https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

NĂM THỨ MƯỜI BẢY
ISSN 1859-2740

Toán tuổi thơ 2

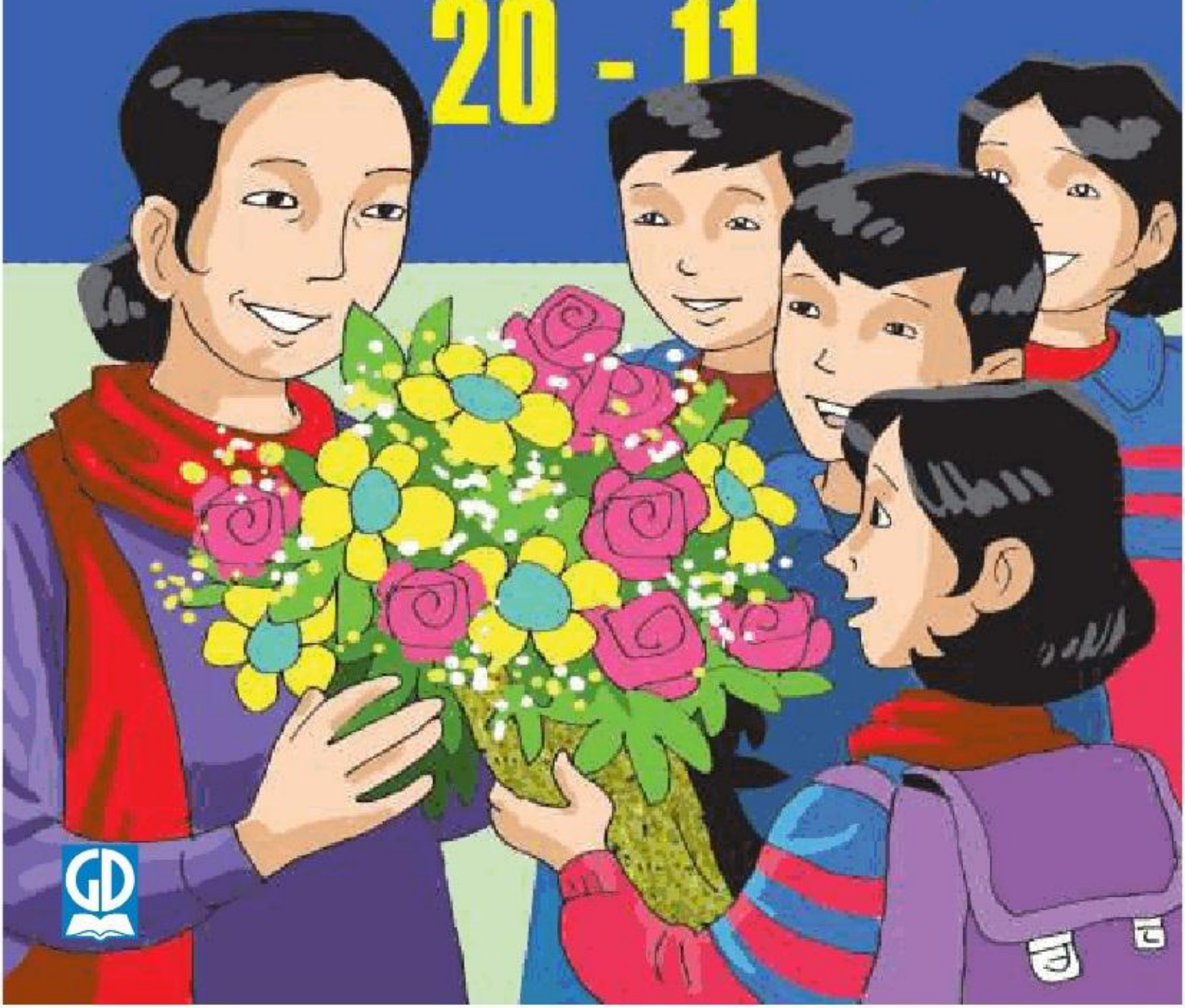
3/9 164 + 165
NĂM HỌC 2016 - 2017

TRUNG HỌC CƠ SỞ

Giá: 20000đ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

CHÀO MỪNG NGÀY NHÀ GIÁO VIỆT NAM 20 - 11



Toán TRUNG HỌC CƠ SỞ

Children's Fun Maths Journal

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập: ThS. VŨ KIM THỦY

Thư kí tòa soạn: NGUYỄN NGỌC HÂN

Trưởng ban biên tập: TRẦN THỊ KIM CƯƠNG

ỦY VIÊN

NGND. VŨ HỮU BÌNH
TS. GIANG KHẮC BÌNH
TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU
TS. VŨ ĐÌNH CHUẨN
TS. NGUYỄN MINH ĐỨC
ThS. NGUYỄN ANH DŨNG
TS. NGUYỄN MINH HÀ
PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN
PGS. TSKH. VŨ ĐÌNH HÒA
TS. NGUYỄN ĐỨC HOÀNG
ThS. NGUYỄN VŨ LOAN
NGUYỄN ĐỨC TẤN
PGS. TS. TÔN THÂN
TRƯƠNG CÔNG THÀNH
PHẠM VĂN TRỌNG
ThS. HỒ QUANG VINH

TÒA SOẠN

Tầng 5, số 361 đường Trường Chinh, quận Thanh Xuân, Hà Nội
Điện thoại (Tel): 04.35682701
Điện sao (Fax): 04.35682702
Điện thư (Email): tapchitoantuoitho@gmail.com
toantuoitho@vnn.vn
Trang mạng (Website): http://www.toantuoitho.vn

ĐẠI DIỆN TẠI MIỀN NAM

NGUYỄN VIẾT XUÂN
391/150 Trần Hưng Đạo, P. Cầu Kho, Q.1, TP. HCM
ĐT: 08.66821199, DĐ: 0973 308199

Trị sự - Phát hành: TRỊNH THỊ TUYẾT TRANG, VŨ ANH THƯ, NGUYỄN HUYỀN THANH
Chế bản: ĐỖ TRUNG KIÊN
Mĩ thuật: Họa sĩ TÚ ÂN

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

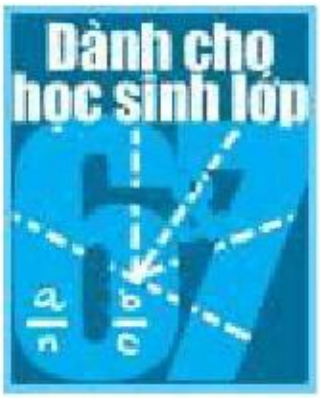
Chủ tịch Hội đồng Thành viên NXBGD Việt Nam:
MẠC VĂN THIỆN
Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam:
GS. TS. VŨ VĂN HÙNG
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NXBGD Việt Nam:
TS. PHAN XUÂN THÀNH

TRONG SỐ NÀY

Dành cho học sinh lớp 6 & 7 Tr 3
Bài toán chứng minh chia hết có điều kiện
Nguyễn Anh Tuấn
Vận dụng bất đẳng thức tam giác để có lời giải của bài toán Tr 5
Nguyễn Đức Tấn
Cửa sổ AC Tr 7
Myanmar gần và xa (Tiếp theo kì trước)
Vũ Kim Thủy
Nhìn ra thế giới Tr 8
Đề thi Toán và Khoa học Quốc tế IMSO năm 2015 (Tiếp theo kì trước)
Trịnh Hoài Dương
Thách đấu! Thách đấu đây! Tr 10
Trận đấu thứ một trăm bốn mươi
Nguyễn Duy Liên
Cuộc thi tư duy thuật toán và tính toán Australia mở rộng Tr 11
Tạ Ngọc Trí
Đến với tiếng Hán Tr 18
Bài 68. Hà Nội có rất nhiều viện bảo tàng (Tiếp theo kì trước)
Nguyễn Vũ Loan
Học Vật lí bằng tiếng Anh Tr 19
Unit 21. The Earth's magnetism
Moris Vũ
Dành cho các nhà toán học nhỏ Tr 20
Suy nghĩ về một dãy bất đẳng thức
Cao Minh Quang
Một số bất đẳng thức trong tam giác và tứ giác
Nguyễn Văn Ngọc

TRONG SỐ NÀY

Học ra sao? Giải toán thế nào? Tr 29
Một số kĩ thuật tính giá trị biểu thức
Nguyễn Khánh Chung
Các tính chất và đôi điều thú vị về tam giác vuông
Nguyễn Đức Hảo
Đề thi các nước Tr 34
AMC 2014
Senior Division
Đỗ Trung Kiên
Kết quả Thi giải toán qua thư Tr 36
Bạn muốn du học Tr 39
Dự thi học bổng Singapore
Thủy Vũ
Compa vui tính Tr 41
Có khẳng định được không?
Tạ Thập
Phá án cùng thám tử Sêlôccôc Tr 42
Cuộc gọi Quốc tế
Đỗ Thị Hiền Anh
Lịch sử Toán học Tr 44
Năm ngôi sao trong chòm sao đại số và lí thuyết số
Lê Quốc Hán
Bạn đọc phát hiện Tr 46
Suy luận và phát triển từ một bài toán
Vương Thị Hải
Chữ và chữ số Tr 48
Kì 25
Trương Công Thành
Toán tiêu dùng Tr 49
Thuê ô tô
Vũ Mulberry
Đo trí thông minh Tr 55
Điền số
Nguyễn Đức Tấn
Sai ở đâu? Sửa cho đúng Tr 56
Bạn có ý kiến gì khác?
Nguyễn Ngọc Hùng
Chuyện dạy và học toán Tr 57
Kinh nghiệm giảng dạy các bài toán quỹ tích
Nguyễn Thị Bính
Giờ ra chơi Tr 61
Vui cười
Đỗ Hồng Thịnh
Trường Olympic Tr 62
Tuổi của một số thiết bị, vật dụng và công nghệ
Bính Nam Hà
Rubic hỏi... đáp Tr 63
Đề thi giải toán qua thư Tr 64



BÀI TOÁN CHỨNG MINH CHIA HẾT CÓ ĐIỀU KIỆN

NGUYỄN ANH TUẤN
(GV. THCS Hòa Hiếu 2, TX. Thái Hòa, Nghệ An)

Trong quá trình giải toán về phép chia các số nguyên chúng ta thường gặp dạng toán sau: *Cho biết A ⋮ m chứng minh rằng B ⋮ m*, hoặc *Chứng minh rằng A ⋮ m ⇔ B ⋮ m*. Ý tưởng chính để giải dạng toán này là chứng minh (kA ± tB) ⋮ m trong đó k, t ∈ ℕ* và (k, m) = 1, (t, m) = 1, từ đó ta sẽ suy ra được điều phải chứng minh.

Trong bài viết này, chúng ta thường sử dụng các kiến thức cơ bản sau:

1. Nếu tổng (hiệu) của hai số chia hết cho m và một trong hai số đó chia hết cho m thì số còn lại chia hết cho m.

2. Mọi số tự nhiên đều viết được dưới dạng tổng các chữ số của nó cộng với một số chia hết cho 9.

3. Nếu tích a.b chia hết cho c mà (b, c) = 1 thì a chia hết cho c.

Chúng ta cùng xét một số ví dụ sau:

Ví dụ 1. Cho a, b ∈ ℤ, chứng minh rằng

2a + 5b ⋮ 11 ⇔ a + 8b ⋮ 11.

Lời giải. Cách 1. Ta có

5(2a + 5b) + (a + 8b) = 11(a + 3b) ⋮ 11.

Do đó a + 8b ⋮ 11 ⇔ 5(2a + 5b) ⋮ 11

⇔ 2a + 5b ⋮ 11 (vì (5, 11) = 1).

Cách 2. Ta có

6(2a + 5b) − (a + 8b) = 11(a + 2b) ⋮ 11.

Do đó a + 8b ⋮ 11 ⇔ 6(2a + 5b) ⋮ 11

⇔ 2a + 5b ⋮ 11 (vì (6, 11) = 1).

Các bạn giải tương tự như trên trong cách 3, 4, 5 dưới đây và hãy tìm thêm các hệ thức khác như thế.

Cách 3. (2a + 5b) + 9(a + 8b) = 11(a + 7b) ⋮ 11.

Cách 4. 13(a + 8b) − (2a + 5b) = 11(a + 9b) ⋮ 11.

Cách 5. 2(a + 8b) − (2a + 5b) = 11b ⋮ 11.

Ví dụ 2. Cho $A = 7^n + 3n - 1$ và $B = 7^{n+1} + 3(n + 1) - 1$ (với n ∈ ℕ).

Chứng minh rằng A ⋮ 9 ⇔ B ⋮ 9.

Lời giải. Ta có

$7A - B = 7(7^n + 3n - 1) - (7^{n+1} + 3(n + 1) - 1)$

$= 18n - 9 = 9(2n - 1)$ ⋮ 9.

Do đó A ⋮ 9 ⇔ 7A ⋮ 9 ⇔ B ⋮ 9 (vì (7, 9) = 1).

Ví dụ 3. a) Chứng minh rằng

$\overline{abc} + \overline{deg} \vdots 37 \Leftrightarrow \overline{abcdeg} \vdots 37$.

b) Chứng minh rằng

$\overline{abc} - \overline{deg} \vdots 7 \Leftrightarrow \overline{abcdeg} \vdots 7$.

c) Chứng minh rằng

$\overline{abcdef} \vdots 11 \Leftrightarrow \overline{ab} + \overline{cd} + \overline{ef} \vdots 11$.

Lời giải. a) Ta có

$\overline{abcdeg} - (\overline{abc} + \overline{deg})$

$= (1000.\overline{abc} + \overline{deg}) - (\overline{abc} + \overline{deg})$

$= 999.\overline{abc} = 37.27.\overline{abc} \vdots 37$.

Do đó $\overline{abc} + \overline{deg} \vdots 37 \Leftrightarrow \overline{abcdeg} \vdots 37$.

b) Ta có

$\overline{abcdeg} + (\overline{abc} - \overline{deg})$

$= (1000.\overline{abc} + \overline{deg}) + (\overline{abc} - \overline{deg})$

$= 1001.\overline{abc} \vdots 7$.

Do đó $\overline{abc} - \overline{deg} \vdots 7 \Leftrightarrow \overline{abcdeg} \vdots 7$.

c) Ta có

$\overline{abcdef} - (\overline{ab} + \overline{cd} + \overline{ef})$

$= (10000\overline{ab} + 100\overline{cd} + \overline{ef}) - (\overline{ab} + \overline{cd} + \overline{ef})$

$= 11(909\overline{ab} + 9\overline{cd}) \vdots 11$.

Từ đó suy ra $\overline{abcdef} \vdots 11 \Leftrightarrow (\overline{ab} + \overline{cd} + \overline{ef}) \vdots 11$.

Ví dụ 4. Cho một số tự nhiên có ba chữ số chia hết cho 37. Chứng minh rằng bằng cách hoán vị vòng quanh các chữ số của số đó, ta được hai số nữa cũng chia hết cho 37.

Lời giải. Giả sử $\overline{abc} \vdots 37$, khi đó ta cần chứng minh $\overline{bca} \vdots 37$ và $\overline{cab} \vdots 37$.

Thật vậy, ta có

$10.\overline{abc} - \overline{bca} = (1000a + 10.\overline{bc}) - (10.\overline{bc} + a)$

$= 999a = 37.27.a \vdots 37.$

Suy ra $\overline{bca} \vdots 37$ (vì $\overline{abc} \vdots 37$ nên $10\overline{abc} \vdots 37$).

$10.\overline{cab} - \overline{abc} = (1000c + 10\overline{ab}) - (10\overline{ab} + c)$

$= 999c = 37.27.c \vdots 37.$

Suy ra $10.\overline{cab} \vdots 37$ (vì $\overline{abc} \vdots 37$).

Vậy $\overline{cab} \vdots 37$ (vì (10, 37) = 1).

Ví dụ 5. Cho một số tự nhiên chia hết cho 7 gồm sáu chữ số. Chứng minh rằng nếu chuyển chữ số đầu xuống cuối cùng, ta vẫn được một số chia hết cho 7.

Lời giải. Giả sử $\overline{abcdef} \vdots 7$, ta có

$10^5.\overline{bcdefa} - \overline{abcdef}$

$= 10^5(10.\overline{bcdef} + a) - (10^5.a + \overline{bcdef})$

$= 999999.\overline{bcdef} = 7.142857.\overline{bcdef} \vdots 7$

Vì $\overline{abcdef} \vdots 7$ nên $10^5.\overline{bcdefa} \vdots 7$

$\Rightarrow \overline{bcdefa} \vdots 7$ (vì $(10^5, 7) = 1$).

Ví dụ 6. Cho một số tự nhiên chia hết cho 7 có ba chữ số, trong đó chữ số hàng chục bằng chữ số hàng đơn vị. Chứng minh rằng tổng các chữ số của nó chia hết cho 7.

Lời giải. Giả sử $\overline{abb} \vdots 7$, ta có

$100(a + b + b) - \overline{abb}$

$= 100(a + 2b) - (100a + 10b + b) = 189b \vdots 7.$

Suy ra $100(a + 2b) \vdots 7 \Rightarrow a + 2b \vdots 7$ (vì (100, 7) = 1).

Ví dụ 7. Chứng minh rằng $5a^2 + 15ab - b^2 \vdots 49$ $\Leftrightarrow 3a + b \vdots 7$ (với $a, b \in \mathbb{Z}$).

Lời giải. ● Nếu $5a^2 + 15ab - b^2 \vdots 49$

$\Rightarrow 5a^2 + 15ab - b^2 \vdots 7.$ (1)

Mặt khác lại có

$(5a^2 + 15ab - b^2) + (3a + b)^2 = 7a(2a + 3b) \vdots 7.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$(3a + b)^2 \vdots 7 \Rightarrow 3a + b \vdots 7$ (vì 7 là số nguyên tố).

● Nếu $3a + b \vdots 7$, ta có

$(3a + b) + 2(2a + 3b) = 7(a + b) \vdots 7$

$\Rightarrow 2(2a + 3b) \vdots 7 \Rightarrow 2a + 3b \vdots 7$ (vì (2, 7) = 1).

Suy ra $(5a^2 + 15ab - b^2) + (3a + b)^2$

$= 7a(2a + 3b) \vdots 49.$ (3)

Vì $3a + b \vdots 7$ nên $(3a + b)^2 \vdots 49.$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $5a^2 + 15ab - b^2 \vdots 49.$

Vậy $5a^2 + 15ab - b^2 \vdots 49 \Leftrightarrow 3a + b \vdots 7.$

Nhận xét. *Chúng ta có thể vận dụng ý tưởng trên vào bài toán chứng minh chia hết không có điều kiện, tức là muốn chứng minh $A \vdots m$ ta sẽ chứng minh $(A \pm km) \vdots m$ trong đó $k \in \mathbb{N}^*$.*

Bài tập tự luyện

Bài 1. Chứng minh rằng nếu $g + 3e + 2d - c - 3b - 2a \vdots 7$ thì $\overline{abcdeg} \vdots 7$.

Bài 2. Chứng minh rằng:

a) $\overline{abcd} \vdots 29 \Leftrightarrow (a + 3b + 9c + 27d) \vdots 29.$

b) $\overline{abc} \vdots 23 \Leftrightarrow 30a + 3b - 2c \vdots 23.$

Bài 3. Cho $x, y \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng $2x + 3y \vdots 17 \Leftrightarrow 9x + 5y \vdots 17.$

Bài 4. a) Chứng minh rằng $10^n + 72n - 1 \vdots 81$ $(n \in \mathbb{N})$.

b) Chứng minh rằng số gồm 27 nhóm chữ số 10 thì chia hết cho 27.

c) Hai số tự nhiên a và 4a có tổng các chữ số bằng nhau. Chứng minh rằng a chia hết cho 3.

Bài 5. Cho $x, y \in \mathbb{Z}$, chứng minh rằng

a) $x^2 + 20xy + 269y^2 \vdots 169 \Leftrightarrow 2x + 7y \vdots 13.$

b) $3x + 2y \vdots 11 \Leftrightarrow x^2 + 16xy - 57y^2 \vdots 121.$

Bài 6. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì

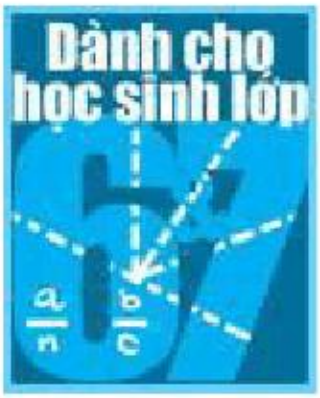
a) $9^{2n} + 2009 \vdots 10;$

b) $9.10^n + 72 \vdots 81.$

Bài 7. a) Hai số tự nhiên a và 2a đều có tổng các chữ số bằng k. Chứng minh rằng a chia hết cho 9.

b) Chứng minh rằng $10^n + 18n - 1$ chia hết cho 27.

c) Chứng minh rằng số gồm 81 chữ số 1 thì chia hết cho 81.



VẬN DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC TAM GIÁC ĐỂ CÓ LỜI GIẢI CỦA BÀI TOÁN

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP. Hồ Chí Minh)

Vận dụng bất đẳng thức về cạnh trong tam giác không chỉ giúp ta có được lời giải bài toán mà đôi khi còn cho chúng ta lời giải đẹp. Sau đây, chúng tôi xin giới thiệu đến các bạn một số bài toán minh họa về phương pháp này.

*** Bất đẳng thức về các cạnh trong tam giác:** Trong một tam giác có độ dài ba cạnh là a, b, c thì $|b - c| < a < b + c$.

1. Bài toán 1. Cho a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$.

Lời giải. Theo bất đẳng thức tam giác, ta có $b + c > a$.

Do đó $\frac{a}{b+c} = \frac{2a}{b+c+b+c} < \frac{2a}{a+b+c}$.

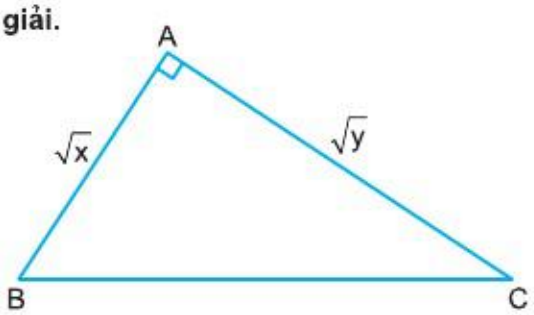
Tương tự, ta có

$\frac{b}{c+a} < \frac{2b}{a+b+c}$ và $\frac{c}{a+b} < \frac{2c}{a+b+c}$.

Vậy $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < \frac{2a+2b+2c}{a+b+c} = 2$.

Bài toán 2. Cho x, y là hai số dương. Chứng minh rằng $\sqrt{x} + \sqrt{y} > \sqrt{x+y}$.

Lời giải.



Xét ΔABC vuông tại A có $AB = \sqrt{x}$, $AC = \sqrt{y}$.

Vì ΔABC vuông tại A nên ta có

$BC^2 = AB^2 + AC^2$ (theo định lí Pythagoras).

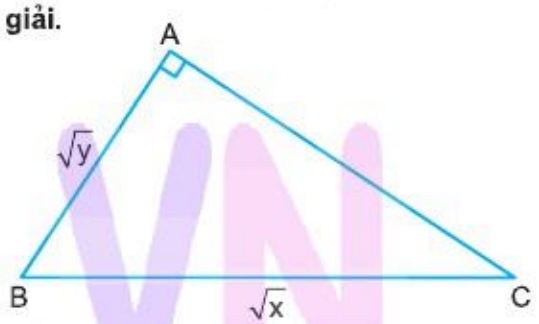
Do đó $BC^2 = x + y$ $(BC > 0) \Rightarrow BC = \sqrt{x+y}$.

Mà trong ΔABC có $AB + AC > BC$ (bất đẳng thức tam giác).

Vậy $\sqrt{x} + \sqrt{y} > \sqrt{x+y}$.

Bài toán 3. Cho x, y là hai số dương và $x > y$. Chứng minh rằng $\sqrt{x} - \sqrt{y} < \sqrt{x-y}$.

Lời giải.



Xét ΔABC vuông tại A có $BC = \sqrt{x}$, $AB = \sqrt{y}$.

Vì ΔABC vuông tại A nên $AB^2 + AC^2 = BC^2$ (theo định lí Pythagoras).

Do đó $y + AC^2 = x \Rightarrow AC = \sqrt{x-y}$ (vì $x > y$).

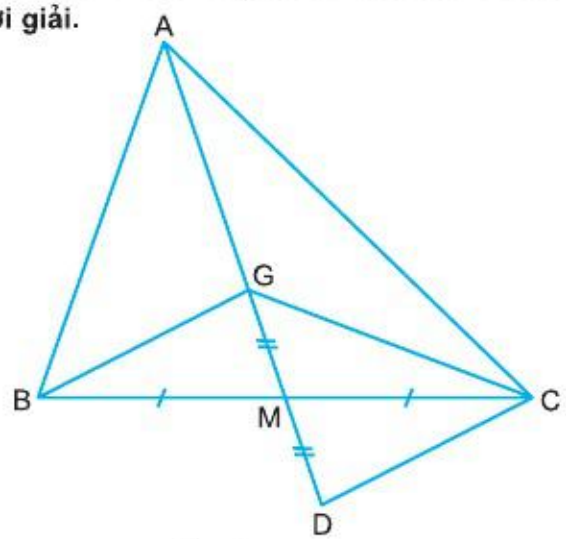
Lại có $BC - AB < AC$ (bất đẳng thức tam giác).

Vậy $\sqrt{x} - \sqrt{y} < \sqrt{x-y}$.

Bài toán 4. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Chứng minh rằng

$GA^2 + GB^2 + GC^2 < 2(GA.GB + GB.GC + GC.GA)$.

Lời giải.



Gọi M là giao điểm của AG và BC.

Trên tia đối của tia MG lấy điểm D sao cho MD = MG.

Ta có $MG = \frac{1}{2}AG$ (vì G là trọng tâm của ΔABC) và MB = MC.

Mà GD = MG + MD và MD = MG (giả thiết) nên GD = GA.

Xét ΔMGB và ΔMDC có

MG = MD

$\widehat{GMB} = \widehat{DMC}$ (hai góc đối đỉnh)

MB = MC.

Vậy $\Delta MGB = \Delta MDC$ (c.g.c)

$\Rightarrow$ GB = CD.

Trong ΔGCD có

GD < GC + CD, CD < GC + GD, GC < GD + CD (bất đẳng thức tam giác).

Do đó GA < GC + GB, GB < GC + GA, GC < GA + GB

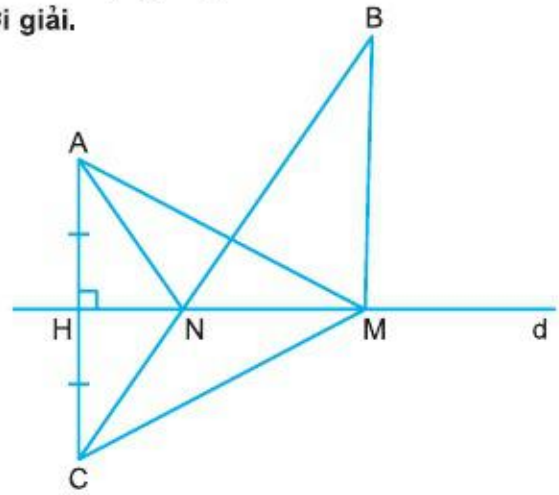
$\Rightarrow GA^2 < GA.GC + GA.GB$, $GB^2 < GB.GC + GA.GB$, $GC^2 < GC.GA + GB.GC$.

Suy ra

$GA^2 + GB^2 + GC^2 < 2(GA.GB + GB.GC + GC.GA)$.

Bài toán 5. Cho hai điểm A, B nằm ngoài đường thẳng d và nằm cùng phía đối với đường thẳng d. Xác định vị trí điểm M trên đường thẳng d để MA + MB đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.



Vẽ AH ⊥ d tại H. Trên tia đối của tia HA lấy điểm C sao cho HC = HA.

Ta có d là đường trung trực của đoạn thẳng AC.

Gọi N là giao điểm của BC và đường thẳng d.

Vì M, N ∈ d nên NA = NC, MA = MC.

- Nếu M ≡ N thì MA + MB = NC + NB = BC.
- Nếu M không trùng với N thì trong ΔMBC có MC + MB > BC (bất đẳng thức tam giác).

Vậy khi điểm M trùng với điểm N thì MA + MB đạt giá trị nhỏ nhất.

- Cách dựng điểm M:

* Vẽ AH ⊥ d tại H.

* Trên tia đối của tia HA lấy C sao cho HC = HA.

Khi đó M là giao điểm của BC và d.

CỬA SỔ asean AC

MYANMAR GẦN VÀ XA

(Tiếp theo kì trước)

VŨ KIM THỦY

AC là từ viết tắt của Cộng đồng ASEAN bằng tiếng Anh (ASEAN Community). Cộng đồng ASEAN thành lập chính thức từ 31.12.2015. Năm 2016 này tạp chí Toán Tuổi thơ mở chuyên mục Cửa sổ AC để bạn đọc hiểu hơn về vùng đất, con người của 10 quốc gia với 625 triệu dân.

Nói tiếp về những khác lạ mà chúng ta thấy khi đến nước bạn. Khu vực quảng trường trung tâm khá giống các thành phố châu Âu. Điều này vẫn tương đồng với khu vực Nhà hát Lớn, Hà Nội. Nhưng cái khác ở đây là kiến trúc mang dáng dấp khác, không giống Pháp mà như kiểu Anh. Ai đã đến Malaysia thì thấy khu vực quảng trường trung tâm ở hai nước khá giống nhau. Một cây tháp cao với kiến trúc đơn giản vươn cao giữa quảng trường giống tháp Độc lập ở Indonesia nhưng ở đây nhỏ hơn. Nhân tiện kể về kiến trúc nói thêm về nhà ở của dân Yangon. Nhiều ngôi nhà cổ ở những khu phố cũ chắc có tuổi gần tám, chín thập niên. Nhìn qua nó có dáng dấp khu nhà tập thể. Chiều chưa muộn nhưng nhìn vào cầu thang đã thấy tối. Cầu thang đi ngay từ hè phố, lên thẳng một mạch đến tầng trên chứ không rẽ ngoặt có chiếu nghỉ. Lên trên hai bên là hai nhà. Vậy là cầu thang thì chung nhưng hai nhà hai bên khá độc lập. Điều lạ nhất là nhiều nhà 6, 7, 8 tầng ở mặt phố lớn không có thang máy. Mỗi gia đình ở các tầng trên thả sẵn một sợi dây, đầu có treo các hộp hoặc túi. Các túi đó treo cả ngày trước cửa nhà tầng 1, ngay tầm mắt người đi đường, nhìn khá lạ mắt. Chẳng ai lấy thế làm điều. Khi chủ nhà cần mua (gia vị, quà sáng, nhu yếu phẩm...) họ gọi cho nhà hàng. Người mang hàng đến chỉ việc bỏ vào túi có sẵn ghi địa chỉ phòng, chủ nhà kéo lên rồi thả tiền vào hạ xuống trả cho nhà hàng. Có khi túi treo từ sáng đến trưa vì chủ nhà đi vắng. Một điều đáng nhớ là các nét văn hóa Phật giáo mà bạn được trải nghiệm. Các khu chùa đều rộng lớn. Chùa Vàng ở Yangon có cả khu thang máy đưa khách tham quan lên khu vực sảnh chính. Trong toàn bộ các khu chùa khách tham quan đều đi chân đất (thường là chân trần, không tất). Ở chùa Vàng tại trung tâm thì có giá cho khách để dép, khi ra được phát giấy ướt lau chân. Ở các khu chùa bình thường khác giày dép để ngoài cổng trước khi vào sân. Vậy nên sang Myanma đi dép xỏ ngón vừa giống người sở tại vừa tiện khi vào chùa không phải tháo giầy, tất. Trang phục ở nhiều ngôi chùa quy định là quần phải tới mắt cá chân. Bạn được hướng dẫn mua trang phục để phù hợp nếu lỡ mặc kiểu quần dã ngoại chưa tới đầu gối.

Điều khó quên nhất là 11 km lên chùa đá vàng hay chùa Kyaikhtiyo. Đường dốc ngoằn nghoèo như lên Tam Đảo. Xe chuyên dụng là xe tải như trong quân đội. Có 6 hàng ghế inox bắc ngang, mỗi hàng ghế 6 người. Vừa tối đa số khách một xe chở được vừa không làm người ngồi bị xô qua xô lại khi xe vào cua và lên, xuống dốc. Rất nhiều người sợ khi đi chuyến xe này vì đường dốc và hẹp, xe mui trần. Nhưng may là xe chỉ đi một chiều, có chặng nghỉ, chờ xe đi ngược lại qua hết. Lên đến nơi là cả một không gian kì thú ngút tầm mắt. Xa xa là ngôi chùa vàng xây trên tảng đá.

