. *Huỳnh Minh Sơn*, 9T, chuyên Nguyễn Nghiêm, Đức Phổ, **Quảng Ngãi**. *Dương Thành An* ; *Tăng Thị Hà Yên*, 8T ; *Đỗ Hoàng Nam*, 9CT, Nguyễn Du, Buôn Mê Thuột, **Đăk Lăk**.

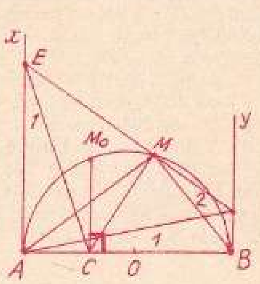
TỐ NGUYÊN

Bài T4/241. *Cho nửa đường tròn (O), đường kính AB và một điểm C nằm giữa A, B. Từ một điểm M trên nửa đường tròn kẻ đường thẳng vuông góc với MC cắt các tiếp tuyến tại A và B của (O) tại các điểm tương ứng E, F. Tìm vị trí của điểm M sao cho chu vi tứ giác AEB đạt giá trị bé nhất.*

Lời giải. (dựa theo Bùi Anh Đức 8A Trọng Điểm Uông Bí, Quảng Ninh). Do có cặp góc đối vuông nên các tứ giác $AEMC$, $BFMC$ nội tiếp và ta có $\hat{E}_1 = \hat{M}_1$; $\hat{C}_1 = \hat{M}_2$. Mà $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc) nên $\hat{E}_1 = \hat{C}_1$. Suy ra $\Delta AEC \backsim \Delta BCF$ (th 1), và ta có : $AE : BC = AC : BF$, hay là : $AE \,.\, BF = AC \,.\, BC$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$AE + BE \geqslant 2\sqrt{AE \,.\, BF} = 2\sqrt{AC \,.\, BC}$. Ta lại có $EF \geqslant AB$ (vì AB là khoảng cách giữa hai đường thẳng song song lần lượt chứa E, F)

Từ đó ta có : Chu vi tứ giác $AEFB$ = A $2\sqrt{AC \,.\, BC}$. Dấu "=" xẩy ra khi MC vuông = AB (do tứ giác $AEFB$ trở thành hình $2\sqrt{AC \,.\, BC}$. Hơn nữa, ngoài trường hợp trên, ta luôn luôn có vế trái lớn hơn nên dấu "=" không xẩy ra. Vậy vị trí cần tìm là giao điểm M_o của nửa đường tròn với đường vuông góc với AB tại C.



Nhận xét. Có 112 bài giải, tất cả đều giải đúng nhưng còn chưa gọn. Lời giải tốt gồm có : **Quảng Ninh** : *Bùi Đức Anh* (8A Trọng Điểm Uông Bí). **Bình Dương** : *Nguyễn Tiến Hùng* (10 Chuyên Hùng Vương). **Tp Hồ Chí Minh** : *Trần Đình Ngọc Hải* (9A1 THCS Phước Bình, Q.9) ; *Trần Thị Ngọc Thúy* (9A2 Bà Điểm 3, quận 12). **Phú Thọ** : *Lương Thu Ninh* (8A1 Chuyên Phong Châu). **Hải Phòng** : *Vũ Ngọc Minh* (8T Chu Văn An). **Thanh Hóa** : *Trịnh Quang Kiên* (9T Lam Sơn). **Hà Nội** : *Phạm Thế Hùng* (81 Từ Liêm). **Quảng Nam** : *Huỳnh Minh Việt* (8A Nguyễn Hiền, Điện Bàn). **Thái Bình** : *Nguyễn Văn Mận* (11A1 PTTH Quỳnh Côi, Quỳnh Phụ). **Hà Tây** : *Hoàng Văn Vững* (9A PTCS Ngô Sĩ Liên, Chương Mĩ). **Đăk Lăk** : *Tạ Quốc Hưng* (8 Toán Chuyên Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột).

ĐẶNG VIỄN

Bài T5/241 :

Cho tam giác ABC, M là trung điểm cạnh BC. Chứng minh rằng nếu r, r_1, r_2 là bán kính các đường tròn nội tiếp các tam giác tương ứng ABC, ABM, ACM thì

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \geqslant 2\left(\frac{1}{r} + \frac{2}{a}\right) \text{ (với } BC = a\text{).}$$

Lời giải :

Ta có $S_{ABM} = S_{ACM} = \frac{1}{2} S_{ABC}$. Mặt khác $AM \geqslant h$ (h là đường cao của ΔABC)

$$\text{Suy ra : } \frac{4}{a} = \frac{2h}{S_{ABC}} \leqslant \frac{2AM}{S_{ABC}} = \frac{AM}{S_{ABM}} \qquad (1)$$

$$\frac{2}{r} = \frac{a+b+c}{S_{ABC}} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy tiếp ra :

$$\frac{4}{a} + \frac{2}{r} \leqslant \frac{AM + \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2}}{S_{ABM}} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \geqslant 2\left(\frac{1}{r} + \frac{2}{a}\right)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $AM = h$ tức ΔABC cân.

Nhận xét :

Trên đây chỉ là một trong nhiều cách giải

Giải tốt bài này có các bạn :

Phú Thọ : *Nguyễn Thiện Tài*, 9A1 chuyên sông Thao, *Đào Thị Bích* 6H, Văn Phú, Phú Ninh ; **Vĩnh Phúc** : *Hoàng Tùng*, 9 Chuyên NK Tiên Sơn, *Nguyễn Đăng Quy*, 9A TĐ Thuận Thành ; **Hải Dương :** *Đỗ Ngọc Quỳnh*, 8T NK Hải Dương, *Nguyễn Quỳnh Hoa*, 9T Nguyễn Trãi ; **Thái Bình :** *Mai Lâm Phương*, 9T Kiến Xương ; **Hà Tây :** *Nguyễn Công Hoàn*, 9K Lê Lợi, Hà Đông ; **Hưng Yên :** *Đào Hoàng Bách*, 9A Long Hưng, Châu Giang ; **Hà Nội :** *Ngô Thế Hùng*, 7C Hà Nội – Amsterdam, *Nguyễn Ngô Lâm*, 8CT, Tô Hoàng ; **Nam Định :** *Trần Quang* : 8T Hàn Thuyên, *Trần Quang Vinh*, 9CT Ý Yên, *Cao Văn Duẩn*, CLC Giao Thủy, *Nguyễn Quang Tùng* 9A6 Trần Đăng Ninh ; **Thanh Hóa :** *Mai Thị Thu Sánh*, 9A Nga Hải, Nga Sơn, *Lê Kim Phượng*, 9CNK Thành phố, *Trịnh Lê Hùng*, 9T Lam Sơn, *Nguyễn Phi Lê*, 9A NK Hoằng Hóa, *Trịnh Quang Minh*, 9B CLC Triệu Sơn, *Đàm Thị Hà*, 9B CLC Triệu Sơn, *Hà Thị Phương Thảo*, 9TN NK Bỉm Sơn ; **Nghệ An :** *Chu Việt Tuấn*, *Nguyễn Đình Quân*, 9TA Phan Bội Châu, *Lê Việt Hòa*, 9A Đồng Văn, Thanh Chương, *Nguyễn Nghĩa Tài*, CLC Đô Lương ; **Hà Tĩnh :** *Nguyễn Thành Trung*, 9TNK Hà Tĩnh, *Hoàng Lê Lợi*, 8T NK Thạch Hà ; **Quảng Bình :** *Nguyễn Xuân Hải*, 9T NK Lệ Thủy ; **Thừa Thiên – Huế :** *Đinh Trung Hiếu*, 8A1 Phú Bài, Hương Thủy ; **Đắc Lắc :** *Hồ Thị Thanh Trang*, 7T Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột ;

Khánh Hòa : *Trần Tuấn Anh*, 9T Lê Quý Đôn, Nha Trang, **HCM :** *Ngô Trung Hiếu*, 9T chuyên Nguyễn Du, Q1, *Trần Đình Học hải*, 9M Phước Bình, Q9, *Lư Boun Vinh*, 9A1 Chánh Hưng, Q8 ; **Tiền Giang** : *Nguyễn Ngọc Ân Phương*, 8T NK Cai Lậy ; **Vĩnh Long** : *Nguyễn Chí Trung Kiên*, 8T chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

VŨ KIM THỦY

Bài T6/241 : *Cho dãy số* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *được xác định bởi :*

$$b_1 = \frac{1}{2},\ b_{n+1} = \frac{1}{2}\left(b_n + \sqrt{b_n^2 + \frac{1}{4^n}}\right)\ \forall n \geq 1.$$

Chứng minh rằng, dãy $\{b_n\}$ *là dãy hội tụ và hãy tìm* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Lời giải (*của nhiều bạn*) : Bằng phương pháp quy nạp theo n ta sẽ chứng minh rằng :

$$b_n = \frac{1}{2^n}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2^{n+1}}\ (1)\ \forall n \geq 1.$$

Thật vậy, do $b_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{2^1}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2^{1+2}}$ nên ta có (1) đúng với $n = 1$.

Giả sử đã có (1) đúng với $n = k \geq 1$, nghĩa là : $b_k = \frac{1}{2^k}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2^{k+1}}$. Khi đó :

$$b_{k+1} = \frac{1}{2}\left(b_k + \sqrt{b_k^2 + \frac{1}{4^k}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^k}\left(\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2^{k+1}} + \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2^{k+1}}}\right)$$

$$= \frac{1}{2^{k+1}}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2^{k+2}}.$$

Như vậy, ta cũng có (1) đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lí quy nạp, ta có điều muốn chứng minh,

Từ đó :

$$b_n = \frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\cdot\frac{\pi/2^{n+1}}{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}\quad \forall n \geq 1\ (2)$$

Do $\lim\cos\frac{\pi}{2^{n+1}} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi/2^{n+1}}{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}} = 1$

nên từ (2) suy ra dãy $\{b_n\}$ là dãy hội tụ, và

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{2}{\pi}.$$

Nhận xét :

1) Trong tổng số 44 bạn gửi lời giải tới T.S. có 5 bạn cho lời giải sai, do đã mắc phải một trong các sai lầm sau :

• *Sai lầm 1 :* Từ $X_n \leq y_n\ \forall n \in \mathbf{n}^*$ và $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. (? !)

• *Sai lầm 2 :* Xuất phát từ $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = a$ suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} X_1 = \lim\limits_{n\to\infty} X_2 = \ldots = \lim\limits_{n\to\infty} X_n = a$ (? !)

• *Sai lầm 3 :* Đưa ra các đánh giá sai cho b_n.

• *Sai lầm 4 :* Sử dụng khái niệm "cận dưới đúng" trong khi chưa hiểu gì về khái niệm này.

2) Không ít bạn, sau khi đã chứng minh được (1) lại đi chứng minh sự hội tụ của dãy $\{b_n\}$ bằng cách chứng minh $\{b_n\}$ là dãy tăng và bị chặn trên.

3) Các bạn sau đây có lời giải tốt : **Yên Bái** : *Tạ Xuân hưng* (10A₂ PTTH chuyên). **Thái Nguyên** : *Vũ Tuấn Anh* (Toán 11K8 PTNK Tỉnh). **Bắc Giang** : *Vũ Duy Tuấn* (12A PTTH Ngô Sĩ Liên). **Hải Phòng** : *Đặng Anh Tuấn* (11T PTTH Trần Phú). **Hà Nội** : *Nguyễn Đức Mạnh* (12A PTTH Cổ Loa – Đông Anh). **Hòa Bình** : *Đỗ Quang Dương* (11T PTTH Hoàng Văn Thụ). **Thanh Hóa** : *Lê Văn Phương* (10T PTTH Lam Sơn). **Nghệ An** : *Đặng Đức Hạnh, Trần Nam Dũng* (11T, 12T PTTH Phan Bội Châu). **Đăk Lăk** : *Lê Đình Bình, Lê Thế Tân* (12T PTtH Nguyễn du – Buôn Ma Thuột). **ĐHQG TP HCM :** *Dương Nguyễn Ylinh, Nguyễn Việt Linh* (11T PTNK). **ĐHQG Hà Nội** : *Nguyễn Mạnh Hà, Cao Quốc Hiệp* (11A, 12A PTCT – Tin DHKHTN).

