https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ❊ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Toán học & Tuổi trẻ

1
2002

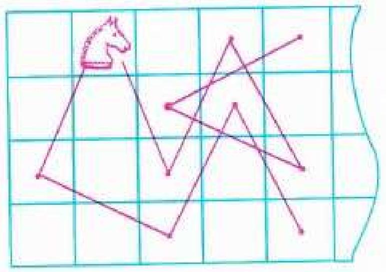
SỐ 295 - NĂM THỨ 39 - TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG

Nhâm Ngọ
2002

Chúc mừng năm mới

ĐƯỜNG ĐI CỦA QUÂN MÃ TRÊN BÀN CỜ

Trên một bàn cờ kích thước 4×2001 ô vuông, một quân mã có thể đi mỗi bước từ ô vuông này đến ô vuông khác theo đường chéo của hình chữ nhật kích thước 2×3 ô (hoặc 3×2 ô) như hình 1.



Hình 1

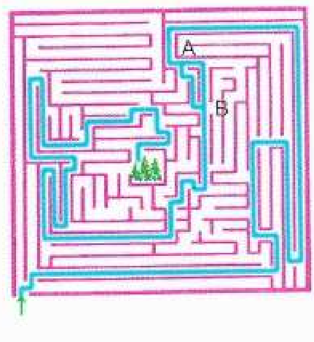
Dành cho bạn đọc

1) Hãy chỉ ra cách quân mã bước liên tiếp từ vị trí xuất phát được chọn đi qua tất cả các ô của bàn cờ, mỗi ô đúng một lần.

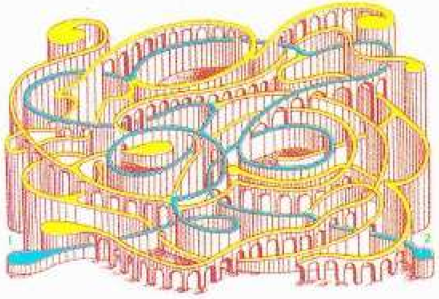
2) Câu trả lời trên có đúng với vị trí xuất phát khác không ?

Tặng phẩm dành cho lời giải đầy đủ, giải thích rõ ràng.

Giải đáp :
TÌM ĐƯỜNG TRONG MÊ CUNG



Hình 2



Hình 3

Trên hình 2 có 2 đường đi (màu lam) từ ngoài vào bụi cây, chúng chỉ khác nhau ở đoạn đường đi từ A đến B.

Trên hình 3 chỉ có 1 đường đi (màu lam) từ điểm 1 đến điểm 2.

Để tìm được đường đi ngắn nhất cần thực hiện các *nguyên tắc chung* sau đây :

1. Không đi lặp lại đường đã đi qua

2. Nếu gặp ngõ cụt thì bỏ đoạn đường từ ngõ cụt đến ngã ba, ngã tư, ..., đầu tiên.

3. Nếu có đường khép kín mà có 2 đường khác cùng gặp đường khép kín ở 1 điểm thì bỏ đường khép kín đó, còn nếu có 2 đường khác gặp đường khép kín ở 2 điểm phân biệt A, B thì ta bỏ đoạn đường AB dài hơn của đường khép kín.

4. Khi tìm được tất cả các đường đi đến đích cần so sánh để chọn ra đường đi ngắn nhất.

• **Nếu có sơ đồ mê cung** ta *tô màu các đoạn đường bỏ đi* theo các nguyên tắc 2 và 3 thì sơ đồ mê cung còn lại sẽ đơn giản hơn nhiều, từ đó dễ tìm ra đường đi tới đích.

• **Nếu không có sơ đồ mê cung**, tức là phải đi trong mê cung thực, cần phải đánh dấu các ngã rẽ (chẳng hạn dấu + là đi được, dấu - là loại bỏ) khi thực hiện các nguyên tắc trên. Trường hợp này rất có ích khi sử dụng *quy tắc tay trái*, tức là khi đi tay trái luôn chạm tường mê cung, quy tắc này giúp ta đi lần lượt hết các ngả đường.

Nhiều bạn tham gia giải bài này nhưng không giải thích hoặc chỉ đưa ra 1 đường đi ở hình 2.

Các bạn sau có lời giải đầy đủ được nhận tặng phẩm :

1. *Trần Bình Minh*, 11A1, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, **Yên Bái** ;
2) *Nguyễn Huy Hùng*, 9A, THCS Lập Thạch, **Vĩnh Phúc** ;
3) *Nguyễn Minh Đức*, xóm 2 K8 thị trấn Thanh Chương, **Nghệ An** ;
4) *Trần Trung Kiên*, 10 Toán, THPT chuyên **Thái Nguyên**.

PHI PHI

Toán học và Tuổi trẻ
Mathematics and Youth

Năm thứ 39
Số 295 (1-2002)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT : 04.5142648 – 04.5142650. FAX : 04.5142648
Email : toantt@hotmail.com

TRONG SỐ NÀY

Tổng biên tập :
NGUYỄN CẢNH TOÀN
Phó tổng biên tập :
NGÔ ĐẠT TỨ
HOÀNG CHÚNG

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Giám đốc NXB Giáo dục :
NGÔ TRẦN ÁI
Tổng biên tập NXB Giáo dục :
VŨ DƯƠNG THỤY

Hội đồng biên tập :
NGUYỄN CẢNH TOÀN, HOÀNG CHÚNG, NGÔ ĐẠT TỨ, LÊ KHẮC BẢO, NGUYỄN HUY ĐOAN, NGUYỄN VIỆT HẢI, ĐINH QUANG HẢO, NGUYỄN XUÂN HUY, PHAN HUY KHẢI, VŨ THANH KHIẾT, LÊ HẢI KHÔI, NGUYỄN VĂN MẬU, HOÀNG LÊ MINH, NGUYỄN KHẮC MINH, TRẦN VĂN NHUNG, NGUYỄN ĐĂNG PHẤT, PHAN THANH QUANG, TẠ HỒNG QUẢNG, ĐẶNG HÙNG THẮNG, VŨ DƯƠNG THỤY, TRẦN THÀNH TRAI, LÊ BÁ KHÁNH TRÌNH, NGÔ VIỆT TRUNG

Trưởng ban biên tập : NGUYỄN VIỆT HẢI. *Thư ký tòa soạn* : LÊ THỐNG NHẤT. *Thực hiện* : VŨ KIM THỦY.
Trị sự : VŨ ANH THƯ, TRỊNH TUYẾT TRANG. *Trình bày* : NGUYỄN THỊ OANH.
Đại diện phía Nam : TRẦN CHÍ HIẾU, 231 Nguyễn Văn Cừ, TP. Hồ Chí Minh. ĐT : 08.8323044.

Dành cho các bạn
TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỔI BIẾN ĐỂ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC CÓ ĐIỀU KIỆN

HOÀNG VĂN ĐẮC
(GV THCS Tân Việt, Bình Giang, Hải Dương)

Xét bài toán chứng minh bất đẳng thức $2x^2 + xy + 5 \le 9$ với điều kiện $3x + y = 4$.

Bài này có thể đưa về việc tìm giá trị lớn nhất của một biểu thức hai biến $P(x, y) = 2x^2 + xy + 5$ với điều kiện $3x + y = 4$, chỉ khác là bài toán ban đầu cho biết thêm một hằng số lớn hơn hoặc bằng giá trị lớn nhất của biểu thức $P(x, y)$.

Để giải bài này ta thay thế $y = 3 - x$ vào biểu thức $P(x, y)$ và được tam thức bậc hai của một biến $T(x) = -x^2 + 4x + 5 = -(x-2)^2 + 9$. Đẳng thức xảy ra khi $x = 2$.

Trong trường hợp thay biến dẫn đến hàm số $T(x)$ có bậc lớn hơn 2 hoặc hàm số có nhiều biến thì việc tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất rất khó khăn với kiến thức toán bậc trung học cơ sở. Chẳng hạn :

Bài 1. Chứng minh rằng nếu $a + b = 4$ thì $a^4 + b^4 \ge 32$

Nhận xét rằng một biểu thức nhiều biến thường đạt giá trị nhỏ nhất (hoặc lớn nhất) khi một số biến có giá trị bằng 0 hoặc tất cả các biến có giá trị bằng nhau. Điều này gợi ý cho ta cách đổi biến như sau.

Lời giải. Do $a + b = 4$ nên có thể đặt
$$\begin{cases} a = 2 + m \\ b = 2 - m \end{cases} \text{ với } m \text{ tùy ý}$$

Ta có $a^4 + b^4 = (2+m)^4 + (2-m)^4 =$
$= 32 + 48m^2 + 2m^4 \ge 32$ với mọi m. Đẳng thức xảy ra khi $m = 0$ hay $a = b = 2$.

Vậy $a^4 + b^4 \ge 32$.

Bài 2. Cho $x + y + z = 3$. Chứng minh rằng :
$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx \ge 6$$

Lời giải. Do $x + y + z = 3$ nên có thể đặt
$$\begin{cases} x = 1 + a \\ y = 1 + b \\ z = 1 - a - b \end{cases} \text{ với } a, b \text{ tùy ý.}$$

Thay vào vế trái BĐT ta có
$x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx =$
$= (1+a)^2 + (1+b)^2 + (1-a-b)^2 + (1+a)(1+b) + (1+b)(1-a-b) + (1-a-b)(1+a)$

$= 6 + a^2 + ab + b^2 = 6 + \left(a + \dfrac{b}{2}\right)^2 + \dfrac{3b^2}{4} \ge 6$ với mọi a, b

Đẳng thức xảy ra khi $b = 0$ và $a + \dfrac{b}{2} = 0$ hay $x = y = z = 1$.

Vậy $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx \ge 6$

Bài 3. Cho $a+b+c+d = 1$. Chứng minh rằng :
$$(a+c)(b+d) + 2ac + 2bd \le \frac{1}{2}$$

Lời giải. Do $a+b+c+d = 1$ nên có thể đặt :
$$a = \frac{1}{4} + x + z, \quad b = \frac{1}{4} - x + z, \quad c = \frac{1}{4} + y - z,$$
$$d = \frac{1}{4} - y - z \text{ với } x, y, z \text{ tùy ý.}$$

Thay vào vế trái BĐT được :
$(a+c)(b+d) + 2ac + 2bd =$
$$= \left(\frac{1}{2} + x + y\right)\left(\frac{1}{2} - x - y\right) + 2\left(\frac{1}{4} + x + z\right)\left(\frac{1}{4} + x - z\right) + 2\left(\frac{1}{4} - x + z\right)\left(\frac{1}{4} - y - z\right) =$$
$$= \frac{1}{2} - (x-y)^2 - 4z^2 \le \frac{1}{2} \text{ với mọi } x, y, z.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x - y = 0$ và $z = 0$ hay $a = c$ và $b = d$.

Vậy $(a+c)(b+d) + 2ac + 2bd \le \dfrac{1}{2}$

Bài 4. Cho $a + b = c + d$. Chứng minh rằng
$$c^2 + d^2 + cd \geq 3ab$$

Lời giải. Do $a+b = c+d$ nên ta đặt $c = a + x$ và $d = b-x$ với x tùy ý. Ta có

$$c^2 + d^2 + cd = (a+x)^2 (b-x)^2 + (a+x)(b-x) =$$
$$= \left(a - b + \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{3x^2}{4} + 3ab \geq 3ab$$

Đẳng thức xảy ra khi $a - b + \frac{x}{2} = 0$ và $x = 0$ hay $a = b = c = d$.

Vậy $c^2 + d^2 + cd \geq 3ab$.

Bài 5. Cho $x < 2$ và $x + y > 5$. Chứng minh rằng : $5x^2 + 2y^2 + 8y \geq 62$.

Lời giải. Do $x < 2$ và $x + y > 5$ nên ta đặt :

$\begin{cases} x = 2 - t \\ x + y = 5 + k \end{cases}$ với t, k là các số dương.

Thay vào vế trái của BĐT ở đề bài được :

$$5x^2 + 2y^2 + 8y = 5(2 - t)^2 + 2(3 + k + t)^2 +$$
$$+ 8(3 + k + t) = 62 + 2(k+t)^2 + 5t^2 + 20k > 62$$

vì k, t là số dương $\Rightarrow$ đpcm.

Một trong những cách chứng minh một bất đẳng thức nhiều biến kèm theo điều kiện của các biến là khéo léo đổi biến để có thể đưa việc xét một biểu thức phức tạp về một biểu thức quen thuộc, đơn giản hơn và phù hợp với kiến thức bậc trung học cơ sở. Các bạn hãy thử sử dụng phương pháp đổi biến để giải các bài tập dưới đây.

Bài 1. Cho các số dương x, y thỏa mãn $x+y=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{3}{4xy}$$

Bài 2. Cho $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C = xy + yz + zx$.

Bài 3. Cho $x + y = 3$ và $x \leq 1$. Chứng minh rằng :

a) $x^3 + y^3 \geq 9$;

b) $2x^4 + y^4 \geq 18$

Bài 4. Cho $a+b+c+d = 2$. Chứng minh rằng :
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 1.$$

Bài 5. Cho $a + b \geq 2$. Chứng minh rằng :
$$a^4 + b^4 \geq a^3 + b^3$$

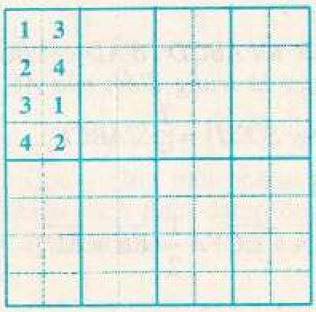
Bài 6. Cho $a + b > 8$ và $b > 3$. Chứng minh rằng :
$$27a^2 + 10b^3 > 945$$

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 49

Problem. What is the greatest number of knights which can be arranged on an 8×8 chessboard in such a way that none of them lies on a square controlled by another ?

Solution. Since a knight on a white square controls only black squares, it is obvious that 32 knights can be arranged in such a way that none lies on a square controlled by another. To do this, we only need to put a knight on each white square. Now, it suffices to show that an arrangement using more than 32 knights is not possible. For this purpose, let us divide the chessboard into 8 rectangular sections, each two squares wide and four squares high:



It is easy to see that a knight situated on a square of a rectangular section T controls one and only one other square of T. Thus the squares of T can be divided into 4 pairs, and only one square of each pair can be occupied by a knight. As a consequence, no more than 4 knights can be arranged in each of these rectangles such that none of them lies on a square controlled by another. Therefore, the total number of knights which can be arranged in such a way on the chessboard it at most 4×8 = 32.

Từ mới:

knight = con mã
arrange = bố trí, sắp xếp (động từ)
chessboard = bàn cờ vua (động từ)
square = ô vuông
control = kiểm soát, khống chế (động từ)
obvious = hiển nhiên (tính từ)
suffice = chỉ cần (động từ)
purpose = mục đích, ý định
divide = chia cắt, phân ra (động từ)
rectangular = vuông góc (tính từ)
section = phần, bộ phận
wide = rộng
situate = được đặt (động từ)
occupy = chiếm, cư ngụ (động từ)
consequence = hệ quả, hậu quả
rectangle = hình chữ nhật

NGÔ VIỆT TRUNG

MỘT SỐ BÀI TOÁN ỨNG DỤNG CỦA TÍCH NGOÀI CỦA HAI VECTƠ

NGUYỄN MINH HÀ
(GV khối PTCT –Tin, ĐHSP Hà Nội)

Trong THTT số 294 (12/2001) đã giới thiệu về tích ngoài của hai vectơ và một số tích chất của nó. Những tính chất đó sẽ được sử dụng để giải nhiều bài toán hình học dưới đây. Chú ý rằng tích ngoài của hai vectơ cùng phương bằng số 0.

Bài này xin giới thiệu với bạn đọc những kĩ thuật quan trọng nhất để giải một bài toán bằng tích ngoài. Những kĩ thuật này được thể hiện qua các ví dụ sau.

