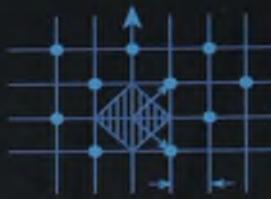


CK.0000050195



$$\bar{T} = \sum (m_a \bar{\gamma}_a c^2 - m_a c^2)$$
$$= \sum (m_a \bar{\gamma}_a c^2 - m_a c^2)$$



Bài tập và lời giải của các  
Trường Đại học nổi tiếng Hoa Kỳ

Major American Universities Ph.D. Qualifying Questions and Solutions

# BÀI TẬP VÀ LỜI GIẢI

## VẬT LÝ CHẤT RĂN, THUYẾT TƯƠNG ĐỐI VÀ CÁC VẤN ĐỀ LIÊN QUAN

PROBLEMS AND  
SOLUTIONS ON  
**SOLID STATE PHYSICS,  
RELATIVITY AND  
MISCELLANEOUS TOPICS**

Biên soạn:

Trường Đại học Khoa học  
và Công nghệ Trung Hoa

Chủ biên:

Yung-Kuo Lim



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC



# BÀI TẬP & LỜI GIẢI

## VẬT LÝ CHẤT RẮN THUYẾT TƯƠNG ĐỐI VÀ CÁC VẤN ĐỀ LIÊN QUAN

*Người dịch:*  
**NGUYỄN PHÚC DƯƠNG**



**NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC**

**Problems and Solutions on  
Solid state physics, relativity and miscellaneous topics**

Compiled by  
The Physics Coaching Class  
University of Science and Technology of China

Edited by  
Lim Yung-kuo  
National University of Singapore

© World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.  
New Jersey.London.Singapore.Hong Kong

First published 1995  
Reprinted 2001, 2005

*All rights reserved. This book, or parts thereof, may not be reproduced in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or any information storage and retrieval system now known or to be invented, without written permission from the Publisher. Vietnamese translation arranged with World Scientific Publishing Co. Pte Ltd., Singapore.*

Cuốn sách được xuất bản theo hợp đồng chuyên nhuận bản quyền giữa Nhà xuất bản Giáo dục và Nhà xuất bản World Scientific. Mọi hình thức sao chép một phần hay toàn bộ cuốn sách dưới dạng in ấn hoặc bản điện tử mà không có sự cho phép bằng văn bản của Công ty Cổ phần Sách dịch và Từ điển – Nhà xuất bản Giáo dục đều là vi phạm pháp luật.

**Bản quyền tiếng Việt © Công ty Cổ phần Sách dịch và Từ điển Giáo dục**

## LỜI NHÀ XUẤT BẢN

Bộ sách **Bài tập và lời giải vật lý** gồm bảy cuốn:

1. Quang học
2. Vật lý chất rắn, Thuyết tương đối & Các vấn đề liên quan
3. Điện tử học
4. Cơ học
5. Vật lý Nguyên tử, Hạt nhân và Các hạt cơ bản
6. Cơ học Lượng tử
7. Nhiệt động lực học & Vật lý thống kê

Đây là tuyển tập gồm 2550 bài tập được lựa chọn kỹ lưỡng từ 3100 đề thi vào đại học và thi tuyển nghiên cứu sinh chuyên ngành vật lý của 7 trường đại học nổi tiếng ở Mỹ (Đại học California ở Berkeley, Đại học Columbia, Đại học Chicago, Viện Công nghệ Massachusetts (MIT), Đại học Bang New York ở Buffalo, Đại học Princeton, Đại học Wisconsin). Trong số này còn có các đề thi trong chương trình CUSPEA và các đề thi do nhà vật lý đoạt giải Nobel người Mỹ gốc Trung Quốc C. C Ting (CCT) soạn để tuyển chọn sinh viên Trung Quốc đi du học ở Hoa Kỳ. Những đề thi này được xuất bản kèm theo lời giải của hơn 70 nhà vật lý có uy tín của Trung Quốc và 20 nhà vật lý nổi tiếng kiêm tra, hiệu định. Tất cả các cuốn sách trên đã được tái bản, riêng cuốn Điện tử học đã được tái bản 6 lần.

Điểm đáng lưu ý về bộ sách này là nó bao quát được mọi vấn đề của vật lý học, từ cổ điển đến hiện đại. Bên cạnh những bài tập đơn giản nhằm khắc sâu những khái niệm cơ bản của Vật lý học, không cần những công cụ toán học phức tạp cũng giải được, bộ sách còn có những bài tập khó và hay, đòi hỏi phải có kiến thức và tư duy vật lý sâu sắc với các phương pháp và kỹ thuật toán học phức tạp hơn mới giải được. Có thể nói đây là một tài liệu bổ sung vô giá cho sách giáo khoa và giáo trình đại học ngành vật lý, phục vụ một phạm vi đối tượng rất rộng, từ các giáo viên vật lý phổ thông, giảng viên các trường đại học cho đến học sinh các lớp chuyên lý, sinh viên khoa vật lý và sinh viên các lớp tài năng của các trường đại học khoa học tự nhiên, đặc biệt là cho những ai muốn du học ở Mỹ.

Nhà xuất bản Giáo dục trân trọng giới thiệu bộ sách tới độc giả

Hà Nội, ngày 25 tháng 6 năm 2008

**NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC**



## LỜI NÓI ĐẦU

*Làm bài tập là một việc tắt yếu và quan trọng trong quá trình học Vật lý nhằm củng cố lý thuyết đã học và trau dồi kỹ năng thực hành. Trong cuốn **Vật lý chất rắn, Thuyết tương đối & Các vấn đề liên quan** có 165 bài tập và lời giải: vật lý chất rắn (81 bài), thuyết tương đối (28 bài) và các vấn đề liên quan (56 bài). Hầu hết các bài chọn đưa vào cuốn sách này đều phù hợp với chương trình vật lý bậc đại học và sau đại học của chuyên ngành vật lý chất rắn và lý thuyết tương đối. Các bài tập ở phần ba (các vấn đề liên quan) nhằm để kiểm tra trình độ của sinh viên về các nguyên lý cơ bản, khả năng đánh giá các sai số thực nghiệm cũng như các kỹ năng toán học đồng thời giúp họ làm quen với các đại lượng và thang đo trong vật lý cũng như các kiến thức về lịch sử môn học này. Một số bài tập liên quan đến sự phát triển gần đây nhất của vật lý học, sự linh hội chắc chắn các kiến thức để kiểm tra mức độ học của sinh viên. Ngoài ra cuốn sách có chọn một số bài tập liên quan đến các nghiên cứu đang được tiến hành tại một số trường, nhưng bài này không được giải mà chỉ đưa ra để học viên tham khảo.*



## MỤC LỤC

Lời Nhà xuất bản	iii
Lời nói đầu	v
Mục lục	vii
<b>Phần I: Vật lý chất rắn</b>	<b>1</b>
1.1. Các cấu trúc tinh thể và các tính chất (1001-1027)	3
1.2. Thuyết điện từ, các vùng năng lượng và các chất bán dẫn (1028-1051)	45
1.3. Các tính chất điện từ, các tính chất quang và tính siêu dẫn (1052-1076)	102
1.4. Các chủ đề khác (1077-1081)	149
<b>Phần II: Thuyết tương đối</b>	<b>159</b>
2.1. Thuyết tương đối hẹp (2001-2007)	161
2.1. Thuyết tương đối rộng (2008-2023)	177
2.3. Vũ trụ tương đối tính (2024-2028)	218
<b>Phần III: Các vấn đề liên quan</b>	<b>231</b>
3.1. Lịch sử Vật lý và các câu hỏi đại cương (3001-3025)	233
3.2. Các phép đo, các phép gần đúng và sai số (3026-3048)	273
3.3. Các kỹ thuật toán học (3049-3056)	316



# **PHẦN I**

## **VẬT LÝ CHẤT RẮN**



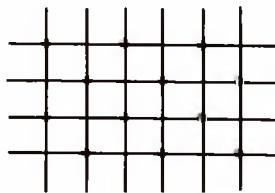
### 1.1. CÁC CẤU TRÚC TINH THỂ VÀ CÁC TÍNH CHẤT (1001 – 1027)

#### 1001

Hình 1.1 mô tả một mạng tinh thể giả thuyết hai chiều cấu thành từ các nguyên tử sắp xếp trên một lưới hình vuông.

- (a) Hãy chỉ ra một ví dụ về ô đơn vị cơ sở.
- (b) Định nghĩa “mạng đảo” và giải thích mối liên hệ của nó với phản xạ Bragg.
- (c) Chỉ ra mạng đảo và vùng Brillouin thứ nhất. Vùng Brillouin này liên hệ với phản xạ Bragg như thế nào?
- (d) Phát biểu và giải thích định lý Bloch nói rằng một electron chuyển động trong trường thế của mạng tinh thể này có các hàm sóng đối xứng tinh tiền. Các điều kiện biên nào cần được dùng với định lý này?

(SUNY, Buffalo )



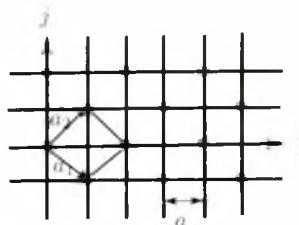
Hình 1.1

**Lời giải:**

- (a) Một ô đơn vị cơ sở là một ô đơn vị chứa các nút mạng chỉ tạo ở đỉnh góc của nó như chỉ ra trên hình 1.2. Các vectơ cơ sở của ô đơn vị này là

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_1 &= a(\mathbf{i} - \mathbf{j}) , \\ \mathbf{a}_2 &= a(\mathbf{i} + \mathbf{j}) ,\end{aligned}$$

với  $a$  là cạnh của hình vuông.



Hình 1.2

(b) Nếu  $\mathbf{a}_i$  ( $i = 1, 2$ ) là các vectơ cơ sở của mạng thuận thì các vectơ  $\mathbf{b}_j$  ( $j = 1, 2$ ) thoả mãn hệ thức

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_j = 2\pi\delta_{ij} = \begin{cases} 2\pi, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

là các vectơ cơ sở của mạng đảo. Trong không gian đảo điều kiện phản xạ Bragg là hiệu vectơ sóng phản xạ  $\mathbf{k}$  và vectơ sóng tới  $\mathbf{k}_0$  là một bội số nguyên  $n$  của vectơ mạng đảo  $\mathbf{k}^*$

$$\mathbf{k} - \mathbf{k}_0 = n\mathbf{k}^*.$$

(c) Từ các vectơ cơ sở của mạng thuận

$$\mathbf{a}_1 = a(\mathbf{i} - \mathbf{j}), \quad (1.1)$$

$$\mathbf{a}_2 = a(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \quad (1.2)$$

ta nhận được các vectơ cơ sở của mạng đảo là

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\pi}{a}(\mathbf{i} - \mathbf{j}), \quad (1.3)$$

$$\mathbf{b}_2 = \frac{\pi}{a}(\mathbf{i} + \mathbf{j}). \quad (1.4)$$

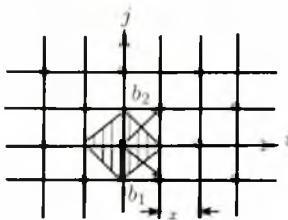
Mạng đảo và vùng Brillouin thứ nhất được mô tả trên hình 1.3. Phản xạ Bragg xảy ra tại các biên vùng Brillouin.

(d) Sóng biểu diễn electron chuyển động trong một trường thê tuần hoàn  $V(\mathbf{r} + \mathbf{R}) = V(\mathbf{r})$  của mạng tinh thể với  $\mathbf{R}$  là vectơ mạng, có dạng hàm Bloch

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}),$$

ở đây hàm  $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$  có cùng đối xứng tịnh tiến như mạng tinh thể

$$u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r} + \mathbf{R}).$$



Hình 1.3

Hàm  $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$  là một sóng phẳng bị biến dạng bởi trường thế tuần hoàn. Đây là nội dung của định lý Bloch. Phần hàm e mũ của sóng Bloch là một sóng phẳng mô tả đặc tính chung của các electron trong một mạng tinh thể trong khi đó hàm tuần hoàn mô tả sự chuyển động cục bộ của các electron này quanh các hạt nhân. Do vậy, các sóng Bloch đặc trưng cho chuyển động của các điện tử trong một tinh thể.

Điều kiện biên tuần hoàn Born-von Kármán cần phải được sử dụng cùng với định lý Bloch.

## 1002

Một chùm electron với động năng 1 keV bị nhiễu xạ khi nó đi qua một tấm kim loại mỏng đa tinh thể. Kim loại này có cấu trúc tinh thể lập phương với khoảng cách giữa các ô mạng là 1 Å. Cho trước  $m, q, h, c$ ,

- (a) Tính bước sóng của các electron,
- (b) Tính góc Bragg đối với cực đại nhiễu xạ bậc 1.

(Wisconsin)

**Lời giải:**

- (a) Bước sóng của electron là

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

với  $p$  được tính từ

$$\frac{p^2}{2m} = eV,$$

$V$  là hiệu điện thế gia tốc của các electron. Do đó

$$\lambda = \frac{h}{(2meV)^{1/2}} \approx \frac{12.25}{V^{1/2}} = \frac{12.25}{\sqrt{1000}} = 0.39 \text{ \AA}.$$

(b) Điều kiện phản xạ Bragg

$$2d \sin \theta = n\lambda$$

Đối với cực đại nhiễu xạ bậc một ( $n = 1$ ) và  $d = 1 \text{ \AA}$ , ta có

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{2d} = \frac{0.39}{2 \times 1} = 0.195$$

Như vậy

$$\theta = 11,18^\circ.$$

### 1003

Khi ngồi trước một chiếc tivi màu với điện thế đèn hình là 25 kV bạn chắc chắn sẽ bị chiếu xạ bởi các tia X phát ra.

(a) Quá trình nào đóng vai trò chủ yếu gây ra luồng tia X đó?

(b) Giả thiết phân bố chùm tia X là liên tục, hãy tính bước sóng tia X ngắn nhất (năng lượng đại). ( $h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ Js}$ ,  $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ ,  $1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$ )

(c) Đặt một tinh thể muối quặng ( $\text{NaCl}$ ) ở trước màn hình, hãy tính góc Bragg đối với cực đại phản xạ bậc một tại  $\lambda = 0,5 \text{ \AA}$ . ( $\rho_{\text{NaCl}} = 2.165 \text{ g/cm}^3$ )  
(Wisconsin)

Lời giải:

(a) Khi một điện thế cao đặt vào đèn hình, các electron phát ra từ âm cực sẽ được gia tốc bởi điện trường rồi đập vào màn hình. Nếu năng lượng của các electron vượt quá một giá trị nhất định, chúng có thể bứt các electron ở lớp bên trong của các nguyên tử trên màn hình và tạo ra các lỗ trống tại các lớp vỏ electron bên trong đó. Sau đó các electron thuộc các lớp ngoài sẽ chuyển đến chiếm các lỗ trống ở các lớp bên trong, đồng thời phát ra tia X.

(b) Năng lượng cực đại của các photon tia X phát ra,  $h\nu_{\max}$ , đúng bằng năng lượng eV của các electron tới. Như vậy bước sóng tia X ngắn nhất sẽ là

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{eV} = \frac{12000}{V} = \frac{12000}{25 \times 10^3} = 0.48 \text{ \AA}.$$

(c) Định luật Bragg

$$2d \sin \theta = n\lambda$$

cho biết giá trị góc  $\theta$  đối với cực đại phản xạ bậc một ( $n = 1$ ) :

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{2d} .$$

ở đây  $d$  là khoảng cách giữa hai ion cạnh nhau trong tinh thể NaCl.

Do tinh thể NaCl có cấu trúc lập phương đơn giản với các ion  $\text{Na}^+$  và  $\text{Cl}^-$  sắp xếp xen kẽ nhau nên có  $N_0$  ion  $\text{Na}^+$  và  $N_0$  ion  $\text{Cl}^-$  trong một mol NaCl, ở đây  $N_0$  là số Avogadro. Với khối lượng mol và khối lượng riêng của NaCl là  $M = 58,45 \text{ g/mol}$  và  $\rho = 2,165 \text{ g/cm}^3$ , tinh thể đó có

$$d = \left( \frac{\frac{M}{\rho}}{2N_0} \right)^{1/3} = \left( \frac{\frac{58,45}{2,165 \times 10^6}}{2 \times 6,02 \times 10^{23}} \right)^{1/3} = 2,82 \text{ \AA} .$$

Từ đó dẫn đến

$$\sin \theta = \frac{0,5}{2 \times 2,82} = 0,088 ,$$

Và do vậy

$$\theta = 5^\circ .$$

### 1004

Đánh giá với độ chính xác 10% bước sóng ứng với năng lượng lớn nhất trong phổ đặc trưng của tia X phát ra từ đồng ( $Z = 29$ ).

(Columbia)

**Lời giải:**

Trạng thái cơ bản của cấu hình electron của đồng ( $Z=29$ ) là  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^1$ . Bước sóng ứng với năng lượng lớn nhất trong phổ đặc trưng của tia X tương ứng với chuyển đổi của một electron từ lớp N ( $n = 4$ ) tới một lỗ trống trong lớp K ( $n = 1$ ). Trong khoảng sai số 10%, bước sóng này có thể được xác định theo công thức

$$\frac{1}{\lambda} = R(Z - 1)^2 \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{4^2} \right) ,$$

ở đây  $R = 1.09678 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$  là hằng số Rydberg. Từ đây suy ra

$$\lambda = 1.24 \times 10^{-10} \text{ m} = 1.24 \text{ Å}.$$

### 1005

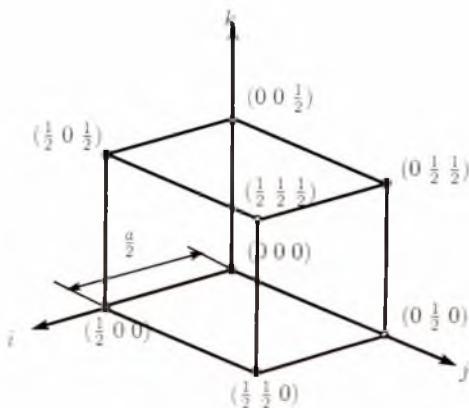
NaCl kết tinh theo mạng lập phương tâm mặt với cơ sở là một cặp ion Na và Cl cách nhau một khoảng bằng nửa đường chéo của khối lập phương. Nguyên tử số của Na và Cl tương ứng là 11 và 17.

- (a) Xác định những tia X phản xạ nào sẽ được quan sát thấy (được đánh chỉ số theo ô đơn vị lập phương thông thường).
- (b) Nhóm tia phản xạ nào cho cường độ mạnh, nhóm nào cho cường độ yếu?

(Wisconsin)

**Lời giải:**

- (a) Ô đơn vị của NaCl gồm tám nguyên tử chiếm các vị trí sau đây:  $\text{Na}^+$  tại  $(0 0 0)$ ,  $(\frac{1}{2} \frac{1}{2} 0)$ ,  $(\frac{1}{2} 0 \frac{1}{2})$ ,  $(0 \frac{1}{2} \frac{1}{2})$ , như được chỉ ra bởi các chấm tròn đặc trên hình 1.4;  $\text{Cl}^-$  tại  $(\frac{1}{2} 0 0)$ ,  $(0 \frac{1}{2} 0)$ ,  $(0 0 \frac{1}{2})$ ,  $(\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2})$ , như được chỉ ra bởi các chấm tròn rỗng trên hình vẽ.



Hình 1.4

Các cường độ nhiễu xạ được tính bởi

$$\begin{aligned} I_{hkl} &\propto |F_{hkl}|^2 = F_{hkl} \cdot F_{hkl}^* \\ &= \left[ \sum_j f_j \cos 2\pi(hu_j + kv_j + lw_j) \right]^2 \\ &\quad + \left[ \sum_j f_j \sin 2\pi(hu_j + kv_j + lw_j) \right]^2. \end{aligned}$$

ở đây  $h, k, l$  là các số nguyên. Thay thế các tọa độ ion vào biểu thức trên ta có

$$\begin{aligned} I_{hkl} &= f_{\text{Na}^+}^2 \{ [1 + \cos \pi(h+k) + \cos \pi(k+l) + \cos \pi(l+h)] \\ &\quad + \alpha [\cos \pi h + \cos \pi k + \cos \pi l + \cos \pi(h+k+l)] \}^2 \\ &\quad + f_{\text{Cl}^-}^2 \{ [\sin \pi(h+k) + \sin \pi(k+l) + \sin \pi(l+h)] \\ &\quad + \alpha [\sin \pi h + \sin \pi k + \sin \pi l + \sin \pi(h+k+l)] \}^2. \end{aligned}$$

ở đây  $\alpha = f_{\text{Cl}^-}/f_{\text{Na}^+} = 17/11$ .

Chú ý rằng các cường độ  $I_{hkl} \neq 0$  chỉ khác không khi  $h, k$  và  $l$  là toàn chẵn hoặc toàn lẻ. Như vậy ta có thể quan sát được hai nhóm các tia phản xạ khác nhau.

(b) Khi  $h, k$  và  $l$  đều là những số lẻ,

$$I \propto 16(1 - \alpha)^2.$$

cho thấy sự phản xạ là yếu. Khi  $h, k$  và  $l$  đều là những số chẵn,

$$I \propto 16(1 + \alpha)^2,$$

cho phản xạ mạnh.

## 1006

Ước tính gần đúng năng lượng tới để một tinh thể có thể làm một cách tử nhiễu xạ tốt đối với (a) photon, (b) neutron. ( $m_nc^2 = 939 \text{ MeV}$ ).

(Wisconsin)

Lời giải:

Tính tuần hoàn của một tinh thể cho phép nó hoạt động như một cách tử nhiễu xạ đối với các sóng. Vì hằng số mạng thông thường trong một tinh thể

vào khoảng  $10^{-10}$  m (1 Å), nên hiện tượng nhiễu xạ có thể xảy ra trên một tinh thể khi bước sóng của các hạt tới ngắn hơn  $10^{-10}$  m.

(a) Nếu muôn các photon tới có thể bị nhiễu xạ bởi một tinh thể thì bước sóng của chúng phải gần bằng  $10^{-10}$  m. Do đó năng lượng của photon tới là

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6.624 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{10^{-10}} \\ = 1.98 \times 10^{-15} \text{ J} = 12420 \text{ eV} .$$

(b) Nếu muôn các nơtron tới có thể bị nhiễu xạ, bước sóng của chúng phải gần bằng  $10^{-10}$  m, và động năng tương ứng là

$$E = \frac{p^2}{2m_n} = \frac{\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2}{2m_n} = \frac{h^2c^2}{2\lambda^2} \cdot \frac{1}{m_nc^2} \\ = \left( \frac{4.135 \times 10^{-15} \times 3 \times 10^8}{10^{-10}} \right)^2 \cdot \frac{1}{2 \times 939 \times 10^6} \\ = 8.2 \times 10^{-2} \text{ eV}$$

### 1007

Các nghiên cứu về nhiễu xạ liên quan tới các tia X, electron hoặc nơtron cho biết thông tin về các tính chất cấu trúc của các chất rắn. Hãy so sánh ba kỹ thuật này về mặt năng lượng hạt và các loại thông tin có thể thu được. Kỹ thuật nào phù hợp nhất để nghiên cứu tinh thể học bề mặt? Kỹ thuật nào phù hợp nhất để xác định các cấu trúc từ?

(Wisconsin )

Lời giải:

Năng lượng đặc trưng của các tia X là khoảng vài ngàn eV, tương ứng với bước sóng khoảng  $10^{-10}$  m, cùng bậc độ lớn với khoảng cách giữa các mặt tinh thể. Do vậy tia X thích hợp để xác định các cấu trúc mạng tinh thể. Đối với các nghiên cứu nhiễu xạ năng lượng thấp, người ta thường sử dụng các năng lượng 20–50 eV. Bởi vì các nguyên tử trong tinh thể có tiết diện lớn đối với quá trình tán xạ của các electron năng lượng thấp nên các electron tới không thể xuyên sâu vào tinh thể được. Như vậy nhiễu xạ electron năng lượng thấp là một kỹ thuật quan trọng để nghiên cứu các cấu trúc bề mặt của các chất rắn. Một nơtron có thể thấy cả hai khía cạnh của một tinh thể: phân bố của các hạt nhân và phân bố của độ từ hóa electron. Do đó nhiễu xạ nơtron bởi một tinh

thể có từ tính cho phép xác định được phân bố, định hướng và trật tự của các mômen từ.

Tóm lại, nhiễu xạ electron năng lượng thấp là phù hợp nhất để nghiên cứu tính chất học bề mặt, và nhiễu xạ neutron là phù hợp nhất để xác định các cấu trúc từ của các tinh thể.

### 1008

Các tia X được phản xạ từ một tinh thể theo phản xạ Bragg. Nếu mật độ của một tinh thể có cấu trúc đã được biết một cách chính xác, được đo với sai số căn quân phương là 3 phần vạn, và nếu góc của các tia tới và tia phản xạ tạo với mặt phẳng tinh thể bằng  $6^\circ$  được đo với sai số căn quân phương là 3,4 phút góc thì sai số căn quân phương khi xác định bước sóng của tia X đó là bao nhiêu?

(Wisconsin )

Lời giải:

Để đơn giản ta xét một tinh thể mà ô cơ sở của nó có cấu trúc lập phương đơn giản với chiều dài cạnh là  $d$  (được nhân với một thừa số cõi đơn vị đối với các ô cơ sở của các cấu trúc tinh thể khác). Đổi với nhiễu xạ bậc 1,  $n = 1$  định luật Bragg được viết như sau

$$2d \sin \theta = \lambda .$$

Vì phân biểu thức trên ta được

$$\left| \frac{\Delta \lambda}{\lambda} \right| = \left| \frac{\Delta d}{d} \right| + \cot \theta |\Delta \theta| .$$

Thể tích của ô cơ sở là

$$d^3 = \frac{M}{\rho N_0} .$$

ở đây  $M$  là phân tử lượng và  $\rho$  là khối lượng riêng của tinh thể, và  $N_0$  là số Avogadro. Vì phân biểu thức thể tích ô cơ sở ta được

$$\left| \frac{\Delta d}{d} \right| = \frac{1}{3} \left| \frac{\Delta \rho}{\rho} \right| .$$

Như vậy

$$\left| \frac{\Delta \lambda}{\lambda} \right| = \frac{1}{3} \left| \frac{\Delta \rho}{\rho} \right| + \cot \theta \cdot |\Delta \theta| .$$

Và biểu diễn qua các sai số cần quan phương,

$$\frac{\sigma_\lambda}{\lambda} = \left[ \left( \frac{1}{3} \frac{\sigma_\rho}{\rho} \right)^2 + (\sigma_\theta \cot \theta)^2 \right]^{1/2}$$

Vì  $\frac{\sigma_\rho}{\rho} = 3 \times 10^{-4}$ ,  $\sigma_\theta \cot \theta = \frac{\sigma_\theta \cos \theta}{\sin \theta} \approx \frac{\sigma_\theta}{\theta} = \frac{3.4}{60 \times 6} = 9.4 \times 10^{-3}$  nên

$$\frac{\sigma_\lambda}{\lambda} = \sqrt{10^{-8} + (9.4 \times 10^{-3})^2} = 9.4 \times 10^{-3}$$

### 1009

Dánh giá áp suất cần thiết để nén một vật rắn tới mật độ lớn hơn vài lần mật độ của nó ở điều kiện thường.

(Columbia)

**Lời giải:**

Để nén đẳng nhiệt một vật rắn đàn hồi có thể tích  $v$  một lượng  $dv$ , thì độ tăng áp suất  $dp$  cần thiết được biểu diễn dưới dạng sau

$$K = -v \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_T .$$

trong đó  $K$  là một hằng số, gọi là hệ số nén của vật liệu làm vật rắn đó. Như vậy

$$p = - \int_{v_0}^v \frac{K dv}{v} = K \ln \left( \frac{v_0}{v} \right) .$$

Để nén vật rắn đến  $\alpha$  lần mật độ thông thường, tức là,

$$\frac{v_0}{v} = \frac{\rho}{\rho_0} = \alpha .$$

áp suất cần thiết là  $p = K \ln \alpha$ .

Đối với các chất rắn,  $K \sim 10 \text{ Pa} = 10^8 \text{ mb}$ . Đối với  $\alpha$  ví dụ bằng 10, ta có

$$p = 10^8 \ln 10 = 2.3 \times 10^8 \text{ mb} = 2.3 \times 10^5 \text{ at.}$$

### 1010

Xét một dây  $2N$  ion có diện tích  $\pm q$  xen kẽ nhau với một thể nồng đậm  $A/R^n$  giữa các ion lân cận gần nhất ngoài thể nồng đậm Culông thông thường.

(a) Tìm khoảng cách cân bằng  $R_0$  giữa hai ion lân cận trong hệ dó và đánh giá năng lượng cân bằng  $U(R_0)$ .

(b) Nén tinh thể sao cho  $R_0 \rightarrow R_0(1 - \delta)$ . Tính công thực hiện để nén một độ dài đơn vị của tinh thể tới bậc  $\delta^2$ .

(Princeton )

Lời giải:

(a) Bỏ qua các hiệu ứng bề mặt, năng lượng mạng của hệ là

$$U(R) = N \left( -\frac{aq^2}{R} + \frac{A}{R^n} \right) ,$$

ở đây  $a$  là hằng số Madelung.  $U(R)$  có một cực tiểu ở trạng thái cân bằng. Vậy khoảng cách cân bằng  $R_0$  được tính bởi

$$\left( \frac{dU}{dR} \right)_{R=R_0} = 0 ,$$

Từ đó suy ra khoảng cách cân bằng là

$$R_0 = \left( \frac{nA}{aq^2} \right)^{\frac{1}{n-1}}$$

và năng lượng cân bằng là

$$\begin{aligned} U(R_0) &= -\frac{N}{R_0} \left( aq^2 - \frac{A}{R_0^{n-1}} \right) \\ &= -\frac{Naq^2}{R_0} \left( 1 - \frac{1}{n} \right) , \end{aligned}$$

với  $a = 2 \ln 2$  đổi với một dãy một chiều.

(b) Khi tinh thể này bị nén để  $R_0$  trở thành  $R$ , thì năng lượng mạng sẽ tăng lên một lượng

$$\begin{aligned} U(R) - U(R_0) &= N \left[ -aq^2 \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right) + A \left( \frac{1}{R^2} - \frac{1}{R_0^n} \right) \right] \\ &= -\frac{Naq^2}{R_0} \left[ \frac{R_0}{R} - 1 - \frac{1}{n} \left( \frac{R_0^n}{R^n} - 1 \right) \right] \end{aligned}$$

và bằng công  $W$  do lực tác dụng thực hiện.

Với  $R = R_0(1 - \delta)$ , giữ lại các số hạng tới  $\delta^2$  ta có

$$\begin{aligned}\frac{R_0}{R} - 1 &= (1 - \delta)^{-1} - 1 \approx \delta + \delta^2, \\ \left(\frac{R_0}{R}\right)^n - 1 &= (1 - \delta)^{-n} - 1 \approx n\delta + \frac{n(n+1)}{2}\delta^2.\end{aligned}$$

Và như vậy

$$W \approx -\frac{Naq^2}{R_0} \left(1 - \frac{n+1}{2}\right) \delta^2 = \frac{Naq^2}{2R_0} (n-1)\delta^2.$$

Tổng chiều dài của tinh thể xấp xỉ bằng  $2NR_0$ . Như vậy công thực hiện để nén một độ dài đơn vị của tinh thể là

$$\frac{W}{2NR_0} = \frac{q^2 \ln 2}{R_0^2 / 2} (n-1)\delta^2.$$

### 1011

(a) Năng lượng cõi kết của các ion nằm cách nhau trong tinh thể NaCl bằng bao nhiêu? Cho một giá trị gần đúng và nếu cách tính mà chỉ sử dụng một mô hình rất đơn giản. Hằng số mạng  $a = 5,6 \text{ \AA}$ .

(b) Cần phải thêm bớt các đại lượng thực nghiệm nào vào giá trị năng lượng trên để tính được năng lượng cõi kết của kim loại natri và khí clo tách rời nhau? Bỏ qua các hiệu ứng nhỏ ( $< 10\%$ ).

(Wisconsin)

**Lời giải:**

(a) Đối với một tinh thể gồm có  $N$  ion, mỗi một ion mang điện tích  $\pm e$ , thì năng lượng cõi kết sẽ bằng

$$U(r) = -\frac{N}{2} \sum_j' \left[ \pm \frac{e^2}{r_{ij}} - \frac{b}{r_{ij}^n} \right].$$

ở đây  $b$  là hằng số Madelung và dấu phẩy để chỉ các số hạng có  $j = i$  bị loại khỏi phép tính tổng. Với  $r_{ij} = \alpha_j R$  biểu thức trên trở thành

$$U(R) = -\frac{N}{2} \left( \frac{\alpha e^2}{R} - \frac{\beta}{R^n} \right).$$

ở đây

$$\alpha = \sum_j' (\pm) \alpha_j^{-1}, \quad B = b \sum_j' \alpha_j^{-n}.$$

Tại trạng thái cân bằng  $U(R)$  là cực tiểu năng lượng và  $R = R_0$  được tính bởi

$$\left( \frac{\partial U}{\partial R} \right)_{R=R_0} = 0,$$

từ đó suy ra

$$R_0 = \left( \frac{\alpha e^2}{nB} \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

và như vậy

$$U(R_0) = -\frac{Nae^2}{2R_0} \left( 1 - \frac{1}{n} \right).$$

Hai số hạng của  $U(R)$  là thể Culông và thể đẩy. Bằng cách so sánh thể Culông tính toán được và năng lượng liên kết toàn phần quan sát được ta có thể ước lượng được  $n$  bằng khoảng 10. Vậy với độ chính xác 10% ta có

$$U(R_0) \approx -\frac{Nae^2}{2R_0}.$$

Áp dụng phương pháp Ewald cho cấu trúc NaCl, ta có thể tính được  $\alpha$  và nhận được  $\alpha = 1.7476$ . Vậy với  $R_0 = \frac{a}{2} = 2.8 \text{ \AA}$ , ta rút ra

$$U(R_0) = 178 \text{ kcal/mol}.$$

vì đối với tinh thể NaCl,  $n = 8$ .

(b) Đối với kim loại Na và hơi Cl tách rời nhau, để tính năng lượng có kết ta phải thêm vào biểu thức trên các năng lượng hóa hơi của natri kim loại, năng lượng phân tách phân tử Cl thành các nguyên tử riêng rẽ và năng lượng ion hóa của các nguyên tử Na và Cl.

## 1012

Một tinh thể hai chiều lý tưởng gồm chỉ một loại nguyên tử (khối lượng  $m$ ), và mỗi một nguyên tử có vị trí cân bằng tại nút mạng vuông  $\mathbf{R} = (ra, sa)$ , ở đây  $r, s = 1, 2, \dots, N$ . Độ dịch chuyển khỏi vị trí cân bằng được ký hiệu là  $(x_{rs}, y_{rs})$ , nghĩa là

$$\mathbf{R}_{rp} = (ra + x_{rs}, sa + y_{rs}).$$

và trong gần đúng dao động điều hòa thể năng được cho bởi

$$V(x_{rs}, y_{rs}) = \sum_{r,s} \{ k_1 [(x_{(r+1)s} - x_{rs})^2 (y_{(r+1)s} - y_{rs})^2] \\ + k_2 [(x_{r(s+1)} - x_{rs})^2 (y_{(r+1)s} - y_{rs})^2] \}$$

Đối với trường hợp  $k_2 = 0.1k_1$ ,

(a) xác định hệ thức tán sắc tổng quát của phonon  $\omega_{q\lambda}$  xuyên suốt vùng Brillouin,

(b) vẽ phác sự phụ thuộc của  $\omega_{q\lambda}$  vào  $q$  đối với

$$q = (\xi, 0), \quad 0 \leq \xi \leq \frac{\pi}{a}.$$

(Princeton)

**Lời giải:**

(a) Sự dao động của một nguyên tử tại  $\mathbf{R}_{rs} = (ra, sa)$  được xác định bởi định luật thứ hai của Newton

$$m\ddot{\mathbf{R}}_{rs} = -\nabla_{rs}V.$$

ở đây

$$\nabla_{rs} \equiv \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x_{rs}} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y_{rs}}.$$

Xét một nghiệm mô tả sóng truyền trong tinh thể

$$\mathbf{R}_{rs} = \mathbf{A} e^{i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}_{rs} - \omega t)}.$$

ở đây  $\mathbf{A}$  là một vectơ không đổi. Vì  $\ddot{\mathbf{R}}_{rs} = -\omega^2 \mathbf{R}_{rs}$  và  $x_{rs}$  chỉ xuất hiện trong biểu thức tổng của  $V$  ở các số hạng

$$k_1 [(x_{(r+1)s} - x_{rs})^2 + (x_{rs} - x_{(r-1)s})^2], \\ k_2 [(x_{r(s+1)} - x_{rs})^2 + (x_{rs} - x_{r(s-1)})^2],$$

nên thé  $\mathbf{R}_{rs}$  vào phương trình chuyển động ta được

$$-m\omega^2 x_{rs} = 2k_1(x_{(r+1)s} + x_{(r-1)s} - 2x_{rs}) + 2k_2(x_{r(s+1)} + x_{r(s-1)} - 2x_{rs}),$$

và tương tự,

$$-m\omega^2 y_{rs} = 2k_1(y_{(r+1)s} + y_{(r-1)s} - 2y_{rs}) + 2k_2(y_{(r+1)s} + y_{(r-1)s} - 2y_{rs}).$$

Với  $\mathbf{q} = (q_x, q_y)$ ,  $\mathbf{R} = (ra, sa)$ , ta có

$$\begin{aligned}x_{rs} &= A_x e^{i[(q_x r + q_y s)a - \omega t]} \\y_{rs} &= A_y e^{i[(q_x r + q_y s)a - \omega t]}\end{aligned}$$

Tiếp tục thay thế cho ta

$$-m\omega^2 x_{rs} = 2k_1(e^{iq_x a} + e^{-iq_x a} - 2)x_{rs} + 2k_2(e^{iq_y a} + e^{-iq_y a} - 2)x_{rs},$$

hoặc

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \frac{4k_1}{m}[1 - \cos(q_x a)] + \frac{4k_2}{m}[1 - \cos(q_y a)] \\&= \omega_0^2 \left[ \sin^2\left(\frac{q_x a}{2}\right) + \left(\frac{k_2}{k_1}\right) \sin^2\left(\frac{q_y a}{2}\right) \right].\end{aligned}$$

ở đây  $\omega_0 = \sqrt{\frac{8k_1}{m}}$ . Thực tế  $q_x, q_y$  trong nghiệm  $x_{rs}, y_{rs}$  có thể tráo đổi được cho nhau. Vậy có hai hệ thức tán sắc của phonon đổi với  $k_2 = 0, 1 k_1$

$$\begin{aligned}\omega_{q_1} &= \omega_0 \left[ \sin^2\left(\frac{q_x a}{2}\right) + 0,1 \sin^2\left(\frac{q_y a}{2}\right) \right]^{1/2} \\&\omega_{q_2} = \omega_0 \left[ \sin^2\left(\frac{q_y a}{2}\right) + 0,1 \sin^2\left(\frac{q_x a}{2}\right) \right]^{1/2}.\end{aligned}$$

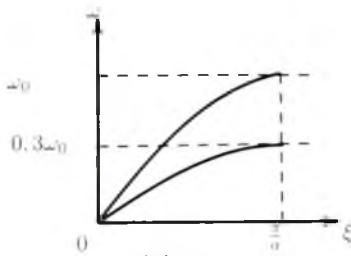
(b) Vì  $q_x = \xi, q_y = 0$ ,

$$\begin{aligned}\omega_{q_1} &= \omega_0 \left| \sin\left(\frac{\xi a}{2}\right) \right|, \\&\omega_{q_2} = \omega_0 \sqrt{0,1} \left| \sin\left(\frac{\xi a}{2}\right) \right| = 0,316 \omega_0 \left| \sin\left(\frac{\xi a}{2}\right) \right|.\end{aligned}$$

Vì  $\xi$  nhận tất cả các giá trị giữa 0 và  $\frac{\pi}{a}$ , nên  $\omega_q$  biến đổi theo  $\xi$  như chỉ ra trong hình 1.5.

### 1013

Xét một mang vuông hai chiều của các nguyên tử với hằng số mang  $a$ . Các nguyên tử tương tác với nhau sao cho khi nguyên tử tại vị trí  $(x_0, y_0)$  bị dịch chuyển đến  $(x_0 + \Delta x, y_0)$ , nó chịu một lực hồi phục  $-c_1 \Delta x$  do hai nguyên tử lân cận gần nhất tại  $(x_0 \pm a, y_0)$  và một lực hồi phục  $-c_2 \Delta x$  do hai nguyên tử lân cận gần nhất tại  $(x_0, y_0 \pm a)$  gây ra. Giả thiết  $c_2 < c_1$ .



Hình 1.5

(a) Tìm hệ thức tán sắc cho các sóng âm lan truyền theo phương  $x$  và về giàn đỡ tán sắc.

(b) Vận tốc âm thanh trong tinh thể mang hai chiều này là bao nhiêu?

Nếu có một vài nguyên tử di ra khỏi các vị trí mạng để lại các nút khuyết, thì lực hồi phục trung bình đổi với một sóng âm phẳng sẽ bị giảm đi một lượng tỷ lệ thuận với nồng độ nút khuyết. Hơn nữa, mỗi một nút khuyết sẽ làm tan xạ bất kỳ sóng âm nào tới đó, và biên độ của sóng tán xạ bằng  $A/\lambda$  với  $\lambda \gg a$ , ở đây  $\lambda$  là bước sóng và  $A$  là một hằng số.

(c) Với một nồng độ nút khuyết cho trước, hãy tìm độ dài tần dàn (suy giảm) của âm thanh như một hàm của bước sóng (sai khác một thừa số  $A$ ). Giả thiết các nút khuyết tán xạ một cách độc lập.

(d) Giả thiết rằng để bứt một nguyên tử ra khỏi tinh thể và tạo nên một nút khuyết cần có một năng lượng bằng  $\epsilon$ . Hãy xác định sự phụ thuộc của chiều dài tần dàn của âm thanh vào nhiệt độ.

(e) Với cùng một giả thiết như ở câu (d), sự phụ thuộc nhiệt độ của vận tốc âm thanh sẽ như thế nào?

(Princeton)

**Lời giải:**

(a) Lấy điểm gốc tại  $(x_0, y_0)$ , vậy thì  $(x_n, y_m) = (na, ma)$ . Đặt độ dịch chuyển  $x$  của nguyên tử tại vị trí  $(x_n, y_m)$  là  $u_{n,m}$ . Độ dịch chuyển tương đối  $x$  của nguyên tử so với các nguyên tử lân cận gần nhất theo phương  $x$  sẽ là

$$(u_{n+1,m} - u_{n,m}) + (u_{n,m} - u_{n-1,m}) = 2u_{n,m} - u_{n+1,m} - u_{n-1,m}.$$

và độ dịch chuyển tương đối  $y$  của nguyên tử so với các nguyên tử lân cận gần nhất theo phương  $y$  sẽ là

$$2u_{n,m} - u_{n,m+1} - u_{n,m-1}.$$

Như vậy phương trình chuyển động của nguyên tử tại  $(x_n, y_m)$  là

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 u_{n,m}}{dt^2} &= -c_1(2u_{m,n} - u_{n+1,m} - u_{n-1,m}) \\ &\quad - c_2(2u_{m,n} - u_{n,m+1} - u_{n,m-1}) \end{aligned}$$

Tìm nghiệm của phương trình trên dưới dạng

$$u_{n,m} = A e^{i(q_1 n a + q_2 m a - \omega t)}$$

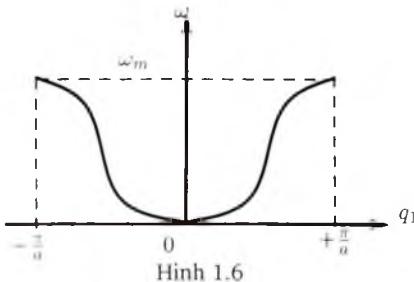
Thay vào phương trình trên ta được

$$\begin{aligned} m\omega^2 &= c_1(2 - e^{iq_1 a} - e^{-iq_1 a}) + c_2(2 - e^{iq_2 a} - e^{-iq_2 a}) \\ &= 2c_1[1 - \cos(q_1 a)] + 2c_2[1 - \cos(q_2 a)], \end{aligned}$$

và do vậy

$$\omega = \left\{ \frac{4c_1}{m} \sin^2\left(\frac{q_1 a}{2}\right) + \frac{4c_2}{m} \sin^2\left(\frac{q_2 a}{2}\right) \right\}^{1/2}$$

Đối với các sóng âm truyền theo phuong  $x$ ,  $q_2 = 0$  và hệ thức tán sắc được vẽ như trên hình 1.6, với  $\omega_m = \sqrt{\frac{4c_1}{m}}$ .



Hình 1.6

(b) Vận tốc âm thanh trong tinh thể là

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \nabla_{q\omega} = \frac{\partial \omega}{\partial q_1} \mathbf{e}_x + \frac{\partial \omega}{\partial q_2} \mathbf{e}_y \\ &= \frac{a}{m\omega} [c_1 \sin(q_1 a) \mathbf{e}_x + c_2 \sin(q_2 a) \mathbf{e}_y], \end{aligned}$$

và có biên độ

$$v = \frac{a}{m\omega} [c_1^2 \sin^2(q_1 a) + c_2^2 \sin^2(q_2 a)]^{1/2}.$$

(c) Xét các sóng âm có cường độ  $I$  và đi qua diện tích thiết diện  $S$  khi lan truyền trong mạng. Trong một khoảng cách ngắn  $dx$  nó sẽ gặp  $nSdx$  nút khuyết. Ở đây  $n$  là nồng độ nút khuyết. Mỗi một quá trình tán xạ bởi một nút khuyết sẽ gây ra một tổn hao năng lượng tỷ lệ với  $(\frac{A}{\lambda})^2$ , và do mỗi một nút khuyết sẽ làm tán xạ bất kỳ một sóng âm nào đi tới, nên tổng năng lượng bị tiêu tán do tán xạ cũng sẽ tỷ lệ với  $I$ . Như vậy

$$-SdI = CI \left(\frac{A}{\lambda}\right)^2 nSdx,$$

ở đây  $C$  là một hằng số tỷ lệ. Do đó

$$I = I_0 \exp\left(-\frac{CnA^2}{\lambda^2}\right).$$

Khoảng cách tắt dần  $l$ , được định nghĩa là khoảng cách qua đó cường độ sóng giảm đi bởi một thừa số  $e^{-1}$ , sẽ bằng

$$l = \frac{\lambda^2}{CnA^2}.$$

(d) Mật độ nút khuyết liên hệ với nhiệt độ tuyệt đối  $T$  như sau

$$n \propto e^{-\varepsilon/k_B T},$$

ở đây  $k_B$  là hằng số Boltzmann. Do vậy

$$l \propto \frac{1}{n} \propto e^{k_B T}.$$

(e) Vì sự giảm của lực phục hồi tỷ lệ với nồng độ nút khuyết, nên các hằng số lực sẽ bị giảm đi so với giá trị ban đầu của chúng  $c_1^0, c_2^0$  còn

$$\begin{aligned} c_1 &= c_1^0(1 - Bn), \\ c_2 &= c_2^0(1 - Bn). \end{aligned}$$

ở đây  $B$  là một hằng số tỷ lệ. Vận tốc âm thanh như vây sẽ bằng

$$v \propto \left[1 - B \exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)\right]^{1/2}.$$

Xét một mạng dao động  $d$  chiều tại nhiệt độ không tuyệt đối. Mật độ số hạt là  $\eta$  và các nguyên tử có khối lượng  $m$ . Sử dụng gần đúng Debye và giả thiết tất cả các kiểu (mode) của sóng âm có cùng một vận tốc  $v$ .

- (a) Đánh giá độ dịch chuyển bình phương trung bình ( $R^2$ ) đối với  $d = 3$ .  
 (b) Đánh giá  $\langle R^2 \rangle$  đối với  $d = 1$ , và phân tích tính sát thực so với kết quả thí nghiệm.  
 (c) Đánh giá độ biến dạng bình phương trung bình  $\left\langle \left( \frac{\partial R}{\partial x} \right)^2 \right\rangle$  đối với  $d = 1$ .  
*(Princeton)*

**Lời giải:**

Xét một nguyên tử dao động với tần số góc  $\omega_j$  và biên độ  $y_{0j}$ . Độ dịch chuyển của nó khỏi vị trí cân bằng là

$$y_j = y_{0j} \cos(q_j x - \omega_j t)$$

và động năng của nó bằng

$$\frac{1}{2}m\dot{y}_j^2 = \frac{1}{2}m\omega_j^2 y_j^2.$$

Động năng trung bình của nó theo thời gian sẽ là

$$\left\langle \frac{1}{2}m\dot{y}_j^2 \right\rangle = \frac{1}{2}m\omega_j^2 \langle y_j^2 \rangle = \frac{1}{4}m\omega_j^2 y_{0j}^2.$$

Nguyên tử dao động tương ứng với một dao động tử điều hoà lượng tử có cùng tần số với năng lượng toàn phần bằng  $(n + \frac{1}{2})\hbar\omega_j$ . Do động năng trung bình của một dao động tử bằng nửa năng lượng toàn phần của nó, nên

$$\frac{1}{4}m\omega_j^2 y_{0j}^2 = \frac{1}{2} \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_j,$$

ta có

$$y_{0j}^2 = \frac{(2n + 1)\hbar}{m\omega_j}.$$

Tại nhiệt độ không tuyệt đối, tất cả các dao động tử ở trạng thái cơ bản tương ứng với trạng thái lượng tử  $n = 0$ . Độ dịch chuyển trung bình vì vậy sẽ là

$$\langle y_j^2 \rangle = \frac{1}{2}y_{0j}^2 = \frac{\hbar}{2m\omega_j}.$$

Nếu lấy trung bình cho tất cả các nguyên tử trong mạng, thì độ dịch chuyển bình phương trung bình tại nhiệt độ không sẽ bằng

$$\langle R^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_j \langle y_j^2 \rangle = \frac{\hbar}{2Nm} \sum_j \omega_j^{-1} = \frac{\hbar}{2\rho V} \sum_j \omega_j^{-1},$$

ở đây  $\rho$ ,  $V$  tương ứng là khối lượng riêng và thể tích, và  $N$  là tổng số nguyên tử có trong mạng.

(a)  $d = 3$ . Trong gần đúng Debye số các kiểu dao động với các số sóng nhỏ hơn  $q$  được cho bởi thể tích của hình cầu bán kính  $q$  với tâm tại gốc của không gian -  $q$  được đo theo đơn vị  $(\frac{2\pi}{L})^{\frac{1}{3}}$ , với  $L$  là chiều dài của mạng, giả thiết là mạng lập phương. Vì có thể có ba kiểu phân cực, số các kiểu dao động với các số sóng nhỏ hơn  $q$  là

$$N' = 3 \cdot \frac{4}{3}\pi q^3 \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{-3} = \frac{L^3 q^3}{2\pi^2},$$

Giả thiết tất cả các kiểu dao động có cùng một vận tốc  $v$ , ta có  $q = \frac{\omega}{v}$  và mật độ trạng thái là

$$D(\omega) = \frac{dN'}{d\omega} = \frac{3L^3 q^2}{2\pi^2} \frac{dq}{d\omega} = \frac{3V\omega^2}{2\pi^2 v^3}.$$

Hơn nữa, với  $N' = 3N$ , tần số góc cắt Debye là

$$\omega_D = \left(\frac{6\pi^2 N}{V}\right)^{\frac{1}{3}} v = (6\pi^2 \eta)^{\frac{1}{3}} v.$$

Do vậy

$$\begin{aligned} \langle R^2 \rangle &= \frac{\hbar}{2\rho v} \int_0^\infty \omega^{-1} D(\omega) d\omega \\ &= \frac{3\hbar\omega_D^2}{8\pi^2 m \eta v^3}. \end{aligned}$$

(b)  $d = 1$ . Gần đúng Debye cho

$$N' = N = 2q \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{-1} = \frac{Lq}{\pi} = \frac{L\omega}{\pi v},$$

và do đó

$$D(\omega) = \frac{L}{\pi v},$$

và

$$\omega_D = \frac{\pi N v}{L} = \pi \eta v.$$

ở đây  $\eta$  là số nguyên tử trên một đơn vị độ dài của mạng một chiều. Do đó

$$\begin{aligned}\langle R^2 \rangle &= \frac{\hbar}{2\rho L} \sum_j \omega_j^{-1} = \frac{\hbar}{2\pi\rho v} \int_0^{\omega_0} \frac{d\omega}{\omega} \\ &= \frac{\hbar}{2\pi m\eta v} \ln \omega \Big|_0^{\omega_0} = \infty.\end{aligned}$$

$\langle R^2 \rangle$  phân kỳ đối với trường hợp một chiều. Ta thấy rằng sự phân kỳ xuất hiện là do cận dưới của tích phân bằng không. Về mặt vật lý,  $\omega \approx 0$  tương ứng với các nguyên tử trong mạng di chuyển đồng thời như một thể thống nhất, khi đó  $\langle y^2 \rangle$  bằng không chứ không phải bằng  $\sim \omega^{-1}$ . Như vậy xác định bằng thực nghiệm  $\langle R^2 \rangle$  sẽ không phải là một đại lượng vô hạn mà vẫn có giá trị hữu hạn.

(c) Đối với nguyên tử thứ  $j$ ,

$$\left( \frac{\partial y_j}{\partial x} \right)^2 = q_j^2 y_{0j}^2 \sin^2(q_j x - \omega_j t),$$

mà khi lấy trung bình theo thời gian sẽ trở thành

$$\left\langle \left( \frac{\partial y_j}{\partial x} \right)^2 \right\rangle = \frac{1}{2} q_j^2 y_{0j}^2 = \frac{\hbar \omega_j}{2mv^2}.$$

Như vậy đối với một mạng tĩnh thể một chiều,

$$\begin{aligned}\left\langle \left( \frac{\partial R}{\partial x} \right)^2 \right\rangle &= \frac{1}{2N} \sum_j^N \frac{\hbar \omega_j}{2mv^2} \\ &= \frac{\hbar}{4Nm v^2} \int_0^{\omega_0} \frac{L\omega}{\pi v} d\omega \\ &= \frac{\hbar \omega_0^3}{4\pi m\eta v^3}.\end{aligned}$$

ở đây  $\omega_0 = \pi\eta v$ , do  $\frac{N}{L} = \eta$ .

1015

Xét một mạng vuông hai chiều với một nguyên tử có khối lượng  $m$  trên một nút mạng chỉ tương tác với các nguyên tử lân cận gần nhất với hằng số lực  $K$ . [Sử dụng đường cong tán sắc phonon  $\omega_q = \sqrt{\frac{4K}{m}} \sin(qa/2)$ .]

(a) Trong giới hạn sóng dài, tính mật độ các trạng thái phonon  $D(\omega) = dN/d\omega$ , tức là số các kiểu dao động trên khoảng tần số  $d\omega$ .

(b) Tại nhiệt độ cao ( $k_B T \gg \hbar\omega$ ), tìm độ dịch chuyển bình phương trung bình của một nguyên tử so với vị trí cân bằng của nó, và biện luận về độ bền của các tinh thể hai chiều.

(Wisconsin)

### Lời giải:

(a) Trong giới hạn sóng dài,  $q \rightarrow 0$  và

$$\omega_q = \sqrt{\frac{4K}{m}} \sin\left(\frac{qa}{2}\right) \approx \sqrt{\frac{K}{m}} qa .$$

Vận tốc âm sê là

$$v = \frac{\omega_q}{q} = \sqrt{\frac{K}{m}} a .$$

không phụ thuộc vào  $q$ .

Trong mô hình Debye, số các dao động với các số sóng nhỏ hơn  $q$  được cho bởi diện tích của hình tròn bán kính  $q$  với tâm ở gốc của không gian  $q$  được đo bằng đơn vị  $(\frac{2\pi}{L})^d$ , với  $L$  là chiều dài của mạng vuông. Vì tồn tại hai kiểu phân cực, nên số các dao động chuẩn với các số sóng nhỏ hơn  $q$  sẽ là

$$N' = 2\pi q^2 \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 = \frac{L^2 q^2}{2\pi} = \frac{S \omega^2}{2\pi v^2} ,$$

ở đây  $S$  là diện tích của mạng. Do đó mật độ các trạng thái phonon là

$$D(\omega) = \frac{dN'}{d\omega} = \frac{S\omega}{\pi v^2} = \frac{Sm\omega}{\pi a^2 K} .$$

(b) Năng lượng toàn phần của mạng là

$$U = \int_0^{\infty} \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \cdot D(\omega) d\omega .$$

Tại nhiệt độ cao,  $\hbar\omega \ll k_B T$  và

$$e^{\hbar\omega/k_B T} \approx 1 + \frac{\hbar\omega}{k_B T} .$$

Do đó

$$\begin{aligned} U &\approx \int_0^{\omega_D} k_B T D(\omega) d\omega \\ &= \frac{Sk_B T}{2\pi v^2} \omega_D^2 . \end{aligned}$$

Nếu có  $N$  nguyên tử trong mạng thì

$$N = 2N = \frac{S}{2\pi} \frac{\omega_D^2}{v^2} ,$$

suy ra

$$\omega_D^2 = \frac{4\pi N v^2}{S} ,$$

và do đó

$$U = 2Nk_B T .$$

Tại giới hạn nhiệt độ cao, thê năng trung bình bằng động năng trung bình và do đó bằng nửa của năng lượng toàn phần. Nếu  $\langle r^2 \rangle$  bằng độ dịch chuyển bình phương trung bình của một nguyên tử thì

$$\frac{N}{2} K \langle r^2 \rangle = Nk_B T .$$

suy ra

$$\langle r^2 \rangle = \frac{2k_B T}{K} ,$$

ở đây  $K$  là hằng số lực tương tác giữa các nguyên tử. Như vậy  $\langle r^2 \rangle \propto T$ . Nếu  $T$  tăng lên từ một giá trị thấp,  $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$  sẽ trở nên lớn hơn hằng số mang và mạng sẽ bị phá vỡ. Do đó một mạng hai chiều sẽ không bền ở nhiệt độ cao.

### 1016

(a) Nhiệt dung riêng đẳng tích (trên một mol) của một khí đơn nguyên tử bằng bao nhiêu?

(b) Nhiệt dung riêng đẳng tích (trên một mol) của một khí lưỡng nguyên tử bằng bao nhiêu? Giải thích.

(c) Nhiệt dung riêng của một chất rắn tinh thể đơn nguyên tử bằng bao nhiêu?

(Wisconsin)

**Lời giải:**

Khí lý tưởng có nội năng trên một mol tại nhiệt độ  $T$  bằng

$$E = \frac{f}{2} N k_B T = \frac{f}{2} R T ,$$

ở đây  $f$  là số bậc tự do của một phân tử và  $R = N k_B$  là hằng số khí. Nhiệt dung riêng đẳng tích sẽ bằng

$$C_v = \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_v = \frac{f}{2} R .$$

(a) Đối với một khí đơn nguyên tử,  $f = 3$  và

$$C_v = \frac{3}{2} R .$$

(b) Đối với khí lưỡng nguyên tử,  $f = 5$  và

$$C_v = \frac{5}{2} R .$$

Chú ý rằng nhiệt dung riêng tinh theo mol đều không phụ thuộc nhiệt độ đối với cả hai loại khí đơn và lưỡng nguyên tử, nếu chúng có thể được coi gần đúng là khí lý tưởng.

(c) Xét một mol chất rắn tinh thể đơn nguyên tử. Nó có thể tích  $V$  và chứa  $N$  (số Avogadro) nguyên tử. Do nó có ba kiểu dao động chuẩn nên số các kiểu dao động trong khoảng tần số góc từ  $\omega$  đến  $\omega + d\omega$  bằng (Bài tập 1014)

$$D(\omega) d\omega = \frac{3V\omega^2 d\omega}{2\pi^2 v_0^3} ,$$

trong đó  $v_0$  là tốc độ âm trong tinh thể ở tần số tối đa

$$\omega_m = \left( \frac{6\pi^2 N}{V} \right)^{1/3} v_0 .$$

Trong một chất rắn, năng lượng trung bình của một dao động tử có tần số  $\omega$  là

$$\frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} .$$

Do đó nội năng toàn phần của một mol tinh thể này là

$$\begin{aligned} U &= \int_0^{\omega_m} \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \cdot D(\omega) d\omega \\ &= \frac{3V\hbar}{2\pi^2 v_0^3} \int_0^{\omega_m} \frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \cdot \end{aligned}$$

Và nhiệt dung đẳng tích tính cho một mol là

$$C_v = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_v = \frac{3V k_B}{2\pi^2} \left( \frac{T k_B}{\hbar v_0} \right)^3 \int_0^{x_m} \frac{e^x x^4 dx}{(e^x - 1)^2} \cdot$$

trong đó  $x_m = \frac{\hbar\omega_m}{k_B T}$ . Dựa vào nhiệt độ Debye

$$\Theta = \frac{\hbar\omega_m}{k_B} \cdot$$

Ta có thể viết lại biểu thức trên thành

$$C_v = 9N k_B \left( \frac{T}{\Theta} \right)^3 \int_0^{\frac{\Theta}{T}} \frac{e^x x^4 dx}{(e^x - 1)^2} = 9N k_B F \left( \frac{T}{\Theta} \right) \cdot$$

Khi  $T \gg \Theta$ ,  $x \ll \frac{\Theta}{T}$  sao cho

$$\frac{e^x x^4}{(e^x - 1)^2} \approx \frac{x^4}{x^2} = x^2$$

và

$$F \left( \frac{T}{\Theta} \right) \approx \frac{1}{3} \left( \frac{T}{\Theta} \right)^3 \left( \frac{\Theta}{T} \right)^3 = \frac{1}{3} \cdot$$

suy ra

$$C_v \approx 3N k_B = 3R \cdot$$

Như vậy, tại các nhiệt độ cao,  $C_v$  không phụ thuộc vào nhiệt độ.

Khi  $T \ll \Theta$ ,  $\frac{\Theta}{T}$  là lớn và có thể coi là  $\infty$ , thì

$$C_v \approx 9N k_B \left( \frac{T}{\Theta} \right)^3 \int_0^{\infty} \frac{e^x x^4 dx}{(e^x - 1)^2} \cdot$$

cho thấy  $C_v \propto T^3$  tại các nhiệt độ thấp. Để có một đánh giá định lượng, ta thấy

$$\int_0^\infty \frac{x^4 dx}{e^x - 1} = 6 \sum_1^\infty \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{15}.$$

Điều này dẫn đến

$$U = \frac{3}{5} \pi^4 N k_B \frac{T^4}{\Theta^3}$$

và do đó

$$C_v = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_v = \frac{12}{5} \pi^4 N k_B \left( \frac{T}{\Theta} \right)^3 = 234 N k_B \left( \frac{T}{\Theta} \right)^3.$$

### 1017

Sử dụng mô hình Debye để tính nhiệt dung của một mạng đơn nguyên tử theo một chiều tại các nhiệt độ nhỏ so với nhiệt độ Debye  $\Theta_D = \frac{\hbar \omega_D}{k_B a}$ , ở đây  $v$  là vận tốc âm,  $a$  là hằng số mạng và  $k_B$  là hằng số Boltzmann. Không cần phải đánh giá các hằng số ở dạng tích phân.

(Columbia)

**Lời giải:**

Trong mô hình Debye, mật độ các trạng thái của một mạng đơn nguyên tử một chiều được tính bằng (Bài tập 1014)

$$\rho(\omega) = \frac{L}{\pi v} \cdot$$

Vì một kiểu dao động với tần số  $\omega$  có năng lượng trung bình

$$\frac{\hbar \omega}{e^{\hbar \omega / k_B T} - 1} \cdot$$

nên nội năng của nó sẽ bằng

$$U = \int_0^{\omega_D} \frac{L}{\pi v} \frac{\hbar \omega}{e^{\hbar \omega / k_B T} - 1} d\omega,$$

trong đó  $\omega_D$  được xác định từ phương trình

$$\int_0^{\omega_D} \frac{L}{\pi v} d\omega = N,$$

nghĩa là

$$\omega_D = \frac{\pi N v}{L} = \frac{\pi v}{a} = \frac{k_B \Theta_D}{\hbar}$$

Do đó

$$C_v = \frac{\partial U}{\partial T} = N k_B \left( \frac{T}{\Theta_D} \right) \int_0^{\Theta_D} \frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2} dx$$

Khi  $T \ll \Theta_D$ , ta có thể coi  $\frac{\Theta_D}{T} \approx \infty$ , do đó

$$\int_0^{\Theta_D} \frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2} dx \approx \int_0^{\infty} \frac{x^2 e^2}{(e^x - 1)^2} dx = \frac{\pi^2}{3}$$

suy ra

$$C_v = \frac{\pi^2}{3} N k_B \left( \frac{T}{\Theta_D} \right) = \frac{\pi k_B^2 N a}{3 \hbar v} T$$

### 1018

Than chì (graphit) có cấu trúc tinh thể dạng lớp trong đó liên kết giữa các nguyên tử ở các lớp khác nhau yếu hơn rất nhiều so với tương tác giữa các nguyên tử trong cùng một lớp. Bằng thực nghiệm người ta thấy rằng nhiệt dung riêng tỷ lệ với  $T^2$  tại các nhiệt độ thấp. Hãy dùng lý thuyết Debye để giải thích hiện tượng này.

(SUNY, Buffalo )

Lời giải:

Mô hình Debye khẳng định rằng mật độ trạng thái  $\rho(\omega)$  của một mạng tinh thể hai chiều tỷ lệ với  $\omega$  (Bài tập 1015). Nếu tương tác giữa các nguyên tử ở các lớp nguyên tử khác nhau là rất yếu thì  $\rho(\omega)$  có thể được coi gần đúng bằng tổng của các mật độ trạng thái của các lớp khác nhau và do đó vẫn tỷ lệ với  $\omega$ . Vì thế đối với một tinh thể có cấu trúc lớp

$$\rho(\omega) = A\omega$$

với  $A$  là một hằng số. Vì

$$\int_0^{\omega_D} \rho(\omega) d\omega = 3N$$

ở đây  $N$  là tổng số nguyên tử trong tinh thể,  $\omega_D$  là tần số Debye và thừa số 3 là do có ba kiểu phân cực khả dĩ, ta có

$$A = \frac{6N}{\omega_D^2}.$$

Suy ra nội năng toàn phần  $E$  của mạng là

$$\begin{aligned} E &= \int_0^{\Theta_D} \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \rho(\omega) d\omega \\ &= A \int_0^{\Theta_D} \frac{\hbar\omega^2}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} d\omega, \end{aligned}$$

và nhiệt dung riêng  $C_v$  là

$$C_v = \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_v = Ak_B \left( \frac{k_B T}{\hbar} \right)^2 \int_0^{\Theta_D} \frac{x^3 e^x}{(e^x - 1)^2} dx,$$

ở đây  $x = \frac{\hbar\omega}{k_B T}$ ,  $\Theta_D = \hbar\omega_D/k_B$ .

Khi  $T \ll \Theta_D$ ,  $\frac{\Theta_D}{T} \approx \infty$  và

$$\int_0^{\Theta_D} \frac{x^3 e^x}{(e^x - 1)^2} dx \approx \int_0^{\infty} \frac{x^3 e^x}{(e^x - 1)^2} dx$$

là một hằng số. Như vậy, theo lý thuyết Debye  $C_v \propto T^2$  tại các nhiệt độ thấp đối với một tinh thể 3 chiều cấu trúc lớp với tương tác yếu giữa các lớp, điều này phù hợp với các quan sát thực nghiệm.

Các tinh chất âm của chất rắn điện môi chiếm ưu thế hơn so với các tinh chất nhiệt động và các tinh chất khác của chúng ví dụ như điện trở dẫn quang. Kim cương là một chất rắn điện môi đơn nguyên tử cacbon có  $10^{21}$  nguyên tử trong một centimet khối.



Hình 1.7

(a) Hãy vẽ phác đồ thị của nhiệt dung riêng (tính cho một nguyên tử) của kim cương như một hàm của nhiệt độ tuyệt đối.

(b)  $T_{\text{Debye}}$  liên hệ với tần số Debye  $\omega_D$  như thế nào?

(c) Nếu vận tốc âm tại các tần số thấp là  $5 \times 10^5$  cm/s, hãy tính gần đúng giá trị của  $\omega_D$

(Wisconsin)

Lời giải:

(a) Đường cong nhiệt dung riêng (Bài tập 1016) đã được vẽ phác trên hình 1.8.

(b) Nhiệt độ Debye  $T_D$  được định nghĩa theo tần số Debye  $\omega_D$  theo hệ thức

$$k_B T_D = \hbar \omega_D .$$

(c) Đối với một mạng 3 chiều, mật độ trạng thái (Bài tập 1014) là

$$\rho(\omega) = \frac{3V\omega^2}{2\pi^3 v^3} d\omega .$$

Do

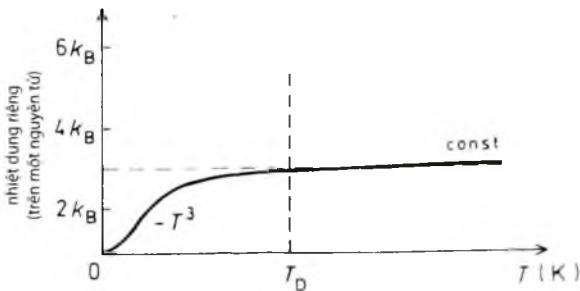
$$\int_0^\infty \rho(\omega) d\omega = 3N ,$$

nên

$$\omega_D = \left( \frac{6\pi^2 N}{V} \right)^{1/3} v = (6\pi^2 n)^{1/3} v .$$

Với  $n = 10^{27}$  m<sup>-3</sup>,  $v = 5 \times 10^5$  m/s, ta được

$$\omega_D = 1.95 \times 10^{13} \text{ s}^{-1} .$$



Hình 1.8

## 1020

Sự dẫn nhiệt của một chất rắn tinh thể phi kim đòi hỏi một cơ chế qua đó phân bố phonon có thể được đưa về trạng thái cân bằng nhiệt.

(a) Hãy chứng tỏ rằng quá trình va chạm ba phonon loại  $\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_3$  sẽ không dẫn đến trạng thái cân bằng.

(b) Mô tả dạng của quá trình dẫn đến trạng thái cân bằng.

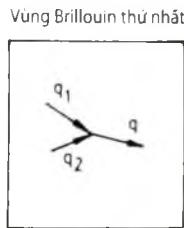
(Wisconsin)

Lời giải:

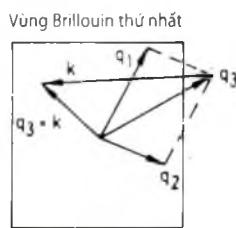
Giả thiết rằng hai phonon có các vectơ sóng  $\mathbf{q}_1$  và  $\mathbf{q}_2$  va chạm nhau và tạo ra phonon thứ 3 có vectơ sóng  $\mathbf{q}_3$ . Sự bảo toàn giả xung lượng cho phép hai quá trình sau xảy ra:

$$\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 = \begin{cases} \mathbf{q}_3 \\ \mathbf{q}_3 + \mathbf{k} \end{cases}, \quad \mathbf{k} \text{ là một vectơ mạng đảo thích hợp.}$$

Hai loại quá trình va chạm ba phonon này được biểu diễn trên hình 1.9 (a) và (b). Quá trình thứ nhất là quá trình thông thường. Quá trình thứ hai, được gọi là quá trình umklapp có thể xảy ra trong một mạng rời rạc. Trong trường hợp này,  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$  tạo nên  $\mathbf{q}_3$  nằm ngoài giới hạn  $\pm \mathbf{q}_m$  xác định biên của vùng Brillouin thứ nhất. Phonon này phải được quay trở lại vùng Brillouin thứ nhất bằng cách cộng thêm một vectơ mạng đảo  $\mathbf{k}$ , bởi vì tất cả các vectơ sóng chỉ có ý nghĩa vật lý trong vùng Brillouin thứ nhất theo quy ước thông thường.



(a) quá trình thông thường



(b) quá trình umklapp

Hình 1.9

(a) Trong quá trình  $\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_3$ , xung lượng toàn phần của hệ phonon không đổi trước và sau khi va chạm tức là mật độ dòng nhiệt không bị ảnh hưởng do va chạm. Do đó không thể thiết lập được trạng thái cân bằng và sẽ không có nhiệt trớ hay nói cách khác độ dẫn nhiệt là vô hạn.

(b) Trong quá trình umklapp  $\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_3 + \mathbf{k}$ , xung lượng toàn phần của hệ phonon sẽ thay đổi do có sự tham gia của  $\mathbf{k}$ . Phonon hiệu dụng  $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_3 + \mathbf{k}$  được sinh ra do sự va chạm chuyển động theo một hướng hẫu như đối ngược với một trong hai phonon ban đầu  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ . Khi đó, trong một khoảng thời gian hồi phục nhất định hệ sẽ đạt đến một trạng thái cân bằng nhiệt. Đó là quá trình dẫn đến nhiệt trớ có giá trị hữu hạn.

## 1021

Mô tả ngắn gọn cơ chế dẫn nhiệt của các vật rắn tinh thể điện môi. Độ dẫn nhiệt của một chất điện môi rắn (cũng như các khí v.v.) có thể được viết dưới dạng  $k = \frac{1}{3}cvI$ , ở đây  $c$  là nhiệt dung trên một đơn vị thể tích,  $v$  là vận tốc, và  $I$  là quãng đường tự do trung bình. Hãy cho những đánh giá về các tham số này với những luận chứng vật lý đối với một tinh thể điện hình tại nhiệt độ phòng.

(Wisconsin )

**Lời giải:**

Nếu như có một gradient nhiệt độ trong một tinh thể rắn cách điện thì các dao động mạng bị kích thích ở đầu nóng sẽ có số kiểu dao động nhiều hơn

và biên độ lớn hơn hay nói cách khác số phonon sẽ nhiều hơn. Khi các sóng mang này truyền về phía đầu lạnh thì các dao động mang ở phía này được tăng cường và sẽ đạt đến tới số kiểu dao động và cũng có biên độ lớn lên dần. Điều này có nghĩa là các phonon lan truyền trong mạng được di chuyển từ đầu nóng về phía đầu lạnh. Xét đến tính phi tuyến của các dao động mạng, ta thấy có sự tương tác giữa các phonon trong quá trình lan truyền. Chúng va chạm với nhau và va chạm với các sai hỏng mang trong tinh thể. Các quá trình va chạm phonon có thể là các quá trình thường hoặc là quá trình umklapp. Quá trình umklapp chiếm vai trò chủ đạo trong sự dẫn nhiệt và làm cho phân bố phonon tiến tới cân bằng. Do vậy quãng đường tự do trung bình trong biểu thức của độ dẫn nhiệt sẽ phải là biểu thức ứng với quá trình umklapp.

Lấy ví dụ tinh thể NaCl tại nhiệt độ phòng. Các giá trị điển hình là nhiệt dung riêng tính cho một mol  $C_v \approx 25 \text{ J/mol K}$ , vận tốc âm  $v = 6 \times 10^4 \text{ m/s}$ , quãng đường tự do trung bình phonon  $l = 2.3 \times 10^{-9} \text{ m}$ , thể tích mol  $v = 27 \times 10^{-6} \text{ m}^3$ . Các số liệu này cho độ dẫn nhiệt sẽ là

$$k = \frac{1}{3} \left( \frac{C_v}{V} \right) v l = 43 \text{ Wm}^{-1} \text{ K}^{-1}.$$

## 1022

- (a) Viết các định nghĩa và các công thức mô tả độ dẫn nhiệt của một chất rắn.
- (b) Chỉ ra các kích thích mang dòng nhiệt.
- (c) Vẽ phác đồ thị của độ dẫn nhiệt của một kim loại như là một hàm của nhiệt độ.
- (d) Chỉ ra sự phụ thuộc nhiệt độ đặc trưng tại các vùng nhiệt độ cao và thấp và mô tả các hiệu ứng vật lý chủ đạo trong hai vùng này.

(Wisconsin)

**Lời giải:**

- (a) Độ dẫn nhiệt của một chất rắn được định nghĩa là mật độ dòng nhiệt  $Q$  trên một gradien nhiệt độ, tức là hệ số không đổi  $k$  trong phương trình  $Q = -k \frac{\partial T}{\partial x}$ . Đối với một chất rắn phi kim, nhiệt được dẫn bởi các phonon và độ dẫn nhiệt được tính theo công thức

$$k = \frac{1}{3} C_v v l .$$

ở đây  $C_v$  là nhiệt dung đẳng tích tính cho một đơn vị thể tích của chất rắn,  $v$  và  $l$  lần lượt là tốc độ trung bình và quãng đường tự do trung bình của các phonon.

(b) Đối với các chất rắn phi kim các kích thích mang dòng nhiệt là các phonon.

(c) Độ dẫn nhiệt của một kim loại gồm hai phần, độ dẫn nhiệt của mạng tinh thể  $k_a$  đóng góp bởi các phonon và độ dẫn nhiệt điện tử  $k_e$  đóng góp bởi các electron tự do:

$$k = k_a + k_e$$

với

$$k_a = \frac{1}{3} C_a \bar{v}_a l_a ,$$

$$k_e = \frac{1}{3} C_e \bar{v}_e l_e .$$

ở đây  $C$  là nhiệt dung đẳng tích tính cho một đơn vị thể tích,  $v$  và  $l$  lần lượt là tốc độ trung bình và quãng đường tự do trung bình của các hạt (các phonon hoặc là các electron trong từng trường hợp). Vì đối với các kim loại tinh khiết thông thường

$$\frac{k_a}{k_e} = \frac{C_a \bar{v}_a l_a}{C_e \bar{v}_e l_e} \approx 10^{-2} .$$

nên độ dẫn nhiệt của một kim loại điển hình chủ yếu là do các electron tự do. Như vậy,

$$k \approx k_e = \frac{1}{3} C_e \bar{v}_e l_e = \frac{\pi^2 N k_B^2}{3m \bar{v}_e} l_e T .$$

ở đây chúng ta đã sử dụng kết quả từ thông kê Fermi-Dirac

$$C_e = \frac{\pi^2 N k_B^3 T}{m \bar{v}_e^2} =$$

$N$  là số các electron tự do trong một đơn vị thể tích. Vì  $l_e$  chủ yếu gây ra do tán xạ electron-phonon nên

$$l_e \propto \frac{1}{n_{ph}}$$

ở đây  $n_{ph}$  là số phonon trung bình trong một đơn vị thể tích tại nhiệt độ  $T$ .

(1) Tại các nhiệt độ cao,

$$n_{ph} \propto T .$$

hay  $l_e \propto T^{-1}$ , suy ra

$$k = \text{constant},$$

không phụ thuộc vào nhiệt độ.

(2) Tại các nhiệt độ thấp,

$$\eta_{\text{ph}} \propto T^3,$$

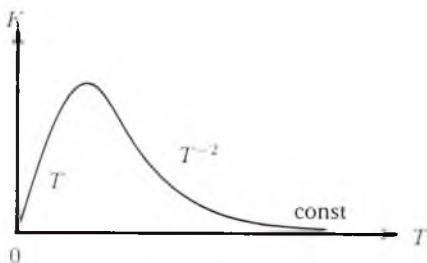
hay  $l_e \propto T^{-3}$ , suy ra

$$k = T^{-2}.$$

(3) Tại các nhiệt độ rất thấp, số các phonon rất nhỏ và tán xạ của các electron tự do chủ yếu gây ra bởi các tạp chất. Như vậy  $l_e \propto \frac{1}{N_l}$ ,  $N_l$  là mật độ số hạt của các nguyên tử tạp chất không phụ thuộc vào  $T$ . Như vậy

$$k \propto T.$$

Những điều nói trên được tổng hợp trên đồ thị biểu diễn sự phụ thuộc nhiệt độ của độ dẫn nhiệt của chất rắn kim loại trên hình 1.10.



Hình 1.10

### 1023

Một vật liệu có mật độ  $\rho$  và có mạng lập phương tâm mặt với chiều dài cạnh lập phương là  $a_0$  và nhiệt độ Einstein  $\theta_E$ . Đối với giới hạn nhiệt độ cao, nghĩa là  $T > \theta_E$ , hãy biểu diễn độ dẫn nhiệt chuyển nguyên tử bình phương trung bình theo phương  $x$ ,  $M_x^2$ , theo  $\rho$ ,  $a_0$  và  $\theta_E$  cùng với các hằng số vật lý cần thiết khác.

(Wisconsin)

Lời giải:

Đối với một mạng lập phương tâm mặt, thể tích của một ô cơ sở tính cho một nguyên tử là  $a_0^3/4$  sao cho

$$\rho = \frac{4m}{a_0^3}.$$

ở đây  $m$  là khối lượng của một nguyên tử.

Trong mô hình Einstein một mạng gồm  $N$  nguyên tử được coi như là một tập hợp  $3N$  các dao động tử một chiều độc lập, mỗi một dao động tử có một tần số góc độc lập  $\omega_E$  liên hệ với nhiệt độ Einstein  $\theta_E$  bởi hệ thức

$$\hbar\omega_E = k_B\theta_E .$$

Đối với một dao động tử điều hoà thê năng trung bình  $\frac{k}{2}\overline{\mu_x^2}$  và động năng trung bình  $\frac{m}{2}\dot{x}^2 = \frac{m}{2}\omega_E^2\overline{\mu_x^2}$  là bằng nhau, mỗi số hạng này bằng một nửa năng lượng toàn phần  $(n + \frac{1}{2})\hbar\omega_E$  được suy ra từ cơ học lượng tử. Do đó độ dịch chuyển trung bình là

$$\overline{\mu_x^2} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_E / k = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar/m\omega_E .$$

Tại nhiệt độ  $T$ , các dao động tử được phân bố trên các trạng thái riêng theo định luật phân bố Boltzmann  $\exp\left[-(n + \frac{1}{2})\frac{\hbar\omega_E}{k_B T}\right]$ . Do đó,

$$\begin{aligned} \overline{\mu_x^2} &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\hbar}{m\omega_E} e^{-(n + \frac{1}{2})\hbar\omega_E/k_B T}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n + \frac{1}{2})\hbar\omega_E/k_B T}} \\ &= \frac{\hbar}{m\omega_E} \left( \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-n\hbar\omega_E/k_B T}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\hbar\omega_E/k_B T}} + \frac{1}{2} \right) . \end{aligned}$$

Số hạng đầu tiên trong ngoặc có thể được viết thành

$$\begin{aligned} \frac{\sum n e^{nx}}{\sum e^{nx}} &= \frac{\sum \frac{d}{dx} e^{nx}}{\sum e^{nx}} = \frac{\frac{d}{dx} \sum e^{nx}}{\sum e^{nx}} = \frac{d}{dx} \ln \sum e^{nx} \\ &= \frac{d}{dx} \ln \left( \frac{1}{1 - e^x} \right) = \frac{e^x}{1 - e^x} = \frac{1}{e^{-x} - 1} \end{aligned}$$

bằng cách đặt  $x = -\frac{\hbar\omega_E}{k_B T}$ . Do vậy

$$\overline{\mu_x^2} = \frac{\hbar}{m\omega_E} \left( \frac{1}{e^{\hbar\omega_E/k_B T} - 1} + \frac{1}{2} \right) .$$

Với  $m = \frac{a_0^3 \rho}{4}$ ,  $\omega_E = \frac{k_B \theta_E}{\hbar}$ , đối với giới hạn nhiệt độ cao, ta có

$$\begin{aligned}\overline{\mu_i^2} &= \frac{4\hbar^2}{k_B \theta_E a_0^3 \rho} \left( \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} + \frac{1}{2} \right) \\ &\approx \frac{4\hbar^2}{k_B \theta_E a_0^3 \rho} \cdot \frac{T}{\theta_E} \\ &= \frac{4\hbar^2 T}{k_B \theta_E^2 a_0^3 \rho}.\end{aligned}$$

### 1024

Xét một chất rắn dao động.