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T7/241. *Tìm các số nguyên tố x, y thỏa mãn phương trình*

$[\sqrt[3]{1}] + [\sqrt[3]{2}] + \ldots + [\sqrt[3]{x^3 - 1}] = y$ *trong đó [a] chỉ kí hiệu phần nguyên của số a.*

Lời giải : (của các bạn *Nguyễn Xuân Hà* 12 PTTH Đức Phổ, **Quảng Ngãi**, *Trần Việt Dũng*, 12, Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng** *Lương Hồng Thái*, 11 tin, ĐHSP **Vinh**) Nhận xét rằng $[\sqrt[3]{m}] = k \Leftrightarrow k^3 \leq m \leq (k+1)^3 - 1$.

Số các số m thỏa mãn điều kiện này là $(k+1)^3 - k^3 = 3k^3 + 3k + 1$.

Vậy phương trình đã cho tương đương với

$$\sum_{k=1}^{x-1} S_k = y \quad \text{ở đó } S_k = k(3k^2 + 3k + 1)$$

Vì S_k có cùng tính chẵn lẻ với k do đó nếu x là số nguyên tố lẻ thì $\sum\limits_{k=1}^{x-1} S_k$ là một số chẵn lớn hơn 2 do vậy không là số nguyên tố.

Thành thử $x = 2$ và do đó $y = S_1 = 7$.

Nhận xét.

Bài này có rất nhiều bạn tham gia giải. Đa số đều tính tổng vế trái bằng $\frac{(x-1)x(3x^2+x)}{4} \Leftrightarrow$ rồi từ đó giải phương trình $x(x-1)(3x^2+x) = 4y$ với x, y nguyên tố. Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Nguyễn Minh Phương*, 12A Hùng Vương, **Phú Thọ**, *Nguyễn Kiên*, 12A₂ **Yên Bái**, *Nguyễn Thanh Tùng*, 11C ĐHKHTN, *Nguyễn Thái Thọ*, 12T Phan Bội Châu, **Nghệ An**, *Đặng Ngọc Châu*, 10T₁ Nguyễn Du, **Đăk Lăk**, *Trần Đức Thuận*, 12CT PTNK **Quảng Bình**, *Nguyễn Nghĩa Lâm*, 11 Toán ĐHSP **Vinh**, *Trương Minh Trung*, 9A Diễn Châu, **Nghệ An**, *Phạm Việt Ngọc*, PTNK Ngô Sĩ Liên, **Bắc Giang** ; *Đinh Đức Hoàng*, 11A PTTH Lương Ngọc Quyến, **Thái Nguyên** ; *Lê Văn Hiệp*, 10T Nguyễn Trãi, **Hải Dương**, *Ngô Hoàng Quý*, 7C Hà Nội Amsterdam, **Hà Nội**, *Hồ Chí Hiếu*, 10C Toán Trần Phú, **Hải Phòng**, *Hoàng Văn Vững*, PTCS Ngô Sĩ Liên, Chương Mỹ, **Hà Tây** : *Đỗ Hoàng nam*, 9 Nguyễ Du, **Đăk Lăk**, *Lê Bou Vinh*, 10CT DHKHTN, **TPCHM**, *Tống Kim Anh*, 12T Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Vĩnh Long**, *Lê Quang Nẫm*, 12CT ĐHQG, **TPHCM**.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T8/241. *Cho $x_1, x_2, ..., x_n$ là n số thực thuộc đoạn [0, 1]. Chứng minh rằng ta luôn có bất đẳng thức*

$$x_1(1-x_2)+x_2(1-x_3)+...+x_{n-1}(1-x_n)+x_n(1-x_1) \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]. \quad (1)$$

Giải : (của nhiều bạn)

1) Nếu $n = 2k$, $k \in \mathbf{N}^*$ thì

(1) $\Leftrightarrow k \geqslant x_1(1-x_2)+x_2(1-x_3)+...+x_{2k}(1-x_1)$ (2)

Mà $\begin{cases} 1+x_2x_2 \geqslant x_1+x_2 \\ 1+x_2x_3 \geqslant x_2+x_3 \\ ..... \\ 1+x_{2k}x_1 \geqslant x_{2k}+x_1 \end{cases}$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên, ta được

$$x_1+x_2+...+x_{2k} \leqslant$$
$$\leqslant k+\frac{x_1x_2+x_2x_3+...+x_{2k}x_1}{2} <$$

$< k+x_1x_2+x_2x_3+...+x_{2k}x_1$, từ đây ta có ngay bất đẳng thức (2).

2) Nếu $n = 2k+1$, $k \in \mathbf{N}$ thì

(1) $\Leftrightarrow k > x_1(1-x_2)+x_2(1-x_3)+...+x_{2k+1}(1-x_1) \Leftrightarrow k+x_1x_2+x_2x_3+...+x_{2k+1}x_1 \geqslant x_1+x_2+x_{2k+1}$ (3)

Ta chứng minh (3) bằng phương pháp quy nạp theo k.

Với $k = 1$ thì (3) có dạng :

$1+x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1 \geqslant x_1+x_2+x_3$ (*)

Bất đẳng thức này luôn đúng, do :

$(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3) \geqslant 0$ (hiển nhiên vì $x_1, x_2, x_3 \in [0, 1]$) $\Leftrightarrow 1+x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1 \geqslant x_1+x_2+x_3++x_1x_2x_3 \geqslant x_1+x_2+x_3$

Giả sử (3) đúng với k ($k \geqslant 1$). Ta chứng minh (3) đúng với $k+1$: $k+1+x_1x_2+x_2x_3+...+x_{2k+2}x_{2k+3}+x_{2k+3}x_1 \geqslant \geqslant x_1+x_2+...+x_{2k+1}+x_{2k+2}+x_{2k+3}$ (4)

Theo (*) ta có :

$x_{2k+1}+x_1+x_{2k+2}+x_{2k+3} \geqslant 1+x_{2k+1}x_1x_{2k+2}+x_{2k+2}x_{2k+3}++x_{2k+3}x_{2k+1}x_1$

$\leqslant 1+x_{2k+1}x_{2k+2}+x_{2k+2}x_{2k+3}+x_{2k+3}x_1$ (5)

Sử dụng (5) và giả thiết quy nạp, ta được :

$(x_1+x_2+...x_{2k+1})+x_{2k+2}+x_{2k+3} \leqslant$
$\leqslant k+x_1x_2+x_2x_3+x_{2k}x_{2k+1}+x_{2k+1}x_1+x_{2k+2}+x_{2k+3} \leqslant \leqslant k+x_1x_2+x_2x_3+...+x_{2k}x_{2k+1}+1+x_{2k+1}x_{2k+2}++x_{2k+2}x_{2k+3}+x_{2k+3}x_1$

Vậy (4) được chứng minh.

Nhận xét : Các bạn sau đây có lời giải đúng : **Nam Định** : *Nguyễn Trường Giang (12T Lê Hồng Phong)*, **Hà tĩnh** : *Ngô Thái Phú* (10A1, Minh Khai), **Hải dương** : *Nguyễn Văn Luật* (12CT Nguyễn Trãi), **Ninh bình** : *Vũ Hải Chân* (Lương Văn Tụy), **Phú thọ** : *Nguyễn Minh Phương* (12A Hùng Vương), **Hà nội** : *Phan Tuấn Sơn, Nguyễn Mạnh Hà, Cao Quốc Hiệp* (ĐHKHTN), *Nguyễn Hồng Vân* (12A Ngọc Hồi), *Nguyễn Đức Mạnh* (12A Cổ loa). **Huế** : *Trần Bá Đôn* (ĐHKH), *Huỳnh Trọng Nhật Minh* (9A Phú Lộc), **Đà Nẵng** : *Phạm Trần Thảo Duyên* (11A3 Phan Châu Trinh), **Vĩnh long** : *Tống Kim Anh* (12T, Nguyễn Bỉnh Khiêm), **Đắc Lắc** : *Lê Thế Tân, Lê Anh Dũng* (12T Nguyễn Du), **Thanh hóa** : *Hồng Phương Đông* (111 Lam Sơn), **TPHCM** : *Dương Nguyên Y Linh* (ĐHQG). **Vĩnh Phúc** : *Nguyễn Hồng Quân, Lê Thế Thành* (Chuyên Vĩnh phúc) **Thái bình** : *Bùi T. Hùng* (Lê Quý Đôn), **Bắc giang** : *Đặng Hoàng Việt Hà, Nguyễn Tiến Mạnh, Vũ Duy Tuấn* (Ngô Sỹ Liên), **Yên bái** : *Nguyễn Kiên* (11A1 chuyên), *Lê Minh Đức* (12A1 chuyên), **Hải phòng** : *Vũ Trung Nghĩa* (Trần phú), *Hà Huy Hưng* (Trần phú), *Đặng Anh Tuấn* (11T Trần phú), **Nghệ An** : *Nguyễn Quốc Hùng* (Huỳnh Thúc Kháng), **Quảng bình** : *Trần Hữu Lực* (12CT Đồng Hới). *Nguyễn Bản Bình* (11A1 Đào Duy Từ, Đồng Hới).

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T9/241. *Chứng minh rằng trong mọi tam giác nhọn ABC, ta có B.Đ.T :*

$$sinAsinB+sinBsinC+sinCsinA \geqslant$$
$$\geqslant (1+\sqrt{2cosAcosBcosC})^2 \;;(*)$$

Lời giải (Dựa theo : *Vũ Huy Toàn*, 11T, PTNK Trần Phú, **Hải Phòng** ; *Lưu Đức Cảnh*, 11A, PTTH Hoàng Lệ Kha, Hà Trung – **Thanh Hóa** ; *Lê Quang Nẫm* 12CT, PTNK ĐHQG **TPHồ Chí Minh**).

– Trước hết, trong bài toán này chúng ta cần đến những hệ thức lượng giác đã biết sau đây, trong mọi ΔABC :

$$cotg\frac{A}{2}+cotg\frac{B}{2}+cotg\frac{C}{2} = cotg\frac{A}{2}cotg\frac{B}{2}cotg\frac{C}{2} \;;\quad (1)$$

$$cosA+cosB+cosC-1 = 4sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \;;\quad (2)$$

$tgA+tgB+tgC = tgAtgBtgC$ (nếu ΔABC không vuông) (3)

$tgA+tgB+tgC \geqslant cotg\dfrac{A}{2}+cotg\dfrac{B}{2}+cotg\dfrac{C}{2}$ (nếu ΔABC nhọn) ; (4)

Ba hệ thức đầu là những bài tập trong SGK. Ta chứng minh B.Đ.T (4). Trong tam giác nhọn ABC, ta có :

$$tgA+tgB = \frac{\sin(A+B)}{cosAcosB} =$$
$$= \frac{2sinC}{\cos(A-B)+\cos(A+B)} \geqslant$$
$$\frac{2sinC}{1-cosC} = \frac{4sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{2sin^2\frac{C}{2}} = 2cotg\frac{C}{2}$$

và hai B.Đ.T tương tự. Cộng vế đối vế ba B.Đ.T đó, ta thu được B.Đ.T (4). Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi : $\cos(A-B) = \cos(B-C) = \cos(C-A) = 1$, nghĩa là khi và chỉ khi $A = B = C$ và ΔABC là đều.