(Còn tiếp)

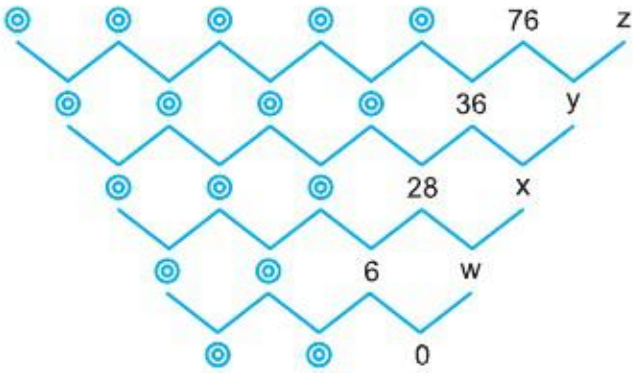
ĐỀ THI TOÁN VÀ KHOA HỌC QUỐC TẾ IMSO NĂM 2015

PHẦN CÂU HỎI CÓ CÂU TRẢ LỜI NGẮN

(Tiếp theo kì trước)

TRỊNH HOÀI DƯƠNG *(GV. THCS Giảng Võ, Ba Đình, Hà Nội)*
Sưu tầm và giới thiệu
MAI VŨ *(dịch)*

7. Trong cách sắp xếp ở hình dưới đây, mỗi số là hiệu số không âm của 2 số ở phía trên liền với nó. Tính số trung bình cộng của 8 giá trị có thể được của z.



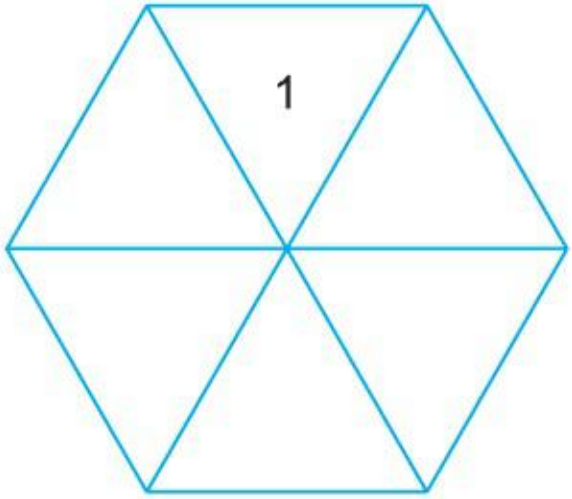
8. Có bao nhiêu số nguyên dương từ 1 đến 2015 không chia hết cho một trong các số sau: 2, 20, 201 và 2015?

9. Trong một cuộc khảo sát 100 sinh viên, có 84 sinh viên không thích chơi quần vợt, 74 sinh viên không thích chơi trượt tuyết, 62 sinh viên không thích chơi cả quần vợt và trượt tuyết. Vậy có bao nhiêu sinh viên thích chơi cả quần vợt và trượt tuyết?

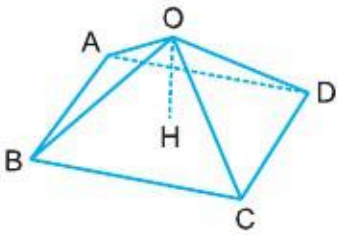
10. Biết rằng 0, 2, 4, 6, 8 là các chữ số chẵn. Cần bao nhiêu chữ số chẵn để viết các số từ 1 đến 100?

11. Hai số được gọi là "cặp số gương" nếu một trong hai số đó được tạo thành bằng việc đảo ngược thứ tự các chữ số của số kia. Ví dụ, 123 và 321. Nếu tích của một cặp số gương là 146047, thì tổng của cặp số gương này là bao nhiêu?

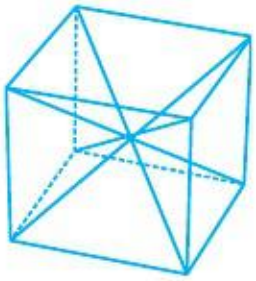
12. Trong hình lục giác dưới đây, số 1 được đặt vào tam giác cao nhất. Có bao nhiêu cách khác nhau đặt các số 2, 3, 4, 5 và 6 vào các tam giác trống còn lại sao cho tổng các số trong các cặp tam giác đối nhau qua tâm lục giác là 5, 7, 9?



13. Có 6 hình chóp giống nhau với đáy là hình vuông được xếp thành một hình lập phương có thể tích 2744 cm^3 *(Xem hình 2)*. Tính độ dài đường cao OH từ đỉnh O đến đáy hình vuông ABCD của mỗi hình chóp, theo cm *(Xem hình 1)*.



Hình 1



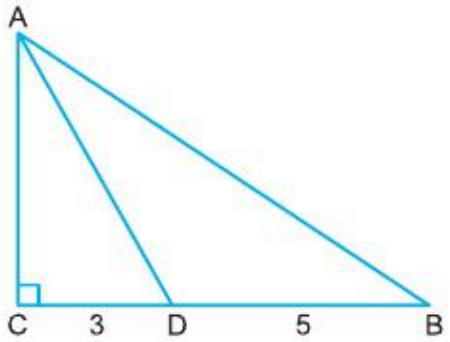
Hình 2

14. Có bao nhiêu số trong các số 1×2, 2×3, 3×4, ..., 29×30 chia hết cho 3 hoặc 5?

15. Một con cáo thấy có một con thỏ ở phía trước cách nó 21 m. Trong một giây, con thỏ chạy 5 bước, cáo chỉ chạy được 3 bước. Biết rằng khoảng cách 4 bước của cáo bằng 9 bước của thỏ. Nếu khoảng cách mỗi bước chạy của thỏ là 0,6 m thì mất bao nhiêu giây để cáo bắt được thỏ?

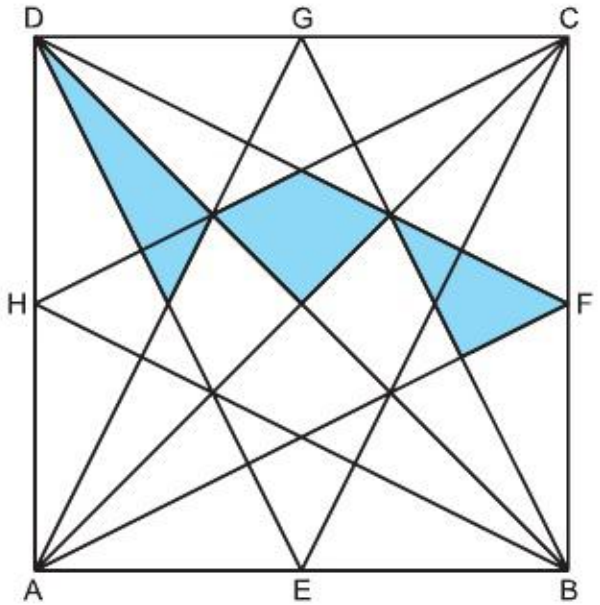
16. Xét tất cả các số có 3 chữ số sao cho các chữ số đó khác nhau và đều khác 0. Tính tổng tất cả các số có 3 chữ số đó.

17. Cho tam giác ABC vuông với $\widehat{C} = 90^o$. Tia phân giác của góc A cắt CB tại D. Nếu CD = 3 cm, BD = 5 cm, tính độ dài AB, theo cm.



18. Hình vẽ dưới đây gồm 15 ô vuông đơn vị. Đường AB chia hình đó thành 2 phần có diện tích bằng nhau. Tính giá trị của $\frac{MB}{BN}$.

19. Vẽ hình vuông ABCD với các điểm E, F, G, H là trung điểm của các cạnh như hình vẽ. Nếu tổng diện tích phần được tô đậm là 15 cm^2, hãy tính diện tích hình vuông ABCD, theo cm^2.



20. Các kí hiệu I, M, S, O, 1 và 5 được viết thành một hàng ngang theo thứ tự nào đó.

(1) M có thể là kí hiệu đầu tiên hoặc cuối cùng từ bên trái.

(2) S là kí hiệu thứ tư tính từ bên trái.

(3) S ở phía trái O và không nhất thiết ở cạnh O.

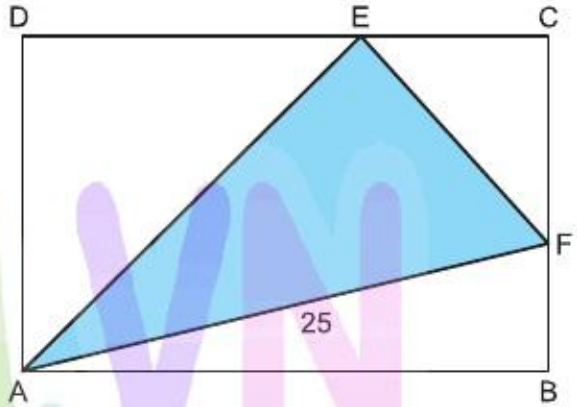
(4) I ở bên phải M và không nhất thiết ở cạnh M.

(5) O và 1 đặt cạnh nhau.

(6) Chỉ có đúng một kí hiệu nằm giữa I và 1.

Vậy kí hiệu thứ hai tính từ trái là kí hiệu nào?

21. Cho ABCD là hình chữ nhật với điểm E thuộc CD và F là điểm thuộc BC sao cho $\widehat{AEF} = 90^o$, AF = 25 cm. Độ dài của DE, EC, CF, FB, AE và EF là các số nguyên dương. Tính diện tích hình chữ nhật ABCD, theo cm^2.



22. Cho các số nguyên dương khác nhau có trung bình cộng là 38 và 52 là một số trong các số nguyên đó. Nếu bỏ đi số 52, trung bình cộng của các số nguyên còn lại là 37. Tìm số nguyên dương lớn nhất có thể có trong các số nguyên này.

23. Tổng của 47 số nguyên dương khác nhau là 2015. Có nhiều nhất bao nhiêu số trong các số nguyên dương đó là số lẻ?

24. Ta gọi "phân số đơn vị" là phân số trong đó có tử số là 1 và mẫu số là một số nguyên dương nào đó. Ta biểu diễn số 1 bằng tổng của 7 phân số đơn vị khác nhau, biết 5 trong 7 phân số đó là $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{9}, \frac{1}{15}, \frac{1}{30}$. Tính tích của 2 phân số đơn vị còn lại.

25. Từ 99 số nguyên dương nhỏ hơn 100, ta chọn nhiều số khác nhau sao cho không có tập con nào của các số được chọn có tổng bằng 100. Nếu như tổng các số được chọn là lớn nhất, hãy tìm số nhỏ nhất trong các số đã chọn.

THÁCH ĐẤU! THÁCH ĐẤU ĐÂY!

TRẬN ĐẤU THỨ MỘT TRĂM BỐN MƯƠI

Người thách đấu: *Nguyễn Duy Liên*, GV. THPT chuyên Vĩnh Phúc.

Bài toán thách đấu: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a}{bc} + \frac{2b}{ca} + \frac{5c}{ab}$, trong đó a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 6$.

Xuất xứ: Sáng tác.

Thời hạn: Trước ngày 08.12.2016 theo dấu bưu điện.

Kết quả TRẬN ĐẤU THỨ MỘT TRĂM BA MƯƠI TÁM (TTT2 số 161+162)

Ta có $P = \frac{1-2x}{x^3+7x-(5-x)+1} + \frac{1-2y}{y^3+7y-(5-y)+1} + \frac{1-2z}{z^3+7z-(5-z)+1}$

$= \frac{1-2x}{x^3+8x-4} + \frac{1-2y}{y^3+8y-4} + \frac{1-2z}{z^3+8z-4}$.

Ta sẽ chứng minh $\frac{1-2x}{x^3+8x-4} \le \frac{1}{20}x - \frac{1}{4}$. (1)

Vì $x \ge 1$ nên (1) $\Leftrightarrow \frac{1-2x}{x^3+8x-4} \le \frac{x-5}{20}$

$\Leftrightarrow 20(1-2x) \le (x^3+8x-4)(x-5) \Leftrightarrow 20 - 40x \le x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 44x + 20$

$\Leftrightarrow x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 4x \ge 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 5x^2 + 8x - 4) \ge 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x^2 - 4x + 4) \ge 0$

$\Leftrightarrow x(x-1)(x-2)^2 \ge 0$ (luôn đúng). Vậy (1) đúng.

Tương tự ta có $\frac{1-2y}{y^3+8y-4} \le \frac{1}{20}y - \frac{1}{4}$ (2); $\frac{1-2z}{z^3+8z-4} \le \frac{1}{20}z - \frac{1}{4}$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $P \le \left(\frac{1}{20}x - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{20}y - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{20}z - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{20}(x+y+z) - \frac{3}{4} = \frac{5}{20} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}(x-1)(x-2)^2 = 0\\(y-1)(y-2)^2 = 0\\(z-1)(z-2)^2 = 0\\x+y+z=5\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1, y=z=2\\y=1, x=z=2.\\z=1, x=y=2\end{array}\right.$

Vậy $\max P = -\frac{1}{2}$ khi chẳng hạn (x, y, z) = (1, 2, 3).

Nhận xét. Ta phát hiện bất đẳng thức (1) nhờ dự đoán $\frac{1-2x}{x^3+8x-4} \le ax + b$. (*) với $\forall x \ge 1$ và tìm a, b bằng cách lần lượt thay x = 1, x = 2 vào hai vế của (*) ta có $\begin{cases}\frac{1-2.1}{1^3+8.1-4} = a.1+b\\\frac{1-2.2}{2^3+8.2-4} = a.2+b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a+b = \frac{-1}{5}\\2a+b = \frac{-3}{20}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a = \frac{1}{20}\\b = -\frac{1}{4}.\end{cases}$

Nhận xét. Đăng quang trong trận đấu này là võ sĩ *Tạ Nam Khánh*, 9E1, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc**. Vì bạn Khánh đã có lời giải ngắn gọn và sớm nhất. Bạn *Phạm Thành Dũng*, 9E1, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc** cũng có lời giải đúng và được khen.

LÊ ĐỨC THUẬN

CUỘC THI TƯ DUY THUẬT TOÁN VÀ TÍNH TOÁN AUSTRALIA MỞ RỘNG

COMPUTATIONAL AND ALGORITHMIC THINKING (CAT)

TS. TẠ NGỌC TRÍ

(Vụ Giáo dục Tiểu học, Bộ Giáo dục và Đào tạo)

Không giống như bất cứ một thời điểm nào khác trong lịch sử phát triển của thế giới, tư duy thuật toán đang trở nên là một phần của thế giới ngày nay của chúng ta. Tin học nghiên cứu về cấu trúc và sự biến đổi của các hệ thống tự nhiên và nhân tạo mà chúng tạo ra, xử lí, cất giữ và giao tiếp thông tin. Trên nhiều lĩnh vực khác nhau từ nghiên cứu y sinh đến việc hẹn hò, và sử dụng sức mạnh và khả năng của công nghệ, Tin học chuyển các dữ liệu thành các thông tin mà con người có các giải pháp xử lí hàng ngày.

Tin học là một môn học đang phát triển rất nhanh chóng và có cơ sở là Toán học. Học sinh học Tin học là học các thuật toán đơn giản, các cấu trúc dữ liệu và các kĩ thuật tính toán có nền tảng là thông tin và giao tiếp, và thể hiện quá trình học tập thông qua các nhiệm vụ về lập trình cho máy tính. Trong chương trình giáo dục phổ thông của các nước thì Tin học cũng được xác định là một môn học quan trọng để phát triển cho học sinh nhiều năng lực chung, như năng lực tính toán, năng lực công nghệ thông tin và truyền thông.

Cuộc thi tư duy thuật toán và tính toán Australia mở rộng (CAT) là cuộc thi giải toán, kéo dài trong 60 phút. Cuộc thi này nhằm xác định tiềm năng của học sinh về tư duy lập trình, những tiềm năng mà học sinh thường không có cơ hội để thể hiện.

Tuy vậy CAT **không** phải là cuộc thi lập trình và CAT không đòi hỏi học sinh có kiến thức về lập trình! Kết quả của bài thi CAT có thể giúp phát hiện ra các tài năng trong tương lai về lập trình mà các hoạt động thông thường trong học tập không làm được. Một số câu hỏi trong bài thi kiểm tra khả năng thể hiện của học sinh về tư duy mạch lạc (tư duy câu lệnh); những câu hỏi khác đòi hỏi suy nghĩ lôgic, trong khi đó còn có những câu hỏi yêu cầu cao hơn đòi hỏi phải xác định và ứng dụng của tư duy thuật toán.

CAT có 4 bài thi bao gồm: *bài thi cho khối 5-6 (UP), bài thi cho khối 7-8 (J), bài thi cho khối 9-10 (I), và bài thi cho khối 11-12 (J)*. Mỗi bài thi gồm sáu câu hỏi trắc nghiệm, tiếp theo đó là chín câu hỏi yêu cầu cao hơn với câu trả lời có kết quả là một số nguyên.

Ví dụ về một câu hỏi trong bài thi CAT: *The sniffer dog at the airport stops beside a trolley piled high with 60 suitcases. One of the suitcases contains contraband peanuts. The dog can tell whether peanuts are hidden in any one of the group of suitcases, but it gets tired if it has to do too much sniffing.*

What is the smallest number of groups of suitcases it must sniff in order to isolate the suitcase with the peanuts?

- Đề bài dịch sang tiếng Việt: *Một chú chó đánh hơi ở sân bay đang đứng bên cạnh một xe chở 60 vali được chất cao. Một trong những vali có chứa củ lạc bị cấm nhập cảnh(*). Chú chó có thể phát hiện trong một chồng nào đó có vali chứa củ lạc hay không, nhưng chú chó sẽ bị mệt nếu phải làm việc quá nhiều.*

Hỏi số ít nhất các chồng vali mà chú chó phải ngửi để có thể chỉ ra được vali chứa củ lạc?

CAT được tổ chức và quản lý bởi Quỹ ủy thác Toán học Australia (Australian Mathematics Trust) phối hợp với ủy ban Olympic Tin học của Australia (Australian Informatics Olympiad Committee). Quỹ ủy thác Toán học Australia Trust là một tổ chức phi lợi nhuận quốc gia. Mục đích các hoạt động của AMT là:

- Làm phong phú cho hoạt động giảng dạy và học tập môn Toán và môn Tin học của học sinh tất cả các cấp học.
- Tổ chức các cuộc thi phát hiện tìm kiếm tài năng Toán học và Tin học.
- Tổ chức các hoạt động, hội thảo về học tập, giảng dạy cho học sinh và giáo viên.
- Xuất bản sách để quảng bá cho việc học Toán, Tin học cho học sinh Australia và Quốc tế.

Ủy ban Olympic Tin học của Australia cũng như AMT được hỗ trợ bởi một mạng lưới rộng lớn của các tình nguyện viên nhiệt tình từ Australia và trên toàn thế giới, bao gồm các học giả, các thành viên Hội Toán học, Tin học, các nhà giáo dục toán học, tin học và các cựu thành viên của các đội tuyển thi Toán học, Tin học của Australia.

Thông tin thêm về AMT xin truy cập tại đường dẫn http://www.amt.edu.au/

Thông tin thêm về CAT và danh sách các học sinh trên thế giới đạt kết quả cao nhất trong cuộc thi CAT 2015 có thể truy cập tại đường dẫn sau http://www.amt.edu.au/informatics/cat/

(*) Luật nhập cảnh của Australia cấm không cho mang vào các loại hạt như lạc, chú thích người dịch.

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN LỚP 6 HUYỆN HOẰNG HÓA, TỈNH THANH HÓA

Năm học: 2015 - 2016

Thời gian làm bài: 120 phút *(không kể thời gian giao đề)*

Bài 1. *(4,5 điểm)* Tính giá trị các biểu thức sau

a) $A = \frac{2}{3} + \frac{5}{6} : 5 - \frac{1}{18}.(-3)^2$.

b) $B = 3.\{5.[(5^2 + 2^3) : 11] - 16\} + 2015$.

c) $C = \left(1+\frac{1}{1.3}\right)\left(1+\frac{1}{2.4}\right)\left(1+\frac{1}{3.5}\right)...\left(1+\frac{1}{2014.2016}\right)$.

Bài 2. *(4,0 điểm)*

a) Tìm số tự nhiên x biết $8.6 + 288 : (x - 3)^2 = 50$.

b) Tìm các chữ số x, y để $A = \overline{x183y}$ chia cho 2, 5 và 9 đều dư 1.

c) Chứng tỏ rằng nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì $p^2 - 1$ chia hết cho 3.

Bài 3. *(4,5 điểm)*

a) Cho biểu thức $B = \frac{5}{n-3}$ $(n \in \mathbb{Z}, n \neq 3)$.

Tìm tất cả các giá trị nguyên của n để B là số nguyên.

b) Tìm các số nguyên tố x, y sao cho $x^2 + 117 = y^2$.

c) Số 2^{100} viết trong hệ thập phân có bao nhiêu chữ số?

Bài 4. *(5,0 điểm)*

Cho góc $\widehat{xBy} = 55^o$. Trên các tia Bx, By lần lượt lấy các điểm A và C sao cho $A \neq B$, $C \neq B$. Trên đoạn thẳng AC lấy điểm D sao cho $\widehat{ABD} = 30^o$.

a) Tính độ dài AC, biết AD = 4 cm, CD = 3 cm.

b) Tính số đo của $\widehat{DBC}$.

c) Từ B vẽ tia Bz sao cho $\widehat{DBz} = 90^o$. Tính số đo $\widehat{ABz}$.

Bài 5. *(2,0 điểm)*

a) Tìm các chữ số a, b, c khác 0 thỏa mãn $\overline{abbc} = \overline{ab} \times \overline{ac} \times 7$.

b) Cho $A = \frac{1}{2}\left(7^{2012^{2015}} - 3^{92^{94}}\right)$. Chứng minh A là số tự nhiên chia hết cho 5.

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN LỚP 7
TRƯỜNG TRUNG HỌC THỰC HÀNH SÀI GÒN, TP. HỒ CHÍ MINH

Năm học: 2015 - 2016

Thời gian làm bài: 120 phút *(không kể thời gian giao đề)*

Bài 1. *(3 điểm)*

Tính giá trị biểu thức $M = \dfrac{2016^{10} + 2016^{11}}{2016^{10} - 2016^{11}}$.

Bài 2. *(2 điểm)*

Tính nhanh $N = \dfrac{1}{1000} - \dfrac{1}{1000.999} - \dfrac{1}{999.998} - \dfrac{1}{998.997} - \ldots - \dfrac{1}{3.2} - \dfrac{1}{2.1}$.

Bài 3. *(4 điểm)*

Tìm x, y biết

a) $5^{2x-1} = 5^{2x-3} + 125.24$.

b) $x - y = xy = x : y$ $(y \neq 0)$.

Bài 4. *(2 điểm)*

Biết rằng $\dfrac{bz - cy}{a} = \dfrac{cx - az}{b} = \dfrac{ay - bx}{c}$. Chứng minh $x : y : z = a : b : c$.

Bài 5. *(2 điểm)*

Cho $A = |2x^4 + 3x^2 + 1| - |-2x^4 - x^2 - 1|$.

Chứng tỏ rằng giá trị biểu thức A luôn không âm với mọi giá trị của x.

Bài 6. *(3 điểm)*

Cho tam giác ABC, kẻ đường cao BD vuông góc với AC ($D \in AC$).

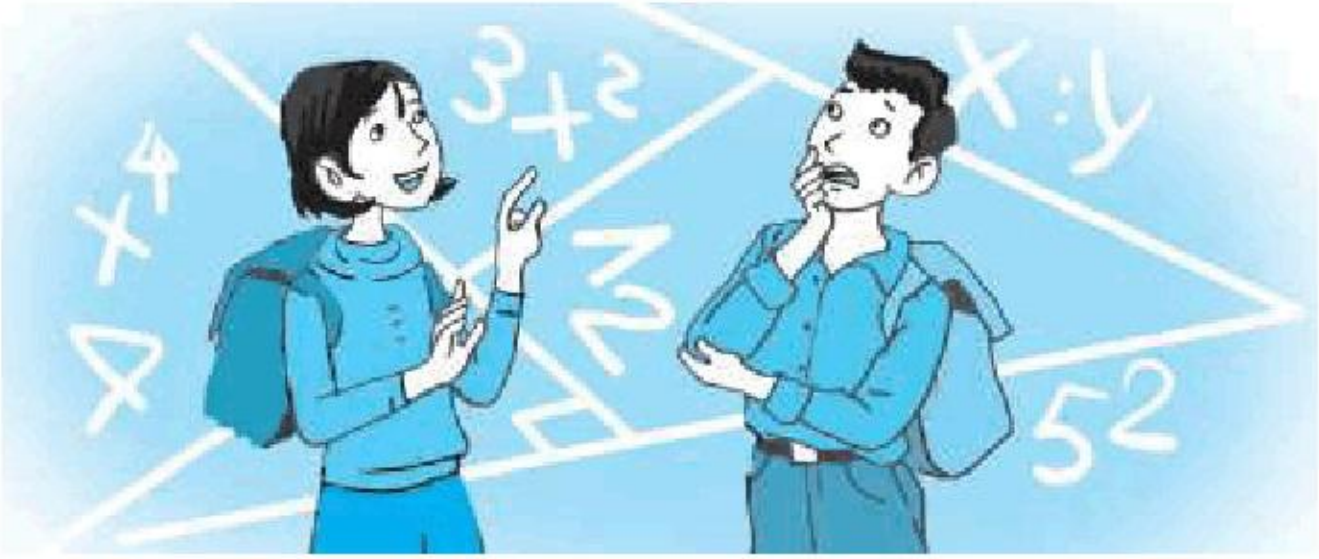
Chứng minh rằng nếu $3BD^2 + 2AD^2 + CD^2 = AB^2 + BC^2 + CA^2$ thì ΔABC cân.

Bài 7. *(4 điểm)*

Cho ΔABC có ba góc đều nhọn. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, AC. Kẻ $AH \perp MN$ tại H và CK vuông góc với đường thẳng MN tại K. Chứng minh rằng

a) AH = CK.

b) BC = 2MN.



LTS. *Thật thú vị khi so sánh đề thi bây giờ với các đề thi trước đây để hiểu thêm độ khó, dễ của thi cử xưa và nay. TTT giới thiệu đề thi học sinh giỏi môn Toán lớp 7 tỉnh Hà Nam Ninh năm 1977 (là lớp cuối cấp 2, tương đương với lớp 9 bây giờ). Bạn sẽ thấy không phải bây giờ đề thi khó hơn.*

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN LỚP 7 TỈNH HÀ NAM NINH

Năm học: 1976 - 1977

Thời gian làm bài: 240 phút *(không kể thời gian giao đề)*

Bài 1. *(3,0 điểm)*

Có 80 viên bi trong đó có một viên không đạt tiêu chuẩn nên nhẹ hơn các viên khác. Chỉ cần cân 4 lần là có thể lấy ra được viên bi không đạt tiêu chuẩn. Cân thế nào?

Bài 2. *(4,0 điểm)*

Biết rằng a, b, c là những số hữu tỉ khác không, từng đôi khác nhau và $a + b + c = 0$, hãy tính

$$\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right).$$

Bài 3. *(3,0 điểm)*

Chứng minh biểu thức $x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1$ dương với mọi x.

Bài 4. *(3,0 điểm)*

Cho tứ giác lồi ABCD. Hãy tìm quỹ tích điểm O trong tứ giác đó sao cho khi nối OB, OD thì tứ giác đã cho bị chia thành 2 phần (OBAD và OBCD) có diện tích bằng nhau.

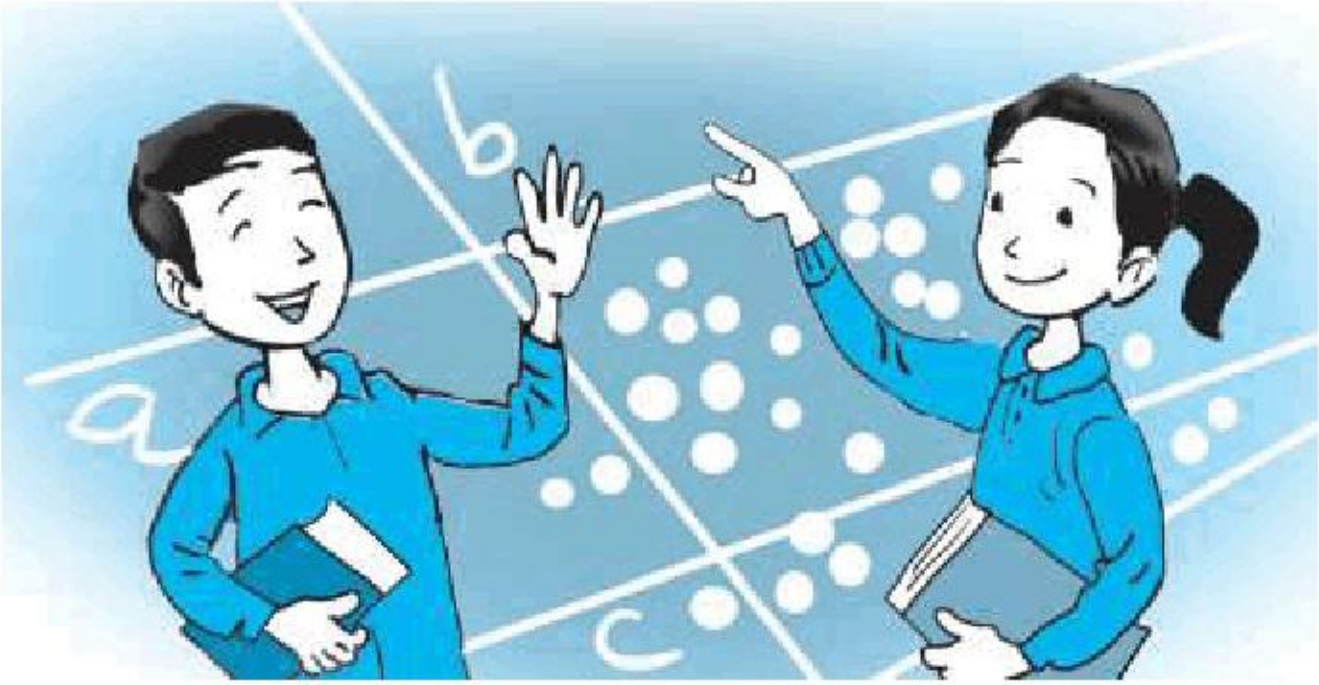
Bài 5. *(7,0 điểm)*

Cho tam giác ABC cân tại đỉnh A và O là điểm giữa đường cao AH. Đường thẳng BO cắt AC tại E, đường thẳng CO cắt AB tại F. Biết diện tích tứ giác AEOF là S.

a) Tính diện tích của tam giác ABC.

b) Tìm vị trí của điểm E trên đoạn AC.

c) Đường thẳng song song với BC kẻ qua O cắt AB tại M và cắt AC tại N. Tính diện tích của hình ENMF.



ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 CHUYÊN TP. HÀ NỘI, NĂM HỌC 2016 - 2017

Hướng dẫn giải đề kì trước

(Đề đăng trên TTT2 số 162+162)

Bài 1.

1. Điều kiện $x \geq 1$ hoặc $x \leq 0$. Biến đổi ta được

$x^4 - 2x^3 + x^2 - x^2 + x - \sqrt{2(x^2 - x)} = 0$. (1)

Đặt $t = \sqrt{2(x^2 - x)} \geq 0$.

Từ (1) $\Leftrightarrow \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} - t = 0 \Leftrightarrow t = 0$ hoặc $t = 2$.

- **TH1.** $t = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 1$ (thỏa mãn).
- **TH2.** $t = 2 \Leftrightarrow \sqrt{2(x^2 - x)} = 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 2$ (thỏa mãn).

Vậy phương trình có tập nghiệm là $\{-1; 0; 1; 2\}$.

2. Cộng theo vế của 2 phương trình ta có

$\Leftrightarrow (2x - y^2)^2 + (x - 2)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 2x - y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \pm 2. \end{cases}$

Thử lại ta được $x = y = 2$.

Vậy nghiệm $(x; y)$ của hệ phương trình là $(2; 2)$.

Bài 2.

1. Đẳng thức đã cho tương đương với

$(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2] = 0$

$\Rightarrow a + b + c = 0$ hoặc $a = b = c = 0$ (loại).

Thay vào P được

$P = \frac{ab^2}{-2ab} + \frac{bc^2}{-2bc} + \frac{ca^2}{-2ca} = \frac{-1}{2}(a + b + c) = 0.$

2. Ta có

$2^x.x^2 = 9y^2 + 6y + 16 \Leftrightarrow 2^x.x^2 = (3y + 1)^2 + 15.$

- **TH1.** x là số lẻ $\Rightarrow x = 2k + 1$

$\Rightarrow 2^{2k+1}.x^2 = 2.4^k.x^2.$

Vì 4^k chia 3 dư 1 và x^2 chia 3 dư 0 hoặc 1

nên $2.4^k.x^2$ chia cho 3 dư 0 hoặc 2.

Mà $(3y + 1)^2 + 15$ chia cho 3 dư 1.

Vậy trường hợp x lẻ không thỏa mãn.

- **TH2.** Nếu x chẵn $\Rightarrow x = 2k$

$\Rightarrow 2^{2k}.x^2 - (3y + 1)^2 = 15$

$\Rightarrow (2^k.x - 3y - 1)(2^k.x + 3y + 1) = 15.$

Vì $x, y \in \mathbb{N} \Rightarrow (2^k.x + 3y + 1) > (2^k.x - 3y - 1)$ khi đó xảy ra 2 trường hợp sau

$\begin{cases} 2^k.x - 3y - 1 = 1 \\ 2^k.x + 3y + 1 = 15 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} 2^k.x - 3y - 1 = 3 \\ 2^k.x + 3y + 1 = 5. \end{cases}$

Từ trên tính được $x = 2$ và $y = 0$.

Bài 3.