(a) Đánh giá năng lượng tự do Helmholtz  $F$  của một kiểu phonon có tần số  $\omega$  tại nhiệt độ  $T$ .

(b) Giả thiết rằng chất rắn là dàn hồi với suất dàn hồi là  $B$  và  $\Delta$  là tỷ phần thay đổi thể tích. Bỏ qua tán sắc của các kiểu phonon, nghĩa là đặt  $\omega_k = \omega_0$  hãy viết biểu thức năng lượng tự do của tinh thể.

(c) Nếu sự phụ thuộc thể tích của  $\omega$  là  $\delta\omega/\omega = -\gamma\Delta$ , ở đây  $\gamma$  được gọi là hằng số Grüneisen thì độ co của vật liệu tại nhiệt độ  $T$  là bao nhiêu?

(d) Thảo luận về ý nghĩa vật lý của hằng số Grüneisen.

(Princeton)

Lời giải:

(a) Đối với một kiểu phonon tần số  $\omega$ , hàm phân bố là

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+\frac{1}{2})\hbar\omega/k_B T} = \frac{e^{-\hbar\omega/2k_B T}}{1 - e^{-\hbar\omega/k_B T}}.$$

Năng lượng tự do Helmholtz của một kiểu phonon do đó sẽ là

$$\begin{aligned}F &= -k_B T \ln Z \\ &= k_B T \left[ \frac{\hbar\omega}{2k_B T} + \ln(1 - e^{-\hbar\omega/k_B T}) \right].\end{aligned}$$

(b) Năng lượng tự do của một tinh thể bằng

$$F(V, T) = U(V) + k_B T \sum_k \left[ \frac{\omega_k}{2k_B T} + \ln(1 - e^{-\omega_k/k_B T}) \right],$$

ở đây  $V$  là thể tích của tinh thể. Nếu  $\omega_k = \omega$  và  $N$  là tổng số bậc tự do của tinh thể, ta có

$$F(V, T) = U(V) + Nk_B T \left[ \frac{\hbar\omega}{2k_B T} + \ln(1 - e^{-\hbar\omega/k_B T}) \right].$$

ở đây  $U(V)$  là nội năng của tinh thể tại  $T = 0$  K.

(c) Do tính phi tuyến của dao động,  $\omega$  thay đổi theo thể tích. Phương trình trạng thái của tinh thể vì vậy sẽ là

$$p = - \left( \frac{\partial F}{\partial V} \right)_T = - \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T - N \left( \frac{1}{2} \hbar + \frac{\hbar e^{-\hbar\omega/k_B T}}{1 - e^{-\hbar\omega/k_B T}} \right) \frac{\partial \omega}{\partial V}.$$

Vì  $\frac{\delta\omega}{\omega} = -\gamma\Delta = -\gamma\frac{\delta V}{V}$ , ta có

$$\frac{\partial \omega}{\partial V} = -\gamma \frac{\omega}{V},$$

và

$$p = - \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + \gamma \frac{\dot{E}}{V},$$

ở đây

$$\dot{E} = N \left( \frac{1}{2} \hbar\omega + \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \right)$$

là năng lượng dao động mạng tại tần số góc  $\omega$ .

Vì sự giãn nở nhiệt xảy ra do sự dao động mạng, nên trong trường hợp không có áp suất bên ngoài tác dụng, ta có  $p = 0$  và vì thế

$$\frac{\partial U}{\partial V} = \gamma \frac{\dot{E}}{V}.$$

Khai triển  $\frac{\partial U}{\partial V}$  quanh giá trị thể tích  $V_0$  theo khai triển Taylor, ta có

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial V} &= \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_{V_0} + \left( \frac{\partial^2 U}{\partial V^2} \right)_{V_0} \delta V + \dots \\ &\approx \left( \frac{\partial^2 U}{\partial V^2} \right)_{V_0} \delta V. \end{aligned}$$

Sử dụng định nghĩa về suất dàn hồi thể tích của một mạng tinh,

$$B = V_0 \left( \frac{\partial^2 U}{\partial V^2} \right)_{V_0},$$

Ta có

$$\frac{\partial U}{\partial V} = B \frac{\delta V}{V_0} = \gamma \frac{\bar{E}}{V},$$

hay

$$\frac{\delta V}{V_0} = \gamma \frac{\bar{E}}{BV}$$

tại nhiệt độ  $T$ .

(d) Vi phân hai vế của phương trình trên theo  $T$ , với  $\frac{\partial \bar{E}}{\partial T} \gg \frac{\partial V}{\partial T}$ , ta có

$$\frac{1}{V_0} \frac{\partial \delta V}{\partial T} = \frac{\gamma}{BV} \frac{\partial \bar{E}}{\partial T} = \frac{\gamma}{BV} C_v.$$

Do đó, từ định nghĩa về hệ số giãn nở thể tích

$$\alpha = \frac{1}{V_0} \left( \frac{\partial \delta V}{\partial T} \right)_p,$$

ta rút ra hệ thức Gruneisen

$$\alpha = \gamma \frac{C_v}{BV}.$$

Ta thấy rằng nếu dao động của một tinh thể tuyệt đối tuyến tính,  $\gamma = 0$  và do đó  $\alpha = 0$ , nghĩa là sẽ không có giãn nở nhiệt. Do sự giãn nở nhiệt có xảy ra, nên hệ số giãn nở nhiệt cho ta thước đo về tính phi tuyến của dao động mạng tinh thể.

## 1025

Nhiều xạ nôtron có thể sử dụng để đo  $\omega$  theo  $k$  đổi với một kích thích trong một tinh thể rắn. Để mô tả điều này, giả thiết rằng ta đã biết đổi xứng của tinh thể, hãy viết các định luật bảo toàn năng lượng và xung lượng cho quá trình nhiều xạ, và sau đó chỉ ra những tham số cần phải đo để thu được sự phụ thuộc của  $\omega$  vào  $k$ .

(Wisconsin)

Lời giải:

Đặt  $M$  là khối lượng của một nôtron,  $\mathbf{p}$  và  $\mathbf{p}'$  là các xung lượng và  $\mathbf{k}$  và  $\mathbf{k}'$  là các vectơ sóng của các nôtron tới và nôtron tán xạ. Do đó  $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{p}' = \hbar \mathbf{k}'$  và các năng lượng tương ứng là  $\frac{\mathbf{p}^2}{2M}, \frac{\mathbf{p}'^2}{2M}$ . Theo định luật bảo toàn năng lượng

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2M} = \frac{\hbar^2 k'^2}{2M} \pm \hbar \omega(\mathbf{q})$$

và theo định luật bảo toàn xung lượng

$$\hbar \mathbf{k} = \hbar \mathbf{k}' \pm \hbar \mathbf{q} - \hbar \mathbf{G}.$$

ở đây  $\mathbf{G}$  là một vectơ mạng đảo thích hợp, và  $\mathbf{q}$  là vectơ sóng của phonon được sinh ra (+) hoặc bị hấp thụ (-) trong quá trình đó.

Để thu được sự phụ thuộc của  $\omega$  vào  $k$  từ phương trình trên ta cần do hiệu năng lượng giữa các nutron tới và nutron tán xạ như một hàm của phương tán xạ  $\mathbf{k} - \mathbf{k}'$ .

### 1026

Xét sự có mặt của các sai hỏng điểm dưới dạng các nút khuyết ở trạng thái cân bằng nhiệt trong một tinh thể lập phương đơn giản nguyên tử có  $N$  nút mạng.

(a) Viết hoặc đánh giá số  $n$  các sai hỏng đó trong một tinh thể được giữ ở nhiệt độ  $T$  nếu nó tiêu tốn một năng lượng  $E$  để tạo ra được một nút khuyết. (Giả thiết rằng  $n \ll N$ .)

Bây giờ ta xét ảnh hưởng của các dao động mạng (tức là các phonon) đến kết quả này. Ghi nhớ lý thuyết Einstein đơn giản về các kiểu dao động chuẩn của tinh thể với các nút khuyết, nghĩa là coi mỗi một ion như là một dao động tự độc lập, chọn hai tần số khác nhau gọi là  $\omega$  và  $\omega'$ , phụ thuộc vào việc một ion cho trước có một trong sáu vị trí nút mạng lân cận gần nhất là nút khuyết hay không.

(b) Trong hai tần số, tần số nào có giá trị lớn hơn?

(c) Số  $n$  sẽ thay đổi thế nào nếu có mặt các phonon?

(Princeton)

Lời giải:

(a) Bò qua ảnh hưởng của các phonon, số các nút khuyết ở trạng thái cân bằng nhiệt ở nhiệt độ  $T$  là

$$n = N e^{-E/k_B T},$$

ở đây  $E$  là năng lượng cần thiết để tạo ra một nút khuyết.

(b) Khi có các nút khuyết quanh một nguyên tử, thì lực hồi phục tác dụng lên nguyên tử đó khi nó dịch chuyển ra khỏi vị trí cân bằng sẽ trở nên nhỏ hơn. Do đó  $\omega'$  nhỏ hơn  $\omega$ .

(c) Bây giờ ta xét ảnh hưởng của các phonon. Do  $n \ll N$ , quanh mỗi một nút khuyết có sáu nguyên tử lân cận gần nhất mà tần số của nó đã biến đổi

từ  $\omega$  thành  $\omega'$ . Do mỗi một vị trí nút mạng thể hiện ba kiểu dao động vậy sẽ có  $3(N - 6n)$  phonon có tần số  $\omega$  và  $3 \times 6n$  phonon có tần số  $\omega'$ . Sự đóng góp của một phonon tần số  $\omega$  vào năng lượng tự do của tinh thể là (Bài tập 1024)

$$k_B T \left[ \frac{\hbar\omega}{2k_B T} + \ln(1 - e^{\hbar\omega/k_B T}) \right] \approx k_B T \ln \frac{\hbar\omega}{k_B T}$$

trong giới hạn cổ điển  $\hbar\omega \ll k_B T$ . Do đó năng lượng tự do của tinh thể là

$$F = U_0 + nE + 3(N - 6n)k_B T \ln \frac{\hbar\omega}{k_B T} + 18nk_B T \ln \frac{\hbar\omega'}{k_B T} - k_B T \ln \frac{N!}{(N - n)!n!},$$

ở đây  $U_0$  là nội năng của tinh thể tại 0 K, và số hạng cuối cùng được đóng góp do entropy hỗn hợp.

Tại trạng thái cân bằng,

$$\left( \frac{\partial F}{\partial n} \right)_T = 0,$$

hay

$$\frac{\partial}{\partial n} \left[ \frac{nE}{k_B T} + 18n \ln \frac{\omega'}{\omega} + \ln(N - n)! + \ln n! \right] = 0.$$

Sử dụng công thức Stirling

$$\ln x! \approx x \ln x$$

với  $x \rightarrow \infty$ , và cả hai giá trị  $N$  và  $n$  đều lớn mặc dù  $n \ll N$ , ta có

$$\frac{E}{k_B T} + 18 \ln \frac{\omega'}{\omega} + \ln \frac{n}{N} = 0,$$

hay

$$n = N \left( \frac{\omega}{\omega'} \right)^{18} e^{-\frac{E}{k_B T}},$$

với sự có mặt của các phonon.

### 1027

Một hợp kim đôi có  $N_A$  nguyên tử A và  $N_B$  nguyên tử B. Các nguyên tử tạo thành một mạng lập phương đơn giản trong đó mỗi một nguyên tử chỉ tương tác với sáu nguyên tử lân cận gần nhất. Các năng lượng tương tác là  $-J$  ( $J > 0$ ) đối với các cặp A-A hoặc B-B, và bằng  $+J$  đối với cặp A-B.

- (a) Hãy tính entropy hỗn hợp của hợp kim. Giả thiết rằng  $N = N_A + N_B \gg 1$ .
- (b) Hãy tính năng lượng tương tác toàn phần với giả thiết rằng các nguyên tử được phân bố một cách ngẫu nhiên ở các vị trí nút mạng.
- (c) Hãy tính năng lượng tự do  $F$  của hệ, như là một hàm của  $x$ , ở đây  $N_A = N(1+x)/2$  và  $N_B = N(1-x)/2$ . Khai triển  $F(x)$  tới bậc 4 của  $x$ . Chỉ ra rằng có một nhiệt độ tới hạn  $T_c$ , trên và dưới nhiệt độ đó đường cong  $F(x)$  có dạng khác nhau. Xác định  $T_c$  và vẽ  $F$  như một hàm của  $x$  với  $T > T_c$ ,  $T = T_c$  và  $T < T_c$ .
- (d) Đối với  $T < T_c$ , hệ với một hợp phần  $|x| < x_p(T)$  trở nên không bền và tách thành hai pha có hai hợp phần khác nhau. Sử dụng kết quả từ (c) để tìm  $x_p(T)$  và các hợp phần của hai pha riêng rẽ.

(MIT)

**Lời giải:**

(a) Entropy hỗn hợp bằng

$$S = k_B \ln \Omega ,$$

ở đây

$$\Omega = \frac{N!}{N_A! N_B!} .$$

Sử dụng công thức Stirling

$$\ln N! \approx N \ln N ,$$

ta có

$$\ln \Omega \approx N_A \ln \left( 1 + \frac{N_B}{N_A} \right) + N_B \ln \left( 1 + \frac{N_A}{N_B} \right) ,$$

và do đó

$$\begin{aligned} S &= k_B N_A \ln \left( 1 + \frac{N_B}{N_A} \right) + k_B N_B \ln \left( 1 + \frac{N_A}{N_B} \right) \\ &= N k_B \ln 2 - \frac{N}{2} k_B [(1+x) \ln(1+x) + (1-x) \ln(1-x)] . \end{aligned}$$

(b) Bởi vì về trung bình mỗi một nguyên tử sẽ có các lân cận gần nhất là  $\frac{N_A}{N}$  nguyên tử A và  $\frac{N_B}{N}$  nguyên tử B và tỷ phần của các nguyên tử A, B trong mạng tinh thể là  $\frac{N_A}{N}$  và  $\frac{N_B}{N}$  nên năng lượng tương tác trung bình  $U$  của một

nguyên tử với các lân cận gần nhất sẽ bằng

$$\begin{aligned} U &= 6 \left[ (-J) \frac{N_A}{N} + J \frac{N_B}{N} \right] \frac{N_A}{N} + 6 \left[ (-J) \frac{N_B}{N} + J \frac{N_A}{N} \right] \frac{N_B}{N} \\ &= 6 \left[ (-J) \frac{N_A^2 + N_B^2}{N^2} + J \frac{2N_A N_B}{N^2} \right] \\ &= -\frac{6J}{N^2} (N_A - N_B)^2 . \end{aligned}$$

Do đó năng lượng tương tác toàn phần  $E$  sẽ là

$$\begin{aligned} E &= \frac{N}{2} U = -\frac{3J}{N} (N_A - N_B)^2 \\ &= -3N J x^2 . \end{aligned}$$

(c) Năng lượng tự do  $F$  của hệ là

$$\begin{aligned} F &= E - TS \\ &= -3N J x^2 - N k_B T \ln 2 + \frac{N k_B T x}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{N k_B T}{2} \ln(1-x^2) \\ &= -N k_B T \ln 2 + \left( \frac{1}{2} N k_B T - 3N J \right) x^2 + \frac{1}{12} N k_B T x^4 + \dots . \end{aligned}$$

ở đây ta đã sử dụng các khai triển

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots , \\ \ln \frac{1+x}{1-x} &= 2 \left( x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right) . \end{aligned}$$

Để tìm nhiệt độ tối hạn  $T_c$  tại đó  $F$  thay đổi hình dạng, ta xét  $\frac{\partial F}{\partial x}$  và  $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$  tại điểm  $x = 0$ . Điều này cho thấy  $T_c$  được xác định qua

$$\frac{N}{2} k_B T_c - 3N J = 0 .$$

tức là

$$T_c = \frac{6J}{k_B} .$$

Thực tế

$$\left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)_{x=0} \begin{cases} = 0, & T = T_c, \\ > 0, & T > T_c, \\ < 0, & T < T_c, \end{cases} \quad \begin{cases} F(0) = F_{\min}, \\ F(0) = F_{\max}. \end{cases}$$

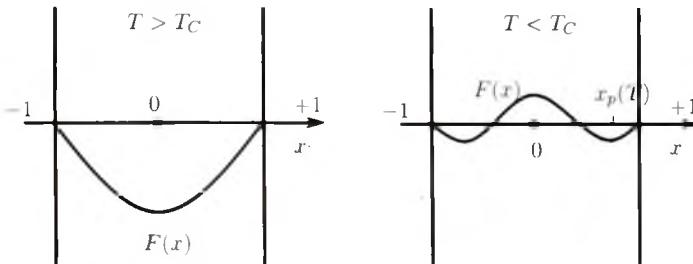
cho thấy  $T_c$  là nhiệt độ chuyển pha tới hạn.  $F(x)$  được vẽ cho  $T > T_c$  và  $T < T_c$  trên hình 1.11.

(d) Như đã chỉ ra trên hình 1.11 khi  $T < T_c$  năng lượng tự do có một cực tiểu tại  $x = x_p(T)$ . Năng lượng tự do lớn hơn giá trị cực tiểu khi  $|x| < x_p(T)$ , hệ sẽ trở nên không bền. Để tìm được  $x_p(T)$ , đặt  $\frac{dF}{dx} = 0$ , tức là

$$Nk_B T - 6NJ + \frac{1}{3}Nk_B T x^2 = 0,$$

và thu được

$$x_p(T) = \pm \sqrt{\frac{3(T_c - T)}{T}}.$$



Hình 1.11

Các hợp phần của hai pha riêng rẽ do vậy sẽ bằng

$$x_1 = \sqrt{\frac{3(T_c - T)}{T}}, \quad x_2 = -\sqrt{\frac{3(T_c - T)}{T}},$$

## 1.2. THUYẾT ELECTRON, CÁC VÙNG NĂNG LƯỢNG VÀ CÁC CHẤT BẢN DẪN (1028 1051)

1028

Mô hình electron tự do cho một kim loại giả thiết rằng các electron dẫn có thể xét gần đúng như một khí các electron tự do ở đó các tham số quan trọng đối với chất khí đó chỉ là  $n$ , mật độ electron và  $\tau$ , là thời gian giữa các

va chạm. Hãy chứng tỏ rằng trong mô hình này, độ dẫn điện của kim loại có thể được biểu diễn bởi công thức

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m} .$$

Đánh giá thời gian va chạm  $\tau$  cho một électron trong kim loại đồng. Biết điện trở suất của đồng là  $1,7 \times 10^{-6}$  ôm cm và mật độ nguyên tử của đồng là  $8,5 \times 10^{22}$  nguyên tử/cm<sup>3</sup>.

(Wisconsin)

### Lời giải:

Đối với một électron, xung lượng  $p$  và vectơ sóng  $k$  được liên hệ qua biểu thức

$$p = \hbar k .$$

Phương trình chuyển động của nó trong trường lực tác dụng  $F$  được cho bởi định luật thứ hai của Newton như sau

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \hbar \frac{dk}{dt} .$$

Trong khi các vectơ sóng của tất cả các électron tăng lên song song với lực tác dụng  $F$ , thì một trạng thái cân bằng sẽ đạt được với các électron quay trở lại các trạng thái ban đầu của chúng do va chạm với các ion mạng trong khoảng “thời gian hồi phục”  $\tau$  đối với va chạm được tính bằng

$$\delta k = \frac{\tau}{\hbar} F ,$$

ở đây  $\delta k$  là sự thay đổi của vectơ sóng  $k$  từ giá trị cân bằng. Sự thay đổi tương ứng về vận tốc là

$$\delta v = \frac{\delta p}{m} = \frac{\hbar}{m} \delta k = \frac{\tau F}{m} .$$

Nếu điện trường tác dụng là  $E$ , lực tác dụng lên mỗi électron là

$$F = -eE .$$

Do đó, mật độ dòng điện

$$j = -ne\delta v = \frac{ne^2\tau}{m} E = \sigma E .$$

ở đây

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}$$

theo định luật Ohm, là độ dẫn điện của kim loại theo định luật Ohm. Nếu mỗi một nguyên tử đóng góp một électron, thì  $n = 8.5 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$  và

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{m\sigma}{ne^2} = \frac{m}{ne^2\rho} \\ &= \frac{9.11 \times 10^{-31}}{8.5 \times 10^{28} \times (1.6 \times 10^{-19})^2 \times 1.7 \times 10^{-8}} = 2.5 \times 10^{-14} \text{ s}.\end{aligned}$$

### 1029

Natri kim loại két tinh dưới dạng lập phương tâm khói, chiều dài cạnh lập phương là  $4.25 \times 10^{-8} \text{ cm}$ . Tìm nồng độ các électron dẫn. Giả thiết có một électron dẫn trên một nguyên tử. Áp dụng mô hình khí Fermi cho các électron dẫn, hãy suy ra một biểu thức cho năng lượng Fermi (tại 0 K) và chứng tỏ rằng nó chỉ phụ thuộc vào nồng độ điện tử mà không phụ thuộc vào khối lượng của tinh thể.

(Wisconsin)

**Lời giải:**

Một mạng bcc chứa  $\frac{2}{a^3}$  nguyên tử trong một đơn vị thể tích, vì thế nồng độ của các électron dẫn bằng

$$n = \frac{2}{(4.25 \times 10^{-8})^3} = 2.6 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3}.$$

Theo mô hình khí Fermi của các électron tự do, số các électron trong một thể tích  $V$  với các giá trị năng lượng nằm trong khoảng  $E$  tới  $E + dE$  là

$$dN = CE^{1/2}f(E)dE$$

với  $C = 4\pi V(2m)^{3/2}/\hbar^3$ ,  $m$  là khối lượng của électron. Tại  $T = 0 \text{ K}$ , hàm phân bố  $f(E)$  là

$$f(E) = \begin{cases} 1 & \text{với } E \leq E_F \\ 0 & \text{với } E > E_F \end{cases}.$$

Do đó tổng số électron trong  $V$  là

$$N = \int_0^{E_F} CE^{1/2}dE = \frac{2}{3}CE_F^{3/2}.$$

ở đây  $E_{F0}$  là năng lượng Fermi tại  $T = 0$  K. Do  $n = \frac{N}{V}$ , năng lượng Fermi tại 0 K bằng

$$E_{F0} = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{3n}{8\pi} \right)^{\frac{2}{3}} = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{\frac{2}{3}}.$$

Đối với natri kim loại ta có

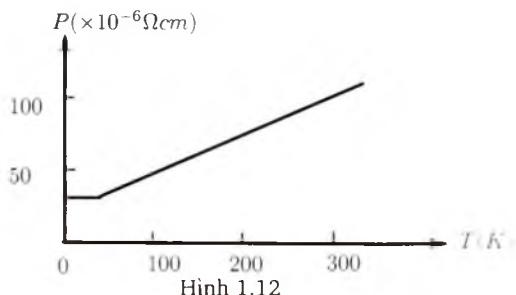
$$E_{F0} = \frac{(1.05 \times 10^{-27})^2}{2 \times 9.1 \times 10^{-28}} \times \frac{(3\pi^2 \times 26 \times 10^{21})^{2/3}}{1.6 \times 10^{-12}} = 3.18 \text{ eV}.$$

Biểu thức của  $E_{F0}$  chứng tỏ rằng nó chỉ phụ thuộc vào nồng độ điện tử mà không phụ thuộc vào khối lượng của tinh thể.

### 1030

Hình 1.12 là một đồ thị thô của điện trở suất của một chất rắn ( $\text{ErRhB}_4$ , có lân một số tạp chất).

(a) Từ đồ thị hãy cho biết vật liệu này là kim loại hay điện môi?



Hình 1.12

(b) Mô tả các quá trình vật lý cơ bản gây ra điện trở, và giải thích sự phụ thuộc của điện trở suất vào nhiệt độ trong ba khoảng nhiệt độ sau:

- (1)  $T$  rất gần 0 K,
- (2)  $T$  gần 25 K,
- (3)  $T$  gần 300 K.

(c) Đánh giá quang đường tự do trung bình và thời gian tự do trung bình tại  $T = 0$  K và  $T = 300$  K. Vật liệu này có phải là một kim loại tốt không?

(Các con số cần thiết liên quan:  $n = 10^{23} \text{ cm}^{-3}$ ,  $e = 5 \times 10^{-10} \text{ esu}$ ,  $m = 10^{-27} \text{ g}$ ,  $v_F = 10^8 \text{ cm/s}$ ,  $1 (\Omega\text{cm})^{-1} = 9 \times 10^{11} \text{ esu}$ .)

(Princeton)

Lời giải:

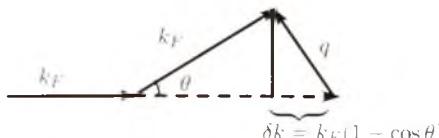
(a) Như ta thấy từ hình 1.12 điện trở suất của vật liệu này nhin chung tăng khi nhiệt độ tăng và vẫn là nhỏ tại  $T = 300 \text{ K}$ , ( $\rho \sim 10^{-4} \Omega\text{cm}$ ). Do vậy vật liệu này là một kim loại.

(b) Nếu mạng tinh thể của một kim loại là hoàn hảo và không có dao động mạng thì các sóng électron sẽ di qua mạng mà không bị tán xạ và không có điện trở. Trong một kim loại thực, các électron bị tán xạ do các sai lệch của trường thê tuân hoán gây bởi các dao động nhiệt của các nguyên tử trong mạng và do những sự bất thường về cấu trúc ví dụ như các tạp chất và sai hỏng trong tinh thể dẫn đến xuất hiện một điện trở suất. Như vậy điện trở suất của một kim loại có thể được coi như là tổng của hai đóng góp

$$\rho = \rho_{\text{phonon}} + \rho_{\text{tạp chất}}$$

(1) Tại  $T$  rất gần  $0 \text{ K}$ , điện trở suất của một kim loại bị chiếm ưu thế bởi điện trở suất do  $\rho_{\text{tạp chất}}$ , không phụ thuộc vào nhiệt độ. Như vậy  $\rho \approx \rho_{\text{tạp chất}} = \text{hằng số}$ . Đường cong trên Hình 1.12 cho thấy  $\rho \approx 27 \times 10^{-6} \Omega\text{cm}$ , về cơ bản là một hằng số gần  $0 \text{ K}$ .

(2) Tại  $T$  gần  $25 \text{ K}$ , điện trở được sinh ra chủ yếu do tán xạ của các điện tử gây bởi các phonon mạng mặc dù sự tán xạ của các tạp chất vẫn đồng thời xảy ra. Tại các nhiệt độ thấp như vậy chỉ có các phonon âm sóng dài có thể bị kích thích khi mà xung lượng của chúng  $q$  rất nhỏ. Sự thay đổi của xung lượng của các électron theo phương của điện trường gây ra do tán xạ bởi phonon cũng rất nhỏ dẫn tới các góc tán xạ nhỏ.



Hình 1.13

Xét một tán xạ như vậy. Sự thay đổi của xung lượng électron  $\hbar k_F$  theo phương của điện trường là (hình 1.13)

$$\hbar \delta k_F = \hbar k_F (1 - \cos \theta) \approx \hbar k_F \cdot \frac{\theta^2}{2}$$

tức là, xung lượng giảm theo tỷ phần  $\frac{\theta^2}{2}$  sau mỗi một lần tán xạ. Để  $\hbar k_F$  bị triệt tiêu cần phải có một số  $r$  các va chạm được xác định từ hệ thức

$$\hbar k_F \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)^r \approx \hbar k_F \left(1 - \frac{r\theta^2}{2}\right) \approx 0.$$

hay

$$r \approx \frac{2}{\theta^2} \approx \frac{2k_F^2}{q^2}.$$

do  $\theta \approx \frac{q}{k_F}$  (xem hình 1.13).  $r$  và chạm đó được coi như là va chạm hiệu dụng làm lệch hướng của electron khỏi đường đi ban đầu. Năng lượng của phonon bằng  $\hbar\omega = \hbar v_s q \approx k_B T$ , ở đây  $v_s$  là vận tốc âm. Như vậy  $q \propto T$  và  $r \propto T^{-2}$ . Số va chạm với các phonon tỷ lệ với mật độ số hạt  $n_s$  của các phonon. Theo lý thuyết Debye

$$n_s = \int_0^{\Theta_D} \frac{B\omega^2}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} d\omega \propto \frac{1}{x^3} \int_0^x \frac{y^2 dy}{e^y - 1},$$

ở đây  $x = \frac{\Theta_D}{T}$ ,  $\Theta_D$  là nhiệt độ Debye. Đối với các nhiệt độ thấp ( $T \sim 25$  K)  $T \ll \Theta_D$ ,  $x \rightarrow \infty$  và

$$n_s \propto \frac{1}{x^3} \propto T^3.$$

Do đó xác suất để có tán xạ hiệu dụng đối với một electron là

$$\frac{1}{\tau} \propto \frac{\text{mật độ phonon}}{r} \propto T^5,$$

Dẫn đến điện trở suất là

$$\rho \propto \frac{1}{\tau} \propto T^5.$$

(3) Đối với  $T$  gần 300 K,  $T \gg \Theta_D$  và theo lý thuyết Debye

$$n_s \propto \frac{1}{x^3} \int_0^x \frac{y^2 dy}{y} \propto T.$$

Hơn nữa, khi xung lượng của phonon là lớn, mỗi một quá trình tán xạ đều hiệu quả để làm lệch đường đi của điện tử. Do vậy

$$\rho \propto \frac{1}{\tau} \propto n_s \propto T.$$

(c) Thời gian giữa các va chạm hay còn gọi là thời gian tự do trung bình  $\tau$  liên hệ với độ dẫn  $\sigma$  (Bài tập 1028) qua biểu thức

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}.$$

Do đó

$$\tau = \frac{m}{ne^2\rho},$$

ở đây  $n$  là mật độ electron và  $\rho = \frac{1}{\sigma}$  là điện trở suất của kim loại. Quãng đường tự do trung bình tương ứng

$$l = v_F\tau.$$

(1) Ở  $T = 0$  K, hình 1.12 cho  $\rho \approx 27 \times 10^{-6} \Omega \text{ cm}$ . Do đó

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{m}{ne^2\rho} = \frac{10^{-27} \times 9 \times 10^{11}}{10^{23} \times (5 \times 10^{-10})^2 \times 27 \times 10^{-6}} = 1.3 \times 10^{-15} \text{ s}, \\ l &= 10^8 \times 1.3 \times 10^{-15} = 1.3 \times 10^{-7} \text{ cm}.\end{aligned}$$

(2) Ở  $T = 300$  K, hình 1.12 cho  $\rho \approx 120 \times 10^{-6} \Omega \text{ cm}$ . Do đó

$$\tau = \frac{27}{120} \times 1.3 \times 10^{-15} = 3 \times 10^{-16} \text{ s},$$

$$l = 10^8 \times 3 \times 10^{-16} = 3 \times 10^{-8} \text{ cm} = 3 \text{ \AA}.$$

Tại nhiệt độ phòng  $T \approx 300$  K, quãng đường tự do trung bình của một kim loại tốt là  $\approx 300\text{--}400$  \AA. Quãng đường tự do trung bình của vật liệu này nhỏ hơn nhiều. Vì  $\sigma \propto l$ , nên vật liệu này không phải là một kim loại tốt.

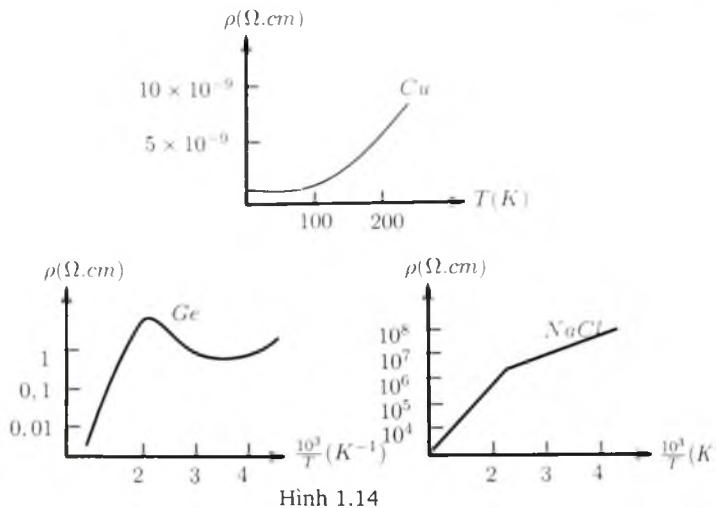
### 1031

Các đồ thị trên hình 1.14 biểu diễn sự phụ thuộc của điện trở suất của Cu, Ge, và NaCl vào nhiệt độ. Chúng mô tả các mẫu "thực" tinh khiết cao: độ tinh khiết  $> 99,9\%$ , chứ không phải là 100%. Mô tả ngắn gọn cho từng trường hợp cơ chế cơ bản của quá trình dẫn và giải thích sự phụ thuộc theo nhiệt độ như được biểu thị trên hình. (Chú ý rằng các trục của ba đồ thị có khác nhau.)

(Columbia)

**Lời giải:**

(1) Cu là một kim loại. Đồ thị điện trở suất theo nhiệt độ của nó cho thấy: tại  $T \approx 0$  K, điện trở suất nhỏ và có thể coi là một hằng số; đối với



$0 < T \ll \Theta_D$ ,  $\rho \propto T^5$ ; đối với  $T > \Theta_D$ ,  $\rho \propto T$ . Dáng điệu như thế đặc trưng cho một kim loại và xuất phát từ hệ thức giữa điện trở suất  $\rho$  và xác suất tán xạ  $P$  của electron đi qua

$$\rho = \frac{m}{ne^2} P,$$

ở đây  $m$  là khối lượng electron và  $P = P_{\text{phonon}} + P_{\text{tập chất}}$  (Bài tập 1030 (b)).

(a)  $T \approx 0$  K

Tại nhiệt độ này,  $P_{\text{phonon}} \rightarrow 0$  và  $\rho$  được đóng góp chủ yếu bởi  $P_{\text{tập chất}}$  không phụ thuộc vào nhiệt độ. Như vậy  $\rho$  ở cực tiểu của nó và về cơ bản là một hằng số.

(b)  $0 < T \ll \Theta_D$ , nhiệt độ Debye của Cu.

Tại những nhiệt độ thấp như vậy,  $\rho$  chủ yếu được quyết định bởi  $P_{\text{phonon}}$ , tỷ lệ với (Bài tập 1030)

$$\frac{\text{Mật độ phonon}}{\text{Sô va chạm gây nên một tán xạ hiệu dụng}} \propto \frac{T^3}{T^{-4}} = T^7$$

Do vậy  $\rho \propto T^5$ .

(c)  $T > \Theta_D$

$\rho$  hầu như hoàn toàn được đóng góp từ  $P_{\text{phonon}}$ , mà ở những nhiệt độ cao như vậy nó tỷ lệ với mật độ phonon mà mật độ phonon  $\propto T$ . Do đó  $\rho \propto T$ . Chú ý rằng tại những nhiệt độ đó, các phonon có xung lượng lớn và mỗi một va chạm đều gây ra sự lệch hướng của các electron di qua theo các mức độ khác nhau.

(2) Ge là một chất bán dẫn. Đồ thị biểu thị điện trở suất theo nhiệt độ của nó cho thấy tại những nhiệt độ thấp,  $\rho$  giảm đi khi nhiệt độ tăng; ở các nhiệt độ trung gian,  $\rho$  tăng theo nhiệt độ; tại các nhiệt độ cao,  $\rho$  giảm rất nhanh khi nhiệt độ tăng. Hiện tượng này được giải thích như sau.

(a) Tại những nhiệt độ thấp, kích thích tạp chất chiếm ưu thế. Số các hạt tải điện bị kích thích từ các tạp chất lên theo nhiệt độ, do vậy  $\rho$  giảm khi tăng nhiệt độ.

(b) Trong khoảng nhiệt độ trung gian, tất cả các nguyên tử tạp chất đều đã bị ion hóa do đó số các hạt tải điện không thay đổi theo nhiệt độ. Tuy nhiên, tản xạ của các electron di qua bởi các phonon trở nên thường xuyên hơn khi nhiệt độ tăng, dẫn đến độ linh động giảm và  $\rho$  tăng.

(c) Tại các nhiệt độ cao, kích thích thuộc bản chất vật liệu bắt đầu xảy ra và nồng độ hạt tải tăng lên nhanh chóng khi nhiệt độ tăng, dẫn đến  $\rho$  giảm mạnh.

(3) NaCl là một tinh thể ion. Đường cong bán loga  $\rho-T$  gồm hai đoạn thẳng với các độ dốc khác nhau ở các nhiệt độ cao và thấp. Lý do của hiện tượng này là như sau.

Trong một tinh thể ion sự dẫn điện do lỗ trống là quá trình chiếm ưu thế, số các lỗ trống tỷ lệ thuận với  $e^{-u_0/k_B T}$ , ở đây  $u_0$  là năng lượng kích hoạt. Tại các nhiệt độ thấp, sự dẫn bởi các lỗ trống của tạp chất là cơ chế chủ đạo; trong khi tại các nhiệt độ cao, sự dẫn chủ yếu gây bởi các lỗ trống là kết quả của chuyển động nhiệt của các ion. Vì các năng lượng kích hoạt của chúng là khác nhau, nên đồ thị bán loga cho thấy hai đường với hai độ dốc khác nhau.

## 1032

Một mẫu kim loại với  $\mu = 1$  được đặt trong một từ trường tĩnh và đều  $B = B_0 z$ . Các electron dẫn có thể được xem như là một khí electron tự do với thời gian tán xạ  $\tau$  và mật độ số hạt là  $n$ .

(a) Rút ra một biểu thức cho tensor điện trở suất của vật liệu đó.

(b) Sử dụng kết quả (a) để suy ra hệ thức tán sắc trong vùng tần số thấp

cho các sóng truyền theo phương z. Bỏ qua  $\frac{1}{\tau}$  và  $\omega$  so với tần số cyclotron  $\omega_c$ .  
(Suy ra phương trình sóng cho mật độ dòng j)

(Princeton)

**Lời giải:**

(a) Trong tần xạ của một electron dẫn có xung lượng  $m\mathbf{v}$ , sự thay đổi xung lượng trung bình là  $\frac{1}{2}(0 + 2m\mathbf{v}) = m\mathbf{v}$ . Nếu tính trung bình electron này chịu  $\frac{1}{\tau}$  tần xạ trong một đơn vị thời gian, thì nó sẽ chịu một lực cản là  $-\frac{m\mathbf{v}}{\tau}$ . Do đó phương trình chuyển động của một electron là

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{E} - e\mathbf{v} \times \mathbf{B} - m \frac{\mathbf{v}}{\tau}.$$

Vì

$$\mathbf{j} = -ne\mathbf{v},$$

phương trình trên trở thành

$$-\frac{m}{ne} \frac{d\mathbf{j}}{dt} = -e\mathbf{E} + \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{B}}{n} + \frac{m\mathbf{j}}{\tau ne}.$$

Xét một nghiệm có dạng

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 e^{-i\omega t}.$$

Thay vào phương trình trên, ta được

$$\mathbf{E} = \frac{m}{ne^2} \left( \frac{1}{\tau} - i\omega \right) \mathbf{j} + \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{B}}{ne},$$

và đặc biệt

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{m}{ne^2} \left( \frac{1}{\tau} - i\omega \right) j_k + \frac{\varepsilon_{klq} j_l B_q}{ne} \\ &= \left[ \frac{m}{ne^2} \left( \frac{1}{\tau} - i\omega \right) \delta_{kl} + \frac{\varepsilon_{klq} B_q}{ne} \right] j_l = \rho_{kl} j_l. \end{aligned}$$

trong đó

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } k = l, \\ 0 & \text{nếu } k \neq l. \end{cases}$$

$$\varepsilon_{klq} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } k \neq l \neq q \text{ và } k, l, q \text{ là các giao hoán chẵn của} \\ & 123, \\ -1 & \text{nếu } k \neq l \neq q \text{ và } k, l, q \text{ là các giao hoán lẻ của} \\ & 123, \\ 0 & \text{nếu cả ba hoặc hai trong số } k, l, q \text{ bằng nhau.} \end{cases}$$

và quy tắc lấy tổng của Einstein được áp dụng (tức là lấy tổng theo các chữ số lặp - ND).

Nếu định luật Ohm

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E},$$

hoặc

$$\mathbf{E} = \rho \mathbf{j}. \quad (1)$$

là đúng, ta có thể tính được điện trở suất  $\rho$ . Những điều nói trên cho thấy  $\rho$  có dạng một ma trận

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{m}{ne^2} \left( \frac{1}{\tau} - i\omega \right) & \frac{B_0}{ne} & 0 \\ -\frac{B_0}{ne} & \frac{m}{ne^2} \left( \frac{1}{\tau} - i\omega \right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{ne^2} \left( \frac{1}{\tau} - i\omega \right) \end{pmatrix}$$

(b) Trong kim loại,

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

và các phương trình Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \dot{\mathbf{D}}$$

cho

$$\mu_0 \mathbf{D} = \nabla^2 \mathbf{E} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}).$$

Một sóng điện từ lan truyền theo phương  $\hat{\mathbf{z}}$  có thể được biểu diễn bằng

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(kz - \omega t)},$$

từ đó

$$\frac{\partial}{\partial t} = -i\omega, \quad \frac{\partial}{\partial z} = ik, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0.$$

Như vậy ta có

$$-\omega^2 \mu_0 (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = -k^2 \mathbf{E} + k^2 E_z \hat{\mathbf{z}}.$$

Vì

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial D_z}{\partial z} = ik(\epsilon_0 E_z + P_z) = 0,$$

hay

$$E_z = -\frac{P_z}{\epsilon_0},$$

nên phương trình trên có thể được viết thành

$$\left( k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \mathbf{E} = \mu_0 \omega^2 \mathbf{P} - \frac{k^2}{\epsilon_0} P_z \mathbf{z} ,$$

hay

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0 \chi} [\mathbf{P} - (\chi + 1) P_z \mathbf{z}] ,$$

ở đây  $\chi = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - 1$ . Do đó

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \frac{1}{\epsilon_0 \chi} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \quad (2)$$

Mật độ dòng phân cực  $\mathbf{j}$  được tính bởi

$$\mathbf{j} = \dot{\mathbf{P}} = -i\omega \mathbf{P} . \quad (3)$$

Viết các phương trình (1) và (2) dưới dạng các phương trình ma trận

$$E = RJ, \quad E = AP = BJ .$$

ở đây  $E, P, J$ , là các ma trận cột,  $R, A, B$  là các ma trận vuông. Khi đó, từ phương trình (3) suy ra

$$B = \frac{i}{\omega} A .$$

Vì

$$(R - B)J = 0 ,$$

để  $J$  khác không, ta cần có định thức

$$|R - B| = 0 .$$

tức là

$$\left[ \frac{m}{n\epsilon^2} \left( \frac{1}{\tau} - i\omega \right) + \frac{i}{\epsilon_0 \omega} \right] \left\{ \left[ \frac{m}{n\epsilon^2} \left( \frac{1}{\tau} - i\omega \right) - \frac{i}{\epsilon_0 \chi \omega} \right]^2 + \left( \frac{B_0}{n\epsilon} \right)^2 \right\} = 0 .$$

Thừa số đầu tiên của véc trai chỉ bao gồm các tham số  $n, \tau$  của khí electron và tần số góc  $\omega$  của sóng truyền, thường là khác không. Do vậy

$$\left[ \frac{m}{n\epsilon^2} \left( \frac{1}{\tau} - i\omega \right) - \frac{i}{\epsilon_0 \chi \omega} \right]^2 = - \left( \frac{B_0}{n\epsilon} \right)^2 .$$

Định nghĩa tần số plasma

$$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon_0 m}}$$

và tần số cyclotron

$$\omega_c = \frac{eB_0}{m}$$

ta có thể viết đẳng thức trên thành

$$\left[ \left( \frac{1}{\tau} - i\omega \right) - \frac{i\omega_p^2}{\chi\omega} \right]^2 = -\omega_c^2.$$

Do  $\frac{1}{\tau}$  và  $\omega$  có thể được bù qua so với  $\omega_c$  dẫn đến

$$-\frac{i\omega_p^2}{\chi\omega} = \pm i\omega_c.$$

Bởi vậy các hệ thức tán sức tần số thấp là

$$-\omega_p^2 = \pm \omega\omega_c\chi = \pm \omega\omega_c \left( \frac{c^2 k^2}{\omega^2} - 1 \right).$$

hay

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 \mp \frac{\omega_p^2}{\omega\omega_c}.$$

### 1033

Công thức Drude-Lorentz cho hằng số điện môi của một chất rắn là

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\omega\tau^{-1}}.$$

Ở đây  $\omega_p$  là tần số plasma,  $\omega_0$  là khe năng lượng cho các chuyển mức giữa các vùng và  $\tau$  là thời gian tán xạ của electron.

(a) Tại nhiệt độ phòng, một giá trị hợp lý đối với Cu là  $\tau = 10^{-14}$  giây. Hãy đánh giá bậc dộ lớn của  $\omega_p$  và  $\omega_0$  của kim loại này. Bạn có thể muốn sử dụng đặc tính 'màu' của kim loại để xác định  $\omega_0$ . Về dô thị các phần thực và ảo của  $\varepsilon(\omega)$  như một hàm của  $\omega$  (theo eV).

(b) Tại nhiệt độ phòng, tính  $\sigma(\omega)$ , độ dẫn phức của Cu phụ thuộc tần số.

(c)  $\sigma(\omega)$  của Cu tuyệt đối tinh khiết và không có sai hỏng về mạng tinh thể tại khồng độ tuyệt đối là bao nhiêu?

(Chicago)

**Lời giải:**

(a) Giả thiết mỗi một nguyên tử đồng đóng góp một electron. Nồng độ của các electron dẫn là

$$n = \frac{6.02 \times 10^{23} \times 8.9}{63.5} = 8.4 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3} = 8.4 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}.$$

Đối với electron,  $\frac{e^2}{\epsilon_0 m} = 3 \times 10^3 \text{ m}^2 \text{s}^{-2}$ , và tần số plasma (Bài tập 1032) là

$$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon_0 m}} = 1.6 \times 10^{16} \text{ s}^{-1}.$$

Bởi vậy

$$\hbar\omega_p = 6.6 \times 10^{-14} \times 1.6 \times 10^{16} = 10.5 \text{ eV} \approx 10 \text{ eV}.$$

Đồng kim loại có màu đỏ tương ứng với bước sóng  $\lambda_0 \approx 6 \times 10^{-7} \text{ m}$ , hoặc  $\omega_0 \approx 3 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$ . Do đó

$$\hbar\omega_0 \approx 2 \text{ eV}.$$

Tại nhiệt độ phòng,  $\tau = 10^{-14} \text{ s}$ , hay  $\hbar\tau^{-1} = 6.6 \times 10^{-2} \text{ eV} \approx 10^{-1} \text{ eV}$ , và phần thực và phần ảo của  $\varepsilon(\omega)$  là

$$\operatorname{Re} \varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\tau^{-2}} \approx 1 + \frac{10^2 \cdot (4 - \omega^2)}{(4 - \omega^2)^2 + \omega^2 \cdot 10^{-2}}.$$

$$\operatorname{Im} \varepsilon(\omega) = \frac{\omega_p^2\omega\tau^{-1}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\tau^{-2}} \approx \frac{20}{(4 - \omega^2)^2 + \omega^2 \cdot 10^{-2}}.$$

Các phần này được biểu diễn bằng đồ thị trên hình 1.15.

(b) Áp dụng định luật Ohm  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$  và biểu thức mật độ dòng phân cực  $\mathbf{J} = \mathbf{P} = -i\omega \mathbf{P}$ , chúng ta tìm được cảm điện

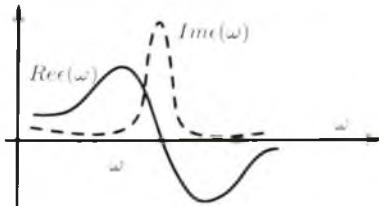
$$\chi \equiv \frac{P}{\epsilon_0 E} = \frac{i\sigma}{\epsilon_0 \omega}.$$

Do đó

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

suy ra hằng số điện môi phức của Cu

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \chi = 1 + \frac{i\sigma(\omega)}{\epsilon_0 \omega}.$$



Hình 1.15

Đối chiếu với công thức Drude-Lorentz, ta được

$$\frac{i\sigma}{\epsilon_0\omega} = \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + i\omega\tau^{-1}}$$

hay

$$\sigma(\omega) = \frac{\epsilon_0\omega\omega_p^2[\omega\tau^{-1} - i(\omega_0^2 - \omega^2)]}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\tau^{-2}}$$

(c) Tại nhiệt độ không,  $\tau \rightarrow \infty$  và độ dẫn phức là

$$\sigma(\omega) = -\frac{i\epsilon_0\omega\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

### 1034

Tại thời điểm  $t = 0$  phân bố điện tích  $\rho(\mathbf{r})$  tồn tại trong một vật dẫn điện đồng nhất lý tưởng có độ điện thẩm (cũng được gọi là hằng số điện - ND) và độ dẫn  $\sigma$  là các hằng số. Hãy tính  $\rho(\mathbf{r}, t)$  cho các thời điểm tiếp theo.

(Wisconsin )

**Lời giải:**

Sử dụng phương trình Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$$

và định luật Ohm

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

trong phương trình liên tục diễn tả sự bảo toàn điện tích,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

dẫn tới

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon} \rho = 0.$$

Với điều kiện ban đầu  $\rho(\mathbf{r}, 0) = \rho(\mathbf{r})$ , sau khi tích phân ta được

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}) e^{-\sigma t/\epsilon}$$

1035

Xét một mạng vuông hai chiều.

(a) Động năng của một electron tự do tại một đỉnh của vùng Brillouin thứ nhất lớn hơn động năng của một điện tử tại trung điểm của một cạnh biên vùng này một thừa số  $b$ . Hãy tính  $b$ .

(b) Thể tích thể của vật liệu này là

$$V(x, y) = -2V_0 \left( \cos \frac{2\pi x}{a} + \cos \frac{2\pi y}{a} \right).$$

ở đây  $V_0$  là một hằng số và  $a$  là hằng số mạng. Tính gần đúng khe năng lượng tại trung điểm của cạnh biên vùng.

(c) Giả thiết rằng kết quả ở câu (b) của bạn là đúng và vật liệu có hóa trị hai, hãy viết một điều kiện để hệ có tính kim loại.

(Princeton)

Lời giải:

(a) Động năng của một electron tự do là

$$E = \frac{-p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \propto k^2.$$

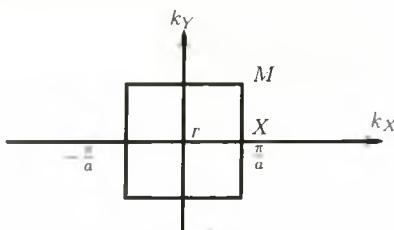
Vùng Brillouin của một mạng vuông hai chiều có hằng số mạng  $a$  là một hình vuông trong không gian k cạnh  $\frac{2\pi}{a}$ , như được chỉ ra trong hình 1.16. Vì

$$\overline{\Gamma M} = \sqrt{2} \overline{\Gamma X},$$

$$b = \frac{E_M}{E_X} = \frac{\overline{\Gamma M}^2}{\overline{\Gamma X}^2} = 2.$$

(b) Ta có thể viết

$$V(x, y) = -V_0(e^{i2\pi x/a} + e^{-i2\pi x/a} + e^{i2\pi y/a} + e^{-i2\pi y/a})$$



Hình 1.16

Đặt các vectơ cơ sở của mạng là  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ . Trung điểm của cạnh biên vùng trong mạng đảo có vectơ  $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{a}\mathbf{b}_1$ . Hệ số Fourier tương ứng trong  $V(x, y)$  là  $-V_0$ , do đó khe năng lượng bằng

$$\Delta_x = 2|V_x| = 2|V_0|.$$

(c) Đối với vật liệu hóa trị hai, điều kiện để nó là một kim loại là các vùng năng lượng xen phủ nhau. Sử dụng kết quả trên, điều này có nghĩa là

$$E_X + \Delta_x \leq E_M,$$

tức là

$$\frac{1}{2m}\hbar^2 \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + 2|V_0| \leq 2 \cdot \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi}{a}\right)^2,$$

suy ra

$$|V_0| \leq \frac{\pi^2 \hbar^2}{4ma^2}.$$

### 1036

Xét một electron có điện tích  $e$  trong mạng một chiều với các mức năng lượng

$$\varepsilon(k) = -2T \cos(ka).$$

ở đây  $a$  là hằng số mạng. Một điện trường đều  $\mathbf{E}$  được đặt song song với mạng. Mô tả định tính chuyển động của electron trong không gian k và trong không gian thực khi có và không có sự tán xạ. Thế nào là  $\mathbf{E}$  nhỏ và điều gì có thể xảy ra trong một tinh thể thực (da vùng) khi  $\mathbf{E}$  không còn là nhỏ nữa?

(Chicago)

Lời giải:

Khi không có tán xạ, phương trình chuyển động của một électron biểu diễn bởi hàm Bloch trong một điện trường  $\mathbf{E}$  là

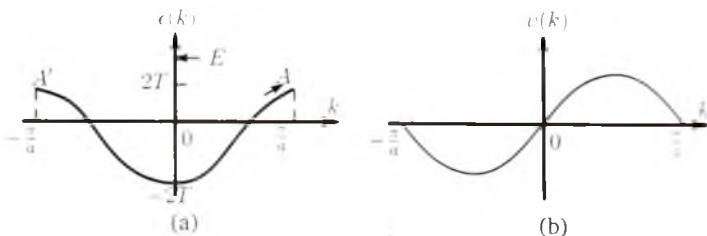
$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \hbar \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \mathbf{F} = -e\mathbf{E}.$$

Lấy phép tích phân ta thu được

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}(0) + \frac{e\mathbf{E}t}{\hbar}.$$

Điều này chứng tỏ rằng  $\mathbf{k}$  biến đổi tuyến tính với  $t$ . Trong không gian  $\mathbf{k}$  tất cả các électron di chuyển với cùng vận tốc ngược với phương của điện trường, như chỉ ra trong hình 1.17 (a). Khi một électron tiến tới biên vùng Brillouin thứ nhất, gọi là điểm A, nó bị phản xạ lại và tái hiện tại A' ở phía bên kia của gốc tọa độ. Các trạng thái A và A' là hoàn toàn tương đương nhau. Theo cách này électron dịch chuyển một cách tuần hoàn trong không gian  $\mathbf{k}$ .

Dưới tác dụng của điện trường  $\mathbf{E}$ , trạng thái électron thay đổi liên tục và do vậy vận tốc của nó cũng thay đổi (tương đương với vận tốc nhóm)  $v = \frac{dk}{dt} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \varepsilon(k)}{\partial k}$ ,  $\varepsilon$  là năng lượng của électron, như được chỉ ra hình 1.17 (b). Vận tốc électron như vậy thay đổi giữa các giá trị âm và dương. Sự chuyển động của électron trong không gian thực cũng mang tính tuần hoàn.



Hình 1.17

Khi xảy ra tán xạ, ta sẽ không quan sát được sự dao động như đã nói ở trên. Điều này là bởi vì trong một tinh thể có nhiều cơ chế tán xạ khác nhau và phương trình chuyển động nói trên chỉ áp dụng được trong khoảng thời gian giữa các tán xạ. Vì thời gian tán xạ rất ngắn, vectơ sóng của électron chỉ dịch chuyển dọc theo một phần ngắn của vectơ mạng đảo trước khi électron đó bị tán xạ, nên sự dao động tuần hoàn không thể xảy ra.

$E$  nhỏ có nghĩa là nó không cho phép một électron đạt tới một năng lượng đủ để nhảy lên một vùng năng lượng cao hơn. Một tinh thể thực có vô số các

vùng năng lượng và nếu điện trường đủ lớn thì các chuyển mức giữa các vùng sẽ xảy ra. Điều kiện để các chuyển mức đó không xảy ra là

$$eEa \ll [\varepsilon_{\text{gap}}(k)]^2 / \varepsilon_F .$$

### 1037

Xét một kim loại một chiều với các nguyên tử sắp xếp đều đặn cách nhau một khoảng  $b$  trong gần đúng liên kết chặt, với một điện tử trên một electron. Các hàm sóng nguyên tử có dạng  $\psi(r - R_i)$  ở đây  $R_i$  là vị trí của hạt nhân của nguyên tử thứ  $i$ . ( $R_i = ib$ , các hạt nhân được coi như là cố định trong không gian.) Giả thiết tiếp

$$\begin{aligned} \int \psi^*(r - R_i) H \psi(r - R_i) d^3r &= -E_0 , \\ \int \psi^*(r - R_i) H \psi(r - R_{i+1}) d^3r &= -V , \\ \int \psi^*(r - R_i) H \psi(r - R_{i+j}) d^3r &= 0 \quad \text{với } j \geq 2 . \end{aligned}$$

ở đây  $H$  là Hamiltonian. Hãy tính

- (a) Cấu trúc vùng electron ( $\varepsilon_k$  theo  $k$ ).
- (b) Mật độ trạng thái electron.
- (c) Đóng góp của electron vào năng lượng liên kết (đối với  $-E_0$ ).
- (d) Đóng góp của electron vào nhiệt dung tại nhiệt độ  $T$ . (Giả thiết  $k_B T \ll V$ ).

(Princeton)

**Lời giải:**

- (a) Theo định lý Bloch, chuyển động của một electron trong một mạng được mô tả bằng một sóng chạy  $e^{ik \cdot r}$  với một biên độ dao động tuần hoàn từ ô đơn vị này đến ô đơn vị khác. Theo phương pháp liên kết chặt, hàm biên điều là orbital nguyên tử  $\psi(r - R_i)$  có giá trị lớn ở gần nguyên tử tại vị trí  $R_i$  nhưng suy giảm nhanh khi đi ra xa khỏi vị trí ấy. Như vậy, đối với mạng một chiều hàm sóng của electron là

$$\phi_k(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i e^{ikR_i} \psi(r - R_i) ,$$

ở đây  $N$  là số các nguyên tử trong mạng. Khi đó năng lượng của electron là

$$\begin{aligned} E(k) &= \langle \phi_k | H | \phi_k \rangle \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l,l'} e^{ik(R_l - R_{l'})} \langle \psi(r - R_l) | H | \psi(r - R_{l'}) \rangle . \end{aligned}$$

trong đó tổng được lấy theo tất cả các nguyên tử trong mạng. Chú ý rằng đối với mỗi một sự lựa chọn cụ thể của  $l$  tổng theo  $l'$  cũng sẽ cho cùng một giá trị. Vì chỉ có các tương tác lân cận gần nhất là quan trọng, ta có

$$\begin{aligned} E(k) &= \langle \psi(r - R_l) | H | \psi(r - R_l) \rangle \\ &\quad + e^{-ikb} \langle \psi(r - R_l) | H | \psi(r - R_{l+1}) \rangle \\ &\quad + e^{ikb} \langle \psi(r - R_l) | H | \psi(r - R_{l-1}) \rangle \\ &= -E_0 - V(e^{-ikb} + e^{ikb}) \\ &= -E_0 - 2V \cos(kb) . \end{aligned}$$

(b) Số các trạng thái với các vectơ sóng có độ lớn nhỏ hơn hoặc bằng  $k$  đối với một mạng chiều dài  $L$  (Bài tập 1014) là

$$N = \frac{Lk}{\pi} .$$

suy ra mật độ trạng thái trên một đơn vị độ dài mạng là

$$\rho(k) = \frac{1}{L} \frac{dN}{dk} = \frac{1}{\pi} .$$

Đối với các trạng thái electron do có hai hướng của spin nên mật độ trạng thái trên một đơn vị độ dài bằng

$$\rho(k) = \frac{2}{\pi} .$$

Do

$$\rho(E)dE = \rho(k)dk ,$$

ta có

$$\begin{aligned} \rho(E) &= \rho(k) \left( \frac{dE}{dk} \right)^{-1} = [\pi bV \sin(kb)]^{-1} \\ &= \left[ \pi bV \sqrt{1 - \left( \frac{E_0 + E}{2V} \right)^2} \right]^{-1} . \end{aligned}$$

(c) Vì mỗi một nguyên tử đóng góp một électron, nên sẽ có  $N$  électron trong mạng và  $L = Nb$ ,  $L$  là chiều dài mạng. Do vậy

$$N = L \int_0^{E_m} f(E) \rho(E) dE ,$$

ở đây  $f(E)$  là hàm phân bố Fermi-Dirac

$$f(E) = \frac{1}{e^{\beta(E-E_F)} + 1} ,$$

với  $\beta = (k_B T)^{-1}$  và  $E_F$  là năng lượng Fermi áp dụng cho các hạt có spin bằng  $\frac{1}{2}$ . Tại  $T = 0$  K,  $f(E) = 1$  đối với  $E \ll E_F$  và  $f(E) = 0$  đối với  $E > E_F$ . Đối với  $k_B T \ll E_F$ ,  $E_F(T) \approx E_F(0)$  và chỉ các électron các năng lượng nằm trong khoảng trên dưới mức  $E_F$  một lượng bằng  $k_B T$  mới bị ảnh hưởng bởi hàm phân bố, một số électron chuyển dời từ dưới  $E_F$  lên trên  $E_F$ . Như vậy, trừ trường hợp đặc biệt cần xét đến sự phụ thuộc của nhiệt độ, chúng ta có thể tính gần đúng bằng cách lấy  $f(E) \approx 1$  đối với các nhiệt độ thấp. Do vậy

$$\begin{aligned} N &= L \int_0^{E_m} \rho(E) dE = L \int_0^{k_m} \rho(k) dk \\ &= Nb \int_0^{k_m} \frac{2}{\pi} dk = \frac{2Nb}{\pi} k_m . \end{aligned}$$

suy ra  $k_m = \frac{\pi}{2b}$ , và

$$E_m = -E_0 - 2V \cos(k_m b) = -E_0 - 2V .$$

Năng lượng toàn phần của các électron bằng

$$\begin{aligned} E_t &= L \int_0^{k_m} E(k) \rho(k) dk \\ &= L \int_0^{k_m} [-E_0 - 2V \cos(kb)] \frac{2}{\pi} dk \\ &= \frac{2Nb}{\pi} \left[ -E_0 - \frac{2V}{b} \sin(kb) \right]_0^{\pi/2b} \\ &= N \left( -E_0 - \frac{4V}{\pi} \right) . \end{aligned}$$

Như vậy trung bình mỗi một electron đóng góp  $-E_0 - \frac{4V}{\pi}$  vào năng lượng toàn phần, và năng lượng liên kết trên một electron tinh từ  $-E_0$  như vậy là bằng  $\frac{4V}{\pi}$ .

(d) Vì chỉ các electron nằm dưới và trên nhưng không ở gần mức Fermi  $E_F = -E_0$  mới cho đóng góp vào nhiệt dung riêng nên ta chỉ phải tính

$$\varepsilon_1(T) = \frac{L}{\pi bV} \int_{-2V}^{2V} \frac{\varepsilon d\varepsilon}{(e^{\beta\varepsilon} + 1)\sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon}{2V}\right)^2}}.$$

ở đây  $\varepsilon = E - E_F = E + E_0$ .

Đặt

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon} + 1}, \quad F(\varepsilon) = \sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon}{2V}\right)^2}$$

và xét

$$\begin{aligned} I &= \int_{-2V}^{2V} f(\varepsilon)F'(\varepsilon)d\varepsilon = [f(\varepsilon)F(\varepsilon)]_{-2V}^{2V} - \int_{-2V}^{2V} f'(\varepsilon)F(\varepsilon)d\varepsilon \\ &= - \int_{-2V}^{2V} f'(\varepsilon)F(\varepsilon)d\varepsilon. \end{aligned}$$

Khai triển  $F(\varepsilon)$  quanh giá trị  $\varepsilon = 0$  theo định lý Taylor

$$F(\varepsilon) = F(0) + \varepsilon F'(0) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 F''(0) + \dots$$

Do  $F(0) = 1$ ,  $F'(0) = 0$ ,  $F''(0) = -\frac{1}{4V^2}$ , ta có trong gần đúng bậc hai của  $\varepsilon$ ,

$$I \approx - \int_{-2V}^{2V} f'(\varepsilon)d\varepsilon + \frac{1}{8V^2} \int_{-2V}^{2V} \varepsilon^2 f'(\varepsilon)d\varepsilon.$$

Tích phân thứ nhất cho ta

$$[f(\varepsilon)]_{-2V}^{2V} = \frac{1}{e^{2\beta V} + 1} - \frac{1}{e^{-2\beta V} + 1} \approx -1$$

vì ta giả thiết rằng  $k_B T \ll V$ , hoặc  $\beta V \gg 1$ . Đặt  $\beta\varepsilon = x$ , tích phân thứ hai trở thành

$$-\frac{1}{8V^2\beta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 e^x dx}{(e^x + 1)^2} = -\frac{\pi^2}{24V^2\beta^2}.$$

Như vậy

$$I \approx 1 - \frac{\pi^2}{24V^2} (k_B T)^2 ,$$

và

$$\begin{aligned}\varepsilon_1(T) &= \frac{L}{\pi b V} (-4V^2) I \\ &\approx N \left[ -\frac{4V}{\pi} + \frac{\pi}{6} \frac{(k_B T)^2}{V} \right] .\end{aligned}$$

Suy ra nhiệt dung riêng tính cho một electron là

$$C_e = \frac{d\varepsilon_1}{dT} \approx \frac{\pi}{3} \frac{k_B^2 T}{V} .$$

### 1038

Phương pháp các sóng phẳng trực giao (OPW, liên quan chất chẽ với phương pháp giả thể) rất hay được sử dụng để tính toán cấu trúc vùng cho các trạng thái của electron trong các kim loại. Nó giúp giải thích thành công câu hỏi tại sao gần đúng điện tử gần tự do lại có thể sử dụng được mặc dù thế năng mạng thực tế tác dụng lên các electron hoàn không phải là yếu.

Hãy thảo luận các ý tưởng vật lý chủ đạo và các bước toán học trong phương pháp này, bằng cách đưa ra, ngoài những thứ khác, các mô tả về

(a) cách xây dựng hàm Bloch của các trạng thái ở ngoài lõi và các tính chất của chúng,

(b) cách xây dựng các trạng thái sóng phẳng trực giao và các tính chất của chúng,

(c) cách xây dựng giả thể và tính không duy nhất của nó,

(d) Giải thích về mặt vật lý tại sao giả thể đó có thể được coi là nhỏ.

(SUNY, Buffalo)

#### Lời giải:

Trong kim loại các electron hóa trị gần như tự do, nhưng trong lõi hàm sóng dao động rất nhanh. Ở các vùng bên ngoài lõi, hàm sóng chủ yếu là một sóng phẳng

$$\begin{aligned}|\mathbf{k}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N\Omega}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \\ |\mathbf{k} + \mathbf{k}_l\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N\Omega}} e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{k}_l)\cdot\mathbf{r}},\end{aligned}$$

ở đây  $N$  là số các ô đơn vị trong tinh thể,  $\Omega$  là thể tích của một ô đơn vị,  $\mathbf{k}_i$  là một vectơ mạng đảo.

(a) Trong vùng lõi các electron bị liên kết chặt. Gần đúng liên kết chặt cho hàm sóng có dạng như sau

$$|\Phi_{j\mathbf{k}}(\mathbf{r})\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_i} \varphi_j(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i) .$$

ở đây  $\varphi_j(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i)$  là orbital trạng thái thứ  $j$  của nguyên tử nằm tại  $\mathbf{R}_i$  và tổng được lấy theo tất cả các nguyên tử trong mạng.

(b) Lấy một sóng phẳng với vectơ sóng  $\mathbf{k}$  làm cơ sở, để xây dựng một hàm  $\chi_i(\mathbf{k}, \mathbf{r})$  trực giao với tất cả các hàm sóng electron với vectơ sóng  $\mathbf{k}$  trong vùng lõi

$$\chi_i(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = |\mathbf{k} + \mathbf{k}_i\rangle - \sum_{j=1}^N \mu_{ij} |\Phi_{j\mathbf{k}}\rangle .$$

ở đây hệ số  $\mu_{ij}$  được xác định bởi điều kiện trực giao

$$\int \Phi_{j\mathbf{k}} \chi_i(\mathbf{k}, \mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = 0 .$$

Hàm sóng  $\chi_i(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ , được gọi là hàm sóng phẳng trực giao, nó trực giao với hàm sóng của electron trong vùng lõi. Nó biểu diễn như một sóng phẳng tại các khoảng cách xa nguyên tử, nhưng dao động nhanh ở vị trí gần lõi. Tính chất này khiến cho các hàm như thế là thích hợp để xây dựng hàm sóng của electron hóa trị trong tinh thể, dưới dạng tổ hợp tuyển tính của một vài các sóng phẳng trực giao

$$\psi_{\mathbf{k}} = \sum_i C_i \chi_i .$$

(c) Vì

$$\chi_i = |\mathbf{k} + \mathbf{k}_i\rangle - \sum_j |\Phi_{j\mathbf{k}}\rangle \langle \Phi_{j\mathbf{k}} | \mathbf{k} + \mathbf{k}_i \rangle .$$

ký hiệu

$$\hat{p} = \sum_j |\Phi_{j\mathbf{k}}\rangle \langle \Phi_{j\mathbf{k}}|$$

ta có

$$\psi_{\mathbf{k}} = (1 - \hat{p}) |\mathbf{k} + \mathbf{k}_i\rangle .$$

Đưa vào hàm giả sóng

$$\varphi = \sum_i C_i |\mathbf{k} + \mathbf{k}_i\rangle$$

và thế nó vào phương trình Schrödinger, ta có

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\varphi + W\varphi = E\varphi.$$

ở đây

$$\begin{aligned} W &= V(\mathbf{r}) - \left[ -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right] \hat{p} + E\hat{p} \\ &= V(\mathbf{r}) + \sum_j (E - E_j) |\Phi_{j\mathbf{k}}\rangle\langle\Phi_{j\mathbf{k}}| \end{aligned}$$

được gọi là một giả thế.

(d) Giả thế này không phải là duy nhất. Bởi vì nếu ta thế

$$W' = V(\mathbf{r}) + \sum_j f(E, E_j) |\Phi_{j\mathbf{k}}\rangle\langle\Phi_{j\mathbf{k}}|,$$

ở đây  $f(E, E_j)$  là một hàm bất kỳ vào phương trình Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\varphi + W'\varphi = E'\varphi.$$

và lấy tích vô hướng của hai véc với  $\psi_k^*$ , ta có thể chứng tỏ rằng  $E' = E$ . Như vậy  $W'$  cũng là một giả thế.

(e) Nay giờ viết

$$W = V(\mathbf{r}) + \sum_j (E - E_j) |\Phi_{j\mathbf{k}}\rangle\langle\Phi_{j\mathbf{k}}| = V(\mathbf{r}) + V_B.$$

ở đây  $V(\mathbf{r})$ , là thế thực của tinh thể và là một thế hút, và

$$V_B = \sum_j (E - E_j) |\Phi_{j\mathbf{k}}\rangle\langle\Phi_{j\mathbf{k}}|.$$

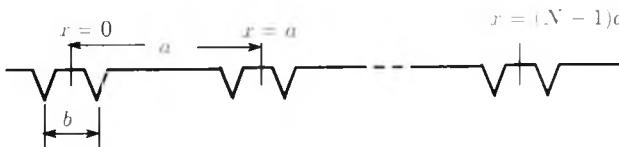
Trong một tinh thể năng lượng  $E$  của một electron hóa trị lớn hơn năng lượng của một electron lớp trong,  $E_j$ , do vậy  $V_B$  mang tính chất của các electron dẩy và là một thế đẩy. Nghĩa là  $V_B$  có xu hướng triệt tiêu  $V(\mathbf{r})$ . Sự triệt tiêu này của thế tinh thể bởi các hàm nguyên tử thường là đáng kể dẫn đến một giả thế  $W$  rất yếu và khá trơn.

Xét một chất rắn một chiều có chiều dài  $L = Na$  tạo nên từ  $N$  phân tử lưỡng nguyên tử, khoảng cách giữa các nguyên tử trong một phân tử là  $b$

( $b < \frac{a}{2}$ ). Các tâm của các phân tử kề nhau cách nhau một khoảng  $a$ . Ta biểu diễn thế năng như là tổng của các hàm delta tại tâm của từng nguyên tử

$$V = -A \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \delta\left(x - na + \frac{b}{2}\right) + \delta\left(x - na - \frac{b}{2}\right) \right] .$$

với  $A$  là một đại lượng dương và  $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ . Thế năng này được minh họa trên hình 1.18.



Hình 1.18

(a) Xét các electron tự do trong chất rắn này (tức là tạm thời bỏ qua  $V$ ) và các điều kiện biên tuần hoàn. Xác định các giá trị cho phép của vectơ sóng electron  $k$ , và chuẩn hóa hàm sóng.

(b) Biểu diễn thế năng dưới dạng chuỗi Fourier

$$V = \sum_q V_q e^{iqx} ,$$

hãy tìm các giá trị cho phép của  $q$  và các hệ số  $V_q$ .

(c) Giả thiết  $A$  là nhỏ, chứng tỏ rằng tồn tại các khe nang lượng tương ứng với các giá trị  $k$  nhất định. Dẫn ra một công thức chung cho các khe nang lượng và đặc biệt, chứng tỏ rằng khe nang lượng ở đỉnh vùng thứ nhất tỷ lệ thuận với  $\cos(\frac{\pi b}{a})$ .

(d) Dẫn ra biểu thức cho số các trạng thái có ở vùng thứ nhất. Nếu mỗi một nguyên tử có một electron thì chất đó là kim loại hay điện môi?

(e) Giả thiết  $b = a/2$ . Hãy cho biết điều gì sẽ xảy ra với các kết quả trong các câu trên và đưa ra lời giải thích ngắn gọn.

(Princeton)

Lời giải:

(a) Đồi với một chất rắn một chiều Hamiltonian của một electron tự do có khối lượng  $m$ , bằng

$$H = \frac{p^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} .$$

## Phương trình Schrödinger

$$H\psi = E\psi$$

sẽ trở thành

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi = 0.$$

Xét một nghiệm sóng phẳng

$$\psi = A_0 e^{ikx},$$

Thay nghiệm này vào phương trình trên ta được

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}.$$

Từ điều kiện chuẩn hóa

$$\int_0^L \psi^* \psi dx = 1,$$

với  $L$  là chiều dài của tinh thể, ta tính được

$$A_0 = \frac{1}{\sqrt{L}}.$$

Điều kiện biên tuần hoàn  $\psi(0) = \psi(L)$  yêu cầu

$$e^{ikL} = 1,$$

dẫn tới

$$k = \frac{2n\pi}{L}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots.$$

Điều này cho thấy các vectơ sóng  $k$  được phép của electron có hàm sóng chuẩn hóa là

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ikx}.$$

(b) Vì  $V(x)$  có chu kỳ  $a$ , nên trong khai triển Fourier

$$V(x) = \sum_q V_q e^{iqx},$$

ta cần có

$$e^{iqx} = e^{iq(x+a)},$$

hay

$$q = \frac{2n\pi}{a}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots.$$

đó là các giá trị được phép của  $q$ . Xét

$$\begin{aligned} \int_0^a V(x) e^{-iq'x} dx &= \sum_q V_q \int_0^a e^{i\frac{2\pi}{a}(n-n')x} dx \\ &= \sum_q V_q a \delta_{qq'} = V_{q'} a. \end{aligned}$$

ở đây  $q' = \frac{2n'\pi}{a}$  là một giá trị cụ thể của  $q$ . Như vậy các hệ số được tính như sau

$$V_q = \frac{1}{a} \int_0^a V(x) e^{-iqx} dx.$$

Ở lân cận của  $x = na$ ,

$$V(x) = -A \left[ \delta \left( x - na + \frac{b}{2} \right) + \delta \left( x - na - \frac{b}{2} \right) \right].$$

vì thế

$$\begin{aligned} V_q &= -\frac{A}{a} \left[ \int_0^a \delta \left( x - na + \frac{b}{2} \right) e^{-iqx} dx + \int_0^a \delta \left( x - na - \frac{b}{2} \right) e^{-iqx} dx \right] \\ &= -\frac{A}{a} \left[ e^{-iq(na - \frac{b}{2})} + e^{-iq(na + \frac{b}{2})} \right] \\ &= -\frac{A}{a} e^{iqna} \cdot 2 \cos \left( \frac{bq}{2} \right) \\ &= -\frac{2A}{a} \cos \left( \frac{bq}{2} \right) \end{aligned}$$

do  $e^{iqna} = e^{i2n^2\pi} = 1$ .

(c) Đổi với thê tuân hoàn một chiều

$$V(x) = \sum_q V_q e^{iqx}$$

với  $q = \frac{2n\pi}{a}$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , phương trình Schrödinger đổi với một électron chuyển động trong một tinh thể một chiều là

$$[H_0 + V(x)]\psi = E\psi.$$

ở đây  $H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2}$ . Phương trình này có thể được giải bằng cách biểu diễn nghiệm dưới dạng một chuỗi

$$\psi = \sum_k C_k \varphi_k ,$$

ở đây  $\varphi_k$  là các nghiệm của phương trình Schrödinger đối với electron tự do

$$H_0 \varphi_k = E_k^0 \varphi_k ,$$

tức là

$$\varphi_k = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ikx} ,$$

với năng lượng

$$E_k^0 = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} ,$$

ở đây  $k = \frac{2\pi n}{L}$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Thay nghiệm trên vào phương trình Schrödinger, ta được

$$\sum_k C_k E_k^0 \varphi_k + \sum_k \sum_q C_k V_q e^{iqx} \varphi_k = \sum_k C_k E \varphi_k .$$

Vì

$$e^{iqx} \varphi_k = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{i(q+k)x} = \varphi_{q+k} .$$

các vectơ sóng tạo nên hàm tổng  $\psi(x)$  khác nhau một lượng bằng vectơ mạng đảo  $q$  và phương trình trên được viết thành

$$\sum_k C_k (E - E_k^0) \varphi_k = \sum_k \sum_q C_k V_q \varphi_{q+k} .$$

Vì tổng lấy theo các giá trị  $q$  và  $k$  từ  $-\infty$  đến  $\infty$ , nên biểu thức trên được viết lại thành

$$\sum_k C_k (E - E_k^0) \varphi_k = \sum_k \sum_q C_{k-q} V_q \varphi_k .$$

Cân bằng các hệ số của  $\varphi_k$  dẫn tới

$$C_{k'} (E - E_{k'}^0) = \sum_q C_{k'-q} V_q .$$

Đặt  $k' = k - K$ ,  $q = K' - K$ , ở đây  $K$  là một vectơ mạng đảo bất kỳ, trong phương trình trên ta có

$$C_{k-K} (E - E_{k-K}^0) = \sum_{K'} C_{k-K'} V_{K'-K} \quad (1)$$

Đối với một electron tự do,  $V(x) = 0$  và về phái triệt tiêu. Điều này chỉ ra rằng

$$\begin{aligned} C_{k-K} &= 0 && \text{với } E \neq E_{k-K}^0, \\ C_{k-K} &\neq 0 && \text{chỉ khi } E = E_{k-K}^0. \end{aligned}$$

đối với các trạng thái electron tự do. Với  $A$  nhỏ thế tuân hoà có thể được xem như là một nhiễu loạn nhỏ. Các hệ số do đó được sử dụng để mô tả hàm sóng với vectơ sóng  $k$  đối với một electron trong trường thê

$$\psi_k = \sum_{k'} C_{k'} \varphi_{k'}.$$

Giả sử đối với một giá trị  $k$  nào đó có xảy ra suy biến  $E_{k-K_1}^0 = E_{k-K_2}^0 = \dots$  Đối với mạng một chiều, chỉ có suy biến bởi hai. Giả sử  $E_k^0 = E_{k-K_1}^0$ . Thì chỉ có  $C_k, C_{k-K_1}$  là khác không và phương trình (1) dẫn đến

$$\begin{aligned} C_k(E_k - E_k^0) &= C_k V_0 + C_{k-K_1} V_{K_1}, & (2) \\ C_{k-K_1}(E_k - E_k^0) &= C_k V_{K_1} + C_{k-K_1} V_0. & (3) \end{aligned}$$

Vì  $V(x)$  là thực

$$V(x) = V^*(x) = \sum_q V_q e^{iqx} = \sum_q V_q^* e^{-iqx} = \sum_q V_{-q}^* e^{iqx}$$

do  $q$  đi từ  $-\infty$  đến  $\infty$ . Vì vậy  $V_q = V_q^* = V_{-q}$  do  $V_q$  là thực. Các phương trình (2) và (3) trở thành

$$\begin{aligned} (E_k - E_k^0 - V_0)C_k - V_{K_1}C_{k-K_1} &= 0, \\ V_{K_1}C_k - (E_k - E_k^0 - V_0)C_{k-K_1} &= 0. \end{aligned}$$

Để  $C_k, C_{k-K_1}$  không bằng không ta cần

$$(E_k - E_k^0 - V_0)^2 - V_{K_1}^2 = 0$$

hay

$$E_k = E_k^0 + V_0 \pm |V_{K_1}|.$$

Phương trình này có nghĩa là một khe năng lượng

$$E_g = \Delta E_k = 2|V_{K_1}|$$

tồn tại tại

$$k = \frac{1}{2}(k + K_1 - k) = \frac{K_1}{2}.$$

Đối với một tinh thể tuyến tính, vùng Brillouin thứ nhất được giới hạn bởi  $-\frac{\pi}{a} \leq k \leq \frac{\pi}{a}$ . Tại đỉnh của vùng  $k = \frac{\pi}{a} = \frac{K_1}{2}$ , dẫn đến  $K_1 = \frac{2\pi}{a}$  và  $q = -K_1 = -\frac{2\pi}{a}$ . Do đó từ câu (a) ta có

$$|V_{K_1}| = |V_g| = \frac{2A}{a} \cos\left(\frac{\pi b}{2}\right).$$

Như vậy

$$E_g(k) \propto \cos\left(\frac{\pi b}{2}\right).$$

(d) Vùng thứ nhất bao gồm các trạng thái với các vectơ sóng trong khoảng

$$-\frac{\pi}{a} \leq k \leq \frac{\pi}{a}$$

với  $k = \frac{2n\pi}{L}$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  Số các trạng thái trong vùng thứ nhất như vậy sẽ là

$$\frac{2\pi}{a} \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{-1} = \frac{L}{a} = N.$$

Do mỗi một trạng thái ứng với hai hướng spin nên tổng cộng sẽ có  $2N$  trạng thái.

