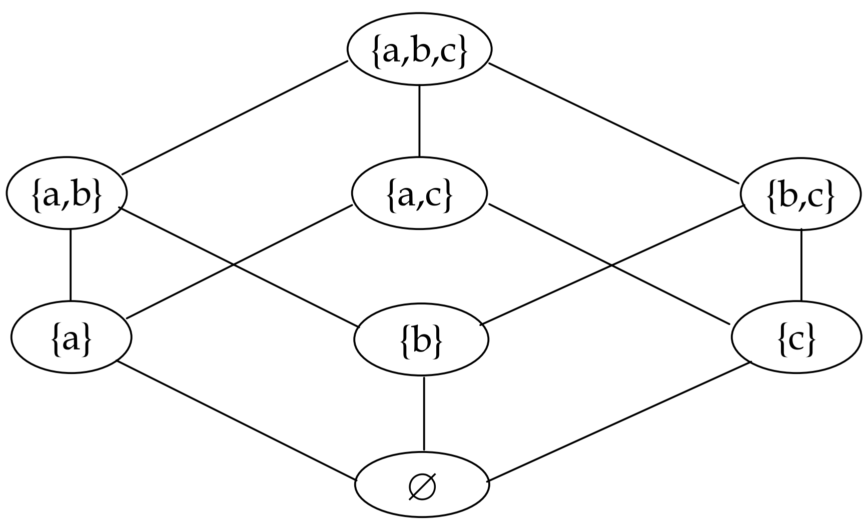
BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC HUẾ
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN GIA ĐỊNH

GIÁO TRÌNH

CƠ SỞ TOÁN HỌC



HUẾ – 2005

LỜI NÓI ĐẦU

Những người mới bắt đầu nghiên cứu toán học thường cảm thấy khó xây dựng thói quen phát biểu một cách chặt chẽ những ý kiến muốn trình bày, khó học tập các phương pháp lập luận đúng đắn và khó nắm được các khái niệm cơ bản của toán học. Những khó khăn này dường như bắt nguồn từ chỗ: một là không được luyện tập về lôgic toán, một chủ đề nghiên cứu cách lập luận suy diễn áp dụng vào việc chứng minh các định lý toán học; hai là do thiếu các khái niệm cơ bản và các phương pháp dùng trong lý thuyết tập hợp mà ngày nay thường được áp dụng trong mọi ngành toán học và dùng làm cơ sở để khai phá và giải thích các khái niệm cơ bản của toán học (như ánh xạ, quan hệ, ...); ba là do không nắm được những khái niệm cơ bản của đại số trừu tượng, một chủ đề đang phát triển mạnh mẽ và có ảnh hưởng đến mọi ngành toán học khác, cụ thể qua các cấu trúc đại số của các tập hợp số quen thuộc (như tập các số tự nhiên, tập các số nguyên, tập các số hữu tỉ, tập các số thực và tập các số phức).

Được sự động viên mạnh mẽ của các đồng nghiệp trong các Khoa Toán-Cơ-Tin học, Công nghệ Thông tin và Vật lý (Trường Đại học Khoa học-Đại học Huế), các Khoa Toán và Tin học (Trường Đại học Sư phạm-Đại học Huế) và đặc biệt do nhu cầu học tập của các sinh viên trong Đại học Huế ở các Khoa nói trên, chúng tôi mạnh dạn viết giáo trình *Cơ sở Toán học*, trong khi trên thị trường sách có khá nhiều tài liệu liên quan đến học phần này (nhưng được trình bày tản mạn và rời rạc). Điều mà chúng tôi mong muốn là các kiến thức của học phần này phải được đưa vào đầy đủ, cô đọng, chính xác, cập nhật và bám sát theo yêu cầu đào tạo sinh viên các ngành Toán, Vật lý, Công nghệ Thông tin và một số ngành kỹ thuật khác của các trường đại học và cao đẳng. Với sự nổ lực hết mình của bản thân, chúng tôi thiết nghĩ đây còn là tài liệu tham khảo tốt cho các giáo viên giảng dạy học phần Nhập môn Đại số hay Cơ sở Toán học

Nội dung của tài liệu này được bố trí trong 6 chương. Trong các phần của mỗi chương có nhiều thí dụ cụ thể minh hoạ cho những khái niệm cũng như những kết quả của chúng. Cuối của mỗi chương là những bài tập được chọn lọc từ dễ đến khó bám theo nội dung của chương đó và liền sau đó là các lời giải của chúng. Đó là các chương về *Lôgic toán và tập hợp, Ánh xạ, Quan hệ, Số tự nhiên và số nguyên, Số hữu tỉ, số thực và số phức, Đa thức.*

Chúng tôi xin chân thành cám ơn các đồng nghiệp đã động viên và góp ý cho công việc viết giáo trình *Cơ sở Toán học* này và lời cám ơn đặc biệt xin dành cho Khoa Toán-Cơ-Tin học (Trường Đại học Khoa học-Đại học Huế) về sự giúp đỡ quý báu và tạo điều kiện thuận lợi cho việc xuất bản giáo trình này.

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

Tác giả mong nhận được sự chỉ giáo của các đồng nghiệp và độc giả về những thiếu sót khó tránh khỏi của cuốn sách.

Cố Đô Huế, Ất Dậu Trọng Đông (2005)

Nguyễn Gia Định

CHƯƠNG I:
LÔGIC TOÁN VÀ TẬP HỢP

1.1. LÔGIC TOÁN.

1.1.1. Mệnh đề và các phép toán lôgic:

1.1.1.1. Mệnh đề: Mệnh đề là một câu phản ánh một điều đúng hoặc sai, chứ không phải vừa đúng vừa sai.

Thí dụ:

1) Số 35 chia hết cho 5: mệnh đề đúng.

2) Mặt trời quay quanh trái đất: mệnh đề sai.

3) Tam giác ABC có 3 góc vuông: mệnh đề sai.

4) $2 < 5$: mệnh đề đúng.

Các câu hỏi, câu cảm thán, câu mệnh lệnh, ... và nói chung các câu không nhằm phản ánh tính đúng sai của thực tế khách quan đều không được coi là mệnh đề.

Trong lôgic mệnh đề, ta không quan tâm đến cấu trúc ngữ pháp cũng như ý nghĩa nội dung của mệnh đề mà chỉ quan tâm đến tính đúng sai của mỗi mệnh đề.

Để chỉ các mệnh đề chưa xác định, ta dùng các chữ cái: $p, q, r, ...$ và gọi chúng là các biến mệnh đề. Ta quy ước viết $p = 1$ khi p là mệnh đề đúng và $p = 0$ khi p là mệnh đề sai. Các giá trị 0 và 1 gọi là các giá trị chân lý của các mệnh đề.

George Boole đã nghiên cứu phương pháp tạo ra các mệnh đề mới bằng cách tổ hợp từ một hoặc nhiều mệnh đề đã có. Các mệnh đề mới được gọi là các mệnh đề phức hợp, chúng được tạo ra từ các mệnh đề hiện có bằng cách dùng các phép toán lôgic.

1.1.1.2. Phép phủ định: Phủ định của mệnh đề p , ký hiệu là $\overline{p}$, đọc là "không p", là mệnh đề sai khi p đúng và đúng khi p sai.

Phép phủ định trong lôgic mệnh đề phù hợp với phép phủ định trong ngôn ngữ thông thường, nghĩa là phù hợp với ý nghĩa của từ "không" ("không phải").

Thí dụ: 1) p: "9 là một số lẻ" (Đ), $\overline{p}$: "9 không là một số lẻ" (S).

2) p: "với mọi số thực x, y, $(x + y)^2 < 0$" (S), $\overline{p}$: "tồn tại số thực x, y, $(x + y)^2 \geq 0$" (Đ).

1.1.1.3. Phép hội: Hội của hai mệnh đề p, q, ký hiệu là $p \wedge q$, đọc là "p và q", là một mệnh đề đúng khi cả p lẫn q cùng đúng và sai trong các trường hợp còn lại.

Phép hội phù hợp với ý nghĩa của liên từ "và" của ngôn ngữ thông thường.

Thí dụ: 1) p: "2 là số nguyên tố" (Đ) và q: "2 là số chẵn" (Đ) thì $p \wedge q$: "2 là số nguyên tố và là chẵn" (Đ).

2) Mệnh đề "Số π lớn 3 và là một số hữu tỉ" (S) là hội của hai mệnh đề "Số π lớn hơn 3" (Đ) và "Số π là một số hữu tỉ" (S).

1.1.1.4. Phép tuyển: Tuyển của hai mệnh đề p, q, ký hiệu $p \vee q$, đọc là "p hoặc q", là một mệnh đề sai khi cả p lẫn q đều sai và đúng trong mọi trường hợp còn lại.

Phép tuyển ứng với liên từ "hoặc" trong ngôn ngữ thông thường theo nghĩa không loại trừ, có nghĩa là mệnh đề "p hoặc q" đúng khi và chỉ khi ít nhất một trong hai mệnh đề p và q đúng.

Thí dụ: 1) p: "3 nhỏ hơn 5" (Đ) và q: "3 bằng 5" (S) thì $p \vee q$: "3 nhỏ hơn hoặc bằng 5" (Đ).

2) p: "Paris là thủ đô nước Anh" (S) và q: "6 lớn hơn 8" (S) thì $p \vee q$: "Paris là thủ đô nước Anh hoặc 6 lớn hơn 8" (S).

1.1.1.5. Phép tuyển loại: Tuyển loại của hai mệnh đề p, q, ký hiệu $p \oplus q$, đọc là "p hoặc q (nhưng không cả hai)", là một mệnh đề đúng khi chỉ có một trong hai mệnh đề p và q là đúng và sai trong mọi trường hợp còn lại.

Phép tuyển loại ứng với liên từ "hoặc" trong ngôn ngữ thông thường theo nghĩa loại trừ.

Thí dụ: p: "$\sqrt{2}$ là một số hữu tỉ" (S) và q: "$\sqrt{2}$ là một số vô tỉ" (Đ) thì $p \oplus q$: "$\sqrt{2}$ là một số hữu tỉ hoặc là một số vô tỉ" (Đ).

1.1.1.6. Phép kéo theo: Mệnh đề kéo theo $p \Rightarrow q$, đọc là "p kéo theo q" hay "nếu p thì q", là một mệnh đề sai khi p đúng và q sai và đúng trong các trường hợp còn lại.

Trong phép kéo theo nói trên, p được gọi là giả thiết, còn q được gọi là kết luận.

Vì phép kéo theo xuất hiện ở nhiều nơi trong các suy luận toán học, nên có nhiều thuật ngữ được dùng để diễn đạt mệnh đề $p \Rightarrow q$. Dưới đây là một số thí dụ thường gặp nhất.

– "Nếu p thì q",
– "p kéo theo q",
– "Từ p suy ra q",
– "p là điều kiện đủ để có q",
– "q là điều kiện cần để có p".

Thí dụ: 1) "Nếu hôm nay trời nắng, chúng tôi sẽ đi ra bãi biển" là một mệnh đề kéo theo và được xem là đúng trừ phi hôm nay trời thực sự nắng, nhưng chúng tôi không đi ra bãi biển.

2) "Nếu hôm nay là thứ hai thì $3 + 5 = 7$" là một mệnh đề kéo theo và là đúng với mọi ngày trừ thứ hai.

Trong suy luận toán học, chúng ta xét các phép kéo theo thuộc loại tổng quát hơn trong ngôn ngữ thông thường. Khái niệm toán học về phép kéo theo độc lập với mối quan hệ nhân - quả giữa giả thiết và kết luận.

Không may, cấu trúc nếu - thì được dùng trong nhiều ngôn ngữ lập trình lại khác với cấu trúc được dùng trong lôgic toán. Đa số các ngôn ngữ lập trình chứa những câu lệnh như **nếu** p **thì** S (**if** p **then** S), trong đó p là một mệnh đề còn S là một đoạn chương trình (gồm một hoặc nhiều lệnh cần phải thực hiện). Khi thực hiện một chương trình gặp những cấu trúc như vậy, S sẽ được thực hiện nếu p là đúng, trong khi đó S sẽ không được thực hiện nếu p là sai.

1.1.1.7. Phép tương đương: Mệnh đề "p tương đương q", ký hiệu là $p \Leftrightarrow q$, là một mệnh đề đúng khi p và q có cùng giá trị chân lý và sai trong các trường hợp còn lại.

Định nghĩa của phép tương đương phù hợp với ý nghĩa của cụm từ "khi và chỉ khi" hay "nếu và chỉ nếu" của ngôn ngữ thông thường. Trong toán học, mệnh đề "p tương đương q" có thể diễn đạt dưới dạng: "điều kiện cần và đủ để có p là có q".

Thí dụ: 1) Điều kiện cần và đủ để $\triangle ABC$ cân là hai góc ở đáy của nó bằng nhau.

2) Dấu bằng xảy ra trong bất đẳng thức Cauchy

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Sau đây là bảng chân trị của các phép toán lôgic nói trên.

p	q	$\overline{p}$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \oplus q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1	0
1	0	0	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	0	1	1

1.1.1.8. Các phép toán lôgic và các phép toán bit: Các máy tính dùng các bit để biểu diễn thông tin. Một bit có hai giá trị là 0 và 1. Ý nghĩa của từ này bắt nguồn từ *binary digit* (số nhị phân). Thuật ngữ này do nhà Thống kê học nổi tiếng John Turkey đưa ra vào năm 1946. Bit cũng có thể được dùng để biểu diễn giá trị chân lý. Ta sẽ dùng bit 1 để biểu diễn giá trị đúng và bit 0 để biểu diễn giá trị sai.

Ta sẽ dùng các ký hiệu NOT, AND, OR, XOR thay cho các phép toán $-, \wedge, \vee, \oplus$ như thường được làm trong các ngôn ngữ lập trình khác nhau.

Thông tin thường được biểu diễn bằng cách dùng các xâu bit, đó là dãy các số 0 và 1. Khi đã làm như thế, các phép toán trên các xâu bit cũng có thể được dùng để thao tác các thông tin đó. Ta có thể mở rộng các phép toán bit tới các xâu bit. Ta định nghĩa các OR bit, AND bit và XOR bit đối với hai xâu

bit có cùng chiều dài là các xâu có các bit của chúng là các OR, AND và XOR của các bit tương ứng trong hai xâu tương ứng.
Thí dụ:

xâu 1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0
xâu 2	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1
OR bit	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
AND bit	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0
XOR bit	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1

1.1.2. Sự tương đương lôgic của các công thức:

Trong lôgic mệnh đề, người ta đưa ra khái niệm công thức, tương tự như khái niệm biểu thức trong toán học.

1.1.2.1. Định nghĩa:

1) Các biến mệnh đề $p, q, r, ...$ là các công thức,

2) Nếu P, Q là các công thức thì $\overline{P}, P \wedge Q, P \vee Q, P \oplus Q, P \Rightarrow Q, P \Leftrightarrow Q$ là các công thức,

3) Chỉ chấp nhận các công thức được thành lập bằng việc áp dụng một số hữu hạn các quy tắc 1)-2).

1.1.2.2. Định nghĩa: Công thức A gọi là hằng đúng nếu A nhận giá trị 1 với mọi hệ giá trị chân lý có thể có của các biến mệnh đề có mặt trong A.

Công thức A gọi là hằng sai nếu A nhận giá trị 0 với mọi hệ giá trị chân lý có thể có của các biến mệnh đề có mặt trong A. Khi đó ta gọi A là một mâu thuẩn.

Một công thức không phải là hằng đúng, cũng không phải là mâu thuẩn được gọi là tiếp liên.

1.1.2.3. Định nghĩa: Hai công thức A và B được gọi là tương đương lôgic, ký hiệu $A \equiv B$, nếu $A \Leftrightarrow B$ là một hằng đúng. Hệ thức $A \equiv B$ còn được gọi là một đẳng thức.

1.1.2.4. Các tương đương lôgic cơ bản:

1) Luật đồng nhất:
$$p \wedge 1 \equiv p, \quad p \vee 0 \equiv p.$$

2) Luật nuốt:
$$p \wedge 0 \equiv 0, \quad p \vee 1 \equiv 1.$$

3) Luật lũy đẳng:
$$p \wedge p \equiv p, \quad p \vee p \equiv p.$$

4) Luật phủ định kép:

$$\overline{\overline{p}} \equiv p.$$

5) Luật giao hoán:

$$p \wedge q \equiv q \wedge p, \;\; p \vee q \equiv q \vee p.$$

6) Luật kết hợp:

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r), \;\; (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r).$$

7) Luật phân phối:

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r), \;\; p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r).$$

8) Luật De Morgan:

$$\overline{p \wedge q} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}, \;\; \overline{p \vee q} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}.$$

9) Một số tương đương tiện ích:

$$p \wedge \overline{p} \equiv 0, \;\; p \vee \overline{p} \equiv 1,$$
$$p \Leftrightarrow q \equiv q \Leftrightarrow p, \;\; p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p), \;\; p \Leftrightarrow q \equiv \overline{p} \Leftrightarrow \overline{q},$$
$$(p \Rightarrow q) \equiv (\overline{p} \vee q),$$
$$(p \Rightarrow q) \equiv (\overline{q} \Rightarrow \overline{p}).$$

1.1.3. Suy luận toán học:

1.1.3.1. Suy luận diễn dịch: Suy luận là rút ra một mệnh đề mới từ một hay nhiều mệnh đề đã có.

Phân tích các suy luận trong chứng minh toán học, người ta thấy mỗi chứng minh bao gồm một số hữu hạn bước suy luận đơn giản. Trong mỗi bước suy luận đơn giản đó, ta đã "ngầm" vận dụng một quy tắc suy luận tổng quát để từ các mệnh đề đã được thừa nhận là đúng (tiên đề, định lý, định nghĩa, giả thiết) có thể rút ra một mệnh đề mới. Người ta gọi các mệnh đề xuất phát đã được thừa nhận là đúng là các tiền đề, còn mệnh đề mới được rút ra (nhờ vận dụng các quy tắc suy luận tổng quát) gọi là hệ quả lôgic của các tiền đề. Phép suy luận như thế gọi là suy luận diễn dịch hay gọi tắt là suy diễn.

1.1.3.2. Định nghĩa: Giả sử $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$ là những công thức. Nếu tất cả các hệ giá trị chân lý của các biến mệnh đề có mặt trong các công thức đó làm cho $A_1, A_2, \ldots, A_n$ nhận giá trị 1 cũng đồng thời làm cho B nhận giá trị 1, tức là $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \Rightarrow B$ là một công thức hằng đúng, thì ta gọi B là hệ quả lôgic của $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Khi đó ta cũng nói rằng có một quy tắc suy luận từ các tiền đề $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tới hệ quả lôgic B của chúng.

Quy tắc suy luận đó được ký hiệu là:

$$\frac{A_1, A_1, \ldots, A_n}{B}.$$

1.1.3.3. Một số quy tắc suy luận thường dùng:

1) $\dfrac{p}{p \vee q}$ (Quy tắc cộng).

2) $\dfrac{p \wedge q}{p}$ (Quy tắc rút gọn).

3) $\dfrac{p, p \Rightarrow q}{q}$ (Quy tắc kết luận - Modus ponens).

4) $\dfrac{p \Rightarrow q, \overline{q}}{\overline{p}}$ (Quy tắc kết luận ngược - Modus tollens).

5) $\dfrac{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r}{p \Rightarrow r}$ (Quy tắc tam đoạn luận).

6) $\dfrac{p \Rightarrow q, q \Rightarrow p}{p \Leftrightarrow q}$ (Quy tắc đưa tương đương vào).

7) $\dfrac{p \vee q, \overline{p}}{q}$ (Quy tắc tách tuyển).

8) $\dfrac{p \Rightarrow r, q \Rightarrow r}{p \vee q \Rightarrow r}$ (Quy tắc tách tuyển giả thiết).

9) $\dfrac{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r}{p \Rightarrow q \wedge r}$ (Quy tắc hội kết luận).

10) $\dfrac{\overline{q} \Rightarrow \overline{p}}{p \Rightarrow q}$ (Quy tắc phản đảo).

11) $\dfrac{\overline{p} \Rightarrow q, \overline{p} \Rightarrow \overline{q}}{p}$ (Quy tắc phản chứng).

Thí dụ:

1) Cho: Nếu trời mưa (p) thì sân ướt (q) (đúng)
Trời đang mưa (đúng)
Kết luận: Sân ướt (đúng).

2) Cho: Nếu hai góc đối đỉnh (p) thì bằng nhau (q) (đúng)
$\widehat{A}$ và $\widehat{B}$ không bằng nhau (đúng)
Kết luận: $\widehat{A}$ và $\widehat{B}$ không đối đỉnh (đúng).

3) Cho: Mọi hình vuông đều là hình thoi ($p \Rightarrow q$) (đúng)
Mọi hình thoi có các đường chéo vuông góc ($q \Rightarrow r$) (đúng)
Kết luận: Mọi hình vuông đều có các đường chéo vuông góc ($p \Rightarrow r$) (đúng).

1.1.3.4. Suy luận nghe có lý: Suy luận nghe có lý là suy luận không theo một quy tắc suy luận tổng quát nào để từ những tiền đề đã có, rút ra được một kết luận xác định. Nếu các tiền đề đều đúng thì kết luận rút ra không chắc chắn đúng, mà chỉ có tính chất dự đoán, giả thuyết.

Trong toán học có hai kiểu suy luận nghe có lý thường dùng, đó là

– Phép quy nạp không hoàn toàn,

– Phép tương tự.

Thí dụ: **1)** Từ định lý trong hình học phẳng: "Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau", chúng ta nêu ra một "dự đoán": "Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau".

Đây là một thí dụ về phép suy luận bằng tương tự.

2) Các số $2^{2^0}+1,\ 2^{2^1}+1,\ 2^{2^2}+1,\ 2^{2^3}+1,\ 2^{2^4}+1$ là những số nguyên tố. Kết luận: với mọi số tự nhiên n, số $2^{2^n}+1$ là số nguyên tố.

Đây là lối suy luận quy nạp không hoàn toàn đã nêu lên bởi Fermat (1601-1665) sau khi đã kiểm nghiệm với các số $n = 0, 1, 2, 3, 4$. Nhưng sau đó Euler đã chỉ ra rằng với $n = 5$, khẳng định này không đúng, nghĩa là $2^{2^5}+1$ không là số nguyên tố.

3) $6 = 3+3,\ 8 = 3+5,\ 10 = 5+5,\ 12 = 5+7, \ldots$. Kết luận: mọi số nguyên dương chẵn lớn hơn 4 là tổng của hai số nguyên tố.

Mệnh đề này mang tên là bài toán Goldbach. Đây là một trong nhiều khẳng định trong toán học chưa được chứng minh.

4) Phương trình $x^3 + y^3 = z^3$ không có nghiệm nguyên, phương trình $x^4 + y^4 = z^4$ không có nghiệm nguyên. Kết luận: phương trình $x^n + y^n = z^n$ không có nghiệm nguyên với mọi số nguyên $n > 2$.

Mệnh đề này được nêu ra bởi Fermat năm 1637, gọi là "định lý cuối cùng của Fermat". Mãi đến tháng 5 năm 1995, mệnh đề này mới được hoàn toàn chứng minh xong bởi nhà toán học người Anh tên là Wiles.

Toán học là khoa học của suy luận diễn dịch. Tất cả các vấn đề trong toán học chỉ được trình bày bằng các suy luận diễn dịch. Tuy nhiên, trong quá trình phát minh, sáng tạo toán học, lý luận diễn dịch gắn chặt với các suy luận nghe có lý. Ta dùng quy nạp không hoàn toàn hay tương tự để nêu ra các giả thuyết. Sau đó mới chứng minh các giả thuyết này bằng diễn dịch.

1.1.4. Các phương pháp chứng minh:

1.1.4.1. Chứng minh là gì? Trong suy luận diễn dịch, nếu từ các tiền đề $A_1, A_2, \ldots, A_n$, ta rút ra kết luận B bằng cách vận dụng những quy tắc suy luận tổng quát thì ta nói B là kết luận lôgic của các tiền đề $A_1, A_2, \ldots, A_n$ và suy luận đó là hợp lôgic. Nếu tất cả các tiền đề $A_1, A_2, \ldots, A_n$ đều đúng thì ta gọi kết luận lôgic B là một kết luận chứng minh và gọi suy luận đó là một chứng minh.

Phân tích các chứng minh toán học ta thấy mỗi chứng minh gồm một số hữu hạn bước, mỗi bước là một suy luận diễn dịch trong đó ta vận dụng một quy tắc suy luận tổng quát. Như vậy, một chứng minh toán học gồm ba bộ phận cấu thành:

1) Luận đề, tức là mệnh đề cần chứng minh.

2) Luận cứ, tức là những mệnh đề được thừa nhận (định nghĩa, tiền đề, định lý, giả thiết) được lấy làm tiền đề trong mỗi suy luận.

3) Luận chứng, tức là những quy tắc suy luận tổng quát được vận dụng trong mỗi bước suy luận của chứng minh.

1.1.4.2. Phương pháp chứng minh trực tiếp: Khi ta chứng minh mệnh đề B bằng cách vạch rõ B là kết luận lôgic của những tiền đề đúng $A_1, A_2, \ldots, A_n$, nghĩa là B là một kết luận chứng minh thì ta nói là đã chứng minh trực tiếp mệnh đề B.

Thí dụ: Hãy chứng minh trực tiếp mệnh đề: "Nếu n là một số lẻ thì n^2 cũng là một số lẻ".

Giả sử rằng giả thiết của mệnh đề kéo theo này là đúng, tức là n là một số lẻ. Khi đó $n = 2k+1$, với k là một số nguyên. Từ đó suy ra $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Do đó n^2 là một số lẻ.

1.1.4.3. Phương pháp chứng minh tìm phản thí dụ: Giả sử ta cần chứng minh mệnh đề p sai. Nếu ta tìm được mệnh đề q, trường hợp đặc biệt của p là sai. Khi đó $\overline{q}$ đúng và $p \Rightarrow q$ là đúng. Do đó theo quy tắc kết luận ngược thì $\overline{p}$ là đúng. Từ đó p là sai.

Thí dụ: Cho m và n là những số khác không bất kỳ. Chứng minh rằng $n+m < nm$ là không đúng. Chỉ cần lấy $n = m = 1$ thì $1 + 1 = 2 > 1.1$.

1.1.4.4. Phương pháp chứng minh phản đảo: Giả sử ta cần chứng minh $p \Rightarrow q$. Nếu ta chứng minh được $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ thì theo quy tắc phản đảo, ta có $p \Rightarrow q$ đúng. Như vậy, để chứng minh $p \Rightarrow q$, ta có thể chuyển sang chứng minh $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ là đủ.

Thí dụ: Cho a là một số hữu tỉ khác 0. Chứng minh rằng nếu b là một số vô tỉ thì ab cũng là một số vô tỉ.

Ta viết $a = \dfrac{m}{n}$, với m, n là hai số nguyên khác 0. Nếu ab là số hữu tỉ thì ta có thể viết $ab = \dfrac{k}{l}$ với k, l là hai số nguyên và $l \neq 0$. Khi đó $b = \dfrac{ab}{a} = \frac{k/l}{m/n} = \dfrac{kn}{lm}$ và suy ra b là một số hữu tỉ.

1.1.4.5. Phương pháp chứng minh phản chứng: Cơ sở lôgic của phương pháp chứng minh phản chứng là như sau: muốn chứng minh mệnh đề p là đúng, ta giả thiết p là sai, tức là $\overline{p}$ là đúng. Sau đó ta chứng minh rằng $\overline{p} \Rightarrow q$ là đúng và $\overline{q}$ là đúng. Do đó theo quy tắc phản chứng thì p là đúng. Điều này dẫn đến mâu thuẫn (luật bài trung).

Thí dụ: Chứng minh rằng ước số tự nhiên nhỏ nhất khác 1 của một số tự nhiên lớn hơn 1 là một số nguyên tố.

Giả sử k là ước tự nhiên nhỏ nhất khác 1 của số tự nhiên n $(n > 1)$ và k không là số nguyên tố. Do đó tồn tại ước số m của k sao cho $1 < m < k$. Nhưng khi đó m cũng là một ước số của n. Điều này mâu thuẩn với k là ước tự nhiên nhỏ nhất khác 1 của n.

1.1.4.6. Phương pháp chứng minh xét tất cả các trường hợp: Trong toán học, để chứng minh mệnh đề nào đó là đúng, ta có thể xét nó trong tất cả các trường hợp có thể có.

Thí dụ: Chứng minh rằng tích của 3 số nguyên liên tiếp chia hết cho 3.

Với n là một số nguyên, ta viết $n = 3q + r$ với q là một số nguyên và $r = 0, 1, 2$.

a) $r = 0:$ $n = 3q$ hay n chia hết cho 3, khi đó $n(n+1)(n+2)$ chia hết cho 3.

b) $r = 1:$ $n = 3q + 1$ hay $n + 2 = 3(q + 1)$ hay $n + 2$ chia hết cho 3, khi đó $n(n+1)(n+2)$ chia hết cho 3.

c) $r = 2:$ $n = 3q + 2$ hay $n + 1 = 3(q + 1)$ hay $n + 1$ chia hết cho 3, $n(n+1)(n+2)$ chia hết cho 3.

1.1.4.6. Phương pháp chứng minh quy nạp: Phương pháp này sẽ được trình bày trong Chương IV về "Số nguyên và số tự nhiên".

1.2. TẬP HỢP.

1.2.1. Tập hợp và cách xác định một tập hợp:

1.2.1.1. Khái niệm tập hợp: Những đối tượng được tụ tập do một tính chất chung nào đó thành lập một tập hợp. Đây không phải là một định nghĩa mà chỉ là một sự mô tả cho ta một hình ảnh trực quan của khái niệm đó.

Sự mô tả một tập hợp các đối tượng dựa trên một khái niệm trực quan về một đối tượng nào đó đã được nhà toán học người Đức Georg Cantor đưa ra lần đầu tiên vào năm 1895. Lý thuyết hình thành từ khái niệm trực quan đó của tập hợp đã dẫn đến những nghịch lý hoặc các mâu thuẩn lôgic như nhà triết học người Anh Bertrand Russell đã chỉ ra năm 1902. Những mâu thuẩn lôgic đó có thể tránh được bằng cách xây dựng một lý thuyết tập hợp xuất phát từ những giả thiết cơ bản, gọi là các tiên đề. Tuy nhiên, chúng ta sẽ dùng phiên bản ban đầu của Cantor, được gọi là lý thuyết tập hợp ngây thơ, chứ không phát triển phiên bản tiên đề của lý thuyết này, bởi vì tất cả các tập hợp được xem xét trong tài liệu này có thể xử lý phi mâu thuẩn bằng cách dùng lý thuyết ban đầu của Cantor.

Các vật hay đối tượng thành lập một tập hợp gọi là các phần tử của tập hợp đó.

Trong ngôn ngữ thông thường, người ta dùng những từ như: nhóm, toàn thể, tập thể, chùm, bầy, đàn, ... để nói về một tập hợp nào đó.

Một tập hợp thường được ký hiệu bởi các chữ cái in hoa: A, B, C, D, E, X, Y, Z, ... Phần tử của tập hợp thường được ký hiệu bởi các chữ cái in thường: a, b, c, d, x, y, z, ...

Thí dụ:

1) Tập hợp các số tự nhiên, ký hiệu $\mathbb{N}$.

2) Tập hợp các số nguyên, ký hiệu $\mathbb{Z}$.

3) Tập hợp các số hữu tỉ, ký hiệu $\mathbb{Q}$.

4) Tập hợp các số thực, ký hiệu $\mathbb{R}$.

5) Tập hợp các số phức, ký hiệu $\mathbb{C}$.

6) Tập hợp các điểm trên mặt phẳng.

7) Tập hợp các nghiệm thực của phương trình $\sin 3x - \sin x + \sin 2x = 0$.

8) Tập hợp các sinh viên năm thứ nhất ngành tin học của trường Đại học Khoa học.

Ký hiệu:

– Để chỉ a là một phần tử của tập hợp A, ta viết $a \in A$ và đọc là "a thuộc A" hay "a là phần tử của tập hợp A".

– Để chỉ b không phải là một phần tử của tập hợp A, ta viết $b \notin A$ hoặc $b\overline{\in}A$ và đọc là "b không thuộc A" hoặc "b không phải là một phần tử của tập hợp A".

1.2.1.2. Tập hợp rỗng: Tập hợp không chứa phần tử nào gọi là tập rỗng, ký hiệu $\emptyset$.

Thí dụ: Tập hợp các nghiệm thực của phương trình $x^2 + 1 = 0$ là tập hợp rỗng.

1.2.1.3. Cách xác định một tập hợp

1. Liệt kê tất cả các phần tử của tập hợp: Theo cách này, để xác định một tập hợp nào đó ta liệt kê đầy đủ tất cả các phần tử của nó.

Thí dụ: 1) Tập hợp 4 số nguyên dương đầu tiên được viết là:

$$\{1, 2, 3, 4\}.$$

2) Tập hợp các chữ cái trong bảng chữ cái tiếng Anh được viết là:

$$\{a, b, c, \dots, z\}.$$

3) Tập hợp các số tự nhiên chẵn được viết là:

$$\{0, 2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}.$$

Chú ý rằng khi liệt kê các phần tử của một tập hợp ta không quan tâm đến thứ tự của chúng.

2. Chỉ rõ thuộc tính đặc trưng của các phần tử của tập hợp. Ta có thể xác định một tập hợp bằng cách chỉ rõ các tính chất chung của các phần tử của tập hợp đó để sau đó dựa vào các tính chất này ta có thể khẳng định một đối tượng nào đó có là một phần tử của tập hợp đó hay không. Các tính chất như vậy gọi là thuộc tính đặc trưng của các phần tử của tập hợp.

Thí dụ: Tập hợp các ước số nguyên dương của 24 là:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

và được viết lại là:

$$A = \{n \in \mathbb{N} \ : \ n|24\}.$$

Trong trường hợp tổng quát, nếu tập hợp X là tập hợp tất cả các phần tử x, sao cho x có tính chất T thì ta viết:

$$X = \{x \mid x \text{ có tính chất } T\} \text{ hoặc } \ X = \{x \ : \ x \text{ có tính chất } T\}.$$

1.2.1.4. Giản đồ Venn: Các tập hợp cũng có thể được minh hoạ bằng hình vẽ nhờ dùng giản đồ Venn, do nhà toán học người Anh John Venn lần đầu tiên đưa ra vào năm 1881. Trong các giản đồ Venn, tập hợp vũ trụ U - tập hợp chứa tất cả các đối tượng đang xét - được biểu diễn bằng một hình chữ nhật. Bên trong hình chữ nhật này, những miền phẳng giới hạn bởi các đường cong khép kín không tự cắt được dùng để biểu diễn các tập hợp. Đôi khi các điểm được dùng để biểu diễn các phần tử của tập hợp. Các giản đồ Venn thường được dùng để chỉ ra mối quan hệ giữa các tập hợp.

1.2.1.5. Định nghĩa: Cho A là một tập hợp. Nếu có chính xác n phần tử phân biệt trong A, với n là một số nguyên không âm, thì ta nói rằng A là một tập hữu hạn và n là bản số của A. Bản số của A được ký hiệu là $|A|$. Một tập hợp được gọi là vô hạn nếu nó không phải là hữu hạn.

Thí dụ: 1) Cho A là tập hợp các chữ cái trong bảng chữ cái tiếng Anh. Khi đó $|A| = 26$.

2) Tập hợp các số nguyên tố là một tập hợp vô hạn.

1.2.2. Tập hợp con và quan hệ bao hàm:

1.2.2.1. Định nghĩa: Tập hợp A được gọi là một tập hợp con (hay tập con) của B, ký hiệu $A \subset B$, nếu mỗi phần tử của A là một phần tử của B. Như vậy,

$A \subset B$ khi và chỉ khi với mọi $x \in A$ kéo theo $x \in B$.

Khi có $A \subset B$, ta còn nói "A là một bộ phận của B" hay "A bao hàm trong B". Khi đó ta còn viết $B \supset A$ và đọc là "B bao hàm A" hay "B chứa A".

Quan hệ "$\subset$" được gọi là quan hệ bao hàm. Các hệ thức $A \subset B$, $B \supset A$ được gọi là các bao hàm thức.

Nếu $A \subset B$ và có ít nhất một phần tử thuộc B nhưng không thuộc A thì ta nói A là một tập con thực sự của B hay bộ phận thực sự của B.

Thí dụ: 1) Tập hợp $\mathbb{N}$ các số tự nhiên là tập con thực sự của tập hợp $\mathbb{Z}$ các số nguyên.

2) Tập hợp các hình vuông là tập con của tập hợp các hình chữ nhật, cũng như là tập con của tập các hình thoi.

1.2.2.2. Tính chất: Với A, B, C là 3 tập hợp bất kỳ, ta luôn có:

1) $\emptyset \subset A$,

2) $A \subset A$,

3) nếu $A \subset B$ và $B \subset C$ thì $A \subset C$.

Thật vậy, 1) được suy ra từ mệnh đề "$x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$" là luôn luôn đúng (do "$x \in \emptyset$" là sai). 2) được suy ra từ mệnh đề "$x \in A \Rightarrow x \in A$" là luôn luôn đúng. Cuối cùng 3) được suy ra từ tính đúng của mệnh đề "$(x \in A \Rightarrow x \in B \ \wedge \ x \in B \Rightarrow x \in C) \Rightarrow (x \in A \Rightarrow x \in C)$"

1.2.2.3. Tập hợp lũy thừa: Cho X là một tập hợp. Tập lũy thừa của X, ký hiệu $\mathcal{P}(X)$ hay 2^X, là tập hợp gồm tất cả các tập con của X, tức là

$$\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subset X\}.$$

Thí dụ: 1) Với $X = \{a, b, c\}$ thì ta có

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}.$$

2) $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

1.2.2.4. Định nghĩa: Hai tập A và B được gọi là bằng nhau, ký hiệu $A = B$, nếu $A \subset B$ và $B \subset A$.
Thí dụ: Với $A = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ và $B = \{n \in \mathbb{N} : n|30\}$ thì ta có $A = B$.

1.2.3. Các phép toán tập hợp:

1.2.3.1. Định nghĩa: Hợp của hai tập hợp A và B, ký hiệu là $A \cup B$ (đọc là "A hợp B"), là tập hợp gồm các phần tử thuộc ít nhất một trong hai tập hợp A, B, tức là

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \ \vee \ x \in B\}.$$

Thí dụ: 1) Với $A = \{a, b, c, d\}$ và $B = \{c, d, e, f\}$, ta có $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$.
2) Với $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ chia hết cho } 2\}$ và $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ chia hết cho } 3\}$, ta có $A \cup B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ chia hết cho 2 hoặc } 3\}$.

1.2.3.2. Định nghĩa: Giao của hai tập hợp A và B, ký hiệu là $A \cap B$ (đọc là "A giao B"), là tập hợp gồm các phần tử vừa thuộc A vừa thuộc B, tức là

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \in B\}.$$

Hai tập hợp được gọi là rời nhau nếu giao của chúng là tập hợp rỗng.
Thí dụ: 1) Với $A = \{a, b, c, d\}$ và $B = \{c, d, e, f\}$, ta có $A \cap B = \{c, d\}$.
2) Với $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ chia hết cho } 2\}$ và $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ chia hết cho } 3\}$, ta có $A \cap B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ chia hết cho } 6\}$.
3) Tập hợp các số hữu tỉ và tập hợp các số vô tỉ là hai tập con rời nhau của tập hợp $\mathbb{R}$ các số thực.

1.2.3.3. Định nghĩa: Hiệu của hai tập hợp A và B, ký hiệu là $A \setminus B$ hay $A - B$, là tập hợp gồm các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B, tức là

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \ \wedge x \notin B\}.$$

Nếu $B \subset A$ thì ta ký hiệu $A \setminus B = C_A B$ hay $\overline{B}$ khi A đã được xác định rõ và gọi đó là phần bù của B trong A.

Hiệu đối xứng của hai tập hợp A và B, ký hiệu là $A \oplus B$, là tập hợp được xác định bởi

$$A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{x \mid (x \in A \ \wedge \ x \notin B) \ \vee \ (x \notin A \ \wedge \ x \in B)\}.$$

Thí dụ: 1) Với $A = \{a, b, c, d\}$ và $B = \{c, d, e, f\}$, ta có $A \setminus B = \{a, b\}$, $B \setminus A = \{e, f\}$ và $A \oplus B = \{a, b, e, f\}$.

2) Với $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\} = (-\infty, 1)$, ta có $C_{\mathbb{R}} A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\} = [1, +\infty)$.

1.2.3.4. Các hằng đẳng thức tập hợp cơ bản: Mỗi tập con của một tập hợp được tương ứng với một tính chất (mệnh đề) xác định nó trên tập hợp đã cho. Với tương ứng này, các phép toán tập hợp được chuyển sang các phép toán lôgic: phủ định tương ứng với phần bù, tuyển tương ứng với hợp, hội tương ứng với giao, tuyển loại tương ứng với hiệu đối xứng.

Từ các tương đương lôgic cơ bản trong 1.1.2.4, với A, B, C là các tập con của tập vũ trụ U, ta có các hằng đẳng thức tập hợp cơ bản dưới đây (lưu ý rằng mệnh đề $x \in \emptyset$ có giá trị chân lý 0 và mệnh đề $x \in U$ có giá trị chân lý 1).

1) Luật đồng nhất:

$$A \cap U = A, \ \ A \cup \emptyset = A.$$

2) Luật nuốt:

$$A \cap \emptyset = \emptyset, \ \ A \cup U = U.$$

3) Luật lũy đẳng:

$$A \cap A = A, \ \ A \cup A = A.$$

4) Luật bù:

$$\overline{\overline{A}} = A.$$

5) Luật giao hoán:

$$A \cap B = B \cap A, \ \ A \cup B = B \cup A.$$

6) Luật kết hợp:

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, \ \ A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

7) Luật phân phối:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \ \ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

8) Luật De Morgan:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \;\; \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

1.2.3.5. Biểu diễn các tập hợp trên máy tính: Có nhiều cách để biểu diễn các tập hợp trên máy tính. Một phương pháp là lưu trữ các phần tử của tập hợp theo cách không sắp thứ tự. Tuy nhiên, nếu điều đó đã làm được, thì việc tính hợp, giao hoặc hiệu của hai tập hợp sẽ rất mất thời gian, vì mỗi phép tính đó đòi hỏi một lượng tìm kiếm rất lớn đối với các phần tử. Ta sẽ có ở đây một phương pháp lưu trữ các phần tử bằng cách dùng sự sắp tùy ý các phần tử của tập vũ trụ. Phương pháp biểu diễn tập hợp này sẽ làm cho việc tính những tổ hợp của các tập hợp trở nên dễ dàng hơn.

Giả sử tập vũ trụ U là hữu hạn (và có kích thước hợp lý đối với dung lượng bộ nhớ). Trước hết, hãy chỉ rõ sự sắp tùy ý các phần tử của U, chẳng hạn $a_1, a_2, \dots, a_n$, sau đó biểu diễn tập con A của U bằng một xâu bit có độ dài n, trong đó bit thứ i ở xâu này là 1 nếu $a_i \in A$ và là 0 nếu $a_i \notin A$.

Để nhận được các xâu bit cho các hợp, giao và hiệu đối xứng của hai tập hợp, ta sẽ thực hiện các phép toán Boole trên các xâu bit biểu diễn hai tập hợp đó. Từ đó ta có xâu bit đối với hợp, giao, hiệu đối xứng là OR bit, AND bit, XOR bit của hai xâu bit biểu diễn hai tập hợp đã cho.

Thí dụ: Với $U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $A = \{x_1, x_3, x_5, x_6, x_8\}$, $B = \{x_2, x_3, x_4, x_6, x_9, x_{10}\}$, ta có:

A	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0
B	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1
$A \cap B$	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
$A \cup B$	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
$A \oplus B$	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1

1.2.4. Tích Descartes:

1.2.4.1. Định nghĩa: Cho n đối tượng $a_1, a_2, \dots, a_n$, ta thành lập một đối tượng mới là $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, trong đó a_1 ở vị trí thứ nhất, a_2 ở vị trí thứ hai, ..., a_n ở vị trí thứ n và được gọi là bộ n sắp thứ tự.

Hai bộ n sắp thứ tự $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ và $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ được gọi là bằng nhau, ký hiệu $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, nếu $a_i = b_i$ với $i = 1, 2, \dots, n$. Đặc biệt, dãy có hai phần tử được gọi là cặp sắp thứ tự hay gọi tắt là cặp.

1.2.4.2. Định nghĩa: Tích Descartes của n tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_n$, ký hiệu là $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ hay $\prod\limits_{i=1}^{n} A_i$, là tập hợp gồm các bộ n sắp thứ tự $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, trong đó $a_i \in A_i$ với $i = 1, 2, \ldots, n$, tức là

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i, i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Đặc biệt, khi $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$ thì ta ký hiệu $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = A^n$.

Thí dụ: Với $A = \{x, y\},\ B = \{0, 1, 2\},\ C = \{a, b\}$, ta có

$$A \times B \times C = \{(x,0,a), (x,0,b), (x,1,a), (x,1,b), (x,2,a), (x,2,b),$$
$$(y,0,a), (y,0,b), (y,1,a), (y,1,b), (y,2,a), (y,2,b)\}.$$

1.2.5. Sự lượng hoá:

1.2.5.1. Định nghĩa: Hàm mệnh đề là một câu chứa biến và trở thành mệnh đề khi ta thay biến đó bằng một phần tử cụ thể thuộc một tập hợp xác định.

Thí dụ: 1) $P(x)$: "x là số nguyên tố" là hàm mệnh đề một biến xác định trên tập hợp $\mathbb{N}$ các số tự nhiên.

2) Mỗi phương trình là một hàm mệnh đề. Chẳng hạn phương trình $x^2 + 4x + 3$, là một hàm mệnh đề một biến xác định trên tập hợp $\mathbb{R}$ các số thực. Nó trở thành mệnh đề đúng với $x = -1$ và $x = -3$.

3) Bất phương trình là một hàm mệnh đề. Chẳng hạn bất phương trình $(x-3)(x+2) < 0$, là một hàm mệnh đề một biến xác định trên tập hợp $\mathbb{R}$ các số thực. Nó trở thành mệnh đề đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$, sao cho $-2 < x < 3$.

4) Phương trình $x^2 + y^2 = z^2$ là một hàm mệnh đề ba biến.

5) Xét câu:

$$\textbf{If } x > 0 \textbf{ then } x := x + 1$$

Khi gặp câu này trong chương trình, giá trị của biến x ở điểm đó trong quá trình thực hiện chương trình sẽ được đặt vào $P(x)$, tức là đặt vào câu "$x > 0$". Nếu $P(x)$ đúng đối với giá trị này của x, thì lệnh gán $x := x + 1$ sẽ được thực hiện và giá trị của x sẽ tăng lên 1. Nếu $P(x)$ là sai đối với giá trị đó của x, thì lệnh gán sẽ không được thực hiện và giá trị x không thay đổi.

Khi tất cả các biến trong hàm mệnh đề đều được gán cho giá trị xác định, thì mệnh đề tạo thành sẽ có giá trị chân lý. Tuy nhiên, còn có một cách quan trọng khác để biến các hàm mệnh đề thành các mệnh đề, mà người ta gọi là sự lượng hoá. Ta xét ở đây hai loại lượng hoá, đó là lượng từ phổ dụng và lượng từ tồn tại.

Cho A là một tập hợp và P là một tính chất của các phần tử của A, nghĩa là $P(x)$ là một hàm mệnh đề xác định trên A. Xét tập hợp

$$A_P = \{x \in A \mid P(x)\},$$

nghĩa là tập gồm các phần tử $x \in A$ sao cho $P(x)$ đúng. Dưới đây là các trường hợp có thể xãy ra.

1.2.5.2. Định nghĩa: Trong trường hợp $A_P = A$, nghĩa là tất cả các phần tử của A đều thoả mãn tính chất P. Điều này được ký hiệu là:

$$\forall x \in A,\ P(x)$$

hay gọn hơn là $(\forall x)(P)$, đọc là "với mọi x thuộc A, x thoả mãn tính chất P". Ký hiệu $\forall$ (đọc là "với mọi") được gọi là lượng từ phổ dụng.

1.2.5.3. Định nghĩa: Trong trường hợp $A_P \neq \emptyset$, nghĩa là có ít nhất một phần tử của A thoả mãn tính chất P. Điều này được ký hiệu là:

$$\exists x \in A,\ P(x)$$

hay gọn hơn là $(\exists x)(P)$, đọc là "có ít nhất (hay tồn tại) phần tử x thuộc A thoả mãn tính chất P". Ký hiệu $\exists$ (đọc là "có ít nhất" hay "tồn tại") được gọi là lượng từ tồn tại.

Lưu ý rằng tập hợp A được gọi là không gian các lượng từ.

1.2.5.4. Chú ý: 1) Trong trường hợp $A_P = \emptyset$, nghĩa là không có phần tử nào của A thoả mãn tính chất P. Điều này chính là mệnh đề:

$$\overline{(\exists x)(P)}$$

và trong trường hợp này $\overline{A_P} = A$, tức là $(\forall x)(\overline{P})$, trong đó $\overline{P}$ ký hiệu tính chất không P. Như vậy

$$\overline{(\exists x)(P)} \equiv (\forall x)(\overline{P}).$$

2) Trong trường hợp $A_P \neq A$, nghĩa là không phải mọi phần tử của A đều thoả mãn tính chất P. Điều này chính là mệnh đề:

$$\overline{(\forall x)(P)}$$

và trong trường hợp này $\overline{A_P} \neq \emptyset$, tức là $(\exists x)(\overline{P})$. Như vậy

$$\overline{(\forall x)(P)} \equiv (\exists x)(\overline{P}).$$

Thí dụ: 1) Xác định tính đúng sai của các mệnh đề sau:

$(\exists x \in \mathbb{R})\ (4x - 3 = -2x + 1)$ là mệnh đề đúng.

$(\exists x \in \mathbb{Q})\ (x^2 = 2)$ là mệnh đề sai.

$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\ (x < y)$ là mệnh đề sai.

$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\ (x + y = 1)$ là mệnh đề đúng.

2) Hãy biểu diễn câu: "Mọi người đều có chính xác một người bạn tốt nhất" thành một công thức (lôgic).

Giả sử $P(x, y)$ là câu "y là người bạn tốt nhất của x". Khi đó câu trong thí dụ có thể dịch thành:

$$(\forall x)\ (\exists y)\ (\forall z)\ [P(x, y)\ \wedge\ ((z \neq y) \Rightarrow \overline{P(x, z)}].$$

3) Từ định nghĩa về tính liên tục của một hàm số tại một điểm, ta có: hàm f xác định trên tập hợp $A \subset \mathbb{R}$ là liên tục tại $a \in A$ nếu và chỉ nếu

$$(\forall \epsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall x \in A)\ (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon).$$

Khi đó bằng cách lấy phủ định ta có: f không liên tục tại $x = b$ khi và chỉ khi

$$(\exists \epsilon > 0)\ (\forall \delta > 0)\ (\exists x \in A)\ (|x - b| < \delta \wedge |f(x) - f(b)| \geq \epsilon).$$

BÀI TẬP CHƯƠNG I

1. Trong các câu sau đây, câu nào là một mệnh đề? Xác định giá trị chân lý của các mệnh đề đó.

a) Không được đi qua.
b) Tổng các góc trong một tam giác có bằng 180^o không?
c) x là một số lẻ.
d) Số 124 chia hết cho 4.
e) 51 chia cho 6 được 8 dư 2.

2. Hãy đưa mỗi mệnh đề dưới đây về dạng hội hoặc tuyển của các mệnh đề đơn, sau đó hãy tìm giá trị chân lý của các mệnh đề đó.

a) $1 < \sqrt{3} < 2$.
b) $|\sin \frac{\pi}{12}| > 1$.
c) Số 235 chia hết cho 5 nhưng không chia hết cho 2.
d) 5 và 7 là hai số lẻ nguyên tố cùng nhau.
e) Hình thoi $ABCD$ có $AB = AC$ và $AD \perp BC$.

3. Tìm phủ định của các mệnh đề sau:

a) Không có ô nhiễm ở Huế.
b) Mùa hè ở TP. Hồ Chí Minh là nóng và nắng.
c) $4 + 8 = 11$.
d) $2^{2^5} + 1 = 4294967297$ và không phải là một số nguyên tố.

4. Hãy phát biểu các định lý sau đây dưới dạng mệnh đề kéo theo $p \Rightarrow q$ hoặc $p \Leftrightarrow q$.

a) Góc ngoài của một tam giác bằng tổng hai góc trong không kề với nó.

b) Mọi dãy đơn điệu và bị chặn đều là dãy hội tụ.

c) Mọi hàm liên tục trên một khoảng đóng và bị chặn đều đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên khoảng đó.

d) Nếu tam giác ABC là tam giác cân thì nó có hai góc bằng nhau và đảo lại.

e) Mọi dãy Cauchy (trong $\mathbb{R}$) là hội tụ và chỉ các dãy đó mới hội tụ.

5. Cho p, q và r là các mệnh đề:

p: Bạn bị cúm.

q: Bạn thi trượt kỳ thi cuối khoá.

r: Bạn được lên lớp.

Hãy diễn đạt các mệnh đề sau thành những câu thông thường:

a) $p \Rightarrow q$, **b)** $\overline{q} \Leftrightarrow r$,

c) $q \Rightarrow \overline{r}$, **d)** $p \vee q \vee r$,

e) $(p \Rightarrow \overline{r}) \vee (q \Rightarrow \overline{r})$, **f)** $(p \wedge q) \vee (\overline{q} \wedge r)$.

6. Cho p và q là hai mệnh đề:

p: Bạn lái xe với tốc độ trên 60km/h.

q: Bạn bị phạt vì vượt quá tốc độ cho phép.

Hãy viết các mệnh đề sau bằng cách dùng p và q và các toán tử lôgic.

a) Bạn không lái xe với tốc độ trên 60km/h.

b) Bạn lái xe với tốc độ trên 60km/h nhưng bạn không bị phạt vì vượt quá tốc độ cho phép.

c) Bạn sẽ bị phạt vì vượt quá tốc độ cho phép nếu bạn lái xe với tốc độ trên 60km/h.

d) Nếu bạn không lái xe với tốc độ trên 60km/h thì bạn sẽ không bị phạt vì vượt quá tốc độ cho phép.

e) Lái xe với tốc độ trên 60km/h là đủ để bị phạt vì vượt quá tốc độ cho phép.

f) Bạn bị phạt vì vượt quá tốc độ cho phép nhưng bạn không lái xe với tốc độ trên 60km/h.

g) Mỗi lần bạn bị phạt vì vượt quá tốc độ cho phép là bạn đã lái xe với tốc độ trên 60km/h.

7. Phát biểu mệnh đề đảo và phản đảo của các mệnh đề kéo theo sau:

a) Nếu hôm nay có gió mùa Đông Bắc thì ngày mai trời giá rét.

b) Tôi đều đi ra bãi tắm bất cứ ngày nào trời nắng.

c) Nếu một số chia hết cho 6 thì chia hết cho 2 và cho 3.

d) Nếu một số chia hết cho 9 thì tổng các chữ số của nó chia hết cho 9.

8. Lập bảng giá trị chân lý cho các mệnh đề phức hợp sau:

a) $p \Rightarrow (\overline{q} \vee r)$,

b) $\overline{p} \Rightarrow (q \Rightarrow r)$,

c) $(p \Rightarrow q) \vee (\overline{p} \Rightarrow r)$,

d) $(p \Rightarrow q) \wedge (\overline{p} \Rightarrow r)$,
e) $(p \Leftrightarrow q) \vee (\overline{q} \Leftrightarrow r)$,
f) $(\overline{p} \Leftrightarrow \overline{q}) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)$.

9. Tìm các OR bit, AND bit và XOR bit của các cặp xâu bit sau:
a) 1011110, 0100001;
b) 11110000, 10101010;
c) 0001110001, 1001001000;
d) 1111111111, 0000000000.

10. Lập các mệnh đề phức hợp gồm các mệnh đề p, q và r sao cho nó đúng khi:
a) p, q là đúng và r là sai, nhưng là sai trong mọi trường hợp còn lại.
b) Hai trong ba mệnh đề p, q và r là đúng và sai trong mọi trường hợp còn lại.

11. Chứng minh các mệnh đề kéo theo sau là hằng đúng:
a) $(p \wedge q) \Rightarrow p$,
b) $p \Rightarrow (p \vee q)$,
c) $\overline{p} \Rightarrow (p \Rightarrow q)$,
d) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$,
e) $\overline{p \Rightarrow q} \Rightarrow p$,
f) $\overline{p \Rightarrow q} \Rightarrow \overline{q}$,
g) $[(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow r$.

12. Chứng tỏ rằng:
a) $\dfrac{p \Leftrightarrow q,\ q \Leftrightarrow r}{p \Leftrightarrow r}$
b) $\dfrac{p \wedge \overline{q} \Rightarrow \overline{p}}{p \Rightarrow q}$.
c) $\dfrac{p \Rightarrow q, r \Rightarrow s}{(p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge s)}$.
d) $\dfrac{p \Rightarrow q, r \Rightarrow s}{(p \vee r) \Rightarrow (q \vee s)}$.

13. Dùng phương pháp chứng minh trực tiếp để chứng minh mệnh đề: "hai đường chéo của hình chữ nhật thì bằng nhau".
Hãy chỉ ra các bước suy luận trong chứng minh.

14. Chứng minh hoặc bác bỏ rằng tích của hai số vô tỉ là một số vô tỉ.

15. Chứng minh hoặc bác bỏ rằng $n^2 - n + 41$ là số nguyên tố khi n là số nguyên dương.

16. Dùng phương pháp chứng minh phản chứng để chứng minh rằng $\sqrt[3]{3}$ là một số vô tỉ.

17. Chứng minh rằng một số nguyên không chia hết cho 5 thì bình phương của nó khi chia cho 5 sẽ dư 1 hoặc 4.

18. Hãy diễn đạt các mệnh đề sau đây bằng ngôn ngữ thông thường và xác định tính đúng sai của các mệnh đề đó. Sau đó hãy lập mệnh đề phủ định của các mệnh đề trên.

a) $(\exists x \in \mathbb{R})\ (\forall y \in \mathbb{R})\ (x + y = 1)$.
b) $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists y \in \mathbb{R})\ (x + y = 1)$.
c) $(\forall n \in \mathbb{N})\ (\exists m \in \mathbb{N})\ (n < m)$.
d) $(\exists n \in \mathbb{N})\ (\forall m \in \mathbb{N})\ (n < m)$.

19. Cho $P(x)$ là câu "x nói được tiếng Anh" và $Q(x)$ là câu "x biết ngôn ngữ C". Hãy diễn đạt các câu sau bằng cách dùng $P(x), Q(x)$ và các phép toán lôgic. Cho không gian các lượng từ là tập hợp các sinh viên ở Đại học Huế.

a) Có một sinh viên ở Đại học Huế nói được tiếng Anh và biết C.

b) Có một sinh viên ở Đại học Huế nói được tiếng Anh nhưng không biết C.

c) Mọi sinh viên ở Đại học Huế đều nói được tiếng Anh hoặc biết C.

d) Không có một sinh viên nào ở Đại học Huế nói được tiếng Anh hoặc biết C.