1. Biến đổi vế trái của bất đẳng thức ta có

$VT = 2(a + b + c) - \left(\frac{2ab^2}{a + b^2} + \frac{2bc^2}{b + c^2} + \frac{2ca^2}{c + a^2}\right)$. (1)

Mặt khác

$a + b^2 \geq 2b\sqrt{a}; b + c^2 \geq 2c\sqrt{b}; c + a^2 \geq 2a\sqrt{c}.$

Suy ra

$\left(\frac{2ab^2}{a + b^2} + \frac{2bc^2}{b + c^2} + \frac{2ca^2}{c + a^2}\right) \leq (b\sqrt{a} + c\sqrt{b} + a\sqrt{c})$

$\leq \left(\frac{b + ab}{2} + \frac{c + bc}{2} + \frac{a + ca}{2}\right)$ (2).

Vì $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2) = 9 \Rightarrow a + b + c \leq 3$

$\Rightarrow a + b + c \geq ab + bc + ca$. (3)

Từ (1); (2) và (3) ta có

$\frac{2a^2}{a + b^2} + \frac{2b^2}{b + c^2} + \frac{2c^2}{c + a^2} \geq a + b + c.$

2. Đặt $A = 2 + 2\sqrt{12n^2 + 1} \Rightarrow A - 2 = 2\sqrt{12n^2 + 1}$

$\Rightarrow A^2 - 4A = 48n^2$. (1)

Từ (1) ta có $A^2 \vdots 4 \Rightarrow A \vdots 2 \Rightarrow A = 2k$ $(k \in \mathbb{N})$.

Thay vào (1) ta có $k^2 - 2k = 12n^2$. (2)

Từ (2) ta có $k \vdots 2 \Rightarrow k = 2m$.

Thay vào (2) ta có $m(m - 1) = 3n^2$.

Vì $(m, m - 1) = 1$ nên $m \vdots 3$ hoặc $(m - 1) \vdots 3$.

TH1. $m \vdots 3 \Rightarrow m = 3a^2$ và $m - 1 = b^2$ $(a, b \in \mathbb{N})$

$\Rightarrow 3a^2 - b^2 = 1 \Rightarrow b^2 + 1 = 3a^2 \vdots 3$ (vô lí).

TH2. $m - 1 \vdots 3 \Rightarrow m = a^2$ và $m - 1 = 3b^2$ $(a, b \in \mathbb{N})$

$\Rightarrow A = 4m = 4a^2 = (2a)^2$ là số chính phương.

Bài 4.

1. Gọi L là điểm đối xứng của A qua O, khi đó BHCL là hình bình hành $\Rightarrow$ P, H, L, M thẳng hàng.

Suy ra $\widehat{APH} = 90^o$.

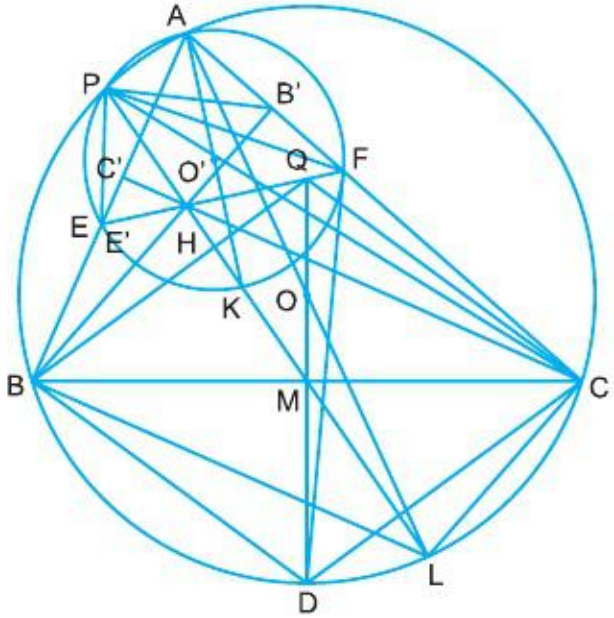
Vậy A, P, C', H, B' cùng thuộc đường tròn đường

kính AH.

Ta có $\widehat{AB'P} = \widehat{AC'P} \Rightarrow \widehat{PC'B} = \widehat{PB'C}$

và $\widehat{PBC'} = \widehat{PBA} = \widehat{PCA} = \widehat{PCB'}$.

Vậy $\Delta BPC' \backsim \Delta CPB'$. (1)



2. a) Chứng minh tứ giác PEKF nội tiếp.

Vì PE là phân giác của góc $\widehat{BPC'}$

$\Rightarrow \dfrac{EB}{EC'} = \dfrac{PB}{PC'}$.

Tương tự ta có $\dfrac{FC}{FB'} = \dfrac{PC}{PB'}$

Mà $\dfrac{PB}{PC'} = \dfrac{PC}{PB'}$ (theo (1))

Từ đó suy ra $\dfrac{EB}{EC'} = \dfrac{FC}{FB'}$. (2)

Mặt khác $\Delta BHC' \backsim \Delta CHB'$. (3)

Từ (2) và (3) ta có E, H, F thẳng hàng và theo (1) có $\dfrac{PE}{PF} = \dfrac{BC'}{CB'} = \dfrac{HE}{HF}$.

$\Rightarrow$ PH là phân giác của $\widehat{EPF}$.

Vậy PH đi qua điểm chính giữa của cung EF không chứa A.

Lại có ΔAEF cân tại A

$\Rightarrow$ Phân giác AO' đi qua điểm chính giữa của cung EF không chứa A.

Như vậy K là giao điểm của AO' và PH thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔAEF.

Vậy PEKF là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi D là điểm chính giữa cung BC không chứa A của đường tròn ngoại tiếp ΔABC, Q là điểm đối xứng của D qua BC nên BHQC là tứ giác nội tiếp.

Suy ra $\widehat{HBQ} = \widehat{HCQ}$.

Gọi E' là giao điểm của HQ và AB, khi đó $\widehat{BHE'} = \widehat{QCB}$.

Ta lại có

$\widehat{QHC} = \widehat{QBC}$, $\widehat{QHC} = \widehat{E'HC'}$, $\widehat{QBC} = \widehat{QCB}$

$\Rightarrow \widehat{BHE'} = \widehat{C'HE'}$

$\Rightarrow$ HE' là phân giác của $\widehat{BHC'} \Rightarrow E' \equiv E$.

Vậy $Q \in EF$.

Ta có DQ là phân giác của BDC nên

$\widehat{QDB} = \dfrac{180^o - \widehat{A}}{2} = \widehat{AEF}$.

Từ đó tứ giác BDQE nội tiếp.

Ta có

$\widehat{BED} = \widehat{BQD} = \dfrac{180^o - \widehat{A}}{2} = 90^o - \dfrac{\widehat{A}}{2}$

$\Rightarrow \widehat{AEO'} + \widehat{BED} = 90^o \Rightarrow O'E \perp DE$.

Vậy DE là tiếp tuyến của (O').

Chứng minh tương tự, DF là tiếp tuyến của (O').

Vậy nên các tiếp tuyến của (O') tại E và F cắt nhau tại D nằm trên đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Bài 5. Không mất tính tổng quát giả sử các số đã cho đều là các số nguyên dương không cùng chẵn.

Gọi S là tổng của 2017 số đã cho. Khi đó xảy ra 2 trường hợp sau:

- **TH 1.** Nếu S là số chẵn

Ta có các số không cùng lẻ, suy ra có ít nhất một số chẵn nên tồn tại 2 số chẵn lẻ cạnh nhau. Vì vậy, khi bỏ đi 2 số này thì 2015 số còn lại không thể chia thành hai nhóm có tổng bằng nhau.

- **TH 2.** Nếu S là số lẻ

Tồn tại hai số cạnh nhau có cùng tính chẵn lẻ (vì nếu không chúng sẽ chẵn lẻ luân phiên, không thể xảy ra điều này vì 2017 là số lẻ), bỏ đi hai số này ta thấy các số còn lại không thể chia thành hai nhóm mà tổng các số ở hai nhóm bằng nhau.

Vậy từ hai trường hợp trên suy ra tồn tại hai số thỏa mãn yêu cầu.

Kì này IQ trong vườn Anh

Các từ sau được sắp xếp theo một quy luật nhất định:

AUSTRALIA
RAISIN
CREASE
PATOIS
VIRTUOSO
...

Bạn hãy chọn 1 từ trong số 4 từ dưới đây để điền vào vị trí tiếp theo của dãy từ trên:
MAIN; SCHISM; GRANITOID; GENEROUS.

ĐỨC NGUYỄN *(st)*

DLM.VN

Kết quả Ô chữ CHEMICAL ELEMENTS (TTT2 số 161+162)

Hầu hết các bạn đều điền như sau:

Hàng ngang (từ trên xuống): CARBON; SULFUR; IODINE; ZINC; PHOSPHORUS: LEAD.

Cột dọc (Từ trái sang phải): IRON; OXYGEN; ALUMINIUM; NEON.

Cũng có không ít bạn chọn SILVER (vào chỗ SULFUR), do đó ALUMINIUM sẽ phải thay bằng AMERICIUM.

Cả hai cách điền đều đúng và những bạn sau may mắn được nhận quà: *Hạ Hiền Lương*, 7A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Đỗ Tiến Dũng*, 7A1, THCS Vĩnh Yên, Vĩnh Yên, **Vĩnh Phúc**; *Hoàng Như Diện*, 8A2, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Nguyễn Lê Bình*, 8A1, THCS Giảng Võ, Ba Đình, **Hà Nội**; *Ngô Hoàng Anh*, 6D, THCS Hoa Quảng, Diễn Châu, **Nghệ An**.

Chủ Vườn

ĐẾN VỚI TIẾNG HÁN

Bài 68: 河内有很多博物馆

Hà Nội có rất nhiều viện bảo tàng

(Tiếp theo kì trước)

ThS. NGUYỄN VŨ LOAN

LTS. Nếu biết tiếng Hán bạn sẽ:

1. Hiểu các từ Hán Việt, sử dụng tốt hơn tiếng Việt của mình. Trong kho từ vựng tiếng Việt rất nhiều từ Hán Việt.

2. Đọc được sách cổ, văn bia bằng chữ Hán và Hán Nôm, thêm hiểu văn chương, lịch sử nước Nam mình.

3. Hiểu ngôn ngữ mà cứ 5 người trên thế giới có hơn 1 người dùng. Dễ dàng hợp tác, làm ăn với các nước và vùng lãnh thổ Trung Quốc, Hồng Kông, Đài Loan, Singapore và cả Nhật Bản, Hàn Quốc. Nếu biết cả tiếng Anh và tiếng Hán thì thật là tuyệt.

Tập đọc.

1. 我去过河内博物馆。 Wǒ qùguò Hénèi bówùguǎn.
2. 今天的作业没有昨天的作业那么难，昨天的作业难得不得了。
   Jīntiān de zuòyè méiyǒu zuótiān de zuòyè nàme nán, zuótiān de zuòyè nándé bùdéliǎo.
3. 港的冬天没有河内那么冷，河内的冬天太冷了。
   Xiàn gǎng de dōngtiān méiyǒu Hénèi nàme lěng, Hénèi de dōngtiān tài lěngle.
4. 我们学校有一个很大的图书馆，图书馆里有很多书，我常常去那里看书。
   Wǒmen xuéxiào yǒu yīgè hěn dà de túshū guǎn, túshū guǎn lǐ yǒu hěnduō shū, wǒ chángcháng qù nàlǐ kànshū.

Bài tập.

1. Chọn đúng ✓ hoặc sai ✕ cho các câu sau:

1) 河内没有我出生的城市那么大。 (✕)
2) 河内很大，人很多。 ( )
3) 还剑湖在河内中心。 ( )
4) 河内有十三多个博物馆。 ( )
5) 博物馆的展览没有意思。 ( )
6) 河内有很多湖。 ( )

2. Đọc và nối

1) 你姓什么？	a) 我是越南人。
2) 你叫什么名字？	b) 我的出生日期是二零零四年十二月四号。
3) 你是哪国人？	c) 我从胡志明市来。
4) 你在哪儿出生？	d) 我姓阮。
5) 你的生日是几月几号？	e) 我的电话是38526xx
6) 你家在哪儿？	f) 我在河内出生。
7) 你从哪儿来？	g) 我叫小玲。
8) 你的电话是多少？	h) 我家在胡志明市

UNIT 21.
THE EARTH'S MAGNETISM

MORIS VŨ

A magnetic field is a region around a magnet in which objects are affected by the magnetic force. The Earth has a magnetic field which acts as though there were a giant bar magnet in its centre, lined up approximately between its geographic north and south poles, although the angle is constantly changing. The north pole of a compass points towards a point called magnetic north, its south pole to magnetic south.

Physics terms

magnetic	từ, từ tính
magnetism	từ học, hiện tượng từ
magnet	nam châm
magnetic field	từ trường
magnetic force	từ lực
region	vùng, miền
affect	tác động
Earth	Trái đất
act	tác dụng, ảnh hưởng
giant	khổng lồ
bar	thanh
geographic	(thuộc) địa lí
north	bắc
south	nam
pole	cực
permanent magnet	nam châm vĩnh cửu
magnetisation	từ hóa, nam châm hóa

Practice.

Bạn hãy dịch bài khóa trên nói về từ trường của Trái đất dựa vào các từ vựng đã cho. Tòa soạn chờ bài viết (bài dịch) tốt của bạn. Bài dịch tốt và gửi sớm (theo dấu bưu điện) sẽ được chọn đăng và trao thưởng.

SUY NGHĨ VỀ MỘT DÃY BẤT ĐẲNG THỨC

CAO MINH QUANG
(GV. THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long)

Nhận xét. Với hai số thực dương x, y ta có

$$\frac{(x^2+y^2)^3}{(x+y)^3} \ge \frac{x^3+y^3}{2} \ge \frac{(x+y)(x^2+xy+y^2)}{6}$$

$$\ge \left(\frac{x+y}{2}\right)^3 \ge \frac{xy(x+y)}{2}. \quad (1)$$

Chứng minh. Từ $(x+y)^2 \ge 2xy$, suy ra

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^3 \ge \frac{xy(x+y)}{2}.$$

Vì $(x-y)^2 \ge 0$ và $(x+y)(x-y)^2 \ge 0$, suy ra

$$\frac{x^3+y^3}{2} \ge \frac{(x+y)(3x^2-3xy+3y^2)}{6}$$

$$= \frac{(x+y)(2(x-y)^2+(x^2+xy+y^2))}{6}$$

$$\ge \frac{(x+y)(x^2+xy+y^2)}{6}.$$

$$\frac{(x+y)(x^2+xy+y^2)}{6} = \frac{(x+y)(4x^2+4xy+4y^2)}{24}$$

$$= \frac{(x+y)(3(x+y)^2+(x-y)^2)}{6} \ge \left(\frac{x+y}{2}\right)^3.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$x^3+y^3 = \frac{(x+y)^4(4x^2-4xy+4y^2)}{4(x+y)^3}$$

$$\le \frac{[(x+y)^2+(x+y)^2+(4x^2-4xy+4y^2)]^3}{27.4(x+y)^3}$$

$$= \frac{2(x^2+y^2)^3}{(x+y)^3}.$$

Kết hợp các bất đẳng thức trên ta được dãy bất đẳng thức (1).

Các đẳng thức ở (1) xảy ra khi x = y.

Sau đây chúng ta sẽ xét một số bài toán áp dụng dãy bất đẳng thức (1).

Bài toán 1. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \ge \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3. \quad (2)$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức (1) với số thực dương d ta có

$$\frac{a^3+b^3}{2} \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^3; \quad \frac{c^3+d^3}{2} \ge \left(\frac{c+d}{2}\right)^3.$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên và áp dụng (1) ta có

$$\frac{a^3+b^3+c^3+d^3}{2} \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 + \left(\frac{c+d}{2}\right)^3$$

$$\ge 2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}\right)\right]^3 = \frac{1}{32}(a+b+c+d)^3.$$

Với $d = \frac{a+b+c}{3}$, từ bất đẳng thức trên ta có

$$\frac{a^3+b^3+c^3+\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3}{2}$$

$$\ge \frac{1}{32}\left(a+b+c+\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = 2\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$$

$$\Rightarrow \frac{a^3+b^3+c^3}{3} \ge \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3.$$

Đẳng thức xảy ra khi a = b = c.

Bài toán 2. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3abc}+\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge 2.$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM và (2) ta có

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\ge\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3=\left(\frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{6}\right)^3$$

$$\ge\frac{1}{6^3}\cdot\left(3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}\right)^3=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}$$

$$\Rightarrow\frac{a^3+b^3+c^3}{3abc}+\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge 2.$$

Đẳng thức xảy ra khi a = b = c.

Bài toán 3. Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng

$$\frac{b+c}{a+\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}}+\frac{c+a}{b+\sqrt[3]{4(c^3+a^3)}}+\frac{a+b}{c+\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}}\le 2.$$

Lời giải. Theo bất đẳng thức (1) ta có

$$\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}\ge b+c.$$

Do đó

$$a+\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}\ge a+b+c$$

$$\Rightarrow\frac{b+c}{a+\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}}\le\frac{b+c}{a+b+c}.$$

Tương tự ta có

$$\frac{c+a}{b+\sqrt[3]{4(c^3+a^3)}}\le\frac{c+a}{a+b+c};$$

$$\frac{a+b}{c+\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}}\le\frac{a+b}{a+b+c}.$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên, ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi a = b = c.

Bài toán 4. Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\le\frac{1}{abc}.$$

Lời giải. Theo bất đẳng thức (1), ta có

$a^3+b^3\ge ab(a+b)$.

Suy ra $a^3+b^3+abc\ge ab(a+b+c)$.

Do đó $\dfrac{1}{a^3+b^3+abc}\le\dfrac{1}{ab(a+b+c)}$.

Tương tự ta có

$$\frac{1}{b^3+c^3+abc}\le\frac{1}{bc(a+b+c)};$$

$$\frac{1}{c^3+a^3+abc}\le\frac{1}{ca(a+b+c)}.$$

Cộng theo vế của các bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi a = b = c.

Bài toán 5. Cho x, y, z > 0 và xyz = 1. Chứng minh rằng

$$\frac{x^9+y^9}{x^6+x^3y^3+y^6}+\frac{y^9+z^9}{y^6+y^3z^3+z^6}+\frac{z^9+x^9}{z^6+z^3x^3+x^6}\ge 2.$$

Lời giải. Đặt $a=x^3$, $b=y^3$, $c=z^3$ thì abc = 1. Bất đẳng thức trở thành

$$\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3+c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3+a^3}{c^2+ca+a^2}\ge 2.$$

Theo bất đẳng thức (1), ta có

$$\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}\ge\frac{a+b}{3}.$$

Tương tự ta có

$$\frac{b^3+c^3}{b^2+bc+c^2}\ge\frac{b+c}{3};\ \frac{c^3+a^3}{c^2+ca+a^2}\ge\frac{c+a}{3}.$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3+c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3+a^3}{c^2+ca+a^2}$$

$$\ge\frac{a+b}{3}+\frac{b+c}{3}+\frac{c+a}{3}=\frac{2}{3}\cdot(a+b+c)$$

$$\ge\frac{2}{3}\cdot 3\sqrt[3]{abc}=2.$$

Suy ra đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi a = b = c hay x = y = z = 1.

Bài toán 6. Cho a, b, c, d > 0 thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=4$. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{b^3+c^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{c^3+d^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{d^3+a^3}{2}}$$
$$\le 2(a+b+c+d)-4.$$

Lời giải. Theo bất đẳng thức (1) ta có

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}\le\frac{a^2+b^2}{a+b}.$$

Do đó

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{b^3+c^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{c^3+d^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{d^3+a^3}{2}}$$
$$\le\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+d^2}{c+d}+\frac{d^2+a^2}{d+a}.$$

Ta sẽ chứng minh

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+d^2}{c+d}+\frac{d^2+a^2}{d+a}$$
$$\le 2(a+b+c+d)-4.(3)$$

Ta lại có $a+b-\frac{a^2+b^2}{a+b}=\frac{2ab}{a+b}=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

Do đó nếu đặt $x=\frac{1}{a}; y=\frac{1}{b}; z=\frac{1}{c}; t=\frac{1}{d}$ và chú ý rằng $x+y+z+t=4$ bất đẳng thức (3) viết lại thành

$$\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+t}+\frac{1}{t+x}\ge 2.\ (4)$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacốpxki ta có

$$(x+y+y+z+z+t+t+x)\cdot\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+t}+\frac{1}{t+x}\right)\ge 4.$$

Do đó (4) đúng. Suy ra đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi x = y = z = t = 1 hay a = b = c = d = 1.

Bài tập vận dụng

Bài 1. (Thái Nhật Phượng)

Cho x, y, z > 0 thỏa mãn xyz = 1. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2}{x+y+y^3z}+\frac{y^2}{y+z+z^3x}+\frac{z^2}{z+x+x^3y}\ge 3.$$

Bài 2. (Nguyễn Bá Nam)

Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng

$$(a^3+b^3+c^3)\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)$$
$$\ge\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\right).$$

Bài 3. Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\ge\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}.$$

Bài 4. Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{4a^3+4b^3}+\sqrt[3]{4b^3+4c^3}+\sqrt[3]{4c^3+4a^3}$$
$$\le\frac{4a^2}{a+b}+\frac{4b^2}{b+c}+\frac{4c^2}{c+a}.$$

Kết quả (TTT2 số 161+162)

THẾ CỜ (Kì 83)

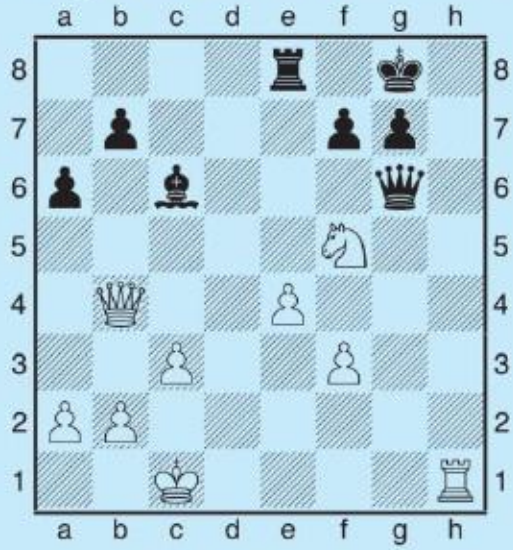
1.♕xg6+ hxg6 2.♖h8#

Các bạn được thưởng kì này: *Nguyễn Đăng Duy*, 8A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Nguyễn Thanh Tùng*, 8D, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc**; *Trần Lâm*, 6D, THCS Lê Hồng Phong, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Nguyễn Văn Hạo*, 9/1, THCS Nguyễn Du, Xã Điện Phương, Điện Bàn, **Quảng Nam**; *Phan An Khánh*, 9A2, Trường THCS Giảng Võ, **Hà Nội**.

LÊ THANH TÚ

THẾ CỜ (Kì 85)

Trắng đi trước chiếu hết sau 2 nước.



LÊ THANH TÚ *(Đại kiện tướng Quốc tế)*

MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC TRONG TAM GIÁC VÀ TỨ GIÁC

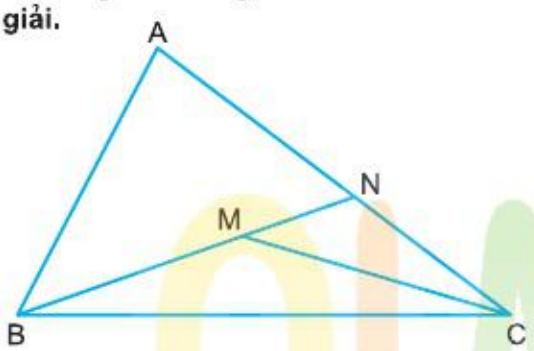
TS. NGUYỄN VĂN NGỌC
(GV. Đại học Thăng Long)

Có nhiều bài toán bất đẳng thức hình học mà khi giải chỉ cần sử dụng kiến thức về bất đẳng thức các cạnh trong tam giác. Sau đây chúng ta sẽ xét một số bài toán hình học ở lớp 7 và lớp 8 như thế.

● **Bất đẳng thức về các cạnh trong tam giác:** Trong một tam giác có độ dài ba cạnh là a, b, c thì $|b - c| < a < b + c$.

Bài toán 1. Gọi M là điểm nằm bên trong tam giác ABC. Chứng minh rằng $MB + MC < AB + AC$.

Lời giải.



Gọi N là giao điểm của BM và AC.

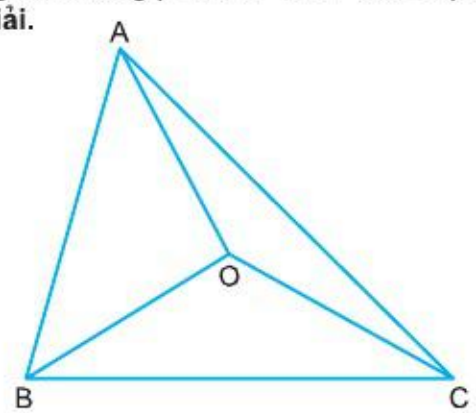
Áp dụng bất đẳng thức tam giác ta có

$BM + MC < BM + MN + NC = BN + NC < AB + AN + NC = AB + AC$.

Bài toán 2. Gọi O là điểm nằm trong tam giác ABC có nửa chu vi là p.

Chứng minh rằng $p < OA + OB + OC < 2p$.

Lời giải.



Theo bất đẳng thức tam giác ta có

$AB < OA + OB$; $BC < OB + OC$;

$CA < OC + OA$.

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta có

$AB + BC + CA < 2(OA + OB + OC)$. (1)

Áp dụng bài toán 1 ta có

$OB + OC < AB + AC$; $OC + OA < BC + BA$;

$OA + OB < CA + CB$.

Cộng theo vế của các bất đẳng thức trên và rút gọn ta có

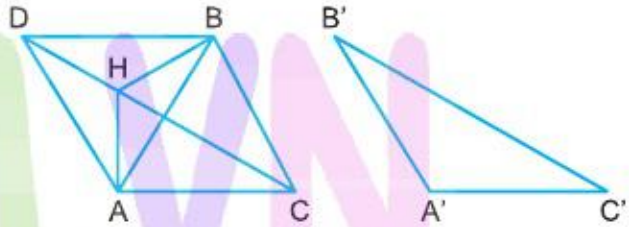
$OA + OB + OC < AB + BC + CA$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

Bài toán 3. Cho hai tam giác ABC và A'B'C' có $AB = A'B'$ và $AC = A'C'$.

Khi đó $\widehat{BAC} < \widehat{B'A'C'} \Leftrightarrow BC < B'C'$.

Lời giải.



● Nếu $\widehat{BAC} < \widehat{B'A'C'}$ ta phải chứng minh $BC < B'C'$.

Trên nửa mặt phẳng bờ AC chứa điểm B lấy điểm D sao cho $\widehat{DAC} = \widehat{B'A'C'}$ và $AD = AB = A'B'$.

Dễ dàng chứng minh $\Delta ADC = \Delta A'B'C'$ (c.g.c).

Suy ra $CD = B'C'$.

Đường phân giác của $\widehat{DAB}$ cắt cạnh CD tại H.

Ta chứng minh được $\Delta DAH = \Delta BAH$ (c.g.c).

Suy ra $DH = BH$.

Từ đó $BC < BH + HC = DH + HC = CD = B'C'$.

● Nếu BC < B'C' ta phải chứng minh $\widehat{BAC} < \widehat{B'A'C'}$.

* Nếu $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$ thì ΔABC = ΔA'B'C' nên BC = B'C' (mâu thuẫn với BC < B'C').

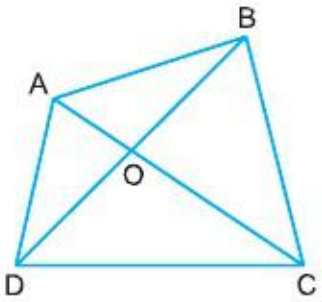
* Nếu $\widehat{BAC} > \widehat{B'A'C'}$ thì theo chứng minh trên ta có BC > B'C' (mâu thuẫn với BC < B'C').

Vậy $\widehat{BAC} < \widehat{B'A'C'}$.

Bài toán được chứng minh.

Bài toán 4. Cho tứ giác lồi ABCD. Chứng minh rằng AB + BC + CD + DA < 2(AC + BD).

Lời giải.



Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Theo bất đẳng thức tam giác ta có

AB < OA + OB; BC < OB + OC;

CD < OC + OD; DA < OD + OA.

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

AB + BC + CD + DA < 2(OA + OB + OC + OD) = 2(AC + BD).

Bài toán 5. Cho tứ giác lồi ABCD. Gọi M, N là các điểm nằm trong tứ giác đó sao cho DMNC là tứ giác lồi. Chứng minh rằng

DM + MN + NC < DA + AB + BC.

Lời giải.

● TH1. Đường thẳng MN cắt cạnh AD tại P và cắt cạnh BC tại Q.

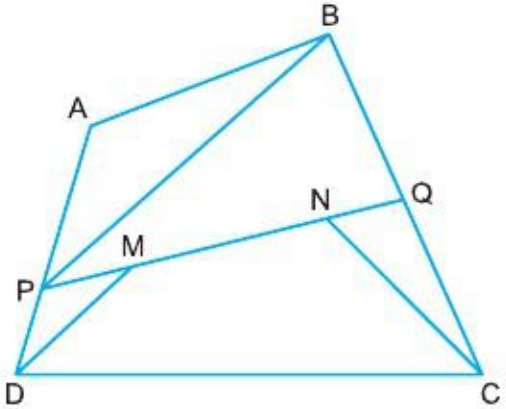
Theo bất đẳng thức tam giác ta có

DM + MN + NC < (DP + PM) + MN + (NQ + QC)

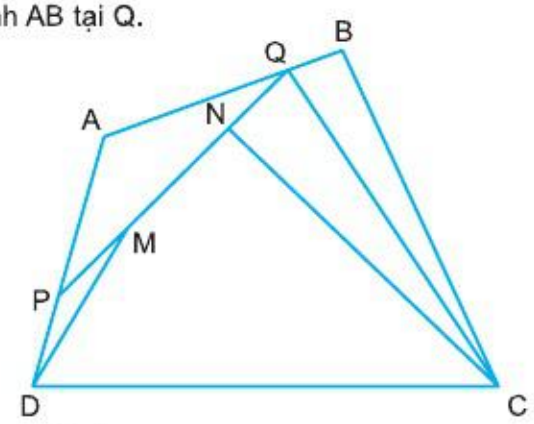
= DP + (PM + MN + NQ) + QC = DP + PQ + QC

< DP + (PB + BQ) + QC = DP + PB + BQ + QC

< DP + PA + AB + BC = DA + AB + BC.



● TH 2. Đường thẳng MN cắt cạnh AD tại P và cắt cạnh AB tại Q.



Theo bất đẳng thức tam giác ta có

DM + MN + NC < (DP + PM) + MN + (NQ + QC)

= DP + (PM + MN + NQ) + QC = DP + PQ + QC

< DP + (PA + AQ) + QB + BC

= (DP + PA) + (AQ + QB) + BC = DA + AB + BC.

● TH 3. Đường thẳng MN cắt cạnh AB tại P và cắt cạnh BC tại Q chứng minh tương tự TH2.

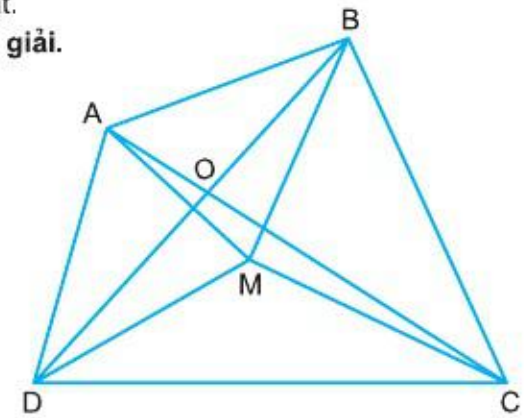
Bài toán 6. Cho điểm M nằm trong tứ giác ABCD có nửa chu vi là p.

a) Chứng minh rằng MD + MC < DA + AB + BC.

b) Chứng minh rằng $p < MA + MB + MC + MD < \frac{3}{2}p$;

c) Tìm vị trí của M để MA + MB + MC + MD nhỏ nhất.

Lời giải.



a) Bạn đọc tự chứng minh tương tự các bài trên.

b) Theo bất đẳng thức tam giác ta có

$AB < MA + MB$; $BC < MB + MC$;

$CD < MC + MD$; $DA < MD + MA$.

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên và rút gọn ta được

$p < MA + MB + MC + MD$. (1)

Áp dụng phần a ta có

$MD + MC < DA + AB + BC$;

$MC + MB < CD + DA + AB$;

$MB + MA < BC + CD + DA$;

$MA + MD < AB + BC + CD$.

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên và rút gọn ta được

$2(MA + MB + MC + MD) < 3p$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

c) Gọi O là giao điểm của AC và BD. Ta có

$MA + MC \geq AC$; $MB + MD \geq BD$.

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

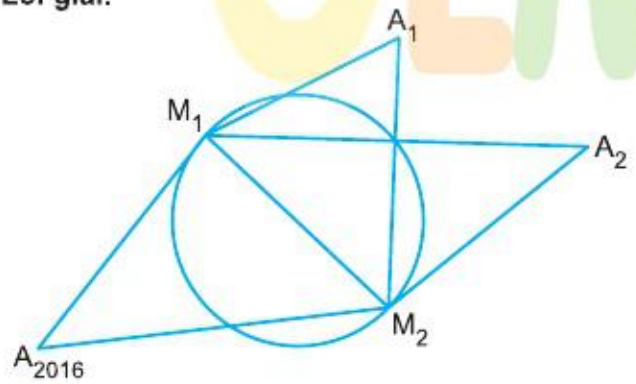
$MA + MC + MB + MD \geq AC + BD$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi M ■ O.