Chất rắn này có  $N$  lưỡng nguyên tử, hay nói cách khác là có  $2N$  nguyên tử, và mỗi nguyên tử đóng góp một electron. Như vậy có  $2N$  electron lắp đầy hoàn toàn  $2N$  trạng thái trong vùng thứ nhất. Chất rắn đó vì thế là một chất điện môi.

(e) Có thể thấy từ hình 1.18 rằng nếu  $b = \frac{a}{2}$ , thì chu kỳ của thế năng sẽ là  $\frac{a}{2}$ . Các vùng Brillouin sẽ mở rộng và kết quả của các câu trên sẽ thay đổi như sau:

(a) Giữ nguyên.

(b)  $q = \frac{4\pi}{a}$ ,  $V_0 = \frac{2A}{a}$ ,  $V_n = (-1)^{n+1} \frac{2A}{a}$ .

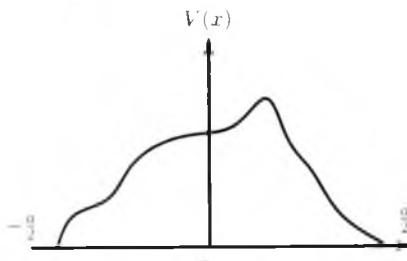
(c)  $E_g \propto |V_n|$ .

(d) Vùng thứ nhất của không gian  $k$  sẽ có  $2N$  trạng thái, hoặc  $4N$  trạng thái nếu tính cả spin.  $2N$  electron không đủ để lắp đầy tất cả các trạng thái. Vật liệu do vậy là một chất dẫn điện.

1040

Xét một thế tuân hoàn một chiều  $U(x)$  được xem như là một dãy các rào thế giống hệt nhau  $V(x)$  có độ rộng  $a$ , với tâm tại các điểm  $x = \pm na$ ,  $n$  là một

số nguyên. Rào thê  $V(x)$ , được vẽ phác trên Hình 1.19 có thể được đặc trưng bởi hệ số truyền qua  $t(k)$  và hệ số phản xạ  $r(k)$  đối với một électron tới rào thê với năng lượng  $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ .



Hình 1.19

(a) Đối với trường hợp chỉ có một rào thê, hãy viết nghiệm tổng quát nhất cho hàm sóng của một électron với năng lượng  $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ .

(b) Năng lượng électron Bloch liên hệ thế nào với vectơ sóng  $k$  của nó đối với trường hợp Hamiltonian tinh thê, tức là  $U(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} V(x+na)$ ? Chứng minh rằng điều này sẽ cho đáp số đúng đối với trường hợp électron tự do, tức  $V=0$ .

(c) Nhớ lại một số tính chất cơ bản của  $t$  và  $r$ , chứng tỏ rằng các sóng Bloch chỉ xảy ra trong các dải năng lượng.

(d) Giả sử các bờ thê là yêu,  $|t| = 1$  và  $|r| = 0$ , tìm biểu thức đơn giản. Tính bề rộng của khe năng lượng

(Princeton)

Lời giải:

(a) Một électron có năng lượng  $E$  đến từ phía trái của rào thê đơn có thể được biểu diễn bằng một sóng

$$\psi_L(x) = \begin{cases} e^{ikx} + r_1 e^{-ikx}, & x \leq -\frac{a}{2}, \\ t_1 e^{ikx}, & x \geq \frac{a}{2}, \end{cases}$$

$k$  được tính từ hệ thức  $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ . Một électron đến từ phía phải có thể được biểu diễn bằng một sóng

$$\psi_R(x) = \begin{cases} e^{-ikx} + r_2 e^{ikx}, & x \geq \frac{a}{2}, \\ t_2 e^{-ikx}, & x \leq -\frac{a}{2}. \end{cases}$$

Nếu  $V(x)$  không đối xứng, thì các hệ số phản xạ và truyền qua  $r, t$  đối với hai trường hợp nhìn chung là khác nhau. Hàm sóng tổng quát đối với các vùng này là tổ hợp tuyến tính của  $\psi_l(x)$  và  $\psi_r(x)$

$$\psi(x) = A\psi_l(x) + B\psi_r(x).$$

$A, B$  là các hằng số thực.

Trong rào thế  $-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$ , hàm sóng thỏa mãn phương trình Schrödinger một chiều

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \psi = E\psi.$$

(b) Đối với trường thế tĩnh thể tuần hoàn

$$U(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V(x+na),$$

Hamiltonian trong vùng  $-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$  tương đương với Hamiltonian của một rào thế đơn và ta có thể sử dụng định lý Bloch để tìm nghiệm tổng quát của phương trình Schrödinger

$$\psi(x) = A\psi_l(x) + B\psi_r(x),$$

với

$$\psi(x+a) = e^{iKa}\psi(x),$$

ở đây  $K$  là một hằng số thực dương, và do đó nếu lấy vi phân theo  $x$ ,

$$\psi'(x+a) = e^{iKa}\psi'(x).$$

Như vậy tại  $x = -\frac{a}{2}$  ta có

$$\begin{aligned} A\psi_l\left(\frac{a}{2}\right) + B\psi_r\left(\frac{a}{2}\right) &= e^{iKa} \left[ A\psi_l\left(-\frac{a}{2}\right) + B\psi_r\left(-\frac{a}{2}\right) \right], \\ A\psi'_l\left(\frac{a}{2}\right) + B\psi'_r\left(\frac{a}{2}\right) &= e^{iKa} \left[ A\psi'_l\left(-\frac{a}{2}\right) + B\psi'_r\left(-\frac{a}{2}\right) \right]. \end{aligned}$$

hay

$$\begin{aligned} A[t_l\beta - \alpha(1+r_l\beta)] + B(1+r_r\beta - t_r\alpha\beta) &= 0, \\ A[t_l\beta - \alpha(1-r_l\beta)] + B(-1+r_r\beta + t_r\alpha\beta) &= 0. \end{aligned}$$

với

$$\alpha = e^{iKa}, \quad \beta = e^{ika}.$$

Lậy tổng và hiệu của hai phương trình trên ta có

$$(t_l\beta - \alpha)A + r_r\beta B = 0 .$$

$$-r_l\alpha\beta A + (1 - t_r\alpha\beta)B = 0 .$$

Để có các nghiệm  $A, B$  không tầm thường, định thức của các hệ số của chúng phải bằng không tức là

$$(t_l t_r - r_l r_r)e^{ika} + e^{-ika} = t_l e^{-iKa} + t_r e^{iKa} .$$

Điều này dẫn đến mối liên hệ giữa động năng của electron  $E - V = \frac{\hbar^2 K^2}{2m}$ , và vectơ sóng  $k$ .

Một tính chất thường là đối xứng nên  $V(x) = V(-x)$  và do đó  $r_l = r_r = r$ ,  $t_l = t_r = t$ . Hệ thức trên trở thành

$$(t^2 - r^2)e^{ika} + e^{-ika} = 2t \cos(Ka) . \quad (1)$$

Nếu electron là hoàn toàn tự do,  $r = 0$ ,  $t = 1$ , và biểu thức trên dẫn đến

$$\cos(ka) = \cos(Ka) ,$$

hay

$$k = K .$$

Đây là câu trả lời đúng vì với  $V = 0$  ta có  $E = \frac{\hbar^2 K^2}{2m}$ .

(c) Xét một electron di từ trái sang phải qua một rào thê đơn, giả thiết là đối xứng. Tính liên tục của mật độ dòng xác suất  $-\frac{i\hbar}{2m}(\psi^* \psi' - \psi \psi'^*)$  được áp dụng trong các vùng  $x \leq -\frac{a}{2}$  và  $x \geq \frac{a}{2}$  dẫn đến

$$\begin{aligned} \psi_l^* \psi'_l - \psi_l \psi_l^* &= (\alpha^{-1} + r^* \alpha) \frac{\partial}{\partial x} (\alpha + r \alpha^{-1}) - (\alpha + r \alpha^{-1}) \frac{\partial}{\partial x} (\alpha^{-1} + r^* \alpha) \\ &= t^* \alpha^{-1} \frac{\partial}{\partial x} (t \alpha) - t \alpha \frac{\partial}{\partial x} (t^* \alpha^{-1}) , \end{aligned}$$

ở đây  $\alpha = e^{ikx}$ , và do vậy

$$1 - rr^* = tt^* ,$$

hoặc

$$|r|^2 + |t|^2 = 1 \quad (1.5)$$

phù hợp với định luật bảo toàn năng lượng.

$$(1.6)$$

Tiếp theo xét hai electron có cùng năng lượng di chuyển đồng thời, một electron từ trái sang phải và electron kia từ phải sang trái qua rào thê. Mật độ dòng xác suất như vậy sẽ bằng không ở mọi vị trí trong mạng, đặc biệt tại các vị trí  $x \leq -\frac{a}{2}$ . Như vậy

$$\begin{aligned} (\psi_l + \psi_r)^* \frac{\partial}{\partial x} (\psi_l + \psi_r) - (\psi_l + \psi_r) \frac{\partial}{\partial x} (\psi_l + \psi_r)^* \\ = (\alpha^{-1} + r^* \alpha + t^* \alpha) \frac{\partial}{\partial x} (\alpha + r\alpha^{-1} + t\alpha^{-1}) \\ - (\alpha + r\alpha^{-1} + t\alpha^{-1}) \frac{\partial}{\partial x} (\alpha^{-1} + r^* \alpha + t^* \alpha) \\ = 0 . \end{aligned}$$

hay

$$1 - rr^* - tt^* - r^*t - rt^* = 0 .$$

Như vậy

$$r^*t + rt^* = 0 ,$$

có nghĩa là  $r^*t$  là thuần ảo. Đặt

$$t = |t|e^{i\delta}, \quad r = \pm |r|e^{i\delta}$$

và thế các giá trị này vào phương trình (1), ta được

$$\frac{\cos(ka + \delta)}{|t|} = \cos(Ka) . \quad (2)$$

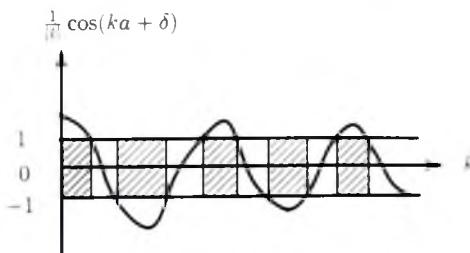
Khi năng lượng của electron tăng lên, hệ số truyền qua cũng tăng lên, tức là  $|t|$  tiến tới 1 khi  $k$  tăng. Do đó sự biến đổi của  $\psi$  trái phương trình (2) theo  $k$  được chỉ ra trên hình 1.20. Tuy nhiên, do  $\cos(Ka)$  bị giới hạn giữa -1 và 1, nên một số giá trị của  $k$  sẽ bị cấm bởi phương trình (2). Các vùng năng lượng cấm được mô tả là các vùng được gạch chéo trên hình. Vì thế các hàm Bloch được phép chỉ xảy ra trong các vùng năng lượng.

(d) Xét một khe năng lượng trong không gian  $k$  với các biên  $k_1, k_2$  và trung điểm tại  $k_0$  và độ rộng  $2\epsilon$ . Ta có thể thấy từ hình 1.20 và phương trình (2) rằng

$$\begin{aligned} |\cos(k_0a + \delta)| &= 1 . \\ |\cos(k_0a + \delta + \epsilon a)| &= |t| . \end{aligned}$$

hay

$$k_0a + \delta = n\pi .$$



Hình 1.20

ở đây  $n$  bằng không hoặc là một số nguyên, và

$$|\sin(n\pi + \epsilon a)| = \sqrt{1 - |t|^2} = |r|.$$

Đối với một rào thẻ yếu,  $|r| \rightarrow 0$ ,  $|t| \rightarrow 1$ ,  $|\delta| \rightarrow 0$ , và như có thể thấy từ hình 1.20,  $\epsilon a \rightarrow 0$ , vì thế

$$k_0 = \frac{1}{2}(k_2 + k_1) \approx \frac{n\pi}{2a},$$

và

$$|\sin(n\pi) \cos(\epsilon a) + \sin(\epsilon a) \cos(n\pi)| \approx \epsilon a = |r|,$$

tức là

$$k_2 - k_1 = \frac{|r|}{a}.$$

Như vậy khe năng lượng có độ rộng

$$\Delta E = \frac{\hbar^2}{2m}(k_2^2 - k_1^2) = \frac{\hbar^2}{m}k_0(k_2 - k_1) = \frac{n\pi}{2} \frac{\hbar^2}{ma^2}|r|.$$

### 1041

(a) Đối với một cấu trúc lục giác xếp chất (hcp) với thẻ tuần hoàn  $V(r) = \sum_G V_G e^{iG \cdot r}$  ( $G$  là vectơ mạng đảo), hãy chứng tỏ  $V_G = 0$  đối với  $G$  tương ứng với mặt của vùng Brillouin thứ nhất theo trục  $c$  (tức là vuông góc với mặt và nằm theo phương  $(0\ 0\ 1)$ ). Điều này sẽ dẫn tới hé quả gì đối với khe năng lượng bậc nhất ngang qua mặt này?

(b) Giải thích tại sao không thể thu được một chất điện môi được cấu thành từ các nguyên tử đơn hóa trị trong một cấu trúc hcp.

(c) Na kim loại có cấu trúc bcc và có một electron hóa trị trên một nguyên tử. Tìm công thức và đánh giá bước sóng ngưỡng (theo Å) cho các chuyên dời giữa các vùng (từ vùng năng lượng thấp nhất đến vùng năng lượng cao hơn kế tiếp) trong Na kim loại. Sử dụng thực tế là  $k_F$  nhỏ hơn đáng kể so với  $k_{ZB}$  (vectơ  $k$  đến biên vùng gần với điểm gốc nhất). Chiều dài cạnh lập phương trong Na là 4,23 Å.

(Princeton )

Lời giải:

(a) Hệ số trong khai triển

$$V(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{G}} V_{\mathbf{G}} e^{i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}}$$

là

$$V_{\mathbf{G}} = \frac{1}{v} \int_{\text{ô}} V(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} ,$$

ở đây  $v$  là thể tích ô đơn vị.

Nếu có  $n$  nguyên tử giống nhau trong ô đơn vị với các vị trí  $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_n$ , thế tuần hoàn có thể được viết thành

$$V(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{R}} \sum_{j=1}^n \Phi(\mathbf{r} - \mathbf{R} - \mathbf{d}_j) .$$

ở đây  $\mathbf{R}$  là vị trí của một nút mạng. Vậy

$$\begin{aligned} V_{\mathbf{G}} &= \frac{1}{v} \int_{\text{ô}} e^{-i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}} \sum_{\mathbf{R}} \sum_{j=1}^n \Phi(\mathbf{r} - \mathbf{R} - \mathbf{d}_j) d\mathbf{r} \\ &= \frac{1}{v} \sum_{j=1}^n \sum_{\mathbf{R}} \int_{\text{ô}} e^{-i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}} \Phi(\mathbf{r} - \mathbf{R} - \mathbf{d}_j) d\mathbf{r} \\ &= \frac{1}{v} \sum_{j=1}^n \int_{\text{tổng}} e^{-i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}} \Phi(\mathbf{r} - \mathbf{d}_j) d\mathbf{r} \\ &= \frac{1}{v} \int_{\text{tổng}} e^{-i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}} \Phi(\mathbf{r}) \left( \sum_{j=1}^n e^{i\mathbf{G} \cdot \mathbf{d}_j} \right) d\mathbf{r} . \end{aligned}$$

Trong khai triển trên, tổng  $\sum_{j=1}^n e^{i\mathbf{G} \cdot \mathbf{d}_j}$  là thừa số cấu trúc hình học. Một ô đơn vị của cấu trúc lục giác xếp chật (hcp) chứa hai nguyên tử tại (0 0 0) và

$(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ . Như vậy, đối với  $\mathbf{G} = \frac{2\pi}{c}\mathbf{b}_3$ ,

$$\sum_{j=1}^n e^{i\mathbf{G} \cdot \mathbf{d}_j} = 1 + e^{i\frac{2\pi}{c} \cdot \frac{1}{2}} = 0.$$

và do vậy

$$V_{\mathbf{G}} = 0.$$

Khe năng lượng bậc nhất qua mặt vùng này sẽ là

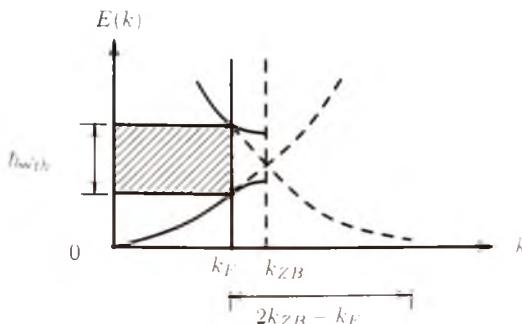
$$2|V_{\mathbf{G}}| = 0.$$

(b) Trong cấu trúc hcp, mỗi một vùng năng lượng chứa  $2 \times 2 \times N = 4N$  trạng thái, ở đây  $N$  là số các ô đơn vị. Tuy nhiên, đối với một chất rắn gồm các nguyên tử hóa trị một, tổng số electron hóa trị là  $2N$ , không đủ để lấp đầy hoàn toàn vùng năng lượng. Do đó nó không thể là một chất điện môi.

(c) Theo định luật bảo toàn xung lượng mạng ta có

$$\mathbf{k}' = \mathbf{k} + \mathbf{k}_{ph} + \mathbf{G}.$$

Bước sóng của ánh sáng nhìn thấy là khoảng 5000 Å, tương đương với  $k_{ph} = \frac{2\pi}{\lambda} = 10^5 \text{ cm}^{-1}$ . Kích thước dài của vùng Brillouin là  $= a$  có bậc độ lớn  $10^8 \text{ cm}^{-1}$ . Vậy  $\mathbf{k}_{ph}$  chỉ có thể làm thay đổi rất ít đến vectơ sóng trong công thức trên. Do tính đối xứng tịnh tiến, nên sự thay đổi của vectơ sóng một lượng  $\mathbf{G}$  không gây nên một ảnh hưởng gì. Như vậy, các chuyển dời giữa các vùng có thể được coi như là các chuyển dời giữa hai vùng năng lượng với các vectơ sóng hết như nhau như được mô tả trên hình 1.21.



Hình 1.21

Do  $k_F$  nhỏ hơn nhiều so với  $k_{ZB}$ , ta có thể đánh giá bước sóng ngưỡng cho các chuyển đổi giữa các vùng bằng cách sử dụng gần đúng electron tự do. Từ hình 1.21 có thể thấy rằng

$$\hbar\omega_{th} = \hbar \frac{2\pi c}{\lambda_{th}} = \frac{\hbar^2}{2m} (2k_{ZB} - k_F)^2 - \frac{\hbar^2}{2m} k_F^2 = \frac{2\hbar^2}{m} k_B (k_B - k_F) ,$$

suy ra bước sóng ngưỡng

$$\lambda_{th} = \frac{\pi mc}{\hbar k_{ZB} (k_{ZB} - k_F)} ,$$

ở đây

$$k_F = (3\pi^2 n)^{1/3} = \left(3\pi^2 \frac{2}{a^3}\right)^{1/3} = \frac{1}{a} (6\pi^2)^{1/3} .$$

Mạng đảo của mạng bcc với cạnh  $a$  là một mạng fcc với cạnh bằng  $\frac{4\pi}{a}$ . Như vậy  $k_{ZB}$  bằng một phần tư của đường chéo của mặt fcc,

$$k_{ZB} = \frac{1}{4} \sqrt{2} \frac{4\pi}{a} = \frac{\sqrt{2}\pi}{a} .$$

Do đó,

$$\begin{aligned} \lambda_{th} &= \frac{mc}{\hbar} \frac{a^2}{2\pi - \sqrt{2}(6\pi^2)^{1/3}} \\ &= \frac{mc^2}{\hbar c} \frac{a^2}{2\pi - \sqrt{2}(6\pi^2)^{1/3}} . \end{aligned}$$

Với  $hc = 1.97 \times 10^3$  eV·Å,  $mc^2 = 0.511$  MeV,  $a = 4.23$  Å, ta thu được

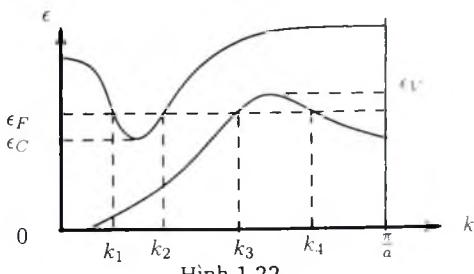
$$\lambda_{th} = 6034 \text{ Å}.$$

## 1042

Hình 1.22 biểu diễn sự phụ thuộc của năng lượng vào vectơ sóng của các electron trong một chất rắn một chiều.

(a) Nếu  $n$  là mật độ electron và  $p$  là mật độ lỗ trống thì  $p/n$  bằng bao nhiêu?

(b) Vật liệu này có một số lẻ hay chẵn các electron dồn trong một ô đơn vị? Chứng minh câu trả lời của bạn.



Hình 1.22

(c) Khối lượng hiệu dụng của electron và của lỗ trống đại lượng nào lớn hơn? Hãy rút ra biểu thức gần đúng cho các khối lượng hiệu dụng theo các đại lượng trên hình vẽ.

(Princeton)

Lời giải:

(a)  $p/n = 1$ .

(b) Hình 1.22 chỉ ra rằng không có sự xen phủ giữa các vùng năng lượng, do vậy vùng dẫn hoàn toàn được lắp đầy. Do mỗi một ô đơn vị có thể nhận hai electron, nên vật liệu này chứa một số chẵn các electron tĩnh cho một ô đơn vị.

(c) Vùng  $(k_1, k_2)$  tương ứng với các electron dẫn và  $(k_3, k_4)$  tương ứng với các lỗ trống. Hình vẽ trên chỉ ra rằng đường cong năng lượng biến thiên ở vùng  $(k_3, k_4)$  trơn hơn so với vùng  $(k_1, k_2)$ . Do đó khối lượng hiệu dụng được tính bởi

$$m^* = \left| \hbar^2 \left( \frac{d^2 \varepsilon}{dk^2} \right)^{-1} \right|,$$

đối với các lỗ trống sẽ lớn hơn đối với các electron.

Mô tả gần đúng đường cong năng lượng trong các vùng  $(k_1, k_2)$ ,  $(k_3, k_4)$  bằng các đường parabol

$$\begin{aligned} \varepsilon - \varepsilon_C &= a \left( k - \frac{k_1 + k_2}{2} \right)^2 \\ \varepsilon_V - \varepsilon &= b \left( k - \frac{k_3 + k_4}{2} \right)^2, \end{aligned}$$

ở đây

$$a = 4(\varepsilon_F - \varepsilon_C)(k_2 - k_1)^{-2}$$

$$b = 4(\varepsilon_V - \varepsilon_F)(k_4 - k_3)^{-2}.$$

ta rút ra

$$m_e^* = \frac{\hbar^2}{2a} = \frac{\hbar^2(k_2 - k_1)^2}{8(\varepsilon_F - \varepsilon_C)}$$

là khối lượng hiệu dụng của electron và

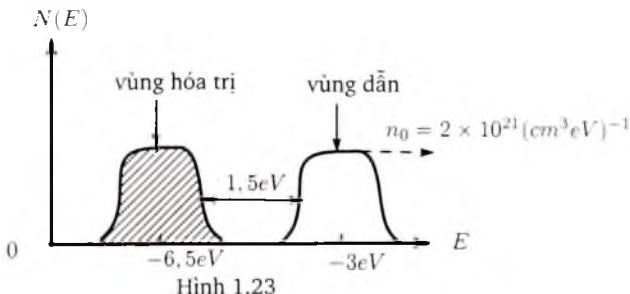
$$m_h^* = \frac{\hbar^2}{2b} = \frac{\hbar^2(k_4 - k_3)^2}{8(\varepsilon_V - \varepsilon_F)}$$

là khối lượng của lỗ trống. Do  $|k_2 - k_1| < |k_4 - k_3|$ ,  $0 < \varepsilon_V - \varepsilon_F < \varepsilon_F - \varepsilon_C$ , nên

$$m_e^* < m_h^*.$$

### 1043

Xét một chất bán dẫn thuần mà hàm mật độ trạng thái electron của nó  $N(E)$  được vẽ trên hình 1.23.



- (1) Vị trí mức Fermi ở đâu so với vùng dẫn và vùng hóa trị?
- (2) Hãy viết hàm phân bố Fermi với giả thiết rằng  $N(E)$  đã chứa thừa số suy biến spin bằng 2.
- (3) Đánh giá mật độ của các electron vùng dẫn tại nhiệt độ phòng.  
(Wisconsin)

**Lời giải:**

(1) Số các điện tử trong vùng dẫn có năng lượng đáy bằng  $\varepsilon_C$ , và số các lỗ trống trong vùng hóa trị có năng lượng định bằng  $\varepsilon_V$ , lần lượt là

$$n = \int_{\varepsilon_C}^{\infty} N(E)f(E)dE,$$

$$p = \int_{-\infty}^{\varepsilon_V} N(E)(1-f(E))dE.$$

ở đây

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/k_B T} + 1}$$

là hàm phân bố Fermi-Dirac cho biết xác suất để một mức năng lượng  $E$  bị chiếm. Đối với một chất bán dẫn thuần,  $n = p$ , từ đó có thể xác định được mức Fermi. Ví dụ, xét trường hợp ở đó  $E - E_F \gg k_B T$ , thì  $f(E) \approx e^{-(E-E_F)/k_B T}$ , suy ra

$$n \approx \int_{\varepsilon_C}^{\infty} n_0 e^{-(E-E_F)/k_B T} dE = n_0 k_B T e^{-(\varepsilon_C - E_F)/k_B T},$$

$$p \approx n_0 k_B T e^{-(E_F - \varepsilon_V)/k_B T},$$

ở đây  $n_0$  là mật độ các trạng thái electron. Từ  $n = p$  ta có

$$E_F = \frac{\varepsilon_C + \varepsilon_V}{2}.$$

(2) Hàm  $f(E)$  nói trên cho biết phân bố các electron trong các trạng thái  $E$  của vùng dẫn và được biết là hàm phân bố Fermi-Dirac.

(3) Vì

$$\varepsilon_C - E_F \approx \frac{E_g}{2} = 0.75 \text{ eV}$$

và tại nhiệt độ phòng  $k_B T = \frac{1}{40} \text{ eV}$ , ta có mật độ các electron dẫn

$$n \approx n_0 k_B T \exp\left(-\frac{\varepsilon_C - E_F}{k_B T}\right) = 4.68 \times 10^6 \text{ cm}^{-3}$$

## 1044

Xét một bán dẫn thuần. Gọi  $\epsilon$  là năng lượng của electron. Gọi  $g_C(\epsilon)$  là mật độ trạng thái trong vùng dẫn, và  $g_V(\epsilon)$  là mật độ trạng thái trong vùng hóa trị (xem hình 1.24). Giả thiết  $\epsilon_C - \epsilon_F \gg k_B T$ ,  $\epsilon_F - \epsilon_V \gg k_B T$ , và

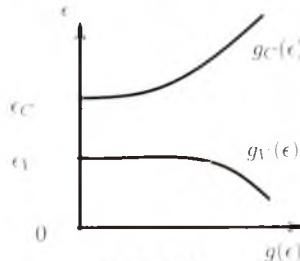
$$g_C(\epsilon) = C_1(\epsilon - \epsilon_C)^{1/2},$$

$$g_V(\epsilon) = C_2(\epsilon_V - \epsilon)^{1/2}.$$

ở đây  $\epsilon_C$  là năng lượng tại đáy vùng dẫn và  $\epsilon_V$  là năng lượng tại đỉnh vùng hóa trị. Năng lượng Fermi là  $\epsilon_F$ .

- (a) Tìm một biểu thức cho số các electron  $n$  ở vùng dẫn theo  $k_B T$ ,  $C_1$ ,  $\epsilon_C$ ,  $\epsilon_F$  và một tích phân xác định không có thứ nguyên.
- (b) Tìm một biểu thức cho số các lỗ trống  $p$  trong vùng hóa trị theo  $k_B T$ ,  $C_2$ ,  $\epsilon_V$ ,  $\epsilon_F$  và một tích phân xác định không có thứ nguyên.
- (c) Tìm một biểu thức tương minh cho  $\epsilon_F(T)$ .
- (d) Các kết quả nào trong các câu (a), (b) hoặc (c) vẫn còn đúng nếu vật liệu trên được pha tạp bằng các nguyên tử donor (cho)? Giải thích

(Princeton )



Hình 1.24

Lời giải:

- (a) Nồng độ electron trong vùng dẫn được tính bởi

$$n = \int_{\epsilon_C}^{\infty} f(\epsilon) g_C(\epsilon) d\epsilon$$

với

$$f(\epsilon) = \frac{1}{e^{3(\epsilon-\epsilon_F)} + 1}.$$

ở đây  $\beta = (k_B T)^{-1}$ . Vì  $\varepsilon - \varepsilon_F \geq \varepsilon_C - \varepsilon_F \gg k_B T$ , nên

$$f(\varepsilon) \approx e^{-\beta(\varepsilon - \varepsilon_F)}.$$

Đặt  $x = \beta(\varepsilon - \varepsilon_C)$ , ta có

$$\begin{aligned} n &\approx C_1 \int_{\varepsilon_C}^{\infty} e^{-\beta(\varepsilon - \varepsilon_F)} (\varepsilon - \varepsilon_C)^{1/2} d\varepsilon \\ &= C_1 \beta^{-3/2} e^{-\beta(\varepsilon_C - \varepsilon_F)} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{1/2} dx \\ &= C_1 (k_B T)^{3/2} e^{-(\varepsilon_C - \varepsilon_F)/k_B T} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{1/2} dx. \end{aligned}$$

(b) Xác suất chiếm chỗ của lỗ trống ở một trạng thái là  $1 - f(\varepsilon)$ . Vì  $\varepsilon_F - \varepsilon \geq \varepsilon_F - \varepsilon_V \gg k_B T$ , ta có

$$1 - f(\varepsilon) \approx \frac{e^{\beta(\varepsilon - \varepsilon_F)}}{e^{-\beta(\varepsilon_F - \varepsilon)} + 1} \approx e^{\beta(\varepsilon - \varepsilon_F)}.$$

Đặt  $x = -\beta(\varepsilon - \varepsilon_V)$ , ta có

$$\begin{aligned} p &= C_2 \beta^{-3/2} e^{\beta(\varepsilon_V - \varepsilon_F)} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{1/2} dx \\ &= C_2 (k_B T)^{3/2} e^{-(\varepsilon_F - \varepsilon_V)/k_B T} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{1/2} dx. \end{aligned}$$

(c) Đối với một chất bán dẫn thuận,  $n = p$ . Do vậy

$$C_1 e^{-(\varepsilon_C - \varepsilon_F)/k_B T} = C_2 e^{-(\varepsilon_F - \varepsilon_V)/k_B T},$$

suy ra

$$\varepsilon_F = \frac{1}{2} \left( \varepsilon_C + \varepsilon_V - k_B T \ln \frac{C_1}{C_2} \right).$$

(d) Nếu vật liệu bị pha tạp, các kết quả trong các câu (a) và (b) vẫn đúng miễn là vật liệu ở trạng thái cân bằng. Tuy nhiên, do pha tạp điều kiện  $n = p$  không còn đúng nữa và mức Fermi  $\varepsilon_F$  như đã chỉ ra ở (c) sẽ bị dịch đổi.

## 1045

Tại nhiệt độ phòng,  $k_B T/e = 26 \text{ mV}$ . Một mẫu cadimi sunfit có mật độ hạt dẫn  $10^{16} \text{ cm}^{-3}$  và hệ số linh động  $\mu = 10^2 \text{ cm}^2/\text{vôn giây}$ .

(a) Tính độ dẫn điện của mẫu này.

(b) Các hạt tải liên tục bị bẩy vào các vị trí bất động và sau đó lại bị tái ion hóa do nhiệt để trở về các trạng thái linh động. Nếu thời gian sống tự do trung bình tại một trạng thái linh động là  $10^{-5} \text{ giây}$ , thì khoảng cách căn quan phương mà một hạt tải khuếch tán giữa hai tâm bẩy kế tiếp nhau là bao nhiêu?

(c) Nếu các hạt tải có khôi lượng hiệu dụng bằng 0,1 lần khôi lượng của electron tự do, thì thời gian trung bình giữa hai lần tán xạ liên tiếp là bao nhiêu?

(Wisconsin)

Lời giải:

(a) Độ dẫn điện được tính bởi  $\sigma = n e \mu$ . Với  $n = 10^{22} \text{ m}^{-3}$ ,  $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ,  $\mu = 10^{-2} \text{ m}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$ , ta có  $\sigma = 16 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$ .

(b) Theo định luật phân bố đều năng lượng

$$\frac{1}{2} m \bar{v}_x^2 = \frac{1}{2} m \bar{v}_y^2 = \frac{1}{2} m \bar{v}_z^2 = \frac{1}{2} k_B T$$

suy ra

$$\frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{3}{2} k_B T .$$

hay

$$\bar{v}^2 = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} .$$

Khoảng cách căn quan phương  $l$  giữa các tâm bẩy được tính bởi

$$l^2 = \bar{v}^2 t^2 .$$

Do đó

$$l = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} t = \sqrt{3 \left( \frac{k_B T}{e} \right) \frac{e}{m}} t .$$

Với  $\frac{k_B T}{e} = 26 \times 10^{-3} \text{ V}$ ,  $\frac{e}{m} = 1.76 \times 10^{11} \text{ C kg}^{-1}$ ,  $t = 10^{-5} \text{ s}$ , ta có  $l = 1.17 \text{ m}$ .

(c) Mô hình electron tự do của các kim loại cho

$$\sigma = \frac{n e^2 \langle \tau \rangle}{m^*} ,$$

ở đây  $m^*$  là khối lượng hiệu dụng của một electron. Do đó thời gian trung bình giữa các tần xạ liên tiếp là

$$\langle \tau \rangle = \frac{0.1\sigma}{ne} \left( \frac{m}{e} \right) = 5.7 \times 10^{-15} \text{ s}.$$

### 1046

Xây dựng dạng phụ thuộc nhiệt độ của độ dãn điện  $\frac{n e^2 \tau}{m}$  (ở đây  $\tau$  = thời gian va chạm hiệu dụng) của một chất bán dẫn trong vùng nhiệt độ ở đó mật độ  $n$  của các hạt tải tự do là không đổi và cơ chế tản xạ chính là tản xạ Rutherford từ một hằng số và một số nhỏ các tạp chất tích điện.

(Wisconsin)

**Lời giải:**

Tiết diện vi phân đối với tản xạ Rutherford của một hạt điện tích  $e$ , khối lượng  $m$ , và vận tốc  $v$  gây bởi một hạt nhân của tạp chất điện tích  $Ze$  trên một đơn vị góc khối là

$$\frac{d\phi}{d\Omega} = \left( \frac{Ze^2}{8\pi\epsilon m v^2} \right)^2 \cosec^4 \left( \frac{\theta}{2} \right) = R^2 \cosec^4 \left( \frac{\theta}{2} \right).$$

ở đây  $\epsilon$  là độ điện thẩm của chất bán dẫn và  $\theta$  là góc tản xạ như chỉ ra trên hình 1.25. Xác suất trên một đơn vị thời gian tản xạ trong khoảng góc tản xạ giữa  $\theta$  và  $\theta + d\theta$  là

$$\begin{aligned} dP = N_1 v d\phi &= 2\pi N_1 v R^2 \frac{\sin \theta d\theta}{\sin^4 \left( \frac{\theta}{2} \right)} \\ &= 8\pi N_1 v R^2 \frac{d(1 - \cos \theta)}{(1 - \cos \theta)^2}. \end{aligned}$$

ở đây  $N_1$  là số các nguyên tử tạp chất trong một đơn vị thể tích.

Trong biểu thức của độ dãn điện,

$$\sigma = \frac{n e^2 \tau}{m},$$

thời gian va chạm hiệu dụng, hay còn gọi là thời gian hồi phục,  $\tau_c$ , sẽ chỉ tương đương với thời gian tự do trung bình giữa các va chạm  $\tau_c$  khi quá trình tản xạ là dẳng hướng, nhưng đây không phải trường hợp của tản xạ Rutherford. Thay vì thế,

$$\tau = \tau_c (1 - (\cos \theta))^{-1}.$$

ở đây  $\langle \cos \theta \rangle$  là giá trị trung bình của cosin góc tán xạ  $\theta$ . Như vậy

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tau} &= \frac{\langle 1 - \cos \theta \rangle}{\tau_c} \approx \int (1 - \cos \theta) dP \\ &= 8\pi N_I v R^2 \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \frac{d(1 - \cos \theta)}{(1 - \cos \theta)} \\ &= \frac{Z^2 e^4 N_I}{8\pi \epsilon^2 m^2 v^3} \ln \left( \frac{1 - \cos \theta_{\max}}{1 - \cos \theta_{\min}} \right).\end{aligned}$$

Do đó, khi coi hàm lôgarit gần đúng như một hằng số, ta có

$$\frac{1}{\tau} \propto N_I v^{-\frac{3}{2}}.$$

Do mỗi một bậc tự do của một hạt tải đang xét có một năng lượng trung bình  $\frac{1}{2}k_B T$ , nên

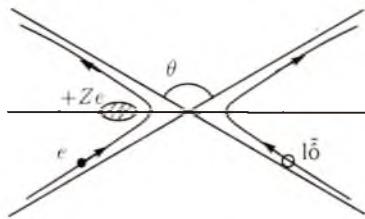
$$v = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} \propto T^{\frac{1}{2}}$$

và

$$\frac{1}{\tau} \propto T^{-\frac{3}{2}}.$$

Từ đây suy ra

$$\sigma = \frac{n e^2 \tau}{m} \propto T^{\frac{3}{2}}.$$



Hình 1.25

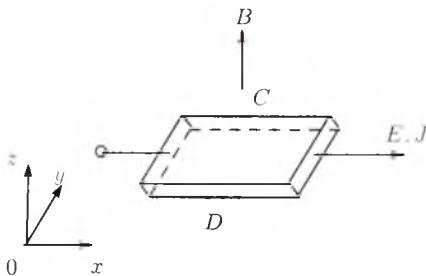
1047

Rút ra một biểu thức tính hệ số Hall cho một chất bán dẫn thuận theo độ linh động của electron và lỗ trống và mật độ các hạt tải.

(Wisconsin)

Lời giải:

Xét một mẫu bán dẫn thuần hình chữ nhật, song song với mặt phẳng  $xy$ , được đặt trong điện trường  $E_x$  và từ trường  $B_z$  như trên hình 1.26. Điện trường làm cho các electron trôi theo chiều  $-x$  và các lỗ trống trôi theo chiều  $x$ , giả thiết hai mặt phẳng hai đầu của mẫu vuông góc với trục  $x$  được nồi thành mạch điện khép kín. Do sự trôi, từ trường tác dụng các lực Lorentz  $qv \times B$  lên các hạt tải làm cho cả các electron lẫn các lỗ trống lệch theo phương  $-y$  về phía bề mặt  $D$ . Trong khi các electron và lỗ trống có xu hướng triệt tiêu lẫn nhau, nhưng sự triệt tiêu này không được hoàn toàn dẫn đến kết quả là một điện tích toàn phần khác không được tích lũy trên mặt  $D$  và một lượng điện tích cùng giá trị nhưng ngược dấu sẽ tích tụ trên bề mặt  $C$ . Hiện tượng này tạo ra một điện trường gọi là điện trường Hall  $\varepsilon_y$ , theo phương  $y$ .



Hình 1.26

Độ dẫn điện của một chất bán dẫn là

$$\sigma = nq\mu_n + p q \mu_p ,$$

ở đây  $n, p$  là nồng độ của electron và lỗ trống và  $\mu_n, \mu_p$  là độ linh động của chúng được định nghĩa là vận tốc trên một đơn vị cường độ điện trường theo phương của điện trường. Trong trạng thái ổn định sẽ không có dòng điện thực sự theo phương  $y$ . Tuy nhiên, dòng lỗ trống và dòng electron riêng rẽ thì vẫn khác không. Đặt các mật độ dòng tương ứng là  $(J_p)_y, (J_n)_y$ . Khi đó

$$\begin{aligned} (J_p)_y &= pq\mu_p \varepsilon_y - pq\mu_p (v_p)_x B_z \\ &= pq\mu_p \varepsilon_y - pq\mu_p^2 E_x B_z , \\ (J_n)_y &= nq\mu_n \varepsilon_y - nq\mu_n (v_n)_x B_z \\ &= nq\mu_n \varepsilon_y + nq\mu_n^2 E_x B_z . \end{aligned}$$

Trong trạng thái ổn định,

$$J_y = (J_p)_y + (J_n)_y = 0 .$$

suy ra

$$\varepsilon_y = \left( \frac{p\mu_p^2 - n\mu_n^2}{p\mu_p + n\mu_n} \right) E_x B_z .$$

Hệ số Hall, được định nghĩa là  $\frac{\varepsilon_y}{J_x B_z}$ , như vậy sẽ bằng

$$R_{\text{Hall}} = \frac{1}{q} \frac{(p\mu_p^2 - n\mu_n^2)}{(p\mu_p + n\mu_n)^2} .$$

vì  $J_x = \sigma E_x$ . Đối với một bán dẫn thuần,  $n = p$  và ta có

$$R_{\text{H}} = \frac{1}{qn} \frac{(\mu_p - \mu_n)}{(\mu_p + \mu_n)} .$$

### 1048

Giả thiết rằng hệ thức  $E$  theo  $k$  đổi với các electron trong vùng dẫn của một chất bán dẫn giả thuyết loại  $n$  hóa trị bốn có thể được cho gần đúng như sau

$$E = ak^2 + \text{constant} .$$

Sự công hưởng cyclotron của các electron trong một từ trường có  $B = 0.1 \text{ Wb/m}^2$  xảy ra tại tần số góc  $\omega_c = 1.8 \times 10^{11} \text{ rad s}^{-1}$ .

(a) Tìm giá trị  $a$ .

(b) Giả thiết rằng chất bán dẫn này bị pha tạp bởi các donor hóa trị năm. Đánh giá số các donor trong một  $\text{m}^3$  cho biết hệ số Hall tại nhiệt độ phòng là  $R_{\text{H}} = 6.25 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \text{ C}^{-1}$  và hằng số điện môi tương đối là  $\varepsilon_r = 15$ .

(Wisconsin)

Lời giải:

(a) Một electron trong vùng dẫn chuyển động như thế nó có một khối lượng hiệu dụng  $m^*$  được xác định bởi

$$\frac{1}{m^*} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial^2 E}{\partial k^2} = \frac{2a}{\hbar^2} .$$

Tần số công hưởng cyclotron của electron là

$$\omega_c = \frac{eB}{m^*} .$$

Do đó

$$a = \frac{\hbar^2 \omega_c}{2 e B} = \frac{(1.05 \times 10^{-34})^2 \times 1.8 \times 10^{11}}{2 \times 1.6 \times 10^{-19} \times 0.1} = 6.2 \times 10^{-38} \text{ J m}^2.$$

(b) Đối với một bán dẫn loại n,  $n \gg p$  và (Bài tập 1047)

$$R_H \approx -\frac{1}{ne}.$$

Tại nhiệt độ phòng, các nguyên tử tạp chất hầu như bị ion hóa hoàn toàn. Do vậy mật độ số hạt tạp là

$$N_1 \approx n = -\frac{1}{R_H e} = \frac{1}{6.25 \times 10^{-6} \times 1.6 \times 10^{-19}} = 10^{24} \text{ m}^{-3}.$$

### 1049

Kích thích quang của bán dẫn germani thuần tạo ra mật độ trung bình  $10^{12}$  electron dẫn trong một  $\text{cm}^3$  trong vật liệu này tại nhiệt độ nitơ lỏng. Tại nhiệt độ này, độ linh động của electron và lỗ trống là bằng nhau,  $\mu = 0.5 \times 10^4 \text{ cm}^2/\text{vôn giây}$ . Hằng số điện môi của germani là 20.

(a) Nếu đặt một hiệu điện thế 100 vôn vào hai mặt đối diện của khối tinh thể lập phương cạnh 1 cm dưới các điều kiện như mô tả ở trên, thì dòng điện quan sát được sẽ bằng bao nhiêu?

(b) Giá trị gần đúng của hệ số khuếch tán của electron và lỗ trống bằng bao nhiêu? (Tại nhiệt độ phòng,  $\frac{k_B T}{e} = 26 \text{ mV}$ )

(Wisconsin)

Lời giải:

(a) Đối với một chất bán dẫn thuần,  $n = p$  và mật độ dòng là

$$j = \sigma E = (n\mu_n + p\mu_p)eE = 2n\mu_n eE.$$

Với  $n = 10^{18} \text{ m}^{-3}$ ,  $\mu_n = 0.5 \text{ m}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$ ,  $E = \frac{100}{10^{-2}} = 10^4 \text{Vm}^{-1}$ ,  $V = 100 \text{ V}$ ,  $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ , mật độ dòng bằng

$$j = 1.6 \times 10^3 \text{ Am}^{-2}$$

và cường độ dòng điện là

$$I = jS = 1.6 \times 10^3 \times 10^4 = 0.16 \text{ A} = 160 \text{ mA.}$$

(b) Hệ số khuếch tán  $D$  được tính từ hệ thức Einstein

$$\frac{D}{\mu} = \frac{k_B T}{e}$$

Nhiệt độ nút lỏng  $T_D = 77$  K,  $\mu_n = \mu_p = \mu$ , ta có

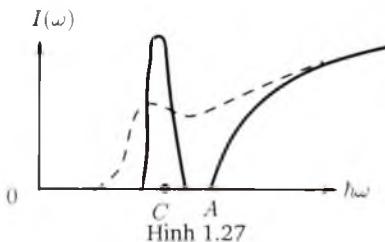
$$D_n = D_p = D.$$

Hệ số khuếch tán của các electron và lỗ trống do vậy sẽ là

$$D = \frac{k_B T_D}{e} \mu = \frac{1,38 \times 10^{-23} \times 77 \times 0,5}{1,6 \times 10^{-19}} = 3,3 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \text{s}^{-1}.$$

### 100

Phổ hấp thụ quang học tại nhiệt độ thấp ( $T \sim 4$  K) của chất bán dẫn khe trực tiếp InP rất tinh khiết được mô tả trên hình 1.27, trong đó cường độ hấp thụ được vẽ như một hàm của năng lượng photon (dường liên nét). Có một số định cường độ thấp hơn giữa C và A; nhưng để đơn giản ta không vẽ các định đó trên hình.



(a) Hãy chỉ rõ nguồn gốc vật lý của vùng hấp thụ với ngưỡng tại A và của định hấp thụ tại C?

Các năng lượng  $E_A$  và  $E_C$  tương ứng là 1,400 eV và 1,386 eV. Hằng số điện môi tĩnh của InP là 9,6, và lỗ trống trong InP nhẹ hơn rất nhiều so với electron ( $m_h^* \ll m_e^*$ ). Từ các thông tin trên hãy tính

- (b) Khe năng lượng trực tiếp của InP;
- (c) Khối lượng lỗ trống  $m_h^*$ .

Tại nhiệt độ phòng vạch sắc nét C bị mở rộng và không còn thấy rõ nữa (dường đứt nét).

(d) Hãy giải thích hiện tượng này.

(Princeton)

**Lời giải:**

(a) Vùng hấp thụ với ngưỡng tại  $A$  gây bởi sự hấp thụ một photon của tia sáng tới bởi một electron hóa trị và electron này nhảy lên vùng dẫn. Quá trình này có thể xảy ra nếu  $\hbar\nu \geq E_g$ , là khe năng lượng. Giới hạn dưới của năng lượng photon tương ứng với ngưỡng. Electron bị kích thích lên vùng dẫn và lỗ trống ở vùng hóa trị đều xử sự như các hạt tự do.

Nếu năng lượng của photon tới  $\hbar\nu < E_g$ , thì sẽ không thể kích thích một electron hóa trị nhảy lên vùng dẫn. Tuy nhiên, nó vẫn có thể dù để kích thích một electron từ một nguyên tử nào đó của tinh thể để lại một lỗ trống, cặp electron-lỗ trống này hình thành nên một trạng thái liên kết được gọi là exciton trong đó hai hạt quay quanh trong tâm của chúng. Photon tham gia vào quá trình hấp thụ exciton có năng lượng bằng  $\hbar\nu = E_g - E_{ex}$ , với  $E_{ex}$  là năng lượng liên kết exciton, thường vào khoảng 0,01 eV. Phổ exciton là một vạch sắc nét ở dưới một chút so với ngưỡng của miền hấp thụ và có dạng một đỉnh sắc nét tại C trên hình 1.27. Vạch này thường bị mở rộng do tương tác của exciton với các tạp chất và các hiệu ứng khác nữa.

(b)  $E_g = E_A = 1.400$  eV.

(c) Coi exciton tương tự như một nguyên tử hiđrô. Khi đó, năng lượng của trạng thái thứ  $n$  là

$$E_n = E_g - \frac{\mu e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2\epsilon^2\hbar^2 n^2}.$$

ở đây do  $m_h^* \ll m_e^*$

$$\mu = \frac{m_e^* m_h^*}{m_e^* + m_h^*} \approx m_h^*,$$

là khối lượng rút gọn của hệ exciton. Ở trạng thái cơ bản,  $n = 1$ ,  $E_1 = E_c = 1.386$  eV,  $E_g = 1.400$  eV, ta có

$$m_h^* c^2 = 2(E_g - E_c)\epsilon^2 \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \right)^{-2}.$$

Với

$$E_g - E_c = 0.014 \text{ eV}, \quad \epsilon = 9.6, \quad \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137}$$

ta tìm được

$$m_h^* c^2 = 4.85 \times 10^4 \text{ eV} = 9.5 \times 10^{-2} m_e c^2.$$

hay

$$m_h^* = 9.5 \times 10^{-2} m_e.$$

(d) Tại nhiệt độ phòng, dao động mạng là đáng kể và electron ở hệ exciton tương tác với nhánh quang của dao động mạng dẫn đến sự mở rộng của vách exciton, khiến cho nó có thể nhập vào vùng hấp thụ đặc trưng mặc dù dính exciton vẫn có thể còn phân biệt được.

### 1051

Trong silic tinh thể, khe năng lượng là 1,14 eV, khối lượng hiệu dụng của lỗ trống khoảng  $m_h = 0.3$  m và khối lượng hiệu dụng của electron  $m_e = 0.2$  m.

(a) Dùng (và biện luận) các phép gần đúng thích hợp, hãy tìm một biểu thức cho hàm  $f(T)$  trong định luật tác dụng khối lượng

$$np = f(T),$$

ở đây  $n$  và  $p$  là các nồng độ electron và lỗ trống và  $T$  là nhiệt độ. (Bạn có thể cần biết  $\int_0^\infty x^{1/2} e^{-x} dx = (\frac{\pi}{4})^{1/2}$ ).

(b) Nồng độ  $N_d$  của donor As hóa trị năm cần thêm vào là bao nhiêu để làm cho độ dẫn tăng lên  $10^4$  lần so với độ dẫn thuần tại nhiệt độ phòng? (Bỏ qua các tạp acceptor và lấy hằng số điện môi tĩnh là  $\epsilon = 11.8$ )

(c) Công thoát  $\phi_s$  của một chất bán dẫn là hiệu năng lượng giữa một điện tử ở trạng thái nghỉ trong chân không và năng lượng Fermi của chất bán dẫn. Nếu một kim loại với công thoát  $\phi_m$  được sử dụng để làm tiếp xúc điện với chất bán dẫn, hãy sử dụng các giả đồ vùng của các vật liệu đó tại điểm tiếp xúc để chỉ ra rằng lớp tiếp xúc có thể có tính chỉnh lưu hoặc có tính ômic tùy thuộc vào độ lớn tương đối của  $\phi_m$  và  $\phi_s$ .

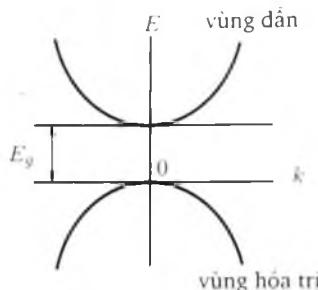
(Princeton)

**Lời giải:**

(a) Gần đây vùng dẫn của một chất bán dẫn, electron có vectơ sóng  $k$  mang một năng lượng

$$E(k) = E_g + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e},$$

ở đây  $E_g$  là khe năng lượng và năng lượng tương ứng với đỉnh của vùng hóa trị được lấy là 0 như chỉ ra trong hình 1.28.



Hình 1.28

Số các trạng thái trong một đơn vị thể tích của chất bán dẫn trong khoảng  $k$  đến  $k + dk$  là

$$\frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3} = \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{2me}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} (E - E_g)^{\frac{1}{2}} dE .$$

Do mỗi một giá trị  $k$  tương ứng với hai trạng thái spin, nên mật độ trạng thái trên một khoảng đơn vị là

$$g(E) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2me}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} (E - E_g)^{\frac{1}{2}}$$

Khi hệ ở trạng thái cân bằng nhiệt tại nhiệt độ  $T$ , các electron tuân theo hàm phân bố Fermi

$$f(E) = \frac{1}{1 + e^{(E - E_F)/k_B T}}$$

Trong một chất bán dẫn, mức Fermi  $E_F$  thường nằm trong vùng cảm giữa vùng hóa trị và vùng dẫn, và khoảng cách của nó tới hai vùng lớn hơn  $k_B T$ . Như vậy  $E - E_F \gg k_B T$  và ta có thể lấy

$$f(E) \approx e^{(E_F - E)/k_B T}$$

Nồng độ electron của vùng dẫn như vậy là

$$\begin{aligned} n &= \int_{E_g}^{\infty} f(E)g(E)dE \\ &\approx \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{2m_e}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \int_{E_g}^{\infty} (E - E_g)^{\frac{1}{2}} e^{(E_F - E)/k_B T} dE \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{2m_e k_B T}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-(E_g - E_F)/k_B T} \int_0^{\infty} x^{\frac{1}{2}} e^{-x} dx \end{aligned}$$

với  $x = \frac{E - E_g}{k_B T}$ . Do đó

$$n \approx N_e e^{-(E_g - E_F)/k_B T}$$

với

$$N_e = 2 \left( \frac{m_e k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

Tương tự, nồng độ lỗ trống trong vùng hóa trị là

$$p = \int_{-\infty}^0 f_h(E)g_h(E)dE,$$

ở đây

$$f_h(E) = 1 - f(-E) \approx e^{-(E_F - E)/k_B T}$$

$$g_h(E) = \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{2m_h}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} (-E)^{\frac{1}{2}},$$

Vậy

$$p \approx N_h e^{-E_F/k_B T}$$

với

$$N_h = 2 \left( \frac{m_h k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} f(T) &= np \approx N_e N_h e^{-E_g/k_B T} \\ &= 4(m_e m_h)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-E_g/k_B T}. \end{aligned}$$

(b) Biểu thức  $np = f(T)$  chỉ ra rằng, tại một nhiệt độ xác định và đối với một chất bán dẫn không suy biến, tích của các nồng độ hạt tại trạng thái cân bằng nhiệt không phụ thuộc vào tạp chất có mặt trong vật liệu. Bởi vậy biểu thức này cũng đúng cho một chất bán dẫn thuần với  $n = p = n_1$ . Như vậy đối với một bán dẫn thuần, độ dẫn bằng

$$\sigma_i = e n_1 (\mu_e + \mu_h) \approx 2e n_1 \mu_e .$$

Donor As có hóa trị năm trong khi acceptor Si hóa trị bốn do đó mỗi một nguyên tử donor đóng góp một electron tự do tại nhiệt độ phòng. Như vậy  $n \approx N_d$ . Bỏ qua hiệu ứng của các tạp chất acceptor, độ dẫn của vật liệu bằng

$$\sigma = e \mu_e N_d .$$

Để có

$$\frac{\sigma}{\sigma_i} = \frac{N_d}{2n_1} = 10^4 .$$

ta cần

$$N_d = 2 \times 10^4 n_1 .$$

Từ (a) suy ra

$$\begin{aligned} n_1 &= \sqrt{f(T)} = 2(m_e m_h)^{\frac{3}{4}} \left( \frac{k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-E_g/k_B T} \\ &= 2(0.2 \times 0.3)^{0.75} \left( \frac{k_B T m c^2}{2\pi \hbar^2 c^2} \right)^{1.5} e^{-E_g/k_B T} . \end{aligned}$$

Với

$$k_B T \approx \frac{1}{40} \text{ eV ở nhiệt độ phòng},$$

$$E_g = 1.14 \text{ eV với Si},$$

$$mc^2 = 0.511 \text{ MeV}, \quad c = 3 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}.$$

$$\hbar = 6.582 \times 10^{-16} \text{ eVs} .$$

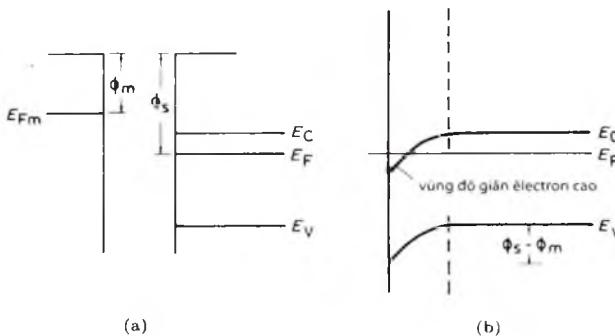
ta có

$$\begin{aligned} n_1 &= 2(0.2 \times 0.3)^{0.75} \left( \frac{0.511 \times 10^6}{80\pi} \right)^{1.5} \left( \frac{1}{6.58 \times 10^{-16} \times 3 \times 10^8} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-22.8} \\ &= 3.62 \times 10^{14} \text{ m}^{-3} . \end{aligned}$$

và do đó

$$N_d = 7,2 \times 10^{18} \text{ m}^{-3}.$$

(c) Nếu  $\Phi_m < \Phi_s$ , thì các giản đồ vùng năng lượng trước và sau khi một kim loại tiếp xúc với bán dẫn loại n được mô tả tương ứng trên hình 1.29 (a) và (b).

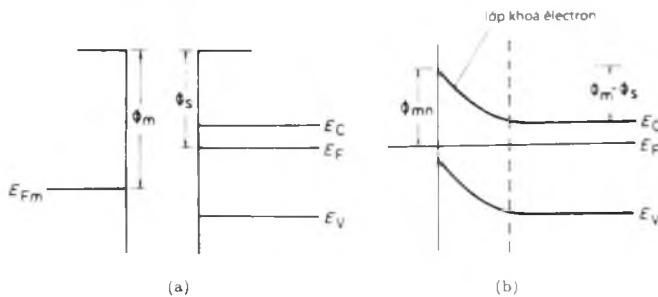


Hình 1.29

Sau khi tiếp xúc, do  $\Phi_m < \Phi_s$ , các electron trong kim loại chảy vào chất bán dẫn. Vùng năng lượng gần bề mặt của chất bán dẫn bị cong xuống để hình thành nên một lớp dẫn điện tốt làm cho phần điện trở tiếp xúc giữa chất kim loại và chất bán dẫn trở nên rất nhỏ. Do đó lớp tiếp xúc đó có tính ômic.

Nếu  $\Phi_m > \Phi_s$ , thì các giản đồ năng lượng trước và sau khi kim loại tiếp xúc với chất bán dẫn loại n được mô tả tương ứng trên Hình 1.30 (a) và (b).

Sau khi tiếp xúc, do  $\Phi_m > \Phi_s$ , các electron trong chất bán dẫn chảy vào kim loại, và vùng năng lượng gần bề mặt của chất bán dẫn cong lên tạo thành vùng có điện trở lớn, tức là tạo nên một lớp cản hay còn gọi là rào thế bề mặt. Khi một hiệu điện thế thuận được tác dụng vào, chất kim loại trở nên tích điện dương và chất bán dẫn tích điện âm, rào thế bề mặt giảm xuống, và dòng điện từ chạy từ chất bán dẫn đến kim loại tăng lên đột ngột, tạo nên một dòng điện mạnh chạy qua. Ngược lại, khi có một hiệu điện thế nghịch tác dụng, rào thế bề mặt sẽ dâng cao lên và dòng điện từ chảy từ chất bán dẫn đến kim loại sẽ giảm đi đáng kể và tiệm cận về không. Như vậy, chỉ một vài electron chạy



Hình 1.30

từ kim loại sang chất bán dẫn tạo nên một dòng điện ngược với cường độ rất yếu. Do đó tiếp xúc này có tác dụng như một bộ chỉnh lưu.

### 1.3. CÁC TÍNH CHẤT ĐIỆN TỬ, CÁC TÍNH CHẤT QUANG VÀ SIÊU DẪN (1052 1076)

1052

Xu hướng định hướng của một điện trường  $E$  lên một dipole (lưỡng cực) vĩnh cửu bị chống lại bởi chuyển động nhiệt hỗn loạn.

(a) Sử dụng cơ học thống kê cổ điển, hãy tính độ phân cực toàn phần của một khí gồm  $N$  dipole vĩnh cửu độc lập có mômen p.

(b) Chỉ ra rằng đối với các trường nhỏ, độ phân cực định hướng tính cho một dipole tỷ lệ nghịch với nhiệt độ.

(c) Hãy thảo luận về ảnh hưởng của hiện tượng này lên hằng số điện môi của nước (là một phân tử phân cực) ở các tần số cao và ở các tần số thấp.

(Princeton )

**Lời giải:**

(a) Trong một chất khí gồm các dipole độc lập nhau, các dipole này có thể quay một cách tự do. Thể năng của một dipole có mômen p trong một điện

trường  $\mathbf{E}$  bằng

$$V = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} = -pE \cos \theta.$$

ở đây  $\theta$  là góc tạo bởi các vectơ. Cơ học thống kê cổ điển chỉ ra rằng xác suất để tìm thấy dipole nằm dọc theo hướng  $\theta$  được cho bởi hàm phân bố Boltzmann

$$f(\theta) = e^{-V/k_B T} = \exp\left(\frac{pE \cos \theta}{k_B T}\right).$$

Giá trị trung bình của  $p$  theo phương từ trường là

$$\langle p \cos \theta \rangle = \frac{\int p \cos \theta f(\theta) d\Omega}{\int f(\theta) d\Omega}$$

với  $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$ . Do đó

$$\begin{aligned} \langle p \cos \theta \rangle &= \frac{\int_0^\pi p \cos \theta \exp\left(\frac{pE \cos \theta}{k_B T}\right) 2\pi \sin \theta d\theta}{\int_0^\pi \exp\left(\frac{pE \cos \theta}{k_B T}\right) 2\pi \sin \theta d\theta} \\ &= \frac{p \int_{-1}^1 e^{\beta x} x dx}{\int_{-1}^1 e^{\beta x} dx} \\ &= \frac{p}{\beta} (\beta \coth \beta - 1), \end{aligned}$$

ở đây  $x = \cos \theta$ ,  $\beta = \frac{pE}{k_B T}$ .

Do có  $N$  dipole dọc lập trong chất khí nên độ phân cực toàn phần bằng

$$P = N \langle p \cos \theta \rangle = \frac{N k_B T}{E} \left( \frac{pE}{k_B T} \coth \frac{pE}{k_B T} - 1 \right).$$

(b) Đối với các trường nhỏ,  $\beta = \frac{pE}{k_B T} \ll 1$  và

$$\coth \beta = \frac{1}{\beta} + \frac{\beta}{3} - \frac{\beta^3}{45} + \dots \approx \frac{k_B T}{pE} + \frac{pE}{3k_B T}.$$

Từ định nghĩa ta có độ phân cực định hướng trên một dipole là

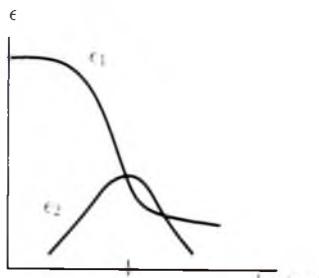
$$\alpha = \frac{P}{EN} \approx \frac{p^2}{3k_B T} \propto T^{-1}.$$

(c) Nếu điện trường dao động, các dipole hướng theo trường sẽ quay theo hai chiều khi trường đảo chiều trong từng chu kỳ. Tuy nhiên, dipole có thể chịu một lực ma sát do sự va chạm của nó với các phân tử khác trong chất khí, dẫn đến sự tiêu hao năng lượng được gọi là tổn hao điện môi. Điều này có nghĩa là tồn tại một thời gian hồi phục  $\tau$  cũng như sự chậm pha giữa trường tác dụng và độ phân cực, và hằng số điện môi  $\epsilon = \epsilon_0 + \alpha n$ , ở đây  $\epsilon_0$  là độ điện thẩm trong chân không và  $n$  là số các dipole trên một đơn vị thể tích, là một số phức

$$\epsilon = \epsilon_1 + i\epsilon_2.$$

Sự biến đổi của  $\epsilon_1, \epsilon_2$  theo  $\omega\tau$  được mô tả trên hình 1.31. Phần ảo  $\epsilon_2$ , tỷ lệ với tổn hao điện môi.

Tại các tần số thấp ( $\omega\tau \ll 1$ ), tổn hao điện môi là nhỏ và  $\epsilon \approx \epsilon_1 \approx \epsilon_r$ , là độ điện thẩm tĩnh. Khi tần số tăng lên đến lìa cận của  $\omega\tau \approx 1$ , tổn hao điện môi trở nên lớn đáng kể và phần thực của hằng số điện môi giảm đi khi tần số tăng. Ở vùng tần số cao ( $\omega\tau \gg 1$ ), sự đổi trạng thái của các dipole không theo kịp các dao động quá nhanh của trường tác dụng và sự tổn hao điện môi lại trở nên nhỏ. Trong vùng tần số này phần thực  $\epsilon_1$  có xu hướng là một hằng số không đổi  $\epsilon_\infty$ , đó là hằng số điện môi đối với các tần số cao.



Hình 1.31

1053

(a) Rút ra biểu thức  $\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \omega_p^2 = \frac{ne^2}{\epsilon_0 m}$  cho hằng số điện môi như một hàm của  $\omega$  đối với một khí electron tự do có mật độ  $n$ .

(b) Hãy chứng tỏ rằng các kim loại không cho ánh sáng với tần số  $\omega$  nhỏ hơn  $\omega_p$  truyền qua.

(c) Tính bước sóng cắt đôi với kim loại Na nếu thể tích của một ô cơ sở trong Na là  $35 \times 10^{-30} \text{ m}^3$ .

(Wisconsin)

Lời giải:

(a) Đặt trục  $x$  song song với phương của điện trường  $\mathbf{E} = E_0 e^{i\omega t}$ . Sự chuyển động của electron tự do từ vị trí ban đầu hay còn gọi là vị trí gốc được mô tả bởi phương trình

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -e E_0 e^{i\omega t}.$$

Thử một nghiệm có dạng  $x = x_0 e^{i\omega t}$ . Thay vào phương trình trên, ta được

$$x_0 = \frac{e E_0}{m \omega^2}.$$

Momen dipole trên một đơn vị thể tích hay còn gọi là độ phân cực của khí electron, theo định nghĩa, là

$$P = -n e x = -\frac{n e^2}{m \omega^2} E_0 e^{i\omega t} = -\frac{n e^2}{m \omega^2} E.$$

Hàng số điện môi (tương đối)  $\epsilon$  sẽ là

$$\epsilon = \frac{D}{\epsilon_0 E} = \frac{\epsilon_0 E + P}{\epsilon_0 E} = 1 - \frac{n e^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

ở đây  $\omega_p = \sqrt{\frac{n e^2}{\epsilon_0 m}}$  là tần số (góc) plasma của khí.

(b) Chiết suất của một chất là  $n = \sqrt{\epsilon}$ . Đối với ánh sáng có tần số  $\omega < \omega_p$  di đến bề mặt kim loại có tần số plasma  $\omega_p$ ,  $n$  là một số ảo. Điều này có nghĩa là ánh sáng đó không thể truyền qua được kim loại này mà bị phản xạ hoàn toàn tại bề mặt. Những kim loại như vậy được gọi là chất chấn sáng đối với các ánh sáng có tần số nhỏ hơn  $\omega < \omega_p$ .

(c) Nguyên tử natri có hóa trị một và ở trạng thái kim loại mỗi một nguyên tử đóng góp một electron dẫn. Mỗi một ô cơ sở chứa một nguyên tử, nên mật độ các electron dẫn là

$$n = \frac{1}{35 \times 10^{-30}} = 2,86 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}.$$

Vậy

$$\begin{aligned} \omega_p^2 &= 4\pi c^2 n \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \right) \\ &= 4\pi \times (3 \times 10^8)^2 \times 2,86 \times 10^{28} \times 2,82 \times 10^{-15} \\ &= 9,12 \times 10^{31} \text{ s}^{-2}. \end{aligned}$$

và tần số góc cắt là

$$\omega = \omega_p = 9.55 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$$

Do vậy bước sóng cắt là

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = 2.0 \times 10^{-7} \text{ m} = 2000 \text{ \AA}.$$

### 1054

Một chất rắn được cấu thành từ một tập hợp các nguyên tử như nhau, mỗi một nguyên tử như vậy có thể được coi như một electron điện tích  $q$  và khối lượng  $m$  được liên kết với một vị trí nguyên tử cố định bởi một lò xo có độ cứng  $\kappa$ . Năng lượng tiêu tán được mô tả dưới dạng lực cản ở mỗi nguyên tử bằng  $-bv$ , ở đây  $v$  là vận tốc của electron. Mật độ các nguyên tử trong chất rắn là  $N$ . Một sóng điện từ phản xạ phẳng có tần số  $\omega$  lan truyền trong chất rắn. Xét các dao động tử theo mô hình cổ điển và phi tương đối. Để thông nhất cách ký hiệu ta sử dụng  $\omega_0^2 = \kappa/m$ ,  $\gamma = b/m$  và  $\omega_p^2 = 4\pi Nq^2/m$ .

- (a) Tính chiết suất  $n(\omega)$ .
- (b) Vẽ phác các phần thực và ảo của  $n(\omega)$  trong giới hạn mật độ thấp ( $\omega_p/\omega_0 \ll 1$  và  $\omega_p/\gamma \ll 1$ ).
- (c) Ở tần số cộng hưởng  $\omega = \omega_0$ , tính độ dài suy giảm trong chất rắn trong giới hạn mật độ thấp.

Ở vùng gần tần số cộng hưởng, vận tốc nhóm  $v_g$ , được định nghĩa là  $d\omega/dk$ , có thể vượt quá vận tốc ánh sáng. Giải thích tại sao điều này không phải là một nghịch lý.

(MIT)

**Lời giải:**

- (a) Đặt  $\mathbf{r}$  là độ dịch chuyển của một electron điện tích  $q$  từ một vị trí nguyên tử cố định và  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$  là cường độ điện trường của sóng đi qua vị trí nguyên tử đó. Phương trình chuyển động của electron là

$$m\ddot{\mathbf{r}} + b\dot{\mathbf{r}} + \kappa\mathbf{r} = q\mathbf{E}.$$

Thử một nghiệm  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 e^{-i\omega t}$ . Thay thế vào phương trình trên ta có

$$\mathbf{r} = \frac{q\mathbf{E}}{-m\omega^2 - i\omega b + \kappa} = \frac{q}{m} \frac{\mathbf{E}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega b}.$$

Mômen dipole trên một đơn vị thể tích hay còn gọi là độ phân cực của chất rắn do đó sẽ là

$$\mathbf{P} = nqr = \frac{Nq^2}{m} \frac{E}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}.$$

Vì  $\mathbf{P}$  và  $\mathbf{E}$  song song nhau, hằng số điện môi tương đối là

$$\epsilon = \frac{\epsilon_0 E + P}{\epsilon_0 E} = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma},$$

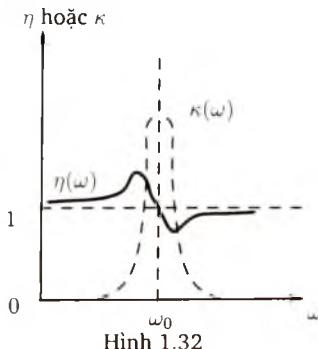
ở đây  $\omega_p^2 = \frac{Nq^2}{\epsilon_0 m}$  (hệ SI). Chiết suất  $n$  bây giờ là một số phức:

$$n \equiv \sqrt{\epsilon} = \eta + i\kappa$$

với  $\eta, \kappa$  được tính bởi

$$\begin{aligned}\eta^2 - \kappa^2 &= 1 + \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}, \\ 2\eta\kappa &= \frac{\omega\omega_p^2\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}.\end{aligned}$$

(b) Vì  $\omega_p \propto \sqrt{N}$ , nên trong giới hạn mật độ thấp,  $\eta^2 - \kappa^2 \sim 1$ ,  $2\eta\kappa \sim 0$ . Điều này có nghĩa là phần ảo  $\kappa$  của  $n$  là nhỏ và phần thực  $\eta$ , gần với 1 ở mật độ thấp. Sự biến thiên của  $\eta(\omega)$ ,  $\kappa(\omega)$  đối với mật độ thấp được vẽ trên hình 1.32. Chú ý rằng  $\kappa$  đạt cực đại tại  $\omega = \omega_0$ . Cực đại hấp thụ tương ứng được gọi là hấp thụ cộng hưởng. Tương tự ta có  $\eta > 1$  đối với  $\omega < \omega_0$  và  $\eta < 1$  đối với  $\omega > \omega_0$ .



Hình 1.32

(c) Ở tần số cộng hưởng,  $\omega \approx \omega_0$  và

$$\eta^2 - \kappa^2 = 1, \quad 2\eta\kappa = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}.$$

Trong giới hạn mật độ thấp,  $\omega_p \ll \gamma$  và hệ các phương trình trên có nghiệm

$$\eta \approx 1, \quad \kappa \approx \frac{\omega_p^2}{2\omega_0\gamma}.$$

Hàm sóng có một thừa số e mũ

$$e^{i(knr - \omega t)} = e^{-\kappa kr} e^{i(k\eta r - \omega t)}$$

ở đây  $k = \omega_0/c$ , chỉ ra rằng cường độ có một thừa số suy giảm  $e^{-2\kappa\omega_0 r/c}$ . Độ dài suy giảm được tính bởi

$$\frac{2\kappa\omega_0}{c}l = 1,$$

hay

$$l = \frac{c}{2\kappa\omega_0} = \frac{c\gamma}{\omega_p^2},$$

(d) Chiết suất theo định nghĩa là

$$n = \frac{c}{v} = \frac{ck}{\omega},$$

suy ra

$$k = \frac{n(\omega)\omega}{c}.$$

Vận tốc nhóm  $v_g$  được tính bởi

$$v_g = \left( \frac{dk}{d\omega} \right)^{-1} = \left( \frac{\omega}{c} \frac{dn}{d\omega} + \frac{n}{c} \right)^{-1}.$$

Trong giới hạn mật độ thấp, vùng gần cộng hưởng  $\omega \approx \omega_0$ ,  $\kappa \ll 1$  do đó

$$n = \eta + i\kappa \approx \eta,$$

$$v_g \approx \frac{c}{\omega_0 \left( \frac{d\eta}{d\omega} \right)_{\omega_0} + \eta}.$$

Do  $\left( \frac{d\eta}{d\omega} \right)_{\omega_0} = \frac{1}{2\eta} \left( \frac{d\eta^2}{d\omega} \right)_{\omega_0} = -\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2\gamma^2}$ ,  $\eta \approx 1$  ở các mật độ thấp, vì thế

$$v_g \approx \frac{c}{1 - \frac{\omega_p^2}{\gamma^2}} > c,$$

cho thấy rằng ở vùng gần cộng hưởng vận tốc nhôm vượt quá tốc độ ánh sáng. Tuy nhiên, điều này không phải là một nghịch lý bởi vì khi có hiện tượng tán sắc dị thường, vận tốc nhôm không còn được đồng nhất với vận tốc truyền năng lượng nữa, mà vận tốc truyền năng lượng luôn nhỏ hơn  $c$ .

## 1055

Một chất điện môi được mô tả như một hệ gồm có  $N$  electron hóa trị trên một đơn vị thể tích liên kết với các ion dao động với tần số góc  $\omega_0$ . Chất điện môi này được đặt trong một từ trường đều  $B$  hướng theo trục  $z$ . Ánh sáng đơn sắc có tần số  $\omega$  được chiếu qua chất điện môi theo phương  $z$ .

- (a) Nếu ánh sáng là phân cực tròn, hãy tìm các chiết suất.
- (b) Nếu ánh sáng phân cực thẳng, hãy tính góc quay của mặt phẳng phân cực khi sóng ánh sáng truyền được một đoạn  $z$  trong chất điện môi (ta có thể giả thiết rằng  $\Delta n \ll n$ , với  $\Delta n = n_R - n_L$  và  $n = (n_R + n_L)/2$ ).

(Wisconsin )

**Lời giải:**

- (a) Phương trình chuyển động của một electron hóa trị là

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -e \mathbf{E} - e \mathbf{V} \times \mathbf{B} - m\omega_0^2 \mathbf{r} .$$

ở đây  $\mathbf{r}$  là độ dịch chuyên của electron từ vị trí cân bằng của nó. Chuyển động tập thể của  $N$  electron hóa trị gây ra một độ phân cực

$$\mathbf{P} = -N\epsilon \mathbf{r} .$$

Phương trình của độ phân cực tương ứng là

$$-\frac{m}{Ne} \frac{d^2 \mathbf{P}}{dt^2} = -e \mathbf{E} - e \left( -\frac{1}{Ne} \frac{d\mathbf{P}}{dt} \right) \times \mathbf{B} + \frac{m\omega_0^2}{Ne} \mathbf{P} .$$

Do  $\mathbf{E} \sim e^{i\omega t}$ , ta có  $\mathbf{P} \sim e^{i\omega t}$  và  $\frac{d}{dt} = i\omega$ . Thay thế vào phương trình trên ta được

$$\frac{m\omega^2}{Ne} \mathbf{P} = -e \mathbf{E} - \frac{i\omega \mathbf{B} \times \mathbf{P}}{N} + \frac{m\omega_0^2}{Ne} \mathbf{P} ,$$

hay

$$\mathbf{E} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\epsilon_0 \omega_p^2} \mathbf{P} + \frac{i\omega}{Ne} \mathbf{B} \times \mathbf{P} .$$

ở đây  $\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{m\epsilon_0}$ . Do  $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ , phương trình trên có thể được viết dưới dạng ma trận

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\omega_p^2 - \omega^2}{\epsilon_0 \omega_p^2} & \frac{i\omega}{Ne} B & 0 \\ -\frac{i\omega}{Ne} B & \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\epsilon_0 \omega_p^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\epsilon_0 \omega_p^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix}.$$

Từ các phương trình Maxwell cho không gian tự do

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \dot{\mathbf{D}}, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 0$$

với  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ ,  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ , suy ra

$$\mu_0 \epsilon_0 \ddot{\mathbf{E}} - \nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{P}) - \mu_0 \ddot{\mathbf{P}}.$$

Với  $\mathbf{E} = E_0 e^{i(\omega t - k \cdot \mathbf{r})}$ ,  $\mathbf{P} = P_0 e^{i(\omega t - k \cdot \mathbf{r})}$ ,  $\mathbf{k} = k \mathbf{e}_z$ , ta có

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} &= -\omega^2 \mathbf{E}, \quad \nabla^2 \mathbf{E} = -k^2 \mathbf{E}, \\ \nabla \cdot \mathbf{P} &= -i \mathbf{k} \cdot \mathbf{P} = -ik P_z, \quad \nabla (\nabla \cdot \mathbf{P}) = -k^2 P_z \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

và do đó

$$\epsilon_0 (k^2 c^2 - \omega^2) \mathbf{E} = -k^2 c^2 P_z \mathbf{e}_z + \omega^2 \mathbf{P}$$

vì  $\mu_0 \epsilon_0 = c^{-2}$ . Đặt  $\chi = \frac{k^2 c^2}{\omega^2} - 1$ , ta có thể viết phương trình trên thành

$$\epsilon_0 \chi \mathbf{E} = P_x \mathbf{e}_x + P_y \mathbf{e}_y - \chi P_z \mathbf{e}_z,$$

hay

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \frac{1}{\epsilon_0 \chi} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix}.$$

Kết hợp hai ma trận trên ta được

$$\begin{pmatrix} \frac{\omega_p^2 - \omega^2}{\epsilon_0 \omega_p^2} + \frac{1}{\epsilon_0 \chi} & \frac{i\omega}{Ne} B & 0 \\ -\frac{i\omega}{Ne} B & \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\epsilon_0 \omega_p^2} - \frac{1}{\epsilon_0 \chi} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\epsilon_0 \omega_p^2} + \frac{1}{\epsilon_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = 0.$$

Nhìn chung  $\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{\epsilon_0 \omega_p^2} + \frac{1}{\epsilon_0} \neq 0$ , như vậy  $P_z = 0$  và do đó  $E_z = 0$ . Điều này có nghĩa rằng sóng phẳng tới sẽ vẫn giữ nguyên là một sóng phẳng. Điều kiện để

có các nghiệm khác không là định thức của ma trận vuông trong phương trình của  $P$  phải bằng không, dẫn đến

$$\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\epsilon_0 \omega_p^2} - \frac{1}{\epsilon_0 \chi_{\pm}} = \pm \frac{\omega B}{Ne}$$

Như vậy sẽ có hai chiết suất

$$n_{\pm} = \frac{ck_{\pm}}{\omega} = \sqrt{1 + \chi_{\pm}} = \sqrt{1 + \frac{Ne\omega_p^2}{Ne(\omega_0^2 - \omega^2) \mp \epsilon_0 \omega_p^2 \omega B}}$$

Tương ứng với  $n_{\pm}$  ta có

$$\frac{\omega B}{Ne} P_x = \mp \frac{i\omega B}{Ne} P_y, \quad \text{hay} \quad P_y = \pm i P_x$$

và các biến độ

$$P_{\pm} = C_{\pm} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix},$$

ở đây  $C_+$ ,  $C_-$  là các hằng số. Tương tự,

$$E_{\pm} = \frac{C_{\pm}}{\epsilon_0 \chi_{\pm}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Do các hệ số  $\pm i$  tương ứng với các góc phụ là  $\pm \frac{\pi}{2}$ , điều đó chỉ ra rằng  $E_+$ ,  $E_-$  là các sóng phân cực quay phải và quay trái với các chiết suất tương ứng là  $n_+$ ,  $n_-$ . (Phân cực quay phải tức là khi ta nhìn đổi điện vào hướng truyền của ánh sáng, vectơ  $E$  quay theo chiều kim đồng hồ. Với  $E_+$ ,  $E_y = iE_x$ , hoặc ta có thể biểu diễn  $E_x = \frac{E_0}{2} \cos \omega t = \frac{E_0}{2} \cos(-\omega t)$ ,  $E_y = \frac{E_0}{2} \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = \frac{E_0}{2} \sin(-\omega t)$ .)