20. Cho $F(x, y)$ là câu "x có thể lừa gạt y", với không gian là tập hợp mọi người trên thế giới. Hãy dùng các lượng từ để diễn đạt các câu sau:

a) Mọi người đều có thể lừa gạt A.
b) B có thể lừa gạt được mọi người.
c) Mọi người đều có thể lừa gạt được ai đó.
d) Không có ai có thể lừa gạt được tất cả mọi người.
e) Mọi người đều có thể bị lừa gạt bởi ai đó.
f) Không ai có thể lừa gạt được cả A lẫn B.
g) C có thể lừa gạt được chính xác hai người.
h) Có chính xác một người mà ai cũng lừa gạt được.
i) Không ai có thể lừa gạt được chính mình.
j) Có một người nào đó có thể lừa gạt được chính xác một người trừ bản thân mình.

21. Cho các tập hợp A, B, C. Chứng minh rằng:

a) $(A \cap B) \setminus C = A \cap (B \setminus C)$.
b) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.
c) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.
d) $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C) = A \cup B \cup C$.

22. Xét xem các đẳng thức sau đây đúng hay không.

a) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.
b) $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$.

23. Cho các tập hợp A, B, C. Chứng minh rằng:

a) $A \oplus A \;=\; \emptyset$.
b) $A \oplus \emptyset \;=\; A$.
c) $A \oplus B \;=\; B \oplus A$.
d) $A \oplus B \;=\; (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
e) $(A \oplus B) \oplus C \;=\; A \oplus (B \oplus C)$.
f) $A \cap (B \oplus C) \;=\; (A \cap B) \oplus (A \cap C)$.

24. Hãy chỉ rõ các phép toán trên các xâu bit được thực hiện như thế nào để tìm các tổ hợp sau của các tập hợp:

$$\begin{aligned} &A = \{a, b, c, d, e\}, && B = \{b, c, d, g, p, t, v\} \\ &C = \{c, e, i, o, u, x, y, z\}, && D = \{d, e, h, i, n, o, t, u, x, y\}. \end{aligned}$$

a) $A \cup B$,
b) $A \cap B$,
c) $(A \cup D) \cap (B \cup C)$,
d) $A \cup B \cup C \cup D$.

25. Cho A, B, C là 3 tập hữu hạn. Chứng minh rằng:

$$|A \cup B \cup C| \;=\; |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Tìm công thức cho trường hợp n tập hữu hạn.

26. Một cuộc họp gồm 12 người tham dự để bàn về 3 vấn đề. Có 8 người phát biểu về vấn đề I, 5 người phát biểu về vấn đề II và 7 người phát biểu về vấn đề III. Ngoài ra, có đúng 1 người không phát biểu vấn đề nào. Hỏi nhiều lắm là có bao nhiêu người phát biểu cả 3 vấn đề.

TRẢ LỜI VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP

CHƯƠNG I

1. **a)** Không phải là một mệnh đề.
b) Không phải là một mệnh đề.
c) Không phải là một mệnh đề.
d) Mệnh đề đúng.
e) Mệnh đề sai.

2. **a)** $p \wedge q$, với p: "$1 < \sqrt{3}$" và q: "$\sqrt{3} < 2$", là mệnh đề đúng.
b) $p \vee q$, với p: "$\sin \frac{\pi}{12} > 1$" và q: "$\sin \frac{\pi}{12} < -1$", là mệnh đề sai.
c) $p \wedge q$, với p: "Số 235 chia hết cho 5" và q: "Số 235 không chia hết cho 2", là mệnh đề đúng.
d) $p \wedge q$, với p: "5 và 7 là hai số lẻ" và q: "5 và 7 là hai số nguyên tố cùng nhau", là mệnh đề đúng.
e) $p \wedge q$, với p: "Hình thoi $ABCD$ có $AB = AC$" và q: "Hình thoi $ABCD$ có $AD \perp BC$", là mệnh đề sai.

3. **a)** Có ô nhiễm ở Huế.
b) Mùa hè ở TP. Hồ Chí Minh là không nóng hoặc không nắng.
c) $4 + 8 \neq 11$.
d) $2^{2^5} + 1 \neq 4294967297$ hoặc là một số nguyên tố.

4. **a)** $p \Rightarrow q$, với p: "α là góc ngoài của một tam giác" và q: "α bằng tổng hai góc trong không kề với nó".
b) $p \Rightarrow q$, với p: "(x_n) là dãy đơn điệu và bị chặn" và q: "(x_n) là dãy hội tụ".
c) $p \Rightarrow q$, với p: "f là hàm liên tục trên khoảng đóng và bị chặn $[a, b]$" và q: "f đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên $[a, b]$".
d) $p \Leftrightarrow q$, với p: "Tam giác ABC là tam giác cân" và q: "Tam giác ABC có hai góc bằng nhau".
e) $p \Leftrightarrow q$, với p: "Dãy số thực (x_n) là dãy Cauchy" và q: "Dãy số thực (x_n) là hội tụ".

5. **a)** Nếu bạn bị cúm thì bạn thi trượt kỳ thi cuối khoá.
b) Bạn không thi trượt kỳ thi cuối khoá là điều kiện cần và đủ để bạn được lên lớp.
c) Bạn thi trượt kỳ thi cuối khoá là đủ để bạn không được lên lớp.
d) Bạn bị cúm hoặc bạn thi trượt kỳ thi cuối khoá hoặc bạn được lên lớp.
e) Bạn bị cúm là đủ để bạn không được lên lớp hoặc bạn thi trượt kỳ thi cuối khoá là đủ để bạn không được lên lớp.
f) Bạn bị cúm và thi trượt kỳ thi cuối khoá hoặc không thi trượt kỳ thi cuối khoá và được lên lớp.

6. **a)** $\overline{p}$.
b) $p \wedge \overline{q}$.
c) $p \;\Rightarrow\; q$.
d) $\overline{p} \;\Rightarrow\; \overline{q}$.
e) $p \;\Rightarrow\; q$.
f) $q \wedge \overline{p}$.
g) $p \;\Leftrightarrow\; q$.

7. **a)** *Mệnh đề đảo:* Nếu ngày mai trời giá rét thì hôm nay có gió mùa Đông Bắc. *Mệnh đề phản đảo:* Nếu ngày mai trời không giá rét thì không có gió mùa Đông Bắc vào hôm nay.

b) *Mệnh đề đảo:* Nếu tôi đi ra bãi tắm thì ngày đó trời nắng. *Mệnh đề phản đảo:* Nếu tôi không đi ra bãi tắm thì ngày đó trời không nắng.

c) *Mệnh đề đảo:* Nếu một số chia hết cho 2 và cho 3 thì chia hết cho 6. *Mệnh đề phản đảo:* Nếu một số không chia hết cho 2 hoặc cho 3 thì không chia hết cho 6.

d) *Mệnh đề đảo:* Tổng các chữ số của một số chia hết cho 9 thì số đó chia hết cho 9. *Mệnh đề phản đảo:* Tổng các chữ số của một số không chia hết cho 9 thì số đó không chia hét cho 9.

8.

p	q	r	$p \Rightarrow (\overline{q} \vee r)$	$\overline{p} \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	$(p \Rightarrow q) \vee (\overline{p} \Rightarrow r)$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1

9. **a)** 1111111, 0000000, 1111111;
b) 11111010, 10100000, 01011010;
c) 1001111001, 0001000000, 1000111001;
d) 1111111111, 0000000000, 1111111111.

$(p \Rightarrow q) \wedge (\overline{p} \Rightarrow r)$	$(p \Leftrightarrow q) \vee (\overline{q} \Leftrightarrow r)$	$(\overline{p} \Leftrightarrow \overline{q}) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)$
0	1	1
1	1	0
0	1	1
1	0	0
0	0	0
0	1	1
1	1	0
1	1	1

10. a) $p \wedge q \wedge \overline{r}$.

b) $(p \wedge q \wedge \overline{r}) \vee (q \wedge r \wedge \overline{p}) \vee (r \wedge p \wedge \overline{q})$.

11. a) Nếu $(p \wedge q)$ đúng thì p đúng.

b) Nếu p đúng thì $p \vee q$ đúng.

c) Nếu $\overline{p}$ đúng thì p sai và khi đó $p \Rightarrow q$ là đúng.

d) Nếu $p \wedge q$ là đúng thì cả p và q đều đúng và khi đó $p \Rightarrow q$ là đúng.

e) Nếu $\overline{p \Rightarrow q}$ đúng thì $p \Rightarrow q$ sai và khi đó p đúng (và q sai).

f) Nếu $\overline{p \Rightarrow q}$ đúng thì $p \Rightarrow q$ sai và khi đó q sai (và p đúng), tức là $\overline{q}$ là đúng.

g) Nếu $[(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)]$ đúng thì cả ba $p \vee q$, $p \Rightarrow r$, $q \Rightarrow r$ đều đúng và khi đó p hoặc q đúng, nên r là đúng.

12. a) Nếu $p \Leftrightarrow q$ và $q \Leftrightarrow r$ là đúng thì giá trị chân lý của p và q, của q và r là như nhau. Do đó giá trị chân lý của p và r là như nhau hay $p \Leftrightarrow r$ là đúng.

b) Nếu p sai thì $p \Rightarrow q$ là đúng. Nếu p đúng thì $\overline{p}$ sai và do $p \wedge \overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ là đúng nên $p \wedge \overline{q}$ là sai. Do đó $\overline{q}$ là sai hay q là đúng. Khi đó $p \Rightarrow q$ là đúng.

c) Nếu p sai hoặc r sai thì $p \wedge r$ là sai nên $(p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge s)$ là đúng. Nếu p đúng và r đúng thì do $p \Rightarrow q$ và $r \Rightarrow s$ là đúng nên q và s là đúng. Do đó $q \wedge s$ đúng, nên $(p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge s)$ là đúng.

d) Nếu p sai và r sai thì $p \vee r$ là sai nên $(p \vee r) \Rightarrow (q \vee s)$ là đúng. Nếu p đúng hoặc r đúng thì do $p \Rightarrow q$ và $r \Rightarrow s$ là đúng nên q hoặc s là đúng. Do đó $q \vee s$ đúng, nên $(p \vee r) \Rightarrow (q \vee s)$ là đúng.

13.

Suy luận 1:

A_1: Hình chữ nhật là một hình bình hành có một góc vuông

Luận chứng:

$$\frac{p \Leftrightarrow q, p}{q}$$

A_2: $ABCD$ là hình chữ nhật

A_3: $ABCD$ là hình bình hành có một góc vuông

Suy luận 2: *Luận chứng:* $\dfrac{p \Rightarrow q, p}{q}$

A_4: Hình bình hành có một góc vuông thì có các cạnh đối bằng nhau và các góc đều vuông

A_3: $ABCD$ là hình bình hành có một góc vuông

A_5: $AD = BC,\ AB = CD,\ \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 1v$

Suy luận 3: *Luận chứng:* $\dfrac{p \Rightarrow q, p}{q}$

A_6: Nếu hai tam giác vuông có hai cặp cạnh góc vuông bằng nhau từng đôi một thì chúng bằng nhau

A_7: $\hat{A} = \hat{B} = 1v,\ BC = AD,\ AB = AB$ (AB chung)

A_8: $\triangle ABC = \triangle BAD$

Suy luận 4: *Luận chứng:* $\dfrac{p \Rightarrow q, p}{q}$

A_9: Hai tam giác vuông bằng nhau thì hai cạnh huyền tương ứng bằng nhau

A_8: $\triangle ABC = \triangle BAD$

A_{10}: $AC = BD$

Suy luận 5: *Luận chứng:* $\dfrac{p \Rightarrow p_1, p_1 \Rightarrow p_2, p_2 \Rightarrow p_3, p_3 \Rightarrow q}{p \Rightarrow q}$

$A_2 \Rightarrow A_3$

$A_3 \Rightarrow A_5$

$A_5 \Rightarrow A_8$

$A_8 \Rightarrow A_{10}$

$A_2 \Rightarrow A_{10}$

14. (Chứng minh bằng phản thí dụ) Tích của hai số vô tỉ không nhất thiết là một số vô tỉ. Chẳng hạn, $\sqrt{2}$ là một số vô tỉ nhưng $\sqrt{2}.\sqrt{2}$ là một số hữu tỉ.

15. (Chứng minh bằng phản thí dụ) $n^2 - n + 41$ không luôn luôn là một số nguyên tố. Chẳng hạn, $41^2 - 41 + 41 = 41^2$ là một hợp số.

16. (Chứng minh bằng phản chứng) Với n là một số nguyên, ta viết $n = 3q + r$ với $r = 0, 1, 2$ và $n^3 = 3(9q^3 + 9q^2r + 3qr^2) + r^3$. Do đó nếu n^3 chia hết cho 3 thì $r^3 = 0$ hay $r = 0$ tức là n chia hết cho 3.

Giả sử $\sqrt[3]{3}$ là số một số hữu tỉ, nghĩa là ta có thể viết $\sqrt[3]{3} = \frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$ và $(a, b) = 1$. Khi đó $a^3 = 3b^3$, nên a^3 chia hết cho 3, do đó a chia hết cho 3 hay

$a = 3c$ với $c \in \mathbb{N}$. Vì vậy, $b^3 = 9c^3$, nên b^3 chia hết cho 3, do đó b chia hết cho 3. Điều này mâu thuẫn với $(a, b) = 1$.

17. (Chứng minh bằng cách xét các trường hợp) Cho n là một số nguyên không chia hết cho 5. Khi đó $n = 5q + r$ với $r = 1, 2, 3, 4$ và $n^2 = 25q^2 + 10qr + r^2$.

– Với $r = 1$ ta có $n^2 = 5(5q^2 + 2qr) + 1$,
– Với $r = 2$ ta có $n^2 = 5(5q^2 + 2qr) + 4$,
– Với $r = 3$ ta có ta có $n^2 = 5(5q^2 + 2qr + 1) + 4$,
– Với $r = 4$ ta có ta có $n^2 = 5(5q^2 + 2qr + 3) + 1$.

Do đó n^2 chia cho 5 có dư 1 hoặc 4.

18. a) Tồn tại số thực x với mọi số thực y, ta có $x + y = 1$ (sai). Phủ định của mệnh đề này là:

$$\overline{(\exists x \in \mathbb{R})\ (\forall y \in \mathbb{R})\ (x + y = 1)} \equiv (\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists y \in \mathbb{R})\ (x + y \neq 1) \text{ (đúng)}.$$

b) Với mọi số thực x tồn tại số thực y, ta có $x + y = 1$ (đúng). Phủ định của mệnh đề này là:

$$\overline{(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists y \in \mathbb{R})\ (x + y = 1)} \equiv (\exists x \in \mathbb{R})\ (\forall y \in \mathbb{R})\ (x + y \neq 1) \text{ (sai)}.$$

c) Với mọi số tự nhiên n tồn tại số tự nhiên m, ta có $n < m$ (đúng). Phủ định của mệnh đề này là:

$$\overline{(\forall n \in \mathbb{N})\ (\exists m \in \mathbb{N})\ (n < m)} \equiv (\exists n \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N})\ (n \geq m) \text{ (sai)}.$$

d) Tồn tại số tự nhiên n với mọi số tự nhiên m, ta có $n < m$ (sai). Phủ định của mệnh đề này là:

$$\overline{(\exists n \in \mathbb{N})\ (\forall m \in \mathbb{N})\ (n < m)} \equiv (\forall n \in \mathbb{N})\ (\exists m \in \mathbb{N})\ (n \geq m) \text{ (đúng)}.$$

19. a) $\exists x\ (P(x) \wedge Q(x))$.
b) $\exists x\ (P(x) \wedge \overline{Q(x)})$.
c) $\forall x\ (P(x) \vee Q(x))$.
d) $\forall x\ \overline{(P(x) \vee Q(x))}$.

20. a) $\forall x\ F(x, A)$.
b) $\forall y\ F(B, y)$.
c) $\forall x\ \exists y\ F(x, y)$.
d) $\overline{\exists x\ \forall y\ F(x, y)}\ \equiv\ \forall x\ \exists y\ \overline{F(x, y)}$.
e) $\exists x\ \forall y\ F(x, y)$.
f) $\overline{\exists x\ F(x, A)\ \vee\ F(x, B)}\ \equiv\ \forall x\ \overline{F(x, A)}\ \wedge\ \overline{F(x, B)}$.
g) $\exists x\ \exists y\ \forall z(x \neq y \wedge\ F(C, x) \wedge F(C, y) \wedge\ (F(C, z) \Rightarrow (z = x \vee z = y)))$.

h) $\overline{\exists x\,\forall y\,\forall z\,((F(y,x)} \wedge (F(y,z) \Rightarrow z = x)))$.

i) $\overline{\exists x\ F(x,x)} \equiv \forall x\ \overline{F(x,x)}$.

j) $\exists x\ \exists y\ \forall z\ (x \neq y \wedge F(x,y) \wedge (F(x,z) \Rightarrow z = y))$.

21. Chú ý rằng $A \setminus B = A \cap \overline{B}$, trong đó $\overline{B}$ là phần bù của B trong tập U chứa A, B, C.

a) $(A \cap B) \setminus C = (A \cap B) \cap \overline{C} = A \cap (B \cap \overline{C}) = A \cap (B \setminus C)$.

b) $(A \cup B) \setminus C = (A \cup B) \cap \overline{C} = (A \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{C}) = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

c) $A \setminus (B \setminus C) = A \cap \overline{B \cap \overline{C}} = A \cap (\overline{B} \cup C) = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

d) $A \setminus B,\ B \setminus C,\ C \setminus A,\ A \cap B \cap C \subset A \cup B \cup C \Rightarrow (A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C) \subset A \cup B \cup C$.

$\forall x \in A \cup B \cup C \Rightarrow x \in A \vee x \in B \vee x \in C$.

– $x \in A$: i) $x \in B$: $+\ x \in C \Rightarrow x \in A \cap B \cap C$,
$+\ x \notin C \Rightarrow x \in B \setminus C$;
ii) $x \notin B \Rightarrow x \in A \setminus B$.

– $x \notin A$: i) $x \in B$: $+\ x \in C \Rightarrow C \setminus A$,
$+\ x \notin C \Rightarrow B \setminus C$;
ii) $x \notin B \Rightarrow x \in C \Rightarrow C \setminus A$.

Vậy $A \cup B \cup C \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C)$.

22. a) Đúng. $(x,y) \in (A \times B) \cap (C \times D) \Leftrightarrow (x,y) \in A \times B \wedge (x,y) \in C \times D \Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in C \wedge y \in D) \Leftrightarrow x \in A \cap C \wedge y \in B \cap D \Leftrightarrow (x,y) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$.

b) Không đúng. Ta chỉ có $(A \times B) \cup (C \times D) \subset (A \cup C) \times (B \cup D)$. Bao hàm thức ngược lại không có. Chẳng hạn, chọn $A = D = \emptyset$ và $B \neq \emptyset$, $C \neq \emptyset$ thì vế trái là tập rỗng trong khi vế phải khác rỗng.

23. Các câu a), b) và c) suy từ định nghĩa. Gọi p, q, r tương ứng là các mệnh đề $x \in A, x \in B, x \in C$. Khi đó $x \in A \oplus B$ chính là mệnh đề tuyển loại $p \oplus q$.

p	q	r	$p \vee q$	$p \wedge q$	$(p \vee q) \wedge (\overline{p \wedge q})$	$p \oplus q$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	0	0

$(p \oplus q) \oplus r$	$q \oplus r$	$p \oplus (q \oplus r)$	$p \wedge (q \oplus r)$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \oplus (p \wedge r)$
0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0
1	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0

Bảng giá trị chân lý ở trên cho các kết quả câu d) từ cột 6 và 7, câu e) từ cột 8 và 10, câu f) từ cột 11 và 13.

24. $U = A \cup B \cup C \cup D = \{a, b, c, d, e, g, h, i, n, o, p, t, u, v, x, y, z\}$.

A	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
B	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0
C	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1
D	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0
$A \cup B$	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0
$A \cap B$	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
$A \cup D^{(1)}$	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0
$B \cup C^{(2)}$	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
$(1) \cap (2)$	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0

25. $|A \cup B| = |A \cup (B \setminus A \cap B)| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

$|A \cup B \cup C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| = |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - (|A \cap C| + |B \cap C| - |(A \cap C) \cap (B \cap C)|) = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

Cho $A_1, A_2, \ldots, A_m$ là m tập hữu hạn của tập hữu hạn U. Bằng quy nạp có thể chứng minh được rằng:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m| = N_1 - N_2 + N_3 - \cdots + (-1)^{n-1} N_m,$$

trong đó, $N_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq m} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}|$, $1 \leq k \leq m$.

Nếu gọi $N = |U|$, $N_0 = |U \setminus A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m|$, ta có công thức sau và gọi là *nguyên lý bù trừ*.

$$N_0 = N - N_1 + N_2 - N_3 + \cdots + (-1)^n N_m.$$

26. Gọi U là tập hợp gồm các thành viên của cuộc họp, A_i là tập hợp các thành viên phát biểu về vấn đề i $(1 \leq i \leq 3)$. Khi đó số thành viên không phát biểu vấn đề nào là $N_0 = 1$ trong số các thành viên $N = |U| = 12$. Ta có $N_1 = |A_1| + |A_2| + |A_3| = 8 + 5 + 7 = 20$, $N_2 = |A_1 \cap A_2| + |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_3|$, $N_3 = |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$ và $N_2 \geq 3N_3$. Theo công thức về nguyên lý bù trừ, ta có $N_0 = N - N_1 + N_2 - N_3$ hay $1 = 12 - 20 + N_2 - N_3$ hay $N_3 = N_2 - 9$. Do đó $N_3 \geq 3N_3 - 9$ hay $2N_3 \leq 9$ hay $N_3 \leq \frac{9}{2} = 4,5$. Vậy nhiều lắm là có 4 người phát biểu cả 3 vấn đề.

CHƯƠNG II:
ÁNH XẠ

2.1. ÁNH XẠ.

2.1.1. Định nghĩa và thí dụ:

2.1.1.1. Mở đầu: Ánh xạ là một khái niệm cực kỳ quan trọng trong toán học. Ánh xạ dùng để khảo sát các tính chất của một tập hợp và các phần tử của nó. Ánh xạ biểu diễn các mối quan hệ giữa các tập hợp và các phần tử. Chẳng hạn, xét tập hợp các con người trên toàn thế giới và khảo sát độ tuổi của mỗi người. Ta ghép mỗi con người với một con số gọi là tuổi của người đó. Mỗi người đều có một con số, vì mỗi người không thể có hai tuổi nên mỗi người chỉ ứng với một con số duy nhất. Có thể nhiều người có cùng độ tuổi, nghĩa là nhiều người có thể ứng với cùng một con số. Có thể có một con số không được ứng với một người nào. Con số càng lớn thì độ tuổi của con người ứng với con số đó càng lớn. Như vậy, ta đã thực hiện một "ánh xạ" từ tập hợp gồm các con người trên trái đất vào tập hợp các số tự nhiên.

Các ánh xạ còn được dùng để định nghĩa các cấu trúc rời rạc như các dãy các xâu. Ánh xạ cũng dùng để biểu diễn thời gian một máy tính phải mất để giải một bài toán có quy mô đã cho. Các hàm (ánh xạ) đệ quy, tức là các hàm được định nghĩa qua chính nó được dùng xuyên suốt trong tin học.

2.1.1.2. Định nghĩa: Cho hai tập hợp A và B. Một ánh xạ f từ A vào B là một sự ghép đôi mỗi phần tử $a \in A$ với một phần tử duy nhất của B, ký hiệu $f(a)$. Phần tử $f(a) \in B$ được gọi là giá trị của f tại a. A được gọi là tập nguồn hay miền xác định và B gọi là tập đích hay miền giá trị. Một ánh xạ f từ A vào B còn được gọi là một hàm từ A vào B và được ký hiệu bởi

$$f : A \longrightarrow B \text{ hay } A \xrightarrow{f} B \text{ hay } f : x \in A \longmapsto f(x) \in B.$$

Thí dụ: 1) Gọi A là tập hợp các bài thi của các sinh viên trong một lớp nào đó. Khi chấm bài thi theo thang điểm 10, thầy giáo chấm thi đã thiết lập một ánh xạ từ A vào tập hợp $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

2) Cho A là một tập hợp. Một sự ghép đôi mỗi phần tử $x \in A$ với chính x là một ánh xạ từ A đến A. Ánh xạ này được gọi là ánh xạ đồng nhất của A và được ký hiệu là id_A hoặc 1_A.

3) Các hàm số $y = \sqrt{1 + x^2}$, $y = \sqrt{x}$, $y = \dfrac{1}{x+1}$ xác định lần lượt các ánh xạ sau:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+,\ g : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+,\ h : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R},$$

trong đó $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, $\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.

2.1.1.3. Định nghĩa: Cho ánh xạ $f : A \longrightarrow B$. Ta gọi tập hợp $G = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subset A \times B$ là đồ thị của ánh xạ f.

Như vậy, khi cho ánh xạ $f : A \longrightarrow B$, ta có tập con G của $A \times B$ có tính chất là với mọi $x \in A$, tồn tại duy nhất một cặp thuộc G, có thành phần thứ nhất là x. Đảo lại, nếu $G \subset A \times B$ có tính chất đó thì G cho ta một ánh xạ $f : A \longrightarrow B$ mà đồ thị của f là G. Vì vậy, người ta có thể đồng nhất ánh xạ $f : A \longrightarrow B$ với đồ thị G của nó.

2.1.1.4. Định nghĩa: Hai ánh xạ $f, g : A \longrightarrow B$ được gọi là bằng nhau, ký hiệu $f = g$, nếu với mọi $x \in A$, ta có $f(x) = g(x)$.

2.1.1.5. Định nghĩa: Cho ánh xạ $f : A \longrightarrow B$ và $X \subset A$. Ta gọi ánh xạ $g : X \longrightarrow B$ là thu hẹp của f lên X, ký hiệu là $g = f|_X$, nếu với mọi $x \in X$, $f(x) = g(x)$.Khi đó f gọi là mở rộng của g lên A.

Chú ý rằng, thu hẹp của mỗi ánh xạ lên một tập con của tập nguồn là duy nhất, nhưng mở rộng của mỗi ánh xạ lên một tập hợp chứa tập nguồn là không duy nhất.

Thí dụ: 1) Hai ánh xạ $f : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1] :\ x \longmapsto \sin x$ và $g : [0, 2\pi] \longrightarrow [-1, 1] : x \longmapsto \sin x$ là hai ánh xạ khác nhau vì chúng có các tập nguồn khác nhau. Tuy nhiên, $f|_{[0,2\pi]} = g$.

2) Cho $A = \{1, 2, 3, 4\},\ X = \{1, 2, 3\},\ B = \{a, b, c\}$ và ánh xạ $g : X \longrightarrow B : 1 \longmapsto a,\ 2 \longmapsto b,\ 3 \longmapsto c$. Khi đó có 3 mở rộng của g lên A là $f_1, f_2, f_3 : A \longrightarrow B$ cho bởi $f_i(1) = a, f_i(2) = b, f_i(3) = c\ (i = 1, 2, 3), f_1(4) = a, f_2(4) = b, f_3(4) = c$.

3) Cho các ánh xạ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+,\ g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z},\ h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi:

$$f(x) = |x|,\ g(x) = [x] \text{ (phần nguyên của } x),\ h(x) = x - [x] \text{ (phần lẻ của } x).$$

Khi đó $f|_{\mathbb{R}_0^+} = id_{\mathbb{R}_0^+},\ g|_{\mathbb{Z}} = id_{\mathbb{Z}},\ h|_{\mathbb{Z}} = 0$ (ánh xạ có mọi giá trị đều bằng 0 gọi là ánh xạ 0).

2.1.2. Ảnh và tạo ảnh:

2.1.2.1. Định nghĩa: Cho ánh xạ $f : A \longrightarrow B,\ x \in A,\ X \subset A,\ S \subset B$. Khi đó ta gọi:

– $f(x)$ là ảnh của x bởi f,
– $f(X) = \{f(x) \in B \mid x \in X\}$ là ảnh của X bởi f,
– $f^{-1}(S) = \{x \in A \mid f(x) \in S\}$ là tạo ảnh của S bởi f.

Đặc biệt, với $y \in B,\ f^{-1}(\{y\}) = \{x \in A \mid f(x) = y\}$ và viết đơn giản là $f^{-1}(y)$. Khi $X = A$, ta gọi $f(A)$ là ảnh của f và ký hiệu là $\mathrm{Im} f$. Rõ ràng khi $X = \emptyset$ ta có $f(\emptyset) = \emptyset$. Từ định nghĩa ta có:

$$X \subset X' \subset A \Rightarrow f(X) \subset f(X') \subset f(A),\ S \subset S' \subset B \Rightarrow f^{-1}(S) \subset f^{-1}(S') \subset A.$$

Thí dụ: 1) Cho $A = \{a, b, c, d, e\},\ B = \{1, 2, 3, 4\},\ X = \{a, b, d\},\ Y = \{3, 4\}$ và $f : A \longrightarrow B$ xác định bởi $f(a) = 1,\ f(b) = 4,\ f(c) = 2,\ f(d) = 1,\ f(e) = 4$. Khi đó ta có:

$$f(X) = \{1, 4\},\ \mathrm{Im}f = \{1, 2, 4\},\ f^{-1}(Y) = \{b, e\},\ f^{-1}(3) = \emptyset,\ f^{-1}(1) = \{a, d\}.$$

2) Cho ánh xạ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = \cos x$. Khi đó ta có:

$$f^{-1}(2) = \emptyset,\ f^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \{\pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\},\ \mathrm{Im}f = [-1, 1].$$

2.1.2.2. Mệnh đề: Cho ánh xạ $f : A \longrightarrow B$, X và Y là các tập con của A, S và T là các tập con của B. Khi đó ta có:

1) $X \subset f^{-1}(f(X))$.
2) $f(f^{-1}(S)) \subset S$.
3) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$.
4) $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$.
5) $f^{-1}(S \cup T) = f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T)$.
6) $f^{-1}(S \cap T) = f^{-1}(S) \cap f^{-1}(T)$.
7) $f(A \setminus X) \supset f(A) \setminus f(X)$.
8) $f^{-1}(B \setminus S) = A \setminus f^{-1}(S)$.

Chứng minh: 1) $x \in X \Rightarrow f(x) \in f(X) \Rightarrow x \in f^{-1}(f(X))$. Do đó $X \subset f^{-1}(f(X))$.

2) $y \in f(f^{-1}(S)) \Rightarrow \exists x \in f^{-1}(S), f(x) = y \Rightarrow y = f(x) \in S$. Do đó $f(f^{-1}(S)) \subset S$.

3) $X, Y \subset X \cup Y \Rightarrow f(X), f(Y) \subset f(X \cup Y) \Rightarrow f(X) \cup f(Y) \subset f(X \cup Y)$.

$y \in f(X \cup Y) \Rightarrow \exists x \in X \cup Y, y = f(x) \Rightarrow (y = f(x), x \in X) \vee (y = f(x), x \in Y) \Rightarrow y \in f(X) \cup f(Y)$. Do đó $f(X \cup Y) \subset f(X) \cup f(Y)$.

4) $y \in f(X \cap Y) \Rightarrow \exists x \in X \cap Y, y = f(x) \Rightarrow (y = f(x), x \in X) \wedge (y = f(x), x \in Y) \Rightarrow y \in f(X) \cap f(Y)$. Do đó $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$.

5) $x \in f^{-1}(S \cup T) \Leftrightarrow f(x) \in S \cup T \Leftrightarrow (f(x) \in S) \vee (f(x) \in T) \Leftrightarrow (x \in f^{-1}(S)) \vee (x \in f^{-1}(T)) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T)$. Do đó $f^{-1}(S \cup T) = f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T)$.

6) $x \in f^{-1}(S \cap T) \Leftrightarrow f(x) \in S \cap T \Leftrightarrow (f(x) \in S) \wedge (f(x) \in T) \Leftrightarrow (x \in f^{-1}(S)) \wedge (x \in f^{-1}(T)) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(S) \cap f^{-1}(T)$. Do đó $f^{-1}(S \cap T) = f^{-1}(S) \cap f^{-1}(T)$.

7) $y \in f(A) \setminus f(X) \Rightarrow (y \in f(A)) \wedge (y \notin f(X)) \Rightarrow (\exists x \in A, y = f(x)) \wedge x \notin X \Rightarrow x \in A \setminus X, y = f(x) \Rightarrow y \in f(A \setminus X)$. Do đó $f(A) \setminus f(X) \subset f(A \setminus X)$.

8) $x \in f^{-1}(B \setminus S) \Leftrightarrow f(x) \in B \setminus S \Leftrightarrow (f(x) \in B) \wedge (f(x) \notin S) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin f^{-1}(S)) \Leftrightarrow x \in A \setminus f^{-1}(S)$. Do đó $f^{-1}(B \setminus S) = A \setminus f^{-1}(S)$.

Trong 1), 2), 4), 7), các bao hàm ngược lại nói chung không đúng.

Thật vậy, chọn $A = \{1, 2, 3, 4\},\ B = \{1, 2, 3\},\ X = \{1, 2\},\ Y = \{3, 4\},\ S = \{1, 3\}$ và $f : A \longrightarrow B$ là ánh xạ xác định bởi $f(1) = 1,\ f(2) = 2,\ f(3) = 1,\ f(4) = 1$ thì ta có:

$$X \underset{\neq}{\subseteq} f^{-1}(f(X)),\ f(f^{-1}(S)) \underset{\neq}{\subseteq} S,$$
$$f(X \cap Y) \underset{\neq}{\subseteq} f(X) \cap f(Y),\ f(A \setminus X) \underset{\neq}{\supseteq} f(A) \setminus f(X).$$

2.1.3. Đơn ánh, toàn ánh, song ánh:

2.1.3.1. Định nghĩa: Ánh xạ $f : A \longrightarrow B$ được gọi là một đơn ánh nếu với mọi $x_1, x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2$ kéo theo $f(x_1) \neq f(x_2)$ (hay $f(x_1) = f(x_2)$ kéo theo $x_1 = x_2$). Người ta còn gọi một đơn ánh là một ánh xạ một đối một.

2.1.3.2. Định nghĩa: Ánh xạ $f : A \longrightarrow B$ được gọi là một toàn ánh nếu $f(A) = B$, tức là với mọi $y \in B$, tồn tại $x \in A$ sao cho $f(x) = y$. Người ta còn gọi toàn ánh $f : A \longrightarrow B$ là một ánh xạ từ A lên B.

2.1.3.3. Định nghĩa: Ánh xạ $f : A \longrightarrow B$ được gọi là một song ánh hay một ánh xạ một đối một từ A lên B nếu nó vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh, tức là với mọi $y \in B$, tồn tại duy nhất $x \in A$ sao cho $f(x) = y$.

Thí dụ: 1) Cho A là một tập hợp và $B \subset A$. Ánh xạ đồng nhất id_A là một song ánh và "phép bao hàm" $B \longrightarrow A : x \longmapsto x$ là một đơn ánh.

2) Ánh xạ $n \in \mathbb{Z} \longmapsto -n \in \mathbb{Z}$ là một song ánh, ánh xạ $n \in \mathbb{Z} \longmapsto 2n \in \mathbb{Z}$ là một đơn ánh nhưng không phải là toàn ánh và ánh xạ $n \in \mathbb{Z} \longmapsto n^2 \in \mathbb{Z}$ không phải là đơn ánh và cũng không phải là toàn ánh.

3) Ánh xạ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^3$ là một song ánh nhưng ánh xạ $g : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^3$ là một đơn ánh và không phải là một toàn ánh.

4) Ánh xạ $x \in \mathbb{R} \longmapsto \sin x \in \mathbb{R}$ không là đơn ánh và cũng không là toàn ánh nhưng ánh xạ $x \in \mathbb{R} \longmapsto \sin x \in [-1, 1]$ là một toàn ánh và không phải là một đơn ánh.

2.1.4. Hợp thành của các ánh xạ:

2.1.4.1. Định nghĩa: Cho hai ánh xạ $f : A \longrightarrow B$ và $g : B \longrightarrow C$. Khi đó ta có ánh xạ $h : A \longrightarrow C$ cho bởi $h(x) = g(f(x))$ và h được gọi là hợp thành hay tích của ánh xạ f và ánh xạ g, ký hiệu $g \circ f$ hay gf.

Thí dụ: 1) Cho ánh xạ $f : A \longrightarrow B$. Khi đó $f \circ id_A = f$ và $id_B \circ f = f$.

2) Cho hai ánh xạ $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cho bởi $f(x) = 3x + 2,\ g(x) = \cos x$. Khi đó $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(3x + 2) = \cos(3x + 2)$ và $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\cos x) = 3\cos x + 2$. Rõ ràng $f \circ g \neq g \circ f$.

3) Cho hai ánh xạ $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ cho bởi $f(x) = \dfrac{1}{x}$ và $g(x) = x^2 + 1$. Khi đó ta có $g \circ f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^+ : x \longmapsto g(f(x)) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2}$.

2.1.4.2. Mệnh đề: Cho ba ánh xạ $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$, $h : C \longrightarrow D$. Khi đó ta có $(h \circ g) \circ f \ = \ h \circ (g \circ f)$.

Chứng minh: Với mọi $x \in A$, ta có

$$((h \circ g) \circ f)(x) = h \circ g(f(x)) = h(g(f(x))) = h(g \circ f(x)) = (h \circ (g \circ f))(x).$$

Do đó $(h \circ g) \circ f \ = \ h \circ (g \circ f)$.

Từ đó ta nói phép hợp thành ánh xạ có tính kết hợp.

2.1.4.3. Mệnh đề. Cho hai ánh xạ $f : A \longrightarrow B$ và $g : B \longrightarrow C$. Khi đó:

1) Nếu f và g là các đơn ánh thì $g \circ f$ là đơn ánh.

2) Nếu f và g là các toàn ánh thì $g \circ f$ là toàn ánh.

3) Nếu f và g là các song ánh thì $g \circ f$ là song ánh.

Chứng minh: 1) $\forall x, x' \in A$, $g \circ f(x) = g \circ f(x') \Rightarrow g(f(x)) = g(f(x')) \Rightarrow f(x) = f(x')$ (do g là đơn ánh) $\Rightarrow x = x'$ (do f là đơn ánh). Vậy $g \circ f$ là đơn ánh.

2) $g \circ f(A) = \{g \circ f(x) \mid x \in A\} = \{g(f(x)) \mid f(x) \in f(A)\} =$
$= \{g(f(x)) \mid f(x) \in B\}$ (do f là toàn ánh)$= g(B) = C$ (do g là toàn ánh). Vậy $g \circ f$ là toàn ánh.

3) Suy từ **1)** và **2)**.

2.1.4.4. Định nghĩa: Cho $f : A \longrightarrow B$ và $g : B \longrightarrow A$ là hai ánh xạ sao cho $g \circ f = id_A$ và $f \circ g = id_B$. Khi đó ta nói g là ánh xạ ngược của f.

Thí dụ: 1) Cho hai ánh xạ $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = 2x + 5$ và $g(x) = \dfrac{x-5}{2}$. Với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có:

$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2x+5) = \dfrac{(2x+5)-5}{2} = x = id_{\mathbb{R}}(x)$.

$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\dfrac{x-5}{2}) = 2(\dfrac{x-5}{2}) + 5 = x = id_{\mathbb{R}}(x)$.

Vậy g là ánh xạ ngược của f và f cũng là ánh xạ ngược của g.

2) Cho hai ánh xạ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ và $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = a^x$ và $g(x) = \log_a x$, ở đây $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$. Với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có:

$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(a^x) = \log_a(a^x) = x = id_{\mathbb{R}}(x)$.

$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\log_a x) = a^{\log_a x} = x = id_{\mathbb{R}^+}$.

Vậy g là ánh xạ ngược của f và f cũng là ánh xạ ngược của g.

2.1.4.5. Mệnh đề: Ánh xạ $f : A \longrightarrow B$ có ánh xạ ngược khi và chỉ khi f là một song ánh.

Chứng minh: Giả sử f có ánh xạ ngược là $g : B \longrightarrow A$. Từ định nghĩa ta có $g \circ f = id_A$ và $f \circ g = id_B$. Khi đó với mọi $x, x' \in A$,

$f(x) = f(x') \Rightarrow g(f(x)) = g(f(x')) \Rightarrow x = x'$.

Vậy f là một đơn ánh. Ngoài ra, với mọi $y \in B$, tồn tại $x = g(y) \in A$ sao cho $f(x) = f(g(y)) = y$. Vậy f là một toàn ánh. Do đó f là một song ánh.

Đảo lại, giả sử f là một song ánh. Quy tắc cho tương ứng mỗi $y \in B$ với phần tử duy nhất của $f^{-1}(y)$ xác định ánh xạ $g : B \longrightarrow A$ và dễ dàng có được $g \circ f = id_A$ và $f \circ g = id_B$. Do đó g là ánh xạ ngược của f.

2.1.4.6. Mệnh đề: Nếu $g, g' : B \longrightarrow A$ là hai ánh xạ ngược của f thì $g = g'$.

Chứng minh: Do $g \circ f = id_A$ và $f \circ g' = id_B$ nên ta có

$g = g \circ id_B = g \circ (f \circ g') = (g \circ f) \circ g' = id_A \circ g' = g'$.

Ký hiệu: Ánh xạ ngược duy nhất của ánh xạ f thường được ký hiệu là f^{-1}. Dễ dàng thấy rằng: $(f^{-1})^{-1} = f$, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

2.1.4.7. Mệnh đề: Cho A, B là hai tập hữu hạn có cùng bản số và ánh xạ $f : A \longrightarrow B$. Khi đó các điều sau tương đương.

1) f là một đơn ánh.

2) f là một toàn ánh.

3) f là một song ánh.

Chứng minh: 1) $\Rightarrow$ 2) vì $|A| = |B|$ (giả thiết) và $|A| = |f(A)|$ (do f là đơn ánh), nên $|f(A)| = |B|$. Do đó $f(A) = B$ hay f là một toàn ánh.

2) $\Rightarrow$ 3) Vì f là toàn ánh nên nếu f không là song ánh thì f không là đơn ánh. Khi đó tồn tại hai phần tử của A có chung ảnh. Vì vậy, $|B| = |f(A)| < |A|$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết.

3) $\Rightarrow$ 1) Hiển nhiên.

2.1.5. Họ những phần tử của một tập hợp:

2.1.5.1. Định nghĩa: Cho I là một tập hợp tùy ý khác rỗng và một ánh xạ $f : I \longrightarrow A$. Khi đó, với mỗi $\alpha \in I$ ta ký hiệu $f(\alpha)$ bởi x_α và nói các phần tử x_α với $\alpha \in I$ thành lập một họ những phần tử của A được đánh số bởi tập hợp I, ký hiệu $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$, còn tập hợp I gọi là tập chỉ số. Nếu các x_α là những tập hợp thì ta gọi $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ là một họ tập hợp đánh số bởi tập hợp I. Nếu các phần tử của A là những tập con của một tập hợp U thì ta gọi $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ là một họ những tập con của tập hợp U.

Thí dụ: 1) Cho ánh xạ $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} : n \longmapsto a_n = f(n)$. Khi đó ta có họ số thực $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ được đánh số bởi tập hợp $\mathbb{N}$ các số tự nhiên và ta thường gọi là dãy số thực $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2) Cho ánh xạ $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}) : n \longmapsto J_n = \{0, 1, \ldots, n\}$. Khi đó ta có dãy những tập con của tập hợp $\mathbb{N}$:

$$J_0 \subset J_1 \subset \cdots \subset J_n \subset \cdots .$$

2.1.5.2. Định nghĩa: Cho $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ là một họ tập hợp. Ta gọi

– Hợp của họ $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ là một tập hợp, ký hiệu $\underset{\alpha\in I}{\cup} A_\alpha$, xác định bởi

$$\underset{\alpha\in I}{\cup} A_\alpha \;=\; \{\, x \mid \exists\alpha \in I,\ x \in A_\alpha \,\}.$$

– Giao của họ $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ là một tập hợp, ký hiệu $\underset{\alpha\in I}{\cap} A_\alpha$, xác định bởi

$$\underset{\alpha\in I}{\cap} A_\alpha \;=\; \{\, x \mid \forall\alpha \in I,\ x \in A_\alpha \,\}.$$

– Tích Descartes của họ $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ là một tập hợp, ký hiệu $\prod\limits_{\alpha\in I} A_\alpha$, xác định bởi

$$\prod_{\alpha\in I} A_\alpha \;=\; \{\, (x_\alpha)_{\alpha\in I} \mid \forall\alpha \in I,\ x_\alpha \in A_\alpha \,\}.$$

Nếu với mọi $\alpha \in I,\ A_\alpha = A$ thì $\prod\limits_{\alpha\in I} A_\alpha$ gọi là lũy thừa Descartes bậc I của A và ký hiệu là A^I.

Thí dụ: 1) Xét họ tập con $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ của tập hợp $\mathbb{N}$, trong đó $J_n = \{0, 1, \dots, n\}$. Khi đó $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} J_n = \mathbb{N}$ và $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cap} J_n = \{0\}$.

2) Lũy thừa Descartes $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ là tập hợp các dãy số thực.

2.2. GIẢI TÍCH TỔ HỢP.

2.2.1. Những nguyên lý đếm cơ bản:

2.2.1.1. Quy tắc cộng: Giả sử có hai công việc. Việc thứ nhất có thể làm bằng n_1 cách, việc thứ hai có thể làm bằng n_2 cách và nếu hai việc này không thể làm đồng thời thì sẽ có $n_1 + n_2$ cách làm một trong hai việc đó.

Quy tắc cộng có thể mở rộng cho trường hợp có nhiều hơn hai công việc. Giả sử các việc $T_1, T_2, \dots, T_m$ có thể làm tương ứng bằng $n_1, n_2, \dots, n_m$ cách và không có hai việc nào có thể làm đồng thời. Khi đó số cách làm một trong m việc đó là $n_1 + n_2 + \cdots + n_m$.

Nguyên lý cộng có thể phát biểu dưới dạng ngôn ngữ tập hợp như sau: Nếu $A_1, A_2, \dots, A_n$ là các tập hữu hạn đôi một rời nhau, khi đó số phần tử của hợp các tập hợp này là

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| \;=\; |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|.$$

Thí dụ: Một sinh viên có thể chọn bài thực hành máy tính từ một trong ba danh sách tương ứng có 24, 16 và 20 bài. Có bao nhiêu cách chọn bài thực hành?

Có 24 cách chọn bài thực hành từ danh sách thứ nhất, 16 cách từ danh sách thứ hai và 20 cách từ danh sách thứ ba. Vì vậy có $24 + 16 + 20 = 60$ cách chọn bài thực hành.

2.2.1.2. Quy tắc nhân: Giả sử một nhiệm vụ nào đó được tách làm hai việc. Việc thứ nhất có thể làm bằng n_1 cách, việc thứ hai có thể làm bằng n_2 cách sau khi việc thứ nhất đã được làm, khi đó sẽ có $n_1.n_2$ cách thực hiện nhiệm vụ này.

Người ta thường sử dụng quy tắc nhân mở rộng. Giả sử một nhiệm vụ nào đó được thi hành bằng cách thực hiện các việc $T_1, T_2, \dots, T_m$ và nếu việc T_i có thể làm bằng n_i cách sau khi các việc $T_1, T_2, \dots, T_{i-1}$ đã được làm. Khi đó có $n_1.n_2.\dots.n_m$ cách thi hành nhiệm vụ đã cho.

Nguyên lý nhân có thể phát biểu dưới dạng ngôn ngữ tập hợp như sau: Nếu $A_1, A_2, \dots, A_n$ là các tập hữu hạn, khi đó số phần tử của tích Descartes $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ là

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| \;=\; |A_1|.|A_2|\dots|A_n|.$$

Thí dụ: 1) Người ta có thể ghi nhãn cho những chiếc ghế trong một giảng đường bằng một chữ cái (trong bảng chữ cái tiếng Anh) và một số nguyên dương không vượt quá 100. Bằng cách như vậy, nhiều nhất có bao nhiêu chiếc ghế có thể được ghi nhãn khác nhau.

Thủ tục ghi nhãn cho một chiếc ghế gồm hai việc, gán một trong 26 chữ cái và sau đó gán một trong 100 số nguyên dương. Quy tắc nhân chỉ rằng có $26.100 = 2600$ cách khác nhau để gán nhãn cho một chiếc ghế. Như vậy nhiều nhất ta có thể gán nhãn cho 2600 chiếc ghế.

2) Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài n?

Mỗi một trong n bit của xâu nhị phân có thể chọn bằng hai cách vì mỗi bit hoặc bằng 0 hoặc bằng 1. Bởi vậy, theo quy tắc nhân cho thấy có tổng cộng 2^n xâu nhị phân khác nhau độ dài n.

Cho X là một tập hợp có n phần tử. Khi đó các tập con của X tương ứng 1-1 với các xâu nhị phân độ dài n (xem 1.2.3.5). Vì vậy tập lũy thừa $\mathcal{P}(X)$ có bản số là 2^n.

3) Có thể tạo được bao nhiêu ánh xạ từ một tập hợp A có m phần tử vào một tập hợp B có n phần tử.

Theo định nghĩa, một ánh xạ xác định trên A có giá trị trên B là một phép tương ứng mỗi phần tử của A với một phần tử nào đó của B. Rõ ràng sau khi đã chọn được ảnh của $i-1$ phần tử đầu, để chọn ảnh của phần tử thứ i của A ta có n cách. Vì vậy theo quy tắc nhân, ta có $n.n.\dots n = n^m$ ánh xạ xác định trên A nhận giá trị trên B.

4) Có bao nhiêu đơn ánh xác định trên tập hợp A có m phần tử và nhận giá trị trên tập hợp B có n phần tử.

Nếu $m > n$ thì với mọi ánh xạ, ít nhất có hai phần tử của A có cùng một ảnh, điều đó có nghĩa là không có đơn ánh từ A đến B. Bây giờ giả sử $m \leq n$ và gọi các phần tử của A là $a_1, a_2, \dots, a_m$. Rõ ràng có n cách chọn ảnh cho phần tử a_1. Vì ánh xạ là đơn ánh nên ảnh của phần tử a_2 phải khác ảnh của a_1 nên chỉ có $n-1$ cách chọn ảnh cho phần tử a_2. Nói chung, để chọn ảnh của a_k, ta có $n-k+1$ cách. Theo quy tắc nhân, ta có

$$n(n-1)\dots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

đơn ánh từ tập hợp A đến tập hợp B.

2.2.2. Chỉnh hợp và hoán vị:

2.2.2.1. Định nghĩa: Cho tập hợp X có n phần tử. Mỗi cách sắp xếp có thứ tự k phần tử của tập hợp X được gọi là một chỉnh hợp (không lặp) chập k của n phần tử của X.

Ký hiệu số chỉnh hợp chập k của n phần tử là A_n^k. Khi đó ta có

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Thật vậy, phần tử đầu tiên của chỉnh hợp có thể chọn bằng n cách, vì tập hợp X có n phần tử, phần tử thứ hai của chỉnh hợp được chọn từ $n-1$ phần tử còn lại của tập hợp X, tức là ta có $n-1$ cách chọn phần tử này. Tương tự ta có $n-2$ cách chọn phần tử thứ ba và cứ như thế ta có $n-k+1$ cách chọn phần tử thứ k. Theo quy tắc nhân ta được $n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$ chỉnh hợp chập k của n phần tử.

Như vậy, số chỉnh hợp chập k của n phần tử chính là số đơn ánh từ tập hợp k phần tử vào tập hợp n phần tử.

Thí dụ: 1) Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau mà không xuất hiện chữ số 0?

Mỗi số cần tìm là một chỉnh hợp chập 4 của 9 phần tử của tập hợp $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Vậy số các số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau lấy từ 9 chữ số đã cho bằng $A_9^4 = \dfrac{9!}{5!} = 3024$.

2) Giả sử có tám vận động viên chạy thi. Người thắng sẽ nhận được huy chương vàng, người về đích thứ hai nhận huy chương bạc, người về đích thứ ba nhận huy chương đồng. Có bao nhiêu cách trao các huy chương này, nếu tất cả các kết cục của cuộc thi đều có thể xảy ra?

Số cách trao huy chương chính là số chỉnh hợp chập 3 của tập hợp 8 phần tử. Vì vậy có $A_8^3 = 6.7.8 = 336$ cách trao huy chương.

2.2.2.2. Định nghĩa: Cho tập hợp X có n phần tử. Mỗi cách sắp xếp có thứ tự n phần tử của X được gọi là một hoán vị của n phần tử của X. Theo định nghĩa trên, mỗi hoán vị của X là một chỉnh hợp chập n của n phần tử. Ngoài ra, mỗi hoán vị của X chính là một song ánh từ X lên X.

Ký hiệu số các hoán vị của X là P_n và ta có $P_n = n!$.

Thí dụ: 1) Có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi cho 5 em học sinh trên một ghế dài?

Mỗi cách sắp xếp chỗ ngồi cho 5 em học sinh là một hoán vị của 5 phần tử. Vậy số cách sắp xếp chỗ ngồi là $5! = 120$.

2) Giả sử rằng có một du khách định đi du lịch tại 8 thành phố. Anh ta bắt đầu cuộc hành trình của mình tại một thành phố nào đó, nhưng có thể đến 7 thành phố kia theo bất kỳ thứ tự nào mà anh ta muốn. Hỏi anh ta có thể đi qua tất cả các thành phố này theo bao nhiêu lộ trình khác nhau?

Số lộ trình có thể giữa các thành phố bằng số hoán vị của 7 phần tử, vì thành phố đầu tiên đã được xác định, nhưng 7 thành phố còn lại có thể có thứ tự tuỳ ý. Do đó có $7! = 5040$ cách để người bán hàng chọn hành trình của mình.

2.2.3. Tổ hợp:

2.2.3.1. Định nghĩa: Một tổ hợp chập k của một tập hợp là một cách chọn không có thứ tự k phần tử của tập hợp đã cho. Như vậy, mỗi tổ hợp chập k chính là một tập con k phần tử của tập hợp ban đầu.

Ta có thể xác định số tổ hợp chập k của tập hợp n phần tử. Để làm điều đó, chú ý rằng các chỉnh hợp chập k của một tập hợp có thể nhận được bằng cách trước hết lập các tổ hợp chập k, rồi sắp thứ tự cho các phần tử thuộc các tổ hợp đó. Do đó nếu gọi C_n^k là số các tổ hợp chập k từ tập hợp n phần tử thì ta có $A_n^k = C_n^k.k!$ hay

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{1}$$

Số C_n^k chính là số các tập con k phần tử của tập n phần tử và là số các xâu nhị phân độ dài n có đúng k bit 1. Số C_n^k còn được gọi là hệ số nhị thức, sở dĩ có tên như vậy là vì nó xuất hiện trong khai triển nhị thức:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

Từ định nghĩa, ta có $C_n^n = 1$ và $C_n^0 = 1$ (vì chỉ có một tập con gồm n phần tử của tập hợp n phần tử và chỉ có một tập con có 0 phần tử, tức là tập $\emptyset$). Với quy ước $0! = 1$ thì công thức (1) đúng cho cả trường hợp $k = 0$ và $k = n$.

Thí dụ: 1) Tìm số giao điểm tối đa của **a)** 12 đường thẳng phân biệt, **b)** 6 đường tròn phân biệt, **c)** 12 đường thẳng và 6 đường tròn trên.

Hai đường thẳng phân biệt có tối đa một giao điểm nên số giao điểm tối đa của 12 đường thẳng phân biệt là $C_{12}^2 = \dfrac{12!}{2!10!} = 66$ điểm.

Hai đường tròn phân biệt có tối đa hai giao điểm nên số giao điểm tối đa của 6 đường tròn phân biệt là $2C_6^2 = 2.15 = 30$ điểm.

Một đường thẳng cắt một đường tròn tối đa tại điểm nên số giao điểm tối đa của 12 đường thẳng và 6 đường tròn trên là $66 + 30 + 12.6.2 = 240$ điểm.

2) Một lớp học gồm 20 nam và 11 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách thành lập một tốp ca gồm 4 nam và 3 nữ sao cho anh A và chị B (trong lớp học đó) không đồng thời có mặt.

Số cách chọn 4 nam là C_{20}^4 và số cách chọn 3 nữ là C_{11}^3, nên số cách chọn tốp ca là $C_{20}^4.C_{11}^3$. Số cách chọn 4 nam trong đó có anh A là C_{19}^3 và số cách chọn 3 nữ trong đó có chị B là C_{10}^2. Vì vậy số cách thành lập tốp ca theo yêu cầu là $C_{20}^4.C_{11}^3 - C_{19}^3.C_{10}^2 = 755.820$.

2.2.3.2. Mệnh đề (Hằng đẳng thức Pascal): Cho n và k là các số nguyên dương và $k < n$. Khi đó:

$$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} = C_n^k. \tag{2}$$

Chứng minh:

$$\begin{aligned} C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} = \frac{k(n-1)! + (n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{(k+n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k. \end{aligned}$$

Hằng đẳng thức Pascal là cơ sở để sắp xếp hình học các hệ số nhị thức thành tam giác, trong đó hàng thứ n của tam giác gồm các hệ số nhị thức C_n^k $(0 \le k \le n)$. Tam giác này được gọi là tam giác Pascal. Hằng đẳng thức Pascal chỉ ra rằng khi cộng hai hệ số nhị thức liền kề C_{n-1}^{k-1} và C_{n-1}^{k} trong tam giác Pascal sẽ nhận được hệ số nhị thức C_n^k của hàng tiếp theo ở dưới hệ số C_{n-1}^k.

$$\begin{array}{llllll} 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \end{array}$$

....

2.2.3.3. Mệnh đề (Hằng đẳng thức Vandermonde): Cho m, n, k là 3 số tự nhiên sao cho $k \le m$ và $k \le n$. Khi đó:

$$C_{m+n}^k = \sum_{i=0}^{k} C_m^i.C_n^{k-i}. \tag{3}$$

Chứng minh: Xét hai tập hợp rời nhau A và B lần lượt có m và n phần tử. Khi đó số cách chọn k phần tử của $A\cup B$ là C_{m+n}^k. Mặt khác, với mỗi i ($0\leq i\leq k$), chọn k phần tử của $A\cup B$ là chọn i phần tử của A và $k-i$ phần tử của B. Theo quy tắc nhân, điều này có thể làm bằng $C_m^i.C_n^{k-i}$ cách. Vì vậy, số cách chọn k phần tử của $A\cup B$ là $\sum\limits_{i=0}^{k} C_m^i.C_n^{k-i}$ và từ đó ta có công thức (3).

2.2.3.4. Mệnh đề (Công thức nhị thức Newton): Cho x và y là hai biến và n là một số nguyên dương. Khi đó:

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}. \tag{4}$$

Chứng minh: Các số hạng trong khai triển của $(x+y)^n=(x+y)\dots(x+y)$ (n lần) sẽ có dạng x^ky^{n-k} với $0\leq k\leq n$. Để nhận được số hạng dạng x^ky^{n-k}, ta chọn x từ k tổng $x+y$ và có C_n^k cách chọn như vậy, khi đó y được chọn từ $n-k$ tổng còn lại. Từ đó ta có công thức (4).