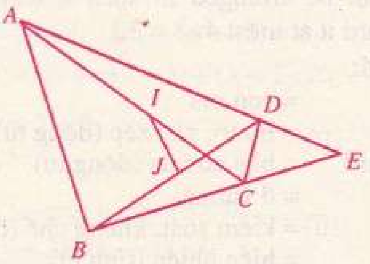
Ví dụ 1: *Cho tứ giác lồi ABCD có AD cắt BC tại E. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC, BD. Chứng minh rằng: $S(EIJ) = \frac{1}{4}S(ABCD)$.*

Giải: Ta có: S[EIJ] =

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{EI}\wedge\overrightarrow{EJ} = \frac{1}{2}\frac{1}{2}(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EC})\wedge\frac{1}{2}(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{ED})$$

$$= \frac{1}{4}.\frac{1}{2}(\overrightarrow{EA}\wedge\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC}\wedge\overrightarrow{ED})$$

$$= \frac{1}{4}.\frac{1}{2}(\overrightarrow{EA}\wedge\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EB}\wedge\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{EC}\wedge\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{ED}\wedge\overrightarrow{EA})$$



$$= \frac{1}{4}\ (S[EAB] + S[EBC] + S[ECD] + S[EDA])$$

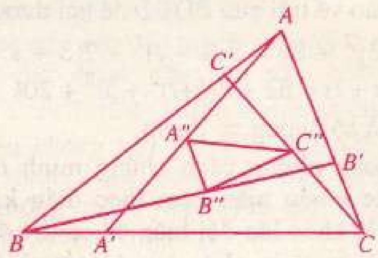
$$= \frac{1}{4}\ S[ABCD]$$

Từ đó suy ra: $S(EIJ) = \frac{1}{4}S(ABCD)$.

Nhận xét: Lời giải sử dụng tích ngoài không những cho ta biết $S(EIJ) = \frac{1}{4}S(ABCD)$ mà còn cho ta biết tam giác EIJ và tứ giác ABCD cùng hướng (một kết quả không dễ chứng minh). Nếu không sử dụng tích ngoài thì phép chứng minh rất dễ phụ thuộc vào hình vẽ do đó phải xét quá nhiều trường hợp.

Ví dụ 2: *Cho tam giác ABC. Các điểm A', B', C' theo thứ tự thuộc các đường thẳng BC, CA, AB. A", B", C" theo thứ tự là trung điểm của các đoạn AA', BB', CC'. Chứng minh rằng:*

$$S(A''B''C'') = \frac{1}{4}S(A'B'C').$$



Giải:

Ta có: S[A"B"C"] =

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{A''B''}\wedge\overrightarrow{A''C''} = \frac{1}{2}\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'B'})\wedge\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{A'C'})$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{A'B'}\wedge\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{A'C'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{A'B'}\wedge\overrightarrow{A'C'}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(S[ABC] - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{B'A'} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{C'A'} + S[A'B'C']\right)$$

$$= \frac{1}{4}\ (S[ABC] - S[A'AC] - S[A'BA] + S[A'B'C'])$$

$$= \frac{1}{4}\ S[A'B'C']$$

Từ đó suy ra: $S(A''B''C'') = \frac{1}{4}S(A'B'C')$.

Ví dụ 3. *Cho tam giác ABC. Qua điểm M bất kì dựng đường thẳng Δ cắt các đường thẳng BC, CA, AB lần lượt tại A_1, B_1, C_1. Chứng minh rằng:*

$$\frac{S[MBC]}{\overline{MA_1}}+\frac{S[MCA]}{\overline{MB_1}}+\frac{S[MAB]}{\overline{MC_1}}=0.$$

Giải: Gọi $\vec{e}$ là véc tơ chỉ phương đơn vị của Δ. (Bạn đọc tự vẽ hình) Ta có:

$$\frac{S[MBC]}{\overline{MA_1}}+\frac{S[MCA]}{\overline{MB_1}}+\frac{S[MAB]}{\overline{MC_1}}=$$

$$=\frac{\overrightarrow{MA_1}\wedge\overrightarrow{BC}}{2\overline{MA_1}}+\frac{\overrightarrow{MB_1}\wedge\overrightarrow{CA}}{2\overline{MB_1}}+\frac{\overrightarrow{MC_1}\wedge\overrightarrow{AB}}{2\overline{MC_1}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\overrightarrow{MA_1}}{\overline{MA_1}}\wedge\overrightarrow{BC}+\frac{\overrightarrow{MB_1}}{\overline{MB_1}}\wedge\overrightarrow{BC}+\frac{\overrightarrow{MC_1}}{\overline{MC_1}}\wedge\overrightarrow{AB}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\vec{e}\wedge\overrightarrow{BC}+\vec{e}\wedge\overrightarrow{CA}+\vec{e}\wedge\overrightarrow{AB}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\vec{e}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{2}\vec{e}\wedge\vec{0}=0 \text{ (dpcm)}$$

Ví du 4: *Cho lục giác lồi ABCDEF. Gọi M, N, P, Q, R, S theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, DE, CD, FA, EF, BC. Chứng minh rằng: MN, PQ, RS đồng quy khi và chỉ khi S(AEC) = S(BFD).*

Giải: Bạn đọc tự vẽ hình.

Lấy điểm O bất kì, ta thấy:

$$4\left(\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}\wedge\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}\wedge\overrightarrow{OS}\right)$$

$$=\Big(\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)\wedge\left(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}\right)+\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)\wedge$$

$$\wedge\left(\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}\right)\wedge\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)\Big)$$

$$=\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OE}$$

$$+\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}\wedge\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OD}\wedge\overrightarrow{OA}$$

$$+\overrightarrow{OE}\wedge\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OE}\wedge\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OF}\wedge\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OF}\wedge\overrightarrow{OC}$$

$$=(\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OE}\wedge\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OA})-$$

$$-(\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OF}\wedge\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OD}\wedge\overrightarrow{OB})$$

$$=2(S[OAE]+S[OEC]+S[OCA])-2(S[OBF]+S[OFD]+S[ODB])$$

$$=2(S[AEC]-S[BFD]).$$

Suy ra:

$$\left(\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{ON}\right)+\left(\overrightarrow{OP}\wedge\overrightarrow{OQ}\right)+\left(\overrightarrow{OR}\wedge\overrightarrow{OS}\right)$$

$$=S[AEC]-S[BFD]\ (*)$$

Nhờ (*) bài toán được giải quyết đơn giản như sau: Đặt O = MN ∩ PQ Ta thấy:

$$\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OP}\wedge\overrightarrow{OQ}=0$$

Vậy: MN, PQ, RS đồng qui $\Leftrightarrow \overrightarrow{OR}\wedge\overrightarrow{OS}=0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}\wedge\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}\wedge\overrightarrow{OS}=0$

$\Leftrightarrow S[ACE]-S[BFD]=0$

$\Leftrightarrow S(ACE)-S(BFD)=0$ (vì các tam giác ACE, BFD cùng hướng)

$\Leftrightarrow S(ACE)=S(BFD)$.

Ví dụ 5: *Cho tam giác ABC và điểm M khác A, B, C. Các đường thẳng qua M, lần lượt vuông góc với MA, MB, MC, cắt các đường thẳng BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1. Chứng minh rằng A_1, B_1, C_1 thẳng hàng.*

Giải: Bạn đọc tự vẽ hình. Ta có:

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}}=\frac{S[MA_1B]}{S[MA_1C]}=\frac{\overrightarrow{MA_1}\wedge\overrightarrow{MB}}{\overrightarrow{MA_1}\wedge\overrightarrow{MC}}$$

$$=\frac{MB.\sin\left(\overrightarrow{MA_1},\overrightarrow{MB}\right)}{MC.\sin\left(\overrightarrow{MA_1},\overrightarrow{MC}\right)} \quad (1)$$

Mặt khác:

$$\begin{cases}(\overrightarrow{MA_1},\overrightarrow{MB})\equiv(\overrightarrow{MA_1},\overrightarrow{MA})+(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) \pmod{360^\circ}\\(\overrightarrow{MA_1},\overrightarrow{MC})\equiv(\overrightarrow{MA_1},\overrightarrow{MA})+(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MC}) \pmod{360^\circ}\end{cases}$$

Có thể xảy ra một trong hai trường hợp góc $(\overrightarrow{MA_1},\overrightarrow{MA})\equiv 90^\circ \pmod{360^\circ}$ hoặc $(\overrightarrow{MA_1},\overrightarrow{MA})\equiv -90^\circ \pmod{360^\circ}$. Tuy nhiên, trong cả hai trường hợp ta đều có :

$$\frac{\sin\left(\overrightarrow{MA_1},\overrightarrow{MB}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{MA_1},\overrightarrow{MC}\right)}=\frac{\cos\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)}{\cos\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MC}\right)} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}}=\frac{MB.\cos\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)}{MC.\cos\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MC}\right)} \quad (3)$$

Tương tự như vậy:

$$\frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}}=\frac{MC.\cos\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)}{MA.\cos\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}\right)} \quad (4)$$

$$\frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}}=\frac{MA.\cos\left(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MA}\right)}{MB.\cos\left(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MB}\right)} \quad (5)$$

Nhân theo từng vế các đẳng thức (3) (4) (5), theo định lí Mênêlauýt thì ba điểm A_1, B_1, C_1 thẳng hàng.

Ví dụ 6: *Cho tam giác ABC. Giả sử M, N, P theo thứ tự thuộc các đường thẳng BC, CA, AB,* *chứng minh rằng: AM, BN, CP đồng quy hoặc đôi một song song khi và chỉ khi:*

$$\frac{\sin(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB})}{\sin(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC})}\cdot\frac{\sin(\overrightarrow{BN},\overrightarrow{BC})}{\sin(\overrightarrow{BN},\overrightarrow{BA})}\cdot\frac{\sin(\overrightarrow{CP},\overrightarrow{CA})}{\sin(\overrightarrow{CP},\overrightarrow{CB})}=-1.$$

Giải: Theo định lí Xêva ta thấy: AM, BN, CP đồng quy hoặc đôi một song song

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\cdot\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}\cdot\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=-1$$

$$\Leftrightarrow \frac{S[MBA]}{S[MCA]}\cdot\frac{S[NCB]}{S[NAB]}\cdot\frac{S[PAC]}{S[PBC]}=-1$$

$$\Leftrightarrow \frac{S[AMB]}{S[AMC]}\cdot\frac{S[BNC]}{S[BNA]}\cdot\frac{S[CPA]}{S[CPB]}=-1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{AC}}\cdot\frac{\overrightarrow{BN}\wedge\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{BN}\wedge\overrightarrow{BA}}\cdot\frac{\overrightarrow{CP}\wedge\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CP}\wedge\overrightarrow{CB}}=-1.$$

$$\Leftrightarrow \frac{AM.AB.\sin(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB})}{AM.AC.\sin(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC})}\cdot\frac{BN.BC.\sin(\overrightarrow{BN},\overrightarrow{BC})}{BN.BA.\sin(\overrightarrow{BN},\overrightarrow{BA})}$$

$$\cdot\frac{CP.CA.\sin(\overrightarrow{CP},\overrightarrow{CA})}{CP.CB.\sin(\overrightarrow{CP},\overrightarrow{CB})}=-1$$

Điều này tương đương với đẳng thức phải chứng minh.

Nhận xét: Kết quả trên rất có lợi trong việc chứng minh sự đồng quy của ba đường thẳng. Nó được gọi là định lí Xêva dạng sin và được chứng minh một cách chặt chẽ như trên.

Ví dụ 7: *Cho tam giác ABC. Với mỗi điểm M chứng minh rằng:*

$$S[MBC]\overrightarrow{MA}+S[MCA]\overrightarrow{MB}+S[MAB]\overrightarrow{MC}=\vec{0}.$$

Giải: Đặt $\vec{u}=S[MBC]\overrightarrow{MA}+S[MCA]\overrightarrow{MB}+S[MAB]\overrightarrow{MC}$. Ta thấy .

$$\vec{u}\wedge\overrightarrow{MA}=S[MCA](\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{MA})+$$
$$+S[MAB](\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{MA})$$
$$=2(S[MCA].S[MBA]+S[MAB].S[MCA])$$
$$=2(S[MCA].S[MBA]-S[MBA].S[MCA])=0.$$

Tương tự như vậy: $\vec{u}\wedge\overrightarrow{MB}=0$, $\vec{u}\wedge\overrightarrow{MC}=0$

Suy ra: $\vec{u}$ cùng phương với các véc tơ $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$.

Chú ý rằng, trong ba véc tơ $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ ta luôn chọn được hai véctơ không cùng phương. Vậy: $u=\vec{0}$ (đpcm).

Nhận xét: Kết quả trên đôi khi được phát biểu dưới dạng khác:

Cho ba véc tơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$. Chứng minh rằng:

$(\vec{b}\wedge\vec{c})\vec{a}+(\vec{c}\wedge\vec{a})\vec{b}+(\vec{a}\wedge\vec{b})\vec{c}=\vec{0}$ ./.

Nhìn ra thế giới

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN NƯỚC ANH NĂM 2001

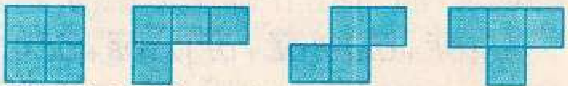
Thời gian : 3 giờ 30 phút

Bài 1. Tìm tất cả các số nguyên dương N có hai chữ số sao cho tổng tất cả các chữ số của số $10^N - N$ chia hết cho 170.

Bài 2. Đường tròn (S) nằm trong đường tròn (T) và tiếp xúc (T) tại A. Từ một điểm P khác A trên (T) vẽ hai dây cung PQ và PR của (T) sao cho hai dây này tiếp xúc (S) theo thứ tự tại X và Y. Chứng minh rằng góc QAR bằng hai lần góc XAY.

Bài 3. Quân cờ têtrôminô là một hình gồm 4 hình vuông đơn vị được ghép với nhau bởi các cạnh chung.

1) Hai quân cờ được xem là một nếu chúng là ảnh của nhau qua một phép quay trong mặt phẳng. Chứng minh rằng có 7 loại quân cờ têtrôminô.



2) Mệnh đề sau đúng hay sai, hãy chứng minh: Có thể xếp 7 quân cờ têtrôminô đôi một khác loại vào một hình chữ nhật kích thước 4 × 7 sao cho không có hai hình vuông nào chồng lên nhau.

Bài 4. Dãy số (a_n) được xác định bởi : $a_n = n + \{\sqrt{n}\}$ với n nguyên dương và $\{\sqrt{n}\}$ là số nguyên gần $\sqrt{n}$ nhất. Xác định số nguyên dương k bé nhất sao cho các số hạng : a_k ; a_{k+1} ; ... a_{k+2000} lập thành một dãy 2001 số tự nhiên liên tiếp.

Bài 5. a, b, c và R là ba cạnh và bán kính đường tròn ngoại tiếp của một tam giác. Chứng minh rằng tam giác là vuông khi và chỉ khi :

$$a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2.$$

Người giới thiệu : TRẦN ANH DŨNG
(GV THPT chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai)

CHUẨN BỊ THI VÀO ĐẠI HỌC

PHƯƠNG PHÁP ĐẠI SỐ HÓA để chứng minh BẤT ĐẲNG THỨC TRONG TAM GIÁC

PHẠM VĂN THUÂN
(SV K32A, ĐH Ngoại ngữ, ĐHQG Hà Nội)

Lời giải cho việc chứng minh các BĐT trong tam giác có thể trở nên gọn đẹp nhờ việc biểu diễn sin$a$, cos$a$ và tg$a$ theo $t = \mathrm{tg}\frac{a}{2}$ có trong SGK lớp 11.

Nếu ta quy ước $x = \mathrm{tg}\frac{A}{2}$, $y = \mathrm{tg}\frac{B}{2}$, $z = \frac{C}{2}$ (x, y, z đều dương) thống nhất cho tất cả các bài toán minh họa dưới đây thì nhiều hệ thức lượng giác trở thành hệ thức đại số và bài toán BĐT lượng giác có thể chuyển về BĐT đại số và các BĐT đại số có thể gợi ý cho ta hướng chứng minh, ngoài ra việc trình bày biến đổi đại số đỡ phức tạp hơn biến đổi lượng giác.

Các kết quả sau đây là rất quen thuộc (bạn đọc tự chứng minh) và được sử dụng nhiều trong bài viết này.

Với A, B, C là các góc của tam giác ABC thì :

1) $\mathrm{tg}\frac{A}{2}\mathrm{tg}\frac{B}{2} + \mathrm{tg}\frac{B}{2}\mathrm{tg}\frac{C}{2} + \mathrm{tg}\frac{C}{2}\mathrm{tg}\frac{A}{2} = 1$

hay $xy + yz + zx = 1$

2) $\mathrm{cotg}\frac{A}{2} + \mathrm{cotg}\frac{B}{2} + \mathrm{cotg}\frac{C}{2} = \mathrm{cotg}\frac{A}{2}\mathrm{cotg}\frac{B}{2}\mathrm{cotg}\frac{C}{2}$

hay $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{xyz}$

Ví dụ 1. *Cho tam giác ABC nhọn, chứng minh:*

$$\left(1+\frac{1}{\cos A}\right)\left(1+\frac{1}{\cos B}\right)\left(1+\frac{1}{\cos C}\right) \geq 27 \quad (3)$$

Lời giải. Với cách quy ước trên và do tam giác ABC nhọn nên x, y, z đều nhỏ hơn 1, ta có:

$$(3) \Leftrightarrow \left(1+\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)\left(1+\frac{1+y^2}{1-y^2}\right)\left(1+\frac{1+z^2}{1-z^2}\right) \geq$$

$$\geq 27 \Leftrightarrow (1-x^2)(1-y^2)(1-z)^2 \leq \frac{8}{27}$$

Áp dụng BĐT Côsi ta có :

$$(1-x^2)(1-y^2)(1-z)^2 \leq \left(\frac{3-(x^2+y^2+z^2)}{3}\right)^3 \leq$$

$$\leq \left(\frac{3-(xy+yz+zx)}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

Đẳng thức ở (3) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z \Leftrightarrow$ tam giác ABC đều.