Vậy $MA + MC + MB + MD$ nhỏ nhất khi M ■ O.

Bài toán 7. Cho đường tròn (O) bán kính 1 và 2016 điểm $A_1, A_2, A_3, ..., A_{2016}$. Chứng minh rằng tồn tại một điểm M thuộc đường tròn (O) sao cho $MA_1 + MA_2 + MA_3 + ... + MA_{2016} \geq 2016$.

Lời giải.



Gọi M_1 và M_2 là hai điểm trên đường tròn đối xứng với nhau qua tâm O.

Ta có

$A_1M_1 + A_1M_2 \geq M_1M_2 = 2$.

$A_2M_1 + A_2M_2 \geq M_1M_2 = 2$.

$A_3M_1 + A_3M_2 \geq M_1M_2 = 2$.

...

$A_{2016}M_1 + A_{2016}M_2 \geq M_1M_2 = 2$.

Cộng theo vế của 2016 bất đẳng thức trên ta có $(M_1A_1 + M_1A_2 + M_1A_3 + ... + M_1A_{2016}) + (M_2A_1 + M_2A_2 + M_2A_3 + ... + M_2A_{2016}) \geq 2.2016$.

Do đó tồn tại điểm M trùng với M_1 hoặc M_2 thỏa mãn $MA_1 + MA_2 + MA_3 + ... MA_{2016} \geq 2016$.

Nhận xét. *Bài toán trên có thể thay số 2016 bằng một số nguyên dương lớn hơn 1 bất kì.*

Bài tập vận dụng

Bài 1. Cho tam giác ABC. Gọi M, N là hai điểm nằm trong tam giác ABC sao cho BMNC là tứ giác lồi. Chứng minh rằng $BM + MN + NC < AB + AC$.

Bài 2. Cho tam giác ABC. Gọi N, P, Q thứ tự là trung điểm của AB, BC, CA. M là điểm nằm trong tam giác NPQ. Chứng minh rằng

$$MA + MB + MC < \frac{3}{4}(AB + BC + CA).$$

Bài 3. Cho hình thang ABCD có AB // CD và AB < CD. Gọi P, H, Q thứ tự là trung điểm của DA, AB, BC. Gọi M, N là các điểm nằm trên PQ sao cho PM = MN = NQ.

Chứng minh rằng $DM + MN + NC < DH + HC$.

Bài 4. Cho hình bình hành ABCD có $\widehat{A} < 90^o$. Chứng minh rằng BD < AC.

Bài 5. Cho tam giác ABC có AB = c, BC = a, CA = b. Độ dài các đường trung tuyến ứng với các cạnh a, b, c lần lượt là m_a, m_b, m_c. Chứng minh rằng

$$2(m_a + m_b + m_c) < 3(a + b + c) < 4(m_a + m_b + m_c).$$

Bài 6. Cho tam giác ABC có AB = c, BC = a, CA = b. Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{a+b+c}{2r} < \frac{1}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{C}{2}} < \frac{a+b+c}{r}.$$

Bài 7. Cho tam giác ABC có diện tích S. Gọi M là điểm nằm trong tam giác.

Chứng minh rằng $4S \leq AM.BC + BM.CA + CM.AB$.

Bài 13NS. Tìm các số nguyên x sao cho 3072 chia hết cho $(x + 2015)^2 + |x + 2016|$.

TẠ THẬP *(TP. Hồ Chí Minh)*

Bài 14NS. Tìm các số thực không âm x, y, z, t thỏa mãn $\sqrt{x} + \sqrt{yz} = 2 + t$; $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 3$.

NGUYỄN KHÁNH TOÀN *(GV. THCS Bắc Hải, Tiền Hải, Thái Bình)*

Bài 15NS. Cho tam giác ABC có các đường trung tuyến BE, CF cắt nhau tại G, với BF + FG = CE + EG. Chứng minh rằng ABC là tam giác cân.

NGUYỄN KHÁNH NGUYÊN *(Số 3/29, đường Đà Nẵng, Hải Phòng)*

Kết quả CUỘC THI GIẢI TOÁN DÀNH CHO NỮ SINH (TTT2 số 161+162)

Bài 10NS. Ta có $a^3 - b^3 - c^3 = 3abc$

$\Rightarrow a^3 = b^3 + c^3 + 3abc \Rightarrow a > b$ và $a > c$ (vì $a, b, c \in \mathbb{N}^*$)

$\Rightarrow 2a > b + c \Rightarrow 4a > 2(b + c)$. Mà $a^2 = 2(b + c)$. (1)

$\Rightarrow 4a > a^2 \Rightarrow 0 < a < 4$ (vì $a \in \mathbb{N}^*$). (2)

Từ (1) suy ra $a \vdots 2$ (vì $b, c \in \mathbb{N}^*$). (3)

Từ (2) và (3) suy ra a = 2.

Thay a = 2 vào (1) ta được b + c = 2 kết hợp với $b, c \in \mathbb{N}^*$, ta có b = c = 1. Vậy a = 2; b = 1; c = 1.

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải đúng: *Nguyễn Thùy Dương, Vũ Linh Chi, Nguyễn Thu Hiền, Bùi Thị Quỳnh*, 9A3, *Phạm Thị Minh Ngọc*, 8D, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Mai Thanh Tâm*, 8A, THCS Lý Tự Trọng, Bình Xuyên; *Khổng Thị Thu Thủy*, 9B, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Thị Quỳnh Anh*, 9A1, THCS Thị trấn Quán Hành, Nghi Lộc; *Lê Ánh Minh*, 8D, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Nguyễn An Na, Bùi Thị Minh Thư, Nguyễn Hải Ly*, 8A, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh.**

Bài 11NS. Ta có $a^3 + b^3 + 3ab = 1$

$\Leftrightarrow (a + b)^3 - 3ab(a + b) + 3ab - 1 = 0$

$\Leftrightarrow [(a + b)^3 - 1^3] - [3ab(a + b) - 3ab] = 0$

$\Leftrightarrow (a + b - 1)[(a + b)^2 + (a + b) + 1 - 3ab] = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a + b - 1 = 0 \\ (a+b)^2 + (a+b) + 1 - 3ab = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} a + b = 1 & (1) \\ a^2 + b^2 + 1 - ab + a + b = 0 & (2) \end{array}\right.$$

Ta có (2) $\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2 - 2ab + 2a + 2b = 0$

$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (a + 1)^2 + (b + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = -1$.

Suy ra a + b = –2. (3)

Từ (1) và (3) ta có a + b = 1 hoặc a + b = –2.

Nhận xét. Bài toán trên xuất phát từ hằng đẳng thức $2(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) = (x + y + z)[(x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2]$.

Các bạn sau có lời giải đúng: *Nguyễn Thùy Dương, Vũ Linh Chi, Nguyễn Thu Hiền, Bùi Thị Quỳnh, Bùi Thùy Linh*, 9A3, *Phạm Thị Minh Ngọc*, 8D, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Khổng Thị Thu Thủy*, 9B, *Hoàng Thị Ngọc Diệp*, 8E1, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Thị Quỳnh Anh*, 9A1, THCS Thị trấn Quán Hành, Nghi Lộc, **Nghệ An**; *Nguyễn An Na, Bùi Thị Minh Thư, Nguyễn Hải Ly*, 8A, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh.**

Bài 12NS. *Bạn đọc tự vẽ hình.*

- TH1. E nằm giữa A và D

Vì tứ giác ABCD nội tiếp nên $\widehat{ACK} = \widehat{BDE}$ (cùng chắn cung AB).

Vì tứ giác AKBE nội tiếp nên $\widehat{AKC} = \widehat{BED}$ (cùng bù với $\widehat{AEB}$).

Xét ΔACK và ΔBDE có $\widehat{ACK} = \widehat{BDE}$; $\widehat{AKC} = \widehat{BED}$.

Suy ra ΔACK ∽ ΔBDE (g.g) kết hợp với ΔBDE cân tại D (vì DE = DB), suy ra ΔACK cân tại C.

- TH2. Trường hợp A nằm giữa E và D.

Chứng minh tương tự.

- TH3. E ≡ A. Chứng minh tương tự.

Nhận xét. Các bạn có lời giải đúng: *Nguyễn Thùy Dương*, 9A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, *Trần Yến Linh*, 9A4, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh, **Phú Thọ**; *Khổng Thị Thu Thủy*, 9B, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Thị Quỳnh Anh*, 9A1, THCS Thị trấn Quán Hành, Nghi Lộc, **Nghệ An.**

Các bạn được thưởng kì này: *Nguyễn Thùy Dương*, 9A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Khổng Thị Thu Thủy*, 9B, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Thị Quỳnh Anh*, 9A1, THCS Thị trấn Quán Hành, Nghi Lộc, **Nghệ An**; *Nguyễn An Na, Bùi Thị Minh Thư*, 8A, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh.**

Ảnh các bạn được thưởng ở bìa 4.

NGUYỄN HIỆP

ĐỀ ĐỀ XUẤT CUỘC THI
CÂU LẠC BỘ TOÁN TUỔI THƠ TOÀN QUỐC

1. 6 digits 0, 1, 2, 3, 4, 5 are used to form 6-digit numbers which have distinct digits and are divisible by 15 and not divisible by 10. How many such numbers can be formed?

2. Calculate

$1234^2 + 625^2 + 859(859 - 1250)$
$+ 1234(1250 - 1718)$.

3. Find $\overline{ab}$ such that $\overline{98ab} \vdots 36$.

4. Solve the following equation.

$(2x - 1)^3 - 6(2x - 1)^2 + 12(2x - 1) = 8$.

5. Factorize the following polynomial.

$x^2(x^2 + 2x + 1) - 2x^2 - 2x + 1$.

6. Solve the following equation.

$(x + 2) + (2x + 2^2) + (3x + 2^3) + ... + (9x + 2^9)$
$= 10x + 2^{10}$.

7. Given that $x + \frac{1}{x} = \frac{13}{6}$.

Evaluate the following expression.

$$A = \frac{(x-1)^2(x^2+x+1)}{x^2}.$$

8. Given a right-angle triangle ABC with the right angle at A, its median AM, and its internal angle bisector AD. Find the area of triangle ADM given that AB = 21 cm and AC = 28 cm.

9. Solve the following inequation.

$$\frac{6x-4}{x^2+1} \geq 1.$$

10. Given the quadrilateral ABCD having $\angle BAD = \angle ADC = 90^\circ$, AD = 12 cm, and BC = 15 cm. Let M and N be the midpoints of BD and AC respectively. Find the length of MN.

11. Find a natural number n such that

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + ... + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{11}{45}.$$

12. Find x and y such that

$2x^2 + y^2 - 2xy - 2y + 2 = 0$.

13. Given a triangle ABC with a fixed side BC and a moving vertex A. Let M and N be the midpoints of AB and AC, respectively. Let D and E, be the orthogonal projection of the points M and N onto BC, respectively. On which line does the point A move such that DMNE is a square?

14. Calculate

$2017 \times 20152015 - 2015 \times 20162016$.

15. A natural number gives remainders of 1 and 3 when divided by 4 and 5 respectively. What is the remainder when that number is divided by 40?

TNP

CÂU LẠC BỘ TOÁN TUỔI THƠ

NGUYỄN KHÁNH CHUNG
(GV. trường Lô-mô-nô-xốp, Q. Nam Từ Liêm, Hà Nội)

CLB26. Determine the value of m such that the following inequation $3mx > x + 2$ is satisfied for all value of $x > 1$.

CLB27. Given integers *x, y* such that $3x - 2y + 1 = 0$.
Find *x, y* such that the value of $P = |x| + |y|$ is smallest.

CLB28. Let ABC be an equilateral triangle with AB = 4. Let M, N, P be points lie on sides AB, BC, CD respectively and satisfy the condition $AM = BN = CP = x$ $(0 < x < 4)$.
Find the value of *x* such that triangle MNP's area holds the smallest value.

CLB29. Determine value of *x* satisfying the following equation: $(x^2 + 1)^4 - (2x^2 - 2x + 1)^4 = x^2 - 2x$.

CLB30. Given triangle ABC and D is a point on side BC. Draw parallelogram AEDF where E and F are on AB, AC respectively. Calculate the square of parallelogram AEDF know that triangle BDE's area is 3 and triangle CDF's area is 12.

Kết quả CÂU LẠC BỘ TOÁN TUỔI THƠ (TTT2 số 161+162)

CLB16. Ta có

$A = x^2 + 4y^2 - 4xy + 3x - 6y - 4$

$= (x - 2y)^2 + 3(x - 2y) - 4$

$= (x - 2y)^2 - (x - 2y) + 4(x - 2y) - 4$

$= (x - 2y)(x - 2y - 1) + 4(x - 2y - 1)$

$= (x - 2y - 1)(x - 2y + 4)$.

CLB17. Ta có

$B = n^4 - n^3 + 3n^2 - 2n + 2$

$= n^4 - n^3 + n^2 + 2n^2 - 2n + 2$

$= n^2(n^2 - n + 1) + 2(n^2 - n + 1)$

$= (n^2 - n + 1)(n^2 + 2)$.

Vì $n^2 + 2 \geq 2$ nên để B là số nguyên tố thì

$n^2 - n + 1 = 1 \Rightarrow n = 1$ (vì n là số nguyên dương).

Với n = 1 thì B = 3 là số nguyên tố.

Vậy n = 1.

CLB18. Ta có

$x^2 - 2016x - 2 = 0 \Leftrightarrow x - 2016 - \frac{2}{x} = 0$

$\Leftrightarrow x - \frac{2}{x} = 2016$.

Do đó

$C = \frac{x^4 + x^3 + x^2 - 2x + 4}{x^2} = x^2 + x + 1 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^4}$

$= \left(x - \frac{2}{x}\right)^2 + x - \frac{2}{x} + 5 = 2016^2 + 2016 + 5 = 4066277$.

CLB19. Đặt $n^2 - 4n + 3 = k^2$ $(k \in \mathbb{N})$

$\Leftrightarrow (n - 2)^2 - k^2 = 1 \Leftrightarrow (n + k - 2)(n - k - 2) = 1$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} n + k - 2 = 1 \\ n - k - 2 = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} n + k - 2 = -1 \\ n - k - 2 = -1 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} n = 3 \\ k = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} n = 1 \\ k = 0 \end{cases}\end{array}\right.$$

Vậy số nguyên n phải tìm là n = 1 hoặc n = 3.

CLB20. Kẻ ME // BN, E thuộc AC.

Ta có ME là đường trung bình của ΔBCN, suy ra BN = 2ME.

Xét ΔAMEcó IN // ME, suy ra

$\frac{IN}{ME} = \frac{AI}{AM} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{IN}{BN} = \frac{1}{8}$.

Vậy $\frac{BI}{BN} = \frac{7}{8}$.

Nhận xét. Các bạn được thưởng kì này: *Nguyễn Thùy Dương, Nguyễn Thu Hiền*, 9A3, *Nguyễn Đức Tân*, 8A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Phùng Hoài Thương*, 9A1, THCS Nghi Hương, TX. Cửa Lò; *Trần Thế Trung*, 9A, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An.**

NGUYỄN HIỆP

MỘT SỐ KĨ THUẬT TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC

NGUYỄN KHÁNH CHUNG

Trong các đề thi học sinh giỏi cấp tỉnh, thành phố hoặc các đề thi vào THPT chuyên, ta thường gặp bài toán tính giá trị biểu thức với giá trị của ẩn đã cho trước. Sự thú vị ở các bài toán này nằm ở chỗ biểu thức cần tính có lũy thừa bậc cao, phức tạp; giá trị cho trước của ẩn thường chứa căn và rất khó khăn khi thay trực tiếp. Kĩ thuật thường sử dụng đối với các bài toán này thay vì thay số trực tiếp, ta biến đổi tìm các biểu thức trung gian của ẩn rồi thế vào biểu thức cần tính giá trị cũng được biến đổi rút gọn.

Ví dụ 1. Tính giá trị biểu thức

$A = x^5 + 2x^3 - x + 1$ với $x = \sqrt{\sqrt{2} - 1}$.

Lời giải. Ta có

$x = \sqrt{\sqrt{2} - 1} \Rightarrow x^2 = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow (x^2 + 1)^2 = 2.$

Do đó $x^4 + 2x^2 - 1 = 0$.

Biến đổi biểu thức A ta được

$A = x(x^4 + 2x^2 - 1) + 1 = 0 + 1 = 1.$

Ví dụ 2. Cho $x = \sqrt{\dfrac{1}{2\sqrt{3} - 2} - \dfrac{3}{2(\sqrt{3} + 1)}}$.

Tính giá trị của biểu thức

$$A = \frac{4(x+1)x^{2013} - 2x^{2012} + 2x + 1}{2x^2 + 3x}.$$

(Đề thi HSG tỉnh Thái Bình năm 2013)

Lời giải.

- Biến đổi x ta có

$$x = \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{3} - 2} - \frac{3}{2(\sqrt{3} + 1)}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\sqrt{3} + 2 - 6\sqrt{3} + 6}{8}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{4}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}.$$

$\Rightarrow 2x = \sqrt{3} - 1 \Leftrightarrow 2x + 1 = \sqrt{3}.$

$\Leftrightarrow 4x^2 + 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 1 = 0.$

- Rút gọn biểu thức A

$$A = \frac{4(x+1)x^{2013} - 2x^{2012} + 2x + 1}{2x^2 + 3x}$$

$$= \frac{x^{2012}(4x^2 + 4x - 2) + 2x + 1}{(2x^2 + 2x) + x}$$

$$= \frac{2x + 1}{x + 1} = 2 - \frac{2}{2x + 2}.$$

Thay $2x = \sqrt{3} - 1$ vào biểu thức biểu thức A đã rút gọn có $A = 2 - \dfrac{2}{\sqrt{3} + 1} = 3 - \sqrt{3}$.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng

$x = \sqrt[3]{2\sqrt{7} - 1} + \sqrt[3]{2\sqrt{7} + 1}$ là một nghiệm của phương trình $X^6 - 18X^4 + 81X^2 - 112 = 0$.

Nhận xét. *Đây là dạng toán chứng minh một số đã xác định nhưng ở dạng phức tạp là nghiệm của phương trình cho trước.*

Lời giải. Trong bài toán này, ta biến đổi giả thiết để dẫn tới phương trình đã cho. Nâng lên lũy thừa bậc ba của x và áp dụng hằng đẳng thức $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$, ta có

$x^3 = 2\sqrt{7} - 1 + 2\sqrt{7} + 1 + 3\sqrt[3]{2\sqrt{7} - 1}.\sqrt[3]{2\sqrt{7} + 1}.$

$(\sqrt[3]{2\sqrt{7} - 1} + \sqrt[3]{2\sqrt{7} + 1}).$

$\Rightarrow x^3 = 4\sqrt{7} + 9x$

$\Rightarrow x^3 - 9x = 4\sqrt{7}$.

$\Rightarrow (x^3 - 9x)^2 = 112$

$\Rightarrow x^6 - 18x^4 + 81x^2 - 112 = 0$.

Điều này chứng tỏ x là nghiệm của phương trình $X^6 - 18X^4 + 81X^2 - 112 = 0$.

Sau đây sẽ là 2 ví dụ rút gọn hoặc tính giá trị biểu thức cần sử dụng hệ thức liên hệ của 2 ẩn.

Ví dụ 4. Rút gọn biểu thức

$A = (\sqrt{x - \sqrt{50}} - \sqrt{x + \sqrt{50}}).\sqrt{x + \sqrt{x^2 - 50}}$,

với $x \geq \sqrt{50}$.

Lời giải. Đặt $a = \sqrt{x - \sqrt{50}}$; $b = \sqrt{x + \sqrt{50}}$,

suy ra $a^2 + b^2 = 2x$, $ab = \sqrt{x^2 - 50}$.

Thay vào A ta có

$$A = (a - b).\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2} + ab}$$

$$= (a - b).\sqrt{\frac{(a + b)^2}{2}} = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} = 5.$$

Ví dụ 5. Cho biểu thức $P = (a^{2013} - 8a^{2012} + 11a^{2011}) + (b^{2013} - 8b^{2012} + 11b^{2011})$.

Tính giá trị của P biết $a = 4 + \sqrt{5}$; $b = 4 - \sqrt{5}$.

Lời giải. Ta thấy $a + b = 8$, $ab = 11$, thay vào biểu thức P, ta có

$P = [a^{2013} - (a + b)a^{2012} + ab.a^{2011}]$

$+ [b^{2013} - (a + b)b^{2012} + ab.b^{2011}] = 0 + 0 = 0$.

Bài tập vận dụng

Bài 1. Cho $x = \sqrt{2} + 1$. Tính giá trị của biểu thức $A = (x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 2)^5 + (x^3 - 2x^2 - x - 1)^6$.

Bài 2. Cho $f(x) = (2x^3 - 21x - 29)^{2012}$.

Tính giá trị của f(x) khi $x = \sqrt[3]{7 + \sqrt{\frac{49}{8}}} + \sqrt[3]{7 - \sqrt{\frac{49}{8}}}$.

(Đề thi HSG lớp 9 TP. Hà Nội năm 2012)

Bài 3. Cho $x = \dfrac{2}{\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{2} + 1} - 1} - \dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{2} + 1} + 1}}$.

Tính giá trị của biểu thức

$A = (x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 1)^{2012}$.

Bài 4. Cho x, y thoả mãn

$x = \sqrt[3]{y - \sqrt{y^2 + 1}} + \sqrt[3]{y + \sqrt{y^2 + 1}}$.

Tính giá trị của biểu thức

$A = x^4 + x^3y + 3x^2 + xy - 2y^2 + 1$.

Bài 5. Chứng minh rằng

$a = \sqrt{3 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}} + \sqrt{3 + \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{6}}$

là một nghiệm của phương trình

$x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 14x + 8 = 0$.

(Đề thi HSG lớp 9 tỉnh Thái Bình năm 2014)

CÁC TÍNH CHẤT VÀ ĐÔI ĐIỀU THÚ VỊ VỀ TAM GIÁC VUÔNG

NGUYỄN ĐỨC HẢO *(GV. THCS Lam Sơn, Q. 6, TP. Hồ Chí Minh)*

Tam giác vuông có các tính chất đặc biệt nào? Để trả lời câu hỏi này, học sinh THCS cần phải hệ thống và tóm tắt lại kiến thức hình học và khi cần sẽ vận dụng trong việc giải các bài toán hình học về tam giác vuông và một số bài toán liên quan. Trong cuốn sách giáo khoa THCS không có bài học riêng biệt về điều này. Sau đây là bài viết tổng hợp về các tính chất đó để bạn đọc dễ dàng ôn tập và vận dụng.

1. Các tính chất cơ bản của tam giác vuông

1.1. ΔABC vuông tại A $\Leftrightarrow \hat{B} + \hat{C} = 90^o$.

1.2. ΔABC vuông tại A thì cạnh huyền BC lớn nhất.

1.3. Định lí Pythagoras (thuận và đảo)

ΔABC vuông tại A $\Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$.

1.4. ΔABC vuông tại A với đường cao AH thì 3 tam giác ABC, HBA và HAC đồng dạng với nhau.

1.5. Các hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông ABC có đường cao AH:

$AB^2 = BH.BC$; $AC^2 = CH.CB$; $AH^2 = HB.HC$;

$AH.BC = AB.AC$; $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$.

1.6. a) Tam giác vuông ABC có trung tuyến AM thì

$AM = MB = MC = \dfrac{BC}{2}$.

b) Nếu ΔABC có trung tuyến $AM = \dfrac{BC}{2}$

thì ABC là tam giác vuông.

1.7. ● Nếu tam giác vuông ABC nội tiếp đường tròn thì cạnh huyền là đường kính của đường tròn đó.

● Tam giác nội tiếp được đường tròn có cạnh là đường kính của đường tròn ngoại tiếp thì tam giác này vuông với cạnh huyền là đường kính.

1.8. Các dạng đặc biệt của tam giác vuông

● Tam giác ABC là tam giác vuông cân tại A khi và chỉ khi thỏa mãn một trong ba điều kiện sau:

* $\hat{A} = 90^o$ và $AB = AC$.

* $AB = AC$; $BC = AB\sqrt{2}$.

* $\hat{A} = 90^o$; $\hat{B} = 45^o$ hoặc $\hat{C} = 45^o$.

● ΔABC là nửa tam giác đều khi và chỉ khi thỏa mãn một trong các điều kiện sau:

* $\hat{A} = 90^o$; $\hat{B} = 60^o$ (hoặc $\hat{C} = 60^o$).

* $AC = AB\sqrt{3} = \dfrac{BC\sqrt{3}}{2}$.

* $\hat{A} = 90^o$; $BC = 2AB$ hay $AC = AB\sqrt{3}$.

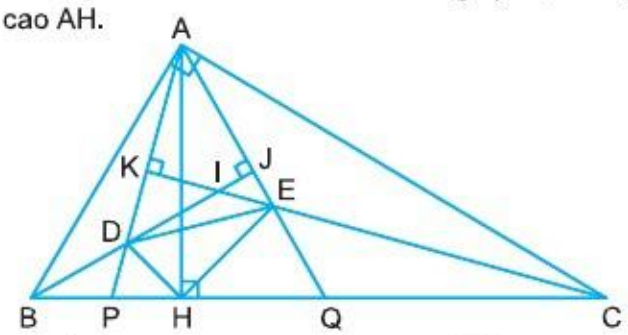
1.9. Diện tích tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH là

$S = \dfrac{AB.AC}{2} = \dfrac{AH.BC}{2}$.

2. Đôi điều thú vị về tam giác vuông

Từ những kiến thức cơ bản trên suy ra các tính chất thú vị dưới đây.

2.1. Tính chất 1. Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH.



● Nếu AP là đường phân giác của $\widehat{BAH}$ ($P \in BH$), thì ΔCAP cân tại C và phân giác của $\widehat{ACB}$ vuông góc với AP tại trung điểm K của AP.

● Nếu AQ là đường phân giác của $\widehat{CAH}$ ($Q \in HC$) thì ΔBAQ cân tại B, và phân giác của $\widehat{ABC}$ vuông

góc với AQ tại trung điểm J của AQ.
(Hai tính chất này bạn đọc tự chứng minh).

2.2. Tính chất 2

Hai tia phân giác của $\hat{B}$ và $\hat{C}$ cắt nhau tại I thì khi đó

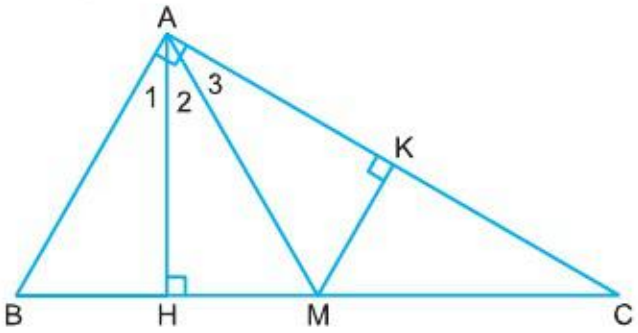
- I là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác vuông ABC.
- I là trực tâm ΔADE (với D và E là tâm của 2 đường tròn nội tiếp ΔAHB và ΔAHC).
- I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔAPQ.
- ΔABC đồng dạng với ΔHDE.

Từ $\Delta HDA \backsim \Delta HEC$ và $\Delta HBA \backsim \Delta HAC$ suy ra $\frac{HD}{HE} = \frac{HA}{HC} = \frac{AB}{AC}$.

2.3. Tính chất 3

Nếu ΔABC có đường cao AH và đường trung tuyến AM chia góc $\widehat{BAC}$ thành 3 góc bằng nhau thì ΔABC là nửa tam giác đều.

Chứng minh.



Ta dễ dàng chứng minh được ΔABM cân tại A.
Mặt khác tam giác cân ABM có AH là đường phân giác nên suy ra $HB = HM = \frac{MB}{2} = \frac{MC}{2}$.

Dựng $MK \perp AC$ tại K.
Ta chứng minh được $\Delta AMK = \Delta AMH$

$\Rightarrow MK = MH \Rightarrow MK = \frac{MC}{2}$.

Như vậy tam giác vuông MKC có

$\hat{C} = 30^o \Rightarrow \widehat{HAC} = 60^o \Rightarrow \widehat{BAC} = 90^o$.

Vậy ΔABC là nửa tam giác đều.

2.4. Tính chất 4. Cho ΔABC ($AB < AC$) có đường cao AH, đường phân giác AD của $\widehat{BAC}$, trung tuyến AM. Biết rằng AD nằm giữa AH và AM. Chứng minh rằng AD là phân giác của $\widehat{HAM}$ khi và chỉ khi $\widehat{BAC} = 90^o$.

Chứng minh.

- Nếu ΔABC có $\widehat{BAC} = 90^o$, ta chứng minh được $\widehat{BAH} = \widehat{ACH} = \widehat{MAC}$, do đó $\widehat{HAD} = \widehat{MAD}$.

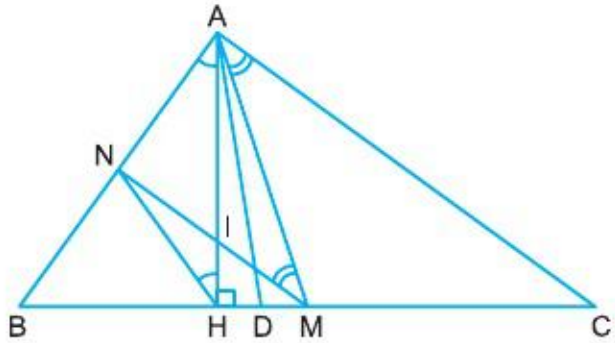
Vậy AD là phân giác của $\widehat{HAM}$.

- Nếu AD là phân giác của $\widehat{HAM}$, ta cần chứng minh $\widehat{BAC} = 90^o$.

Gọi N là trung điểm của AB.

Vì MN // AC nên $\widehat{AMN} = \widehat{MAC}$ (so le trong). (1)
Vì HN là trung tuyến của tam giác vuông AHB nên $HN = NA \Rightarrow \Delta NHA$ cân tại N.

Suy ra $\widehat{AHN} = \widehat{BAH}$. (2)



Vì AD là phân giác của $\widehat{HAM}$ và $\widehat{BAC}$ nên $\widehat{BAH} = \widehat{MAC}$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{AMN} = \widehat{AHN}$.

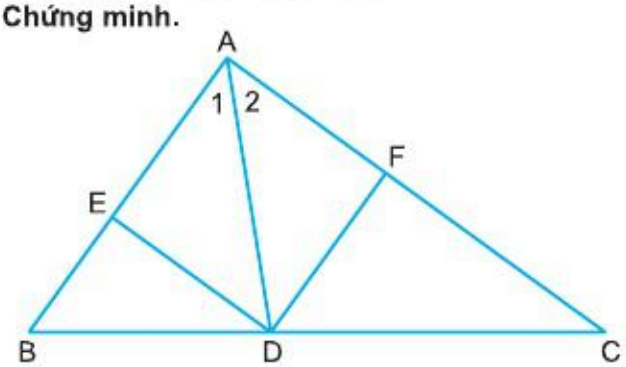
Gọi I là giao điểm của AH và MN, ta chứng minh được $\Delta IMA \backsim \Delta IHN \Rightarrow \Delta INA \backsim \Delta IHM$.

$\Rightarrow \widehat{INA} = 90^o$. Vì MN // CA nên $\widehat{BAC} = 90^o$.

2.5. Tính chất 5. Cho ΔABC có đường phân giác AD. Chứng minh rằng

$\widehat{BAC} = 90^o \Leftrightarrow \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{AD}$.

Chứng minh.



Ta kẻ DE // AC; DF // AB với $E \in AB$ và $F \in AC$, từ đó tứ giác AEDF là hình thoi, suy ra $DE = DF = AE = AF$.

Do DE // AC và DF // AB nên

$\frac{DE}{AC} = \frac{BD}{BC}$ và $\frac{DF}{AB} = \frac{CD}{CB}$

$\Rightarrow \frac{DE}{AC} + \frac{DF}{AB} = \frac{BD + DC}{BC} = \frac{BC}{BC} = 1$

$\Rightarrow \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{DE}$. (*)

• Giả sử có $\widehat{BAC} = 90^o$ thì AEDF là hình vuông.

$\Rightarrow AD = DE\sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{AD}$.

• Từ $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{AD}$ và (*) ta có $AD = DE\sqrt{2}$

$\Rightarrow AD^2 = AE^2 + ED^2$.

Từ đó ΔAED vuông tại E (định lí Pythagoras đảo).
Suy ra hình thoi AEDF là hình vuông.

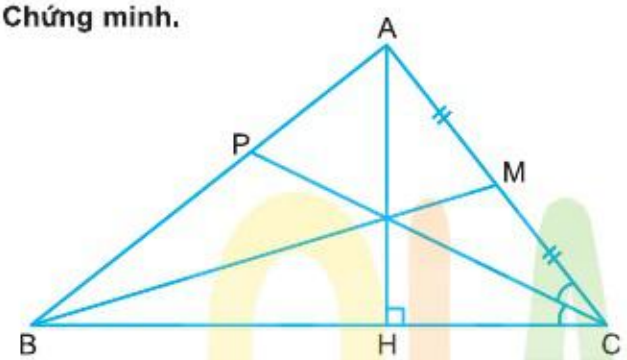
Vậy $\widehat{BAC} = 90^o$.