Trong khai triển trên, chọn $x=y=1$, ta có số các tập con của một tập hợp n phần tử là $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k=2^n$.

2.3. LỰC LƯỢNG CỦA TẬP HỢP.

2.3.1. Định nghĩa: Ta nói tập hợp X cùng lực lượng (hay cùng bản số) với tập hợp Y nếu tồn tại một song ánh từ X vào Y.

Giả sử tập hợp A có n phần tử. Điều này có nghĩa là có một tương ứng một-một giữa các phần tử của A với các số tự nhiên $1,2,\dots,n$. Nói cách khác, A có n phần tử nếu và chỉ nếu nó cùng lực lượng với tập hợp $\{1,2,\dots,n\}$.

Sau đây chúng ta sẽ khảo sát lớp các tập hợp vô hạn có "ít phần tử nhất", đó là các tập đếm được.

2.3.2. Định nghĩa: Tập hợp X được gọi là đếm được nếu nó cùng lực lượng với tập hợp $\mathbb{N}$ các số tự nhiên.

Thí dụ: Tập hợp $\mathbb{Z}$ các số nguyên là một tập đếm được. Thật vậy, ánh xạ $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{Z}$ xác định bởi:

$$f(n)=\begin{cases} 1+k & \text{nếu } n=2k,\\ 1-k & \text{nếu } n=2k-1.\end{cases}$$

là một song ánh.

Tương tự, tập hợp các số tự nhiên chẵn và tập hợp các số tự nhiên lẻ đều là các tập đếm được.

Thí dụ trên cho thấy một tập vô hạn có thể có cùng lực lượng với một tập con thực sự của nó.

2.3.3. Mệnh đề: Mỗi tập con vô hạn của một tập đếm được cũng là một tập đếm được.

Chứng minh: Giả sử $A = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ là một tập đếm được và B là một tập con vô hạn của A. Gọi i_0 là số tự nhiên nhỏ nhất sao cho $a_{i_0} \in B$, i_1 là số tự nhiên nhỏ nhất sao cho $a_{i_1} \in B \setminus \{a_{i_0}\}$. Một cách quy nạp, i_n là số tự nhiên nhỏ nhất sao cho $a_{i_n} \in B \setminus \{a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_{n-1}}\}$...

Bằng cách đó, các phần tử của B được xếp thành một dãy vô hạn $B = \{a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_n}, \dots\}$. Nói cách khác, có một song ánh $\mathbb{N} \longrightarrow B$ đặt n tương ứng với a_{i_n} hay B là một tập đếm được.

2.3.4. Mệnh đề: Hợp đếm được các tập hợp đếm được là tập đếm được.

Chứng minh: Giả sử A_i $(i = 1, 2, \dots,)$ là các tập đếm được. Ta chứng minh $A = \bigcup\limits_i A_i$ là tập đếm được. Ta liệt kê các phần tử của $A_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}, \dots\}$ thành một bảng:

$$\begin{array}{ccccccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1n} & \dots \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2n} & \dots \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} & \dots \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \dots & a_{4n} & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \dots & a_{nn} & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

Rồi đánh số các phần tử của A theo thứ tự chiều mũi tên trong bảng trên sao cho không có phần tử nào bị đánh số hai lần. Bằng cách đó, ta liệt kê được tất cả các phần tử của tập hợp A, nghĩa là A đếm được.

2.3.5. Hệ quả: Tập $\mathbb{Q}$ các số hữu tỉ là đếm được.

Chứng minh: Với mỗi số nguyên dương m, ký hiệu $\mathbb{Q}_m = \{\frac{n}{m} \in \mathbb{Q} \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Khi đó $\mathbb{Q}_m$ là đếm được do cùng lực lượng với $\mathbb{Z}$. Vì $\mathbb{Q} = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \mathbb{Q}_m$, nên từ mệnh đề trên $\mathbb{Q}$ là đếm được.

2.3.6. Mệnh đề: Tích Descartes của hai tập đếm được là đếm được.

Chứng minh: Giả sử A và B là hai tập đếm được, với $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}$. Theo định nghĩa $A \times B = \{(a_i, b_j) \mid i, j = 1, 2, \dots\}$. Với mỗi i, xét tập $C_i = \{(a_i, b_j) \mid j = 1, 2, \dots\}$. Rõ ràng C_i đếm được vì cùng lực lượng với B. Khi đó $A \times B = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} C_i$ là đếm được.

Chúng ta thừa nhận kết quả sau đây, vì muốn chứng minh nó ta cần một hiểu biết sâu sắc hơn về các số thực.

2.3.7. Mệnh đề: Tập hợp $\mathbb{R}$ các số thực là một tập vô hạn không đếm được.

Người ta nói tập hợp các số thực có lực lượng continum.

2.4. NHÓM, VÀNH VÀ TRƯỜNG.

Nhóm, vành và trường là các cấu trúc quan trọng và rất thường gặp trong các học phần của toán học. Ở đây, ta chỉ giới thiệu những nét sơ lược nhất về vấn đề này.

2.4.1. Định nghĩa: Cho G là một tập hợp. Mỗi ánh xạ

$$\circ : G \times G \longrightarrow G$$

được gọi là một phép toán hai ngôi (hay một luật hợp thành) trên G. Ảnh của cặp phần tử $(x, y) \in G \times G$ bởi ánh xạ $\circ$ sẽ được ký hiệu là $x \circ y$ và được gọi là tích hay hợp thành của x và y.

2.4.2. Định nghĩa: Cho G là một tập hợp, trên đó có phép toán hai ngôi $\circ$. Ta nói G là một nhóm nếu thoả mãn ba điều kiện sau:

(G1) Phép toán có tính kết hợp:

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z), \ \forall x, y, z \in G.$$

(G2) Có một phần tử $e \in G$, được gọi là phần tử trung hoà, với tính chất

$$x \circ e = e \circ x = x, \ \forall x \in G.$$

(G3) Với mọi $x \in G$, tồn tại phần tử $x' \in G$, được gọi là nghịch đảo của x, sao cho

$$x \circ x' = x' \circ x = e.$$

Nếu nhóm G thoả mãn thêm điều kiện:

(G4) Phép toán có tính giao hoán:

$$x \circ y = y \circ x, \ \forall x, y \in G$$

thì G được gọi là một nhóm aben hay nhóm giao hoán.

2.4.3. Nhận xét: Phần tử trung hoà của một nhóm là duy nhất. Thật vậy, nếu e và e' đều là các phần tử hoà của nhóm G thì $e = e \circ e' = e'$.

Với mọi $x \in G$, phần tử nghịch đảo x' trong (G3) là duy nhất. Thật vậy, nếu x'_1 và x'_2 là các phần tử nghịch đảo của x thì

$$x'_1 = x'_1 \circ e = x'_1 \circ (x \circ x'_2) = (x'_1 \circ x) \circ x'_2 = e \circ x'_2 = x'_2.$$

Trong nhóm có luật giản ước, tức là

$$x \circ y = x \circ z \Rightarrow y = z,$$
$$x \circ z = y \circ z \Rightarrow x = y.$$

Thật vậy, để có luật giản ước, chỉ cần nhân hai vế của đẳng thức $x \circ y = x \circ z$ với nghịch đảo x' của x từ bên trái và nhân hai vế của đẳng thức $x \circ z = y \circ z$ với nghịch đảo z' của z từ bên phải.

Theo thói quen, luật hợp thành $\circ$ trong một nhóm aben thường được ký hiệu theo lối cộng "+". Hợp thành của cặp phần tử (x, y) được ký hiệu là $x + y$ và được gọi là tổng của x và y. Phần tử trung hoà của nhóm được gọi là phần tử không, ký hiệu 0. Nghịch đảo của x được gọi là phần tử đối của x, ký hiệu $-x$.

Trường hợp tổng quát, phép toán $\circ$ trong nhóm thường được ký hiệu theo lối nhân ".". Hợp thành của cặp phần tử (x, y) được ký hiệu là $x.y$ hay đơn giản xy và được gọi là tích của x và y. Phần tử trung hoà của nhóm được gọi là phần tử đơn vị. Phần tử nghịch đảo của x được ký hiệu là x^{-1}.

Thí dụ: 1) Các tập hợp số $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ lập thành nhóm aben đối với phép cộng.

2) Các tập $\mathbb{Z}^* = \{\pm 1\}$, $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ làm thành nhóm aben đối với phép nhân.

3) Như ta đã biết, mỗi song ánh từ tập $\{1, 2, \ldots, n\}$ lên chính nó gọi là một hoán vị trên n phần tử; ta còn gọi nó là một phép thế trên n phần tử. Tập hợp S_n tất cả các phép thế trên n phần tử làm thành một nhóm đối với phép hợp thành ánh xạ. S_n được gọi là nhóm đối xứng trên n phần tử. Đây là một nhóm không aben khi $n > 2$.

2.4.4. Định nghĩa: Cho G và G' là các nhóm (với phép toán viết theo lối nhân). Ánh xạ $f : G \longrightarrow G'$ được gọi là một đồng cấu nhóm nếu

$$f(xy) = f(x)f(y), \ \forall x, y \in G.$$

Khi đó đồng cấu nhóm f chuyển đơn vị e của G thành đơn vị e' của G', tức là $f(e) = e'$. Nó cũng chuyển phần tử nghịch đảo của x thành phần tử nghịch đảo của $f(x)$, tức là $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$, $\forall x \in G$.

2.4.5. Định nghĩa: Một đồng cấu nhóm đồng thời là một đơn ánh được gọi là một đơn cấu nhóm.

Một đồng cấu nhóm đồng thời là một toàn ánh được gọi là một toàn cấu nhóm.

Một đồng cấu nhóm đồng thời là một song ánh được gọi là một đẳng cấu nhóm.

Nếu có một đẳng cấu nhóm giữa G và G' thì ta nói G đẳng cấu với G' và viết $G \cong G'$.

Thí dụ: 1) Ánh xạ $i : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ định nghĩa bởi công thức $i(x) = x$ là một đơn cấu nhóm.

2) Cho G là một nhóm cyclic sinh bởi $a \in G$, tức là nhóm mà mỗi $x \in G$ có biểu diễn $x = a^n$, với $n \in \mathbb{Z}$. Khi đó ánh xạ $p : \mathbb{Z} \longrightarrow G$ xác định bởi $p(n) = a^n$ là một toàn cấu nhóm.

3) Ánh xạ mũ exp: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $\exp(x) = e^x$ là một đẳng cấu nhóm từ nhóm cộng các số thực $\mathbb{R}$ lên nhóm nhân các số thực dương $\mathbb{R}^+$.

2.4.6. Định nghĩa: Cho R là một tập hợp, trên đó có hai phép toán hai ngôi, ký hiệu theo lối cộng và nhân. Ta nói R là một vành nếu thoả mãn các điều kiện sau:

(R1) R là một nhóm aben đối với phép cộng.

(R2) Phép nhân có tính kết hợp:

$$(xy)z = x(yz),\ \forall x, y, z \in R.$$

(R3) Phép nhân phân phối hai phía đối với phép cộng:

$$x(y+z) = xy + xz,\ (y+z)x = yx + zx,\ \forall x, y, z \in R.$$

Vành R được gọi là vành giao hoán nếu thoả mãn:

(R4) Phép nhân có tính giao hoán:

$$xy = yx,\ \forall x, y \in R.$$

Vành R được gọi là có đơn vị nếu thoả mãn:

(R5) Phép nhân có đơn vị, tức là có phần tử $1 \in R$ sao cho:

$$1x = x1 = x,\ \forall x \in R.$$

Thí dụ: 1) Các tập hợp số $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ là các vành giao hoán và có đơn vị đối với các phép toán cộng và nhân thông thường. Tập hợp $\mathbb{N}$ các số tự nhiên không là một vành, vì nó không là một nhóm đối với phép cộng.

2) Giả sử A là một nhóm cộng aben. Gọi $\mathrm{End}(A)$ là tập hợp các đồng cấu nhóm từ A vào A. Tập hợp này cùng với hai phép toán sau: $\forall f, g \in \mathrm{End}(A)$,

$$f + g \ \text{ xác định bởi } (f+g)(x) = f(x) + g(x),\ \forall x \in A$$
$$fg \ \text{ xác định bởi } (fg)(x) = f(g(x)),\ \forall x \in A$$

lập thành một vành (không giao hoán), có đơn vị. Phần tử không của End(A) là đồng cấu 0 ($0(x) = 0$, $\forall x \in A$), còn phần tử đơn vị là ánh xạ đồng nhất id_A ($id_A(x) = x$, $\forall x \in A$).

2.4.7. Định nghĩa: Cho R và R' là các vành. Ánh xạ $f : R \longrightarrow R'$ được gọi là một đồng cấu vành nếu

$$f(x+y) = f(x) + f(y),\ f(xy) = f(x)f(y),\ \forall x, y \in R.$$

Các khái niệm đơn cấu vành, toàn cấu vành, đẳng cấu vành được nghĩa tương tự như đối với trường hợp nhóm.

2.4.8. Định nghĩa: Phần tử x trong một vành có đơn vị R được gọi là khả nghịch nếu tồn tại phần tử $x' \in R$ sao cho

$$xx' = x'x = 1.$$

Dễ chứng minh rằng phần tử x' có tính chất như vậy nếu tồn tại thì duy nhất. Nó được ký hiệu là x^{-1}.

2.4.9. Định nghĩa: Một vành giao hoán, có đơn vị $1 \neq 0$ sao cho mọi phần tử khác 0 trong nó đều khả nghịch được gọi là một trường.

Vành $\mathbb{Q}$ là một trường. Vành $\mathbb{Z}$ các số nguyên không là một trường, vì các số khác ± 1 đều không khả nghịch trong $\mathbb{Z}$.

2.4.10. Định nghĩa: Nếu vành R chứa các phần tử $a \neq 0,\ b \neq 0$ sao cho $ab = 0$ thì ta nói R có ước của không.

2.4.11. Mệnh đề: Mỗi trường đều là một vành không có ước của không.

Chứng minh: Giả sử $\mathbb{F}$ là một trường, a và b là các phần tử thuộc $\mathbb{F}$ với $ab = 0$. Nếu $a \neq 0$ thì a khả nghịch. Ta có

$$b = 1b = (a^{-1}a)b = a^{-1}(ab) = a^{-1}0 = 0.$$

Vậy $\mathbb{F}$ không có ước của không.

2.4.12. Định nghĩa: Cho R là một vành có đơn vị. Nếu có số dương n sao cho $\underbrace{1 + \ldots + 1}_{n} = 0$ thì số nguyên dương nhỏ nhất có tính chất đó được gọi là đặc số của vành R. Ngược lại, nếu không có số nguyên dương n nào như thế thì ta nói R có đặc số bằng 0. Đặc số của R được ký hiệu là $Char(R)$.

2.4.13. Mệnh đề: Nếu $\mathbb{F}$ là một trường thì $Char(\mathbb{F})$ hoặc bằng 0 hoặc là một số nguyên tố.

Chứng minh: Giả sử $n = Char(\mathbb{F})$ là một hợp số với phân tích $n = rs$ ($0 < r, s < n$). Dễ thấy rằng $n.1 = (r.1)(s.1) = 0$. Vì trường $\mathbb{F}$ không có ước của không, nên hoặc $r.1 = 0$ hoặc $s.1 = 0$. Điều này mâu thuẫn với định nghĩa của đặc số.

BÀI TẬP CHƯƠNG II

1. Tìm miền xác định, ảnh của miền xác định của các ánh xạ sau:
a) Ánh xạ gán cho mỗi số tự nhiên chữ số cuối cùng của nó.
b) Ánh xạ gán cho mỗi số nguyên dương số nguyên lớn hơn tiếp sau.
c) Ánh xạ gán cho mỗi xâu bit (dãy nhị phân) số các bit 1 trong xâu đó.
d) Ánh xạ gán cho mỗi xâu bit số các bit trong xâu đó.

2. Tìm miền xác định của các ánh xạ cho bởi các biểu thức sau:
a) $f(x) = (x+1)\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}$.
b) $f(x) = \ln\frac{x^2-3x+2}{x+1}$.
c) $f(x) = \sqrt{\sin\sqrt{x}}$.
d) $f(x) = \ln(\sin\frac{\pi}{x})$.
e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sin\pi x}$.
f) $f(x) = (x+|x|)\sqrt{x\sin^2 x}$.

3. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = x^2 - 3x + 1$. Hãy tìm $f([-1, 2])$, $\mathrm{Im}f$, $f^{-1}(1)$, $f^{-1}(-1)$, $f^{-1}([-1, 1])$. Dùng đồ thị để minh hoạ.

4. Ta gọi hàm đặc trưng của một tập con A của một tập hợp U, ký hiệu là φ_A, là ánh xạ $\varphi_A : U \longrightarrow \{0, 1\}$ xác định bởi:

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{nếu } x \in A \\ 0, & \text{nếu } x \notin A \end{cases}.$$

Xác định hàm đặc trưng của các tập con $A \cap B$, $A \cup B$, $\overline{A}$, $A \oplus B$ của U, với A, B là những tập con tùy ý của U.

5. Cho một thí dụ về một ánh xạ $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ là
a) đơn ánh nhưng không toàn ánh,
b) toàn ánh nhưng không đơn ánh,
c) vừa toàn ánh vừa đơn ánh (nhưng khác ánh xạ đồng nhất),
d) Không đơn ánh cũng không toàn ánh.

6. Chứng minh các ánh xạ sau là song ánh và tìm các ánh xạ ngược của chúng:
a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cho bởi $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.
b) $f : [0, +\infty) \longrightarrow [1, \infty)$ cho bởi $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.
c) $f : \mathbb{R} \longrightarrow (-1, 1)$ cho bởi $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$.

7. Chứng minh rằng nếu $f : A \longrightarrow A$ là một toàn ánh và $f \circ f = f$ thì f là ánh xạ đồng nhất.

8. Cho n là một số tự nhiên và ánh xạ $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ xác định bởi:

$$f(k) \;=\; \begin{cases} n-k, & \text{nếu } k < n \\ n+k, & \text{nếu } k \geq n \end{cases}.$$

f có phải là đơn ánh, toàn ánh, song ánh không?

9. Cho hai ánh xạ $f : A \longrightarrow B$ và $g : B \longrightarrow C$. Chứng minh rằng:
a) Nếu $g \circ f$ là đơn ánh thì f là đơn ánh.
b) Nếu $g \circ f$ là toàn ánh thì g là toàn ánh.
c) Nếu $g \circ f$ là đơn ánh và f là toàn ánh thì g là đơn ánh.
d) Nếu $g \circ f$ là toàn ánh và g là đơn ánh thì f là toàn ánh.

10. Cho ánh xạ $f : A \longrightarrow B$. Chứng minh rằng:
a) f là đơn ánh khi và chỉ khi với mọi tập X và với mọi $g, g' : X \longrightarrow A$, $f \circ g = f \circ g'$ kéo theo $g = g'$.
b) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi tập Y và với mọi $h, h' : B \longrightarrow Y$, $h \circ f = h' \circ f$ kéo theo $h = h'$.
c) f là đơn ánh khi và chỉ khi với mọi $X, Y \subset A$, $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.

11. Cho các ánh xạ $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$, $h : C \longrightarrow A$. Khi đó ta có ba ánh xạ $h \circ g \circ f : A \longrightarrow A$, $g \circ f \circ h : C \longrightarrow C$, $f \circ h \circ g : B \longrightarrow B$. Chứng minh rằng:
a) Nếu hai trong ba ánh xạ trên là đơn ánh và ánh xạ còn lại là toàn ánh thì f, g, h đều là song ánh.
b) Nếu hai trong ba ánh xạ trên là toàn ánh và ánh xạ còn lại là đơn ánh thì f, g, h đều là song ánh.

12. Tìm $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ và $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ khi
a) $A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{n} \leq x < \frac{1}{n}\}$.
b) $A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{n} \leq x < \frac{2}{n}\}$.
c) $A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid (1 + \frac{1}{n})^n \leq x \leq 3\}$.
d) $A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid n \leq x \leq n+1\}$.

13. Giả sử $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ là một họ các tập con của một tập hợp A và B là một tập tùy ý. Chứng minh:
a) $B \cap (\bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha \in I} (B \cap A_\alpha)$.
b) $B \cup (\bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha) = \bigcap\limits_{\alpha \in I} (B \cup A_\alpha)$.
c) $A \setminus (\bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha) = \bigcap\limits_{\alpha \in I} (A \setminus A_\alpha)$.
d) $A \setminus (\bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha \in I} (A \setminus A_\alpha)$.

14. Cho ánh xạ $f : A \longrightarrow B$, $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ là một họ các tập con của A, $(B_\beta)_{\beta \in J}$ là một họ các tập con của B. Chứng minh:

a) $f(\bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha\in I} f(A_\alpha)$.
b) $f(\bigcap\limits_{\alpha\in I} A_\alpha) \subset \bigcap\limits_{\alpha\in I} f(A_\alpha)$.
c) $f^{-1}(\bigcup\limits_{\beta\in J} B_\beta) = \bigcup\limits_{\beta\in J} f^{-1}(B_\beta)$.
d) $f^{-1}(\bigcap\limits_{\beta\in J} B_\beta) = \bigcap\limits_{\beta\in J} f^{-1}(B_\beta)$.

15. Với 6 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 ta có thể ghi được bao nhiêu số tự nhiên thoả mãn một và chỉ một điều kiện trong các điều kiện sau đây:
a) Số tự nhiên có 4 chữ số.
b) Số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau.
c) Số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau và nhỏ hơn 2003.
d) Số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau và là số chẵn.
e) Số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau và chia hết cho 5.

16. Cô dâu và chú rể mời 4 người bạn đứng thành một hàng để chụp ảnh cùng với mình. Có bao nhiêu cách xếp hàng nếu:
a) Cô dâu đứng cạnh chú rể?
b) Cô dâu không đứng cạnh chú rể?
c) Cô dâu đứng bên trái chú rể?

17. Một tổ bộ môn của một trường đại học có 16 giảng viên.
a) Có bao nhiêu cách chọn một hội đồng gồm 5 thành viên của tổ.
b) Có bao nhiêu cách chọn một hội đồng gồm 5 thành viên của tổ sao cho mỗi thành viên được phân công ở một vị trí đã định.
c) Trong 16 giảng viên có 7 nữ và 9 nam. Có bao nhiêu cách chọn một hội đồng gồm 5 thành viên của tổ nếu trong hội đồng có ít nhất một nữ và ít nhất một nam.

18. a) Có bao nhiêu xâu nhị phân có độ dài bằng 10 và có 5 số 0 liền nhau hoặc 5 số 1 liền nhau.
b) Có bao nhiêu xâu nhị phân có độ dài bằng 8 và có 3 số 0 liền nhau hoặc 4 số 1 liền nhau.

19. Cho một lưới gồm các ô vuông. Các nút được đánh số từ 0 đến n theo chiều từ trái sang phải và từ 0 đến k theo chiều từ dưới lên trên. Hỏi có bao nhiêu đường đi khác nhau từ nút $(0, 0)$ đến nút (n, k) nếu chỉ cho phép đi trên cạnh các ô vuông theo chiều sang phải hoặc lên trên?

20. Có thể vẽ được bao nhiêu tam giác từ n điểm trên một mặt phẳng, trong đó có m điểm cùng nằm trên đường thẳng d và ngoài ra mọi bộ ba điểm không cùng nằm trên d thì không thẳng hàng.

21. a) Có bao nhiêu cách lấy ra k phần tử trong n phần tử xếp trên đường thẳng sao cho không có hai phần tử kề nhau cùng được lấy ra.

b) Giống như trên, nhưng với n phần tử xếp trên đường tròn.

22. Cho n là một số nguyên dương. Chứng minh rằng:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k = 0.$$

23. Hãy chứng minh hằng đẳng thức Vandermonde:

$$C_{m+n}^k = \sum_{i=0}^{k} C_m^i . C_n^{k-i}$$

bằng cách khai triển nhị thức $(x+1)^{m+n}$.

24. Chứng minh rằng:

$$\sum_{i=0}^{k} C_{n+i}^i = C_{n+k+1}^k,$$

trong đó n và k là các số nguyên dương.

25. Chứng tỏ rằng nếu n là một số nguyên dương thì

$$C_{2n}^2 = 2C_n^2 + n^2.$$

26. Cho n là một số nguyên dương. Hãy chứng minh bằng công cụ tổ hợp rằng:

$$\sum_{k=1}^{n} kC_n^k \;=\; n.2^{n-1}.$$

27. Cho n là một số nguyên dương. Hãy chứng minh bằng công cụ tổ hợp rằng:

$$\sum_{k=1}^{n} k(C_n^k)^2 = nC_{2n-1}^{n-1}.$$

28. Cho k và n là hai số nguyên dương. Có bao nhiêu cách chọn k tờ giấy bạc từ một két đựng tiền gồm những tờ thuộc n loại tiền? Giả sử thứ tự mà các tờ tiền được chọn ra là không quan trọng, các tờ tiền cùng loại là không phân biệt và mỗi loại có ít nhất k tờ.

29. Phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17$$

có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm?

30. Có bao nhiêu xâu khác nhau có thể lập được từ các chữ cái trong từ *MISSISSIPPI*, với yêu cầu phải dùng tất cả các chữ cái.

31. a) Bằng cách xét hàm mũ exp: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $\exp(x) = e^x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, hãy chứng tỏ rằng tập số thực $\mathbb{R}$ và tập số thực dương $\mathbb{R}^+$ có cùng lực lượng.

b) Bằng cách xét hàm $f : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ cho bởi công thức:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{nếu } 0 < x \leq \frac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{4(1-x)} & \text{nếu } \frac{1}{2} < x < 1. \end{cases}$$

Hãy chứng minh rằng khoảng đơn vị mở $(0,1)$ có cùng lực lượng với tập $\mathbb{R}^+$ các số thực dương. Và vì vậy $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$ và $(0,1)$ có cùng lực lượng.

32. Chứng minh rằng tập hợp các đa thức hệ số hữu tỉ là một tập đếm được.

33. Trên tập hợp $\mathbb{Q}$ các số hữu tỉ, xét phép toán $*$ xác định như sau:

$$\forall a, b \in \mathbb{Q},\ a * b \ = \ a + b + ab.$$

a) $\mathbb{Q}$ cùng phép toán $*$ có phải là một nhóm không? Tại sao?
b) Chứng minh $\mathbb{Q} \setminus \{-1\}$ cùng phép toán $*$ tạo thành một nhóm.

34. Chứng minh tập hợp $G = \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0\}$ cùng phép toán ký hiệu nhân

$$\forall (a,b), (a',b'),\ (a,b)(a',b') \ = \ (ab' + a', bb')$$

là một nhóm.

35. Cho tập hợp $G = [0,1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$. Định nghĩa phép toán $\oplus$ trên G như sau:

$$\forall x, y \in G,\ x \oplus y = x + y - [x+y] \ \text{(phần lẻ của } x+y).$$

Chứng minh $(G, \oplus)$ là một nhóm abel.

36. Cho $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ (với $\mathbb{R}$ là tập hợp các số thực và $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$) và $*$ là phép toán trên G xác định bởi:

$$(x,y) * (x',y') \ = \ (xx', xy' + \frac{y}{x'}).$$

Chứng minh rằng $(G, *)$ là một nhóm.

37. Cho $\mathbb{Q}$ là nhóm các số hữu tỉ với phép cộng. Chứng minh rằng ánh xạ $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ là đồng cấu nhóm khi và chỉ khi tồn tại duy nhất một số $a \in \mathbb{Q}$ sao cho $f(x) = ax$, $\forall x \in \mathbb{Q}$.

38. Cho R là một vành có đơn vị 1. Trên R, xét phép toán $*$:

$$x * y = x + y - xy.$$

Ký hiệu $R_* = \{x \in R \mid \exists y \in R,\ x * y = y * x = 0\}$. Chứng minh rằng:

a) $(R_*, *)$ là một nhóm.

b) $R_* \cong U(R)$, với $U(R)$ là nhóm các phần tử khả nghịch của vành R.

39. Cho R là một vành, $\mathbb{Z}$ là vành các số nguyên, trên tập $\mathbb{Z} \times R$ ta định nghĩa 2 phép toán cộng và nhân như sau:

$$(m, x) + (n, y) = (m + n, x + y)\ ,\ (m, x)(n, y) = (mn, my + nx + xy)\ .$$

Chứng minh rằng $\mathbb{Z} \times R$ với 2 phép toán này là một vành có đơn vị. Tìm các ước của không của vành $\mathbb{Z} \times R$ với $R = \mathbb{Z}$.

40. Cho S là một tập hợp, R là một vành và η là một song ánh từ S lên R. Chứng minh rằng S với 2 phép toán:

$$a + b = \eta^{-1}(\eta(a) + \eta(b))\ ,\ ab = \eta^{-1}(\eta(a)\eta(b))\ , \forall a, b \in S$$

là một vành và η là một đẳng cấu vành. Dùng điều này để chứng minh rằng một vành bất kỳ có đơn vị 1 cũng còn là một vành đối với 2 phép toán $a \oplus b = a + b - 1\ ,\ a * b = a + b - ab$.

41. a) Cho p là một số nguyên tố. Ký hiệu

$$\mathbb{Q}(\sqrt{p}) = \{a + b\sqrt{p} \mid a, b \in \mathbb{Q}\},$$

trong đó $\mathbb{Q}$ là trường các số hữu tỉ. Chứng minh rằng $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ là một trường.

b) Chứng minh rằng trường $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ không đẳng cấu với trường $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

Một vành R được gọi là một vành Boole nếu với mỗi $a \in R$, $a^2 = a$.

42. Cho R là một vành Boole. Chứng minh rằng:

a) R có đặc số 2.

b) R là một vành giao hoán.

c) Nếu R không có ước của 0 thì hoặc $R = \{0\}$ hoặc R chỉ có hai phần tử.

TRẢ LỜI VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP

CHƯƠNG II

1. **a)** Miền xác định là tập $\mathbb{N}$ các số tự nhiên và ảnh của nó là tập $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

b) Miền xác định là tập $\mathbb{Z}^+$ các số nguyên dương và ảnh của nó là tập $\{n \in \mathbb{Z}^+ | n \geq 2\}$.

c), d) Miền xác định là tập các xâu bit và ảnh của nó là tập $\mathbb{N}$.

2. **a)** Ánh xạ được xác định khi $\frac{2+x}{2-x} > 0$, tức là khi $-2 \leq x < 2$.

b) Ánh xạ được xác định khi $\frac{x^2-3x+2}{x+1} > 0$, tức là khi $-1 < x < 1$ hay $x > 2$.

c) Ánh xạ được xác định khi $x \geq 0$ và $\sin\sqrt{x} \geq 0$, tức là khi $4k^2\pi^2 \leq x \leq (2k+1)^2\pi^2$ với $k \in \mathbb{N}$.

d) Ánh xạ được xác định khi $\sin\frac{\pi}{x} > 0$, tức là khi $2k\pi < \frac{\pi}{x} < (2k+1)\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$. Nếu $k = 0$ thì $0 < \frac{1}{x} < 1$ nên $x > 1$. Nếu $k > 0$ thì $2k < \frac{1}{x} < 2k+1$. Do đó $\frac{1}{2k+1} < x < \frac{1}{2k}$ với $k = 1, 2, \ldots$. Nếu $k < 0$ thì $\frac{1}{2k+1} < x < \frac{1}{2k}$ với $k = -1, -2, \ldots$.

e) Ánh xạ được xác định khi $x \geq 0$ và $\sin\pi x \neq 0$, tức là khi $k < x < k+1$ với $k = 0, 1, 2, \ldots$.

f) Ánh xạ được xác định khi $x\sin^2 x > 0$, tức là khi $x \geq 0$.

3. $f([-1, 2]) = [-\dfrac{5}{4}, 5]$.

$\mathrm{Im}f = f(\mathbb{R}) = [-\dfrac{5}{4}, +\infty)$.

$f^{-1}(1) = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 1 = 1\} = \{0, 3\}$.

$f^{-1}(-1) = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 1 = -1\} = \{1, 2\}$.

$f^{-1}([-1, 1]) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x^2 - 3x + 1 \leq 1\} = [0, 1] \cup [2, 3]$.

4.
$$\begin{aligned}
\varphi_{A\cap B}(x) &= \varphi_A(x)\varphi_B(x) = \min(\varphi_A(x), \varphi_B(x)).\\
\varphi_{A\cup B}(x) &= \varphi_A(x) + \varphi_B(x) - \varphi_A(x)\varphi_B(x) = \max(\varphi_A(x), \varphi_B(x)).\\
\varphi_{\overline{A}}(x) &= 1 - \varphi_A(x).\\
\varphi_{A\oplus B}(x) &= \varphi_A(x) + \varphi_B(x) - 2\varphi_A(x)\varphi_B(x) = |\ \varphi_A(x) - \varphi_B(x)\ |.
\end{aligned}$$

5. **a)** $f(n) = 3n$,

b) $f(n) = [\frac{n}{2}]$ (hàm phần nguyên),

c) $f(n) = \begin{cases} n, & \text{nếu } n = 3k \\ n+1, & \text{nếu } n = 3k+1 \\ n-1, & \text{nếu } n = 3k+2 \end{cases}$.

d) $f(n) = k$, trong đó $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ là chữ số cuối cùng của số n.

6. **a)** $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Leftrightarrow e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = y + \sqrt{y^2+1} \Leftrightarrow x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$ (vì $e^x > 0$ nên không chọn $e^x = y - \sqrt{y^2+1}$). Do đó f là một song ánh và ánh xạ ngược của nó là $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cho bởi $f^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

b) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Leftrightarrow e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = y + \sqrt{y^2-1} \Leftrightarrow x = \ln(y + \sqrt{y^2-1})$ (vì $x \geq 0$ nên không chọn $e^x = y - \sqrt{y^2-1}$). Do đó f là một song ánh và ánh xạ ngược của nó là $f^{-1} : [1,\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$ cho bởi $f^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$.

c) $\begin{cases} y = \frac{x}{1+x} \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y}{1-y} \\ y \geq 0, y \neq 1 \end{cases}$ và

$\begin{cases} y = \frac{x}{1-x} \\ x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y}{1+y} \\ y \leq 0, y \neq -1 \end{cases}$.

Do đó f là một song ánh và ánh xạ ngược của nó là $f^{-1} : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ cho bởi $f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|}$.

7. $\forall a \in A$, $\exists a' \in A$ sao cho $f(a') = a$ (vì f là một toàn ánh). Khi đó $f(a) = f(f(a')) = f \circ f(a') = f(a') = a$, tức là f là ánh xạ đồng nhất.

8. Nếu $n = 0$ thì f là ánh xạ đồng nhất $id_{\mathbb{N}}$.

Nếu $n > 0$ thì f là một đơn ánh, nhưng không là toàn ánh. Thật vậy, với $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, $k_1 < k_2$; nếu $k_1 < k_2 < n$ thì $f(k_1) = n - k_1 \neq n - k_2 = f(k_2)$; nếu $k_1 < n \leq k_2$ thì $f(k_1) = n - k_1 \neq n + k_2 = f(k_2)$; nếu $n \leq k_1 < k_2$ thì $f(k_1) = n + k_1 \neq n + k_2 = f(k_2)$. Ngoài ra, $\nexists k \in \mathbb{N}$ sao cho $f(k) = 0$.

9. **a)** $\forall a, a' \in A, f(a) = f(a') \Rightarrow g \circ f(a) = g(f(a)) = g(f(a')) = g \circ f(a') \Rightarrow a = a'$ (vì $g \circ f$ là đơn ánh). Vậy f là đơn ánh.

b) Ta có $f(A) \subset B$, $g(B) \subset C$ và $g \circ f$ là toàn ánh nên $C = g \circ f(A) = g(f(A)) \subset g(B) \subset C$. Do đó $g(B) = C$ hay g là toàn ánh.

c) Vì $g \circ f$ là đơn ánh nên theo a) f là đơn ánh. Ngoài ra theo giả thiết f là toàn ánh nên f là song ánh, do đó f có ánh xạ ngược f^{-1} cũng là song ánh.

Do $g = g \circ id_B = g \circ (f \circ f^{-1}) = (g \circ f) \circ f^{-1}$ nên g là đơn ánh (hợp thành của 2 đơn ánh).

d) Vì $g \circ f$ là toàn ánh nên theo b) g là toàn ánh. Ngoài ra theo giả thiết g là đơn ánh nên g là song ánh, do đó g có ánh xạ ngược g^{-1} cũng là song ánh.

Do $f = id_B \circ f = (g^{-1} \circ g) \circ f = g^{-1} \circ (g \circ f)$ nên f là toàn ánh (hợp thành của 2 toàn ánh)

10. **a)** $(\Rightarrow)$ $\forall X$ và $\forall g, g' : X \longrightarrow A$, sao cho $f \circ g = f \circ g'$, ta có $\forall x \in X$, $f \circ g(x) = f \circ g'(x)$ hay $f(g(x)) = f(g'(x))$. Do f là đơn ánh nên $g(x) = g'(x)$ hay $g = g'$.

$(\Leftarrow)$ $\forall a_1, a_2 \in A$, $f(a_1) = f(a_2)$. Lấy X là tập khác rỗng, $g, g' : X \longrightarrow A$ xác định bởi $g(x) = a_1$ và $g'(x) = a_2$, $\forall x \in X$. Ta có, $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(a_1) = f(a_2) = f(g'(x)) = f \circ g'(x), \forall x \in X$, tức là $f \circ g = f \circ g'$. Theo giả thiết, ta có $g = g'$ hay $a_1 = a_2$. Do đó f là đơn ánh.

b) ($\Rightarrow$) $\forall Y$ và $\forall h, h' : B \longrightarrow Y$, sao cho $h \circ f = h' \circ f$, ta có $\forall b \in B$, $\exists a \in A$, $b = f(a)$ (do f là toàn ánh) và $h(b) = h(f(a)) = h \circ f(a) = h' \circ f(a) = h'(f(a)) = h'(b)$, tức là $h = h'$.

($\Leftarrow$) Giả sử f không là toàn ánh. Khi đó $B \setminus f(A) \neq \emptyset$. Lấy $Y = \{y_1, y_2\}$ và $h, h' : B \longrightarrow Y$ cho bởi:

$$h(b) = y_1 \,, h'(b) = \begin{cases} y_1, & \text{nếu } b \in f(A) \\ y_2, & \text{nếu } b \in B \setminus f(A) \end{cases}, \forall b \in B.$$

Ta có $h \circ f = h' \circ f$, nhưng $h \neq h'$.

c) ($\Rightarrow$) Ta đã có: $\forall X, Y \subset A$, $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$.

$\forall y \in f(X) \cap f(Y) \Rightarrow (\exists x \in X, y = f(x)) \wedge (\exists x' \in Y, y = f(x') \Rightarrow \exists x \in X \wedge \exists x' \in Y, y = f(x) = f(x') \Rightarrow x = x' \in X \cap Y, y = f(x) \Rightarrow y \in f(X \cap Y)$. Do đó $f(X) \cap f(Y) \subset f(X \cap Y)$. Vậy $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$. ($\Leftarrow$) Cho $f(a_1) = f(a_2), \forall a_1, a_2 \in A$. Khi đó

$$f(\{a_1\} \cap \{a_2\}) = f(\{a_1\}) \cap f(\{a_2\}) = \{f(a_1)\} \cap \{f(a_2)\}$$

$$= \{f(a_1)\} \neq \emptyset,$$

nên $\{a_1\} \cap \{a_2\} \neq \emptyset$ hay $a_1 = a_2$. Vậy f là đơn ánh.

11. a) Không mất tính chất tổng quát, ta có thể xem $h \circ g \circ f$, $g \circ f \circ h$ là đơn ánh và $f \circ h \circ g$ là toàn ánh. Khi đó theo các câu a) và b) của Bài 9,

$h \circ g \circ f$ là đơn ánh $\Rightarrow$ f là đơn ánh.

$f \circ h \circ g$ là toàn ánh $\Rightarrow$ f là toàn ánh.

Vậy f là song ánh, nên có ánh xạ ngược f^{-1} cũng là song ánh. Từ đó

$h \circ g = (h \circ g) \circ (f \circ f^{-1}) = (h \circ g \circ f) \circ (f^{-1})$ là đơn ánh.

$h \circ g = (f^{-1} \circ f) \circ (h \circ g) = f^{-1} \circ (f \circ h \circ g)$ là toàn ánh.

Vậy $h \circ g$ là song ánh.

$g \circ f \circ h$ là đơn ánh $\Rightarrow$ h là đơn ánh.

$h \circ g$ là toàn ánh $\Rightarrow$ h là toàn ánh.

Vậy h là song ánh, nên có ánh xạ ngược h^{-1} cũng là song ánh.

$g = (h^{-1} \circ h) \circ g = h^{-1} \circ (h \circ g)$. Vậy g là song ánh.

b) Tương tự câu a).

12. a) Ta có $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$. Vì vậy $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 = [-1, 1)$.

Ta có $-\frac{1}{n} \leq 0 < \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{Z}^+$, tức là $\{0\} \subset \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Mặt khác, $\forall x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow -\frac{1}{n} \leq x < \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow x = 0$ (vì $\lim\limits_{n\to\infty}(-\frac{1}{n}) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$), tức là $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \subset \{0\}$.

Do đó $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$.

b) Vì $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ nên $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$.

Vì $0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} \leq 2,\ \forall n \in \mathbb{Z}^+$, nên $A_n \subset (0,2),\ \forall n \in \mathbb{Z}^+$. Do đó $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset (0,2)$.

$\forall x \in (0,2)$: + Nếu $1 \leq x < 2$ thì $x \in A_1$, do đó $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

+ Nếu $0 < x < 1$, gọi n là số nguyên nhỏ nhất, không nhỏ hơn $\frac{1}{x}$. Khi đó, $\frac{1}{x} \leq n < \frac{1}{x} + 1$ $(< \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x})$, tức là $\frac{1}{n} \leq x < \frac{2}{n}$ hay $x \in A_n$, do đó $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Từ 2 điều trên, ta có $(0,2) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Vậy $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (0,2)$.

c) Vì dãy $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ là dãy tăng, nên $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$. Vì vậy $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 = [2,3]$.

Vì $(1+\frac{1}{n})^n < e < 3,\ \forall n \in \mathbb{Z}^+$ nên $[e,3] \subset A_n,\ \forall n \in \mathbb{Z}^+$ hay $[e,3] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Mặt khác,

$\forall x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow (1+\frac{1}{n})^n \leq x \leq 3,\ \forall n \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow e \leq x \leq 3$ (vì $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$), tức là $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset [e,3]$.

Do đó, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = [e,3]$.

d) Vì $A_1 \cap A_3 = \emptyset$ nên $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$.

Rõ ràng $A_n \subset [1,+\infty),\ \forall n \in \mathbb{Z}^+$, nên $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset [1,+\infty)$. Mặt khác,

$\forall x \in [1,+\infty) \Rightarrow n \leq x < n+1$, với $n = [x]$ (phần nguyên của x) $\Rightarrow x \in A_n \Rightarrow x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, tức là $[1,+\infty) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Do đó, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = [1,+\infty)$.

13. a) $x \in B \cap (\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha) \Leftrightarrow x \in B \wedge x \in \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \Leftrightarrow x \in B \wedge (\exists \alpha \in I, x \in A_\alpha) \Leftrightarrow \exists \alpha \in I, x \in B \wedge x \in A_\alpha \Leftrightarrow x \in \bigcup_{\alpha\in I}(B \cap A_\alpha)$.

b) $x \in B \cup (\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha) \Leftrightarrow x \in B \vee x \in \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha \Leftrightarrow x \in B \vee (\forall \alpha \in I, x \in A_\alpha) \Leftrightarrow \forall \alpha \in I, x \in B \vee x \in A_\alpha \Leftrightarrow x \in \bigcap_{\alpha\in I}(B \cup A_\alpha)$.

c) $x \in A \setminus (\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha) \Leftrightarrow x \in A \wedge \overline{x \in \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha} \Leftrightarrow x \in A \wedge \overline{\exists \alpha \in I, x \in A_\alpha} \Leftrightarrow x \in A \wedge (\forall \alpha \in I, x \notin A_\alpha) \Leftrightarrow \forall \alpha \in I, x \in A \wedge x \notin A_\alpha \Leftrightarrow \forall \alpha \in I, x \in A \setminus A_\alpha \Leftrightarrow x \in \bigcap_{\alpha\in I}(A \setminus A_\alpha)$.

d) $x \in A \setminus (\bigcap\limits_{\alpha\in I} A_\alpha) \Leftrightarrow x \in A \wedge \overline{x \in \bigcap\limits_{\alpha\in I} A_\alpha} \Leftrightarrow x \in A \wedge \overline{\forall\alpha \in I, x \in A_\alpha} \Leftrightarrow$ $x \in A \wedge (\exists\alpha \in I, x \notin A_\alpha) \Leftrightarrow \exists\alpha \in I, x \in A \wedge x \notin A_\alpha \Leftrightarrow \exists\alpha \in I, x \in A \setminus A_\alpha \Leftrightarrow$ $x \in \bigcup\limits_{\alpha\in I}(A \setminus A_\alpha)$.

14. a) $A_\alpha \subset \bigcup\limits_{\alpha'\in I} A_{\alpha'}, \forall\alpha \in I \Rightarrow f(A_\alpha) \subset f(\bigcup\limits_{\alpha'\in I} A_{\alpha'}), \forall\alpha \in I \Rightarrow \bigcup\limits_{\alpha\in I} f(A_\alpha) \subset$ $f(\bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha)$. Mặt khác,

$y \in f(\bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha) \Rightarrow \exists x \in \bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha,\ y = f(x) \Rightarrow \exists\alpha \in I, \exists x \in A_\alpha, y = f(x) \Rightarrow$ $\exists\alpha \in I, y \in f(A_\alpha) \Rightarrow y \in \bigcup\limits_{\alpha\in I} f(A_\alpha)$. Vậy $f(\bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha) \subset \bigcup\limits_{\alpha\in I} f(A_\alpha)$.

Do đó $f(\bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha\in I} f(A_\alpha)$.

b) $y \in f(\bigcap\limits_{\alpha\in I} A_\alpha) \Rightarrow \exists x \in \bigcap\limits_{\alpha\in I} A_\alpha, y = f(x) \Rightarrow \forall\alpha \in I, \exists x \in A_\alpha, y =$ $f(x) \Rightarrow \forall\alpha \in I, y \in f(A_\alpha) \Rightarrow y \in \bigcap\limits_{\alpha\in I} f(A_\alpha)$. Vậy $f(\bigcap\limits_{\alpha\in I} A_\alpha) \subset \bigcap\limits_{\alpha\in I} f(A_\alpha)$.

c) $x \in f^{-1}(\bigcup\limits_{\beta\in J} B_\beta) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcup\limits_{\beta\in J} B_\beta \Leftrightarrow \exists\beta \in J,\ f(x) \in B_\beta \Leftrightarrow \exists\beta \in$ $J, x \in f^{-1}(B_\beta) \Leftrightarrow x \in \bigcup\limits_{\beta\in J} f^{-1}(B_\beta)$.

d) $x \in f^{-1}(\bigcap\limits_{\beta\in J} B_\beta) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcap\limits_{\beta\in J} B_\beta \Leftrightarrow \forall\beta \in J,\ f(x) \in B_\beta \Leftrightarrow \forall\beta \in$ $J, x \in f^{-1}(B_\beta) \Leftrightarrow x \in \bigcap\limits_{\beta\in J} f^{-1}(B_\beta)$.

15. a) Số các số tự nhiên có 4 chữ số trong 6 chữ số đã cho bằng:

$$6^4 = 1296.$$

b) Số các số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau lấy trong 6 chữ số đã cho bằng:

$$A_6^4 = \frac{6!}{2!} = 3.4.5.6 = 360.$$

c) Mỗi số tự nhiên có dạng $\overline{abcd}$, trong đó a, b, c, d là 4 chữ số phân biệt và $1 \le a, b, c, d \le 6$. Vì $\overline{abcd} < 2003$ nên ta phải có:

$$a = 1,\ b = 2, 3, 4, 5, 6,\ c = 2, 3, 4, 5, 6,\ d = 2, 3, 4, 5, 6.$$

Vậy các số tự nhiên phải tìm bằng: $A_5^3 = \frac{5!}{2!} = 3.4.5 = 60$.

d) Số tự nhiên theo yêu cầu có dạng $\overline{abcd}$, trong đó các chữ số a, b, c, d là phân biệt, $1 \le a, b, c, d \le 6$ và $\overline{abcd} \vdots 2$. Vì $\overline{abcd} \vdots 2$ nên $d = 2, 4, 6$. Vậy số các số tự nhiên phải tìm bằng: $3 \times A_5^3 = 180$.

e) Số tự nhiên theo yêu cầu có dạng $\overline{abcd}$, trong đó các chữ số a, b, c, d là phân biệt, $1 \le a, b, c, d \le 6$ và $\overline{abcd} \vdots 5$. Vì $\overline{abcd} \vdots 5$ nên $d = 5$. Vậy số các số tự nhiên phải tìm bằng: $A_5^3 = 60$.

16. a) Xem cô dâu và chú rể như là một thì một cách xếp hàng mà cô dâu đứng cạnh chú rể (không kể bên trái hay bên phải) là một hoán vị của 5 phần tử. Do đó số cần tìm là:

$$2 \times 5! = 2.2.3.4.5 = 240.$$

b) Số tất cả các cách xếp hàng là 6!. Vậy số các cách xếp hàng mà cô dâu không đứng cạnh chú rể là

$$6! - 240 = 480.$$

c) Số các cách xếp hàng mà cô dâu đứng bên trái ngay cạnh chú rể là 5!. Số các xếp hàng mà cô dâu đứng bên trái không đứng cạnh chú rể là $\frac{480}{2}$. Do đó số cần tìm là:

$$5! + \frac{480}{2} = 120 + 240 = 360.$$

17. a) Một cách chọn một hội đồng gồm 5 thành viên của tổ là một tổ hợp chập 5 của 16 phần tử. Vậy số cần tìm là $C_{16}^5 = \frac{16!}{5!11!} = 4368$.

b) Một cách chọn một hội đồng gồm 5 thành viên của tổ sao cho mỗi thành viên được phân công ở một vị trí đã định là một chỉnh hợp chập 5 của 16 phần tử. Vậy số cần tìm là $A_{16}^5 = 16.15.14.13.12 = 524160$.

c) Số cách chọn hội đồng gồm 5 thành viên toàn nữ là $C_7^5 = 21$. Số cách chọn hội đồng gồm 5 thành viên toàn nam là $C_9^5 = 126$. Vậy số cách chọn hội đồng có ít nhất một nữ và ít nhất một nam là $4368 - (21 + 126) = 4221$.

18. a) Gọi A là tập hợp các xâu nhị phân có độ dài bằng 10 và có 5 số 0 liền nhau và B là tập hợp các xâu nhị phân có độ dài bằng 10 và có 5 số 1 liền nhau.

Số các phần tử của A dạng $0\,0\,0\,0\,0\,X\,X\,X\,X\,X$ là 2^5.
Số các phần tử của A dạng $1\,0\,0\,0\,0\,0\,X\,X\,X\,X$ là 2^4.
Số các phần tử của A dạng $X\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,X\,X\,X$ là 2^4.
Số các phần tử của A dạng $X\,X\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,X\,X$ là 2^4.
Số các phần tử của A dạng $X\,X\,X\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,X$ là 2^4.
Số các phần tử của A dạng $X\,X\,X\,X\,1\,0\,0\,0\,0\,0$ là 2^4.
Vậy số phần tử của A là $2^5 + 5.2^4 = 112$.
Tương tự số phần tử của B là 112.
Các phần tử của $A \cap B$ là

$$0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,1\,,\ 1\,1\,1\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,.$$

Vậy số cần tìm là

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 112 + 112 - 2 = 222.$$

b) Gọi A là tập hợp các xâu nhị phân có độ dài bằng 8 và có 3 số 0 liền nhau và B là tập hợp các xâu nhị phân có độ dài bằng 8 và có 4 số 1 liền nhau.

Số các phần tử của A dạng $0\,0\,0\,X\,X\,X\,X\,X$ là $2^5 = 32$.
Số các phần tử của A dạng $1\,0\,0\,0\,X\,X\,X\,X$ là $2^4 = 16$.
Số các phần tử của A dạng $X\,1\,0\,0\,0\,X\,X\,X$ là $2^4 = 16$.

Số các phần tử của A dạng $X\ X\ 1\ 0\ 0\ 0\ X\ X$ là $2^4 = 16$.
Số các phần tử của A dạng $X\ X\ X\ 1\ 0\ 0\ 0\ X$ là $2^4 - 2 = 14$.
Số các phần tử của A dạng $X\ X\ X\ X\ 1\ 0\ 0\ 0$ là $2^4 - 3 = 13$.
Vậy số phần tử của A là $32 + 16 + 16 + 16 + 14 + 13 = 107$.
Số các phần tử của B dạng $1\ 1\ 1\ 1\ X\ X\ X\ X$ là $2^4 = 16$.
Số các phần tử của B dạng $0\ 1\ 1\ 1\ 1\ X\ X\ X$ là $2^3 = 8$.
Số các phần tử của B dạng $X\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ X\ X$ là $2^3 = 8$.
Số các phần tử của B dạng $X\ X\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ X$ là $2^3 = 8$.
Số các phần tử của B dạng $X\ X\ X\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1$ là $2^3 = 8$.
Vậy số phần tử của A là $16 + 8 + 8 + 8 + 8 = 48$.
Các phần tử của $A \cap B$ là
0 0 0 1 1 1 1 1 , 0 0 0 1 1 1 1 0 , 0 0 0 0 1 1 1 1 , 1 0 0 0 1 1 1 1 ,
1 1 1 1 0 0 0 0 , 1 1 1 1 0 0 0 1 , 0 1 1 1 1 0 0 0 , 1 1 1 1 1 0 0 0 .
Vậy số cần tìm là

$$|A \cup B| \ = \ |A| + |B| - |A \cap B| \ = \ 107 + 48 - 8 = 147.$$

19. Mỗi đường đi từ nút $(0, 0)$ đến nút (n, k) đi qua $n + k$ cạnh ô vuông, trong đó có n cạnh sang phải và k cạnh lên trên. Nếu ta xem đi trên cạnh ô vuông sang phải ứng với 1 và lên trên ứng với 0 thì mỗi đường đi như thế chính là một xâu nhị phân độ dài $n + k$ có n số 1 và k số 0, tức là một tập con n phần tử của tập $n + k$ phần tử. Vậy số cần tìm là C_{n+k}^n.

20. Nếu $m = n$ thì không vẽ được tam giác nào.
Nếu $m < n$ thì ta có các trường hợp sau:
a) $n = 2$: không vẽ được tam giác nào.
b) $n \geq 3$ và $m = 2$: vẽ được C_n^3 tam giác.
c) $m \geq 3$: vẽ được $C_n^3 - C_m^3$ tam giác.

21. **a)** Lấy ra k phần tử, còn lại $n - k$ phần tử. $n - k$ phần tử này lập thành $n - k + 1$ khoảng (kể cả hai khoảng vô hạn ở hai đầu) mà trong đó phần tử được lấy ra (không kề nhau) tương ứng với khoảng được chọn trong số các khoảng này. Vậy số cần tìm là C_{n-k+1}^k.

b) Cố định phần tử x trong số n phần tử trên đường tròn. Có hai trường hợp:

+ Nếu x được chọn thì hai phần tử hai bên nó không còn được chọn và bài toán trở về Câu a) với n và k thay bằng $n - 3$ và $k - 1$. Do đó số cần tìm trong trường hợp này là $C_{(n-3)-(k-1)+1}^{k-1} = C_{n-k-1}^{k-1}$.

+ Nếu x không được chọn thì bài toán trở về Câu a) với n thay bằng $n - 1$. Do đó số cần tìm trong trường hợp này là $C_{n-1-k+1}^k = C_{n-k}^k$.

Vậy số cần tìm là $C_{n-k-1}^{k-1} + C_{n-k}^k$.

22. Từ khai triển nhị thức

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}$$

thay $x = -1$ và $y = 1$, ta có $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$.

23. Hệ số của x^k trong khai triển nhị thức $(x+1)^{m+n}$ là C_{m+n}^k. Mặt khác

$$(x+1)^{m+n} = (x+1)^m.(x+1)^n$$

và hệ số của x^k trong $(x+1)^m.(x+1)^n$ là $\sum_{i+j=k} C_m^i.C_n^j$. Do đó ta có $C_{m+n}^k = \sum_{i=0}^{k} C_m^i.C_n^{k-i}$.

24. a) Cách 1: Ta chứng minh đẳng thức bằng quy nạp theo k. Trước hết ta có $C_n^0 = C_{n+1}^0 = 1$, tức là đẳng thức đúng khi $k = 1$. Giả sử đẳng thức đúng đến k. Ta có

$$\sum_{i=0}^{k+1} C_{n+i}^i = \sum_{i=0}^{k} C_{n+i}^i + C_{n+k+1}^{k+1} = C_{n+k+1}^k + C_{n+k+1}^{k+1} = C_{n+k+2}^{k+1},$$

tức là đẳng thức đúng đến $k+1$.

b) Cách 2: C_{n+k+1}^k là số các xâu nhị phân độ dài $n+k+1$ có k số 0 và $n+1$ số 1. Giả sử bit thứ $j+1$ là bit cuối cùng mang giá trị 1 sao cho $n \le j \le n+k$. Một khi xác định được vị trí của số 1 cuối cùng, ta sẽ quyết định được việc đặt các số 0 trong j bit trước bit có số 1 cuối cùng. Trong xâu này có n số 1 và $j-n$ số 0. Theo quy tắc cộng ta suy ra $\sum_{j=n}^{n+k} C_j^{j-n} = \sum_{i=0}^{k} C_{n+i}^i$ cách thực hiện điều đó.

25. Thay $m = n$ và $k = 2$ trong hằng đẳng thức Vandermonde, ta có:

$$C_{2n}^2 = C_{n+n}^2 = \sum_{i=0}^{2} C_n^i.C_n^{2-i} = C_n^0.C_n^2 + C_n^1.C_n^1 + C_n^2.C_n^0 = 2C_n^2 + n^2.$$

26. Bài toán trở thành tìm số cách chọn hội đồng trong đó có 1 chủ tịch hội đồng từ 1 nhóm gồm n người bằng hai cách. Ta có thể chọn đầu tiên là chủ tịch hội đồng bằng n cách khác nhau. Khi đó có thể chọn các thành viên của hội đồng bằng 2^{n-1} cách. Theo quy tắc nhân có $n.2^{n-1}$ cách chọn hội đồng có 1 chủ tịch hội đồng. Trong khi đó số các cách chọn hội đồng gồm k người $(1 \le k \le n)$

là C_n^k. Khi ta chọn được hội đồng k thành viên, ta có k cách chọn chủ tịch. Theo quy tắc cộng có $\sum\limits_{k=1}^{n} kC_n^k$ cách chọn hội đồng có 1 chủ tịch hội đồng. Kết hợp lại ta có đẳng thức cần chứng minh.