Nhờ các hệ thức (1) và (3), từ (4) ta được B.Đ.T sau :

$$tgAtgBtgC \geqslant cotg\frac{A}{2}cotg\frac{B}{2}cotg\frac{C}{2} \;;(5)$$

Từ đó, sau khi thay

$$tgA = \frac{sinA}{cosA},\ cotg\frac{A}{2} = \frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}},$$

$sinA = 2sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}$, $2sin^2\dfrac{A}{2} = 1-cosA$ và những hệ thức tương tự vào (5) ta được B.Đ.T sau :

$(1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C) \geqslant$
$\geqslant \cos A\cos B\cos C$; (6)

Từ (6), ta được :

$\cos A+\cos B+\cos C+\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A \geqslant 2\cos A\cos B\cos C+2(\cos A+\cos B+\cos C)-1$; (7)

Mặt khác, cũng từ (6) và (2), ta được :

$cosAcosBcosC \leqslant 8sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}$, hay là (vì cosA, cosB, cosC đều > 0) :

$\sqrt{2cosAcosBcosC} \leqslant$

$\leqslant 4sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} =$

$= cosA + cosB + cosC - 1$;

hay là :

$cosA + cosB + cosC \geqslant 1 + \sqrt{2cosAcosBcosC}$;

Từ đó ta được :

$2(cosA + cosB + cosC) - 1 + 2cosAcosBcosC \geqslant$
$\geqslant 1 + 2\sqrt{2cosAcosBcosC} + 2cosAcosBcosC$

hay là :

$2(cosA + cosB + cosC) - 1 + 2cosAcosBcosC \geqslant$
$\geqslant (1 + \sqrt{2cosAcosBcosC})^2$; (8)

– Bây giờ ta chứng tỏ rằng các vế trái của B.Đ.T (7) và B.Đ.T (*) cần chứng minh là bằng nhau. Thật vậy, trong ΔABC ta có :

$\cos A = -\cos(B + C) = \sin B\sin C - \cos B\cos C$,

hay là :

$\sin B\sin C = \cos A + \cos B\cos C$

và hai hệ thức tương tự. Cộng vế đối vế ba hệ thức này, ta được :

$\sin A\sin B + \sin B\sin C + \sin C\sin A = \cos A + \cos B + \cos C + \cos A\cos B + \cos B\cos C + \cos C\cos A$; (9)

– Cuối cùng, từ (9), (7) và (8) ta thu được B.Đ.T (*) cần tìm.

Dấu đẳng thức ở (*) xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC là đều.

Nhận xét :

1°) Nhiều bạn cho lời giải không gọn, trình bày không sáng sủa, mạch lạc.

2°) Một số bạn không chứng minh trực tiếp B.Đ.T lượng giác (*) mà chuyển sang chứng minh B.Đ.T tương đương, liên quan đến độ dài các cạnh a, b, c của tam giác và các bán kính R, r của các đường tròn ngoại và nội tiếp tam giác. Lời giải này không đẹp, phức tạp hơn lời giải thuần túy lượng giác. 3°) Bạn Nguyễn Khánh Trình, 11T$_1$, trường PTTH Hà nội – Amsterdam có nhận xét thêm là nếu không hạn chế ở tam giác nhọn thì ta có kết quả sau đây : Trong mọi tam giác ABC, ta có B.Đ.T

$\sin A\sin B + \sin B\sin C = \sin C\sin A \leqslant (\cos A + \cos B + \cos C)^2$

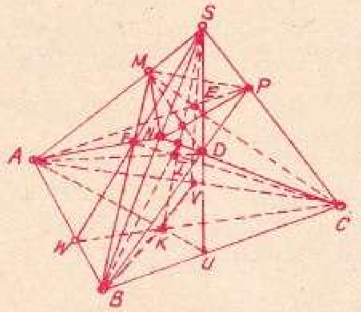
4°) Ngoài ba bạn nêu trên, các bạn sau đây có lời giải tốt : *Trần Hữu Lực*, 12T, PTNK **Quảng Bình** ; *Đặng Đức Hạnh*, 11T, trường Phan Bội Châu, **Nghệ An** ; *Nguyễn Minh Phương*, 12A PTTH chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ** ; *Trần Tuấn Anh*, 9T, Lê Quý Đôn, Nha Trang, **Khánh Hòa**.

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

Bài T10/241. *Giả sử M, N, P là ba điểm theo thứ tự lấy trên các cạnh SA, SB, SC của một tứ diện SABC. Gọi I là giao điểm của ba mặt phẳng (BCM), (CAN), (ABP) ; J là giao điểm của ba mặt phẳng (ANP), (BPM) và (CMN). Chứng minh rằng ba điểm S, I, J thẳng hàng và :*

$$\frac{JS}{JI} = 1 + \frac{MS}{MA} + \frac{NS}{NB} + \frac{PS}{PC}(*)$$

Lời giải 1 của *Phạm Hồng Nghĩa, 11A, Trần Cao Vân, Qui Nhơn,* **Bình Định**).



Gọi D, E, F lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng BP, CN ; CM, AP và AN, BM. Dễ thấy các đường thẳng giao tuyến AD, BE, CF của các cặp mặt phẳng (CAN), (ABP) ; (ABP), (BCM) ; (BCM), (CAN) đồng quy tại giao điểm I của ba mặt phẳng (BCM), (CAN), (ABP). Cũng vậy, các giao tuyến MD, NE và PF của các cặp mặt phẳng (BPM), (CMN) ; (CMN), (ANP) và (ANP), (BPM) đồng quy tại J.

Gọi U, V và W lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng SD, BC ; SE, CA và SF, AB (xem h.vẽ). Suy ra AU, BV và CW đồng quy tại một điểm K trên giao tuyến (SI) của ba mặt phẳng (SAD), (SBE) và (SCF), đồng thời K cũng nằm trên giao tuyến (SJ) của ba mặt phẳng (SMD), (SNE) và (SPF). Vậy bốn điểm S, I, J và K thẳng hàng (trên giao tuyến chung của hai bộ ba mặt phẳng nói trên).

– Để ý rằng ba điểm N, I, V thẳng hàng, áp dụng định lý Van Aubel vào hai tam giác SCA (với ba đường thẳng SV, CM, AP đồng quy ở E) và SBV (với ba đường thẳng SK, BE, VN đồng quy ở I) ta có các hệ thức sau :

$$\frac{PS}{PC} + \frac{MS}{MA} = \frac{ES}{EV} \text{ và } \frac{ES}{EV} + \frac{NS}{NB} = \frac{IS}{IK}$$

Từ đó suy ra :

$$\frac{MS}{MA} + \frac{NS}{NB} + \frac{PS}{PC} = \frac{IS}{IK} ;(1)$$

Mặt khác, lại có $(SIJK) = -1$ (tính chất điều hòa của tứ cạnh toàn phần có ba đường chéo là SI, NE và BV) ; suy ra :

$$\frac{KS}{KI} = \frac{JS}{JI} \text{ hay là : } \frac{JS}{JI} = 1 + \frac{IS}{IK} (2)$$

Từ (1) và (2) ta thu được hệ thức (*) cần tìm

Lời giải 2 (của *Nguyễn Tiến Mạnh*, 12A, PTNK Ngô Sĩ Liên, **Bắc Giang** và *Trần Đức Thuận*, 12T, PTNK **Quảng Bình**). Gọi $X = BP \cap CN$, $Y = CM \cap AP$ và $Z = AN \cap BM$; thế thì trong mp (BCM) có $I = BY \cap CZ$ và trong mp (ANP) có $J = NY \cap PZ$.

Đặt $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$ và $\overrightarrow{SM} = x\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{SN} = y\overrightarrow{NB}$, $\overrightarrow{SP} = z\overrightarrow{PC}$; thế thì ta được :

$$\overrightarrow{SM} = \frac{x}{1+x}\vec{a}, \overrightarrow{SN} = \frac{y}{1+y}\vec{b}, \overrightarrow{SP} = \frac{z}{1+z}\vec{c}$$

$(x > 0, y > 0, z > 0)$ Trong mp (SAB), $Z = (AN) \cap (BM)$ nên ta được :

$\overrightarrow{SZ} = \alpha\overrightarrow{SM} + (1-\alpha)\overrightarrow{SB} = \beta\overrightarrow{SN} + (1-\beta)\overrightarrow{SA}$

hay :

$$\frac{\alpha x}{1+x}\vec{a} + (1-\alpha)\vec{b} = \frac{\beta y}{1+y}\vec{b} + (1-\beta)\vec{a}$$

Vì $\vec{a} \not\parallel \vec{b}$ nên ta phải có :

$$\frac{\alpha x}{1+x} = 1 - \beta \text{ và } \frac{\beta y}{1+y} = 1 - \alpha$$

Từ đó ta được :

$$\overrightarrow{SZ} = \frac{x}{x+y+1}\overrightarrow{a} + \frac{y}{x+y+1}\overrightarrow{b}$$

Tương tự, ta được :

$$\overrightarrow{SX} = \frac{y}{y+z+1}\overrightarrow{b} + \frac{z}{y+z+1}\overrightarrow{c}$$

và $\overrightarrow{SY} = \frac{z}{z+x+1}\overrightarrow{c} + \frac{x}{z+x+1}\overrightarrow{a}$

Làm tương tự như trên với $I = BY \cap CZ$ và $J = NY \cap PZ$ và để ý rằng $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ không đồng phẳng, ta thu được :

$$\overrightarrow{SI} = \frac{1}{x+y+z+1}(x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} + z\overrightarrow{c})$$

$$\overrightarrow{SJ} = \frac{1}{x+y+z+2}(x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} + z\overrightarrow{c})$$

Suy ra :

$\overrightarrow{SJ} = \frac{x+y+z+1}{x+y+z+2}\overrightarrow{SI}$, hay là

$\overrightarrow{SJ} = (x+y+z+1)\overrightarrow{JI}$.

Từ đó ta đi đến kết luận :

– Ba điểm S, I, J thẳng hàng và

$$\frac{SJ}{JI} = \frac{IS}{JI} = 1 + \frac{MS}{MA} + \frac{NS}{NB} + \frac{PS}{PC}$$

Nhận xét :

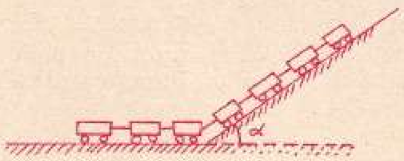
1°) Đa số các bạn sử dụng phương pháp tổng hợp để giải bài toán này, tuy không biết định lý Van Aubel. Thông thường các bạn sử dụng định lý Menelaus. Bạn nào chưa biết định lý này, có thể chứng minh không có gì khó khăn.

2°) Có một số không nhiều bạn sử dụng phương pháp véctơ, song tính toán cồng kềnh, không gọn lắm.

3°) Ngoài các bạn Nghĩa, Mạnh, Thuận, các bạn sau đây có lời giải tốt : *Đặng Đức Hạnh*, 11T, T. Phan Bội Châu, **Nghệ An** ; *Trần Hữu Lực*, 12T PTNK Đồng Hới, **Quảng Bình** ; *Nguyễn Ngọc Hải*, trường Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng**.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài L_1/241. *Một tàu hỏa gồm nhiều toa đi lên dồi nghiêng một góc α khi chuyển động theo quán tính. Khi đoàn tàu hoàn toàn dừng lại, một nửa chiều dài của đoàn tàu ở trên dồi. (xem hình). Thời gian từ lúc tàu bắt đầu đi lên dồi đến lúc dừng tàu là bao nhiêu ? Chiều dài đoàn tàu là L và bỏ qua ma sát.*



Hướng dẫn giải. Gọi M là khối lượng toàn bộ đoàn tàu, x là chiều dài phần đoàn tàu đi lên đồi (khối lượng phần này là $\frac{Mx}{L}$). Chọn trục tọa độ Ox, với gốc O ở chân đồi, chiều dương hướng lên trên. Áp dụng định luật II Niutơn

$Ma = -\frac{Mx}{L}g\sin\alpha$, suy ra $x'' + \frac{g\sin\alpha}{L}x = 0$.