(b) Ánh sáng phân cực thẳng có thể được phân tách thành các thành phần phân cực quay phải và quay trái

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = \frac{\mathbf{E}_0}{2} \binom{1}{i} e^{i(\omega t - k_+ z)} + \frac{\mathbf{E}_0}{2} \binom{1}{-i} e^{i(\omega t - k_- z)} \\ &= \mathbf{E}_0 \begin{pmatrix} \cos \left( \frac{k_+ - k_-}{2} z \right) \\ -\sin \left( \frac{k_+ - k_-}{2} z \right) \end{pmatrix} e^{i(\omega t - \frac{k_+ + k_-}{2} z)}. \end{aligned}$$

Biểu thức này chỉ ra rằng khi nhìn đối diện với hướng truyền của ánh sáng, mặt phẳng phân cực sẽ quay ngược chiều kim đồng hồ một góc

$$\theta = \frac{k_+ - k_-}{2} z = \frac{\omega z}{2c} (n_+ - n_-) = \frac{\omega z}{2c} \Delta n .$$

sau khi đi trong môi trường được một khoảng  $z$ . Giải thích

$$\frac{\epsilon_0 \omega_p^2 \omega B}{Ne(\omega_0^2 - \omega^2)} \ll 1 ,$$

ta có

$$\begin{aligned} n_{\pm} &= \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \left( 1 \pm \frac{\epsilon_0 \omega_p^2 \omega B}{Ne(\omega_0^2 - \omega^2)} \right)} \\ &\approx \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}} \pm \frac{\epsilon_0 \omega_p^4 \omega B}{2Ne(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \left( 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)^{-\frac{1}{2}} . \end{aligned}$$

Chú ý rằng phép gần đúng này phù hợp với điều kiện  $\Delta n \ll \frac{1}{2}(n_+ + n_-)$ . Vì

$$\Delta n \approx \frac{\epsilon_0 \omega_p^4 \omega B}{Ne(\omega_0^2 - \omega^2) \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}} .$$

ta thu được

$$\theta = \frac{\omega_p^2 \omega^2 \omega_c z}{2c(\omega_0^2 - \omega^2) \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}} .$$

ở đây  $\omega_c = \frac{eB}{m}$ .

### 1056

Ánh sáng phân cực tròn lan truyền theo phương  $z$  qua một môi trường bị ion hóa hoàn toàn trong đó một từ trường tĩnh  $B$  cũng được hướng theo phương  $z$ . Chiết suất đối với ánh sáng phân cực tròn quay phải với tần số góc  $\omega$  được tính theo công thức

$$n_R^2 = 1 - \frac{4\pi Ne^2/m}{\omega^2 + \frac{eB\omega}{mc}} .$$

ở đây  $N$  là mật độ điện tử và  $e, m$  và  $c$  là điện tích, khối lượng của điện tử và vận tốc ánh sáng trong chân không.

(a) Biểu thức tương ứng cho chiết suất của ánh sáng phân cực quay trái sẽ như thế nào?

(b) Nếu  $B = 0$ , thì vận tốc pha sẽ là bao nhiêu?

(c) Nếu  $B = 0$ , thì vận tốc nhóm sẽ bằng bao nhiêu? Có thể giả thiết rằng  $\omega \gg \sqrt{\frac{4\pi Ne^2}{m}}$  nhưng không phải  $\omega \rightarrow \infty$ .

(Wisconsin )

Lời giải:

(a) Phương trình chuyển động của một electron trong môi trường vật liệu là

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) .$$

ở đây  $\mathbf{r}$  là độ dịch chuyên của electron từ vị trí ban đầu. Lực tác dụng lên electron do từ trường gắn với ánh sáng di qua được bỏ qua vì nó nhỏ hơn lực do điện trường cũng của ánh sáng đó gây nên bởi một thừa số  $v/c$ .  $\mathbf{E} = E_x \mathbf{e}_x + E_y \mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{B} = B \mathbf{e}_z$ , và  $\mathbf{r} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z$ , phương trình trên trở thành

$$m \ddot{x} = -eE_x - eBy ,$$

$$m \ddot{y} = -eE_y + eB\dot{x} .$$

$$m \ddot{z} = 0 .$$

Phương trình cuối cho thấy  $z = \text{hằng số}$  do vậy bất kỳ vận tốc nào theo phương  $z$  đều không liên quan đến các dao động gây bởi ánh sáng di qua và do đó có thể bỏ qua. Ta cũng có thể cho  $z = 0$ .

Đối với ánh sáng phân cực tròn quay phải, ta có

$$E_x = E_0 e^{i(\omega t - kz)} , \quad E_y = iE_x .$$

Và

$$x = x_0 e^{i(\omega t - kz)} , \quad y = y_0 e^{i(\omega t - kz)} .$$

Phương trình chuyên động khi này có thể được viết thành

$$-m\omega^2 x = -eE_x - i\omega eBy ,$$

$$-m\omega^2 y = -eE_y + i\omega eBx .$$

Hay biểu diễn qua vectơ phân cực  $\mathbf{P} = -Ne\mathbf{r}$ , ta có

$$\begin{aligned}-\frac{m\omega^2}{Ne}P_x &= eE_x - \frac{i\omega B}{N}P_y, \\-\frac{m\omega^2}{Ne}P_y &= eE_y + \frac{i\omega B}{N}P_x.\end{aligned}$$

Từ các phương trình Maxwell đối với một môi trường đẳng hướng không có nguồn

$$\nabla + \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{D},$$

với

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \quad \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

suy ra

$$\mu_0 \dot{\mathbf{P}} - \frac{1}{\epsilon_0} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{P}) = \nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \mathbf{E}.$$

Ta cũng có  $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ , nên

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

do  $\mathbf{E}$  chỉ phụ thuộc vào  $z$  và  $E_z = 0$ . Điều này cũng cho thấy  $P_z = 0$ . Chú ý rằng

$$\nabla^2 \mathbf{E} = -k^2 \mathbf{E}, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\omega^2.$$

cuối cùng ta có

$$\mathbf{P} = \chi \mathbf{E}.$$

ở đây

$$\chi = \epsilon_0 \left( \frac{c^2 k^2}{\omega^2} - 1 \right).$$

Các phương trình vi phân cho  $E_x, E_y$  bây giờ có thể được viết thành

$$\begin{aligned}\left( \frac{\omega^2}{N\epsilon} + \frac{\epsilon}{m\chi} \right) E_x - \frac{i\omega B}{Nm} E_y &= 0, \\ \frac{i\omega B}{Nm} E_x + \left( \frac{\omega^2}{N\epsilon} + \frac{\epsilon}{m\chi} \right) E_y &= 0.\end{aligned}$$

Để các nghiệm khác không, định thức của các hệ số của  $E_x, E_y$  phải bằng không. Điều này dẫn đến

$$\left( \frac{\omega^2}{N\epsilon} + \frac{\epsilon}{m\chi} \right)^2 = \left( \frac{\omega B}{Nm} \right)^2$$

Phương trình trên có hai nghiệm

$$\frac{\omega^2}{Ne} + \frac{e}{m\chi_{\pm}} = \pm \frac{\omega B}{Nm}.$$

Nghiệm với dấu dương cho  $Ey = -iEx$ , và đây là ánh sáng phân cực tròn quay trái. Chiết suất  $n_R$  của ánh sáng phân cực tròn quay phải được tính theo công thức

$$\begin{aligned} n_R^2 &= \frac{\epsilon_0 E + P}{\epsilon_0 E} = 1 + \frac{\chi_-}{\epsilon_0} \\ &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \omega\omega_g}, \end{aligned}$$

ở đây  $\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{mc_0}$ ,  $\omega_g = \frac{eB}{m}$ . Chú ý rằng trong hệ đơn vị Gauss,

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi Ne^2}{m}, \quad \omega_g = \frac{eB}{mc},$$

và biểu thức cho  $n_R^2$  tương đương như biểu thức được đưa ra trong bài tập này.

Đối với của ánh sáng phân cực tròn quay trái,

$$n_L^2 = 1 + \frac{\chi_+}{\epsilon_0} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega\omega_g}.$$

(b) Nếu  $B = 0$ , thì

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 1 + \frac{\chi}{\epsilon_0} = \frac{c^2 k^2}{\omega^2},$$

suy ra

$$c^2 k^2 = \omega^2 - \omega_p^2.$$

Vận tốc pha như vậy sẽ là

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}}.$$

(c) Vì  $2c^2 k dk = 2\omega d\omega$ , vận tốc nhóm là

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2 k}{\omega} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}.$$

## 1057

Dưới đây liệt kê một số các tính chất do được đối với NaCl tại nhiệt độ phòng: hằng số điện môi tĩnh  $\epsilon = 5.90$ , cạnh của ô đơn vị  $a = 5.6 \text{ \AA}$ , khối lượng nguyên tử của Na = 23 u ( $1 \text{ u} = 1.66 \times 10^{-24} \text{ g}$ ), khối lượng nguyên tử của Cl = 35, 5 u.

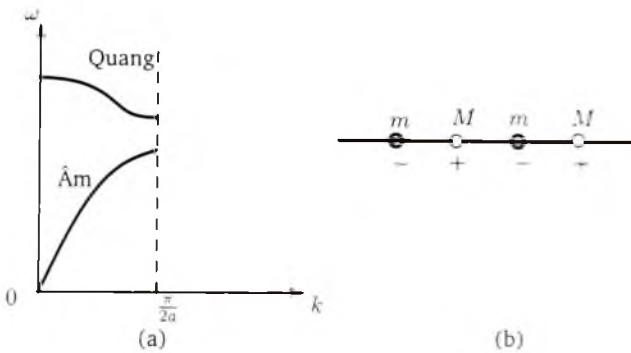
(a) Các polariton sinh ra do sự liên kết giữa các phonon và các photon trong các tinh thể ion. Để thấy được điều này, hãy rút ra hệ thức tán sắc  $\omega(k)$  và vẽ đồ thị tán sắc cho các kiểu sóng điện từ ngang lan truyền qua một tinh thể ion (ví dụ như NaCl). Bỏ qua sự phân cực nguyên tử.

(b) Ở vùng bước sóng nào của ánh sáng, NaCl sẽ làm phản xạ bức xạ tới? (Nghĩa là, xây dựng và đánh giá các biểu thức cho các bước sóng ngắn nhất và dài nhất của vùng này.)

(Princeton)

**Lời giải:**

(a) Hình 1.33 (a) chỉ ra các nhánh quang và âm của hệ thức tán sắc cho một mạng hai nguyên tử một chiều như mô tả trên Hình 1.33 (b) khi không có tương tác giữa hai loại nguyên tử đó. Gần  $k = 0$ , nhánh âm là tuyễn tính,  $\omega = ck$ . Do  $v \approx 10^5 c$ , sóng tương ứng đối với ánh sáng,  $\omega = ck$  thực tế sẽ trùng với trục  $\omega$ . Như vậy chỉ có liên kết giữa các kiểu quang có  $k = 0$  với ánh sáng là có thể xảy ra.



Hình 1.33

Bỏ qua tính phân cực của electron, ta giả thiết độ phân cực hoan toàn được gây ra do chuyển động của ion. Xét chuyển động của một cặp ion trong một điện trường  $E$  với  $k \approx 0$ . Độ dịch chuyển tương đối  $W$  của một ion dương ra

xa một ion âm có phương trình chuyển động như sau

$$\mu \mathbf{W} = -2K\mathbf{W} + q\mathbf{E}.$$

ở đây  $\mu = \frac{Mm}{M+m}$  là khối lượng rút gọn của cặp ion này và  $K$  là hằng số lực giữa chúng,  $q$  là độ lớn diện tích của mỗi ion. Khi các ion ở trạng thái dừng,  $\dot{\mathbf{W}} = 0$  và  $\mathbf{W} = \frac{q}{2K}\mathbf{E}$ . Nếu  $V$  là thể tích của một cặp, và  $\rho_0 = q/V$  là mật độ diện tích thì độ phân cực được định nghĩa là

$$\mathbf{P} = \rho_0 \mathbf{W} = \frac{q^2}{2KV} \mathbf{E} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}.$$

ở đây  $\epsilon_0$  là độ điện thẩm trong chân không và  $\chi$  là độ cảm điện liên hệ với hằng số điện môi tương đối  $\varepsilon$  qua hệ thức  $\chi = \varepsilon - 1$ . Hằng số lực như vậy sẽ là

$$K = \frac{q^2}{2\chi\epsilon_0 V} = \frac{q^2}{2(\varepsilon - 1)\epsilon_0 V}.$$

Đặt  $\mathbf{Q} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \mathbf{W}$ , từ phương trình chuyển động suy ra

$$\ddot{\mathbf{Q}} + \omega_0^2 \mathbf{Q} - \omega_0^2 \chi \mathbf{E} = 0. \quad (1)$$

ở đây

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2K}{\mu}} = \sqrt{\frac{q^2}{\mu(\varepsilon - 1)\epsilon_0 V}}$$

là tần số góc của kiểu dao động thuộc nhánh quang khi  $k = 0$ . Để tìm được tương tác của kiểu dao động quang với các sóng điện tử đi qua và suy ra kiểu dao động liên kết, ta phải kết hợp phương trình đặc trưng này với các phương trình Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}},$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = -\dot{\mathbf{D}} + \mathbf{J}.$$

với  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ ,  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ , và  $\mathbf{J}_0 = \rho_0 \dot{\mathbf{W}} = \epsilon_0 \dot{\mathbf{Q}}$  là mật độ dòng. Hơn nữa vì môi trường vật chất là trung hòa điện (ngoài các ion), nên  $\nabla \cdot \mathbf{E} \rightarrow \frac{-1}{\epsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ . Do vậy

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla^2 \mathbf{E} = -\mu_0 \nabla \times \dot{\mathbf{H}} = -\mu_0 \epsilon_0 (\dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{Q}}).$$

hay

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\mathbf{E} + \dot{\mathbf{Q}}). \quad (2)$$

Lấy phương truyền của sóng điện từ là phương  $x$  ta có

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(kx - \omega t)}, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 e^{i(kx - \omega t)}.$$

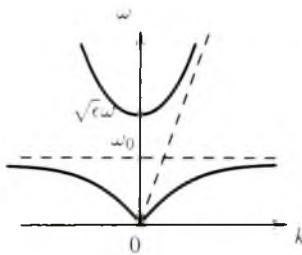
Thay thế các giá trị này vào các phương trình (1) và (2), ta được

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - \omega^2) \mathbf{Q}_0 = \chi \omega_0^2 \mathbf{E}_0, \\ k^2 c^2 \mathbf{E}_0 = \omega^2 (\mathbf{E}_0 + \mathbf{Q}_0). \end{cases}$$

Từ đó suy ra hệ thức tán sắc của kiểu dao động liên kết

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = \frac{\varepsilon \omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Ta thấy rằng với  $k \rightarrow 0$ , thì  $\omega \rightarrow 0$  hoặc  $\omega \rightarrow \sqrt{\varepsilon} \omega_0$ ; với  $k \rightarrow \infty$ , thì  $\omega \rightarrow \omega_0$  hoặc  $\omega \rightarrow \infty$ . Hệ thức gồm hai nhánh như chỉ ra trên hình 1.34.



Hình 1.34

(b) Như chỉ ra trên hình 1.34, trong vùng giữa  $\omega_0$  và  $\sqrt{\varepsilon} \omega_0$ , sự liên kết giữa phonon và photon bị cấm và ánh sáng tới sẽ bị phản xạ hoàn toàn. Các bước ngắn nhất và dài nhất của vùng này là

$$\lambda_{\min} = \frac{2\pi c}{\sqrt{\varepsilon} \omega_0} = \frac{2\pi c}{q} \sqrt{\epsilon_0 \mu V \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)}.$$

$$\lambda_{\max} = \frac{2\pi c}{\omega_0} = \frac{2\pi c}{q} \sqrt{\epsilon_0 \mu V (\varepsilon - 1)}.$$

Đối với NaCl,  $V = \frac{1}{4} a^3$ ,  $\mu = \frac{M_{\text{Na}} m_{\text{Cl}}}{M_{\text{Na}} + m_{\text{Cl}}}$ ,  $q = e$ , với các số liệu đã cho ta thu được

$$\lambda_{\min} = 32.2 \mu\text{m}.$$

$$\lambda_{\max} = 78.3 \mu\text{m}.$$

## 1058

Giả thiết có một muối halogen của kim loại kiềm với  $\varepsilon(0) = 5,9$ ,  $\varepsilon(\infty) = 2,25$ , độ phản xạ  $= 0$  tại bước sóng  $\lambda = 3,06 \mu\text{m}$ , và  $\varepsilon(\omega)$  có giá trị thực.

(a) Tính  $\omega_L$ ,  $\omega_T$ . (Nhớ rằng  $\omega_T$  là tần số phonon kiểu quang dao động theo phương ngang (TO) khi không có tương tác với các trường bên ngoài và xác định một cực của  $\varepsilon(\omega)$ , trong khi đó  $\omega_L$  xác định một không điểm của  $\varepsilon(\omega)$ .)

(b) Vẽ phác sự phụ thuộc của độ phản xạ vào  $\omega$ .

(Princeton )

Lời giải:

(a) Đối với một tinh thể ion, nếu bỏ qua sự tắt dần của dao động do tính nhót, hằng số điện môi sẽ là số thực và hằng số điện môi tương đối có thể được biểu diễn như sau

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon(\infty) + \frac{[\varepsilon(0) - \varepsilon(\infty)]\omega_T^2}{\omega_T^2 - \omega^2} .$$

Chiết suất của một chất là  $n = \sqrt{\varepsilon(\omega)}$  và đối với ánh sáng tới vuông góc với bề mặt tinh thể thì độ phản xạ là

$$R = \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^2 = \left( \frac{\sqrt{\varepsilon(\omega)} - 1}{\sqrt{\varepsilon(\omega)} + 1} \right)^2 .$$

Nếu  $R = 0$  tại  $\omega = \omega_0$ , thì  $\varepsilon(\omega_0) = 1$ , hay

$$1 = \varepsilon(\infty) + \frac{[\varepsilon(0) - \varepsilon(\infty)]\omega_T^2}{\omega_T^2 - \omega_0^2} ,$$

Suy ra

$$\omega_T = \left[ \frac{\varepsilon(\infty) - 1}{\varepsilon(0) - 1} \right]^{1/2} \omega_0 .$$

$$\text{Vì } \omega_0 = \frac{2\pi c}{\lambda_0} = \frac{2\pi \times 3 \times 10^8}{30.6 \times 10^{-6}} = 6.16 \times 10^{13} \text{ s}^{-1}, \varepsilon(0) = 5,9, \varepsilon(\infty) = 2,25,$$

$$\omega_T = \sqrt{\frac{1.25}{4.9}} \times 6.16 \times 10^{13} = 3.11 \times 10^{13} \text{ s}^{-1} .$$

Tại  $\omega = \omega_L$ ,  $\varepsilon(\omega) = 0$ , tức là

$$\varepsilon(\infty) + \frac{[\varepsilon(0) - \varepsilon(\infty)]\omega_T^2}{\omega_T^2 - \omega_L^2} = 0 ,$$

suy ra hệ thức Lyddane-Sachs-Teller

$$\frac{\omega_L^2}{\omega_T^2} = \frac{\varepsilon(0)}{\varepsilon(\infty)}.$$

Do vậy

$$\omega_L = \left[ \frac{\varepsilon(0)}{\varepsilon(\infty)} \right]^{1/2} \omega_T = 5,04 \times 10^{13} \text{ s}^{-1}.$$

(b) Ta có

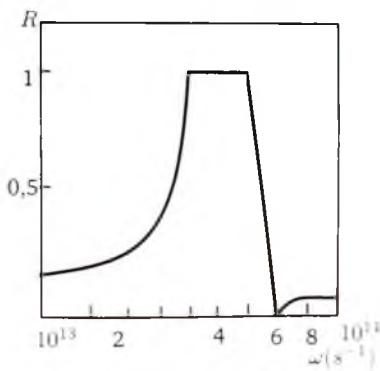
Đối với  $\omega = 0$ , ta có  $\varepsilon(\omega) = \varepsilon(0) = 5,9$ ,  $R = \frac{(\sqrt{\varepsilon(0)} - 1)^2}{(\sqrt{\varepsilon(0)} + 1)^2} = 0,17$ ;

Đối với  $\omega \rightarrow \infty$ , ta có  $\varepsilon(\omega) \rightarrow \varepsilon(\infty) = 2,25$ ,  $R = \frac{(\sqrt{\varepsilon(\infty)} - 1)^2}{(\sqrt{\varepsilon(\infty)} + 1)^2} = 0,04$ ;

Đối với  $\omega = \omega_0 = 6,16 \times 10^{13} \text{ s}^{-1}$ , ta có  $\varepsilon(\omega) = 1$ ,  $R = 0$ :

Đối với  $R = 1$ ,  $\varepsilon(\omega) = 0$  và  $\omega = \sqrt{\frac{\varepsilon(0)}{\varepsilon(\infty)}} \omega_T = \omega_L = 5,04 \times 10^{13} \text{ s}^{-1}$ .

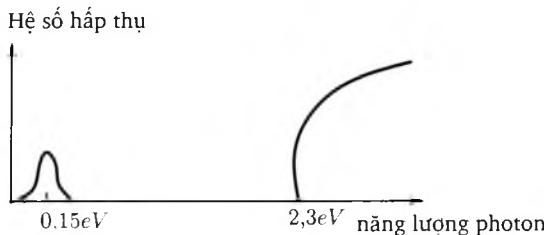
Hơn nữa, với  $\omega_T < \omega < \omega_L$ ,  $\varepsilon(\omega) < 0$ , nghĩa là n là số ảo, sẽ xảy ra phản xạ toàn phần và  $R = 1$ . Do đó ta có thể vẽ phác đường phụ thuộc của  $R$  theo  $\omega$  dưới dạng bán loga như trên hình 1.35.



Hình 1.35

1059

Cho trước đồ thị vẽ phác biểu diễn sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ theo năng lượng photon của bức xạ điện từ của một chất rắn tinh khiết phi từ tính. Vật liệu này hấp thụ ánh sáng trong vùng hồng ngoại hẹp ( $0,15\text{ eV}$ ) và sau đó không hấp thụ ánh sáng cho đến khi năng lượng photon là  $2,3\text{ eV}$ . Giải thích ngắn gọn dạng hấp thụ này và trả lời các câu hỏi sau.



Hình 1.36

- (a) Vật liệu này là kim loại hay điện môi? Tại sao?  
 (b) Cấu trúc tinh thể của vật liệu này có hơn một nguyên tử trên một ô đơn vị hay không? Tại sao?

(Wisconsin )

**Lời giải:**

Hấp thụ ánh sáng trong vùng hồng ngoại được gây bởi tương tác của các photon với các dao động mạng, hoặc cụ thể hơn, là do tương tác của các phonon quang có bước sóng dài với các photon. Về mặt cục bộ, dao động quang bước sóng dài của mạng làm cho các nguyên tử hoặc phân tử xử sự như các dipole điện dao động. Trong quá trình tương tác của chúng với trường điện từ của ánh sáng đi qua, xảy ra hiện tượng hấp thụ ánh sáng đó. Hấp thụ mạnh trên  $2,3\text{ eV}$  là do sự kích thích của các electron từ vùng hóa trị lên vùng dẫn.

- (a) Vật liệu này là một chất điện môi (hoặc có thể là một chất bán dẫn vì khe năng lượng của nó  $\Delta E$  là  $2,3\text{ eV}$ ).

- (b) Phải có hơn hai nguyên tử trên một ô đơn vị, nếu không sẽ không tồn tại nhánh quang và sẽ không có đỉnh hấp thụ tại  $0,15\text{ eV}$ .

## 1060

Hãy đánh giá với độ chính xác 60% của độ cảm từ  $\chi = M/B$  (ở đây  $B =$  từ trường ngoài) của

(a) một khí Fermi của electron tự do với  $N = 4.7 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3}$  electron tại  $T = 300 \text{ K}$  và tại  $T = 350 \text{ K}$ ;

(b) một chất siêu dẫn loại I tại các nhiệt độ dưới nhiệt độ tới hạn.

(Wisconsin)

Lời giải:

(a) Đổi với một khí Fermi của các electron tự do, độ cảm từ  $\chi = M/B$  bằng

$$\chi = \frac{3N\mu_B^2}{2E_F},$$

ở đây  $N$  là số electron tự do trên một đơn vị thể tích,  $\mu_B = \frac{e\hbar}{2mc}$  là magneton Bohr và  $E_F$  là năng lượng Fermi. Với độ chính xác theo yêu cầu

$$E_F \approx E_F^0 = \frac{\hbar^2}{2m}(3N\pi^2)^{2/3} = \frac{\hbar^2 c^2}{2mc^2}(3N\pi^2)^{\frac{2}{3}}.$$

Với

$$\hbar = 6.58 \times 10^{-16} \text{ eV} \cdot \text{s}.$$

$$mc^2 = 0.51 \times 10^6 \text{ eV},$$

$$N = 4.7 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3},$$

ta tính được

$$E_F = 4.76 \text{ eV}.$$

và với  $\mu_B = 9.27 \times 10^{-21} \text{ erg G}^{-1}$  ta thu được

$$\chi = \frac{3 \times 4.7 \times 10^{22} \times (9.27 \times 10^{-21})^2}{2 \times 4.76 \times 1.6 \times 10^{-12}} = 8.0 \times 10^{-7} \text{ cgs}.$$

Do độ cảm thuận từ của một khí electron tự do không phụ thuộc vào nhiệt độ nên

$$\chi(300 \text{ K}) = \chi(350 \text{ K}) = 0.80 \times 10^{-6} \text{ cgs}.$$

(b) Đổi với một chất siêu dẫn loại I dưới nhiệt độ tới hạn.

$$\chi \leq -\frac{1}{4\pi} \text{ cgs}.$$

## 1061

Xét một tinh thể có chứa tạp thuận từ có các mức năng lượng là  $\pm \varepsilon$  trong một từ trường ngoài cho trước.

(a) Hãy viết biểu thức đóng góp của tạp này vào hàm phân bố của tinh thể khi có mặt của từ trường ngoài.

(b) Hãy viết biểu thức tương ứng của đóng góp do tạp chất vào nhiệt dung riêng và vẽ đồ thị biểu diễn sự phụ thuộc của đóng góp này theo nhiệt độ.

(c) So sánh sự phụ thuộc nhiệt độ của nhiệt dung riêng này với sự phụ thuộc nhiệt độ của nhiệt dung riêng phonon (lý thuyết Debye) trong giới hạn nhiệt độ rất thấp và đưa ra giải thích về mặt vật lý về sự khác biệt này.

(d) Cũng hỏi như câu (c) nhưng ở giới hạn nhiệt độ rất cao.

(Chicago)

Lời giải:

(a) Đóng góp của tạp chất vào hàm phân bố của tinh thể là

$$z = e^{-\varepsilon/k_B T} + e^{\varepsilon/k_B T} = 2 \cosh\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right).$$

(b) Năng lượng trung bình của tinh thể do tạp chất là

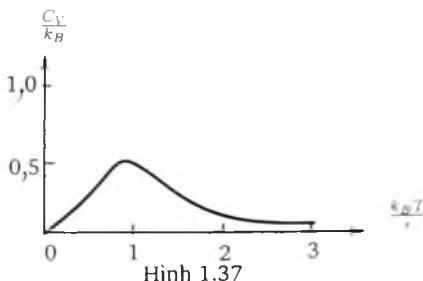
$$\bar{E} = -\frac{d \ln z}{d\left(\frac{1}{k_B T}\right)} = -\varepsilon \tanh\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right).$$

và do vậy nhiệt dung riêng gây bởi tạp là

$$c_v = \frac{d\bar{E}}{dT} = k_B \left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)^2 \operatorname{sech}^2\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right).$$

(c) Trong giới hạn nhiệt độ rất thấp,  $\operatorname{sech}^2\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right) \sim 1e^{-\frac{\varepsilon^2}{k_B T}}$ . Do đó khi  $T \rightarrow 0$ ,  $c_v \sim 4k_B \left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right) \exp\left(-\frac{2\varepsilon}{k_B T}\right) \rightarrow 0$ . Mô hình Debye chính xác hơn dẫn đến,  $c_v \sim T^3$  đối với  $T \ll \theta_D$ , là nhiệt độ Debye. Lý do là tại nhiệt độ thấp, chỉ có các dao động mạng với  $\hbar\omega < k_B T$  mới có thể bị kích thích và đóng góp của các dao động này vào nhiệt dung riêng tỷ lệ với  $T^3$ .

(d) Trong giới hạn nhiệt độ rất cao  $k_B T \gg \varepsilon$ ,  $\operatorname{sech}^2\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right) \rightarrow 1$  và do đó  $c_v \sim T^{-2}$ . Tuy nhiên, trong mô hình Debye  $c_v$  tiệm cận đến một hằng số tại nhiệt độ cao. Đó là bởi vì tại nhiệt độ cao  $T \gg \theta_D$  tất cả các kiểu dao động đều bị kích thích và có năng lượng  $k_B T$ , dẫn



đến một hằng số  $c_v$ . Sử dụng thông tin trên, ta vẽ đường cong  $c_v/k_B$  theo  $\frac{k_B T}{e}$  trên hình 1.37.

### 1062

(a) Chứng tỏ rằng độ cảm spin tại nhiệt độ không tuyêt đối của một khí electron dộc lập là

$$\chi = \mu_B^2 g(\varepsilon_F).$$

ở đây  $\mu_B$  là magneton Bohr và  $g(\varepsilon_F)$  là mật độ trạng thái (trên một đơn vị năng lượng) tại năng lượng Fermi. Từ “dộc lập” dùng ở đây để chỉ rằng các tương tác electron-electron cũng được bỏ qua.

(b) Đánh giá  $g(\varepsilon_F)$  cho một khí electron tự do trong đó tương tác electron-ion cũng được bỏ qua. (Cần phải tiến hành tính toán đến kết quả cuối cùng, chứ không phải chỉ nếu kết quả chuẩn đã biết.)

(c) Độ cảm spin phụ thuộc yếu vào nhiệt độ dưới dạng

$$\chi(T) = \chi(0)(1 + \alpha T^2).$$

Bạn dự đoán  $\alpha$  có giá trị dương hay âm? (Chỉ cần lý giải một cách định tính)  
(Princeton)

Lời giải:

(a) Năng lượng của một electron trong một từ trường có cảm ứng từ  $\mathbf{B}$  là

$$\varepsilon(k) - \mu \cdot \mathbf{B} = \varepsilon(k) \mp \mu_B B,$$

ở đây  $\mu$  là mômen dipole từ gây bởi spin của electron,  $\varepsilon(k)$  là ký hiệu của năng lượng electron khi không có từ trường, và các dấu  $\pm$  tương ứng với các mômen

dipole song song và đối song với từ trường. Gọi  $g(\varepsilon)$  là mật độ trạng thái của các electron độc lập trên một đơn vị thể tích tính tới cả spin. Đặt  $\varepsilon = \varepsilon(k)$ , ta có tổng số các electron với các spin song song và đối song với từ trường lần lượt là

$$N_+ = V \int_0^{\varepsilon_+(k)_{\max}} \frac{1}{2} g(\varepsilon) d\varepsilon ,$$

$$N_- = V \int_0^{\varepsilon_-(k)_{\max}} \frac{1}{2} g(\varepsilon) d\varepsilon .$$

Tại  $T = 0$ ,  $\varepsilon_F = \varepsilon_+(k)_{\max} - \mu_B B = \varepsilon_-(k)_{\max} + \mu_B B$ , ở đây  $\varepsilon_F$  là năng lượng Fermi và như vậy

$$N_+ = V \int_0^{\varepsilon_F + \mu_B B} \frac{1}{2} g(\varepsilon) d\varepsilon ,$$

$$N_- = V \int_0^{\varepsilon_F - \mu_B B} \frac{1}{2} g(\varepsilon) d\varepsilon .$$

Nếu  $\mu_B B \gg \varepsilon_F$ , ta có thể coi  $\epsilon \approx \varepsilon_F$  trong dấu tích phân và tìm được

$$N_+ - N_- \approx \frac{1}{2} V \cdot 2\mu_B B \cdot g(\varepsilon_F) = V\mu_B B g(\varepsilon_F) .$$

Độ từ hoá  $M$  theo định nghĩa là

$$M = \frac{1}{V} (N_+ - N_-) \mu_B = \mu_B^2 g(\varepsilon_F) B .$$

Do đó độ cảm ứng từ là

$$\chi = \frac{M}{H} = \frac{\mu_0 M}{B} = \mu_0 \mu_B^2 g(\varepsilon_F) ,$$

hay, trong hệ đơn vị  $\mu_0 = 1$ ,

$$\chi = \mu_B^2 g(\varepsilon_F) ,$$

với điều kiện  $B$  là nhỏ.

(b) Đối với một electron tự do

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \quad \frac{dk}{d\varepsilon} = \frac{m}{\hbar^2 k} .$$

Số các trạng thái electron trên một đơn vị thể tích trong khoảng năng lượng  $\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon$  tương ứng với mật độ trạng thái trong không gian  $k$ -trong một lớp hình cầu bán kính  $k$  và độ dày  $dk$

$$\rho(\varepsilon) d\varepsilon = 2 \times \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3} = \frac{k^2}{\pi^2} \frac{dk}{d\varepsilon}.$$

ở đây hệ số 2 là do mỗi một trạng thái năng lượng có hai trạng thái spin. Vậy

$$\rho(\varepsilon) = \frac{mk}{\pi^2 \hbar^2} = \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$

(c) Khi  $k_B T \ll \varepsilon_F$ , các electron bị kích thích sẽ nằm trong khoảng năng lượng bằng  $k_B T$  trên mức Fermi. Đôi với các electron trong số này có các mômen từ chính xác song song với từ trường ngoài,  $\varepsilon \propto k_{\max}$  lớn hơn và do đó tỷ phần của các electron bị kích thích đó tương đối nhỏ và sự giảm của thể hóa học của chúng sẽ ít hơn. Để duy trì trạng thái cân bằng, một số electron có các mômen từ hầu như song song với từ trường ngoài sẽ định hướng sao cho mômen của chúng định hướng song song hơn với từ trường. Do vậy ta dự đoán  $\alpha < 0$ .

### 1063

Xét một khí electron dẫn tại nhiệt độ không tuyệt đối trong một từ trường yếu  $B$ . Nồng độ của các electron có spin  $\uparrow$  là  $N_+$ , và spin  $\downarrow$  là  $N_-$ , có thể được điều chỉnh bởi tham số  $x$

$$N_+ = \frac{1}{2}N(1+x), \quad N_- = \frac{1}{2}N(1-x).$$

ở đây  $N$  là tổng số electron.

(a) Tính năng lượng toàn phần của khí electron đó và đánh giá độ  $M$ .

(b) Ta có thể mô tả gần đúng hiệu ứng do các tương tác trao đổi giữa các electron dẫn nếu ta giả thiết rằng chỉ các electron với spin song song tương tác với nhau với năng lượng  $-V$ , ở đây  $V > 0$ . Độ tự hóa sẽ thay đổi thế nào?

(Princeton)

Lời giải:

(a) Năng lượng của một electron dẫn là

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m} \pm \mu B.$$

Đây  $E = \frac{p^2}{2m}$  là động năng của electron và  $\mu$  là mômen từ của nó. Các dấu  $\leftarrow$  là để chỉ các spin song song và đối song với  $B$ . Mật độ trạng thái (Bài 1062) là

$$\rho(E) = C\sqrt{E}dE,$$

đây  $C$  là một hằng số. Mật độ của các electron với mômen từ song song và i song với  $B$  là

$$N_+ = C \int_0^{E_+} \rho(E)dE, \quad N_- = C \int_0^{E_-} \rho(E)dE.$$

Tại nhiệt độ không tuyệt đối, tất cả các trạng thái bên dưới một năng lượng  $\varepsilon_0$  nào đó đều bị chiếm bởi các electron mang cả hai hướng spin. Vì

$$\varepsilon_0 = E_+ - \mu B = E_- + \mu B,$$

ta có

$$\begin{aligned} E_+ &= \varepsilon_0 + \mu B, \quad E_- = \varepsilon_0 - \mu B, \\ N_+ &\equiv \frac{1}{2}N(1+x) = C \int_0^{\varepsilon_0+\mu B} E^{\frac{1}{2}}dE = \frac{2}{3}C(\varepsilon_0 + \mu B)^{3/2}, \\ N_- &\equiv \frac{1}{2}N(1-x) = C \int_0^{\varepsilon_0-\mu B} E^{\frac{1}{2}}dE = \frac{2}{3}C(\varepsilon_0 - \mu B)^{3/2}. \end{aligned}$$

Giả thiết  $E_F$  là năng lượng Fermi khi không có từ trường nào tác dụng lên hệ, thì

$$N = 2C \int_0^{E_F} E^{\frac{1}{2}}dE = \frac{4}{3}CE_F^{3/2}.$$

suy ra  $C = \frac{3}{4}NE_F^{-\frac{3}{2}}$ . Do đó

$$\varepsilon_0 + \mu B = E_F(1+x)^{2/3},$$

$$\varepsilon_0 - \mu B = E_F(1-x)^{2/3}.$$

Từ hiệu của hai phương trình trên, với  $x \ll 1$ , ta có

$$x \approx \frac{3\mu B}{2E_F}.$$

năng lượng toàn phần của các electron với spin + và spin - lần lượt bằng

$$\begin{aligned} E_{+t. \text{ phán}} &= C \int_0^{\varepsilon_0 + \mu B} (E - \mu B) E^{\frac{1}{2}} dE \\ &= \frac{2}{5} C (\varepsilon_0 + \mu B)^{5/2} - \mu B N_+, \\ &= \frac{2}{5} C E_F^{\frac{5}{2}} (1+x)^{\frac{5}{3}} - \frac{1}{2} \mu B N (1+x) \\ &= \frac{3}{10} E_F N (1+x)^{\frac{5}{3}} - \frac{1}{2} \mu B N (1+x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{-t. \text{ phán}} &= C \int_0^{\varepsilon_0 - \mu B} (E + \mu B) E^{\frac{1}{2}} dE \\ &= \frac{2}{5} C (\varepsilon_0 - \mu B)^{5/2} + \mu B N_-, \\ &= \frac{3}{10} E_F N (1-x)^{\frac{5}{3}} + \frac{1}{2} \mu B N (1-x). \end{aligned}$$

Do vậy năng lượng toàn phần của khí electron là

$$\begin{aligned} E_{t. \text{ phán}} &= \frac{3}{10} N E_F [(1+x)^{5/3} + (1-x)^{5/3}] - \mu B N x \\ &\approx \frac{3}{5} N E_F - \mu B N x \\ &\approx \frac{3}{5} N E_F - \frac{2\mu^2 B^2}{2E_F} N. \end{aligned}$$

Chú ý rằng vì từ trường yếu ta mới có thể coi  $\mu B \ll E_F$ , hoặc  $x \ll 1$ .

Đo mômen từ bắt nguồn từ spin electron nên  $\mu = \mu_B$ , là magneton Bohr. Mômen từ toàn phần  $vM$ , ở đây  $M$  là độ từ hoá và  $v$  là thể tích của khí electron, khi đó là

$$vM = (N_+ - N_-) \mu_B = Nx \mu_B$$

hay

$$M = nx \mu_B = \frac{3n\mu_B^2 B}{2E_F}.$$

ở đây  $n = N/v$  là số electron trên một đơn vị thể tích.

(b) Có  $N_+$  electron có spin +, tạo nên  $\frac{1}{2}N_+(N_+ - 1) \approx \frac{1}{2}N_+^2$  cặp, mỗi cặp đóng góp vào năng lượng tương tác một lượng bằng  $-V$ . Như vậy nếu tính

đến năng lượng tương tác ta có

$$\begin{aligned} E_{+t. \text{ phàn}} &\approx \frac{3}{10} E_F N (1+x)^{5/3} - \frac{1}{2} \mu_B B N (1+x) + \frac{1}{2} N_+^2 (-V) \\ &= \frac{3}{10} E_F N (1+x)^{5/3} - \frac{1}{2} \mu_B B N (1+x) - \frac{1}{8} V N^2 (1+x)^2 . \end{aligned}$$

và tương tự

$$E_{-t. \text{ phàn}} \approx \frac{3}{10} E_F N (1-x)^{5/3} + \frac{1}{2} \mu_B B N (1-x) - \frac{1}{8} V N^2 (1-x)^2 .$$

Năng lượng toàn phần của khí electron là

$$\begin{aligned} E_{t. \text{ phàn}} &= \frac{3}{10} E_F N \left[ (1+x)^{\frac{5}{3}} + (1-x)^{\frac{5}{3}} \right] - \mu_B B N x \\ &\quad - \frac{V}{8} N^2 \left[ (1+x)^2 + (1-x)^2 \right] . \end{aligned}$$

Tại điểm cân bằng,  $\frac{\partial E_{t. \text{ phàn}}}{\partial x} = 0$ , ta có

$$\frac{1}{2} E_F \left[ (1+x)^{\frac{2}{3}} - (1-x)^{\frac{2}{3}} \right] - \mu_B B - \frac{V}{4} N [(1+x) - (1-x)] = 0 ,$$

hay

$$x \approx \frac{6\mu_B B}{4E_F - 3VN}$$

đối với  $x \ll 1$ .

Do vậy độ từ hóa bằng

$$M = nx\mu_B = \frac{6n\mu_B^2 B}{4E_F - 3VN} .$$

Chú ý rằng với  $V = 0$  biểu thức này rút lại thành biểu thức cho các electron không tương tác.

### 1064

Xét một khí lý tương gồm các hạt meson vectơ bền (là các hạt khối lượng lớn với spin bằng 1) có mômen từ  $\mu$ .

- (a) Hãy tính độ cảm thuận từ trên một đơn vị thể tích trong từ trường yếu.
- (b) Hãy thực hiện các tính toán tương ứng với các dipole cổ điển.

(Chicago)

**Lời giải:**

(a) Đối với một khí lý tưởng, trong đó các hạt không tương tác nhau, hàm phân bố của một hạt riêng sẽ là

$$z_1 = e^{-\beta\varepsilon} + 1 + e^{\beta\varepsilon},$$

ở đây  $\varepsilon = \mu B$ ,  $\beta = \frac{1}{k_B T}$ . Các xác suất để mômen từ của nó song song, vuông góc hoặc đối song với từ trường  $\mathbf{B}$  lần lượt là

$$P_+ = \frac{e^{-\beta\varepsilon}}{z_1}, \quad P_0 = \frac{1}{z_1}, \quad P_- = \frac{e^{\beta\varepsilon}}{z_1}.$$

Do vậy mômen từ trung bình dọc theo hướng từ trường tính trên một hạt là

$$\begin{aligned}\mu &= \mu(P_+ - P_-) = \mu \cdot \frac{e^{\beta\varepsilon} - e^{-\beta\varepsilon}}{z_1} \\ &= \frac{2\mu \sinh(\beta\varepsilon)}{2 \cosh(\beta\varepsilon) + 1}.\end{aligned}$$

Nếu  $n$  là số các hạt trên một đơn vị thể tích của khí điện tử thì độ từ hoá thuận từ bằng

$$M = n\mu = \frac{2n\mu \sinh(\beta\varepsilon)}{2 \cosh(\beta\varepsilon) + 1}.$$

Trong một từ trường yếu,  $\mu B \ll k_B T$ , hay  $\beta\varepsilon \ll 1$ ,  $\sinh(\beta\varepsilon) \approx \beta\varepsilon$ ,  $\cosh(\beta\varepsilon) \approx 1$ , do đó

$$M = \frac{2n\mu\beta\varepsilon}{3} = \frac{2n\mu^2 B}{3k_B T}.$$

Và do đó độ cảm thuận từ sẽ là

$$\chi = \frac{M}{H} = \frac{\mu_0 M}{B} = \frac{2n\mu_0\mu^2}{3k_B T}.$$

(b) Đối với một dipole từ cổ điển  $\mu$ , thé năng của nó trong một từ trường  $\mathbf{B}$  là

$$\varepsilon = -\mu \cdot \mathbf{B} = -\mu B \cos \theta,$$

ở đây  $\theta$  là góc giữa  $\mu$  và  $\mathbf{B}$ . Xác suất tìm thấy dipole nằm dọc theo phương  $\theta$  được cho bởi hàm phân bố

$$e^{-\frac{\varepsilon}{k_B T}} = e^{\mu B \beta \cos \theta}.$$

Do đó mômen từ trung bình đọc theo phương **B** là

$$\begin{aligned}\bar{\mu} &= \frac{\int_0^{\pi} e^{\mu B \beta \cos \theta} \mu \cos \theta \cdot 2\pi \sin \theta d\theta}{\int_0^{\pi} e^{\mu B \beta \cos \theta} \cdot 2\pi \sin \theta d\theta} \\ &= \frac{1}{B\beta} [\mu B \beta \coth(\mu B \beta) - 1] \\ &= \mu \left[ \coth(\mu B \beta) - \frac{1}{\mu B \beta} \right].\end{aligned}$$

Đối với một từ trường yếu

$$\mu B \ll \frac{1}{\beta}, \quad \text{hoặc} \quad \mu B \beta \ll 1.$$

và

$$\coth(\mu B \beta) \approx \frac{1}{\mu B \beta} + \frac{\mu B \beta}{3}.$$

Do đó độ từ hoá thuận từ đổi với từ trường yếu là

$$M = n\bar{\mu} \approx \frac{n\mu^2 B \beta}{3}$$

và độ cảm thuận từ là

$$\chi = \frac{M}{H} = \frac{\mu_0 M}{B} = \frac{n\mu_0 \mu^2}{3k_B T}.$$

1065

Giá trị bão hòa điển hình của mật độ độ từ hoá của sắt/thép là bao nhiêu (chỉ rõ đơn vị)? Từ giá trị này và giá trị của các đại lượng đặc trưng khác, cùng với các giả thiết về bản chất của chất sắt từ, hãy đánh giá mômen từ spin của electron.

(Columbia )

Lời giải:

Trong một từ trường ngoài, độ từ hoá của sắt tăng theo cường độ từ trường. Khi từ trường tăng đến một giá trị nào đó, độ từ hoá sẽ không tăng lên nữa mà đạt đến một giá trị bão hòa  $M_s$ , tại thời điểm đó theo lý thuyết sắt từ, tất

cả các mômen từ gây ra bởi spin của electron được sắp xếp theo chiều của từ trường. Đặt mật độ electron trong một chất sắt là  $n$  và mômen từ spin của electron là  $\mu$ , thì

$$M_s = n\mu .$$

Độ từ hoá bão hòa của sắt điển hình là  $M_s = 10^6 \text{ Am}^{-1}$ , và với  $n = 3 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$ , mômen từ spin của một electron là  $\mu = \frac{M_s}{n} \approx 3 \times 10^{-23} \text{ Am}^2$ .

### 1066

Nếu một tinh thể sắt được từ hoá hoàn toàn một cách tự phát, hãy đánh giá độ từ hoá bằng cách sử dụng các giá trị tin cậy của các tham số cần thiết.  
(Wisconsin)

**Lời giải:**

Số các nguyên tử trên một đơn vị thể tích tinh thể sắt là

$$n = \frac{\rho N_A}{A} = \frac{7.9}{56} \times 6.02 \times 10^{23} = 8.5 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3} = 8.5 \times 10^{28} \text{ m}^{-3},$$

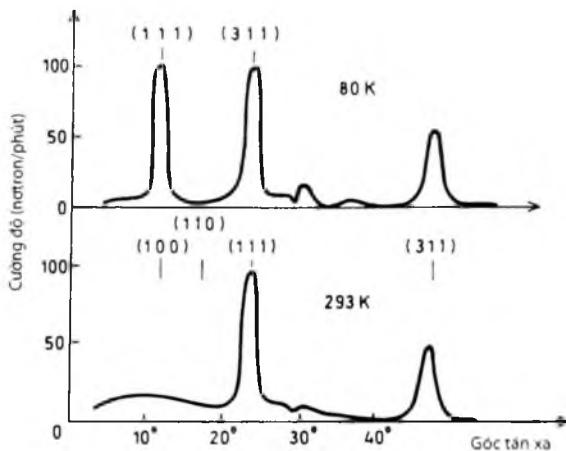
ở đây  $\rho$  là khối lượng riêng của sắt,  $A$  là khối lượng nguyên tử của nó và  $N_A$  là số Avogadro. Mômen từ trên một nguyên tử sắt là  $\mu_0 \approx 2.2\mu_B$ ,  $\mu_B$  là magneton Bohr. Do vậy mômen từ trên một đơn vị thể tích hay còn gọi là độ từ hoá bằng

$$\begin{aligned} M &\approx n\mu_0 = 2.2n\mu_B = 2.2 \times 8.5 \times 10^{28} \times 9.3 \times 10^{-24} \\ &= 1.74 \times 10^6 \text{ Am}^{-1}. \end{aligned}$$

### 1067

Hình 1.38 mô tả số liệu nhiễu xạ nôtron đối với tán xạ trên một tinh thể MnO, có cùng cấu trúc với NaCl. Mặc dù số liệu nôtron thay đổi rất mạnh khi nhiệt độ giảm xuống dưới 120 K, nhưng bức tranh nhiễu xạ tia X lại hầu như không thay đổi theo nhiệt độ (có cùng các đinh giống như số liệu nôtron tại 193 K) và cho thấy hằng số mạng  $a = 4.43 \text{ \AA}$ .

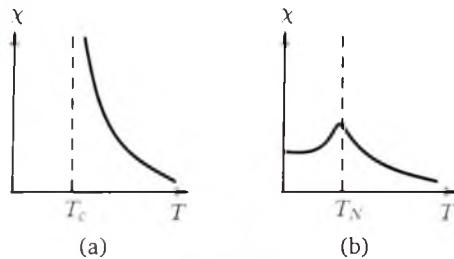
(a) Giải thích tại sao một tinh thể có cấu trúc muối mỏ (NaCl) lại không thể có các phản xạ Bragg theo các hướng (100) và (110) (đối với cả nôtron lẫn tia X)?



Hình 1.38

(b) Từ hình vẽ trên, hằng số mạng băng khoáng bao nhiêu nếu căn cứ theo số liệu neutron do tại 80 K?

(c) Trạng thái của tinh thể MnO tại 80 K có khác gì so với trạng thái của nó tại 293 K?



Hình 1.39

(d) Độ cảm từ  $\chi$  được vẽ phác cho hai loại vật liệu khác nhau trên hình 1.39. Với mỗi một đồ thị, hãy mô tả bản chất từ của vật liệu đó ở vùng nhiệt

độ thấp. Đồ thị nào có thể dùng để mô tả MnO?

(Princeton)

**Lời giải:**

(a) MnO và NaCl có cùng một cấu trúc lập phương tâm mặt (fcc). Đối với cấu trúc này thừa số cấu trúc hình học sẽ bằng không nếu các chỉ số của mặt nhiễu xạ là tập hợp của cả các số lẻ và chẵn. Do vậy, các tinh thể có cấu trúc như vậy sẽ không có phản xạ Bragg theo các hướng như (100) và (110).

(b) Hình 1.38 chỉ ra rằng tại  $T = 293$  K góc tán xạ là  $2\theta \approx 24^\circ$ , và tại  $T = 80$  K góc tán xạ là  $2\theta' \approx 12^\circ$ . Đối với cấu trúc fcc, khoảng cách giữa các mặt là  $d = \frac{na}{3}$ , ở đây  $a$  là hằng số mạng. Khi đó, theo định luật Bragg  $2d \sin \theta = n\lambda$ , ta có

$$a \sin \theta = a' \sin \theta'.$$

Do vậy hằng số mạng tại  $T = 80$  K là

$$a' = \frac{a \sin \theta}{\sin \theta'} = 4.43 \times \frac{\sin 12^\circ}{\sin 6^\circ} = 8.81 \text{ \AA}.$$

(c) Tinh thể MnO, có cấu trúc fcc, có hằng số mạng bằng 4,43 Å tại  $T = 293$  K và 8,81 Å tại  $T = 80$  K, và một số các đỉnh nhiễu xạ mới tại nhiệt độ thấp hơn nữa. Sự xuất hiện của các đỉnh nhiễu xạ mới này gây bởi quá trình trật tự hóa các mômen từ tại nhiệt độ thấp. Đặc biệt, các spin  $Mn^{2+}$  có cùng hướng trên một mặt (111) nào đó, nhưng tại mặt (111) kế tiếp các spin được sắp xếp theo hướng ngược lại. Như vậy, xét trong một mặt (111) thì các spin sắp xếp theo trật tự sắt từ, nhưng xét các mặt (111) kế tiếp thì các spin lại sắp xếp theo trật tự phản sắt từ. Do tình huống này, chỉ khi sự lệch pha giữa các mặt (111) kế nhau là  $\pi$  thì mới xảy ra một cực đại nhiễu xạ. Điều này dẫn đến sự phản xạ diễn ra tại góc tán xạ  $2\theta' = 12^\circ$ .

Bằng phương pháp nhiễu xạ tia X hằng số mạng được tính là 4,43 Å, có nghĩa là hằng số mạng của một ô hóa học là 4,43 Å. Để có cung hướng spin, cần thiết phải mở rộng mỗi một chiều của ô hóa học lên gấp 2 lần để hình thành được một ô nguyên tố từ.

(d) Hình 1.39 (a) là minh họa cho một chất sắt từ. Khi  $T < T_C$ , là nhiệt độ Curie, chất này ở pha trật tự sắt từ trong đó các spin phân tử sắp xếp song song với nhau. Trên  $T_C$  chất này trở thành thuận từ. Hình 1.39 (b) mô tả trường hợp của một chất phản sắt từ. Dưới nhiệt độ Néel,  $T_N$ , các spin cạnh nhau có xu hướng sắp xếp phản song song. Trên  $T_N$ , chất này cũng trở thành thuận từ. Do tại các nhiệt độ thấp chất được mô tả qua hình 1.39 (b) là chất phản sắt

từ, nó có thể là dạng đồ thị  $\chi$  theo  $T$  của MnO.

### 1068

(a) Cho hai mẫu vật liệu trong suốt, bề ngoài giống hệt nhau. Một là tinh thể và một là thủy tinh. Hãy mô tả hai thí nghiệm độc lập để phân biệt được tinh thể và thủy tinh.

(b) Cho bốn vật trong giống hệt nhau:

- (1) một nam châm vĩnh cửu,
- (2) một vật liệu nghịch từ,
- (3) một vật liệu thuận từ,
- (4) một vật liệu sắt từ chưa được từ hóa,

Có thể phân biệt được tất cả bốn vật liệu trên mà không cần dùng đèn bất kỳ một loại điện từ trường bên ngoài nào không? Nếu được, hãy mô tả làm thế nào để làm được điều đó. Nếu không, thì nêu các lý do tại sao không được.

(Chicago)

#### Lời giải:

(a) Thí nghiệm thứ nhất: Đốt nóng vật liệu. Một tinh thể sẽ nóng chảy tại nhiệt độ nóng chảy nhất định và giữ nguyên giá trị nhiệt độ này trong quá trình nóng chảy. Trái lại, thủy tinh không có điểm nóng chảy nhất định.

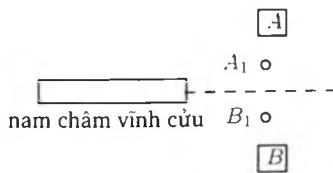
Thí nghiệm thứ hai: Chụp ảnh nhiều xạ tia X. Một tinh thể sẽ cho các vết đều đặn trên hình trong khi thủy tinh chỉ cho các vết không tuân theo quy luật nào.

(b) Có thể nhận dạng được các loại vật liệu theo các bước sau đây.

(1) Đưa các vật liệu lần lượt đến gần một ít bột sắt. Nam châm vĩnh cửu sẽ hút mạnh các bột này về phía nó.

(2) Đưa nam châm vĩnh cửu đến gần từng loại vật liệu còn lại. Vật liệu sắt từ chưa được từ hóa sẽ hút mạnh vào nam châm vĩnh cửu.

(3) Đặt hai vật liệu còn lại ở gần và đối xứng đối với nam châm vĩnh cửu như trên hình 1.40. Đo từ trường tại các điểm  $A_1$  và  $B_1$  giữa hai vật liệu bằng một Gauss kế. Điểm gần chất thuận từ hơn sẽ có cường độ từ trường lớn hơn.

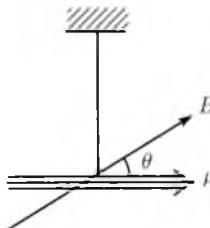


Hình 1.40

1069

Một cái kim bằng thép cứng dài và mảnh bị từ hóa đồng đều, có chiều dài là 12 cm, được treo bằng một sợi dây không xoắn và cho nó dao động tự do trong mặt phẳng nằm ngang với góc dao động nhỏ quanh một trục đi qua tâm trong từ trường trái đất. Chu kỳ của dao động này là 3-5 giây. Hãy đánh giá mật độ từ hoá của cái kim này.

(Columbia)



Hình 1.41

**Lời giải:**

Vì chỉ có các dao động góc nhỏ, nên từ trường trái đất được coi như là đều.

Gọi  $\mu$  là mômen từ của cái kim thép. Thế năng của nó trong từ trường trái đất là  $V = -\mu \cdot B = -\mu B \cos \theta$ , ở đây  $\theta$  là góc giữa  $\mu$  và  $B$  như chỉ ra trên Hình 1.41. Phương trình chuyển động đối với các góc dao động nhỏ là

$$I\ddot{\theta} = -\frac{dV}{d\theta} = -\mu B \sin \theta \approx -\mu B\theta.$$

trong đó  $I$  là mômen quán tính của cái kim. Suy ra tần số góc của dao động là

$$\omega^2 = \frac{\mu B}{I}.$$

Đặt  $l, V, \rho, M$  lần lượt là chiều dài, thể tích, mật độ và độ từ hoá của kim thép.

$$I = \frac{\rho V l^2}{12}, \quad \mu = VM.$$

và

$$\omega^2 = \frac{12BM}{\rho l^2},$$

Do đó

$$M = \frac{\pi^2 \rho l^2}{3BT^2},$$

ở đây  $T$  là chu kỳ dao động. Với  $l = 0,12$  m,  $T = 4$  s,  $\rho = 78 \times 10^3$  kgm $^{-3}$ ,  $B \sim 5 \times 10^{-5}$  Wm $^{-2}$ , ta tìm được

$$M = 4,6 \times 10^5 \text{ Am}^{-1}.$$

### 1070

Tính trong chất rắn được thể hiện dưới các dạng khác nhau đối với các vật liệu khác nhau và ở các nhiệt độ khác nhau. Có bốn dạng tính là

- 1. Sắt từ
- 2. Nghịch từ
- 3. Phản sắt từ
- 4. Thuân từ

(a) Đối với một mẫu vật liệu lý tưởng thể hiện một trong số các tính chất trên, hãy vẽ độ cảm từ như một hàm của nhiệt độ. Chú ý các thang tương đối trong các đồ thị để thể hiện được cường độ tương đối của các hiện tượng từ đó. Cho ví dụ về một vật liệu thực thể hiện được gần đúng mỗi tính chất từ lý tưởng đó.

(b) Chỉ ra hiện tượng tới hạn nếu có trong các hiện tượng trên.

(c) Giải thích khái niệm “tương tác trao đổi” và vai trò của nó trong các tính chất từ nói trên. Đưa ra một giải thích cơ học lượng tử ngắn gọn về các tương tác trao đổi, Hamilton của tương tác đó và mối liên hệ giữa tương tác trao đổi và trường phân tử Weiss.

(d) Giải thích ngắn gọn sự khác nhau giữa các tính chất từ của Na kim loại và đơn tinh thể Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> pha tạp Cr<sup>2+</sup> (0,01%).

(SUNY, Buffalo )

**Lời giải:**

(a) Nghịch từ là một tính chất của một số chất mà khi ở trong từ trường ngoài các nguyên tử cấu thành chất đó có thể sinh ra các dòng điện cảm ứng

tạo ra từ trường có hướng ngược với hướng của từ trường ngoài, do đó độ cảm từ  $\chi < 0$ . Nhìn chung  $\chi$  có bậc độ lớn khoảng  $10^{-5} \text{ cm}^{-3}$ , và hầu như không bị thay đổi theo nhiệt độ như được chỉ ra bởi đường cong A trên hình 1.42. Một chất mà các nguyên tử cấu thành nó có mômen từ bằng không thể hiện tính nghịch từ, ví dụ nguyên tố chì.

Trong một vật liệu thuận từ tính thuận từ Langevin chiếm ưu thế. Nó được gây bởi sự định hướng song song của các mômen từ vĩnh cửu của các nguyên tử cấu thành với độ cảm từ tổng cộng  $\chi \propto \frac{1}{T}$ , như được chỉ ra trên đường cong B của hình 1.42. Hơn nữa, một chất kim loại cũng có tính chất thuận từ Pauli gây bởi các electron dẫn, mỗi một electron dẫn mang một mômen từ spin với độ cảm từ không phụ thuộc vào nhiệt độ như được mô tả bằng đường cong C. Nói chung, độ cảm từ của một chất thuận từ lớn hơn độ cảm từ của một chất nghịch từ nhưng có cùng bậc độ lớn. Một vật liệu thuận từ phải có các nguyên tử với mômen từ vĩnh cửu khác không. Các nguyên tố kim loại như natri, nhôm, và các hợp chất hóa học của các nguyên tố kim loại chuyển tiếp và đất hiếm như là  $\text{Al}_2\text{O}_3$  pha tạp  $\text{Cr}^{2+}$  là những thí dụ.

Một chất sắt từ điển hình có độ cảm từ cỡ  $10^3$  lần lớn hơn độ cảm từ của một vật liệu thuận từ và biến đổi theo nhiệt độ theo quy luật  $\chi \propto \frac{1}{T-T_C}$ , như được chỉ ra trên đường cong D. Tại  $T$  dưới nhiệt độ Curie  $T_C$ , một chất sắt từ bị từ hóa tự phát; trên  $T$  nó trở thành một vật liệu thuận từ. Các chất sắt từ điển hình là sắt, coban và никen.

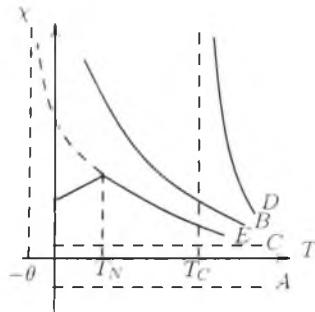
Một vật liệu phản sắt từ có độ cảm từ  $\chi$  có cùng bậc độ lớn với độ cảm từ của một vật liệu thuận từ nhưng biến đổi theo nhiệt độ như sau: Tại  $T$  lớn hơn nhiệt độ Néel  $T_N$ ,  $\chi \propto \frac{1}{T+\Theta}$ , ở đây  $\Theta$  là một hằng số dương; tại  $T < T_N$ ,  $\chi$  giảm khi nhiệt độ giảm như được chỉ ra trên đường cong E. Tính sắt từ được thấy ở nhiều hợp chất trong đó có các oxit kim loại, như là  $\text{MnO}$ .

(b) Đối với một chất sắt từ, sự chuyển pha sắt từ  $\leftrightarrow$  thuận từ xảy ra tại nhiệt độ Curie  $T_C$ ; đối với một chất phản sắt từ, sự chuyển pha phản sắt từ  $\leftrightarrow$  thuận từ xảy ra tại nhiệt độ Néel  $T_N$ .

(c) Trong vùng sắt từ các mômen từ phân tử hoặc nguyên tử được từ hóa tự phát, cho thấy tồn tại một trường phân tử bên trong vật liệu. Điều này chỉ ra rằng các mômen canh nhau tương tác với nhau và tương tác này phụ thuộc vào spin. Nếu các mômen xung lượng spin của các nguyên tử  $i$  và  $j$  lần lượt là  $\mathbf{S}_i \hbar$  và  $\mathbf{S}_j \hbar$  thì tương tác của chúng sẽ tạo ra một Hamiltonian trao đổi.

$$-2J_e \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j .$$

ở đây  $J_e$  là tích phân trao đổi. Giả thiết rằng chất sắt từ có  $N$  nguyên tử trên một đơn vị thể tích và mỗi một nguyên tử đóng góp một electron vào tính sắt



Hình 1.42

từ. Khi đó Hamiltonian trao đổi của tinh thể đó là

$$H_{\text{tr. đổi}} = - \sum_{\mathbf{R}_i} \sum'_{\mathbf{R}_j} 2J_e(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j) \mathbf{S}(\mathbf{R}_i) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{R}_j).$$

ở đây  $\mathbf{R}_i$  và  $\mathbf{R}_j$  là hai vectơ mạng, và trong tổng  $\sum'$ ,  $\mathbf{R}_i \neq \mathbf{R}_j$ . Nếu ta giả thiết rằng chỉ có tương tác trao đổi của các electron của các nguyên tử lân cận gần nhất là lớn đáng kể, thì

$$H_{\text{tr. đổi}} = - \sum_{\mathbf{R}_i} \left[ 2 \sum_{\substack{\text{lân cận} \\ \mathbf{R}_j}} J_e(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j) \mathbf{S}(\mathbf{R}_j) \right] \cdot \mathbf{S}(\mathbf{R}_i).$$

Điều này có nghĩa là nếu tích phân trao đổi  $J_e > 0$ , thì các spin song song tương ứng với trạng thái năng lượng thấp hơn. Trong một domen sắt từ các mômen từ spin có xu hướng sắp xếp song song nhau một cách tự phát, cho thấy tích phân trao đổi là dương đối với tương tác giữa các nguyên tử lân cận.

Để tìm mối liên hệ giữa tương tác trao đổi và trường phân tử Weiss, hãy xét một tinh thể trong đó mỗi nguyên tử có  $z$  nguyên tử lân cận gần nhất.  $H_{\text{tr. đổi}}$  có thể được viết là

$$-2J_e \mathbf{S}_0 \cdot \sum_{j=1}^z \mathbf{S}_j,$$

ở đây  $\mathbf{S}_0 \hbar$  là mômen xung lượng spin của nguyên tử đang xét và  $\mathbf{S}_j \hbar$  ( $j = 1, 2, \dots, z$ ) là mômen xung lượng spin của các nguyên tử lân cận gần nhất của

nó. Các mômen từ tương ứng  $\mu_0, \mu_j$  là  $g_s\mu_B S_0, g_s\mu_B S_j$ , ở đây  $g_s$  là một hằng số và  $\mu_B$  là magneton Bohr. Như vậy

$$H_{\text{tr đổi}} = -\mu_0 \left[ \frac{2J_e}{(g_s\mu_B)^2} \sum_{j=1}^z \mu_j \right] .$$

So sánh biểu thức này với biểu thức năng lượng của một dipole từ trong một từ trường ngoài,  $-\mu \cdot \mathbf{B}$ , cho thấy tương tác trao đổi sinh ra một trường hiệu dụng

$$\frac{2J_e}{(g_s\mu_B)^2} \sum_j \mu_j = \frac{2J_e z}{N(g_s\mu_B)^2} \mathbf{M} ,$$

ở đây  $N$  là số nguyên tử trên một đơn vị thể tích và  $\mathbf{M}$  là độ từ hoá. Nó có dạng trường phân tử Weiss  $\gamma \mathbf{M}$  với hằng số trường

$$\gamma = \frac{2J_e z}{N(g_s\mu_B)^2} .$$

(d) Trong natri kim loại, nguyên tử natri có cấu trúc vỏ electron bị lấp đầy hoàn toàn và một electron hóa trị tự do. Do đó từ tính của nó gây bởi tính thuận từ Pauli của electron tự do đó và tính nghịch từ do các lớp vỏ bị lấp đầy là hoàn toàn của các ion. Tổng của hai đóng góp này dẫn đến tính thuận từ rất yếu. Trái lại, trong một đơn tinh thể  $\text{Al}_2\text{O}_3$  pha tạp  $\text{Cr}^{2+}$  tồn tại các mômen từ vĩnh cửu khác không sắp xếp song song dẫn đến tính thuận từ mạnh hơn.

## 1071

Khi một kim loại chuyển sang trạng thái siêu dẫn nó trở nên trật tự hơn và năng lượng tự do của nó bị giảm đi.

Bản chất của trật tự mới là gì? Xét một vòng dây siêu dẫn mang một dòng điện vĩnh cửu chạy quanh nó. Giả thiết rằng tại một thời điểm nào đó các thăng giáng nhiệt gây ra một sự giảm nhỏ của dòng điện này. Thông qua câu trả lời của câu hỏi trên, hãy giải thích tại sao hệ sẽ khôi phục lại dòng điện về giá trị ban đầu của nó.

Giải thích tại sao trong vật liệu này tồn tại khe năng lượng khi ta tăng năng lượng cho hệ bằng cách chiếu ánh sáng vào nó nhưng khe năng lượng sẽ không xuất hiện khi ta thêm năng lượng cho hệ bằng cách tác dụng vào nó một dòng điện một chiều.

(SUNY, Buffalo)

**Lời giải:**

Khi một kim loại chuyển sang trạng thái siêu dẫn, các electron nằm sâu trong mặt cầu Fermi vẫn giữ bản chất của các electron thông thường, nhưng các electron ở rất gần mặt Fermi sẽ kết hợp nhau thành các cặp Cooper. Đó là các electron siêu dẫn và bị ngưng tụ ở trạng thái năng lượng thấp nhất, một trạng thái không đóng góp vào entropy của hệ và là trạng thái trật tự rất cao. Như vậy, khi một kim loại chuyển sang trạng thái siêu dẫn nó trở nên trật tự và năng lượng tự do của nó giảm xuống.

Tại một thời điểm nào đó, một số cặp Cooper có thể bị phá vỡ do các thăng giáng nhiệt. Mật độ của các electron siêu dẫn sẽ giảm đi gây nên một sự giảm nhỏ của dòng điện. Tại thời điểm đó, độ trật tự của hệ cũng giảm đi. Nhưng năng lượng của nó phải được bảo toàn do đó một số electron khác gần mặt Fermi sẽ phải kết hợp để hình thành các electron siêu dẫn, và mật độ của chúng lại tăng lên. Hệ như vậy sẽ hồi phục lại giá trị dòng điện ban đầu.

Có một khe năng lượng  $\Delta$  giữa trạng thái cơ bản siêu dẫn và trạng thái bị kích thích thấp nhất. Khi chiếu ánh sáng vào một chất siêu dẫn, vật liệu này hấp thu ánh sáng mạnh chỉ khi năng lượng photon lớn hơn hoặc bằng  $\Delta$ . Điều này có nghĩa là tồn tại khe năng lượng khi ta muốn thêm năng lượng vào hệ bằng cách chiếu sáng vào nó. Trái lại, khi tác dụng một dòng điện một chiều vào hệ, một cặp Cooper sẽ dịch chuyển như toàn bộ mà không cần phải vượt qua khe năng lượng.

1072

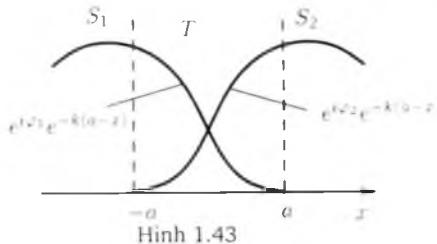
Mô tả ngắn gọn một trong những hiệu ứng xuyên hàn Josephson.

(Wisconsin )

**Lời giải:**

Một dòng điện một chiều có thể chạy qua một lớp tiếp xúc tạo thành bởi hai mẫu vật liệu siêu dẫn  $S_1$  và  $S_2$  được ngăn cách bởi một màng mỏng điện môi  $T$  có chiều dày khoảng 10 Å, mặc dù hiệu điện thế của lớp tiếp xúc này có thể bằng không. Điều này chỉ ra rằng các electron siêu dẫn có thể truyền qua hàng rào thế tạo nên một dòng siêu dẫn xuyên ngầm. Một dòng điện như thế có thể được giải thích bởi sự kết hợp giữa các hàm sóng trong hai chất siêu dẫn như được mô tả ngắn gọn dưới đây.

Chuyển động của các electron siêu dẫn (một cặp Cooper) có thể được mô tả bởi các hàm sóng trong  $S_1$  và  $S_2$ , các hàm này suy giảm nhanh trong lớp cách điện như chỉ ra trên hình 1.43.



Đặt  $\varphi_1$  và  $\varphi_2$  lần lượt là pha của các sóng trong S<sub>1</sub> và S<sub>2</sub>. Hàm sóng tổng trong lớp cách điện là

$$\begin{aligned}\psi &= e^{i\varphi_1}e^{-k(x+a)} + e^{i\varphi_2}e^{-k(a-x)} \\ &= e^{-ka}(e^{i\varphi_1-kx} + e^{i\varphi_2+kx})\end{aligned}$$

Mật độ dòng là

$$j = qJ.$$

ở đây J là mật độ dòng xác suất

$$J = -\frac{i\hbar}{2m}(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*).$$

Bởi vậy mật độ dòng qua lớp tiếp xúc là

$$\begin{aligned}j &= -\frac{i\hbar q}{2m} \left( \psi^* \frac{d\psi}{dx} - \psi \frac{d\psi^*}{dx} \right) \\ &= \frac{2\hbar q k}{m} e^{-2ka} \sin(\phi_2 - \phi_1) \\ &= j_0 \sin(\phi_2 - \phi_1)\end{aligned}$$

với  $j_0 = \frac{2\hbar q k}{m} e^{-2ka}$ . Do đó, chừng nào hai hàm sóng siêu dẫn kết hợp hiệu số pha khác không, thì sẽ còn tồn tại dòng điện siêu dẫn mặc dù hiệu điện thế qua lớp tiếp xúc có thể bằng không.

1073

Hãy mô tả từng trường hợp dưới đây bằng một vài câu chất lọc (và không sử dụng các phương trình).

- (a) Một lớp tiếp xúc Josephson

- (b) Hiệu ứng Josephson một chiều  
 (c) Hiệu ứng Josephson xoay chiều

(Columbia )

**Lời giải:**

(a) Một lớp Josephson gồm một màng điện môi rất mỏng (khoảng  $10^{-9}$  m) giữa hai tấm vật liệu siêu dẫn. Ví độ dài kết hợp của các electron siêu dẫn là khoảng  $10^{-6}$  m, nên sẽ có sự liên kết giữa các hàm sóng của các electron siêu dẫn ở hai phía của màng mỏng cách điện dẫn đến một dòng điện siêu dẫn xuyên ngầm. Cấu trúc kiểu bánh kẹp: chất siêu dẫn-màng cách điện-chất siêu dẫn được gọi là lớp tiếp xúc Josephson.

(b) Khi không có từ trường hoặc điện trường tác dụng, nếu có sự lệch pha giữa các hàm sóng siêu dẫn ở hai phía của màng mỏng điện môi của một cấu trúc Josephson, thì một dòng điện siêu dẫn có thể chạy qua cấu trúc này mà không bị tắt dẫn. Đây gọi là hiệu ứng Josephson một chiều.

(c) Nếu một hiệu điện thế ổn định  $V$  được đặt vào hai mặt ngoài của các chất siêu dẫn của một lớp tiếp xúc Josephson, một dòng điện xoay chiều với tần số  $\nu = 2eV/h$  sẽ chạy qua lớp tiếp xúc. Đây là hiệu ứng Josephson xoay chiều.

**1074**

Dựa ra một lập luận đơn giản để giải thích bằng cách nào hai electron trong một mạng tinh thể có thể tương tác hút với nhau để hình thành nên một cặp Cooper.

Xét một cặp electron như vậy trong một trạng thái spin đơn tuyển với xung lượng tổng cộng bằng không. Cặp này tồn tại trong một kim loại với năng lượng Fermi  $\varepsilon_F$ , mật độ trạng thái  $N$ . Phương trình Schrödinger cho một cặp như vậy có thể được viết dưới dạng  $(H_0 + H_1)\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r})$ , ở đây  $H_0$  là toán tử động năng của cặp,  $H_1$  là tương tác giữa hai electron, và  $\mathbf{r}$  là tọa độ tương đối.

(SUNY, Buffalo )

**Lời giải:**

Các electron tương tác gián tiếp thông qua sự trao đổi các phonon sóng mạng. Ví dụ, một electron có vectơ sóng  $\mathbf{k}_1$  phát ra một phonon với vectơ sóng  $\mathbf{q}$  và bị tán xạ tới một trạng thái có vectơ sóng  $\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}$ ; một electron khác có vectơ sóng ban đầu  $\mathbf{k}_2$  hấp thụ phonon sinh ra bởi electron thứ nhất và

chuyển sang trạng thái có vectơ sóng  $\mathbf{k}_2 + \mathbf{q}$ . Một quá trình khác có thể là electron thứ nhất hấp thu một phonon với vectơ sóng  $-\mathbf{q}$  do electron thứ hai sinh ra và bị tán xạ từ trạng thái  $\mathbf{k}_1$  đến trạng thái  $\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}$ . Theo lý thuyết cơ học lượng tử, nếu sự chênh lệch năng lượng  $|E(\mathbf{k}_1) - E(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q})| < \hbar\omega_{\mathbf{q}}$ , thì năng lượng tương tác sẽ có dấu âm, có nghĩa là sẽ có một tương tác hút giữa hai electron. Rõ ràng rằng, chỉ trong khoảng  $\pm \hbar\omega_D$ , ở đây  $\omega_D$  là tần số Debye, gần mặt Fermi thì các electron mới thỏa mãn điều kiện này.

Đối với một cặp electron độc lập hàm sóng liên kết sẽ là

$$\varphi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{V_c} e^{i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1 + \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_2)} = \frac{1}{V_c} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} .$$

ở đây  $V_c$  là thể tích của tinh thể,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ ,  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$  vì xung lượng tổng cộng bằng không.

Nếu hai điện tử này tương tác thì hàm sóng liên kết có thể được biểu diễn là tổ hợp tuyến tính của các hàm sóng độc lập

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} g(\mathbf{k}) \varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) .$$

Thay vào phương trình Schrödinger

$$(H_0 + H_1)\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) ,$$

ở đây

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} (\nabla_{\mathbf{r}_1}^2 + \nabla_{\mathbf{r}_2}^2) = -\frac{\hbar^2}{m} \nabla_{\mathbf{r}}^2 , \quad H_1 = V(\mathbf{r}) ,$$

ta được

$$\frac{\hbar^2 k^2}{m} g(\mathbf{k}) + \sum_{\mathbf{k}'} g(\mathbf{k}') V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} = Eg(\mathbf{k}) \quad (1)$$

với

$$V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} = \frac{1}{V_c} \int V(\mathbf{r}) e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} .$$

Với gần đúng bậc một ta có thể lấy

$$V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} = \begin{cases} -V, & \text{đối với } |\varepsilon(\mathbf{k})|, |\varepsilon(\mathbf{k}')| \leq \hbar\omega_D . \\ 0, & \text{các trường hợp khác,} \end{cases}$$

ở đây  $\varepsilon(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} - \varepsilon_F$  và  $V$  là một hằng số có dấu dương. Phương trình (1) bây giờ trở thành

$$g(\mathbf{k}) = \frac{V \sum_{\mathbf{k}'} g(\mathbf{k}')}{\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{m} - E} .$$

Lấy tổng mỗi vé của biểu thức trên theo  $\mathbf{k}$ , ta được

$$\sum_{\mathbf{k}} g(\mathbf{k}) = V \sum_{\mathbf{k}'} g(\mathbf{k}') \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\left( \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{m} - E \right)},$$

hay

$$1 = V \sum_k \frac{1}{\frac{\hbar^2 k^2}{m} - E} \approx V \int_0^{k_D} \frac{N(k) dk}{\frac{\hbar^2 k^2}{m} - E} = V \int_0^{\hbar \omega_D} \frac{N(\varepsilon) d\varepsilon}{2(\varepsilon + \varepsilon_F) - E},$$

Vì  $\hbar \omega_D \ll E_F$ , ta có thể coi  $N(\varepsilon) \approx N(0)$ . Do đó

$$1 \approx N(0)V \int_0^{\hbar \omega_D} \frac{d\varepsilon}{2(\varepsilon + \varepsilon_F) - E} = \frac{N(0)V}{2} \ln \left( \frac{E - 2\varepsilon_F - 2\hbar \omega_D}{E - 2\varepsilon_F} \right),$$

hay

$$E = 2\varepsilon_F - \frac{2\hbar \omega_D}{\exp(2/N(0)V) - 1} < 2\varepsilon_F$$

vì  $N(0)V$  dương.

Do đó hai electron gần mức Fermi sẽ kết hợp thành một trạng thái liên kết đó là cặp Cooper nếu có một tương tác hút nhỏ  $-V$  giữa chúng.

## 1075

(1) Dưới nhiệt độ chuyển pha siêu dẫn  $T_c$ , một tỷ phần xác định  $n_s/n$  của tổng số electron dẫn có thể tham gia vào dòng siêu dẫn;  $n_s$  gọi là mật độ các electron siêu dẫn. Phương trình London cho các chất siêu dẫn đơn giản là một phương trình hiện tượng luận liên hệ dòng siêu dẫn  $j_s$  với thế vectơ từ  $\mathbf{A}$

$$j_s = \frac{-n_s e^2}{m_e c} \mathbf{A} \quad (1)$$

ở đây  $m_e$  là khối lượng của electron. Sử dụng phương trình Maxwell thích hợp, hãy chỉ ra làm thế nào có thể suy ra hiệu ứng Meissner từ phương trình (1). Độ xuyên sâu London  $\Lambda$  là gì?

(2) Một đặc trưng điển hình khác của hầu hết các chất siêu dẫn là sự xuất hiện một khe năng lượng có độ rộng  $\Delta$  có tâm ở lân cận mức Fermi trong một

tập hợp các mức kích thích một electron. Thảo luận ngắn gọn xem làm thế nào thực hiện hai trong số các phép đo thực nghiệm dưới đây có thể chỉ ra được sự tồn tại và độ lớn của  $\Delta$ .

- (a) Các phép đo nhiệt dung riêng tại  $T \ll T_c$ .
- (b) Sự xuyễn ngầm của các electron qua một lớp điện môi mỏng ngăn cách hai chất siêu dẫn.
- (c) Hấp thụ vi sóng trong các màng mỏng (ở đây  $\hbar\omega \leq \Delta$ ).
- (e) Làm suy giảm các sóng âm tại  $T \ll T_c$ .