27. Bài toán trở thành tìm số cách chọn hội đồng có n uỷ viên từ nhóm n giáo sư toán học và n giáo sư tin học sao cho chủ tịch là giáo sư toán học bằng hai cách. Ta có thể chọn đầu tiên là chủ tịch bằng n cách khác nhau từ nhóm n giáo sư toán học. Khi đó có thể chọn các uỷ viên của hội đồng bằng C_{2n-1}^{n-1}. Theo quy tắc nhân có $n.C_{2n-1}^{n-1}$ cách chọn hội đồng theo yêu cầu. Trong khi đó số các cách chọn hội đồng gồm k giáo sư toán học và $n-k$ giáo sư tin học với 1 chủ tịch trong số k giáo sư toán học là $k.C_n^k.C_n^{n-k}$ $(= k(C_n^k)^2)$. Theo quy tắc cộng có $\sum\limits_{k=1}^{n} k(C_n^k)^2$ cách chọn hội đồng như yêu cầu. Kết hợp lại ta có đẳng thức cần chứng minh.

28. Mỗi cách chọn k đối tượng từ một hộp đựng các đối tượng thuộc n loại được gọi là một tổ hợp lặp chập k từ tập n phần tử.

Mỗi tổ hợp lặp chập k từ tập n phần tử có thể biểu diễn bằng một dãy $n-1$ thanh đứng và k ngôi sao. Ta dùng $n-1$ thanh để phân cách các ngăn. Ngăn thứ i chứa thêm một ngôi sao mỗi lần khi phần tử thứ i của tập xuất hiện trong tổ hợp. Chẳng hạn, một tổ hợp lặp chập 6 của tập 4 phần tử được biểu thị bằng 3 thanh đứng và 6 ngôi sao:

$$* \; * \; | \; * \; | \; | \; * \; * \; *$$

biểu thị tổ hợp chứa đúng 2 phần tử loại thứ nhất, 1 phần tử loại thứ hai, không có phần tử loại thứ ba và 3 phần tử loại thứ tư.

Như ta đã thấy mỗi dãy $n-1$ thanh và k ngôi sao ứng với một tổ hợp lặp chập k của tập n phần tử. Ở đây có thể xem như là một xâu nhị phân độ dài $n+k-1$ trong đó có k số 1. Số các xâu như vậy bằng C_{n+k-1}^k.

29. Ta nhận thấy rằng mỗi nghiệm của phương trình ứng với một cách chọn 17 phần tử từ một tập có 4 loại, sao cho có x_1 phần tử loại 1, x_2 phần tử loại 2, x_3 phần tử loại 3 và x_4 phần tử loại 4 được chọn. Vì vậy số nghiệm bằng số tổ hợp lặp chập 17 từ tập có 4 phần tử. Do đó số cần tìm là $C_{4+17-1}^{17} = \dfrac{20!}{17!.3!} = \dfrac{18.19.20}{6} = 1140$.

30. Vì một số chữ cái của từ $MISSISSIPPI$ là như nhau nên câu trả lời không phải là số hoán vị của 11 chữ cái được. Từ này chứa 4 chữ S, 4 chữ I, 2 chữ P và 1 chữ M. Để xác định số xâu khác nhau có thể tạo ra được, ta nhận thấy có C_{11}^4 cách chọn 4 chỗ cho 4 chữ S, còn lại 7 chỗ trống. Có C_7^4 cách chọn

4 chỗ cho 4 chữ I, còn lại 3 chỗ trống. Có thể đặt chữ P bằng C_3^2 cách và C_1^1 cách đặt chữ M vào xâu. Theo quy tắc nhân, số các xâu khác nhau có thể tạo được là:

$$C_{11}^4.C_7^4.C_3^2.C_1^1 = \frac{11!.7!.3!.1!}{4!.7!.4!.3!.2!.1!.1!.0!} = \frac{11!}{4!.4!.2!.1!} = 3465.$$

Bằng cách lý luận tương tự như trên, ta có được điều sau:

Số hoán vị của n phần tử trong đó có n_1 phần tử như nhau thuộc loại 1, n_2 phần tử như nhau thuộc loại 2, ... và n_k phần tử như nhau thuộc loại k, bằng

$$\frac{n!}{n_1!\ n_2!\ \ldots n_k!}.$$

31. a) exp là một song ánh vì nó có ánh xạ ngược là log: $\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $\log(x) = \ln x$. Từ đó suy ra $\mathbb{R}$ và $\mathbb{R}^+$ cùng lực lượng.

b) f là một song ánh vì nó có ánh xạ ngược là $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow (0,1)$ xác định bởi $g(x) = \begin{cases} x & \text{nếu } 0 < x \le \frac{1}{2}, \\ \dfrac{4x-1}{4x} & \text{nếu } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$. Từ đó suy ra $\mathbb{R}^+$ và $(0,1)$ cùng lực lượng.

32. Mỗi đa thức có bậc $\le n$ hệ số hữu tỉ tương ứng 1-1 với một bộ $n+1$-thứ tự các thành phần hữu tỉ. Do đó tập $\mathbb{Q}_n[x]$ các đa thức có bậc $\le n$ hệ số hữu tỉ được đồng nhất với tập $\mathbb{Q}^{n+1}$, đây là một tập đếm được. Vậy tập $\mathbb{Q}[x]$ các đa thức hệ số hữu tỉ là đếm được vì

$$\mathbb{Q}[x] = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{Q}_n[x] = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{Q}^{n+1}$$

và hợp đếm được các tập đếm được là một tập đếm được.

33. $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}$, $(a*b)*c = (a+b+ab)*c = a+b+ab+c+ac+bc+abc = a+b+c+bc+ab+ac+abc = a*(b+c+bc) = a*(b*c)$, hay phép toán $*$ có tính kết hợp. $\forall a \in \mathbb{Q}$, $a*0 = 0*a = a$ hay 0 là phần tử đơn vị của $\mathbb{Q}$ đối với phép toán $*$. Do đó $\mathbb{Q}$ với phép toán $*$ là một vị nhóm, nhưng không phải là một nhóm, vì phần tử $a = -1$ không có phần tử nghịch đảo.

Từ $a+b+ab+1 = (a+1)(b+1)$, ta có $\forall a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$, $a*b \neq -1$ hay $a*b \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$. Do đó $\mathbb{Q} \setminus \{-1\}$ là một vị nhóm với phép toán $*$. Ngoài ra, $\forall a \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$, a có phần tử nghịch đảo là $-\frac{a}{1+a} \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$. Vậy $\mathbb{Q} \setminus \{-1\}$ là một nhóm với phép toán $*$.

34. $\forall (a,b), (a',b'), (a'',b'') \in G$,

$$\begin{aligned}((a,b)(a',b'))(a'',b'') &= (ab'+a', bb')(a'',b'') = (ab'b''+a'b''+a'', bb'b'') \\ &= (a,b)(a'b''+a'', b'b'') = (a,b)((a',b')(a'',b''))\end{aligned}$$

hay phép toán nhân có tính kết hợp. $\forall (a,b) \in G,\ (a,b)(0,1) = (0,1)(a,b) = (a,b)$ hay $(0,1)$ là phần tử đơn vị của G. $\forall (a,b) \in G,\ (a,b)(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b}) = (-\frac{a}{b}, \frac{1}{b})(a,b) = (0,1)$ hay (a,b) có phần tử nghịch đảo là $(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b})$. Vậy G là một nhóm.

35. Trước hết ta có $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ [x+n] = [x]+n$.

$\forall x, y \in G,\ (x \oplus y) = x + y - [x+y] = y + x - [y+x] = y \oplus x$.

$\forall x, y, z \in G,\ (x \oplus y) \oplus z = x \oplus y + z - [x \oplus y + z] = x + y - [x+y] + z - [x + y + z - [x+y]] = x+y+z-[x+y]-[x+y+z]+[x+y] = x+y+z-[x+y+z] = x+y+z-[y+z]-[x+y+z]+[y+z] = x+y+z-[y+z]-[x+y+z-[y+z]] = x + y \oplus z - [x + y \oplus z] = x \oplus (y \oplus z)$.

$\forall x \in G,\ [x] = 0$ nên $x \oplus 0 = x + 0 - [x+0] = x$.

$\forall x \in G$, nếu $x = 0$ thì $0 \oplus 0 = 0$, nếu $x \neq 0$ thì $1 - x \in G$ và $x \oplus (1-x) = 0$.

Vậy $(G, \oplus)$ là một nhóm aben.

36. $\forall (x,y), (x',y'), (x'',y'') \in G$,
$((x,y)*(x',y'))*(x'',y'') = (xx', xy' + \frac{y}{x'})*(x'',y'') = (xx'x'', xx'y'' + \frac{xy'}{x''} + \frac{y}{x'x''})$
$= (x(x'x''), x(x'y'' + \frac{y'}{x''}) + \frac{y}{x'x''}) = (x,y) * (x'x'', x'y'' + \frac{y'}{x''}) = (x,y) * ((x',y') * (x'',y''))$.

$\forall (x,y) \in G,\ (x,y) * (1,0) = (x,y) = (0,1) * (x,y)$.

$\forall (x,y) \in G,\ (x,y) * (\frac{1}{x}, -y) = (1,0) = (\frac{1}{x}, -y) * (x,y)$.

Vậy G là một nhóm.

37. Nếu $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ xác định bởi $f(x) = ax$ với $a \in \mathbb{Q}$ thì f là một đồng cấu nhóm. Thật vậy, $\forall x, y \in \mathbb{Q},\ f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y)$.

Đảo lại, nếu $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ là một đồng cấu nhóm thì đặt $a = f(1)$, ta có $a = f(1) = f(n.\frac{1}{n}) = nf(\frac{1}{n})$ hay $f(\frac{1}{n}) = \frac{a}{n}$ với mọi số nguyên dương n. Khi đó $\forall x \in \mathbb{Q},\ x = \frac{m}{n},\ m \in Z,\ n$ là số nguyên dương, ta có $f(x) = f(\frac{m}{n}) = f(m.\frac{1}{n}) = mf(\frac{1}{n}) = m.\frac{a}{n} = a.\frac{m}{n} = ax$. Rõ ràng a duy nhất sao cho $f(x) = ax,\ \forall x \in \mathbb{Q}$.

38. a) Rõ ràng $0 \in R_*$, phép toán $*$ có tính kết hợp, 0 là phần tử đơn vị (do $x * 0 = 0 * x = x$) và mọi $x \in R_*$ đều khả nghịch (do định nghĩa của R_*). Do đó, R_* là một nhóm.

b) Với $x \in U(R),\ (1-x)*(1-x^{-1}) = (1-x^{-1})*(1-x) = 0$, nên ta có ánh xạ $f : U(R) \longrightarrow R_*$ cho bởi $f(x) = 1 - x$. Rõ ràng f là một song ánh. Ngoài ra, $f(x)*f(y) = (1-x)*(1-y) = (1-x)+(1-y)-(1-x)(1-y) = 1-xy = f(xy)$. Do đó f là một đẳng cấu nhóm.

39. Dễ dàng có được $\mathbb{Z} \times R$ với phép cộng là một nhóm aben. Phép nhân trên $\mathbb{Z} \times R$ có tính kết hợp và phân phối đối với phép cộng. Thật vậy,
$\forall (m,x), (n,y), (p,z) \in \mathbb{Z} \times R$,

$$
\begin{aligned}
&((m,x)(n,y))(p,z) = (mn, my+nx+xy)(p,z)\\
&= (mnp, mnz+pmy+pnx+pxy+myz+nxz+xyz)\\
&= (mnp, mnz+mpy+myz+npx+nxz+pxy+xyz)\\
&= (m,x)(np, nz+py+yz)\\
&= (m,x)((n,y)(p,z)),\\
&(m,x)((n,y)+(p,z)) = (m,x)(n+p, y+z)\\
&= (mn+mp, my+mz+nx+px+xy+xz)\\
&= (mn, my+nx+xy)+(mp, mz+px+xz)\\
&= (m,x)(n,y)+(m,x)(p,z).
\end{aligned}
$$

Ngoài ra $\mathbb{Z}\times R$ có phần tử đơn vị là $(1,0)$. Do đó $\mathbb{Z}\times R$ là một vành có đơn vị.

Các ước không của $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ là $\{(n,-n)\mid n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\}$.

40. Vì R là một vành với phần tử không là 0_R nên $\forall a,b,c\in S$,

$$
\begin{aligned}
&*a+b = \eta^{-1}(\eta(a)+\eta(b)) = \eta^{-1}(\eta(b)+\eta(a)) = b+a\\
&*(a+b)+c = \eta^{-1}(\eta(a+b)+\eta(c))\\
&\quad = \eta^{-1}(\eta(\eta^{-1}(\eta(a)+\eta(b)))+\eta(c)) = \eta^{-1}(\eta(a)+\eta(b)+\eta(c))\\
&\quad = \eta^{-1}(\eta(a)+\eta(\eta^{-1}(\eta(b)+\eta(c)))) = \eta^{-1}(\eta(a)+\eta(b+c))\\
&\quad a+(b+c)\\
&*\text{với } 0_S = \eta^{-1}(0_R),\ a+0_S = \eta^{-1}(\eta(a)+\eta(0_S))\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad = \eta^{-1}(\eta(a)+0_R) = \eta^{-1}(\eta(a)) = a\\
&*\text{với } -a = \eta^{-1}(-\eta(a)),\ a+(-a) = \eta^{-1}(\eta(a)+\eta(\eta^{-1}(-\eta(a))))\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad = \eta^{-1}(\eta(a)+(-\eta(a))) = \eta^{-1}(0_R) = 0_S.\\
&*(ab)c = \eta^{-1}(\eta(ab)\eta(c)) = \eta^{-1}(\eta(\eta^{-1}(\eta(a)\eta(b)))\eta(c))\\
&\quad = \eta^{-1}(\eta(a)\eta(b)\eta(c)) = \eta^{-1}(\eta(a)\eta(\eta^{-1}(\eta(b)\eta(c)))\\
&\quad = \eta^{-1}(\eta(a)\eta(bc)) = a(bc)\\
&*a(b+c) = \eta^{-1}(\eta(a)\eta(b+c)) = \eta^{-1}(\eta(a)\eta(\eta^{-1}(\eta(b)+\eta(c))))\\
&\quad = \eta^{-1}(\eta(a)(\eta(b)+\eta(c))) = \eta^{-1}(\eta(a)\eta(b)+\eta(a)\eta(c))\\
&\quad = \eta^{-1}(\eta(\eta^{-1}(\eta(a)\eta(b)))+\eta(\eta^{-1}(\eta(a)\eta(c)))\\
&\quad = \eta^{-1}(\eta(ab)+\eta(ac)) = ab+ac\\
&\quad \text{tương tự} (b+c)a = ba+ca
\end{aligned}
$$

Vậy S là một vành. Do η là một song ánh và $\eta(a+b) = \eta(a) + \eta(b)$, $\eta(ab) = \eta(a)\eta(b)$ nên η là một đẳng cấu.

Bây giờ, nếu R là vành có đơn vị 1 thì với song ánh $\eta : R \longrightarrow R$ cho bởi $\eta(a) = 1 - a$ (khi đó $\eta^{-1}(a) = 1 - a$), R cũng là vành với hai phép toán

$$\begin{aligned} a \oplus b &= \eta^{-1}(\eta(a) + \eta(b)) = 1 - (1 - a + 1 - b) = a + b - 1 \\ ab &= \eta^{-1}(\eta(a)\eta(b)) = 1 - ((1-a)(1-b)) = a + b - ab. \end{aligned}$$

41. a) Ta có $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ là một tập con khác rỗng của trường $\mathbb{R}$ các số thực và có chứa số nguyên 1 (vì $1 = 1 + 0\sqrt{p}$). $\forall a, b, a', b' \in \mathbb{Q}$,

$$\begin{aligned} (a + b\sqrt{p}) - (a' + b'\sqrt{p}) &= (a - a') + (b - b')\sqrt{p}, \\ (a + b\sqrt{p})(a' + b'\sqrt{p}) &= (aa' + pbb') + (ab' + ba')\sqrt{p}. \end{aligned}$$

Ngoài ra, với $a + b\sqrt{p} \in \mathbb{Q}(\sqrt{p})$ và khác 0 (a và b không đồng thời bằng 0), ta có $a^2 - pb^2 \neq 0$, $\frac{a}{a^2-pb^2} + \frac{-b}{a^2-pb^2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{p})$ và $(a + b\sqrt{p})(\frac{a}{a^2-pb^2} + \frac{-b}{a^2-pb^2}) = 1$. Do đó $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ là một trường.

b) Giả sử tồn tại đẳng cấu trường $f : \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \longrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{5})$. Khi đó $f(1) \neq 0$ và do $f(1) = f(1.1) = f(1)f(1)$ nên $f(1) = 1$. Từ đó $f(3) = f(1 + 1 + 1) = f(1) + f(1) + f(1) = 3$. Giả sử $f(\sqrt{3}) = a + b\sqrt{5}$ (với $a, b \in Q$). Ta có

$$3 = f(3) = f(\sqrt{3}.\sqrt{3}) = f(\sqrt{3})^2 = (a + b\sqrt{5})^2$$

hay $a^2 + 5b^2 + 2ab\sqrt{5} = 3$ hay $2ab\sqrt{5} = 3 - a^2 - 5b^2$.

– Nếu $a = b = 0$ thì $0 = 3$: vô lý.

– Nếu $a = 0$ và $b \neq 0$ thì $b = \sqrt{\frac{3}{5}}$: vô lý.

– Nếu $b = 0$ và $a \neq 0$ thì $a = \sqrt{3}$: vô lý.

– Nếu $a \neq 0$ và $b \neq 0$ thì $\sqrt{5} = \frac{3-a^2-5b^2}{2ab}$: vô lý vì vế phải là một số hữu tỉ nhưng vế trái là một số vô tỉ.

42. a) Với mọi $a \in R$, $2a = a + a = (a + a)^2 = a^2 + 2a^2 + a^2 = 4a^2 = 4a$, do đó $2a = 0$. Vậy R có đặc số 2. Từ đó suy ra $a = -a$, $\forall a \in R$.

b) Với mọi $a, b \in R$, $a + b = (a + b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2 = a + ab + ba + b$, do đó $ab + ba = 0$ hay $ab = -ba = ba$. Vậy R là một vành giao hoán.

c) Với mọi $a, b \in R$, $ab(a + b) = a^2b + ab^2 = ab + ab = 2ab = 0$, do đó hoặc $ab = 0$ hoặc $a + b = 0$. Nếu $ab = 0$ thì $a = 0$ hoặc $b = 0$. Trong trường hợp này vành R chỉ có một phần tử 0. Nếu $ab \neq 0$ (tức là $a \neq 0$ và $b \neq 0$) thì $a + b = 0$ hay $b = -a = a$. Khi đó R chỉ có hai phần tử.

CHƯƠNG III:
QUAN HỆ

3.1. QUAN HỆ VÀ CÁC TÍNH CHẤT CỦA NÓ.

3.1.1. Định nghĩa và thí dụ:

3.1.1.1. Mở đầu: Các mối quan hệ giữa những phần tử của các tập hợp xuất hiện trong nhiều bối cảnh. Thường ngày ta vẫn gặp các mối quan hệ này, chẳng hạn mối quan hệ giữa một trường học với số điện thoại của nó, mối quan hệ của một giáo viên với lương của người đó, mối quan hệ của một người với người thân của anh ta ... Trong toán học, ta nghiên cứu các mối quan hệ như mối quan hệ giữa một số nguyên dương và một ước số của nó, mối quan hệ giữa một số nguyên và một số nguyên khác đồng dư với nó theo môđulô n, mối quan hệ giữa một số thực và một số thực khác lớn hơn nó ... Các mối quan hệ giữa những phần tử của các tập hợp được biểu diễn bằng cách dùng một cấu trúc được gọi là quan hệ. Cách trực tiếp nhất để biểu diễn mối quan hệ giữa các phần tử của hai tập hợp là dùng các cặp tạo bởi hai phần tử có quan hệ. Vì lý do đó, tập các cặp được gọi là quan hệ hai ngôi.

3.1.1.2. Định nghĩa: Cho hai tập hợp A và B. Một quan hệ hai ngôi từ A đến B là một tập con R của tích Descartes $A \times B$. Ta nói phần tử $a \in A$ có quan hệ R với phần tử $b \in B$ nếu $(a, b) \in R$ và ký hiệu là aRb

Thí dụ: 1) Cho A là tập hợp các sinh viên của Đại học Huế và B là tập hợp các môn học. Cho R là quan hệ bao gồm các cặp (a, b) trong đó a là sinh viên học môn b. Chẳng hạn, bạn An và bạn Tùng là sinh viên của Đại học Huế đều học môn Nhập môn đại số có mã số là NMDSO, thì các cặp (An, NMDSO) và (Tùng, NMDSO) thuộc R. Nếu An còn học môn Giải tích 1 có mã số là GTICH1 thì cặp (An, GTICH1) cũng thuộc R. Tuy nhiên nếu Tùng không học môn GTICH1 thì cặp (Tùng, GTICH1) không thuộc R.

2) Cho A là tập hợp các quận, huyện và B là tập hợp các tỉnh thành của Việt Nam. Ta định nghĩa quan hệ R bằng cách chỉ rõ rằng (a, b) thuộc R nếu quận hay huyện a thuộc tỉnh hay thành phố b. Chẳng hạn, (Phú Lộc, Thừa Thiên Huế), (Ba Đình, Hà Nội), (Phú Quốc, Kiên Giang), (Nam Đàn, Nghệ An), (Tân Bình, TP. Hồ Chí Minh) và (Buôn Đôn, Daklak) đều thuộc R.

3.1.1.3. Ánh xạ như một quan hệ: Hãy nhớ lại rằng một ánh xạ f từ tập hợp A đến tập hợp B gán cho mỗi phần tử của A một phần tử duy nhất của B. Đồ thị của f là tập các cặp (a, b) sao cho $b = f(a)$. Vì đồ thị của f là một tập con của $A \times B$, nên nó là một quan hệ từ A đến B.

Ngược lại, nếu R là một quan hệ từ A đến B sao cho mỗi phần tử của A là phần tử đầu tiên của đúng một cặp của R, thì có thể định nghĩa được một ánh xạ với R là đồ thị của nó. Điều này được làm bằng cách gán cho mỗi phần tử $a \in A$ một phần tử duy nhất $b \in B$ sao cho $(a, b) \in R$.

Một quan hệ cũng có thể được dùng để biểu diễn các mối quan hệ một-nhiều giữa các phần tử của hai tập hợp A và B, trong đó một phần tử của A có thể có quan hệ với hơn một phần tử của B. Trong khi đó, một ánh xạ biểu diễn một quan hệ trong đó mỗi phần tử của A có quan hệ với đúng một phần tử của B.

3.1.1.4. Định nghĩa: Một quan hệ trên tập hợp A là một quan hệ hai ngôi từ A đến A. Nói một cách khác, một quan hệ trên tập hợp A là một tập con của $A \times A$.

Thí dụ: 1) Quan hệ "nhỏ hơn hoặc bằng" ($\leq$) là một quan hệ trên tập hợp $\mathbb{R}$ các số thực.

2) Quan hệ "chia hết" ($|$) là một quan hệ trên tập hợp $\mathbb{N}$ các số tự nhiên.

3) Quan hệ "vuông góc" ($\perp$) là một quan hệ trên tập hợp các đường thẳng trong mặt phẳng.

4) Với n là một số nguyên dương, $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y \text{ chia hết cho } n\}$ là một quan hệ trên $\mathbb{Z}$, gọi là quan hệ đồng dư môđulô n. Khi xRy, ta viết $x \equiv y$ $(\text{mod} n)$.

5) Quan hệ "cùng tuổi" là một quan hệ trên tập hợp các con người của trái đất.

3.1.2. Các tính chất của quan hệ:

3.1.2.1. Định nghĩa: Quan hệ R trên tập hợp A được gọi là có tính phản xạ nếu aRa với mọi $a \in A$.

3.1.2.2. Định nghĩa: Quan hệ R trên tập hợp A được gọi là có tính đối xứng nếu với mọi $a, b \in A$, aRb kéo theo bRa.

3.1.2.3. Định nghĩa: Quan hệ R trên tập hợp A được gọi là có tính phản đối xứng nếu với mọi $a, b \in A$, aRb và bRa kéo theo $a = b$.

3.1.2.4. Định nghĩa: Quan hệ R trên tập hợp A được gọi là có tính bắc cầu nếu với mọi $a, b, c \in A$, aRb và bRc kéo theo aRc.

Thí dụ: 1) Quan hệ "bằng nhau" ($=$) trên một tập X tuỳ ý có 4 tính chất: phản xạ, đối xứng, phản đối xứng và bắc cầu.

2) Quan hệ $\leq$ trên tập hợp X, với X là tập con tuỳ ý của $\mathbb{R}$, có 3 tính chất: phản xạ, phản đối xứng và bắc cầu.

3) Quan hệ "đồng dư mod$n$" trên tập hợp $\mathbb{Z}$ có 3 tính chất: phản xạ, đối xứng và bắc cầu.

4) Quan hệ "chia hết" trên tập hợp $\mathbb{N}^*$ các số nguyên dương có 3 tính chất: phản xạ, phản đối xứng và bắc cầu. Tuy nhiên, nếu xét trên tập hợp $\mathbb{Z}$ thì quan hệ này chỉ có tính chất bắc cầu.

5) Quan hệ "bao hàm" ($\subset$) trên tập hợp $\mathcal{P}(X)$ tất cả các tập con của tập hợp X tuỳ ý có 3 tính chất phản xạ, phản đối xứng và bắc cầu.

6) Quan hệ "đồng dạng" trên tập hợp các tam giác có 3 tính chất: phản xạ, đối xứng và bắc cầu.

7) Quan hệ "nguyên tố cùng nhau" trên tập hợp $\mathbb{N}^*$ chỉ có tính chất đối xứng.

3.1.3. Tổ hợp các quan hệ:

Vì các quan hệ từ A đến B là các tập con của $A \times B$, nên hai quan hệ từ A đến B cũng có thể được tổ hợp như hai tập hợp. Chẳng hạn, với R_1 và R_2 là hai quan hệ từ A đến B thì ta có những quan hệ $R_1 \cap R_2$, $R_1 \cup R_2$, $R_1 \setminus R_2$, $\overline{R}_1$, $R_1 \oplus R_2$ từ A đến B.

3.1.3.1. Định nghĩa: Cho R là một quan hệ từ tập hợp A đến tập hợp B và S là một quan hệ từ tập hợp B đến tập hợp C. Hợp thành của R và S là một quan hệ từ A đến C, ký hiệu $S \circ R$, xác định bởi

$$S \circ R = \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B,\ (a, b) \in R \text{ và } (b, c) \in S\}.$$

Đặc biệt, khi R là đồ thị của ánh xạ f và S là đồ thị của ánh xạ g thì $S \circ R$ là đồ thị của ánh xạ $g \circ f$.

Thí dụ: Cho R là quan hệ từ $\{1, 2, 3\}$ đến $\{1, 2, 3, 4\}$ xác định bởi $R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\}$ và S là quan hệ từ $\{1, 2, 3, 4\}$ đến $\{0, 1, 2\}$ xác định bởi $S = \{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$. Khi đó hợp thành của R và S là:

$$S \circ R = \{(1, 0), (1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 1)\}.$$

3.1.3.2. Định nghĩa: Cho R là một quan hệ trên tập hợp A. Lũy thừa R^n, với n là một số nguyên dương, được định nghĩa bằng quy nạp như sau:

$$R^1 = R \text{ và } R^{n+1} = R^n \circ R.$$

Như vậy, $(a, b) \in R^n$ khi và chỉ khi tồn tại $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \in A$ sao cho $(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, b) \in R$.

3.1.3.3. Mệnh đề: Quan hệ R trên tập hợp A có tính chất bắc cầu khi và chỉ khi $R^n \subset R$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Chứng minh: Giả sử $R^n \subset R$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó $R^2 \subset R$ và với mọi $a, b, c \in A$, $(a, b) \in R$, $(b, c) \in R$ thì theo định nghĩa của hợp thành $(a, c) \in R^2$, do đó $(a, c) \in R$, tức là R có tính chất bắc cầu.

Giả sử R có tính bắc cầu. Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, nếu $(a, b) \in R^n$ thì tồn tại $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \in A$ sao cho $(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, b) \in R$, vì R có tính chất bắc cầu nên $(a, b) \in R$. Do đó $R^n \subset R$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

3.2. QUAN HỆ TƯƠNG ĐƯƠNG VÀ QUAN HỆ THỨ TỰ.

3.2.1. Quan hệ tương đương:

3.2.1.1. Định nghĩa: Một quan hệ trên tập hợp A được gọi là quan hệ tương đương nếu nó có các tính chất phản xạ, đối xứng và bắc cầu.

Thí dụ: 1) Quan hệ "đồng dư mod$n$" trên tập hợp $\mathbb{Z}$ là một quan hệ tương đương.

2) Quan hệ "đồng dạng" trên tập hợp các tam giác là một quan hệ tương đương.

3) Quan hệ "cùng phương" (song song hoặc trùng nhau) trên tập hợp các đường thẳng của mặt phẳng là một quan hệ tương đương.

4) $R = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m - n \text{ chẵn}\}$ là một quan hệ tương đương.

3.2.1.2. Định nghĩa: Cho R là một quan hệ tương đương trên tập hợp A và $a \in A$. Tập hợp

$$\{x \in A \mid xRa\}$$

được gọi là lớp tương đương của phần tử a, ký hiệu là $\overline{a}$ hoặc $[a]$ hoặc $C(a)$.

3.2.1.3. Mệnh đề: Cho R là một quan hệ tương đương trên tập hợp A và $a, b \in A$. Khi đó ta có:

1) $\overline{a} \neq \emptyset$.

2) $\overline{a} = \overline{b}$ khi và chỉ khi aRb.

3) $\overline{a} = \overline{b}$ hoặc $\overline{a} \cap \overline{b} = \emptyset$.

Chứng minh: 1) Vì R có tính phản xạ nên aRa hay $a \in \overline{a}$. Do đó $\overline{a} \neq \emptyset$.

2) Giả sử $\overline{a} = \overline{b}$. Khi đó $a \in \overline{b}$, nên aRb.

Giả sử aRb. Khi đó với $x \in \overline{a}$, ta có xRa và do aRb nên xRb hay $x \in \overline{b}$. Vậy $\overline{a} \subset \overline{b}$. Đảo lại, với $x \in \overline{b}$, ta có xRb và do bRa (có từ aRb) nên xRa hay $x \in \overline{a}$. Vậy $\overline{b} \subset \overline{a}$. Từ đó ta có $\overline{a} = \overline{b}$.

3) Giả sử $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$. Khi đó tồn tại $x \in \overline{a} \cap \overline{b}$, nghĩa là xRa và xRb. Từ đó ta có aRx và xRb, nên có được aRb và theo trên ta có $\overline{a} = \overline{b}$.

3.2.1.4. Định nghĩa: Cho R là một quan hệ tương đương trên tập hợp A. Khi đó A được chia thành các lớp tương đương khác rỗng, rời nhau đôi một. Tập hợp các lớp tương đương đó gọi là tập thương của A theo quan hệ tương đương R và ký hiệu là A/R. Như vậy,

$$A/R = \{\overline{a} \mid a \in A\}.$$

Thí dụ: 1) Xét quan hệ tương đương "cùng phương" trên tập hợp D tất cả các đường thẳng trong mặt phẳng. Khi đó với đường thẳng $a \in D$, lớp tương đương $\overline{a}$ là tập hợp gồm a và các đường thẳng trong D song song với a. Trong toán học, người ta coi mỗi lớp tương đương nói trên là một phương trên mặt phẳng. Vì vậy có thể coi tập thương là tập các phương của mặt phẳng.

2) Cho $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Trên $\mathcal{P}(X)$, xét quan hệ R như sau:

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(X),\ A\ R\ B\ \Leftrightarrow\ |A| = |B|.$$

Dễ dàng có được R là một quan hệ tương đương trên $\mathcal{P}(X)$. Các lớp tương đương theo quan hệ R là:
$C_0 = \{\emptyset\}$ (tập con của X không có phần tử nào),
$C_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$ (các tập con của X có 1 phần tử),
$C_2 = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$(các tập con của X có 2 phần tử),
$C_3 = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$ (các tập con của X có 3 phần tử),
$C_4 = \{X\}$ (tập con của X có 4 phần tử).

Tập thương của X theo quan hệ R là $\mathcal{P}(X)/R = \{C_0, C_1, C_2, C_3, C_4\}$.

3) Xét quan hệ đồng dư môđulô n trên tập hợp $\mathbb{Z}$ các số nguyên. Với mỗi $x \in \mathbb{Z}$, nếu $x = qn + r$, trong đó $0 \le r < n$ thì $x \equiv r \pmod{n}$ hay $x \in \overline{r}$. Do đó các lớp tương theo quan hệ này là:
$\overline{0} = \{qn \mid q \in \mathbb{Z}\}$,
$\overline{1} = \{qn + 1 \mid q \in \mathbb{Z}\}$,
$\overline{2} = \{qn + 2 \mid q \in \mathbb{Z}\}$,
$\ldots\ldots$
$\overline{n-1} = \{qn + (n-1) \mid q \in \mathbb{Z}\}$.

Tập thương của $\mathbb{Z}$ theo quan hệ đồng dư môđulô n là $\mathbb{Z}/\equiv\!(\mathrm{mod}\,n)$ và thường được ký hiệu là $\mathbb{Z}_n$. Mỗi phần tử của $\mathbb{Z}_n$ được gọi là một số nguyên môđulô n.

3.2.1.5. Định nghĩa: Một phân hoạch của tập hợp A là một họ $(A_i)_{i \in I}$ các tập con của A sao cho

$$A_i \neq \emptyset\ (\forall i \in I),\ A_i \cap A_j = \emptyset\ (\forall i, j \in I,\ i \neq j),\ \bigcup_{i \in I} A_i = A.$$

Như vậy, khi có một quan hệ tương đương trên tập hợp A thì họ gồm tất cả các lớp tương đương theo quan hệ này tạo thành một phân hoạch của tập hợp A.

3.2.1.6. Mệnh đề: Mỗi phân hoạch của tập hợp A xác định một quan hệ tương đương trên A.

Chứng minh: Giả sử $(A_i)_{i \in I}$ là một phân hoạch của tập hợp A. Xét quan hệ R trên A như sau:

$$\forall a, b \in A,\ a\ R\ b\ \Leftrightarrow\ \exists i \in I,\ a, b \in A_i.$$

Từ các tính chất của phân hoạch, dễ dàng có được R là một quan hệ tương đương và mỗi lớp tương đương ứng với một tập con A_i nào đó.

3.2.2. Quan hệ thứ tự:

3.2.2.1. Định nghĩa: Một quan hệ trên tập hợp A được gọi là quan hệ thứ tự nếu nó có các tính chất phản xạ, phản đối xứng và bắc cầu.

Người ta thường ký hiệu một quan hệ thứ tự bởi ký hiệu $\leq$.

Nếu trên tập hợp A có một quan hệ thứ tự $\leq$ thì ta nói A là một tập hợp được sắp thứ tự.

Với hai phần tử $a, b \in A$ (trong đó A được sắp thứ tự bởi quan hệ thứ tự $\leq$), nếu ta có $a \leq b$ thì ta còn viết $b \geq a$.

Khi có quan hệ thứ tự $\leq$ trên A, ta có thể xác định quan hệ $<$ như sau:

$$\forall a, b \in A,\ a < b \ \Leftrightarrow \ a \leq b \text{ và } a \neq b.$$

Nếu có $a < b$, ta còn viết $b > a$.

Ta có thể mô tả việc sắp thứ tự một tập hữu hạn A (với quan hệ thứ tự $\leq$) bằng một biểu đồ gọi là biểu đồ Hasse. Đó là biểu đồ biểu diễn các phần tử của A bởi các dấu chấm và nếu có $a \leq b$ $(a, b \in A)$ thì nối a với b bởi một đoạn thẳng từ dưới lên trên.

Thí dụ: 1) Quan hệ $\leq$ thông thường trên các tập hợp số $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ là quan hệ thứ tự.

2) Quan hệ "chia hết" trên tập hợp $\mathbb{N}^*$ là một quan hệ thứ tự.

3) Quan hệ "bao hàm" trên tập hợp $\mathcal{P}(X)$ các tập con của tập hợp X là một quan hệ thứ tự.

3.2.2.2. Định nghĩa: Cho A là tập hợp được sắp thứ tự (bởi quan hệ $\leq$). Với hai phần tử $a, b \in A$, nếu ta có $a \leq b$ hoặc $b \leq a$ thì ta nói a và b so sánh được với nhau, còn nếu ta không có cả $a \leq b$ lẫn $b \leq a$ thì ta nói a và b không so sánh được với nhau.

Tập hợp được sắp thứ tự A gọi là một tập hợp được sắp thứ tự toàn phần nếu hai phần tử bất kỳ $a, b \in A$ luôn có thể so sánh được với nhau. Khi đó ta cũng gọi quan hệ thứ tự $\leq$ là một quan hệ thứ tự toàn phần.

Trong trường hợp ngược lại, tức là nếu tồn tại hai phần tử $a, b \in A$ không so sánh được với nhau thì ta gọi A là một tập hợp được sắp thứ tự bộ phận và quan hệ thứ tự $\leq$ là một quan hệ thứ tự bộ phận.

Thí dụ: 1) Quan hệ thứ tự $\leq$ thông thường trên tập hợp $\mathbb{N}$ các số tự nhiên là một quan hệ thứ tự toàn phần.

2) Tập hợp $\mathbb{N}^*$ các số tự nhiên khác không với quan hệ thứ tự "chia hết" là một tập hợp được sắp thứ tự bộ phận, vì chẳng hạn, ta không có $2|3$ và cũng không có $3|2$.

3) Quan hệ "bao hàm" trên tập hợp $\mathcal{P}(X)$ các tập con của tập hợp X, trong đó $|X| > 1$, là một quan hệ thứ tự bộ phận, vì chẳng hạn, với $x, y \in X$, $x \neq y$, ta có hai phần tử $\{x\}$ và $\{y\}$ của $\mathcal{P}(X)$ không so sánh được với nhau.

Với $X = \emptyset$ hoặc $X = \{x\}$, ta dễ nhận thấy $\mathcal{P}(X)$ được sắp thứ tự toàn phần bởi quan hệ $\subset$.

4) Cho A là tập hợp được sắp thứ tự toàn phần bởi quan hệ $\leq$ và n là một số nguyên dương. Trên A^n, ta định nghĩa quan hệ hai ngôi $\mathcal{D}$ như sau:

$$\forall a = (a_1, a_2, \ldots, a_n),\ b = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in A^n,\ a\ \mathcal{D}\ b \ \Leftrightarrow\ \text{hoặc } a = b$$
$$\text{hoặc tồn tại } i\ (1 \leq i \leq n) \text{ sao cho } a_1 = b_1, \ldots, a_{i-1} = b_{i-1},\ a_i < b_i.$$

Khi đó A^n được sắp thứ tự toàn phần bởi quan hệ $\mathcal{D}$. Quan hệ này được gọi là quan hệ thứ tự từ điển.

Chẳng hạn, xét $A = \{\sqcup, a, b, c, \ldots, x, y, z\}$, trong đó $\sqcup$ ký hiệu cho khoảng trắng (không có chữ cái). Rõ ràng A được sắp thứ tự toàn phần theo thứ tự liệt kê ở trên. Gọi n là số chữ cái nhiều nhất trong số các từ tiếng Anh. Một từ tiếng Anh bất kỳ có k chữ cái ($k \leq n$) thì được xem như một phần tử của A^n, trong đó k chữ cái đầu là các chữ cái của từ đó (theo thứ tự từ trái sang phải) và $n - k$ thành phần còn lại là $\sqcup$. Khi đó quan hệ thứ tự $\mathcal{D}$ trên A^n sẽ cho ta cách sắp xếp các từ tiếng Anh theo thứ tự như trong từ điển. Vì lý do đó $\mathcal{D}$ gọi là quan hệ thứ tự từ điển.

3.2.2.3. Định nghĩa: Cho tập hợp được sắp thứ tự A bởi quan hệ $\leq$ và X là một tập con khác rỗng của A. Phần tử $a \in X$ được gọi là phần tử lớn nhất (t.ư. nhỏ nhất) của X nếu với mọi $x \in X$ ta có $x \leq a$ (t.ư. $x \geq a$).

Phần tử lớn nhất (t.ư. nhỏ nhất) của X nếu tồn tại là duy nhất. Thật vậy, nếu a và b là hai phần tử lớn nhất (t.ư. nhỏ nhất) của X thì theo định nghĩa ta có $a \leq b$ và $b \leq a$; theo tính chất phản đối xứng của $\leq$, ta có $a = b$.

Thí dụ: 1) Xét tập hợp $\mathbb{N}$ các số tự nhiên với quan hệ $\leq$ thông thường. Khi đó $\mathbb{N}$ có phần tử nhỏ nhất là 0 và không có phần tử lớn nhất.

Xét tập con $X = \{10, 15, 1, 4, 9, 22, 11\}$ của $\mathbb{N}$. Khi đó phần tử nhỏ nhất của X là 1 và phần tử lớn nhất là 22.

2) Xét tập hợp $\mathbb{N}^*$ các số tự nhiên khác không được sắp thứ tự bởi quan hệ "chia hết". Khi đó 1 là phần tử nhỏ nhất (vì $1 \mid a$, $\forall a \in \mathbb{N}^*$) và không có phần tử lớn nhất.

Xét $X = \{2, 3, 6, 8, 12, 24\} \subset \mathbb{N}^*$. Khi đó X có phần tử lớn nhất là 24 và không có phần tử nhỏ nhất.

3) Cho X là một tập hợp. Xét tập hợp $\mathcal{P}(X)$ gồm các tập con của X được sắp thứ tự bởi quan hệ "bao hàm". Khi đó $\mathcal{P}(X)$ có phần tử nhỏ nhất là $\emptyset$ và phần tử lớn nhất là X.

3.2.2.4. Định nghĩa: Cho tập hợp được sắp thứ tự A bởi quan hệ $\leq$ và X là một tập con khác rỗng của A. Phần tử $c \in A$ được gọi là một chặn trên (t.ư. chặn dưới) của X nếu với mọi $x \in X$ ta có $x \leq c$ (t.ư. $x \geq c$). Nếu X có ít nhất một chặn trên (t.ư. chặn dưới) thì ta nói X là tập con bị chặn trên (t.ư. bị chặn dưới).

Một tập con X của tập hợp được sắp thứ tự A có thể không có chặn trên (t.ư. chặn dưới), cũng có thể có một hay nhiều chặn trên (t.ư. chặn dưới).

Với X là một tập con của tập hợp được sắp thứ tự A và $a \in X$. Phần tử a là phần tử lớn nhất (t.ư. nhỏ nhất) của X khi và chỉ khi a là một chặn trên (t.ư. chặn dưới) của X.

Thí dụ: 1) Xét tập hợp $\mathbb{N}$ được sắp thứ tự bởi quan hệ $\leq$ thông thường và $X = \{6, 8, 4, 9, 45, 10, 7, 12\} \subset \mathbb{N}$. Khi đó các số 0, 1, 2, 3 là các chặn dưới của X và các số tự nhiên $x \geq 45$ là các chặn trên của X.

2) Xét tập hợp $\mathbb{Q}_0^*$ các số hữu tỉ không âm với quan hệ thứ tự $\leq$ thông thường và $X = \{\dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\} \subset \mathbb{Q}_0^*$. Khi đó 0 là chặn dưới duy nhất của X mà không là phần tử nhỏ nhất của X và các số hữu tỉ $x \geq 1$ là các chặn trên của X mà 1 là phần tử lớn nhất của X.

3) Xét tập hợp $\mathbb{N}^*$ được sắp thứ tự bởi quan hệ "chia hết" và $X = \{2, 4, 6, 8, 12\} \subset \mathbb{N}^*$. Khi đó các số 1, 2 là các chặn dưới của X và các số $x \in \mathbb{N}^*$ sao cho x là bội chung của 2, 4, 6, 8, 12, là các chặn trên của X.

3.2.2.5. Định nghĩa: Cho tập hợp được sắp thứ tự A bởi quan hệ $\leq$ và X là một tập con khác rỗng của A. Phần tử nhỏ nhất (t.ư. lớn nhất) của tập hợp các chặn trên (t.ư. chặn dưới) của X được gọi là cận trên (t.ư. cận dưới) của X trong A, ký hiệu $\sup\limits_A X$ (t.ư. $\inf\limits_A X$).

Như vậy, phần tử $a \in A$ là cận trên (t.ư. cận dưới) của tập con X của A khi và chỉ khi a là một chặn trên (t.ư. chặn dưới) của A và $a \leq c$ (t.ư. $a \geq c$) với mọi chặn trên (t.ư. chặn dưới) c của X.

Cận trên (t.ư. cận dưới) của mỗi tập con X của tập hợp được sắp thứ tự A nếu tồn tại là duy nhất. Ngoài ra, cận trên (t.ư. cận dưới) của X là thuộc X khi và chỉ khi nó là phần tử lớn nhất (t.ư. nhỏ nhất) của X.

Thí dụ: 1) Xét tập hợp $\mathbb{R}$ được sắp thứ tự bởi quan hệ $\leq$ thông thường và $X = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\} = (1, 2) \subset \mathbb{R}$ và $X' = \{(1 + \frac{1}{n})^n \mid n \in \mathbb{N}^*\} \subset \mathbb{R}$. Khi đó tập hợp các chặn trên của X là $[2, +\infty)$ và của X' là $[e, +\infty)$, tập hợp các chặn dưới của X là $(-\infty, 1]$ và của X' là $(-\infty, 2]$. Do đó $\sup\limits_{\mathbb{R}} X = 2$, $\sup\limits_{\mathbb{R}} X' = e$, $\inf\limits_{\mathbb{R}} X = 1$, $\inf\limits_{\mathbb{R}} X' = 2$ $(\in X')$.

2) Xét tập hợp $\mathbb{N}^*$ được sắp thứ tự bởi quan hệ "chia hết" và $X = \{2, 3, 6, 8\}$. Khi đó tập hợp các chặn trên của X là các bội chung trong $\mathbb{N}^*$

của 2, 3, 6, 8 và tập hợp các chặn dưới của X là các ước chung trong $\mathbb{N}^*$ của 2, 3, 6, 8. Do đó $\sup\limits_{\mathbb{N}^*} X = \text{BCNN}(2,3,6,8) = 24$ và $\inf\limits_{\mathbb{N}^*} X = \text{UCLN}(2,3,6,8) = 1$.

3) Xét tập hợp $\mathcal{P}(X)$ được sắp thứ tự bởi quan hệ "bao hàm" và $\mathcal{X} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \subset \mathcal{P}(X)$. Khi đó $\sup\limits_{\mathcal{P}(X)} \mathcal{X} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ và $\inf\limits_{\mathcal{P}(X)} \mathcal{X} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$.

3.2.2.6. Định nghĩa: Cho tập hợp được sắp thứ tự A bởi quan hệ $\leq$ và X là một tập con khác rỗng của A. Phần tử $m \in X$ được gọi là phần tử tối đại (t.ư. tối tiểu) của X nếu với mọi $x \in X$ ta có:

$$m \leq x \;\Rightarrow\; x = m \;\; (\text{t.ư. } x \leq m \Rightarrow \; x = m),$$

tức là không tồn tại phần phần tử x nào của X sao cho $x > m$ (t.ư. $x < m$).

Rõ ràng rằng phần tử tối đại (t.ư. tối tiểu) m của A sao cho $m \in X$ cũng là phần tử tối đại (t.ư. tối tiểu) của X. Tuy nhiên, nếu m là phần tử tối đại (t.ư. tối tiểu) của X thì chưa chắc m là phần tử tối đại (t.ư. tối tiểu) của A.

Phần tử tối đại (t.ư. tối tiểu) của một tập hợp có thể không có và nếu tồn tại, có thể có hơn 1.

3.2.2.7. Mệnh đề: Cho tập hợp được sắp thứ tự A bởi quan hệ $\leq$ và X là một tập con khác rỗng của A. Khi đó:

1) Nếu X có phần tử lớn nhất (t.ư. nhỏ nhất) là a thì a là phần tử tối đại (t.ư. tối tiểu) duy nhất của X.

2) Nếu X được sắp thứ tự toàn phần bởi quan hệ $\leq$ thì phần tử $a \in X$ là phần tử lớn nhất (t.ư. nhỏ nhất) của X khi và chỉ khi a là phần tử tối đại (t.ư. tối tiểu) của X.

Chứng minh: 1) Giả sử a là phần tử lớn nhất (t.ư. nhỏ nhất) của X. Khi đó ta có $x \leq a$ (t.ư. $x \geq a$) với mọi $x \in X$ và nếu $a \leq x$ (t.ư. $a \geq x$) thì do tính chất phản đối xứng ta có $x = a$. Vậy a là phần tử tối đại (t.ư. tối tiểu) của X.

Nếu a' là một phần tử tối đại (t.ư. tối tiểu) tùy ý của X thì do a là phần tử lớn nhất (t.ư. nhỏ nhất) của X ta có $a' \leq a$ (t.ư. $a' \geq a$) và do a' là phần tử tối đại (t.ư. tối tiểu) của X nên $a' = a$.

2) **($\Rightarrow$)** Có từ 1).

($\Leftarrow$) Giả sử $a \in X$ là phần tử tối đại (t.ư. tối tiểu) của X. Khi đó do X được sắp thứ tự toàn phần nên với mọi $x \in X$, ta có $x \leq a$ hoặc $a \leq x$. Nếu $a \leq x$ (t.ư. $a \geq x$) thì do a là phần tử tối đại (t.ư. tối tiểu) của X ta có $x = a$. Vậy $x \leq a$ (t.ư. $x \geq a$) với mọi $x \in X$ hay x là phần tử lớn nhất (t.ư. nhỏ nhất) của X.

Thí dụ: 1) Tập hợp $\mathbb{N}^*$ với quan hệ "chia hết" có phần tử tối tiểu duy nhất là 1, đó cũng là phần tử nhỏ nhất của $\mathbb{N}^*$, không tồn tại phần tử tối đại.

Tập con $X = \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ của $\mathbb{N}^*$ có các phần tử tối tiểu là các số nguyên tố và X không có phần tử tối đại.

Tập con $X' = \{2, 3, 4, 6, 9, 12, 19, 24\}$ của $\mathbb{N}^*$ có các phần tử tối tiểu là 2, 3, 19 và các phần tử tối đại là 9, 19, 24.

2) Cho tập hợp $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Xét tập hợp $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset, X\}$ với quan hệ "bao hàm". Khi đó $\mathcal{A}$ có các phần tử tối tiểu là các tập con 1 phần tử: $\{x_1\}$, $\{x_2\}, \dots, \{x_n\}$ và có các phần tử tối đại là các tập con $n-1$ phần tử: $\{x_2, x_3, \dots, x_n\}$, $\{x_1, x_3, \dots, x_n\}, \dots, \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$.

3.2.2.8. Định nghĩa: Cho tập hợp được sắp thứ tự A bởi quan hệ $\leq$. Ta nói A được sắp thứ tự tốt bởi quan hệ này nếu mọi tập con khác rỗng của A đều có phần tử nhỏ nhất.

3.2.2.9. Hệ quả: Nếu một tập hợp được sắp thứ tự tốt bởi một quan hệ nào đó thì nó được sắp thứ tự toàn phần bởi quan hệ đó.

Chứng minh: Giả sử A là tập hợp được sắp thứ tự tốt bởi quan hệ $\leq$. Khi đó với hai phần tử bất kỳ $a, b \in A$, tập con $X = \{a, b\}$ của A có phần tử nhỏ nhất. Nếu a là phần tử nhỏ nhất của X thì $a \leq b$ và nếu b là phần tử nhỏ nhất của X thì $b \leq a$. Như vậy, a và b so sánh được với nhau hay A được sắp thứ tự toàn phần bởi quan hệ $\leq$.

Thí dụ: 1) Tập hợp $\mathbb{N}$ được sắp thứ tự tốt bởi quan hệ $\leq$ thông thường.

2) Tập hợp $\mathbb{N}^*$ không được sắp thứ tự tốt bởi quan hệ "chia hết".

3) Các tập hợp $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ không được sắp thứ tự tốt bởi quan hệ $\leq$ thông thường.

3.2.2.10. Định nghĩa: Tập hợp được sắp thứ tự A được gọi là một dàn nếu với hai phần tử bất kỳ $a, b \in A$, tập hợp $\{a, b\}$ luôn có cận trên và cận dưới. Cận trên và cận dưới của $\{a, b\}$ lần lượt được ký hiệu là $a \vee b$ và $a \wedge b$.

3.2.2.11. Tính chất: Cho A là một dàn. Khi đó với mọi $a, b, c \in A$, ta có:

1) Luật lũy đẳng: $a \vee a = a$, $a \wedge a = a$.

2) Luật giao hoán: $a \vee b = b \vee a$, $a \wedge b = b \wedge a$.

3) Luật kết hợp: $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$, $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$.

4) Luật hấp thụ: $a \vee (a \wedge b) = a$, $a \wedge (a \vee b) = a$.

Chứng minh: Có ngay từ định nghĩa của cận trên và cận dưới.

Thí dụ: 1) Tập hợp $\mathbb{N}^*$ với quan hệ chia hết là một dàn vì với mọi $m, n \in \mathbb{N}^*$, ta có $m \vee n$ là BCNN(m, n) và $m \wedge n$ là UCLN(m, n).

2) Tập hợp $\mathcal{P}(X)$ với quan hệ "bao hàm" là một dàn vì với mọi $A, B \in \mathcal{P}(X)$, ta có $A \vee B$ là $A \cup B$ và $A \wedge B$ là $A \cap B$.

Ta thừa nhận mệnh đề sau, thường được gọi là Bổ đề Zorn, về sự tồn tại phần tử tối đại trong một tập hợp được sắp thứ tự. Mệnh đề này tương đương với hàng loạt mệnh đề khác trong lý thuyết tập hợp, trong số này có Tiên đề chọn, Định đề Zermelo, Nguyên lý sắp thứ tự tốt, ...

3.2.2.12. Bổ đề Zorn: Nếu tập hợp khác rỗng X được sắp thứ tự quy nạp nghĩa là mọi tập con được sắp thứ tự toàn phần của nó đều có chặn trên thì X có phần tử tối đại.

BÀI TẬP CHƯƠNG III

1. Có bao nhiêu quan hệ khác nhau từ tập hợp có m phần tử đến tập hợp có n phần tử?

2. Xác định xem quan hệ R trên tập hợp các con người trên trái đất có là phản xạ, đối xứng, phản đối xứng, bắc cầu không, với $(a, b) \in R$ nếu và chỉ nếu:

a) a cao hơn b ?
b) a và b sinh cùng ngày ?
c) a và b cùng tên ?
d) a và b có cùng một ông ?

3. Cũng hỏi như trên, với quan hệ R trên tập hợp $\mathbb{Z}$ các số nguyên và $x\ R\ y$ nếu và chỉ nếu:

a) $x \neq y$.
b) $xy \geq 1$.
c) $x = y + 1$ hay $x = y - 1$.
d) $x + y$ là số chẵn.
e) x là bội số của y.
f) x và y đều âm hoặc đều không âm.
g) $x = y^2$.
h) $x \geq y^2$.

4. Một quan hệ R trên tập hợp A được gọi là phản phản xạ nếu với mọi $a \in A$, $(a, a) \notin R$ và được gọi là bất đối xứng nếu với mọi $a, b \in A$, $(a, b) \in R$ kéo theo $(b, a) \notin R$.

a) Các quan hệ nào trong Bài 2 và 3 là phản phản xạ.
b) Các quan hệ nào trong Bài 2 và 3 là bất đối xứng.

5. Cho R là một quan hệ từ tập hợp A đến tập hợp B. Quan hệ ngược từ B đến A, được ký hiệu là R^{-1}, là tập hợp $\{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$. Quan hệ bù $\overline{R}$ là tập hợp $\{(a, b) \mid (a, b) \notin R\}$. Tìm R^{-1} và $\overline{R}$ của R sau:

a) $R = \{(a, b) \mid a < b\}$ trên tập hợp $\mathbb{Z}$ các số nguyên.
b) $R = \{(a, b) \mid b \text{ chia hết cho } a\}$ trên tập hợp $\mathbb{N}^*$ các số nguyên dương.
c) R là quan hệ trên tập hợp các tỉnh của Việt Nam gồm các cặp (a, b), trong đó tỉnh a giáp giới với tỉnh b.

6. Giả sử R và S là hai quan hệ có tính phản xạ trên tập hợp A. Xác định xem các quan hệ $R \cup S$, $R \cap S$, $R \oplus S$, $R \setminus S$ và $S \circ R$ có tính chất phản xạ hay phản phản xạ.

7. Cho R là một quan hệ trên tập hợp A. Chứng minh rằng:

a) R là phản xạ nếu và chỉ nếu R^{-1} là phản xạ.

b) R là phản xạ nếu và chỉ nếu $\overline{R}$ là phản phản xạ.

c) R là phản đối xứng nếu và chỉ nếu $R \cap R^{-1}$ là tập con của quan hệ đường chéo $\Delta = \{(a, a) \mid a \in A\}$.

8. Cho R là một quan hệ trên tập hợp A và n là một số nguyên dương. Chứng minh rằng

a) Nếu R là phản xạ thì R^n là phản xạ.

b) Nếu R là đối xứng thì R^n là đối xứng.

c) Nếu R là phản xạ và bắc cầu thì $R^n = R$.

9. Có bao nhiêu quan hệ trên tập hợp gồm n phần tử là

a) Phản xạ?

b) Đối xứng?

c) Bất đối xứng?

d) Phản đối xứng?

e) Phản xạ và đối xứng?

10. Các quan hệ nào trong số các quan hệ trên tập $\{0, 1, 2, 3\}$ cho dưới đây là quan hệ tương đương?

a) $\{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$.

b) $\{(0, 0), (0, 2), (2, 0), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$.

c) $\{(0, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$.

d) $\{(0, 0), (1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$.

e) $\{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 2), (3, 3)\}$.

11. Cũng hỏi như trên đối với các quan hệ trên tập hợp các ánh xạ từ $\mathbb{Z}$ đến $\mathbb{Z}$ được cho dưới đây:

a) $\{(f, g) \mid f(1) = g(1)\}$.

b) $\{(f, g) \mid f(0) = g(0)$ hoặc $f(1) = g(1)\}$.

c) $\{(f, g) \mid f(x) - g(x) = 1, \forall x \in \mathbb{Z}\}$.

d) $\{(f, g) \mid \exists C \in \mathbb{Z},\ f(x) - g(x) = C$ và $\forall x \in \mathbb{Z}\}$.

e) $\{(f, g) \mid f(0) = g(1)$ và $f(1) = g(0)\}$.

12. Cho A là một tập hợp khác rỗng, f là một ánh xạ có A là miền xác định của nó và $R = \{(x, y) \in A \times A \mid f(x) = f(y)\}$. Chứng minh rằng R là một quan hệ tương đương trên A và xác định các lớp tương đương của R.

13. Cho A là một tập hợp khác rỗng và R là một quan hệ tương đương trên A. Chứng minh rằng tồn tại một ánh xạ f có A là miền xác định sao cho $(x, y) \in R$ khi và chỉ khi $f(x) = f(y)$.