Đây là phương trình dao động điều hòa với chu kì $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g\sin\alpha}}$

Thời gian chuyển động t của đoàn tàu đến lúc dừng lại bằng một phần tư chu kì dao động, nghĩa là

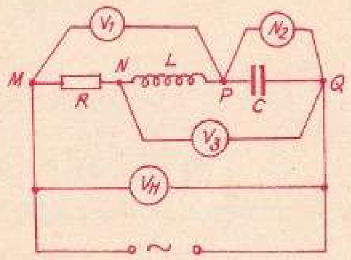
$$t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{L}{g\sin\alpha}}$$

Nhận xét. Các em có lời giải đúng : *Nguyễn Thành Hưng*, 12L, chuyên Lê Khiết, **Quảng Ngãi** ; *Nguyễn Khắc Chiến*, 12A, chuyên **Vĩnh Phúc** ; *Trần Anh Tuấn*, 11A$_1$, PTTH chuyên **Trà Vinh** ; *Đào Anh Tuấn*, 12A chuyên **Vĩnh Phúc** ; *Nguyễn Trọng Tuấn*, 12A$_1$, PTTH chuyên **Yên Bái** ; *Nguyễn Quang Tường*, 12B, PTTH Thăng Long, **Hà Nội** ; *Hoàng Tuấn Vinh* 11F, PTTH Lam Sơn, **Thanh Hóa** ; *Lê Đức Dũng*, 12CL, PTTHNK, **Quảng Bình** ; *Trương Văn Nam* ; 11C1, PTTH Hùng Vương, **TP Hồ Chí Minh** ; *Nguyễn Đức Linh* PTTH chuyên Thăng Long, Đà Lạt, **Lâm Đồng** ; *Phạm Đình Vịnh*, chuyên Hùng Vương, 12CL, **Phú Thọ** ; *Đỗ Thanh Hải*, 12 Tin, THCB Sơn Tây, **Hà Tây** ; *Nguyễn Thái Hà*, 12A1, PTTH chuyên **Yên Bái**.

MAI ANH

Bài L2/241.

Cho mạch điện xoay chiều RLC không phân nhánh như hình vẽ, trong đó các vôn kế V_1, V_2, V_3 và V_4 lần lượt trỏ các giá trị U_1, U_2, U_3 và U_4. Tổng trở của mỗi vôn kế là vô cùng lớn. Tổng trở của các dây nối và điện trở thuần của cuộn cảm L coi là nhỏ không đáng kể. Cho biết $Z_C > Z_L$ (Z_C là dung kháng của tụ điện C và Z_L là cảm kháng của cuộn cảm L. Hãy chứng minh rằng, nếu $U_4^2 = U_2 . U_3$ thì $U_2^2 = U_1^2 + U_4^2$.



Hướng dẫn giải. Có thể giải bằng phương pháp giản đồ véctơ hoặc bằng cách áp dụng định luật Ôm cho mạch điện xoay chiều. Hầu hết các bài gửi về đều **giải** bằng phương pháp giản đồ véctơ. Dưới đây là hướng dẫn giải bằng cách áp dụng định luật Ôm.

Từ $U_4^2 = U_2 . U_3$, ta có

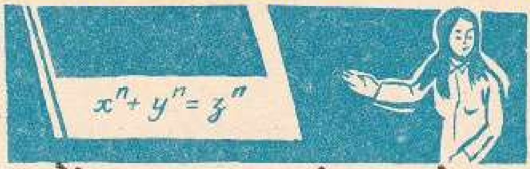
$U_R^2 + (U_C - U_L)^2 = U_C(U_C - U_L)$ (vì $U_C > U_L$ do $Z_C > Z_L$) ; suy ra $U_CU_L = U_R^2 + U_L^2$ (1).

Do đó, với chú ý đến (1),

$$U_1^2 + U_4^2 = (U_R^2 + U_L^2) + [U_R^2 + (U_C - U_L)^2] = U_C^2 = U_2^2 \text{ (đpcm)}.$$

Nhận xét. Các bài gửi về đều có lời giải đúng bằng một trong hai phương pháp đã nêu. Có 2 em đã giải bằng cả 2 phương pháp : *Lê Duy Diễn*, 12T, PTTH Lam Sơn, **Thanh Hóa** ; *Nguyễn Hiệp Đồng*, 11a, PTTH Quỳnh Thọ, Quỳnh Phụ, **Thái Bình**.

MAI ANH



ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/245 : Cho $x_o = 1$, xét dãy số :

$$x_o, x_1 = \frac{\sqrt{3} + x_o}{1 - \sqrt{3}x_o}, x_2 = \frac{\sqrt{3} + x_1}{1 - \sqrt{3}x_1}, \dots,$$

$$x_n = \frac{\sqrt{3} + x_{n-1}}{1 - \sqrt{3}x_{n-1}}$$

Tính x_{1997}.

NGUYỄN TRỌNG BÁ
(Hà Nội)

Bài T2/245 : Tìm nghiệm nguyên của phương trình :
$x^2(y - 5) - xy = x - y + 1$

NGUYỄN HUY HOÀNG
(Hà Nội)

Bài T3/245 : Tìm các số nguyên (a, b, c, d) thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} ac - 3bd = 4 \\ ad + bc = 3 \end{cases}$$

NGUYỄN BÁ DANG
(Hải Dương)

Bài T4/245 : AD, BE, CF là ba đường cao của tam giác ABC. G, P là các hình chiếu của D lên AB, AC ; I, K là các hình chiếu của E lên AB, BC ; M, N là các hình chiếu của F lên AC, BC. Chứng minh 6 điểm G, P, I, K, M, N cùng nằm trên một đường tròn.

TRẦN XUÂN UY
(Nam Định)

Bài T5/245 : Cho tứ giác $ABCD$, gọi S là diện tích của tứ giác này. Chứng minh rằng :

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 \geq$$
$$\geq 2\sqrt{3}S + \frac{1}{2}(AC^2 - BD^2)$$

NGUYỄN MINH HÀ
(Hà Nội)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/245 Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định như sau :

$$x_o = a,\ x_1 = b,\ x_{n+1} = 5x_n^2 - 3x_{n-1}$$
với $n > 1$

Chứng minh rằng với mọi cách chọn các số nguyên a, b thì dãy trên hoặc không có số hạng nào chia hết cho *1997* hoặc có vô số số hạng chia hết cho *1997*.

NGUYỄN ANH DŨNG
(Thanh Hóa)

Bài T7/245 : Cho các số tự nhiên m, n, p thỏa mãn $p \leq m + n$. Chứng minh rằng :

$$(m + n - \beta)!\,p!\sum_{i=\alpha}^{\beta} C_n^i C_m^{p-i} \text{ chia hết cho } (m + n - \alpha)!$$

với $\alpha = max\{0, p - m\}$
và $\beta = \min\{p, n\}$

ĐOÀN KIM SANG
(Yên Bái)

Bài T8/245 : Chứng minh rằng :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(2k-1)} < 2ln2 \text{ với } n \in N^*$$

ĐOÀN QUANG MẠNH
(Hải Phòng)

Bài T9/245 : Tồn tại hay không một hình lục giác $ABCDEF$ sao cho ba đường chéo AD, BE, CF đồng quy, đồng thời các đường thẳng AD, BC, FE đồng quy tại điểm I ; các đường thẳng BE, CD, AF đồng quy tại điểm J ; các đường thẳng CF, DE, BA đồng quy tại điểm K sao cho ba điểm I, J, K thẳng hàng ? Tại sao ?

ĐẶNG KỲ PHONG
(Hà Nội)

Bài T10/245 : Cho tứ diện gần đều $ABCD$ ($BC = DA = a$; $AC = BD = b$, $AB = DC = c$). Gọi R, r lần lượt là bán kính các mặt cầu ngoại tiếp, nội tiếp tứ diện đó. Gọi V là thể tích của tứ diện. Chứng minh rằng :

$$V \leq \frac{\sqrt{2}\ abc \cdot r}{4R}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

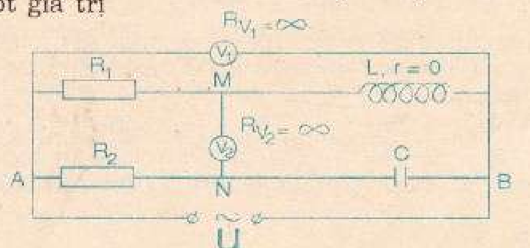
HỒ QUANG VINH
(Nghệ An)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/245 : Một cầu thủ ghi bàn thắng bằng một quả phạt đền 11 m. Bóng bay sát xà ngang vào khung thành. Xà ngang cao $h = 2{,}5\ m$, khối lượng quả bóng $m = 0{,}5$ kg. Bỏ qua sức cản của không khí. Hỏi phải truyền cho quả bóng một năng lượng cần thiết bằng bao nhiêu ? Lấy $g = 10\ m/s^2$.

(OLYMPIC LIÊN XÔ *1985*)
TÔ GIANG (sưu tầm)

L2/245 : Cho mạch điện xoay chiều như hình bên. Hãy tìm công thức liên hệ giữa R_1, R_2, L, C sao cho hai vôn kế V_1 và V_2 chỉ cùng một giá trị



PHAN TUẤN KHANH
(Hà Nội)

problems in this issue

POR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/245. Let $x_o = 1$; consider the sequence

$$x_o, x_1 = \frac{\sqrt{3} + x_o}{1 - \sqrt{3}\,x_o};$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{3} + x_1}{1 - \sqrt{3}\,x_1}, \ldots, x_n = \frac{\sqrt{3} + x_{n-1}}{1 - \sqrt{3}\,x_{n-1}}.$$

Calculate x_{1997}.

T2/245. Find integer -solutions of the equation

$$x^2(y-5) - xy = x - y + 1$$

T3/245. Find the integers (a, b, c, d) satisfying the system of equations :

$$\begin{cases} ac - 3bd = 4 \\ ad + bc = 3 \end{cases}$$

T4/245. Let AD, BE ; CF be the altitudes of a triangle ABC. Let G and P, I and K, M and N be respectively the orthogonal projections of D on AB and AC , of E on AB and BC, of F on AC and BC. Prove that the six points G, P, I, K, M, N lie on a same circle

T5/245. Let S be the area of a quadrilateral $ABCD$.

Prove that

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 \geq$$
$$\geq 2\sqrt{3}\,S + \frac{1}{2}(AC^2 - BD^2)$$

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS.

T6/245. The sequence of numbers $\{x_n\}$ is defined by :

$x_o = a$, $x_1 = b$,

$x_{n+1} = 5x_2^2 - 3x_{n-1}$ for $n \geq 1$ Prove that, for any choice of integers a, b, this sequence has no term divisible by 1997 or has an infinite numbers of terms divisible by 1997

T7/245 . The whole numbers m, n, p satisfy the relation $p \leq m + n$. Prove that the number

$$(m + n - \beta)\ !\ p\ ! \sum_{i=\alpha}^{\beta} C_n^i C_m^{p-i}$$

is divisible by $(m + n - \alpha)$! where $\alpha = \max\{0\ ;\ p - m\}$ and $\beta = \min\{p, n\}$

T8/245 Prove that for every $n \in N^*$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(2k-1)} < 2ln2$$

T9/245 Does there exist a hexagon $ABCDEF$ satisfying simultaneously the following conditions ; the three diagonals AB, BE, CF are concurrent, the three lines AB, BC, EF pass through a same point I , the three lines BE, CD, AF pass through a same point J, the three lines CF, DE, BA pass through a same point K so that I, J, K are collinear ? Why is it ?

T10/245 Let be given a equifaced tetrahedron $ABCD$ ($BC = DA = a$; $AC = BD = b$, $AB = DC = c$).

Let R ond r be respectively the radii of its circumscribed sphere and its scribed sphere and let V be the volume of the tetrahedron.

Prove that $V \leq \dfrac{\sqrt{2}\,abcr}{4}R$

When does equality occur ?