Nhận xét. Rõ ràng lời giải trên có ưu điểm hơn cách làm thường thấy là khai triển vế trái của(3) dẫn đến việc phải tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức thành phần khá phức tạp.

Ví dụ 2. *Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta luôn có :*

$$\mathrm{cotg}\frac{A}{2} + \mathrm{cotg}\frac{B}{2} + \mathrm{cotg}\frac{C}{2} \geq 3\left(\mathrm{tg}\frac{A}{2} + \mathrm{tg}\frac{B}{2} + \mathrm{tg}\frac{C}{2}\right) \quad (4)$$

(Đề thi Học viện quan hệ quốc tế 1997)

Lời giải.

$$(4) \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3(x+y+z) \quad (5)$$

$$(5) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2 \geq \frac{3(x+y+z)}{xyz}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2 + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right)^2 + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x}\right)^2 \geq 0$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Ví dụ 3. *Với A, B, C là các góc của một tam giác ABC, chứng minh:*

$$\left(\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}\right)\left(\mathrm{cotg}\frac{A}{2} + \mathrm{cotg}\frac{B}{2} + \mathrm{cotg}\frac{C}{2}\right)$$

$$\leq 2\left(\mathrm{cotg}^2\frac{A}{2} + \mathrm{cotg}^2\frac{B}{2} + \mathrm{cotg}^2\frac{C}{2}\right) \quad (6)$$

Lời giải. (6) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1+x^2}{2x} + \frac{1+y^2}{2y} + \frac{1+z^2}{2z}\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \leq$$

$$\leq 2\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1+x^2}{2x}+\frac{1+y^2}{2y}+\frac{1+z^2}{2z}\right) \le$$

$$\le 2xyz\left[\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2-2\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow 3(x+y+z) \le \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \Leftrightarrow (5) \text{ VD2.}$$

Trước khi vận dụng hướng giải trên có thể phải biến đổi tương đương. Chẳng hạn :

Ví dụ 4. *Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC thì :*

$$\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}} \ge$$

$$\ge 3\left(\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{C}{2}}\right) \quad (7)$$

Lời giải.

$$(7) \Leftrightarrow \operatorname{cotg}^2\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}^2\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}^2\frac{C}{2}+3 \ge$$

$$\ge 3\left(\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}+3\right) \quad (8)$$

$$(8) \Leftrightarrow \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2} \ge 3(x^2+y^2+z^2+2)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2-2\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)\frac{xyz}{xyz}$$

$$-3(x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2-2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)(x+y+z)-$$

$$-3(x+y+z)^2 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+(x+y+z)\right)\times$$

$$\times\left(\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-3(x+y+z)\right) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \ge 3(x+y+z) \Leftrightarrow (5) \text{ VD 2.}$$

Ví dụ 5. *Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}} \ge$$

$$\ge 2\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)\left(\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\right) \quad (9)$$

Lời giải. Biến đổi vế trái (9) như VD 4 :

$$(9) \Leftrightarrow \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+3$$

$$\ge 2(x+y+z)\left(\frac{1+x^2}{2x}+\frac{1+y^2}{2y}+\frac{1+z^2}{2z}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+3(xy+yz+zx) \ge$$

$$\ge (x+y+z)^2+(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}-\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right) \ge$$

$$\ge x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^2+\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\right)^2+\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{x}\right)^2 \ge$$

$$\ge (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x-y}{xy}\right)^2(1-xy)(1+xy)+$$

$$+\left(\frac{y-z}{yz}\right)^2(1-yz)(1+yz)+$$

$$+\left(\frac{z-x}{zx}\right)^2(1-zx)(1+zx) \ge 0 \quad (10)$$

Vì $x > 0, y > 0, z > 0, xy + yz + zx = 1$ nên $1 > xy, 1 > yz, 1 > zx \Rightarrow$ BĐT (10) đúng.

Đẳng thức ở (10) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z \Leftrightarrow$ ΔABC đều.

Với hướng giải trình bày ở trên các bạn có thể giải quyết một cách rất tự nhiên các bài toán trong bài viết cùng chủ đề của tác giả Nguyễn Phú Chiến và bài T8/286 trên THTT 4/2001. Cuối cùng mời các bạn làm thêm các bài tập sau, trong đó để viết gọn ta kí hiệu $A_1 = \frac{A}{2}$, $B_1 = \frac{B}{2}, C_1 = \frac{C}{2}$.

Bài 1. Cho tam giác *ABC*. Chứng minh rằng:

1) $\text{cotg}A+\text{cotg}B+\text{cotg}C + \text{cotg}A_1\text{cotg}B_1\text{cotg}C_1$
$\geq 2\left(\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\right)$

2) $\text{cotg}A_1 + \text{cotg}B_1 + \text{cotg}C_1 \geq$
$\geq 2(\text{cotg}A + \text{cotg}B + \text{cotg}C) + \sqrt{3}$

3) $\text{cotg}A + \text{cotg}B + \text{cotg}C + 3\sqrt{3} \leq$
$\leq 2\left(\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\right)$

4) $\text{cotg}A_1\text{cotg}B_1\text{tg}C_1 + \text{cotg}B_1\text{cotg}C_1\text{tg}A_1 +$
$+ \text{cotg}C_1\text{cotg}A_1\text{tg}B_1 \geq 3(\text{tg}A_1 + \text{tg}B_1 + \text{tg}C_1)$

5) $\text{cotg}^2A_1 + \text{cotg}^2B_1 + \text{cotg}^2C_1 \geq$
$\geq 3(\text{tg}A_1 + \text{tg}B_1 + \text{tg}C_1)^2$

6) $\text{cotg}^2A_1 + \text{cotg}^2B_1 + \text{cotg}^2C_1$
$+ 3(\text{tg}A_1 + \text{tg}B_1 + \text{tg}C_1)^2 \geq$
$\geq 2(\text{cotg}A_1\text{cotg}B_1 + \text{cotg}B_1\text{cotg}C_1 +$
$+ \text{cotg}C_1\,\text{cotg}A_1)$

7) $\left(\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\right)(\text{cotg}A_1 + \text{cotg}B_1 + \text{cotg}C_1)$
$\geq 2(\text{cotg}A_1\text{cotg}B_1 + \text{cotg}B_1\text{cotg}C_1 + \text{cotg}C_1\text{cotg}A_1)$

Bài 2. Cho tam giác ABC nhọn. Chứng minh:

1) $\left(1+\frac{1}{\cos A}\right)\left(1+\frac{1}{\cos B}\right)\left(1+\frac{1}{\cos C}\right) \geq$
$\geq (\text{cotg}A_1 + \text{cotg}B_1 + \text{cotg}C_1)^2$

2) $(\text{tg}^2A_1\text{tg}^2B_1 + \text{tg}^2B_1\text{tg}^2C_1 + \text{tg}^2C_1\text{tg}^2A_1) \times$
$\times (\text{tg}A + \text{tg}B + \text{tg}C)^2 \geq$
$\geq \text{cotg}^2A_1 + \text{cotg}^2B_1 + \text{cotg}^2C_1$

Bài 3. Cho tam giác ABC, tìm giá trị nhỏ nhất của :

1) $P = \dfrac{\text{cotg}A_1 + \text{cotg}B_1 + \text{cotg}C_1}{\sqrt{\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}}}$

2) $Q = \dfrac{\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}}{\sqrt[3]{\text{tg}A_1 + \text{tg}B_1 + \text{tg}C_1}}$

Bài 4. Cho tam giác ABC nhọn, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$\frac{\text{tg}A + \text{tg}B + \text{tg}C}{\sqrt[3]{\text{cotg}A_1\text{cotg}B_1 + \text{cotg}B_1\text{cotg}C_1 + \text{cotg}C_1\text{cotg}A_1}}$$

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC *(Tiếp trang 20)*

Mắc thêm 1 điện trở $R = 1$ (Ω) lần lượt vào :

- *2 điểm AB, thấy G_1 chỉ 0,05 (A)*
- *2 điểm BD, thấy G_2, G_3 chỉ 0,05 (A)*
- *2 điểm CD, thấy G_3 chỉ 0,05 (A)*
- *2 điểm AC, thấy G_1, G_2 chỉ 0,05 (A)*
- *2 điểm BC, thấy G_2 chỉ 0,05 (A)*

Hãy tính các điện trở r, g_1, g_2, g_3.

Lời giải. Cường độ dòng điện mạch chính : $I = \frac{E}{r + R_N}$. Khi mắc $R = 1(\Omega)$ vào 2 điểm AB, ta có :

$$R_N = \frac{g_1R}{g_1 + R} + g_2 + g_3 = \frac{g_1 + (g_2+g_3)(g_1+1)}{g_1+1}$$

$$\Rightarrow I = \frac{E(g_1+1)}{g_1 + (g_2 + g_3 r)(g_1+1)} \quad (1)$$

Kí hiệu I_o là số chỉ của G_1, ta có $I_0 = I.\frac{1}{g_1+1}$

$$\Rightarrow I = I_o(g_1+1) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$g_1 + (g_1+1)(g_2+g_3+1) = \frac{E}{I_o} = \frac{2{,}2}{0{,}05} = 44 \quad (3)$$

Tương tự, khi mắc R lần lượt vào 2 điểm BD, rồi CD, rồi BC ta có :

$$g_2 + g_3 + (g_2+g_3+1)(g_1+r) = 44 \quad (4)$$
$$g_3 + (g_1 + g_2 + r)(g_3+1) = 44 \quad (5)$$
$$g_2 + (g_2+1)(g_1+g_3+r) = 44 \quad (6)$$

Từ (3) và (5) suy ra :

$$g_2(g_1 - g_3) + r(g_1 - g_3) = 0 \Rightarrow g_1 = g_3 \quad (7)$$

Từ (3) và (6) suy ra : $g_1 = g_2$ (8). Từ (3), (4), (7) và (8) tìm được : $r = 0$; $g_1 = g_2 = g_3 = 4$ (Ω)

Nhận xét. Ta thấy dữ kiện mắc R vào AC (hoặc BD) là thừa !

Các bạn có đáp số đúng và nêu được nhận xét trên :

Thanh Hóa: *Lê Văn Dương*, 12A1, THPT Hậu Lộc I, Hậu Lộc ; **Nam Định:** *Nguyễn Minh Tuấn*, 10A2, THPT Tống Văn Trân, Ý Yên ; **Hải Dương:** *Hà Minh Hoàng*, 11A10, THPT Hồng Quang ; **Hà Tĩnh:** *Phạm Viết Ân*, *Lê Đức Đạt*, 11 Lí, *Lê Hồng Quốc Tiệp*, 12A, THPT Hồng Lĩnh ; **Vĩnh Phúc :** *Kim Thanh Thủy*, *Chu Anh Dũng*, 11A3, *Trần Tuấn Dũng*, *Nguyễn Năng An*, 12A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

MAI ANH

ĐỀ THI TUYỂN SINH MÔN TOÁN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC THỦY SẢN NĂM 2001

Câu I. 1) Khảo sát hàm số : $y = (x+1)^2(x-2)$

2) Cho đường thẳng Δ đi qua điểm M (2; 0) và có hệ số góc là k. Hãy xác định tất cả các giá trị của k để đường thẳng Δ cắt đồ thị của hàm số sau tại bốn điểm phân biệt :

$y = |x|^2 - 3|x| - 2$

Câu II. Giải các phương trình :

1) $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}} = \dfrac{x+5}{2}$

2) $\dfrac{\cos x(\cos x + 2\sin x) + 3\sin x(\sin x + \sqrt{2})}{\sin 2x - 1} = 1$

Câu III:

1) Giải và biện luận phương trình sau theo tham số a :

$\sqrt{a+2^x} + \sqrt{a-2^x} = a$

2) Giải phương trình :

$$\sqrt{(\log_2\sqrt{2x} + \log_x\sqrt{2x})\log_2 x^2} + \sqrt{\left(\log_2\sqrt{\frac{x}{2}} + \log_x\sqrt{\frac{2}{x}}\right)\log_2 x^2} = 2$$

Câu IV :

Cho tứ diện $SPQR$ với $SP \perp SQ$, $SQ \perp SR$, $SR \perp SP$. Gọi A, B, C theo thứ tự là trung điểm của các đoạn PQ, QR, RP.

1) Chứng minh rằng các mặt của khối tứ diện $SABC$ là các tam giác bằng nhau.

2) Tính thể tích của khối tứ diện $SABC$ khi cho $SP = a$, $SQ = b$, $SR = c$.

Câu V: Tính tích phân :

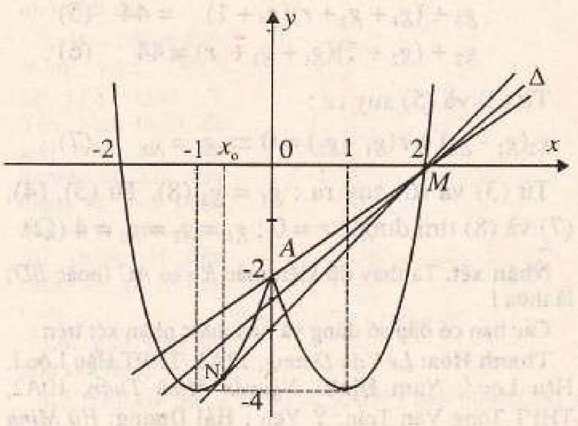
$$I = \int_0^{\pi/8} \frac{\cos 2x}{\sin 2x + \cos 2x}dx$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu I. 1) Bạn đọc tự giải

2) * Từ đồ thị $y = f(x) = (x+1)^2(x-2) = x^3 - 3x - 2$ ta suy ra được đồ thị $y = |x|^3 - 3|x| - 2 =$

$$= \begin{cases} x^3 - 3x - 2 \text{ với } x \geq 0 \\ -x^3 + 3x - 2 \text{ với } x < 0 \end{cases}$$



* Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2; 0)$ với hệ số góc k có phương trình là : $y = k(x-2)$.

* Từ hình vẽ ta thấy đường Δ cắt đồ thị $y = f(|x|)$ tại bốn điểm phân biệt khi và chỉ khi : $k_{MA} < k < k_{MN}$

trong đó : k_{MA} là hệ số góc của đường thẳng MA với $A(0, -2)$ nên $k_{MA} = \dfrac{0+2}{2-0} = 1$.

k_{MN} là hệ số góc của đường thẳng MN được xác định khi Δ tiếp xúc với nhánh trái của đồ thị hàm $y = f(|x|)$ tại điểm N $(x_o; y_o)$ với

$$x_o < 0 : \begin{cases} -x_o^3 + 3x_o - 2 = k_{MN}(x_o - 2) \\ -3x_o^2 + 3 = k_{MN} \end{cases}$$

Giải ra được : $\begin{cases} x_o = 1 - \sqrt{3} \\ k_{MN} = 3(2\sqrt{3} - 3) \end{cases}$

Kết luận : $1 < k < 3(2\sqrt{3} - 3)$

Câu II. 1) Phương trình (1) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x+1}) + 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x+1} - 1)^2} = \frac{x+5}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1} + 1 + |\sqrt{x+1} - 1| = \frac{x+5}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\left|\sqrt{x+1} - 1\right| - 1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left|\sqrt{x+1} - 1\right| = 1$$

Giải ra dẫn đến kết luận : Nghiệm của (1) là $x = -1$ hoặc $x = 3$.

2) Phương trình có nghiệm $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$

Câu III.

1) *Cách 1.* Khi $a \le 0$ thì phương trình (1) vô nghiệm.