2.6. Tính chất 6.
Cho ΔABC có đường cao AH, trung tuyến BM và phân giác CP đồng quy tại một điểm.

a) Chứng minh $\widehat{BAC} = 90^o \Leftrightarrow HB = AC$.

b) Tính AB và AC theo BC, với BC = a và $\widehat{A} = 90^o$.

Chứng minh.



a) Theo định lí Ceva ta có

$\frac{PA}{PB}.\frac{HB}{HC}.\frac{MC}{MA} = 1 \Leftrightarrow \frac{PA}{PB} = \frac{HC}{HB}$ (do MC = MA).

$\Leftrightarrow \frac{CA}{CB} = \frac{HC}{HB}$ $\left(\text{vì } \frac{PA}{PB} = \frac{CA}{CB}\right)$. (*)

• Nếu $\widehat{BAC} = 90^o$ và AH ⊥ BC.

Ta có ΔCAB ∽ ΔCHA $\Rightarrow \frac{CA}{CB} = \frac{CH}{CA}$.

Kết hợp với (*) suy ra HB = AC.

• Nếu HB = AC $\Rightarrow \frac{CA}{CB} = \frac{CH}{CA}$.

Lại có góc C chung nên ΔABC ∽ ΔHAC

$\Rightarrow \widehat{BAC} = 90^o$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

b) Gọi a, b, c là độ dài của BC, AC, AB tương ứng.

Do $\widehat{A} = 90^o$ nên HB = b (theo câu trên).

Ta có $b^2 + c^2 = a^2$ và $c^2 = ab \Rightarrow b^2 + ab = a^2$.

$\Rightarrow b^2 + ab - a^2 = 0 \Leftrightarrow \left(b + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4}$

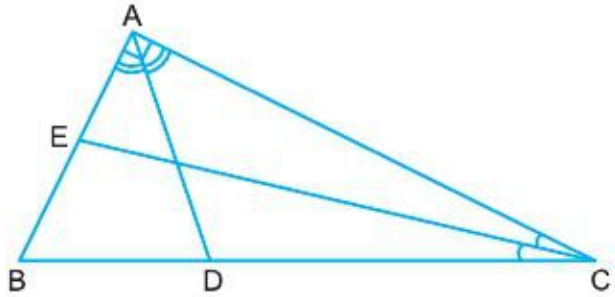
$\Rightarrow AC = \frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}$ và $AB = a\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

2.7. Tính chất 7. Cho ΔABC vuông tại A (AB < AC), các đường phân giác AD và CE. Chứng minh CE = 2AD ⇔ ΔABC là nửa tam giác đều.

Chứng minh. Đặt BC = a, AC = b, AB = c.

Áp dụng tính chất 5 ta có

$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{\sqrt{2}}{AD} \Rightarrow AD = \frac{bc\sqrt{2}}{b+c}$.



Theo tính chất đường phân giác của tam giác ta có

$\frac{AE}{AC} = \frac{BE}{BC} = \frac{AE+BE}{AC+BC} = \frac{AB}{AC+BC} = \frac{c}{a+b}$.

$\Rightarrow EA = \frac{bc}{a+b}$.

Áp dụng định lí Pythagoras vào tam giác vuông AEC ta có $EC^2 = EA^2 + AC^2$

$= \frac{b^2c^2}{(a+b)^2} + b^2 = \frac{b^2(2a^2+2ab)}{(a+b)^2} = \frac{2ab^2}{a+b}$.

Ta có CE = 2AD ⇔ $CE^2 = 4AD^2$

$\Leftrightarrow \frac{2ab^2}{a+b} = \frac{8b^2c^2}{(b+c)^2}$

$\Leftrightarrow a(b+c)^2 - 4c^2(a+b) = 0$

$\Leftrightarrow a(a^2+2bc) - 4c^2(a+b) = 0$

$\Leftrightarrow (a-2c)(a^2+2ac+2bc) = 0$

$\Leftrightarrow a = 2c$

⇔ BC = 2AB. (*)

Kết hợp (*) với giả thiết $\widehat{BAC} = 90^o$ ta suy ra được CE = 2AD ⇔ ΔABC là nửa tam giác đều.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài tập vận dụng

Bài 1. Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH (HB < HC). Cho biết HC − HB = AB. Tính góc B và góc C.

Bài 2. Chứng minh rằng nếu ΔABC có $\widehat{C} = 2\widehat{A}$ và AC = 2BC thì ΔABC là tam giác vuông.

Bài 3. Cho ΔABC vuông tại A, phân giác AD. Đường thẳng vuông góc với BC tại D cắt AC tại M. Chứng minh rằng DM = DB.

AUSTRALIAN MATHEMATICS COMPETITION AMC 2014

SENIOR DIVISION
AUSTRALIAN SCHOOL YEARS 9 AND 10
Time allowed: *75 minutes*

ĐỖ TRUNG KIÊN
(Sưu tầm và giới thiệu)

Questions 1 to 10, 3 marks each

1. The expression that has the same meaning as $9x^{-3}$ is

(A) $\frac{-9}{x^3}$ (B) $\frac{3}{x}$ (C) $\frac{1}{9x^3}$

(D) $\frac{3}{x^3}$ (E) $\frac{9}{x^3}$

2. The value of $\frac{1}{0.04}$ is

(A) 15 (B) 20 (C) 25
(D) 40 (E) 60

3. If $p = 9$ and $q = -3$ then $p^2 - q^2$ is equal to

(A) 64 (B) 72 (C) 84
(D) 90 (E) 96

4. A circle has circumference π units. In square units, its area is

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) π

(D) 2π (E) 4π

5. If $K = L + \frac{6}{R}$ and $L = 4$ and $K = 7$, then R equals

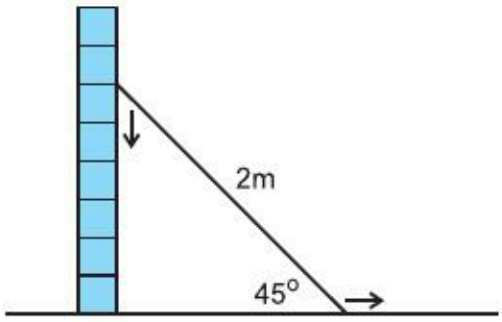
(A) –18 (B) 1 (C) 12
(D) 8 (E) 2

6. If x, x^2 and x^3 lie on a number line in the order shown below, which of the following could be the value of x?

(A) –2 (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{4}$

(D) 1 (E) $\frac{3}{2}$

7. A 2 metre broom is leaning against a wall, with the bottom of the broom making an angle of 45° with the ground. The broom slowly slides down the wall until the bottom of the broom makes an angle of 30° with the ground.



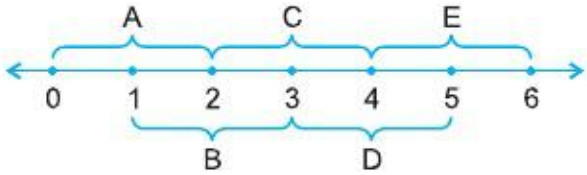
How far, in metres, has the top of the broom slid down the wall?

(A) $\sqrt{2}-1$ (B) $2-\sqrt{3}$ (C) $\sqrt{3}-1$
(D) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ (E) $2-\sqrt{2}$

8. The base of a triangle is increased by 25% and its height is increased by 50%. Its area has increased by

(A) 25% (B) 50% (C) 66.6%
(D) 75% (E) 87.5%

9. On a section of the number line five intervals are marked as shown.



If a number x falls in the interval A and a number y falls in the interval D, then the number $\frac{1}{2}(x+y+1)$ must fall in which interval?

(A) A (B) B (C) C
(D) D (E) E

10. If $\frac{p}{p-2q} = 3$ then $\frac{p}{q}$ equals

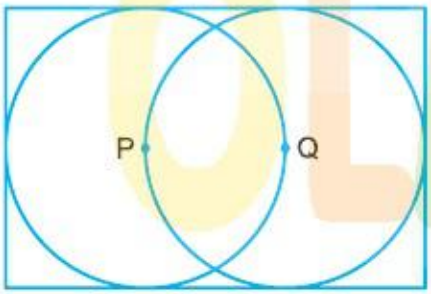
(A) -3 (B) 3 (C) $\frac{1}{3}$
(D) $\frac{2}{3}$ (E) 2

Questions 11 to 20, 4 marks each

11. In a car park there are 3 Fords, 4 Holdens and 2 Hondas. If a parking inspector chooses 2 cars at random, the probability that both are Holdens is

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{4}{27}$ (C) $\frac{1}{6}$
(D) $\frac{4}{9}$ (E) $\frac{16}{81}$

12. In this figure, P and Q are the centres of two circles. Each circle has an area of 10 m^2. The area, in square metres, of the rectangle is



(A) 20 (B) $20 - \frac{10}{\pi}$ (C) $\frac{40}{\pi}$
(D) $\frac{50}{\pi}$ (E) $\frac{60}{\pi}$

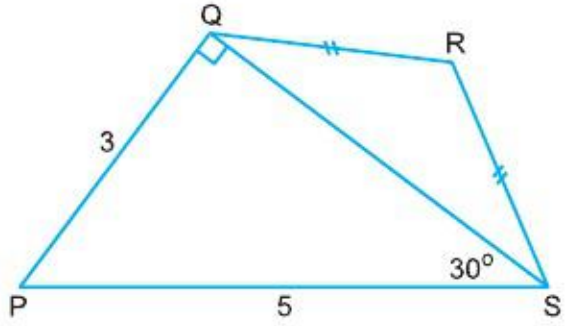
13. The value of $\sqrt{1+2+3+4+...+99+100}$ lies between

(A) 14 and 15 (B) 25 and 26
(C) 30 and 31 (D) 71 and 72
(E) 100 and 101

14. If $\frac{x-a}{x-b} = \frac{x-b}{x-a}$ and $a \neq b$, what is the value of x?

(A) $\frac{a-b}{2}$ (B) $\frac{a^2+b^2}{a+b}$ (C) $\frac{a^2+b^2}{2(a+b)}$
(D) $a + b$ (E) $\frac{a+b}{2}$

15. In the diagram, PS = 5, PQ = 3, ΔPQS is right-angled at Q, $\angle QSR = 30^o$ and QR = RS. The length of RS is



(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) 2
(D) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (E) 4

16. Billy, a seasonal worker in the town of Cowra, collected an even number of buckets of cherries on his first day. Each day after that he increased the number of buckets he picked by 2 buckets per day. In the first 50 days he collected 3250 buckets. The number of buckets Billy collected on the 50th day was

(A) 66 (B) 110 (C) 114
(D) 116 (E) 120

17. A farmer walks 1 km east across his paddock, then 1 km north-east and then another 1 km east. Find the distance, in kilometres, between the farmer's initial position and his final position.

(A) $\sqrt{5+2\sqrt{2}}$ (B) $\sqrt{10}$ (C) $\sqrt{5}$
(D) $2+\sqrt{2}$ (E) $\sqrt{\frac{11}{2}+2\sqrt{10}}$

(Kì sau đăng tiếp)

Kết quả Giải toán qua thư

Bài 1(161+162). Cho $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2016}$ (có 2015 số hạng). Chứng minh rằng $A > \frac{21}{11}$.

Lời giải. Ta có

$$A = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)$$
$$+ ... + \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{18} + ... + \frac{1}{2015} + \frac{1}{2016}\right)$$
$$> \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right)$$
$$+ \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + ... + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right)$$
$$+ ... + \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{18} + ... + \frac{1}{2015} + \frac{1}{2016}\right)$$
$$> \frac{1}{2} + 2.\frac{1}{4} + 4.\frac{1}{8} + 8.\frac{1}{16} = 2 > \frac{21}{11}.$$

Nhận xét. Có nhiều bạn tham gia giải bài, có bạn còn giải bằng hai cách. Các bạn sau có lời giải tốt: *Nguyễn Công Duy Khánh*, 7A6, THCS Cầu Giấy, Cầu Giấy, **Hà Nội**; *Nguyễn Tuấn Dương*, 6A5, THCS Chu Văn An, Ngô Quyền, **Hải Phòng**; *Phạm Minh Đăng*, 7A, *Nguyễn Hữu Thắng*, *Nguyễn Minh Tiến*, 7B, THCS Lý Tự Trọng, Bình Xuyên; *Đỗ Trí Dũng*, 6A1, THCS và THPT Hai Bà Trưng, TX. Phúc Yên, **Vĩnh Phúc**; *Đào Văn Chiến*, *Kiều Mạnh Tiến*, *Đào Thanh Xuân*, 7A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; *Phùng Đăng Dương*, 6C, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, **Phú Thọ**; *Lê Xuân Hoàng*, 7A, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An.**

PHÙNG KIM DUNG

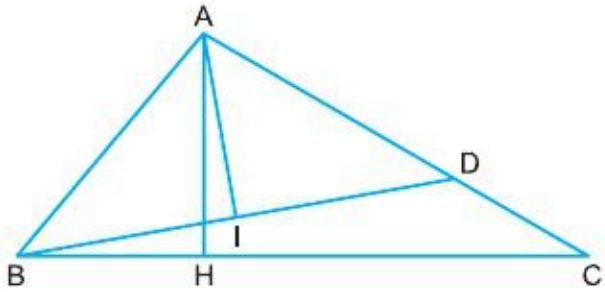
Bài 2(161+162). Cho tam giác ABC với $3\widehat{A} = 6\widehat{B} = 10\widehat{C}$. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho AD = AB. Chứng minh rằng BD = AC.

Lời giải.

Từ giả thiết $3\widehat{A} = 6\widehat{B} = 10\widehat{C}$ và $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^o$.

Suy ra $\frac{10\widehat{C}}{3} + \frac{5\widehat{C}}{3} + \widehat{C} = 180^o \Rightarrow \widehat{C} = 30^o$.

Từ đó $\widehat{B} = 50^o$, $\widehat{A} = 100^o$.



Kẻ AH ⊥ BC, AI ⊥ BD (H ∈ BC, I ∈ BD).

Do ΔAHC vuông tại H có $\widehat{ACH} = 30^o$ nên

$AH = \frac{AC}{2}$. (1)

Mặt khác ΔABD cân tại A nên I là trung điểm của BD, suy ra $BI = \frac{BD}{2}$. (2)

Mà $\widehat{BAI} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = 50^o \Rightarrow \widehat{BAI} = \widehat{ABH}$.

Do đó ΔAIB = ΔBHA (cạnh huyền - góc nhọn).

Suy ra AH = BI. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra BD = AC.

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải tốt: *Đỗ Phúc Xuân*, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì; *Kiều Mạnh Tiến*, *Vũ Minh Khải*, 7A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Lê Nguyễn Gia Huy*, *Trần Đức Tùng*, *Phạm Anh Tài*, *Cao Thị Thùy Dung*, *Nguyễn Đăng Doanh*, *Nguyễn Trung Kiên*, *Nguyễn Thị Ngọc Trâm*, 7B, *Trần Anh Tuấn*, *Bùi Hồng Quân*, 7C, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ; *Phan Thị Hải Yến*, 6C, THCS Xuân Diệu, Can Lộc, **Hà Tĩnh.**

HỒ QUANG VINH

Bài 3(161+162). Cho P(x) là đa thức bậc 4 với hệ số bậc cao nhất bằng 1. Biết rằng P(2013) = 2014, P(2014) = 2015 và P(2015) = 2016.
Tính P(2012) + P(2016).

Lời giải. Xét đa thức Q(x) = P(x) – x – 1.

Theo giả thiết ta có

Q(2013) = P(2013) – 2014 = 0

Q(2014) = P(2014) – 2015 = 0

Q(2015) = P(2015) – 2016 = 0

Như vậy Q(x) là đa thức bậc 4 với hệ số bậc cao

nhất bằng 1 và có các nghiệm là 2013, 2014 và 2015 nên

$Q(x) = (x - 2013)(x - 2014)(x - 2015)(x - a)$, $(a \in \mathbb{R})$.

Do đó

$P(x) = (x - 2013)(x - 2014)(x - 2015)(x - a) + x + 1$.

Thay x bằng 2012 và 2016, ta được

$P(2012) = -10059 + 6a$; $P(2016) = 14113 - 6a$.

Suy ra $P(2012) + P(2016) = (-10059 + 6a) + (14113 - 6a) = 4054$.

Nhận xét. Đây là bài toán hay và không quá khó. Hầu hết các bạn gửi bài giải làm theo cách trên. Các bạn sau đây có bài giải tốt: *Nguyễn Văn Thanh Sơn*, 9/1, THCS Nguyễn Khuyến, **Đà Nẵng**; *Nguyễn Thị Khánh Ly*, 8A4, *Dương Tiến Đạt*, *Phạm Thị Kiều Trang*, 9A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; *Tạ Nam Khánh*, 9E1, *Phùng Quốc Lâm*, 8E1, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Hưng Phát*, 7B, *Trần Sỹ Hoàng*, 9C, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Nguyễn Văn Cường*, 9A, THCS Hợp Tiến, Nam Sách, **Hải Dương**; *Trần Anh Tuấn*, 7C, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Nguyễn Hữu Nghĩa*, 8D, THCS Lâm Thao; *Nguyễn Hà Phương*, 8D, THCS Cao Mại, Lâm Thao, **Phú Thọ**.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài 4(161+162). Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = a + b + c - abc$.

Lời giải. Ta có

$$(a-b)^2 \ge 0 \Rightarrow ab \le \frac{a^2+b^2}{2} \le \frac{a^2+b^2+c^2}{2} = 1.$$

Suy ra $ab - 1 \le 0$.

Do đó $M^2 = [(a + b).1 + c.(1 - ab)]^2$

$\le [(a + b)^2 + c^2][1^2 + (1 - ab)^2]$

$= (2ab + 2)(a^2b^2 - 2ab + 2)$.

Suy ra $M^2 = 2a^3b^3 - 2a^2b^2 + 4 = 2a^2b^2(ab - 1) + 4 \le 4$ (vì $a^2b^2 \ge 0$, $ab - 1 \le 0$).

Suy ra $\begin{cases} M \ge -2 \ (1) \\ M \le 2 \ (2) \end{cases}$

Dấu bằng ở (1) xảy ra chẳng hạn khi $(a, b, c) = (-1, -1, 0)$.

Dấu bằng ở (2) xảy ra chẳng hạn khi $(a, b, c) = (1, 1, 0)$.

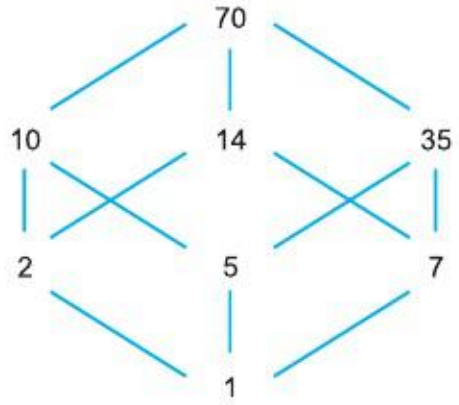
Vậy $\text{Min}M = -2$ chẳng hạn khi $(a, b, c) = (-1, -1, 0)$.

$\text{Max}M = 2$ chẳng hạn khi $(a, b, c) = (1, 1, 0)$.

Nhận xét. Đây là bài toán hay và khó, một số bạn có lời giải hay. Các bạn sau đây có lời giải tốt: *Tạ Nam Khánh, Lê Ngọc Hoa*, 9E1, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Hữu Trung Kiên, Bùi Thùy Linh, Vũ Linh Chi*, 9A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Trương Thị Thu Lan*, 8A2, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Nguyễn Văn Thanh Sơn*, 9/1, THCS Nguyễn Khuyến, **Đà Nẵng**.

CAO VĂN DŨNG

Bài 5(161+162). Đặt $D_{70} = \{1; 2; 5; 7; 10; 14; 35; 70\}$ (tập hợp các ước của 70). Ta vẽ biểu đồ cho D_{70} như sau.

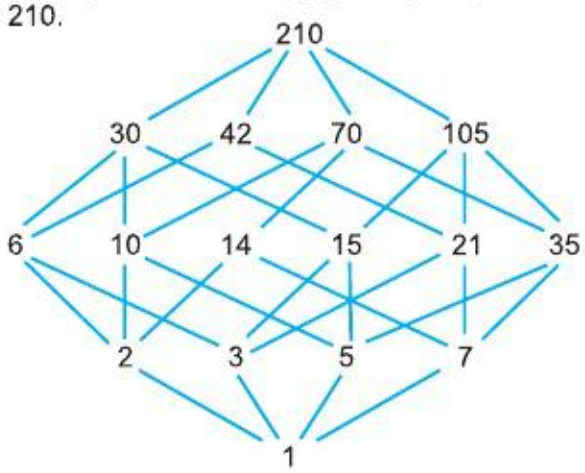


Tìm quy luật của biểu đồ trên. Hãy xác định các phần tử của D_{210} rồi vẽ biểu đồ cho D_{210}.

Lời giải. Phân tích số 210 ra thừa số nguyên tố, ta có $210 = 2.3.5.7$. Số lượng các ước dương của số 210 là $(1 + 1)(1 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 16$.

Tập hợp các ước của 210 là $D_{210} = \{1; 2; 3; 5; 6; 7; 10; 14; 15; 21; 30; 35; 42; 70; 105; 210\}$.

Để vẽ biểu đồ, ta sắp xếp các hàng kể từ dưới lên như sau: Hàng dưới cùng là 1; hàng thứ hai từ dưới lên là 2, 3, 5, 7 (một ước số nguyên tố của 210); hàng thứ ba từ dưới lên là 6, 10, 14, 15, 21, 35 (tích hai ước số nguyên tố); hàng thứ tư là 30, 42, 70, 105 (tích ba ước số nguyên tố) hàng trên cùng là 210.



Nhận xét. Đây là bài toán hay và không quá khó. Có ba bạn sắp xếp các ước dương chưa hợp lí nên vẽ biểu đồ sai. Các bạn sau đây có lời giải tốt: *Nguyễn Văn Thanh Sơn*, 9/1, THCS Nguyễn Khuyến, **Đà Nẵng**; *Từ Tấn Dũng*, 8A, THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam, Cầu Giấy, **Hà Nội**;

Tạ Nam Khánh, 9E1, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường; *Hoàng Doãn Hà Trang*, 8A4, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**.

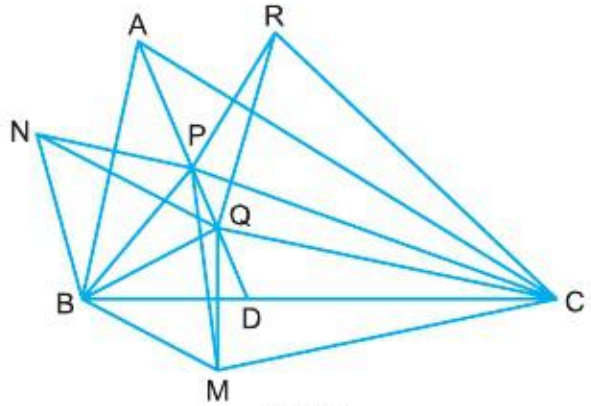
TRỊNH HOÀI DƯƠNG

Bài 6(161+162). Cho tam giác ABC với phân giác AD. Gọi P, Q là hai điểm thuộc đoạn thẳng AD sao cho $\widehat{ABP} = \widehat{CBQ}$. Gọi E, F thứ tự là hình chiếu vuông góc của P lên AC, AB, gọi H là hình chiếu vuông góc của Q lên BC và K là hình chiếu vuông góc của H lên EF. Chứng minh rằng KH là phân giác của $\widehat{BKC}$.

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử AP < AQ.

Bổ đề. Cho tam giác ABC với phân giác AD. Gọi P, Q là hai điểm thuộc AD sao cho AP < AQ và $\widehat{ABP} = \widehat{CBQ}$. Khi đó $\widehat{ACP} = \widehat{BCQ}$.

Chứng minh. *(hình 1)*



Hình 1

Gọi M là điểm đối xứng của Q qua BC; N, R theo thứ tự là điểm đối xứng của P qua AB, AC.

Ta có ΔPQN = ΔPQR. (1)

Ta chứng minh được

$\widehat{PBM} = \widehat{PBQ} + \widehat{QBM} = \widehat{PBQ} + 2\widehat{CBQ}$

$= \widehat{PBQ} + 2\widehat{ABP} = \widehat{PBQ} + \widehat{PBN} = \widehat{QBN}$;

BP = BN; BM = BQ.

Do đó ΔBPM = ΔBNQ. (2)

Từ (1) và (2) suy ra PM = QN = QR.

Từ đó, chú ý rằng CM = CQ, CP = CR, suy ra ΔCMP = ΔCQR.

Suy ra $\widehat{ACP} = \frac{1}{2}\widehat{RCP} = \frac{1}{2}\left(\widehat{RCQ} - \widehat{PCQ}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\widehat{PCM} - \widehat{PCQ}\right) = \frac{1}{2}\widehat{MCQ} = \widehat{BCQ}$.

Trở lại giải bài toán (hình 2)

Gọi Y, Z theo thứ tự là hình chiếu của B, C trên EF.

Ta có AF = AE.

Do đó $\widehat{YFB} = \widehat{AFE} = \widehat{AEF} = \widehat{ZEC}$.

Suy ra ΔBFY ∽ ΔCEZ $\Rightarrow \frac{BF}{CE} = \frac{BY}{CZ}$. (1)

Dễ dàng chứng minh PF = PE và ΔBHQ ∽ ΔBFP, ΔCHQ ∽ ΔCEP.

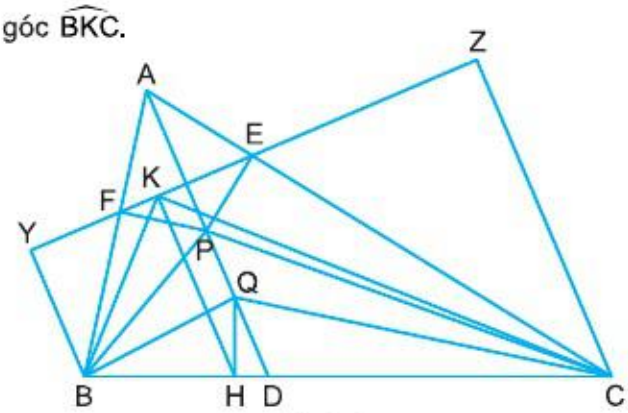
Do đó $\frac{BF}{BH} = \frac{PF}{QH} = \frac{PE}{QH} = \frac{CE}{CH} \Rightarrow \frac{BF}{CE} = \frac{BH}{CH}$. (2)

Từ (1) và (2), chú ý rằng BY // CZ // HK theo định lí Thales, ta có $\frac{BY}{CZ} = \frac{BH}{CH} = \frac{KY}{KZ}$.

Do đó ΔBYK ∽ ΔCZK.

Vậy $\widehat{BKY} = \widehat{CKZ}$.

Kết hợp với KH ⊥ YZ, suy ra KH là phân giác của góc $\widehat{BKC}$.



Hình 2

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải tốt: *Tạ Nam Khánh*, 9E1, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Văn Thanh Sơn*, 9/1, THCS Nguyễn Khuyến, **Đà Nẵng**.

NGUYỄN MINH HÀ

ĐƯỢC THƯỞNG KÌ NÀY

Thi giải toán qua thư

Nguyễn Công Duy Khánh, 7A6, THCS Cầu Giấy; *Từ Tấn Dũng*, 8A, THPT chuyên Hà Nội Amsterdam, Cầu Giấy, **Hà Nội**; *Nguyễn Tuấn Dương*, 6A5, THCS Chu Văn An, Ngô Quyền, **Hải Phòng**; *Tạ Nam Khánh*, 9E1, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc**; *Kiều Mạnh Tiến*, 7A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Lê Xuân Hoàng*, 7A, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Trần Anh Tuấn*, 7C, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Nguyễn Văn Thanh Sơn*, 9/1, THCS Nguyễn Khuyến, **Đà Nẵng**; *Nguyễn Văn Cường*, 9A, THCS Hợp Tiến, Nam Sách, **Hải Dương**; *Trương Thị Thu Lan*, 8A2, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**.

DỰ THI HỌC BỔNG SINGAPORE

THỦY VŨ

(Xem từ số 158 ra 4.2016)

Học sinh vừa hết lớp 9 hoặc đã vào lớp 10 của Việt Nam đều được thi học bổng ASEAN hoặc A*Star của Singapore. Học bổng ASEAN thì tuyển tất cả các tỉnh thành và do Bộ Giáo dục và Đào tạo (Việt Nam) đứng ra phát form cho các địa phương. Mỗi tỉnh thành có 2 mẫu. Học bổng A*Star thì do các trường ở Singapore sang tuyển trực tiếp tại Việt Nam qua một kì thi chung cho mỗi đợt dành cho một số trường. Các trường ở Singapore là các trường hàng đầu như chuyên NTU, chuyên NUS (hai trường đại học lớn nhất, danh tiếng của Singapore), trường Raffles (trường THPT nổi nhất như Hà Nội - Amsterdam của nước ta, nhưng đây là trường tư), trường NJC, Hoa Chông, Nanyang, Vichtoria, Temasek, ACS, ... Tại Hà Nội, một số trường nổi tiếng thường có đông học sinh giành được học bổng này: THCS Trưng Vương, Hà Nội - Amsterdam, chuyên ĐH Quốc Gia, chuyên ĐH Sư phạm, Chu Văn An, Ngô Sĩ Liên, Giảng Võ, Nguyễn Tất Thành, Lômônôxôp, Nguyễn Trường Tộ, THPT Kim Liên, Việt Đức, Trần Phú ... Ở các địa phương khác cũng là các trường truyền thống như THCS Trần Đăng Ninh, THPT Lê Hồng Phong (Nam Định), Trần Phú (Hải Phòng), Phan Bội Châu (Nghệ An), Trần Đại Nghĩa (TP. Hồ Chí Minh) ... Học bổng ASEAN và A*Star đều có hồ sơ giống nhau: 1 đơn (form) có mẫu của nước bạn cung cấp, được điền đầy đủ thông tin, hợp cách; bảng điểm từ lớp 6 đến lớp 9 (hoặc lớp 10), bản sao giấy khai sinh, bằng tốt nghiệp THCS (nếu là lớp 10). Các giấy tờ đều có bản tiếng Anh, có công chứng hoặc xác nhận của hiệu trưởng. Thời điểm làm hồ sơ là tháng 3 và 4 nếu đi học THPT còn đi đại học thường làm tháng 11. Ngoài ra học bổng A*Star còn rải rác làm vào tháng 6, 8, ...

Kì thi viết diễn ra vào cuối tháng 5. Học sinh phải làm bài thi toán bằng tiếng Anh từ 30 đến 35 câu trong 120 phút theo hình thức tự luận, không sử dụng máy tính. Đề thi gồm tất cả các vấn đề nước bạn chú ý dạy mà chương trình chúng ta ít chú ý: tài chính trong gia đình, thể tích các hình khối phức tạp, thống kê, xác suất, đồ thị chấm, đồ thị cành - lá ... Bài phỏng vấn được tiến hành sau 5 tuần nếu kết quả bài thi toán khoảng được 80%, bài IQ được khoảng gần 90% và bài Anh văn được khoảng 65%. Đấy là học bổng ASEAN. Còn học bổng A*Star thì phỏng vấn chỉ sau một vài ngày. Đây là cuộc nói chuyện 15 phút về đề tài bản thân, gia đình và nhà trường của học sinh.

(Còn tiếp)

NGUYỄN TRỌNG ĐỒNG
(GV. THCS Phú Lộc, Krông Năng, Đắk Lắk)

Bụi phấn

Ai chẳng đi về mái trường nho nhỏ
Phấn trắng bảng đen lời giảng của thầy
Bao lứa học trò tung tăng sách vở
Mỗi buổi tới trường là một niềm vui

Kí ức cuộc đời trong ta vẫn thế
Như niềm tin dẫu sông cạn đá mòn
Ta lớn bởi trang sách và bè bạn
Bởi tóc thầy sợi trắng cứ nhiều thêm!

Bụi phấn rơi rơi tóc thầy hóa nắng
Ngỡ hạt sương mai lấp lánh đất người
Đây tình nghĩa mái trường hồng ngọn gió
Cho em hay biển học vốn vô bờ

Quê hương cho ta dáng vóc cuộc đời
Đạo nghĩa làm người trả vay, vay trả
Với mái trường nguyện làm con én nhỏ
Khi mùa thu về bụi phấn bay bay...

BÍNH NAM HÀ

MYANMAR

Myanmar gần
Myanmar xa
Đây là Miến Điện
Nghe lâu rồi mà.
Đất Phật nhiều chùa
Rừng nhiều đá quý.
Con người hiền hòa
Nói cười rủ rỉ.
Đàn ông diện váy
Lưng giắt Iphone.
Bỏm bẻm nhai trầu
Dép lê xỏ ngón.
Có gì vội đâu.
Cuộc sống chỉ cầu
Ăn ngày vài bữa.
Còn đâu cúng chùa
Dát vàng ngọn tháp.
Xe đò cũ kĩ
Thêm xe đạp lai.
Nhà tầng thả dây
Kéo hàng mỗi buổi.
Nhà ngoại thành đấy
Lúp xúp tre pheo
Sân vườn không thấy
Cỏ mọc giăng đầy.
Cây thốt nốt xa,
Con bò gầy trắng
Gợi miền xa vắng
Chiều Campuchia.
Xa rồi vẫn thấy
Yangon miền xanh.

22 - 25.7.2016

Kì này CÓ KHẲNG ĐỊNH ĐƯỢC KHÔNG?