14. Tìm quan hệ tương đương nhỏ nhất trên tập $\{a, b, c, d, e\}$ chứa quan hệ $\{(a, b), (a, c), (d, e)\}$.

15. Xác định số các quan hệ tương đương khác nhau trên tập hợp 3 phần tử bằng cách liệt kê ra các quan hệ đó.

16. Có bao nhiêu quan hệ tương đương khác nhau cho trên tập hợp 5 phần tử có đúng 3 lớp tương đương khác nhau?

17. Một quan hệ R trên tập hợp X được gọi là quan hệ vòng quanh nếu xRy và yRz kéo theo zRx. Chứng minh rằng quan hệ R là phản xạ và vòng quanh khi và chỉ khi R là một quan hệ tương đương.

18. Cho L_0 là một đường thẳng cố định trên mặt phẳng $\mathbb{R}^2$. Một quan hệ R trên tập hợp L tất cả các đường thẳng trên mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ được xác định như sau:

$$\forall L_1, L_2 \in L,\ L_1 R L_2 \ \Leftrightarrow\ L_1 \cap L_0 \neq \emptyset \ \wedge\ L_2 \cap L_0 \neq \emptyset.$$

Xác định xem R có là một quan hệ tương đương hay không?

19. Cho M là một tập hợp khác rỗng và $a \in M$. Trên $X = P(M)$ ta định nghĩa quan hệ hai ngôi như sau:

$$R \ = \ \{(A, B) \in X^2 \mid A = B \text{ hay } a \in A \cap B\}.$$

Chứng minh rằng R là một quan hệ tương đương trên X. Hãy chỉ ra tập hợp thương.

20. Gọi X là tập hợp mọi ánh xạ từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$. Chứng tỏ quan hệ R sau là quan hệ tương đương trên X:

a) $\forall x, y \in X,\ xRy \ \Leftrightarrow\ \exists C > 0,\ x(t) = y(t),\ \forall t \in \mathbb{R},\ |t| < C.$

b) $\forall x, y \in X,\ xRy \ \Leftrightarrow\ \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{x(t) - y(t)}{t^n} = 0$, trong đó $n \in \mathbb{N}$ cho trước.

21. Xét quan hệ hai ngôi R trên $\mathbb{N}^2$ như sau:

$$\forall (m_1, n_1), (m_2, n_2) \in \mathbb{N}^2,\ (m_1, n_1) R (m_2, n_2) \Leftrightarrow m_1 + n_2 = m_2 + n_1.$$

Chứng minh rằng R là một quan hệ tương đương trên $\mathbb{N}^2$. Hãy chỉ ra tập hợp thương.

22. Trên $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ ($\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$), xét quan hệ hai ngôi sau:

$$\forall (z_1, n_1), (z_2, n_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*,\ (z_1, n_1) R (z_2, n_2) \ \Leftrightarrow\ z_1 n_2 \ = \ z_2 n_1.$$

Chứng minh rằng R là một quan hệ tương đương trên $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Hãy chỉ ra tập hợp thương.

23. Trong mặt phẳng có hệ toạ độ vuông góc, hai điểm $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ được gọi là quan hệ với nhau bởi R nếu và chỉ nếu $x_1 y_1 = x_2 y_2$. Chứng tỏ rằng R là một quan hệ tương đương và tìm các lớp tương đương.

Bây giờ nếu định nghĩa

$$P_1 \ S \ P_2 \ \Leftrightarrow \ x_1y_1 \ = \ x_2y_2 \ \wedge \ x_1x_2 \geq 0$$

thì S còn là một quan hệ tương đương nữa không ?

24. Trên tập hợp $\mathbb{R}$ các số thực, xét quan hệ hai ngôi R sau:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \ x \ R \ y \ \Leftrightarrow \ x^3 - y^3 = x - y.$$

Chứng minh rằng R là một quan hệ tương đương. Tìm các lớp tương đương và tập hợp thương.

25. Xét quan hệ R trên tập hợp $\mathbb{R}$ các số thực như sau:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \ a \ R \ b \ \Leftrightarrow \ a^3 \leq b^3.$$

Chứng minh rằng R sắp thứ tự toàn phần tập hợp $\mathbb{R}$.

Nếu xét quan hệ S trên tập hợp $\mathbb{R}$ như sau thì S có là một quan hệ thứ tự không?

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \ a \ S \ b \ \Leftrightarrow \ a^2 \leq b^2.$$

26. Xét tập hợp $\mathbb{N}^*$ với quan hệ thứ tự "chia hết" và $X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Hãy tìm các phần tử lớn nhất, nhỏ nhất, chặn trên, chặn dưới, cận trên, cận dưới, tối đại, tối tiểu của X. Vẽ biểu đồ Hasse minh hoạ tập được sắp thứ tự X.

27. Xét tập hợp $\mathcal{P}(X)$ với quan hệ thứ tự "bao hàm", trong đó $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Hãy tìm các phần tử lớn nhất, nhỏ nhất, chặn trên, chặn dưới, cận trên, cận dưới, tối đại, tối tiểu của $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset, X\}$ và $\mathcal{X} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 4\}\}$.

28. Xét tập hợp $\mathbb{R}$ các số thực với quan hệ thứ tự $\leq$ thông thường và $X = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{N}, \ 0 < m < n\}$. Chứng minh rằng X không có phần tử lớn nhất và nhỏ nhất. Hãy tìm cận trên và cận dưới của X.

29. Tập A được gọi là sắp thứ tự đầy đủ bởi quan hệ thứ tự $\leq$ nếu mọi tập con khác rỗng của A bị chặn trên đều có cận trên.

a) Chứng minh rằng sắp thứ tự tốt là sắp thứ tự đầy đủ.

b) Chứng tỏ rằng $\mathbb{N}$ và $\mathbb{R}$ sắp thứ tự đầy đủ bởi quan hệ $\leq$ thông thường, nhưng $\mathbb{Q}$ sắp thứ tự không đầy đủ bởi $\leq$.

30. Cho X là một tập được sắp thứ tự. Chứng minh rằng tồn tại các tập con $A \subset X$ và $B \subset X$ sao cho $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = X$, A được sắp thứ tự tốt (theo quan hệ thứ tự trong X), còn B không có phần tử nhỏ nhất.

31. Cho E là tập được sắp thứ tự bởi quan hệ R. Ta nói tập con $F \subset E$ là một tập con tự do của tập E nếu với mọi $a, b \in F, a \neq b$ kéo theo $(a, b) \notin R$ và $(b, a) \notin R$. Gọi $\mathcal{S}$ là tập tất cả các tập con tự do của E. Trên $\mathcal{S}$ ta định nghĩa quan hệ $\leq$ như sau:

$$\forall X, Y \in \mathcal{S},\ X \leq Y \ \Leftrightarrow\ \forall x \in X,\ \exists y \in Y,\ (x, y) \in R.$$

Chứng minh rằng:

a) Quan hệ $\leq$ là một quan hệ thứ tự trên tập $\mathcal{S}$.

b) Với $X, Y \in \mathcal{S}$, nếu $X \subset Y$ thì $X \leq Y$.

c) Tập $\mathcal{S}$ được sắp thứ tự toàn phần bởi quan hệ $\leq$ khi và chỉ khi tập E được sắp thứ tự toàn phần bởi quan hệ R.

32. Một tập sắp thứ tự $\mathcal{L}$ được gọi là một dàn đầy đủ nếu mọi tập con khác rỗng của $\mathcal{L}$ đều có cận trên và cận dưới. Chứng minh rằng:

a) Một dàn đầy đủ $\mathcal{L}$ chứa phần tử nhỏ nhất và phần tử lớn nhất.

b) Tập $\mathcal{P}(X)$ gồm tất cả các tập con của X với quan hệ bao hàm là một dàn đầy đủ.

c) Tập $\mathbb{Z}^+$ các số nguyên dương với quan hệ thứ tự là quan hệ chia hết không phải là một dàn đầy đủ.

33. Cho X là một tập tùy ý, $\mathcal{S}$ là tập tất cả các quan hệ tương đương trên X. Chứng minh rằng tập $\mathcal{S}$ với quan hệ thứ tự là quan hệ bao hàm là một dàn đầy đủ.

34. Chứng minh rằng một tập sắp thứ tự $\mathcal{L}$ là một dàn đầy đủ khi và chỉ khi thoả mãn một trong các điều kiện sau đây:

a) Tập $\mathcal{L}$ chứa phần tử lớn nhất và mọi tập con khác rỗng của $\mathcal{L}$ đều có cận dưới.

b) Tập $\mathcal{L}$ chứa phần tử nhỏ nhất và mọi tập con khác rỗng của $\mathcal{L}$ đều có cận trên.

TRẢ LỜI VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP

CHƯƠNG III

1. Mỗi quan hệ từ tập A có m phần tử đến tập B có n phần tử là một tập con của $A \times B$. Do đó số quan hệ cần tìm là 2^{mn}.

2. **a)** R không có tính phản xạ, không có tính đối xứng, không có tính phản đối xứng, có tính bắc cầu.

b), c) R có tính phản xạ, có tính đối xứng, không có tính phản đối xứng, có tính bắc cầu.

d) R có tính phản xạ, đối xứng, không có tính bắc cầu (phân biệt ông nội, ông ngoại).

3. **a)** R chỉ có tính đối xứng.
b) R chỉ có tính đối xứng và bắc cầu.
c) R chỉ có tính đối xứng.
d) R chỉ có tính phản xạ, đối xứng và bắc cầu.
e) R chỉ có tính phản xạ và bắc cầu.
f) R chỉ có tính phản xạ, đối xứng và bắc cầu.
g) R chỉ có tính phản đối xứng.
h) R chỉ có tính phản đối xứng và bắc cầu.

4. **a)** Các quan hệ R trong Câu a) của Bài 2, Câu a) và Câu c) của Bài 3 là phản phản xạ.

b) Từ định nghĩa ta thấy một quan hệ là bất đối xứng thì nó là phản phản xạ. Do đó chỉ có quan hệ R trong Câu a) của Bài 2 là bất đối xứng.

5. **a)** $R^{-1} = \{(a,b) \mid a > b\}$ và $\overline{R} = \{(a,b) \mid a \geq b\}$.
b) $R^{-1} = \{(a,b) \mid a$ chia hết cho $b\}$ và
$\overline{R} = \{(a,b) \mid b$ không chia hết cho $a\}$.

c) Vì R có tính đối xứng nên $R^{-1} = R$. Ngoài ra, $\overline{R}$ gồm các cặp (a,b), trong đó tỉnh a không giáp giới với tỉnh b.

6. Vì $\forall a \in A,\ (a,a) \in R \wedge (a,a) \in S$ nên $R \cup S$, $R \cap S$, $S \circ R$ có tính phản xạ và $R \oplus S$, $R \setminus S$ có tính phản phản xạ.

7. **a)** Vì $(a,a) \in R \Leftrightarrow (a,a) \in R^{-1}$.
b) Vì $(a,a) \in R \Leftrightarrow (a,a) \notin \overline{R}$.

c) Vì R là phản đối xứng $\Leftrightarrow$ $(\forall a, b \in A,\ (a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \Rightarrow a = b)$ $\Leftrightarrow$ $(\forall a, b \in A,\ (a,b) \in R \cap R^{-1} \Rightarrow a = b)$ $\Leftrightarrow$ $R \cap R^{-1} \subset \Delta$.

8. **a)** $\forall a \in A,\ (a,a) \in R$ nên $(a,a) \in R^n$.

b) $(a,b) \in R^n \Rightarrow \exists b_1, b_2, \ldots, b_{n-1} \in A,\ (a,b_1) \in R, (b_1,b_2) \in R, \ldots, (b_{n-2}, b_{n-1}) \in R, (b_{n-1}, b) \in R \Rightarrow (b, b_{n-1}) \in R, (b_{n-1},\ b_{n-2}) \in R \ldots, (b_2, b_1) \in R, (b_1, a) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$.

c) R có tính bắc cầu nên $R^n \subset R$. R có tính phản xạ nên với $(a, b) \in R$, ta có $(a, b_1),\ (b_1, b_2), \ldots,\ (b_{n-1}, b) \in R$, trong đó $b_1 = b_2 = \cdots = b_{n-1} = a$, do đó $(a, b) \in R$. Vậy $R \subset R^n$.

9. Giả sử $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Khi đó mỗi quan hệ R trên A được biểu diễn bởi một bảng (ma trận) $0-1$ gồm n dòng và n cột, trong đó phần tử dòng i cột j là 1 nếu $(a_i, a_j) \in R$ và là 0 nếu $(a_i, a_j) \notin R$.

a) R là phản xạ khi và chỉ khi các phần tử trên đường chéo đều bằng 1. Vì vậy số quan hệ phản xạ trên A bằng số cách chọn 0 hoặc 1 cho $n^2 - n$ phần tử ngoài đường chéo, tức là bằng $2^{n(n-1)}$.

b) R là đối xứng khi và chỉ khi phần tử dòng i, cột j bằng phần tử dòng j, cột i, $\forall i, j = 1, \ldots, n$. Vì vậy số quan hệ đối xứng trên A bằng số cách chọn 0 hoặc 1 cho các phần tử tam giác dưới, kể cả trên đường chéo ($1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$), tức là bằng $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

c) R là bất đối xứng khi và chỉ khi các phần tử trên đường chéo đều bằng 0 và các phần tử dòng i cột j, phần tử dòng j cột i hoặc cùng bằng 0, hoặc một bằng 0, một bằng 1, $\forall i, j = 1, \ldots, n,\ i \neq j$. Vì vậy số quan hệ bất đối xứng trên A bằng số cách chọn $(0, 0)$, $(1, 0)$ hoặc $(0, 1)$ cho $1 + 2 + \cdot(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$ phần tử (dưới đường chéo), tức là bằng $3^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

d) R là phản đối xứng khi và chỉ khi các phần tử dòng i cột j, phần tử dòng j cột i hoặc cùng bằng 0, hoặc một bằng 0, một bằng 1, $\forall i, j = 1, \ldots, n,\ i \neq j$. Vì vậy số quan hệ phản đối xứng trên A bằng số cách chọn 0 hoặc 1 cho n phần tử trên đường chéo và số cách chọn $(0, 0)$, $(1, 0)$ hoặc $(0, 1)$ cho $1 + 2 + \cdot(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$ phần tử (dưới đường chéo), tức là bằng $2^n.3^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

e) R là phản xạ và đối xứng khi và chỉ khi các phần tử trên đường chéo đều bằng 1 và phần tử dòng i, cột j bằng phần tử dòng j, cột i, $\forall i, j = 1, \ldots, n\ i \neq j$. Vì vậy số quan hệ phản xạ và đối xứng trên A bằng số cách chọn 0 hoặc 1 cho $1 + 2 + \cdots n = \frac{n(n-1)}{2}$ phần tử (dưới đường chéo), tức là bằng $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

10. **a)** Quan hệ tương đương.
b) Không phản xạ và không bắc cầu.
c) Quan hệ tương đương.
d) Không bắc cầu.
e) Không đối xứng và không bắc cầu.

11. **a)** Quan hệ tương đương.
b) Không bắc cầu.
c) Không phản xạ, không đối xứng và không bắc cầu.
d) Quan hệ tương đương.
e) Không phản xạ và không bắc cầu.

12. $\forall x \in A,\ f(x) = f(x)$, nghĩa là R có tính phản xạ. $\forall x, y \in A,\ f(x) = f(y)$ kéo theo $f(y) = f(x)$, nghĩa là R có tính đối xứng. $\forall x, y, z \in A,\ f(x) = f(y)$

và $f(y) = f(z)$ kéo theo $f(x) = f(z)$, nghĩa là R có tính bắc cầu. Vậy R là một quan hệ tương đương. Mỗi lớp tương đương của R là một tập con $f^{-1}(b)$ của A với mỗi $b \in f(A)$.

13. Giả sử R có các lớp tương đương trên A là $\overline{x_i}$ với $(x_i)_{i\in I}$ là họ các phần tử đại biểu. Gọi $B = \{x_i \mid i \in I\}$. Xét ánh xạ $f : A \longrightarrow B$ cho bởi $f(x) = x_i$ nếu $x \in \overline{x_i}$ thì f là một ánh xạ cần tìm.

14. $\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,b),(b,a),(a,c),(c,a),$
$(d,e),(e,d),(b,c),(c,b)\}$.

15. Có 5 quan hệ tương đương trên tập $A = \{a,b,c\}$:
$\{(a,a),(b,b),(c,c)\}$,
$\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a)\}$,
$\{(a,a),(b,b),(c,c),(b,c),(c,b)\}$,
$\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,c),(c,a)\}$,
$\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a),(b,c),(c,b),(a,c),(c,a)\}$.

16. Gọi $X = \{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$, ký hiệu $X_{ij} = \{x_i,x_j\}$ với $1 \le i < j \le 5$ và $X_{ijk} = \{x_i,x_j,x_k\}$ với $1 \le i < j < k \le 5$.

Có 25 quan hệ tương đương trên tập X có đúng 3 lớp tương đương khác nhau:

1) $X_{123}^2 \cup \{(x_4,x_4),(x_5,x_5)\}$	2) $X_{124}^2 \cup \{(x_3,x_3),(x_5,x_5)\}$
3) $X_{125}^2 \cup \{(x_3,x_3),(x_4,x_4)\}$	4) $X_{134}^2 \cup \{(x_2,x_2),(x_5,x_5)\}$
5) $X_{135}^2 \cup \{(x_2,x_2),(x_4,x_4)\}$	6) $X_{145}^2 \cup \{(x_2,x_2),(x_3,x_3)\}$
7) $X_{234}^2 \cup \{(x_1,x_1),(x_5,x_5)\}$	8) $X_{235}^2 \cup \{(x_1,x_1),(x_4,x_4)\}$
9) $X_{245}^2 \cup \{(x_1,x_1),(x_3,x_3)\}$	10) $X_{345}^2 \cup \{(x_1,x_1),(x_2,x_2)\}$
11) $X_{12}^2 \cup X_{34}^2 \cup \{(x_5,x_5)\}$	12) $X_{13}^2 \cup X_{24}^2 \cup \{(x_5,x_5)\}$
13) $X_{14}^2 \cup X_{23}^2 \cup \{(x_5,x_5)\}$	14) $X_{12}^2 \cup X_{35}^2 \cup \{(x_4,x_4)\}$
15) $X_{13}^2 \cup X_{25}^2 \cup \{(x_4,x_4)\}$	16) $X_{15}^2 \cup X_{23}^2 \cup \{(x_4,x_4)\}$
17) $X_{12}^2 \cup X_{45}^2 \cup \{(x_3,x_3)\}$	18) $X_{14}^2 \cup X_{25}^2 \cup \{(x_3,x_3)\}$
19) $X_{15}^2 \cup X_{24}^2 \cup \{(x_3,x_3)\}$	20) $X_{13}^2 \cup X_{45}^2 \cup \{(x_2,x_2)\}$
21) $X_{14}^2 \cup X_{35}^2 \cup \{(x_2,x_2)\}$	22) $X_{15}^2 \cup X_{34}^2 \cup \{(x_2,x_2)\}$
23) $X_{23}^2 \cup X_{45}^2 \cup \{(x_1,x_1)\}$	24) $X_{24}^2 \cup X_{35}^2 \cup \{(x_1,x_1)\}$
25) $X_{25}^2 \cup X_{34}^2 \cup \{(x_1,x_1)\}$.	

17. $(\Rightarrow)$ Ta đã có R là phản xạ. $\forall x,y \in X,\ xRy \;\Rightarrow\; xRy \wedge yRy \;\Rightarrow\; yRx$ (do tính vòng quanh), tức là R có tính đối xứng. $\forall x,y,z \in X,\ xRy \wedge yRz \;\Rightarrow\; zRx \;\Rightarrow\; xRz$, tức là R có tính bắc cầu. Vậy R là một quan hệ tương đương.

$(\Leftarrow)$ R là một quan hệ tương đương nên R có tính phản xạ. $\forall x,y,z \in X,\ xRy \wedge yRz \;\Rightarrow\; xRz \;\Rightarrow\; zRx$, tức là R có tính vòng quanh.

18. R có tính đối xứng và bắc cầu, nhưng R không có tính phản xạ. Do đó R không là một quan hệ tương đương. Tuy nhiên, nếu L là tập các đường thẳng trong mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ cắt L_0 thì R là một quan hệ tương đương trên L.

19. Từ $A = A$, ta có $(A, A) \in R$ hay R có tính phản xạ. $\forall A, B \in X,\ (A, B) \in R \Rightarrow A = B \vee a \in A \cap B \Rightarrow B = A \vee a \in B \cap A \Rightarrow (B, A) \in R$, tức là R có tính đối xứng. $\forall A, B, C \in X,\ (A, B) \in R \wedge (B, C) \in R \Rightarrow (A = B \vee a \in A \cap B) \wedge (B = C \vee a \in B \cap C) \Rightarrow (A = B \wedge B = C) \vee (A = B \wedge a \in B \cap C) \vee (a \in A \cap B \wedge B = C) \vee (a \in A \cap B \wedge a \in B \cap C) \Rightarrow A = C \vee A \cap C \Rightarrow (A, C) \in R$, tức là R có tính bắc cầu. Vậy R là một quan hệ tương đương.

Với mỗi $A \in X$, nếu $a \notin A$ thì $(A, B) \in R \Leftrightarrow A = B$ nghĩa là lớp tương đương $[A] = \{A\}$ và nếu $a \in A$ thì $(A, B) \in R \Leftrightarrow a \in B$ nghĩa là lớp tương đương $[A] = \{B \in X \mid a \in B\}$. Do đó tập thương của X theo R là

$$X/R = \{\{A\} \mid A \subset M,\ a \notin A\} \cup \{\{A \in X \mid a \in A\}\}.$$

20. a) $\forall x \in X, x(t) = x(t), \forall t \in \mathbb{R}$, nghĩa là R có tính phản xạ. $\forall x, y \in X, xRy \Rightarrow \exists C > 0, x(t) = y(t), \forall t \in \mathbb{R},\ |t| < C \Rightarrow \exists C > 0,\ y(t) = x(t),\ \forall t \in \mathbb{R},\ |t| < C \Rightarrow yRx$, nghĩa là R có tính đối xứng. $\forall x, y, z \in X,\ xRy \wedge yRz \Rightarrow \exists C_1, C_2 > 0, (x(t) = y(t), \forall t \in \mathbb{R}, |t| < C_1) \wedge (y(t) = z(t), \forall t \in \mathbb{R}, |t| < C_2) \Rightarrow \exists C = \min(C_1, C_2), x(t) = z(t), \forall t \in \mathbb{R}, |t| < C$, nghĩa là R có tính bắc cầu. Vậy R là quan hệ tương đương.

b) $\forall x \in X, \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{x(t) - x(t)}{t^n} = 0$ hay xRx, nghĩa là R có tính phản xạ. $\forall x, y \in X, xRy \Rightarrow \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{x(t) - y(t)}{t^n} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{y(t) - x(t)}{t^n} = 0 \Rightarrow yRx$, nghĩa là R có tính đối xứng. $\forall x, y, z \in X, xRy \wedge yRz \Rightarrow \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{x(t) - y(t)}{t^n} = 0 \wedge \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{y(t) - z(t)}{t^n} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{x(t) - z(t)}{t^n} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{x(t) - y(t)}{t^n} + \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{y(t) - z(t)}{t^n} = 0 \Rightarrow xRz$, nghĩa là R có tính bắc cầu. Vậy R là quan hệ tương đương.

21. Rõ ràng R có tính phản xạ. $\forall (m_1, n_1), (m_2, n_2) \in \mathbb{N}^2$, $(m_1, n_1)R(m_2, n_2) \Rightarrow m_1 + n_2 = m_2 + n_1 \Rightarrow m_2 + n_1 = m_1 + n_2 \Rightarrow (m_2, n_2)R(m_1, n_1)$, nghĩa là R có tính đối xứng. $\forall (m_1, n_1), (m_2, n_2), (m_3, n_3) \in \mathbb{N}^2,\ (m_1, n_1)R(m_2, n_2) \wedge (m_2, n_2)R(m_3, n_3) \Rightarrow m_1 + n_2 = m_2 + n_1 \wedge m_2 + n_3 = m_3 + n_2 \Rightarrow m_1 + n_2 + m_2 + n_3 = m_2 + n_1 + m_3 + n_2 \Rightarrow m_1 + n_3 = m_3 + n_1 \Rightarrow (m_1, n_1)R(m_3, n_3)$, nghĩa là R có tính bắc cầu. Vậy R là một quan hệ tương đương.

$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2$, lớp tương đương

$$\overline{(m, n)} = \{(m', n') \in \mathbb{N}^2 \mid m' - n' = m_1 - n_1\}$$

và tập hợp thương là $\mathbb{N}^2/R = \{\overline{(m, n)} \mid (m, n) \in \mathbb{N}^2\}$ và là tập tương ứng 1-1 với tập các số nguyên $\mathbb{Z}$. Thật vậy, xét ánh xạ $f : \mathbb{N}^2/R \longrightarrow \mathbb{Z}$ cho bởi $f(\overline{(m, n)}) = m - n$. f là một đơn ánh vì với $(m, n), (m', n') \in \mathbb{N}^2$, $f(\overline{(m, n)}) = f(\overline{(m', n')}) \Rightarrow m - n = m' - n' \Rightarrow m + n' = m' + n \Rightarrow (m, n)R(m', n') \Rightarrow \overline{(m, n)} = \overline{(m', n')}$.

f là một toàn ánh vì với $z \in \mathbb{Z}$, nếu $z \geq 0$ thì $f(\overline{(z,0)}) = z$ và nếu $z < 0$ thì $f(\overline{(0,-z)}) = z$.

22. Rõ ràng R có tính phản xạ. $\forall (z_1, n_1),\ (z_2, n_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*,\ (z_1, n_1)R(z_2, n_2) \Rightarrow z_1 n_2 = z_2 n_1 \Rightarrow z_2 n_1 = z_1 n_2 \Rightarrow (z_2, n_2)R(z_1, n_1)$, nghĩa là R có tính đối xứng. $\forall (z_1, n_1),\ (z_2, n_2),\ (z_3, n_3) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, (z_1, n_1)R(z_2, n_2) \wedge (z_2, n_2)R(z_3, n_3) \Rightarrow z_1 n_2 = z_2 n_1 \wedge z_2 n_3 = z_3 n_2 \Rightarrow z_1 n_2 z_2 n_3 = z_2 n_1 z_3 n_2 \Rightarrow z_1 z_2 n_3 = z_2 z_3 n_1$; nếu $z_2 \neq 0$ thì $z_1 n_3 = z_3 n_1$, nếu $z_2 = 0$ thì $z_1 n_2 = 0$ ($\Rightarrow z_1 = 0$) và $z_3 n_2 = 0$ ($\Rightarrow z_3 = 0$) nên $z_1 n_3 = z_3 n_1 = 0$ hay $(z_1, n_1)R(z_3, n_3)$, nghĩa là R có tính bắc cầu. Vậy R là một quan hệ tương đương.

$\forall (z, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, lớp tương đương

$$\overline{(z,n)} = \{(z', n') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \mid \frac{z'}{n'} = \frac{z}{n}\}$$

và tập hợp thương là $(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*)/R = \{\overline{(z,n)} \mid (z,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*\}$ và là tập tương ứng 1-1 với tập các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$. Thật vậy, xét ánh xạ $f : (\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*)/R \longrightarrow \mathbb{Q}$ cho bởi $f(\overline{(z,n)}) = \frac{z}{n}$. f là một đơn ánh vì với $(z,n), (z',n') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, f(\overline{(z,n)}) = f(\overline{(z',n')}) \Rightarrow \frac{z}{n} = \frac{z'}{n'} \Rightarrow zn' = z'n \Rightarrow (z,n)R(z',n') \Rightarrow \overline{(z,n)} = \overline{(z',n')}$. f là một toàn ánh vì với $q \in \mathbb{Q},\ \exists z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*,\ q = \frac{z}{n} = f(\overline{(z,n)})$.

23. Dễ dàng có được R có tính phản xạ, đối xứng và bắc cầu, nghĩa là R là một quan hệ tương đương. Với điểm $P(a,b)$ trong mặt phẳng, lớp tương đương $\overline{P(a,b)} = \{P'(x,y) \mid xy = c\}$ (với $c = ab$). Nếu $c = 0$ thì $\overline{P(a,b)}$ chính là hai trục toạ độ $x = 0$ và $y = 0$. Nếu $c \neq 0$ thì $\overline{P(a,b)}$ chính là hyperbol có phương trình $xy = c$. Tập hợp thương là tập

$$\{\{P(x,y) \mid xy \ = \ c\} \mid c \in \mathbb{R}\}.$$

Quan hệ S không là quan hệ tương đương vì nó không có tính bắc cầu. Thật vậy, $(1,0)S(0,1)$ và $(0,1)S(-1,0)$ nhưng $(1,0)$ không có quan hệ S với $(-1,0)$

24. $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ x^3 - x^3 = x - x = 0$, tức là xRx hay R có tính phản xạ; $x^3 - y^3 = x - y \Rightarrow y^3 - x^3 = y - x$ tức là $xRy \Rightarrow yRx$ hay R có tính đối xứng; $x^3 - y^3 = x - y$ và $y^3 - z^3 = y - z \Rightarrow x^3 - z^3 = (x^3 - y^3) + (y^3 - z^3) = (x - y) + (y - z) = x - z$, tức là xRy và $yRz \Rightarrow xRz$ hay R có tính bắc cầu. Vậy R là một quan hệ tương đương.

$$\begin{aligned}\forall a \in \mathbb{R},\ \overline{a} &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - a^3 = x - a\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid (x-a)(x^2 + ax + a^2 - 1) = 0\}.\end{aligned}$$

– Nếu $a < -\frac{2}{\sqrt{3}}$ hay $a > \frac{2}{\sqrt{3}}$ thì $\overline{a} = \{a\}$;

– Nếu $a = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ hay $a = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ thì $\overline{a} = \{-\dfrac{2}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\}$;

– Nếu $a = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ hay $a = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ thì $\overline{a} = \{\dfrac{2}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\}$;

– Nếu $-\dfrac{2}{\sqrt{3}} < a < \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ và $a \neq \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, thì

$$\overline{a} = \{a, \frac{-a-\sqrt{4-3a^2}}{2}, \frac{-a+\sqrt{4-3a^2}}{2}\}.$$

25. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, ta có $a^3 \leq a^3$ hay R có tính phản xạ; nếu aRb và bRa tức là $a^3 \leq b^3$ và $b^3 \leq a^3$ hay $a^3 = b^3$ thì ta có $a = b$, do đó R có tính phản đối xứng; nếu aRb và bRc tức là $a^3 \leq b^3$ và $b^3 \leq c^3$ thì ta có $a^3 \leq c^3$ hay aRc, do đó R có tính bắc cầu. Ngoài ra, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ta luôn có $a \leq b$ hoặc $b \leq a$ tức là $a^3 \leq b^3$ hoặc $b^3 \leq a^3$. Vậy R là một quan hệ thứ tự toàn phần trên $\mathbb{R}$.

S không là một quan hệ thứ tự trên $\mathbb{R}$ vì nó không có tính phản đối xứng. Thật vậy, $1S(-1)$, $(-1)S1$ nhưng $1 \neq -1$.

26. Không có phần tử lớn nhất cũng như nhỏ nhất trong X. Chặn dưới của X trong $\mathbb{N}^*$ là 1, chặn trên của X trong $\mathbb{N}^*$ là các bội chung của 2,3,4,5,6,7,8,9,10, do đó cận dưới và cận trên của X trong $\mathbb{N}^*$ lần lượt là 1 và BCNN(2,3,4,5,6,7,8,9,10) = 2520. Các tối tiểu của X là 2,3,5,7 và các tối đại của X là 7,8,9,10.

27. Không có phần tử lớn nhất cũng như nhỏ nhất trong $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset, X\}$. Chặn dưới duy nhất của $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset, X\}$ là $\emptyset$ và chặn trên duy nhất của $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset, X\}$ là X, đây lần lượt là cận dưới và cận trên của $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset, X\}$ trong $\mathcal{P}(X)$. Các phần tử tối tiểu của $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset, X\}$ là các tập con 1 phần tử $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$ và các phần tử tối đại của $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset, X\}$ là các tập con 4 phần tử $\{1,2,3,4\}$, $\{1,2,3,5\}$, $\{1,2,4,5\}$, $\{1,3,4,5\}$, $\{2,3,4,5\}$.

Không có phần tử lớn nhất cũng như nhỏ nhất trong $\mathcal{X}$. Chặn dưới duy nhất của $\mathcal{X}$ trong $\mathcal{P}(X)$ là $\emptyset$ và đây cũng là cận trên của $\mathcal{X}$.

28. Từ điều kiện bài toán ta suy ra rằng nếu $\dfrac{m}{n} \in X$ thì $0 < \dfrac{m}{n} < 1$. Giả sử m và n $(0 < m < n)$ là các số tự nhiên tuỳ ý. Khi đó tồn tại các số tự nhiên m' và n' $(0 < m' < n')$ sao cho $0 < \dfrac{m'}{n'} < \dfrac{m}{n}$ (chẳng hạn $m' = m,\ n' > n$), nghĩa là trong tập X không có phần tử nhỏ nhất. Tập hợp này không chứa phần tử lớn nhất vì với m và n tuỳ ý $(0 < m < n)$ và với số tự nhiên $q > 0$ tuỳ ý, tồn tại số tự nhiên p sao cho $p < n + q - m$ và $p > \dfrac{mq}{n}$ (vì $\dfrac{mq}{n} < q < n + q - m$). Từ đó suy ra $mn + mq < mn + np$ và $m + p < n + q$ hay

$$\frac{m}{n} < \frac{m+p}{n+q} < 1.$$

Với $\epsilon > 0$ tuỳ ý và số tự nhiên $m > 0$, ta tìm được số tự nhiên $n > m$ sao cho $n > \dfrac{m}{\epsilon}$. Khi đó $\dfrac{m}{n} < \epsilon$ và từ bất đẳng thức $\dfrac{m}{n} > 0$, ta suy ra $\inf X = 0$.

Với $\epsilon > 0$ tuỳ ý và số tự nhiên $p > 0$, ta tìm được số tự nhiên m sao cho $m > \dfrac{p(1-\epsilon)}{\epsilon}$. Suy ra $\dfrac{m}{p+m} > 1-\epsilon$, nghĩa là với $n = p+m$ ta có $\dfrac{m}{n} > 1-\epsilon$. Từ đó và từ bất đẳng thức $\dfrac{m}{n} < 1$ ta suy ra $\sup X = 1$.

29. a) Giả sử A được sắp thứ tự tốt bởi $\leq$ và B là một tập con tùy ý khác rỗng của A có chặn trên. Khi đó tập C gồm các chặn trên của B là tập con khác rỗng của A. Vì vậy, C có phần tử nhỏ nhất c và c chính là cận trên của B. Do đó A được sắp thứ tự đầy đủ bởi $\leq$.

b) $\mathbb{N}$ là tập được sắp thứ tự tốt bởi quan hệ $\leq$ thông thường, nên theo Câu a) $\mathbb{N}$ được sắp thứ tự đầy đủ bởi quan hệ này.

Theo nguyên lý về cận của tập các số thực $\mathbb{R}$, mọi tập con khác rỗng của $\mathbb{R}$ bị chặn trên thì có cận trên. Do đó $\mathbb{R}$ được sắp thứ tự đầy đủ bởi quan hệ $\leq$.

Xét tập $B = \{q \in \mathbb{Q} \mid 0 < q < \sqrt{2}\}$ thì $B \neq \emptyset$ và có chặn trên trong $\mathbb{Q}$. Nếu B có cận trên là c thì sẽ dẫn đến vô lý vì giữa $\sqrt{2}$ và c có vô số số hữu tỉ (tính chất trù mật của $\mathbb{Q}$ trong $\mathbb{R}$).

30. Nếu X được sắp thứ tự tốt thì chỉ cần lấy $A = X$, $B = \emptyset$. Nếu X không được sắp thứ tự tốt thì trong X tồn tại tập con khác rỗng mà không có phần tử nhỏ nhất. Gọi B là hợp của tất cả các tập con của X không chứa phần tử nhỏ nhất. Khi đó $A = X \setminus B$ là một tập được sắp thứ tự tốt và A, B thoả yêu cầu đặt ra.

31. a) $\forall X \in \mathcal{S}, X \leq X$ vì $\forall x \in X,\ (x,x) \in R$, tức là $\leq$ có tính phản xạ. Nếu $X \leq Y$ và $Y \leq X$ thì $\forall x \in X, \exists y \in Y$ sao cho $(x,y) \in R$ và với y này, $\exists x' \in X$ sao cho $(y,x') \in R$, điều này kéo theo $(x,x') \in R$. Vì X là một tập con tự do nên $x = x'$. Khi đó, $(x,y) \in R$ và $(y,x) \in R$, suy ra $x = y$, do đó $X = Y$, nghĩa là $\leq$ có tính phản đối xứng. $\forall X,Y,Z \in \mathcal{S},\ X \leq Y \wedge Y \leq Z,\ \forall x \in X,\ \exists y \in Y,\ (x,y) \in R \wedge \exists z \in Z,\ (y,z) \in R$, điều này kéo theo $(x,z) \in R$, nghĩa là $X \leq Z$, do đó $\leq$ có tính bắc cầu. Vì vậy $\leq$ là một quan hệ thứ tự trên $\mathcal{S}$.

b) Với $X, Y \in \mathcal{S}$ và $X \subset Y$ thì $X \leq Y$, vì $\forall x \in X,\ \exists y = x \in Y$ sao cho $(x,x) \in R$.

c) Giả sử E được sắp thứ tự toàn phần bởi R. Khi đó với mỗi $X, Y \in \mathcal{S}$, $\forall x \in X$ và $\forall y \in Y$ thì $(x,y) \in R$ hoặc $(y,x) \in R$ hay $X \leq Y$ hoặc $Y \leq X$, tức là $\mathcal{S}$ được sắp thứ tự toàn phần bởi $\leq$.

Đảo lại, giả sử $\mathcal{S}$ được sắp thứ tự toàn phần bởi $\leq$. Khi đó với mỗi $x, y \in E$, $\{x\}$, $\{y\}$ là những tập con tự do nên là những phần tử của $\mathcal{S}$. Do đó nếu $\{x\} \leq \{y\}$ thì $(x,y) \in R$ còn nếu $\{y\} \leq \{x\}$ thì $(y,x) \in R$.

32. a) Phần tử nhỏ nhất của dàn đầy đủ $\mathcal{L}$ chính là $\inf \mathcal{L}$ và phần tử lớn nhất của $\mathcal{L}$ là $\sup \mathcal{L}$

b) $\forall \mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ thì $\sup \mathcal{T}$ chính là $\bigcup\limits_{Y \in \mathcal{T}} Y$ và $\inf \mathcal{T}$ chính là $\bigcap\limits_{Y \in \mathcal{T}} Y$.

c) Theo Câu a) $\mathbb{Z}^+$ không phải là một dàn đầy đủ vì không chứa phần tử lớn nhất.

33. $\forall \mathcal{R} \subset \mathcal{S}$, $\inf \mathcal{R}$ chính là giao của các quan hệ tương đương thuộc $\mathcal{R}$ và $\sup \mathcal{R}$ chính là quan hệ tương đương nhỏ nhất trên X chứa các quan hệ thuộc $\mathcal{R}$.

34. a) $\forall A \subset \mathcal{L}$, $A \neq \emptyset$, tồn tại $c \in \mathcal{L}$ là một chặn trên của A, chẳng hạn phần tử lớn nhất của $\mathcal{L}$. Gọi B là tập hợp các chặn trên của A thì $B \neq \emptyset$ và ta có $d = \inf B$ (tồn tại theo giả thiết). Khi đó nếu $a \in A$ thì $a \leq y$, $\forall y \in B$, do đó $a \leq d$. Mặt khác, nếu u là một chặn trên của A thì $u \in B$, do đó $u \geq d$. Vì vậy $d = \sup A$.

b) Chứng minh tương tự Câu a).

CHƯƠNG IV:
SỐ TỰ NHIÊN VÀ SỐ NGUYÊN

4.1. SỐ TỰ NHIÊN.

Số tự nhiên là một thành tựu toán học lâu đời nhất của loài người. Ngày nay, số tự nhiên được sử dụng ở mọi nơi, mọi lúc của đời sống xã hội: trong giao dịch, mua bán, thư tín, điện thoại, ... Khó có thể hình dung một xã hội không có số tự nhiên! Ta dùng các số 0, 1, 2, 3, 4, ... tính toán (cộng, trừ, nhân, chia) trên các số đó một cách "tự nhiên" trong mọi hoạt động của mình, song ít khi ta tự hỏi con người đã biết đến số tự nhiên từ bao giờ và bằng cách nào? Không ai có thể nói được đích xác loài người biết đến các con số từ khi nào. Người ta tìm được một văn bản cổ khắc trên đá cách đây khoảng 6000 năm, trên đó có các con số biểu thị bằng các dấu chấm và gạch. Mãi đến thế kỷ XI, con số không (0) mới ra đời và từ đó con người bắt đầu nghĩ ra hệ thập phân để biểu diễn các con số.

Số tự nhiên ra đời là do nhu cầu nhận biết về số lượng của sự vật. Nhu cầu đó xuất hiện ngay cả trong một xã hội đơn sơ nhất. Chẳng hạn, người ta cần biết số lượng của đàn thú để tổ chức một cuộc đi săn, cần biết số lượng của bên địch để tổ chức cuộc chiến đấu, ... và khi xã hội càng phát triển thì nhu cầu đó ngày càng tăng.

Sau đây, ta tìm cách xây dựng tập hợp các số tự nhiên. Đầu tiên ta chấp nhận có một tập hợp $\mathbb{N}$ mà các phần tử của nó thoả mãn một số tính chất mà ta gọi là hệ tiên đề Peano. Sau đó, ta định nghĩa các phép cộng, phép nhân các số tự nhiên, rồi định nghĩa quan hệ thứ tự trên $\mathbb{N}$ và đưa ra các tính chất cùng mối quan hệ giữa chúng. Trên cơ sở có được tập hợp $\mathbb{N}$ các số tự nhiên, về sau ta sẽ xây dựng tập hợp $\mathbb{Z}$ các số nguyên, tập hợp $\mathbb{Q}$ các số hữu tỉ.

4.1.1. Tập hợp các số tự nhiên và hệ tiên đề Peano:

4.1.1.1. Mở đầu: Ta biết rằng một khái niệm mới bao giờ cũng được định nghĩa thông qua những khái niệm trước đó. Cũng vậy, một mệnh đề được chứng minh nhờ những mệnh đề đã biết trước đó. Vì vậy, để xây dựng một lý thuyết toán học mà không bị rơi vào vòng luẩn quẩn, người ta thường xuất phát từ một số khái niệm đầu tiên không định nghĩa, gọi là các khái niệm nguyên thuỷ và một số mệnh đề đầu tiên được thừa nhận, không chứng minh gọi là các tiên đề. Phương pháp xây dựng như vậy gọi là phương pháp tiên đề. Lẽ tự nhiên, số các khái niệm nguyên thuỷ và số các tiên đề nghĩa là số những điều cần thừa nhận, nên ít nhất mà vẫn đủ suy ra tất cả các kết quả khác. Đồng thời những mệnh đề thừa nhận thường là những mệnh đề đơn giản, "hiển nhiên". Một trong những người đầu tiên xây dựng một lý thuyết toán học theo phương pháp tiên đề là nhà toán học Euclide (khoảng 300 năm trước công nguyên). Cuốn sách "Những nguyên lý" của ông, trong hơn 20 thế kỷ qua vẫn là một mẫu mực về việc xây dựng một lý thuyết toán học (hình học) bằng phương pháp tiên đề.

Ta đã quen thuộc với tập hợp $\mathbb{N}$ các số tự nhiên, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$. Tập hợp $\mathbb{N}$ có phần tử "đầu tiên" là 0 và ánh xạ "liền sau":

$$\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} : 0 \mapsto 1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 4 \mapsto \cdots$$

như vậy, ta thấy tập hợp $\mathbb{N}$ được sinh bởi 0 và ánh xạ σ. Sau đây là cách mô tả tập hợp $\mathbb{N}$ một cách toán học từ một hệ tiên đề được nêu ra bởi Peano (1858-1932) vào năm 1899.

4.1.1.2. Hệ tiên đề Peano: Tập hợp $\mathbb{N}$ mà các phần tử của nó được gọi là các số tự nhiên, là một tập hợp thoả mãn:

P1. $0 \in \mathbb{N}$.

P2. Có một ánh xạ $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ gọi là ánh xạ liền sau và $\sigma(n)$ gọi là số liền sau của $n \in \mathbb{N}$.

P3. 0 không là số liền sau của một số tự nhiên nào, nghĩa là $0 \notin \sigma(\mathbb{N})$.

P4. σ là một đơn ánh, nghĩa là mỗi số tự nhiên là số liền sau của không quá một số tự nhiên.

P5. Mọi tập con U của $\mathbb{N}$ có các tính chất:

a) $0 \in \mathbb{U}$,

b) với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n \in U \Rightarrow \sigma(n) \in U$,

đều trùng với tập hợp $\mathbb{N}$.

4.1.1.3. Chú ý: 1) Tiên đề P1 cho thấy $\mathbb{N} \neq \emptyset$ vì có $0 \in \mathbb{N}$.

2) Theo tiên đề P2, tồn tại số liền sau của 0 và số đó là duy nhất, ký hiệu $1 = \sigma(0)$. Lại theo tiên đề P2, tồn tại duy nhất số liền sau của 1, ký hiệu $2 = \sigma(1)$. Tiếp tục như vậy, ta được một hình ảnh của tập hợp các số tự nhiên là $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$.

3) Tiên đề P5 còn gọi là nguyên lý của phép chứng minh quy nạp. Thậy vậy, ta xét một hàm mệnh đề $P(n)$ và gọi $U = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n)\}$. Nếu $P(0)$ đúng ta có $0 \in U$. Cho $P(n)$ đúng nghĩa là $n \in U$, nếu ta chứng minh được $P(\sigma(n))$ đúng, nghĩa là $\sigma(n) \in U$ thì U nghiệm đúng cả hai tính chất của tiên đề P5. Vậy $U = \mathbb{N}$, nghĩa là $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$.

4.1.2. Phép cộng và phép nhân trên $\mathbb{N}$:

4.1.2.1. Định nghĩa:

1) Phép cộng:

a) $m + 0 = m$ với mọi $m \in \mathbb{N}$,

b) $m + \sigma(n) = \sigma(m + n)$ với mọi $m, n \in \mathbb{N}$ và $m + n$ đã được xác định.

2) Phép nhân:

a) $m0 = 0$ với mọi $m \in \mathbb{N}$.

b) $m\sigma(n) = mn + m$ với mọi $m, n \in \mathbb{N}$ và mn đã được xác định.

4.1.2.2. Tính chất:

1) Phép cộng và phép nhân được xác định trên $\mathbb{N}$.

2) $\sigma(n) = n + 1$, với mọi $n \in \mathbb{N}$ và $1 = \sigma(0)$.

3) $\mathbb{N}$ với phép cộng có phần tử không và với phép nhân có phần tử đơn vị, nghĩa là với mọi $n \in \mathbb{N}$, ta có

$$n + 0 = 0 + n = n,\ n1 = 1n = n.$$

4) Phép cộng và phép nhân có tính kết hợp, nghĩa là với mọi $m, n, p \in \mathbb{N}$, ta có

$$(m + n) + p = m + (n + p),\ (mn)p = m(np).$$

5) Phép cộng và phép nhân có tính giao hoán, nghĩa là với mọi $m, n \in \mathbb{N}$, ta có

$$m + n = n + m,\ mn = nm.$$

6) Phép nhân có tính phân phối đối với phép cộng, nghĩa là với mọi $m, n, p \in \mathbb{N}$, ta có

$$m(n + p) = mn + mp,\ (n + p)m = nm + pm.$$

7) $m + n = 0 \ \Rightarrow\ m = n = 0$.

8) $mn = 0 \ \Rightarrow\ m = 0$ hoặc $n = 0$.

9) Phép cộng có tính giản ước, nghĩa là với mọi $m, n, p \in \mathbb{N}$, ta có

$$m + p = n + p \ \Rightarrow\ m = n.$$

10) Phép nhân có tính giản ước, nghĩa là với mọi $m, n, p \in \mathbb{N},\ p \neq 0$, ta có

$$mp = np \ \Rightarrow\ m = n.$$

Chứng minh:

1) Với $m \in \mathbb{N}$, gọi $U = \{n \in \mathbb{N} \mid m + n \in \mathbb{N}$ được xác định$\}$ và $U' = \{n \in \mathbb{N} \mid mn \in \mathbb{N}$ được xác định$\}$. Rõ ràng $0 \in U$ và $0 \in U'$. Giả sử $n \in U$, nghĩa là $m + n$ được xác định. Khi đó $m + \sigma(n) = \sigma(m + n) \in \mathbb{N}$ được xác định hay $\sigma(n) \in U$. Vậy $U = \mathbb{N}$. Giả sử $n \in U'$, nghĩa là mn được xác định. Khi đó $mn + m$ được xác định hay $m\sigma(n)$ được xác định tức là $\sigma(n) \in U'$. Vậy $U' = \mathbb{N}$.

2) $n + 1 = n + \sigma(0) = \sigma(n + 0) = \sigma(n)$, với mọi $n \in \mathbb{N}$.

3) Gọi $U = \{n \in \mathbb{N} \mid n + 0 = 0 + n = n\}$. Ta có $0 + 0 = 0$ hay $0 \in U$. Giả sử $n \in U$ hay $n + 0 = 0 + n = n$. Khi đó $0 + \sigma(n) = \sigma(0 + n) = \sigma(n) = \sigma(n) + 0$ hay $\sigma(n) \in U$. Vậy $U = \mathbb{N}$.

Gọi $U' = \{n \in \mathbb{N} \mid n\sigma(0) = \sigma(0)n = n\}$. Ta có $0\sigma(0) = 0.0 + 0 = 0 = \sigma(0)0$ hay $0 \in U'$. Giả sử $n \in U'$ hay $n\sigma(0) = \sigma(0)n = n$. Khi đó $\sigma(n)\sigma(0) = \sigma(n)0 + \sigma(n) = 0 + \sigma(n) = \sigma(n) = \sigma(n+0) = n + \sigma(0) = \sigma(0)n + \sigma(0) = \sigma(0)\sigma(n)$ hay $\sigma(n) \in U'$ Vậy $U' = \mathbb{N}$.

4) Với $m, n \in \mathbb{N}$, gọi $U = \{p \in \mathbb{N} \mid (m+n)+p = m+(n+p)\}$. Ta có $(m+n)+0 = m+n = m+(n+0)$ hay $0 \in U$. Giả sử $p \in U$ hay $(m+n)+p = m+(n+p)$. Khi đó $(m+n)+\sigma(p) = \sigma((m+n)+p) = \sigma(m+(n+p)) = m+\sigma(n+p) = m+(n+\sigma(p))$ hay $\sigma(p) \in U$. Vậy $U = \mathbb{N}$.

Tính kết hợp của phép nhân được chứng minh trong 6).

5) Gọi $U = \{n \in \mathbb{N} \mid n+1 = 1+n\}$. Ta có $0+1 = 1+0 = 1$ hay $0 \in U$. Giả sử $n \in U$ hay $n+1 = 1+n$. Khi đó $\sigma(n)+1 = \sigma(\sigma(n)) = \sigma(n+1) = \sigma(1+n) = 1+\sigma(n)$ hay $\sigma(n) \in U$. Vậy $U = \mathbb{N}$.

Gọi $U' = \{n \in \mathbb{N} \mid 0n = 0\}$. Ta có $0.0 = 0$ hay $0 \in U'$. Giả sử $n \in U'$ hay $0n = 0$. Khi đó $0\sigma(n) = 0n+0 = 0+0 = 0$ hay $\sigma(n) \in U'$. Vậy $U' = \mathbb{N}$.

Với $m \in \mathbb{N}$, gọi $U'' = \{n \mid m+n = n+m\}$. Ta có $m+0 = 0+m = m$ hay $0 \in U''$. Giả sử $n \in U''$ hay $m+n = n+m$. Khi đó $m+\sigma(n) = m+(n+1) = (m+n)+1 = (n+m)+1 = n+(m+1) = n+(1+m) = (n+1)+m = \sigma(n)+m$ hay $\sigma(n) \in U''$. Vậy $U'' = \mathbb{N}$.

Với $m \in \mathbb{N}$, gọi $U''' = \{n \in \mathbb{N} \mid (m+1)n = mn+n\}$. Ta có $(m+1)0 = 0 = m0+0$ hay $0 \in U'''$. Giả sử $n \in U'''$ hay $(m+1)n = mn+n$. Khi đó $(m+1)\sigma(n) = (m+1)n+(m+1) = (mn+n)+(m+1) = (mn+m)+(n+1) = m\sigma(n)+\sigma(n)$ hay $\sigma(n) \in U'''$. Vậy $U''' = \mathbb{N}$.

Với $m \in \mathbb{N}$, gọi $U'''' = \{n \in \mathbb{N} \mid mn = nm\}$. Ta có $m0 = 0 = 0m$ hay $0 \in U''''$. Giả sử $n \in U''''$ hay $mn = nm$. Khi đó $m\sigma(n) = mn+m = nm+m = (n+1)m = \sigma(n)m$ hay $\sigma(n) \in U''''$. Vậy $U'''' = \mathbb{N}$

6) Với $n, p \in \mathbb{N}$, gọi $U = \{m \in \mathbb{N} \mid m(n+p) = mn+mp\}$. Ta có $0(n+p) = 0 = 0n+0p$ hay $0 \in U$. Giả sử $m \in U$ hay $m(n+p) = mn+mp$. Khi đó $\sigma(m)(n+p) = (m+1)(n+p) = m(n+p)+(n+p) = (mn+mp)+(n+p) = (nm+n)+(pm+p) = n\sigma(m)+p\sigma(m) = \sigma(m)n+\sigma(m)p$ hay $\sigma(m) \in U$. Vậy $U = \mathbb{N}$. Đẳng thức thứ hai có từ tính giao hoán của phép nhân.

Gọi $U' = \{p \in \mathbb{N} \mid (mn)p = m(np)\}$. Ta có $(mn)0 = 0 = m0 = m(n0)$ hay $0 \in U'$. Giả sử $p \in U'$ hay $(mn)p = m(np)$. Khi đó $(mn)\sigma(p) = (mn)p+mn = m(np)+mn = m(np+n) = m(n\sigma(p))$ hay $\sigma(p) \in U'$. Vậy $U' = \mathbb{N}$.

7) Giả sử $n \neq 0$. Khi đó tồn tại $k \in \mathbb{N}$ sao cho $\sigma(k) = n$. Khi đó $0 = m+n = m+\sigma(k) = \sigma(m+k)$. Điều này trái với tiên đề 3. Vậy $n = 0$. Từ đó suy ra $m = 0$.

8) Giả sử $n \neq 0$. Khi đó tồn tại $k \in \mathbb{N}$ sao cho $\sigma(k) = n$ và $0 = mn = m\sigma(k) = mk+m$, nên $m = 0$.

9) Với $m, n \in \mathbb{N}$, gọi $U = \{p \in \mathbb{N} \mid m+p = n+p \Rightarrow m = n\}$. Ta có $m+0 = n+0 \Rightarrow m = n$ hay $0 \in U$. Giả sử $p \in U$ hay $m+p = n+p \Rightarrow m = n$. Khi đó $m+\sigma(p) = n+\sigma(p) \Rightarrow \sigma(m+p) = \sigma(n+p) \Rightarrow m+p = n+p$ (do σ là đơn ánh) $\Rightarrow m = n$ hay $\sigma(p) \in U$. Vậy $U = \mathbb{N}$.

10) Với $m, n \in \mathbb{N}$, tồn tại $x \in \mathbb{N}$ sao cho $m = n+x$ hoặc $n = m+x$. Khi đó $mp = np+xp$ hoặc $np = mp+xp$. Từ $mp = np$ suy ra $xp = 0$ và do $p \neq 0$, ta có $x = 0$. Vậy $m = n$.

4.1.3. Quan hệ thứ tự trên $\mathbb{N}$:

4.1.3.1. Định nghĩa: Cho m và n là hai số tự nhiên. Ta nói

+ m nhỏ hơn n hoặc n lớn hơn m, ký hiệu $m < n$ hoặc $n > m$ nếu tồn tại $x \in \mathbb{N}$, $x \neq 0$ sao cho $n = m + x$.

+ m nhỏ hơn hay bằng n hoặc n lớn hơn hay bằng m, ký hiệu $m \leq n$ hoặc $n \geq m$ nếu hoặc $m = n$ hoặc $m < n$. Như vậy,

$$m \leq n \;\Leftrightarrow\; \exists x \in \mathbb{N},\; n = m + x.$$

4.1.3.2. Mệnh đề: Quan hệ $\leq$ là một quan hệ thứ tự trên $\mathbb{N}$.

Chứng minh: Từ định nghĩa ta có ngay quan hệ $\leq$ có tính chất phản xạ. Bây giờ nếu $m \leq n$ và $n \leq m$ thì tồn tại $x, y \in \mathbb{N}$ sao cho $n = m + x$ và $m = n + y$. Khi đó $m = m + x + y$. Dùng luật giản ước, ta có $x + y = 0$. Từ đó suy ra $x = y = 0$, tức là $m = n$. Do đó quan hệ $\leq$ có tính chất phản đối xứng. Quan hệ $\leq$ còn có tính bắc cầu. Thật vậy, nếu $m \leq n$ và $n \leq p$ thì tồn tại $x, y \in \mathbb{N}$ sao cho $n = m + x$ và $p = n + y$. Khi đó $p = m + (x + y)$ với $x + y \in \mathbb{N}$, tức là $m \leq p$. Vì vậy quan hệ $\leq$ là một quan hệ thứ tự.

4.1.3.3. Mệnh đề (Luật tam phân): Với mọi $m, n \in \mathbb{N}$, có một và chỉ một trong ba trường hợp sau xảy ra:

$$m < n,\; m = n,\; m > n.$$

Chứng minh: Trước hết, dễ dàng có được nhiều nhất một trong ba trường hợp trên xảy ra. Bây giờ ta chứng minh bằng quy nạp theo n là với mỗi $m \in \mathbb{N}$ có ít nhất một trong ba trường hợp trên xảy ra. Với $n = 0$, ta có $m > 0$ hoặc $m = 0$ với mọi $m \in \mathbb{N}$. Giả sử với $n \in \mathbb{N}$ ta có ít nhất một trong ba trường hợp $m < n$, $m = n$, $m > n$ xảy ra với mọi $m \in \mathbb{N}$. Nếu $m < n$ hay $m = n$ thì $m < \sigma(n)$. Nếu $m > n$ thì $m = \sigma(n)$ hoặc $m > \sigma(n)$.

4.1.3.4. Mệnh đề: Với mọi $m, n, k \in \mathbb{N}$, ta có:

1) $m < n \;\Rightarrow\; m + k < n + k$.

2) $m < n$ và $k \neq 0 \;\Rightarrow\; mk < nk$.