* Khi $a > 0$. Bình phương hai vế được :

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x \le a \\ 2\sqrt{a^2 - (2^x)^2} = a^2 - 2a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x \le a;\ a(a-2) \ge 0 \\ 4[a^2 - (2^x)^2] = a^4 - 4a^3 + 4a^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x \le a; a \ge 2 \\ (2^x)^2 = \frac{a^3}{4}(4-a) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \le a < 4 \\ x = \log_2\left[\frac{a}{2}\sqrt{a(4-a)}\right] \end{cases}$$

Kết luận :

1. Nếu $a = 2$: (1) có nghiệm $x = 1$.
2. Nếu $2 < a < 4$: (1) có nghiệm $x = \log_2\left[\frac{a}{2}\sqrt{a(4-a)}\right]$
3. Nếu $a < 2$ hoặc $a \ge 4$: (1) vô nghiệm

Cách 2. Khi $a > 0$ phương trình (1) có điều kiện $0 < 2^x \le a \Leftrightarrow 0 < \frac{2^x}{a} \le 1$ đặt $2^x = a\cos\varphi$, $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ đưa về xét phương trình

$$\sqrt{a(1+\cos\varphi)} + \sqrt{a(1-\cos\varphi)} = a$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\varphi}{4}\right) = \frac{\sqrt{a}}{2}$$

Cách 3. Đặt $U = \sqrt{a + 2^x} > 0\ \forall x, \forall a > 0$, $V = \sqrt{a - 2^x} \ge 0, \forall x, \forall a > 0$ đưa về xét hệ :

$$\begin{cases} U + V = a \\ U^2 + V^2 = 2a \end{cases}$$

2) Phương trình (2) có điều kiện : $0 < x \ne 1$. Lúc đó :

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{(\log_2 x + \log_x 2 + 2)\log_2 x} + \sqrt{(\log_2 x + \log_x 2 - 2)\log_2 x} = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\log_2 x + 1)^2} + \sqrt{(\log_2 x - 1)^2} = 2$$

$$\Leftrightarrow |\log_2 x + 1| + |1 - \log_2 x| = (\log_2 x + 1) + (1 - \log_2 x)$$

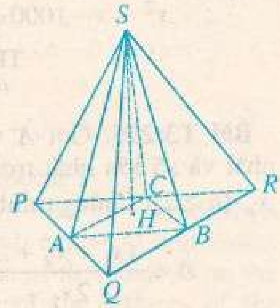
$$\Leftrightarrow -1 \le \log_2 x \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \le x \le 2 \\ x \ne 1 \end{cases}$$

Kết luận : Nghiệm của (2) là $\frac{1}{2} \le x < 1$; $1 < x \le 2$.

Câu IV. 1) Do SA là đường trung tuyến trong tam giác vuông SPQ và CB là đường trung bình của tam giác PQR nên : $SA = \frac{1}{2}PQ = BC$.

Tương tự : $SB = CA$, $SC = AB$.

Từ các đẳng thức trên suy ra các mặt của khối tứ diện $SABC$ là các tam giác bằng nhau.



2) Gọi SH là đường cao của hai hình chóp $SABC$ và $SPQR$ ta có :

$$V_{SABC} = \frac{1}{3}\text{dt}(\Delta ABC).SH$$

$$= \frac{1}{3}.\frac{1}{4}\text{dt}(\Delta PQR).SH$$

$$= \frac{1}{4}V_{SPQR} = \frac{1}{24}SP.SQ.SR = \frac{abc}{24}$$

Có thể giải bằng phương pháp tọa độ.

Câu V.

$$I = \int_0^{\pi/8} \frac{\cos 2x}{\sin 2x + \cos 2x}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/8} \frac{(\cos 2x + \sin 2x) + (\cos 2x - \sin 2x)}{\cos 2x + \sin 2x}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/8} dx + \frac{1}{4}\int_0^{\pi/8} \frac{d(\cos 2x + \sin 2x)}{\cos 2x + \sin 2x}$$

$$= \frac{x}{2}\Big|_0^{\pi/8} + \frac{1}{4}\ln|\cos 2x + \sin 2x|\Big|_0^{\pi/8}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4} + \ln\sqrt{2}\right)$$

Hướng dẫn giải :

MAI THẮNG

(GV ĐH Thủy Sản Nha trang)

ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/295. Tìm bảy số nguyên tố sao cho tích của chúng bằng tổng các lũy thừa bậc sáu của bảy số đó.

VŨ HẢI
(Hà Nội)

Bài T2/295. Giải phương trình :

$$x^2 - x - 1000\sqrt{1+8000x} = 1000$$

TRẦN TUYẾT THANH
(GV Sơn Tây, Hà Tây)

Bài T3/295. Gọi A và B lần lượt là số nhỏ nhất và số lớn nhất trong n số dương $x_1, x_2, ..., x_n$ $(n \geq 2)$. Chứng minh rằng :

$$A < \frac{(x_1 + x_2 + ...x_n)^2}{x_1 + 2x_2 + ... + nx_n} < 2B$$

BÙI THẾ HÙNG
(SV K34B khoa Toán - ĐHSP Thái Nguyên)

Bài T4/295. Cho lục giác lồi $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ có các cạnh đối diện song song với nhau. Gọi B_1, B_2, B_3 lần lượt là giao điểm của từng cặp đường chéo A_1A_4 và A_2A_5, A_2A_5 và A_3A_6, A_3A_6 và A_1A_4. Gọi C_1, C_2, C_3 lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng A_3A_6, A_1A_4, A_2A_5. Chứng minh rằng các đường thẳng B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3 đồng quy.

PHẠM ĐÌNH TRƯỜNG
(Lê Chân, Hải Phòng)

Bài T5/295. Cho tam giác ABC ($AB \leq AC \leq BC$). Tìm quỹ tích những điểm M nằm trong tam giác sao cho tổng các khoảng cách từ điểm M đến ba cạnh của tam giác luôn bằng một hằng số.

NGÔ VĂN HIỆP
(Hoàn Kiếm, Hà Nội)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/295. Cho ba số dương a, b, c. Chứng minh rằng :

1) $(a+b+c)^3(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a) \leq 27a^2b^2c^2$

2) $(a^2 + b^2 + c^2)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a) \leq$
$\leq abc(ab + bc + ca)$

3) $(a+b+c)[2(ab+bc+ca) - (a^2+b^2+c^2)] \leq 9abc.$

TRẦN TUẤN ANH
(SV khoa Toán - Tin 2000, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội)

Bài T7/295. Hỏi có tất cả bao nhiêu đa thức $P_n(x)$ bậc n chẵn thỏa mãn các điều kiện :

1) Các hệ số của $P_n(x)$ thuộc tập hợp $M = \{0, -1, 1\}$ và $P_n(0) \neq 0$.

2) Tồn tại đa thức $Q(x)$ có các hệ số thuộc M sao cho

$$P_n(x) \equiv (x^2 - 1)Q(x)$$

NGUYỄN VIẾT LONG
(GV THPT Lam Sơn, Thanh Hóa)

Bài T8/295. Tìm tất cả các hàm số $f : D \to D$ trong đó $D = [1, +\infty)$ thỏa mãn điều kiện

$f(x.f(y)) = y.f(x)$ với mọi x, y thuộc D

VŨ THỊ HUỆ PHƯƠNG
(SV K33B khoa Toán, ĐHSP Thái Nguyên)

Bài T9/295. Gọi S, R, r lần lượt là diện tích, bán kính đường tròn ngoại tiếp và bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác ABC. Đặt $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$. Chứng minh rằng

$$\frac{2S}{R} \leq (b+c-a)\sin\frac{A}{2} + (a-b+c)\sin\frac{B}{2} + (a+b-c)\sin\frac{C}{2} \leq \frac{S}{r}$$

Mỗi đẳng thức xảy ra khi nào ?

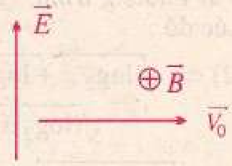
LƯU XUÂN TÌNH
(GV THPT Lam Sơn, Thanh Hóa)

Bài T10/295. Cho tứ diện $ABCD$ nội tiếp một mặt cầu tâm O bán kính R. Hãy xác định vị trí điểm M trên mặt cầu sao cho tổng các bình phương các khoảng cách từ điểm M tới các đỉnh của tứ diện đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

ĐỖ BÁ CHỦ
(GV THPT Đông Hưng Hà, Thái Bình)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/295. Một êlectron đang chuyển động với vận tốc $v_o = 10^5$ m/s thì bay vào vùng có điện trường đều và từ trường đều ; vectơ vận tốc $\vec{v_o} \perp \vec{E}$ và $\vec{v_o} \perp \vec{B}$ (hình vẽ).



Xác định độ lớn vận tốc của êlectron ở thời điểm

$\vec{v}$ ngược hướng với $\vec{v_o}$. Biết rằng $E = v_oB$ và bỏ qua tác dụng của trọng lực.

NGUYỄN THANH NHÀN
(GV THPT Yên Lạc, Vĩnh Phúc)

Bài L2/295. Đặt hiệu điện thế $u = U_o\sin(\omega t + \varphi)$ vào hai bản của một tụ điện có điện dung $C = 10^{-3}/4\pi$ (F). Ở thời điểm t_1 các giá trị tức thời các u và i trong mạch là $u_1 = 100\sqrt{3}$ (V) và $i_1 = -2{,}5$ (A) ; ở thời điểm $t_1 = 1{,}5t_1$ ta có $u_2 = 100$ (V) và $i_2 = -2{,}5\sqrt{3}$ (A). Hãy xác định ω, u_o, φ và t_1.

NGUYỄN QUANG HẬU
(Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/295. Find seven prime numbers such that their product equals the sum of the 6^{th} powers of them.

T2/295. Solve the equation :

$$x^2 - x - 1000\sqrt{1+8000x} = 1000$$

T3/295. Let A and B be respectively the least and the greatest numbers of n positive numbers $x_1, x_2, ..., x_n$ $(n \geq 2)$. Prove that :

$$A < \frac{(x_1 + x_2 + ... x_n)^2}{x_1 + 2x_2 + ... + nx_n} < 2B$$

T4/295. Let be given a convex hexagon $A_1A_2...A_6$ with parallel opposite sides. Let B_1, B_2, B_3 be respectively the points of intersection of the couples of diagonals A_1A_4 and A_2A_5, A_2A_5 and A_3A_6, A_3A_6 and A_1A_4. Let C_1, C_2, C_3 be respectively the midpoints of the segments A_3A_6, A_1A_4, A_2A_5. Prove that the lines B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3 are concurrent.

T5/295. Let ABC be a triangle with $AB \leq AC \leq BC$. Find the locus of the points M inside the triangle such that the sum of the distances from M to the sides of the triangle is a given constant.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/295. Let a, b, c be three given positive numbers. Prove that :

1) $(a+b+c)^3(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a) \leq 27a^2b^2c^2$

2) $(a^2 + b^2 + c^2)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a) \leq$
$\leq abc(ab + bc + ca)$

3) $(a+b+c)[2(ab+bc+ca) - (a^2+b^2+c^2)] \leq 9abc$.

T7/295. How many are there polynomials $P_n(x)$ of given even degree n satisfying the following conditions :

1) the coefficients of $P_n(x)$ belong to the set $M = \{0, -1, 1\}$ and $P_n(0) \neq 0$,

2) there exists a polynomial $Q(x)$ with coefficients in M such that $P_n(x) \equiv (x^2 - 1)Q(x)$

T8/295. Find all functions $f : D \to D$ (where $D = [1, +\infty)$) satisfying the condition

$f(x.f(y)) = y.f(x)$ for all x, y in D.

T9/295. Let S, R, r be respectively the area, the circumradius and the inradius of triangle ABC. Let $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Prove that

$$\frac{2S}{R} \leq (b+c-a)\sin\frac{A}{2} + (a-b+c)\sin\frac{B}{2} + (a+b-c)\sin\frac{C}{2} \leq \frac{S}{r}$$

When does one equality occur ?

T10/295. Let $ABCD$ be a tetrahedron inscribed in a sphere with center O and radius R. Determine the position of the point M on the sphere so that the sum of the squares of the distances from M to the vertices of $ABCD$ attains its greatest value, and the same question for least value.

Đón đọc

THTT SỐ 296 (2/2002)

- Lời giải bài thi Toán quốc tế lần thứ 42 năm 2001
- Vài phương pháp giải phương trình hàm
- Hướng dẫn giải bài toán khó trong đề thi tuyển sinh vào Đại học quốc gia Hà Nội và Học viện Ngân hàng năm 2001
- Ứng dụng của một hệ thức về tỉ số diện tích
- Jacob Steiner, nhà hình học lớn.

Mời các bạn tham gia các cuộc thi tài Ai biết nhiều hơn ? Toán học muôn màu, Giải trí toán học, Sai lầm ở đâu ?...

THTT

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

Bài T1/291. *Tìm tất cả các giá trị hữu tỉ của x sao cho biểu thức* $\dfrac{x^2+2x+3}{x^2-x+1}$ *nhận giá trị là số nguyên.*

Lời giải. Ta thấy $x^2+2x+3=(x+1)^2+2>0$, $x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$ với mọi x nên $\dfrac{x^2+2x+3}{x^2-x+1}>0\ (\forall x)$

Đặt $\dfrac{x^2+2x+3}{x^2-x+1}=k$ với k là số nguyên dương. Từ đó

$$(k-1)x^2-(k+2)x+k-3=0 \qquad (1)$$

• Với $k=1$ có $x_1=\dfrac{-2}{3}$ thỏa mãn

• Với $k>1$ để (1) có nghiệm hữu tỉ thì phải có $\Delta=(k+2)^2-4(k-1)(k-3)\geq 0$

$\Rightarrow 3k^2-20k+8\leq 0 \Rightarrow (3k-10)^2\leq 76 \Rightarrow 3k-10<9 \Rightarrow k<7$

Giải phương trình (1) với nghiệm hữu tỉ lần lượt với các giá trị k bằng 2, 3, 4, 5, 6 ta thấy chỉ có $k=3$ và $k=6$ thỏa mãn

• Với $k=3$ thì (1) có 2 nghiệm là $x_2=0$ và $x_3=\dfrac{5}{2}$

• Với $k=6$ thì (1) có hai nghiệm là $x_4=\dfrac{3}{5}$ và $x_5=1$.

Vậy để $\dfrac{x^2+2x+3}{x^2-x+1}$ nhận giá trị là số nguyên thì x nhận 5 giá trị là $\dfrac{-2}{3}, 0, \dfrac{3}{5}, 1, \dfrac{5}{2}$.

Nhận xét. Rất nhiều bạn có lời giải tốt.

TỐ NGUYÊN

Bài T2/291. *Cho ba số a, b, c đôi một khác nhau và thỏa mãn*

$$\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0$$

Chứng minh rằng trong ba số đó phải có một số dương và một số âm.

Lời giải.

Đặt $A=b-c$, $B=c-a$, $C=a-b$, ta có

$$A+B+C=0 \qquad (1)$$
$$aA+bB+cC=0. \qquad (2)$$

Đem chia đẳng thức đầu bài $\dfrac{a}{A}+\dfrac{b}{B}+\dfrac{c}{C}=0$ lần lượt cho A, B và C, ta nhận được

$$\frac{a}{A^2}+\frac{b}{AB}+\frac{c}{AC}=0 \qquad (3)$$
$$\frac{a}{AB}+\frac{b}{B^2}+\frac{c}{BC}=0 \qquad (4)$$
$$\frac{a}{AC}+\frac{b}{BC}+\frac{c}{C^2}=0 \qquad (5)$$

Sử dụng (1) có

$$\frac{a}{AB}+\frac{a}{AC}=\frac{a(C+B)}{ABC}=\frac{-aA}{ABC} \qquad (6)$$

Tương tự $\dfrac{b}{AB}+\dfrac{b}{BC}=\dfrac{-bB}{ABC}$ (7)

$$\frac{c}{AC}+\frac{c}{BC}=\frac{-cC}{ABC} \qquad (8)$$

Cộng theo từng vế các đẳng thức (3) (4) (5) và sử dụng (6) (7) (8) (2) ta nhận được :

$$\frac{a}{A^2}+\frac{b}{B^2}+\frac{c}{C^2}=0$$

Từ đẳng thức cuối, hiển nhiên trong ba số a, b, c phải có một số âm và một số dương.

Nhận xét. Trên 300 bạn gửi bài giải bài toán này và hầu hết giải đúng. Nhiều bạn phát hiện ra bài toán này được đăng lần đầu tiên trên báo Toán học và Tuổi trẻ 1/1987 (bài T1/153 của tác giả Vũ Đình Hòa) và sau đó được một số sách in lại. Có phải vì thế có nhiều bạn "trúng tủ" không ?