Bài toán. Một số cung của một đường tròn được tô bởi hai màu xanh và đỏ, tổng số đo độ dài của các cung được tô đỏ bằng $\frac{1}{4}$ độ dài đường tròn và tổng số đo độ dài của các cung được tô xanh bằng $\frac{1}{5}$ độ dài đường tròn. Bạn Toán nói với bạn Thơ: "Trên đường tròn luôn tìm được 4 điểm A, B, C, D sao cho tứ giác ABCD là hình chữ nhật và các điểm A, B, C, D không bị tô màu".
Bạn có biết tại sao bạn Toán lại khẳng định được như vậy không?

TẠ THẬP *(TP. Hồ Chí Minh)*

Kết quả SỐ ĐIỂM ĐƯỢC TÔ MÀU (TTT2 số 161+162)

Gọi T là số các trung điểm được tô đỏ của các đoạn thẳng tạo bởi 2016 điểm phân biệt A_1, A_2, A_3, ... , A_{2016}.

a) Xét giá trị lớn nhất của T. Nối mỗi điểm với 2015 điểm còn lại ta được 2015 đoạn thẳng. Vì có 2016 điểm nên sau khi nối như thế có 2016.2015 lần nối và mỗi đoạn thẳng được nối 2 lần, do đó số đoạn thẳng được nối là 1008.2015 = 2031120. Nếu các trung điểm đều khác nhau thì có tất cả 2031120 trung điểm và giá trị lớn nhất của T bằng 2031120. Điều này có được khi thực hiện thuật toán vẽ hình như sau. Đầu tiên lấy 3 điểm không thẳng hàng A_1, A_2, A_3 và tô màu các trung điểm của chúng, do A_1, A_2, A_3 là 3 đỉnh một tam giác nên 3 trung điểm của chúng phân biệt nhau. Vẽ một đường thẳng d_1 qua A_1 mà không đi qua A_2, A_3 và không đi qua các trung điểm đã có. Vẽ đường thẳng d_2 qua A_2 mà không đi qua A_1, A_3 và không đi qua các trung điểm đã có, gọi giao điểm của d_1 và d_2 là A_4. Nối giao điểm mới A_4 với các điểm đã có và tô màu các trung điểm của chúng, nếu có 2 trung điểm nào (cũ và mới) trùng nhau thì vẽ lại d_2 sao cho đạt *điều kiện* là có điểm A_4 mà tất cả các trung điểm đều khác nhau. Cứ tiếp tục làm như thế để có các điểm A_5, A_6, ... , A_{2016}, do số các điểm và trung điểm là hữu hạn nên luôn vẽ được các điểm với *điều kiện* trên. Vậy giá trị lớn nhất của T bằng 2031120.

b) Xét giá trị nhỏ nhất của T. So sánh độ dài của tất cả 2031120 đoạn thẳng của 2016 điểm khác nhau tùy ý thì tồn tại độ dài lớn nhất là r với hai đầu mút là A_1, A_2 (nếu khác thì đổi lại). Hai đường tròn tâm A_1 và A_2 với cùng bán kính r cắt nhau tại hai điểm B, C. Do $A_1A_j \le A_1A_2$ với j bằng 2, 3, 4, ... , 2016 nên tất cả các điểm đã vẽ đều nằm trong hình tròn tâm A_1 (kể cả đường biên). Tương tự, do $A_2A_k \le A_2A_1$ với k bằng 3, 4, ... , 2016 nên tất cả các điểm đã vẽ đều nằm trong hình tròn tâm A_2 (kể cả đường biên), suy ra tất cả các điểm đã vẽ đều nằm trong S là phần giao của 2 hình tròn với đường biên của S là hai cung tròn $\overset{\frown}{BA_1C}$ và $\overset{\frown}{BA_2C}$.

Dễ thấy với 2016 điểm khác nhau, khi xét 2015 đoạn thẳng A_1A_j với j bằng 2, 3, ... , 2016 thì có 2015 trung điểm khác nhau và khi xét 2014 đoạn thẳng A_2A_k với k bằng 3, 4, ... , 2016 thì có 2014 trung điểm khác nhau. Giả sử 2 đoạn thẳng A_1A_j và A_2A_k có trung điểm M trùng nhau với A_j là một điểm nằm trong S. Nếu A_j nằm trên A_1A_2 thì $A_2A_k = 2A_2M = 2(A_2A_j + A_jM) = 2A_2A_j + 2A_jM = 2A_2A_j + A_1A_j = A_1A_2 + A_jA_2 > A_1A_2$. Nếu A_j không nằm trên A_1A_2 lúc đó có hình bình hành $A_1A_2A_jA_k$ với góc $\widehat{A_1A_2A_j}$ là góc nhọn, suy ra góc $\widehat{A_2A_1A_k}$ là góc tù, do đó điểm A_k nằm ngoài S, điều này không xảy ra. Như thế 2 đoạn thẳng bất kì A_1A_j và A_2A_k có trung điểm khác nhau.

(Xem tiếp trang 54)

CUỘC GỌI Quốc tế

ĐỖ THỊ HIỀN ANH
(9A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, Bắc Ninh)

Chiều muộn hôm đó, đang khóa cửa văn phòng để về nhà thì thám tử Sêlôccôc nhận được điện thoại của ông Long. Ông Long cùng vợ là bà Trang là những người bạn thân từ thời phổ thông của thám tử.

- Lát nữa đến nhà tôi ăn tối nhé. Hôm nay, vợ tôi tự tay nấu nướng đấy. Bà ý vẫn nhớ những món mà ngày xưa chúng ta đều thích.

- Hay quá! Cảm ơn ông bà. Tôi đến luôn đây.

Khoảng nửa giờ sau thám tử Sêlôccôc đã có mặt ở nhà ông Long. Lúc đó là gần 7 giờ tối. Sau vài câu trò chuyện, ông Long mời thám tử ngồi vào bàn ăn. Chà! Mâm cơm gia đình thơm ngon quá! Ông Long rót bia, còn bà Trang thì niềm nở giới thiệu món này món kia. Đang ăn uống vui vẻ, chợt bà Trang như sực nhớ ra điều gì, vội xin phép chạy lên gác. Rồi thám tử và ông Long nghe tiếng "Ối! Trời ơi!" vọng xuống. Cả hai ông vội chạy lên.

- Sao thế mình? - ông Long hốt hoảng hỏi.

- Lúc làm cơm tôi tháo cái nhẫn kim cương ra cho tiện... Tôi đặt ở bàn phấn trong phòng, định bụng sẽ cất ngay... Nhưng lúc đó có điện thoại nên tôi quên biến đi mất. Giờ sực nhớ ra thì không thấy đâu nữa.

- Bà cứ bình tĩnh! - thám tử động viên - Hãy cho tôi biết lúc bà nấu ăn thì trong nhà có những ai.

Một lát sau, khi đã đỡ hốt hoảng, bà Trang kể:

- Lúc đó có cô Hoa giúp việc, ông Minh và con gái tôi.

- Ông Minh có phải là người mà lúc tôi vừa đến bà giới thiệu là anh họ của ông Long?

- Đúng rồi. Ông ấy đến ở nhà tôi từ hôm qua. Vì có chút việc riêng nên ông ấy không ngồi ăn cùng chúng ta.

- Hiện giờ ông ấy vẫn đang ở đây?

- Vâng. Đang ở trong phòng trên tầng ba.

- Tôi có thể nói chuyện riêng với từng người chứ?
- Tất nhiên.
- À, mà lúc bà bắt đầu tháo nhẫn để nấu ăn là khoảng mấy giờ nhỉ?
- Khoảng 5 rưỡi, gần 6 giờ, ông ạ.

Đầu tiên, thám tử Sêlôccôc gặp cô Hoa:
- Từ lúc bà Trang nấu ăn đến giờ, cô đã làm gì, ở đâu?
- Tôi cùng nấu nướng với bà Trang. Hai người ở suốt trong bếp. Bà Trang cầu kì lắm nên tôi phải phụ giúp rất nhiều.

Tiếp theo là ông Minh:
- Ông có thể cho tôi biết ông đã làm gì, ở đâu trong suốt thời gian bà Trang ở trong bếp nấu nướng?
- Tôi ở trong phòng để giải quyết một số việc qua email. Tôi cũng có 1 cuộc gọi điện thoại sang Hàn Quốc cho người bạn. Ông có thể kiểm tra thông tin này.
- Thật ư? Tức là tôi có thể gọi cho bạn của ông để kiểm tra về cuộc gọi?
- Tất nhiên. Đây là số của anh ấy. Ông gọi đi!

Thám tử gọi. Bạn ông Minh xác nhận là có nhận 1 cuộc gọi của ông Minh, gọi từ Việt Nam. Ông này cũng cho biết lúc đó là khoảng 6 rưỡi chiều.

Cuối cùng, thám tử Sêlôccôc gặp cô Mai, con gái bà Trang.
- Lúc mẹ cháu cơm nước trong bếp, cháu có phụ giúp không?
- Không ạ. Lúc đó cháu lau dọn phòng khách, quét sân quét cổng để đón bác đến chơi mà. Cháu còn cắm hoa nữa. Lọ hoa tươi trong phòng khách mà lúc nãy bác khen đó ạ.
- Cháu gái đảm đang quá!

Sau đó, thám tử Sêlôccôc nói nhỏ với ông Long:
- Tôi đã tìm ra manh mối đáng ngờ rồi. Đây là việc rất tế nhị nên tốt nhất ông hãy tự mình nói chuyện với người mà tôi nghi vấn nhé.

* Ông Long nghĩ mãi nhưng vẫn chưa đoán ra người mà thám tử Sêlôccôc nghi ngờ. Các thám tử Tuổi Hồng có giúp ông Long được không?

Kết quả CHIẾC NHẪN TRONG TÚI (TTT2 số 161+162)

Bạn nào cũng phát hiện chính xác điểm vô lí trong lời kể của bà giúp việc: Cá nục là cá biển chứ không phải cá sông. Bà giúp việc tên Vân đã để lộ sơ hở này khi nói chuyện với thám tử. Các thám tử "Tuổi Hồng" cũng nhanh chóng phát hiện điểm đáng nghi ngờ đó.

Các bạn sau sẽ được nhận quà: *Mai Tùng Dương*, 6A, THCS Lý Tự Trọng, Bình Xuyên, **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Công Duy Khánh*, 7A6, THCS Cầu Giấy, Cầu Giấy, **Hà Nội**; *Nguyễn Thị Minh Phương*, 6G, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Trần Lâm*, 6D, THCS Lê Hồng Phong; *Nguyễn Trung Kiên*, 7B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**.

Thám tử Sêlôccôc

NĂM NGÔI SAO TRONG CHÒM SAO ĐẠI SỐ VÀ LÍ THUYẾT SỐ

PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN *(GV. Khoa toán, trường Đại học Vinh, Nghệ An)*

Trong lịch sử trung cận đại nhiều nhà toán học đã có nhiều cống hiến cho nền toán học của nhân loại. Sau đây chúng tôi xin giới thiệu năm nhà toán học tiêu biểu trong lĩnh vực đại số và lí thuyết số.

Diophante (Khoảng thế kỉ thứ III). Cho đến nay, người ta chưa xác định được năm sinh và quốc tịch của nhà toán học Hy Lạp Diophante, chỉ biết rằng ông sống vào thế kỉ thứ III, cùng thời với nhà toán học Héron. Ngoài sự kiện ông đã thành đạt ở Alexandrie, người ta không biết được gì hơn về ông mặc dù có một bài trào phúng trong *Hợp tuyển Hy Lạp* có ý định đưa ra một số chi tiết về cuộc đời ông (trên một mộ chí): *Thời thơ ấu của Diophante đã trôi qua trong một phần sáu cuộc đời ông, một phần mười hai lúc là thanh niên, một phần bảy nữa khi còn là độc thân. Sau khi xây dựng gia đình được năm năm vợ ông sinh được một con trai song lại qua đời trước bố bốn năm, đúng bằng nửa số tuổi cha mình hưởng thọ*. Hỡi khách qua đường, tính xem Diophante thọ bao nhiêu tuổi?

Diophante viết ba công trình: *Arithmétique*, đó là công trình quan trọng nhất của ông và hiện còn giữ được 6 trong 13 quyển; *Về các đa giác*, chỉ còn giữ lại vài đoạn; *Porisms*, hiện bị thất lạc.

Arithmétique là một tác phẩm lớn phân tích sâu sắc các vấn đề lí thuyết đại số và lí thuyết số và cho thấy tác giả là một thiên tài trong lĩnh vực này. Phần còn lưu giữ được của công trình này nói về cách giải khoảng 130 bài toán rất khác nhau dẫn đến các phương trình bậc nhất và bậc hai. Một số phương trình bậc ba đặc biệt đã được giải. Quyển thứ nhất nói về các phương trình xác định một ẩn và các quyển còn lại bàn về các phương trình bất định bậc hai hoặc cao hơn với hai hoặc ba ẩn.

Có những kết quả sâu sắc về số được phát biểu trong Arithmétique. Chẳng hạn: *hiệu hai lập phương số hữu tỉ cũng bằng tổng của hai lập phương số hữu tỉ*, một vấn đề mà sau này đã được Viète, Bachet và Fermat nghiên cứu tới. Có nhiều mệnh đề nói về cách biểu thị các số dưới dạng tổng của hai, ba hay bốn bình phương, một lĩnh vực mà sau 1500 năm sau mới được hoàn thiện bởi Fermat, Euler và Lagrange.

Trong tác phẩm Arithmétique, Diophante đã đưa ra cách viết tắt cho các ẩn số, lên đến lũy thừa bậc 6, phép trừ, đẳng thức và phép nghịch đảo. Người ta xem ông là người tiên phong trong việc sử dụng kí hiệu đại số để trình bày các lập luận của mình.

P. Fermat (1601 - 1665). Nhà toán học Pierre de Fermat (1601 - 1665) sinh ở Tarn-et-Garonne gần thành phố Toulouse nước Pháp trong một gia đình kinh doanh da thuộc. Ông vốn là một luật sư nhưng lại rất đam mê nghiên cứu toán học và được xem như nhà toán học Pháp vĩ đại nhất của thế kỉ XVII. Trong những đóng góp đa dạng của Fermat cho toán học thì nổi bật nhất là việc đặt nền móng cho lí thuyết số. Trong lĩnh vực này, Fermat tỏ ra có một trực giác và một khả năng suy đoán khác thường. Cảm hứng của ông có lẽ được khơi dậy bởi tác phẩm Arithmétique của Diophante thông qua bản dịch Latin của Bachet de Méziriac được công bố năm 1621. Nhiều đóng góp của ông về Lí thuyết số là những ý kiến ghi ngoài lề trong bản sao của ông về công trình của Bachet. Năm 1670, khi ông qua đời được năm năm, những ghi chép này đã được con trai của ông là Clément-Samuel thu thập lại đưa vào lần xuất bản mới cuốn Arithmétique.

Hai kết quả sau đây gắn với tên tuổi ông.

Định lí nhỏ Fermat. Nếu p là số nguyên tố và $(a, p) = 1$ thì $a^{p-1} - 1$ chia hết cho p.

Định lí lớn Fermat. Với mọi số tự nhiên $n \geq 3$, không tồn tại bộ ba số nguyên dương khác không x, y, z thỏa mãn đẳng thức $x^n + y^n = z^n$.

Ông cũng đưa ra phỏng đoán $F_n = 2^{2^n} + 1$ là số nguyên tố với mọi n là số tự nhiên. Số $F_n = 2^{2^n} + 1$ được gọi là số Fermat. Sau này Euler đã chỉ ra F_5 là hợp số chứng tỏ phỏng đoán này sai.

I. Newton (1643 - 1727). Isaac Newton sinh ở xã Woolsthorpe quận Lilcolnshire nước Anh vào ngày Thiên Chúa giáng sinh (ngày 25.12.1642 theo lịch Julius và là ngày 4.1.1643 theo lịch Gregory được sử dụng ngày nay). Cha ông vốn là một nông dân và đã mất trước khi Newton chào đời. Thủa nhỏ Newton gầy yếu sống ở nông thôn với mẹ và cha dượng, ông học ở trường làng. Năm 18 tuổi Newton mới được vào học trường Trinity College tại Cambridge. Tại đây ông đọc *Nguyên lí* của Euclide và thấy mọi vấn đề được trình bày trong đó quá hiển nhiên. Sau đó ông đọc *La géométrie* của Descartes thì thấy có cái gì đó khó hiểu. Ông còn đọc *Clavis* của Oughtred, các công trình của Kepler và Viète, *Arithmetica infinitorum* của Wallis. Từ việc đọc toán học ông chuyển sang tìm tòi nó và lúc 23 tuổi, ông chứng minh thành công công thức nhị thức tổng quát và phát minh ra phép toán vi phân. Ông còn quan tâm đến nhiều vấn đề về vật lí học, quang học và phát minh ra các nguyên lí cơ bản của lí thuyết động lực.

Do những thành kiến của giới khoa học quý tộc Anh, nhiều công trình quan trọng của ông chỉ được công bố nhiều năm sau khi tác giả khám phá ra chúng. Đó là một thiệt thòi không những cho bản thân ông mà còn cho nền toán học Anh đương thời. Tuy nhiên ông cũng được đặt vào những vị trí xứng đáng với tài năng và sự cống hiến không biết mệt mỏi. Năm 1696, ông được chỉ định làm Hiệu trưởng trường đại học Mint và năm 1699 được phong danh hiệu Master (bậc thầy) của trường đại học này. Năm 1703 ông được bầu làm Chủ tịch Hội (Khoa học) Hoàng gia (Anh) và giữ cương vị đó cho tới lúc qua đời. Năm 1705 ông được phong bá tước. Khi mất thi hài ông được mai táng tại nhà thờ Westminaster.

L. Euler (1707 - 1783). Nhà toán học Leonhard Euler sinh năm 1707 ở Basel, Thụy Sĩ là con của một mục sư. Ông tốt nghiệp và giảng dạy tại trường Đại học Basel. Năm 1727 ông được nữ hoàng Nga Ekaterina I mời làm Giáo sư đại học về toán tại Viện Hàn lâm Saint-Pétersbourg do Nga hoàng Pierre Đại đế sáng lập. Mười bốn năm sau, ông chấp nhận lời mời của vua Phổ Friedrich II đến Berlin giữ cương vị Viện sĩ trong Viện Hàn lâm Phổ. Hai mươi lăm năm sau ông quay về Viện Hàn lâm St. Pétersbourg và làm việc ở đó đến lúc qua đời vào năm 1783, thọ 76 tuổi.

Euler viết rất nhiều công trình toán học; tên tuổi ông gắn với nhiều ngành nghiên cứu toán học, nhiều kết quả sống mãi với thời gian: *Phương pháp Euler* trong giải phương trình bậc 4, *Đường thẳng Euler* và *Đường tròn chín điểm Euler* trong tam giác, *Công thức Euler* $Đ - C + M = 2$ về đa diện (trong đó $Đ$, C, M tương ứng là số đỉnh, cạnh và mặt của một đa diện lồi), *Định lý Euler* và *hàm Euler* trong Lí thuyết số, *Công thức Euler* $e^{ix} = cosx + isinx$ trong số phức ... Ông còn dành nhiều bài viết về giải trí toán học như các đồ thị (graphe) liên thông (được gợi ý bởi 7 chiếc cầu của Konigsberg), đường đi của quân mã trên bàn cờ. Ông cũng công bố nhiều công trình trong lĩnh vực toán học ứng dụng, đặt biệt trong lí thuyết về chuyển động của mặt trăng, bài toán ba vật thể của cơ học thiên thể, sức hút của các vật thể, thủy lực học, chế tạo tàu thuyền, pháo binh và lí thuyết âm nhạc.

C. F. Gauss (1777 - 1855). Nhà toán học vĩ đại nhất thế kỉ XIX và thường được xếp ngang hàng với Archimèdes và Isaac Newton là Carl Friedrich Gauss, một trong ba nhà toán học vĩ đại nhất mọi thời đại. Gauss là thần đồng nổi tiếng từ thời niên thiếu. Người ta kể về một câu chuyện lạ thường là năm mới lên ba tuổi ông đã khám phá ra trong việc kế toán của cha có những chỗ sai. Năm 1796, khi 19 tuổi ông đã phát triển một lí thuyết cho biết rằng: Một đa giác đều dựng được bằng thước thẳng và compa khi và chỉ khi số cạnh có dạng $2^n.F_i...F_j$, trong đó $F_n = 2^{2^n} + 1$ là số nguyên tố Fermat. Như vậy các đa giác đều có số cạnh là 17, 257 và 65537 đều có thể dựng được bằng thước thẳng và compa, điều này các nhà toán học từ thời Hy Lạp cổ đại đến thời của ông chưa giải được. Trong luận án tiến sĩ của mình viết lúc mới 20 tuổi ông đã trình bày một phép chứng minh đầu tiên và hoàn toàn thỏa đáng về *Định lí cơ bản của đại số học* (nói rằng một phương trình đa thức bậc n với hệ số phức có ít nhất một nghiệm phức).

Gauss có nhiều đóng góp trong thiên văn học, trắc địa, điện học, hình học vi phân và phương pháp bình phương tối thiểu. Năm 1821, trong một luận văn về chuỗi siêu bội, Gauss đã nghiên cứu có hệ thống lần đầu tiên về sự hội tụ của một chuỗi. Ông cũng là một trong ba nhà toán học phát hiện ra *Hình học phi Euclid*, tiếc rằng khi còn sống vì một lí do nào đó ông đã không dám công bố các kết quả của mình về lĩnh vực này.

Ông khẳng định: "Toán học là nữ hoàng của các khoa học và lí thuyết số là nữ hoàng của toán học". Bản thân Gauss được người đời sau mô tả là "một người khổng lồ của toán học, với chiều cao của mình ông đã nhìn thấy trời cao và biển thẳm". Từ năm 1807, ông giữ cương vị Giám đốc đài quan sát thiên văn và Giáo sư toán học tại Đại học Gottingen cho đến lúc qua đời.

SUY LUẬN VÀ PHÁT TRIỂN TỪ MỘT BÀI TOÁN

VƯƠNG THỊ HẢI
(GV. THCS Thái Sơn, Đô Lương, Nghệ An)

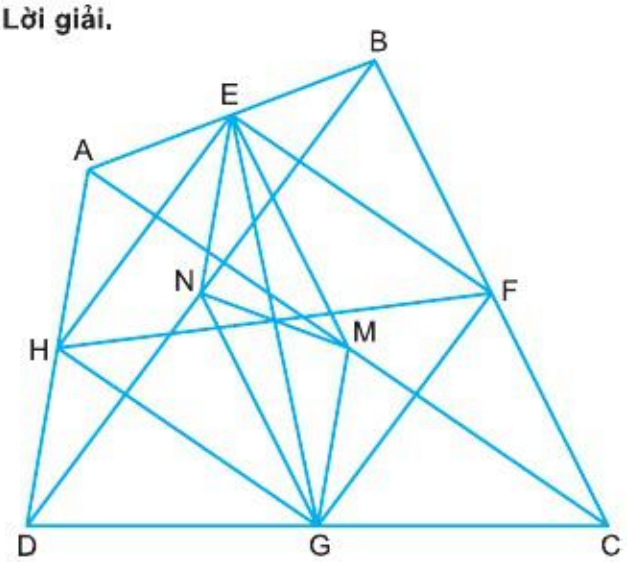
Nhiều bài toán toán khó được mở rộng từ những bài toán đơn giản. Vì vậy để học giỏi môn Toán thì không những bạn phải nắm chắc kiến thức cơ bản, biết vận dụng các bài toán cơ bản mà còn phải biết phát triển, mở rộng các bài toán đó theo các hướng khác nhau. Trong bài viết này chúng tôi sẽ mở rộng, khai thác một bài toán cơ bản trong sách giáo khoa lớp 8.

Bài toán 1. Cho tứ giác ABCD có E, F, G, H, M và N thứ tự là trung điểm của AB, BC, CD, DA, AC và BD.

a) Chứng minh EFGH là hình bình hành.

b) Chứng minh EG, FH và MN đồng quy.

Lời giải.



a) Ta có EH, FG thứ tự là đường trung bình của ΔABD và ΔBDC nên

$EH // BD, EH = \frac{BD}{2}; FG // BD, FG = \frac{BD}{2}$

$\Rightarrow EH // FG, EH = FG.$

Vậy tứ giác EFGH là hình bình hành.

b) Ta có EM, NG thứ tự là đường trung bình của ΔABC và ΔBDC nên

$EM // BC, EM = \frac{BC}{2}; NG // BC, NG = \frac{BC}{2}$

$\Rightarrow EM // NG, EM = NG.$

Do đó tứ giác EMGN là hình bình hành.

Suy ra EG và MN cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Mặt khác EFGH là hình bình hành nên EG và FH cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Vậy EG, HF và MN đồng quy.

Nhận xét. Ở bài toán 1 các tứ giác EFGH và EMGN là hình bình hành. Câu hỏi xuất hiện là tứ giác ABCD cần có điều kiện gì để các tứ giác trên là hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông? Ta có bài toán sau.

Bài toán 2. Cho tứ giác ABCD có E, F, G, H, M và N thứ tự là trung điểm của AB, BC, CD, DA, AC và BD.

a) Tứ giác ABCD cần có điều kiện gì để EFGH là hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông?

b) Tứ giác ABCD cần có điều kiện gì để EMGN là hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông?

Lời giải. Xem hình vẽ bài toán 1.

a) Ta có EF là đường trung bình của ΔABC nên $EF // AC, EF = \frac{AC}{2}$.

Để EFGH là hình chữ nhật thì $EH \perp EF$, mà $EF // AC$ và $EH // BD$ nên phải có $AC \perp BD$.

Để hình bình hành EFGH là hình thoi thì $EH = EF$, mà $2EH = BD$ và $2EF = AC$ nên phải có $AC = BD$.

Từ đó để hình bình hành EFGH là hình vuông thì phải có $AC \perp BD, AC = BD$.

b) Ta có EN là đường trung bình của ΔABD nên $EN // AD, EN = \frac{AD}{2}$.

Để hình bình hành EMGN là hình chữ nhật thì

EN ⊥ EM, mà EN // AD và EM // BC nên phải có AD ⊥ BC.

Từ đó để hình bình hành EMGN là hình thoi thì EN = EM, mà 2EN = AD và 2EM = BC nên phải có AD = BC.

Từ đó để hình bình hành EFGH là hình vuông thì phải có AD ⊥ BC, AD = BC.

Nhận xét. Từ bài toán 1 nếu ta thay giả thiết như sau: E, F, G, H thứ tự thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA nhưng không là trung điểm mà vẫn thỏa mãn EH // BD // FG và EH = FG thì các giả thiết của bài toán 1 cần thay đổi như thế nào?

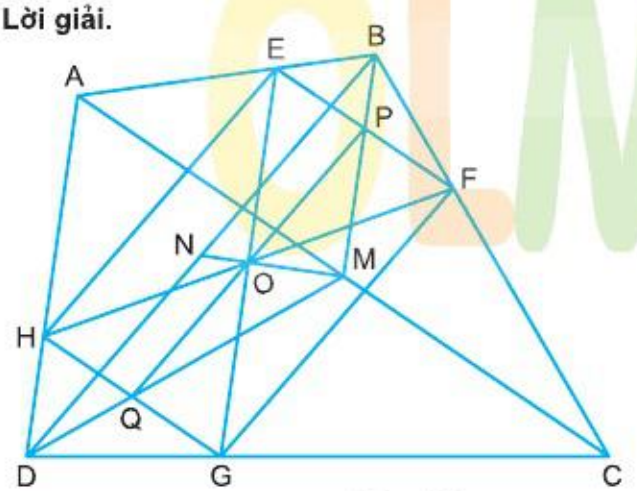
Ta có bài toán sau.

Bài toán 2. Cho tứ giác ABCD, trên các cạnh AB, BC, CD, DA theo thứ tự lấy các điểm E, F, G, H sao cho $\frac{AE}{AB} = \frac{CF}{CB} = \frac{CG}{CD} = \frac{AH}{AD} = \frac{2}{3}$. Gọi M, N thứ tự là trung điểm của AC và BD.

a) Chứng minh rằng EFGH là hình bình hành.

b) Chứng minh EG, FH và MN đồng quy.

Lời giải.



a) Xét tam giác ABD có $\frac{AE}{AB} = \frac{AH}{AD}$, theo định lí Thales đảo thì HE // BD. (1)

Xét tam giác CBD có $\frac{CF}{CB} = \frac{CG}{CD}$, theo định lí Thales đảo thì GF // BD. (2)

Từ (1), (2) suy ra EH // FG.

Theo hệ quả của định lí Thales thì

$\frac{EH}{BD} = \frac{AE}{AB} = \frac{2}{3} = \frac{CF}{CB} = \frac{FG}{BD} \Rightarrow EH = FG.$

Vậy tứ giác EFGH là hình bình hành.

b) Ta có EFGH là hình bình hành nên EG, HF cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đường.

Gọi P, Q thứ tự là giao điểm của BM và EF, của DM và HG.

Do EF // AC nên theo hệ quả của định lí Thales ta có $\frac{EP}{AM} = \frac{BP}{BM} = \frac{PF}{MC}$.

Mà AM = MC nên EP = PF.

Tương tự QH = QG.

Vì O là tâm đối xứng của hình bình hành EFGH nên O là trung điểm của PQ.

Vì PQ // BD và NB = ND nên làm tương tự như trên ta được MN đi qua trung điểm O của PQ, tức là N, O, M thẳng.

Vậy EG, HF và MN đồng quy tại O.

Bài tập vận dụng

Bài toán. Cho tứ giác ABCD có diện tích S. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA theo thứ tự lấy các điểm E, F, G, H sao cho $\frac{AE}{AB} = \frac{CF}{CB} = \frac{CG}{CD} = \frac{AH}{AD} = t$ (t > 0). Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AC, BD. Gọi O là giao điểm của EG và FH.

a) Chứng minh tứ giác EFGH là hình bình hành.

b) Tính diện tích tứ giác EFGH theo S.

c) Tìm t để diện tích tứ giác EFGH lớn nhất.

d) Chứng minh rằng 3 điểm M, O, N thẳng hàng.

e) Tìm t để $S_{EFGH} = \frac{2}{5}S_{ABCD}$.

Kì 25

Hãy thay các chữ cái bởi các chữ số. Các chữ khác nhau biểu diễn các chữ số khác nhau. Lời giải cần có lập luận lôgic.

SINK × THEM = DEEPDEEP

TRƯƠNG CÔNG THÀNH *(Sưu tầm)*

Kết quả KÌ 24 (TTT2 số 161+162)

$$\begin{array}{r} \text{ONE} \\ +\ \text{ONE} \\ \hline \text{TWO} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{FOUR} \\ +\ \text{ONE} \\ \hline \text{FIVE} \end{array}$$

* Với R < 10 thì R + E = E nên R = 0.

Ta có I = 2.O khi U + N = V (1a) hoặc I = 2.O + 1 khi U + N = 10 + V (1b).

Từ 2.O = T (2a) hoặc 2.O + 1 = T (2b), suy ra $0 < O \le 4$.

Từ 2E = O (3a) hoặc 2E = 10 + O (3b), suy ra O chẵn, do đó O = 2 hoặc O = 4.

Chú ý rằng không đồng thời xảy ra (1a) và (2a), cũng như (1b) và (2b).

Xét 2 trường hợp sau:

● TH1. Với O = 4, có (1a) thì xảy ra (2b) nên I = 2.O = 8 và T = 2.O + 1 = 9, hoặc có (1b) thì xảy ra (2a) nên I = 2.O + 1 = 9 và T = 2.O = 8.

Từ (3a) có E = 2 hoặc từ (3b) có E = 7.

a) Xét I = 8 và T = 9 khi có (1a) và (2b).

* Với E = 2 và có (2b) thì 2N = 10 + W nên $N \ge 7$ (vì W chẵn, khác 2), do có (1a) thì $V = U + N \ge U + 7$ mà $V \le 7$ (loại).

* Với E = 7 và có (2b) thì 2N + 1 = 10 + W, nên $N \ge 5$, do có (1a) thì $V = U + N \ge U + 5$ mà $V \le 6$, do đó V = 6, N = 5, U = 1 = W (loại).

b) Xét I = 9 và T = 8 khi có (1b) và (2a).

* Với E = 2 và có (2a) thì 2N = W chẵn nên chỉ xảy ra W = 6 và N = 3.

Do có (1b) thì $10 + V = U + N \le 7 + 3 = 10$ (loại).

* Với E = 7 và có (2a) thì $2N + 1 = W \le 6$, nên $N \le 2$, do có (1b) thì $10 + V = U + N \le 6 + 2 = 8$ (loại).

● TH2. Với O = 2, có (1a) thì xảy ra (2b) nên I = 4 và T = 5, hoặc có (1b) thì xảy ra (2a) nên I = 5 và T = 4.

Từ (3a) có E = 1 hoặc từ (3b) có E = 6.

a) Xét I = 4 và T = 5 khi có (1a) và (2b).

* Với E = 1 và có (2b) thì 2N = 10 + W.

Do W chẵn và $W \ge 6$ thì $N \ge 8$, do có (1a) thì $V = U + N \ge U + 8$ nên U = 1 = E (loại).

* Với E = 6 và có (2b) thì 2N + 1 = 10 + W nên $N \ge 8$ (nếu N = 7 thì W = 5 = T), do có (1a) thì $V = U + N \ge U + 8$ nên U = 1, V = 9, N = 8 và W = 7, còn F = 3 (thỏa mãn).

b) Xét I = 5 và T = 4 khi có (1b) và (2a).