(Princeton)

**Lời giải:**

(1) Hiệu ứng Meissner chỉ ra rằng trong một chất siêu dẫn cảm ứng từ bằng không và vật liệu trở thành một chất nghịch từ mạnh. Từ phương trình London

$$\mathbf{j}_s = -\frac{n_s e^2}{m_e c} \mathbf{A} = -\frac{1}{c\lambda^2} \mathbf{A},$$

với  $\lambda^2 = \frac{m_e}{n_s e^2}$ , suy ra

$$\nabla \times \mathbf{j}_s = -\frac{1}{c\lambda^2} \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{1}{c\lambda^2} \mathbf{B}.$$

Trong một chất siêu dẫn điện trường bằng không và ta có phương trình Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_s.$$

Do vậy

$$\mathbf{B} = -c\lambda^2 \nabla \times \mathbf{j}_s = -\frac{c^2 \lambda^2}{4\pi} [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B}].$$

Hoặc sử dụng phương trình Maxwell  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , ta được

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{\Lambda^2} \mathbf{B},$$

ở đây

$$\Lambda = \left( \frac{c^2}{4\pi} \lambda^2 \right)^{1/2} = \left( \frac{m_e c^2}{4\pi n_s e^2} \right)^{1/2}.$$

Gọi  $x$  là độ sâu tính từ bề mặt của chất siêu dẫn, thì

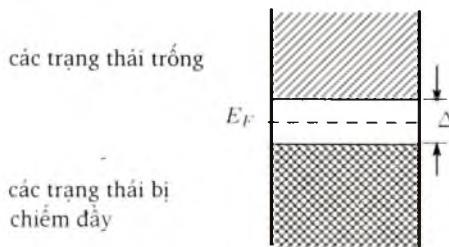
$$\frac{d^2 \mathbf{B}}{dx^2} = \frac{\mathbf{B}}{\Lambda^2}.$$

suy ra

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{-\frac{x}{\Lambda}}.$$

Điều này cho thấy rằng  $\mathbf{B}$  suy giảm theo hàm mũ,  $B = \frac{1}{e} B_0$  tại  $x = \Lambda$ .  $\Lambda$  là độ xuyễn sâu London. Đối với phần lớn các kim loại thể hiện tính siêu dẫn, độ xuyễn sâu ở trong khoảng  $10^{-8}\text{--}10^{-7}$  m. Với  $x \gg \Lambda$ ,  $\mathbf{B} \rightarrow 0$ , cho thấy từ trường chỉ tồn tại trong bề dày  $\approx \Lambda$  dưới bề mặt của chất siêu dẫn. Như vậy từ trường bên trong một chất siêu dẫn bằng không. Đây chính là hiệu ứng Meissner.

(2) Sự suy giảm theo hàm mũ của nhiệt dung riêng theo nhiệt độ đối với một chất siêu dẫn tại các giá trị nhiệt độ thấp phản ánh sự tồn tại của một khe năng lượng  $\Delta$ , với mức năng Fermi nằm ở giữa trạng thái cơ bản và trạng thái kích thích thấp nhất như chỉ ra trên hình 1.44. Hai thí nghiệm có thể sử dụng để xác định độ lớn của  $\Delta$ . Các thí nghiệm đó được mô tả như sau.



Hình 1.44

(a) Các phép đo nhiệt dung riêng tại  $T \ll T_c$ . Đối với  $T \ll T_c$ , nhiệt dung riêng của hệ được biểu diễn như sau

$$C_S \approx \frac{A}{T} \exp\left(-\frac{\Delta}{k_B T}\right),$$

ở đây  $A$  là một hằng số. Với  $T \approx T_c$  ta tìm được bằng thực nghiệm

$$C_S = a \exp\left(-\frac{b}{t}\right),$$

với  $t = \frac{T}{T_c}$  và  $a$  là một hằng số. So sánh các biểu thức trên ta thu được

$$\frac{b}{t} = \frac{\Delta}{k_B T},$$

hay

$$\Delta = b k_B T_c = 1,52 k_B T_c .$$

ở đây đã sử dụng giá trị  $b$  xác định được từ thực nghiệm.

(b) Sự suy giảm của các sóng âm ở trạng thái siêu dẫn khác với sự suy giảm đó ở trạng thái thường. Lý thuyết chỉ ra rằng

$$\frac{\alpha_S}{\alpha_N} = \frac{2}{\exp\left(\frac{\Delta}{k_B T}\right) + 1} .$$

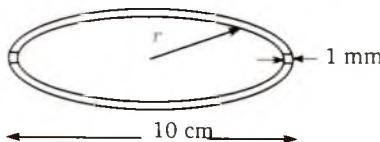
ở đây  $\alpha_S$  và  $\alpha_N$  là các hệ số suy giảm đối với trạng thái siêu dẫn và trạng thái thường. Như vậy sử dụng tỷ số  $\frac{\alpha_S}{\alpha_N}$  xác định từ thực nghiệm ta có thể xác định được  $\Delta$ .

### 1076

Một vòng dây làm từ một sợi vật liệu chì đường kính 1 mm được uốn thành hình tròn đường kính 10 cm như chỉ ra trên hình 1.45. Vòng dây ở trạng thái siêu dẫn và mang một dòng điện 100 A chạy trong nó. Người ta quan sát thấy dòng điện không thay đổi trong vòng 10 năm. Nếu bộ phận kiểm tra dòng điện có độ nhạy 1  $\mu$ A, hãy tính giới hạn trên (thực nghiệm) của điện trở suất của chì ở trạng thái siêu dẫn.

Lưu ý: Đáp số được phép sai số trong khoảng hệ số 3.

(Chicago)



Hình 1.45

Lời giải:

Đặt  $\rho$  là điện trở suất của chì. Vậy thì điện trở của vòng dây là  $R = \rho \frac{l}{S}$ , ở đây  $l = 2\pi r$ ,  $S$  là diện tích thiết diện ngang của dây chì. Vòng dây có thể được xem như là một mạch  $RL$ , do đó

$$-L \frac{dI}{dt} = IR .$$

hay

$$I(t) = I(0)e^{-Rt/L}$$

tức là

$$R = \frac{L}{t} \ln \frac{I(0)}{I(t)}.$$

Độ tự cảm  $L$  được tính bằng từ thông  $\Phi$  và dòng điện  $I$  được tính từ biểu thức  $L = \Phi/I$ , như vậy

$$I(0) = 100 \text{ A}, \quad I(t) = 100 - 10^{-6} \text{ A}.$$

Sự phân bố từ trường trong sợi dây khá phức tạp, nhưng để đánh giá sơ bộ ta có thể coi gần đúng từ trường bên trong dây như là một từ trường đều có độ lớn bằng từ trường tại tâm của vòng dây. Như vậy

$$\Phi = \pi r^2 B = \pi r^2 \cdot \frac{\mu_0 I}{2r} = \frac{1}{2} \pi \mu_0 r I$$

và

$$L = \frac{1}{2} \pi \mu_0 r.$$

Do  $I(t) \approx I(0)$ ,  $\frac{Rt}{L} \ll 1$ . Nên

$$\begin{aligned} \Delta I &= I(0) - I(t) \approx \frac{I_0 R t}{L}, \\ \ln \frac{I(0)}{I(t)} &= \ln \left[ 1 + \frac{\Delta I}{I(0)} \right] \approx \frac{\Delta I}{I(0)} \approx 10^{-8}, \\ R &\approx \frac{\pi \mu_0 r}{2t} \left[ \frac{\Delta I}{I(0)} \right] = \frac{\pi}{2} \times \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 5 \times 10^{-2}}{365 \times 24 \times 3600} \times 10^{-8} \\ &= 3.13 \times 10^{-23} \Omega. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\rho = \frac{SR}{2\pi r} = \frac{\pi \times (0.5 \times 10^{-3})^2 \times 3.13 \times 10^{-23}}{2\pi \times 5 \times 10^{-2}} = 7.8 \times 10^{-29} \Omega \text{m}.$$

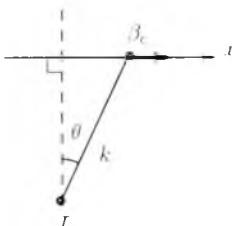
#### 1.4. CÁC CHỦ ĐỀ KHÁC (1077-1081)

1077

Kỹ thuật quan trọng hiện nay để đo chính xác thời gian sống của các trạng thái trong các nguyên tử bị ion hóa nhiều lần là kích thích chùm ion đó bằng

một tia laser có bước sóng được điều chỉnh bằng bước sóng cộng hưởng của ion và do cường độ phát xạ từ chùm ion như một hàm của khoảng cách dịch chuyển của chùm ion đó. Khi một chùm ion cho trước với bước sóng cộng hưởng  $4885 \text{ \AA}$  bị kích thích bởi một nguồn laser Argon  $4880 \text{ \AA}$ , thi cường độ phát xạ bị giảm đi một nửa sau khi chùm ion dịch chuyển di  $10 \text{ mm}$  kể từ thời điểm kích thích. Nếu vận tốc chùm ion là  $v/c = 5 \times 10^{-3}$ , hãy tính góc mà tia laser phải lập với phương vuông góc với chùm ion để đạt được hiện tượng cộng hưởng và thời gian sống của trạng thái kích thích của ion.

(Wisconsin)



Hình 1.46

### Lời giải:

Dùng hai hệ tọa độ  $\Sigma'$ ,  $\Sigma$  là hệ tọa độ phòng thí nghiệm trong đó nguồn laser  $L$  đặt cố định tại một vị trí và các ion di chuyển với vận tốc  $\beta c$  theo trục  $x$  như chỉ ra trên hình 1.46.  $\Sigma'$  là hệ tọa độ gắn với một ion trong chùm và di chuyển với vận tốc  $\beta c$  đối với  $\Sigma$  theo phương  $x$ . Xét sự biến đổi của vectơ 4 chiều ( $k, \frac{\omega'}{c}$ ). Ta có

$$\frac{\omega'}{c} = \gamma \left( \frac{\omega}{c} - \beta k \sin \theta \right).$$

ở đây  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$ ,  $k = \frac{z}{c}$ . Do vậy

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{1}{\beta} \left( 1 - \frac{\lambda}{\lambda'} \sqrt{1 - \beta^2} \right) \\ &\approx \frac{1}{\beta} \left[ 1 - \frac{\lambda}{\lambda'} \left( 1 - \frac{\beta^2}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Với  $\lambda = 4885 \text{ \AA}$ ,  $\lambda' = 4880 \text{ \AA}$ ,  $\beta = 5 \times 10^{-3}$ , ta tính được

$$\sin \theta = 0.2074. \quad \text{hoặc} \quad \theta = 11.97^\circ.$$

Khi các ion bị kích thích di chuyển với vận tốc  $\beta c$ , nếu tính đến sự giãn nở thời gian thì thời gian sống xác định hệ phòng thí nghiệm của một ion bằng

$\gamma\tau$ , ở đây  $\tau$  là một thời gian sóng riêng. Như vậy chùm ion bị kích thích sẽ suy giảm theo

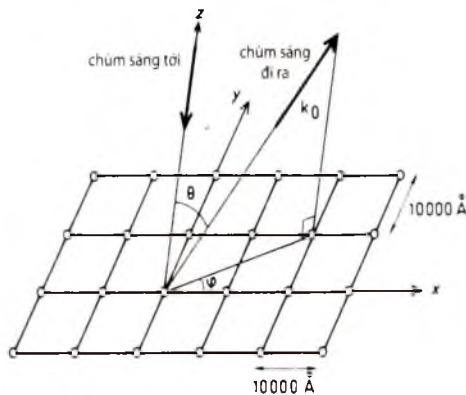
$$I = I_0 \exp\left(-\frac{t}{\gamma\tau}\right),$$

suy ra

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{t}{\gamma \ln\left(\frac{I_0}{I}\right)} = \frac{x}{\gamma\beta c \ln\left(\frac{I_0}{I}\right)} \\ &\approx \left(1 - \frac{\beta^2}{2}\right) \frac{x}{\beta c \ln\left(\frac{I_0}{I}\right)} = 9,6 \times 10^{-9} \text{ s}. \end{aligned}$$

### 1078

Các quả cầu nhỏ lì ti làm bằng một vật liệu phản xạ nổi trên mặt của một vật liệu trong suốt. Hãy bắt đầu bằng giả thiết rằng các quả cầu này tạo nên một mạng vuông hoàn hảo với hằng số mạng  $10.000 \text{ \AA}$  như được minh họa trên hình 1.47. Một chùm ánh sáng kết hợp chiếu thẳng vào bề mặt này. Ánh sáng có bước sóng bằng  $5000 \text{ \AA}$ .



Hình 1.47

(a) Tại góc  $(\theta, \phi)$  bằng bao nhiêu thì ta sẽ nhìn thấy ánh sáng đi ra từ vật liệu nếu ta đứng ở phía sau bề mặt.

(b) Nếu tia tới rộng vô hạn và được chuẩn trực hoàn hảo và nếu mang rộng vô hạn thì chùm sáng phản xạ tất nhiên cũng đi ra theo các hướng hoàn toàn chính xác. Nếu ta có một màn chắn nằm ngang ở bên trên và cách bề mặt vật liệu 10 m thì trên màn chắn đó sẽ xuất hiện các vết rất sắc nét. Tuy nhiên nếu mang là hình vuông và chỉ chứa 10.000 quả cầu thì độ rộng của các vết trên màn sẽ bằng bao nhiêu? (Chỉ cần đánh giá bậc độ lớn nhưng phải đưa ra lý giải cụ thể.)

(c) Bây giờ giả thiết rằng mỗi một quả cầu được giữ tại vị trí của nó trong mang bởi các lực dưới dạng các lò xo rất nhỏ. Mỗi một quả cầu dao động độc lập lên xuống quanh vị trí gốc một cách ngẫu nhiên với độ dịch chuyển bình phương trung bình khoảng 2000 Å. Chuyển động này sẽ làm thay đổi bức tranh của ánh sáng phản xạ như thế nào so với trường hợp các quả cầu đứng yên tại các vị trí mang? Việc so sánh phân bố cường độ chùm sáng phản xạ trong hai trường hợp các quả cầu "chuyển động" và "đứng yên" có thể cho ta biết phương dịch chuyển của các quả cầu là theo phương ngang hay theo phương thẳng đứng không? Ta có thể phân biệt hai trường hợp này như thế nào?

(Chicago)

### Lời giải:

(a) Phương của chùm sáng đi ra là phương của một cực đại giao thoa của ánh sáng phản xạ. Đặt vectơ đơn vị của hướng cực đại nhiễu xạ là

$$\mathbf{k}_0 = \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z .$$

Mặt phẳng đi qua điểm gốc có vectơ pháp tuyến đơn vị là  $\mathbf{k}_0$  được xác định bởi phương trình

$$\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} = 0 ,$$

với  $\mathbf{r}$  là một vectơ bất kỳ nằm trong mặt phẳng đó. Nếu  $\mathbf{R}$  là vectơ bán kính của một điểm trên mặt phẳng  $xy$ , thì khoảng cách từ điểm đó tới mặt phẳng này là  $d_A = \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{R}$ . Do đó đối với các điểm mang  $A(d, 0, 0)$ ,  $B(0, d, 0)$ ,  $C(d, d, 0)$ , như trên hình 1.48, với  $d$  là chiều dài của một ô đơn vị, ta có

$$d_A = d \sin \theta \cos \varphi ,$$

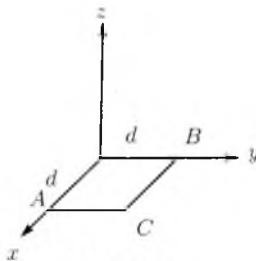
$$d_B = d \sin \theta \sin \varphi ,$$

$$d_C = d \sin \theta (\cos \varphi + \sin \varphi) .$$

Các điều kiện để  $\mathbf{k}_0$  là một hướng cực đại giao thoa là

$$d_A = n_1 \lambda_0, \quad d_B = n_2 \lambda_0, \quad d_C = n_3 \lambda_0 .$$

ở đây  $n_1, n_2, n_3$  là các số nguyên, và  $\lambda_0$  là bước sóng của ánh sáng tới. Chú ý rằng do  $d_C = d_A + d_B$ , nên điều kiện cuối cùng đã được bao hàm trong hai điều kiện đầu.



Hình 1.48

Dựa trên tính đối xứng tịnh tiến của mạng, các khoảng cách từ mặt phẳng này đến các nút mạng khác cũng là một số nguyên lần của bước sóng. Vì

$$\tan \varphi = \frac{n_2}{n_1}, \quad d^2 \sin^2 \theta = (n_1^2 + n_2^2) \lambda_0^2$$

ta có

$$\begin{aligned} \theta &= \arcsin \left( \sqrt{n_1^2 + n_2^2} \frac{\lambda_0}{d} \right), & \text{hoặc} & \theta = \pi - \arcsin \left( \sqrt{n_1^2 + n_2^2} \frac{\lambda_0}{d} \right), \\ \varphi &= \arctan \frac{n_2}{n_1}, & \text{hoặc} & \varphi = \pi + \arctan \frac{n_2}{n_1}. \end{aligned}$$

(b) Cạnh hình vuông chứa 10.000 quả cầu bằng 100 d. Bây giờ chùm sáng đi qua mạng hình vuông này sẽ gây ra nhiễu xạ và chiều rộng của các vết trên màn là

$$\Delta x = \Delta y \approx \frac{\lambda}{100d} \times D = \frac{5000}{100 \times 10000} \times 10 = 0.05 \text{ m}$$

$D$  là khoảng cách giữa màn và mạng hình vuông.

(c) Dao động của các quả cầu sẽ làm cho các vết sắc nét ban đầu bị nhòe đi thành các điểm lớn hơn hoặc cũng có thể tạo nên một nền sáng không có các vết nào.

Nếu chuyển động của các quả cầu theo phương ngang thì pha của ánh sáng dọc theo phương  $z$  sẽ ít bị ảnh hưởng. Vậy bức tranh giao thoa thu được sẽ có dạng các vết tại tâm sẽ sáng hơn và nhòe hơn trên một nền tối hơn, trong

khi các vết ở gần các biên mạng sẽ mờ hơn và lớn hơn và trên một nền sáng hơn. Nếu chuyển động của các quả cầu theo phương thẳng đứng thì pha của ánh sáng theo phương  $z$  sẽ bị ảnh hưởng nhiều hơn dẫn đến các ảnh hưởng đối với các vết và ánh sáng nền sẽ ngược lại so với trường hợp trước.

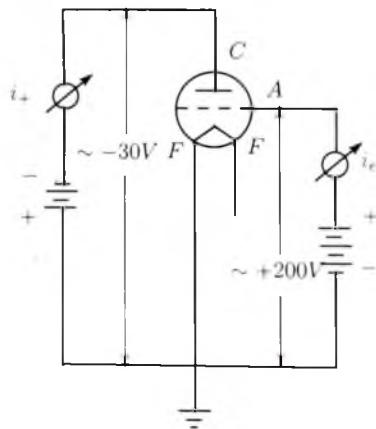
1079

Mô tả ngắn gọn các bộ phận cơ bản và nguyên lý hoạt động của một đầu do ion hóa catôt nóng dùng để đo áp suất trong hệ chân không. Phát biểu gần đúng các giới hạn áp suất cao và thấp của đầu do và các yếu tố xác định nên các giới hạn này.

(Wisconsin )

**Lời giải:**

Một đầu do ion hóa catôt nóng gồm một cực catôt F, một bộ phận gia tốc A và một cực collector C như chỉ ra trên hình 1.49 cùng với một mạch điện thông thường để giúp nó hoạt động.



Hình 1.49

Sợi đốt catôt, được đốt nóng bằng một dòng điện, phát ra electron di chuyển về phía bộ phận gia tốc A được duy trì ở một điện thế dương. Một số electron bị A hấp thụ trong khi các electron khác đi qua các khe lưới của bộ phận gia tốc về phía collector C được giữ ở một điện thế âm. C sẽ đẩy các

électron khi chúng tiến lại gần. Như vậy các électron sẽ dao động giữa C và A cho đến khi chúng bị A hấp thụ. Trong quá trình dao động như vậy các va chạm thường xuyên với các phân tử khí trong ống tạo ra các ion dương và các électron.

Các ion dương bị collector C thu lại tạo nên một dòng ion  $i_+$ , và các électron bị bộ phận gia tốc thu lại tạo nên một dòng điện  $i_e$ . Lý thuyết chỉ ra rằng áp suất  $p$  trong ống có thể được biểu diễn bởi hệ thức

$$p = K \frac{i_+}{i_e},$$

ở đây  $K$  là một hằng số. Nếu  $i_e$  được giữ không đổi thì

$$p = K_1 i_+,$$

cho phép ta xác định được áp suất trong một hệ chân không bằng cách đo dòng ion  $i_+$ .

Giới hạn áp suất cao của dầu do khoảng  $10^{-3}$  tor. Khi  $p > 10^{-3}$  tor, sợi đốt của catôt dễ bị cháy; hơn nữa,  $i_+$  không tăng lên theo  $p$ , do hiệu ứng làm sạch hóa học của lá catôt nóng, nó sẽ hoạt động như là một chất hấp thụ khí. Giới hạn áp suất thấp là khoảng  $10^{-7}$  tor, dưới giá trị áp suất này dòng điện tập trung ở collector chủ yếu là dòng phát xạ quang; chỉ một phần nhỏ của nó là dòng ion dẫn đến áp suất  $p$  không biến đổi tuyến tính với  $i_+$  nữa.

## 1080

Thảo luận ngắn gọn những vấn đề sau:

(a) Quá trình umklapp và mối liên hệ của nó với độ dẫn nhiệt của một mạng tinh thể.

(b) Cặp Cooper và mối liên hệ của nó với sự nhòe của mặt Fermi và các hàm sóng ở trạng thái cơ bản trong lý thuyết BSC về siêu dẫn.

(c) Định lý Bloch và mối liên hệ của nó với tính đối xứng của mạng tinh thể.

(d) Các yếu tố cơ bản của lý thuyết Landau về các chất lỏng Fermi của các électron trong các kim loại.

(SUNY, Buffalo)

Lời giải:

(a) Giả thiết hai phonon có các vectơ sóng  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$  va chạm và tạo ra một phonon có vectơ sóng  $\mathbf{q}_3$ . Theo định luật bảo toàn xung lượng  $\mathbf{q}_3 = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2$ .

Nếu  $\mathbf{q}_3$  thu được nằm bên trong vùng Brillouin (BZ) thì quá trình này gọi là quá trình tương tác thông thường. Nếu  $\mathbf{q}_3$  nằm ngoài BZ thì phonon thứ ba có một vectơ hiệu dụng  $\mathbf{q}_1$  nằm trong vùng BZ được xác định bởi  $\mathbf{q}_3 = \mathbf{q}_1 + \mathbf{G}$ , ở đây  $\mathbf{G}$  là một vectơ mạng đảo thích hợp.  $\mathbf{q}_1$  sẽ có hướng hâu như ngược lại với hướng của một trong hai vectơ  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ , độ biến thiên về xung lượng sẽ được truyền cho khối tâm của mạng. Quá trình như vậy được gọi là quá trình umklapp. Nó chỉ có tác dụng ở các nhiệt độ cao khi có nhiều phonon ở gần các biên của BZ bị kích thích.

Quá trình umklapp rất hiệu quả trong việc làm thay đổi xung lượng của một phonon và quyết định đến quãng đường tự do trung bình của phonon đó tại các nhiệt độ cao. Chính quá trình umklapp chứ không phải là quá trình thường dẫn đến sự xuất hiện nhiệt trở trong mạng tinh thể. Đôi với quá trình bình thường, nếu xung lượng ban đầu của tinh thể khác không thì có thể tạo ra được một dòng nhiệt ổn định mặc dù ban đầu có thể không có gradien nhiệt độ, dẫn đến độ dẫn nhiệt là vô hạn. Bởi vậy độ dẫn nhiệt hữu hạn được gây bởi quá trình umklapp.

(b) Đôi với hai electron nằm ngay bên dưới bì mặt Fermi, lực đẩy Coulomb giữa chúng bị giảm đi đáng kể do sự chấn của của các electron khác trong mặt cầu Fermi. Do vậy, thông qua trao đổi các phonon chúng có thể hút nhau và tạo nên một trạng thái liên kết được gọi là cặp Cooper. Năng lượng liên kết là mạnh nhất khi các electron hình thành nên cặp có các xung lượng ngược nhau và các spin cũng ngược nhau,  $\mathbf{k} \uparrow, -\mathbf{k} \downarrow$ . Sự hình thành các cặp Cooper tạo ra một khe năng lượng trong phổ của các electron làm mở rộng mức năng lượng Fermi. Như vậy mặt Fermi sẽ bị nhòe đi.

Trong lý thuyết BCS trạng thái cơ bản được xác định theo cách là nếu trạng thái  $\mathbf{k} \uparrow$  bị chiếm thì trạng thái  $-\mathbf{k} \downarrow$  cũng bị chiếm và nếu trạng thái  $\mathbf{k} \uparrow$  không bị chiếm thì trạng thái  $-\mathbf{k} \downarrow$  cũng vậy. Như thế thì nếu  $\psi_{1\mathbf{k}}$  là ký hiệu của trạng thái  $(\mathbf{k} \uparrow, -\mathbf{k} \downarrow)$  bị chiếm bởi hai electron, và  $\psi_{2\mathbf{k}}$  là ký hiệu của trạng thái  $(\mathbf{k} \uparrow, -\mathbf{k} \downarrow)$ , không bị chiếm với các xác suất lần lượt là  $u_{\mathbf{k}}^2, v_{\mathbf{k}}^2$  thì hàm sóng ở trạng thái cơ bản trong lý thuyết BCS là

$$\psi = u_{\mathbf{k}}\psi_{1\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}}\psi_{2\mathbf{k}}.$$

(c) Định lý Bloch áp dụng cho hàm sóng của một electron chuyển động trong một tinh thể rắn trong đó thể năng của chúng là tuần hoàn

$$V(\mathbf{r} + \mathbf{R}) = V(\mathbf{r}).$$

$\mathbf{R}$  là một vectơ mạng tức là thể năng có cùng tính đối xứng tinh tiến như của mạng. Chuyển động của các electron được mô tả bằng phương trình

Schrödinger

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) .$$

Định lý Bloch phát biểu rằng nghiệm  $\psi(\mathbf{r})$ , là hàm sóng của electron có dạng

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) .$$

ở đây hàm  $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$  có cùng tính đối xứng tịnh tiến như của mạng

$$u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r} + \mathbf{R}) = u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) .$$

và vectơ  $\mathbf{k}$  được liên hệ với xung lượng  $\mathbf{p}$  của điện tử thông qua biểu thức  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ .

Định lý Bloch là một hệ quả của tính đối xứng tịnh tiến của mạng tinh thể. Nghiệm của phương trình Schrödinger luôn có thể được viết dưới dạng

$$\psi(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})u(\mathbf{r}) ,$$

trong đó  $u(\mathbf{r})$  có tính đối xứng của mạng. Do thế năng  $V(\mathbf{r})$  là tuần hoàn, tất cả các đại lượng quan sát được liên quan đến electron cũng phải có tính tuần hoàn, đặc biệt là mật độ xác suất  $|\psi(\mathbf{r})|^2$ . Do vậy

$$|f(\mathbf{r} + \mathbf{R})|^2 = |f(\mathbf{r})|^2 .$$

Hàm duy nhất thỏa mãn hệ thức này cho tất cả các giá trị của  $\mathbf{R}$  có dạng hàm mũ  $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ , như yêu cầu của định lý Bloch.

(d) Trong một hệ electron dẫn, các electron tương tác với nhau qua trường thê tĩnh điện, trong khi đó một electron di chuyển cũng gây ra một phản lực quán tính lên khí electron xung quanh làm cho khối lượng hiệu dụng của electron tăng lên. Khi tương tác này được tính đến, hệ electron này được gọi là một chất lỏng Fermi. Về cơ bản, lý thuyết Landau cho ta một giải thích thống nhất cho các hiệu ứng của các tương tác đó.

1081

Đối với mỗi một câu dưới đây hãy mô tả hiện tượng tương ứng bằng một câu phát biểu (không cần đưa ra lời giải thích).

- (a) Hiệu ứng Raman
- (b) Hiệu ứng Ramsauer
- (c) Hiệu ứng Kerr

- (d) Hiệu ứng Faraday
- (e) Hiệu ứng Paschen-Back

(Wisconsin)

**Lời giải:**

- (a) Một phonon bị tán xạ không dàn hồi bởi một tinh thể kèm theo sự sinh ra hoặc huỷ một phonon hoặc magnon.
- (b) Quãng đường tự do trung bình của các electron có năng lượng thấp sẽ tăng lên trong một môi trường khí tro.
- (c) Một số chất trong suốt có chiết suất tăng lên gấp đôi khi tác dụng một điện trường vuông góc với hướng truyền của ánh sáng tới.
- (d) Mặt phẳng phân cực của ánh sáng phân cực thẳng bị quay đi khi nó đi vào một số chất trong suốt được đặt trong một từ trường song song với phương truyền của ánh sáng.
- (e) Khi một nguồn sáng được đặt trong một từ trường mạnh, ta thấy vạch phổ bị tách ra làm hai vạch khi quan sát theo hướng của từ trường, và bị tách ra thành ba vạch khi quan sát theo hướng vuông góc với từ trường.

## **PHẦN II**

### **THUYẾT TƯƠNG ĐỐI**



## 2.1. THUYẾT TƯƠNG ĐỐI HEP (2001-2007)

2001

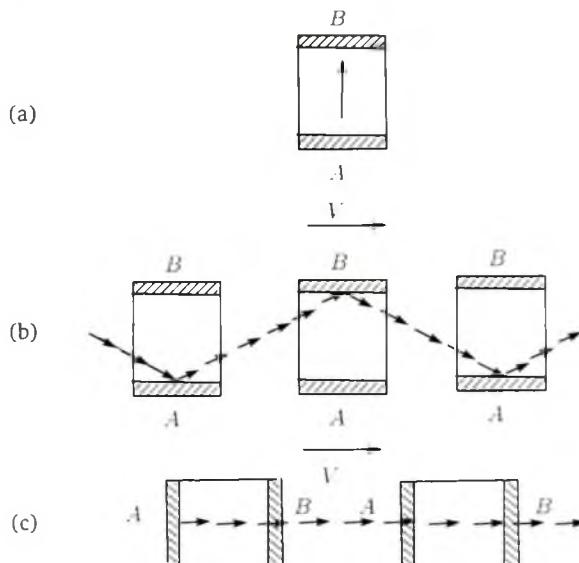
Trong bài tập này các bạn phải rút ra một số khía cạnh của các phép biến đổi Lorentz bằng cách sử dụng các thí nghiệm tưởng tượng do Einstein nghĩ ra. Các thí nghiệm tưởng tượng của Einstein đều sử dụng một chiếc đồng hồ lý tưởng (Hình 2.1.(a)) trong đó một sóng ánh sáng (hoặc là một hạt có khối lượng) phản xạ qua lại giữa hai gương. Đồng hồ sẽ kêu một tiếng “tích” khi sóng ánh sáng đi được một vòng từ gương A đến gương B rồi quay lại gương A.

(a) Hãy suy ra các công thức giãn nở thời gian của thuyết tương đối hẹp theo cách sau. Giả thiết rằng ánh sáng đều có vận tốc  $c$  trong mọi hệ quy chiếu, đồng hồ sẽ kêu “tích” chậm bao nhiêu trong hệ quy chiếu (Hình 2.1.(b)) khi hệ này chuyển động với vận tốc  $V$  theo phương vuông góc với phương ngắn cách giữa hai gương so với trường hợp phương đứng yên.

(b) Theo thuyết tương đối hep, hệ số giãn nở thời gian là như nhau đối với tất cả các đồng hồ có một vận tốc cho trước, không phụ thuộc vào việc chúng hoạt động thế nào. Giả thiết rằng trong chiếc đồng hồ của Einstein một hạt có khối lượng chứ không phải là một photon phản xạ qua lại giữa hai gương. Trong hệ quy chiếu mà đồng hồ đứng yên, hạt này có vận tốc là  $v < c$ . Hãy suy ra định luật biến đổi Lorentz cho các vận tốc như mô tả sau đây. Vận tốc của hạt sẽ phải bằng bao nhiêu trong hệ quy chiếu được xét ở câu (a) nếu đòi hỏi rằng đồng hồ khi hoạt động với sự tham gia của hạt nặng trong hệ quy chiếu này sẽ phát tiếng “tích” chậm hơn so với khi hoạt động trong hệ quy chiếu mà nó đứng yên với hệ số giãn nở thời gian đúng bằng với hệ số giãn nở suy ra từ câu (a)?

(c) Suy ra định luật co Lorentz đối với chiều dài. Lại giả thiết rằng đồng hồ được hoạt động với photon có vận tốc  $c$ , nhưng giả thiết đồng hồ bị quay đi  $90^\circ$  như được mô tả trên hình 2.1(c) trước khi cho nó chuyển động với vận tốc  $V$  song song với phương định hướng của các gương. Đồng hồ sẽ bị ngắn đi bao nhiêu trong hệ quy chiếu mà nó chuyển động so với trong hệ quy chiếu mà nó đứng yên sao cho tiếng tích bị chậm lại với cùng một hệ số giãn nở thời gian như đã được suy ra trong câu (a).

(Princeton )



Hình 2.1

**Lời giải:**

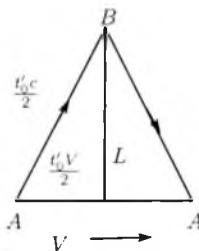
(a) Giả thiết các gương A và B được cách nhau một đoạn  $L$  trong hệ quy chiếu đồng hồ đứng yên. Trong hệ quy chiếu đó một sóng ánh sáng sẽ mất một thời gian  $t_0 = \frac{2L}{c}$  để thực hiện một vòng di chuyển A → B → A. Đó là khoảng thời gian riêng giữa hai tiếng "tích" kế tiếp nhau của đồng hồ. Đặt  $t'_0$  là khoảng thời gian giữa hai tiếng "tích" kế tiếp nhau của chiếc đồng hồ trong hệ quy chiếu mà hai gương của nó di chuyển với vận tốc  $V$  như chỉ ra trên hình 2.1(b). Chú ý rằng khi ánh sáng di chuyển tới dập vào gương B thì gương này đã di được một đoạn  $\frac{1}{2}V$ . Như chỉ ra trên hình 2.2, do vận tốc ánh sáng bằng  $c$  theo mọi hướng, nên ta có

$$L^2 + \left(\frac{t'_0 V}{2}\right)^2 = \left(\frac{t'_0}{2} c\right)^2$$

hay

$$t'_0 = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - V^2}} = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} t_0$$

Do vậy tiếng "tích" của dòng hồ trong hệ quy chiếu mà dòng hồ dịch chuyển với vận tốc  $V$  theo hướng vuông góc với phương ngang cách giữa hai gương sẽ chậm hơn bởi một thừa số bằng  $(1 - \frac{V^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}}$ .



Hình 2.2

(b) Ánh sáng bây giờ được thay bởi một hạt có khối lượng chuyển động với vận tốc  $v$  trong hệ quy chiếu mà dòng hồ đứng yên. Khoảng thời gian riêng giữa hai tiếng "tích" kề nhau là  $t = \frac{2L}{v}$ . Giả thiết rằng vận tốc của hạt trong hệ quy chiếu mà dòng hồ chuyển động với vận tốc  $V$ , như trong câu (a) là  $v'$  theo phương nó dập vào  $B$ . Ta có

$$L^2 + \left(\frac{t'V}{2}\right)^2 = \left(\frac{t'v'}{2}\right)^2,$$

hay

$$t' = \frac{2L}{\sqrt{v'^2 - V^2}} = \frac{t}{\sqrt{\left(\frac{v'}{v}\right)^2 - \left(\frac{V}{v}\right)^2}}$$

ở đây  $t'$  là khoảng thời gian giữa hai tiếng "tích" kề nhau trong hệ quy chiếu mà dòng hồ chuyển động. Ta cần có

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{v'}{v}\right)^2 - \left(\frac{V}{v}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}.$$

dẫn đến

$$v' = \sqrt{v^2 + \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)V^2}.$$

(c) Giả thiết các gương A và B cách nhau một khoảng  $L'$  trong hệ quy chiếu mà dòng hồ chuyển động. Sau khi rời A, giả thiết sóng ánh sáng tiến tới B tại

thời điểm  $t'_1$ . Vì B đã di dược một khoảng  $Vt'_1$ , ta có

$$L' + Vt'_1 = ct'_1 ,$$

hay

$$t'_1 = \frac{L'}{c - V} .$$

Giả thiết ánh sáng sau khi phản xạ tại B cần thời gian  $t'_2$  để quay về A, với cùng một lý luận như trên ta có

$$L' + Vt'_1 - V(t'_1 + t'_2) = ct'_2 ,$$

hay

$$t'_2 = \frac{L'}{c + V} .$$

Do vậy khoảng thời gian giữa hai tiếng "tích" kề nhau trong một hệ quy chiếu mà đồng hồ chuyển động là

$$t'_0 = t'_1 + t'_2 = \frac{2L'}{c\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)} = \left(\frac{L'}{L}\right) \frac{t_0}{1 - \frac{V^2}{c^2}} .$$

Ta cần có

$$\left(\frac{L'}{L}\right) \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} ,$$

dẫn đến

$$L' = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2} L .$$

## 2002

(a) Một hạt muon ở trạng thái nghỉ có thời gian sống là  $10^{-6}$  s, và khối lượng của nó là  $100 \text{ MeV}/c^2$ . Năng lượng của hạt muon phải bằng bao nhiêu để nó đạt tới bề mặt trái đất nếu nó được sinh ra từ lớp khí quyển trên cao (ví dụ từ độ cao  $\sim 10^1$  m)?

(b) Giả thiết rằng ở gần đúng bậc không trái đất có từ trường bằng 1 Gauss và có hướng chỉ theo phương của trục của nó trong phạm vi tới  $10^4$  cm. Một hạt muon có năng lượng  $E$  di tới vuông góc tại đường xích đạo sẽ bị từ trường trái đất làm lệch di như thế nào và theo phương nào?

(c) Các proton năng lượng rất cao trong các tia vũ trụ có thể mất năng lượng do va chạm với bức xạ 3 K (bức xạ nền vũ trụ) trong quá trình  $p + \lambda \rightarrow p + \pi$ . Một proton cần một năng lượng bằng bao nhiêu để đạt trên ngưỡng xảy ra phản ứng này?

(Princeton )

Lời giải:

(a) Một chiếc đồng hồ có vận tốc  $v$  sẽ chậm đi một thừa số  $\gamma = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}}$ . Như vậy một hạt muon sẽ có thời gian sống  $\gamma\tau_0$  trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm, trong đó  $\tau_0$  là thời gian sống khi hạt này đứng yên. Đối với một muon được sinh ra tại độ cao  $h$  với vận tốc  $v$  để đạt tới bề mặt trái đất nó phải có một thời gian sống là

$$\gamma\tau_0 = \frac{h}{v},$$

suy ra

$$\gamma v = c\sqrt{\gamma^2 - 1} = \frac{h}{\tau_0}.$$

Do vậy hạt muon đó với khối lượng nghỉ là  $m$  phải có một năng lượng tổng bằng

$$\begin{aligned} m\gamma c^2 &= mc^2 \sqrt{\left(\frac{h}{\tau_0 c}\right)^2 + 1} \approx \frac{mc^2 h}{\tau_0 c} \\ &= \frac{100 \times 10^4}{10^{-6} \times 3 \times 10^8} = 3,3 \times 10^3 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

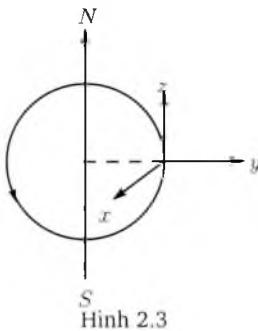
(b) Giả thiết hạt muon có khối lượng nghỉ là  $m$ , điện tích  $q$  và vận tốc  $v$ . Nó chịu tác dụng của lực trọng trường và lực này có thể bỏ qua, và lực từ  $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ . Vì từ lực không sinh công trên hạt muon do  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = 0$ , nên năng lượng muon  $E = m\gamma c^2$  là một hằng số. Từ đó cũng suy ra rằng độ lớn của vận tốc  $v$  và xung lượng  $\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}$ , với  $\gamma$  là thừa số Lorentz  $(1 - \frac{v^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}}$  là một hằng số.

Đặt hệ tọa độ Đê-các như trong hình 2.3 với gốc trên mặt đất, trục  $y$  hướng thẳng đứng lên trên, trục  $z$  chỉ về hướng bắc và trục  $x$  chỉ về hướng tây. Với  $\mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ ,  $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ , phương trình chuyển động trong hệ SI

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\gamma \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

có thể được viết lại thành

$$\ddot{x} = \omega\dot{y}, \quad \ddot{y} = -\omega\dot{x}, \quad \ddot{z} = 0$$



Hình 2.3

với  $\omega = \frac{qB}{m\gamma}$ . Với điều kiện ban đầu là tại  $t = 0$ , khi hạt muon mới đi vào vùng tác dụng của từ trường trái đất,  $x = z = 0$ ,  $y = y_0$ ,  $\dot{x} = \dot{z} = 0$ ,  $\dot{y} = -v$ , nghiệm của phương trình là

$$x = \frac{v}{\omega} \cos(\omega t) - \frac{v}{\omega}, \quad y = y_0 - \frac{v}{\omega} \sin(\omega t), \quad z = 0.$$

Do vậy

$$x = \frac{v}{\omega} \sqrt{1 - \left( \frac{(y - y_0)^2 \omega^2}{v^2} \right)} - \frac{v}{\omega}.$$

Trên mặt đất,  $y = 0$ ,  $x = x_e$  được tính bởi

$$x_e = \frac{v}{\omega} \sqrt{1 - \left( \frac{y_0 \omega}{v} \right)^2} - \frac{v}{\omega}.$$

Ta có  $B = 1$  gauss  $= 10^{-4}$  Wb m $^{-2}$ ,  $|q| = e = 1,6 \times 10^{-19}$  C,

$$\frac{v}{\omega} = \frac{m\gamma v}{qB} = \frac{p}{qB},$$

do vậy nếu  $p$  bằng 1 MeV/c thì

$$\left| \frac{v}{\omega} \right| = \frac{1,6 \times 10^{-19} \times 10^6}{1,6 \times 10^{-23} \times 3 \times 10^8} = \frac{1}{3} \times 10^2 \text{ m.}$$

Như vậy nếu  $p$  lớn hơn, ví dụ 10 MeV/c, ta có thể coi  $\left| \frac{v}{\omega} \right| \gg y_0$  tức là  $\sim 10^2$  m và tính gần đúng

$$\begin{aligned} x_e &\approx \frac{v}{\omega} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{y_0 \omega}{v} \right)^2 \right] - \frac{v}{\omega} \approx \frac{\omega y_0^2}{2v} \\ &= \frac{qB y_0^2}{2p} = \frac{cqB y_0^2}{2\sqrt{E^2 - m^2 c^4}}. \end{aligned}$$

Như vậy góc lệch bằng

$$\alpha = \frac{x_0}{y_0} = \frac{cqBy_0}{2\sqrt{E^2 - m^2c^4}}.$$

Nếu  $E$  có giá trị như trong câu (a),  $3.3 \times 10^3$  MeV, thì

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{cqBy_0}{2E} = \frac{3 \times 10^8 \times 1.6 \times 10^{-19} \times 10^{-4} \times 10^2}{2 \times 3.3 \times 10^9 \times 1.6 \times 10^{-19}} \\ &= 5 \times 10^{-4} \text{ rad} = 1,7' .\end{aligned}$$

Các hạt muon sẽ bị lệch hướng sang phía tây nếu chúng là các muon dương và sẽ bị lệch hướng sang phía đông nếu chúng là các muon âm.

(c) Phần tử đường của vectơ bốn chiều năng-xung lượng,  $E^2 - P^2c^2$  là bất biến đổi với dưới biến đổi Lorentz và vẫn sẽ giữ nguyên là một hằng số trong một phản ứng nếu năng lượng tổng  $E$  và xung lượng tổng  $P$  được bảo toàn. Đặt  $E_p$ ,  $E_\lambda$ ,  $\mathbf{p}_p$ ,  $\mathbf{p}_\lambda$  lần lượt là năng lượng và xung lượng của proton và photon nền. Trước khi va chạm,

$$\begin{aligned}E^2 - P^2c^2 &= (E_p + E_\lambda)^2 - (\mathbf{p}_p + \mathbf{p}_\lambda)^2c^2 \\ &= (E_p^2 - p_p^2c^2) + 2E_pE_\lambda + (E_\lambda^2 - p_\lambda^2c^2) - 2\mathbf{p}_p \cdot \mathbf{p}_\lambda c^2 \\ &= m_p^2c^4 + 2E_pE_\lambda - 2p_p p_\lambda c^2 \cos\theta .\end{aligned}$$

ở đây  $\theta$  là góc giữa  $p_p$  và  $p_\lambda$ ,  $E_p^2 = m^2c^4 + p_p^2c^2$ ,  $E_\lambda = p_\lambda c$ . Tại ngưỡng, proton và pion được sinh ra có vận tốc bằng không trong hệ quy chiếu khối tâm của hệ. Như vậy

$$E^2 - P^2c^2 = (m_p c^2 + m_\pi c^2)^2 .$$

Cân bằng hai biểu thức trên và lấy gần đúng  $E_p \approx p_p c$  đổi với các proton năng lượng cao, ta tìm được

$$E_p \approx \frac{m_\pi(m_\pi + 2m_p)c^4}{2(1 - \cos\theta)E_\lambda} .$$

Năng lượng proton ngưỡng thấp nhất được tính bằng  $\cos\theta = -1$ , hoặc  $\theta = \pi$ , và bằng

$$E_p \approx \frac{m_\pi(m_\pi + 2m_p)c^4}{4E_\lambda} .$$

Năng lượng của một photon nền có thể được lấy gần bằng  $\sim kT$ , ở đây  $k$  là hằng số Boltzmann và  $T = 3$  K. Với  $k = 1.38 \times 10^{-23}$  J K $^{-1}$  =  $8.63 \times 10^{-11}$  MeV K $^{-1}$ ,  $m_\pi = 140$  MeV,  $m_p = 938$  MeV, ngưỡng thấp nhất là

$$E_p \approx \frac{140 \times (140 + 2 \times 938)}{4 \times 8.63 \times 10^{-11} \times 3} = 2,7 \times 10^{14} \text{ MeV} .$$

2003

Một chùm sáng truyền qua một khối thủy tinh với chiết suất  $n$ . Nếu khói thủy tinh đó chuyển động với vận tốc không đổi  $v$  theo cùng chiều với chùm sáng, thì vận tốc của ánh sáng trong khói thủy tinh đo được bởi người quan sát trong phòng thí nghiệm là bao nhiêu?

(MIT)

**Lời giải:**

Trong một hệ quy chiếu gắn với khói thủy tinh, vận tốc ánh sáng trong thủy tinh là

$$u' = \frac{c}{n}$$

Hệ quy chiếu này chuyển động với vận tốc  $v$  đối với hệ quy chiếu phòng thí nghiệm. Theo phép biến đổi vận tốc, vận tốc ánh sáng trong thủy tinh trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm là

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} = \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{(c/n)v}{c^2}} = \frac{c + nv}{n + \frac{v}{c}}$$

2004

Bài toán này là cần được phân tích theo các quan điểm của thuyết tương đối hẹp.

Một người quan sát A đứng yên so với các ngôi sao cố định ở xa thấy các ngôi sao được phân bố đều hướng trong một thiên hà hữu hạn: số các ngôi sao được quan sát thấy trong một phần tử góc khói  $d\Omega$  là  $Pd\Omega = \frac{N}{4\pi} d\Omega$ , ở đây  $N$  là tổng số các ngôi sao mà người A có thể quan sát thấy.

Một người quan sát B khác chuyển động đều theo trục  $z$  so với người A với một vận tốc lớn  $v = \beta c$ . Đặt  $\theta$  và  $\varphi$  lần lượt là góc cực (so với trục  $z$ ) và góc phương vị trong hệ quy chiếu quán tính của người B, và đặt  $P'(\theta', \varphi')d\Omega'$  là số các ngôi sao trong phần tử  $d\Omega' = \sin \theta' d\theta' d\varphi'$  được quan sát bởi người B.

(a) Hãy tính  $P'$  như là hàm của  $\theta', \varphi'$ , giả thiết rằng mỗi một ngôi sao được quan sát bởi A cũng sẽ được quan sát bởi B.

(b) Thảo luận cho trường hợp giới hạn  $\beta \rightarrow 1$  người B có thể thấy gì (1) theo hướng về phía trước và (2) theo hướng về phía sau.

(Princeton)

Lời giải:

(a) Xét sự biến đổi của vectơ truyền bón chiều  $k^\alpha = (k, \frac{\omega}{c})$  của sóng ánh sáng pha tới từ một ngôi sao, ở đây  $|k| \equiv k = \frac{\omega}{c}$ :

$$\begin{aligned} k' \cos \theta' &= \gamma \left( k \cos \theta - \frac{\omega}{c} \beta \right) = \gamma k (\cos \theta - \beta), \\ k' &= \gamma \left( \frac{\omega}{c} - k \beta \cos \theta \right) = \gamma k (1 - \beta \cos \theta). \end{aligned}$$

Từ hai phương trình này suy ra

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta - \beta}{1 - \beta \cos \theta},$$

hay

$$1 + \beta \cos \theta' = \frac{1 - \beta^2}{1 - \beta \cos \theta}.$$

Lấy vi phân ta có

$$\frac{d \cos \theta'}{d \cos \theta} = \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta \cos \theta)^2}.$$

Trong tọa độ cầu

$$d\Omega = \frac{r d\theta \cdot r \sin \theta d\varphi}{r^2} = -d\cos \theta \cdot d\varphi.$$

Do đó

$$d\Omega' = \frac{d \cos \theta'}{d \cos \theta} d\Omega = \frac{(1 - \beta^2)}{(1 - \beta \cos \theta)^2} d\Omega,$$

hay đổi với biến đổi ngược,

$$d\Omega = \frac{(1 - \beta^2)}{(1 + \beta \cos \theta')^2} d\Omega'.$$

Vì các ngôi sao đều có thể được cả hai quan người sát A và B nhìn thấy,

$$P'(\theta', \varphi') d\Omega' = P(\theta, \varphi) d\Omega,$$

và do đó

$$P'(\theta', \varphi') = \frac{N}{4\pi} \frac{d\Omega}{d\Omega'} = \frac{N}{4\pi} \frac{1 - \beta^2}{(1 + \beta \cos \theta')^2}.$$

(b) (1) Để ánh sáng từ ngôi sao theo hướng phía trước của người quan sát đến tới anh ta, nó phải truyền theo chiều  $-z$ . Như vậy  $\theta' = \pi$ , và

$$P'(\theta', \varphi') = \frac{N}{4\pi} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta)^2} = \frac{N}{4\pi} \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \rightarrow \infty$$

khi  $\beta \rightarrow 1$ .

(2) Đối với các ngôi sao ở hướng phía sau của người quan sát,  $\theta' = 0$ , và

$$P'(\theta', \varphi') = \frac{N}{4\pi} \frac{1 - \beta^2}{(1 + \beta)^2} = \frac{N}{4\pi} \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \rightarrow 0$$

khi  $\beta \rightarrow 1$ .

Do vậy các ngôi sao dường như tập trung chủ yếu ở hướng phía trước của người quan sát và không ngôi sao nào ở phía sau có thể quan sát được.

2005

Một người quan sát đứng yên so với các ngôi sao cố định ở xa quan sát các ngôi sao phân bố đẳng hướng,  $dN = \frac{N}{4\pi} d\Omega$  trong góc khối  $d\Omega$  bất kỳ. Xét một người quan sát khác chuyển động với vận tốc  $a$  không đổi (đối với hệ quy chiếu quán tính tức thời của anh ta). Nếu anh ta bắt đầu ở trạng thái nghỉ  $t = 0$  so với người quan sát đứng yên, hãy xác định sự phân bố của các ngôi sao  $dN' = N'(\theta', \varphi')d\Omega'$ , mà anh ta quan sát được tại thời điểm  $t'$  ở đây  $t'$  là thời gian do trong hệ quy chiếu gắn với của anh ta.

(Princeton)

**Lời giải:**

Đặt  $\Sigma, \Sigma'$  là hệ quy chiếu đứng yên của người quan sát ở trạng thái đứng yên so với các ngôi sao ở xa và tức thời của người quan sát chuyển động với vận tốc, với trục  $x$  trùng với phương của chuyển động tương đối. Tại  $t = t' = 0$ , người quan sát thứ hai bắt đầu chuyển động từ trạng thái đứng yên so với người thứ nhất. Xét thời điểm khi  $\Sigma'$  chuyển động với vận tốc  $v$  so với  $\Sigma$ .

Vectơ vận tốc bôn chiều của một điểm trong một hệ quy chiếu quán tính được định nghĩa là

$$\dot{a}^\alpha = \frac{\gamma_0}{c} \frac{du^\alpha}{dt}$$

với  $u^\alpha$  là vectơ vận tốc bôn chiều ( $\gamma_0 u, \gamma_0$ ), ở đây  $u$  là vận tốc của điểm đó,  $\gamma_0 = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}}$ . Đối với người quan sát đang di chuyển với vận tốc,  $u' = 0, \gamma'_0 = 1, a' = (a, 0, 0), a'^\alpha = (\frac{a}{c^2}, 0, 0, 0)$  trong hệ quy chiếu  $\Sigma'$  và  $u = (v, 0, 0), \gamma_0 = \gamma$ ,  $a^\alpha = \left(\frac{\gamma}{c^2} \frac{dv}{dt}, \gamma v, 0, 0\right)$  trong hệ quy chiếu  $\Sigma$ . Phép biến đổi vectơ bôn chiều dẫn đến

$$\frac{\gamma}{c^2} \frac{d}{dt}(\gamma v) = \frac{\dot{a}}{c^2}.$$

hoặc

$$\frac{d}{dt}(\gamma v) = a ,$$

suy ra

$$\gamma v = at$$

vì  $a$  là hằng số và  $v = 0$  tại  $t = 0$ . Điều này dẫn đến

$$v = \frac{at}{\sqrt{1 + \left(\frac{at}{c}\right)^2}} .$$

Chúng ta còn cần phải biểu diễn  $t$  qua  $t'$ . Biến đổi Lorentz cho ta

$$dt = \gamma \left( dt' + \frac{v}{c^2} dx' \right) = \gamma dt' .$$

Do đó

$$t' = \int_0^{t'} dt' = \int_0^t \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} dt = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1 + \left(\frac{at}{c}\right)^2}} = \frac{c}{a} \sinh^{-1} \left( \frac{at}{c} \right) ,$$

hay

$$t = \frac{c}{a} \sinh \left( \frac{at}{c} \right) ,$$

và

$$v = \frac{c \sinh(at'/c)}{\sqrt{1 + \sinh^2(at'/c)}} = \frac{c \sinh(at'/c)}{\cosh(at'/c)} = c \tanh(at'/c) .$$

Sử dụng các tọa độ cầu với trục cực theo trục  $x'$  và sử dụng lời giải của Bài tập 2004, ta có

$$N(\theta', \varphi') = \frac{N}{4\pi} \frac{d\Omega}{d\Omega'} = \frac{N}{4\pi} \frac{1 - \beta^2}{(1 + \beta \cos \theta')^2}$$

với  $\beta = \tanh\left(\frac{at'}{c}\right)$ , hay

$$dN' = \frac{N}{4\pi} \frac{\left[1 - \tanh\left(\frac{at'}{c}\right)\right]}{\left[1 + \tanh\left(\frac{at'}{c}\right) \cos \theta'\right]^2} \sin \theta' d\theta' d\varphi' .$$

2006

Trong không - thời gian phẳng, một ngôi sao hình cầu có độ sáng toàn phần là  $L$ . Do đó, tại khoảng cách  $r$  tính từ tâm ngôi sao, một người quan sát đứng yên đối với ngôi sao sẽ thấy một năng lượng là  $L/4\pi r^2$ .

(a) Sử dụng các tọa độ cầu gối ở tâm ngôi sao, hãy viết tensor năng – xung lượng của bức xạ.

(b) Một người quan sát tại bán kính  $r$  chuyển động với vận tốc  $\mathbf{v}$ ;  $v_{\parallel}$  là thành phần của  $\mathbf{v}$  theo đường nối người đó với tâm của ngôi sao, và  $v_{\perp}$  là thành phần vuông góc với đường nối đó. Hãy xác định năng thông mà người quan sát chuyển động này do được theo  $L, r, v_{\parallel}, v_{\perp}$ ?

(c) Một photon có tần số  $\nu_c$  ở đứng yên của ngôi sao được phát ra từ bề mặt của ngôi sao đó. Người quan sát ở câu (b) sẽ đo được tần số của photon này bằng bao nhiêu?

(Princeton)

**Lời giải:**

(a) Độ sáng toàn phần của ngôi sao là

$$L = \oint \mathbf{N} \cdot d\mathbf{S} = \int \mathbf{N} \cdot \hat{\mathbf{r}} r^2 d\Omega = 4\pi r^2 N .$$

ở đây  $\mathbf{N} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$  là vectơ Poynting cho ta biết năng thông của trường điện từ của ngôi sao. Hệ thức trên cho thấy

$$\mathbf{N} = N(r) \hat{\mathbf{r}} .$$

có nghĩa là  $\mathbf{N}$  có tính đối xứng xuyên tâm và không phụ thuộc vào các góc  $\theta, \varphi$  của hệ tọa độ cầu với gốc tại tâm ngôi sao. Tại các khoảng cách lớn từ nguồn sáng, các sóng điện từ có thể được coi là những sóng phẳng. Vậy ta có thể lấy

$$E = E_{\theta}, \quad H = H_{\varphi}, \quad \sqrt{\epsilon_0} E = \sqrt{\mu_0} H .$$

Tensor năng – xung lượng phản biến  $T^{\alpha\beta}$  có các thành phần

$$T^{ij} = T^{ji} = -\epsilon_0 E_i E_j - \mu_0 H_i H_j + U \delta_{ij} .$$

$$T^{4j} = T^{j4} = \frac{N}{c} ,$$

$$T^{44} = U .$$

ở đây  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $\mathbf{N} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$  là vectơ Poynting và  $U = \frac{1}{2} (\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2)$  là mật độ năng lượng, hai đại lượng này liên hệ với nhau qua biểu thức  $N = Uc$ .

Như vậy

$$T^{11} = -\epsilon_0 E_r^2 - \mu_0 H_r^2 + U = U = \frac{L}{4\pi r^2 c} ,$$

$$T^{22} = -\epsilon_0 E_\theta^2 - \mu_0 H_\theta^2 + \frac{1}{2}(\epsilon_0 E_\varphi^2 + \mu_0 H_\varphi^2)$$

$$= -\frac{1}{2}\epsilon_0 E_\theta^2 + \frac{1}{2}\mu_0 H_\varphi^2 = 0 ,$$

$$T^{33} = 0 ,$$

$$T^{44} = U = \frac{L}{4\pi r^2 c} ,$$

$$T^{12} = T^{21} = -\epsilon_0 E_r E_\theta - \mu_0 H_r H_\theta = 0 .$$

$$T^{13} = T^{31} = T^{23} = T^{32} = 0 ,$$

$$T^{41} = T^{14} = \frac{N_r}{c} = \frac{L}{4\pi r^2 c} ,$$

$$T^{42} = T^{24} = \frac{N_\theta}{c} = 0 ,$$

$$T^{43} = T^{34} = \frac{N_\varphi}{c} = 0 ,$$

do  $E_r = E_\varphi = H_r = H_\theta = 0$ ,  $N_\theta = N_\varphi = 0$ .

(b) Tách  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  thành các thành phần song song và vuông góc với vận tốc  $\mathbf{v}$  của  $\Sigma'$  đối với  $\Sigma$ :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{||} + \mathbf{E}_\perp, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_{||} + \mathbf{B}_\perp .$$

Theo biến đổi Lorentz, ta có

$$\mathbf{E}'_{||} = \mathbf{E}_{||}, \quad \mathbf{B}'_{||} = \mathbf{B}_{||} ,$$

$$\mathbf{E}'_\perp = \gamma(\mathbf{E}_\perp + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_\perp), \quad \mathbf{B}'_\perp = \gamma \left( \mathbf{B}_\perp - \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}_\perp}{c^2} \right) .$$

Các hệ thức này có thể được kết hợp lại như sau:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \gamma[(\mathbf{E} - \mathbf{E}_{||}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{B} - \mathbf{B}_{||})] + \mathbf{E}_{||} \\ &= \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - (\gamma - 1)\mathbf{E}_{||} - \gamma \mathbf{v} \times \mathbf{B}_{||} \\ &= \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - (\gamma - 1) \left( \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}}{c^2} \right) \mathbf{v} , \end{aligned}$$

$$\mathbf{B}' = \gamma \left( \mathbf{B} - \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c^2} \right) - (\gamma - 1) \left( \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{v}}{c^2} \right) \mathbf{v} .$$

do  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\parallel} = 0$ ,  $\mathbf{v} \times \mathbf{E}_{\parallel} = 0$ .

Dai lượng  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$  không đổi dưới phép biến đổi Lorentz. Trong hệ quy chiếu  $\Sigma$  các sóng là phẳng cho nên  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ . Vì thế  $\mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}' = 0$ , tức là các sóng cũng là phẳng trong tất cả các hệ quy chiếu quán tính khác. Do đó

$$\mu_0^2 N^2 = (\mathbf{E} \times \mathbf{B})^2 = E^2 B^2 - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2 = E^2 B^2.$$

Xét

$$\begin{aligned} E'^2 &= \gamma^2 [E^2 + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})^2 + 2\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B}] + (\gamma - 1)^2 \left( \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}}{v^2} \right)^2 v^2 \\ &\quad - 2\gamma(\gamma - 1) \left( \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}}{v^2} \right) \mathbf{v} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\ &= \gamma^2 \left[ E^2 + v^2 B^2 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})^2 - 2v_{\parallel} EB - \left( \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}}{c} \right)^2 \right] \\ &= \gamma^2 \left[ E^2 - \frac{2v_{\parallel} E^2}{c} + \frac{v_{\perp}^2 E^2}{c^2} + \left( \frac{v_{\perp} E}{c} \right)^2 - \left( \frac{\mathbf{v}_{\perp} \cdot \mathbf{E}}{c} \right)^2 - (\mathbf{v}_{\perp} \cdot \mathbf{B})^2 \right] \\ &= \gamma^2 \left[ E^2 \left( 1 - \frac{v_{\parallel}}{c} \right)^2 + \left( \frac{\mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{E}}{c} \right)^2 - (v_{\perp} \cdot \mathbf{B})^2 \right]. \end{aligned}$$

Sử dụng

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{B})^2 = v^2 B^2 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})^2,$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B} = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{B} = -v_{\parallel} |\mathbf{E} \times \mathbf{B}| = -v_{\parallel} EB,$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0,$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} = (v_{\perp} + v_{\parallel}) \cdot \mathbf{E} = \mathbf{v}_{\perp} \cdot \mathbf{E},$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{v}_{\perp} \cdot \mathbf{B},$$

$$v^2 = v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2, \quad \gamma^2 - 1 = \frac{\gamma^2 v^2}{c^2}.$$

Vì  $\mathbf{E}, \mathbf{B}, \hat{\mathbf{r}}$  vuông góc nhau từng đôi một và  $E = cB$ , nên ta có

$$(\mathbf{v}_{\perp} \cdot \mathbf{B})^2 = \left( \frac{\mathbf{v}_{\perp} \cdot \mathbf{E} \times \hat{\mathbf{r}}}{c} \right)^2 = \left( \frac{\mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{c} \right)^2 = \left( \frac{\mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{E}}{c} \right)^2.$$

Do đó

$$E'^2 = \gamma^2 \left( 1 - \frac{v_{\parallel}}{c} \right)^2 E^2,$$

và tương tự

$$B'^2 = \gamma^2 \left( 1 - \frac{v_{\parallel}}{c} \right)^2 B^2,$$

Do đó

$$N'^2 = \frac{E'^2 B'^2}{\mu_0^2} = \gamma^4 \left(1 - \frac{v_{||}}{c}\right)^4 \frac{E^2 B^2}{\mu_0^2} .$$

hay

$$N' = \left(1 - \frac{v_{||}^2 + v_{\perp}^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{v_{||}}{c}\right)^2 \frac{L}{4\pi r^2} .$$

(c) Thành phần cuối của vectơ truyền 4 chiều  $k^\alpha = (k, \frac{\omega}{c})$ , ở đây  $k = \frac{\omega}{c}$ , biến đổi theo

$$\frac{\omega'}{c} = \gamma \left(\frac{\omega}{c} - \frac{v}{c} k \cos \theta\right)$$

hay

$$\omega' = \omega \gamma \left(1 - \frac{v_{||}}{c}\right) .$$

Nếu một photon phát ra từ bề mặt của ngôi sao với tần số  $\nu_0$ , thì tần số quan sát được khi đó sẽ là

$$\nu' = \nu_0 \left(1 - \frac{v_{\perp}^2 + v_{||}^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{v_{||}}{c}\right) .$$

Tuy nhiên  $\nu_0$  không phải là tần số thực của photon vì sự dịch gây bởi lực hấp dẫn được tính bởi

$$\nu_0 = \nu_c \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{\frac{1}{2}} ,$$

ở đây  $M$  là khối lượng và  $r$  là bán kính của ngôi sao và  $G$  là hằng số lực hấp dẫn. Như vậy

$$\nu' = \nu_c \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{v_{\perp}^2 + v_{||}^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{v_{||}}{c}\right) .$$

2007

Xét va chạm của  $n$  vật thể trong hệ quy chiếu Lorentz  $S$ . Các vật thể dù nhỏ để có thể được đặc trưng bởi khối lượng nghỉ và vận tốc, và chúng đồng thời va chạm nhau tại cùng một điểm. Giả thiết vận tốc và khối lượng nghỉ của chúng là  $v_\alpha$  và  $m_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, n$ ) trước khi va chạm, và là  $v'_\alpha$  và  $m'_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, n$ ) sau khi va chạm. (Tất cả các giá trị  $m_\alpha$  và  $m'_\alpha$  là dương.)

Đối với  $v_\alpha$  và  $m_\alpha$  nào đó, gọi một va chạm là không dàn hồi tối da trong S nếu sau va chạm đó tổng động năng của tất cả các vật thể có giá trị nhỏ nhất có thể, phù hợp với định luật bảo toàn năng lượng và xung lượng. (Động năng của một vật thể là  $m_\alpha c^2[(1 - \frac{v_\alpha^2}{c^2})^{-1/2} - 1]$ .)

(a) Tìm  $v'_\alpha$  và  $m'_\alpha$  - trong phạm vi mà chúng xác định - đối với một va chạm không dàn hồi tối da.

(b) Khái niệm va chạm không dàn hồi tối da có bất biến đối với phép biến đổi Lorentz không? Giải thích.

(Princeton)

**Lời giải:**

(a) Tổng động năng sau va chạm là

$$T = \sum (m'_\alpha \gamma'_\alpha c^2 - m'_\alpha c^2)$$

với  $\gamma'_\alpha = \left(1 - \frac{v'_\alpha^2}{c^2}\right)^{-1/2}$ . Vì không có ngoại lực tác dụng lên hệ, năng lượng được bảo toàn

$$\sum m'_\alpha \gamma'_\alpha c^2 = \sum m_\alpha \gamma_\alpha c^2.$$

Như vậy

$$T = \sum (m_\alpha \gamma_\alpha c^2 - m'_\alpha c^2).$$

Để  $T$  cực tiểu, ta yêu cầu  $\sum m'_\alpha$  cực đại nhưng phải phù hợp với bảo toàn năng lượng và xung lượng.

Xét va chạm trong hệ quy chiếu khói tâm  $S_{cm}$ , với vận tốc đối với  $S$

$$\mathbf{u} = \frac{\sum m_\alpha \gamma_\alpha \mathbf{v}_\alpha}{\sum m_\alpha \gamma_\alpha}.$$

Dánh dấu tất cả các đại lượng trong hệ quy chiếu này bằng dấu gạch ngang trên đầu ta có

$$\begin{aligned} T &= \sum (m_\alpha \bar{\gamma}_\alpha c^2 - m'_\alpha c^2) \\ &= \sum (m_\alpha \bar{\gamma}_\alpha c^2 - m_\alpha c^2). \end{aligned}$$

Do  $\bar{T} \geq 0$ , nên  $\sum m'_\alpha \leq \sum m_\alpha \bar{\gamma}_\alpha$ . Suy ra  $\sum m'_\alpha$  có giá trị cực đại bằng  $\sum m_\alpha \bar{\gamma}_\alpha$ .

Đối với một hệ, đại lượng  $E^2 - P^2 c^2$  là bất biến Lorentz. Do đó

$$\left(\sum m_\alpha \gamma_\alpha c^2\right)^2 - \left(\sum m_\alpha \gamma_\alpha \mathbf{v}_\alpha\right)^2 c^2 = \left(\sum m_\alpha \bar{\gamma}_\alpha c^2\right)^2.$$

vì  $\bar{P} = 0$  trong hệ quy chiếu  $S_{cm}$ , tức là

$$\left(\sum m_\alpha \gamma_\alpha\right)^2 - \left(\sum m_\alpha \gamma_\alpha\right)^2 \frac{u^2}{c^2} = \left(\sum m_\alpha \gamma_\alpha\right)^2,$$

hay

$$\sum m_\alpha \tilde{\gamma}_\alpha = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum m_\alpha \gamma_\alpha.$$

Do đó  $\sum m'_\alpha$  có giá trị cực đại là

$$\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum m_\alpha \gamma_\alpha,$$

Giá trị cực đại này xác định  $\sum m'_\alpha$  đối với một va chạm không dàn hồi tối đa. Theo định luật bảo toàn xung lượng

$$\sum m'_\alpha \gamma'_\alpha v'_\alpha = \sum m_\alpha \gamma_\alpha v_\alpha = u \sum m_\alpha \gamma_\alpha$$

xác định vận tốc tập thể  $u$ , giống nhau trước và sau khi va chạm.

(b) Khái niệm va chạm không dàn hồi là bất biến Lorentz vì phép biến đổi Lorentz được áp dụng ở đây để biến đổi sang hệ quy chiếu khồi tâm và điều này không ảnh hưởng đến nội năng năng lượng quán tính xuất hiện do chuyển động của các hạt trong hệ.

## 2.2. THUYẾT TƯƠNG ĐỐI RỘNG (2008- 2023)

2008

(a) Dạng “mở rộng toàn cục” của định luật chuyển động thứ nhất của Newton trong thuyết tương đối rộng là như thế nào?

Nêu ý nghĩa của tất cả các số hạng trong phương trình chuyển động tổng quát.

(b) Chỉ ra sự tương ứng giữa phương trình chuyển động trong câu (a) và định luật hấp dẫn của Newton trong phép gần đúng tuyễn tính đến bậc nhất của  $v/c$ .

Biểu thức dưới đây có thể hữu ích để trả lời câu (b):

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} (\partial_\nu g_{\lambda\mu} + \partial_\mu g_{\lambda\nu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}).$$

(SUNY, Buffalo)

**Lời giải:**

(a) Trong thuyết tương đối hẹp, một hạt không chịu một lực tác dụng nào sẽ có vận tốc 4 chiều không đổi. Điều này có nghĩa  $\frac{du^\alpha}{d\tau} = 0$ . Đó chính là định luật thứ nhất của Newton hay còn gọi là định luật quán tính. Ở dạng hiệp biến tổng quát nó trở thành  $\frac{Du^\alpha}{D\tau} = 0$ , hay

$$\frac{du^\alpha}{d\tau} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (1)$$

Bên về trái, số hạng thứ nhất là gia tốc 4 chiều của hạt, số hạng thứ hai biểu diễn tác dụng của trường hấp dẫn có cường độ  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ .

(b) Khi không có trường hấp dẫn, không gian là phẳng tức là không gian Oclit. Sử dụng các tọa độ Đè-các vuông góc và đặt

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z.$$

Yếu tố khoảng của không - thời gian là

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

với  $\eta_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu}$ , ngoại trừ  $\eta_{00} = 1$ .

Khi xuất hiện trường hấp dẫn không gian bị cong đi hay là không gian Rieman với yếu tố khoảng

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

ở đây  $g_{\mu\nu}$  là đối xứng và chéo hóa khi sử dụng các tọa độ Đè-các. Nếu trường hấp dẫn yếu,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu},$$

ở đây  $h_{\mu\nu} \ll 1$  là các hàm của các tọa độ không gian. Đối với các vận tốc nhỏ  $v \ll c$ ,

$$\begin{aligned} \left( \frac{ds}{d\tau} \right)^2 &= (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \\ &\approx \left( \frac{dx^0}{d\tau} \right)^2 - \left( \frac{dx^j}{dt} \right)^2 \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 \\ &= (c^2 - v^2) \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 \approx c^2 \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2. \end{aligned}$$

hoặc

$$ds \approx c dt ,$$

và

$$\frac{dx^j}{ds} \approx \frac{1}{c} \frac{dx^j}{dt} \approx 0, \quad \frac{dx^0}{ds} \approx 1, \quad (j = 1, 2, 3) .$$

Chuyển động của hạt được mô tả bởi phương trình trắc địa

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0 .$$

Đối với một trường yếu và các vận tốc nhỏ, phương trình này có dạng gần đúng

$$\begin{aligned} \frac{d^2x^\alpha}{ds^2} &\approx -\Gamma_{00}^\alpha \left( \frac{dx^0}{ds} \right)^2 \\ &\approx -\Gamma_{00}^\alpha \\ &= -\frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} \left( \frac{\partial g_{\lambda 0}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\lambda}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\lambda} \right) \\ &= \frac{1}{2} g^{\alpha\alpha} \left( 2 \frac{\partial g_{\alpha 0}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha} \right) . \end{aligned}$$

Vì  $g^{\alpha\alpha} = \frac{1}{g_{\alpha\alpha}}$  đối với các phần tử  $g_{\mu\nu}$  trên đường chéo, ta có với  $i = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{d^2x^i}{dt^2} &= \frac{1}{2(1+h_{ii})} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i} \\ &\approx \frac{1}{2}(1-h_{ii}) \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} , \end{aligned}$$

hay

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} \approx \frac{c^2}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} ,$$

ở đây ta chỉ giữ lại các số hạng bậc nhất của  $h_{\mu\nu}$  và vi phân của chúng. Ở dạng vectơ biểu thức này là

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \approx \frac{c^2}{2} \nabla h_{00} ,$$

giống phương trình của Newton

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\nabla \Phi$$

nếu ta đặt

$$h_{00} \approx -\frac{2\Phi}{c^2} + \text{constant.}$$

2009

(a) Một nguyên tử mà chuyển động tâm khối của nó chỉ bị ảnh hưởng bởi các lực hấp dẫn, quay quanh một ngôi sao khối lượng  $M$  ở khoảng cách  $R$ . Theo một nguyên lý vật lý nào đó các vạch phổ của nguyên tử - được đo bởi một người quan sát ở cùng một quỹ đạo với nguyên tử đó - (với độ chính xác rất cao) giống như phổ khi không có sự tồn tại của ngôi sao. Phát biểu và giải thích nguyên lý này.

(b) Giả thiết rằng thay vì như trên, nguyên tử đứng yên trên bề mặt của ngôi sao (bán kính  $R_0$ ). Các vạch phổ quan sát được bởi một người quan sát quay quanh ngôi sao đó tại một khoảng cách lớn  $R$ . Các tần số quan sát được sẽ bằng bao nhiêu trong trường hợp này (so với các tần số lê ra quan sát được khi không có trường hấp dẫn)?

(c) Lại giả thiết rằng nguyên tử quay quanh ngôi sao tại khoảng cách  $R$ . Thực ra, do kích thước của nguyên tử khác không, các vạch phổ như được đo bởi một người quan sát trên cùng quỹ đạo bị dịch di một chút so với trường hợp khi không có trường hấp dẫn. Giải thích tại sao nguyên tử đó có kích thước khác không là đúng. Về đánh giá sơ bộ độ lớn của sự xê dịch đó theo kích thước  $a_0$  của nguyên tử và các hằng số vật lý khác.

(d) Bây giờ giả thiết rằng ngôi sao là một lỗ đen và nguyên tử nằm trên một quỹ đạo mà sẽ dẫn tới sự hút nguyên tử này vào lỗ đen đó. Cuối cùng, khi nguyên tử tiến tới điểm kỳ dị tại tâm của lỗ, nguyên tử này sẽ bị phá vỡ và bị ion hóa. Ta có thể giả thiết rằng điều này xảy ra khi độ dịch năng lượng được đánh giá trong câu (c) bằng năng lượng liên kết của nguyên tử,  $E_0$ . Đánh giá sơ bộ, theo khối lượng của lỗ đen và các tham số khác đã cho, tại bán kính bao nhiêu từ tâm lỗ đen nguyên tử sẽ bị ion hóa. Khi hiện tượng này xảy ra, một người quan sát ở ngoài lỗ đen có thể quan sát được điều đó không? (Câu trả lời phụ thuộc vào lỗ đen nặng bao nhiêu so với các tham số khác.) Với phạm vi nào của khối lượng lỗ đen sự ion hóa của nguyên tử sẽ có khả năng được quan sát thấy từ bên ngoài lỗ đen? Sử dụng kiến thức về các hằng số vật lý của tự nhiên để so sánh khối lượng giới hạn này với khối lượng của trái đất?

(Princeton)

**Lời giải:**

(a) Theo nguyên lý tương đương, đối với mỗi điểm của không - thời gian trong một trường hấp dẫn bất kỳ có thể chọn được một hệ tọa độ “quán tính địa phương” tức là một hệ được gia tốc rơi tự do vào trọng trường sao cho trong một vùng đủ nhỏ của điểm đó trọng trường có thể được coi là đều, các định luật tự nhiên liên quan đến nó có dạng giống như trong các hệ tọa độ quán tính khi không có lực hấp dẫn. Các tọa độ chọn bởi người quan sát có cùng quỹ đạo với nguyên tử sẽ chính là một hệ quán tính địa phương. Do đó các vạch phổ nguyên tử được người đó đo sẽ giống như các vạch quan sát thấy khi không có trọng trường.

(b) Do  $R \gg R_0$ , nên người quan sát quay quanh ngôi sao có thể được coi là đứng yên trong hệ quy chiếu của ngôi sao. Xét một vạch phổ cụ thể nào đó được phát ra từ nguyên tử. Khoảng không - thời gian giữa hai đỉnh liên tiếp của bức xạ được tính bởi

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{00}(cdt)^2$$

do nguyên tử đứng yên trong hệ quy chiếu đó. Vậy một đồng hồ chuẩn sẽ đo được một chu kỳ là

$$\tau = t\sqrt{g_{00}(R_0)} ,$$

ở đây  $t$  là chu kỳ đo trong tọa độ thời gian. Nếu  $T$  là hiệu của tọa độ thời gian của sự phát một sóng từ nguyên tử và tọa độ thời gian khi người quan sát thu được bức xạ đó, vậy các đỉnh liên tiếp được phát ra tại  $t_0, t_0 + t$  sẽ tới người quan sát tại  $t_0 + T, t_0 + t + T$ . Do trọng trường là tĩnh và người quan sát có thể được xem như là đứng yên trong hệ quy chiếu này, nên  $T$  là một hằng số và chu kỳ bức xạ được đo trong tọa độ thời gian cũng là  $t$ . Nhưng một đồng hồ chuẩn sẽ đo thời gian là

$$\tau' = t\sqrt{g_{00}(R)} .$$

Do vậy

$$\begin{aligned} \frac{\nu'}{\nu} &= \frac{\tau}{\tau'} = \left[ \frac{g_{00}(R_0)}{g_{00}(R)} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[ \frac{1 + \frac{2\Phi(R_0)}{c^2}}{1 + \frac{2\Phi(R)}{c^2}} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\approx 1 + \frac{1}{c^2} [\Phi(R_0) - \Phi(R)] . \end{aligned}$$

hay

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} \approx \frac{GM}{c^2} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right)$$

vì  $\Phi = -\frac{GM}{R}$ ,  $G$  là hằng số hấp dẫn và  $M$  là khối lượng của ngôi sao.

(c) Nếu nguyên tử có bán kính xác định  $a_0$ , tính không đồng nhất của trường hấp dẫn trong giới hạn của nguyên tử không thể bị loại bỏ được hoàn toàn bằng cách lựa chọn một hệ quy chiếu được gia tốc hay “quán tính địa phương” để làm chuẩn, dẫn đến cái gọi là lực thủy triều. Gia tốc trội thêm tại điểm cách tâm của nguyên tử một khoảng  $z$  là

$$-\frac{GM}{(R+z)^2} + \frac{GM}{R^2} \approx \frac{2GM}{R^3} z .$$

Xét nguyên tử như là một dao động tử diều hòa có hằng số lực  $k_0$ , phương trình chuyển động của nó là

$$\ddot{z} + \frac{k_0}{m} z = \frac{2GM}{R^3} z ,$$

hay

$$\ddot{z} + \omega^2 z = 0 ,$$

ở đây

$$\omega = \left( \frac{k_0}{m} - \frac{2GM}{R^3} \right)^{\frac{1}{2}} \approx \omega_0 \left( 1 - \frac{GM}{\omega_0^2 R^3} \right)$$

với

$$\omega_0^2 = \frac{k_0}{m} .$$

$\omega_0$  là tần số góc của một electron quỹ đạo được tính bởi

$$\frac{e^2}{a_0^2} = ma_0\omega_0^2 .$$

Do đó

$$\left| \frac{\Delta\nu}{\nu} \right| = \left| \frac{\Delta\omega}{\omega} \right| = \frac{GMm}{e^2 R^3} a_0^3 ,$$

$e, m$  là diện tích và khối lượng của nguyên tử.

(d) Nguyên tử bị ion hóa khi độ dịch năng lượng  $\hbar\Delta\omega = \frac{\hbar GM}{R}$  bằng năng lượng liên kết  $E_0$ . Hiện tượng này xảy ra tại  $R = \left( \frac{\hbar^2 GM}{E_0^2} \right)^{\frac{1}{3}}$ . Người làm thí nghiệm sẽ quan sát thấy hiện tượng này bên ngoài lỗ đen nếu  $R > R_s = \frac{2GM}{c^2}$ , là bán kính Schwarzschild. Đặt  $R = R_s$  ta sẽ tìm được khối lượng cực đại của hố đen là

$$M_c = \frac{\hbar c^3}{\sqrt{8GE_0}} .$$

Để đánh giá sơ bộ, lấy  $E_0 \sim 1$  eV và với  $\hbar = 6,6 \times 10^{-16}$  eV s,  $G = 6,67 \times 10^{-11}$  Nm<sup>2</sup> kg<sup>-2</sup>, ta tìm được

$$M_c \approx 10^{20} \text{ kg} \approx 10^{-5} M_e.$$

ở đây  $M_e \approx 6 \times 10^{24}$  kg là khối lượng trái đất. Với khối lượng này, bán kính tương ứng tại đó hiện tượng ion hóa xảy ra là  $R_c = 1,4 \times 10^{-7}$  m.

## 2010

Metric Schwarzschild mô tả không - thời gian bên ngoài một khối cầu  $M$  được biểu diễn như sau

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

- (a) Tìm bán kính tại đó một photon có thể mô tả một quỹ đạo tròn.
- (b) Một người quan sát ở vị trí cố định tại bán kính này sẽ đo được chu kỳ của photon bằng bao nhiêu?
- (c) Nếu người quan sát bật một tín hiệu mỗi khi photon đi qua anh ta, một người khác ở xa vô tận và ở trạng thái đứng yên sẽ đo được khoảng thời gian giữa hai tín hiệu này là bao nhiêu?