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T3/291. *Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn các điều kiện : $0<x<y\leq z\leq 1$ và $3x+2y+z\leq 4$.*

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$3x^2+2y^2+z^2$$

Lời giải. Đặt $A=3x^2+2y^2+z^2$.

$$3x+2y+z\leq 4 \Rightarrow 3x^2+2xy+xz\leq 4x \qquad (1)$$

(vì $x>0$). Mặt khác do $0<x<y\leq z\leq 1$ nên :

$$2y(y-x)\leq 2(y-x) \qquad (2)$$
$$z(z-x)\leq z-x \qquad (3)$$

Cộng theo từng vế của (1), (2), (3) ta có :

$A \le x + 2y + z \Rightarrow A^2 \le (x + 2y + z)^2$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki thì

$A^2 \le (x + 2y + z)^2 \le$

$$\le \left(\frac{1}{3} + 2 + 1\right)(3x^2 + 2y^2 + z^2) = \frac{10A}{3}$$

$$\Rightarrow A \le \frac{10}{3}$$

Với $x = \frac{1}{3}$, $y = z = 1$ thì $A = \frac{10}{3}$ nên giá trị lớn nhất của A là $\frac{10}{3}$.

Nhận xét. 1) Một số bạn nhận xét $x \le \frac{2}{3}$ vì nếu $x > \frac{2}{3}$ thì $3x + 2y + z > 6x > 4$, mâu thuẫn với giả thiết. Nếu $x < \frac{1}{3}$ thì $3x^2 < \frac{1}{3}$ nên $A < \frac{10}{3}$. Nếu $x \ge \frac{1}{3}$ thì $\left(\frac{2}{3} - x\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) \ge 0 \Rightarrow 3x^2 \le 3x - \frac{2}{3} \Rightarrow A \le 3x - \frac{2}{3} + 2y + z \le \frac{10}{3}$.

Từ đó cũng dẫn đến kết quả đúng.

2) Vẫn có những bạn trừ từng vế của hai bất đẳng thức cùng chiều (?)

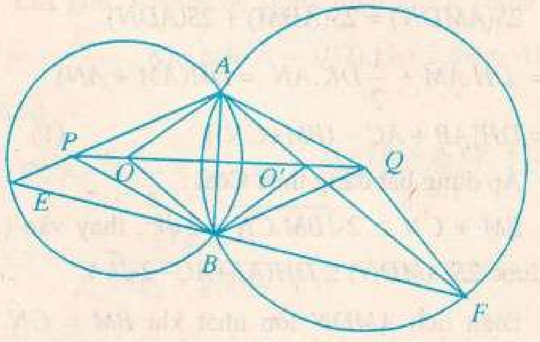
3) Các bạn có lời giải tốt, trình bài rõ ràng là : Nguyễn Trung Kiên A, 8A1, THCS Giấy, Phong Châu, Phù Ninh, **Phú Thọ** ; Trần Duy Sơn và Thái Thanh Hải, 9/2, THCS Nguyễn Khuyến, Tp. Đà Nẵng, **Đà Nẵng**; Nguyễn Ngọc Tú, 9B, THCS Lê Đình Kiên, Yên Định, **Thanh Hóa** ; Nguyễn Hữu Hoàn, 9B, THCS Vĩnh Tường và Lê Thị Lộc, 8C, THCS Bình Dương, Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc** ; Nguyễn Đức Tân và Phạm Duy Hiển, 9A7, THCS Trần Đăng Ninh, **Tp. Nam Định**; Lê Đình Huy, 9A, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách, **Hải Dương** ; Lê Trường Đạt Khánh, 9E, PTNK Lê Lợi, Tx. Hà Đông, **Hà Tây**; Nguyễn Minh Luân, 8A, THCS Nguyễn Việt Hồng, Tp. Cần Thơ, **Cần Thơ**; Võ Thông Thái, 9^3, trường cấp 2–3 Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa; Lê Thị Hồng Ngân, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An** ; Trần Minh Hoàng, 9/1, THCS Nguyễn Du, Q. 1, **Tp. Hồ Chí Minh**;

4) Hai bạn Trần Duy Sơn, 9/2, THCS Nguyễn Khuyến, **Tp. Đà Nẵng** và Đoàn Duy Thuyết, $9A_2$, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên, **Nam Định** đã tổng quát hóa bài toán và cho kết quả đúng.

LTN

Bài T4/291. *Cho đường tròn tâm O và hai điểm A, B thuộc đường tròn này. Một đường tròn thay đổi nhưng luôn đi qua A và B có tâm là Q. Gọi P là điểm đối xứng của Q qua đường thẳng AB. Đường thẳng AP cắt đường tròn tâm O lần nữa tại E. Đường thẳng BE (khi E khác B) cắt đường tròn tâm Q lần nữa tại F. Chứng minh rằng điểm F luôn nằm trên một đường thẳng khi đường tròn tâm Q thay đổi.*

Lời giải. Lấy O' đối xứng với O qua AB. Do P đối xứng với Q qua AB nên PQ qua trung điểm của AB và suy ra $APBQ$ là hình thoi (khi E khác B).



Do đó $QB // AP$. Nên $\widehat{AEB} = \widehat{QBF} = \widehat{QFB}$.

Ta có $\widehat{AEB} = \widehat{O'OB} = \widehat{OO'B} =$

$= 180^o - \widehat{BO'Q}$

Từ đó $\widehat{BO'Q} + \widehat{QFB} = 180^o$.

• Nếu O' nằm giữa OQ thì tứ giác $BFQO'$ nội tiếp. Suy ra $\widehat{BFO'} = \widehat{O'QB} = \frac{1}{2}\widehat{AQB} = \widehat{AFB}$. Chứng tỏ A, O', F thẳng hàng.

• Nếu O' không nằm giữa OQ lập luận tương tự cũng thấy A, O', F thẳng hàng.

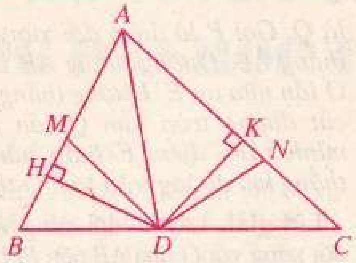
Vậy khi đường tròn Q thay đổi thì F luôn nằm trên đường thẳng AO' cố định.

Nhận xét. Giải tốt bài này có các bạn : **Vĩnh Phúc :** *Nghiêm Thị Ngân*, 9A, THCS Yên Lạc ; **Hải Phòng :** *Bùi Tuấn Anh*, 9A, THPT NK Trần Phú, **Nam Định:** *Đoàn Duy Thuyết, Dương Đỗ Nhuận*, $9A^2$, THCS Lê Quý Đôn, ý Yên ; **Hải Phòng:** *Phạm Anh Minh*, 9A, THPT NK Trần Phú ; **Thanh Hóa :** *Nguyễn Ngọc Tú*, 9B, THCS Lê Đình Kiên, Yên Định; **Nghệ An:** *Nguyễn Huy Cường*, 9C, *Đặng Thai Mai*, Vinh, Nghệ An.

VŨ KIM THỦY

Bài T5/291. *Cho tam giác ABC với $AB \le AC$ và AD là đường phân giác trong. Lấy điểm M trên cạnh AB và điểm N trên cạnh AC sao cho $BM.CN = k$ không đổi ($k < AB^2$). Xác định vị trí của M, N sao cho diện tích của tứ giác AMDN là lớn nhất.*

Lời giải. Gọi DH, DK lần lượt là đường vuông góc kẻ từ D tới AB, AC thì $DH = DK$ không đổi vì AD là đường phân giác (h.1). Ta có



Hình 1

$$2S(AMDN) = 2S(ADM) + 2S(ADN)$$

$$= DH.AM + \frac{1}{2}DK.AN = DH(AM + AN)$$

$$= DH[AB + AC - (BM+CN)] \qquad (1)$$

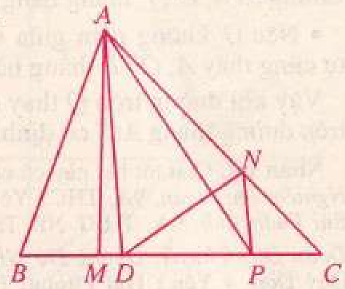
Áp dụng bất đẳng thức Côsi :

$BM + CN \geq 2\sqrt{BM.CN} = 2\sqrt{k}$, thay vào (1) được $2S(AMDN) \leq DH(AB+AC-2\sqrt{k})$.

Diện tích $AMDN$ lớn nhất khi $BM = CN = \sqrt{k} < AB \leq AC$, lúc đó $S(AMDN) = \frac{1}{2}(AB + AC - 2\sqrt{k})$. Dễ dàng dựng được các đoạn thẳng BM, CN theo hệ thức $BM^2 = CN^2 = k.1$, trong đó 1 chỉ 1 đơn vị dài.

Nhận xét. 1) Các bạn gửi bài giải đều đúng nhưng có một số bạn không viết công thức tính diện tích mà chỉ lập luận về sự lớn nhất, nhỏ nhất của các biểu thức về độ dài hoặc diện tích nên dài dòng và không thật chặt chẽ khi chưa chỉ ra sự tồn tại của giá trị lớn nhất, nhỏ nhất đó.

2) Bạn *Phạm Kim Hùng*, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên, Nam Định, đã giải thêm bài toán tương tự khi lấy điểm M trên đoạn BD và N trên cạnh AC (hoặc M trên cạnh AB và N trên CD).



Hình 2

Lời giải tóm tắt như sau (h.2)

Kẻ $NP//AD$ thì $S(ADN) = S(ADP)$ nên $S(AMDN) = S(AMP) = \frac{h}{2}(BC-BM-CP)$ (2) trong đó $h = AH$ là đường cao. Đặt $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, theo tính chất đường phân giác AD có :

$$\frac{CP}{CN} = \frac{CD}{CA} = \frac{BD}{BA} = \frac{CD+BD}{CA+BA} = \frac{a}{b+c}$$

Gọi $CN = x$, $BM = \frac{k}{x}$ ta có $CP+BM = \frac{ax}{b+c} + \frac{k}{x} \geq 2\sqrt{\frac{ak}{bc}}$. Thay vào (2) được $S(AMDN) \leq \frac{h}{2}\left(a - 2\sqrt{\frac{ak}{b+c}}\right)$

Đẳng thức xảy ra khi $CN = x = \sqrt{\frac{(b+c)k}{a}}$ và $BM = \sqrt{\frac{ak}{b+c}}$

Các điểm M, N dựng được khi $CN < CA$ và $BM < BD$, nghĩa là $k < \frac{ac^2}{b+c}$ và $k < \frac{ab^2}{b+c}$.

3) Các bạn sau có lời giải tốt :

Phú Thọ : *Vũ Minh Hoàng, Trần Trọng Nam*, 9A, THCS Giấy, Phong Châu, Phù Ninh ; **Vĩnh Phúc :** *Trần Sơn Tùng*, 9A, THCS Vĩnh Yên, *Bùi Thị Thu Hiền*, 9B, THCS Yên Lạc; **Hà Tây:** *Nguyễn Ngọc Tuấn*, 9A, THCS Thạch Thất ; **Hà Nội:** *Nguyễn Duy Hiếu*, 9B, THCS Nguyễn Trường Tộ, Đống Đa, *Nguyễn Thành Trung*, 9E, THCS Ngô Sĩ Liên, Hai Bà Trưng; **Hải Dương:** *Lê Đình Huy*, 9A, THCS Nguyễn Trãi, *Trần Thị Phương Oanh*, 8C, THCS Cộng Hòa, Nam Sách; **Hải Phòng :** *Bùi Tuấn Anh, Phạm Duy Thành*, 9A, *Đường Hải Lang*, 8B, THCS NK Trần Phú, *Nguyễn Lương Tiến*, 9A1, THCS Đông Hải, An Hải ; **Nam Định :** *Dương Đỗ Nhuận, Nguyễn Thành Nam, Đoàn Duy Thuyết*,, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên, *Phạm Duy Hiển, Nguyễn Đức Tâm*, 9A7, THCS Trần Đăng Ninh, Tp. Nam Định ; **Thanh Hóa :** *Nguyễn Duy Thanh*, 9A, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoằng Hóa. *Nguyễn Ngọc Tú*, 9B, THCS Lê Đình Kiên, Yên Định, *Trần Hoài Thu*, 9A, THCS Trần Mai Ninh, Tp. Thanh Hóa; **Nghệ An:** *Trần Văn Dũng, Nguyễn Anh Dũng*, 9B, THCS Bạch Liêu, Yên Thành; **Hà Tĩnh:** *Phan Đăng Thông*, 8A, THCS Bình Thịnh, Đức Thọ; **Phú Yên :** *Phan Đăng Thông*, 8A, THCS Bình Thịnh, Đức Thọ; **Phú Yên:** *Huỳnh Thị Thùy Lam*, 8C1, THCS Phú Lâm, Tuy Hòa; **Khánh Hòa:** *Nguyễn Minh Hải*, 8/14, THCS Thái Nguyên, Nha Trang; **Tp. Hồ Chí Minh:** *Trần Hải Đăng*, 7A9, THCS Trần Đại Nghĩa.

VIỆT HẢI

Bài T6/291. *Tìm tất cả các hàm số $f : Q \to Q$ thỏa mãn $f(f(x) + y) = x + f(y)$ với mọi số x, y thuộc tập hợp số hữu tỉ Q.*

Lời giải. (của bạn *Nguyễn Mạnh Long*, 12N, THPT Thăng Long, **Hà Nội**)

f là đơn ánh. Thật vậy nếu $f(a) = f(b) \Rightarrow a + f(y) = f(f(a) + y) = f(f(b) + y) = b + f(y)$ với mọi $y \Rightarrow a = b$.

Cho $x = 0$ ta được $f(y + f(0)) = f(y) \Rightarrow y + f(0) = y$ với mọi $y \Rightarrow f(0) = 0$. Trong phương trình hàm ở đề bài cho $y = 0 \Rightarrow f(f(x)) = x$.

Thay $f(x)$ bởi x trong phương trình hàm ta được $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Từ đó bằng suy luận quen thuộc ta suy ra $f(x) = ax, \forall x \in Q$

Thay vào phương trình hàm ta rút ra $a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$. Thử lại ta thấy các hàm $f(x) = x$ và $f(x) = -x$ thỏa mãn và do đó là các hàm cần tìm.

Nhận xét. 1) Một số bạn không thử lại nên cho kết quả $f(x) = ax, \forall a \in Q$ (!)

2) Có bạn cho rằng kết quả vẫn đúng nếu thay tập Q bằng R. Song điều này không đúng. Một hàm $f : R \to R$ thỏa mãn điều kiện $f(x+y) = f(x) + f(y)$ không nhất thiết có dạng $f(x) = ax$, nếu không giả thiết f liên tục.

3) Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Hoàng Ngọc Bình*, THPT Lê Quý Đôn, **Quảng Trị** ; *Nguyễn Thành Nam*, THPT Nguyễn Trãi, **Hải Dương** ; *Trần Trung Kiên*, 10T, THPT Lê Hồng Phong, **Nam Định** ; *Vũ Minh Triều*, 10A, *Nguyễn Thị Quỳnh Trang*, 10A2, THPT Phan Bội Châu **Nghệ An** ; *Trần Vĩnh Hưng*, ĐHKHTN - ĐHQG **Tp. HCM**; *Nguyễn Công Thắng*, Tx. Cao Lãnh, **Đồng Tháp**, *Đoàn Văn Thiệu*, 11, THPT Hàn Thuyên, **Bắc Ninh**; *Trần Minh Mẫn*, 11, THPT Lương Văn Tụy, **Ninh Bình**; *Nguyễn Hải Phong*, 12, THPT Lương Thế Vinh, **Đồng Nai**.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T7/291. *Tìm tất cả các hàm số $f: N^* \to N^*$ thỏa mãn $f(f(n) + m) = n + f(m + 2001)$ với mọi số m, n thuộc tập hợp số nguyên dương N^*.*

Lời giải. (Theo cách giải của *Phạm Thành Trung*, 11T, THPT Nguyễn Trãi, **Hải Dương** và nhiều bạn khác).

Giả sử $f(n_1) = f(n_2)$ với $n_1, n_2 \in \mathbf{N}^*$. Khi đó

$f(m + f(n_1)) = f(m + f(n_2))$

$\Leftrightarrow n_1 + f(m+2001) = n_2 + f(m+2001)$ với mọi m

$\Leftrightarrow n_1 = n_2$. Vậy f là đơn ánh.

Sử dụng phương trình hàm ở đề bài ta có :

$f(f(1) + f(n)) = n + f(f(1) + 2001)$

$= n + 1 + f(2001 + 2001)$

$= f(f(n+1) + 2001)$. Từ đó

$f(f(1) + f(n)) = f(f(n+1) + 2001)$

Do f là đơn ánh nên

$$f(1) + f(n) = f(n+1) + 2001$$

Bằng quy nạp toán học suy ra $f(n) = an + b$.

Thay vào điều kiện đề bài ta xác định được $a = 1, b = 2001$

Vậy $f(n) = n + 2001, n \in \mathbf{N}^*$.