BÀI TOÁN WARING *(Tiếp theo trang 10)*

Trong trường hợp tổng quát Waring đã đưa ra giả thuyết mọi số tự nhiên n đều là tổng của $2^k + q - 2$ lũy thừa bậc k của của các số nhiên, trong đó q là số tự nhiên lớn nhất nhỏ hơn hay bằng $(3/2)^k$. Do số $n = 2^k q + 1$ cần đến đúng từng ấy số lũy thừa bậc k để biểu diễn nên giả thuyết này có thể phát biểu như sau : $g(k) = 2^k + q - 2$. Nếu $k = 2, 3, 4, 5$ thì $q = 2, 3, 5, 7$ và do đó $2^k + q - 2 = 4, 9, 19, 37$. Như ta đã thấy ở trên thì giả thuyết đã được chứng minh cho $k = 2, 3$. Đối với $k = 4, 5$ người ta mới chỉ chứng minh được rằng.

$$g(4) \leq 35,$$
$$g(5) \geq 54.$$

Nếu ai trong chúng ta có thể làm giảm các số 35 và 54 chặn trên $g(4)$ và $g(5)$ (dù chỉ là một đơn vị) thì đó cũng là một bước tiến lớn vì các chặn trên này đã tồn tại khá lâu mặc sức mọi cuộc tấn công. Đối với $k \geq 6$ thì người ta đã chỉ ra được rằng là giả thuyết trên sẽ đúng nếu bất đẳng thức sau đúng :

$$(3/2)^k - q < 1 - (q/2^k).$$

Hiện nay bất đẳng thức này đã được chứng minh đúng cho $k \leq 200000$. Như vậy giả thuyết trên đúng với k từ 6 cho đến 200000 . Người ta cũng chưa tìm thấy một số k nào không thỏa mãn bất đẳng thức trên.

Bất đẳng thức trên tuy đơn giản nhưng lại là một thách thức lớn đối với những người làm toán. Năm 1957 nhà toán học Đức Mahler đã chứng minh được rằng chỉ có thể có một số hữu hạn các số nguyên dương k không thỏa mãn bất đẳng thức trên. Điều này làm chúng ta liên tưởng đến quá trình giải quyết giả thuyết Fermat nói rằng phương trình.

$$x^k + y^k = z^k$$

không có nghiệm nguyên dương nếu $k > 2$. Trước khi giả thuyết Fermat được giải quyết hoàn toàn năm 1994 bởi nhà toán học Anh Wiles thì nhà toán học Đức Faltings đã chứng minh rằng phương trình trên chỉ có thể có một số hữu hạn các nghiệm nguyên. Kết quả này đã đem lại vinh quang cho Faltings được nhận giải thưởng Fields được coi như giải Nobel cho các nhà toán học.

BÀI TOÁN WARING

NGÔ VIỆT TRUNG
(Hà Nội)

Nhiều người trong chúng ta đã biết đến Định lý Lagrange nói rằng mọi số tự nhiên đều là tổng của 4 số bình phương. Có thể xem chứng minh định lý này trong bài báo "Định lý Euler–Lagrange về tổng của bốn bình phương "của Trần Xuân Đài, Tạp chí *Toán học tuổi trẻ* số 2/1997, hay trong cuốn sách "Toán học và những suy luận có lý" của Polya do Nhà xuất bản giáo dục in năm 1995.

Cũng giống như nhiều kết quả số cổ điển khác, Định lý Lagrange cũng có một nguồn gốc lâu đời. Bachet (người đã viết cuốn sách đầu tiên về giải trí toán học) khi biên tập cuốn sách "Số học" của nhà toán học cổ đại Diophantus đã phát hiện ra rằng cuốn sách này có đề cập đến bài toán cần bao nhiêu số bình phương để biểu diễn một số tự nhiên. Ông ta đã thử biểu diễn các số nhỏ hơn 325 và qua đó đã khẳng định rằng các số tự nhiên đều là tổng của nhiều nhất 4 số bình phương (không có chứng minh). Như Polya bình luận thì Bachet đã gặp may vì điều khẳng định này đúng. Lịch sử toán học đã cho thấy rất nhiều các quy luật số học nổi tiếng chỉ đúng cho các số tự nhiên nhỏ nhưng lại không lại không đúng cho các số tự nhiên thật lớn.

Người đầu tiên chứng minh được điều khẳng định trên của Bachet là nhà toán học vĩ đại Fermat. Trong một bức thư gửi cho Pascal năm 1638 Fermat đã mô tả một cách chứng minh cho định lý trên. Sau đó gần 150 năm, nhà toán học Pháp Lagrange đã sử dụng một số kết quả của Euler để đưa ra một chứng minh cực kỳ sáng sủa như chúng ta đã biết qua bài báo trong tạp chí *Toán học tuổi trẻ* số 2/1997.

Định lý Lagrange đã dẫn đến việc xét bài toán tổng quát là *cần đến bao nhiêu lũy thừa bậc k cho trước để biểu diễn một số tự nhiên.* Bài toán này được đề cập đến lần đầu tiên bởi Waring, một nhà toán học Anh cùng thời với Lagrange. Ông này cho rằng mọi số tự nhiên đều có biểu diễn thành tổng của một số hữu hạn cho trước các lũy thừa bậc k của các số tự nhiên (lũy thừa bậc 2 là các số bình phương và lũy thừa bậc 3 là các số lập phương). Lại theo cách nói của Polya thì Waring đã gặp may vì điều này sau đó đã được nhà toán học Đức Hilbert, người được coi là cha đẻ của nền toán học hiện đại, chứng minh. Tuy nhiên vấn đề là phải xác định số $g(k)$ nhỏ nhất sao cho mọi số tự nhiên đều có thể biểu diễn thành tổng của $g(k)$ lũy thừa bậc k của các số tự nhiên. Ví dụ như ta có $g(2) = 4$ theo Định lý Lagrange.

Trước tiên ta hãy xét trường hợp $k = 3$. Ba số lập phương ban đầu là 1, 8, 27. Ta có thể thấy ngay rằng 7, số cuối cùng trước 8, chỉ có thể là tổng của các số 1. Tương tự như vậy.

$$15 = 8 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

cần đến 8 số lượng, và

$$23 = 8 + 8 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

cần đến 9 số lập phương. Ta có thể dự đoán là $31 = 3 \,.\, 8 + 7$ cần đến 10 số lập phương. Tuy nhiên, 31 lớn hơn 27 là một số lập phương mới. Do đó

$$31 = 27 + 1 + 1 + 1 + 1$$

chỉ cần đến 5 số lập phương. Nếu ta chịu khó thử tiếp thì ta sẽ thấy số đầu tiên sau 23 cần đến 9 số lập phương là 239. Từ 240 đến 12000 không còn số nào cần đến 9 số lập phương nữa. Đến đây ta có thể dự đoán rằng mọi số tự nhiên đều là tổng của nhiều nhất 9 số lập phương, có nghĩa là $g(3) = 9$. Dự đoán này được chứng minh năm 1909 bởi nhà toán học Đức Wieferich. Trước đó, một nhà toán học Đức khác là Landau đã chứng minh được rằng bắt đầu từ một số nào đó trở đi thì mọi số tự nhiên đều là tổng của 8 số lập phương.

Cần phải chú ý rằng là nếu ta cho phép sử dụng các số nguyên âm thì mọi số nguyên đều là tổng của 5 số lập phương. Thật vậy, mọi số nguyên n để có thể viết dưới dạng

$$n = n^3 + (k-1)^3 + (k-1)^3 + (-k)^3 + (k+1)^3$$

với $k = (n - n^3)/6$.

Bây giờ ta sẽ xét trường hợp $k = 4$. Có thể thử để thấy rằng mọi số tự nhiên có lẽ đều là tổng của 19 số tứ phương (lũy thừa bậc bốn). Số tự nhiên đầu tiên cần đến đúng 19 số tứ phương là $79 = 4 \,.\, 16 + 15 \,.\, 1$. Nhiều nhà toán học đã đổ mồ hôi để chứng minh điều trên mà không được. Năm 1925 hai nhà toán học Anh Hardy và Littlewood đã chứng minh rằng có một số tự nhiên N sao cho mọi số tự nhiên lớn hơn N đều là tổng của 19 số tứ phương. Vấn đề còn lại là phải thử xem các số tự nhiên nhỏ hơn N có thể biểu diễn bởi 19 số tứ phương không. Nhưng số N này lại lớn đến mức là các máy tính hiện nay không đủ sức để giải quyết bài toán cụ thể này.

(Xem tiếp trang 9)

KÌ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HỒ CHÍ MINH
NĂM HỌC 1997 - 1998 (ĐỢT 1)

Khối : A
Thời gian làm bài : 180 phút

Câu 1 :

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số

$$y = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1}$$

2. Tìm tất cả các cặp điểm M_1, M_2 ở trên (C) và đối xứng nhau qua điểm $I\left(0, \frac{5}{2}\right)$.

Câu 2 : Cho phương trình

$$4\cos^5 x \,.\, \sin x - 4\sin^5 x \,.\, \cos x = \sin^2 4x + m. \quad (1)$$

1. Biết rằng $x = \pi$ là một nghiệm của (1). Hãy giải phương trình (1) trong trường hợp đó.

2. Cho biết $x = \frac{-\pi}{8}$ là một nghiệm của (1). Hãy tìm tất cả các nghiệm của phương trình (1) thỏa mãn :

$$x^4 - 3x^2 + 2 < 0.$$

Câu 3 : Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = m \\ (x+1)y^2 + xy = m(y + 2) \end{cases} \quad (2)$$

1. Giải hệ (2) khi m = 4.

2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ (2) có nhiều hơn hai nghiệm.

Câu 4 : 1. Tính $I = \int_0^{1/2} \frac{x^4}{x^2 - 1}\,dx.$

2. Đặt $I(t) = \int_0^t \frac{tg^4 x}{\cos 2x}\,dx$, $\left(0 < t < \frac{\pi}{4}\right)$.

Tính I(t) và chứng minh bất đẳng thức

$$tg\left(t + \frac{\pi}{4}\right.0 > e^{\frac{2}{3}\left(tg^3 t + 3tgt\right)},$$

với $\quad 0 < t < \frac{\pi}{4}.$

Câu 5 : Thí sinh chọn một trong hai câu 5.A hoặc Câu 5B sau đây

Câu 5.A : Cho parabol (P) : $y = \frac{x^2}{2}$ và điểm $A\left(\frac{15}{8}, \frac{27}{8}\right)$.

1. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $M_1\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ và vuông góc với tiếp tuyến của (P) tại M_1. 2. Tìm tất cả các điểm M ở trên *(P)* sao cho AM vuông góc với tiếp tuyến của *(P)* tại M.

Câu 5.B : Cho hình chóp $ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh $SA \perp (ABCD)$ và có độ dài $SA = a$. Một mặt phẳng đi qua CD cắt các cạnh SA, SB lần lượt ở M, N. Đặt $AM = x$.