(Princeton)

Lời giải:

- (a) Sử dụng một hệ quy chiếu có gốc tại tâm của khối cầu và đặt

$$x^0 = ct, \quad x^1 = r, \quad x^2 = \theta, \quad x^3 = \varphi.$$

Khi đó tenxơ metric Schwarzschild có các thành phần

$$\begin{aligned} g_{00} &= -\left(1 - \frac{k}{r}\right), & g_{11} &= \left(1 - \frac{k}{r}\right)^{-1}, \\ g_{22} &= r^2, & g_{33} &= r^2 \sin^2 \theta, \\ g_{\mu\nu} &= 0 \text{ với } \mu \neq \nu, \end{aligned}$$

ở đây  $k = \frac{2GM}{c^2}$ . Đường vũ trụ của photon là đường trắc địa không được tính bởi

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left( g_{\alpha\beta} \frac{dx^\beta}{ds} \right) &= \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds}, \\ g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} &= 0, \end{aligned}$$

ở đây  $s$  là một biến độc lập. Vì khối lượng có tính đối xứng cầu nên ta có thể chọn các tọa độ sao cho quỹ đạo của photon nằm trong mặt phẳng  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

Do các giá trị  $g_{\mu\nu}$  không phụ thuộc tường minh vào  $x^3$  ta có

$$g_{33} \frac{dx^3}{ds} = g_{33} \frac{dx^3}{ds} = r^2 \frac{d\varphi}{ds} = h, \quad \text{là một hằng số.}$$

Chúng cũng không phụ thuộc tường minh vào  $x^0$  do vậy

$$g_{03} \frac{dx^3}{ds} = g_{00} \frac{dx^0}{ds} = -c \left(1 - \frac{k}{r}\right) \frac{dt}{ds} = b, \quad \text{là một hằng số.}$$

Ta cũng có

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} &= g_{00} \left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2 + g_{11} \left(\frac{dx^1}{ds}\right)^2 + g_{33} \left(\frac{dx^3}{ds}\right)^2 \\ &= -c^2 \left(1 - \frac{k}{r}\right) \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{1}{(1 - \frac{k}{r})} \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 0. \end{aligned}$$

Như vậy

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + \left(1 - \frac{k}{r}\right) \frac{h^2}{r^2} - b^2 = 0.$$

Đặt  $\frac{1}{r} = u$ , ta có

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\varphi} &= -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi}, \\ \frac{dr}{ds} &= \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{ds} = \frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} = -h \frac{du}{d\varphi}, \end{aligned}$$

và phương trình (4) trở thành

$$h^2 \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + (1 - ku)h^2 u^2 - b^2 = 0.$$

Vì phân cá hai vế theo  $\varphi$ , ta được

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u - \frac{3ku^2}{2} = 0,$$

tức là,

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u - \frac{3GM}{c^2} u^2 = 0.$$

Để quỹ đạo là tròn thì  $u = \frac{1}{r} = \text{hằng số}$ . Phương trình cuối cùng cho

$$r = \frac{3GM}{c^2} .$$

đối với bán kính của quỹ đạo tròn.

(b) Đổi với photon di chuyển trên một quỹ đạo tròn  $r = \frac{3GM}{c^2}$ ,

$$(ds)^2 = - \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2(dt)^2 + r^2(d\varphi)^2 = 0 ,$$

dẫn đến :

$$dt = \frac{\sqrt{3} r}{c} d\varphi$$

và như vậy chu kỳ theo tọa độ thời gian là

$$\Delta t = \frac{\sqrt{3} r}{c} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2\pi\sqrt{3}}{c} \frac{3GM}{c^2} = \frac{6\sqrt{3}\pi GM}{c^3} ,$$

Đối với người quan sát đứng yên tại  $r = \frac{3GM}{c^2}$ , một chiếc đồng hồ chuẩn đứng yên cho

$$-(cd\tau)^2 = - \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) (cdt)^2 ,$$

hay

$$d\tau = \frac{dt}{\sqrt{3}} .$$

Như vậy, chu kỳ người quan sát đo được theo đồng hồ chuẩn là

$$\Delta\tau = \frac{\Delta t}{\sqrt{3}} = \frac{6\pi GM}{c^3} .$$

(c) Đối với người quan sát ở vô cực, một chiếc đồng hồ chuẩn đứng yên ở gần đó cho

$$-(cd\tau_\infty^2) = -(cdt)^2 ,$$

vì  $r = \infty$ , như vậy

$$d\tau_\infty = dt ,$$

ở đây  $t$  là tọa độ thời gian. Như vậy theo người quan sát này

$$\Delta\tau_\infty = \Delta t = \frac{6\sqrt{3}\pi GM}{c^3} .$$

2011

(a) Viết phương trình trắc địa.

(b) Nêu ý nghĩa vật lý của

(1) đường trắc địa loại thời gian? (2) đường trắc địa không?

(c) Với một lựa chọn các biến tọa độ  $\rho, \theta, \varphi, \psi$  nào đó một nghiệm của các phương trình Einstein có dạng metric

$$ds^2 = -\frac{1}{U(\rho)} d\rho^2 + 4U(\rho)l^2(d\psi + \cos\theta d\varphi)^2 + (\rho^2 + l^2)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2),$$

ở đây

$$-\infty \leq \rho \leq \infty,$$

$$0 \leq \theta \leq \pi,$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

$$0 \leq \psi \leq 4\pi,$$

 $\theta, \varphi$ , và  $\psi$  là các tọa độ cyclic, và

$$U(\rho) = -1 + \frac{2(m\rho + l^2)}{\rho^2 + l^2}.$$

ở đây  $m$  và  $l$  là các tham số cố định.(1) Tìm các phương trình mô tả các đường trắc địa trong mặt phẳng  $\varphi = 0$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .(2) Giải các phương trình trắc địa không trong mặt phẳng trong câu (1), chỉ ra rằng tồn tại các đường trắc địa không nằm trên mặt  $\varphi = 0$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\rho = m + \sqrt{m^2 + l^2}$ . Hãy nêu vấn đề về ý nghĩa vật lý của các đường trắc địa không này!

Thông tin liên quan: Các ký hiệu Christoffel được định nghĩa bởi

$$\Gamma^\alpha_{\beta\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\delta}(\partial_\beta g_{\delta\nu} - \partial_\delta g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\beta\delta}).$$

(Princeton)

Lời giải:

(a) Phương trình trắc địa là

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0.$$

(b) (1) Đường trắc địa loại thời gian là loại đường trắc địa mà theo đó trật tự thời gian của các sự kiện không thể bị thay đổi bởi một biến đổi tọa độ.

(2) Đường trắc địa không là các đường đi của ánh sáng hoặc photon trong một không-thời gian và được đặc trưng bởi  $ds = 0$ , hay

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0 .$$

Tham số  $s$  trong phương trình này được xem như là một biến độc lập không tuồng minh.

(c) (1) Đặt

$$x^0 = \rho, \quad x^1 = \psi, \quad x^2 = \theta, \quad x^3 = \varphi .$$

Tenxô metric có các thành phần khác không như sau

$$\begin{aligned} g_{00} &= -\frac{1}{U}, & g_{11} &= 4Ul^2, & g_{22} &= \rho^2 + l^2, \\ g_{33} &= 4Ul^2 \cos^2 \theta + (\rho^2 + l^2) \sin^2 \theta, \\ g_{23} &= g_{32} = 4Ul^2 \cos \theta, \end{aligned}$$

với

$$U = -1 + \frac{2(m\rho + l^2)}{\rho^2 + l^2} .$$

Để tiện hơn ta sử dụng một dạng khác của phương trình trắc địa

$$\frac{d}{ds} \left( g_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{ds} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} .$$

Do tất cả các giá trị  $g_{\mu\nu}$  không phụ thuộc tuồng minh vào  $x^1$  và  $g_{1\nu} = 0$  đối với  $\nu \neq 1$ , nên phương trình trên dẫn tới tích phân thứ nhất

$$g_{11} \frac{d\psi}{ds} = k, \quad \text{là một hằng số.}$$

Đưa vào giá trị thời gian riêng địa phương  $\tau$  được định nghĩa bởi  $-d\tau^2 = ds^2$  và biểu diễn  $\psi$  ( $-\infty \leq \psi \leq \infty$ ) như tọa độ thời gian  $\tau$ . Metric đó cho

$$-d\tau^2 = ds^2 = g_{11} d\psi^2 .$$

$\rho$  được gọi là khoảng cách bán kính ( $0 \leq \rho \leq \infty$ ). Giả sử  $\rho \rightarrow \infty$ , do  $U \rightarrow -1$ ,  $g_{11} \rightarrow -4l^2$ , ta rút ra  $k^2 = \left(g_{11} \frac{d\psi}{ds}\right)^2 = g_{11}(\infty) = -4l^2$ . Nếu đường trắc địa bị giới hạn trong mặt phẳng  $\varphi = 0$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , thì  $d\varphi = d\theta = 0$  và metric đó cho

$$g_{00} \left( \frac{d\rho}{ds} \right)^2 + g_{11} \left( \frac{d\psi}{ds} \right)^2 = 1 .$$

hay

$$\frac{d\rho}{ds} = \sqrt{\frac{1}{g_{00}} \left( 1 - \frac{k^2}{g_{11}} \right)} = \sqrt{-U \left( 1 + \frac{4l^2}{4Ul^2} \right)} = \sqrt{-1 - U(\rho)}$$

đối với đường trắc địa này.

(b) Đối với đường trắc địa không,

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0 ,$$

ở đây  $s$  là một biến độc lập không tường minh. Đối với một đường trắc địa bị giới hạn trong mặt  $\varphi = 0, \theta = \frac{\pi}{2}$ , ta có

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\theta}{ds} = 0 ,$$

và như vậy

$$g_{00} \left( \frac{d\rho}{ds} \right)^2 + g_{11} \left( \frac{d\psi}{ds} \right)^2 = 0 ,$$

hay

$$\frac{d\rho}{d\psi} = \sqrt{-\frac{g_{11}}{g_{00}}} = 2Ul .$$

$\rho = \text{hằng số}, U = 0$  hiển nhiên là một nghiệm của phương trình trên. Điều này tương ứng với

$$\rho^2 + l^2 = 2m\rho + 2l^2 ,$$

hay, lấy nghiệm dương

$$\rho = m + \sqrt{m^2 + l^2} .$$

Như vậy có các đường trắc địa không nằm trong mặt  $\varphi = 0, \theta = \frac{\pi}{2}, \rho = m + \sqrt{m^2 + l^2}$ .

Kết quả này thú vị về mặt vật lý vì nó cho thấy ánh sáng có thể truyền theo một mặt cầu có bán kính  $\rho = m + \sqrt{m^2 + l^2}$ , mà không di ra khỏi mặt cầu này.

2012

Trong gần đúng bậc nhất của  $1/r$ , metric ở gần một ngôi sao hình cầu khối lượng  $m$  ( $c = c_1$ ) là

$$ds^2 = - \left( 1 \pm \frac{2m}{r} \right) dt^2 + \left( 1 \pm \frac{2m}{r} \right) dl^2 .$$

ở đây  $t$  và  $l$  là các tọa độ thời gian và khoảng cách và  $r$  là khoảng cách từ ngôi sao.

(a) Chọn dấu của hệ số của  $dt^2$  và đưa ra một giải thích vật lý tại sao chọn dấu đó.

(b) Trong các tọa độ  $t, l$  hãy định nghĩa tọa độ vận tốc của ánh sáng  $c'$ . Về đồ thị  $c'$  như một hàm của  $r$  theo các trường hợp dấu hệ số của  $dl^2$  là âm và dương. Đồ thị trên có nghĩa trong khoảng giá trị nào của  $r$ ? Điều gì xảy ra đối với một sóng điện từ khi nó đi qua một vật có khối lượng rất lớn? Trên cơ sở thảo luận trên, hãy chọn dấu chính xác của hệ số của  $dl^2$ .

(Princeton)

Lời giải:

(a) Đặt  $x^0 = t, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$ . Tenxơ metric có các thành phần bằng không ngoại trừ

$$g_{00} = -(1 + h_{00}), \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1 + h_{ii} .$$

ở đây  $h_{00} = \pm \frac{2m}{r}, h_{ii} = \pm \frac{2m}{r}$ . Dựa vào khoảng thời gian riêng địa phương  $d\tau$  với  $d\tau^2 = -ds^2$ . Để xác định dấu của  $h$ , hãy xét chuyển động của một hạt có vận tốc  $v \ll 1$  là vận tốc ánh sáng, tại một khoảng cách rất xa ngôi sao  $r \rightarrow \infty$ . Vì

$$d\tau^2 = -ds^2 = (1 + h_{00})dt^2 - (1 + h_{ii})dl^2 ,$$

tức là,

$$\left( \frac{d\tau}{dt} \right)^2 \approx 1 - v^2 \approx 1 ,$$

ta có thể lấy gần đúng

$$\frac{d\tau}{dt} \approx 1, \quad \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{dx^i}{dt} \frac{dt}{d\tau} \approx 0 \quad (i = 1, 2, 3) .$$

Gia tốc tính bởi phương trình trắc địa là

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} &= -\Gamma_{\alpha\beta}^i \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \\ &= -\Gamma_{00}^i . \end{aligned}$$

Từ biểu thức đối với các ký hiệu Christoffel (Bài tập 2011), ta có

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^i &= -\frac{1}{2} g^{ii} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i} . \\ &\approx \frac{1}{2}(1 - h_{ii}) \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} \approx \frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} . \end{aligned}$$

do  $g^{ii} = \frac{1}{g_{ii}}$  với  $g$  được chéo hóa. Như vậy ta có dưới dạng vectơ,

$$\frac{d^2\mathbf{l}}{dt^2} = -\frac{1}{2}\nabla h_{00}.$$

Tuy nhiên, phương trình Newton áp dụng cho trường hợp  $v \ll c, r \rightarrow \infty$ , là

$$\frac{d^2\mathbf{l}}{dt^2} = -\nabla\Phi$$

với  $\Phi = -\frac{m}{r}$  (chú ý  $G = 1$  và lực hấp dẫn là lực hút). So sánh của các phương trình này dẫn đến

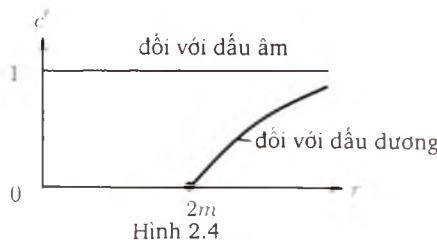
$$h_{00} = 2\Phi = -\frac{2m}{r}.$$

Như vậy dấu âm là dấu của  $h_{00}$ .

(b) Đôi với sự truyền sáng,  $ds^2 = 0$ . Tọa độ vận tốc của ánh sáng do vậy là

$$\begin{aligned} c' &= \frac{dl}{dt} = \sqrt{\frac{1 + h_{00}}{1 + h_{ii}}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{2m}{r}}{1 \pm \frac{2m}{r}}} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{trường hợp dấu âm của } h_{ii}, \\ \sqrt{\frac{r-2m}{r+2m}} & \text{trường hợp dấu dương của } h_{ii}. \end{cases} \end{aligned}$$

$c'$  như là một hàm của  $r$  được mô tả trên hình 2.4 tương ứng với hai trường hợp dấu âm và dương. Chú ý rằng để  $c'$  có ý nghĩa vật lý ta cần  $r \geq 2m$  trong trường hợp dấu dương. Khi một sóng phẳng điện từ (ánh sáng) di qua một vật thể rất nặng, vận tốc của nó  $c'$  sẽ giảm đi. Hiệu ứng này sẽ không tính đến nếu dấu âm được sử dụng cho  $h_{ii}$ . Do vậy dấu dương sẽ phải dùng cho hệ số của  $dl^2$ .



2013

Phác hoạ sự rút ra các phương trình Einstein bắt đầu từ giả thiết rằng các định luật hấp dẫn có dạng tenxơ  $K_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$

(a) Chỉ ra các điều kiện mà  $K_{\mu\nu}$  phải thỏa mãn.

(b) Tìm tổ hợp duy nhất của  $R_{\mu\nu}$  và  $g_{\mu\nu} R$  thỏa mãn các điều kiện này với sai khác là một thừa số chung.

(c) Tìm hằng số này với yêu cầu là giới hạn trường yếu phi tương đối tính sẽ trở lại lý thuyết Newton (tức là dẫn tới  $\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho$ ). Sử dụng quy ước  $\eta_{00} = -1$ ,  $\eta_{ij} = \delta_{ij}$  đối với metric Minkowski. Để đổi chiều cho trước:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\kappa} + \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda \partial x^\kappa} \right).$$

(Princeton)

**Lời giải:**

(a)  $T_{\mu\nu}$ , phân bố khối lượng trong một thể tích hữu hạn, là một tenxơ đối xứng. Như vậy  $K_{\mu\nu}$  cũng phải là một tenxơ đối xứng. Vì khối lượng được bảo toàn nên  $T_{\mu\nu}$  thỏa mãn phương trình  $T_{\nu,\mu}^\mu = 0$ . Điều này dẫn tới  $K_{\nu,\mu}^\mu = 0$ .

(b) Tenxơ cong Riemann thỏa mãn đồng nhất thức Bianchi

$$R_{\mu\nu\kappa;\gamma}^\lambda + R_{\mu\kappa\gamma;\nu}^\lambda + R_{\mu\gamma\nu;\kappa}^\lambda = 0.$$

**Đưa chỉ số  $\lambda$  xuống dưới dẫn đến**

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa;\gamma} + R_{\lambda\mu\kappa\gamma;\nu} + R_{\lambda\mu\gamma\nu;\kappa} = 0,$$

**hoặc, qua đổi xứng lệch của Tenxơ Riemann,**

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa;\gamma} - R_{\lambda\mu\gamma\kappa;\nu} - R_{\mu\lambda\gamma\nu;\kappa} = 0.$$

Nhân các số hạng với  $g^{\lambda\kappa} g^{\mu\nu}$  và lấy tổng, ta có

$$g^{\mu\nu} R_{\mu\nu\kappa;\gamma}^\lambda - g^{\mu\nu} R_{\mu\gamma\kappa;\nu}^\lambda - g^{\lambda\kappa} R_{\lambda\gamma\nu;\kappa}^\nu = 0,$$

hay

$$g^{\mu\nu} R_{\mu\nu\gamma;\gamma} - g^{\mu\nu} R_{\mu\gamma\gamma;\nu} - g^{\lambda\kappa} R_{\lambda\gamma\gamma;\kappa} = 0,$$

và cuối cùng,  $R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ ,

$$R_{\gamma\gamma} - R_{\gamma\gamma}^\nu - R_{\gamma\gamma}^\kappa = 0.$$

tức là,

$$R_{;\gamma} - 2R_{\gamma;\kappa}^{\kappa} = 0 ,$$

hay

$$\left( R_{\nu}^{\mu} - \frac{1}{2}\delta_{\nu}^{\mu}R \right)_{;\mu} = 0 .$$

Về trái có dạng  $K_{\nu;\mu}^{\mu}$ . Như vậy

$$K_{\nu}^{\mu} = \alpha \left( R_{\nu}^{\mu} - \frac{1}{2}\delta_{\nu}^{\mu}R \right)$$

ở đây  $\alpha$  là một hằng số vô hướng. Thành phần hiệp biến là

$$\begin{aligned} K_{\mu\nu} &= \alpha g_{\mu\lambda} \left( R_{\nu}^{\lambda} - \frac{1}{2}\delta_{\nu}^{\lambda}R \right) \\ &= \alpha \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right) \end{aligned}$$

Chú ý rằng do

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu\kappa}^{\kappa} = g^{\lambda\kappa}R_{\lambda\mu\nu\kappa} = g^{\lambda\kappa}R_{\mu\lambda\nu\kappa} \\ &= g^{\lambda\kappa}R_{\kappa\nu\mu\lambda} = R_{\nu\mu\lambda}^{\lambda} = R_{\nu\mu} . \end{aligned}$$

nên  $K_{\mu\nu}$  có tính đối xứng theo yêu cầu.

(c) Trong một trường hấp dẫn yếu, không gian về cơ bản có tính Oclit và tensor metric có các thành phần

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

với  $g_{\mu\nu} = 0$  for  $\mu \neq \nu$ ,  $\eta_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ ,  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ , ngoại trừ

$$g_{00} = - \left( 1 + \frac{2\Phi}{c^2} \right) .$$

ở đây  $\Phi$  là thế Newton vô hướng.

Tensor khối lượng được tính bởi

$$T_{\mu\nu} = \rho c^2 u_{\mu} u_{\nu} .$$

ở đây  $\rho$  là mật độ khói lượng và  $u_\alpha$  là vận tốc trong không gian bốn chiều. Nếu phân bố khói lượng là tinh,

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0, \quad u_0 = -1.$$

Như vậy tất cả các giá trị  $T_{\mu\nu} = 0$  ngoại trừ  $T_{00} = \rho c^2$ .

Tenxơ Ricci  $R_{\mu\nu}$  được tính bởi

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= g^{\lambda\kappa} R_{\lambda\mu\nu\kappa} \\ &= g^{\lambda\lambda} R_{\lambda\mu\nu\lambda} \\ &= \frac{1}{2} g^{\lambda\lambda} \left( \frac{\partial^2 g_{\lambda\lambda}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\lambda}}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} + \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda \partial x^\lambda} \right) \\ &\approx \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 h_{\lambda\lambda}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 h_{\mu\lambda}}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 h_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} + \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda \partial x^\lambda} \right). \end{aligned}$$

Đặc biệt, khi  $h_{\mu\nu}$  không phụ thuộc vào  $x^0$  đối với một trường tinh, ta có

$$R_{00} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda \partial x^\lambda} = \frac{1}{2} \nabla^2 h_{00} = \frac{1}{c^2} \nabla^2 \Phi.$$

Trong phương trình Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{\alpha} T_{\mu\nu},$$

Nâng chỉ  $\mu$  lên dẫn đến

$$R_\nu^\mu - \frac{1}{2} \delta_\nu^\mu R = \frac{8\pi G}{\alpha} T_\nu^\mu.$$

Rút gọn các chỉ số  $\mu, \nu$  dẫn đến

$$R - 2R = \frac{8\pi G}{\alpha} T.$$

Phương trình Einstein có thể được viết lại thành

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{\alpha} \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right).$$

Đặc biệt ta có

$$R_{00} = \frac{4\pi G}{c^2} T_{00}$$

do  $T = g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta} = g^{00}T_{00} \approx -T_{00}$ , hoặc

$$\nabla^2\Phi = \frac{4\pi G\rho c^4}{\alpha}.$$

So sánh với phương trình Newton

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$$

dẫn đến

$$\alpha = c^4.$$

### 2014

Phản tử đường của một ngôi sao tương đối tính đối xứng cầu và tĩnh có thể được viết như sau

$$ds^2 = e^{2\Phi(r)}dt^2 - \frac{dr^2}{1 - r^2Y(r)} - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\varphi^2.$$

ở đây  $\Phi$  và  $Y$  là các hàm của  $r$ . Mật độ khối riêng là  $\rho(r)$ , áp suất là  $p(r)$ , và mật độ số hạt riêng là  $n(r)$ .

(a) Qua hai hàm cho trước trong phản tử khoảng hãy rút ra các biểu thức cho khối lượng của ngôi sao và dịch chuyển về phía đối tại tâm ngôi sao khi được do bởi một người quan sát tại một khoảng cách rất xa.

(b) Qua các hàm cho trước  $\Phi$ ,  $Y$  và  $n$ , hãy tính tổng số các hạt baryon trong ngôi sao?

(c) Qua các hàm cho trước, hãy đưa ra điều kiện cân bằng tĩnh?

(Princeton)

Lời giải:

(a) Yếu tố thể tích của không gian là

$$dV = \sqrt{-g}dx^1dx^2dx^3.$$

ở đây

$$g = \det g_{\mu\nu} = -\frac{e^{2\Phi}r^4\sin^2\theta}{1 - r^2Y(r)},$$

Như vậy khối lượng của ngôi sao là

$$\begin{aligned} M &= \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sqrt{-g} \rho(r) dr d\theta d\varphi \\ &= 4\pi \int_0^R \frac{\rho(r) e^\Phi r^2}{\sqrt{1 - r^2 Y(r)}} dr . \end{aligned}$$

Ở lân cận tâm ngôi sao, thời gian riêng địa phương  $\tau_0$  liên hệ với tọa độ thời gian  $t$  bởi hệ thức

$$d\tau_0 = \sqrt{g_{00}(0)} dt .$$

Tương tự đối với người quan sát tại một khoảng cách  $r$  rất xa, khoảng thời gian riêng địa phương là

$$d\tau = \sqrt{g_{00}(r)} dt ,$$

Như vậy

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{d\tau}{d\tau_0} = \sqrt{\frac{g_{00}(r)}{g_{00}(0)}} = \exp[\Phi(r) - \Phi(0)] ,$$

và độ dịch chuyển về phía phía đó là

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \exp[\Phi(r) - \Phi(0)] - 1 .$$

(b) Vectơ bốn chiều của mật độ dòng - số hạt baryon là

$$J^\alpha = n(r) u^\alpha ,$$

ở đây  $u^\alpha$  là vectơ bốn chiều  $\frac{dx^\alpha}{d\tau}$ , và tổng số baryon trong ngôi sao là

$$N = \int_0^R \sqrt{-g} J^0 dr d\theta d\varphi .$$

Do  $J^0 = n(r) \frac{dx^0}{d\tau} = \frac{n(r)}{\sqrt{g_{00}}} = n(r) e^{-\Phi}$ , ta có

$$N = 4\pi \int_0^R \frac{n(r) r^2}{\sqrt{1 - r^2 Y(r)}} dr .$$

(c) Phương trình cân bằng thủy tĩnh là

$$-\frac{\partial p}{\partial x^\mu} = (p + \rho) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \ln \sqrt{g_{00}} .$$

Vì  $p, \rho, g_{00}$  tất cả đều chỉ phụ thuộc vào một biến  $r$ , đặt  $\mu = 1$  trong phương trình trên ta thu được

$$\begin{aligned} -\frac{dp(r)}{dr} &= [p(r) + \rho(r)] \frac{d}{dr} \ln e^{\Phi(r)} \\ &= [p(r) + \rho(r)] \frac{d\Phi(r)}{dr}. \end{aligned}$$

2015

Hệ mặt trời được mô tả chính xác bởi metric Schwarzschild

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2GM}{rc^2}} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2),$$

ở đây  $M$  là khối lượng của Mặt Trời,  $t$  là tọa độ thời gian,  $r$  là tọa độ bán kính, và  $\theta, \varphi$  là các góc cực.

Một xung radio được gửi từ Trái Đất, bị phản xạ lại tại một vệ tinh của Mộc tinh (vệ tinh coi như một chất diềm), và được nhận lại trên Trái Đất. Mộc tinh cách Mặt Trời một khoảng  $r_2$  và Trái Đất một khoảng  $r_1$ . Giả thiết rằng Mộc tinh ở phía bên kia của Mặt Trời so với chúng ta. Hãy tính sự trễ do hấp dẫn của thời gian đi về của xung radio dưới dạng một hàm của  $r_0$ , theo bậc thấp nhất của  $G$ . Hãy đánh giá sơ bộ độ lớn của hiệu ứng này, cho biết

$$\text{khối lượng Mặt Trời } \approx 2 \times 10^{33} \text{ gm},$$

$$\text{bán kính Mặt Trời } \approx 7 \times 10^{10} \text{ cm},$$

$$\text{khoảng cách Trái Đất-Mặt Trời } \approx 1,5 \times 10^{13} \text{ cm},$$

$$\text{khoảng cách Mặt Trời-Mộc tinh } \approx 8 \times 10^{13} \text{ cm},$$

$$G \approx 6,67 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ gm s}^2.$$

(Princeton)

Lời giải:

Đặt

$$x^0 = t, \quad x^1 = r, \quad x^2 = \theta, \quad x^3 = \varphi.$$

Khi đó

$$g_{00} = -c^2 \left(1 - \frac{k}{r}\right), \quad g_{11} = \left(1 - \frac{k}{r}\right)^{-1}, \quad g_{22} = r^2,$$

$$g_{33} = r^2 \sin^2 \theta, \quad g_{\mu\nu} = 0 \text{ với } \mu \neq \nu.$$

ở đây  $k = \frac{2GM}{c^2}$ . Để thuận tiện ta chọn các tọa độ sao cho Trái Đất (E), Mặt Trời (S) và Mộc tinh (J) nằm trên mặt phẳng  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Các phương trình của đường trắc địa theo đó xung radio lan truyền là,

$$\frac{d}{ds} \left( g_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{ds} \right) = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta,\mu} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds},$$

ở đây  $s$  là một tham số quỹ đạo, cho hai tích phân đầu,

$$\begin{aligned} g_{3\nu} \frac{dx^\nu}{ds} &= g_{33} \frac{dx^3}{ds} = r^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{ds} = r^2 \frac{d\varphi}{ds} = \text{constant}, \\ g_{0\nu} \frac{dx^\nu}{ds} &= g_{00} \frac{dx^0}{ds} = -c^2 \left( 1 - \frac{k}{r} \right) \frac{dt}{ds} = \text{constant}, \end{aligned}$$

do

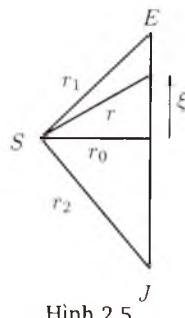
$$g_{\alpha\beta,3} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \varphi} = 0, \quad g_{\alpha\beta,0} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial t} = 0.$$

Lấy tỷ số giữa hai tích phân dẫn tới

$$\frac{r^2}{1 - \frac{k}{r}} \frac{d\varphi}{dt} = F, \quad \text{một hằng số.}$$

Đối với các sóng radio,  $ds^2 = 0$  và metric Schwarzschild rút gọn thành

$$\left( 1 - \frac{k}{r} \right) - \frac{1}{c^2} \left[ \left( 1 - \frac{k}{r} \right)^{-1} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{F^2}{r^2} \left( 1 - \frac{k}{r} \right)^2 \right] = 0.$$



Hình 2.5

Các vị trí tương đối của E, S, J được mô tả trên hình 2.5, ở đây  $r_0 \ll r_1, r_2$ . Tại  $r_0$ , xung radio tiến gần Mặt Trời nhất,  $\frac{dr}{dt} = 0$  và phương trình cuối cùng ở trên dẫn đến

$$F = cr_0 \left(1 - \frac{k}{r_0}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Do đó toạ độ tốc độ của xung,  $c'$ , được tính bởi

$$\begin{aligned} c'^2 &= \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \\ &= \left(1 - \frac{k}{r}\right)^2 c^2 + kr \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \\ &= \left(1 - \frac{k}{r}\right)^2 c^2 \left[1 + \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \left(1 - \frac{k}{r_0}\right)^{-1} \frac{k}{r}\right]. \end{aligned}$$

hay

$$c' \approx \left(1 - \frac{k}{r}\right) c,$$

tính đến bậc nhất của  $\frac{k}{r}$  và  $\frac{r_0}{r}$ .

Thời gian di về của xung nếu Mặt Trời không có một tác dụng nào lên vận tốc của ánh sáng là

$$T_0 = \frac{2}{c} \left( \sqrt{r_1^2 - r_0^2} + \sqrt{r_2^2 - r_0^2} \right),$$

trong khi thời gian thực tế là

$$T = 2 \int_0^{\sqrt{r_1^2 - r_0^2}} \frac{d\xi}{c'} + 2 \int_0^{\sqrt{r_2^2 - r_0^2}} \frac{d\xi}{c'},$$

ở đây  $\xi = \sqrt{r^2 - r_0^2}$ . Với  $d\xi = \frac{r dr}{\xi}$ ,

$$\begin{aligned} T &\approx \frac{2}{c} \left[ \int_{r_0}^{r_1} \left(1 + \frac{k}{r}\right) \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - r_0^2}} + \int_{r_1}^{r_2} \left(1 + \frac{k}{r}\right) \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - r_0^2}} \right] \\ &= \frac{2}{c} \left[ \sqrt{r_1^2 - r_0^2} + \sqrt{r_2^2 - r_0^2} + k \ln \left( \frac{r_1 + \sqrt{r_1^2 - r_0^2}}{r_0} \right) \right. \\ &\quad \left. + k \ln \left( \frac{r_2 + \sqrt{r_2^2 - r_0^2}}{r_0} \right) \right] \\ &\approx \frac{2}{c} \left[ \sqrt{r_1^2 - r_0^2} + \sqrt{r_2^2 - r_0^2} + k \ln \left( \frac{4r_1 r_2}{r_0^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Như vậy thời gian trễ là

$$\Delta T = T - T_0 \approx \frac{4GM}{c^3} \ln \left( \frac{4r_1 r_2}{r_0^2} \right) .$$

Cho  $r_0 \simeq$  bán kính của Mặt Trời và sử dụng các dữ liệu đã cho ta tìm được

$$\Delta T = 2,7 \times 10^{-4} \text{ s.}$$

## 2016

Một phép biến đổi bảo giác của không - thời gian là một phép biến đổi ở đó metric  $g_{ab}$  của không - thời gian gốc bị chuyển thành metric  $\tilde{g}_{ab}$  của không - thời gian mới liên hệ với nhau bằng biểu thức

$$\tilde{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab} ,$$

ở đây  $\Omega$  là một hàm của các tọa độ không - thời gian  $x^a$ .

(a) Giải thiết trong một không - thời gian cũ ta có nghiệm của phương trình Maxwell không có số hạng nguồn là

$$\nabla_a F^{ab} = 0, \quad \nabla_{[a} F_{bc]} = 0 .$$

$F$  là tensor cường độ trường phản đối xứng. Hãy chứng tỏ rằng  $F_{ab}$  cũng là một nghiệm của các phương trình này trong không - thời gian mới với metric  $\tilde{g}_{ab}$ . (Lưu ý rằng  $\Gamma_{ac}^a = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_c (\sqrt{g})$  ở đây  $g = -\det(g_{ab})$ .)

(b) Metric của một không - thời gian Robertson-Walker  $\kappa = 0$  đôi khi được viết là

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + \left( \frac{t}{t_0} \right)^{2/3} (dx^2 + dy^2 + dz^2) .$$

Hãy chứng tỏ rằng không - thời gian này là bảo giác đối với không thời gian Minkowski.

(c) Bằng cách xây dựng các nghiệm của phương trình Maxwell trong không gian Minkowski, hãy tìm một công thức cho sự dịch chuyển về phía dò của ánh sáng được phát ra từ một thiên hà tại  $t = t_1$ , và được quan sát thấy bởi một người quan sát tại  $t = t_2$ . Giải thiết cả nguồn và người quan sát đều đứng yên so với tọa độ thời gian  $t$  cùng chuyển động.

(Princeton)

**Lời giải:**

(a) Do  $\bar{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab}$ , ta có  $\bar{g}^{ab} = \Omega^{-2} g^{ab}$  và  $\bar{g} = -\det(\bar{g}_{ab}) = -\det(\Omega^2 g_{ab}) = -\Omega^8 \det(g_{ab}) = \Omega^8 g$ . Ngoài ra, với một tensor bất đối xứng  $T^{\alpha\beta}$  ta có

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\sqrt{\bar{g}} T^{\alpha\beta}) .$$

Vậy trong không - thời gian mới ta có

$$\begin{aligned}\hat{\nabla}_a F^{ab} &= \hat{\nabla}_a (\bar{g}^{al} \bar{g}^{bm} F_{lm}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} \frac{\partial}{\partial x^a} (\sqrt{\bar{g}} \Omega^{-4} g^{ul} g^{bm} F_{lm}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} \frac{\partial}{\partial x^a} (\sqrt{g} F^{ab}) \\ &= \frac{1}{\Omega^4} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^a} (\sqrt{g} F^{ab}) = \frac{1}{\Omega^4} \nabla_a F^{ab} = 0\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}\hat{\nabla}_{[a} F_{bc]} &= \frac{\partial F_{bc}}{\partial x^a} + \frac{\partial F_{ca}}{\partial x^b} + \frac{\partial F_{ab}}{\partial x^c} \\ &= \nabla_{[a} F_{bc]} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Do vậy,  $F_{ab}$  cũng là một nghiệm của phương trình Maxwell không có số hạng nguồn trong không - thời gian mới.

(b) Viết lại metric của không thời gian Robertson-Walker thành

$$\begin{aligned}ds^2 &= \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}} \left[ -c^2 \left(\frac{t_0}{t}\right)^{\frac{2}{3}} dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \right] \\ &= a^2(t) [-d\tau^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2] \\ &= \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,\end{aligned}$$

ở đây

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad ad\tau = cdt.$$

ta thấy rằng metric này trở thành metric Minkowski nếu

$$g_{\mu\nu} = \Omega^2 \eta_{\mu\nu}$$

với  $\Omega^2 = a^2(t)$ . Do

$$\tau = c \int \frac{dt}{a(t)} = c \int \left( \frac{t_0}{t} \right)^{\frac{1}{3}} dt = \frac{3c}{2} t_0^{\frac{1}{3}} t^{\frac{2}{3}},$$

cho hằng số của tích phân bằng không bằng cách đặt lại các gốc thời gian, ta có

$$\Omega^2 = \left( \frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3}} = \frac{2\tau}{3ct_0}.$$

Như vậy không - thời gian Robertson-Walker mà tensor metric của nó là  $g_{\mu\nu}$ , là bảo giác đối với không thời gian Minkowski có tensor metric  $\eta_{\mu\nu}$ , phép biến đổi là

$$g_{\mu\nu} = \frac{2\tau}{3ct_0} \eta_{\mu\nu}.$$

(c) Đôi với ánh sáng,  $ds = 0$  và như vậy

$$a^2(d\tau^2 - dr^2) = 0,$$

ở đây  $dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ , hoặc

$$dr = d\tau,$$

tức là

$$r = \tau + \text{constant}.$$

Lấy gốc tọa độ tại nguồn sáng và coi người quan sát tại vị trí  $r$ , cả hai đều ở trạng thái đứng yên đối với hệ quy chiếu cùng chuyển động có thời gian  $t$ . Khoảng thời gian giữa hai sóng liên tiếp nhau là

$$dt_1 = \frac{a(t_2)}{c} d\tau$$

tại nguồn và

$$dt_2 = \frac{a(t_2)}{c} d\tau$$

tại người quan sát. Như vậy

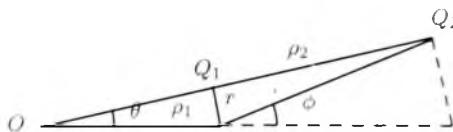
$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{cdt_2}{cdt_1} = \frac{a(t_2)}{a(t_1)} = \left( \frac{t_2}{t_1} \right)^{\frac{1}{3}},$$

và sự dịch về phía đó là

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} = \left( \frac{t_2}{t_1} \right)^{\frac{1}{3}} - 1.$$

2017

Gần đây, một quasar “kép” được phát hiện bao gồm hai hình ảnh không phân biệt được với nhau, cách nhau một khoảng cách góc bằng 6 giây góc. Một cách giải thích cho là chúng ta nhìn thấy một quasar nhưng được tạo ảnh thành hai do có một thấu kính hấp dẫn xen giữa. Để phân tích hiện tượng này, giả thiết rằng người quan sát, thiên hà ở giữa, và quasar hoàn toàn nằm trên một đường thẳng như chỉ ra trên hình 2.6.



Hình 2.6

Ánh sáng từ quasar bị cong đi bởi trường hấp dẫn của thiên hà trước khi di tới chúng ta. Góc  $\phi$ , khi được đo trong hệ quy chiếu đứng yên của thiên hà, được cho bởi  $\phi = 4M/r$ , ở đây  $M$  là khối lượng của thiên hà và  $r$  là tham số ngắm của tia sáng. Như vậy, khi được thấy bởi chúng ta, quasar này là một vòng tròn đường kính trung bình một cung  $2\theta$ . Vũ trụ có dạng hình học được mô tả bởi metric

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2 \theta d\phi^2) .$$

Thừa số tỷ lệ là  $a(t) \propto t^{2/3}$ . Quasar phát ra bức xạ tại  $t = t_2$ , đi qua thiên hà tại thời điểm  $t_1$  và di tới chúng ta tại  $t_0$ .

(a) Tìm một biểu thức liên hệ  $\theta$  với  $M$ ,  $t_0$ ,  $t_1$  và  $t_2$ .

(b) Biểu diễn lại kết quả trên qua các biến số vật lý  $M$ , độ dịch về phía đở của thiên hà,  $z_2$ , độ dịch về phía đở của quasar,  $z_1$ , và thời gian Hubble  $H$ . (Nhớ rằng  $H = [\frac{d}{dt} \ln a]_{t=t_0}$ )

(Princeton)

Lời giải:

Đối với hệ quy chiếu đứng yên của thiên hà có gốc tại vị trí O của người quan sát và đặt tọa độ bán kính của thiên hà  $Q_1$  là  $\rho_1$  và tọa độ bán kính của quasar  $Q_2$  là  $\rho_2$ . Hiệu ứng của sự giãn nở của vũ trụ được tính vào hệ số tỷ lệ  $a(t)$  sao cho  $\rho_1$  và  $\rho_2$  không thay đổi theo thời gian. Vì

$$\theta = \frac{r}{a(t_1)\rho_1}, \quad \phi - \theta = \frac{r}{a(t_1)(\rho_2 - \rho_1)} .$$

ta có

$$\theta = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} \phi ,$$

với

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{4M}{r} = \frac{4M}{a(t_1)\rho_1\theta} , \\ \theta &= \left[ \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1\rho_2} \cdot \frac{4M}{a(t_1)} \right]^{1/2} .\end{aligned}$$

Đối với ánh sáng  $ds^2 = 0$ . Vì ánh sáng truyền xuyên tâm nên metric trở thành

$$-dt^2 + a^2(t)d\rho^2 = 0 .$$

Như vậy với  $a(t) \propto t^{\frac{2}{3}}$ ,

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \int_0^{\rho_1} d\rho = \int_{t_2}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = A \int_{t_1}^{t_0} t^{-\frac{2}{3}} dt = 3A(t_0^{\frac{1}{3}} - t_1^{\frac{1}{3}}) , \\ \rho_2 &= \int_{t_2}^{\rho_2} \frac{dt}{a(t)} = 3A(t_0^{\frac{1}{3}} - t_2^{\frac{1}{3}}) ,\end{aligned}$$

ở đây  $A$  là một hằng số. Do đó

$$\theta = \left\{ \frac{4M}{3} \frac{[(t_1/t_2)^{1/3} - 1]}{t_1 \left[ \left( \frac{t_0}{t_1} \right)^{1/3} - 1 \right] \left[ \left( \frac{t_0}{t_2} \right)^{1/3} - 1 \right]} \right\}^{1/2} .$$

(b) Hãy xét các đỉnh sóng ánh sáng liên tiếp nhau phát ra từ một điểm P trên đường OQ<sub>2</sub> tại các tọa độ thời gian  $t, t+dt$  và nhận được tại O ở các thời gian tương ứng  $t_0, t_0+dt_0$ . Vậy

$$d\rho = \frac{dt}{a(t)} ,$$

và như vậy

$$\rho = \int_0^\rho d\rho = \int_t^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t+dt}^{t_0+dt_0} \frac{dt}{a(t)} .$$

Do  $dt, dt_0$  là các đại lượng nhỏ, điều này có nghĩa là

$$\frac{dt_0}{a(t_0)} = \frac{dt}{a(t)} .$$

tức là  $\frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{dt_0}{dt} = \frac{a(t_0)}{a(t)}$ . Do đó, độ dịch về phía dưới  $z$  được tính bởi

$$1 + z = \frac{\lambda_{\text{quan sát được}}}{\lambda_{\text{phát ra}}} = \frac{a(t_0)}{a(t)} = \left(\frac{t_0}{t}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Đặc biệt,

$$z_1 = \left(\frac{t_0}{t_1}\right)^{\frac{2}{3}} - 1, \quad z_2 = \left(\frac{t_0}{t_2}\right)^{\frac{2}{3}} - 1.$$

Vậy với

$$H = \left(\frac{d}{dt} \ln a\right)_{t=t_0} = \left(\frac{1}{a} \frac{da}{dt}\right)_{t=t_0} = \frac{2}{3t_0},$$

ta có

$$\theta = \sqrt{\frac{2MH(1+z_1)[(1+z_2)^{\frac{1}{2}} - (1+z_1)^{\frac{1}{2}}]}{[(1+z_2)^{\frac{1}{2}} - 1][(1+z_1)^{\frac{1}{2}} - 1]}}.$$

## 2018

Metric bên ngoài một lỗ đen được cho bởi

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

ở đây  $\theta, \varphi$  là các tọa độ cực cầu,  $r$  là tọa độ bán kính và  $t$  là một tọa độ thời gian.

(a) Hãy chứng minh rằng một hạt không có khối lượng chuyển động trong mặt  $\theta = \pi/2$  sẽ chuyên động theo một quỹ đạo sao cho

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = 3u^2$$

ở đây  $u = m/r$ .

(b) Tìm một quỹ đạo tròn cho các photon trong mặt phẳng này. Quỹ đạo này có bền khi có các nhiễu loạn nhỏ tác động hay không?

Ký hiệu Christoffel được cho bởi

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}g^{ad}(\partial_b g_{dc} - \partial_d g_{cb} + \partial_c g_{bd}).$$

(Princeton)

Lời giải:

(a) Đặt  $x^0 = t$ ,  $x^1 = r$ ,  $x^2 = \theta$ ,  $x^3 = \varphi$ , ta có

$$g_{00} = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right), \quad g_{11} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}, \quad g_{22} = r^2, \\ g_{33} = r^2 \sin^2 \theta, \quad g_{\mu\nu} = 0 \quad \text{với } \mu \neq \nu.$$

Chuyển động của hạt giói hạn trong mặt phẳng  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , do vậy  $\sin \theta = 1$ ,  $d\theta = 0$ . Vì  $g_{\mu\nu}$  không phụ thuộc tường minh vào  $\varphi$  và  $t$  nên các phương trình trắc địa

$$\frac{d}{ds} \left( g_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{ds} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds}$$

có hai tích phân đầu:

$$\frac{d}{ds} \left( g_{33} \frac{dx^3}{ds} \right) = 0, \quad \text{hay} \quad r^2 \frac{d\varphi}{ds} = h, \quad \text{một hằng số}, \\ \frac{d}{ds} \left( g_{00} \frac{dx^0}{ds} \right) = 0, \quad \text{hay} \quad \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \frac{dt}{ds} = l, \quad \text{một hằng số}.$$

Vì hạt không có khối lượng nó chuyển động với vận tốc ánh sáng và đường đi của nó là đường trắc địa không

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0,$$

tức là

$$l^2 - \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - \frac{h^2}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) = 0.$$

Ở đây  $s$  được xem như là một biến độc lập bất kỳ. Đặt  $u = \frac{m}{r}$ . Khi đó

$$\frac{dr}{ds} = -\frac{m}{u^2} \frac{du}{ds}$$

và phương trình trên trở thành

$$l^2 - \frac{m^2}{u^4} \left(\frac{du}{ds}\right)^2 - \frac{h^2 u^2}{m^2} (1 - 2u) = 0,$$

hay

$$l^2 - \frac{h^2}{m^2} \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 - \frac{h^2 u^2}{m^2} (1 - 2u) = 0.$$

vì

$$\frac{du}{ds} = \frac{du}{d\varphi} \frac{d\varphi}{ds} = \frac{hu^2}{m^2} \frac{du}{d\varphi} .$$

Vì phân theo  $\varphi$  ta được

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = 3u^2 .$$

(b) Đối với quỹ đạo tròn,  $u = \text{hằng số}$  và phương trình quỹ đạo cho

$$u_0 = \frac{1}{3}, \quad \text{hay} \quad r_0 = 3m .$$

Đối với các nhiễu loạn nhỏ trên quỹ đạo này, đặt  $u = u_0 + u'$ , ở đây  $u' \ll u_0$ , và phương trình quỹ đạo cho

$$\frac{d^2u'}{d\varphi^2} + u_0 + u' \approx 3u_0^3 + 6u_0u' ,$$

hoặc

$$\frac{d^2u'}{d\varphi^2} - u' = 0 ,$$

Phương trình này có nghiệm tổng quát

$$u' = Ae^\varphi + Be^{-\varphi} ,$$

$A, B$  là các hằng số. Vì  $u'$  không có tính tuần hoàn vì thế quỹ đạo không bền đổi với các nhiễu loạn nhỏ.

## 2019

(a) Giải thích ngắn gọn tại sao trong thuyết tương đối rộng của Einstein không thể tồn tại các bức xạ hấp dẫn đơn cực hoặc lưỡng cực.

(b) Giả thiết có hai ngôi sao đặc, mỗi ngôi sao có khối lượng của Mặt Trời, chuyển động theo một quỹ đạo tròn quay quanh nhau với bán kính bán kính Mặt Trời. Tốc độ tiêu hao năng lượng do phát xạ hấp dẫn từ hệ này gần đúng là bao nhiêu? Khoảng thời gian phá vỡ quỹ đạo này là bao nhiêu? Sử dụng các giá trị

khối lượng Mặt Trời  $= 2 \times 10^{33}$  gm,

bán kính Mặt Trời  $= 7 \times 10^{10}$  cm,

$$G = 6,7 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{gm}^{-1} \text{s}^{-2} .$$

$$c = 3 \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1} .$$

(Princeton)

**Lời giải:**

(a) Năng lượng khôi lượng toàn phần của một hệ cô lập được bảo toàn, vậy không thể phát xạ bức xạ hấp dẫn đơn cực. Cũng như vậy, do xung lượng toàn phần của một hệ cô lập được bảo toàn nên đạo hàm cấp hai theo thời gian của mômen lưỡng cực khôi lượng  $\sum mr$  bằng không, vì thế không thể phát xạ bức xạ hấp dẫn lưỡng cực. Bức xạ hấp dẫn da cực thấp nhất là bức xạ từ cực.

(b) Đối với một hệ hai ngôi sao trong một quỹ đạo tròn quanh một khôi tâm chung, tốc độ tiêu hao năng lượng do bức xạ của các sóng hấp dẫn là

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{32G^4}{5c^5r^5}(m_1m_2)^2(m_1 + m_2)$$

ở đây  $r$  là khoảng cách giữa hai ngôi sao này là một hằng số đối với chuyển động trên quỹ đạo tròn. Với  $m_1 = m_2 = m$  và với các dữ liệu đã cho ta có

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{64G^4}{5c^5r^5}m^5 = 1,57 \times 10^{31} \text{ erg s}^{-1}.$$

Với

$$E = -\frac{Gm^2}{2r},$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{2r^2}{Gm^2} \frac{dE}{dt} = -\frac{128Gm^3}{5c^5r^3}.$$

Do  $\frac{dr}{dt}$  là tốc độ hai ngôi sao tiến tới gần nhau, nên thời gian để phá vỡ hoàn toàn quỹ đạo này là

$$\tau = \int_r^0 \frac{dr}{\left(\frac{dr}{dt}\right)} = -\frac{5c^5}{128G^3m^3} \int_r^0 r^3 dr$$

$$= \frac{5c^5}{512G^3m^3} r^4 = 2,4 \times 10^{15} \text{ s.}$$

## 2020

(a) Trong thuyết tương đối rộng, một nguồn có thể phát bức xạ hấp dẫn đơn cực đối xứng cầu được không? Giải thích ngắn gọn.

- (b) Một nguồn có thể phát bức xạ hấp dẫn lưỡng cực được không? Giải thích ngắn gọn.
- (c) Một nguồn có thể phát bức xạ từ cực được không? Giải thích ngắn gọn.
- (d) Trong thuyết tương đối rộng một mô hình vũ trụ khép kín không thể có diện tích tổng cộng khác không. Giải thích tại sao.
- (e) Bảo toàn năng lượng và bảo toàn diện tích có cơ sở rất khác nhau trong thuyết tương đối rộng, bởi vì nói chung ta không thể viết được một năng lượng bảo toàn toàn cục nhưng luôn tồn tại một tích phân điện tích bảo toàn toàn cục. Giải thích ngắn gọn.
- (f) Nếu tồn tại một trường vectơ  $\xi^i$  sao cho  $\xi_{i,j} + \xi_{j,i} = 0$ , thì ta có thể kết hợp nó với tensor năng lượng-ứng suất để định nghĩa một tích phân năng lượng toàn cục. Giải thích.

(Princeton )

### Lời giải:

- (a) Không thể phát bức xạ hấp dẫn đơn cực đối xứng cầu bởi vì năng lượng khối lượng toàn phần của một hệ cô lập không thay đổi theo thời gian.
- (b) Không thể phát bức xạ hấp dẫn lưỡng cực bởi vì xung lượng toàn phần của một hệ cô lập không thay đổi theo thời gian. Đạo hàm cấp hai của mômen lưỡng cực khối theo thời gian bằng không. Đây là yếu tố khác nhau cơ bản giữa bức xạ hấp dẫn và bức xạ điện từ.
- (c) Hệ có thể phát bức xạ từ cực, đây là bức xạ hấp dẫn đa cực khác không bắc thấp nhất. Do tích phân thể tích  $\int \mu(x)x^\alpha x^\beta dV$  của mật độ khối  $\mu$  nhìn chung không bằng không, đạo hàm cấp ba của nó theo thời gian xuất hiện trong biểu thức tổng hao năng lượng cũng khác không.
- (d) Trong một vũ trụ hữu hạn, mỗi phía của một bề mặt cong khép kín bao một vùng xác định. Điện thông tổng cộng qua bề mặt này theo hướng từ ngoài đi vào bằng ở đây  $Q$  là diện tích toàn phần được bao bọc bởi bề mặt và  $\epsilon_0$  là độ điện thẩm của không gian tự do. Điện thông toàn phần này cũng có thể được xem như là di qua bề mặt theo hướng từ trong đi ra do đó diện tích toàn phần ở vùng phía ngoài giới hạn bởi bề mặt là  $-Q$ . Do vậy diện tích toàn phần trong một vũ trụ hữu hạn bằng không.
- (e) Khi không có một trường hấp dẫn và trong các tọa độ Galileo sự bảo toàn năng - xung lượng được biểu diễn bằng

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x^k} = 0 .$$

Khi có mặt của một trường hấp dẫn, biểu thức này được tổng quát hóa thành

$$T_{;\nu}^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\sqrt{-g} T^{\mu\nu}) + \Gamma_{\rho\nu}^\mu T^{\rho\nu} = 0 .$$

ở đây  $T^{\mu\nu}$  là tensor năng - xung lượng hạng 2 và đối xứng,  $-g$  là định thức của tensor  $g_{\mu\nu}$ ,  $\Gamma_{\rho\nu}^\mu$  là ký hiệu Christoffel loại hai. Do sự có mặt của số hạng bên ngoài dấu vi phân, nhìn chung ta không thể quy phương trình trên thành một dạng biểu thị tốc độ biến thiên theo thời gian của một tích phân phân thể tích bằng tích phân bề mặt của một thông lượng đi qua một bề mặt khép kín đó. Do đó nhìn chung ta không thể viết được tích phân năng lượng bảo toàn toàn cục.

Trái lại, mật độ dòng điện tích được biểu diễn bởi một vectơ  $j^\alpha$ , mà sự bảo toàn của nó được cho bởi

$$j_{;\alpha}^\alpha = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\sqrt{-g} j^\alpha) = 0 .$$

Biểu thức này có thể dễ dàng tích phân để tạo thành một tích phân điện tích bảo toàn toàn cục.

(f) Bất kỳ một trường vectơ  $\xi_i$  thoả mãn điều kiện

$$\xi_{i;j} + \xi_{j;i} = 0$$

đều được gọi là trường vec tơ Killing. Từ quy tắc vi phân hiệp biến ta có

$$(\xi_i T^{ik})_{;k} = \xi_{i;k} T^{ik} + \xi_i T^{ik}_{;k} .$$

$T^{ik}$  là tensor năng - xung lượng đối xứng trong đó  $T^{ik}_{;k} = 0$ . Tính chất của  $\xi_i$  dẫn đến

$$\begin{aligned} \xi_{i;k} T^{ik} &= -\xi_{k;i} T^{ik} , \\ \xi_{i;k} T^{ik} &= \xi_{k;i} T^{ki} = \xi_{k;i} T^{ik} . \end{aligned}$$

Do đó

$$\xi_{i;k} T^{ik} = 0 ,$$

và

$$(\xi_i T^{ik})_{;k} = 0 .$$

Vì  $\xi_i T^{ik}$  là một vectơ,

$$(\xi_i T^{ik})_{;k} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{-g} \xi_i T^{ik}) = 0 .$$

Tích phân biểu thức trên theo một thể tích ba chiều mà ở biên  $T^k$  bằng không, ta có

$$\frac{d}{dx^0} \int \sqrt{-g} \xi_i T^{i0} dx^1 dx^2 dx^3 = \text{hằng số.}$$

Nếu vectơ Killing biến đổi theo thời gian thì biểu thức trên là một tích phân bảo toàn năng lượng toàn cục.

## 2021

Trong một gần đúng trường yếu  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ , phương trình chân không Einstein có thể được viết dưới dạng tuyễn tính hóa

$$\square h_{\mu\nu} = \theta_{\mu,\nu} + \theta_{\nu,\mu}$$

(tới bậc nhất của  $h$ ), ở đây  $\theta_\mu = h_{\mu\alpha}^\alpha - \frac{1}{2} h_{\alpha\mu}^\alpha$  (các chỉ số được viết trên và dưới theo metric Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$ , và dấu phẩy chỉ vi phân riêng phần).

(a) Xét phép biến đổi tọa độ  $x_\mu \rightarrow x'_\mu = x_\mu + \varepsilon_\mu(x)$  ( $\varepsilon$  nhỏ) và tìm  $h_{\mu\nu}$  trong hệ tọa độ mới. Xác định xem  $h'_{\mu\nu}$  có phải cũng là một nghiệm của phương trình Einstein, tức là các phương trình chân không tuyễn tính hóa có phải là bất biến chuẩn (gauge) hay không?

(b) Sử dụng (a) để xác định số bậc tự do của một nghiệm sóng phẳng của phương trình đồng nhất  $\square h_{\mu\nu} = 0$  (bởi vì tồn tại một gauge đối với nó  $\theta_\mu = 0$ ).

(Princeton)

**Lời giải:**

(a) Do  $\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} = \delta_\alpha^\mu + \varepsilon_{,\alpha}^\mu$ ,

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu}(x') &= \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} g_{\alpha\beta}(x) \\ &= (\delta_\mu^\alpha + \varepsilon_{,\mu}^\alpha)(\delta_\nu^\beta + \varepsilon_{,\nu}^\beta) g_{\alpha\beta}(x) \\ &\approx g_{\mu\nu}(x) + g_{\alpha\nu}(x)\varepsilon_{,\mu}^\alpha + g_{\mu\beta}(x)\varepsilon_{,\nu}^\beta. \end{aligned}$$

Mặt khác, khai triển Taylor dẫn đến

$$g_{\mu\nu}(x') = g'_{\mu\nu}(x) + g_{\mu\nu,\alpha}(x)\varepsilon^{\alpha\beta}.$$

Do đó

$$g'_{\mu\nu}(x) \approx g_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\nu,\alpha}(x)\varepsilon^{\alpha\beta} + g_{\alpha\nu}(x)\varepsilon_{,\mu}^\alpha + g_{\mu\beta}(x)\varepsilon_{,\nu}^\beta$$

Chỉ giữ lại các số hạng bậc nhất của các đại lượng  $h_{\mu\nu}, \varepsilon^\mu$ , và các vi phân của chúng, ta có

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu,\alpha}\varepsilon^\alpha &\approx h_{\mu\nu,\alpha}\varepsilon^\alpha \approx 0, \\ g_{\alpha\nu}\varepsilon^\alpha_{,\mu} &\approx \eta_{\alpha\nu}\varepsilon^\alpha_{,\mu} \approx \varepsilon_{\nu,\mu}. \end{aligned}$$

Do vậy

$$h'_{\mu\nu} \approx h_{\mu\nu} + \varepsilon_{\nu,\mu} + \varepsilon_{\mu,\nu}$$

hoặc, nâng chỉ số  $\mu$  lên, ta có

$$h'_\nu^\mu \approx h_\nu^\mu + \varepsilon_{\nu,\mu} + \varepsilon_{,\nu}^\mu.$$

Xét

$$\begin{aligned} \square h'_{\mu\nu} &= \square h_{\mu\nu} + \square \varepsilon_{\mu,\nu} + \square \varepsilon_{\nu,\mu} \\ &= \theta_{\mu,\nu} + \theta_{\nu,\mu} + \square \varepsilon_{\mu,\nu} + \square \varepsilon_{\nu,\mu}. \end{aligned}$$

Đo

$$\begin{aligned} \theta'_\mu &= h'_{\mu,\alpha} - \frac{1}{2}h'_{\alpha,\mu} \\ &= h_{\mu,\alpha}^\alpha + \varepsilon_{\mu,\alpha}^{\alpha,\alpha} + \varepsilon_{,\mu\alpha}^\alpha - \frac{1}{2}(h_{\alpha,\mu}^\alpha + \varepsilon_{\alpha,\mu}^{\alpha,\alpha} + \varepsilon_{,\alpha\mu}^\alpha) \\ &= \theta_\mu + \square \varepsilon_\mu \end{aligned}$$

bởi vì

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mu,\alpha}^{\alpha,\alpha} &= \partial^\alpha \partial_\alpha \varepsilon_\mu = \square \varepsilon_\mu, \\ \varepsilon_{\alpha,\mu}^{\alpha,\alpha} &= \partial_\mu \partial^\alpha \varepsilon_\alpha = \partial_\mu \partial_\alpha \varepsilon^\alpha = \varepsilon_{,\alpha\mu}^\alpha \\ &= \varepsilon_{,\mu\alpha}^\alpha, \end{aligned}$$

ta có

$$\begin{aligned} \square h'_{\mu\nu} &= \theta'_{\mu,\nu} - \square \varepsilon_{\mu,\nu} + \theta'_{\nu,\mu} - \square \varepsilon_{\nu,\mu} + \square \varepsilon_{\mu,\nu} + \square \varepsilon_{\nu,\mu} \\ &= \theta'_{\mu,\nu} + \theta'_{\nu,\mu}. \end{aligned}$$

Như vậy  $h'_{\mu\nu}$  cũng là một nghiệm của phương trình Einstein, tức là phương trình trường thỏa mãn bất biến gauge.

(b) Đặt

$$\gamma_\mu^\nu = h_\mu^\nu - \frac{1}{2}\delta_\mu^\nu h,$$

ở đây  $h = h_\alpha^\alpha$ . Vậy thì

$$\begin{aligned}\gamma_{\mu,\nu}^\nu &= h_{\mu,\nu}^\nu - \frac{1}{2}\delta_\mu^\nu h_{,\nu} \\ &= h_{\mu,\alpha}^\alpha - \frac{1}{2}h_{,\mu}^\alpha = \theta_\mu.\end{aligned}$$

Sử dụng một gauge trong đó  $\theta_\mu = 0$ . Khi đó

$$\square h_{\mu\nu} = 0.$$

hoặc

$$\square h_\mu^\nu = 0.$$

Xét một nghiệm biểu diễn một sóng phẳng truyền theo hướng  $+x$ , tức là  $h_\mu^\nu$  là một hàm của  $u = x - t$  (vận tốc ánh sáng  $c$  được tính bằng 1 trong hệ đơn vị đang sử dụng). Do đó  $\gamma_{\mu,\nu}^\nu$  cũng là một hàm của  $u$  và  $\theta_\mu = 0$  được biểu diễn bằng

$$\begin{aligned}\gamma_{\mu,\nu}^\nu &= \frac{\partial \gamma_\mu^0}{\partial x^0} + \frac{\partial \gamma_\mu^1}{\partial x^1} \\ &= \frac{d\gamma_\mu^0}{du} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{d\gamma_\mu^1}{du} \frac{\partial u}{\partial x} \\ &= -\frac{d\gamma_\mu^0}{du} + \frac{d\gamma_\mu^1}{du} = 0.\end{aligned}$$

Tích phân và chú ý rằng hằng số tích phân không đóng góp vào chuyển động sóng và có thể loại bỏ, ta có

$$\gamma_\mu^0 = \gamma_\mu^1, \quad \mu = 0, 1, 2, 3.$$

Ta cũng có thể lựa chọn một phép biến đổi tọa độ

$$x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu(x - t)$$

ở đây  $\varepsilon^\mu$  là một đại lượng nhỏ, và phép biến đổi này cũng sẽ dẫn đến một bài biến gauge. Khi đó vì  $\square \varepsilon_\mu = 0$  ta có

$$\theta'_\mu = \theta_\mu + \square \varepsilon_\mu = \theta_\mu$$

Ta có thể lựa chọn một biến đổi để làm cho  $\gamma_1^0, \gamma_2^0, \gamma_3^0, \gamma_2^2 + \gamma_3^3$  bằng không. Nay giờ với  $\mu \neq \nu$ , thì  $\gamma_\mu^\nu = h_\mu^\nu = h_\nu^\mu$  bởi vì  $g_{\mu\nu}$  đối xứng và  $h_{\mu\nu}$  cũng đối xứng. Như vậy tất cả các số hạng  $\gamma_\mu^\nu$  bằng không ngoại trừ  $\gamma_2^2 = -\gamma_3^3, \gamma_2^3 = \gamma_3^2$ . Do

$h = h_{\alpha}^{\alpha} = 2\gamma_{\alpha}^{\alpha} = 0$ , điều này có nghĩa là  $h_{22} = -h_{33}$ ,  $h_{23} = h_{32}$ . Bởi vậy đối với một nghiệm sóng phẳng chỉ tồn tại hai bậc tự do. Nói cách khác, các sóng hấp dẫn phẳng là các sóng ngang với hai mặt phẳng phân cực.

## 2022

(a) Xét một hạt đang quay (như là một con quay) chuyển động trong một trường hấp dẫn. Không có lực nào khác lực hấp dẫn tác dụng vào nó. Hãy viết và giải thích phương trình mô tả quá trình quay của hạt đó theo thời gian

(b) Xét một lớp cầu mỏng có khối lượng  $M$ , bán kính  $R$  quay chậm với tần số quay  $\omega$ . Metric của trường gây bởi lớp vỏ này có thể được viết như sau

$$d\tau^2 = -c^2 H(r) dt^2 + \frac{1}{H(r)} [dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta (d\varphi - \Omega dt)^2],$$

ở đây  $\Omega = 4GM\omega/3Rc^2$  với  $r < R$ ,  $\Omega \rightarrow 0$  với  $r \rightarrow \infty$ , và

$$H(r) = \begin{cases} 1 - 2GM/r c^2, & r > R \\ 1 - 2GM/Rc^2, & r < R. \end{cases}$$

Đang metric này có giá trị nếu  $GM/Rc^2 \ll 1$ . Xét một hạt quay ở trạng thái nghỉ tại tâm của quả cầu  $r = 0$ . Sử dụng phương trình đã viết trong câu (a) hãy chỉ ra hạt sẽ tiến động với tần số bao nhiêu? Tần số tiến động đó sẽ bằng bao nhiêu nếu  $\omega$  là tần số quay của Trái Đất và  $M$  và  $R$  là khối lượng và bán kính của Trái Đất với  $M \approx 6,0 \times 10^{27}$  gm và  $R \approx 6,4 \times 10^3$  km? Chỉ yêu cầu đánh giá sơ bộ?

Chú ý rằng:  $G = 6,67 \times 10^{-8}$  cm<sup>3</sup>/gm s<sup>2</sup>, và

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} (\partial_{\alpha} g_{\rho\beta} + \partial_{\beta} g_{\rho\alpha} - \partial_{\rho} g_{\alpha\beta}).$$

(Princeton)

Lời giải:

(a) Chuyển động quay của hạt được mô tả bởi phương trình

$$\frac{dS_{\mu}}{d\tau} = \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} S_{\lambda} \frac{dx^{\nu}}{d\tau},$$

ở đây  $S_{\mu}$  là vectơ spin. Về trái là tốc độ thay đổi theo thời gian của vectơ spin còn về phải cho biết tác động của lực hấp dẫn, toàn bộ phương trình mô tả sự tiến động của một vật thể quay khi rơi tự do. Nếu không có lực hấp dẫn,

$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0$ , dẫn đến  $\frac{dS_\mu}{d\tau} = 0$ . Như vậy một hạt khi không chịu tác dụng của một lực nào sẽ có spin không đổi.

(b) Đặt  $x^0 = t$ ,  $x^1 = r$ ,  $x^2 = \theta$ ,  $x^3 = \varphi$ . Vì hạt ở trạng thái nghỉ tại  $r < R$ ,  $H = \text{hằng số}$  và

$$\frac{dx^j}{d\tau} = 0 \quad \text{với } j = 1, 2, 3 .$$

Phương trình chuyển động quy về

$$\frac{dS_\mu}{d\tau} = \Gamma_{\mu 0}^\lambda S_\lambda \frac{dx^0}{d\tau} ,$$

hay

$$\begin{aligned} \frac{dS_i}{dt} &= \Gamma_{i0}^\lambda S_\lambda \\ &= \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_t g_{\rho 0} + \partial_0 g_{\rho i} - \partial_\rho g_{i0}) S_\lambda \\ &= \frac{1}{2} S^\rho (\partial_t g_{\rho 0} - \partial_\rho g_{i0}), \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

do  $g_{\mu\nu}$  không phụ thuộc tường minh vào  $x^0$ . Chú ý rằng  $S_0 = 0$  vì hạt ở trạng thái nghỉ. Phương trình này có thể được viết dưới dạng không gian ba chiều

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{1}{2} \mathbf{S} \times (\nabla \times \boldsymbol{\xi}) \quad (1)$$

với

$$\boldsymbol{\xi}_i = \frac{g_{i0}}{\sqrt{g_{ii}}} .$$

Trong metric đã cho nếu ta đặt  $\varphi' = \varphi - \Omega t$ , thì các phần không gian và thời gian của phần tử khoảng sẽ tách biệt nhau thể hiện lớp vỏ cầu quay với vận tốc góc  $\Omega$  quanh trục  $z$ . Phương trình (1) chỉ ra rằng vectơ spin  $\mathbf{S}$  tiến động với tần số góc

$$\boldsymbol{\Omega}' = -\frac{1}{2} \nabla \times \boldsymbol{\xi} .$$

Do

$$g_{30} = -\frac{\Omega r^2 \sin^2 \theta}{H}, \quad g_{33} = \frac{r^2 \sin^2 \theta}{H} .$$

ta có

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_3 &= -\frac{\Omega r \sin \theta}{\sqrt{H}} \\ &\approx -\Omega r \sin \theta , \end{aligned}$$

bởi vì

$$H^{-\frac{1}{2}} = \left(1 - \frac{2GM}{Rc^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{GM}{Rc^2} \approx 1.$$

Do đó ta có thể viết

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{r} \times \boldsymbol{\Omega}.$$

Khi đó,

$$\boldsymbol{\Omega}' = -\frac{1}{2}\nabla \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\Omega}) = \boldsymbol{\Omega}.$$

Như vậy vận tốc góc tiến động theo phương  $z$  và có độ lớn bằng

$$|\boldsymbol{\Omega}'| = \Omega = \frac{4GM\omega}{3Rc^2}.$$

Để đánh giá sơ bộ ta coi Trái Đất như một lớp vỏ cầu với

$$M = 6,0 \times 10^{27} \text{ g}, \quad R = 6,4 \times 10^8 \text{ cm}.$$

như vậy thì

$$\begin{aligned} \Omega' &= \frac{4 \times 6,67 \times 10^{-8} \times 6 \times 10^{27} \times 2\pi}{3 \times 6,4 \times 10^8 \times (3 \times 10^{10})^2 \times 24 \times 3600} \\ &= 6,74 \times 10^{-14} \text{ rad s}^{-1} \\ &= 1,39 \times 10^{-8} \text{ giây (góc)/s}. \end{aligned}$$

Thực tế, phép biến đổi toa độ

$$t' = t, \quad r' = r, \quad \theta' = \theta, \quad \varphi' = \varphi - \Omega t$$

sẽ dẫn đến một không · thời gian Øclit trong đó  $\mathbf{S}$  là một hằng số. Do đó, trong hệ quy chiếu gốc,  $\mathbf{S}$  sẽ tiến động với một vận tốc góc  $\Omega$  quanh trục  $z$ .

## 2023

Phản tử đường Robertson-Walker đối với không gian tuyệt đối trống,  $T_i^j = 0$  và  $\Lambda = 0$ , là

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left( \frac{dx^2}{1+x^2} + x^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right)$$

với  $a(t) \propto t$ . Hãy chứng tỏ rằng phương trình này mô tả không gian phẳng và tìm phép biến đổi để đưa nó về dạng Minkowski.

(Princeton)

Lời giải:

Phần tử đường có thể được viết dưới dạng

$$(ds)^2 = A(dx^0)^2 + B(dx^1)^2 + C(dx^2)^2 + D(dx^3)^2.$$

ở đây

$$x^0 = t, \quad x^1 = x, \quad x^2 = \theta, \quad x^3 = \varphi.$$

với

$$A = 1, \quad B = -\frac{t^2}{1+x^2}, \quad C = -t^2 x^2, \quad D = -t^2 x^2 \sin^2 \theta.$$

để tiện  $a(t)$  được lấy bằng  $t$ . Để chứng minh không gian này là phẳng ta phải chỉ ra rằng độ cong hay là tenxơ Riemann-Christoffer bị triệt tiêu

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\rho\sigma} &\equiv \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu \partial x^\rho} + \frac{\partial^2 g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu \partial x^\rho} - \frac{\partial^2 g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu \partial x^\sigma} - \frac{\partial^2 g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu \partial x^\sigma} \right) \\ &+ g_{\alpha\beta} (\Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \Gamma_{\nu\rho}^\beta - \Gamma_{\mu\rho}^\alpha \Gamma_{\nu\sigma}^\beta) = 0. \end{aligned}$$

ở đây  $\Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \equiv \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} \left( \frac{\partial g_{\lambda\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\lambda\sigma}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x^\lambda} \right)$ , v.v.

Tenxơ độ cong có các tính chất đối xứng

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R_{\nu\mu\rho\sigma}, \quad R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R_{\mu\nu\sigma\rho}, \quad R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\mu\nu}.$$

cũng như thỏa mãn các đồng nhất thứ

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} + R_{\mu\sigma\nu\rho} + R_{\mu\rho\sigma\nu} = 0.$$

Khi đó suy ra rằng tất cả các thành phần  $R_{\mu\nu\rho\sigma}$  trong đó  $\mu = \nu$  hoặc  $\rho = \sigma$  đều bằng không và đối với không gian bốn chiều tenxơ độ cong chỉ có 20 thành phần độc lập sau

$$\begin{array}{cccccccc} 0101 & 0112 & 0202 & 0213 & 0312 & 1212 & 1313 \\ 0102 & 0113 & 0203 & 0223 & 0313 & 1213 & 1323 \\ 0103 & 0123 & 0212 & 0303 & 0323 & 1223 & 2323 \end{array}$$

với  $R_{0123} + R_{0312} + R_{0231} = 0$ .

Không - thời gian Robertson-Walker có

$$\begin{aligned} g_{00} &= A, & g_{11} &= B, & g_{22} &= C, & g_{33} &= D, \\ g_{\mu\nu} &= 0 \text{ với } \mu \neq \nu. \end{aligned}$$

## Ký hiệu

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{2A}, & \beta &= \frac{1}{2B}, & \gamma &= \frac{1}{2C}, & \delta &= \frac{1}{2D}, \\ A_\mu &= \frac{\partial A}{\partial x^\mu}, & B_\mu &= \frac{\partial B}{\partial x^\mu}, & A_{\mu\nu} &= \frac{\partial^2 A}{\partial x^\mu \partial x^\nu} . \text{ v.v}\end{aligned}$$

Bằng tính toán trực tiếp ta tìm được

$$\begin{aligned}R_{0123} &= 0 \\ R_{0102} &= \frac{1}{2}(-A_{12} + \alpha A_1 A_2 + \beta A_1 A_2 + \gamma A_2 C_1) = 0 \\ R_{0101} &= \frac{1}{2}[-A_{11} - B_{00} + \alpha(A_0 B_0 + A_1^2) \\ &\quad + \beta(A_1 B_1 + B_0^2) - \gamma A_2 B_2 - \delta A_3 B_3] \\ &= \frac{1}{2}(-B_{00} + \beta B_0^2) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{2}{1+x^2}\right) = 0.\end{aligned}$$

Vì việc gán các chỉ số là tuỳ ý, ta có thể thu được các thành phần khác bằng cách tráo đổi các chỉ số. Ví dụ,  $R_{0202}$  có thể suy từ  $R_{1010}$  bằng cách tráo đổi

$$(1, B, \beta) \leftrightarrow (2, C, \gamma)$$

dẫn đến

$$\begin{aligned}R_{2020} &= \frac{1}{2}[-A_{22} - C_{00} + \alpha(A_0 C_0 + A_2^2) \\ &\quad + \gamma(A_2 C_2 + C_0^2) - \beta A_1 C_1 - \delta A_3 C_3] \\ &= \frac{1}{2}(-C_{00} + \gamma C_0^2) = \frac{1}{2}(2x^2 - 2x^2) = 0.\end{aligned}$$

Bằng cách này ta tìm thấy tất cả các thành phần  $R_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$ , chứng tỏ rằng không gian này thực tế là phẳng.

Đặt  $r = xt$  và hệ số của  $d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$  trở thành  $-r^2$ . Phần còn lại của phần tử đường có thể được viết lại thành

$$\begin{aligned}dt^2 - \frac{(tdx)^2}{1+x^2} &= dt^2 - \frac{(tdr - rdt)^2}{t^2 + r^2} \\ &= \frac{(tdt + r dr)^2}{t^2 + r^2} - dr^2 \\ &= d\tau^2 - dr^2,\end{aligned}$$

nếu ta đặt

$$\tau = \sqrt{t^2 + r^2}.$$

Do đó, phép biến đổi

$$r = xt, \quad \tau = \sqrt{t^2 + r^2}$$

có thể quy phân tử đường Robertson-Walker về dạng Minkowski.

### 2.3. VŨ TRỤ TƯƠNG ĐỐI TÍNH (2024-2028)

2024

Giả thiết rằng vũ trụ được mô tả bởi một không - thời gian Robertson-Walker  $\kappa = 1$  với metric

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t)dx^2 + \sin^2 x(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

với  $R(t) = R_0 t^{2/3}$  tại thời đại hiện nay.

Một người quan sát tại  $t = t_1$  quan sát một thiên hà ở xa với kích thước riêng là  $D$  nằm vuông góc với đường ngắm tại  $t = t_0$ .

(a) Tính độ dịch về phía dò theo các tham số  $R_0, t_0, t_1$ ?

(b) Tính đường kính góc  $\delta$  của thiên hà theo độ dịch về phía dò.

(c) Chứng minh rằng khi sự dịch về phía dò tăng thì  $\delta$  tiến tới một cực tiểu đối với  $D$  được giữ cố định và sau đó  $\delta$  lại tăng lên.

(Princeton)

**Lời giải:**

(a) Giả thiết trong hệ quy chiếu gắn với thiên hà và người quan sát, các đỉnh sóng kế tiếp nhau của một sóng ánh sáng được phát ra từ thiên hà đó tại thời điểm  $t_0, t_0 + \Delta t_0$  và được thu nhận bởi người quan sát tại thời điểm  $t_1, t_1 + \Delta t_1$ . Đường vũ trụ của mỗi một đỉnh sóng là một đường trắc địa không hướng kính theo đó  $\theta$  và  $\varphi$  là các hằng số sao cho

$$0 = -dt^2 + R^2 dx^2,$$

hay

$$dx = \frac{dt}{R(t)},$$

đọc theo mỗi một đường vũ trụ. Lấy tích phân cho mỗi một đỉnh sóng dẫn đến

$$x_0 = \int_0^{x_0} dx = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{R(t)} = \int_{t_0 + \Delta t_0}^{t_1 + \Delta t_1} \frac{dt}{R(t)}.$$

Do  $\Delta t_0, \Delta t_1$  là các đại lượng nhỏ nên biểu thức trên có nghĩa là

$$\frac{\Delta t_0}{R(t_0)} = \frac{\Delta t_1}{R(t_1)}.$$

Nếu  $\lambda_0, \lambda_1$  là các bước sóng phát ra và thu được thì

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_0} = \frac{\Delta t_1}{\Delta t_0} = \frac{R(t_1)}{R(t_0)}$$

và độ dịch về phía dở là

$$z = \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\lambda_1}{\lambda_0} - 1 = \left( \frac{t_1}{t_0} \right)^{\frac{1}{3}} - 1$$

bởi vì  $R(t) = R_0 t^{\frac{2}{3}}$ .

(b) Đường kính góc của thiên hà được định nghĩa như sau

$$\delta = \frac{D}{R(t_0)x_0} = \frac{D}{R_0 x_0} t_0^{-\frac{2}{3}}.$$

Vì

$$\begin{aligned} x_0 &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{R(t)} = \frac{1}{R_0} \int_{t_0}^{t_1} t^{-\frac{2}{3}} dt = \frac{3}{R_0} \left[ \left( \frac{t_1}{t_0} \right)^{\frac{1}{3}} - 1 \right] t_0^{\frac{1}{3}}, \\ \left( \frac{t_1}{t_0} \right)^{\frac{1}{3}} &= (z + 1)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

tà có

$$\delta = \frac{D}{3t_0[(z + 1)^{\frac{1}{2}} - 1]} = \frac{D(z + 1)^{\frac{1}{2}}}{3t_1[(z + 1)^{\frac{1}{2}} - 1]}.$$

(c) Vi phân phương trình trên ta dẫn đến

$$\frac{d\delta}{dz} = A(z)[(z + 1)^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}],$$

ở đây  $A(z) > 0$ . Do đó  $\frac{d\delta}{dz} \geq 0$  hay  $(z + 1)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{3}{2}$ , hay  $z \geq \frac{5}{4}$ . Với  $z < \frac{5}{4}$ ,  $\frac{d\delta}{dz} < 0$  đường kính góc giảm khi độ dịch về phía dở tăng. Với  $z > \frac{5}{4}$ ,  $\frac{d\delta}{dz} > 0$  và đường kính góc tăng lên khi sự dịch về phía dở tăng. Như vậy đường kính góc đạt cực tiểu tại  $z = \frac{5}{4}$ .

2025

Giả thiết rằng vũ trụ là đẳng hướng và phẳng về mặt không gian. Khi đó metric có dạng

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 d\phi^2).$$

ở đây  $r, \theta, \phi$  là các tọa độ cùng chuyển động. Có nghĩa là bắt kể một thiên hà nào cũng đều có các giá trị  $r, \theta, \phi$  không đổi (bỏ qua những chuyển động bất thường của thiên hà). Vũ trụ được giả thiết bị chiếm chủ yếu bởi vật chất với mật độ  $\rho(t)$  tại thời điểm  $t$ . Dưới những điều kiện đó, các phương trình Einstein là

$$\ddot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho a^2$$

và

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3} \rho a.$$

(a) Từ thực tế là ánh sáng truyền dọc theo các đường trắc địa không, hãy chứng tỏ rằng độ dịch về phía đở trong vũ trụ của các vạch phổ được phát xạ tại thời điểm  $t_e$  và được thu nhận tại thời điểm  $t_0$ , được định nghĩa như sau

$$\frac{\text{bước sóng của vạch phổ thu nhận được}}{\text{bước sóng của vạch phổ phát xạ}} \equiv Z,$$

bằng

$$Z = \frac{a_0}{a_e} - 1,$$

ở đây  $a_0 = a(t_0)$ ,  $a_e = a(t_e)$ .