Nhận xét. Đa số các bạn gửi bài đến đều cho đáp số đúng. Tuy nhiên nhiều bạn tìm trong lớp các đa thức không phù hợp với yêu cầu bài ra. Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Vĩnh Phúc : *Nguyễn Xuân Trường*, 12A1, *Hoàng Xuân Quang*, 12A, *Nguyễn Duy Hưng*, 12B2, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Thị Thùy Dương*, 11S, THPT NK Hàn Thuyên ; **Hà Nội:** *Phạm Minh Tuấn*, 11B, *Nguyễn Hữu Bình Minh* và *Lê Hùng Việt Bảo*, 10A, *Bùi Mạnh Cường*, 11B, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội ; **Ninh Bình:** *Trần Minh Mẫn*, 11T, THPT Lương Văn Tụy **Nam Định :** *Nguyễn Quốc Khánh*, 9A1, *Nguyễn Đức Tâm*, 9A7, THCS Trần Đăng Ninh ; **Hải Dương :** *Nguyễn Xuân Hòa*, 11T, *Nguyễn Anh Ngọc*, 11A1, *Phạm Việt Hải*, 10A4, THPT Hồng Quang, *Nguyễn Thế Lộc*, 11T, THPT Nguyễn Trãi ; **Thanh Hóa :** *Bùi Hồng Quân*, *Nguyễn Mạnh Hà* 11T1, *Lưu Phù Chanh*, *Nguyễn Minh Công* , 12T, THPT Lam Sơn ; **Nghệ An :** *Vũ Minh Triều* và *Lê Bảo Trung*, 10A2, THPT Phan Bội Châu; **Đồng Nai:** *Hà Đăng Khôi*, *Lê Trung Hiếu*, 12T, THPT chuyên Lương Thế Vinh; **Khánh Hòa:** *Nguyễn Hoa Cương*, 12T, *Nguyễn Tiến Việt*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bình Định:** *Trần Quang Minh*, *Nguyễn Quang Thắng*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn ; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Văn Thắng*, 11T, *Trần Thái An Nghĩa*, 12T2, THPT Lê Khiết ; **Tp. HCM:** *Trần Anh Hoàng*, *Trần Vĩnh Hưng*, 12T, *Trần Võ Huy*, 11T, ĐHKHTN - ĐHQG Tp. HCM ; **Phú Yên:** *Ngô Thanh Nguyên*, 11T, THPT Lương Văn Chánh ; **Đà Nẵng:** *Huỳnh Anh Vũ*, 11A1, THPT Lê Quý Đôn ; **Quảng Trị:** *Hồng Ngọc Bình*, 12T, THPT Lê Quý Đôn ; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Võ Vĩnh Lộc*, 11T, THPT Sa Đéc ; **Cần Thơ:** *Nguyễn Minh Luân*, 8A, THCS Nguyễn Việt Hồng.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T8/291. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $x^2(y - z) + y^2(z - y) + z^2(1 - z)$ trong đó x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $0 \le x \le y \le z \le 1$*

Lời giải. (của bạn *Nguyễn Đức Tâm*, 9A7, THCS Trần Đăng Ninh, **Nam Định** và một số bạn khác).

Ta có

$x^2(y\text{-}z) + y^2(z\text{-}y) + z^2(1\text{-}z)^2 \le$

$\le 0 + \frac{1}{2}(y.y(2z\text{-}2y) + z^2(1\text{-}z) \le$

$$\le \frac{1}{2}.\left(\frac{y + y + 2z - 2y}{3}\right)^3 + z^2(1 - z)$$

(theo BĐT Côsi)

$$= z^2\left(\frac{4}{27}.z + 1 - z\right) = z^2.\left(1 - \frac{23}{27}z\right)$$

$$= \left(\frac{54}{23}\right)^2.\left(\frac{23}{54}.z\right)\left(\frac{23}{54}.z\right)\left(1 - \frac{23}{27}.z\right)$$

$$\le \left(\frac{54}{23}\right)^2.\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{108}{529}$$ (lại theo BĐT Côsi)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{23}{54}.z = 1 - \frac{23}{27}z$, $y = 2z - 2y$ và $x = 0$, tức là $z = \frac{18}{23}$, $y = \frac{12}{23}$ và $x = 0$.

Nhận xét. Có 222 bạn gửi lời giải tới Tòa soạn, đại đa số các bạn giải đúng. Vẫn với phương pháp giải như trên một số bạn đã cố gắng phát biểu và giải bài toán cho trường hợp n số. Các bạn sau có lời giải tốt :

Nam Định: *Nguyễn Quốc Khánh, Vũ Khắc Kỳ, Phạm Duy Hiển*, 9A7, THCS Trần Đăng Ninh ; **Thanh Hóa :** *Nguyễn Hải Phương*, 8H, THCS Cù Chính Lan ; **Tp. Hồ Chí Minh:** *Trần Hải Đăng*, 7A9, THCS Trần Đại Nghĩa; **Cần Thơ:** *Nguyễn Minh Luân*, 8A, THCS Nguyễn Việt Hồng, v.v...

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T9/291. *Gọi p, R và r lần lượt là nửa chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của một tam giác ABC. Chứng minh rằng ABC là tam giác đều khi và chỉ khi* $p^2 = 6R^2 + 3r^2$ (*)

Lời giải 1. Gọi S là diện tích tam giác ABC, ta có (sử dụng các công thức tính diện tích) :

$p^2r^2 = S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$
$= p[p^3 - p^2(a+b+c) + p(bc+ca+ab) - abc]$
$= p^2[(bc+ca+ab) - p^2 - 4Rr]$

Từ đó ta được hệ thức :

$bc + ca + ab - p^2 = r^2 + 4Rr = r(4R + r)$

hay là : $4p^2 = (a+b+c)^2 =$
$= 2(a^2 + b^2 + c^2) + 4r(4R + r)$ (1)

Mặt khác, lại có :

$$0 \le \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$$

Suy ra : $a^2 + b^2 + c^2 \le 9R^2$ (2)

Từ (1) và (2) ta được :

$$4p^2 \le 18R^2 + 4r^2 + 16Rr$$

hay là :

$2p^2 \le 12R^2 + 6r^2 - (3R^2 + 4r^2 - 8Rr)$
$= 12R^2 + 6r^2 - (R - 2r)(3R - 2r)$ (3)

Lại vì $R \ge 2r$ nên $(R - 2r)(3R - 2r) \ge 0$ (4)

Từ (3) và (4) ta được BĐT sau :

$$p^2 \le 6R^2 + 3r^2 \quad (5)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi (2) và (4) đều là đẳng thức, nghĩa là $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ và $R = 2r$. Vậy hệ thức (*) xảy ra khi và chỉ khi ΔABC là đều.

Lời giải 2. Ta có :

$36R^2 + 3r^2 = (16R^2 + r^2) + (2R^2 + 8r^2)$
$\ge 16R^2 + r^2 + 8Rr = (4R + r)^2$ (6)

Mặt khác, lại có :

$$4R + r = r_a + r_b + r_c = p\left(\mathrm{tg}\frac{A}{2} + \mathrm{tg}\frac{B}{2} + \mathrm{tg}\frac{C}{2}\right) \quad (7)$$

$$\mathrm{tg}\frac{A}{2} + \mathrm{tg}\frac{B}{2} + \mathrm{tg}\frac{C}{2} \ge \sqrt{3} \quad (8)$$

Từ (6), (7) và (8) ta cũng được BĐT (5) như đã chỉ ra trong lời giải 1.

Dấu đẳng thức xảy ra trong (5) khi và chỉ khi cũng xảy ra ở (6) và (8), nghĩa là $R = 2r$ và $\mathrm{tg}\frac{A}{2} = \mathrm{tg}\frac{B}{2} = \mathrm{tg}\frac{C}{2}$, và lúc đó ΔABC là đều.

Lời giải 3. Sử dụng các hệ thức lượng giác quen thuộc (trong tam giác) :

$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C = 1$

$r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$, $a = 2R\sin A$, v.v...

Biến đổi hai vế của (*) dưới dạng lượng giác, ta được :

(*) $\Leftrightarrow R^2(\sin A + \sin B + \sin C)^2 =$

$= 6R^2 + 48R^2\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}$

$\Leftrightarrow 16 - \cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2} =$

$= 6 + 48\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}$

$\Leftrightarrow (1 + \cos A)(1 + \cos B)(1 + \cos C)$
$= 3 + 3(1 - \cos A)(1 - \cos B)(1 - \cos C)$

$\Leftrightarrow 4\cos A\cos B\cos C - 2(\cos A\cos B + \cos B\cos C + \cos C\cos A) + 4(\cos A + \cos B + \cos C) - 5 = 0$

$\Leftrightarrow 4(\cos A + \cos B + \cos C) - (\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C) - (\cos A + \cos B + \cos C)^2 - 3 = 0$

$\Leftrightarrow [(\cos A + \cos B + \cos C)^2 - 3(\cos A + \cos B + \cos C) + \frac{9}{4}] + (\cos^2 A - \cos A + \frac{1}{4}) + (\cos^2 B - \cos B + \frac{1}{4}) + (\cos^2 C - \cos C + \frac{1}{4}) = 0$

$$\Leftrightarrow \left(\cos A + \cos B + \cos C - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\cos A - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\cos B - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\cos C - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \quad (9)$$

Dấu đẳng thức ở (9), cũng tức là ở (*) xảy ra khi và chỉ khi :

$$\cos A = \cos B = \cos C = \frac{1}{2} \Leftrightarrow A = B = C = 60^\circ$$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ là đều.

Nhận xét. 1) Lời giải 1 chỉ sử dụng đơn thuần kiến thức hình học cơ bản đã biết ở lớp 10. Lời giải 2 tuy có ngắn gọn hơn cả nhưng có sử dụng một BĐT lượng giác (8) trong tam giác. Cả hai lời giải này đều dẫn đến thiết lập BĐT (5) đối với tam giác bất kì. Đó là phương pháp tư duy chuẩn mực cần thiết trong việc học toán.

Lời giải 3 hoàn toàn dùng lượng giác, đòi hỏi kĩ năng biến đổi đồng nhất đại số và lượng giác thành thạo. Cách này tuy không thiết lập được một BĐT (5) tổng quát nhưng việc biện luận để xảy ra (9), cũng tức là để có (*) lại rất đơn giản.

2) Một số bạn cho rằng hệ thức (1) là một hệ thức quen thuộc nên không nêu chứng minh nhưng hệ thức này không phải là kiến thức cơ bản có trong sách giáo khoa nên không chắc tất cả các bạn đều quen dùng. Có bạn đã đề xuất và giải đúng BĐT tổng quát hóa từ đề toán đã cho :

$$\left(3\sqrt{3}r\right)^n + 8\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}R\right)^n \geq 9p^n$$

Tuy nhiên, BĐT tổng quát này không có ý nghĩa hình học gì nên các bạn đừng mất quá nhiều thời giờ vào việc như thế.

3) Tòa soạn nhận được gần 400 bài giải của bài toán, hầu hết giải đúng nhưng đa số thiên về phương pháp lượng giác, một số bạn cho nhiều cách giải. Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Vĩnh Phúc : *Khổng Đức Kiên*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Hải Dương :** *Nguyễn Thành Nam*, 11T, *Lương Đức Trung*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Trãi ; **Hòa Bình:** *Nguyễn Lâm Tuyền*, 12T, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ ; **Thanh Hóa :** *Bùi Hồng Quân, Mai Quang Thành*, 11T, THPT Lam Sơn ; **Nghệ An :** *Trần Đình Trung*, 11AT, PTCT ĐH Vinh ; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Huy Cung*, 12T2, THPT chuyên Lê Khiết, **Đồng Nai:** *Nguyễn Hải Phong*, 12T, THPT chuyên Lương Thế Vinh; **Tp. Hồ Chí Minh:** *Trần Thọ Huy Anh*, 11T, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

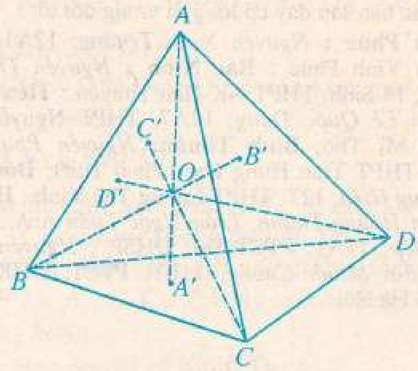
NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài T10/291. *Tứ diện ABCD nội tiếp mặt cầu tâm O bán kính R sao cho điểm O nằm trong tứ diện. Các đường thẳng OA, OB, OC, OD cắt các mặt BCD, CDA, DAB, ABC tương ứng ở A', B', C', D'. Chứng minh rằng*

$$AA' + BB' + CC' + DD' \geq \frac{16}{3}R$$

Lời giải. (Theo bạn *Nguyễn Anh Nguyên*, 11T, THPT Nguyễn Trãi, Hải Dương)

Đặt V, V_A, V_B, V_C, V_D là thể tích của tứ diện $ABCD$, $OBCD$, $OCDA$, $ODAB$, $OABC$. Ta thấy :



$$V_A + V_B + V_C + V_D = V$$

$$\Rightarrow \frac{V_A}{V} + \frac{V_B}{V} + \frac{V_C}{V} + \frac{V_D}{V} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} + \frac{OD'}{DD'} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{AA'-OA}{AA'} + \frac{BB'-OB}{BB'} + \frac{CC'-OC}{CC'} + \frac{DD'-D}{DD'} = 1$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{R}{AA'} + 1 - \frac{R}{BB'} + 1 - \frac{R}{CC'} + 1 - \frac{R}{DD'} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{AA'} + \frac{1}{BB'} + \frac{1}{CC'} + \frac{1}{DD'} = \frac{3}{R} \qquad (1)$$

Theo BĐT Côsi ta có :

$$\begin{cases} AA' + BB' + CC' + DD' \geq 4\sqrt[4]{AA'.BB'.CC'.DD'} \\ \dfrac{1}{AA'} + \dfrac{1}{BB'} + \dfrac{1}{CC'} + \dfrac{1}{DD'} \geq 4\sqrt[4]{\dfrac{1}{AA'}.\dfrac{1}{BB'}.\dfrac{1}{CC'}.\dfrac{1}{DD'}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (AA' + BB' + CC' + DD')\left(\frac{1}{AA'} + \frac{1}{BB'} + \frac{1}{CC'} + \frac{1}{DD'}\right)$$

$$\geq 16 \qquad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra :

$$\Rightarrow AA' + BB' + CC' + DD' \geq \frac{16}{3}R \qquad (3)$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow AA' = BB' = CC' = DD'$

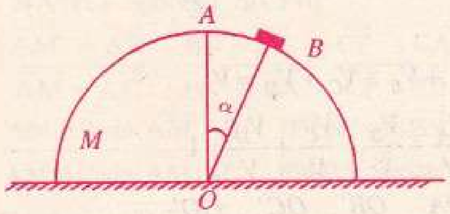
$\Leftrightarrow OA' = OB' = OC' = OD'$

$\Leftrightarrow V_A = V_B = V_C = V_D \Leftrightarrow O$ là trọng tâm của tứ diện $ABCD \Leftrightarrow$ Tứ diện $ABCD$ gần đều.

Nhận xét. 1) Đây là bài toán dễ, nhiều bạn tham gia giải. Nói chung các bạn đều chứng minh được BĐT (3). Tuy nhiên nhiều bạn không tìm điều kiện xảy ra đẳng thức hoặc có tìm nhưng điều kiện tìm được lại sai. Rất nhiều bạn cho rằng đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tứ diện đều !!

2) Các bạn sau đây có lời giải tương đối tốt :

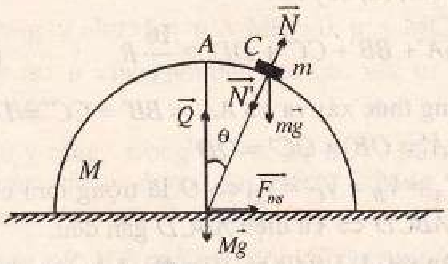
Vĩnh Phúc : *Nguyễn Xuân Trường*, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Bắc Ninh :** *Nguyễn Thị Thùy Dương*, 11 Sinh, THPT NK Hàn Thuyên ; **Tiền Giang:** *Nguyễn Lê Quốc Dũng*, 12A7, THPT Nguyễn Đình Chiểu, Mĩ Tho; **Bình Thuận:** *Nguyễn Phước Tài*, 11A2, THPT Trần Hưng Đạo, Phan Thiết; **Đồng Nai:** *Lê Trung Hiếu*, 12T, THPT Lương Thế Vinh ; **Hà Nội :** *Nguyễn Hoàng Thanh, Trần Ngọc Tuấn Anh, Nguyễn Chí Hiệp*, 11A1, PTCT-Tin, ĐHSP ; *Nguyễn Thành Nam, Bùi Mạnh Cường*, 11BT, PTCT, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội.



NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/291. *Một bán cầu khối lượng M đặt trên mặt phẳng nằm ngang. Một vật nhỏ* $m = \dfrac{M}{10}$ *bắt đầu trượt không ma sát, không vận tốc từ đỉnh A của bán cầu. (Hình vẽ). Khi vật trượt đến vị trí B với* $\widehat{AOB} = \alpha = 10^o$ *thì bán cầu bắt đầu trượt trên mặt phẳng nằm ngang. Tìm hệ số ma sát giữa bán cầu và mặt phẳng nằm ngang.*

Lời giải. Các lực tác dụng lên vật m : trọng lực $m\vec{g}$, phản lực $\vec{N}$ do bán cầu tác dụng lên vật m. Xét vật m tại vị trí C bất kì trên cung AB (khi bán cầu chưa trượt), với $\widehat{AOC} = \theta$. Chiếu phương trình của định luật II Niutơn lên phương OC, ta có $\dfrac{mv^2}{R} = mg\cos\theta - N$ (1)



Mặt khác áp dụng định luật bảo toàn cơ năng ta có : $\dfrac{mv^2}{2} = mgR(1 - \cos\theta)$ (2)

Từ (1) và (2) rút ra :

$$N = mg(3\cos\theta - 2) \quad (3)$$

Các lực tác dụng lên vật M : trọng lực $M\vec{g}$; lực $\vec{N'}$ do vật m tác dụng ($N' = N$) ; phản lực vuông góc $\vec{Q}$ và lực ma sát $\vec{F_{ms}}$ do mặt nằm ngang tác dụng ; khi vật M đứng yên F_{ms} là lực ma sát nghỉ. Chiếu phương trình của định luật II Niutơn lên trục thẳng đứng và trục nằm ngang ta được : $Q = Mg + N'\cos\theta = Mg + N\cos\theta$ (4)

và $F_{ms} = N'\sin\theta = N\sin\theta$ (5)

Khi vật m đến B, bán cầu bắt đầu trượt, nghĩa là $\theta = \alpha$ thì $F_{ms} = kQ$ (6), với k là hệ số ma sát. Từ (3), (4), (5) và (6) tìm được

$$k = \frac{m(3\cos\alpha - 2)\sin\alpha}{M + m(3\cos\alpha - 2)\cos\alpha}$$

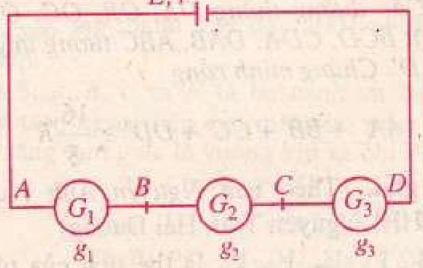
Vì α là góc nhỏ nên có thể coi $\cos\alpha \approx 1$, $\sin\alpha \approx \alpha$ (rad). Thay số ta được $k \approx 0{,}016$.

Nhận xét. Các bạn có lập luận chặt chẽ và kết quả đúng :

Hà Nội : *Nguyễn An Huy*, 12D1, THPT Chu Văn An; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Văn Thắng*, 11T, THPT Lê Khiết; **Bắc Ninh :** *Lê Xuân Hùng*, 12 Lí, THPT NK Hàn Thuyên ; **Cà Mau:** *Trần Trọng Nghĩa*, 12A1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển ; **Thanh Hóa :** *Lê Văn Dương*, 12A1, THPT Hậu Lộc I ; **Tiền Giang:** *Nguyễn Đặng Tấn Khoa*, 11 Lí, THPT chuyên Tiền Giang ; **Nam Định :** *Nguyễn Tuấn Anh*, 11 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong ; **Nghệ An:** *Trần Quang Vũ*, 11A7, THPT chuyên Phan Bội Châu, Vinh, *Hồ Bá Phúc*, 12E, THPT Quỳnh Lưu ; **Vĩnh Phúc :** *Lê Văn Quỳnh*, 11A3, *Trần Bá Bách*, 12A2, *Nguyễn Minh Kiên*, 12A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Hà Tĩnh:** *Đặng Quốc Dũng, Nguyễn Xuân Đức, Lê Đức Đạt, Lê Hữu Hà*, 11 Lí, THPT NK Hà Tĩnh.

MAI ANH

Bài L2/291. *Cho mạch điện như hình dưới. Nguồn điện là 1 ắcquy (Sđđ = 2,2V ; điện trở trong r). Ba điện kế có điện trở* g_1, g_2, g_3 *đều khác 0.*



(Xem tiếp trang 9)

BẠN CÓ BIẾT

PHÂN SỐ AI CẬP

XUÂN ĐÀI
(Tp. Hồ Chí Minh)

Các bạn đã học phân số từ tiểu học và các bạn luôn gặp phân số trong môn toán, trong các môn học khác và trong đời sống. Nhưng chắc các bạn không ngờ có một bài toán về phân số trông khá đơn giản, được nêu ra cách đây hàng ngàn năm mà đến nay vẫn không hẳn là bài toán dễ với chúng ta, hơn thế nữa từ đó đã nảy sinh bài toán mới chưa có lời giải. Đó là bài toán *Phân số Ai Cập.*

Cách đây gần 4000 năm, người Ai Cập đã sử dụng rộng rãi phân số dạng $\frac{1}{n}$ (n là số nguyên dương) ; họ luôn viết các phân số (trừ phân số $\frac{2}{3}$) thành tổng của các phân số có dạng $\frac{1}{n}$ với các số n khác nhau.. Vì vậy các phân số dạng $\frac{1}{n}$ gọi là phân số Ai Cập. Ví dụ :

$$\frac{2}{73}=\frac{1}{60}+\frac{1}{219}+\frac{1}{365}\ ;\quad \frac{3}{11}=\frac{1}{6}+\frac{1}{11}+\frac{1}{66}$$

Cách viết này đến nay vẫn rất cần thiết để giải nhiều bài toán trong toán học và vật lí học.

Năm 1880, nhà toán học Anh J. J. Sylvester (1814–1897) chứng minh rằng : *Mọi phân số thực thụ* $\frac{a}{b}$ (tức là phân số có tử số nhỏ hơn mẫu số, $a < b$) *đều có thể viết dưới dạng tổng của các phân số Ai Cập khác nhau.*

Chứng minh khá đơn giản bằng quy nạp.

Thực vậy, hiển nhiên định lí đúng với $a = 1$.

Giả sử định lí đúng với mọi phân số thực thụ có tử số nhỏ hơn a. Gọi $\frac{1}{q}$ là phân số Ai Cập lớn nhất trong các phân số nhỏ hơn $\frac{a}{b}$, tức là

$$\frac{1}{q}<\frac{a}{b}<\frac{1}{q-1}$$

Suy ra $0 < aq - b < a$ và $\frac{a}{b}=\frac{1}{q}+\frac{aq-b}{bq}$

Theo giả thiết quy nạp thì $\frac{aq-b}{bq}$ là tổng của các phân số Ai Cập khác nhau, trong các số hạng đó không có phân số nào bằng $\frac{1}{q}$ được vì nếu trái lại sẽ dẫn đến $b \le aq - b < a$. Do vậy $\frac{a}{b}$ được viết thành tổng của các phân số Ai Cập khác nhau, đpcm.

Phép chứng minh trên đây cho ta một *thuật toán* để viết mọi phân số thực thụ $\frac{a}{b}$ dưới dạng tổng của nhiều phân số Ai Cập. Ví dụ : cho phân số $\frac{3}{7}$. Lấy số nguyên nhỏ nhất mà lớn hơn $\frac{7}{3}$ được $\frac{9}{3}=3$, (ta gọi là làm tròn tăng số $\frac{7}{3}$ được 3), từ đó $\frac{3}{7}-\frac{1}{3}=\frac{2}{21}$. Tiếp tục làm tròn tăng $\frac{21}{2}$ được $\frac{22}{2}=11$, ta có :

$$\frac{2}{11}-\frac{1}{11}=\frac{1}{231}\ \text{do đó}\ \frac{3}{7}=\frac{1}{3}+\frac{1}{11}+\frac{1}{231}$$

Chú ý rằng một phân số thực thụ có thể viết nhiều cách dưới dạng tổng của các phân số Ai Cập khác nhau. Chẳng hạn ta cũng có :

$$\frac{2}{9}=\frac{1}{6}+\frac{1}{18}=\frac{1}{5}+\frac{1}{45}\ ;\quad \frac{3}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{28}\ ;$$

Những tổng này có thể tìm ra theo phương pháp nào, bạn thử suy nghĩ xem ? Và có thể viết cách khác nữa các phân số $\frac{2}{9},\frac{3}{7}$ dưới dạng tổng của các phân số Ai Cập khác nhau không ?

Gần đây, nhà toán học Hungary P. Erdös nêu ra một giả thuyết : "Nếu n là số tự nhiên lớn hơn 4 thì $\frac{4}{n}$ có thể viết dưới dạng tổng của ba phân số Ai Cập khác nhau".

Giả thuyết chưa được chứng minh, mà cũng chưa bác bỏ được. Chỉ mới thấy rằng giả thuyết đúng trong một số trường hợp, chẳng hạn như :

$$\frac{4}{3m+2}=\frac{1}{m+1}+\frac{1}{3m+2}+\frac{1}{(m+1)(3m+2)}$$

$$\frac{4}{4m+3}=\frac{1}{m+2}+\frac{1}{(m+1)(m+2)}+\frac{1}{(m+1)(4m+3)}$$

(Xem tiếp trang 23)

Diễn đàn DẠY VÀ HỌC TOÁN

Lại bàn về chuyện TIẾP XÚC CỦA HAI ĐỒ THỊ

LÊ THỐNG NHẤT

Sau khi đăng bài "Bài toán tiếp tuyến khi không dùng phương pháp nghiệm kép" trên TH&TT số 294, Tòa soạn nhận được nhiều ý kiến hoan nghênh của đông đảo bạn đọc vì vấn đề "tiếp xúc" đang là nỗi "bức xúc" của nhiều giáo viên và học sinh THPT. Trước đó, có ý kiến cho rằng : Nếu bỏ "phương pháp nghiệm kép" thì một số bài toán trước đây dùng phương pháp này sẽ phải ... bó tay !

Chúng tôi xin bàn thêm về kĩ thuật giải một số bài toán này, qua thư yêu cầu của nhiều bạn.

Bài toán 1. *Tìm m để đồ thị hàm số*

$$y = (x+2)(x^2 - mx + m^2 - 3)$$

tiếp xúc với trục hoành

Lời giải. Đồ thị hàm số tiếp xúc với trục hoành $\Leftrightarrow$ Hệ phương trình ẩn x sau đây có nghiệm : $\begin{cases} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases}$ (I)

Ta thấy hệ (I) có thể viết về dạng :

$$\begin{cases} (x+2)(x^2 - mx + m^2 - 3) = 0 \\ (x^2 - mx + m^2 - 3) + (x+2)(2x - m) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x + 2 = 0 \\ x^2 - mx + m^2 - 3 = 0 \end{cases} & \text{(II)} \\ \begin{cases} x^2 - mx + m^2 - 3 = 0 \\ (x+2)(2x - m) = 0 \end{cases} & \text{(III)} \end{array}\right.$$

Nếu đặt $t(x) = x^2 - mx + m^2 - 3$ thì hệ (I) có nghiệm $\Leftrightarrow$ Hệ (II) hoặc (III) có nghiệm $\Leftrightarrow t(x)$ có nghiệm $x = -2$ hoặc $x = \dfrac{m}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t(-2) = 0 \\ t\left(\dfrac{m}{2}\right) = 0 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2 + 2m + 1 = 0 \\ \dfrac{3}{4}m^2 - 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = \pm 2 \end{array}\right.$$

Chú ý. Nếu lưu ý điều kiện $t\left(\dfrac{m}{2}\right) = 0$ cũng chính là điều kiện để $t(x)$ có nghiệm kép thì lời giải trên đã "gặp" lời giải trước đây.

Bài toán 2. *Tìm trên đường thẳng $y = 4$ tất cả các điểm mà từ đó kẻ được 2 tiếp tuyến tới đồ thị $y = \dfrac{x^2}{x-1}$ và hai tiếp tuyến lập với nhau góc 45^o.* (Đây là một bài trong đề thi tuyển sinh của ĐHQG, HVNH năm 2001 và tương tự một bài trong đề 17 của Bộ Đề thi tuyển sinh).

Lời giải. *Cách 1.* Nhận xét $y = 4$ chính là một tiếp tuyến của đồ thị nên các điểm cần tìm chính là giao điểm của tiếp tuyến có hệ số góc bằng 1 hoặc -1 với đường thẳng $y = 4$. Phương trình $f'(x) = 1$ vô nghiệm, phương trình $f'(x) = -1$ có 2 nghiệm $x = 1 \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ và từ đó có 2 tiếp tuyến hệ số góc bằng 1 là $y = -x + 3 \pm 2\sqrt{2}$. Xét giao của các tiếp tuyến này với đường $y = 4$ ta có các điểm cần tìm với hoành độ là $x = -1 \pm 2\sqrt{2}$ (Đây chính là đáp án của kì thi).

* Nếu *không biết y= 4 là một tiếp tuyến* và *không được công nhận* : từ một điểm chỉ kẻ được không quá 2 tiếp tuyến đến đồ thị, thì rõ ràng là không "nghĩ ra" được và không thể "làm" như cách 1.

Cách 2. Gọi $N(n\,;\,4)$ là điểm thuộc đường thẳng $y = 4$ thì phương trình đường thẳng đi qua N là $y = k(x-n) + 4$.

Đường thẳng này là tiếp tuyến của đồ thị $y = f(x) \Leftrightarrow$ Hệ $\begin{cases} f(x) = k(x-n) + 4 \\ f'(x) = k \end{cases}$ có nghiệm.

Viết hệ trên về dạng

$$\begin{cases} (x-1) + 2 + \dfrac{1}{x-1} = k(x-1) + 4 - k(n-1) \\ 1 - \dfrac{1}{(x-1)^2} = k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{(x-1)^2} + [k(n-1) - 2].\dfrac{1}{x-1} + (1-k) = 0 \\ \dfrac{1}{(x-1)^2} = 1 - k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{(x-1)^2} = 1 - k & (1) \\ [k(n-1) - 2]\dfrac{1}{x-1} = 2k - 2 & (2) \end{cases}$$

Từ hệ ta có $k \neq 1 \Rightarrow k(n-1) - 2 \neq 0$

Từ (2) ta có $\frac{1}{x-1} = \frac{2k-2}{[k(n-1)-2]}$

Thay vào (1) thì hệ có nghiệm $\Leftrightarrow$

$$\left[\frac{2k-2}{[k(n-1)-2]}\right]^2 = 1-k \text{ với } k \neq 1$$

Với $k \neq 1$, điều kiện trên trở thành :

$$4(1-k) = [k(n-1)-2]^2$$

$$\Leftrightarrow k[k(n-1)^2 - 4(n-2)] = 0$$

Phương trình này có nghiệm $k = 0$ với mọi n tức là từ N luôn kẻ được tiếp tuyến $y = 4$ tới đồ thị. Nhận xét : $t(k) = k(n-1)^2 - 4(n-2)$ có không quá 1 nghiệm đối với ẩn k nên từ N kẻ được 2 tiếp tuyến lập với nhau góc 45^o khi và chỉ khi $t(k)$ có nghiệm $k = -1$ (vì $k \neq 1$) $\Leftrightarrow t(-1) = 0 \Leftrightarrow n^2 + 2n - 7 = 0 \Leftrightarrow n = -1 \pm 2\sqrt{2}$

Ta có 2 điểm $N_1(-1-2\sqrt{2}\,;\ 4)$ và $N_2(-1+2\sqrt{2}\,;\ 4)$ thỏa mãn bài toán.

Bài toán 3. *Tìm tiếp tuyến cố định của họ đồ thị* $y = \frac{(m+1)x+m}{x+m}$ *với* $m \neq 0$

Lời giải. Ta có $y = ax + b$ là tiếp tuyến cố định của họ đồ thị $\Leftrightarrow$ Hệ phương trình

$\begin{cases} f(x) = ax+b \\ f'(x) = a \end{cases}$ có nghiệm với mọi giá trị $m \neq 0$.