1. Tứ giác $MNCD$ là hình gì ? Tính diện tích tứ giác $MNCD$ theo a, x.

2. Xác định giá trị của x để thể tích của hình chóp $SMNCD$ bằng $\frac{2}{9}$ lần thể tích hình chóp $SABCD$.

Chú ý : Đề thi dành cho khối B chỉ thay đổi câu 4 ở đề trên bởi câu sau đây :

Tính các tích phân :

1) $I = \int_0^1 \frac{x^2}{x + 1}\,dx.$

2) $J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 3x}{\cos x + 1}\,dx.$

ĐÁP ÁN

Câu 1 :

1) Khảo sát và vẽ đồ thị *(C)*

$$y = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1} = x + 2 + \frac{4}{x - 1}$$

– Miền xác định **R** \ {1}

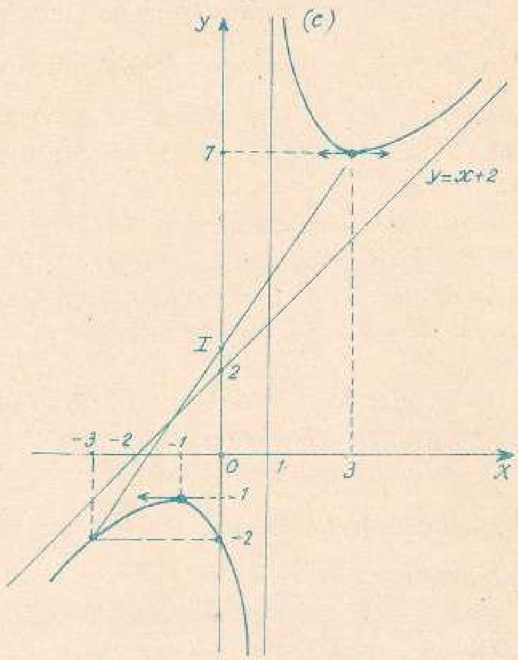
– Tiệm cận : đứng $x = 1$, xiên $y = x + 2$

– Đạo hàm :

$$y' = 1 - \frac{4}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$$

– Bảng biến thiên và đồ thị :

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	7	↗	$+\infty$



2) Coi $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2) \in (C)$

Ta có :

$$y_1 = x_1 + 2 + \frac{4}{x_1 - 1}$$

$$y_2 = x_2 + 2 + \frac{4}{x_2 - 1}$$

$$y_1 + y_2 = x_1 + x_2 + 4 + 4\left(\frac{1}{x_1 - 1} + \frac{1}{x_2 - 1}\right).$$

$$= x_1 + x_2 + 4 + 4\frac{x_1 + x_2 - 2}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)}$$

Khi đó M_1, M_2 đối xứng qua $I \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2x_1 = 0 \\ y_1 + y_2 = sy_1 = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 0 + 4 + 4 . \frac{0 - 2}{(x_1 - 1)(-x_1 - 1)} = 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{x_1^2 - 1} = 1 \Leftrightarrow x_1 = \pm 3$$

$x_1 = 3 \Rightarrow y_1 = 7$

$x3_1 = -3 \equiv x_2 \Rightarrow y_1 = -2 = y_2$

Kết luận : Chỉ có 2 điểm $M_1(3, 7)$, $M_2(-3, -2)$ ở trên (c) đối xứng với nhau qua I.

Câu 2 : Biến đổi vế trái của phương trình (1)

$4\cos^5x \,.\, \sin x - 4\sin^5x \,.\, \cos x =$

$= 4\cos x\sin x \,.\, (\cos^4x - \sin^4x).$

$= 4\cos x.\sin x.(\cos^2x - \sin^2x) \times$

$\times (\cos^2x + \sin^2x) = \sin 4x$

$\frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x = 1$

Khi đó phương trình $\Leftrightarrow$

$\sin 4x = \sin^2 4x + m$ (1')

1) $x = \pi$ là một nghiệm của (1') $\Leftrightarrow m = 0$

Giải phương trình với $m = 0$:

$\sin^2 4x - \sin 4x = 0$

$\Leftrightarrow \sin 4x = 0$ hay $\sin 4x = 1$

$\Leftrightarrow \quad x = kp/4$ hay $x = \frac{\pi}{8} + m\frac{\pi}{2}$

(m, k nguyên)

2) $x = -\pi/8$ là một nghiệm của (1')

$\Leftrightarrow m = -2$

Giải phương trình với $m = -2$:

$\sin^2 4x - \sin 4x - 2 = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \sin 4x = -1 \quad \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + k\pi/2 \\ \textit{hay } \sin 4x = 2 \ (\textit{loại}) \end{array}\right.$$

Chọn nghiệm thỏa điều kiện :

$x^4 - 3x^2 + 2 < 0$

Ta có $x^4 - 3x^2 + 2 < 0$

$$\Leftrightarrow 1 < x D^2 < 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 < x < \sqrt{2} \\ \textit{hay} \\ -\sqrt{2} < x < -1 \end{array}\right.$$

• $-\sqrt{2} < x < -1 \Leftrightarrow$

$-\sqrt{2} - \frac{\pi}{8} + k\pi/2 < -1$

$$\Leftrightarrow -\frac{2\sqrt{2}}{\pi} + \frac{1}{4} < k < -\frac{2}{\pi} + \frac{1}{4}$$

$\qquad - 0,65 \qquad\qquad - 0,38$

(không có số nguyên k nào thỏa

• $1 x < \sqrt{2} \Leftrightarrow 1 < -\frac{\pi}{8} + k\pi/2 < \sqrt{2}\}$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\pi} + \frac{1}{4} < k < \frac{2\sqrt{2}}{\pi} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow k = 1$$

$\qquad 0,88 \qquad\qquad 1,15$

Vậy chỉ có một nghiệm thỏa :

$$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{8}$$

Câu 3 :

1) Giải hệ khi $m = 4$:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ (x+1)y^2 + xy = 4(y+2) \end{cases}$$

Thế $x = 4 - y$ vào phương trình cuối :

$(5 - y)y^2 + (4 - y)y = 4(y + 2$

$\Leftrightarrow y^3 - 4y^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow y = 2$ hay $y = 1 \pm \sqrt{5}$.

Vậy hệ có 3 nghiệm :

$(x, y) = (2, 2)$; $(3 + \sqrt{5}, 1 - \sqrt{5})$; $(3 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5})$

2) Tìm m để hệ có hơn hai nghiệm :

$$\begin{cases} x + y = m \\ (x+1)y^2 + xy = m(y+2) \end{cases}$$

Thế $x = m - y$ vào phương trình cuối :

$(m + 1 - y)y^2 + (m - y)y = m(y + 2)$

$\Leftrightarrow f(y) \equiv y^3 - my^2 + 2m = 0.$

Điều kiện bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình $f(y) = 0$ phải có 3 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} f'(y) = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt } y_1, y_2 \\ f(y_1) \cdot f(y_2) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ f(0)f(\frac{2m}{3}) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 2m(-\frac{4m^3}{27} + 2m) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow |m| > \sqrt{\frac{27}{2}}$$

Câu 4 (Dành cho khối A)

1) Tính $I = \int_o^{1/2} \frac{x^4}{x^2 - 1}dx$

Ta có : $\frac{x^4}{x^2 - 1} = x^2 + 1 + \frac{1}{x^2 - 1}$

Suy ra $I = \left[\frac{x^3}{3} + x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right]_o^{1/2} =$

$= \frac{1}{24} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}$

Vậy $I = \frac{13}{24} - \frac{1}{2}\ln 3$

2) Tính $I(t) = \int_o^t \frac{tg^4x}{\cos 2x}dx$ và chứng minh

$tg(t + \frac{\pi}{4}) > e^{\frac{2}{3}(tg^3t + 3tgt)}$, $(0 < t < \frac{\pi}{4})$.

Ta viết

$$I(t) = \int_0^t \frac{tg^4x}{1 - tg^2x} \cdot \frac{dx}{\cos^2x}.$$

Đặt $u = tgx$, ta có : $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow u = 0 \\ x = t \Rightarrow u = tgt \end{cases}$

Suy ra :

$$I(t) = \int_0^{tgt} \frac{u^4}{1 - u^2}du =$$

$$= -\left[\frac{u^3}{3} + u + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\right]_o^{tgt} =$$

$$= -\frac{1}{3}tg^3t - tgt - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{tgt - 1}{tgt + 1}\right|$$

Vậy :

$$I(t) = -\frac{1}{3}tg^3t - tgt + \frac{1}{2}\ln(tg(t + \frac{\pi}{4}))$$

Vì $\frac{tg^4}{\cos 2x} > 0$ khi $0 < x < t < \frac{\pi}{4}$

nên $I(t) > 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + \ln(tg(t + \frac{\pi}{4})) > \frac{1}{3}tg^3t + tgt$$

$$\Rightarrow tg(t + \frac{\pi}{4}) > e^{\frac{2}{3}(tg^3t + 3tgt)}$$

Câu 4 (Dành cho khối B)

1) Tính $I = \int_0^1 \frac{x^2}{x + 1}dx$

Ta có

$\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1} \Rightarrow$

$I = \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln|x + 1|\right]_o^1 =$

$= \frac{1}{2} - 1 + \ln 2$

Vậy $I = -\frac{1}{2} + \ln 2$

2) Tính $J = \int_o^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{\cos x + 1}dx$

Ta viết

$J = \int_0 to\pi/2 \frac{3\sin x - 4\sin^3x}{\cos x + 1}dx =$

$$= \int_o^{\pi/2} \frac{(1-4\cos^2x)(-\sin x)}{\cos x + 1}dx$$

Đặt $u = \cos x$, $\begin{cases} x = o \Rightarrow u = 1 \\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 0 \end{cases}$

Suy ra :

$$J = \int_0^1 \frac{4u^2-1}{u+1}du = 4I - \int_0^1 \frac{du}{u+1}$$

$$= 4\left(-\frac{1}{2} + \ln 2\right) - \Big[\ln|u+1|\Big]_0^1$$

Vậy : $I = -2 + 3\ln 2$

Câu 5 : (Phần tự chọn của thí sinh ở **câu 5A** hoặc **câu 5B D)**)

Câu 5A

1) Ta có : $M_1 \in (P)$, hệ số góc của tiếp tuyến của (P) tại M_1 là :

$y' = x_1 = -1$

và do đó hệ số góc của đường thẳng (d) vuông góc với tiếp tuyến của (P) tại M_1 là :

$\frac{-1}{y'_1} = 1$

Vậy phương trình của (d) :

$$y - \frac{1}{2} = 1.(x+1) \text{ hay } y = x + \frac{3}{2}$$

2) Giả sử $M_0\left(x_0, \frac{x_0^2}{2}\right) \in (P)$ sao cho đường thẳng (Δ) đi qua A và M_0 đồng thời vuông góc với tiếp tuyến (Δ') của (P) tại M_0.

Nếu $x_0 = 0$ thì $(\Delta) \equiv Oy$ không đi qua A. Vậy $x_0 \neq 0$

Hệ số góc của (Δ') là $y'_0 = x_0$. Do $(\Delta) \perp (\Delta')$ nên hệ số góc của (Δ) là $-1/x_0$

Phương trình của (Δ) :

$$y - \frac{x_0^2}{2} = \frac{-1}{x_0}(x - x_0)$$

Vì (Δ) đi qua $A\left(\frac{15}{8}, \frac{27}{8}\right)$ nên

$$\frac{27}{8} - x_0^2 = \frac{-1}{x_0}\left(\frac{15}{8} - x_0\right)$$

$$\Leftrightarrow 4x_0^3 - 19x_0 - 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_0+1)(4x_0^2 - 4x_0 - 15) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_0 = 01 \text{ hay } x = 5/2 \text{ hay } x_{0d} = -3/2$$

Vậy chỉ có 3 điểm trên (P) thỏa điều kiện của bài toán là :

$$M(-1, 1/2),\ M_2\left(5/2, \frac{25}{8}\right),\ M_3\ (-3/2, 9/8)$$

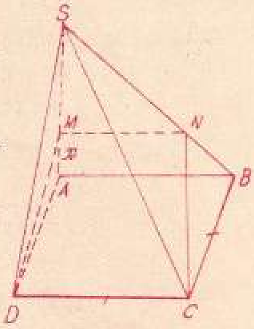
Câu 5B :

1) Tứ giác $MNCD$ hình gì ? Tính S_{MNCD}

$AB \,//\, CD \Rightarrow MN \,//\, AB \,//\, CD$

$CD \perp (SAD) \Rightarrow MN \perp (SAD)$

$\Rightarrow MN, CD\, MD$



Vậy $MNCD$ là hình thang vuông tại M, D.