(b) Trong mô hình vũ trụ thảo luận ở đây một thiên hà cho trước sẽ giảm về kích thước góc khi tăng khoảng cách tới người quan sát-cho đến một khoảng cách tối hạn. Qua giới hạn này kích thước góc sẽ tăng khi khoảng cách tăng. Độ dịch về phía đở  $Z_{th}$  tương ứng với cực tiểu của kích thước góc bằng bao nhiêu?

(Princeton)

Lời giải:

(a) Xét các định sóng kế tiếp nhau của một sóng ánh sáng phát ra từ thiên hà tại  $r = 0$  ở thời điểm  $t_e$ ,  $t_e + \Delta t_e$  và được người quan sát thu tại  $r = r_e$  ở thời điểm  $t_0, t_0 + dt_0$ . Các đường vũ trụ của sóng ánh sáng là các đường trắc địa không và do  $\theta, \phi$  là hằng số, ta có

$$dt^2 = a^2(t)dr^2.$$

hay

$$r_e = \int_0^{r_e} dr = \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e + \Delta t_e}^{t_0 + \Delta t_0} \frac{dt}{a(t)} .$$

Do  $\Delta t_e, \Delta t_0$  là các đại lượng nhỏ, phương trình trên có nghĩa là

$$\frac{\Delta t_e}{a(t_e)} = \frac{\Delta t_0}{a(t_0)} .$$

Do đó,  $\lambda_e$  và  $\lambda_0$ , các bước sóng phát xạ và thu nhận liên hệ với nhau qua biểu thức sau

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{\Delta t_0}{\Delta t_e} = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} = \frac{a_0}{a_e} ,$$

và độ dịch về phía猱 là

$$Z = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{a_0}{a_e} - 1 .$$

(b) Kích thước góc của thiên hà như được quan sát thấy tại  $r$  là

$$\delta = \frac{D}{a(t)r} ,$$

ở đây  $D$  là đường kính riêng của thiên hà và

$$r = \int_t^{t_0} \frac{dt}{a(t)} .$$

Vì  $D$  là hằng số nên để  $\delta$  cực tiểu thì  $a(t)r$  phải là cực đại. Như vậy tại cực tiểu của  $\delta$ ,

$$\frac{d}{dt}(ar) = \dot{a}r + a\dot{r} = \dot{a}r - \frac{a}{a} = 0 .$$

hay

$$r = \frac{1}{\dot{a}} .$$

Vì

$$\ddot{a} = \frac{1}{2} \frac{da^2}{da} ,$$

Hai phương trình Einstein kết hợp lại dẫn đến

$$-\frac{d\rho}{\rho} = 3\frac{da}{a} ,$$

hay

$$\rho a^3 = b, \quad \text{là một hằng số.}$$

Phương trình thứ nhất dẫn đến

$$a^{\frac{1}{2}} da = \sqrt{\frac{8\pi Gb}{3}} dt,$$

Tích phân phương trình trên, ta được

$$a(t) = Ct^{\frac{2}{3}},$$

ở đây  $C = (\frac{6\pi Gb}{3})^{\frac{1}{3}}$  là một hằng số. Như vậy

$$r = \frac{1}{C} \int_t^{t_0} t^{-\frac{2}{3}} dt = \frac{3}{C} \left( t_0^{\frac{1}{3}} - t^{\frac{1}{3}} \right).$$

Do đó, cực tiểu của  $\delta$  xảy ra khi

$$r = \frac{1}{a} = \frac{3}{2C} t_0^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{C} \left( t_0^{\frac{1}{3}} - t^{\frac{1}{3}} \right),$$

tức là tại

$$t_1 = \frac{8}{27} t_0$$

khi

$$z_1 = \frac{a_0}{a_1} - 1 = \left( \frac{t_0}{t_1} \right)^{\frac{2}{3}} - 1 = \frac{5}{4}.$$

2026

Metric Robertson-Walker

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\Omega^2 \right)$$

(ở đây  $\kappa = 0, +1, -1$ , tùy theo không gian ba chiều có độ cong tương ứng là không, dương hoặc âm) dẫn đến phương trình trường Einstein bậc nhất

$$\begin{aligned} \dot{a}^2 + \kappa &= \frac{8\pi G\rho}{3} a^2, \\ \rho a^3 &= \text{hằng số} \end{aligned}$$

đối với một vũ trụ chứa chủ yếu là vật chất với mật độ  $\rho$ .

(a) Tính khoảng cách  $L_r(t)$  từ gốc ( $r = 0$ ) đến một hạt với tọa độ  $r$  tại thời điểm  $t$ , qua  $r$  và  $a(t)$ .

Một khả năng khác là ta có thể xây dựng lý thuyết này dưới dạng Newton cổ điển thuần túy bằng cách bỏ qua độ cong bên trong của một thể tích hình cầu có bán kính đủ nhỏ, tức là giả thiết rằng không gian bên trong quả cầu là phẳng và bắt kẽ một phân bố vật chất dằng hướng nào bên ngoài quả cầu đều không gây ảnh hưởng đến độ cong bên trong quả cầu.

(b) Viết phương trình Newton cho gia tốc của một hạt, hướng về phía gốc, cách gốc một khoảng  $L$ . (Gợi ý: Xét một sự phân bố vật chất đều trong một quả cầu bán kính  $L$ .)

(c) Để bảo toàn vật chất, ta cũng phải có  $\rho a^3 = \text{hằng số}$ . Kết hợp điều này với kết quả tìm được ở câu (b) để xác định các phương trình được thỏa mãn bởi tham số giãn nở  $a(t)$  và so sánh kết quả của bạn với kết quả trong vũ trụ học.

(Princeton)

**Lời giải:**

(a) Khoảng cách từ gốc đến hạt bằng

$$\begin{aligned} L_r(t) &= \int_0^r \sqrt{g_{rr}} dr \\ &= a(t) \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - \kappa r^2}} \\ &= a(t) h(r), \end{aligned}$$

ở đây

$$h(r) = \begin{cases} \arcsin r & (\kappa = 1) \\ r & (\kappa = 0) \\ \operatorname{arcsinh} r & (\kappa = -1) \end{cases}.$$

(b) Vì bất kỳ một phân bố vật chất dằng hướng nào ở bên ngoài một quả cầu không có ảnh hưởng gì đến trường bên trong quả cầu, nên lực hấp dẫn trên một khối lượng đơn vị tác dụng lên một hạt tại khoảng cách theo bán kính  $L_r$  từ gốc là

$$-\frac{4\pi}{3} \frac{L_r^3 G \rho}{L_r^2} = -\frac{4\pi}{3} G \rho L_r.$$

Phương trình Newton cho chuyển động theo bán kính là

$$\ddot{L}_r = -\frac{4}{3}\pi G \rho L_r.$$

Do từ (a) ta có

$$L_r(t) = a(t)h(r) .$$

nên phương trình trở thành

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G\rho}{3}a .$$

(c) Vì  $\ddot{a} = \frac{1}{2} \frac{d\dot{a}^2}{da}$ , và  $\rho a^3 = b$ , một hằng số, nên phương trình cuối cùng ở câu (b) có thể được viết thành

$$d\dot{a}^2 = -\frac{8\pi Gb}{3a^2}da .$$

Tích phân ta được

$$\dot{a}^2 + K = \frac{8\pi Gb}{3a} = \frac{8\pi G\rho a^2}{3} .$$

Bằng cách lấy tỷ lệ thích hợp  $K$  có thể quy về các giá trị  $\pm 1$  hoặc  $0$ , để cho phương trình này chính thức trở nên tương đương với phương trình vũ trụ học. Để tiện giải thích ta viết phương trình như sau

$$\dot{a}^2 = \frac{\text{hằng số}}{a} - K .$$

Khi  $K = -1$  hoặc  $0$ , hai ngôi sao bất kỳ trong vũ trụ có thể cách xa nhau vô tận nhưng có vận tốc tương đối là một giá trị hữu hạn hoặc bằng không. Khi  $K = +1$ , hai ngôi sao bất kỳ trong vũ trụ chỉ có thể cách nhau một khoảng hữu hạn vì  $\dot{a}^2$  phải là dương. Bởi vậy,  $K = -1$  hoặc  $+1$  sẽ quyết định việc hai ngôi sao có thể có một vận tốc tương đối lớn hơn hoặc nhỏ hơn vận tốc cần thiết để thoát khỏi nhau. Nói cách khác, nếu  $K > 0$ , vũ trụ bị đóng; nếu  $K < 0$ , vũ trụ là mở. Tuy nhiên, lý thuyết Newton không thể cho giá trị hợp lý của  $K$  vì đó là một tính chất toàn cục của không thời gian vũ trụ học, trong khi lý thuyết Newton chỉ có giá trị ở các vùng cục bộ.

## 2027

Metric của vũ trụ giãn nở có dạng  $ds^2 = dt^2 - R^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$ , ở đây độ cong khả dĩ của không gian đã được bỏ qua. Dạng chi tiết của hàm  $R(t)$  phụ thuộc vào hàm lượng vật chất trong vũ trụ.

(a) Một hạt khối lượng  $m$  có năng lượng  $E_0$  và xung lượng  $p_0$  tại thời điểm  $t_0$ ; giả thiết  $R(t_0) = R_0$ . Sau đó hạt chuyển động tự do ngoại trừ các ảnh

hướng của metric cho ở trên. Hãy tính năng lượng và xung lượng như một hàm của thời gian.

(b) Giả thiết rằng vũ trụ ban đầu chứa một khí gồm các hạt không có khối lượng, không tương tác với nhau (có thể là các photon) và chỉ chịu các tác dụng hấp dẫn. Chứng minh rằng nếu tại thời điểm  $t_0$  các hạt này tuân theo phân bố nhiệt tại nhiệt độ  $T_0$ , thì sau đó chúng sẽ vẫn tuân theo phân bố nhiệt nhưng tại một nhiệt độ phụ thuộc vào thời gian. Xác định dạng phụ thuộc này.

(c) Chứng tỏ rằng nếu một khí của các hạt có khối lượng không tương tác nhau tuân theo phân bố nhiệt sẽ không còn tuân theo phân bố nhiệt nữa nếu vũ trụ bị nở ra.

(d) Giả thiết rằng vũ trụ ban đầu chứa một khí không tương tác của các hạt photon không có khối lượng và chứa cả một khí gồm các hạt có khối lượng  $m$  không tương tác nhau (ví dụ các hạt neutrino có khối lượng). Giả thiết trước đó photon và neutrino, cả hai tuân theo phân bố nhiệt với một nhiệt độ  $kT = mc^2$  ( $m$  là khối lượng neutrino) cho cả hai loại photon và neutrino. Đến ngày nay người ta quan sát thấy trong vũ trụ các photon tuân theo phân bố nhiệt với  $kT$  khoảng  $3 \times 10^{-4}$  eV. Thông qua khối lượng neutrino  $m$ , hãy đánh giá sơ bộ vận tốc và động năng điển hình của một hạt neutrino ở thời điểm hiện nay. Giả thiết  $m \gg 3 \times 10^{-4}$  eV.

*Biểu thức cần biết*

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}(\partial_\alpha g_{\sigma\beta} + \partial_\beta g_{\sigma\alpha} - \partial_\sigma g_{\alpha\beta}) .$$

(Princeton)

*Lời giải:*

(a) Trong tọa độ cầu metric là

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t)(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) .$$

đặt  $x^0 = t$ ,  $x^1 = r$ ,  $x^2 = \theta$ ,  $x^3 = \varphi$ , ta có

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1, & g_{11} &= -R^2, & g_{22} &= -R^2r^2, & g_{33} &= -R^2r^2 \sin^2 \theta, \\ g_{\mu\nu} &= 0 & \text{với } \mu \neq \nu . \end{aligned}$$

Vì  $g_{\mu\nu}$  là chéo hóa trong đó  $g^{\mu\mu} = g_{\mu\mu}$ , ta có

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta}^\mu &= 0 & \text{với } \mu \neq \alpha \neq \beta , \\ \Gamma_{\mu\beta}^\alpha &= \Gamma_{\beta\mu}^\alpha = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}\frac{\partial g_{\sigma\beta}}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{2g_{\mu\mu}}\frac{\partial g_{\mu\mu}}{\partial x^\beta} \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\beta}(\log |g_{\mu\mu}|^{\frac{1}{2}}) . & (\text{không lấy tổng}) \end{aligned}$$

dẫn đến đối với metric

$$\Gamma_{0\mu}^\mu = \Gamma_{\mu 0}^\mu = \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial t}, \quad (\mu = 1, 2, 3)$$

$$\Gamma_{1\mu}^\mu = \Gamma_{\mu 1}^\mu = \frac{1}{r}, \quad (\mu = 2, 3)$$

$$\Gamma_{2\mu}^\mu = \Gamma_{\mu 2}^\mu = \Gamma_{3\mu}^\mu = \Gamma_{\mu 3}^\mu = \Gamma_{\mu\mu}^\mu = 0. \quad (\mu = 0, 1, 2, 3)$$

Chuyển động của một hạt được mô tả bởi phương trình trắc địa

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0,$$

ở đây  $d\tau = ds$ ,  $\tau$  là thời gian riêng địa phương. Đối với  $\mu = 1$  phương trình trên trở thành

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} + \frac{2}{R} \frac{dR}{dt} \frac{dt}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} = 0.$$

Nhân hai vế với  $R^2$ , ta được

$$R^2 \frac{d}{d\tau} \left( \frac{dr}{d\tau} \right) + \frac{dR^2}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} = 0,$$

hay

$$\frac{d}{d\tau} \left( R^2 \frac{dr}{d\tau} \right) = 0.$$

Do đó,

$$R^2 \frac{dr}{d\tau} = \text{hằng số}.$$

Theo định nghĩa, vectơ xung lượng bốn chiều của hạt đó là

$$p^\alpha = mu^\alpha = m \frac{dx^\alpha}{d\tau},$$

$$p_\alpha = g_{\alpha\beta} p^\beta = g_{\alpha\beta} mu^\beta.$$

Khi đó

$$p^\alpha p_\alpha = g_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta = m^2 g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau},$$

hay

$$m^2 \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 - R^2 m^2 \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 = m^2.$$

ở đây ta đã sử dụng phương trình metric. Viết về trái thành  $E^2 - p^2$ , ta có xung lượng

$$p = mR \frac{dr}{d\tau} .$$

và năng lượng

$$E = \sqrt{m^2 + p^2} .$$

Ban đầu  $p = p_0$ ,  $E = E_0$ , do đó

$$R^2 \frac{dr}{d\tau} = \frac{Rp}{m} = \frac{R_0 p_0}{m} ,$$

hay

$$p(t) = \frac{R_0}{R} p_0 ,$$

và do đó

$$\begin{aligned} E(t) &= \sqrt{m^2 + \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 p_0^2} \\ &= \sqrt{E_0^2 - p_0^2 + \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 p_0^2} \\ &= \sqrt{E_0^2 - p_0^2 \left[1 - \left(\frac{R_0}{R}\right)^2\right]} . \end{aligned}$$

ở đây  $R_0 = R(t_0)$ .

(b) Nếu khí photon ở trạng thái cân bằng nhiệt tại thời điểm  $t_0$ , thì theo lý thuyết Planck về bức xạ vật đen số photon trong thể tích  $V(t_0)$  với các tần số ở giữa  $\nu$  và  $\nu + d\nu$  là

$$dN(t_0) = \frac{8\pi\nu^2 V(t_0) d\nu}{c^3 \left[ \exp\left(\frac{h\nu}{kT_0}\right) - 1 \right]} ,$$

ở đây  $h$  và  $k$  là các hằng số Planck và Boltzmann. Tại thời điểm  $t'$  sau đó, các photon với tần số ban đầu  $\nu$  sẽ có tần số  $\nu'$  được tính bởi (Bài tập 2025)

$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{R(t_0)}{R(t')} .$$

Cũng như vậy thể tích khí thay đổi như thừa số tỷ lệ  $R(t)$  thay đổi

$$\frac{V(t')}{V(t_0)} = \frac{R^3(t')}{R^3(t_0)} .$$

Do đó

$$dN(t') = dN(t_0) = \frac{\frac{8\pi}{c^3} \left( \frac{\nu' R(t')}{R(t_0)} \right)^2 \frac{R^3(t_0)}{R^3(t')} V(t') \frac{R(t')}{R(t_0)} d\nu'}{\exp[h\nu' R(t')/R(t_0)kT(t_0) - 1]}.$$

Nếu ta đặt

$$T(t') = \frac{R(t_0)T(t_0)}{R(t')}$$

thì phân bố này vẫn sẽ duy trì dạng phân bố của vật đen

$$dN(t') = \frac{8\pi V(t') \nu'^2 d\nu'}{c^3 \left\{ \exp \left[ \frac{h\nu'}{kT(t')} \right] - 1 \right\}}.$$

(c) Xét các hạt có khối lượng không tương tác nhau như một khí lý tưởng. Ở trạng thái cân bằng nhiệt, số các hạt có xung lượng ở giữa  $p$  và  $p + dp$  là

$$dN_p = \frac{gVp^2dp}{2\pi^2 h^3} \left[ \exp \left( \frac{E - \mu}{kT} \right) \pm 1 \right]^{-1}.$$

ở đây  $E = (m^2 + p^2)^{1/2}$  và  $\mu$  là thể hóa học, có thể được cho bằng không vì các hạt này là không tương tác. Do quá trình giãn nở khí là quá trình doan nhiệt nên  $TV^{\gamma-1} = \text{hằng số}$ , và như vậy  $T \propto R^{-(3/\gamma-1)}$  vì  $V \propto R^3$ . Do  $p \propto \frac{1}{R}$ ,  $E = (m^2 + p^2)^{1/2}$ , nên phân bố cân bằng nhiệt ban đầu không thể được duy trì khi vũ trụ giãn nở.

(d) Xét khí photon này, ta có từ (b)

$$\frac{R(t)}{R(t_0)} = \frac{T(t_0)}{T(t)} = \frac{mc^2}{3 \times 10^{-4}}.$$

Khi đó, đối với các neutrino, ta có

$$\frac{p(t)}{p(t_0)} = \frac{R(t_0)}{R(t)} = \frac{3 \times 10^{-4}}{mc^2}.$$

Tại thời điểm ban đầu  $t_0$ , các neutrino có động năng  $\approx mc^2$ , tức là

$$\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} - mc^2 \approx mc^2.$$

Như vậy

$$p(t_0) \approx \sqrt{3}mc.$$

Suy ra rằng tại thời điểm hiện tại  $t$ ,

$$p(t) \approx 3\sqrt{3} \times 10^{-4} \text{ eV/c} .$$

$$v(t) = \frac{p(t)}{m} \approx \frac{3\sqrt{3} \times 10^{-4}}{mc^2} \times c$$

ở đây  $mc^2$  được tính ra eV. Vì  $v \ll c$ , động năng gần đúng bằng

$$\frac{m}{2} v^2 = \frac{mc^2}{2} \left( \frac{v}{c} \right)^2 = \frac{1.35 \times 10^{-7}}{mc^2} \text{ eV}.$$

## 2028

Giả thiết rằng hình học của vũ trụ được mô tả bởi metric Robertson-Walker ( $c = 1$ )

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\Omega^2 \right) .$$

Một phi thuyền lúc ban đầu có vận tốc tương đối  $v$  so với những người quan sát vũ trụ học. Tại thời điểm sau đó khi vũ trụ bị nở ra với thừa số tỷ lệ  $(1+z)$ , hãy tìm vận tốc  $v'$  đối với những người quan sát vũ trụ học.

(Princeton)

Lời giải:

Do  $\kappa$  là một hằng số, bằng cách lựa chọn thích hợp đơn vị của  $r$  ta có thể chọn  $\kappa = \pm 1$  hoặc 0. Sau đó sử dụng các phép biến đổi  $r = \sin x$  và  $r = \sinh x$  tương ứng với  $\kappa = +1$  và  $\kappa = -1$ , ta có

$$ds^2 = \begin{cases} -dt^2 + R^2(t)[dx^2 + \sin^2 x d\Omega^2], & \kappa = +1 \\ -dt^2 + R^2(t)[dx^2 + \sinh^2 x d\Omega^2], & \kappa = -1 \end{cases}$$

Giả thiết phi thuyền được phóng theo hướng bán kính sao cho  $\theta = \text{hằng số}$ ,  $\varphi = \text{hằng số}$ . Ta cũng đưa vào giá trị thời gian riêng địa phương  $\tau$  thông qua  $-d\tau^2 = ds^2$ . Khi đó metric trở thành

$$d\tau^2 = dt^2 - R^2(t)dx^2 .$$

Vì tất cả các giá trị  $g_{\alpha\beta}$  không phụ thuộc tuỳ ý của  $x$ , nên phương trình trắc địa

$$\frac{d}{d\tau} \left( g_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta,\mu} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0$$

đối với  $\mu = 1$  cho

$$\frac{d}{d\tau} \left( g_{11} \frac{dx}{d\tau} \right) = 0.$$

hay

$$\begin{aligned} R^2(t) \frac{dx}{d\tau} &= R^2(t) \frac{dx}{dt} \left( \frac{d\tau}{dt} \right)^{-1} \\ &= \frac{R^2(t) \frac{dx}{dt}}{\sqrt{1 - R^2(t) \left( \frac{dx}{dt} \right)^2}} = \text{hằng số}. \end{aligned}$$

Vì phần tử chiều dài là  $dl = R(t)dx$  và vận tốc do đó là  $v = \frac{dt}{dt} = R(t) \frac{dx}{dt}$ , nên biểu thức trên có thể viết lại thành

$$\frac{R(t)v}{\sqrt{1 - v^2}} = \text{hằng số},$$

hay

$$\frac{R(t')v'}{\sqrt{1 - v'^2}} = \frac{R(t)v}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Vì  $R(t') = (1+z)R(t)$ , ta có

$$\frac{v'}{\sqrt{1 - v'^2}} = \frac{v}{\sqrt{1 - v^2}} \frac{1}{(1+z)},$$

hay

$$v'^2 = \frac{v^2}{(1-v^2)(1+z)^2 + v^2},$$

tức là

$$v' = \frac{v}{(1+z)\sqrt{1 - v^2 + \left(\frac{v}{1+z}\right)^2}} \approx \frac{v}{1+z}$$

với  $v \ll 1$ .

# **PHẦN III**

## **CÁC VẤN ĐỀ LIÊN QUAN KHÁC**



### 3.1. CÁC CÂU HỎI VỀ LỊCH SỬ VẬT LÝ VÀ CÁC CÂU HỎI ĐẠI CƯƠNG (3001 - 3025)

#### 3001

Hãy nêu hai đóng góp chính cho nền Vật lý học của các cá nhân sau đây:

- (a) Rudolf Clausius
- (b) Albert A. Michelson
- (c) Enrico Fermi
- (d) Murray Gell-Mann

Trả lời:

- (a) (1) Đưa ra một cách phát biểu nguyên lý thứ hai của nhiệt động lực học. (2) Đưa ra khái niệm entropy.
- (b) (1) Phân minh ra giao thoa kẽ Michelson dùng để đo các độ dài nhỏ cõ bước sóng của ánh sáng. (2) Sử dụng giao thoa kẽ này thực hiện thí nghiệm Michelson-Morley để bác bỏ sự tồn tại của ête và tạo tiền đề cho sự ra đời các lý thuyết tương đối của Einstein.
- (c) (1) Áp dụng nguyên lý loại trừ Pauli vào cơ học thống kê, tìm ra (một cách độc lập với P.A.M. Dirac) phân bố Fermi-Dirac. (2) Nghiên cứu các phản ứng của các neutron để chứng tỏ khả năng xảy ra của các phản ứng dây chuyền, và dẫn dắt nhóm xây dựng lò phản ứng hạt nhân đầu tiên trong lịch sử nhân loại.
- (d) (1) Đề xướng khái niệm các hạt quark có diện tích phán số. (2) Đề xướng sự phân loại bát đao cho các hạt cơ bản.

#### 3002

Từng thí nghiệm mâu chốt dưới đây đã giúp khẳng định hoặc bác bỏ một giả thuyết nào đó và khi làm như vậy, chúng đã có những hệ quả tức thì quan trọng (trong vòng một năm) đối với các lý thuyết vật lý. Đối với mỗi một thí nghiệm dưới đây, hãy thận trọng chỉ ra một cách xúctich ý tưởng vật lý nào đã được kiểm chứng trong thí nghiệm đó:

- (a) Thí nghiệm Michelson-Morley.
- (b) Thí nghiệm Stern-Gerlach.

- (c) Thí nghiệm Davisson-Germer.
- (d) Sự khám phá ra các positron của Anderson.
- (e) Thí nghiệm của Wu, Ambler, Hayward, Hoppes và Huddson về sự phân rã  $\beta^-$  trong  $^{60}\text{Co}$ .

**Trả lời:**

- (a) Sự không tồn tại của ête.
- (b) Các electron có các spin.
- (c) Sự tồn tại của các sóng vật chất de Broglie.
- (d) Sự tồn tại của phản vật chất.
- (e) Sự vi phạm tính chẵn lẻ (parity) trong các tương tác yếu.

### 3003

Hãy nêu tên của bốn nhà vật lý nữ đã có các đóng góp quan trọng cho nghiên cứu vật lý. Mô tả ngắn gọn những đóng góp của từng cá nhân.

**Trả lời:**

- (1) Marie Curie – Khám phá ra các nguyên tố Radi và Poloni.
- (2) Maria Goeppert Mayer – thiết lập mẫu vỏ cho các hạt nhân nguyên tử.
- (3) Irene Joliot Curie – tham gia vào quá trình khám phá ra hạt nơtron.
- (4) Chien-Shiung Wu – xác minh bằng thực nghiệm sự không bảo toàn chẵn lẻ trong các tương tác yếu khi nghiên cứu sự phân rã  $\beta$  của  $^{60}\text{Co}$ .

### 3004

Hãy nêu tên ít nhất một nhà thực nghiệm và một nhà lý thuyết có đóng góp cho sự hiểu biết về một trong các hiện tượng dưới đây, và cho biết (gần đúng) thời gian họ thực hiện công việc đó.

- (a) Tính siêu dẫn
- (b) Hiệu ứng quang điện
- (c) Các tính chất sóng của electron
- (d) Spin của electron

**Trả lời:**

- (a) Vào năm 1911 H. Kamerlingh Onnes đã quan sát thấy rãng điện trở

suất của thủy ngân hoàn toàn biến mất dưới 4,2 K, từ đó khám phá ra hiện tượng siêu dẫn nhiệt độ thấp. Vào năm 1957, Bardeen, Cooper và Schrieffer đã đề xuất một lý thuyết vi mô về tính siêu dẫn.

(b) Năm 1887, H.R. Hertz đã khám phá ra hiệu ứng quang điện. Năm 1905, A. Einstein đã đưa ra lý thuyết lượng tử về ánh sáng giúp giải thích thành công hiệu ứng này.

(c) Năm 1927, Davisson đã kiểm chứng các tính chất sóng của electron bằng cách quan sát hiện tượng giao thoa của các electron trong các tinh thể. Năm 1924, de Broglie giả thiết rằng các hạt vật chất có thể xử sự như các sóng. Điều đó có nghĩa là các electron cũng mang các đặc tính của sóng.

(d) Năm 1921, Stern và Gerlach đã kiểm chứng rằng hướng của mômen xung lượng của các nguyên tử được lượng tử hóa và khám phá ra các mômen xung lượng có giá trị là các số bán nguyên. Năm 1925, Uhlenbeck và Goudsmit đã đề xuất giả thuyết rằng electron có spin.

### 3005

Kể tên hai nhà vật lý (một thực nghiệm và một lý thuyết) đã có những đóng góp quan trọng cho sự hiểu biết của chúng ta về từng hiện tượng dưới đây. Phát biểu ngắn gọn (trong một câu) mỗi người đã đóng góp những gì và công việc đó đã được thực hiện trong khoảng thời gian nào.

- (a) Sự tán xạ của photon bởi các electron.
- (b) Phân chia hạt nhân.
- (c) Sự vi phạm tính chẵn lẻ trong vật lý.
- (d) Tính siêu dẫn hoặc siêu chảy.
- (e) Số lượng tử lạ hoặc số lượng tử duyên

#### Trả lời:

(a) A.H. Compton vào năm 1923 đã giải thích sự tán xạ của một photon bởi một electron tự do tạo ra một photon có bước sóng dài hơn. Năm 1927, A.A. Bless đã chỉ ra rằng năng lượng quan sát được của các electron giật lùi phù hợp với lý thuyết của Compton.

(b) Năm 1938, Otto Hahn và Fritz Strassmann đã chứng minh quá trình phân chia hạt nhân urani qua việc tìm thấy bari được sinh ra trong quá trình bắn phá urani bằng các hạt neutron. Cùng năm đó Lise Meitner và Otto Robert Frisch đã giải thích bằng lý thuyết các kết quả thực nghiệm này.

(c) Năm 1956, T.D. Lee và C.N. Yang đề xuất giả thuyết của sự không

bảo toàn chẵn lẻ trong các tương tác yếu. Điều này đã được kiểm chứng bằng thực nghiệm bởi Chien-Shiung Wu vào năm 1957 qua nghiên cứu sự phân rã  $\beta$  của  $\text{Co}^{60}$ .

(d) Năm 1911 Onnes khám phá ra tính siêu dẫn của các kim loại ở các nhiệt độ rất thấp. Năm 1957, Bardeen, Schrieffer và Cooper đã đề xuất một lý thuyết vi mô về tính siêu dẫn.

(e) Năm 1954 Yasuo Nagano, Kazuhiko Nishijima và M. Gellmann độc lập với nhau chỉ ra rằng một số hạt cơ bản có một số lượng tử nữa được gọi là số lượng tử lật, bên cạnh spin, diện tích và isospin.

### 3006

Viết một tiểu luận về sự đóng góp cho Vật lý học và mối liên hệ giữa các đóng góp của những nhóm các nhà khoa học sau đây:

- (a) Volta - Oersted - Ampere - Faraday - Maxwell
- (b) Becquerel - Curie - Rutherford - Chadwick - Hahn
- (c) Wien - Planck - Einstein - Bohr - Schrödinger

#### Trả lời:

(a) Các đóng góp của Volta, Oersted, Ampere, Faraday, và Maxwell đã đặt nền móng cho lý thuyết điện từ, lý thuyết này cùng với cơ học Newton tạo nên Vật lý cổ điển.

VOLTA (Người Ý, 1745-1827): Sau ba năm miệt mài thí nghiệm, vào năm 1749 Volta đã phát hiện ra rằng ông có thể sắp xếp các kim loại theo trật tự kẽm, thiếc, chì, đồng, bạc, vàng,... sao cho khi hai kim loại đứng cạnh nhau được tiếp xúc với nhau, kim loại đứng trước sẽ có diện tích dương và kim loại đứng sau sẽ có diện tích âm. Sau đó vào mùa xuân năm 1800, Volta đã chế tạo ra chiếc pin hóa học đầu tiên có thể tạo ra được một dòng điện ổn định, được cấu thành từ các lớp bản mỏng bạc và kẽm xen giữa giấy bia thảm nước muối. Cầu tạo này được gọi là pin Volta, nó tạo một dòng điện ổn định khi hai đầu của nó được nối bằng một sợi dây kim loại. Lần đầu tiên con người có khả năng tạo được các dòng điện ổn định và các nhà khoa học từ đó có thể mở rộng các nghiên cứu của mình từ tĩnh điện sang các dòng điện tích chuyển động và các ảnh hưởng của chúng.

OERSTED (Người Đan Mạch, 1777-1851): Với lòng tin tưởng chắc chắn rằng có tồn tại một mối liên hệ giữa điện và từ, Oersted đã chợt phát hiện ra một

diệu kỳ diệu trong khi giảng bài cho công chúng vào một buổi tối tháng 4 năm 1820 sau nhiều năm miệt mài nghiên cứu. Khi gần đến lúc kết thúc bài giảng, Oersted nói rằng “để tôi thử đặt một chiếc kim bị nhiễm từ song song với dây chí” và ông bật nguồn cho dòng điện chạy qua dây. Ông rất ngạc nhiên khi thấy rằng cái kim nhỏ có từ tính hơi bị nảy lên chút xíu. Coi đây là một hiện tượng hết sức đặc biệt, ông đã giành ba tháng sau đó để lặp lại các thí nghiệm và cuối cùng, ngày 21 tháng 7 năm 1820, ông đã cho xuất bản một chuyên luận thông báo về sự khám phá ra tác dụng từ của dòng điện. Khám phá này cho thấy rằng quả nhiên giữa điện và từ có một mối liên hệ mật thiết.

AMPERE (Người Pháp, 1775-1836): Khám phá của Oersted đã gây ảnh hưởng lớn đến giới học thuật ở Pháp. Ngày 11 tháng 9 năm 1820, Ampere tham dự một cuộc họp tại Viện Hàn lâm Khoa học Pháp và nghe một báo cáo của Arago về công trình mới được công bố lúc đó của Oersted về tác dụng từ của dòng điện. Nhận ra được tầm quan trọng to lớn của công trình đó, ông đã lập tức quay về và lặp lại các thí nghiệm của Oersted. Ông đã tìm ra mối quan hệ giữa hướng quay của chiếc kim nhiễm từ và hướng của dòng điện và mối liên quan này có thể được mô tả tóm lược theo quy tắc “bàn tay phải”. Vào ngày 25 tháng 9 Ampere đã công bố các kết quả thí nghiệm của mình về lực tác dụng giữa hai dây dẫn có dòng điện chạy qua được đặt song song với nhau. Sau đó bằng thực nghiệm ông đã tìm ra rằng một dòng điện có thể tạo ra được một từ trường như do một nam châm tạo ra. Dựa trên các nghiên cứu này, Ampere đã đưa ra định luật Ampere nổi tiếng vào ngày 4 tháng 12, phát biểu rằng lực tác dụng giữa hai phần tử có dòng điện chạy qua tỷ lệ nghịch với bình phương khoảng cách giữa chúng. Sau đó đến khoảng tháng 1 năm 1821, Ampere đã đề xướng giả thuyết nổi tiếng của mình đó là từ tính của một chất được gây ra bởi các dòng điện phân tử chạy trong nó, tức là coi từ tính là một h特质 của điện. Giả thuyết này là chìa khóa để tìm hiểu tính chất từ của vật chất.

FARADAY (Người Anh, 1791-1867): Faraday tin rằng vì điện có thể gây ra từ, thì cũng rất có thể từ cũng sinh ra được điện. Suy nghĩ này được ông ghi chép trong nhật ký của mình vào năm 1822. Ông đã tiến hành nhiều thí nghiệm và đã thất bại nhiều lần trong suốt mười năm sau đó. Cuối cùng, năm 1831 ông ta đã thông báo sự khám phá ra cảm ứng điện từ. Trong quá trình nghiên cứu, ông đã dần dần hình thành nên khái niệm về trường và các đường sức. Ông cũng tiên đoán sự lan truyền của các cảm ứng từ và điện trong một bức thư kín gửi Hội Hoàng gia vào năm 1832. Công trình nghiên cứu của Faraday đã đặt nền móng cho lý thuyết thống nhất về các hiện tượng điện và từ.

MAXWELL (Người Anh, 1831-1879): Một nghiên cứu rất sâu về các khái niệm

của Faraday về các trường và các đường sức đã dẫn dắt Maxwell tìm ra được - từ lực quanh một dòng điện và xây dựng các phương trình vi phân vecto liên hệ dòng điện với từ trường. Ông cũng đưa ra định đề rằng các đường sức trong chân không thực chất được tồn tại trong một môi trường đặc biệt, gọi là éte. Hơn nữa, ông còn đề xuất rằng một sự thay đổi của từ trường sẽ gây ra một điện trường ở không gian xung quanh, và thêm nữa ông đã đưa ra khái niệm dòng điện dịch: một điện trường biến thiên sẽ gây ra một sự dịch chuyển của môi trường và từ đó sẽ gây ra một từ trường. Sau đó ông đã tóm tắt các ý tưởng định lượng này dưới dạng toán học – hệ phương trình vi phân mà bây giờ được gọi là các phương trình điện từ Maxwell. Lý thuyết điện từ đối chiếu tất cả các yếu tố thực nghiệm và các khái niệm được biết đến ở thời điểm đó đã được hoàn thành khi Maxwell xuất bản công trình “Chuyên luận về Điện và Từ” năm 1873. Đáng chú ý nhất là các phương trình Maxwell đã tiên đoán sự tồn tại của các sóng điện từ và ý tưởng này đã dẫn dắt Einstein xây dựng nên thuyết tương đối hẹp.

(b) Các đóng góp của Becquerel, Curie, Rutherford, Chadwick, và Hahn đã đặt nền móng cho ngành vật lý hạt nhân và nguyên tử cũng như là ngành hóa phóng xạ có ý nghĩa to lớn cho cuộc sống hiện đại hôm nay.

BECQUEREL (Người Pháp, 1852-1908): Tại một buổi thảo luận khoa học tại Viện Hàn lâm Khoa học Pháp ngày 20 tháng 1 năm 1896 trong đó Röntgen đã trình bày các bức ảnh tia X của ông, Becquerel, người đã nghiên cứu về phát huỳnh quang, đề xuất rằng các bức xạ truyền qua tương tự như tia X cũng có thể được phát ra từ một số chất mà không cần tới các kích thích bên ngoài. Trong nghiên cứu của mình về các muối urani, ông đã ghi chép vào năm 1897 rằng các muối urani có thể tự phát ra bức xạ ion hóa làm đèn giấy ánh, từ đó khám phá ra hiện tượng phóng xạ.

PIERE CURIE (Người Pháp, 1859-1906), MARIE CURIE (quốc tịch Pháp và Ba Lan, 1867-1934): Sự khám phá của Becquerel lập tức cuốn hút sự chú ý của ông bà Curie. Họ đã tự hỏi rằng liêu urani có phải là nguyên tố duy nhất có thể phát ra được bức xạ như vậy không, và đã bắt đầu tìm kiếm hiện tượng này trong các muối của các nguyên tố nặng. Cuối cùng họ đã tìm ra hai nguyên tố phóng xạ mới đó là poloni vào tháng 7 năm 1898 và radi vào tháng 12 năm 1898. Sự khó khăn của công việc này có thể thấy được qua việc là chỉ sau 45 tháng làm việc hết sức nặng nhọc họ đã tinh chế được 10 g radi nguyên chất từ hàng trăm tấn quặng.

RUTHERFORD (Người Anh, 1871-1937): Ngay sau khám phá của Rontgen về tia X, Rutherford và J.J. Thomson đã bắt đầu các thí nghiệm về hiệu ứng ion

hóa của các tia X và đã giải thích thành công tác động của các tia X lên một chất khí. Khi các nguyên tố phóng xạ được tìm ra, Rutherford lập tức chuyển sự chú ý sang tác dụng ion hóa của loại bức xạ mới phát ra từ urani. Ông đã phân loại các hạt alpha và beta trong bức xạ và cùng với Soddy, đề xướng lý thuyết về sự phân rã tự phát của các nguyên tử dẫn tới sự khám phá ra các chất đồng vị. Năm 1911 ông đã xây dựng khái niệm về nguyên tử được cấu thành bởi một lõi cứng, nặng, có diện tích dương được bao quanh bởi các electron thông qua việc nghiên cứu sự tán xạ góc lớn của các hạt alpha phát ra từ nguyên tử urani. Năm 1919 ông đã thành công trong việc chuyển hoá nitơ thành ôxi bằng cách bắn phá nitơ bằng các chùm hạt alpha, đây là sự biến đổi nhân tạo đầu tiên của một nguyên tố, và ông cũng đã đề xướng khả năng tồn tại của nôtron vào năm 1920.

CHADWICK (Người Anh, 1891-1974): Là một sinh viên và là đồng nghiệp của Rutherford, Chadwick đã dùng các chất phóng xạ poloni và berili làm nguồn phát xạ để bắn phá hidrô, hêli và nitơ. Bằng cách so sánh sự giật lùi của các hạt ông đã xác định được khối lượng và phát hiện ra nôtron, mươi hai năm sau tiên đoán của Rutherford về sự tồn tại của nó. Sự khám phá ra nôtron đã ủng hộ mạnh mẽ mâu thuẫn của Rutherford và tạo tiền đề cho sự phát triển của ngành vật lý hạt nhân.

HALN (Người Đức, 1879-1968): Cũng là một học trò của Rutherford, vào năm 1938 Haln đã tìm ra bari phóng xạ trong sản phẩm của quá trình bắn phá urani bằng nôtron, như vậy đã phát hiện ra sự phân chia hạt nhân và định hình bối cảnh chính trị thế giới trong những năm sau đó. Đầu năm 1917, ông cùng với Lise Meitner đã khám phá ra nguyên tố phóng xạ protactini. Công trình khoa học của ông có đóng rất lớn cho sự phát triển của ngành hóa phóng xạ.

(c) Các đóng góp của Wien, Planck, Einstein, Bohr, và Schrödinger đã xây dựng nên khái niệm lượng tử hóa và đặt nền móng cho vật lý lượng tử, ngành nghiên cứu này cùng với lý thuyết tương đối hẹp của Einstein là các cột trụ cho vật lý học hiện đại ngày nay.

WIEN (Đức, 1864-1928): Dựa trên nguyên lý thứ hai nhiệt động lực học, năm 1893 Wien đã tìm ra định luật trong đó bước sóng tương ứng với cường độ cực đại của bức xạ phát ra từ vật đen tỷ lệ nghịch với nhiệt độ tuyệt đối - định luật dịch chuyển Wien. Sau đó vào năm 1896 ông đã xuất bản công trình rút ra phân bố phổ của bức xạ vật đen, áp dụng thành công cho các bước sóng ngắn nhưng không lý giải được cho phân bố của các bước sóng dài.

**PLANCK** (Người Đức, 1858-1947): Nội suy giữa các công thức cho phổ phát xạ của vật đen của Wien và của Rayleigh và Jeans, Planck đã xuất bản năm 1900 một công thức chính xác cho toàn dải bước sóng. Để chứng minh nó, ông đã phải vứt bỏ tính liên tục trong quá trình phát xạ và hấp thụ năng lượng bức xạ mà cho rằng trong các quá trình này chỉ có sự tham gia của các lượng năng lượng rời rạc được gọi là các lượng tử. Khái niệm mới này về sự lượng tử hóa đã khởi đầu cho sự phát triển của ngành vật lý lượng tử. Năm 1906 ông tiếp tục chứng tỏ tầm quan trọng của một hằng số, giờ được biết tới là hằng số Planck mà ông đã đưa ra trước đó trong mối liên hệ với lượng tử năng lượng và sau này trở thành một hằng số phổ quát và đóng vai trò cơ bản trong vật lý lượng tử.

**EINSTEIN** (Người Đức, sau này mang quốc tịch Mỹ, 1879-1955): Phát triển ý tưởng của Planck về lượng tử năng lượng, Einstein đã đề xuông tính nhị nguyên sóng-hạt của ánh sáng: ánh sáng lan truyền như các sóng nhưng tương tác với vật chất như là các lượng tử năng lượng, các photon. Điều này giúp giải thích thành công hiệu ứng quang điện (1907). Ngoài vai trò trực tiếp của mình trong sự phát triển lý thuyết lượng tử, các đóng góp khác của Einstein còn có lý thuyết tương đối hẹp (1905), đặc biệt là tính tương đương giữa khối lượng và năng lượng, và phân bố Bosse-Einstein, tất cả những phát minh đó đã trực tiếp hoặc gián tiếp đóng góp cho nền vật lý lượng tử ngày nay.

**BOHR** (Người Đan Mạch, 1885-1962): Sử dụng mẫu nguyên tử của Rutherford và mở rộng sự lượng tử hóa của Planck và Einstein cho mômen xung lượng, năm 1913 Bohr đã thu được mô hình đầu tiên cho phép giải thích một cách thỏa mãn nguồn gốc của các vạch phổ và đặc biệt là các số hạng phổ trong phân tích quang phổ từ đó xác lập vai trò của sự lượng tử hóa trong cấu trúc nguyên tử.

**SCHRÖDINGER** (Người Áo, 1887-1961): Sử dụng giả thuyết của de Broglie về sóng vật chất và mẫu nguyên tử của Rutherford và Bohr, Schrodinger đã xây dựng nên phương trình sóng vào năm 1926 mô tả hành vi của một hạt nguyên tử trong một trường lực, chẳng hạn một electron chuyển động trong trường Coulomb của hạt nhân giống như trường hợp trong nguyên tử hidrô. Tầm quan trọng của phương trình Schrödinger trong vật lý lượng tử có thể so sánh được với định luật thứ hai của Newton về chuyển động trong cơ học.

đóng góp của họ. Đôi với mỗi nhóm, hãy thảo luận kĩ sự đóng góp của từng cá nhân.

- (a) Maxwell, Einstein, Newton, Huygens, Young, Fresnel.
- (b) Schrödinger, Bohr, Planck, Dirac, Einstein, Heisenberg.
- (c) Jensen & Mayer, Chadwick, Fermi, Rutherford.

#### Trả lời:

(a) Huygens → Newton → Young → Fresnel → Maxwell → Einstein: Bản chất sóng và hạt của ánh sáng. Cụ thể

Huygens: phát biểu nguyên lý Huygens trong lý thuyết sóng của ánh sáng,  
 Newton: phát biểu lý thuyết hạt của ánh sáng,  
 Young: nghiên cứu thực nghiệm sự giao thoa ánh sáng,  
 Fresnel: giải thích hiện tượng nhiễu xạ ánh sáng,  
 Maxwell: phát biểu lý thuyết điện từ của ánh sáng,  
 Einstein: giả thuyết về lượng tử ánh sáng.

(b) Planck → Einstein → Bohr → Heisenberg → Schrödinger → Dirac: Phát triển cơ học lượng tử. Cụ thể là

Planck: giả thuyết về lượng tử năng lượng,  
 Einstein: giả thuyết về lượng tử ánh sáng,  
 Bohr: sử dụng khái niệm lượng tử trong mẫu nguyên tử.  
 Heisenberg: xây dựng cơ học ma trận,  
 Schrödinger: xây dựng cơ học sóng,  
 Dirac: xây dựng phương trình sóng tương đối tính của electron.

(c) Rutherford → Fermi → Chadwick → Jensen & Mayer: Lý thuyết cấu trúc hạt nhân. Cụ thể

Rutherford: để xướng mẫu nguyên tử được cấu thành từ hạt nhân nặng, mang điện tích dương được bao quanh bởi các electron.

Chadwick: khám phá bằng thực nghiệm ra nơtron cùng với các proton tạo nên hạt nhân nguyên tử,

Fermi: xây dựng lý thuyết phân rã beta của các hạt nhân nguyên tử,  
 Jensen và Mayer: xây dựng mẫu vỏ của các hạt nhân nguyên tử.

**3008**

Những cá nhân sau đây có liên quan như thế nào đến các tiến bộ của vật lý?

- (1) H. Hertz (2) T. Young (3) J. Henry (4) J. W. Gibbs (5) J. Chadwick (6) W. Lamb (7) M. Gell-Mann (8) H. A. Kramers (9) H. Becquerel

**Trả lời:**

(1) H. Hertz: Minh chứng bằng thực nghiệm sự tồn tại của các sóng điện từ.

(2) T. Young: Nghiên cứu thực nghiệm về giao thoa ánh sáng.

(3) J. Henry: Khám phá ra hiện tượng tự cảm và hổ cảm.

(4) J.W. Gibbs: Phát triển nhiệt động học giải tích và mô tả một hệ bằng đồ thị.

(5) J. Chadwick: Khám phá ra nơtron.

(6) W. Lamb: Khám phá ra dịch chuyển Lamb của nguyên tử hidrô: mức  $2^2S_{\frac{1}{2}}$  cao hơn mức  $2^2P_{\frac{1}{2}}$  một năng lượng tương đương với 1058 MHz.

(7) M. Gell-Mann: Xây dựng mô hình quark của các hạt hadron.

(8) H.A. Kramers: Xây dựng phương pháp WKB để giải gần đúng phương trình Schrödinger.

(9) H. Becquerel: Khám phá ra hiện tượng phóng xạ.

**3009**

Hãy giải thích các hiện tượng vật lý sau đây. Trước khi giải thích các hiện tượng này hãy mô tả ở mức độ chính xác cao nhất bản chất của chúng và trong hoàn cảnh tự nhiên nào ta hay thường gặp chúng. (Vị trí tương đối của mặt trời và người quan sát, hướng quan sát, trạng thái của bầu khí quyển, v.v...)

(1) Sự chuyển sang màu đỏ khi mặt trời lặn (hoặc mọc).

(2) Bầu trời xanh.

(3) Các cầu vòng (sơ cấp, thứ cấp).

(4) Vòng hào quang (tại góc  $22^\circ$ ) quanh mặt trời.

**Trả lời:**

(1), (2) Khi trời quang thường có màu xanh nhạt do sự tản xa của ánh sáng mặt trời bởi các phân tử của bầu khí quyển ở đó sự phân bố mật độ là

không đồng nhất do chuyển động không đồng đều của các phân tử. Định luật Reighlay phát biểu rằng cường độ của ánh sáng tán xạ tỷ lệ nghịch với luỹ thừa bậc bốn của bước sóng. Do vậy ánh sáng màu xanh và xanh nhạt có bước sóng ngắn hơn bị tán xạ mạnh hơn so với ánh sáng vàng và đỏ có các bước sóng dài hơn. Điều này dẫn đến bầu trời quang được nhìn qua ánh sáng tán xạ sẽ có màu xanh.

Khi mặt trời mọc và lặn, tia sáng mặt trời hầu như song song với bề mặt trái đất và như vậy nó phải đi qua lớp khí quyển dày hơn để tới người quan sát. Hầu hết ánh sáng với bước sóng ngắn như ánh sáng xanh bị tán xạ ra khỏi đường truyền của nó, chỉ có ánh sáng với bước sóng dài như ánh sáng đỏ được duy trì theo đường truyền ban đầu và đi tới người quan sát.

Ngoài lớp khí quyển dày hơn phải đi qua, sương mù và bụi trong không khí ở gần bề mặt trái đất cũng góp phần làm tăng cường thêm sự tán xạ của các ánh sáng bước sóng ngắn. Do vậy khi nhìn mặt trời một cách trực tiếp lúc mặt trời mọc và lặn ta sẽ thấy có màu đỏ.

(3) Sau khi mưa trong không khí còn tồn tại rất nhiều các hạt nước nhỏ li ti đóng vai trò như những chiếc lăng kính nhỏ xíu và làm khúc xạ tia sáng mặt trời. Sự tán sắc sau đó gây ra hiện tượng cầu vồng. Khi góc khúc xạ gần bằng góc tới, mặt trời - đồng thời là tâm của cầu vồng - và người quan sát phải nằm trên cùng một đường thẳng mới quan sát thấy cầu vồng. Cầu vồng thứ cấp được hình thành từ khúc xạ tiếp theo bởi các giọt nước khác.

(4) Quầng hào quang được gây ra chủ yếu bởi sự khúc xạ ánh mặt trời trên các tinh thể nước đá nhỏ tí xíu trong khí quyển. Vòng sáng thường gấp nhiều nhất có đường kính tại góc  $22^\circ$  ứng với khúc xạ của một tinh thể nước đá có các mặt tao với nhau một góc  $60^\circ$ . Phản xạ ánh sáng từ các bề mặt tinh thể cũng đóng góp một phần vào quầng sáng này.

### 3010

Hãy giải thích các hiện tượng vật lý sau đây. Mô tả định lượng nhất có thể.

(1) Muối của các kim loại chuyển tiếp và các đất hiếm thường có màu sắc sặc sỡ và có tính thuận từ trong khi đó muối của kim loại kiềm và kiềm thổ thường không màu và là các chất nghịch từ.

(2) Mảng sông đèn thấp bằng dầu có màu trắng mặc dù nhiệt độ của nó không tương ứng với phổ ánh sáng trắng được quan sát. Hơn nữa, màu của mảng sông khi không thấp sáng cũng có màu trắng chứ không phải là màu đen, điều này phù hợp với yêu cầu để quá trình phát sáng diễn ra tốt hơn.

(3) Một dung dịch đường mía làm quay mặt phẳng phản cực của ánh sáng phản cực sang bên phải mặc dù không có từ trường ngoài tác dụng.

(4) Một hỗn hợp khí heli và neon sẽ phát laze khi bị kích thích bằng quá trình phóng điện.

### Trả lời và phân tích:

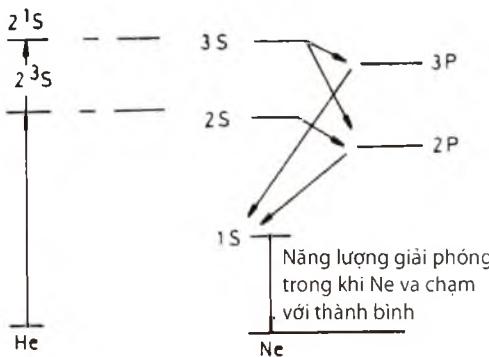
(1) Các muối kim loại kiềm và kiềm thổ hầu hết là các tinh thể ion trong đó các nguyên tử kim loại kiềm và kiềm thổ bị mất các electron hóa trị và trở thành ion dương trong khi các electron còn lại hình thành các lớp bị lấp đầy hoàn toàn. Spin toàn phần của các ion gốc axit được tạo nên bởi spin của các nguyên tử cấu thành nên chúng và mômen xung lượng toàn phần của chuyển động tương đối của các nguyên tử đó (đóng góp của spin hạt nhân là rất nhỏ vì  $m_{\text{nguyên tử}} \approx 10^3 m_{\text{electron}}$  nên mômen từ hạt nhân là vô cùng nhỏ). Nhưng khi các lớp vỏ electron của từng nguyên tử trong ion gốc axit này bị lấp đầy hoàn toàn thì spin toàn phần của cả ion kim loại và ion gốc axit đều bằng không. Điều này dẫn đến loại muối này có tính nghịch từ. Thực tế các ion kim loại và gốc axit có các lớp vỏ electron bị lấp đầy hoàn toàn có nghĩa là khe nang lượng giữa trạng thái kích thích thấp nhất và trạng thái cơ bản là lớn nên ánh sáng trong vùng nhìn thấy không thể kích thích được phản tử lên trạng thái kích thích của nó và muối này thường không có màu.

Đối với các kim loại chuyển tiếp và đất hiếm, các electron d hoặc f của lớp ngoài cùng thứ hai không tạo nên được lớp vỏ choán đầy do vậy liên kết của chúng không được mạnh như trường hợp trên. Các electron nằm ở các lớp bên trong đôi khi vẫn có thể bị kích thích nên các nguyên tử như vây thường có da hóa trị. Một điểm quan trọng hơn là khi bị mất đi các electron hóa trị thì lớp ngoài của ion kim loại thường không được lấp đầy hoàn toàn. Điều này có nghĩa là các ion kim loại thường có spin khác không và dẫn đến các muối của chúng thường là thuận từ. Thực tế, lớp ngoài cùng của ion kim loại không đầy có nghĩa là các electron bên trong có thể dễ dàng bị kích thích len chiếm chỗ các vị trí trống của lớp bên ngoài. Có thể có một vài mức năng lượng mà khoảng cách của chúng so với mức cơ bản nằm trong vùng năng lượng của ánh sáng khả kiến, dẫn đến các đính hấp thụ trong vùng nhìn thấy. Do vậy các muối này thường mang màu sắc.

(2) Măng sông đèn dầu thường được phủ trên bề mặt một lớp muối kim loại thuộc nhóm đất hiếm. Khi đèn được đốt sáng, năng lượng giải phóng bởi phản ứng hóa học kích thích các electron của các ion kim loại đó. Nhiều electron được kích thích trong vùng ánh sáng khả kiến và nhiều màu sắc khác

nhau sẽ được phát ra khi chúng trở về các trạng thái năng lượng thấp hơn và trộn với nhau thành ánh sáng trắng, trường hợp này khác với quá trình phát xạ của vật đen.

(3) Đường là một chất có hoạt tính quang học sẽ làm quay mặt phẳng phân cực của ánh sáng phân cực phẳng khi đi qua nó. Đặc biệt hoạt tính quang của nó làm cho mặt phẳng phân cực quay sang phải (tức là khi nhìn đối diện với phương truyền sáng mặt phẳng phân cực sẽ quay theo chiều kim đồng hồ). Hoạt tính quang học này có nguồn gốc là do phân tử đường mía có chứa một nguyên tử cacbon bất đối xứng trong nhóm dextro làm quay mặt phẳng phân cực của ánh sáng sang bên phải. Mặc dù sự định hướng của các phân tử đường trong dung dịch là ngẫu nhiên nhưng do không có phân tử nào gây ra sự quay trái nên hiệu ứng tổng cộng chỉ là quay phải.



Hình 3.1

(4) Các electron chuyển động nhanh trong môi trường plasma được tạo thành bởi sự phóng điện trong hỗn hợp các khí He và Ne dễ dàng va chạm với các nguyên tử He và kích thích chúng lên các mức năng lượng giả bền  $2^3S$  và  $2^1S$ , lớn hơn một chút so với các mức năng lượng laze của nguyên tử Ne như chỉ ra trong hình 3.1. Năng lượng kích thích các nguyên tử He được chuyển với hiệu suất rất cao sang các mức năng lượng laze của Ne và tạo nên sự đảo mật độ cư trú của các electron và dẫn đến sự phát laze. Như vậy vai trò của heli là thúc đẩy một cách hiệu quả quá trình bơm để đảm bảo thực hiện được sự đảo mật độ cư trú.

**3011**

Đưa ra đánh giá tốt nhất có thể cho từng đại lượng sau:

- (a) Hiệu điện thế để gây nên một tia lửa điện dài 5 cm trong không khí.
- (b) Từ trường trái đất.
- (c) Từ trường lớn nhất của một nam châm điện lõi sắt theo tiêu chuẩn phòng thí nghiệm.
- (d) Thông lượng tia vũ trụ tại mực nước biển.
- (e) Áp suất trong một hệ chân không làm bằng kim loại nối với bơm khuếch tán dẫn.
- (f) Giới hạn an toàn của dòng điện đi qua dây đồng bọc chất cách điện có đường kính 1 mm.
- (g) Điểm sôi của nitơ lỏng (1 atm).

**Trả lời:**

- (a) 150 kV.
- (b)  $5,0 \times 10^{-3}$  Wb m<sup>-2</sup> hoặc 0,5 G.
- (c) 1714 G (tại nhiệt độ phòng).
- (d) 0,5 cm<sup>-2</sup> s<sup>-1</sup>.
- (e)  $10^{-8}$ – $10^{-6}$  Torr (áp suất bay hơi tại 25°C).
- (f) 12 A (với chất liệu bọc là êtylen hoặc cao su chịu được đến 600 vôn).
- (g) 77,36 K.

**3012**

Đưa ra ví dụ về sự khám phá và phát triển trong thời gian gần đây đối với các nhóm gồm 3 trong số các lĩnh vực vật lý được liệt kê dưới đây. Dùng một vài câu để diễn tả ý nghĩa khoa học, người thực hiện và nơi thực hiện khám phá đó.

- (a) Vật lý Năng lượng cao.
- (b) Vật lý Vũ trụ và Thiên văn.
- (c) Vật lý Plasma.
- (d) Vật lý Nguyên tử.
- (e) Vật lý Hạt nhân.
- (f) Vật lý Chất rắn.

## Trả lời:

(a) Sử dụng máy va chạm proton-phản proton ở CERN (Trung tâm nghiên cứu hạt nhân Châu Âu), một nhóm gồm hơn một trăm các nhà thực nghiệm đứng đầu là C. Rubia đã khám phá ra các boson vectơ trung gian tích điện  $W^+$  và  $W^-$  trong khoảng tháng 11 đến tháng 12 năm 1982, và boson vectơ trung gian trung hoà  $Z^0$  trong khoảng tháng 4 đến tháng 5 năm 1983. Các khám phá này có ý nghĩa to lớn vì các nhà thực nghiệm đã kiểm chứng được sự thống nhất của trường tương tác và tương tác điện từ.

(b) Vào ngày 29 tháng 1 năm 1983, Mỹ, Anh và Hà Lan đã cùng phóng một vệ tinh thiên văn hồng ngoại (IRAS) đánh dấu sự khởi đầu của kỷ nguyên thiên văn hồng ngoại trong vũ trụ. Lần đầu tiên con người có thể quan sát bằng hồng ngoại các thiên thể mà không bị bầu khí quyển trái đất gây cản trở.

(c) Lò Thủ nghiệm Tổng hợp Hạt nhân Tokamak (TFTR) của Đại học Princeton, Mỹ được hoàn thành năm 1982, và Lò Thủ nghiệm Tổng hợp Hạt nhân Liên minh Châu Âu Toras (JET) đặt tại phòng thí nghiệm Kirham tại Anh được hoàn thành một năm sau đó. Các cơ sở này sẽ được sử dụng để nghiên cứu quá trình tổng hợp hạt nhân để sản xuất ra năng lượng.

(d) Một bước tiến quan trọng trong nghiên cứu các đơn nguyên tử được thực hiện năm 1986 khi các nhà khoa học Thụy Điển phát triển một dạng kính hiển vi mới có thể quan sát được các đơn nguyên tử. Trong lúc đó, các nhà khoa học Mỹ đã có thể “bắt” các đơn nguyên tử bằng cách sử dụng bẫy laser và các nhà khoa học Mỹ và Đức đã công bố rằng họ đã quan sát thấy các chuyển pha lượng tử trong một đơn nguyên tử như đã được đề xướng lần đầu tiên bởi Bohr.

(e) Tiếp sau sự khám phá ra nguyên tố có số nguyên tử 107 vào năm 1981 và nguyên tố với số nguyên tử 109 vào năm 1982, nguyên tố 108 đã được tìm thấy bởi 14 nhà khoa học dẫn đầu là G. Mungenberg tại Phòng thí nghiệm GSI ở Đức vào tháng 3 năm 1984. Các nghiên cứu về các nguyên tố này có thể chỉ ra những cấu trúc hạt nhân mới hoặc các hiệu ứng nằm ngoài các hiệu ứng đã biết từ bảng hệ thống tuần hoàn cũ.

(f) Năm 1982, H. Stormer, A.C. Gossard và Dan Tsui thuộc Phòng thí nghiệm Bell, Mỹ đã nghiên cứu lớp chuyển tiếp có độ linh động cao  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}/\text{GaAs}$ , và tìm ra một hiệu ứng Hall lượng tử mới chưa được quan sát thấy trước đó. Người ta dự đoán rằng hiệu ứng này chưa được tiên đoán bởi các nhà lý thuyết có thể có liên quan đến tương tác Coulomb giữa các electron. Về mặt thực tiễn hiệu ứng này có thể dẫn đến sự phát triển của một loạt các loại linh kiện mới.

## 3013

Các cụm từ dưới đây rất thông dụng trong vật lý hiện nay: Dung cầu chính xác, ngắn gọn để làm rõ ý nghĩa và các ứng dụng của chúng trong khoa học và trong công nghiệp: Các nguyên tử Rydberg, bức xạ synchrotron, sợi quang, các chùm nơtron, các chùm hạt va chạm, các jet.

**Trả lời:****(1) Các nguyên tử Rydberg**

Đó là các nguyên tử ở các trạng thái kích thích rất cao với các số lượng tử chính  $n$  lớn đến 10 cho tới  $10^2$ . Trong không gian giữa các vì sao người ta đã tìm thấy các nguyên tử hidrô với  $n > 250$ . Ta cũng có thể tạo được hidrô và các nguyên tử khác với  $n \sim 100$  trong phòng thí nghiệm. Do các mức năng lượng của các trạng thái kích thích cao như vậy nằm gần mức ion hóa nên các nguyên tử này có thể bị ion hóa một cách dễ dàng. Trong khi đó, do bán kính nguyên tử tỷ lệ với  $n^2$ , nên kích thước tuyến tính của các nguyên tử này gần bằng một micron. Chúng có thể không bị nhiễu loạn khi có các nguyên tử khác đi qua. Hơn nữa chúng có thời gian sống rất dài. Các tính chất khác của chúng vẫn đang còn dang dở tiếp tục nghiên cứu. Những hiểu biết về các nguyên tử Rydberg rất quan trọng cho nghiên cứu về thiên văn vô tuyến và các dạng laze mới.

**(2) Bức xạ synchrotron**

Thuật ngữ dùng để chỉ các bức xạ điện từ phát ra khi các electron chuyển động tương đối tĩnh trong một từ trường. Bức xạ này rất định hướng, chúng được phát ra theo các hướng rất gần với quỹ đạo chuyển động của electron. Thường được tạo ra trong máy synchrotron, các bức xạ này là nguồn bức xạ điện từ mạnh phục vụ mục đích nghiên cứu trong các lĩnh vực vật lý nguyên tử, khoa học vật liệu, vật lý thiên văn, v.v...

**(3) Quang sợi**

Một sợi quang thường được làm bằng thủy tinh thạch anh có dạng hình trụ rất dài với lõi trong suốt và lớp vỏ có chiết suất nhỏ hơn vật liệu lõi. Nó cũng có thể là một sợi dài điện môi với chiết suất giảm dần theo hướng bán kính khi di ra xa khỏi trục. Do hiện tượng phản xạ toàn phản tai bề mặt biên nên sự lan truyền ánh sáng bị giới hạn ở phần lõi của sợi quang. Thực tế ánh sáng truyền theo chiều dài của sợi với vận tốc bằng vận tốc ánh sáng trong chân không, nó là một vật dẫn sáng với sự thất thoát ánh sáng ra bên ngoài hoặc hấp thu ánh sáng rất nhòe. Sợi quang được sử dụng rộng rãi trong truyền

thông và dùng làm nguồn sáng linh hoạt.

#### (4) Các chùm trung hoà

Mô hình Glashow – Weinberg – Slam về sự thông nhất điện từ yếu đã tiên đoán về sự tồn tại tương tác yếu của chùm trung hoà lúc đó chưa được quan sát thấy trong thực nghiệm nhưng góp phần giải thích thành công các định luật cơ bản của các tương tác yếu và tương tác điện từ đã biết. Các chùm trung hoà là các dòng hạt có cùng diện tích ở các trạng thái đầu và cuối. Sự tồn tại của tương tác yếu của chùm trung hoà đã được khẳng định bằng thực nghiệm năm 1973, ủng hộ giả thuyết của mô hình GWS. Năm 1978, chính nhóm nghiên cứu thực nghiệm độc lập nhau đã thực hiện các phép đo về cường độ và các tính chất của tương tác của yếu chùm trung hoà. Các kết quả này đã khẳng định tính đúng đắn của mô hình GWS. Đặc biệt, góc Weinberg có thể được xác định chính xác bằng cách sử dụng các chùm trung hoà.

#### (5) Các chùm va chạm

Các hạt có diện tích dương và diện tích âm chuyển động theo quỹ đạo, hướng ngược nhau trong một vòng tích lũy được cho va chạm trực diện sau khi chúng đạt tới năng lượng cực đại. Các hạt lúc đó tạo nên các chùm va chạm. Các hạt này thường là các electron và positron hoặc là các proton và phản proton. Với các chùm hạt này hệ quy chiếu phòng thí nghiệm tương đương với hệ quy chiếu khối tâm của các hạt va chạm.

Giả thiết một hạt có khối lượng nghỉ  $m$  có thể được gia tốc tới năng lượng toàn phần  $E$  trong một máy synchrotron. Nếu nó va chạm với các hạt đứng yên có cùng khối lượng thì năng lượng va chạm là  $\sqrt{2(E + mc^2)}mc^2 \approx \sqrt{2Emc^2}$ . Trái lại, trong cách bố trí chùm va chạm trong đó một hạt có tổng năng lượng  $E$ , năng lượng va chạm là  $2E$  tức là lớn hơn rất nhiều. Điều lợi thế ở đây là có thể sử dụng các chùm hạt va chạm cho nghiên cứu các tương tác năng lượng cao.

#### (6) Các jet

Sự va chạm của các hạt năng lượng cao tạo ra một số lớn các hạt thứ cấp có xu thế bị phát xạ theo các hướng rất xác định, gọi là các jet. Ví dụ sự hủy  $e^+ e^-$  năng lượng cao, va chạm của các hadron năng lượng cao và các tản xạ sâu không dàn hồi của các lepton bởi các hadron có thể tạo nên các jet. Các jet nhìn chung được xem như là được tạo bởi các va chạm ở một mức sâu hơn, và sự nghiên cứu chúng có thể thu được những thông tin mới về cấu trúc của các hadron và các tương tác giữa chúng.

## 3014

Hãy thảo luận về năng lượng mặt trời. Yếu tố nào kiểm soát (hay giới hạn) tốc độ giải phóng năng lượng? Những quan sát nào về mặt trời từ trái đất có thể cho thông tin trực tiếp liên quan đến các phản ứng xảy ra ở sâu bên trong mặt trời?

**Trả lời:**

Năng lượng mặt trời được cung cấp bởi sự tổng hợp nhiệt hạch xảy ra liên tục trong mặt trời. Có hai loại phản ứng nhiệt hạch, proton-proton và cacbon-nitơ, mỗi loại đều có kết quả cuối cùng là liên kết bốn hạt nhân của hidrô (proton) thành một hạt nhân heli. Trong quá trình này mỗi một hạt nhân hidrô chuyển 7% khối lượng của nó thành năng lượng. Các phản ứng nhiệt hạch chỉ có thể được khởi phát tại các nhiệt độ ít nhất khoảng  $10^7$  K và do đó phải xảy ra trong vùng lõi của mặt trời là nơi có nhiệt độ đủ lớn. Năng lượng giải phóng trong phản ứng này xuất hiện trước tiên dưới dạng các tia X và tia  $\gamma$ . Nó tiến tới bề mặt của mặt trời sau nhiều quá trình hấp thu và tán xạ, ở đó nó được giải phóng dưới dạng ánh sáng và nhiệt. Tốc độ phát xạ được không chế bởi cân bằng cơ học trong trường hấp dẫn của mặt trời và cân bằng nhiệt sao cho tồn tại một cân bằng giữa năng lượng tạo ra bởi phản ứng nhiệt hạch và năng lượng phát ra từ bề mặt mặt trời. Khi các hạt nhân hidrô kết hợp thành các hạt nhân heli, một lượng lớn các hạt neutrino cũng được phát ra. Do tương tác của các hạt neutrino với vật chất rất yếu, chúng có thể dễ dàng xuyên qua các lớp phía ngoài của mặt trời để tiến tới trái đất. Một nghiên cứu về thông lượng neutrino, được đánh giá bằng lý thuyết bằng  $10^{11} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$  ở gần trái đất, có thể cho các thông tin chi tiết về quá trình sản sinh năng lượng trong vùng lõi của mặt trời.

## 3015

Hãy viết ngắn gọn về những hiểu biết của bạn về các punxa. Các bức xạ do chúng phát ra trong khoảng chu kỳ và bước sóng nào? Nguồn gốc của bức xạ xung đó là gì và nguồn năng lượng được giả thiết là xuất phát từ đâu?

**Trả lời:**

Punxa là các thiên thể phát ra các xung radio theo các khoảng cách thời gian rất đều đặn. Các xung có thể là xung  $\gamma$  hoặc xung tia X, hoặc thậm chí trong khoảng tần số quang học, và thường có chu kỳ ngắn hơn 4.3 giây thậm chí chỉ bằng 0,033 giây ở punxa Crab Nebula. Gần đây người ta tìm thấy punxa

radio có chu kỳ xung cỡ mili giây. Các punxa tia X có chu kỳ tương đối lớn, từ 0,7 giây tới 8,35 giây. Hiện nay người ta cho rằng punxa là một dạng sao nơtron có tử tính quay rất nhanh và có tử trường mạnh đên nỗi làm quỹ đạo xoắn của electron bị kéo thành gần như là một đường thẳng. Tại vị trí các cực tử, các electron bị bắn ra thành các dòng theo các đường sức tử, và bức xạ synchrotron do các electron đó phát ra cũng tạo thành các chùm mảnh theo các hướng đó. Thông thường trực từ của một sao nơtron không trùng với trực quay của nó.

Khi sao nơtron quay thì sẽ có một chùm tia bức xạ synchrotron mảnh quét qua không gian và xuất hiện như một xung ánh sáng mỗi khi nó tới kính viễn vọng của chúng ta. Như vậy chu kỳ của các xung phản ánh chu kỳ quay của sao nơtron. Năng lượng bức xạ của một punxa có thể bắt nguồn từ năng lượng quay của sao nơtron: sự quay dần dần sẽ chậm lại, giải phóng động năng của nó để duy trì bức xạ xung mà ta quan sát thấy. Làm thế nào để năng lượng quay này chuyển thành năng lượng của các electron chuyển động nhanh vẫn còn đang là một điều bí ẩn.

### 3016

Một thí nghiệm đếm có tốc độ đếm trung bình  $r$  là  $10^3$ /giây, một phần của nó gây bởi nhiễu nền. Tốc độ đếm trung bình của nhiễu nền  $r_B$  là 900/giây.

- Tốc độ đếm trung bình  $r_T$  của các sự kiện “thực” là bao nhiêu?
- Khoảng thời gian giữa các lần đếm  $\Delta t$  phải bằng bao nhiêu để ta có thể thu được tốc độ tín hiệu trên nhiễu bằng 1 (tín hiệu là số các sự kiện thực diễn ra trong khoảng thời gian  $\Delta t$ )?
- Nếu hiệu suất đến đôi với các sự kiện thực tăng lên 4 lần, tốc độ đếm trung bình của nhiễu nền không đổi thì  $\Delta t$  sẽ bằng bao nhiêu để đạt được tỷ số tín hiệu trên nhiễu bằng 1 như trong câu (b)?

Trả lời:

- Tốc độ đếm trung bình của các sự kiện “thực” là

$$r_T = r - r_B = 1000 - 900 = 100 \text{ sự kiện/giây.}$$

- Để đạt được tỷ số tín hiệu trên nhiễu bằng 1, ta cần  $r_T \Delta t = 900$  xung đếm/giây. Như vậy khoảng thời gian đếm cần thiết là

$$\Delta t = \frac{900}{100} = 9 \text{ giây.}$$

(c)  $\Gamma_T$  bây giờ bằng 400 xung/dêm/giây. Như vậy

$$\Delta t = \frac{900}{400} = 2.25 \text{ giây.}$$

### 3017

Một ống nhân quang điện được sử dụng để đo cường độ của một nguồn sáng. Giả thiết rằng nguồn sáng không đổi, khuếch đại dòng của ống nhân quang điện là  $10^6$ , và dòng anôt trung bình là  $10^{-8}$  ampe. Phép đo dòng này được thực hiện bằng cách lấy trung bình các giá trị dòng trong vòng 10 mili giây, tức là hằng số thời gian đo là  $10^{-2}$  giây.

(a) Có bao nhiêu electron quang điện được phát ra trong một giây từ catôt quang để tạo ra dòng anôt bằng  $10^{-8}$  ampe?

(b) Giả thiết rằng sự phát electron từ catôt xảy ra một cách ngẫu nhiên, độ biến thiên căn quân phương của điện lượng thu nhận sau từng khoảng thời gian 10 mili giây đo được là bao nhiêu?

(c) Tỷ số tín hiệu trên nhiễu của phép đo là bao nhiêu?

Trả lời:

(a) Dòng anôt được tính bởi  $I = \epsilon r e$ , ở đây  $\epsilon$  là hệ số khuếch đại của ống nhân quang điện,  $r$  là tốc độ phát electron và  $e$  là điện tích electron. Như vậy

$$r = \frac{I}{\epsilon e} = \frac{10^{-8}}{10^6 \times 1.6 \times 10^{-19}} = 6.25 \times 10^4 \text{ electron/giây.}$$

(b) Trong khoảng thời gian đo  $\tau = 10^{-2}$  s, số  $N$  các electron quang điện phát ra và sự thăng giáng  $\Delta N$  của nó là

$$N = r\tau = 625, \quad \Delta N = \sqrt{N} = 25.$$

Số các electron thu được tại anôt và sự thăng giáng của nó là

$$N^* = \epsilon N = 6.25 \times 10^8, \\ \Delta N^* = \sqrt{N^*} = 2.5 \times 10^4.$$

Như vậy độ biến thiên căn quân phương của điện lượng thu được là

$$\Delta Q = \epsilon \Delta N^* = 4 \times 10^{-15} C.$$

(c) Tỷ số tín hiệu trên nhiễu của phép đo là

$$\frac{N^*}{\Delta N^*} = 2,5 \times 10^4.$$

### 3018

Hãy trình bày về lĩnh vực Vật lý mà bạn dự định sẽ làm luận án.  
*(Chỉ dùng để tham khảo)*

### 3019

Hãy đề cử một ứng cử viên, trích dẫn các công trình gần đây (kèm theo mô tả ý nghĩa của chúng) cho giải Nobel Vật lý của năm tới.

*(Chỉ dùng để tham khảo)*

### 3020

(a) Chuyên ngành học của bạn là gì?

(b) Trình bày ngắn gọn một trong những đóng góp thú vị và nóng hổi nhất của ngành học của bạn trong vòng mươi mươi lăm năm qua. Chỉ ra (những) người và (những) phòng thí nghiệm ở đó đóng góp này được thực hiện. Chỉ ra tên (các) tạp chí trong đó đóng góp đó được công bố.

*(Chỉ dùng để tham khảo)*

### 3021

(a) Chuyên ngành của bạn là gì? Kể tên hai tạp chí chuyên cho ra những xuất bản nhanh và tạp chí (hoặc xê-ri sách) với các bài tổng quan tốt nhất về vấn đề chuyên môn của bạn. Đồng nghiệp của bạn ở Nga sẽ xuất bản các vấn đề đó ở tạp chí nào?

(b) Mô tả ngắn gọn một dự án nghiên cứu đang được tiến hành ở khoa Vật lý trong trường đại học của bạn khác với lĩnh vực chuyên môn mà bạn đang làm (ví dụ nhiệt độ thấp, lý-sinh, hóa-lý, phổ phân tử hoặc nguyên tử, năng lượng cao, hạt nhân, plasma, vật lý chất rắn, v.v...).

*(Chỉ dùng để tham khảo)*

## 3022

Hãy viết trong vòng không quá năm phút về một trong số mươi lịnh vực dưới đây:

- (1) Cấu trúc quark của các nucleon và meson
- (2) Các tín hiệu cảm ứng cộng hưởng từ hạt nhân (NMR)
- (3) Ngưng tụ Bose-Einstein
- (4) Giao thoa kẽt tầm xa
- (5) Laze exime
- (6) Các phân tử hiđrô octo và para
- (7) Máy đếm tý lệ
- (8) Spin dòng vi
- (9) Số lạ và “Sản phẩm liên dới”
- (10) Các phô heli octo và para
- (11) Nguyên lý thứ ba của nhiệt động học
- (12) Phép đo mômen từ của nơtron
- (13) Punxa
- (14) Nguồn năng lượng giải phóng từ sự phân hạch
- (15) Phát hiện tần số radio của hiđrô thiên hà

**Trả lời:**

- (1) Cấu trúc quark của các nucleon và meson

Hiện nay các nhà khoa học cho rằng tồn tại sáu dạng quark, ba loại nhẹ ( $u, d, s$ ) và ba loại nặng ( $c, b, t$ ), mỗi loại có một phản hạt của nó được biểu diễn lần lượt là ( $\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}, \bar{c}, \bar{b}, \bar{t}$ ). Các hạt quark có số baryon  $\frac{1}{3}$ , diện tích phân số có thể là  $-\frac{1}{3}$  hoặc  $\frac{2}{3}$  diện tích của electron, có spin  $\frac{1}{2}$ , và còn có các số lượng tử khác như siêu tích, số lạ và số duyên. Mỗi một nucleon được cho là cấu thành từ ba hạt quark nhẹ

$$p = (u \ u \ d), \quad n = (d \ d \ u).$$

và mỗi một meson là trạng thái liên kết của một quark và một phản quark

$$\pi^+ = (d \ u), \quad \pi^- = (d \ \bar{u}),$$

$$\pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u} \ u - \bar{d} \ d).$$

### (2) Các tín hiệu cảm ứng cộng hưởng từ hạt nhân (NMR)

Nói chung, các hạt nhân nguyên tử có mômen xung lượng  $I\hbar$  và có mômen từ  $\mu = g\mu_n\mathbf{I}$ , ở đây  $\mu_n$  là magneton hạt nhân và  $g$  là một hằng số. Trong từ trường ngoài  $\mathbf{H}$  mômen từ sẽ tiến động với tần số Larmor  $\omega = -g\mu_n\mathbf{H}$ . Do sự định hướng của mômen từ bị lượng tử hóa nên một mức năng lượng bị tách thành  $2I + 1$  các mức con với  $I_z = I, I - 1, I - 2, \dots, -I + 1, -I$ . Năng lượng của một dipole là  $-\mu \cdot \mathbf{H} = -\mu_z H$ , dẫn tới khoảng cách giữa các mức con là  $g\mu_n H$ . Khi tác dụng một tín hiệu xoay chiều bên ngoài có tần số  $\omega$ , một chuyển đổi giữa các mức con kề nhau sẽ xuất hiện nếu  $\hbar\omega = g\mu_n H$ , gây ra hấp thụ cộng hưởng. Tần số cộng hưởng thường ở vùng tần số radio. Khi từ trường dao động với tần số vô tuyến không ở giữa các xung thì các tín hiệu *NMR* sẽ được phát ra.

Về mặt thực nghiệm, người ta sử dụng thiết bị cộng hưởng từ hạt nhân ảnh Fourier xung sử dụng các xung có chu kỳ ngắn để cảm ứng cho mẫu phát ra các tín hiệu NMR. Số xung sẽ được điều chỉnh để tăng cường tỷ số tín hiệu trên ôn của các tín hiệu được tích lũy.

### (3) Ngưng tụ Bose-Einstein

Đối với một khí Bose-Einstein lý tưởng, chuyển pha xảy ra tại một nhiệt độ mà ở trên đó các nguyên tử tự phân bố theo các mức năng lượng khác nhau theo cách thông thường, nhưng ở dưới nhiệt độ này một phần các nguyên tử bị nhảy xuống mức năng lượng thấp nhất, tỷ phần nguyên tử này tăng lên từ 0 tại nhiệt độ chuyển pha đến 1 khi nhiệt độ gần với nhiệt độ không tuyệt đối. Sự chuyển pha này được gọi là ngưng tụ Bose-Einstein.

Các tính chất của heli II có thể được coi là có liên quan đến hiện tượng ngưng tụ này. Tuy nhiên, do các lực tương tác giữa các nguyên tử thường bị bỏ qua nên lý thuyết này không đưa ra được các dự đoán có tính định lượng tốt.

### (4) Giao thoa đường dây dài

Trong ngành thiên văn vô tuyến, các tín hiệu từ một nguồn phát được thu nhận từ một số các kính thiên văn vô tuyến, và các tín hiệu được phát hiện từ các kính thiên văn khác nhau được chồng lên nhau để suy ra cấu trúc của nguồn phát. Năng suất phân giải góc của hệ thống này phụ thuộc vào chiều dài đường dây và bước sóng làm việc. Nếu bằng chiều dài giữa các lục địa thì năng suất phân giải góc đôi với các bước sóng có centimet có thể đạt  $10^{-3}$  đến  $10^{-4}$  giây (góc).