Chứng minh: Nếu $m < n$ thì tồn tại $x \in \mathbb{N}$, $x \neq 0$, $n = m + x$. Khi đó $n + k = (m + k) + x$ hay $m + k < n + k$ với mọi $k \in \mathbb{N}$. Nếu $k \neq 0$ thì $nk = mk + xk$ với $xk \neq 0$ hay $mk < nk$.

4.1.3.5. Định lý: Tập hợp $\mathbb{N}$ các số tự nhiên được sắp thứ tự tốt bởi quan hệ $\leq$.

Chứng minh: Cho $A \subset \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$. Ta chứng minh A có số nhỏ nhất. Gọi

$$A_1 = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq x,\; \forall x \in A\}.$$

Rõ ràng $A_1 \subset \mathbb{N}$ và có các tính chất:

a) $0 \in A_1$ (vì $0 \leq x,\ \forall x \in \mathbb{N}$).

b) $A_1 \neq \mathbb{N}$. Thật vậy, vì $A \neq \emptyset$ nên tồn tại $n \in A$. Khi đó $n + 1 \notin A_1$.

Như vậy, A_1 thoả mãn điều kiện thứ nhất của nguyên lý quy nạp, nhưng $A_1 \neq \mathbb{N}$, nên nó không thoả mãn điều kiện thứ hai. Nói cách khác, tồn tại $m \in A_1$ sao cho $m + 1 \notin A_1$.

Do $m \in A_1$ nên $m \leq x,\ \forall x \in A$. Mặt khác, $m \in A$ vì nếu ngược lại ta có $m < x,\ \forall x \in A$, khi đó $m + 1 \leq x,\ \forall x \in A$ hay $m + 1 \in A_1$. Mâu thuẩn với giả thiết về m. Vậy m là số nhỏ nhất của A.

4.1.3.6. Chú ý: Nguyên lý quy nạp có thể phát biểu lại như sau. Cho n_0 là một số tự nhiên và $P(n)$ là một hàm mệnh đề với $n \in \mathbb{N}$. Khi đó nếu $P(n)$ có tính chất $P(n_0)$ đúng và nếu $P(k)$ đúng với $k \geq n_0$ kéo theo $P(k+1)$ đúng thì $P(n)$ đúng với mọi $n \geq n_0$. Thật vậy, chỉ cần áp dụng tiên đề về quy nạp vào tập hợp

$$U = \{n \in \mathbb{N} \mid 0 \leq n < n_0\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0,\ P(n)\}.$$

4.1.4. Phép trừ:

4.1.4.1. Mệnh đề: Với mọi số tự nhiên m, n, nếu $m \leq n$ thì tồn tại duy nhất số tự nhiên x sao cho $m + x = n$.

Chứng minh: Kết quả có ngay từ định nghĩa của quan hệ $\leq$ và luật giản ước của phép cộng.

4.1.4.2. Định nghĩa: Số tự nhiên x thoả mãn đẳng thức $m + x = n$ được gọi là hiệu của n và m và ký hiệu là $x = n - m$ (đọc là n trừ m).

Quy tắc tìm hiệu $n - m$ gọi là phép trừ.

Mệnh đề trên cho thấy phép trừ $n - m$ thực hiện được khi và chỉ khi $m \leq n$.

4.1.4.3. Tính chất: Với mọi số tự nhiên m, n, p mà $p \leq n$, ta có:

$$m(n-p) = mn - mp,\ (n-p)m = nm - pm.$$

Chứng minh: Theo định nghĩa của phép trừ ta có $p + (n - p) = n$. Do đó $m[p + (n - p)] = mn$. Theo tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng, ta được $mp + m(n - p) = mn$. Do đó $m(n - p)$ là hiệu của mn và mp, tức là $m(n - p) = mn - mp$.

Đẳng thức thứ hai có từ tính giao hoán của phép nhân.

4.2. SỐ NGUYÊN.

Số tự nhiên ra đời do những yêu cầu của thực tiễn đời sống và sản xuất. Nhưng số tự nhiên không đủ đáp ứng những yêu cầu của xã hội loài người ngày càng phát triển. Phân số (dương) được con người biết rất sớm do yêu cầu về đo đạc và phân chia. Trong một di cảo Ai Cập, có từ 1550 năm trước Công nguyên, đã thấy có những khảo cứu tỉ mỉ về phân số.

Số âm được đề cập trong các công trình của các nhà Toán học Ấn Độ vào đầu thời kỳ Trung cổ và chỉ đến thế kỷ thứ 16 sau Công nguyên người ta mới hết nghi ngờ về giá trị thực sự của nó. Điều đó chứng tỏ số âm ra đời không phải do yêu cầu bức bách của cuộc sống, mặc dù rằng những ý nghĩa thực tiễn của số âm là điều không phủ nhận được. Khi minh hoạ cho số âm ta thường nêu các ví dụ về những đại lượng có hai chiều, như: nhiệt độ trên 0^0 và dưới 0^0, độ cao và độ sâu, chuyển động về hai chiều ngược nhau, ... Tuy nhiên, trong tất cả các trường hợp đó, ta đều có thể diễn đạt được chính xác mà không cần dùng đến số âm. Chẳng hạn, người ta vẫn dùng song song hai thuật ngữ: nhiệt độ -10^0 và 10^0 dưới 0^0, hay độ sâu $-1490m$ và $1490m$ dưới mực nước biển, ...

Lịch sử đã ghi nhận rằng số âm được đề cập đến trước hết trong các công trình toán học thuần tuý, như trong vấn đề giải phương trình hay trong các biểu thức đại số. Vì vậy, ta hãy tìm hiểu nguyên nhân toán học của sự ra đời các số âm.

Ta biết rằng trong tập hợp các số tự nhiên, phép trừ không phải luôn luôn thực hiện được, hiệu $n-m$ chỉ tồn tại khi $n \geq m$. Mặt khác, hiệu $n-m$ chính là nghiệm của phương trình $m+x=n$. Vậy việc thực hiện được phép trừ có thể phát biểu dưới một hình thức tương đương khác là sự có nghiệm của phương trình nói trên, và ta có kết luận sau: trong tập hợp $\mathbb{N}$ các số tự nhiên, phương trình $m+x=n$ có nghiệm khi và chỉ khi $n \geq m$ và khi đó nghiệm của nó là $x=n-m$.

Từ đó, xuất hiện một yêu cầu là mở rộng tập hợp $\mathbb{N}$ các số tự nhiên để được một tập hợp số mà trong đó phép trừ luôn luôn thực hiện được, tức là phương trình $m+x=n$ luôn luôn có nghiệm.

Như vậy, việc xây dựng tập hợp số nguyên được đặt ra như một yêu cầu nội tại của toán học.

4.2.1. Xây dựng tập hợp các số nguyên từ tập hợp các số tự nhiên:

4.2.1.1. Mở đầu: Sau đây ta sẽ xây dựng tập hợp $\mathbb{Z}$ các số nguyên cùng với phép cộng và phép nhân trên nó từ tập hợp $\mathbb{N}$ các số tự nhiên với hai phép toán đã có trên $\mathbb{N}$. Với cách cấu tạo này, các tính chất quen thuộc của phép cộng và phép nhân trên $\mathbb{Z}$ được suy từ các tính chất đã có trên $\mathbb{N}$.

Yêu cầu mở rộng $\mathbb{N}$ để được tập hợp số, trong đó phép trừ luôn thực hiện được, cũng có nghĩa là phép cộng có phép toán ngược, hay mọi số đều có số đối. Đó chính là bài toán đối xứng hoá trong đại số.

Như ta đã biết

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

và với hai số tự nhiên m, n, tồn tại duy nhất $x \in \mathbb{Z}$ sao cho $m + x = n$, ta ký hiệu $x = n - m$. Bây giờ xét ánh xạ $D : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ cho bởi $D(n, m) = n - m$. Khi đó

$$D(n_1, m_1) = D(n_2, m_2) \;\Leftrightarrow\; n_1 + m_2 = n_2 + m_1.$$

Với chú ý này, ta tìm cách xây dựng tập hợp $\mathbb{Z}$.

4.2.1.2. Định nghĩa: Trên tập hợp $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, xét quan hệ hai ngôi R:

$$\forall (n_1, m_1),\; (n_2, m_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},\; (n_1, m_1)\; R\; (n_2, m_2) \;\Leftrightarrow\; n_1 + m_2 = n_2 + m_1.$$

Khi đó quan hệ R là một quan hệ tương đương trên $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Tập hợp thương của $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ theo quan hệ tương đương R như trên, $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})/R$, được ký hiệu là $\mathbb{Z}$ và mỗi phần tử của $\mathbb{Z}$ (chính là mỗi lớp tương đương theo quan hệ R) gọi là một số nguyên.

Xét ánh xạ $D : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ xác định bởi $D(n, m) = \overline{(n, m)}$. Đây là một toàn ánh và thường gọi là phép chiếu tự nhiên.

4.2.2. Phép cộng và phép nhân trên $\mathbb{Z}$:

4.2.2.1. Định nghĩa: Cho $x = D(n, m),\; y = D(p, q) \in \mathbb{Z}$.
1) Phép cộng: $x + y = D(n + p, m + q)$.
2) Phép nhân: $xy = D(np + mq, nq + mp)$.

4.2.2.2. Tính chất:

1) Phép cộng và phép nhân được xác định trên $\mathbb{Z}$.

2) Phép cộng và phép nhân có tính giao hoán, nghĩa là với mọi $x, y \in \mathbb{Z}$, ta có

$$x + y = y + x,\; xy = yx.$$

3) Phép cộng và phép nhân có tính kết hợp, nghĩa là với mọi $x, y, z \in \mathbb{Z}$, ta có

$$(x + y) + z = x + (y + z),\; (xy)z = x(yz).$$

4) $\mathbb{Z}$ với phép cộng có phần tử không và với phép nhân có phần tử đơn vị, nghĩa là tồn tại $0', 1' \in \mathbb{Z}$ sao cho với mọi $x \in \mathbb{Z}$, ta có

$$x + 0' = 0' + x = x,\; x1' = 1'x = x.$$

5) Mọi phần tử của $\mathbb{Z}$ đều có phần tử đối, nghĩa là với mọi $x \in \mathbb{Z}$ tồn tại $(-x) \in \mathbb{Z}$ sao cho

$$x + (-x) = (-x) + x = 0'.$$

6) Phép nhân có tính phân phối đối với phép cộng, nghĩa là với mọi $x, y, z \in \mathbb{Z}$, ta có

$$x(y + z) = xy + xz,\; (y + z)x = yx + zx.$$

7) Phép cộng có tính giản ước, nghĩa là với mọi $x, y, z \in \mathbb{Z}$, ta có

$$x + z = y + z \;\Rightarrow\; x = y.$$

8) Phép nhân có tính giản ước, nghĩa là với mọi $x, y, z \in \mathbb{Z},\ z \neq 0'$ ta có

$$xz = yz \;\Rightarrow\; x = y.$$

Chứng minh:

1) Giả sử $x = D(n, m) = D(n', m'),\ y = D(p, q) = D(p', q')$. Khi đó $n + m' = n' + m,\ p + q' = p' + q$. Ta có

$(n+p)+(m'+q') = (n'+p')+(m+q) \;\Rightarrow\; D(n+p, m+q) = D(n'+p', m'+q')$.

$np + m'p = n'p + mp,\ n'q + mq = nq + m'q,\ n'p + n'q' = n'p' + n'q,\ m'p' + m'q = m'p + m'q' \;\Rightarrow\; (np + m'p) + (n'q + mq) + (n'p + n'q') + (m'p' + m'q) = (n'p + mp) + (nq + m'q) + (n'p' + n'q) + (m'p + m'q') \;\Rightarrow\; np + mq + n'q' + m'p' = n'p' + m'q' + nq + mp \;\Rightarrow\; D(np + mq, nq + mp) = D(n'p' + m'q', n'q' + m'p')$.

Trong các phần còn lại, cho tuỳ ý $x = D(n, m), y = D(p, q), z = D(r, s) \in \mathbb{Z}$.

2) $x + y = D(n + p, m + q) = D(p + n, q + m) = D(p, q) + D(n, m) = y + x$.

$xy = D(np + mq, nq + mp) = D(pn + qm, pm + qn) = yx$.

3) $(x + y) + z = D(n + p, m + q) + D(r, s) = D(n + p + r, m + q + s) = D(n, m) + D(p + r, q + s) = x + (y + z)$.

$(xy)z = D(np + mq, nq + mp)D(r, s) = D(npr + mqr + nqs + mps, nps + mqs + nqr + mpr) = D(npr + nqs + mps + mqr, nps + nqr + mpr + mqs) = D(n, m)D(pr + qs, ps + qr) = x(yz)$.

4) Đặt $0' = D(0, 0)$ và $1' = D(1, 0)$. Khi đó $0' = D(n, n)$ và $1' = D(n+1, n)$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. ta có

$x + 0' = D(n, m) + D(0, 0) = D(n + 0, m + 0) = D(n, m) = x$.

$x1' = D(n, m)D(1, 0) = D(n1 + m0, n0 + m1) = D(n, m) = x$.

5) Đặt $-x = D(m, n)$. Khi đó

$x + (-x) = D(n, m) + D(m, n) = D(n + m, m + n) = 0'$.

6) $x(y + z) = D(n, m)D(p + r, q + s) = D(n(p + r) + m(q + s), n(q + s) + m(p+r)) = D((np+mq) + (nr+ms), (nq+mp) + (ns+mr)) = D(np+mq, nq+mp) + D(nr + ms, ns + mr) = xy + xz$.

7) $x + z = y + z \Rightarrow D(n + r, m + s) = D(p + r, q + s) \Rightarrow n + r + q + s = m + s + p + r \Rightarrow n + q = m + p \Rightarrow D(n, m) = D(p, q) \Rightarrow x = y$.

8) $xz = yz \Rightarrow D(nr + ms, ns + mr) = D(pr + qs, ps + qr)$

$\Rightarrow nr + ms + ps + qr = ns + mr + pr + qs$

$\Rightarrow (n + q)r + (m + p)s = (n + q)s + (m + p)r$.

Giả sử $n + q > m + p$, nghĩa là tồn tại $t \in \mathbb{N}, t \neq 0$ sao cho $n + q = m + p + t$. Khi đó

$(m + p)r + tr + (m + p)s = (m + p)s + ts + (m + p)r \Rightarrow tr = ts \Rightarrow r = s$.

Điều này mâu thuẩn với $z = D(r, s) \neq 0'$. Tương tự $n + q < m + p$ cũng dẫn đến mâu thuẩn. Vậy $n + q = m + p$ hay $x = y$.

4.2.2.3. Hệ quả: Tập hợp $\mathbb{Z}$ các số nguyên cùng với phép cộng và nhân trong (4.2.2.1) tạo thành một vành giao hoán có đơn vị và không có ước của 0.

4.2.2.4. Quan hệ giữa $\mathbb{N}$ và $\mathbb{Z}$: Xét ánh xạ

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z} \;:\; n \mapsto f(n) = D(n, 0).$$

Khi đó ánh xạ f có các tính chất sau:

1) f là một đơn ánh.

Thật vậy, với $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $f(n_1) = f(n_2)$, ta có $D(n_1, 0) = D(n_2, 0)$ hay $n_1 + 0 = 0 + n_2$ hay $n_1 = n_2$.

2) f bảo toàn phép cộng và phép nhân, nghĩa là với mọi $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$,

$$f(n_1 + n_2) = f(n_1) + f(n_2),\; f(n_1.n_2) = f(n_1).f(n_2).$$

Thật vậy, ta có $f(n_1 + n_2) = D(n_1 + n_2, 0) = D(n_1, 0) + D(n_2, 0) = f(n_1) + f(n_2)$, $f(n_1.n_2) = D(n_1.n_2, 0) = D(n_1, 0)D(n_2, 0) = f(n_1).f(n_2)$.

Từ các tính chất trên của ánh xạ f, ta có thể đồng nhất mỗi số tự nhiên n với số nguyên $D(n, 0)$:

$$n = D(n, 0)$$

và do đó $\mathbb{N}$ là một tập con thực sự của $\mathbb{Z}$. Từ đó ta có:

$$0' = D(0, 0) = 0,\; 1' = D(1, 0) = 1.$$

4.2.3. Phép trừ trên $\mathbb{Z}$:

4.2.3.1. Mệnh đề: Phương trình $a + x = b$ với $a, b \in \mathbb{Z}$ luôn có nghiệm trong $\mathbb{Z}$ và nghiệm đó là duy nhất.

Chứng minh: Đặt $x = -a + b$ với $-a$ là số đối của a, ta có

$$a + x = a + (-a + b) = (a + (-a)) + b = 0 + b = b.$$

Vậy $-a + b$ là một nghiệm của phương trình.

Ngoài ra, nếu $x_0 \in \mathbb{Z}$ là nghiệm của phương trình trên, ta có $a + x_0 = b$. Khi đó $-a + (a + x_0) = -a + b$ hay $x_0 = -a + b$.

Vậy nghiệm của phương trình là duy nhất.

4.2.3.2. Định nghĩa: Nghiệm của phương trình $a + x = b$ gọi là hiệu của b và a, ký hiệu $b - a$ (đọc là b trừ a).

Theo mệnh đề trên, ta có hiệu $b - a$ luôn tồn tại và chính là tổng của b với số đối của $a :\; b - a = b + (-a)$.

Vậy b trừ a là tổng của b với số đối của a và phép trừ trên $\mathbb{Z}$ luôn luôn thực hiện được.

4.2.3.3. Tính chất: Với mọi số nguyên x, y, z, ta có:

$$x(y-z) = xy - xz,\ (y-z)x = yx - zx.$$

Chứng minh: Do $xy = x[(y-z)+z] = x(y-z)+xz$ nên ta có $x(y-z) = xy-xz$.

4.2.3.4. Mệnh đề: Mỗi số nguyên hoặc là một số tự nhiên hoặc là số đối của một số tự nhiên.

Chứng minh: Cho $x = D(n, m) \in \mathbb{Z}$. Khi đó

– Nếu $n \geq m$ thì $x = D(n, m) = D(n-m, 0)$ (vì $n + 0 = (n-m) + m$) nên x được đồng nhất với $n - m \in \mathbb{N}$.

– Nếu $n < m$ thì $x = D(n, m) = D(0, m-n) = -D(m-n, 0)$ (vì $n+(m-n) = 0 + m$) nên x được đồng nhất với số đối của $m - n \in \mathbb{N}$.

4.2.3.5. Định nghĩa: Các số tự nhiên trong hệ thập phân được ký hiệu là $0, 1, 2, 3, \ldots$, còn phần tử đối của $x \in \mathbb{N}$ ký hiệu là $-x$, do đó theo mệnh đề trên tất cả các phần tử của $\mathbb{Z}$ là $0, -0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$. Chú ý rằng 0 là phần tử không đối với phép cộng, đó là phần tử duy nhất có số đối bằng chính nó. Vậy ta có:

$$Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Các số $1, 2, 3, \ldots$ gọi là các số nguyên dương, các số $-1, -2, -3, \ldots$ gọi là các số nguyên âm, đọc là trừ 1, trừ 2, trừ 3, ... hay âm một, âm hai, âm ba, ...

Giá trị tuyệt đối của số nguyên x, ký hiệu là $|x|$, được xác định như sau:

$|x| = x$ nếu x là một số tự nhiên;

$|x| = -x$ nếu x là một số nguyên âm.

Như vậy, giá trị tuyệt đối của một số nguyên luôn luôn là một số tự nhiên và hai số đối nhau có giá trị tuyệt đối bằng nhau.

4.2.4. Quan hệ thứ tự trên $\mathbb{Z}$:

4.2.4.1. Định nghĩa: Cho hai số nguyên x và y. Ta nói x nhỏ hơn hay bằng y hoặc y lớn hơn hay bằng x, ký hiệu $x \leq y$ hoặc $y \geq x$ nếu $y - x \in \mathbb{N}$.

Khi $x \leq y$ và $x \neq y$ ta nói x nhỏ hơn y hoặc y lớn hơn x và viết $x < y$ hoặc $y > x$.

Nếu $x, y \in \mathbb{N}$ ta có $y - x \in \mathbb{N}$ khi và chỉ khi $x \leq y$ (trên $\mathbb{N}$). Do đó quan hệ $\leq$ định nghĩa trên phù hợp với quan hệ thứ tự trên $\mathbb{N}$.

4.2.4.2. Mệnh đề: Quan hệ $\leq$ xác định trên sắp thứ tự toàn phần tập hợp $\mathbb{Z}$.

Chứng minh: Do $x - x = 0 \in \mathbb{N}$ nên $x \leq x$ với mọi $x \in \mathbb{Z}$, do đó $\leq$ có tính phản xạ.

Với $x, y \in \mathbb{Z}$ mà $x \leq y$ và $y \leq x$, ta có $y - x \in \mathbb{N}$ và $x - y \in \mathbb{N}$. Mặt khác, $(x-y) + (y-x) = 0$ nên ta có $x - y = y - x = 0$ hay $x = y$. Do đó $\leq$ có tính phản đối xứng.

Với $x, y, z \in \mathbb{Z}$ mà $x \leq y$ và $y \leq z$, ta có $y - x \in \mathbb{N}$ và $z - y \in \mathbb{N}$. Khi đó $z - x = (z - y) + (y - x) \in \mathbb{N}$ hay $x \leq z$. Do đó $\leq$ có tính bắc cầu.

Với $x, y \in \mathbb{Z}$, $x - y$ và $y - x$ là hai số nguyên đối nhau nên hoặc $x - y \in \mathbb{N}$ tức là $y \leq x$ hoặc $x - y \in \mathbb{N}$ tức là $x \leq y$.

Từ các điều trên suy ra quan hệ $\leq$ sắp thứ tự toàn phần tập hợp $\mathbb{Z}$.

4.2.4.3. Tính chất: Với $x, y, z \in \mathbb{Z}$, ta có:

1) Nếu $x \leq y$ thì $x + z \leq y + z$.

2) Nếu $x \leq y$ và $z \geq 0$ thì $xz \leq yz$. Nếu $x \leq y$ và $z \leq 0$ thì $xz \geq yz$.

Chứng minh: 1) Do $(y + z) - (x + z) = y - x \in \mathbb{N}$ nên $x + z \leq y + z$.

2) Do $y - x \in \mathbb{N}$ và $z \in \mathbb{N}$ nên $yz - xz = (y - x)z \in \mathbb{N}$ hay $xz \leq yz$.

Do $y - x \in \mathbb{N}$ và $-z \in \mathbb{N}$ nên $xz - yz = (x - y)z = (y - x)(-z) \in \mathbb{N}$ hay $xz \geq yz$.

4.2.5. Số nguyên môđulô:

4.2.5.1. Định nghĩa: Cho n là một số nguyên dương. Khi đó quan hệ $\equiv$ (mod n) trên $\mathbb{Z}$

$$\forall x, y \in \mathbb{Z},\ x \equiv y \pmod{n} \Leftrightarrow x - y \,\vdots\, n$$

là một quan hệ tương đương. Các lớp tương đương theo quan hệ này là

$$\overline{0} = \{kn \mid k \in \mathbb{Z}\},\ \overline{1} = \{kn + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}, \ldots, \overline{n-1} = \{kn + (n-1) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

và tập hợp thương $\mathbb{Z}/\equiv$ (mod n) ký hiệu là $\mathbb{Z}_n$. Như vậy,

$$\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$$

và mỗi phần tử của nó gọi là một số nguyên môđulô n.

Phép cộng và phép nhân trên $\mathbb{Z}_n$ được định nghĩa như sau:

1) Phép cộng: $\overline{x} + \overline{y} = \overline{x + y}$.

2) Phép nhân: $\overline{x}\overline{y} = \overline{xy}$.

4.2.5.2. Tính chất:

1) Phép cộng và phép nhân được xác định trên $\mathbb{Z}_n$.

2) Phép cộng và phép nhân có tính giao hoán, nghĩa là với mọi $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}_n$,

$$\overline{x} + \overline{y} = \overline{y} + \overline{x},\ \overline{x}\ \overline{y} = \overline{y}\ \overline{x}.$$

3) Phép cộng và phép nhân có tính kết hợp, nghĩa là với mọi $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \mathbb{Z}_n$,

$$(\overline{x} + \overline{y}) + \overline{z} = \overline{x} + (\overline{y} + \overline{z}),\ (\overline{x}\ \overline{y})\ \overline{z} = \overline{x}\ (\overline{y}\ \overline{z}).$$

4) $\mathbb{Z}_n$ với phép cộng có phần tử không và với phép nhân có phần tử đơn vị, nghĩa là với mọi $\overline{x} \in \mathbb{Z}_n$,

$$\overline{x} + \overline{0} = \overline{0} + \overline{x} = \overline{x},\ \overline{x}\ \overline{1} = \overline{1}\ \overline{x} = \overline{x}.$$

5) Mọi phần tử của $\mathbb{Z}_n$ đều có phần tử đối, nghĩa là với mọi $\overline{x} \in \mathbb{Z}_n$ tồn tại $\overline{n-x} \in \mathbb{Z}_n$,

$$\overline{x} + \overline{n-x} = \overline{n-x} + \overline{x} = \overline{0}.$$

6) Phép nhân có tính phân phối đối với phép cộng, nghĩa là với mọi $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \mathbb{Z}_n$,

$$\overline{x}(\overline{y} + \overline{z}) = \overline{x}\ \overline{y} + \overline{x}\ \overline{z},\ (\overline{y} + \overline{z})\overline{x} = \overline{y}\ \overline{x} + \overline{z}\ \overline{x}.$$

7) Phép cộng có tính giản ước, nghĩa là với mọi $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \mathbb{Z}_n$,

$$\overline{x} + \overline{z} = \overline{y} + \overline{z} \ \Rightarrow\ \overline{x} = \overline{y}.$$

Chứng minh: Có ngay từ các tính chất của các số nguyên.

4.2.5.3. Hệ quả: Tập hợp $\mathbb{Z}_n$ các số nguyên môđulô n cùng với phép cộng và nhân trong (4.2.5.1) tạo thành một vành giao hoán có đơn vị với $Char(\mathbb{Z}_n) = n$.

Ngoài ra, $\mathbb{Z}_n$ là một trường khi và chỉ khi n là một số nguyên tố.

Chứng minh: Từ các tính chất 1) - 6) của (4.2.5.2), ta có $\mathbb{Z}_n$ là một vành giao hoán có đơn vị. Với $k \in \mathbb{Z}$, $k.\overline{1} = \overline{k} = \overline{0}$ khi và chỉ khi k là một bội của n. Do đó $Char(\mathbb{Z}_n) = n$.

Nếu n là một hợp số thì $n = k.l$ với $1 < k, l < n$, do đó $\overline{k}.\overline{l} = \overline{n} = \overline{0}$, với $\overline{k}$, $\overline{l}$ là các phần tử khác không trong $\mathbb{Z}_n$, tức là $\mathbb{Z}_n$ có ước của không. Vì vậy $\mathbb{Z}_n$ không là một trường.

Giả sử n là một số nguyên tố. Mỗi phần tử khác không trong $\mathbb{Z}_n$ đề có dạng $\overline{q}$ với $1 < q < n$. Khi đó q và n nguyên tố cùng nhau, vì vậy tồn tại các số nguyên k và l sao cho $kn + lq = 1$. Từ đó ta có

$$\overline{l}.\overline{q} = \overline{1} - \overline{kn} = \overline{1}$$

Điều này có nghĩa là $\overline{q}$ khả nghịch và $\overline{q}^{-1} = \overline{l}$.

Thí dụ: Phép cộng và phép nhân trên $\mathbb{Z}_6$ được thể hiện qua bảng cộng và bảng nhân sau đây:

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$

$.$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

BÀI TẬP CHƯƠNG IV

1. Dùng quy nạp toán học chứng minh rằng

$$3 + 3.5 + 3.5^2 + \cdots + 3.5^n = \frac{3(5^{n+1} - 1)}{4},$$

với n là số tự nhiên.

2. Dùng quy nạp toán học chứng minh rằng

$$2 - 2.7 + 2.7^2 - \cdots + 2(-7)^n = \frac{1 - (-7)^{n+1}}{4},$$

với n là số tự nhiên.

3. Tìm công thức tính tổng $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$ bằng cách quan sát các giá trị của biểu thức này với các giá trị nhỏ của n. Dùng quy nạp toán học để chứng minh công thức đó.

4. Bằng quy nạp toán học hãy chứng minh bất đẳng thức Bernoulli: "Nếu $a > -1$ thì $1 + na \leq (1 + a)^n$, với mọi số tự nhiên n ".

5. Chứng minh bằng quy nạp rằng

$$1.2.3 + 2.3.4 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4},$$

với mọi số nguyên dương n.

6. Chứng minh rằng

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - \cdots + (-1)^{n-1}n^2 = \frac{(-1)^{n-1}n(n+1)}{2},$$

với mọi số nguyên dương n.

7. Chứng minh rằng

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n},$$

với mọi số nguyên n lớn hơn 1.

8. Một ánh xạ $s : \mathbb{N} \longrightarrow X$ được gọi là xác định từ $a \in X$ và $f : X \longrightarrow X$ bằng "đệ quy đơn" nếu $s(0) = a$ và $s(\sigma(n)) = f(s(n)),\ \forall n \in \mathbb{N}$.

1) Chứng minh rằng nếu $t : \mathbb{N} \longrightarrow X$ thoả mãn $t(0) = a$ và $t(\sigma(n)) = f(t(n))$ thì $t = s$.

2) Cho $f \in X^X$ (ở đây X^X là tập hợp các ánh xạ từ X vào X). Chứng tỏ rằng $E : \mathbb{N} \longrightarrow X^X$ với $E(n) = f^n$ có thể được xác định bằng một đệ quy đơn.

9. Hãy tìm tập hợp X chứa số 0 và ánh xạ $\sigma : X \longrightarrow X$ sao cho thoả mãn 2 trong 3 tiên đề $P3$, $P4$, $P5$ mà không thoả mãn tiên đề còn lại.

10. Hãy xây dựng ánh xạ $\tau : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ khác ánh xạ σ trong $P2$ mà thoả mãn các tiên đề Peano.

11. Chứng tỏ rằng không có số tự nhiên nào nằm giữa n và $n + 1$.

12. Chứng minh rằng:

1) Mọi tập con khác rỗng bị chặn trên của tập hợp $\mathbb{Z}$ các số nguyên đều có số lớn nhất.

2) Mọi tập con khác rỗng bị chặn dưới của tập hợp $\mathbb{Z}$ các số nguyên đều có số nhỏ nhất.

13. Chứng minh rằng với mọi cặp số nguyên $a, b,\ b \neq 0$, tồn tại duy nhất cặp số nguyên q, r thoả mãn:

$$a = bq + r,\ 0 \leq r < |b|.$$

14. Xét trường $\mathbb{Z}_{13}$ các số nguyên môđulô 13. Hãy lập bảng nhân của $\mathbb{Z}_{13}$. Chứng tỏ rằng $\mathbb{Z}_{13}^* = Z_{13} \setminus \{\overline{0}\}$ là một nhóm cyclic.

15. Ký hiệu U_n là nhóm nhân các phần tử khả nghịch của vành $\mathbb{Z}_n$ các số nguyên môđulô n.

1) Lập bảng nhân của U_{18} và chứng minh rằng U_{18} là một nhóm cyclic.

2) U_{16} có là nhóm cyclic không? Vì sao?

16. Tìm các đồng cấu nhóm từ

1) $\mathbb{Z}_{12}$ đến $\mathbb{Z}_{12}$;

2) $\mathbb{Z}_{12}$ đến $\mathbb{Z}_{24}$.

3) $\mathbb{Z}_9$ đến $\mathbb{Z}_{13}$.

TRẢ LỜI VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP

CHƯƠNG IV

1. Mệnh đề đúng khi $n = 0$ vì $3 = \dfrac{3(5-1)}{4}$. Giả sử mệnh đề đúng đến n, tức là ta có $3 + 3.5 + 3.5^2 + \cdots + 3.5^n = \dfrac{3(5^{n+1}-1)}{4}$. Khi đó

$$\begin{aligned}3 + 3.5 + 3.5^2 + \cdots + 3.5^n + 3.5^{n+1} &= \frac{3(5^{n+1}-1)}{4} + 3.5^{n+1}\\ &= \frac{15.5^{n+1}-3}{4} = \frac{3(5^{n+2}-1)}{4},\end{aligned}$$

tức là mệnh đề đúng đến $n+1$. Vậy theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$.

2. Mệnh đề đúng khi $n = 0$ vì $2 = \dfrac{1-(-7)^1}{4}$. Giả sử mệnh đề đúng đến n, tức là ta có $2 - 2.7 + 2.7^2 - \cdots + 2(-7)^n = \dfrac{1-(-7)^{n+1}}{4}$. Khi đó

$$\begin{aligned}2 - 2.7 + 2.7^2 - \cdots + 2(-7)^n + 2(-7)^{n+1} &= \frac{1-(-7)^{n+1}}{4} + 2(-7)^{n+1}\\ &= \frac{1+7(-7)^{n+1}}{4} = \frac{1-(-7)^{n+2}}{4},\end{aligned}$$

tức là mệnh đề đúng đến $n+1$. Vậy theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$.

3. Ta chứng minh bằng quy nạp mệnh đề:

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Mệnh đề đúng khi $n = 1$ vì $\dfrac{1}{1.2} = 1 - \dfrac{1}{1+1}$. Giả sử mệnh đề đúng đến n, tức là ta có $\dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = 1 - \dfrac{1}{n+1}$. Khi đó

$$\begin{aligned}\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} &= 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}\\ &= 1 - \frac{n+2-1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+2},\end{aligned}$$

tức là mệnh đề đúng đến $n+1$. Vậy theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề đúng với mọi số nguyên dương n.

4. Mệnh đề đúng khi $n = 0$ vì $(1+a)^0 = 1 + 0.a$. Giả sử mệnh đề đúng đến n, tức là ta có $(1+a)^n \geq 1 + na$. Khi đó

$$\begin{aligned}(1+a)^{n+1} &= (1+a)^n(1+a) \geq (1+na)(1+a) = 1 + na + a + na^2\\ &\geq 1 + (n+1)a,\end{aligned}$$

tức là mệnh đề đúng đến $n+1$. Vậy theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$.

5. Mệnh đề đúng khi $n = 1$ vì $1.2.3 = \dfrac{1.2.3.4}{4}$. Giả sử mệnh đề đúng đến n, tức là ta có $1.2.3 + 2.3.4 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$. Khi đó

$$\begin{aligned}&1.2.3 + 2.3.4 + \cdots + n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2)(n+3)\\ &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} + (n+1)(n+2)(n+3)\\ &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3) + 4n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}\\ &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4},\end{aligned}$$

tức là mệnh đề đúng đến $n+1$. Vậy theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề đúng với mọi số nguyên dương n.

6. Mệnh đề đúng khi $n = 1$ vì $1^2 = \dfrac{(-1)^0 1(1+1)}{2}$. Giả sử mệnh đề đúng đến n, tức là ta có $1^2 - 2^2 + 3^2 - \cdots + (-1)^{n-1}n^2 = \dfrac{(-1)^{n-1}n(n+1)}{2}$. Khi đó

$$\begin{aligned}&1^2 - 2^2 + 3^2 - \cdots + (-1)^{n-1}n^2 + (-1)^n(n+1)^2\\ &= \frac{(-1)^{n-1}n(n+1)}{2} + (-1)^n(n+1)^2 = \frac{-(-1)^n n(n+1) + 2(-1)^n(n+1)^2}{2}\\ &= \frac{(-1)^n(n+1)(n+2)}{2},\end{aligned}$$

tức là mệnh đề đúng đến $n+1$. Vậy theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề đúng với mọi số nguyên dương n.

7. Mệnh đề đúng khi $n = 2$ vì $1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} < \frac{6}{4} = 2 - \frac{1}{2}$. Giả sử mệnh đề đúng đến n, tức là ta có $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$. Khi đó

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} &< 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \\ &< 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} = 2 - \frac{n+1-1}{n(n+1)} \\ &< 2 - \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

tức là mệnh đề đúng đến $n+1$. Vậy theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề đúng với mọi số nguyên dương $n > 1$.

8. **1)** Mệnh đề đúng khi $n = 0$ vì $t(0) = s(0) = a$. Giả sử mệnh đề đúng đến n, tức là ta có $t(n) = s(n)$. Khi đó

$$t(n+1) = t(\sigma(n)) = f(t(n)) = f(s(n)) = s(\sigma(n)) = s(n+1),$$

tức là mệnh đề đúng đến $n+1$. Vậy theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$.

2) Ta có $f^0 = id_X$, $f^{n+1} = f^n \circ f$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Xét ánh xạ

$$F : X^X \longrightarrow X^X \ : \ g \mapsto g \circ f.$$

Khi đó $E : \mathbb{N} \longrightarrow X^X$ cho bởi $E(n) = f^n$ được xác định bằng đệ quy đơn bởi id_X và F. Thật vậy,

$$E(0) = id_X \text{ và } E(\sigma(n)) = E(n+1) = f^{n+1} = f^n \circ f = F(f^n) = F(E(n)).$$

9. **1)** $X = \mathbb{N}$ và $\sigma : X \longrightarrow X$ cho bởi $\sigma(n) = n+2$ thoả mãn $P3$, $P4$ và không thoả mãn $P5$ (lấy $U = \{0, 2, \ldots, 2n, \ldots\}$).

2) $X = \{0, 1\}$ và $\sigma : X \longrightarrow X$ cho bởi $\sigma(0) = \sigma(1) = 1$ thoả mãn $P3$, $P5$ và không thoả mãn $P4$.

3) $X = \{0\}$ và $\sigma : X \longrightarrow X$ cho bởi $\sigma(0) = 0$ thoả mãn $P4$, $P5$ và không thoả mãn $P3$.

10. Cho γ là một song ánh từ $\mathbb{N}$ lên $\mathbb{N}$ sao cho $\gamma(0) = 0$; chẳng hạn,

$$\gamma(n) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } n = 0, \\ 2 & \text{nếu } n = 1, \\ 1 & \text{nếu } n = 2 \\ n & \text{nếu } n > 2. \end{cases}$$

Đặt $\tau = \gamma^{-1} \circ \sigma \circ \gamma$. Khi đó ta có:
P3. $0 \notin \tau(\mathbb{N})$.
P4. γ là một đơn ánh.
P5. Cho V thoả mãn:
a) $0 \in V$.
b) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{V} \Rightarrow \tau(n) \in V$.
Đặt $U = \gamma(V)$ thì ta có:
a') $0 = \gamma(0) \in \gamma(V) = U$.
b') Với mọi $p \in \mathbb{N}$,

$$p \in U \Rightarrow \gamma^{-1}(p) \in V \Rightarrow \gamma^{-1}(\sigma(p)) = \tau(\gamma^{-1}(p)) \in V \Rightarrow \sigma(p) \in \gamma(V) = U.$$

Vậy $U = \mathbb{N}$ hay $V = \mathbb{N}$. Do đó $\mathbb{N}$ và τ thoả mãn hệ tiên đề Peano.

11. Giả sử tồn tại $m \in \mathbb{N}$ sao cho $n < m < n+1$. Khi đó tồn tại $t \in \mathbb{N}$, $t \neq 0$ sao cho $m = n+t$, từ đó ta được $n < n+t < n+1$ hay $0 < t < 1$. Gọi

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < 1\},$$

ta có $A \subset \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$. Do đó A có số nhỏ nhất, giả sử là a. Khi đó $0 < a^2 < a < 1$, nên $a^2 \in A$ và $a^2 < a$. Điều này mâu thuẫn với tính nhỏ nhất của a.

12. 1) Cho $A \subset \mathbb{Z}$, $A \neq \emptyset$ và bị chặn trên. Ta có hai trường hợp:
+ $A \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$: Khi đó tập hợp $A \cap \mathbb{N}$ là tập con khác rỗng của $\mathbb{N}$ và bị chặn trên, do đó nó có số lớn nhất và đây cũng là số lớn nhất của A (vì các số trong $A \setminus (A \cap \mathbb{N})$ (nếu có) gồm các số nguyên âm).
+ $A \cap \mathbb{N} = \emptyset$: Khi đó $A \cap \mathbb{N}$ chỉ gồm các số nguyên âm. Xét tập hợp

$$A' = \{|x| \mid x \in A\}.$$

Khi đó A' là một tập con khác rỗng của $\mathbb{N}$ nên có số nhỏ nhất. Giả sử $|a|$ ($a \in A$) là số nhỏ của A'. Do đó với mọi $x \in A$, $|a| \leq |x|$ hay $-a \leq -x$ hay $x \leq a$. Vậy a là số lớn nhất của A.
2) Cho $B \subset \mathbb{Z}$, $B \neq \emptyset$ và bị chặn dưới. Khi đó tập hợp

$$A = -B = \{-x \mid x \in B\}$$

là một tập con khác rỗng của $\mathbb{Z}$ và bị chặn trên. Do đó A có số lớn nhất và đây chính là số nhỏ nhất của B.

13. Xét tập hợp:

$$A = \{bx \mid x \in \mathbb{Z},\ bx \leq a\} \text{ (tập hợp các bội của } b \text{ không vượt quá } a).$$

Vì $-|b||a|$ là một bội của b và $-|b||a| \leq a$ nên $-|b||a| \in A$, do đó $A \neq \emptyset$. Ngoài ra A là một tập con của $\mathbb{Z}$ bị chặn trên bởi a, nên trong A có số lớn nhất, giả sử đó là bq, $q \in \mathbb{Z}$.

Vì $|b| \geq 1$ nên $bq + |b| > bq$, do đó $bq + |b| \notin A$. Nhưng $bq + |b|$ cũng là một bội của b nên ta có

$$bq \leq a < bq + |b| \text{ hay } 0 \leq a - bq < |b|.$$

Đặt $r = a - bq$ ta được $r \in \mathbb{Z}$, $a = bq + r$, $0 \leq r < |b|$.

Giả sử có hai cặp số nguyên q, r và q_1, r_1 thoả mãn $a = bq + r$, $a = bq_1 + r_1$, $0 \leq r$, $r_1 < |b|$. Khi đó ta có $b(q - q_1) = r_1 - r$ và $|r_1 - r| < |b|$, nên $|b||q - q_1| < |b|$ và do $|b| > 0$ ta được $|q - q_1| < 1$. Do đó $|q - q_1| = 0$ hay $q = q_1$ và kéo theo $r_1 = r$.

14. Bảng nhân của $\mathbb{Z}_{13}$:

.	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{5}$	$\overline{7}$	$\overline{9}$	$\overline{11}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$	$\overline{12}$	$\overline{2}$	$\overline{5}$	$\overline{8}$	$\overline{11}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{7}$	$\overline{10}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{12}$	$\overline{3}$	$\overline{7}$	$\overline{11}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$	$\overline{10}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$	$\overline{9}$
$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{10}$	$\overline{2}$	$\overline{7}$	$\overline{12}$	$\overline{4}$	$\overline{9}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{11}$	$\overline{3}$	$\overline{8}$
$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{12}$	$\overline{5}$	$\overline{11}$	$\overline{4}$	$\overline{10}$	$\overline{3}$	$\overline{9}$	$\overline{2}$	$\overline{8}$	$\overline{1}$	$\overline{7}$
$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{7}$	$\overline{1}$	$\overline{8}$	$\overline{2}$	$\overline{9}$	$\overline{3}$	$\overline{10}$	$\overline{4}$	$\overline{11}$	$\overline{5}$	$\overline{12}$	$\overline{6}$
$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{3}$	$\overline{11}$	$\overline{6}$	$\overline{1}$	$\overline{9}$	$\overline{4}$	$\overline{12}$	$\overline{7}$	$\overline{2}$	$\overline{10}$	$\overline{5}$
$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{9}$	$\overline{5}$	$\overline{1}$	$\overline{10}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{11}$	$\overline{7}$	$\overline{3}$	$\overline{12}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$
$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{7}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{11}$	$\overline{8}$	$\overline{5}$	$\overline{2}$	$\overline{12}$	$\overline{9}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$
$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{9}$	$\overline{7}$	$\overline{5}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{12}$	$\overline{10}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{12}$	$\overline{0}$	$\overline{12}$	$\overline{11}$	$\overline{10}$	$\overline{9}$	$\overline{8}$	$\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

$\overline{2}^1 = \overline{2}$, $\overline{2}^2 = \overline{4}$, $\overline{2}^3 = \overline{8}$, $\overline{2}^4 = \overline{3}$, $\overline{2}^5 = \overline{6}$, $\overline{2}^6 = \overline{12}$,
$\overline{2}^7 = \overline{11}$, $\overline{2}^8 = \overline{9}$, $\overline{2}^9 = \overline{5}$, $\overline{2}^{10} = \overline{10}$, $\overline{2}^{11} = \overline{7}$, $\overline{2}^{12} = \overline{1}$.
Như vậy, $\mathbb{Z}_{13}^*$ là một nhóm cyclic với phần tử sinh là $\overline{2}$.

15. **1)** Bảng nhân của $U_{18} = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{17}\}$:

.	$\overline{1}$	$\overline{5}$	$\overline{7}$	$\overline{11}$	$\overline{13}$	$\overline{17}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$	$\overline{7}$	$\overline{11}$	$\overline{13}$	$\overline{17}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{7}$	$\overline{17}$	$\overline{1}$	$\overline{11}$	$\overline{13}$
$\overline{7}$	$\overline{7}$	$\overline{17}$	$\overline{13}$	$\overline{5}$	$\overline{1}$	$\overline{11}$
$\overline{11}$	$\overline{11}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$	$\overline{13}$	$\overline{17}$	$\overline{7}$
$\overline{13}$	$\overline{13}$	$\overline{11}$	$\overline{1}$	$\overline{17}$	$\overline{7}$	$\overline{5}$
$\overline{17}$	$\overline{17}$	$\overline{13}$	$\overline{11}$	$\overline{7}$	$\overline{5}$	$\overline{1}$

$\overline{5}^1 = \overline{5},\ \overline{5}^2 = \overline{7},\ \overline{5}^3 = \overline{17},\ \overline{5}^4 = \overline{13},\ \overline{5}^5 = \overline{11},\ \overline{5}^6 = \overline{1}$.
Vậy U_{18} là một nhóm cyclic sinh bởi $\overline{5}$.

2) $U_{16} = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{9}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{15}\}$.
$\overline{3}^2 = \overline{9},\ \overline{3}^4 = \overline{1}$.
$\overline{5}^2 = \overline{9},\ \overline{5}^4 = \overline{1}$.
$\overline{7}^2 = \overline{1}$.
$\overline{9}^2 = \overline{1}$.
$\overline{11}^2 = \overline{9},\ \overline{11}^4 = \overline{1}$.
$\overline{13}^2 = \overline{9},\ \overline{13}^4 = \overline{1}$.
$\overline{15}^2 = \overline{1}$.
Vậy U_{16} không là nhóm cyclic.

16. **1)** $\mathbb{Z}_n$ là nhóm cộng cyclic cấp n sinh bởi $\overline{1}$. Mỗi đồng cấu nhóm $f : \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_n$ cho một giá trị xác định $a = f(\overline{1}) \in \mathbb{Z}_n$. Đảo lại, với mỗi $a \in \mathbb{Z}_n$, ánh xạ $f : \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_n$ cho bởi $f(\overline{k}) = ka$ là một đồng cấu nhóm. Do đó có 8 đồng cấu nhóm $\mathbb{Z}_{12} \longrightarrow \mathbb{Z}_{12}$ thoả mãn:

$$f(\overline{1}) = \overline{i},\ \ 0 \le i \le 11.$$

2) Mỗi đồng cấu $f : \mathbb{Z}_m \longrightarrow \mathbb{Z}_n$ xác định giá trị $a = f(\overline{1}) \in \mathbb{Z}_n$ và do $ma = mf(\overline{1}) = f(m\overline{1}) = f(\overline{m}) = f(\overline{0}) = \overline{0}$ nên ta có cấp của a trong $\mathbb{Z}_n$ là một ước của m. Đảo lại, phần tử $a \in \mathbb{Z}_n$ có cấp là một ước của m thì phép tương ứng $f : \mathbb{Z}_m \longrightarrow \mathbb{Z}_n : \overline{k} \mapsto ka$ là một ánh xạ và khi đó f là một đồng cấu nhóm.

Từ đó suy ra có 12 đồng cấu nhóm, từ $\mathbb{Z}_{12}$ đến $\mathbb{Z}_{24}$, đó là các ánh xạ $f : \mathbb{Z}_{12} \longrightarrow \mathbb{Z}_{24}$ sao cho:

$f(\overline{1}) = \overline{0},\ f(\overline{1}) = \overline{2},\ f(\overline{1}) = \overline{4},\ f(\overline{1}) = \overline{6},\ f(\overline{1}) = \overline{8},\ f(\overline{1}) = \overline{10},\ f(\overline{1}) = \overline{12},\ f(\overline{1}) = \overline{14},\ f(\overline{1}) = \overline{16},\ f(\overline{1}) = \overline{18},\ f(\overline{1}) = \overline{20},\ f(\overline{1}) = \overline{22}$.

3) Do 9 và 13 nguyên tố cùng nhau nên chỉ có một đồng cấu nhóm từ $\mathbb{Z}_9$ đến $\mathbb{Z}_{13}$ là ánh xạ không.

CHƯƠNG V:
SỐ HỮU TỈ, SỐ THỰC VÀ SỐ PHỨC

5.1. SỐ HỮU TỈ.

5.1.1. Xây dựng tập hợp các số hữu tỉ từ tập hợp các số nguyên:

5.1.1.1. Mở đầu: Số hữu tỉ dương ra đời khá sớm (khoảng 1550 năm trước Công nguyên) do các yêu cầu bức bách của đời sống sản xuất. Dễ hình dung rằng cùng với sự ra đời của chế độ tư hữu là những nhu cầu về đo đạc và phân chia, và số tự nhiên không còn đủ đáp ứng những yêu cầu mới của xã hội nữa. Chẳng hạn, trong phép đo đạc, dù ta có chọn đơn vị đo thế nào đi nữa vẫn thường gặp những đại lượng không bằng số nguyên lần của đơn vị (không đo được). Hơn nữa, để đáp ứng các yêu cầu đa dạng của cuộc sống, ta thường phải đưa ra nhiều đơn vị đo khác nhau. Như đo độ dài, ngoài đơn vị mét còn có đêximet, xentimet, milimet, ..., đo khối lượng ngoài đơn vị cân (kilôgam) còn có lạng, yến, tạ, tấn, ... Việc đổi đơn vị đo cũng đòi hỏi phải có những số mới (các phân số).

Như vậy, phân tích trên một nhu cầu đơn giản và cổ xưa nhất của xã hội loài người, ta đã thấy sự cần thiết của số hữu tỉ.

Mặt khác, sự ra đời của số hữu tỉ cũng là do yêu cầu nội tại của bộ môn toán học.

Ta đã mở rộng tập hợp số tự nhiên để được tập hợp số nguyên, trong đó phép trừ luôn thực hiện được, hay nói cách khác phép cộng có phép toán ngược. Tuy nhiên, trên tập hợp số tự nhiên cũng như trên tập hợp số nguyên còn có phép nhân. Sự mở rộng $\mathbb{N}$ thành $\mathbb{Z}$ chưa bảo đảm cho phép nhân có phép toán ngược, nghĩa là phép chia cho một số khác 0 không phải luôn thực hiện được.

Trên quan điểm của lý thuyết phương trình đại số ta thấy trong tập hợp $\mathbb{Z}$ các số nguyên mọi phương trình dạng

$$a + x = b, \quad a,\ b \in \mathbb{Z}$$

luôn có nghiệm, nhưng các phương trình dạng

$$ax = b, \quad a,\ b \in \mathbb{Z},\ a \neq 0$$

không phải bao giờ cũng có nghiệm.

Do đó xuất hiện một yêu cầu của nội tại toán học là mở rộng tập hợp số nguyên $\mathbb{Z}$ để được một tập hợp số mới trong đó phép chia cho một số khác 0 luôn thực hiện được, hay cũng vậy, phương trình $ax = b$ $(a \neq 0)$ luôn có nghiệm.

5.1.1.2. Định nghĩa: Quan hệ R như sau trên tập hợp $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ (với $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z}\backslash\{0\}$) là một quan hệ tương đương:

$$\forall (a,b),\ (c,d) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*,\ (a,b)\ R\ (c,d)\ \Leftrightarrow\ ad = bc.$$

Ký hiệu $\mathbb{Q} = (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*)/R$, nghĩa là $\mathbb{Q}$ là tập thương của $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ theo quan hệ tương đương R. Mỗi phần tử của $\mathbb{Q}$ (chính là mỗi lớp tương đương theo quan hệ R) được gọi là một số hữu tỉ.

Xét ánh xạ $q : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^* \longrightarrow \mathbb{Q}$ cho bởi $q(a,b) = \overline{(a,b)}$. Khi đó q là một toàn ánh và thường gọi là phép chiếu chính tắc.

5.1.2. Phép cộng và phép nhân trên $\mathbb{Q}$:

5.1.2.1. Định nghĩa: Cho $x = q(a,b),\ y = q(c,d) \in \mathbb{Q}$.

1) Phép cộng: $x + y = q(ad + bc, bd)$.

2) Phép nhân: $xy = q(ac, bd)$

5.1.2.2. Tính chất:

1) Phép cộng và phép nhân xác định trên $\mathbb{Q}$.

2) Phép cộng và phép nhân có tính giao hoán, nghĩa là với mọi $x, y \in \mathbb{Q}$,

$$x + y = y + x,\ xy = yx.$$

3) Phép cộng và phép nhân có tính kết hợp, nghĩa là với mọi $x, y, z \in \mathbb{Q}$,

$$(x + y) + z = x + (y + z),\ (xy)z = x(yz).$$

4) $\mathbb{Q}$ với phép cộng có phần tử không và với phép nhân có phần tử đơn vị, nghĩa là tồn tại $0', 1' \in \mathbb{Q}$ sao cho với mọi $x \in \mathbb{Q}$,

$$x + 0' = 0' + x = x,\ x1' = 1'x = x.$$

5) Mọi số hữu tỉ đều có số đối, nghĩa là với mọi $x \in \mathbb{Q}$, tồn tại $(-x) \in \mathbb{Q}$,

$$x + (-x) = (-x) + x = 0'.$$

6) Mọi số hữu tỉ khác $0'$ đều có số nghịch đảo, nghĩa là với mọi $x \in \mathbb{Q},\ x \neq 0'$, tồn tại $x^{-1} \in \mathbb{Q}$,

$$xx^{-1} = x^{-1}x = 1'.$$

7) Phép nhân có tính phân phối đối với phép cộng, nghĩa là với mọi $x, y, z \in \mathbb{Q}$,

$$x(y + z) = xy + xz,\ (y + z)x = yx + zx.$$

8) Phép cộng có tính giản ước, nghĩa là với mọi $x, y, z \in \mathbb{Q}$,

$$x + z = y + z \;\Rightarrow\; x = y.$$

9) Phép nhân có tính giản ước, nghĩa là với mọi $x, y, z \in \mathbb{Q},\ z \neq 0'$,

$$xz = yz \;\Rightarrow\; x = y.$$

Chứng minh:

1) Giả sử $x = q(a, b) = q(a', b'),\ y = q(c, d) = q(c'd')$. Khi đó $ab' = ba',\ cd' = dc'$. Ta có

$adb'd' = bda'd',\ bcb'd' = bdb'c' \Rightarrow adb'd' + bcb'd' = bda'd' + bdb'c'$

$\Rightarrow q(ad + bc, bd) = q(a'd' + b'c', b'd')$.

$acb'd' = ab'cd' = ba'dc' = bda'c' \Rightarrow q(ac, bd) = q(a'c', b'd')$.

Trong các phần còn lại, cho tuỳ ý $x = q(a, b),\ y = q(c, d),\ z = q(e, f)$.

2) $x + y = q(ad + bc, bd) = q(cb + da, db) = y + x$.

$xy = q(ac, bd) = q(ca, db) = yx$.

3) $(x + y) + z = q(ad + bc, bd) + q(e, f) = q(adf + bcf + bde, bdf) = q(a, b) + q(cf + de, df) = x + (y + z)$.

$(xy)z = q(ac, bd)q(e, f) = q(ace, bdf) = q(a, b)q(ce, df) = x(yz)$.

4) Đặt $0' = q(0, 1)$ và $1' = q(1, 1)$. Khi đó $0' = q(0, 1) = q(0, n)$ và $1' = q(1, 1) = q(n, n)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^*$. Ta có

$x + 0' = q(a, b) + q(0, 1) = q(a.1 + b.0, b.1) = q(a, b) = x$.

$x1' = q(a, b)q(1, 1) = q(a.1, b.1) = x$.

5) Đặt $-x = q(-a, b)$. Khi đó

$x + (-x) = q(a, b) + q(-a, b) = q(a.b + b(-a), b.b) = q(0, bb) = 0'$.

6) Do $x \neq 0'$ hay $q(a, b) \neq q(0, 1)$ nên $a \neq 0$. Đặt $x^{-1} = q(b, a)$. Ta có

$xx^{-1} = q(a, b)q(b, a) = q(ab, ba) = 1'$.

7) $x(y+z) = q(a, b)q(cf+de, df) = q(acf+ade, bdf) = q(b(acf+ade), b(bdf))$

$= q(acbf + bdae, bdbf) = q(ac, bd) + q(ae, bf) = xy + xz$.

8) $x + z = y + z \Rightarrow q(af + be, bf) = q(cf + de, df) \Rightarrow afdf + bedf = bfcf + bfde \Rightarrow afdf = bfcf \Rightarrow ad = bc \Rightarrow q(a, b) = q(c, d) \Rightarrow x = y$.

9) Do $z \neq 0'$ nên $e \neq 0$. Ta có

$xz = yz \Rightarrow q(ae, bf) = q(ce, df) \Rightarrow aedf = bfce \Rightarrow ad = bc \Rightarrow q(a, b) = q(c, d) \Rightarrow x = y$.

5.1.2.3. Hệ quả: Tập hợp $\mathbb{Q}$ với phép cộng và phép nhân trong (5.1.2.1) tạo thành một trường và $Char(\mathbb{Q}) = 0$.

5.1.3. Phép trừ, phép chia và phân số trong $\mathbb{Q}$:

5.1.3.1. Định nghĩa: Cho $x, y \in \mathbb{Q}$, ta gọi hiệu của x và y, ký hiệu $x - y$ là tổng của x và số đối của y:

$$x - y = x + (-y).$$

Phép toán tìm hiệu của hai số gọi là phép trừ.

Vì mọi số hữu tỉ đều có số đối nên phép trừ $x-y$ luôn luôn thực hiện được. Nếu $x = q(a,b),\ y = q(c,d)$ thì $-y = q(-c,d)$, do đó

$$x - y = x + (-y) = q(a,b) + q(-c,d) = q(ad - bc, bd).$$

5.1.3.2. Định nghĩa: Cho $x, y \in \mathbb{Q},\ y \neq 0'$, ta gọi thương của x và y, ký hiệu $x : y$ hay $\dfrac{x}{y}$ là tích của x và nghịch đảo của y:

$$x : y = \frac{x}{y} = xy^{-1}.$$

Phép toán tìm thương của hai số hữu tỉ gọi là phép chia.