Với E = 1 và có (2a) thì 2N = W chẵn, chỉ xảy ra N = 3, W = 6, do có (1b) thì $10 + V = U + N = U + 3$, hay là V + 7 = U.

Mà $U \ge 3$ vì E = 1, O = 2 (loại).

* Với E = 6 và có (2a) thì 2N + 1 = W.

+ Nếu N = 1 thì W = 3, do có (1b) thì $10 + V = U + N = U + 1$, hay là V + 9 = U (loại).

+ Nếu N = 3 thì W = 7, do có (1b) thì $10 + V = U + N = U + 3$, hay là 7 + V = U nên U = 8, V = 1, còn F = 9 (thỏa mãn).

Bài toán có 2 nghiệm như sau:

286 + 286 = 572, 3210 + 286 = 3496;

236 + 236 = 472, 9280 + 236 = 9516.

Nhận xét. Một số bạn không chú ý rằng trong 2 phép toán ở đề bài các chữ số giống nhau thì biểu diễn cùng một số, do đó cho các đáp số khác với 2 nghiệm trên. Các bạn giải đúng được thưởng kì này là: *Trương Văn Quốc*, 8C, THCS Lê Văn Thịnh, Gia Bình; *Bùi Xuân Dưỡng*, 9A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Lê Đức Thái*, 9A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc.**

ĐAN QUỲNH

THUÊ Ô TÔ

VŨ MULBERRY

Một số người chọn thuê ô tô khi đi chơi hay làm việc khi phải đi xa. Tiền thuê thường gồm tiền trả theo ngày thuê và theo kilomet (hoặc dặm) đã đi. Thường là thêm một khoản đặt cọc.

Ví dụ 1. Một xe ô tô cho thuê với giá \$42.50 một ngày cùng với \$0.45 mỗi dặm đường đã đi. Mari thuê xe 3 ngày và quãng đường đi là 270 dặm. Tìm số tiền Mari phải trả, chưa tính tiền đặt cọc.

Lời giải.

Số tiền thuê 3 ngày	$3 \times \$42.50 = \$127.50$
Số tiền trả theo quãng đường	$270 \times \$0.45 = \$121.50$
Tổng số tiền phải trả	$127.50 + 121.50 = \$249.00$

(Bạn hãy đổi kết quả trên ra tiền đồng của Việt Nam (VND) để hình dung rõ hơn về giá cả. Tỉ giá là \$1 = 22300 VND)

Ví dụ 2. Bạn sang nước ngoài và thuê xe. Bạn hãy tính tổng số tiền cho hai hành trình sau:

	Cost per Day	Number of Days	Cost per Mile	Number of Miles	Rental Cost
1)	\$49.25	5	\$0.50	325	
2)	\$38.75	7	\$0.45	435	

Ví dụ 3. Moris thuê xe của công ti du lịch. Giá thuê theo ngày là \$47.85 mỗi ngày và \$0.35 cho mỗi dặm. Moris đã đi 5 ngày và chặng đường 200 dặm. Hãng giảm giá cho 15% của tổng số tiền. Hỏi Moris phải trả bao nhiêu tiền cho chuyến đi?

Lời giải.

Số tiền trả thuê theo ngày	$5 \times \$47.85 = \$239.25$
Số tiền trả theo quãng đường	$200 \times \$0.35 = \$70$
Tổng số tiền chưa giảm giá	$239.25 + 70 = \$309.25$
Sau giảm giá, số tiền phải trả là	$0.85 \times 309.25 = \$262.86$

Ví dụ 4. Bạn đang ở nước ngoài và thuê xe. Bạn hãy tính số tiền cho hai hành trình sau:

	Cost per Day	Number of Days	Cost per Mile	Number of Miles	Discount	Rental Cost
1)	\$38.50	5	\$0.36	380	100 free miles	
2)	\$44.75	7	\$0.45	270	17%	

Bài dành cho bạn. Bạn hãy hoàn thành *Ví dụ 2* và *Ví dụ 4* rồi gửi kết quả về tòa soạn. Bài làm đúng, gửi sớm có quà tặng.

OLM.VN

CUỘC THI SÁNG TÁC CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP
PHÁT TRIỂN NĂNG LỰC MÔN TOÁN
CỦA HỌC SINH BẬC THCS

LỚP 8
MÃ: PTNL001

Câu 1. Cho ví dụ một phân thức mà sau khi rút gọn thì số hạng tử của mẫu nhiều hơn số hạng tử của mẫu của phân thức ban đầu.

Câu 2. Khi thực hiện phép trừ hai phân thức có mẫu khác nhau, có khi nào không cần rút gọn một phân thức (có thể rút gọn được) trước khi quy đồng không? Cho ví dụ.

Câu 3. Tứ giác ABCD có $\widehat{BAD} = \widehat{ADC}$, $\widehat{ABC} = \widehat{BCD}$.

Hãy so sánh $\widehat{CAD}$ và $\widehat{CBD}$.

Câu 4. Tứ giác ABCD là hình gì nếu AC cắt BD tại O thỏa mãn $S_{AOB} = S_{COD}$ và $S_{AOD} = S_{BOC}$.

Câu 5. Phân tích thành nhân tử $\sqrt{64} - \sqrt{7} + \sqrt{15}$.

Câu 6. Tìm số nguyên x để $A = \dfrac{x^3 - 4x^2 + 4x - 3}{x^3 + 3x^2 - 3x + 4}$ là số nguyên.

Câu 7. Giải phương trình

$$\frac{1}{x^2+6x+5} + \frac{1}{x^2+14x+45} + \frac{1}{x^2+22x+117} = \frac{3}{3x-5}.$$

Câu 8. Cho tam giác nhọn ABC, hai đường cao BH và CK. Chứng minh rằng

$BC^4 \le (AB^2 + AC^2)(BK^2 + CH^2)$.

Câu 9. Cho tam giác nhọn ABC có H là trực tâm. Chứng minh rằng nếu $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{HC}{HB}$ thì ΔABC cân.

Câu 10. Cho tứ giác ABCD có $\widehat{ABC} = 90^o$ và AB = AD. Kẻ $BH \perp AC$ tại H. Chứng minh rằng DH.HB.BC.CA = HC.CD.DA.AB.

LỚP 9
MÃ: PTNL001

Câu 1. Cho (d): y = ax + b và (d'): y = a'x + b'. Tìm điều kiện của a, a', b, b' để d và d' vuông góc với nhau tại một điểm trên trục hoành.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x) = (-m^2 + 5m - 7)x^2$. Hãy so sánh $f(4 - 2\sqrt{5})$ và $f(7 - 3\sqrt{6})$.

Câu 3. ΔABC nội tiếp đường tròn (O) có AB = 26 cm, BC = 24 cm, CA = 10 cm. Tính tổng khoảng cách từ tâm O đến 3 cạnh của ΔABC.

Câu 4. Hình thang ABCD vuông tại A và D có AB = 3 cm, AD = 8 cm, $CD = \dfrac{16}{3}$ cm. Hỏi BC có là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AD không?

Câu 5. Giải phương trình $x^2 + 6x - 30 = 14\sqrt{2x-3}$.

Câu 6. Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm x_1 và x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 1$ và $(x_1^2 + x_2^2)(x_1^3 + x_2^3) = 925$.

Câu 7. Cho (d): y = −mx + m và (d'): $y = \dfrac{x}{m} + \dfrac{3}{m}$ ($m \ne 0$). Chứng minh rằng giao điểm của d và d' luôn nằm trên một đường cố định, với mọi $m \ne 0$.

Câu 8. Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Kẻ $HM \perp AB$ tại M và $HN \perp AC$ tại N. Chứng minh rằng $HN\sqrt{CH} + HM\sqrt{BH} = AH\sqrt{BC}$.

Câu 9. Cho ΔABC có $\widehat{ACB} = 135^o$. Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $\widehat{BCD} = 90^o$. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{AD^2} + \dfrac{1}{AB^2} = \dfrac{2}{AC^2}$.

Câu 10. Cho hình thang ABCD vuông tại A và B. Gọi M là trung điểm của AB. Chứng minh rằng: đường thẳng qua A vuông góc với MD, đường thẳng qua B vuông góc với MC và đường thẳng qua M vuông góc với CD thì đồng quy.

DANH SÁCH CÁC CÁ NHÂN ĐOẠT GIẢI CUỘC THI VUI CHÀO HÈ 2016 BẬC THCS

✱ **Giải Nhất:** *Nguyễn Văn Thanh Sơn*, 9/1, THCS Nguyễn Khuyến, **Đà Nẵng**.

✱ **Giải Nhì:** *Vũ Minh Khải*, 6A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Đàm Ngọc Hiếu*, 8H, THCS Trần Hưng Đạo, Đông Hòa, **Phú Yên**.

✱ **Giải Ba:** *Cao Ngọc Toản*, GV. THPT Tam Giang, Phong Điền, **Thừa Thiên - Huế**; *Nguyễn Đăng Vũ*, 8A, THCS Lê Văn Thịnh, Gia Bình, **Bắc Ninh.**

✱ **Giải Khuyến khích:** *Từ Tấn Dũng*, 7D, THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam, Cầu Giấy, **Hà Nội**; *Lê Hải Phong*, 6B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An.**

Kết quả CUỘC THI VUI CHÀO HÈ 2016

(Đề đăng trên TTT2 số 159+160 và 161+162)

Bài 1. Kí hiệu a = 23, hoặc b = 32. Ta cần lập các số dạng $\overline{cdegh}$ gồm 6 chữ số, trong đó có a và 4 chữ số trong tập các chữ số S = {0, 1, 4, 5, 6}.
Chữ số c khác 0 nên có 5 cách chọn (từ a và 1, 4, 5, 6), chữ số d có 5 cách chọn (từ a và 0, 1, 4, 5, 6 không kể c), chữ số e có 4 cách chọn (từ a và 0, 1, 4, 5, 6 không kể c, d), chữ số g có 3 cách chọn (từ a và 0, 1, 4, 5, 6 không kể c, d, e), chữ số h có 2 cách chọn (từ a và 0, 1, 4, 5, 6 không kể c, d, e, g).
Như thế có 5!.5 cách chọn có a. Nếu thay a bởi b thì có 5!.5 cách chọn có b.
Vậy tổng số có 5!.10 = 1200 số.

Bài 2. Chú chuột đi theo đường ngắn nhất nên chỉ có thể đi từ trái sang phải, hoặc từ trên xuống dưới theo đường lưới.
Số đường đi như thế từ điểm A đến điểm X bằng tổng của số ở bên trái và số ở phía trên của X và được ghi trên sơ đồ tại phía dưới bên phải điểm X như dưới đây.

A

	1	1	1	1	1	1		
1	2	3	4	5	6	7	7	
1	3	6	10	15	21	28	35	35
1	4	10	20	35	56	84	119	154
1	5	15	35	70	126	210	329	483
	5	20	55	125	251	461	790	1273
		20	75	200	451	912	1702	B 2975

Bài 3. Đánh số các ô như hình dưới đây.

1b	2a	2b	3a	3b	4a	4b
5a	6b	7a	8b	9a	10b	11a
5b	6a	7b	8a	9b	10a	11b
12a	13b	14a	15b	16a	17b	18a
12b	13a	14b	15a	16b	17a	18b

Cách đi để Hà thắng Nam như sau. Hà đi trước, đánh dấu x vào ô (1b) phía trên bên trái. Chú ý rằng kề với mỗi ô (b) chỉ là ô (a) nên Nam chỉ được đánh dấu vào ô (a), nếu Nam đánh dấu vào ô (ka) với số k nào đó từ 2 đến 18 thì Hà luôn đánh dấu được vào ô (kb) kề với ô (ka), như thế Hà là người đánh dấu cuối cùng nên thắng cuộc.

Bài 4. Kí hiệu các số ghi tại các ô tròn như ở hình có ba đa giác 7 cạnh dưới đây.
Để dễ tính toán ta giảm đi 86 ở mỗi số cần ghi và chuyển về bài toán điền 21 số nguyên liên tiếp từ 0 đến 20 vào các ô tròn với tổng các số là 0 + 1 + 2 + ... + 20 = 210. Tổng ba số trên mỗi nửa đường thẳng $A_i + B_i + C_i = 210 : 7 = 30$, tổng 7 số theo mỗi hàng $A_1 + A_2 + ... + A_7 = B_1 + B_2 + ... + B_7 = C_1 + C_2 + ... + C_7$ là 210 : 3 = 70.
Theo giả thiết có bảng sau, trong đó ba số ghi trên mỗi nửa đường thẳng ghi theo cột, bảy số trên mỗi đa giác ghi theo hàng ngang.

	1(30)	2(30)	3(30)	4(30)	5(30)	6(30)	7(30)
A(70)	0				7		
B(70)			13	20		3	
C(70)		17					10

Từ đó ở cột 1 là $B_1 + C_1 = 30 - 0 = 30$.

Tương tự ở cột 2 là $A_2 + B_2 = 30 - 17 = 13$.

Ở cột 3 là $A_3 + C_3 = 30 - 13 = 17$.

Ở cột 4 là $A_4 + C_4 = 30 - 20 = 10$.

Ở cột 5 là $B_5 + C_5 = 30 - 7 = 23$.

Ở cột 6 là $A_6 + C_6 = 30 - 3 = 27$.

Ở cột 7 là $A_7 + B_7 = 30 - 10 = 20$.

Mặt khác ở hàng A có

$A_2 + A_3 + A_4 + A_6 + A_7 = 70 - 7 = 63$.

Ở hàng B có

$B_1 + B_2 + B_5 + B_7 = 70 - (13 + 20 + 3) = 34$.

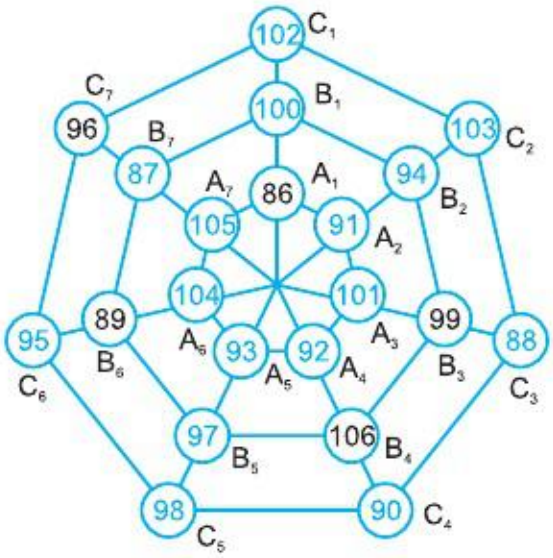
Ở hàng C có

$C_1 + C_3 + C_4 + C_5 + C_6 = 70 - (17 + 10) = 43$.

Điền các số vào bảng sao cho số ở các ô đều khác nhau ta được kết quả sau

	1(30)	2(30)	3(30)	4(30)	5(30)	6(30)	7(30)
A(70)	0	5	15	6	7	18	19
B(70)	14	8	13	20	11	3	1
C(70)	16	17	2	4	12	9	10

Cộng thêm 86 vào mỗi số trong bảng trên ta điền được các số vào hình các đa giác 7 cạnh như sau.



Bài 5. Đặt số ở các mặt ABCD, ABNM, ADQM, PNBC, PQMN, PQDC tương ứng là x, y, z, t, u, v. Theo giả thiết có $x + y + z = 4$ (1) ở đỉnh A, $x + y + t = 5$ (2) ở đỉnh B, $t + u + v = 6$ (3) ở đỉnh P.

Tổng các số ở 6 đỉnh bằng tổng các số ở đỉnh A và đỉnh P nên bằng 10.

a) Tổng ba số ở đỉnh Q bằng tổng các số ở 6 đỉnh trừ đi tổng ba số ở đỉnh B nên bằng $10 - 5 = 5$.

b) Do $4 = 1 + 1 + 2$ nên từ (1) chỉ có thể xảy ra các trường hợp sau đây.

● TH1. $x = y = 1$ và $z = 2$ thì $t = 3$ theo (2), lúc đó $u + v = 3$ theo (3) nên có 2 cách điền số là (u, v) bằng (1, 2), hoặc là (2, 1).

● TH2. $x = z = 1$ và $y = 2$ thì $t = 2$ theo (2), lúc đó $u + v = 4$ theo (3) nên có 3 cách điền số là (u, v) bằng (1, 3), hoặc là (3, 1), hoặc là (2, 2).

● TH3. $y = z = 1$ và $x = 2$ thì $t = 2$ theo (2), lúc đó $u + v = 4$ theo (3) nên có 3 cách điền số là (u, v) bằng (1, 3), hoặc là (3, 1), hoặc là (2, 2).

Vậy tất cả có 8 cách điền các số vào các mặt của hình lập phương.

Bài 6. Xét số gồm 6 chữ số khác nhau và khác 0 là $n = \overline{abcdeg}$.

Theo giả thiết có $a + b + c + 1 = d + e + g$.

Đặt $a + b + c = m$ thì tổng 6 chữ số bằng $2m + 1$, là số lẻ.

Do đó trong 6 chữ số có thể có 1, hoặc 3, hoặc 5 chữ số lẻ.

Xảy ra 3 trường hợp sau đây.

● TH1. Giả sử $a + b + c + d + e + g = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ thì $m = 10$ và $m + 1 = 11$.

Ta phân tích $m = 10 = 1 + 3 + 6 = 1 + 4 + 5 = 2 + 3 + 5$ được 3 tổng 3 chữ số.

Với mỗi tổng 3 chữ số, chẳng hạn $1 + 3 + 6$ có 6 cách viết là $1 + 3 + 6$, $1 + 6 + 3$, $3 + 1 + 6$, $3 + 6 + 1$, $6 + 1 + 3$, $6 + 3 + 1$, với tổng 3 chữ số còn lại là $2 + 4 + 5$ cũng có 6 cách viết nên có $6.6 = 36$ cách viết số có 6 chữ số.

Từ đó với 3 tổng có $m = 10$ thì có tất cả là $3.36 = 108$ cách viết.

Kết quả tương tự với số gồm 6 chữ số liên tiếp như (2, 3, 4, 5, 6, 7) có $2m + 1 = 27$, (3, 4, 5, 6, 7, 8) có $2m + 1 = 33$, (4, 5, 6, 7, 8, 9) có $2m + 1 = 39$.

● TH2. Giả sử $a + b + c + d + e + g = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 8 = 23$ thì $m = 11$ và $m + 1 = 12$. Phân tích $m = 11 = 1 + 2 + 8 = 2 + 4 + 5$ chỉ được 2 tổng 3 chữ số.

Tương tự với mỗi tổng 3 chữ số có 6 cách viết, với tổng 3 chữ số còn lại cũng có 6 cách viết nên có $6.6 = 36$ cách viết số có 6 chữ số.

Từ đó với 2 tổng có $m = 11$ thì có tất cả là $2.36 = 72$ cách viết.

Kết quả tương tự với số gồm 6 chữ số như (1, 2, 3, 4, 6, 7) có $2m + 1 = 23$, (1, 2, 3, 5, 6, 8) có $2m + 1 = 25$, (1, 3, 5, 6, 7, 9) có $2m + 1 = 31$, ...

● TH3. Giả sử $a + b + c + d + e + g = 1 + 2 + 3 + 6 + 7 + 8 = 27$ thì $m = 13$ và $m + 1 = 14$.

Phân tích m = 13 = 2 + 3 + 8 chỉ được 1 tổng 3 chữ số.
Tương tự với mỗi tổng 3 chữ số có 6 cách viết, với tổng 3 chữ số còn lại cũng có 6 cách viết nên có 6.6 = 36 cách viết số có 6 chữ số.
Từ đó có tất cả là 36 cách viết.
Kết quả tương tự với số gồm 6 chữ số như (1, 2, 3, 6, 8, 9) có 2m + 1 = 29, (1, 2, 4, 7, 8, 9) có 2m + 1 = 31, (2, 3, 4, 7, 8, 9) có 2m + 1 = 33.
Vậy số cách viết các số gồm 6 chữ số khác nhau và khác 0 có thể là 36 cách, 72 cách hoặc 108 cách.
Nếu xét chữ số 0 thì còn loại bỏ trường hợp chữ số đầu trái khác 0 nên số cách viết sẽ ít hơn.

Bài 7. Gọi chiều cao của 15 cây dừa theo thứ tự là $a_1, a_2, \ldots, a_{14}, a_{15}$.
Theo giả thiết có $|a_1 - a_2| = |a_2 - a_3| = \ldots = |a_{14} - a_{15}| = |a_{15} - a_1| = k \geq 0$.
Từ đó $a_i - a_{i+1} = ke_i$, và $a_{15} - a_1 = ke_{15}$ với e_i bằng 1 hoặc –1 (i = 1, 2,..., 15).
Cộng theo vế 15 đẳng thức trên được
$k(e_1 + e_2 + \ldots + e_{15}) = 0$.
Mà $e_1 + e_2 + \ldots + e_{15}$ khác 0 (vì tổng 15 số 1 và –1 là số lẻ), suy ra k = 0.
Do đó $a_1 - a_2 = a_2 - a_3 = \ldots = a_{14} - a_{15} = a_{15} - a_1 = 0$.
Suy ra điều phải chứng minh.

Bài 8. Ta gọi là bạn Việt được thưởng m điểm nếu câu m đúng.
Giả sử trong 20 câu trên bảng có a câu khẳng định sai với $1 \leq a \leq 19$.
Xét các phiếu theo thứ tự mà ban tổ chức đưa cho bạn Việt thì từ phiếu số 1 đến phiếu số a có nội dung đúng, còn từ phiếu a + 1 đến phiếu 20 (gồm 20 – a phiếu) có nội dung sai. Để nhận được tiền thưởng nhiều nhất thì bạn Việt cần chuyển các phiếu số 1, 2, 3, ... , a, a + 1, ... , 19, 20 trở thành các phiếu theo thứ tự là 20, 19, ... , a + 1, a, ... , 3, 2, 1 thì tất cả a phiếu nội dung đúng từ phiếu số 1 đến phiếu số a được thưởng với số điểm nhiều nhất từ 20 điểm, 19 điểm, ... lần lượt đến hết a phiếu. Tổng số điểm bạn Việt có được là
$20 + 19 + 18 + \ldots + (21 - a)$
$= \dfrac{(20 + 21 - a).a}{2} = \dfrac{a(41 - a)}{2}$.
Tổng số tiền bạn Việt nhận được là
$\dfrac{a(41 - a)}{2}.200000 = 100000.a(41 - a)$ đồng.

Bài 9. Số đoạn ống đèn tuýp trong các hình H, E, dấu huyền, 2, 0, 1, 6 tương ứng là S_0 = (5, 5, 1, 5, 6, 2, 6) và cũng là số đoạn ống đèn tuýp không sáng lúc đầu.
Gọi số đoạn ống đèn tuýp không sáng tại thời điểm t không thao tác bật đèn là S_t = (a, b, c, d, e, f, g).
Tại thời điểm kết thúc mọi đèn đều sáng thì S_k = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0).
Nếu chọn hình H và tại thời điểm t + 1 bật p đèn sáng với $1 \leq p \leq a$ thì S_{t+1} = (a – p, b, c, d, e, f, g).
Nếu chọn hai hình H, E và tại thời điểm t + 1 bật p đèn sáng với $1 \leq p \leq a$, $1 \leq p \leq b$ thì S_{t+1} = (a – p, b – p, c, d, e, f, g).
Nhận xét. Xét thời điểm có cặp số bằng nhau (n, n), nếu một người chơi A bật p đèn với $1 \leq p \leq n$ chuyển về cặp số (n – p, n) thì người chơi B cần bật p đèn ở hình thứ hai để chuyển về cặp số nhỏ hơn bằng nhau (n – p, n – p), ... Cứ như thế cuối cùng người chơi B sẽ chuyển về cặp số (0, 0) và thắng cuộc.
Với nhận xét trên, ta có thể bỏ qua các cặp số bằng nhau (5, 5, 6, 6) trong S_0, tức là chỉ cần xét bộ ba số R_0 = (1, 5, 2).
Chiến thuật để người B đi trước có thể thắng cuộc là bật 2 đèn sáng ở hình giữa (số 2) có 5 đèn chưa sáng để chuyển về R_1 = (1, 3, 2). Đến đây, nếu A chuyển đến bộ ba số R_2 nào đó thì B luôn chuyển về bộ ba số dạng R_3 = (0, 2, 2), hoặc R_3 = (1, 0, 1), hoặc R_3 = (1, 1, 0) và sẽ thắng cuộc theo nhận xét trên. Tuy nhiên, nếu B không đưa về một trong 3 dạng đó thì không chắc thắng.

Bài 10. Đáp án như sau

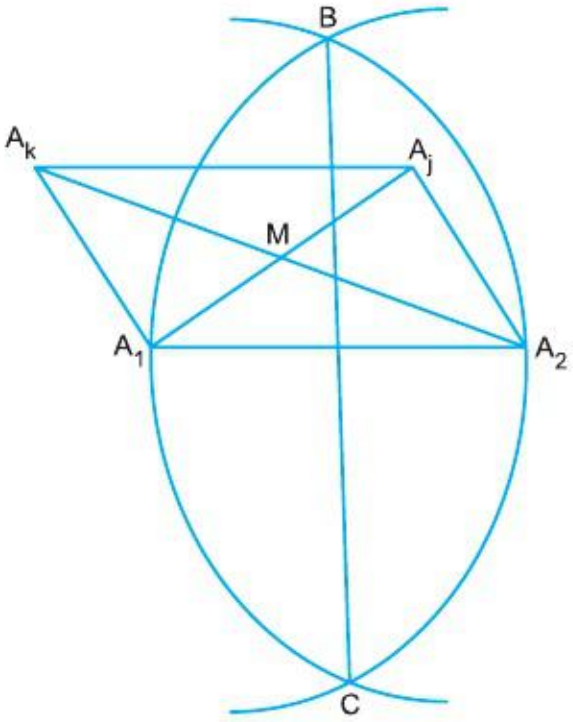
	2	0	1	6		2016
1			6	0	2	603
2	0	1			6	207
0		6	2	1		621
	6	2	0		1	621
6	1			2	0	81
126	63	162	36	63	36	

NGUYỄN VIỆT HẢI

Kết quả SỐ ĐIỂM ... (Tiếp theo trang 41)

Vậy các trung điểm của 2015 đoạn thẳng A_1A_j với j bằng 2, 3, ... , 2016 và các trung điểm của 2014 đoạn thẳng A_2A_k với k bằng 3, 4, ... , 2016 là khác nhau, do đó có ít nhất 4029 trung điểm khác nhau. Một cách vẽ 2016 điểm chỉ có 4029 trung điểm khác nhau (bạn đọc tự kiểm tra) như sau. Trên một đoạn thẳng A_1A_2 lấy 2016 điểm $A_1, A_3, A_4, \ldots, A_{2015}, A_{2016}, A_2$ theo thứ tự cách đều nhau, tức là $A_1A_3 = A_3A_4 = A_4A_5 = \ldots = A_{2015}A_{2016} = A_{2016}A_2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của T bằng 4029.



Nhận xét. Tất cả các bạn gửi bài giải đã tính được giá trị lớn nhất của T nhưng chưa chỉ ra cách vẽ hình. Chỉ có bạn *Trương Thị Thu Lan*, 8A2, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh,** chỉ ra được cách dựng 2016 điểm sao cho chỉ có 4029 trung điểm khác nhau, tuy nhiên chưa chứng minh được đó là giá trị nhỏ nhất của T. Bạn Lan là người được thưởng kì này.

ANH COMPA

Kết quả UNIT 20.

GAS LAW AND PARTICLES OF MATTER THEORY SECTION (TTT2 số 161+162)

Câu 1. Một khối lượng khí nhất định chiếm 9.0 lít không khí ở nhiệt độ 300 K và áp suất 1.2 atm. Thể tích được giảm xuống còn 5 lít bằng cách tăng áp suất lên 2.3 atm.

a) Giả sử rằng khí đó ở dạng khí lí tưởng, tính nhiệt độ của khí đó sau khi giảm thể tích.

b) Chỉ ra lí do tại sao nhiệt độ thực có thể khác so với nhiệt độ tính được.

Câu 2. Sử dụng lí thuyết phân tử, giải thích ngắn gọn tại sao:

a) Chất lỏng bay hơi nhanh hơn khi có gió lùa.

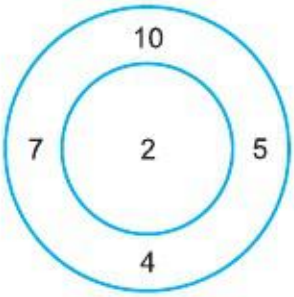
b) Sự bay hơi nhanh của chất lỏng làm mát chất lỏng đó.

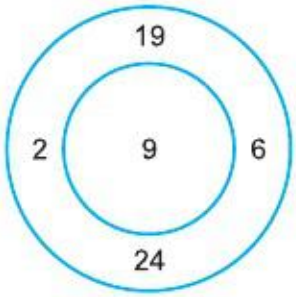
Nhận xét. Các bạn có bài dịch tốt và được nhận quà kì này là: *Vũ Trung Tiến*, 8A2, THCS Trưng Vương, Mê Linh; *Phan Anh Khánh*, 9A2, THCS Giảng Võ, **Hà Nội**; *Nguyễn Thị Thu Trang*, 9A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Nguyễn Thùy Mai*, 8E1; *Lê Tất Hoan*, 7D, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc.**

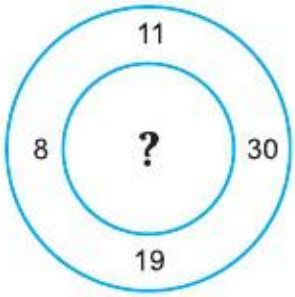
MAI MY

Kì này ĐIỀN SỐ

Bài 1. Điền số thích hợp vào chỗ trống sao cho hợp lôgic.







Bài 2. Điền số thích hợp vào chỗ trống sao cho hợp lôgic.

0	8	4	16	16	?
4	1	12	9	20	?

NGUYỄN ĐỨC TẤN *(TP. Hồ Chí Minh)*

Kết quả SỐ NÀO? (TTT2 số 161+162)

Nhận xét. Quy luật của hai bài kì này tương đối khó, hầu hết các bạn tìm đúng kết quả nhưng chưa nêu rõ quy luật của các số.

Quy luật.

Bài 1. Mỗi số của dãy là số chính phương lớn nhất có số chữ số bằng số thứ tự của nó trong dãy. Do vậy số tiếp theo (số thứ năm) là số chính phương lớn nhất có 5 chữ số, đó là số **99856** ($= 316^2$).

Bài 2. Mỗi số ở hàng trên nằm chính giữa hai số ở hàng dưới, nó bằng tích hai số đó ở hàng dưới cộng với 3.

Theo quy luật đó thì $x = (-7) \times 11 + 3 = (-74)$; $y = (-74) \times (-8) + 3 = 595$.

Xin trao thưởng cho các bạn nêu rõ quy luật của cả hai bài: *Nguyễn Huy Quý*, 9A, THCS Lý Tự Trọng, Bình Xuyên, **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Thanh Sơn*, 6A3, *Vũ Linh Chi*, 9A3, *Bùi Trọng Vinh*, 9A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Hà Đình Tâm*, 8A2, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**.

Các bạn sau được tuyên dương: *Phùng Thị Thùy Dung, Đàm Quang Anh, Hoàng Thị Ngọc Diệp*, 8E1, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc**; *Trần Tiến Đạt*, 8A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Nguyễn Thị Quỳnh Anh*, 9A1, THCS Thị trấn Quán Hành, Nghi Lộc; *Nguyễn Công Khanh*, 6D, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Kì này BẠN CÓ Ý KIẾN GÌ KHÁC?

Bài toán. Cho biểu thức

$$P = \frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{\sqrt{x}-1} - \frac{4}{x-1}.$$

Tìm các giá trị của x để biểu thức P có giá trị nguyên.

Một học sinh đã giải như sau:

ĐKXĐ $\begin{cases} x \ge 0 \\ x \ne 1 \end{cases}$

Ta có $P = \dfrac{\sqrt{x}-1+2(\sqrt{x}+1)-4}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$

$= \dfrac{3\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \dfrac{3}{\sqrt{x}+1}.$

Để P có giá trị nguyên thì

$(\sqrt{x}+1) \in \{-3; -1; 1; 3\}.$

Vì $x \ge 0$ nên $\sqrt{x}+1 \ge 1.$

Do đó $\left[\begin{array}{l} \sqrt{x}+1=1 \\ \sqrt{x}+1=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=4 \end{array}\right.$ (thỏa mãn ĐKXĐ).

Vậy x = 0; x = 4 thỏa mãn bài toán.

Các bạn có ý kiến gì khác không ?

NGUYỄN NGỌC HÙNG

(GV. THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, Hà Tĩnh)

Kết quả LỜI GIẢI ĐÃ ĐÚNG CHƯA? (TTT2 số 161+162)

Lời giải đã đăng chưa ổn vì chia hai bất đẳng thức cùng chiều thì không thể được một bất đẳng thức! Một lời giải đúng như sau:

Sử dụng giả thiết $x^2 + y^2 = 4$, ta có

$2xy = (x+y)^2 - (x^2+y^2) = (x+y)^2 - 4$

$= (x+y-2)(x+y+2).$

Với $x+y+2$ khác 0 và $(x+y)^2 \le 2(x^2+y^2)$ thì

$A = \dfrac{xy}{x+y+2} = \dfrac{x+y-2}{2}$

$\le \dfrac{1}{2}(\sqrt{2(x^2+y^2)}-2)$

$= \dfrac{1}{2}(\sqrt{2.4}-2) = \sqrt{2}-1.$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = \sqrt{2}.$

Vậy $\text{Max}A = \sqrt{2}-1$ khi $x = y = \sqrt{2}.$

Nhận xét. Nhiều bạn chỉ ra được chỗ sai của lời giải đã đăng báo, nhưng chỉ có bạn *Trần Quang Tài*, 8A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh** đưa ra lời giải đúng.