$$S_{MNCD} = MD.\frac{MN + CD}{2} =$$

$$= \sqrt{a^2 + x^2}\,.\left(\frac{a - x + a}{2}\right)$$

Vậy :

$$S_{MNCD} = \frac{1}{2}(2a - x)\sqrt{a^2 + x^2}$$

2) Xác định x để :

$$V_{MNCD} = \frac{2}{9}V_{SABCD}$$

$$V_{SMNC} = \left(\frac{a - X}{a}\right)^2 V_{SABC} = \frac{a(a-x)^2}{6}$$

$$V_{SCDM} = \left(\frac{a-x}{a}\right)V_{SCDA} = \frac{a^2(a-x)}{67}$$

$$\Rightarrow V_{SMNCD} = \frac{a(a-x)^2}{6} + \frac{a(a+x)}{6} =$$

$$= \frac{1}{6}a(a-x)(2a-x)$$

$$V_{SMNCD} = \frac{2}{9}V_{SABCD} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6}a(a-x)(2a-x) = \frac{2}{9}\cdot\frac{a^3}{3}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3ax + \frac{14}{9}a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2a/3 \\ x = 7a/3 \ (loại) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2a}{3}$$

Thang điểm :

Câu 1	: 2 điểm
Câu 2	: 2 điểm
Câu 3	: 2 điểm
Câu 4(A)	: 2 điểm
Câu 4(B)	: 2 điểm
Câu 5(A)	: 2 điểm
Câu 5(B)	: 2 điểm

GIẢI TOÁN HÌNH KHÔNG GIAN
BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG VÀ MẶT

VŨ ĐÌNH HOÀNG
(Hà Nội)

I. Một số kiến thức cơ bản

1. Liên quan giữa cặp vectơ chỉ phương và pháp vectơ của mặt phẳng (α)

Giả sử $\overrightarrow{a_1} = (x_1, y_1, z_1)$ $\overrightarrow{a_2} = (x_2, y_2, z_2)$ là cặp vectơ chỉ phương và $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$ là pháp vectơ của (α). Thế thì : $A = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}$

$$B = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} ; \quad C = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \qquad (1)$$

(chú ý là $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}$ *và* $\overrightarrow{n} \neq \overrightarrow{0}$)

2. Điều kiện để hai điểm khác phía đối với một mặt phẳng (α)

Định lí : *Cho (α) có phương trình*

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$(A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$ cần và đủ để hai điểm $M(x_1, y_1, z_1)$ và $N(x_2, y_2, z_2)$ ở khác phía đối với mặt phẳng (α) là $f(M) . f(N) < 0$ (2). (Trong đó : $f(M) = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$).

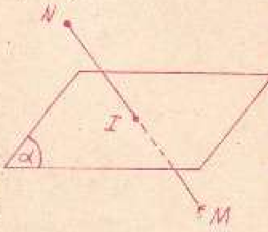
Chứng minh : Giả sử (α) cắt đoạn MN tại $I(x_0, y_0, z_0)$

$\Rightarrow \overrightarrow{IM} = k\overrightarrow{IN}$ $(k < 0)$,

$\overrightarrow{IM} = (x_1 = x_0, y_1 = y_0, z_1 = z_0)$

$\overrightarrow{IN} = (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0)$. Vậy

$$\begin{cases} x_1 - x_0 = k(x_2 - x_0) \\ y_1 - y_0 = k(y_2 - y_0) \\ z_1 - z_0 = k(z_2 - z_0) \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} (k - 1)x_0 = kx_2 - x_1 \\ (k - 1)y_0 = ky_2 - y_1 \\ (k - 1)Z_0 = kj_2 - z_1 \end{cases}$$

Nhân cả hai vế của các đẳng thức trên với A, B, C ta được

$$\begin{cases} A(k - 1)x_0 = Akx_2 - Ax_1 \ (a) \\ B(k - 1)y_0 = Bky_2 - By_1 \ (b) \\ C(k - 1)z_0 = Ckz_2 - Cz_1 \ (c) \end{cases}$$

Cộng vế với vế của *(a), (b), (c)* và cộng thêm vào cả hai vế của đẳng thức thu được với $D(k - 1)$, ta được :

$$(k + 1)(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) =$$
$$k(Ax_1 + By_2 + Cz_2 + D) -$$
$$-(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D)$$

hay $f(M) = kf(N) \Rightarrow$

$$f(M) . f(N) = k[f(N)]^2 < 0$$

Đảo lại nếu hai điểm M, N thỏa mãn (2) thì ta dễ dàng suy ra M, N ở khác phía đối với (α).

II. Các bài toán

Bài toán 1 *(dựa theo đề thi vô địch toán quốc tế lần 1)*

Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh bằng 1. M, N, I di động trên AA', BC, C'D' sao cho : $A'M = BN = C'I = a$ $(0 \leq a \leq 1)$.

1) (α) là mặt phẳng qua M, N, I. Chứng minh rằng (α) luôn tự song song.

2) Tính d(A, α) (khoảng cách từ A đến (α)) theo a.

3) Tính diện tích tam giác MNI theo a và xác định M để diện tích đó nhỏ nhất.

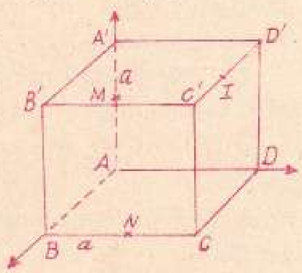
4) Chứng minh rằng trọng tâm G của tam giác MNI thuộc một đường cố định.

Giải : Chọn hệ tọa độ như hình bên (H.2)

$A(0,0,0)$ $B(1,0,0)$ $D(0,1,0)$ $A'(0,0,1)$

1) Ta dễ dàng suy ra :

$C(0,0,0)$ $B'(1,0,1)$ $C'(1,1,1)$ $D'(0,1,1)$ M $D(0,0,1 - a)$ $I(1 - a,1,1)$ $N(1, a,0)$. Để chứng minh (α) tự song song ta chỉ cần chứng minh pháp vectơ của (α) là xác định.



Thật vậy $\overrightarrow{MN} = (1,a,a - 1)$ và $\overrightarrow{MI} = (1-a,1,a)$ là cặp vectơ chỉ phương của (α) thì pháp vectơ là

$$\overrightarrow{n} = \left(\begin{vmatrix} a & a-1 \\ 1 & a \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a-1 & 1 \\ a & 1-a \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1-a & 1 \end{vmatrix} \right)$$

hay $\overrightarrow{n} = (a^2 - a + 1)(1,-1,1)$. Ta có thể chọn vectơ $\overrightarrow{n_1} = (1,-1,1)$ là pháp vectơ của (α) (đpcm)

2) Trước hết lập phương trình (α) biết pháp vectơ $\overrightarrow{n_1} = (1,-1,1)$ và qua điểm $M(0,0,1-a)$ là $(x-0)-(y-0)+[z-(1-a)] = 0$

$\Leftrightarrow x - y + z + a - 1 = 0$

Vậy

$$d(A,\alpha) = \frac{|a-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{1-a}{\sqrt{3}}$$

3) Ta có

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2.AC^2 - (\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})^2}$$

Vậy $S_{\Delta MNI} = \frac{1}{2}\sqrt{MN^2.MI^2 - (\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MI})^2}$ (3)

$MN^2 = 1^2 + a^2 + (a-1) = 2(a^2 - a + 1)$ (4)

$MI^2 = 2(a^2 - a + 1)$ (5) và

$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MI} = a^2 - a + 1$ (6). Thay (4), (5), (6) vào (3) ta được :

$$S_{\Delta MNI} = S = \frac{\sqrt{3}}{2}(a^2 - a + 1).$$

Rõ ràng

$$S_{\min} \Leftrightarrow \left[a^2 - a + 1 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]^2 \min$$

$\Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$, tức là M là trung điểm AA'.

4) Gọi $G(x,y,z)$ là trọng tâm của tam giác MNI thế thì

$$x = \frac{2-a}{3}, y = \frac{a+1}{3}, z = \frac{2-a}{3} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{DG} = \frac{2-a}{3}(1,-1,1).$$

Mặt khác $\overrightarrow{DB'} = (1,-1,1) \Rightarrow G \in DB'$ cố định.

Bài toán 2. *Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Lấy M thuộc đoạn AD', N thuộc đoạn BD với $AM = DN = x$. $(0 < x < a\sqrt{2})$.*

1) Chứng minh rằng : $x = a\sqrt{2}/3$ thì đoạn MN ngắn nhất.

2) Khi đoạn MN ngắn nhất hãy chứng minh :

a) MN là đoạn vuông góc chung của AD' và DB.

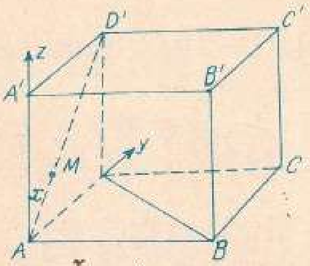
b) MN // $A'C$.

3) Chứng minh rằng khi x thay đổi thì MN luôn song song với mặt phẳng $(A'BCD')$.

Giải : Chọn hệ tọa độ như hình vẽ (H.3)

$A(0,0,0)$ $B(a,0,0)$ $C(a,a,0)$ $D(0,a,0)$ A' $D(0,0,a)$ $B'(a,0,a)$

$C'(a,a,a)$ $D'(0,a,a) \Rightarrow M\left(0, \frac{x}{\sqrt{2}}, \frac{x}{\sqrt{2}}\right)$



$$N\left(\frac{x}{\sqrt{2}}, a - \frac{x}{\sqrt{2}}, 0\right) \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{MN} = \left(\frac{x}{\sqrt{2}}, a - x\sqrt{2}, \frac{-x}{\sqrt{2}}\right)$$

1) Theo đầu bài ta cần tìm $\min|\overrightarrow{MN}|$. Ta có :

$$MN^2 = 3\left[\left(x - \frac{a\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \frac{7a^2}{9}\right] \Rightarrow \text{đpcm.}$$

2) MN ngắn nhất lúc đó $x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$

a) MN là đoạn vuông góc chung của AD' và DB khi $MN \perp AD'$ và $MN \perp DB$

$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AD'} = 0$, $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{DB} = 0$

Ta có $\overrightarrow{MN} = \frac{a}{3}(1,1,-1)$, $\overrightarrow{AD'} = (0,a,0)$

$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{DB} = 0$ $\overrightarrow{DB} = (a,-a,0)$

Như vậy $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AD'} = \frac{a}{3}(a + a + 0) = 0$ và

$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{DB} = \frac{a}{3} = (1,1,-1)(a,-2,0) =$

$= \frac{a}{3}(a - a) = 0 \Rightarrow$ đpcm.

b) $\overrightarrow{A'C} = (a, a, -a) = a(1, 1, a)$. Rõ ràng $\overrightarrow{A'C}$ cộng tuyến với vectơ $\overrightarrow{MN} \Rightarrow$ đpcm.

3) Để chứng minh MN // $(A'BCD')$ chỉ cần chứng minh $\overrightarrow{MN}$ là vectơ chỉ phương của mặt phẳng $(A'BCD')$ và $M \notin (A'BCD')$. Muốn vậy ta tìm pháp vectơ của $(A'BCD')$, ta có :

$\overrightarrow{AB'} = (a, 0, a)$

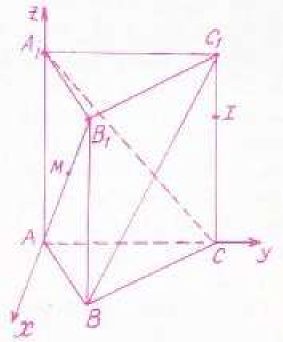
$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AB'} = \frac{a}{3}(1, 1, -1).(a, 0, a) =$

$= \frac{a}{3}(a - a) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MN}$ là vectơ chỉ phương của $(A'BCD')$ (7). Để chứng minh $M \notin (A'BCD')$ ta thấy dễ dàng là $M \in AD$ mà AD' chỉ chung với $(A'BCD')$ điểm D' (8). Từ (7) và (8) $\Rightarrow MN$ // $(A'BCD')$.

Bài toán 3. *Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ (đáy là tam giác đều) cạnh đáy bằng a, đường cao bằng h. $M \in AB\ D_1$ của mặt ABB_1A_1 sao cho $AM : MB_1 = 5 : 4$ (α) là mặt phẳng qua M và song song với A_1C và BC_1.*

1) Tính khoảng cách và góc giữa AC, BC_1.
2) Xác định thiết diện do (α) cắt lăng trụ
3) (α) Chia CC_1 theo tỉ số nào.