Vì mọi số hữu tỉ $y \neq 0'$ đều có nghịch đảo, nên phép chia một số hữu tỉ x cho một số hữu tỉ $y \neq 0'$ luôn luôn thực hiện được. Nếu $x = q(a,b),\ y = q(c,d) \neq 0'$ thì $y^{-1} = q(d,c)$ do đó

$$x : y = xy^{-1} = q(a,b)q(d,c) = q(ad, bc).$$

Như vậy yêu cầu xây dựng một tập hợp số trong đó phép chia cho một số khác không luôn thực hiện được đã hoàn thành. Vấn đề còn lại là ta hãy chứng tỏ có thể coi $\mathbb{Q}$ như là một mở rộng của $\mathbb{Z}$ và sử dụng cách ghi số nguyên để ký hiệu các số hữu tỉ sao cho việc thực hành tính toán trên đó được thuận tiện.

5.1.3.3. Quan hệ giữa $\mathbb{Z}$ và $\mathbb{Q}$: Xét ánh xạ

$$f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}\ :\ a \mapsto f(a) = q(a,1).$$

Khi đó ánh xạ f có các tính chất sau:

1) f là một đơn ánh.

Thật vậy, với mọi $a_1, a_2 \in \mathbb{Z},\ f(a_1) = f(a_2)$, ta có $q(a_1,1) = q(a_2,1)$ hay $a_1.1 = 1.a_2$ hay $a_1 = a_2$.

2) f bảo toàn các phép toán.

Thật vậy, với mọi $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$, ta có

$f(a_1) + f(a_2) = q(a_1,1) + q(a_2,1) = q(a_1.1 + 1.a_2, 1.1) = q(a_1 + a_2, 1) = f(a_1 + a_2)$.

$f(a_1)f(a_2) = q(a_1,1)q(a_2,1) = q(a_1.a_2, 1.1) = q(a_1a_2, 1) = f(a_1a_2)$.

Các tính chất trên cho biết ánh xạ f là một đơn cấu vành và từ đó ta có thể đồng nhất mỗi số nguyên a với ảnh $f(a) = q(a,1)$, thay cho cách viết $x = q(a,1)$ ta viết $x = a$ và mỗi số nguyên $a \in \mathbb{Z}$ cũng là một số hữu tỉ. Như vậy $0' = q(0,0) = 0,\ 1' = q(1,0)$. Bằng cách đó $\mathbb{Z}$ là một tập con của $\mathbb{Q}$ và các phép toán của $\mathbb{Q}$ thu hẹp trên $\mathbb{Z}$ trùng với các phép toán trên $\mathbb{Z}$.

5.1.3.4. Định nghĩa: Cho $x = q(a, b) \in \mathbb{Q}$. Khi đó ta có

$$x = q(a, b) = q(a, 1)a(1, b) = q(a, 1)q(b, 1)^{-1}$$

và theo cách đồng nhất ở trên thì ta có thể viết $x = ab^{-1}$ hay $x = \dfrac{a}{b}$.

Biểu diễn $x = \dfrac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0$ gọi là một phân số, a gọi là tử số và b gọi là mẫu số của phân số đó.

5.1.3.5. Chú ý: Cho $x = \dfrac{a}{b},\ y = \dfrac{c}{d}$. Khi đó ta có:

1) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \ \Leftrightarrow\ ad = bc$.

2) $-x = \dfrac{-a}{b} = \dfrac{a}{-b}$.

3) $x^{-1} = \dfrac{b}{a}$ (với $x \neq 0$).

4) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}$.

5) $\dfrac{a}{b}.\dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$.

6) $\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad - bc}{bd}$.

7) $\dfrac{a}{b} : \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad}{bc}$.

5.1.4. Quan hệ thứ tự trên $\mathbb{Q}$:

5.1.4.1. Định nghĩa: Cho $x = \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q},\ a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0$. Ta nói x lớn hơn hoặc bằng 0 và viết $x \geq 0$ nếu $ab \geq 0$.

5.1.4.2. Chú ý: Trong định nghĩa trên, ta đã xác định khái niệm $x \geq 0$ nhờ khái niệm lớn hơn hoặc bằng 0 trong $\mathbb{Z}$ thông qua phân số đại biểu của x. Nhưng một số hữu tỉ x có thể được đại biểu bởi các phân số khác nhau, nên ta cần chứng tỏ định nghĩa trên không phụ thuộc vào phân số đại biểu của số x. Thật vậy, giả sử $x = \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ $(a, b, c, d \in \mathbb{Z},\ b \neq 0,\ d \neq 0)$. Khi đó ta có $ad = bc$ và nhân hai vế với bd ta được $abd^2 = cdb^2$. Vì $b^2 > 0$ và $d^2 > 0$ nên $ab \geq 0$ khi và chỉ khi $cd \geq 0$.

Nếu $x = a \in \mathbb{Z}$ thì có thể viết $x = \dfrac{a}{1}$ và $a.1 \geq 0$ trong $\mathbb{Z}$ khi và chỉ khi $a \geq 0$. Vậy khi x là một số nguyên thì khái niệm $x \geq 0$ trong $\mathbb{Q}$ và trong $\mathbb{Z}$ phù hợp với nhau.

5.1.4.3. Định nghĩa: Cho x và y là hai số hữu tỉ. Ta nói x nhỏ hơn hay bằng y hoặc y lớn hơn hay bằng x, ký hiệu $x \leq y$ hoặc $y \geq x$, nếu $y - x \geq 0$.

Nếu $x \leq y$ và $x \neq y$ thì ta nói x nhỏ hơn y hoặc y lớn hơn x, ký hiệu $x < y$ hoặc $y > x$.

Số hữu tỉ lớn hơn 0 gọi là số hữu tỉ dương và số hữu tỉ nhỏ hơn 0 gọi là số hữu tỉ âm.

5.1.4.4. Mệnh đề: Quan hệ $\leq$ sắp thứ tự toàn phần tập hợp $\mathbb{Q}$.

Chứng minh: Với mọi $x \in \mathbb{Q}$, ta có $x - x = 0 = \dfrac{0}{1}$ và $0.1 = 0 \geq 0$, nên $x - x \geq 0$ hay $x \leq x$. Do đó $\leq$ có tính phản xạ.

Với mọi $x, y \in \mathbb{Q}$ mà $x \leq y$ và $y \leq x$, ta có $y - x = \dfrac{a}{b} \geq 0$ và $x - y = \dfrac{-a}{b} \geq 0$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Khi đó $ab \geq 0$ và $(-a)b = -ab \geq 0$ và do ab là một số nguyên nên $ab = 0$, điều này kéo theo $a = 0$ (vì $b \neq 0$) tức là $y - x = 0$ hay $x = y$. Do đó $\leq$ có tính phản đối xứng.

Với mọi $x, y, z \in \mathbb{Q}$ mà $x \leq y$ và $y \leq z$, ta có $y - x = \dfrac{a}{b}$, $z - y = \dfrac{c}{d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$, $ab \geq 0$, $cd \geq 0$. Khi đó

$$z - x = (z - y) + (y - x) = \frac{c}{d} + \frac{a}{b} = \frac{cb + da}{db}$$

với $(cb + da)db = cdb^2 + abd^2 \geq 0$, điều này kéo theo $x \leq z$. Do đó $\leq$ có tính bắc cầu.

Với mọi $x, y \in \mathbb{Q}$, giả sử $y - x = \dfrac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Khi đó ta luôn có $ab \geq 0$ hoặc $ab \leq 0$, tức là $y - x \geq 0$ hoặc $x - y \geq 0$, điều này kéo theo $x \leq y$ hoặc $y \leq x$.

Vậy quan hệ $\leq$ sắp thứ tự toàn phần tập hợp $\mathbb{Q}$.

5.1.4.5. Định nghĩa: Giả sử $\leq$ là một quan hệ thứ tự trên trường $\mathbb{F}$. Khi đó $\mathbb{F}$ được gọi là một trường được sắp đối với thứ tự $\leq$ nếu các điều kiện sau đây được thoả mãn:

(1) Nếu $x \leq y$ thì $x + z \leq y + z$, với mọi $z \in \mathbb{F}$;

(2) Nếu $x \leq y$ và $0 \leq z$ thì $xz \leq yz$.

5.1.4.6. Mệnh đề: Trường $\mathbb{Q}$ các số hữu tỉ là trường được sắp đối với quan hệ thứ tự $\leq$.

Chứng minh: 1) Do $x \leq y$ nên $(y + z) - (x + z) = y - x \geq 0$, do đó $x + z \leq y + z$.

2) Do $x \leq y$ và $z \geq 0$ nên $y - x = \dfrac{a}{b}$, $z = \dfrac{c}{d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0, d \neq 0$, $ab \geq 0$, $cd \geq 0$, điều này kéo theo $yz - xz = (y - x)z = \dfrac{ac}{bd} \geq 0$ vì $acbd = (ab)(cd) \geq 0$. Do đó $xz \leq yz$.

5.1.5. Tính trù mật và tính sắp thứ tự Archimède của tập hợp $\mathbb{Q}$:

5.1.5.1. Mệnh đề: Với mọi $x, y \in \mathbb{Q}$, $x < y$, tồn tại $z \in \mathbb{Q}$ sao cho $x < z < y$.

Chứng minh: Từ giả thiết $x < y$ suy ra $x + x < x + y$ và $x + y < y + y$, nên ta có $2x < x + y < 2y$ hay

$$x < z < y, \text{ với } z = \frac{x+y}{2}.$$

5.1.5.2. Hệ quả: Giữa hai số hữu tỉ phân biệt bất kỳ, tồn tại vô số số hữu tỉ khác.

Chứng minh: Với $x, y \in \mathbb{Q}$, $x \neq y$, ta có $x < y$ hoặc $y < x$. Giả sử $x < y$. Theo mệnh đề trên tồn tại $z \in \mathbb{Q}$ sao cho $x < z < y$. Lại áp dụng mệnh đề trên, tồn tại $z_1, z_2 \in \mathbb{Q}$ sao cho $x < z_1 < z < z_2 < y$. Lý luận trên có thể lặp lại một số lần tuỳ ý. Vậy giữa x và y có vô số số hữu tỉ.

5.1.5.3. Chú ý: Tính chất trên thể hiện sự khác biệt căn bản giữa tính sắp thứ tự của tập hợp các số nguyên và tập hợp các số hữu tỉ.

Trong tập hợp số nguyên, giữa hai số nguyên n và $n+1$ không có số nguyên nào khác và từ đó có thể suy ra giữa hai số nguyên phân biệt chỉ có hữu hạn số nguyên khác chúng. Người ta nói tập hợp số nguyên sắp thứ tự rời rạc.

Còn trong tập hợp các số hữu tỉ, giữa hai số hữu tỉ phân biệt bất kỳ bao giờ cũng có vô số số hữu tỉ. Người ta nói tập hợp các số hữu tỉ sắp thứ tự trù mật.

5.1.5.4. Mệnh đề: Với mọi $x, y \in \mathbb{Q}$, nếu $x > 0$ thì tồn tại số tự nhiên n sao cho $nx > y$.

Chứng minh: Nếu $y \leq 0$ thì ta chỉ cần đặt $n = 1$ vì $1.x = x > y$.

Nếu $y > 0$ thì ta có thể viết $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{c}{d}$, trong đó a, b, c, d là những số nguyên dương. Đặt $n = b(c+1)$ thì $n \in \mathbb{N}$ và ta có

$$nx = a(c+1) \geq c + 1 > c \geq \frac{c}{d} = y.$$

Tính chất phát biểu trong mệnh đề trên gọi là tính chất Archimède. Vậy quan hệ thứ tự trên tập hợp $\mathbb{Q}$ có tính chất Archimède.

5.2. SỐ THỰC.

5.2.1. Xây dựng tập hợp $\mathbb{R}$ các số thực và hai phép toán trên $\mathbb{R}$:

5.2.1.1. Yêu cầu mở rộng tập hợp $\mathbb{Q}$ các số hữu tỉ: Tập hợp các số hữu tỉ, mặc dù trù mật, vẫn chưa đáp ứng được các yêu cầu của hoạt động thực tiễn. Từ xa xưa người ta đã thấy có những đoạn thẳng không có số đo hữu tỉ. Chẳng hạn, nếu ta đo đường chéo của một hình vuông mà cạnh bằng 1 đơn vị dài thì độ dài của đường chéo đó có bình phương bằng 2.

Như vậy, nếu chỉ dùng các số hữu tỉ, ta chưa đáp ứng được các yêu cầu của thực tiễn. Vì vậy xuất hiện yêu cầu mở rộng hơn nữa tập hợp $\mathbb{Q}$ các số hữu tỉ.

Về phương diện toán học thuần tuý ta cũng thấy sự cần thiết phải mở rộng hơn nữa tập hợp $\mathbb{Q}$. Chẳng hạn, thí dụ trên có thể diễn đạt một cách thuần tuý toán học là: phương trình $x^2 = 2$ không có nghiệm hữu tỉ.

Ở Phần 5.1 ta đã thấy trên tập hợp $\mathbb{Q}$ mọi phương trình bậc nhất $ax+b=0$ đều có nghiệm. Nhưng một phương trình bậc hai trở lên, nói chung, không có nghiệm hữu tỉ.

Một yêu cầu tự nhiên đặt ra theo sự phát triển lôgic của toán học là: mở rộng tập hợp $\mathbb{Q}$ các số hữu tỉ để có một tập hợp số mới chứa $\mathbb{Q}$ sao cho mọi đa thức trên $\mathbb{Q}$ đều có nghiệm trong tập hợp này và trong toán học tập hợp này gọi là trường các số đại số. Song vẫn còn có những đại lượng không thể biểu diễn bằng nghiệm của bất kỳ một đa thức nào trên $\mathbb{Q}$. Chẳng hạn độ dài của đường tròn có đường kính bằng đơn vị dài (cụ thể là số π) không thể biểu diễn được bằng nghiệm của một đa thức trên $\mathbb{Q}$. Số e quen thuộc cũng vậy, e không là nghiệm của bất kỳ đa thức nào với hệ số hữu tỉ. Thực ra, để sử dụng các số mới này, ta thường lấy các số hữu tỉ xấp xỉ thay cho chúng. Có điều là mỗi số mới đó có vô số số hữu tỉ xấp xỉ với một độ chính xác tuỳ ý. Ta sẽ sử dụng dãy số hữu tỉ xấp xỉ đó để xác định tập hợp số mới.

5.2.1.2. Định nghĩa: Xét tập hợp X gồm tất cả các dãy Cauchy (dãy cơ bản) trên tập hợp $\mathbb{Q}$. Vì tổng và tích của hai dãy Cauchy là một dãy Cauchy nên trên X có hai phép toán: Với $(x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$,

1) Phép cộng: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2) Phép nhân: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5.2.1.3. Tính chất:

1) Phép cộng và phép nhân có tính giao hoán.

2) Phép cộng và phép nhân có tính kết hợp.

3) X với phép cộng có phần tử không, đó là dãy $(0)_{n\in\mathbb{N}}$ và với phép nhân có phần tử đơn vị, đó là dãy $(1)_{n\in\mathbb{N}}$.

4) Mọi phần tử của X đều có phần tử đối; cụ thể đối của $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là $(-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5) Phép nhân có tính phân phối đối với phép cộng.

Chứng minh: Kết quả có ngay từ định nghĩa.

5.2.1.4. Định nghĩa: Quan hệ R trên tập hợp X:

$$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X,\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\ R\ (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \ \Leftrightarrow\ \lim_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = 0$$

là một quan hệ tương đương.

Lớp tương đương của $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ là

$$\overline{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X \mid \lim_{n\to+\infty}(x_n - a_n) = 0\}.$$

Tập hợp thương X/R ký hiệu là $\mathbb{R}$. Mỗi phần tử của $\mathbb{R}$ (chính là mỗi lớp tương đương theo quan hệ R) được gọi là một số thực.

Ánh xạ $r : X \longrightarrow \mathbb{R}$ cho bởi $r((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \overline{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}}$ là một toàn ánh và thường gọi là phép chiếu chính tắc.

5.2.1.5. Định nghĩa: Cho $x = r((x_n)_{n\in\mathbb{N}}),\ y = r((y_n)_{n\in\mathbb{N}})$.
1) Phép cộng: $x + y = r((x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}})$.
2) Phép nhân: $xy = r((x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}})$.

5.2.1.6. Tính chất:

1) Phép cộng và phép nhân được xác định trên $\mathbb{R}$.

2) Phép cộng và phép nhân có tính giao hoán, nghĩa là với mọi $x, y \in \mathbb{R}$,

$$x + y = y + x,\ xy = yx.$$

3) Phép cộng và phép nhân có tính kết hợp, nghĩa là với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$(x + y) + z = x + (y + z),\ (xy)z = x(yz).$$

4) $\mathbb{R}$ với phép cộng có phần tử không và với phép nhân có phần tử đơn vị, nghĩa là tồn tại $0', 1' \in \mathbb{R}$, sao cho với mọi $x \in \mathbb{R}$,

$$x + 0' = 0' + x = x,\ x1' = 1'x = x.$$

5) Mọi số thực đều có số đối, nghĩa là với mọi $x \in \mathbb{R}$, tồn tại $-x \in \mathbb{R}$,

$$x + (-x) = (-x) + x = 0'.$$

6) Mọi số thực khác không đều có số nghịch đảo, nghĩa là với mọi $x \in \mathbb{R},\ x \neq 0'$, tồn tại $x^{-1} \in \mathbb{R}$,

$$xx^{-1} = x^{-1}x = 1'.$$

7) Phép nhân có tính phân phối đối với phép cộng, nghĩa là với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$x(y + z) = xy + xz,\quad (y + z)x = yx + zx.$$

8) Phép cộng có tính giản ước, nghĩa là với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$x + z = y + z \ \Rightarrow\ x = y.$$

9) Phép nhân có tính giản ước, nghĩa là với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$ $z \neq 0'$,

$$xz = yz \ \Rightarrow \ x = y.$$

Chứng minh: 1) Giả sử $x = r((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = r((x'_n)_{n\in\mathbb{N}})$, $y = r((y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = r((y'_n)_{n\in\mathbb{N}})$. Khi đó $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - x'_n) = 0$ và $\lim\limits_{n\to+\infty}(y_n - y'_n) = 0$, nên ta có $\lim\limits_{n\to+\infty}((x_n + y_n) - (x'_n + y'_n)) = 0$ hay $r((x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = r((x'_n + y'_n)_{n\in\mathbb{N}})$. $\lim\limits_{n\to+\infty}((x_n y_n) - (x'_n y'_n)) = \lim\limits_{n\to+\infty}((x_n - x'_n)y_n + x'_n(y_n - y'_n)) = 0$ (vì dãy $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và dãy $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là bị chặn do chúng là dãy Cauchy và $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - x'_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}(y_n - y'_n) = 0$) hay $r((x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = r((x'_n y'_n)_{n\in\mathbb{N}})$.

Các tính chất 2), 3), 7), 8) được suy từ (5.2.1.3).

4) $\mathbb{R}$ với phép cộng có phần tử không là $0' = r((0)_{n\in\mathbb{N}})$ và với phép nhân có phần tử đơn vị là $1' = r((1)_{n\in\mathbb{N}})$.

5) Số đối của $x = r((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$ là $-x = r((-x_n)_{n\in\mathbb{N}})$.

6) Giả sử $x = r((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) \neq 0'$. Khi đó dãy Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ không có giới hạn là không. Theo tính chất của dãy Cauchy, tồn tại $a \in \mathbb{Q}$, $a > 0$ và $n_1 \in \mathbb{N}$ sao cho $|x_n| > a$ với mọi $n > n_1$. Ta xét dãy $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trên $\mathbb{Q}$ xác định như sau:

$$y_n = \begin{cases} 0 & \text{nếu } n \leq n_1 \\ \dfrac{1}{x_n} & \text{nếu } n > n_1 \end{cases}.$$

Khi đó $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy Cauchy. Thật vậy, với mọi $\epsilon \in \mathbb{Q}$, $\epsilon > 0$, vì $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy Cauchy nên tồn tại $n_2 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $m, n > n_2$, ta có

$$|x_m - x_n| < a^2\epsilon.$$

Từ đó suy ra rằng với mọi $m, n > n_0 = \max(n_1, n_2)$, ta có

$$|y_m - y_n| = |\frac{1}{x_m} - \frac{1}{x_n}| = \frac{|x_m - x_n|}{|x_m x_n|} < \frac{1}{a^2}.a^2\epsilon = \epsilon$$

nghĩa là $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy Cauchy trên $\mathbb{Q}$.

Đặt $z_n = y_n x_n$, ta được $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ và

$$z_n = \begin{cases} 0 & \text{nếu } n \leq n_1 \\ 1 & \text{nếu } n > n_1 \end{cases}$$

và do đó

$$r((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) r((y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = r((z_n)_{n\in\mathbb{N}}) = r((1)_{n\in\mathbb{N}})$$

nghĩa là $x^{-1} = r((y_n)_{n\in\mathbb{N}})$ là nghịch đảo của x.

9) Do $z \neq 0'$ nên tồn tại $z^{-1} \in \mathbb{R}$ sao cho $zz^{-1} = z^{-1}z = 1'$. Khi đó

$$xz = yz \Rightarrow (xz)z^{-1} = (yz)z^{-1} \Rightarrow x(zz^{-1}) = y(zz^{-1}) \Rightarrow x = y.$$

5.2.1.7. Hệ quả: Tập hợp $\mathbb{R}$ với phép cộng và phép nhân trong (5.2.1.5) tạo thành một trường và $Char(\mathbb{R}) = 0$.

5.2.2. Phép trừ và phép chia trong $\mathbb{R}$:

5.2.2.1. Định nghĩa: Cho $x, y \in \mathbb{R}$, ta gọi hiệu của x và y, ký hiệu $x - y$ là tổng của x và số đối của y:

$$x - y = x + (-y).$$

Phép toán tìm hiệu của hai số gọi là phép trừ.

Vì mọi số thực đều có số đối nên phép trừ $x - y$ luôn luôn thực hiện được.

5.2.2.2. Định nghĩa: Cho $x, y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0'$, ta gọi thương của x và y, ký hiệu $x : y$ hay $\dfrac{x}{y}$ là tích của x và nghịch đảo của y:

$$x : y = \frac{x}{y} = xy^{-1}.$$

Phép toán tìm thương của hai số thực gọi là phép chia.

Vì mọi số thực $y \neq 0'$ đều có nghịch đảo, nên phép chia một số thực x cho một số thực $y \neq 0'$ luôn luôn thực hiện được.

5.2.2.3. Quan hệ giữa $\mathbb{Q}$ và $\mathbb{R}$: Xét ánh xạ

$$f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R} \ : \ a \mapsto f(a) = r((a)_{n\in\mathbb{N}}).$$

Khi đó ánh xạ f có các tính chất sau:

1) f là một đơn ánh.

Thật vậy, với mọi $a, a' \in \mathbb{Q}$, $f(a) = f(a')$, ta có $r((a)_{n\in\mathbb{N}}) = r((a')_{n\in\mathbb{N}})$ hay $\lim\limits_{n\to+\infty}(a - a') = 0$ hay $a = a'$.

2) f bảo toàn các phép toán, nghĩa là với mọi $a, a' \in \mathbb{Q}$,

$$f(a + a') = f(a) + f(a'), \ \ f(aa') = f(a)f(a').$$

Thật vậy, với mọi $a, a' \in \mathbb{Q}$, ta có

$f(a) + f(a') = r((a)_{n\in\mathbb{N}}) + r((a')_{n\in\mathbb{N}}) = r((a + a')_{n\in\mathbb{N}}) = f(a + a')$.

$f(a)f(a') = r((a)_{n\in\mathbb{N}})r((a')_{n\in\mathbb{N}}) = r((aa')_{n\in\mathbb{N}}) = f(aa')$.

Các tính chất trên cho biết ánh xạ f là một đơn cấu trường và từ đó ta có thể đồng nhất mỗi số hữu tỉ a với ảnh $f(a) = r((a)_{n\in\mathbb{N}})$, thay cho cách viết

$x = r((a)_{n\in\mathbb{N}})$ ta viết $x = a$ và mỗi số hữu tỉ a cũng là một số thực. Như vậy $0' = r((0)_{n\in\mathbb{N}}) = 0$ và $1' = r((1)_{n\in\mathbb{N}}) = 1$. Bằng cách đó $\mathbb{Q}$ là một tập con của $\mathbb{R}$ và ta còn nói $\mathbb{Q}$ là một trường con của trường $\mathbb{R}$.

5.2.3. Quan hệ thứ tự trên $\mathbb{R}$:

5.2.3.1. Định nghĩa: Cho $x = r((x_n)_{n\in\mathbb{N}}),\ y = r((y_n)_{n\in\mathbb{N}}) \in \mathbb{R}$. Ta nói x nhỏ hơn y hoặc y lớn hơn x, ký hiệu $x < y$ hoặc $y > x$ nếu tồn tại $a \in \mathbb{Q},\ a > 0$ và $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $y_n - x_n > a$ với mọi $n > n_0$.

Ta nói x nhỏ hơn hay bằng y hoặc y lớn hơn hay bằng x, ký hiệu $x \leq y$ hoặc $y \geq x$ nếu hoặc $x = y$ hoặc $x < y$.

5.2.3.2. Chú ý: Cho $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là hai dãy Cauchy trên $\mathbb{Q}$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$. Khi đó nếu tồn tại $n_1 \in \mathbb{N}$ và $a \in \mathbb{Q},\ a > 0$ sao cho $x_n > a$ với mọi $n > n_1$ thì cũng tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ và $b \in \mathbb{Q},\ b > 0$ sao cho $x_n + y_n > b$ với mọi $n > n_0$.

Thật vậy, vì $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$, nên tồn tại $n_2 \in \mathbb{N}$ sao cho $|y_n| < \dfrac{a}{2}$ với mọi $n > n_2$. Như vậy với mọi $n > n_0 = \max(n_1, n_2)$ ta có đồng thời $x_n > a$ và $|y_n| < \dfrac{a}{2}$. Từ đó ta có

$$x_n + y_n > a + y_n > a - |y_n| > a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} (= b).$$

Từ đó ta có thể suy ra quan hệ $<$ được định nghĩa ở trên không phụ thuộc vào cách chọn phần tử đại biểu. Thật vậy, giả sử $x = r((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = r((x'_n)_{n\in\mathbb{N}}),\ y = r((y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = r((y'_n)_{n\in\mathbb{N}})$. Khi đó ta có

$$y'_n - x'_n = (y_n - x_n) + (y'_n - y_n) + (x_n - x'_n)$$

với $\lim\limits_{n\to+\infty}(y'_n - y_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - x'_n) = 0$. Như vậy nếu có $a \in \mathbb{Q},\ a > 0$ và $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $y_n - x_n > a$ với mọi $n > n_0$ thì cũng có $b \in \mathbb{Q},\ b > 0$ và $n_1 \in \mathbb{N}$ sao cho $y'_n - x'_n > b$ với mọi $n > n_1$.

5.2.3.3. Mệnh đề: Quan hệ $\leq$ sắp thứ tự toàn phần tập hợp $\mathbb{R}$.

Chứng minh: Tính phản xạ của $\leq$ là hiển nhiên.

Với $r((x_n)_{n\in\mathbb{N}}),\ r((y_n)_{n\in\mathbb{N}}) \in \mathbb{R}$ mà $r((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) \leq r((y_n)_{n\in\mathbb{N}})$ và $r((y_n)_{n\in\mathbb{N}}) \leq r((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$, giả sử $r((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) \neq r((y_n)_{n\in\mathbb{N}})$, tồn tại $a, b \in \mathbb{Q},\ a > 0,\ b > 0$ và $k, l \in \mathbb{N}$ sao cho $y_n - x_n > a$ với mọi $n > k$ và $x_n - y_n > b$ với mọi $n > l$. Khi đó với mọi $n > n_0 = \max(k, l)$ ta có đồng thời $y_n - x_n > a$ và $x_n - y_n > b$, do đó $0 > a + b > 0$, đó là điều vô lý. Vậy quan hệ $\leq$ có tính phản đối xứng.

Với $r((x_n)_{n\in\mathbb{N}}),\ r((y_n)_{n\in\mathbb{N}}),\ r((z_n)_{n\in\mathbb{N}}) \in \mathbb{R}$ mà $r((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) \leq r((y_n)_{n\in\mathbb{N}})$ và $r((y_n)_{n\in\mathbb{N}}) \leq r((z_n)_{n\in\mathbb{N}})$, ta có các trường hợp sau xảy ra:

– hoặc $\lim\limits_{n\to+\infty}(y_n-x_n)=0$ và $\lim\limits_{n\to+\infty}(z_n-y_n)=0$, khi đó ta được $\lim\limits_{n\to+\infty}(z_n-x_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}(z_n-y_n+y_n-x_n)=0$, nên $r((x_n)_{n\in\mathbb{N}})\leq r((z_n)_{n\in\mathbb{N}})$.

– hoặc có $a\in\mathbb{Q},\ a>0$ và $k\in\mathbb{N}$ sao cho $y_n-x_n>a$ với mọi $n>k$ và $\lim\limits_{n\to+\infty}(z_n-y_n)=0$, khi đó có $c\in\mathbb{Q},\ c>0$ và $n_0\in\mathbb{N}$ sao cho ta có $z_n-x_n=z_n-y_n+y_n-x_n>c$ với mọi $n>n_0$, nên $r((x_n)_{n\in\mathbb{N}})\leq r((z_n)_{n\in\mathbb{N}})$.

– hoặc $\lim\limits_{n\to+\infty}(y_n-x_n)=0$ và có $b\in\mathbb{Q},\ b>0$ và $k\in\mathbb{N}$ sao cho $z_n-y_n>b$ với mọi $n>k$, khi đó cũng như trường trên ta có $r((x_n)_{n\in\mathbb{N}})\leq r((z_n)_{n\in\mathbb{N}})$.

– hoặc có $a,b\in\mathbb{Q},\ a>0,\ b>0$ và $k,l\in\mathbb{N}$ sao cho $y_n-x_n>a$ với mọi $n>k$ và $z_n-y_n>b$ với mọi $n>l$, khi đó với mọi $n>n_0=\max(k,l)$ ta có $z_n-x_n=z_n-y_n+y_n-x_n>a+b$, nên $r((x_n)_{n\in\mathbb{N}})\leq r((z_n)_{n\in\mathbb{N}})$. Vậy quan hệ $\leq$ có tính bắc cầu.

Với $r((x_n)_{n\in\mathbb{N}}),\ r((y_n)_{n\in\mathbb{N}})\in\mathbb{R}$, nếu ta có $\lim\limits_{n\to+\infty}(y_n-x_n)=0$ thì ta được $r((x_n)_{n\in\mathbb{N}})=r((y_n)_{n\in\mathbb{N}})$ và nếu (y_n-x_n) không có giới hạn là 0 thì có $a\in\mathbb{Q},\ a>0$ và $n_0\in\mathbb{N}$ sao cho ta có

– hoặc $y_n-x_n>a$ với mọi $n>n_0$, lúc đó ta được $r((x_n)_{n\in\mathbb{N}})\leq r((y_n)_{n\in\mathbb{N}})$,

– hoặc $x_n-y_n>a$ với mọi $n>n_0$, lúc đó ta được $r((y_n)_{n\in\mathbb{N}})\leq r((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$.

Vậy quan hệ $\leq$ là toàn phần.

5.2.3.4. Mệnh đề: Trường $\mathbb{R}$ các số thực là trường được sắp đối với quan hệ thứ tự $\leq$.

Chứng minh: Kết quả có từ định nghĩa của quan hệ $\leq$.

5.2.3.5. Định nghĩa: Số thực x gọi là dương (t.ư. âm, không âm, không dương) nếu $x>0$ (t.ư. $x<0,\ x\geq 0,\ x\leq 0$).

Giá trị tuyệt đối của x, với x là số hữu tỉ hoặc số thực, ký hiệu là $|x|$, được xác định bởi:

$$|x|=\begin{cases} x & \text{nếu } x\geq 0\\ -x & \text{nếu } x<0\end{cases}.$$

5.2.3.6. Mệnh đề: Nếu $x=r((x_n)_{n\in\mathbb{N}})\in\mathbb{R}$ thì $|x|=r((|x_n|)_{n\in\mathbb{N}})$.

Chứng minh: Ta xét các trường hợp sau:

1) $x=0$: Khi đó $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$, do đó $\lim\limits_{n\to+\infty}|x_n|=0$, nghĩa là $r((|x_n|)_{n\in\mathbb{N}})=0$.

2) $x>0$: Khi đó có $a\in\mathbb{Q},\ a>0$ và $n_0\in\mathbb{N}$ sao cho $x_n>a$ với mọi $n>n_0$, do đó $x_n-|x_n|=0$ với mọi $n>n_0$ hay $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n-|x_n|)=0$, tức là $r((|x_n|)_{n\in\mathbb{N}})=x=|x|$.

3) $x<0$: Khi đó có $a\in\mathbb{Q},\ a>0$ và $n_0\in\mathbb{N}$ sao cho $x_n<-a$ với mọi $n>n_0$, do đó $x_n+|x_n|=0$ với mọi $n>n_0$ hay $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n+|x_n|)=0$, tức là $r((|x_n|)_{n\in\mathbb{N}})=r((-x_n)_{n\in\mathbb{N}})=-x=|x|$.

5.2.4. Tính trù mật của $\mathbb{Q}$ trong $\mathbb{R}$ và tính chất Archimède của $\mathbb{R}$:

5.2.4.1. Định lý: $\mathbb{R}$ được sắp thứ tự Archimède, nghĩa là với mọi $x, y \in \mathbb{R}$, nếu $x > 0$ thì tồn tại số tự nhiên m sao cho $mx > y$.

Chứng minh: Giả sử $x = r((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$, $y = r((y_n)_{n\in\mathbb{N}})$. Vì $x > 0$ nên có $a \in \mathbb{Q}$, $a > 0$ và $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $x_n > a$ với mọi $n > n_0$, từ đó ta được $x = r((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) \geq r((a)_{n\in\mathbb{N}}) = a$. Ngoài ra, do $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy Cauchy trên $\mathbb{Q}$ nên nó bị chặn, nghĩa là có $b \in \mathbb{Q}$ sao cho $y_n < b$ với mọi $n \in \mathbb{N}$, từ đó ta được $y = r((y_n)_{n\in\mathbb{N}}) \leq r((b)_{n\in\mathbb{N}}) = b$. Vì $a, b \in \mathbb{Q}$, $a > 0$ và $\mathbb{Q}$ được sắp thứ tự Archimède nên có $m \in \mathbb{N}$ sao cho $ma > b$. Vậy ta có $mx \geq ma > b \geq y$.

5.2.4.2. Định lý: Tập hợp $\mathbb{Q}$ trù mật trong $\mathbb{R}$, nghĩa là với mọi $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, tồn tại $z \in \mathbb{Q}$ sao cho $x < z < y$.

Chứng minh: Ta có $y - x > 0$. Vì $\mathbb{R}$ được sắp thứ tự Archimède nên có $m \in \mathbb{N}$ sao cho $1 < m(y - x) = my - mx$, do đó $mx + 1 < my$. Cũng vì lý do đó nên có $n \in \mathbb{N}$ sao cho $|my| < n$. Xét tập hợp

$$A = \{u \in \mathbb{Z} \mid u < my\}.$$

Ta có A là một tập con khác rỗng của $\mathbb{Z}$ và bị chặn trên. Vậy A có số lớn nhất p, $p < my$. Khi đó ta có $mx < p$, vì nếu không thì phải xảy ra $p \leq mx$, do đó $p + 1 \leq mx + 1 < my$ nên $p + 1 \in A$, mâu thuẩn với p là số lớn nhất của A. Vậy ta có $p \in \mathbb{Z}$ mà

$$mx < p < my,$$

từ đó suy ra $x < z = \dfrac{p}{m} < y$.

5.2.4.3. Định lý: Mỗi số thực đều là giới hạn của một dãy Cauchy trên $\mathbb{Q}$.

Chứng minh: Cho $x = r((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}$. Ta sẽ chứng minh $\lim\limits_{m\to+\infty} x_m = x$. Với $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$, do $\mathbb{Q}$ trù mật trong $\mathbb{R}$, ta có $\mu \in \mathbb{Q}$ sao cho $0 < \mu < \epsilon$. Vì $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy Cauchy trên $\mathbb{Q}$ nên có $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $m, n > n_0$ ta có $|x_m - x_n| < \mu$. Với $m \in \mathbb{N}$, $m > n_0$, ta có:

$$|x_m - x| = |x_m - r((x_n)_{n\in\mathbb{N}})| = r((|x_m - x_n|)_{n\in\mathbb{N}}) \leq r((\mu)_{n\in\mathbb{N}}) = \mu < \epsilon.$$

Chú ý rằng trong chứng minh định lý này, ta đã lấy dãy Cauchy hội tụ về số thực x chính là dãy Cauchy xác định x. Hơn nữa ta đã biết rằng mọi dãy Cauchy trên $\mathbb{Q}$ đều xác định một số thực, do đó ta được:

5.2.4.4. Hệ quả: Mọi dãy Cauchy trên $\mathbb{Q}$ đều hội tụ trong $\mathbb{R}$.

5.2.4.5. Định lý: Mọi dãy Cauchy trên $\mathbb{R}$ đều là dãy hội tụ.

Chứng minh: Cho $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy Cauchy trên $\mathbb{R}$. Do tính trù mật của $\mathbb{Q}$ trong $\mathbb{R}$ nên với mọi $n \in \mathbb{N}$ tồn tại $y_n \in \mathbb{Q}$ sao cho $\alpha_n < y_n < \alpha_n + \dfrac{1}{n+1}$. Khi đó dãy $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy Cauchy trên $\mathbb{Q}$. Thật vậy, với $\mu \in \mathbb{Q}, \mu > 0$, tồn tại $n_1 \in \mathbb{N}$ sao cho $|\alpha_n - \alpha_m| < \dfrac{\mu}{3}$ với mọi $n, m > n_1$ và tồn tại $n_2 \in \mathbb{N}$ sao cho $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{\mu}{3}$ với mọi $n > n_2$. Như vậy với mọi $n, m > n_0 = \max(n_1, n_2)$ ta có:

$$|y_n - y_m| \leq |y_n - \alpha_n| + |\alpha_n - \alpha_m| + |\alpha_m - y_m| < \frac{1}{n+1} + \frac{\mu}{3} + \frac{1}{m+1} < \mu.$$

Theo hệ quả trên, dãy $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ trong $\mathbb{R}$ và giả sử $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = r((y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = x$.

Bây giờ ta xét dãy $(y_n - \alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trong $\mathbb{R}$. Với mọi $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho ta có $\dfrac{1}{n+1} < \epsilon$ với mọi $n > n_0$. Từ đó ta được

$$y_n - \alpha_n < \frac{1}{n+1} < \epsilon$$

với mọi $n > n_0$. Điều đó chứng tỏ $\lim\limits_{n\to+\infty}(y_n - \alpha_n) = 0$. Do đó dãy $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ và $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = x$.

5.3. SỐ PHỨC.

5.3.1. Xây dựng tập hợp $\mathbb{C}$ các số phức và hai phép toán trên $\mathbb{C}$:

5.3.1.1. Mở đầu: Trong phần trước, ta đã nhận thấy rằng phương trình $x^2 - 2 = 0$ không có nghiệm hữu tỉ. Đó chính là điểm khởi đầu cho việc xây dựng tập hợp $\mathbb{R}$ các số thực như là một "bổ sung" của tập $\mathbb{Q}$ các số hữu tỉ, nhằm tìm nghiệm của phương trình đó.

Có một tình trạng tương tự là phương trình $x^2 + 1 = 0$ không có nghiệm thực, bởi vì bình phương mọi số thực đều không âm. Để thoát ra khỏi tình trạng này, ta cần "mở rộng" $\mathbb{R}$ bằng cách xây dựng thêm các "số mới".

Ta gọi i là một ký hiệu hình thức (tức một "số mới") là nghiệm của phương trình nói trên, tức là

$$i^2 = -1.$$

Ta muốn thực hiện được mọi phép toán cộng, trừ, nhân, chia (cho các số khác 0) sau khi đã ghép thêm i vào $\mathbb{R}$. Điều này dẫn ta tới việc chấp nhận các "số mới" dạng $a + ib$, trong đó $a, b \in \mathbb{R}$. Tập hợp các số như vậy đóng đối với phép toán nói trên. Thật vậy, sử dụng hệ thức $i^2 = -1$ ta có:

$$\begin{aligned}(a+ib) \pm (c+id) &= (a+c) \pm i(b+d),\\ (a+ib)(c+id) &= (ac-bd) + i(ad+bc),\\ \frac{(a+ib)}{(c+id)} &= \frac{(a+ib)(c-id)}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{bc-ad}{c^2+d^2},\end{aligned}$$

với $c + id \neq 0$, tức là $c \neq 0$ hoặc $d \neq 0$.

Tuy nhiên vẫn còn câu hỏi: "Vậy i là cái gì?".

Để tránh trường hợp khó xử này ta hãy đồng nhất $a + ib$ với cặp số thực (a, b). Những phân tích ở trên dẫn tới định nghĩa sau đây.

5.3.1.2. Định nghĩa: Mỗi cặp số thực (a, b) được gọi là một số phức. Tập hợp tất cả các số phức được ký hiệu bởi $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{C} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Ta định nghĩa các phép toán cộng và nhân các số phức như sau:

1) Phép cộng: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$.

2) Phép nhân: $(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

Hai số phức (a, b) và (c, d) được gọi là bằng nhau nếu $a = c$ và $b = d$.

5.3.1.3. Tính chất:

1) Phép cộng và phép nhân có tính giao hoán, nghĩa là với mọi $z, u \in \mathbb{C}$,

$$z + u = u + z,\ zu = uz.$$

2) Phép cộng và phép nhân có tính kết hợp, nghĩa là với mọi $z, u, v \in \mathbb{C}$,

$$(z + u) + v = z + (u + v),\ (zu)v = z(uv).$$

3) $\mathbb{C}$ với phép cộng có phần tử không và với phép nhân có phần tử đơn vị, nghĩa là tồn tại $0' = (0, 0), 1' = (1, 0) \in \mathbb{C}$ sao cho với mọi $z \in \mathbb{C}$,

$$z + 0' = 0' + z = z,\ z1' = 1'z = z.$$

4) Mọi số phức đều có số đối, nghĩa là với mọi $z = (a, b) \in \mathbb{C}$, tồn tại $-z = (-a, -b) \in \mathbb{Z}$,

$$z + (-z) = (-z) + z = 0'.$$

5) Mọi số phức khác $0'$ đều có số nghịch đảo, nghĩa là với mọi $z \in \mathbb{C}$, $z = (a, b) \neq 0'$, tồn tại $z^{-1} = (\dfrac{a}{a^2+b^2}, \dfrac{-b}{a^2+b^2}) \in \mathbb{C}$,

$$zz^{-1} = z^{-1}z = 1'.$$

6) Phép nhân có tính phân phối đối với phép cộng, nghĩa là với mọi $z, u, v \in \mathbb{C}$,

$$z(u+v) = zu + zv, \ (u+v)z = uz + vz.$$

7) Phép cộng có tính giản ước, nghĩa là với mọi $z, u, v \in \mathbb{C}$,

$$z + v = u + v \ \Rightarrow \ z = u.$$

8) Phép nhân có tính giản ước, nghĩa là với mọi $z, u, v \in \mathbb{C}$, $v \neq 0'$,

$$zv = uv \ \Rightarrow \ z = u.$$

Chứng minh: Kết quả dễ dàng có được từ định nghĩa.

5.3.1.4. Hệ quả: Tập hợp $\mathbb{C}$ với phép cộng và phép nhân trong (5.3.1.2) tạo thành một trường và $Char(\mathbb{C}) = 0$.

5.3.2. Dạng đại số của số phức:

5.3.2.1. Quan hệ giữa $\mathbb{R}$ và $\mathbb{C}$: Xét ánh xạ

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \ : \ a \mapsto f(a) = (a, 0).$$

Khi đó ánh xạ f có các tính chất sau:

1) f là một đơn ánh.

Thật vậy, với mọi $a, b \in \mathbb{R}$, $f(a) = f(b)$, ta có $(a, 0) = (b, 0)$, do đó $a = b$.

2) f bảo toàn các phép toán.
Thật vậy, với mọi $a, b \in \mathbb{R}$,

$f(a + b) = (a + b, 0) = (a, 0) + (b, 0) = f(a) + f(b)$.

$f(ab) = (ab, 0) = (ab - 0.0, a.0 + 0.b) = (a, 0)(b, 0) = f(a)f(b)$.

Các tính chất trên cho biết ánh xạ f là một đơn cấu trường và từ đó ta có thể đồng nhất mỗi số thực a với ảnh $f(a) = (a, 0)$, thay cho cách viết $z = (a, 0)$ ta viết $z = a$ và mỗi số thực a cũng là một số phức. Như vậy $0' = (0, 0) = 0$ và $1' = (1, 0)$.

Bằng cách đó $\mathbb{R}$ là một tập con của $\mathbb{C}$ và các phép toán của $\mathbb{C}$ thu hẹp trên $\mathbb{R}$ trùng với các phép toán trên $\mathbb{R}$. Ta còn nói $\mathbb{R}$ là một trường con của trường $\mathbb{C}$.

5.3.2.2. Định nghĩa: Đặt $i = (0,1) \in \mathbb{C}$. Ta có $i^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1$. Ta gọi i là đơn vị ảo.

Mỗi số phức $z = (a,b)$ có thể viết dưới dạng:

$$z = (a,b) = (a,0) + (0,1)(b,0) = a + ib,$$

trong đó $a, b \in \mathbb{R}$, gọi là dạng đại số của số phức. Ta gọi a là phần thực của z, ký hiệu $a =$Rez, còn b là phần ảo của z, ký hiệu Imz.

Số phức z mà Im$z = 0$ chính là một số thực. Số phức z có Re$z = 0$ được gọi là một số thuần ảo.

5.3.2.3. Chú ý: Trên mặt phẳng xét một hệ trục toạ độ Descartes vuông góc Oxy. Số phức $z = a + ib$ được biểu diễn trên mặt phẳng bởi điểm M có toạ độ (a,b) hoặc bởi vectơ $\overrightarrow{OM}$ đi từ điểm gốc toạ độ O tới điểm M, gọi là biểu diễn hình học của z. Cộng các số phức chính là cộng các vectơ tương ứng với chúng.

Mặt phẳng toạ độ được gọi là mặt phẳng phức. Các số thực được biểu diễn trên trục Ox, được gọi là trục thực. Các số thuần ảo được biểu diễn trên trục Oy, được gọi là trục ảo.

5.3.2.4. Định nghĩa: Số phức $\overline{z} = a - ib$ được gọi là liên hợp của số phức $z = a + ib$, trong đó a, b là các số thực.

Ta dễ dàng kiểm tra lại rằng:

$$\overline{z+u} = \overline{z} + \overline{u}, \;\; \overline{zu} = \overline{z}\,\overline{u}.$$

5.3.3. Dạng lượng giác của số phức:

5.3.3.1. Định nghĩa: Giả sử $z = a + ib \neq 0$ (tức là $a^2 + b^2 \neq 0$). Ta có

$$z = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

Đặt $r = \sqrt{a^2+b^2}$ và nhận xét rằng tồn tại góc φ xác định sai khác $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) sao cho

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \;\; \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Khi đó $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ và gọi là dạng lượng giác của số phức z.

5.3.3.2. Định nghĩa: Số thực không âm $r = \sqrt{a^2+b^2}$ được gọi là môđun của số phức $z = a + ib$, ký hiệu $r = |z|$, còn góc φ được gọi là argument của z, ký hiệu $\varphi =$arg(z). Argument của số phức $z = 0$ không được định nghĩa.

Thí dụ: Tìm dạng lượng giác của các số phức $z = i, \; z' = 1 + i, \; z'' = \sqrt{3} + i$.

$|z| = 1, \; \cos\varphi = 0, \; \sin\varphi = 1$ tức là $\varphi = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Do đó $z = (\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$.

$|z'| = \sqrt{2}, \cos\varphi' = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin\varphi' = \frac{1}{\sqrt{2}}$ tức là $\varphi' = \frac{\pi}{4} + 2k'\pi$.

Do đó $z' = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$.

$|z''| = 2,\ \cos\varphi'' = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\varphi'' = \frac{1}{2}$ tức là $\varphi'' = \frac{\pi}{6} + 2k''\pi$.

Do đó $z'' = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$.

5.3.3.3. Mệnh đề: 1) $|zu| = |z||u|$ với mọi $z, u \in \mathbb{C}$.

2) $\arg(zu) = \arg(z) + \arg(u)$, với mọi $z, u \in \mathbb{C}$ mà $z \neq 0$ và $u \neq 0$.

Chứng minh: 1) Với $z = a + ib$ và $u = c + id$, ta có

$$\begin{aligned}|zu| &= \sqrt{(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2} = \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2}\\ &= \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} = \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2} = |z||u|.\end{aligned}$$

2) Giả sử $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ u = |u|(\cos\psi + i\sin\psi)$ (với $z \neq 0,\ u \neq 0$). Khi đó

$$\begin{aligned}zu &= |z||u|(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) + (\sin\varphi\cos\psi + \sin\psi\cos\varphi))\\ &= |z||u|(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)).\end{aligned}$$

Như vậy $\arg(zu) = \arg(z) + \arg(u)$.

5.3.3.4. Hệ quả: Nếu $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ và n là một số tự nhiên thì ta có

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Đặc biệt, khi $|z| = 1$ ta có công thức Moivre:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Chứng minh: Kết quả có ngay từ mệnh đề trên.

5.3.3.5. Định nghĩa: Cho n là một số nguyên dương và z là một số phức. Số phức u được gọi là căn bậc n của z nếu $u^n = z$.

5.3.3.6. Mệnh đề: Nếu $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$ và n là một số nguyên dương thì có đúng n căn bậc n của số phức z:

$$u_k = \sqrt[n]{|z|}(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}),$$

trong đó $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Chứng minh: Với $u = |u|(\cos\theta + i\sin\theta)$,

$$
\begin{aligned}
u^n = z &\Leftrightarrow |u|^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} |u|^n &= |z|,\\ n\theta &= \varphi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}). \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} |u| &= \sqrt[n]{|z|} \text{ (căn số học)},\\ \theta &= \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n} \ (k \in \mathbb{Z}). \end{cases}
\end{aligned}
$$

Như vậy, có đúng n căn bậc n của mỗi số phức $z \neq 0$, ứng với các giá trị $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Các căn này lập nên n đỉnh của một đa giác đều n cạnh với tâm tại gốc toạ độ.

Thí dụ: 1) Tìm các căn bậc 3 của i.

Ta có $i = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$, nên có 3 căn bậc 3 của i là $u_k = \cos(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3})$ với $k = 0, 1, 2$. Cụ thể là

$$
\begin{aligned}
u_0 &= \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\\
u_1 &= \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\\
u_2 &= \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i.
\end{aligned}
$$

2) Tìm các căn bậc 4 của $1+i$.

Ta có $1 + i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$, nên có 4 căn bậc 4 của $1+i$ là:

$$
\begin{aligned}
u_0 &= \sqrt[8]{2}(\cos\frac{\pi}{16} + i\sin\frac{\pi}{16})\\
u_1 &= \sqrt[8]{2}(\cos\frac{9\pi}{16} + i\sin\frac{9\pi}{16})\\
u_2 &= \sqrt[8]{2}(\cos\frac{17\pi}{16} + i\sin\frac{17\pi}{16})\\
u_3 &= \sqrt[8]{2}(\cos\frac{25\pi}{16} + i\sin\frac{25\pi}{16}).
\end{aligned}
$$

BÀI TẬP CHƯƠNG V

1. Cho a là một số hữu tỉ và k là một số tự nhiên khác không. Chứng minh rằng có một số nguyên duy nhất m sao cho

$$mk \leq a < (m+1)k.$$

2. Cho dãy số (x_n) thoả mãn $x_1 = 1$ và $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2 + 2}{2x_n}$. Chứng tỏ rằng (x_n) là một dãy Cauchy hữu tỉ nhưng không hội tụ trong $\mathbb{Q}$.

3. Cho n là một số tự nhiên. Chứng minh rằng:

1) Tồn tại duy nhất số tự nhiên m_n sao cho:

$$\left(\frac{m_n}{2^n}\right)^2 \leq 2 < \left(\frac{1+m_n}{2^n}\right)^2.$$

2) Với $x_n = \dfrac{m_n}{2^n}$ và $y_n = \dfrac{1+m_n}{2^n}$, các dãy (x_n) và (y_n) là những dãy Cauchy không hội tụ trong $\mathbb{Q}$.

4. Cho hai số thực c và d sao cho $c < d$. Chứng tỏ rằng tồn tại số nguyên m và số nguyên dương n sao cho $c < \left(\dfrac{m}{n}\right)^3 < d$.

5. Xác định phần thực và phần ảo của các số phức sau:

1) $z = \dfrac{1+i}{1-i}$,

2) $u = \dfrac{-1+2i}{(1+i)(1-3i)}$,

3) $v = (1+2i)^6$.

6. Hãy biểu diễn các số phức sau dưới dạng lượng giác:

1) $z = -1 - i$,

2) $u = 1 + i\sqrt{3}$,

3) $v = -2 + 2i$.

7. Tính i^{77}, i^{99}, i^{-57}, i^n, $(1+i)^n$ với $n \in \mathbb{Z}$.

8. Chứng minh các đẳng thức:

$(1+i)^{8n} = 2^{4n}$,

$(1+i)^{4n} = (-1)^n 2^{2n}$, $(n \in \mathbb{Z})$.

9. Chứng minh rằng nếu $z + z^{-1} = 2\cos\varphi$ trong đó $\varphi \in \mathbb{R}$ thì $z^n + z^{-n} = 2\cos n\varphi$, với mọi $n \in \mathbb{N}$.

10. Tính:

1) $\dfrac{(1-i)^n}{(1-i\sqrt{3})^n}$,

2) $\dfrac{(1+i\sqrt{3})^n}{(1+i)^{n+1}}$.

11. 1) Tìm dạng lượng giác của số phức: $\dfrac{1+i\text{tg}\varphi}{1-i\text{tg}\varphi}$.

2) Trên mặt phẳng phức, tìm tập hợp các điểm tương ứng với

$$\{z = \frac{1+it}{1-it} \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

12. 1) Tìm các căn bậc ba của $1-i\sqrt{3}$, $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.

2) Tìm các căn bậc n của $1-i$ và $1+i\sqrt{3}$.

13. Gọi $\epsilon_0, \epsilon_1, \ldots, \epsilon_9$ là các căn bậc 10 của đơn vị, nghĩa là

$$\epsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{10} + i\sin\frac{2k\pi}{10}$$

và n là một số nguyên dương. Tính tổng

$$S = \epsilon_0^n + \epsilon_1^n + \cdots + \epsilon_9^n.$$

14. Giải phương trình:

$$(z+i)^7 + (z-i)^7 = 0.$$

TRẢ LỜI VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP

CHƯƠNG V

1. Tập hợp $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq \dfrac{a}{k}\}$ là một tập con khác rỗng của $\mathbb{Z}$ và bị chặn trên, nên A có số lớn nhất là m (m chính là phần nguyên của $\dfrac{a}{k}$). Do đó ta có:

$$m \leq \frac{a}{k} < m+1 \text{ hay } mk \leq a < (m+1)k.$$

2. Bằng quy nạp, ta có $x_n > 0$. Từ đó suy ra

$$x_{n+1} - 1 = \frac{(x_n-1)^2+1}{2x_n} > 0 \text{ hay } x_{n+1} > 1.$$

Ngoài ra, ta còn có

$$x_{n+1}^2 - 2 = \frac{(x_n^2-2)^2}{4x_n^2} > 0.$$

$$0 < x_{n+1}^2 - 2 = \frac{(x_n^2-2)^2}{4x_n^2} \leq \frac{(x_n^2-2)^2}{4}$$

Bằng quy nạp, ta có $0 < x_n^2 - 2 < 1$. Từ đó suy ra

$$|x_{n+1}^2 - 2| \leq \frac{(x_n^2-2)^2}{4} \leq \frac{|x_n^2-2|}{4} \leq \cdots \leq \frac{1}{4^n}.$$

Vì vậy ta có dãy (x_n^2) hội tụ đến 2 và là dãy Cauchy, do đó

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall m, n > n_0,\ |x_m - x_n| = \frac{|x_m^2 - x_n^2|}{x_m + x_n} < \frac{2\epsilon}{2}.$$

Từ đó suy ra dãy (x_n) là một dãy Cauchy. Dãy này không hội tụ trong $\mathbb{Q}$, vì nếu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = q \in \mathbb{Q}$ thì ta có $q^2 = 2$ và điều này dẫn tới vô lý.

3. **1)** Ký hiệu $M = \left\{z \in \mathbb{N} \mid \left(\dfrac{z}{2^n}\right)^2 \leq 2\right\}$. Ta có $M \neq \emptyset$ vì chẳng hạn $0 \in M$, M lại bị chặn trên vì chẳng hạn $z < 2^{n+1}$ với mọi $z \in M$, do đó M có số lớn nhất m_n và $1 + m_n \notin M$, nên ta có

$$\left(\frac{m_n}{2^n}\right)^2 \leq 2 < \left(\frac{1+m_n}{2^n}\right)^2. \tag{1}$$

Giả sử ta còn có m_n^* thoả mãn điều kiện (1). Khi đó các bất đẳng thức trên cho ta

$$m_n^* < 1 + m_n \text{ do đó } m_n^* \leq m_n$$

và

$$m_n < 1 + m_n^* \text{ do đó } m_n \leq m_n^*.$$

Từ đó suy ra $m_n = m_n^*$.

2) Theo cách xác định x_n, y_n ta có

$$x_n^2 = \left(\frac{m_n}{2^n}\right)^2 = \left(\frac{2m_n}{2^{n+1}}\right)^2 \le 2 < \left(\frac{2(1+m_n)}{2^{n+1}}\right)^2 = \left(\frac{1+m_n}{2^n}\right)^2 = y_n^2$$

và

$$x_{n+1}^2 = \left(\frac{m_{n+1}}{2^{n+1}}\right)^2 \le 2 < \left(\frac{1+m_{n+1}}{2^{n+1}}\right)^2 = y_{n+1}^2.$$

Từ đó suy ra

$$2m_n \le m_{n+1} < 1 + m_{n+1} \le 2(1+m_n).$$

Do đó ta có

$$x_n \le x_{n+1} < y_{n+1} \le y_n,$$

hay nói cách khác (x_n) là một dãy không giảm và (y_n) là một dãy không tăng. Vì vậy với mọi $m, n \in \mathbb{N}$, $m \ge n$ thì ta có $0 \le x_m - x_n < y_n - x_n = \dfrac{1}{2^n}$ và điều này cho biết (x_n) là một dãy Cauchy trên $\mathbb{Q}$. Tương tự ta cũng được (y_n) là một dãy Cauchy trên $\mathbb{Q}$. Vì $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$, cho nên nếu một trong các dãy (x_n) hoặc (y_n) hội tụ trong $\mathbb{Q}$ thì dãy kia cũng hội tụ trong $\mathbb{Q}$ và ta có $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, do đó $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} y_n^2$. Nhưng vì với mọi $n \in \mathbb{N}$ ta có $x_n^2 \le 2 < y_n^2$, cho nên ta sẽ phải có $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} y_n^2 = 2$. Đó là điều không xảy ra được vì trong $\mathbb{Q}$ không có số nào mà bình phương bằng 2. Vậy (x_n) và (y_n) là những dãy Cauchy mà không hội tụ trong $\mathbb{Q}$.