ANH KÍNH LÚP

KINH NGHIỆM GIẢNG DẠY CÁC BÀI TOÁN QUỸ TÍCH

NGUYỄN THỊ BÍNH
(707 tòa B, Mulberry Lane, Hà Đông, Hà Nội)

Nói đến quỹ tích (tập hợp điểm), đa số học sinh sợ dạng toán này. Một vấn đề đặt ra cho người thầy là làm thế nào xóa được ấn tượng đó trong học sinh. Điều đó chỉ đạt được khi học sinh nắm được phương pháp suy nghĩ và tính chất riêng của bài toán. Chính vì vậy trong quá trình giảng dạy lí thuyết cũng như trong bài tập, người thầy cần cố gắng trình bày để học sinh nắm được những vấn đề sau:

● Hiểu được định nghĩa quỹ tích: quỹ tích những điểm M có tính chất α là một hình bao gồm tất cả những điểm có tính chất α và chỉ gồm những điểm đó. Tức là M có tính chất α thì suy ra M thuộc hình A và ngược lại nếu điểm M thuộc hình A thì M phải có tính chất α.

Hiểu thấu đáo vấn đề này học sinh mới thấy hết ý nghĩa và tầm quan trọng của cả hai phần thuận và đảo. Thường các em học sinh và giáo viên cũng hay coi thường và bỏ qua phần đảo (giáo viên chỉ chữa phần thuận, phần đảo để học sinh tự chứng minh nên đã tạo thói quen coi thường phần đảo).

● Nắm được các bước làm một bài toán quỹ tích gồm có:

* Bước 1. Dự đoán quỹ tích.
* Bước 2. Chứng minh phần thuận.
* Bước 3. Giới hạn quỹ tích.
* Bước 4. Chứng minh phần đảo.
* Bước 5. Kết luận quỹ tích.

Phần dự đoán quỹ tích có thể chỉ làm nháp mà không cần viết vào bài, nhưng nó là bước quan trọng để tìm ra hướng giải cho bài toán.

Học sinh nên nắm vững đặc trưng của từng dạng quỹ tích. Cho đến chương trình hình học lớp 8, quỹ tích thường gặp chủ yếu là hai dạng: dạng thẳng (đường thẳng, đoạn thẳng, nửa đường thẳng) và dạng tròn (đường tròn, cung tròn, một phần cung tròn).

* Dạng thẳng hay gặp là đường phân giác, đường trung trực, đường thẳng $MA^2 - MB^2 = k^2$ (các quỹ tích cơ bản).

* Dạng tròn: Cung chứa góc (bằng 90° hoặc nhỏ hơn 90° hoặc lớn hơn 90°), đường tròn Apôlôniút $\frac{MA}{MB} = k \neq 1$, M nhìn 2 đoạn kề thẳng hàng dưới 2 góc bằng nhau...

Việc chứng minh những bài toán quỹ tích sẽ đưa về dạng quỹ tích cơ bản. Vì vậy học sinh cần nắm được tính chất của các quỹ tích cơ bản ấy.

Trên đây là một số vấn đề khái quát có tính chất lí thuyết. Sau đây là phương pháp làm các bước của một bài toán quỹ tích qua một số ví dụ.

Bước 1. Dự đoán quỹ tích

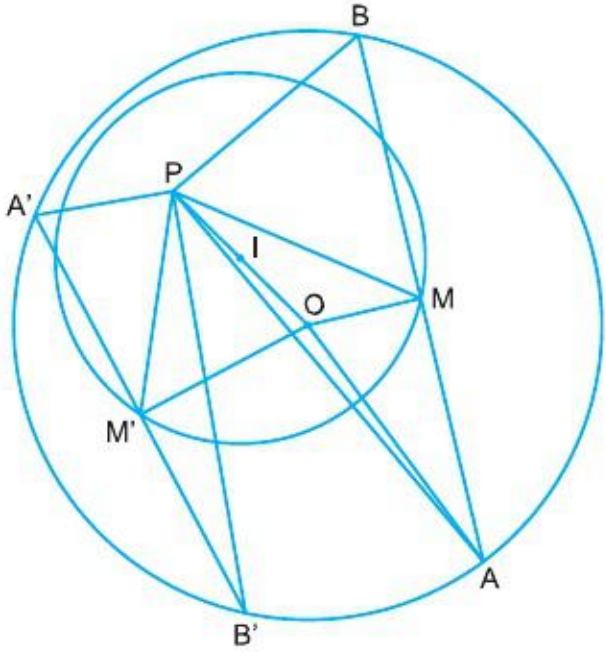
Như trên đã nói, ở cấp trung học cơ sở chủ yếu gặp 2 dạng hình của quỹ tích là dạng thẳng và dạng tròn. Phải làm thế nào cho học sinh đoán được quỹ tích này sẽ là đường gì?

Có mấy phương pháp để đoán nhận quỹ tích: đoán nhận bằng lí luận, đoán nhận bằng phần tử đặc biệt, phần tử vô tận, đoán nhận bằng vẽ nhiều vị trí khác nhau của điểm cần tìm quỹ tích. Đối với học sinh yếu, nên cho học sinh đoán bằng cách vẽ điểm cần tìm quỹ tích ở ít nhất 3 vị trí khác nhau. So sánh vị trí tương đối của các điểm đó ta sẽ dự đoán được hình dạng của quỹ tích (nếu các điểm thẳng hàng thì khi đó quỹ tích

có thể là đường thẳng, nếu có 3 điểm không thẳng hàng thì quỹ tích có thể là đường tròn,...).

Đối với học sinh khá hơn có thể dự đoán quỹ tích bằng phần tử đặc biệt, phần tử vô tận.

Ví dụ 1. Cho (O, R) với điểm P nằm trong đường tròn, $\widehat{APB} = 90^o$, hai điểm A và B thuộc đường tròn (O). Điểm M thuộc AB sao cho MA = MB. Tìm quỹ tích điểm M khi $\widehat{APB}$ quay quanh điểm P.



Dự đoán quỹ tích. Đối với bài toán này có thể dự đoán quỹ tích bằng phần tử đặc biệt như sau:

Xét $\widehat{APB}$ ở vị trí khi cạnh PA đi qua tâm O.

Nối OM ta được tam giác OMA vuông ở M.

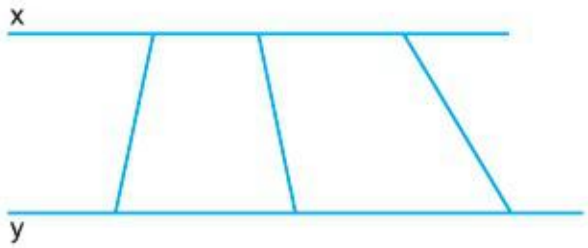
Khi đó $MO^2 + MA^2 = R^2$.

Trong tam giác vuông BPA có PM = MA.

Từ trên suy ra $MO^2 + MP^2 = R^2$.

Từ điều này ta có thể đoán quỹ tích là đường tròn dựa vào định lí Apôlôniút. Từ đó có hướng chứng minh đối với một vị trí bất kì.

Ví dụ 2. Tìm quỹ tích các điểm chia các đoạn thẳng tựa trên 2 đường thẳng song song cho trước theo một tỉ số cho trước.



Dự đoán quỹ tích. Đối với bài này nên dự đoán bằng phần tử vô tận.

Ta thấy 2 đường thẳng song song dài vô tận nên các đoạn thẳng tựa trên 2 đường thẳng ấy cũng có thể ở xa vô tận.

Do vậy phải có những điểm chia chúng ở xa vô tận, từ đó quỹ tích phải là đường thẳng hoặc nửa đường thẳng.

Nhưng trường hợp này, vô tận cả 2 phía nên ta có thể dự đoán quỹ tích là đường thẳng.

Bước 2. Sau khi dự đoán quỹ tích, bắt đầu bước vào chứng minh phần thuận.

Để chứng minh phần này cần xác định được những yếu tố cố định, không đổi và những yếu tố thay đổi. Trên cơ sở đó dựa vào tính chất các dạng quỹ tích đã phân loại ở trên và dự đoán của mình để chứng minh.

Nếu dự đoán là dạng thẳng thì xét xem điểm cần tìm quỹ tích có thể nằm trên đường phân giác của một góc cố định nào đó, hoặc nằm trên đường trung trực của một đoạn thẳng cố định hay đường mà hiệu của các bình phương khoảng cách đến hai điểm cố định hay không?

Nếu dự đoán là đường tròn thì hãy cố gắng chứng minh xem góc tại điểm đó nhìn một đoạn thẳng cố định có bằng 90° hay không? Có thay đổi hay không? Hoặc có thỏa mãn điều kiện của đường tròn Apôlôniút hay không? (xét tỉ số, hoặc 2 góc).

Ví dụ 3. *(Chứng minh phần thuận của ví dụ 1)*

Ta đã dự đoán quỹ tích trong ví dụ 1 là đường tròn, mà 2 điểm cố định là P và O nên bây giờ cần phải chứng minh $MP^2 + MO^2 = k^2$. Ở đây trong bước dự đoán ta đã thấy $k^2 = R^2$ nên sẽ chứng minh $MP^2 + MO^2 = R^2$.

Điều này chứng minh được dựa vào công thức đường trung tuyến và hệ thức lượng trong tam giác vuông (bạn đọc tự chứng minh chi tiết).

Chú ý. Trong phần thuận lưu ý cho học sinh: chưa được dùng từ "quỹ tích". Trong ví dụ trên, sau khi chứng minh được $MP^2 + MO^2 = R^2$ nếu học sinh trả lời: "Do đó quỹ tích của M là đường tròn tâm I bán kính r, trong đó I là trung điểm của PO, $r = \frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - OP^2}$." là sai. Chỉ có thể được dùng từ "quỹ tích" khi đã chứng minh xong phần đảo.

Bước 3. Giới hạn quỹ tích

Phương pháp thông thường để giới hạn quỹ tích là xét các vị trí đặc biệt của điểm cần tìm quỹ tích trong quá trình nó thay đổi.

Ví dụ 5. Cho (O) với đường kính AB cố định và M di chuyển trên (O). Lấy điểm I thuộc tia đối của tia MA sao cho IM = 2MB. Tìm quỹ tích điểm I.

Hướng dẫn. Sau khi chứng minh được điểm I thuộc 2 cung chứa góc MIB cố định, ta xét các vị trí đặc biệt sau:

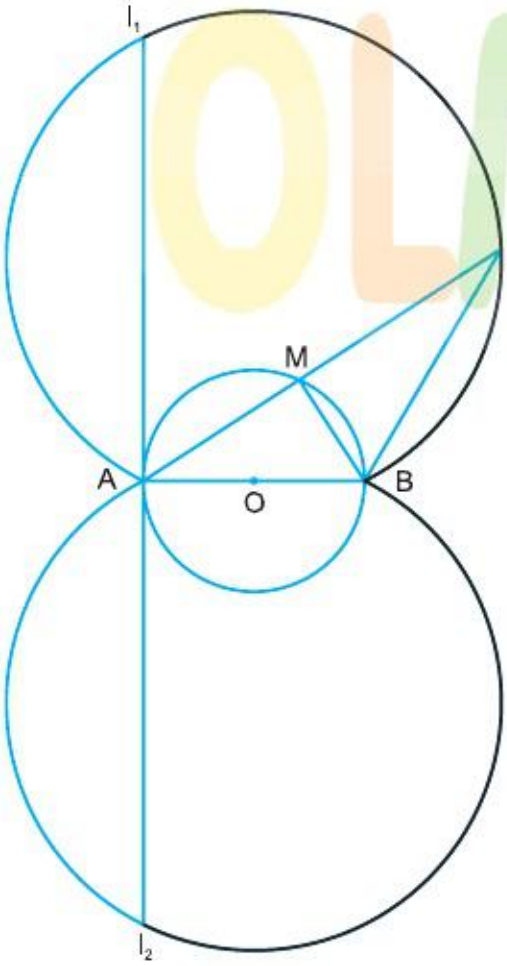
- Khi M chạy trên nửa đường tròn, thì điểm I có chạy hết cung chứa góc phía trên không?

Ta thấy điểm M trùng với điểm B nên MB = 0.

Mà lại có IM = IB.

Vậy ta có IB = 2. 0 = 0, điều này chứng tỏ I trùng với B.

- Khi M di chuyển đến điểm A thì MA trở thành tiếp tuyến của đường tròn tại tiếp điểm A. Khi đó I trùng với I_1.



- Cho M di chuyển tiếp trên nửa đường tròn dưới từ B đến khi M trùng với A. Khi đó I trùng với I_2.

Như vậy ở mọi vị trí không có điểm I nào rơi vào phần cung $\overset{\frown}{I_1A}$ và $\overset{\frown}{AI_2}$.

Vậy quỹ tích chỉ là 2 đoạn cung I_1B và BI_2.

Chú ý. Nhiều khi học sinh làm phần giới hạn sau khi đã chứng minh phần đảo. Nhưng thiết nghĩ dứt khoát phần này phải làm trước phần đảo, bởi có như thế mới tránh được trường hợp điểm lấy để chứng minh phần đảo lại rơi đúng vào phần không nằm trong giới hạn, lúc đó không thể chứng minh được.

Bước 4. Chứng minh phần đảo.

Thông thường nếu một bài toán quỹ tích mà **tính chất α** chỉ gồm 1 tính chất thì phần đảo thường được tiến hành là: lấy một điểm bất kì thuộc hình A, phải chứng minh nó có tính chất α. Dạng này tương đối đơn giản.

Học sinh thường gặp khó khăn trong những bài có nhiều giả thiết. Tức là những điểm M có từ hai tính chất trở lên. Giáo viên phải hướng dẫn cho học sinh cách đảo bộ phận.

Nghĩa là: nếu phải tìm quỹ tích M thỏa mãn tính chất α, β phần thuận đã chứng minh M thuộc hình A. Vậy thì phần đảo sẽ là: lấy M thuộc A, M có tính chất α (hoặc β). Chứng minh M có tính chất β (hoặc α).

Ví dụ 4. *(Chứng minh phần đảo của ví dụ 1)*

Theo đề bài cho thì M thỏa mãn hai tính chất MA = MB và $\widehat{APB} = 90^o$.

Phần thuận đã chứng minh M thuộc (I, r). Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với MO cắt (O) tại A và B. Nối A, B với P. Chứng minh $\widehat{APB} = 90^o$ và MA = MB.

Chú ý. Trong phần đảo cần lưu ý cho học sinh rằng kết luận của phần thuận bao giờ cũng phải là điểm xuất phát của phần đảo.

Trong ví dụ trên nếu đảo là vẽ $\widehat{APB} = 90^o$, AB cắt (I, r) tại M. Cần chứng minh MA = MB. Cách này không hợp lí vì nếu trường hợp AB không cắt đường tròn (I) thì không tồn tại điểm M thuộc (I). Vì vậy trong nhiều cách đảo bộ phận, học sinh phải biết chọn cách nào là hợp lí.

Bước 5. Kết luận quỹ tích

Phần này đơn thuần chỉ kết luận lại quỹ tích của bài toán là gì, dựa vào phần thuận và phần đảo.

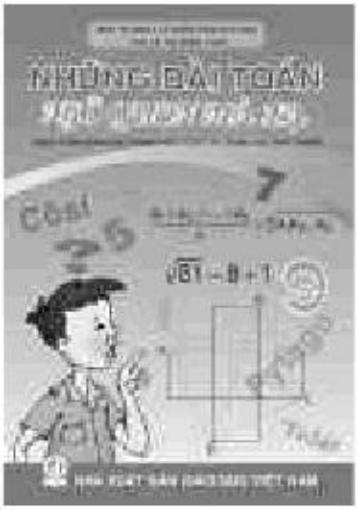
TỦ SÁCH TOÁN TUỔI THƠ

Số trang: 172; Khổ: 17 x 24 cm.
Giá bìa: 21 000 đồng.

Số trang: 188; Khổ: 17 x 24 cm.
Giá bìa: 21 000 đồng.

Số trang: 136; Khổ: 17 x 24 cm.
Giá bìa: 23 000 đồng.

Số trang: 216; Khổ: 17 x 24 cm.
Giá bìa: 22 000 đồng.



Số trang: 216; Khổ: 17 x 24 cm.
Giá bìa: 35 000 đồng.

Đóng tập tạp chí cả năm 2013
Khổ: 19 x 27 cm
Giá bìa: 145 000 đồng.

Đóng tập tạp chí cả năm 2009
Khổ: 19 x 27 cm
Giá bìa: 75 000 đồng.

Đóng tập tạp chí cả năm 2015
Khổ: 19 x 27 cm
Giá bìa: 165 000 đồng.

BẠN ĐỌC CÓ THỂ ĐẶT MUA TẠP CHÍ CẢ NĂM HỌC TẠI CÁC CƠ SỞ BƯU ĐIỆN TRONG CẢ NƯỚC VỚI MÃ ĐẶT CÁC ẤN PHẨM NHƯ SAU: Tạp chí Toán Tuổi thơ 1: **C169**; Tạp chí Toán Tuổi thơ 2: **C169.1**; Tổng tập Toán Tuổi thơ 1 năm 2015: **C169.2**; Tổng tập Toán Tuổi thơ 2 năm 2015: **C169.3**; Tổng tập Toán Tuổi thơ 1 năm 2014: **C169.4**; Tổng tập Toán Tuổi thơ 2 năm 2014: **C169.5**; Tuyển chọn 10 năm Toán Tuổi thơ - Các chuyên đề toán chọn lọc THCS: **C169.7**; 279 Bài toán hình học phẳng Olympic các nước: **C169.8**; Bài giảng số học: **C169.6**.

Vui cười

❑ KHÔNG GIỐNG

Tí: - Này Tèo, sao bài thơ của cậu lại giống hệt bài của người khác đã đăng trên báo?

Tèo: - Không giống hệt đâu. Tớ kí tên khác. Người đó kí tên khác.

❑ DỄ THẾ...

Tí: - Tèo này, cậu có biết người vụng chèo khéo chống là người như thế nào không? Chị tớ đố tớ mà tớ chịu, không trả lời được.

Tèo: - Là người lái đò. Dễ thế mà cậu cũng chịu à?

❑ ĐẸP

Tí: - Tèo ơi, cậu thấy chữ tớ có đẹp không?

Tèo: - Đẹp.

Tí: - Đẹp thế nào?

Tèo: - Bay bướm, các nét như hòa quyện vào nhau...

Tí: - Ôi, cậu đúng là người hiểu tớ!

Tèo: - Nhưng mà...

Tí: - Nhưng mà sao?

Tèo: - Không dịch ra được.

❑ KHÔNG QUEN TAY

Tí: - Này Tèo, bài văn hôm qua của cậu sao lắm lỗi chính tả thế?

Tèo: - Tại hôm qua bút của tớ bị hỏng, tớ phải mượn bút bạn khác.

Tí: - Bút thì liên quan gì?

Tèo: - Bút lạ, viết không quen tay, khó viết lắm. Thế nên tớ đành phải viết đại đi mà không nghĩ đến lỗi chính tả nữa.

Tí: - Cậu đúng là vừa vụng chèo vừa vụng chống!

ĐỖ HỒNG THỊNH

(Xóm 11, Xuân Thành, Xuân Trường, Nam Định)

Tuổi của một số thiết bị, vật dụng và công nghệ

BÍNH NAM HÀ

Năm 2016 này là tròn:

70 năm máy tính điện tử ra đời tại Mỹ

75 năm thuốc kháng sinh được tìm ra ở Anh

95 năm cách tiêm phòng bệnh lao phát minh ra ở Pháp

100 năm ống catốt ra đời tại Mỹ

115 năm người Pháp chế tạo được thủy phi cơ

120 năm phóng xạ nguyên tử được phát hiện ở Pháp

130 năm người Anh chế ra ngư lôi

135 năm tàu điện ra đời ở Đức

140 năm điện thoại ra đời ở Mỹ

150 năm mô tô hơi ra đời ở Pháp

170 năm người Mỹ tiến hành gây mê để phẫu thuật

175 năm người Anh phát minh ra phim chụp ảnh

200 năm người Pháp phát minh ra đèn hầm mỏ

220 năm công nghệ in litô ra đời ở Đức

225 năm người Đức chế tạo được hóa phẩm sút

230 năm người Anh chế tạo được máy bơm nước

230 năm chữ Quốc tế ngữ xuất hiện

230 năm máy kéo chỉ ra đời ở Anh

295 năm chuông giật được chế tạo ở Anh

305 năm người Pháp làm ra máy hơi nước

365 năm người Hà Lan chế ra đồng hồ quả lắc

410 năm máy tính kiểu Pascal của Pháp

480 năm ngành phẫu thuật ra đời ở Pháp

975 năm Trung Quốc phát minh ra chữ in

1020 năm đồng hồ dây cót giật ra đời ở Trung Quốc

Hỏi: Anh Phó ơi! Em muốn học giỏi cả môn toán, cả môn văn và môn tiếng Anh nữa thì em phải học như thế nào để làm được điều đó?

VŨ THỊ MAI

(THCS Yên Phong, Yên Phong, Bắc Ninh)

Đáp:

Chỉ có chăm đọc sách thôi
Sách hay kim cổ hiểu đời qua văn
Học Anh đọc sách tiếng Anh
Làm trong sách toán bài thành dễ đi
Viết điều mình nghĩ mỗi khi
Tìm ra cái mới ắt thì giỏi hơn.

Hỏi: Sắp đến ngày Nhà giáo Việt Nam 20-11 rồi, em muốn làm một việc thật ý nghĩa để chúc mừng các thầy cô giáo, anh gợi ý cho em được không ạ?

ĐỖ THU HÀ

(6A8, THCS Thành Công, Ba Đình, Hà Nội)

Đáp:

Thầy vui khi trò giỏi
Trò giỏi điểm phải cao
Em phải gắng làm sao
Tháng này nhiều điểm tốt
Và nuôi thêm mơ ước
Mai sau thầy tự hào
Trò ngày nào là em.

Hỏi: Ở trường em có một anh học rất giỏi môn toán, khi được hỏi tại sao anh lại học tốt môn toán như vậy thì anh nói rằng: Anh thường xuyên tự đọc sách, đọc và giải bài trên tạp chí Toán Tuổi thơ, nhờ vậy mà anh nắm chắc kiến thức trên lớp và tiếp thu các kiến thức mới. Em phải làm gì để cũng học giỏi như anh ấy ạ?

TTKC

(THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn, Thanh Hóa)

Đáp:

Kiển tố vừa đố vừa giải
Em hỏi xong đáp đàng hoàng
Thường xuyên đọc, đọc và làm
Học đi đôi với hành là thế
Anh chỉ góp thêm một tí
Bên cạnh đọc Toán Tuổi thơ
Còn cần đọc thêm sách nữa.

ANH PHÓ

CÁC LỚP 6 & 7

Bài 1(164+165). Tìm số $\overline{abcde}$, biết $\overline{abcde} = a.b.c.d.e.45$.

LẠI QUANG THỌ
(Phòng Giáo dục và Đào tạo Tam Dương, Vĩnh Phúc)

Bài 2(164+165). Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Trên cạnh BC lấy điểm M. Tìm giá trị nhỏ nhất của $MA^2 + MB^2 + MC^2$.

CAO NGỌC TOẢN
(GV. THPT Tam Giang, Phong Điền, Thừa Thiên - Huế)

CÁC LỚP THCS

Bài 3(164+165). Cho các số thực a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn $(a-b)\sqrt[3]{1-c^3} + (b-c)\sqrt[3]{1-a^3} + (c-a)\sqrt[3]{1-b^3} = 0$.

Chứng minh rằng $\sqrt[3]{(1-a^3)(1-b^3)(1-c^3)} + abc = 1$.

LƯU LÝ TƯỞNG *(GV. THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, Phú Thọ)*

Bài 4(164+165). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{\sqrt{3a^2+4ab+3b^2}}{ab} + \frac{\sqrt{3b^2+4bc+3c^2}}{bc} + \frac{\sqrt{3c^2+4ca+3a^2}}{ca},$$

trong đó các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

MAI VĂN NĂM *(GV. THCS Khánh Hồng, Yên Khánh, Ninh Bình)*

Bài 5(164+165). Trên một mặt bàn vẽ hình chữ nhật 3×6 ô vuông và trong mỗi ô vuông có 1 viên sỏi. Hồng muốn thực hiện trò chơi sau: Cứ mỗi lần Hồng sẽ chọn hai ô vuông và bốc ở mỗi ô vuông 1 viên sỏi đặt sang ô kề bên (hai ô kề nhau là hai ô có 1 cạnh chung). Hồng hỏi Hà, phải thực hiện việc chuyển các viên sỏi ít nhất bao nhiêu lần thì đưa được 18 viên sỏi vào một ô vuông. Hà nghĩ mãi mà chưa có câu trả lời, bạn hãy giúp Hà tìm câu trả lời nhé.

TẠ TOÀN *(TP. Hồ Chí Minh)*

Bài 6(164+165). Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) với AB < AC. Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt BC tại T. Gọi D là điểm đối xứng của A qua O. Đường thẳng DB cắt OT tại E và cắt AT tại F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt EO tại G khác E. Chứng minh rằng tâm đường tròn nội tiếp tam giác AGB nằm trên đường tròn (O).

TRẦN QUANG HÙNG *(GV. trường THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)*

SOLVE VIA MAIL COMPETITION QUESTIONS

Translated by Nam Vũ Thành

1(164+165). Find the number $\overline{abcde}$ given that $\overline{abcde} = a \times b \times c \times d \times e \times 45$.

2(164+165). Given a right isosceles triangle with the right angle at *A*. Let *M* be a point on the side *BC*. Find the minimum value of $MA^2 + MB^2 + MC^2$.

3(164+165). Given the real numbers *a*, *b*, and *c* which are pair-wise distinct such that $(a-b)\sqrt[3]{1-c^3} + (b-c)\sqrt[3]{1-a^3} + (c-a)\sqrt[3]{1-b^3} = 0$. Prove that $\sqrt[3]{(1-a^3)(1-b^3)(1-c^3)} + abc = 1$.

4(164+165). Find the minimum value of the expression

$$P = \frac{\sqrt{3a^2+4ab+3b^2}}{ab} + \frac{\sqrt{3b^2+4bc+3c^2}}{bc} + \frac{\sqrt{3c^2+4ca+3a^2}}{ca},$$

where *a*, *b*, and *c* are positive real numbers such that $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

5(164+165). On a table top, a rectangle containing 3×6 small squares is drawn and a stone is put in each of the squares. Hồng plays a game as follows: in each turn, she chooses 2 squares, takes one stone from each square and puts it in an adjacent square (2 adjacent squares are ones sharing a side). Hồng asks Hà how many turns are needed to put all the 18 stones into one single square. Hà has been thinking but has not found the answer. Can you help her find the answer?

6(164+165). Let *ABC* be an acute triangle inscribing a circle (*O*) where *AB* < *AC*. The tangent to the circle at *A* intersects *BC* at *T*. Let *D* be the reflection of the point *A* through the point *O*. The line *DB* intersects *OT* at *E* and intersects *AT* at *F*. The circumcircle of the triangle *AEF* intersects the line *EO* at another point *G*. Prove that the center of the incircle of the triangle *AGB* lies on the circle (*O*).

PHIẾU ĐĂNG KÍ THAM DỰ CUỘC THI GTQT NĂM HỌC 2016-2017

TIN TỨC - HOẠT ĐỘNG - GẶP GỠ

• Ngày 6.10.2016, tại trường THCS Giảng Võ, Q. Ba Đình, Hà Nội đã diễn ra chương trình *Ngày Hội sách*. Tới dự có TS. Vũ Đình Chuẩn, Vụ Trưởng Vụ Giáo dục Trung học, Bộ Giáo dục và Đào tạo; ThS. Vũ Kim Thủy, Tổng biên tập tạp chí Toán Tuổi thơ; ông Nguyễn Quang Trung, Phó Chủ tịch UBND quận Ba Đình, ... ThS. Vũ Kim Thủy, Tổng biên tập tạp chí Toán Tuổi thơ đã có bài nói chuyện về toán. Sau đó, các em học sinh tham gia chương trình *Toán học Muôn màu và Lí thú* với nhiều trò chơi toán học hấp dẫn. Tạp chí Toán Tuổi thơ đã có các câu đố toán vui có thưởng dành cho các em học sinh. Các em học sinh yêu các môn Khoa học Xã hội tham gia chương trình Ngày Hội sách, mở trang sách dệt ước mơ với nhiều hoạt động bổ ích. Các em học sinh lớp 8 và lớp 9 tham gia giới thiệu các cuốn sách và tạp chí mình yêu thích. Tạp chí Toán Tuổi thơ đã có gian hàng tham gia triển lãm và gửi tạp chí tặng tất cả các em học sinh.

• Ngày 16.10.2016, trường THPT chuyên Đại học Vinh, Nghệ An đã tổ chức Lễ kỉ niệm 50 năm thành lập. Đến dự có ông Uông Chu Lưu, Phó Chủ tịch Quốc hội nước CHXHCN Việt Nam; TS. Nguyễn Thị Nghĩa, Thứ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo; GS. TS. Nguyễn Hữu Dư, Chủ tịch Hội Toán học Việt Nam; ông Nguyễn Văn Thông, Phó Bí Thư Tỉnh ủy Nghệ An cùng các vị đại biểu, các thầy cô giáo đã từng giảng dạy tại trường và các thế hệ học sinh. Tiền thân là lớp chuyên Toán đặc biệt với 36 học sinh bắt đầu học từ tháng 10.1966 tại xã miền núi Thạch Bình, Thạch Thành, Thanh Hóa trong điều kiện rất khó khăn.

Sau đó các năm 1970 đến 1973 Khối Chuyên toán lần lượt sơ tán ở Quỳnh Nghĩa, Quỳnh Minh huyện Quỳnh Lưu, Diễn Trường, huyện Diễn Châu, Phú Thành, Hậu Thành, huyện Yên Thành. Năm 1974 Khối trở về TP. Vinh.

Cựu học sinh chuyên toán Đại học Vinh khóa 5

Nhà trường đã có gần 280 học sinh giỏi cấp Quốc gia; có 12 học sinh đạt giải Toán Quốc tế (IMO) và Toán Khu vực Châu Á Thái Bình Dương (APMO). Nguyên Chủ tịch Hội Toán học Việt Nam Phạm Thế Long, Viện trưởng Viện Toán học Việt Nam Lê Tuấn Hoa, nguyên Phó Tổng biên tập tạp chí Toán Tuổi thơ Lê Thống Nhất, Tổng biên tập tạp chí Toán Tuổi thơ, Phó Tổng Thư kí Hội Toán học Hà Nội Vũ Kim Thủy, Chánh văn phòng Hội đồng Quốc gia giáo dục Trần Đình Châu, ... từng là học sinh chuyên toán Đại học Vinh. Ghi nhận những thành tích đã đạt được, trường THPT chuyên Đại học Vinh đã được Chủ tịch nước Cộng hòa Xã hội Chủ nghĩa Việt Nam tặng thưởng Huân chương Lao động hạng Ba và nhiều Bằng khen.

PV

HOA TULIP

Từ Hà Lan và châu Âu, những cánh hoa tulip đẹp lạ lùng đã đến nước ta và ở lại đây. Cũng thật khó khăn cho loài hoa yêu xứ lạnh sống trên đất nước nhiệt đới. Mùa xuân, hoa khoe sắc trong các gia đình thành phố: Hà Nội, Nam Định, Hải Phòng, Đà Lạt, ... Lá vươn cao, cuống hoa thẳng khỏe khoắn. Cánh hoa cũng hướng thẳng lên trên mà thoạt nhìn ta cứ tưởng hoa làm bằng vật liệu nhựa. Một vẻ đẹp không lộng lẫy nhưng kiêu sa thu hút ánh nhìn của người ngưỡng mộ tulip.

Bạn hãy viết một bài viết về vẻ đẹp của bức ảnh này. Tòa soạn chờ bài viết tốt của bạn để đăng và bạn sẽ có phần thưởng.

MORIS VŨ

Ảnh: Vũ Thanh Hà

CÁC HỌC SINH ĐƯỢC KHEN TRONG CUỘC THI GIẢI TOÁN DÀNH CHO NỮ SINH

Từ trái sang phải: Nguyễn Thùy Dương, Khổng Thị Thu Thủy, Nguyễn Thị Quỳnh Anh, Nguyễn An Na, Bùi Thị Minh Thu.

CTY CP VĂN PHÒNG PHẨM HỒNG HÀ
SINCE 1959
Lưu truyền thống - Viết tương lai

Công ty CP VPP Hồng Hà là nhà tài trợ cho 2 cuộc thi: Giải toán qua thư và Giải toán dành cho nữ sinh.

Giấy phép xuất bản: số 31/GP-BVHTT, cấp ngày 23/1/2003 của Bộ Văn hóa và Thông tin.
Mã số: 8BTT164M16. **In tại:** Công ty cổ phần in Công Đoàn Việt Nam, 167 Tây Sơn, Đống Đa, Hà Nội. In xong và nộp lưu chiểu tháng 11 năm 2016.