Viết hệ về dạng :

$$\begin{cases} m+1-\dfrac{m^2}{(x+m)} = ax+b \\ \dfrac{m^2}{(x+m)^2} = a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+1-\dfrac{m^2}{(x+m)} = a(x+m)+(b-am) \\ \dfrac{m^2}{(x+m)^2} = a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m^2}{(x+m)^2} + [(b-1)-m(a+1)]\dfrac{1}{x+m} + a = 0 \\ \dfrac{m^2}{(x+m)^2} = a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m^2}{(x+m)^2} = a & (1) \\ [(b-1)-m(a+1)]\dfrac{1}{x+m} = -2a & (2) \end{cases}$$

Từ (1) và $m \neq 0$ ta có $a > 0$, kết hợp với (2) thì $(b-1) - m(a+1) \neq 0$

Từ (2) ta có $\frac{1}{x+m} = \frac{-2a}{[(b-1)-m(a+1)]}$

Thay vào (1) sẽ được :

$$\frac{4a^2m^2}{[(b-1)-m(a+1)]^2} = a \qquad (3)$$

Với $a > 0$ thì (3) trở thành

$$4am^2 = [(b-1) - m(a+1)]^2$$

$$\Leftrightarrow m^2(a-1)^2 - 2m(b-1)(a+1) + (b-1)^2 = 0$$

Phương trình này thỏa mãn với mọi $m \neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 = 0 \\ -2(b-1)(a+1) = 0 \\ (b-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 1.$$

Do đó : Họ đồ thị có duy nhất tiếp tuyến cố định $y = x + 1$.

Tòa soạn tiếp tục mong nhận được ý kiến trao đổi và những băn khoăn của các bạn về vấn đề này. Cảm ơn sự tham gia của các bạn.

PHÂN SỐ AI CẬP (Tiếp trang 21)

$$\frac{4}{8m+5} = \frac{1}{2(m+1)} + \frac{1}{2(m+1)(3m+2)} + \frac{1}{2(3m+2)(8m+5)}$$

Bạn hãy kiểm tra các đẳng thức trên và có thể tìm những đẳng thức khác minh họa cho giả thuyết này chăng ?

Người ta thấy rằng để chứng minh *giả thuyết Erdös*, chỉ cần chứng minh rằng : "Nếu p là số nguyên tố có dạng $24m + 1$ thì $\frac{4}{p}$ là tổng của ba phân số Ai Cập khác nhau".

Để hiểu rõ hơn về phân số Ai Cập, bạn hãy làm một số bài tập sau :

1. Viết phân số $\frac{13}{14}$ dưới dạng tổng của các phân số Ai Cập khác nhau.

2. Chứng minh rằng $\frac{8}{11}$ không thể viết dưới dạng tổng của ít hơn 4 phân số Ai Cập khác nhau.

3. Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố thì $\frac{2}{p}$ có thể viết một cách duy nhất dưới dạng tổng của hai phân số Ai Cập khác nhau.

Kết quả

CUỘC CHƠI ĐẦU THIÊN NIÊN KỶ

Tiến sĩ Nguyễn Minh Hà cười sung sướng khi thấy bạn Nguyễn Văn Tâm, số nhà 52 ấp I, thị trấn Hộ phòng, Giá Rai, Bạc Liêu đoán người trong ảnh mới 27 tuổi ! TS. Nguyễn Minh Hà xin trao quà riêng cho bạn Tâm. Thực ra, ảnh đó chụp năm 1998, khi TS 43 tuổi.

Câu lạc bộ xin trao thưởng cho 3 bạn :

1) *Nguyễn Mạnh Quân*, tiểu khu 3, thị trấn Neo, Yên Dũng, Bắc Giang.

2) Dương Đức Kiên, 11A2, THPT Yên Lạc 2, Vĩnh Phúc ;

3) *Nguyễn Thị Tâm*, 11A1, THPT Yên Dũng I, Bắc Giang.

Cảm ơn các bạn và mời các bạn tham gia cuộc chơi mới "Ai biết nhiều hơn ?". Mỗi kì có 5 giải thưởng cho 5 bạn nhanh nhất, tài trí nhất ! Nào ! Hỡi các hội viên hãy chơi thật hết mình nhé !

CLB

Cuộc chơi mới đây !

AI BIẾT NHIỀU HƠN ?

Suốt năm 2002, CLB xin mời các bạn tham gia cuộc chơi "Ai biết nhiều hơn ?" gồm 12 kì thi tài rất thú vị. Mỗi kì, CLB sẽ thưởng cho 5 bạn giỏi nhất và nhanh nhất.

Kỳ thứ nhất

TÊN - QUÊ HƯƠNG - NĂM SINH

Ở bảng thống kê dưới đây "hơi bị lộn xộn", bạn hãy điều chỉnh lại cho đúng nhé ! Qua đó, bạn đã giới thiệu với mọi người 5 nhà toán học cùng với quê hương và năm sinh đấy ! (bìa 3)

Nhà toán học	*Quê hương*	*Năm sinh*
Viét (Viète F.)	Anh	1805
Đirichlê (Dirichlet P.)	Pháp	1643
Niutơn (Newton I.)	Đức	1540
Ơle (Euler L.)	Ý	1707
Cácđanô (Cardano G.)	Thụy Sĩ	1501

NGỌC MAI

Kết quả :

BẠN CÓ PHẢI RA TAY KHÔNG ?

Tất cả các bạn đều phát hiện ra cả hai lời giải đều sai vì tưởng rằng :

$$7^{7^7} = \left(7^7\right)^7 = 7^{7\times 7} = 7^{49}$$

Ở lời giải thứ hai lại còn sai thêm khi cho rằng 7^{7^7} có chữ số tận cùng là 7 (thật ra chữ số tận cùng là 3).

Lời giải đúng dựa trên nhận xét : với $k \in N$ thì 7^{4k} có chữ số tận cùng là 1 nên 7^{4k+3} có chữ số tận cùng là 3. Từ đó : $7^{7} \equiv (-1)^7 \pmod 4$.

Tương tự, vì $7^{7^7} \equiv -1 \pmod 4$ nên $7^{7^{7^7}}$ cũng có chữ số tận cùng là 3. Suy ra : $\left(7^{7^{7^7}} - 7^{7^7}\right) \vdots 10$.

Một số bạn giải lại vẫn sai, chẳng hạn cho rằng : 7^{7^7} có chữ số tận cùng là 7 (?).

Một số bạn còn chứng minh được $\left(7^{7^{7^7}} - 7^{7^7}\right) \vdots 7^{7^7}.2400$ nhờ nhận xét $7^{7^7} \equiv 7^7 \pmod 4$ nên đặt $a = 7^7$ thì tồn tại k nguyên dương sao cho $7^{7^7} = 4k + a \Rightarrow$

$$7^{7^{7^7}} - 7^{7^7} = 7^{4k+a} - 7^a = 7^a\left[\left(7^4\right)^k - 1\right] = 7^{7^7}.\left[\left(7^4\right)^k - 1\right]$$

và lưu ý $7^4 - 1 = 2400$.

Xin trao thưởng cho các bạn Trần Kiên Trung, 10A1, khối chuyên Toán- Tin, ĐH Vinh ; Hoàng Lê Duy, 8H, THCS Trần Hưng Đạo, Tx. Quảng Ngãi. Bạn Duy đã nêu kết quả : "Nếu m, $n \in Z$ và cùng chẵn hoặc cùng lẻ thì $\left(7^{7^n} - 7^{7^m}\right) \vdots 10$". Các bạn thử "kiểm tra" nhé !

Tặng thưởng thêm cho bạn *Trịnh Thị Thanh Huyền*, THCS Lang Sơn, Hạ Hòa, Phú Thọ "vì" bài thơ :

Mạo muội mình thử ra tay
Bởi cả hai cách đều sai quá chừng
Bạn ơi ! Đây lũy thừa tầng
Sao đưa vào ngoặc cho lòng thêm đau ?

Cảm ơn tất cả các bạn.

KIHIVI

BĂN KHOĂN ?

Trong cuốn sách "Tuyển tập 250 bài toán đại số. Bồi dưỡng học sinh giỏi toán cấp 2" của tác giả V.Đ.M (In lần thứ 4) có bài toán 234 :

"Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$D = -5x^2 - 2xy - 2y^2 + 14x + 10y - 1$"

Với lời giải như sau :

Ta viết :

$$D = (x^2+2xy+y^2) - (4x^2-14x) - (y^2-10y) - 1$$

$$= \frac{145}{4} - (x+y)^2 - \left(2x - \frac{7}{2}\right)^2 - (y-5)^2$$

$$\Rightarrow D \le \frac{145}{4}. \text{ Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - \dfrac{7}{2} = 0 \\ y - 5 = 0 \end{cases}$$

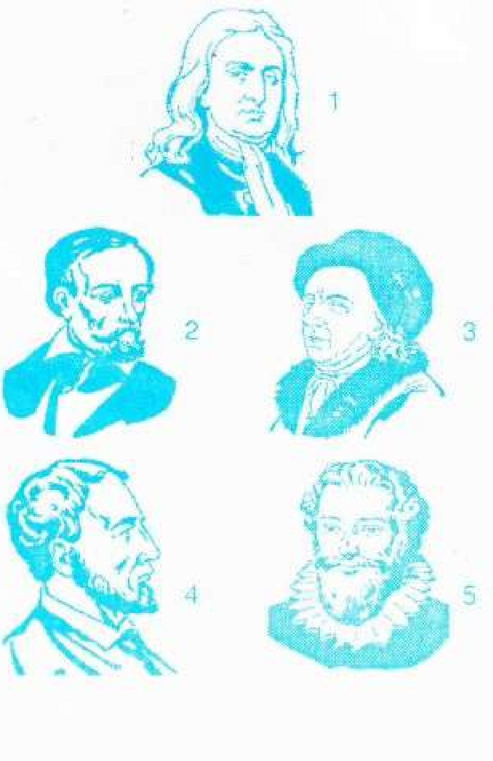
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ x = \dfrac{7}{4} \\ y = 5 \end{cases} \text{ Không thỏa mãn .}$$

Vậy giá trị lớn nhất của D không tồn tại.

Chúng tôi rất băn khoăn về lời giải này vì đã tìm ra một kết quả khác.

Còn các bạn thì sao ?

NGUYỄN VĂN HIẾN
(GV THCS Quỳnh Châu, Quỳnh Phụ, Thái Bình)



Kết quả :

GIÁ TRỊ CỦA HIỆU

Nếu gọi $\overline{abc}$ với $a \neq c$ là số có ba chữ số mà bạn Thăng đã viết lên bảng thì số mà các chữ số viết theo thứ tự ngược lại của số đó là $\overline{cba}$. Giả sử rằng $\overline{xyz} = \overline{abc} - \overline{cba}$. Xảy ra 2 khả năng :

Khả năng thứ nhất : $a > c$, lúc đó $z = 10+c-a$; $b = 9$; $x = a - (c+1)$ do đó $x + z = (10 + c - a) + (a - (c+1)) = 9$

Vậy hiệu đó có dạng $\overline{(9-z)9z}$ nên nếu biết z thì suy được ra hiệu số.

Khả năng thứ hai: nếu $a < c$ (lúc đó $\overline{xyz} < 0$) thì ta xét hiệu $\overline{cba} - \overline{abc}$. Lập luận tương tự như khả năng thứ nhất ta thấy hiệu cần tìm có dạng $-\overline{(9-z)9z}$

Nhận xét. Có không ít các bạn lập luận sai khả năng thứ hai của bài toán (mặc dù đã đề cập đến khả năng này). Một số bạn có nhận xét đúng rằng đề bài toán phải thêm điều kiện, chẳng hạn lấy số lớn trừ đi số bé hoặc phải cho biết kết quả là số âm hay số dương thì Long mới có thể đoán được hiệu đó. Các bạn có lời giải tốt hơn cả là : *Phan Hồng Quân*, 8B, THCS Hải Châu, Tĩnh Gia, Thanh Hóa; *Vũ Thị Hiền*, 10 Văn, THPT Nguyễn Huệ, Hà Đông, Hà Tây ; *Nguyễn Xuân Trung*, 10B3, khối PTCT-T, ĐH Vinh, Nghệ An ; *Trần Quốc Linh*, 12C9, THPT Gò Vấp, Tp. Hồ Chí Minh.

HỒ QUANG VINH

Ô CHỮ MỪNG XUÂN MỚI

Nhân dịp mừng ***xuân mới***, xin mời các bạn hãy chỉ dùng các chữ cái X, U, Â, N, M, Ơ, I để điền vào bảng sau đây, mỗi ô một chữ cái và không có dòng nào, cột nào, đường chéo nào có 2 chữ cái giống nhau

X	U	Â	N	M	Ơ	I
	I	U	Â			
				Â	U	X
	X	Ơ	I			

NGỌC MAI

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

HỘI NGHỊ CỘNG TÁC VIÊN VÀ MỪNG THỌ GIÁO SƯ NGUYỄN CẢNH TOÀN

Sáng 18.12.2001 tại hội trường Nhà xuất bản Giáo dục,Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ đã tổ chức hội nghị Cộng tác viên năm 2001 và mừng thọ GS Nguyễn Cảnh Toàn tròn 75 tuổi.

Về dự có GS TSKH Trần Văn Nhung, Thứ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo ; PGS TS Vũ Dương Thụy, Phó Giám đốc, Tổng biên tập, Bí thư đảng ủy NXB Giáo dục ; GS TSKH Hà Huy Khoái, Viện trưởng Viện Toán học Việt Nam ; TS Tống Đình Quỳ, Phó Tổng thư kí Hội Toán học Việt Nam ; TS Lê Quang Trung, Phó hiệu trưởng trường Đại học Sư phạm Hà Nội, đại diện khoa Toán ĐHSP Hà Nội. Các Ủy viên Hội đồng biên tập, đông đảo các cộng tác viên ở hơn hai chục tỉnh, thành phố đã về dự hội nghị. Tham dự hội nghị có ông Vũ Quang Vinh, Tổng Biên tập báo Nhi đồng, ông Phạm Huy Thuấn, Phó TBT báo Thiếu niên Tiền phong, phóng viên các báo Nhân dân, Sinh viên - Hoa học trò, Hà Nội mới, Phụ nữ Thủ đô và các cán bộ, biên tập viên của Tòa soạn THTT. GS Nguyễn Cảnh Toàn, Tổng biên tập tạp chí THTT đã đọc bản báo cáo hoạt động của THTT năm 2001 và trình bày phương hướng phát triển của Tạp chí năm 2002.

Các đại biểu đã sôi nổi phát biểu ý kiến khen ngợi, động viên và góp ý cho nội dung và hình thức của tạp chí. Các ý kiến tập trung cho rằng ở nước ta môn Toán rất được quan tâm. Báo *Toán học và Tuổi trẻ* cần góp phần xây dựng một văn hóa toán học cho xã hội. Cần làm sao cho học sinh thấy môn Toán hay để các em thích toán. Nên tiếp tục có nhiều bài viết về toán cao cấp cách viết dễ đọc. Nên có các vấn đề mà sinh viên quan tâm. Chú ý về *Phương pháp dạy và học môn toán*, thêm nhiều vấn đề gắn với cuộc sống và gần với chương trình hơn nữa. Việc ra đời Toán Tuổi thơ là đúng hướng vì càng có nhiều ấn phẩm phục vụ tuổi thơ càng tốt. Đã đến lúc cần tăng thêm biên tập viên để 2 tờ báo ngày càng phát triển. Các cộng tác viên cũng lưu ý Tòa soạn làm công tác bạn đọc sâu sát hơn nữa.

PGS TS Vũ Dương Thụy thay mặt NXB Giáo dục, TS Tống Đình Quỳ thay mặt Hội Toán học Việt Nam, TS Lê Quang Trung thay mặt Trường Đại học sư phạm Hà Nội và Khoa Toán của trường đã nồng nhiệt chúc mừng và tặng hoa Nhà giáo Nhân dân GS TSKH Nguyễn Cảnh Toàn, Tổng biên tập tạp chí THTT từ 1964 đến nay nhân dịp Giáo sư tròn 75 tuổi. TSKH Đỗ Đức Thái thay mặt các thế hệ học sinh của trường Đại học Sư phạm Hà Nội nói chung và Khoa Toán nói riêng (nơi GS Nguyễn Cảnh Toàn từng làm Hiệu trưởng và chủ nhiệm) nói lên lòng biết ơn với thầy học của mình. GS Nguyễn Cảnh Toàn thực sự xúc động trong tình cảm ấm áp mà các đồng nghiệp và học trò dành cho mình.

GS TSKH Trần Văn Nhung, Thứ trưởng Bộ GD và ĐT chúc mừng GS TSKH Nguyễn Cảnh Toàn

PGS TS Vũ Dương Thụy, Phó GĐ, Tổng biên tập NXBGD chúc mừng GS TSKH Nguyễn Cảnh Toàn

ISN : 0866-0853
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT97M2
Chế bản tại Tòa soạn
In tại Nhà máy in Diên Hồng, 187B phố Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 1 năm 2002
Giá : 3000đ
Ba nghìn đồng