Giải : Chọn hệ tọa độ như (H.4), trục tung chứa tia AC, gốc $A(0,0,0)$ $C(0, a, 0)$ $A_1(0,0, h)$ C $D_1(0, a, h)$ suy ra $B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{a}{2}, 0\right)$ $B_1\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{a}{2}, h\right)$



1) Khoảng cách giữa AC và BC_1 chính là khoảng cách giữa AC và mặt phẳng chứa BC_1 và song song với AC, gọi mặt phẳng đó là (β). Ta lập phương trình mặt (β), rõ ràng $\overrightarrow{BC_1}$, $\overrightarrow{A_1C_1}$ là cặp vectơ chỉ phương của (β) :

$\overrightarrow{BC_1} = \left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{a}{2}, h\right) \Rightarrow$

$\overrightarrow{BC_1} = \frac{1}{2}(a\sqrt{3}, -a, -2h)$ và

$\overrightarrow{A_1C_1} = (0, a, 0)$

suy ra pháp vectơ của (β) là

$$\overrightarrow{n_\beta} = \left(\begin{vmatrix} \frac{a}{2} & h \\ a & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} h & \frac{-a\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{-a\sqrt{3}}{2} & \frac{a}{2} \\ 0 & a \end{vmatrix}\right) \text{ ê}$$

$$\overrightarrow{n_\beta} = \left(-ah, 0, \frac{-a^2\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{a}{2}(2h, 0, a\sqrt{3}).$$

Từ đó phương trình (β) có pháp vectơ $\overrightarrow{n_1} = (2h, 0, a\sqrt{3})$ và qua điểm $A_1(0, 0, h)$ có phương trình là :

$2h(x - 0) + 0(y - 0) + a\sqrt{3}(z - h) = 0$
hay : $2hx + a\sqrt{3}z - ah\sqrt{3} = 0$.

Như vậy ta được $d(AC, BC_1) = d(A, beta) =$

$$= \frac{|-ah\sqrt{3}|}{\sqrt{4h^2 + 3a^2}} = \frac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{4h^2 + 3a^2}}$$

Để tính góc giữa hai đường thẳng AC, BC_1, trước hết ta tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BC_1}$

Ta có : $\overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} = AC \cdot BC_1 \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC_1})$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AC} = (0, a, 0) \\ \overrightarrow{BC_1} = \left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{a}{2}, h\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC_1} = \frac{a^2}{2}, AC = a$

$$BC^2 = \frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + h^2 = a^2 + h^2 \Rightarrow$$

$BC = \sqrt{a^2 + h^2}$

Từ đó suy ra :

$$\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC_1}) = \frac{a}{2\sqrt{a^2 + h^2}} > 0.$$

Vậy $\{ \cos(AC, BC_1) = \frac{a}{2\sqrt{a^2 + h^2}}$.

Nếu ta xác định được giao điểm của (α) với CC_1 thì ta dễ dàng vẽ được thiết diện tạo bởi (α) và lăng trụ cho nên ta chỉ cần làm câu 3).

3) Giả sử (α) cắt CC_1 tại I. Trước hết cần xét xem (α) chia trong hay chia ngoài đoạn CC_1. Muốn vậy cần lập phương trình (α). Cặp vectơ chỉ phương của mặt (α) là

$\overrightarrow{BC_1} = \left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{a}{2}, h\right) \Rightarrow$

$\overrightarrow{BC_1} = \frac{1}{2}(a\sqrt{3}, -a, -2h)$ và

$\overrightarrow{CA_1} = (0, -a, h)$ suy ra pháp vectơ $\overrightarrow{n_\alpha} = a\sqrt{3}(\sqrt{3}h, h, a)$. Khi đó phương trình mặt (α) nhận $\overrightarrow{n} = (\sqrt{3}h, h, a)$ làm pháp vectơ và qua M có dạng $\sqrt{3}hx + hy + az + D = 0$. (9) Muốn tìm D ta cần xác định tọa độ điểm M.

Theo giả thiết ta có : $AM : MB_1 = 5 : 4$ $\Rightarrow AM : AB_1 = 5 : 9 \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (5/9)\overrightarrow{AB_1} \Rightarrow$ $M\left(\frac{5a\sqrt{3}}{18}, \frac{5a}{18}, \frac{5h}{9}\right)$ thay tọa độ điểm M vào (9) ta được $D = -(5/3)\,ah \Rightarrow$ Phương trình mặt (α) là : $3\sqrt{3}hx + 3hy + 3az - 5ah = 0$. (10) Bây giờ ta kiểm tra (α) chia trong hay chia (10) ngoài đoạn CC_1. Muốn vậy ta xét xem C, C_1 ở cùng phía hay khác phía mặt (α). Thật vậy $f(c) = 3ah - 5ah = -2ah < 0$. $f(c_1) = ah > 0 \Rightarrow f(x) \cdot f(c_1) = -2a^2h^2 < 0$ $\Leftrightarrow I$ là điểm chia trong đoạn CC_1. Để tìm I, ta cần viết phương trình tham số của đường thẳng CC_1, có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{CC_1} = (0, 0, h)$ và qua điểm $C(0, a, 0)$ là

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = a \\ z = ht \end{cases} \qquad (11)$$

Thay (11) vào (10) ta sẽ tìm được tham số t của giao điểm, đó là $t = 2/3 \Rightarrow z = 2/3\ h$. Vậy giao điểm I của (α) và CC_1 là

$I\left(0, a, \frac{2h}{3}\right)$ Để củng cố phương pháp phương trình đường và mặt, chúng ta có thể làm thêm :

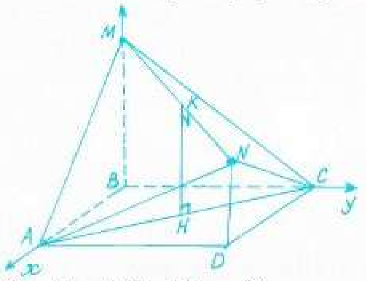
Bài toán 4. *Cho hình vuông ABCD cạnh a. Các nửa đường thẳng Bm, Dn vuông góc với (ABCD) và ở về cùng một phía với mặt phẳng đáy. Lấy $M \in Bm$, $N \in Dn$. Đặt $BM = x$, $DN = y$.*

1) Tính thể tích tứ diện ACMN theo a, x, y

2) Tìm hệ thức giữa x, y để $(ACM) \perp (ACN)$.

3) x, y thỏa mãn (2). HK là đường vuông góc chung của AC và MN ($H \in AC$). Chứng minh H cố định và HK không đổi.

Giải : Để khỏi lẫn trong bài toán ta đặt $BM = b$, $DN = c$. Chọn hệ tọa độ như (H.5)



$B(0,0,0)$, $A(a,0,0)$, $D(a,a,0)$

$C(0,a,0)$ $M(0,0,b)$ $N(a,a,c)$

1) $V_{ACMN} = \frac{1}{3} d(M, ANC) \,.\, S_{\Delta ANC} + S_{\Delta ANC}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{AN^2 \,.\, AC^2 - (\overrightarrow{AN} \,.\, \overrightarrow{AC})^2} + \overrightarrow{AN} =$

$(0,a,c) \Rightarrow AN^2 = a^2 + c^2$

$\overrightarrow{AC} = (-a, a, 0) \Rightarrow AC^2 = 2a^2 \Rightarrow$

$S_{\Delta ANC} = \frac{1}{2}\sqrt{a^4 + 2a^2c^2}$

Phương trình mặt *(ANC)* là

$cx + cy - az - ac = 0$

Vậy $d(M, ANC) = a(b + c)/\sqrt{a^2 + 2c^2} \Rightarrow V_{ACMN}$.

2) Gọi $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ là pháp vectơ của *(ANC) D* và *(AMC)*. Rõ ràng là $(ANC) \perp (AMC) \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \,.\, \overrightarrow{n_2} = 0$

Theo trên $\overrightarrow{n_1} = (c, c, -a)$ và

$\overrightarrow{n_2} = (b, b, a) \Rightarrow \overrightarrow{n_1}\overrightarrow{n_2} = bc + bc - a^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2 = bc$

3) Các bạn tự làm tương tự

Nhiều bài toán hình không gian có thể giải được theo phương pháp trên.

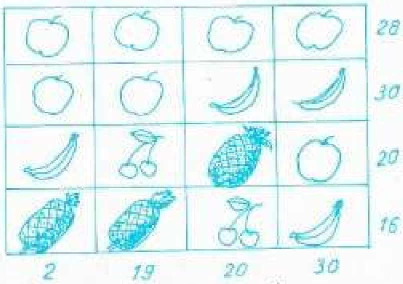
Giải đáp bài

THỬ TRÍ THÔNG MINH

Ta đánh số các cột từ trái qua phải, các hàng từ trên xuống dưới. Nhận xét thấy số lượng các quả trong cột 4 và trong hàng 2 là như nhau và chữ số bên dưới của cột 4 và chữ số ở bên phải của hàng 2 là như nhau. Cũng vậy, số lượng các quả trong cột 3 và trong hàng 3 là như nhau và chữ số bên dưới của cột 3 và chữ số bên phải của hàng 3 là như nhau. Từ đó suy ra tổng các chữ số bên phải của các hàng là bằng tổng các chữ số bên dưới của các cột. Tức ta có : $28 + 30 + 20 + 16 = ? + 19 + 20 + 30$

Từ đó có $? = 25$

Có rất nhiều bạn đã gửi đáp án đến. Tất cả các đáp án đều đúng. Các bạn sau đây đã có đáp án tốt và ngắn nhất :



Nguyễn Tiến Hưng, 10A, Yên Phong, **Bắc Ninh**. *Trần Đình Quang*, 7C, BCCLC Việt Trì, **Phú Thọ**. *Lưu Hải Đăng*, 11T3, Chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông, **Hà Tây**. *Phạm Văn Tập*, 11B1, PTTH Vĩnh Bảo, **Hải Phòng**. *Nguyễn Anh Minh*, 8B, THCS Ngọc Lâm, Gia Lâm ; *Vũ Quỳnh Hoa*, 8A, THCS Nguyễn Phong Sắc, **Hà Nội**. *Nguyễn Thị Bích*, 8A, Trọng điểm Uông Bí, **Quảng Ninh**. *Lộc Thu Huyền*, Lê Hồng Phong, **Hà Giang**. *Nguyễn Thanh Tuấn*, 7A, PTCS Quỳnh Côi, Quỳnh Phụ, **Thái Bình**. *Nguyễn Thu Trang*, 7B, THCS CLC Hậu Lộc, **Thanh Hóa**. *Nguyễn Cảnh Linh*, 7A, THCS Đô Lương ; *Nguyễn Thị Liên*, Tăng Thành, Yên Thành, **Nghệ An**. *Tôn Thất Minh Hùng*, 8G, Nguyễn Tri Phương, **Thừa Thiên – Huế**. *Lê Ngọc Thọ*, 5A, Tiểu học số 2, Hội Phú, Pleiku, **Gia Lai**. *Tạ Quỳnh Trang*, 10A1, PTTH Bến Tre, **Bến Tre**.

BÌNH PHƯƠNG

CẮT VÀ GHÉP BA HÌNH VUÔNG

Bạn Nguyên học lớp 9 hỏi chị mình là bạn An – Một giáo sinh Sư phạm toán : *Chị ơi ! Muốn cắt và ghép ba hình vuông nhỏ bằng nhau để thu được một hình vuông lớn vừa vặn thì làm thế nào ?*

Xin mời các bạn hãy cùng giáo sinh An trả lời giúp cho em Nguyên.

PHẠM HÙNG

ISSN : 0866 - 8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT46M7

Sắp chữ tại TTCBĐH NXBGD
In tại Nhà máy in Diên Hồng, 57 Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 11/1997

Giá 2.000đ
Hai nghìn đồng