4. – Trường hợp $0 \le c < d$: Theo tính chất Archimède, tồn tại số tự nhiên p sao cho $p > d$ và hiển nhiên $p^3 > d$. Cũng theo tính chất archimède, tồn tại số tự nhiên n sao cho $n > \dfrac{3p^3}{d-c}$. Xét tập hợp $M = \left\{k \in \mathbb{N}^* \;\middle|\; \left(\dfrac{kp}{n}\right)^3 > c\right\}$. Do $M \ne \emptyset$ cho nên M có số nhỏ nhất là k_0 với $k_0 \le n$ và ta có

$$0 \le \left(\frac{(k_0-1)p}{n}\right)^3 \le c.$$

Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned}\left(\frac{k_0p}{n}\right)^3 - \left(\frac{(k_0-1)p}{n}\right)^3 &= \frac{p}{n}\left[\frac{k^2p^2}{n^2} + \frac{k_0(k_0-1)p^2}{n^2} + \frac{(k_0-1)^2p^2}{n^2}\right] \\ &\le \frac{p}{n}3p^2 = \frac{3p^3}{n} < d - c.\end{aligned}$$

Do đó $c < \left(\dfrac{k_0p}{n}\right)^3 < c + d - c = d$.

– Trường hợp $c < 0 < d$: Chọn $m = 0$ và $n = 1$, ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

– Trường hợp $c < d \le 0$: Ta có $0 \le -d < -c$, theo trên $\exists m, n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$ sao cho $-d < \left(\dfrac{m}{n}\right)^3 < -c$. Khi đó $c < \left(\dfrac{-m}{n}\right)^3 < d$.

5. **1)** $z = \dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{(1+i)^2}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{1+2i+i^2}{2} = i.$

Do đó Re$z = 0$ và im$z = 1$.

2) $u = \dfrac{-1+2i}{(1+i)(1-3i)} = \dfrac{-1+2i}{1-3i+i-3i^2} = \dfrac{-1+2i}{4-2i} = \dfrac{(-1+2i)(4+2i)}{(4-2i)(4+2i)} = \dfrac{-4-2i+8i+4i^2}{16-4i^2} = \dfrac{-4+3i}{10}.$

Do đó Re$u = -\dfrac{2}{5}$ và im$u = \dfrac{3}{10}$.

3) $v = (1+2i)^6 = ((1+2i)^2)^3 = (1+4i+4i^2)^3 = (-3+4i)^3 = -27+108i-144i^2+64i^3 = 117+44i.$

Do đó Re$v = 117$ và im$v = 44$.

6. **1)** $z = -1-i = \sqrt{2}(-\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}i) = \sqrt{2}(\cos\dfrac{5\pi}{4} + i\sin\dfrac{5\pi}{4}).$

2) $u = 1+i\sqrt{3} = 2(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i) = 2(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}).$

3) $v = -2+2i = 2\sqrt{2}(-\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i) = 2\sqrt{2}(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}).$

7. $i^{77} = (i^2)^{38}i = (-1)^{38}i = i.$

$i^{99} = (i^2)^{49}i = (-1)^{49}i = -i.$

$i^{-57} = \dfrac{1}{(i^2)^{28}i} = \dfrac{1}{(-1)^{28}i} = \dfrac{1}{i} = -i.$

$$i^n = \begin{cases} (i^2)^{2k} & \text{nếu } n = 4k, \\ (i^2)^{2k}i & \text{nếu } n = 4k+1, \\ (i^2)^{2k+1} & \text{nếu } n = 4k+2, \\ (i^2)^{2k+1}i & \text{nếu } n = 4k+3. \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } n = 4k, \\ i & \text{nếu } n = 4k+1, \\ -1 & \text{nếu } n = 4k+2, \\ -i & \text{nếu } n = 4k+3. \end{cases}$$

$$(1+i)^n = \begin{cases} ((1+i)^2)^{4k} & \text{nếu } n = 8k, \\ ((1+i)^2)^{4k}(1+i) & \text{nếu } n = 8k+1, \\ ((1+i)^2)^{4k+1} & \text{nếu } n = 8k+2, \\ ((1+i)^2)^{4k+1}(1+i) & \text{nếu } n = 8k+3, \\ ((1+i)^2)^{4k+2} & \text{nếu } n = 8k+4, \\ ((1+i)^2)^{4k+2}(1+i) & \text{nếu } n = 8k+5, \\ ((1+i)^2)^{4k+3} & \text{nếu } n = 8k+6, \\ ((1+i)^2)^{4k+3}(1+i) & \text{nếu } n = 8k+7. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2^{4k} & \text{nếu } n = 8k, \\ 2^{4k}(1+i) & \text{nếu } n = 8k+1, \\ 2^{4k+1}i & \text{nếu } n = 8k+2, \\ 2^{4k+1}(-1+i) & \text{nếu } n = 8k+3, \\ -2^{4k+2} & \text{nếu } n = 8k+4, \\ -2^{4k+2}(1+i) & \text{nếu } n = 8k+5, \\ -2^{4k+3}i & \text{nếu } n = 8k+6, \\ 2^{4k+3}(1-i) & \text{nếu } n = 8k+7. \end{cases}$$

8. $(1+i)8n = ((1+i)^2)^{4n} = (2i)^{4n} = 2^{4n}((i)^2)^{2n} = 2^{4n}(-1)^{2n} = 2^{4n}$.

$(1+i)^{4n} = ((1+i)^2)^{2n} = (2i)^{2n} = 2^{2n}(i^2)^n = (-1)^n 2^{2n}$.

9. $z + z^{-1} = 2\cos\varphi \Leftrightarrow z^2 - 2z\cos\varphi + 1 = 0$ $(\Delta' = \cos^2\varphi - 1 = (i\sin\varphi)^2)$.

Do đó $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$ hoặc $z = \cos\varphi - -i\sin\varphi$. Từ đó ta được:

$$\begin{cases} z & = \cos\varphi + i\sin\varphi \\ z^{-1} & = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} z & = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) \\ z^{-1} & = \cos\varphi + i\sin\varphi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z^n & = \cos n\varphi + i\sin n\varphi \\ z^{-n} & = \cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi) \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} z^n & = \cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi) \\ z^{-n} & = \cos n\varphi + i\sin n\varphi \end{cases}$$

$\Rightarrow z^n + z^{-n} = 2\cos n\varphi$.

10. **1)** $1 - i = \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i) = \sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})$.

$1 - i\sqrt{3} = 2(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = 2(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3})$.

$$\begin{aligned} \frac{(1-i)^n}{(1-i\sqrt{3})^n} &= \Big(\frac{1-i}{1-i\sqrt{3}}\Big)^n = \frac{\sqrt{2}^n}{2^n}\Big(\frac{\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}}{\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}}\Big)^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}^n}(\cos(\frac{7\pi}{4} - \frac{5\pi}{3}) + i\sin(\frac{7\pi}{4} - \frac{5\pi}{3})) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}^n}(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

2) $1 + i\sqrt{3} = 2(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$.

$(1 + i\sqrt{3})^n = 2^n(\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3})$.

$1 + i = \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i) = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$.

$$(1+i)^{n+1} = (\sqrt{2})^{n+1}(\cos\frac{(n+1)\pi}{4} + i\sin\frac{(n+1)\pi}{4}).$$

$$\begin{aligned}\frac{(1+i\sqrt{3})^n}{(1+i)^{n+1}} &= \frac{2^n}{(\sqrt{2})^{n+1}}\frac{\cos\dfrac{n\pi}{3} + i\sin\dfrac{n\pi}{3}}{\cos\dfrac{(n+1)\pi}{4} + i\sin\dfrac{(n+1)\pi}{4}}\\ &= (\sqrt{2})^{n-1}(\cos(\frac{n\pi}{3} - \frac{(n+1)\pi}{4}) + i\sin(\frac{n\pi}{3} - \frac{(n+1)\pi}{4}))\\ &= (\sqrt{2})^{n-1}(\cos\frac{(n-3)\pi}{12} + i\sin\frac{(n-3)\pi}{12}).\end{aligned}$$

11. **1)** $\dfrac{1+i\mathrm{tg}\varphi}{1-i\mathrm{tg}\varphi} = \dfrac{1+i\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}{1-i\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}} = \dfrac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)}$

$$= \cos(\varphi-(-\varphi)) + i\sin(\varphi-(-\varphi)) = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi.$$

2) $\{z = \dfrac{1+it}{1-it} \mid t\in\mathbb{R}\} = \{z = \dfrac{1+i\mathrm{tg}\varphi}{1-i\mathrm{tg}\varphi} \mid -\dfrac{\pi}{2} < \varphi < \dfrac{\pi}{2}\}$

$$= \{z = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi \mid -\pi < 2\varphi < \pi\}.$$

Vậy tập hợp cần tìm là đường tròn tâm ở gốc toạ độ O, bán kính bằng 1 và không kể điểm $(-1,0)$.

12. **1)** $z = 1 - i\sqrt{3} = 2(\cos\dfrac{5\pi}{3} + i\sin\dfrac{5\pi}{3})$. Do đó các căn bậc 3 của z là:

$$u_k = \sqrt[3]{2}(\cos\frac{\frac{5\pi}{3}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{5\pi}{3}+2k\pi}{3})\ \ (k=0,1,2).$$

$$u_0 = \sqrt[3]{2}(\cos\frac{5\pi}{9} + i\sin\frac{5\pi}{9}),$$

$$u_1 = \sqrt[3]{2}(\cos\frac{11\pi}{9} + i\sin\frac{11\pi}{9}),$$

$$u_2 = \sqrt[3]{2}(\cos\frac{17\pi}{9} + i\sin\frac{17\pi}{9}).$$

$z' = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i = \cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}$. Do đó các căn bậc 3 của z là:

$$u'_k = \cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k'\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k'\pi}{3}\ \ (k=0,1,2).$$

$$u'_0 = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}i.$$

$u_1' = \cos\frac{9\pi}{12} + i\sin\frac{9\pi}{12} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i,$

$u_2' = \cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{4} - \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}i.$

2) $z = 1 - i = \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i) = \sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})$. Do đó các căn bậc n của z là:

$$u_k = \sqrt[2n]{2}(\cos\frac{\frac{7\pi}{4}+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\frac{7\pi}{4}+2k\pi}{n}) \ \ (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

$z' = 1 + i\sqrt{3} = 2(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$. Do đó các căn bậc n của z' là:

$$u_k' = \sqrt[n]{2}(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{n}) \ \ (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

13. $1 = \cos 0 + i\sin 0$. Do đó 1 có n căn bậc n là:

$$\epsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{10} + i\sin\frac{2k\pi}{10} \ \ (k = 0, 1, \dots, 9).$$

+ n là bội của 10: Khi đó $\epsilon_k^n = \cos\frac{2kn\pi}{10} + i\sin\frac{2kn\pi}{10} = 1$ $(k = 0, 1, \dots, 9)$. Vì vậy

$$S = \epsilon_0^n + \epsilon_1^n + \cdots + \epsilon_9^n = 10.$$

+ n không là bội của 10: Khi đó

$$\epsilon_k = (\cos\frac{2\pi}{10} + i\sin\frac{2\pi}{10})^k = \epsilon_1^k \ (k = 0, 1, \dots, 9),$$

ở đây $\epsilon_1^n = \cos\frac{2n\pi}{10} + i\sin\frac{2n\pi}{10} \neq 1$. Vì vậy

$$\begin{aligned} S &= (\epsilon_1^0)^n + (\epsilon_1^1)^n + (\epsilon_1^2)^n + \cdots + (\epsilon_1^9)^n = 1 + \epsilon_1^n + (\epsilon_1^n)^2 + \cdots + (\epsilon_1^n)^9 \\ &= \frac{1-(\epsilon_1^n)^{10}}{1-\epsilon_1^n} = \frac{1-(\epsilon_1^{10})^n}{1-\epsilon_1^n} = \frac{1-1}{1-\epsilon_1^n} \\ &= 0. \end{aligned}$$

14. $(z+i)^7 + (z-i)^7 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^7 = -1$. Đặt $u = \frac{z+i}{z-i}$, phương trình trở thành:

$$u^7 = -1 = \cos\pi + i\sin\pi.$$

Do đó nó có các nghiệm là các căn bậc 7 của -1:

$$u_k = \cos\frac{\pi + 2k\pi}{7} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{7} \quad (k = 0, 1, \dots, 6).$$

Đặt $\varphi_k = \dfrac{\pi + 2k\pi}{7}$. Ta có

$$\begin{aligned} u_k = \frac{z+i}{z-i} &\Leftrightarrow u_k z - u_k i = z + i \Leftrightarrow z(u_k - 1) = i(u_k + 1) \\ &\Leftrightarrow z = \frac{i(u_k+1)}{u_k - 1} = \frac{i(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k + 1)}{\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k - 1} \end{aligned}$$

CHƯƠNG VI:
ĐA THỨC

6.1. ĐA THỨC VÀ HÀM ĐA THỨC.

6.1.1. Định nghĩa: Cho $\mathbb{F}$ là một trường. Biểu thức hình thức

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n,$$

trong đó $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$, được gọi là một đa thức biến x lấy hệ số trên $\mathbb{F}$. Ta có thể viết $f(x)$ dưới dạng $f(x) = a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0$.

Nếu $a_n \neq 0$ thì ta nói $f(x)$ có bậc n, ký hiệu $\deg(f(x)) = n$; còn a_n được gọi là hệ số dẫn đầu của $f(x)$. Đặc biệt, nếu $a_n = 1$ thì ta nói $f(x)$ là một đa thức đơn hệ.

Nếu $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$ thì $f(x)$ được gọi là đa thức không, ký hiệu 0; ta quy ước đa thức 0 có bậc bằng $-\infty$.

Tập hợp các đa thức biến x lấy hệ số trên $\mathbb{F}$ được ký hiệu là $\mathbb{F}[x]$. Ta trang bị cho tập hợp này hai phép toán cộng và nhân như sau:

$$\forall f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n,\ g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m \in \mathbb{F}[x],$$

(không mất tính tổng quát, có thể xem $n \leq m$)

$$f(x)+g(x) = (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\cdots+(a_n+b_n)x^n+b_{n+1}x^{n+1}+\cdots+b_mx_m,$$

$$f(x)g(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_{n+m}x^{n+m}, \text{ trong đó } c_k = \sum_{i+j=k} a_ib_j.$$

6.1.2. Mệnh đề: $\mathbb{F}[x]$ cùng với hai phép toán nói trên tạo thành một vành giao hoán, có đơn vị, không có ước của không với đặc số $Char(\mathbb{F}[x]) = Char(\mathbb{F})$.

Chứng minh: Nhận xét rằng đối với các đa thức $f(x)$ và $g(x)$, ta có

$$deg(f(x)g(x)) = deg(f(x)) + deg(g(x)).$$

Tính chất này dẫn tới sự kiện $\mathbb{F}[x]$ không có ước của không. Các khẳng định còn lại của mệnh đề đều dễ kiểm tra.

Vành $\mathbb{F}[x]$ được gọi là vành đa thức (biến x). Tuy nhiên, vành đa thức không nhất thiết được xác định trên trường $\mathbb{F}$ mà có thể trên vành giao hoán có đơn vị bất kỳ R và khi đó $R[x]$ có thể có ước của không.

6.1.3. Định nghĩa: Ánh xạ $\varphi : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}$ được gọi là một hàm đa thức nếu tồn tại đa thức $f(x) = a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n \in \mathbb{F}[x]$ sao cho $\varphi(c) = a_0+a_1c+\cdots+a_nc^n$. Khi đó ta có thể viết $f(c)$ thay cho $\varphi(c)$.

Theo định nghĩa, mỗi đa thức xác định một hàm đa thức và mỗi hàm đa thức được xác định bởi ít nhất một đa thức.

Chẳng hạn, với số nguyên tố p, hai đa thức $x^p - x$ và 0 trong $\mathbb{Z}_p[x]$ xác định cùng một hàm đa thức - hàm đồng nhất không. Thật vậy, theo định lý Fermat, $m^p \equiv m \pmod{p}$, với mọi $m \in \mathbb{Z}$ (có thể chứng minh bằng quy nạp theo $m \in \mathbb{N}$ với lưu ý rằng hệ số tổ hợp $C_p^k \equiv 0 \pmod{p}$, $1 \leq k \leq p-1$ và khi $m < 0$ kết quả có từ $(-m)^p \equiv (-m) \pmod{p}$), cho nên $c^p = c$ với mọi $c \in \mathbb{Z}_p$.

6.1.4. Mệnh đề: Cho $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ và $c \in \mathbb{F}$. Khi đó $f(x)$ chia hết cho $x - c$ khi và chỉ khi $f(c) = 0$.

Ở đây câu nói "$f(x)$ chia hết cho $x - c$" có nghĩa $f(x) = (x-c)g(x)$ với $g(x) \in \mathbb{F}[x]$, ký hiệu $f(x) \vdots\, x - c$.

Chứng minh: Giả sử $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$. Ta có

$$\begin{aligned} f(x) - f(c) &= \sum_{k=0}^{n} a_kx^k - \sum_{k=0}^{n} a_kc^k = \sum_{k=0}^{n} a_k(x^k - c^k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k(x-c)(x^{k-1} + cx^{k-2} + \cdots + c^{k-1}). \end{aligned}$$

Do đó nếu $f(c) = 0$ thì $f(x) = (x-c)g(x)$, trong đó

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x^{k-1} + cx^{k-2} + \cdots + c^{k-1}) \in \mathbb{F}[x].$$

Đảo lại, nếu $f(x) = (x-c)g(x)$ với $g(x) \in \mathbb{F}[x]$ thì thay x bởi c ta được $f(c) = 0$.

6.1.5. Định nghĩa: Phần tử $c \in \mathbb{F}$ được gọi là một nghiệm của đa thức $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ nếu $f(c) = 0$ và nó được gọi là một nghiệm bội k (với k là một số nguyên dương) của $f(x)$ nếu $f(x)$ chia hết cho $(x-c)^k$, nhưng không chia hết cho $(x-c)^{k+1}$ trong $\mathbb{F}[x]$.

6.1.6. Hệ quả: Nếu đa thức $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ có bậc n thì $f(x)$ có nhiều nhất n nghiệm trong $\mathbb{F}$.

Lưu ý rằng phát biểu trên không còn đúng nếu $\mathbb{F}$ là một vành có ước của không.

6.1.7. Mệnh đề: Nếu trường $\mathbb{F}$ là vô hạn thì hai đa thức khác nhau trong $\mathbb{F}[x]$ xác định hai hàm đa thức khác nhau trên $\mathbb{F}$.

Chứng minh: Giả sử $f(x),\ g(x) \in \mathbb{F}[x]$ và $f(x) \neq g(x)$. Nếu $f(x)$ và $g(x)$ xác định cùng một hàm đa thức thì $f(c) = g(c)$ với mọi $c \in \mathbb{F}$. Mặt khác, $r(x) = f(x) - g(x)$ là đa thức khác 0 trong $\mathbb{F}[x]$ nên có hữu hạn nghiệm trong $\mathbb{F}$. Điều này mâu thuẫn với $r(x)$ có vô số nghiệm trong $\mathbb{F}$, do $\mathbb{F}$ là vô hạn.

Vậy, nếu $\mathbb{F}$ là vô hạn thì các khái niệm đa thức và hàm đa thức là tương đương (tho thuật ngữ chuyên môn, vành các đa thức đẳng cấu với vành các hàm đa thức). Khi đó ta sẽ được phép quên đi sự khác nhau giữa các đa thức và các hàm đa thức.

Thí dụ: 1) Cho $f(x) = \overline{1} + \overline{4}x + \overline{2}x^2,\ g(x) = \overline{2} + x + \overline{3}x^2 \in \mathbb{Z}_5[x]$. Ta có:

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \overline{1}.\overline{2} + (\overline{1} + \overline{4}.\overline{2})x + (\overline{1}.\overline{3} + \overline{4}.\overline{1} + \overline{2}.\overline{2})x^2 + (\overline{4}.\overline{3} + \overline{2}.\overline{1})x^3 + \overline{2}.\overline{3}x^4 \\ &= \overline{2} + \overline{4}x + x^2 + \overline{4}x^3 + x^4. \end{aligned}$$

2) Cho $f(x) = x + \overline{4}x^2 + \overline{2}x^3,\ g(x) = \overline{2} + \overline{3}x + \overline{3}x^2 \in \mathbb{Z}_6[x]$. Ta có:

$f(x)g(x) = \overline{2}x + \overline{5}x^2 + x^3$.

Vành $\mathbb{Z}_6[x]$ có ước của không; chẳng hạn, $\overline{2}x$ và $\overline{3} + \overline{3}x$ là hai đa thức khác không nhưng $\overline{2}.(\overline{3} + \overline{3}x) = \overline{0}$.

3) Trong vành $\mathbb{Q}[x]$, đa thức $f(x) = (x+1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$ chia hết cho $2x+1,\ x+1,\ x$. Thật vậy,

$$f(-\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2}+1)^{2n} - (-\frac{1}{2})^{2n} - 2(-\frac{1}{2}) - 1 = 0 \Rightarrow f(x) \vdots\ x + \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) \vdots\ 2x+1,$$

$$f(-1) = (-1+1)^{2n} - (-1)^{2n} - 2(-1) - 1 = 0 \Rightarrow f(x) \vdots\ x+1,$$

$$f(0) = (0+1)^{2n} - 0^{2n} - 2.0 - 1 = 0 \Rightarrow f(x) \vdots\ x.$$

4) Cho đa thức bậc hai $f(x) = \overline{14} + x^2 \in \mathbb{Z}_{15}[x]$. Khi đó có 4 nghiệm trong $\mathbb{Z}_{15}$ là $\overline{1},\ \overline{14} = -\overline{1},\ \overline{4},\ \overline{11} = -\overline{4}$ (ngoài ra không còn nghiệm nào khác).

Đa thức bậc hai $g(x) = \overline{20} + x^2 \in \mathbb{Z}_{21}[x]$ có đúng 4 nghiệm trong $\mathbb{Z}_{21}$ là $\overline{1},\ \overline{20},\ \overline{8},\ \overline{13}$.

6.2. THUẬT TOÁN CHIA.

6.2.1. Định lý (Phép chia Euclid với dư): Cho $f(x),\ g(x) \in \mathbb{F}[x]$ với $g(x) \neq 0$. Khi đó tồn tại duy nhất các đa thức $q(x),\ r(x) \in \mathbb{F}[x]$ sao cho

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x),$$

trong đó $\deg(r(x)) < deg(g(x))$. Ta nói $f(x)$ là đa thức bị chia, $g(x)$ là đa thức chia, $q(x)$ là đa thức thương và $r(x)$ là đa thức dư.

Chứng minh: 1) Tính duy nhất: Giả sử

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x),$$

trong đó $q(x), q_1(x), r(x), r_1(x) \in \mathbb{F}[x]$ với $deg(r(x)),\ deg(r_1(x)) < deg(g(x))$, từ đó suy ra $deg(r(x) - r_1(x)) < deg(g(x))$. Khi đó $r(x) - r_1(x) = g(x)[q_1(x) - q(x)]$. Nếu $r(x) \neq r_1(x)$ thì $r(x) - r_1(x)$ và $q_1(x) - q(x)$ là hai đa thức khác 0 trong $\mathbb{F}[x]$ và $deg(r(x) - r_1(x)) = deg(g(x)) + deg(q_1(x) - q(x)) \geq deg(g(x))$. Điều vô lý này cho biết $r(x) = r_1(x)$ và khi đó $q(x) = q_1(x)$.

Sự tồn tại: Nếu $deg(f(x)) < deg(g(x))$ thì $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, với $q(x) = 0$ và $r(x) = f(x)$.

Nếu $deg(f(x)) \geq deg(g(x))$, với $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n,\ g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$ $(m \leq n)$, ta lấy $h(x) = \dfrac{a_n}{b_m}x^{n-m}$ và $f_1(x) = f(x) - g(x)h(x)$

thì ta có $f(x) = g(x)h(x) + f_1(x)$, với $deg(f_1(x)) < deg(f(x))$. Tương tự, ta có biểu diễn $f_1(x) = g(x)h_1(x) + f_2(x)$, với $deg(f_2(x)) < deg(f_1(x))$. Tiếp tục như vậy ta được dãy $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$ sao cho $deg(f_k(x)) < deg(g(x))$. Khi đó $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ với $q(x) = h(x) + h_1(x) + \cdots + h_{k-1}(x)$ và $r(x) = f_k(x)$.

Lưu ý rằng nếu $r(x) = 0$ thì $f(x) = g(x)q(x)$ và ta nói $f(x)$ chia hết cho $g(x)$ hay $g(x)$ là một ước của $f(x)$, ký hiệu $f(x) \vdots g(x)$.

6.2.2. Hệ quả: Cho $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ và $c \in \mathbb{F}$. Khi đó dư của phép chia $f(x)$ cho $x - c$ là $f(c)$.

Chứng minh: Ta có $f(x) = (x-c)q(x) + r(x)$, với $deg(r(x)) < deg(x-c) = 1$, cho nên $r(x) = r \in \mathbb{F}$. Thay $x = c$, ta có $r = f(c)$.

6.2.3. Định nghĩa: Cho $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$ là hai đa thức không đồng thời bằng đa thức 0. Đa thức $d(x)$ được gọi là ước chung lớn nhất của $f(x)$ và $g(x)$ nếu nó là một ước chung của $f(x)$ và $g(x)$ và mọi ước chung của $f(x)$ và $g(x)$ đều là ước của $d(x)$, ký hiệu $d(x) = \text{UCLN}(f(x), g(x))$ hay đơn giản là $d(x) = (f(x), g(x))$. Khi $d(x)$ là hằng số khác không thì $f(x)$ và $g(x)$ được gọi là nguyên tố cùng nhau, ký hiệu $(f(x), g(x)) = 1$.

Như vậy, $f(x)$ và $g(x)$ nguyên tố cùng nhau khi và chỉ khi $f(x)$ và $g(x)$ không cùng chia hết cho đa thức nào có bậc ≥ 1.

Nếu $d_1(x)$ và $d_2(x)$ là hai ước chung lớn nhất của $f(x)$ và $g(x)$ trong $\mathbb{F}[x]$ thì tồn tại $u(x), v(x) \in \mathbb{F}[x]$ sao cho $d_1(x) = u(x)d_2(x)$, $d_2(x) = v(x)d_1(x)$. Khi đó $d_1(x) = u(x)v(x)d_1(x)$ hay $u(x)v(x) = 1$. Do đó $u(x) = c$, $v(x) = d \in \mathbb{F}$ và $cd = 1$. Từ đó suy ra $d_1(x) = cd_2(x)$, với $c \in \mathbb{F}$, $c \neq 0$.

Từ định nghĩa về ước chung lớn nhất của hai đa thức, ta dễ dàng suy ra mệnh đề dưới đây.

6.2.4. Mệnh đề: Cho các đa thức $f(x)$, $g(x)$, $q(x)$, $r(x) \in \mathbb{F}[x]$ thoả mãn $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, với $f(x)$ và $g(x)$ không đồng thời bằng đa thức 0. Khi đó $\text{UCLN}(f(x), g(x)) = \text{UCLN}(g(x), r(x))$.

6.2.5. Chú ý (Thuật toán Euclid tìm UCLN): Cho hai đa thức $f(x)$, $g(x) \in \mathbb{F}[x]$, với $g(x) \neq 0$. Theo định lý về phép chia với dư, ta có $f(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x)$, với $deg(r_1(x)) < deg(g(x))$. Nếu $r_1(x) = 0$ thì $\text{UCLN}(f(x), g(x)) = g(x)$. Nếu $r_1(x) \neq 0$, lại sử dụng phép chia với dư, ta được dãy:

$$f(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x),\ 0 \neq deg(r_1(x)) < deg(g(x)),$$
$$g(x) = r_1(x)q_2(x) + r_2(x),\ 0 \neq deg(r_2(x)) < deg(r_1(x)),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$r_{k-2}(x) = r_{k-1}(x)q_k(x) + r_k(x),\ 0 \neq deg(r_k(x)) < deg(r_{k-1}(x)),$$
$$r_{k-1}(x) = r_k(x)q_{k+1}(x) + c,\ c \in \mathbb{F}.$$

Theo (6.2.4), UCLN$(f(x), g(x))$ =UCLN$(g(x), r_1(x))$ =UCLN$(r_1(x), r_2(x))$ $= \cdots$ =UCLN$(r_{k-1}(x), r_k(x))$ =UCLN$(r_k(x), c)$.

Nếu $c = 0$ thì UCLN$(f(x), g(x)) = r_k(x)$.

Nếu $c \neq 0$ thì $f(x)$ và $g(x)$ nguyên tố cùng nhau.

6.2.6. Mệnh đề: Hai đa thức $f(x),\ g(x) \in \mathbb{F}[x]$ nguyên tố cùng nhau khi và chỉ khi tồn tại $r(x),\ s(x) \in \mathbb{F}[x]$ sao cho $f(x)r(x) + g(x)s(x) = 1$.

Chứng minh:

Điều kiện đủ: Nếu tồn tại $r(x),\ s(x) \in \mathbb{F}[x]$ sao cho $f(x)r(x) + g(x)s(x) = 1$ thì từ $d(x)$ là ước chung bất kỳ của $f(x)$ và $g(x)$ ta suy ra $d(x)$ là ước của 1, tức là $d(x)$ là đa thức bậc 0. Như vậy, $f(x)$ và $g(x)$ không có ước chung nào là đa thức có bậc ≥ 1, do đó $f(x)$ và $g(x)$ nguyên tố cùng nhau.

Điều kiện cần: Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ nguyên tố cùng nhau. Ta chỉ cần xét trường hợp cả hai đa thức đều khác không. Thực hiện thuật toán Euclid ở (6.2.5) ta được $c \neq 0$.

Ta nhận thấy c tính được theo $r_{k-1}(x), r_k(x)$, rồi $r_k(x)$ tính được theo $r_{k-1}(x)$ và $r_{k-2}(x), \ldots,\ r_1(x)$ tính được $g(x)$ và $f(x)$. Do đó c tính được theo $f(x)$ và $g(x)$ dưới dạng $c = f(x)\widetilde{r}(x) + g(x)\widetilde{s}(x)$. Vì $c \neq 0$ nên ta có $f(x)r(x) + g(x)s(x) = 1$, với $r(x) = c^{-1}\widetilde{r}(x),\ s(x) = c^{-1}\widetilde{s}(x)$.

Thí dụ: 1) Hãy xác định số nguyên p để dư của phép chia đa thức $x^3 + \overline{p}x + \overline{5}$ cho $x^2 + \overline{5}x + \overline{6}$ trong $\mathbb{Z}_7[x]$ bằng $\overline{0}$.

Thực hiện phép chia Euclid trong $\mathbb{Z}_7[x]$ đa thức $x^3 + \overline{p}x + \overline{5}$ cho $x^2 + \overline{5}x + \overline{6}$, ta nhận được thương là đa thức $x + \overline{2}$ và dư là đa thức $\overline{(p-6-3)}x$. Để cho $\overline{(p-6-3)} = \overline{0}$ ta phải có $p \equiv 2 \pmod 7$, hay p có dạng $7k + 2$ với $k \in \mathbb{Z}$.

2) Tìm ước chung lớn nhất của $f(x) = x^5 + x^3 + x^2 + x + 1$ và $g(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$ trong $\mathbb{Q}[x]$.

$f(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x),\ q_1(x) = x^2 - 2x + 4,\ r_1(x) = -6x^2 - x - 3,$

$g(x) = r_1(x)q_2(x) + r_2(x),\ q_2(x) = -\dfrac{1}{6}x - \dfrac{11}{36},\ r_2(x) = \dfrac{7}{36}x + \dfrac{1}{12},$

$r_1(x) = r_2(x)q_3(x)r_3(x),\ q_3(x) = -\dfrac{216}{7}x + \dfrac{396}{49},\ r_3(x) = -\dfrac{180}{49}.$

Vậy ước chung lớn nhất của $f(x) = x^5 + x^3 + x^2 + x + 1$ và $g(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$ là 1 hay $(f(x), g(x)) = 1$.

6.3. ĐA THỨC BẤT KHẢ QUY.

6.3.1. Định nghĩa: Đa thức $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ được gọi là bất khả quy trên $\mathbb{F}$ hay trong $\mathbb{F}[x]$ nếu nó có bậc dương và nếu nó không thừa nhận một phân tích nào có dạng $f(x) = g(x)h(x)$, trong đó các đa thức $g(x), h(x) \in \mathbb{F}[x]$ đều có bậc nhỏ hơn $deg(f(x))$. Một đa thức được gọi là khả quy trên $\mathbb{F}$ nếu nó không bất khả quy trên $\mathbb{F}$.

Nói cách khác, đa thức $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ là bất khả quy trên $\mathbb{F}$ nếu nó có bậc dương và chỉ chia hết cho các đa thức bậc dương có dạng $cf(x) \in \mathbb{F}[x]$, trong đó $c \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$.

Thí dụ: 1) Mọi đa thức bậc nhất trong $\mathbb{F}[x]$ đều bất khả quy trên $\mathbb{F}$.

2) Mọi đa thức bất khả quy trên $\mathbb{F}$ bậc lớn hơn 1 đều vô nghiệm trong $\mathbb{F}$.

Điều ngược lại không đúng. Chẳng hạn, $f(x) = (x^2 + x + 1)(x^2 + 2x + 3) \in \mathbb{R}[x]$ vô nghiệm trong $\mathbb{R}$ nhưng lại khả quy trên $\mathbb{R}$.

3) Cho $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ có $deg(f(x)) = 2$ hoặc 3. Khi đó nếu $f(x)$ khả quy thì trong $\mathbb{F}[x]$ có phân tích $f(x) = g(x)h(x)$ và $g(x)$ hoặc $h(x)$ là bậc nhất, do đó nó có nghiệm. Vì vậy, trong trường hợp này, $f(x)$ là bất khả quy trên $\mathbb{F}$ khi và chỉ khi $f(x)$ vô nghiệm trong $\mathbb{F}$.

Chúng ta thừa nhận định lý sau đây, nói về tính đóng đại số của trường số phức $\mathbb{C}$.

6.3.2. Định lý (Định lý cơ bản của Đại số học): Mọi đa thức bậc dương với hệ số phức đều có nghiệm phức.

Nói cách khác, một đa thức hệ số phức là bất khả quy trên $\mathbb{C}$ khi và chỉ khi nó là một đa thức bậc nhất.

Như vậy, nếu $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ có bậc n thì nó thừa nhận phân tích

$$f(x) = a_n(x - z_1) \dots (x - z_n),$$

trong đó $a_n \neq 0$ là hệ số dẫn đầu của $f(x)$ và $z_1, \dots, z_n$ là các số phức nào đó.

Cho tới nay, mọi chứng minh đã biết của định lý này đều mang bản sắc Tôpô, Hình học hoặc Giải tích. Chưa có một chứng minh thuần tuý đại số nào cho định lý này.

Nhắc lại rằng tam thức bậc hai hệ số thực $ax^2 + bx + c$ không có nghiệm thực khi và chỉ khi biệt thức của nó $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

Một ứng dụng của định lý cơ bản của đại số học là khẳng định sau đây.

6.3.3. Định lý: Một đa thức hệ số thực là bất khả quy trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi nó hoặc là một đa thức bậc nhất hoặc là một đa thức bậc hai với biệt thức âm. Hơn nữa, mọi đa thức $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ đều thừa nhận phân tích

$$f(x) = a_n(x - x_1)^{k_1} \dots (x - x_r)^{k_r}(x^2 + b_1x + c_1)^{l_1} \dots (x^2 + b_sx + c_s)^{l_s},$$

trong đó a_n là hệ số dẫn đầu của $f(x)$, $\sum\limits_{i=1}^{r} k_i + \sum\limits_{j=1}^{s} l_j = n = deg(f(x))$, $x_1, \dots, x_r$ là các số thực và các tam thức bậc hai hệ số thực $(x^2 + b_ix + c_i)$ đều không có nghiệm thực.

Chứng minh: Rõ ràng mọi đa thức hệ số thực bậc nhất hoặc bậc hai với biệt thức âm đều bất khả quy trên $\mathbb{R}$. Khẳng định ngược lại được bao hàm trong phân tích cần tìm cho mọi đa thức $f(x)$ nói trong định lý.

Gọi $x_1, \ldots, x_r$ là tất cả các nghiệm thực của $f(x)$ với bội tương ứng bằng $k_1, \ldots, k_r$. Ta có

$$f(x) = a_n(x - x_1)^{k_1} \ldots (x - x_r)^{k_r} P(x),$$

trong đó $P(x)$ là một đa thức hệ số thực nhưng không có nghiệm thực. Giả sử z_1 là một nghiệm phức của $P(x)$, khi đó $\overline{z}_1$ cũng là một nghiệm của $P(x)$. Thật vậy, $P(x)$ có dạng $P(x) = d_m x^m + \cdots + d_1 x + d_0$, trong đó $d_m, \ldots, d_0$ là các số thực, tức là $\overline{d}_i = d_i$. Dễ thấy rằng

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{P(z_1)} = \overline{d_m z_1^m + \cdots + d_1 z_1 + d_0} \\ &= \overline{d}_m.\overline{z_1^m} + \cdots + \overline{d}_1.\overline{z}_1 + \overline{d_0} \\ &= d_m \overline{z}_1^m + \cdots + d_1 \overline{z}_1 + d_0 \\ &= P(\overline{z}_1). \end{aligned}$$

Do đó $P(x) = (x - z_1)(x - \overline{z}_1)Q(x)$, trong đó $Q(x)$ là một đa thức. Nhận xét rằng

$$(x - z_1)(x - \overline{z}_1) = x^2 - (z_1 + \overline{z}_1)x + z_1\overline{z}_1 = x^2 - 2Re(z_1)x + |z_1|^2$$

là một tam thức bậc hai hệ số thực nhưng không có nghiệm thực. Do tính duy nhất của phép chia đa thức $P(x)$ cho đa thức $x^2 - 2Re(z_1)x + |z_1|^2$ trong các vành $\mathbb{R}[x]$ và $\mathbb{C}[x]$, ta có $Q(x)$ cũng là một đa thức hệ số thực. Nó không có nghiệm thực vì $P(x)$ cũng vậy. Lặp lại những lập luận ở trên với $Q(x)$ thay cho $P(x)$. Bởi vì $deg(Q(x)) < deg(P(x))$, cho nên ta nhận được phân tích của $f(x)$ như nói trong định lý bằng cách quy nạp theo $deg(P(x))$.

6.3.4. Mệnh đề: Nếu đa thức bậc dương $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x]$ có một nghiệm hữu tỉ thì nghiệm hữu tỉ đó có dạng $\frac{r}{s}$, với $r|a_0$ và $s|a_n$.

Chứng minh: Giả sử $f(x)$ có một nghiệm hữu tỉ $c = \frac{p}{q}$. Khi đó $p = rd,\ q = sd$, với d là ước chung lớn nhất của p và q và $c = \frac{r}{s}$, với $(r, s) = 1$ (tức là r và s nguyên tố cùng nhau). Do $f(c) = 0$, ta có $a_0s^n + a_1rs^{n-1} + \cdots + a_{n-1}r^{n-1}s + a_nr^n = 0$, do đó $s|a_nr^n$ và $r|a_0s^n$. Từ $(s, r^n) = 1$ và $(r, s^n) = 1$ ta suy ra $r|a_0$ và $s|a_n$.

Chúng ta thừa nhận định lý sau đây, một điều kiện đủ của tính bất khả quy trên $\mathbb{Q}$.

6.3.5. Định lý (Tiêu chuẩn bất khả quy Eisenstein): Cho đa thức $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x]$ $(n > 1)$. Khi đó nếu tồn tại số nguyên tố p sao cho $p|a_0,\ p|a_1, \ldots, p|a_{n-1},\ p \not| a_n,\ p^2 \not| a_0$ thì $f(x)$ là bất khả quy trên $\mathbb{Q}$.

BÀI TẬP CHƯƠNG VI

1. Tìm tất cả các đa thức hệ số thực $P(x)$ thoả mãn điều kiện $P(0) = 0$ và đồng nhất thức:

$$P(x) = \frac{1}{2}(P(x+1) + P(x-1)),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

2. **1)** Cho $f(x)$ là đa thức bậc n với hệ số thực và $f'(x)$ là đạo hàm của $f(x)$. Biết rằng $f(x)$ có n nghiệm thực $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Chứng minh rằng nếu số thực a không phải là nghiệm của $f(x)$ thì

$$\frac{1}{a-x_1} + \frac{1}{a-x_2} + \cdots + \frac{1}{a-x_n} = \frac{f'(a)}{f(a)}.$$

2) Cho đa thức $\varphi(x) = x^3 + x^2 - 4x + 1$ có 3 nghiệm thực x_1, x_2, x_3. Tính

$$A = \frac{1}{x_1^2 - 3x_1 + 2} + \frac{1}{x_2^2 - 3x_2 + 2} + \frac{1}{x_3^2 - 3x_3 + 2},$$
$$B = \frac{1}{x_1^2 - 2x_1 + 1} + \frac{1}{x_2^2 - 2x_2 + 1} + \frac{1}{x_3^2 - 2x_3 + 1}.$$

3. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n, đa thức

$$(x+1)^{2n+1} + x^{n+2}$$

chia hết cho đa thức $x^2 + x + 1$.

4. Cho k và n là hai số nguyên dương, r là dư của phép chia Euclid k cho n. Chứng minh rằng dư của phép chia Euclid x^k cho $x^n - 1$ là x^r.

5. Cho n là một số nguyên dương và φ là một số thực. Tìm dư của phép chia Euclid $(x \sin\varphi + \cos\varphi)^n$ cho $x^2 + 1$ trong $\mathbb{C}[x]$.

6. Trên trường $\mathbb{Q}$ các số hữu tỉ, tìm ước chung lớn nhất của

$$f(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 + 3x + 1,\ g(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x + 2$$

và sau đó biểu thị nó như là tổ hợp tuyến tính của các đa thức đã cho.

7. Trên trường $\mathbb{Z}_3$, tìm ước chung lớn nhất của

$$f(x) = x^5 + x^3 + x^2 + x + \overline{1},\ g(x) = x^3 + \overline{2}x^2 + x + \overline{1}.$$

8. Cho A, B, C thuộc $F[x]$, F là một trường. Chứng minh rằng nếu A, B, C nguyên tố cùng nhau từng đôi một thì $AB + BC + CA$ và ABC nguyên tố cùng nhau.

9. Chứng minh rằng trong $\mathbb{R}[x]$ các đa thức $A = x^4 + 1$ và $B = x^3 - 1$ nguyên tố cùng nhau và tìm một cặp $U, V \in \mathbb{R}[x]$ thoả mãn:

$$AU + BV = 1.$$

10. Dùng tiêu chuẩn Eisenstein để chứng minh các đa thức sau là bất khả quy trong $\mathbb{Q}[x]$:

1) $x^4 - 13x^3 + 45x^2 - 61x + 25$.

2) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

11. **1)** Dùng tiêu chuẩn Eisenstein để chứng minh đa thức sau là bất khả quy trong $\mathbb{Q}[x]$:

$$x^3 - 3x + 1.$$

2) Trong vành $\mathbb{Q}[x]$, chứng minh rằng đa thức $f(x) = x^3 - 3n^2x + n^3$ với n là một số nguyên dương, là một đa thức bất khả quy.

12. Cho n là một số nguyên dương, a và b là hai số thực khác nhau. Tìm hai đa thức U và V trong $\mathbb{R}[x]$ sao cho

$$\begin{cases} U(x-a)^n + V(x-b)^n = 1, \\ deg(U) \leq n-1,\ deg(V) \leq n-1. \end{cases}$$

13. Tìm điều kiện cần và đủ để đa thức

$$f(x) = x^4 + px^2 + q \in \mathbb{Q}[x]$$

là bất khả quy trên $\mathbb{Q}$.

14. Giả sử $f(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n) - 1$ với a_i là những số nguyên phân biệt, $i = 1, \ldots, n$. Chứng minh rằng $f(x)$ là bất khả quy trên $\mathbb{Q}$.

TRẢ LỜI VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP

CHƯƠNG VI

1. Rõ ràng $P(0) = 0P(1)$. Giả sử $P(k) = kP(1)$ với $0 \leq k \leq n$. Khi đó $P(n+1) = 2P(n) - P(n-1) = 2nP(1) - (n-1)P(1) = (n+1)P(1)$. Vậy theo nguyên lý quy nạp ta có $P(n) = nP(1)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Do đó đa thức $P(x) - xP(1)$ có vô số nghiệm, nên $P(x) - xP(1)$ là đa thức không. Đặt $a = P(1)$, ta có

$$P(x) \ = \ ax.$$

2. **1)** Ta có $f(x) = c(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$ với $c \in \mathbb{R},\ c \neq 0$. Khi đó

$$f'(x) = c[(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n) + (x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n) + \cdots + (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})].$$

Từ đây suy ra

$$\frac{f'(a)}{f(a)} = \frac{1}{a-x_1} + \frac{1}{a-x_2} + \cdots + \frac{1}{a-x_n}.$$

2)

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{(2-x_1)(1-x_1)} + \frac{1}{(2-x_2)(1-x_2)} + \frac{1}{(2-x_3)(1-x_3)} \\
&= (\frac{1}{1-x_1} + \frac{1}{1-x_2} + \frac{1}{1-x_3}) - (\frac{1}{2-x_1} + \frac{1}{2-x_2} + \frac{1}{2-x_3}) \\
&= \frac{\varphi'(1)}{\varphi(1)} - \frac{\varphi'(2)}{\varphi(2)}.
\end{aligned}$$

Ta có $\varphi(1) = -1,\ \varphi(2) = 5,\ \varphi'(1) = 1,\ \varphi'(2) = 12$. Vậy $A = -\frac{17}{5}$.

Lấy đạo hàm 2 vế của $\dfrac{1}{x-x_1} + \dfrac{1}{x-x_2} + \dfrac{1}{x-x_3} = \dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$, ta có

$$-(\frac{1}{(x-x_1)^2} + \frac{1}{(x-x_2)^2} + \frac{1}{(x-x_3)^2}) = \frac{\varphi(x)\varphi''(x) - \varphi'(x)^2}{\varphi(x)^2}.$$

Do đó $B = \dfrac{1}{(1-x_1)^2} + \dfrac{1}{(1-x_2)^2} + \dfrac{1}{(1-x_3)^2} = \dfrac{\varphi'(1)^2 - \varphi(1)\varphi''(1)}{\varphi(1)^2} = 9.$

3. Chứng minh quy nạp theo n. Rõ ràng mệnh đề đúng khi $n = 0$. Giả sử mệnh đề đúng đến n. Khi đó

$$\begin{aligned}
(x+1)^{2n+3} + x^{n+3} &= (x+1)^2(x+1)^{2n+1} + x.x^{n+2} \\
&= (x^2+2x+1)(x+1)^{2n+1} + x.x^{n+2} \\
&= (x^2+x+1)(x+1)^{2n+1} + x((x+1)^{2n+1} + x^{n+2}).
\end{aligned}$$

Số hạng thứ nhất chia hết cho x^2+x+1, số hạng thứ hai chia hết cho x^2+x+1 theo giả thiết quy nạp. Vậy mệnh đề được chứng minh.

4. $x^k = x^{qn+r} = (x^{qn}-1)x^r + x^r = (x^n-1)\Big(\sum_{j=0}^{q-1} x^{jn+r}\Big) + x^r$, trong đó $deg(x^r) = r < n = deg(x^n-1)$. Do đó dư của phép chia Euclid x^k cho x^n-1 là x^r.

5. Theo phép chia Euclide $(x\sin\varphi+\cos\varphi)^n$ cho x^2+1, tồn tại $q(x)\in\mathbb{C}[x]$ và $a,b\in\mathbb{C}$ sao cho $(x\sin\varphi+\cos\varphi)^n = (x^2+1)q(x)+ax+b$.

Thay x bởi i và $-i$, ta có $\begin{cases} ai+b &= \cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi),\\ -ai+b &= \cos(-n\varphi)+i\sin(-n\varphi). \end{cases}$.

Từ đó dư cần tìm là $x\sin(n\varphi)+\cos(n\varphi)$.

6. Sử dụng phép chia Euclid:

$f(x) = (x+1)g(x) + (2x^2-x-1)$,

$g(x) = (x-1)(2x^2-x-1) + (2x+1)$,

$2x^2-x-1 = (x-1)(2x+1)$.

Do đó $2x+1$ là ước chung lớn nhất của $f(x)$ và $g(x)$. Ta có

$$\begin{aligned} 2x+1 &= g(x)-(x-1)(2x^2-x-1) = g(x)-(x-1)(f(x)-(x+1)g(x))\\ &= g(x)+(x^2-1)g(x)-(x-1)f(x)\\ &= x^2g(x)-(x-1)f(x). \end{aligned}$$

7. Sử dụng phép chia Euclid:

$f(x) = (x^2+x+\overline{1})g(x)+\overline{2}x$,

$g(x) = \overline{2}x(\overline{2}x^2+x)+x+\overline{1}$,

$\overline{2}x = \overline{2}(x+\overline{1})+\overline{1}$.

Do đó $\overline{1}$ là ước chung lớn nhất của $f(x)$ và $g(x)$.

8. Giả sử $AB+BC+CA$ không nguyên tố cùng nhau với ABC. Khi đó tồn tại đa thức bất khả quy $D\in F[x]$ sao cho $D \mid (AB+BC+CA)$ và $D\mid ABC$. Do D bất khả quy nên $D\mid A$ hoặc $D\mid B$ hoặc $D\mid C$. Giả sử $D\mid A$. Vì $D\mid A$ và $D\mid (AB+BC+CA)$ nên $D\mid BC$ và do D bất khả quy nên $D\mid B$ hoặc $D\mid C$. Giả sử $D\mid B$. Vậy $D\mid A$ và $D\mid B$. Mâu thuẫn với điều kiện $(A,B)=1$.

9. Thực hiện liên tiếp phép chia Euclid, ta được $(A,B)=1$.

Với $U=\dfrac{1}{2}(x^2-x+1)$, $V=-\dfrac{1}{2}(x^3-x^2+x+1)$, ta có $AU+BV=1$.

10. 1) Thay x bằng $x+1$, ta có

$$(x+1)^4-13(x+1)^3+45(x+1)^2-61(x+1)+25 = x^4-9x^3+12x^2-6x-3.$$

Đa thức này bất khả quy trong $\mathbb{Q}[x]$ theo tiêu chuẩn Eisenstein với $p=3$.

2) Thay x bằng $x+1$, ta có

$$(x+1)^4+(x+1)^3+(x+1)^2+(x+1)+1=x^4+5x^3+10x^2+10x+5.$$

Đa thức này bất khả quy trong $\mathbb{Q}[x]$ theo tiêu chuẩn Eisenstein với $p=5$.

11. **1)** Thay x bằng $x+2$, ta có

$$(x+2)^3-3(x+2)+1=x^3+6x^2+9x+3.$$

Đa thức này bất khả quy trong $\mathbb{Q}[x]$ theo tiêu chuẩn Eisenstein với $p=3$.

2) $f(x)$ có bậc 3 trong $\mathbb{Q}[x]$ nên $f(x)$ là bất khả quy trong $\mathbb{Q}[x]$ khi và chỉ khi $f(x)$ vô nghiệm trong $\mathbb{Q}$.

Giả sử $f(x)$ có nghiệm hữu tỉ là $q\in\mathbb{Q}$. Khi đó $q^3-3n^2q+n^3=0$ hay $\left(\dfrac{q}{n}\right)^3-3\left(\dfrac{q}{n}\right)+1=0$. Như vậy $\dfrac{q}{n}$ là nghiệm của đa thức x^3-3x+1. Điều này mâu thuẫn với 1).

12. $$(b-a)^{2n-1}=((x-a)-(x-b))^{2n-1}=\sum_{k=0}^{2n-1}C_{2n-1}^k(-1)^k(x-a)^{2n-1-k}(x-b)^k$$
$$=\Big(\sum_{k=0}^{n-1}C_{2n-1}^k(-1)^k(x-a)^{n-1-k}(x-b)^k\Big)(x-a)^n+$$
$$+\Big(\sum_{k=n}^{2n-1}C_{2n-1}^k(-1)^k(x-a)^{2n-1-k}(x-b)^{k-n}\Big)(x-b)^n.$$

Từ đó ta có $U(x-a)^n+V(x-b)^n=1$, trong đó

$$\begin{cases} U &= \dfrac{1}{(b-a)^{2n-1}}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}C_{2n-1}^k(-1)^k(x-a)^{n-1-k}(x-b)^k,\\ V &= \dfrac{1}{(b-a)^{2n-1}}\displaystyle\sum_{l=0}^{n-1}C_{2n-1}^{n+l}(-1)^{n+l}(x-a)^{n-1-l}(x-b)^l.\end{cases}$$

13. Giả sử $f(x)$ là khả quy trên $\mathbb{Q}$. Khi đó $f(x)$ có thể phân tích được thành tích của hai đa thức bậc hai:

$$x^4+px^2+q=(x^2+ax+m)(x^2+bx+n).$$

So sánh hệ số ở hai vế, ta suy ra

$$\begin{cases} a+b &=0,\\ m+n+ab &=p,\\ an+bm &=0,\\ mn &=q.\end{cases}$$

Nếu $a = 0$ thì $b = 0$ và $\begin{cases} m+n &= p, \\ mn &= q. \end{cases}$ Khi đó m và n là nghiệm của phương trình $x^2 - px + q = 0$. Phương trình này có nghiệm hữu tỉ khi và chỉ khi $\Delta = p^2 - 4q$ là bình phương của một số hữu tỉ.

Nếu $a \neq 0$ thì $m = n$ và $\begin{cases} a &= -b, \\ 2n - a^2 &= p, \\ n^2 &= q. \end{cases}$ Vì a và n là những số hữu tỉ nên $q,\ 2\sqrt{q} - p$ phải là bình phương của những số hữu tỉ.

Từ các kết quả trên suy ra rằng đa thức $x^4 + px^2 + q$ là bất khả quy trên $\mathbb{Q}$ khi và chỉ khi $q,\ p^2 - 4q$ và $2\sqrt{q} - p$ không phải là bình phương của những số hữu tỉ.

14. Giả sử $f(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n) - 1$ với a_i là những số nguyên phân biệt, $i = 1, \ldots, n$, không phải là bất khả quy trên $\mathbb{Q}$. Khi đó tồn tại hai đa thức $g(x)$ và $h(x)$ trong $\mathbb{Z}[x]$ sao cho

$$(1) \qquad f(x) = g(x)h(x), \text{ với } 0 < deg(g(x)),\ deg(h(x)) < deg(f(x)).$$

Từ đẳng thức (1) suy ra $f(a_i) = g(a_i)h(a_i) = -1$, với $i = 1, \ldots, n$. Vì $g(a_i), h(a_i) \in \mathbb{Z}$ nên $g(a_i) = -h(a_i)$, với $i = 1, \ldots, n$.

Đặt $k(x) = g(x) + h(x)$. Nếu $k(x) = 0$ thì ta có $g(x) = -h(x)$, như vậy $f(x) = -(g(x))^2$. Hệ số dẫn đầu của $f(x)$ bằng 1, còn hệ số dẫn đầu của $-(g(x))^2$ luôn âm. Điều này không thể xảy ra. Nếu $k(x) \neq 0$ thì $deg(k(x)) < n$, nhưng $k(a_i) = g(a_i) + h(a_i) = 0,\ i = 1, \ldots, n$. Vậy $k(x)$ có n nghiệm phân biệt, mâu thuẫn với $deg(k(x)) < n$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] *G. Birkhoff và S. MacLane*, Tổng quan về đại số hiện đại (Bản dịch tiếng Việt), NXB ĐH & THCN, Hà Nội, 1979.

[2] *Nguyễn Gia Định*, Giáo trình Toán cao cấp 1 (Phần Đại số), NXB Giáo dục, Hà Nội, 2005.

[3] *Nguyễn Gia Định*, Bài tập Đại số (Tập 1), NXB Giáo dục, Hà Nội, 2004.

[4] *Bùi Duy Hiền*, Bài tập Đại số đại cương, NXB Giáo dục, Hà Nội, 2001.

[5] *Trần Diên Hiển, Nguyễn Văn Ngọc*, Giáo trình Toán cao cấp I, NXB Giáo dục, Hà Nội, 1997.

[6] *Nguyễn Hữu Việt Hưng*, Đại số đại cương, NXB Giáo dục, Hà Nội, 1998.

[7] *Ngô Thế Phiệt*, Giáo trình đại số (Tập 1), Trường Đại học Tổng hợp Huế, Huế, 1977.

[8] *Đoàn Quỳnh, Khu Quốc Anh, Nguyễn Anh Kiệt, Tạ Mân, Nguyễn Doãn Tuấn*, Giáo trình Toán đại cương, NXB Đại học Quốc Gia Hà Nội, Hà Nội, 1998.

[9] *Helena Rasiowa*, Cơ sở của toán học hiện đại (Bản dịch tiếng Việt), NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội, 1978.

[10] *Kenneth H. Rosen*, Toán học rời rạc ứng dụng trong tin học (Bản dịch tiếng Việt), NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội, 1997.

[11] *Hoàng Xuân Sính*, Đại số đại cương, NXB Giáo dục, Hà Nội, 1995.

MỤC LỤC

Lời nói đầu

Chương I: Lôgic toán và tập hợp 1
1.1. Lôgic toán 1
1.2. Tập hợp 9
Bài tập Chương I 17
Trả lời và hướng dẫn giải bài tập Chương I 22

Chương II: Ánh xạ 30
2.1. Ánh xạ 30
2.2. Giải tích tổ hợp 36
2.3. Lực lượng của tập hợp 41
2.4. Nhóm vành và trường 43
Bài tập Chương II 47
Trả lời và hướng dẫn giải bài tập Chương II 53

Chương III: Quan hệ 66
3.1. Quan hệ và các tính chất của nó 66
3.2. Quan hệ tương đương và quan hệ thứ tự 69
Bài tập Chương III 76
Trả lời và hướng dẫn giải bài tập Chương III 81

Chương IV: Số tự nhiên và số nguyên 89
4.1. Số tự nhiên 89
4.2. Số nguyên 94
Bài tập Chương IV 102
Trả lời và hướng dẫn giải bài tập Chương IV 104

Chương V: Số hữu tỉ, số thực và số phức 110
5.1. Số hữu tỉ 110
5.2. Số thực 116
5.3. Số phức 124
Bài tập Chương V 130
Trả lời và hướng dẫn giải bài tập Chương V 132

Chương VI: Đa thức 139
6.1. Đa thức và hàm đa thức 139
6.2. Thuật toán chia 141
6.3. Đa thức bất khả quy 143
Bài tập Chương VI 146
Trả lời và hướng dẫn giải bài tập Chương VI 148

Tài liệu tham khảo 152

Mục lục 153