### (5) Laze exime

Các phân tử có thời gian sống ngắn như là các phân tử lưỡng nguyên từ được cấu thành từ khí trơ và nguyên tố ho halogen (ví dụ XeF) được gọi là các phân tử exime. Các laze được phát ra từ các phân tử này chủ yếu là nằm trong vùng sóng cực tím chân không và ở dưới dạng các xung ngắn.

### (6) Các phân tử hidrô octo và para

Một phân tử hidrô được cấu thành từ hai proton, mỗi một proton có spin bằng  $\frac{1}{2}$  và như vậy thỏa mãn thông kê Fermi-Dirac, và do đó cần có một hàm sóng toàn phần bất đối xứng khi tráo đổi vị trí của các proton. Nếu bỏ qua các năng lượng spin, đối xứng không gian và đối xứng spin có thể được xét riêng biệt. Các trạng thái của phân tử có spin hạt nhân song song nhau là đối xứng trong hàm spin và được gọi là các trạng thái octo. Các trạng thái có các spin hạt nhân đối song là phản đối xứng trong hàm spin và được gọi là các trạng thái para. Một nguyên tắc lọc lựa rất nghiêm ngặt ngăn cản sự chuyển đổi thuận nghịch giữa hai loại trạng thái này trừ phi các phân tử trước hết đã bị phân ly.

### (7) Máy đếm tỷ lệ

Đó là một dạng ống đếm bức xạ chứa khí trong đó độ lớn của xung phát ra trên một lần đếm tỷ lệ với năng lượng của một hạt nào đó hoặc photon được đếm. Như vậy ta có thể phân biệt được các hạt  $\alpha$  so với các proton phát ra từ các tia  $\beta$  và  $\gamma$ . Để đếm các nôtron nhanh, một máy đếm tỷ lệ chứa một loại khí chứa hidrô như là mêtan hoặc có các thành ống chứa vật liệu có chứa nguyên tố hidrô trong đó. Các nôtron nhanh phản ứng với hidrô làm bật ra các proton giật lùi tạo nên các xung lớn.

### (8) Spin đồng vị

Số lượng tử spin đồng vị hoặc isospin  $I$  lần đầu tiên được đề xướng bởi Heisenberg vào năm 1932. Tương ứng với spin trong không gian thông thường, isospin là một spin trong không gian isospin với các thành phần theo phương  $z$  có các giá trị lượng tử hóa  $I, I - 1, I - 2, \dots, -I + 1, -I$ , tổng số gồm  $2I + 1$  giá trị, mỗi giá trị ứng với một trạng thái điện tích. Nếu bỏ qua sự chênh lệch nhỏ về khôi lượng giữa các proton và nôtron thì chúng có thể được xem như là một loại hạt nucleon trong các trạng thái isospin tương ứng là  $I_z = \frac{1}{2}$  và  $I_z = -\frac{1}{2}$ . Ý tưởng này cũng áp dụng cho các hadron, ví dụ  $\sum |I| = 1$ ,  $\Xi(I = \frac{1}{2})$ . Trong một tương tác mạnh, tổng isospin của một hệ được bảo toàn, phản ánh sự không phụ thuộc của lực tương tác mạnh vào điện tích. Đối với

một hạt  $I_z$  có thể được liên hệ với điện tích (theo đơn vị điện tích của electron)  $Q$ , số baryon  $B$  và số lạ  $S$  qua

$$Q = I_z + \frac{1}{2}(B + S).$$

Tổng  $I_z$  của một hệ được bảo toàn trong các tương tác mạnh và tương tác điện từ.

#### (9) Số lạ và sự sản xuất liên đới

Một số các baryon và meson được tạo ra trong tương tác mạnh, trong khoảng thời gian  $10^{-24}$  s, nhưng lại phân rã thông qua tương tác yếu trong khoảng thời gian  $10^{-10}$ – $10^{-8}$  s. Để giải thích hiện tượng kỳ lạ này, năm 1954, Gell-Mann và một số nhà khoa học khác đã đưa ra khái niệm số lượng tử lạ có tính bảo toàn trong tương tác mạnh nhưng có thể thay đổi các lượng 0 hoặc  $\pm 1$  trong tương tác yếu. Số lượng tử lạ có thể là một số nguyên hoặc không, dương hoặc âm. Các hạt có đặc tính lạ gọi là các hạt lạ và được gán cho số lạ khác không còn các hạt không có các đặc tính lạ thì được gán cho số lạ bằng không. Ví dụ  $S = 0$  đối với  $\pi$ ,  $S = 1$  với  $K$ ,  $S = -2$  với  $\Xi$ ,  $S = -3$  với  $\Omega$ . Trong sự sản xuất ra các hạt lạ nhờ tương tác mạnh giữa các hạt không lạ, do tổng các số lạ được bảo toàn nên các hạt lạ phải được sinh ra sao cho các số lạ triệt tiêu lẫn nhau và điều đó dẫn tới cái được gọi là sự sản xuất liên đới.

#### (10) Các phổ heli octo và para

Spin tổng cộng của một nguyên tử có thể bằng không hoặc một. Tương ứng trong quang phổ của heli có hai nhóm các mức năng lượng đơn tuyển và tam tuyển. Một nguyên tắc lọc lựa không cho phép có sự chuyển đổi giữa hai nhóm trạng thái này, do đó chúng xử sự như hai dạng nguyên tử khác nhau. Hai nhóm này tương ứng gọi là các nguyên tử octo và para.

#### (11) Nguyên lý thứ ba của nhiệt động học

Nguyên lý thứ ba của nhiệt động học còn gọi là định lý Nernst phát biểu rằng nếu một sự biến đổi hóa học diễn ra giữa các chất rắn tinh thể tinh khiết tại nhiệt độ không tuyệt đối thì sẽ không có sự thay đổi về entropy. Điều này được mở rộng ra là giá trị entropy của mỗi một pha ngưng tụ bằng không ở nhiệt độ không tuyệt đối. Từ nguyên lý này có thể rút ra được rằng không thể đạt tới nhiệt độ không tuyệt đối đối với bất kỳ một hệ nào thông qua một quá trình hữu hạn.

#### (12) Phép đo mômen từ của nôtron

Nutron có spin  $\frac{1}{2}$  và do vậy sẽ có một mômen từ song song hoặc đối song với spin đó. Để đo được mômen từ đó một chùm neutron châm từ lò phản ứng được phân cực và cho đi qua một cuộn dây phát tần số radio đặt trong một từ trường cố định. Tần số cần thiết để phá vỡ sự phân cực được so sánh với tần số phá vỡ sự phân cực proton trong cùng hệ thiết bị đó. Bằng cách đó mômen từ của neutron được xác định bằng  $-1,9132$  magneton hạt nhân, dấu âm để chỉ rằng mômen từ và spin đối song nhau.

(13) *Punxa*

Xem [Bài tập 3015](#)

(14) *Nguồn năng lượng phát ra từ quá trình phân chia hạt nhân*

Trong quá trình phân chia hạt nhân, tổng của các khối lượng nghỉ của các mảnh vỡ được tạo thành nhỏ hơn khối lượng nghỉ của hạt nhân ban đầu. Sự chênh lệch về khối lượng được giải phóng dưới dạng động năng của các mảnh vỡ và bức xạ theo hệ thức Einstein  $E = mc^2$ . Như vậy năng lượng được giải phóng trong quá trình phân chia hạt nhân xuất phát từ sự chuyển đổi khối lượng nghỉ thành năng lượng.

(15) *Phát hiện tần số radio của hidrô thiên hà*

Hidrô trung hoà có thể được phát hiện qua các chuyển đổi siêu tinh tề 1420 MHz (21-cm) trong trạng thái cơ bản  $1^2S$  bằng phương pháp biến diệu tần số. Do hidrô là nguyên tố có mặt nhiều nhất trong vũ trụ nên sự quan sát các phổ đặc trưng của nó và cường độ các vạch phổ tương ứng có thể thu được các thông tin hữu ích liên quan đến cấu trúc và nhiệt độ của vũ trụ, cũng như sự phân bố của khí giữa các vì sao. Các vạch cộng hưởng Lyman  $\alpha$  và  $\beta$  cũng được sử dụng để phát hiện các nguyên tử hidrô bị kích thích và các vạch 18-cm dùng để xác định các gốc OH.

**3023**

Hãy viết ngắn gọn (1-2 trang trong vòng 10 phút) nhưng đủ ý mười trong số các vấn đề dưới đây:

- (1) Hiệu ứng Mössbauer
- (2) Các hạt quark
- (3) Spin đồng vị
- (4) Tán xạ Rayleigh

- (5) Số lượng tử lợ
- (6) Bảo toàn chẵn lẻ
- (7) Hoạt tính quang học, tức là sự quay mặt phẳng phân cực của ánh sáng
- (8) Xác định tuổi bằng C<sup>14</sup>
- (9) Làm lạnh bằng phương pháp khử từ đoạn nhiệt
- (10) Bức xạ Čerenkov
- (11) Giảm hâm plasma bằng từ trường
- (12) Giải thích thống kê về entropy
- (13) Tính kết hợp của ánh sáng
- (14) Khối lượng điện tử của electron
- (15) Thống kê Fermi-Dirac
- (16) Sự suy sụp do hấp dẫn
- (17) Bức xạ nền vi sóng
- (18) Độ nhớt của một chất khí
- (19) Sao neutron
- (20) Ngưng tụ Bose-Einstein
- (21) Sự dịch chuyển Lamb
- (22) Các trạng thái octo và para của hidrô

Trả lời:

(1) *Hiệu ứng Mössbauer*

Hiệu ứng này được phát hiện bởi Mössbauer vào năm 1958 là hiện tượng phát các tia  $\gamma$  huỳnh quang cộng hưởng không có giật lùi từ các hạt nhân trong các chất rắn. Tính sắc nét của các chuyển đổi  $\gamma$ -và khả năng dễ dàng quan sát một cách chính xác những chênh lệch năng lượng nhỏ đã đưa hiệu ứng này trở thành một dụng cụ quan trọng trong các nghiên cứu về hạt nhân và trong vật lý chất rắn.

Huỳnh quang cộng hưởng là quá trình kích thích một hệ lượng tử hóa từ trạng thái cơ bản 0 đến một trạng thái kích thích 1 bằng cách hấp thụ một photon được phát ra từ một hệ tương đương khi hồi phục từ trạng thái 1 về trạng thái 0. Để bảo toàn năng lượng và xung lượng trong các quá trình hấp thụ và phát xạ, các hệ nguồn và hệ hấp thụ đều phải nhận một năng lượng giật lùi  $R$  và huỳnh quang cộng hưởng chỉ có thể xảy ra nếu  $2R$  không lớn hơn độ rộng của các mức năng lượng tham gia vào quá trình. Tuy nhiên, nếu các hạt nhân nguồn và hấp thụ bị giữ chặt trong một mạng tinh thể thì toàn bộ

mang có thể hấp thụ các xung lượng giật lùi và tạo ra tinh huống không có sự giật lùi. Hơn nữa, sự ảnh hưởng của môi trường nguyên tử còn có thể gây ra sự tách mức siêu tinh tế. Để có được huỳnh quang cộng huống, nguồn phái có vận tốc tương đối nhỏ, do đó sẽ gây thêm sự dịch tần số do hiệu ứng Doppler. Ví dụ  $\text{Fe}_3\text{O}_4$  và  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  không thể hấp thụ bình thường các photon  $\gamma$  phát ra từ  $^{57}\text{Fe}$ ; hấp thụ chỉ xảy ra khi giữa nguồn và chất hấp thụ có vận tốc tương đối nhỏ. Huỳnh quang phát ra sẽ hình thành nên phổ Mössbauer.

### (2) Các hạt quark

Các quark là các hạt được độc lập để xuống bởi Gell-Mann và Zweig vào năm 1964. Chúng là các cấu tử tạo nên các hạt “cơ bản” tương tác mạnh. Các nhà khoa học cho rằng tồn tại sáu dạng quark, ba loại nhẹ  $u, d, s$  và ba loại nặng  $c, b, t$ , và các phản quark. Mỗi một hạt quark có diện tích phân số  $-\frac{1}{3}$  hoặc  $\frac{2}{3}$ , spin  $\frac{1}{2}$ , số baryon  $\frac{1}{3}$  và các số lượng tử khác như là spin đồng vị, siêu tích, số lạ, số duyên và số màu. Một baryon tạo bởi ba hạt quark, ví dụ  $p = (u u d)$ ,  $n = (d d u)$ , trong khi đó meson là một trạng thái liên kết của một hạt quark và một phản quark, ví dụ  $\pi^+ = (\bar{d} u)$ ,  $\pi^- = (d \bar{u})$ ,  $\tau^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u} u - \bar{d} d)$ .

Mặc dù một hạt quark không thể tự nó tồn tại một mình nhưng sự xuất hiện của nó đã được khẳng định bằng thực nghiệm.

### (3) Spin đồng vị

Xem [Bài tập 3022](#) (8).

### (4) Tán xạ Rayleigh

Hiện tượng này liên quan đến sự tán xạ của ánh sáng bởi các hạt có kích thước nhỏ cỡ bước sóng của ánh sáng. Nó được đặc trưng bởi cường độ sáng tán xạ tỷ lệ nghịch với luỹ thừa bậc bốn của bước sóng, có nghĩa là ánh sáng xanh tán xạ mạnh hơn ánh sáng đỏ từ một môi trường chứa các hạt rất nhỏ và điều này giải thích được tại sao khói và bầu trời quang lại có màu lam khi ta quan sát theo phương không trùng với phương truyền sáng.

### (5) Số lạ

Xem [Bài tập 3022](#) (9).

### (6) Bảo toàn chẵn lẻ

Một hàm sóng đổi dấu khi nghịch đảo không gian

$$x \rightarrow -x, \quad y \rightarrow -y, \quad z \rightarrow -z, \quad t \rightarrow t$$

có chẵn lẻ là  $-1$ ; một hàm sóng không đổi dấu khi nghịch đảo không gian có chẵn lẻ là  $+1$ . Chẵn lẻ cũng có thể áp dụng cho các hadron. Một hệ các hadron có chẵn lẻ tổng cộng bằng tổng các chẵn lẻ của các hạt cá thể trong hệ. Nếu chẵn lẻ được bảo toàn trong một phản ứng thì chẵn lẻ tổng cộng sẽ không đổi trong quá trình phản ứng. Về mặt vật lý điều này có nghĩa là quá trình là đồng nhất với quá trình đối xứng gương của nó. Chẵn lẻ không được bảo toàn trong tương tác yếu, điều này đã được đề xuất đầu tiên và sau đó được khẳng định bằng thực nghiệm bởi C.N. Yang và T.D. Lee vào năm 1956. Trong số bốn loại tương tác cơ bản, chẵn lẻ chỉ không bảo toàn đối với tương tác yếu.

#### (7) Hoạt tính quang học

Một số tính chất và các dung dịch của một số chất làm quay mặt phẳng phân cực của ánh sáng phân cực khi đi qua chúng và tỷ lệ với chiều dày của chúng. Khi nhìn thẳng vào ánh sáng tới nếu sự quay theo chiều kim đồng hồ sự hoạt tính quang được gọi là quay phải hay còn gọi là dextro, nếu ngược chiều kim đồng hồ thì sự hoạt tính quang học được gọi là quay trái hoặc laevo. Các tính chất hoặc các chất có tính chất như vậy được gọi là các chất có hoạt tính quang học.

#### (8) Xác định niên đại bằng $^{14}C$

Đồng vị phóng xạ  $^{14}C$  được tạo ra bởi các tia neutron và tia vũ trụ trong lớp khí quyển phía trên qua phản ứng  $^{14}N(n,p)^{14}C$  và có chu kỳ bán rã là 5600 năm. Nó phân rã ngược lại thành  $^{14}N$ , và một trạng thái cân bằng được thiết lập trong khí quyển sao cho không khí chứa một phần ổn định của  $^{14}C$  phóng xạ trong một gam cacbon. Cacbon khí quyển ở dạng  $CO_2$ , gồm có một phần  $^{14}C$  cố định, được đưa vào tất cả các sinh vật thông qua một chu trình cacbon sinh học. Sau khi chết, độ phóng xạ  $^{14}C$  suy giảm theo hàm mũ. Vì vậy bằng cách xác định độ phóng xạ của  $^{14}C$ , các niên đại khảo cổ của các hài cốt của các cơ thể sống có thể được xác định.

#### (9) Làm lạnh bằng khử từ đoạn nhiệt

Đối với một muối thuận từ, entropy của nó tại 1 K vẫn tương đối lớn do hầu hết các momen từ của nó hầu như sắp xếp hỗn loạn trong khi entropy của dao động mang thì rất nhỏ. Nếu các spin electron được sắp xếp bằng cách tác dụng vào nó một từ trường thì entropy của muối đó sẽ giảm xuống giá trị thấp hơn và nhiệt từ hóa có thể được lấy đi theo cách dẫn nhiệt. Nếu muối này sau đó được cách nhiệt và khử từ theo cách đoạn nhiệt thì nhiệt độ của nó sẽ giảm xuống. Có thể đạt được nhiệt độ xuống tới 0,01 K theo cách này.

### (10) *Bức xạ Cerenkov*

Một hạt tích điện chuyển động đều nhìn chung không phát ra năng lượng bức xạ. Tuy nhiên nếu nó chuyển động trong một môi trường với một tốc độ  $u$  vượt quá vận tốc pha  $v$  của ánh sáng trong môi trường đó thì sóng điện từ sẽ được phát ra với một phổ liên tục bao gồm cả khoảng ánh sáng trong vùng nhìn thấy. Bức xạ tương tự như sóng xung kích được gây bởi một máy bay khi nó vượt quá vận tốc âm thanh được khám phá lần đầu tiên bởi Čerenkov vào năm 1937. Nó có tính định hướng cao, giới hạn trong một mặt nón hướng về phía trước và có nửa góc ở đỉnh lập với trục trùng với hướng truyền là  $\cos^{-1} \frac{v}{u}$  và tính chất này có thể sử dụng để xác định vận tốc hạt.

### (11) *Giam giữ plasma bằng từ trường*

Để một phản ứng nhiệt hạch xảy ra thì các hạt nhân tham gia phản ứng phải có năng lượng đủ lớn, tương ứng với các nhiệt độ lên tới hàng triệu độ. Ở các nhiệt độ đó, các nguyên tử bị ion hóa do va chạm và các electron không liên kết với bất kỳ một hạt nhân cụ thể nào; các ion và các electron hình thành nên plasma. Để giữ plasma cho phản ứng nhiệt hạch, các phương pháp cơ học rõ ràng là không thể áp dụng được mà người ta phải dùng cách giam giữ bằng từ trường trong đó một từ trường được thiết kế thích hợp để giữ các hạt tích điện trong khoảng không gian nhỏ cho phép phản ứng nhiệt hạch diễn ra.

### (12) *Giải thích thống kê về entropy*

Giả thuyết về entropy của Boltzmann liên hệ entropy  $S$  của một hệ ở một trạng thái cụ thể nào đó với xác suất thông kê  $W$  để tìm thấy hệ ở trạng thái đó:  $S = k_B \ln W$ , ở đây  $k_B$  là hằng số Boltzmann. Như vậy một hệ sẽ có entropy cực đại ở trạng thái có xác suất cao nhất. Vì một hệ có xu thế di từ trạng thái trật tự sang trạng thái mất trật tự nên entropy là thước đo độ mất trật tự.

### (13) *Tính kết hợp của ánh sáng*

Hai nguồn sáng được gọi là kết hợp nếu hiệu số pha của một cắp điểm, mỗi điểm trên một nguồn là một hằng số. Các sóng từ các nguồn kết hợp được gọi là các sóng kết hợp. Một nguồn sáng thường bao gồm nhiều phần phát sáng, tất cả phát ra các đoàn sóng hữu hạn kéo dài trong khoảng thời gian không vượt quá  $10^{-8}$  s. Do sự quan sát thường mất nhiều thời gian hơn nên các nguồn sáng riêng biệt hoặc các phần khác nhau của cùng một nguồn sáng là không kết hợp và để có được các bức tranh giao thoa ổn định, người ta thường cần các sóng phát ra từ cùng một nguồn (các nguồn laze là trường hợp ngoại lệ).

Sự chồng chập hai sóng ánh sáng có cùng tần số, có cường độ  $I_1, I_2$  từ cùng một nguồn phát có thể được biểu diễn dưới dạng

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \operatorname{Re} r_{12}.$$

Mức độ kết hợp  $r_{12}$  phụ thuộc vào bản chất của nguồn sáng và các độ dài quang đường tương đối. Ta có

$$\begin{array}{lll} \text{kết hợp hoàn toàn} & & \\ \text{kết hợp một phần} & \text{nếu} & |r_{12}| \left\{ \begin{array}{l} = 1 \\ < 1 \\ = 0 \end{array} \right. \\ \text{hoàn toàn không kết hợp} & & \end{array}$$

#### (14) Khối điện tử của điện tử

Phản của quán tính toàn phần của một vật tích điện bắt nguồn từ điện tích electron của nó được gọi là khối điện tử của electron. Chuyển động của một electron gây ra một trường điện từ mà tổng năng lượng của nó trừ đi năng lượng tĩnh của electron là năng lượng gây ra do khối lượng điện tử.

#### (15) Thông kê Fermi-Dirac

Đây là thông kê được thỏa mãn bởi các hạt vi mô đồng nhất, có spin bán nguyên và tuân theo nguyên lý loại trừ Pauli phát biểu là hai hạt không thể chiếm cùng một trạng thái. Các hạt như vậy được đặc trưng bởi tính phản đối xứng của các hàm sóng của nó và hàm phân bố của nó là  $n_i = \{\exp[(\epsilon_i - \mu)/kT] + 1\}^{-1}$ , ở đây  $\mu$  là thế hóa học hay còn gọi là năng lượng Fermi.

#### (16) Sự suy sụp do hấp dẫn

Ở giai đoạn phát triển về cuối của một ngôi sao, phản ứng nhiệt hạch diễn ra tại lõi của ngôi sao hầu như đã dừng lại, và khi áp suất bức xạ gây bởi phản ứng nhiệt hạch này bị giảm đi rất nhiều, không còn tạo được cân bằng với lực hút hấp dẫn của lõi đối với lớp bên ngoài, nên lớp ngoài sẽ nhanh chóng bị hút vào tâm và bán kính của nó có thể giảm xuống dưới bán kính Schwarzschild của ngôi sao đó. Hệ quả của quá trình được gọi là sự suy sụp do hấp dẫn này là thế năng hấp dẫn còn dư sẽ được giải phóng ra hoàn toàn làm cho bầu khí quyển bên ngoài dần nở rất nhanh với cường độ sáng tăng lên rất mạnh. Cuối cùng ngôi sao bị nổ và trở thành các sao mới hoặc siêu mới.

#### (17) Bức xạ nền vi sóng

Penzias và R.W. Wilson đã khám phá vào năm 1964 bức xạ nền vi sóng đẳng hướng của vũ trụ tương ứng với bức xạ vật đen ở nhiệt độ khoảng 3 K.

Các quan sát của họ đã chỉ ra rằng vũ trụ được lắp kín mọi nơi với các photon vi sóng trong một phân bố đều, đẳng hướng. Quan sát này ủng hộ mạnh mẽ lý thuyết cho rằng vũ trụ được bắt đầu bằng một vụ nổ lớn đã tạo nên bức xạ vật đen này.

#### (18) Độ nhớt của một khí

Trên bề mặt tiếp xúc giữa một chất khí và một chất rắn, chất khí và chất lỏng hoặc các lớp khác nhau của một khí chuyển động tương đối với nhau sẽ có một tương tác có xu hướng làm giảm chuyển động tương đối, làm chậm lại lớp chuyển động nhanh đồng thời làm tăng vận tốc của lớp chuyển động chậm. Hiện tượng này cho thấy dòng khí chịu một độ nhớt tương tự như ma sát đối với các chất rắn.

#### (19) Sao neutron

Sao neutron là một sao đặc chắc được cấu thành chủ yếu bởi các neutron có khối lượng bằng khoảng từ 0,1 đến 2 lần khối lượng mặt trời và có bán kính đặc trưng khoảng 10 km. Một sao neutron có từ trường mạnh và quay nhanh được gọi là punxa. Một sao neutron có thể là sản phẩm của một vụ nổ sao siêu mới. Khi một ngôi sao trải qua quá trình suy sụp do hấp dẫn, kích thước của nó bị giảm đi và khi giảm xuống một giá trị tới hạn, áp suất nội của nó cũng như là xác suất phân rã beta ngược của proton và electron tạo ra neutron sẽ tăng lên. Tại thời điểm này áp suất suy biến của các neutron và lực hấp dẫn sẽ đạt đến một cân bằng cơ học, hình thành nên một sao neutron.

#### (20) Ngưng tụ Bose-Einstein

Xem [Bài tập 3022 \(3\)](#).

#### (21) Sự dịch chuyển Lamb

Lý thuyết tương đối tính Dirac của nguyên tử hiđrô chỉ ra rằng các trạng thái với cùng một số lượng tử chính  $n$  và số lượng tử mômen xung lượng toàn phần  $j$  ( $j = 1 + s$ ) có các năng lượng bằng nhau dẫn đến suy biến. Tuy nhiên với  $n = 2$ , Lamb và Rutherford đã tìm ra bằng thực nghiệm rằng mức  $2^2P_1$  có giá trị như dự đoán nhưng mức  $2^2S_1$  có năng lượng cao hơn dự đoán một chút bằng 1058 MHz. Hiệu ứng này được biết đến với tên gọi là sự dịch Lamb. Nó có thể được giải thích là do tương tác của electron với trường photon ảo của nó làm tách mức suy biến.

#### (22) Các trạng thái octo và para của hiđrô

## Xem Bài tập 3022 (6)

3024

## Các câu hỏi trắc nghiệm

(1) Phương trình  $x^5 + x^4 + x^3 + 1 = 0$ :

- a) vô nghiệm,
- b) có 5 nghiệm,
- c) có 6 nghiệm,

**Lời giải:**

Một phương trình đa thức một biến bậc n có n nghiệm. Vì vậy câu trả lời đúng là (b).

(2) Biểu diễn nhị phân của số thập phân 137 là

- a) 10001001,
- b) 1001001,
- c) 101001.

**Lời giải:**

Vì  $137 = 2^7 + 2^3 + 2^0 = (10001001)_2$ , câu trả lời đúng là (a).

(3) 0 chia cho 0 bằng

- a) 0,
- b) vô hạn,
- c) vô định.

**Lời giải:**

c)  $\frac{0}{0}$  biểu diễn tỷ số của hai số vô cùng nhỏ; giá trị của nó phụ thuộc vào từng trường hợp cụ thể khi nó xảy ra. Ví dụ khi  $x \rightarrow \infty$ ,  $\frac{1}{x}$  và  $e^{-x}$  cả hai đều tiến tới không nhưng  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots \right) = \infty$ . Mặt khác khi  $x \rightarrow 0$ ,  $x$  và  $x^2$  đều tiến tới không nhưng  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ . Do đó câu trả lời đúng là (c).

(4) Số cách sắp xếp 6 người vào 6 chỗ là

- a) 602,
- b) 720,
- c) 1024.

**Lời giải:**

Do con người không giống nhau và trật tự sắp xếp là yếu tố chủ đạo, đây là sự giao hoán của 6 đối tượng khác nhau:  $6! = 720$ . Vậy câu trả lời đúng là (b).

(5) Có bao nhiêu cách lấy 3 vật ra khỏi một hồn hợp 7 vật

- a) 35,
- b) 60,
- c) 50.

**Lời giải:**

Do trật tự trong trường hợp này không đóng vai trò chủ đạo nên bài toán là một tổ hợp chập:  $C_3^7 = \frac{7!}{3!} = 35$ . Như vậy câu trả lời đúng là (a).

(6) Một hàm liên tục luôn có

- a) vi phân bậc nhất xác định,
- b) vi phân bậc hai xác định,
- c) cả hai câu trả lời trên đều sai.

**Lời giải:**

Một đường cong có thể chứa một điểm tại đó tiếp tuyến phụ thuộc vào phía mà nó tiến gần tới, nhưng vẫn là liên tục. Do đó một hàm liên tục không nhất thiết là khả vi. Do đó câu trả lời đúng là (c).

(7) Nếu xác suất để xảy ra sự kiện 1 là P và xác suất để xảy ra sự kiện 2 là Q thì xác suất để xảy ra cả hai sự kiện là

- a)  $P + Q$ ,
- b)  $PQ$ ,
- c) không phải là cả hai giá trị trên.

**Lời giải:**

Nếu hai sự kiện 1 và 2 là độc lập nhau, câu trả lời đúng là (b).

(8) Phương trình Poisson  $\nabla^2 F(x, y, z) = g(x, y, z)$  với  $g(x, y, z)$  cho trước và một điều kiện biên vật lý có thể có

- a) hơn một nghiệm,
- b) một và chỉ một nghiệm,
- c) đôi khi vô nghiệm.

**Lời giải:**

Nếu ta xem các nghiệm chỉ khác nhau bởi một hệ số là tương đương về mặt vật lý thì theo định lý về tính duy nhất đó chỉ là một nghiệm duy nhất đối với một tập các điều kiện biên cho trước. Do đó câu trả lời đúng là (b).

(9) Tuổi của vũ trụ là vào khoảng

- a)  $10^{20}$  năm,
- b)  $10^{10}$  năm,
- c)  $10^8$  năm.

**Lời giải:**

Nhìn chung người ta chấp nhận rằng tuổi của vũ trụ là khoảng  $1.8 \times 10^{10}$  năm. Vậy câu trả lời đúng là (b).

(10) Sóng đại dương thường bị phá vỡ khi tiến đến gần bờ là do

- a) thường có gió ở gần bờ,
- b) vận tốc sóng trên bề mặt nước phụ thuộc vào độ sâu của nước,
- c) cả hai câu trả lời trên đều sai.

**Lời giải:**

Câu trả lời đúng là (b).

(11) Các máy tính thường dùng làm việc với các số nhị phân được biểu diễn bằng

- a) 1000 bit,
- b) 32 bit,

- c) 4 bit.

**Lời giải:**

Một byte của một máy tính nhị phân bằng 8 bit, và các ký tự đầu vào máy tính được tính theo các đơn vị byte. Các câu trả lời a) và c) không phải là số nguyên lần của tám. Như vậy câu trả lời đúng là (b).

(12) Một dãy số ngẫu nhiên được tạo bởi một máy tính

- a) là thực sự ngẫu nhiên,
- b) cuối cùng sẽ lặp lại chính nó,
- c) chỉ được dùng để chơi các trò chơi.

**Lời giải:**

Các số ngẫu nhiên được tạo ra một cách nhân tạo bởi một máy tính tuân theo một chương trình định sẵn. Sau một số lần sử dụng, chuỗi số ngẫu nhiên sẽ lặp lại từ đầu. Như vậy câu trả lời đúng là (b).

(13) Các ngôi sao thì nháy nháy trong khi đó các hành tinh thì không bởi vì

- a) các hành tinh chỉ phản xạ ánh sáng còn các ngôi sao thì phát ra ánh sáng,
- b) các ngôi sao đối với chúng ta được coi như là một điểm,
- c) các ngôi sao phát sáng dưới dạng xung.

**Lời giải:**

Các ngôi sao nháy nháy là do sự dao động nhiệt của mật độ khí của khí quyển mà ánh sáng sao truyền qua. Sự nháy nháy được phân biệt bằng mắt người chỉ đối với các nguồn sáng có kích thước nhỏ. Do vậy câu trả lời đúng là câu (b).

(14) Các nhà thiên văn bây giờ tin rằng tuổi của vũ trụ là

- a)  $10^{12}$  năm,
- b)  $10^{10}$  năm,
- c)  $10^6$  năm,
- d) 6000 năm.

**Lời giải:**

Câu trả lời đúng là (b).

(15) Mật độ vật chất giữa các ngôi sao là

- a) 1 hạt/cm<sup>3</sup>      b) 10<sup>5</sup> hạt/cm<sup>3</sup>      c) 10<sup>15</sup> hạt/cm<sup>3</sup>

Lời giải:

Trong không gian giữa các vì sao, mật độ trung bình của các phân tử và các nguyên tử là khoảng 1 hạt/cm<sup>3</sup>. Câu trả lời đúng là (a).

(16) Thể tích tổng của nước trong đại dương là:

- a) 10<sup>6</sup> km<sup>3</sup>,      b) 10<sup>7</sup> km<sup>3</sup>,      c) 10<sup>8</sup> km<sup>3</sup>,  
d) 10<sup>9</sup> km<sup>3</sup>,      e) 10<sup>10</sup> km<sup>3</sup>.

Lời giải:

Câu trả lời đúng là (d).

3025

### Các câu hỏi trắc nghiệm

(1) Một khí cầu nóng 120°C có thể tích 10 m<sup>3</sup> sẽ bay lên từ mực nước biển ở (20°C), có khối lượng gần bằng

- a) 300 kg,      b) 30 kg,      c) 3 kg,      d) 300 g,      e) 30 g.

Lời giải:

Lực nâng của quả bóng bằng hiệu trọng lực của 10<sup>7</sup> cm<sup>3</sup> khí tại 293 K và 393 K tại áp suất 1 at. Vì

$$\begin{aligned}m_0 - m_1 &= \frac{pVM}{R} (T_0^{-1} - T_1^{-1}) \\&= \frac{76 \times 13.6 \times 980 \times 10^7 \times 29}{8.31 \times 10^7} (293^{-1} - 393^{-1}) = 3070 \text{ g} \approx 3 \text{ kg},\end{aligned}$$

nên câu trả lời đúng là (c).

(2) Diện tích của hạt quark “up” là (2/3)e. Nếu hạt quark “up” tự do được tìm thấy thì sự ion hóa của nó trong vật chất sẽ bằng λ lần sự ion hóa của proton có cùng vận tốc. λ =

- a)  $(\frac{3}{2})^2$ ,      b)  $\frac{2}{3}$ ,      c)  $\frac{1}{3}$ ,      d) 1,      e)  $(\frac{2}{3})^2$ .

Lời giải:

Proton và hạt quark up cả hai đều là các hạt nặng tích điện ( $m \gg m_e$ ). Do vậy, tốc độ tiêu hao năng lượng do sự ion hóa trong vật chất di qua là

$$-\frac{dT}{dx} = \frac{4\pi z^2 e^4}{m_e v^2} N Z \left[ \ln \frac{2m_e v^2}{I} - \ln(1 - \beta^2) - \beta^2 \right] \propto z^2,$$

$ze$  là diện tích của hạt với vận tốc  $v$  cho trước. Vậy

$$\lambda = \frac{z_q^2}{z_p^2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2.$$

Vậy câu trả lời đúng là (c).

(3) Năng lượng liên kết của trạng thái cơ bản của positroni bằng  $f$  lần năng lượng liên kết ở trạng thái cơ bản của một nguyên tử hidrô.  $f =$

- a) 1,      b)  $\frac{1}{2}$ ,      c) 2,      d)  $\frac{1}{4}$ ,      e) 4.

Lời giải:

Một électron chuyển động trong trường của một proton hoặc positron có thế năng  $-\frac{e^2}{r}$ , tương ứng với nó phương trình Schrödinger cho các trị riêng

$$E_n = -\frac{\mu e^4}{2\hbar^2 n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

ở đây  $\mu$  là khối lượng rút gọn của électron quỹ đạo. Đối với positroni  $\mu = \frac{1}{2}m_e$ , đối với hidrô  $\mu \approx m_e$ . Do vậy

$$f = \frac{E_p}{E_h} = \frac{\frac{1}{2}m_e}{m_e} = \frac{1}{2}.$$

Câu trả lời đúng là (b).

(4) Độ cao của bầu khí quyển ở đó áp suất giảm đi  $e$  lần là

- a) 4 km,      b) 8 km,      c) 12 km,      d) 16 km,      e) 20 km.

Lời giải:

Nếu coi không khí gần bề mặt trái đất là một lớp đẳng nhiệt thì sự thay đổi áp suất theo độ cao được tính bởi  $p = p_0 e^{-mgz/k_B T}$ . Độ cao  $z$  của bầu khí

quyển thoả mãn điều kiện để bài tương ứng với  $\frac{mgz}{k_B T} = 1$ . Như vậy

$$z = \frac{k_B T}{mg} = \frac{1,38 \times 10^{-23} \times 300}{\frac{29 \times 10^{-3}}{6,02 \times 10^{23}} \times 9,8} = 8,6 \times 10^3 \text{ m} = 8,6 \text{ km.}$$

Vậy câu trả lời đúng là (b).

(5) Một hệ chứa 4 hạt spin  $1/2$  không đồng nhất. Bò qua tất cả các bậc tự do khác. Để phân loại hàm sóng theo số spin tổng cộng, cần phải gán trọng số thông kê nào cho các trạng thái với spin toàn phần  $= 1$ ?

- a) 0,    b) 3,    c) 6,    d) 9,    e) 12.

**Lời giải:**

Kết hợp hai hạt spin  $\frac{1}{2}$  không đồng nhất dẫn đến 2 trạng thái có spin tổng cộng  $S$  bằng

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1, \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Thêm một hạt spin  $\frac{1}{2}$  vào các trạng thái trên dẫn đến 3 trạng thái có spin tổng cộng  $S$  bằng

$$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}; \quad 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Thêm một hạt spin  $\frac{1}{2}$  nữa vào các trạng thái trên dẫn đến 6 trạng thái có spin tổng cộng  $S$  bằng

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} + \frac{1}{2} &= 2, & \frac{3}{2} - \frac{1}{2} &= 1; & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} &= 1, \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} &= 0; & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} &= 1, & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} &= 0. \end{aligned}$$

Như vậy kết hợp bốn hạt dẫn đến hàm riêng của spin tổng cộng là

$$2|0\rangle + 3|1\rangle + |2\rangle,$$

và số trọng thông kê của các trạng thái với spin tổng  $S = 1$  (qua xác suất) là  $3 \times 3 = 9$ . Vậy câu trả lời đúng là (d).

(6) Quãng đường tự do trung bình của một nơtron có năng lượng 5 eV trong chân không gần nhất với

- a) 1 km,    b) 10 km,    c) 100 km,    d) 1000 km,    e) 10.000 km.

**Lời giải:**

Quãng đường tự do trung bình là khoảng cách mà nôtron đó di được trong khoảng thời gian sống của nó, từ khi sinh ra cho đến khi mất đi. Thời gian sống của nôtron là khoảng  $10^3$  s. Do năng lượng của nó bằng 5 eV nhỏ hơn rất nhiều so với năng lượng nghỉ của nó là 940 MeV, ta có thể áp dụng gần đúng phi-tương-dối và vận tốc của nó là

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}} = c\sqrt{\frac{2E}{mc^2}} = \sqrt{\frac{2 \times 5 \times 10^{-6}}{940}} \times 3 \times 10^8 = 10^4 \text{ m/s.}$$

Như vậy  $S = vt = 10^4$  km. Câu trả lời đúng là (e).

(7) Bán kính Bohr của một nguyên tử có điện tích hạt nhân  $Z$  có giá trị cỡ

- a)  $\frac{\hbar}{Z\alpha mc}$ ,    b)  $\frac{Z\alpha\hbar}{mc}$ ,    c)  $\frac{mc}{Z\alpha\hbar}$ .

Lưu ý rằng  $\alpha$  là hằng số cấu trúc tinh tế  $e^2/hc$ .

**Lời giải:**

Bán kính Bohr của một nguyên tử tựa hidrô có điện tích hạt nhân  $Z$  và một electron ở bên ngoài các lớp được lập đầy hoàn toàn là  $\frac{\hbar^2}{mc^2 Z} = \frac{\hbar}{Z\alpha mc}$ . Như vậy câu trả lời đúng là (a).

(8) Năng lượng liên kết của đotêron vào khoảng

- a)  $10^6$  eV,    b)  $10^8$  eV,    c)  $10^{10}$  eV.

**Lời giải:**

Theo nguyên lý bất định, ta có  $2pr \sim \hbar$ , ở đây  $p$  là xung lượng của một nucleon và  $r$  là khoảng cách giữa chúng, hay viết cách khác

$$p \sim \frac{\hbar}{2r}.$$

Năng lượng liên kết như vậy sẽ bằng

$$\begin{aligned} \frac{p^2}{2m} &\sim \frac{\hbar^2 c^2}{8r^2 mc^2} = \frac{(6.6 \times 10^{-16} \times 3 \times 10^{10})^2}{8 \times (1.4 \times 10^{-13})^2 \times 940 \times 10^6} \\ &= 2.7 \times 10^6 \text{ eV.} \end{aligned}$$

Do đó câu trả lời đúng là (a).

- (9) Một mẫu vật liệu hữu cơ chứa  $N_e$  electron trên một gam.  $N_e$  bằng khoảng  
 a)  $3 \times 10^{22}$ ,      b)  $3 \times 10^{23}$ ,      c)  $3 \times 10^{24}$ ,      d)  $3 \times 10^{25}$ ,      e)  $3 \times 10^{26}$ .

Lời giải:

Một mol của một chất chứa  $6.02 \times 10^{23}$  phân tử hoặc nguyên tử. Phân tử chất hữu cơ bao gồm các nguyên tử cacbon và hidrô ở đó số electron bằng với nguyên tử số. Do phân tử lượng của chất hữu cơ lớn hơn 13 nên số electron trên một gam là

$$N_e \leq \frac{6.02 \times 10^{23}}{13} = 4,6 \times 10^{22}.$$

Vậy câu trả lời đúng là (a).

- (10) Bước sóng của một neutron có năng lượng 1 eV gần nhất với  
 a) 1 cm,    b)  $10^{-2}$  cm,    c)  $10^{-4}$  cm,    d)  $10^{-6}$  cm,    e)  $10^{-8}$  cm.

Lời giải:

Bước sóng  $\lambda$  của một hạt có xung lượng  $p$  là

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{hc}{\sqrt{2mc^2E}} = \frac{4,14 \times 10^{-15} \times 3 \times 10^8}{\sqrt{2 \times 940 \times 10^6}} = 2.9 \times 10^{-11} \text{ m.}$$

Do vậy câu trả lời đúng là (e).

### 3.2. CÁC PHÉP ĐO, PHÉP GÂN ĐÚNG VÀ SAI SỐ (3026–3048)

#### 3026

- (a) Một người cân một vật nhiều lần và có các số liệu như sau

10.1;    10.6;    10.2;    10.5;    10.3;    10.5;    10.4;    10.6 gam.

Độ lệch chuẩn của một phép đo (tính trung bình trên một số rất lớn các phép đo) là \_\_\_\_\_.

Độ lệch chuẩn trung bình của các phép đo (tính trung bình trên một số rất lớn các phép đo) là \_\_\_\_\_.

Nếu ta gọi giá trị độ lệch chuẩn trung bình là  $\bar{\sigma}$  thì xác suất để giá trị thực của khối lượng nằm trong khoảng  $2\bar{\sigma}$  so với giá trị trung bình nhận được là khoảng \_\_\_\_\_. (Đưa ra các giả thiết hợp lý nếu cần)

(b) Kết quả trung bình của các phép đo khối lượng của vật đó thu được bởi người A là  $10,7 \pm 0,1$  gam; bởi người B là  $10,1 \pm 0,2$  gam.

Trung bình theo trọng số của các phép đo này là \_\_\_\_\_.

Độ lệch chuẩn trung bình đánh giá qua các sai số là \_\_\_\_\_.

Độ lệch chuẩn trung bình đánh giá qua sự khác nhau giữa hai lần xác định này là \_\_\_\_\_.

Sự chênh lệch giữa hai độ lệch chuẩn chỉ ra điều gì về các phép đo này? (Đưa ra các giả thiết hợp lý nếu cần)

Lời giải:

(a) Giá trị trung bình của tám phép đo là

$$\begin{aligned}\bar{m} &= \frac{1}{8}(10,1 + 10,6 + 10,2 + 10,5 + 10,3 + 10,5 + 10,4 + 10,6) \\ &= 10,4 \text{ g.}\end{aligned}$$

Do

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 (m_i - \bar{m})^2 \\ &= \frac{1}{8} (0,3^2 + 0,2^2 + 0,2^2 + 0,1^2 + 0,1^2 + 0,1^2 + 0,2^2) \\ &= 0,03 \text{ g}^2.\end{aligned}$$

nên độ lệch chuẩn của một phép đo là

$$\sigma = 0,17 \text{ g},$$

và độ lệch chuẩn trung bình của các phép đo là

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \frac{0,03}{\sqrt{8}} = 0,061 \text{ g.}$$

Nếu ta giả thiết rằng các giá trị đo được là liên tục và tuân theo phân bố thông thường thì giá trị trung bình có hàm phân bố

$$p(\bar{m}) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\bar{\sigma}} e^{-(\bar{m}-m_0)^2/2\bar{\sigma}^2}.$$

ở đây  $m_0$  là giá trị khởi lượng thực. Xác suất để  $m$  nằm trong khoảng  $2\sigma$  của  $m_0$  là

$$\int_{m_0-2\sigma}^{m_0+2\sigma} p(m) dm .$$

bằng diện tích dưới đường cong với  $m_0 = 0$ ,  $\sigma = 1$ , giữa  $x = -2$  và  $x = +2$ . Giá trị này được cho trong bảng chuẩn là  $2 \times 0,4773 \simeq 95\%$ .

(b) Trọng số của một phép đo tỷ lệ nghịch với bình phương sai số của phép đo đó. Như vậy, trung bình theo trọng số của hai phép đo là

$$\left( \frac{10,7}{0,1^2} + \frac{10,1}{0,2^2} \right) / \left( \frac{1}{0,1^2} + \frac{1}{0,2^2} \right) = 10,58 ,$$

và độ lệch chuẩn của trung bình theo trọng số dựa trên các sai số là

$$\bar{\sigma} = \left( \frac{0,1}{0,1^2} + \frac{0,2}{0,2^2} \right) / \left( \frac{1}{0,1^2} + \frac{1}{0,2^2} \right) = 0,12 .$$

Độ lệch chuẩn trung bình dựa trên sự khác nhau giữa hai lần xác định này là,

$$\bar{\sigma}'^2 = \frac{1}{2} [(10,7 - 10,58)^2 + (10,1 - 10,58)^2] = 0,122 .$$

$$\bar{\sigma}' = 0,35 .$$

Sự khác nhau giữa  $\bar{\sigma}$  và  $\bar{\sigma}'$  chỉ ra rằng các phép đo thực hiện bởi hai người quan sát có thể mắc các sai số hệ thống.

### 3027

Trong khoảng sai số 10 lần hãy đánh giá, tính toán sơ bộ hoặc nhớ lại các đại lượng sau đây (nói rõ bạn đã nhận được câu trả lời của mình bằng cách nào):

- (a) Bước sóng de Broglie của trái đất
- (b) Năng lượng liên kết toàn phần của một hạt nhân Fe
- (c) Mômen lưỡng cực từ của trái đất
- (d) Áp suất hơi của nước ở  $20^\circ\text{C}$
- (e) Tốc độ trung bình của một electron dẫn trong một mẫu khói Na kim loại

Lời giải:

- (a) Trái đất quay một vòng quanh mặt trời mất một năm và quỹ đạo của nó có bán kính trung bình là  $150 \times 10^6$  km. Do vậy tốc độ quỹ đạo trung bình

của nó là

$$v = \frac{2\pi \times 150 \times 10^9}{365 \times 24 \times 3600} = 3 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}.$$

Do trọng lượng trái đất là  $6 \times 10^{24}$  kg, nên xung lượng trung bình của nó là

$$p = mv = 1,8 \times 10^{29} \text{ kg m s}^{-1}.$$

và vì thế bước sóng de Broglie là

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6,63 \times 10^{-34}}{1,8 \times 10^{29}} = 3,7 \times 10^{-63} \text{ m},$$

nếu coi mặt trời là đứng yên.

(b) Năng lượng liên kết trung bình trên một nucleon đối với các nguyên tố có khối lượng trung bình là khoảng 8,8 MeV. Như vậy năng lượng liên kết trung bình của  $^{56}\text{Fe}$  là

$$56 \times 8,8 = 493 \text{ MeV}.$$

(c) Xét trái đất như là một lưỡng cực từ có mômen  $M$ . Thành phần nằm ngang của từ trường tại khoảng cách  $r$  tính từ trục địa từ là

$$B = \frac{M}{r^3} \cos \lambda,$$

ở đây  $\lambda$  là vĩ độ địa từ. Tại  $\lambda = 0^\circ$ ,  $B \approx 0,3$  gauss. Từ  $r \approx 6400$  km, ta suy ra

$$\begin{aligned} M &\simeq 0,3 \times (6,4 \times 10^8)^3 \\ &= 8 \times 10^{25} \text{ gauss cm}^3. \end{aligned}$$

(d) Để đánh giá sơ bộ, hãy coi hơi nước là một khí lý tưởng. Phương trình Clapeyron là

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L}{T(v_\beta - v_\alpha)} \approx \frac{L}{Tv},$$

ở đây  $p$  là áp suất hơi bão hòa,  $T$  là nhiệt độ,  $L$  là ẩn nhiệt trên một mol theo đơn vị năng lượng, và  $v, v_l$  là các thể tích riêng phần của nước ở pha hơi và pha lỏng ( $v \gg v_l$ ) và phương trình khí lý tưởng là

$$pv = RT$$

dẫn đến

$$\frac{dp}{dT} = \frac{Lp}{RT^2},$$

hay

$$p = p_0 e^{-L/RT}$$

tức là

$$\ln \left( \frac{p}{p_0} \right) = \frac{L}{R} \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) .$$

giả thiết  $L$  không phụ thuộc  $T$ .

Tại điểm ba của nước,  $p_0 = 4,581$  mmHg,  $T_0 = 273,16$  K,  $L = 590$  cal/g =  $590 \times 4,186 \times 18$  J/mol,  $R = 8,31$  J/mol K.

Như vậy

$$\frac{L}{R} \left( \frac{1}{273} - \frac{1}{293} \right) = 1,34$$

và

$$p = p_0 e^{1,34} = 17,45 \text{ mmHg.}$$

(e) Các electron dẫn trong một kim loại tại nhiệt độ tuyệt đối  $T$  chiếm các trạng thái trong khoảng  $\sim k_B T$  trên dưới mức Fermi  $E_F(0)$  tại nhiệt độ không tuyệt đối được tính bởi

$$E_F(0) = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{\frac{2}{3}} ,$$

ở đây  $n$  là số các electron dẫn trên một đơn vị thể tích của kim loại. Đối với Na kim loại,  $n = 2,5 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$ , và

$$\begin{aligned} E_F(0) &= \frac{\hbar^2 c^2}{2mc^2} (3\pi^2 n)^{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{(6,58 \times 10^{-16} \times 3 \times 10^8)^2}{2 \times 0,51 \times 10^6} \times (3\pi^2 \times 2,5 \times 10^{28})^{\frac{2}{3}} \\ &= 3,13 \text{ eV.} \end{aligned}$$

Tại nhiệt độ phòng,  $T \approx 300$  K và ta có

$$k_B T \approx \frac{1}{40} \ll 3,13 .$$

có nghĩa là ta có thể coi bài toán này như là trường hợp ở 0 K.

Ở trạng thái cân bằng, số các electron với các giá trị năng lượng nằm giữa  $E$  và  $E + dE$  là

$$dn \propto f(E) E^{\frac{1}{2}} dE ,$$

ở đây  $f(E)$  là hàm phân bố Fermi-Dirac. Tại  $T = 0$  K,  $f(E) = 1$  khi  $E \leq E_F(0)$  và  $f(E) = 0$  khi  $E > E_F(0)$ . Do  $E = \frac{p^2}{2m}$ , nên xung lưỡng trung bình là

$$\bar{p} = \frac{\int_0^{E_F(0)} p E^{\frac{1}{2}} dE}{\int_0^{E_F(0)} E^{\frac{1}{2}} dE} = \frac{\int_0^{p_F} p^3 dp}{\int_0^{p_F} p^2 dp} = \frac{3}{4} p_F.$$

ở đây  $p_F = \sqrt{2mE_F(0)}$ . Tốc độ trung bình được suy ra là

$$\begin{aligned} v &= \frac{\bar{p}}{m} = \frac{3\sqrt{2mE_F(0)}}{4m} = \frac{3c}{2} \sqrt{\frac{E_F(0)}{2mc^2}} \\ &= \frac{3}{2} \sqrt{\frac{3,13}{2 \times 0,51 \times 10^6}} \times 3 \times 10^8 = 7,9 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}. \end{aligned}$$

Lưu ý rằng vì

$$v = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{E_F(0)}{2m}} = \frac{3h}{4m} (3\pi^2 n)^{\frac{1}{3}}$$

nên tốc độ trung bình được xác định hoàn toàn bởi nồng độ electron  $n$ .

### 3028

Trong một cuộc du hành dài trong vũ trụ, đôi khi ta cần phải mô phỏng trọng lực bằng cách quay tròn phi thuyền. Hãy đưa ra kích thước con tàu và chu kỳ quay để trọng lực được mô phỏng mà không bị ảnh hưởng bởi các hiệu ứng Coriolis.

**Lời giải:**

Trong hệ quy chiếu  $\Sigma'$  gắn với con tàu quay ta có

$$ma' = \mathbf{F} - m\dot{\omega} \times \mathbf{r} + m\omega^2 \mathbf{r} - 2m\omega \times \mathbf{v}.$$

ở đây  $\mathbf{F} = 0$ ,  $\dot{\omega} = 0$ , giả thiết rằng con tàu ở xa trái đất và tất cả các thiên thể khác trong vũ trụ và nó quay với tốc độ không đổi, và  $\mathbf{r}$  là khoảng cách tính từ điểm đang xét tới tâm quay, hay

$$\mathbf{a}' = \omega^2 \mathbf{r} - 2\omega \times \mathbf{v}'.$$

Số hạng đầu tiên của về phải là lực ly tâm tạo nên trọng lực mô phỏng và số hạng thứ hai là lực Coriolis. Ta cần có

$$|\omega^2 \mathbf{r}| \gg |\omega \times \mathbf{v}'|, \quad \text{hoặc} \quad \omega^2 r \gg 2\omega v'.$$

và

$$a' = g \approx \omega^2 r.$$

Kết hợp các điều kiện trên ta có đối với  $v' \approx 5 \text{ m s}^{-1}$  thì

$$\omega \approx \sqrt{\frac{10}{r}} \ll 1 \text{ s}^{-1}.$$

vì  $g \approx 10 \text{ m s}^{-2}$ . Kích thước con tàu lấy bằng  $r \approx 250 \text{ m}$  là hợp lý. Còn  $\omega \approx 0,2 \text{ s}^{-1}$ , tương ứng với chu kỳ quay là  $10\pi$  giây.

### 3029

Trong mẫu nguyên tử của Thomson-Lorentz, một electron liên kết diều hòa với một tâm lực, tức nó là một dao động tử diều hòa (3 chiều) có tần số tự nhiên là  $\omega_0$ . (Điền câu trả lời ngắn gọn vào các chỗ trống dưới đây là đủ, tuy nhiên, nếu cần có thể nới rộng ra).

(a) Cơ học thống kê cổ điển (CHTKCD) phát biểu rằng năng lượng trung bình (tổng của động năng và thế năng) của mỗi một dao động tử là \_\_\_\_\_ trong cân bằng nhiệt.

(b) Cơ học thống kê lượng tử (CHTKLT) phát biểu rằng năng lượng trung bình đó là \_\_\_\_\_.

(c) Đối với một tập hợp các dao động tử, nhiệt dung riêng là \_\_\_\_\_ (CHTKCD) hoặc \_\_\_\_\_ (CHTKLT). CHTKCD áp dụng được khi \_\_\_\_\_  $\gg$  \_\_\_\_\_.

(d) Một điện trường tĩnh bên ngoài  $E$  tạo ra một mômen lưỡng cực trung bình  $P = \alpha E$ . Cơ học cổ điển (CHCD) tiên đoán rằng  $\alpha = \dots$ . Cơ học lượng tử (CHLT) dự đoán rằng  $\alpha = \dots$  ở trạng thái cơ bản và  $\alpha = \dots$  ở trạng thái cân bằng.

Lời giải:

(a) Năng lượng của một dao động tử có thể biểu diễn bằng  $\varepsilon = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\omega^2 q^2$ , ở đây cả thảy có sáu số hạng bình phương. Định luật phân bố đều năng lượng của cơ học cổ điển dẫn đến mỗi bậc tự do có một năng lượng trung bình bằng  $\frac{1}{2}kT$ ,  $k$  là hằng số Boltzmann tại trạng thái cân bằng nhiệt. Như vậy năng lượng trung bình của một dao động tử là  $\bar{\varepsilon}_{CSM} = 3kT$ .

(b) Dao động tử này có thể được coi như là một boson và bài toán về nguyên tắc được giải thông qua thống kê Bose-Einstein. Tuy nhiên, đây là một công việc phức tạp và ta sẽ giả thiết mà không bị mất đi tính tổng quát rằng

chuyển động của dao động tử có tính đối称. Do đó các dao động tử có thể phân biệt được, và ta có thể áp dụng thống kê Boltzmann lượng tử. Hàm phân bố của từng chiều của dao động tử là

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta(n+\frac{1}{2})\hbar\omega_0} = e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega_0} / (1 - e^{-\beta\hbar\omega_0})$$

ở đây  $\beta = \frac{1}{kT}$ . Như vậy năng lượng trung bình là

$$\bar{\varepsilon}_{QSM} = -3 \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z = \frac{3\hbar\omega_0}{2} + \frac{3\hbar\omega_0}{e^{\beta\hbar\omega_0} - 1}.$$

ở đây  $\frac{3\hbar\omega_0}{2}$  là năng lượng của dao động tử tại điểm không.

(c) Nhiệt dung riêng của dao động tử là

$$C_{CSM} = \frac{\partial \bar{\varepsilon}_{CSM}}{\partial T} = 3k$$

hoặc

$$C_{QSM} = \frac{\partial \bar{\varepsilon}_{QSM}}{\partial T} = \frac{3k(\beta\hbar\omega_0)^2 e^{\beta\hbar\omega_0}}{(e^{\beta\hbar\omega_0} - 1)^2}.$$

Chú ý rằng khi  $\beta\hbar\omega_0 \ll 1$ , tức là  $kT \gg \hbar\omega_0$ ,  $C_{QSM} \rightarrow 3k = C_{CSM}$ . Hay nói cách khác, cơ học thống kê cổ điển áp dụng được tại các nhiệt độ cao.

(d) Đối với trường hợp CHCD, hai phương pháp sẽ được sử dụng để xác định  $\alpha$ .

(1) Lực hồi phục tác dụng lên electron là  $-m\omega_0^2\mathbf{r}$ , ở đây  $\mathbf{r}$  là dịch chuyển khởi vị trí cân bằng. Khi đó,

$$-m\omega_0^2\mathbf{r} - e\mathbf{E} = 0,$$

hay

$$\mathbf{r} = -\frac{e\mathbf{E}}{m\omega_0^2},$$

Theo định nghĩa

$$\mathbf{P} = -e\mathbf{r} = \alpha\mathbf{E},$$

suy ra

$$\alpha = \frac{e^2}{m\omega_0^2}.$$

Dấu âm để chỉ rằng  $\mathbf{P}$  ngược chiều với  $\mathbf{E}$ .

(2) Phương pháp thứ hai dựa trên cơ học thống kê cổ điển. Chon phương  $z$  là phương của  $\mathbf{E}$ . Do  $E = -\frac{\partial V}{\partial z}$ ,  $V = -Ez$  và tổng năng lượng của dao động tự là

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2}{2}z^2 + eEz \\ &= \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2}{2} \left( z + \frac{eE}{m\omega_0^2} \right)^2 - \frac{e^2 E^2}{2m\omega_0^2}.\end{aligned}$$

Theo định nghĩa  $P = -ez$ , và thống kê Boltzmann dẫn đến

$$\begin{aligned}P &= \frac{\int (-ez)e^{-\varepsilon/kT} d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{r}}{\int e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{r}} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (-ez) e^{-m\omega_0^2 \left( z + \frac{eE}{m\omega_0^2} \right)^2 / 2kT} dz}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-m\omega_0^2 \left( z + \frac{eE}{m\omega_0^2} \right)^2 / 2kT} dz} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left( -ez' + \frac{e^2 E}{m\omega_0^2} \right) e^{-\frac{m\omega_0^2}{2kT} z'^2} dz'}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m\omega_0^2}{2kT} z'^2} dz'} = \frac{e^2 E}{m\omega_0^2},\end{aligned}$$

ở đây ta đã đặt  $z' = z + \frac{eE}{m\omega_0^2}$ . Như vậy

$$\alpha = \frac{P}{E} = e^2/m\omega_0^2.$$

Đối với các tính toán CHLT, ta xét electron ở trạng thái cơ bản. Do trạng thái cơ bản không suy biến nên ta sử dụng phương pháp nhiễu loạn không suy biến để tìm hàm sóng bậc nhất

$$|\psi\rangle = |0\rangle + \sum_k' \frac{\langle k|H'|0\rangle}{\varepsilon_0^{(0)} - \varepsilon_k^{(0)}} |k\rangle,$$

ở đây

$$\bar{H}' = eEz.$$

$$\bar{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 z^2, \quad \varepsilon_n^0 = \left(n + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega_0,$$

$$|n\rangle \equiv |n_x\rangle|n_y\rangle|n_z\rangle, \quad |0\rangle \equiv |0\rangle|0\rangle|0\rangle.$$

Do

$$\begin{aligned}\hat{H}'|0\rangle &= eE|0\rangle|0\rangle\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}} \left(\sqrt{\frac{1}{2}}|1\rangle\right) \\ &= eE\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}} |0\rangle|0\rangle|1\rangle.\end{aligned}$$

ta có

$$\begin{aligned}|\psi\rangle &= |0\rangle + \frac{eE\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}}{\varepsilon_0^{(0)} - \varepsilon_1^{(0)}} |0\rangle|0\rangle|1\rangle \\ &= |0\rangle - \frac{eE}{\hbar\omega_0}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}} |0\rangle|0\rangle|1\rangle.\end{aligned}$$

và

$$P = \langle\psi| -ez|\psi\rangle = 2\frac{e^2E}{\hbar\omega_0}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}} \cdot \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}} = \frac{e^2}{m\omega_0^2}E.$$

Như vậy  $\alpha = e^2/m\omega_0^2$ , đúng như đã được tính theo cơ học cổ điển.

Thực tế bài toán này có thể giải được một cách chính xác. Mặc dù hàm sóng chính xác không đúng như hàm sóng gần đúng tính bởi phương pháp nhiễu loạn, nhưng  $\alpha$  vẫn có cùng giá trị trong cả hai trường hợp. Tính toán chính xác dẫn tới các mức năng lượng

$$\varepsilon_n = \left(n + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega_0 - \frac{e^2E^2}{2m\omega_0}$$

và các hàm riêng

$$\psi'_n(\mathbf{r}) = \psi_n(\mathbf{r}'),$$

ở đây  $\psi_n(\mathbf{r})$  là các hàm riêng khi không có điện trường ngoài và

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \frac{e\mathbf{E}}{m\omega_0^2}.$$

Sự dịch chuyển trung bình của electron ở bất kỳ trạng thái nào đều bằng

$$\begin{aligned}\langle\psi|\mathbf{r}|\psi\rangle &= \left\langle\psi\left|\mathbf{r}' - \frac{eE}{m\omega_0^2}\right|\psi\right\rangle \\ &= -\frac{eE}{m\omega_0^2} + \langle\psi|\mathbf{r}'|\psi\rangle = -\frac{eE}{m\omega_0^2}.\end{aligned}$$

Thống kê Boltzmann dẫn đến

$$\bar{z} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} -\frac{eE}{m\omega_0^2} e^{-E_n/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-E_n/kT}} = -\frac{eE}{m\omega_0^2}.$$

với

$$P = -ez = \frac{e^2}{m\omega_0^2} E,$$

$$\alpha = e^2/m\omega_0^2.$$

Lưu ý rằng tất cả bốn kết quả thu được đều như nhau.

### 3030

1. Một chùm electron được bắn ra không gian tự do tới khoảng cách bằng  $10^4$  km. Nếu độ rộng ngang của chùm ban đầu bằng  $1 \mu\text{m}$ , thì độ mở cực tiêu của chùm tia khi di dọc doan đường đó sẽ bằng bao nhiêu nếu dòng năng của các electron bằng  $13,6 \text{ eV}$ ?

2. Đổi với các sóng sức căng bề mặt ở mực nước nóng thì hệ thức giữa tần số và bước sóng là

$$\nu = \left( \frac{2\pi T}{\rho \lambda^3} \right)^{1/2}$$

ở đây  $T$  là sức căng bề mặt và  $\rho$  là mật độ. Vận tốc nhóm của các sóng này bằng bao nhiêu?

3. Lực cản tác dụng lên một vật có diện tích  $A$  chuyển động cực nhanh qua một chất khí có mật độ  $\rho$  với vận tốc  $v$  là

$$\text{Lực} \sim A^r \rho^s v^t.$$

Hãy đánh giá  $r, s, t$ .

4. Các phản ứng nào trong số các phản ứng dưới đây được phép xảy ra? Nếu bị cấm, hãy chỉ rõ nguyên nhân.





Tỷ số của các tiết diện của phản ứng

$$\frac{\sigma(P + P \rightarrow \pi^+ + d)}{\sigma(n + p \rightarrow \pi^0 + d)}$$

có cùng năng lượng trong hệ khôi tâm bằng bao nhiêu?

(5) Nếu số đếm trung bình trong một giây từ nguồn phát phóng xạ bằng 4, xác suất để ghi được 8 xung đếm trong một giây là bao nhiêu?

**Lời giải:**

1. Bó sóng ban đầu của một electron trong chùm có độ bất định  $\Delta p_x$ ,  $\Delta x$  theo phương ngang tuân theo hệ thức bất định

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Nếu nó xung lượng  $p$ , thì góc loe ra là

$$\theta = \frac{\Delta p_x}{p} \gtrsim \frac{1}{2\Delta x} \frac{\hbar}{p} = \frac{1}{2\Delta x} \frac{\hbar c}{pc}.$$

Do

$$p = \sqrt{2mT} = \frac{1}{c} \sqrt{2mc^2T} = \frac{1}{c} \sqrt{2 \times 0.51 \times 10^6 \times 13.6} = 3.72 \times 10^3 \text{ eV/c},$$

$$\Delta x \approx 10^{-6} \text{ m},$$

ta có

$$\theta \gtrsim \frac{6.6 \times 10^{-16} \times 3 \times 10^8}{2 \times 10^{-6} \times 3.72 \times 10^3} = 2.66 \times 10^{-5} \text{ radian}$$

và độ trải rộng cực tiểu theo phương ngang là

$$L\theta_{\min} = 266 \text{ m.}$$

2. Vận tốc nhóm theo định nghĩa là

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d\nu}{d(\frac{1}{\lambda})} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{2\pi T}{\rho\lambda}}.$$

(3) Thú nguyên của các đại lượng là

$$[F] = MLT^{-2}, \quad [A] = L^2, \quad [\rho] = ML^{-3}, \quad [v] = LT^{-1}$$

Phương trình cũng phải đúng đối các thứ nguyên

$$[F] = [A]^r [\rho]^s [v]^t ,$$

hay

$$\text{MLT}^{-2} = \text{L}^{2r} \text{M}^s \text{L}^{-3s} \text{L}^t \text{T}^{-t} = \text{L}^{2r+t-3s} \text{M}^s \text{T}^{-t} .$$

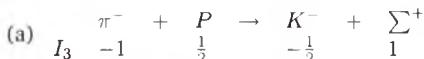
Cân bằng các số mũ của từng thứ nguyên dẫn đến

$$2r + t - 3s = 1, \quad s = 1, \quad t = 2 .$$

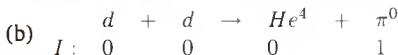
tức là

$$r = 1, \quad s = 1, \quad t = 2 .$$

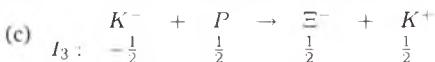
(4) Để tìm xem các phản ứng đã cho có bị cấm bởi lực mạnh hay không trước hết ta xét spin đồng vị  $I$  và thành phần thứ ba của nó  $I_3$ , cả hai đều phải được bảo toàn.



Vì  $\Delta I_3 = \frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}) = 1 \neq 0$ , nên phản ứng bị cấm.



Vì  $\Delta I = 1 - 0 = 1$ , nên phản ứng bị cấm.



Vì  $\Delta I_3 = 1 - 0 = 1$ , nên phản ứng bị cấm.

Do tất cả các phản ứng đều bị cấm nên ta không cần phải xét đến các số lượng tử khác. Để đánh giá

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_b} \equiv \frac{\sigma(p + p \rightarrow \pi^+ + d)}{\sigma(n + p \rightarrow \pi^0 + d)}$$

Ta lưu ý rằng do  $m_n \approx m_p$ ,  $m_{\pi^+} \approx m_{\pi^0}$ , nên hai phản ứng có động lực học trong hệ khôi tâm như nhau, do vậy tỷ số này không phụ thuộc vào năng lượng và xung lượng. Do không có hạt lạ nào tham gia vào quá trình, ta xét các trạng thái spin đồng vị  $|II_3\rangle$  của hệ đầu tiên và hệ cuối cùng

Với

a:	$P$	+	$P$	$\rightarrow$	$\pi^+$	+	$d$
$I :$	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		1		0
$I_3 :$	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		1		0
b:	$n$	+	$P$	$\rightarrow$	$\pi^0$	+	$d$
$I :$	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		1		0
$I_3 :$	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		0		0

các trạng thái đầu tiên là

với a, ( $p + p$ ) :  $|1\ 1\rangle$ ,

với b, ( $n + p$ ) : cả  $|1\ 0\rangle$  và  $|0\ 0\rangle$  đều có thể vì thế

$$\text{trạng thái là } \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\ 0\rangle + |0\ 0\rangle);$$

các trạng thái cuối cùng là

với a, ( $\pi^+ + d$ ) :  $|1\ 1\rangle$ ,

với b, ( $\pi^0 + d$ ) :  $|1\ 0\rangle$ .

Do  $I = 1$  đối với trạng thái cuối cùng nên chỉ có tổ hợp  $I = 1$  ở các trạng thái đầu tiên có thể cho đóng góp. Như vậy các biên độ tán xạ có tỷ số

$$A_a : A_b = 1 : \frac{1}{\sqrt{2}},$$

và các tiết diện ngang có tỷ số

$$\sigma_a : \sigma_b = A_a^2 : A_b^2 = 1 : \frac{1}{2}.$$

Như vậy

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_b} = 2.$$

(5) Số các xung đếm tuân theo phân bố Poisson

$$P(n, \lambda) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}.$$

Giá trị trung bình là

$$\begin{aligned} n &= \sum_n n P = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda = 4 \end{aligned}$$

Do đó,

$$P(8, 4) = \frac{4^8 e^{-4}}{8!} = 0.030 .$$

### 3031

Dánh giá nhiệt độ bề mặt của mặt trời theo các cách như sau

- (a) Tìm năng lượng  $E$  có xác suất cao nhất đối với các photon phát ra từ vật đen có nhiệt độ  $T$ , giả thiết rằng cường độ  $I(E) \sim E^5 e^{-E/kT}$ .
- (b) Các vạch Balmer của hidrô (các chuyển đổi tới  $n = 2$ ) bao gồm vùng tần số nhìn thấy. Năng lượng của chúng bằng bao nhiêu?
- (c) Nếu mắt người có độ nhạy cao nhất với ánh sáng mặt trời, hãy đánh giá nhiệt độ bề mặt của mặt trời?

Lời giải:

- (a) Nếu  $n_E$  là số các photon có năng lượng  $E$ , thì phân bố của  $n_E$  được tính bằng

$$P(n_E) \sim \frac{I(E)}{E} \sim E^4 e^{-E/kT} .$$

Năng lượng có xác suất cao nhất  $E_m$  của các photon thỏa mãn phương trình

$$\frac{dp}{dE} \Big|_{E=E_m} = 4E_m^3 e^{-E_m/kT} - \frac{1}{kT} E_m^4 e^{-E_m/kT} = 0 .$$

dẫn tới

$$E_m = 4kT .$$

- (b) Các vạch Balmer của hidrô được phát ra khi các electron chuyển đổi từ các mức năng lượng  $n > 3$  tới các mức năng lượng  $n = 2$ . Như vậy năng lượng cực đại của các photon vạch Balmer là

$$E_{\max} = E_{\infty} \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{\infty} \right) = \frac{13.6}{4} = 3.4 \text{ eV}$$

và năng lượng cực tiểu là

$$E_{\min} = E_{\infty} \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) = 1.9 \text{ eV}$$

với  $E_{\infty} = hcR_{\infty} = 13.6 \text{ eV}$ ,  $R_{\infty}$  là hằng số Rydberg. Như vậy năng lượng của một photon vạch Balmer nằm giữa 1.9 eV và 3.4 eV.

(c) Nếu mắt người nhạy nhất với ánh mặt trời và ánh sáng nhìn thấy là vùng tần số có xác suất cao nhất của sự phát xạ ánh sáng mặt trời, và hơn nữa ánh sáng nhìn thấy tương ứng với vùng tần số của các vạch Balmer thì nhiệt độ bề mặt của mặt trời được tính bởi

$$E_m = 4kT = (1,9 \sim 3,4) \text{ eV},$$

dẫn tới

$$T = (0,5 \sim 1) \times 10^4 \text{ K}.$$

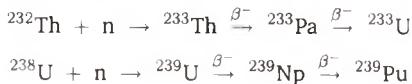
vì 1 eV tương ứng với "nhiệt độ" bằng  $1,16 \times 10^4 \text{ K}$ .

### 3032

Giải thích làm thế nào một lò phản ứng tái sinh có thể tạo ra nhiều nhiên liệu hơn là nó tiêu thụ. Đầu là các nguyên nhân vật lý bảo vệ luận điểm cho rằng các lò phản ứng tái sinh không an toàn bằng các lò phản ứng bình thường.

**Lời giải:**

Một lò phản ứng tái sinh sinh ra năng lượng do quá trình phân hạch gây bởi các nôtron nhanh và trong quá trình đó tái sinh ra thêm vật liệu có thể phân hạch nhiều hơn là nó tiêu thụ. Ví dụ,  $^{232}\text{Th}$  và  $^{238}\text{U}$  không phân chia được bằng các nôtron nhiệt và không thể sử dụng làm nhiên liệu lò phản ứng nhưng chúng có thể hấp thụ các nôtron nhanh được sinh ra trong quá trình phân hạch nhờ nôtron nhiệt của các đồng vị có khả năng phân chia của chúng và biến thành  $^{233}\text{U}$  và  $^{239}\text{Pu}$  là các đồng vị có thể phân hạch sau hai quá trình phân rã  $\beta^-$ :



Do mỗi một quá trình phân chia lại tạo ra hai đến ba nôtron nhanh nên càng có thêm nhiều các đồng vị có thể phân hạch có thể được tạo ra hơn là số đã được tiêu thụ. Không có bộ điều tiết nào được sử dụng trong lõi của một lò tái sinh vì ta cần có các nôtron nhanh để phục vụ cho sự tái sinh nhiên liệu phân hạch. Rất khó có thể không chế mật độ các nôtron trong lò phản ứng và dẫn đến hàm lượng của nhiên liệu phân hạch có thể vượt quá khối lượng tối hạn và sự nổ hạt nhân có thể xảy ra. Hơn nữa, người ta thường phải sử dụng natri lỏng để làm nguội trong một lò tái sinh và đó là vật liệu rất không

an toàn so với các chất làm lạnh như là nước dùng trong lò phản ứng dùng neutron nhiệt.

### 3033

Hãy quyết định xem các phát biểu dưới đây có chính xác hay không. Giải thích câu trả lời của mình.

(a) Một chùm hội tụ của các electron có năng lượng 100 eV được dùng để xác định cấu trúc phân tử với độ phân giải  $0,1 \text{ \AA}$  ( $10^{-11} \text{ m}$ ).

(b) Hai trạng thái cách nhau một khoảng năng lượng bằng  $10^{-3} \text{ eV}$ , mỗi một mức có thời gian sống bằng  $10^{-10} \text{ s}$ , giây có thể phân giải được rõ ràng. Hai trạng thái không thể phân hóa vào nhau.

(c) Một hệ laze xung dài hẹp mới hoạt động tại 600 nm và tạo ra các xung có độ kéo dài  $2 \times 10^{-10} \text{ giây}$  với độ rộng  $10^{-3} \text{ nm}$ . ( $\hbar = 6.58 \times 10^{-16} \text{ eV}\cdot\text{s}$ ,  $m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ ,  $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$ )

Lời giải:

(a) Do bước sóng de Broglie của electron là

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mE}} = \frac{2\pi \times 6.58 \times 10^{-16} \times 1.6 \times 10^{-19}}{\sqrt{2 \times 9.11 \times 10^{-31} \times 100 \times 1.6 \times 10^{-19}}} \\ = 1.23 \times 10^{-10} \text{ m} = 1.23 \text{ \AA} > 0,1 \text{ \AA},$$

nên không thể đạt được độ phân giải như vậy.

(b) Do thời gian sống của các mức năng lượng là  $10^{-10} \text{ s}$  nên mỗi trạng thái sẽ có một độ rộng xác định bởi nguyên lý bất định  $\Delta E \cdot \Delta t \approx \frac{\hbar}{2}$  tức là khoảng  $3.3 \times 10^{-6} \text{ eV}$ . Do độ rộng này nhỏ hơn nhiều sự phân cách  $10^{-3} \text{ eV}$ , nên hai mức không thể xen phủ nhau và chúng có thể phân biệt được.

(c) Khoảng thời gian và độ rộng của xung laze phải thỏa mãn nguyên lý bất định  $\Delta t \cdot \Delta E \gtrsim \frac{\hbar}{2}$ . Do

$$\Delta E = h\Delta\nu \approx \frac{hc\Delta\lambda}{\lambda^2} = \frac{2\pi \times 3 \times 10^8}{600 \times 10^{-9}} \times \left( \frac{10^{-3}}{600} \right) \hbar \\ = \frac{\pi\hbar}{6} \times 10^{10}, \\ \Delta t \approx 2 \times 10^{-10} \text{ s}, \\ \Delta E \cdot \Delta t = \frac{\pi}{3}\hbar > \frac{\hbar}{2}.$$

Như vậy ta có thể tạo ra được xung kiểu như vậy.

### 3034

Một hạt nhỏ có tính phản xạ rất tốt được nâng lên bởi lực của một chùm laze. Hạt có khối lượng  $10^{-3}$  g. Ánh sáng laze được phản xạ trên một khoảng góc rộng với các góc  $\theta$  so với tia tới; lấy giá trị trung bình của  $\cos \theta = 0$ . Công suất của laze đó bằng bao nhiêu oát?

**Lời giải:**

Trọng lượng  $mg$  của hạt được cân bằng với lực  $f$  hướng lên do chùm laze tác dụng. Giả thiết chùm tia có công suất  $W$  và hướng lên theo phương thẳng đứng. Như vậy nó mang một động lượng hướng lên theo phương thẳng đứng  $\frac{W}{c}$  trên một đơn vị thời gian. Khi phản xạ dưới góc  $\theta$ , động lượng thẳng đứng chúc xuống là  $-\frac{W}{c} \cos \theta$  trên một đơn vị thời gian. Như vậy lực đẩy lên là

$$f = \frac{W}{c} - \left( -\frac{W}{c} \cos \theta \right) = \frac{W}{c} (1 + \cos \theta) .$$

và do đó

$$\frac{W}{c} (1 + \cos \theta) = \frac{W}{c} = mg .$$

suy ra

$$W = mgc = 10^{-6} \times 9.8 \times 3 \times 10^8 \approx 3 \times 10^3 \text{ W}.$$

Vậy công suất của chùm laze là 3 kilô oát.

### 3035

Hãy coi một électron trong một nguyên tử trong khí quyển như là một dao động tự điều hòa với tần số tự nhiên là  $\omega_0$ . Một sóng phẳng đơn sắc có tần số  $\omega$  và bước sóng lớn hơn nhiều so với các kích thước nguyên tử chiếu tới nguyên tử đó. Bỏ qua các hiệu ứng tắt dần.

(a) Hãy tìm sự phụ thuộc vào  $\omega$  của tiết diện ngang toàn phần để có tán xạ bởi nguyên tử khi  $\omega \ll \omega_0$ .

(b) Các nguyên tử giờ bị ion hóa sao cho tắt cả các électron trôi nêun tự do. Hãy tìm sự phụ thuộc vào  $\omega$  của tiết diện ngang toàn phần để có tán xạ bởi các électron tự do.

**LƯU Ý:** Trong cả hai câu (a) và (b) không cần phải suy ra công thức cụ thể, chỉ cần xác định được phần phụ thuộc tần số là đủ.

**Lời giải:**

(a) Dưới tác dụng của điện trường  $\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$  của các sóng điện từ tối, dao động từ có phương trình chuyển động

$$\ddot{\mathbf{r}} - \tau^2 \dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = -\frac{e}{m} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}.$$

ở đây  $\tau = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3}$  là thời gian đặc trưng xuất phát từ phản ứng của bức xạ thứ cấp phát ra từ dao động tử. Ở trạng thái dừng

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 e^{-i\omega t}.$$

Thay vào phương trình chuyển động, ta được

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{e}{m} \left( \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega^3\tau} \right) \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}.$$

Dao động tử phát ra bức xạ thứ cấp có cùng tần số với năng lượng tính trên một đơn vị thời gian và một đơn vị góc khói là

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \dot{\mathbf{r}}^2.$$

Về mặt vĩ mô các sóng tối bị tán xạ bởi dao động tử theo các hướng khác nhau. Tiết diện tán xạ vi phân được định nghĩa là

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\text{công suất phát xạ trung bình/dơn vị góc khói}}{\text{năng lượng tối/dơn vị thể tích/dơn vị thời gian}}$$

Mẫu số là độ lớn của vectơ Poynting  $\mathbf{N} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$  của bức xạ tối. Đối với các sóng điện từ phẳng,  $\sqrt{\epsilon_0} |\mathbf{E}| = \sqrt{\mu_0} |\mathbf{H}|$ ,  $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$ , sao cho

$$\mathbf{N} = \epsilon_0 c |\mathbf{E}|^2 = \frac{\epsilon_0}{2} c \mathbf{E}_0^2.$$

không phụ thuộc vào tần số. Như vậy, nếu chỉ xét đến sự phụ thuộc tần số, ta có

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto \left| \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\tau\omega^3} \right|^2 = \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \tau^2 \omega^6}.$$

Số hạng phản ứng bức xạ trong phương trình trên là bình phương của

$$\begin{aligned} \tau \omega^3 &= \frac{2}{3} \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \right) \frac{\omega^3}{c} = \frac{2\gamma_0 \omega^3}{3c} \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{2.8 \times 10^{-15}}{3 \times 10^8} \omega^3 \\ &\approx 6 \times 10^{-24} \omega^3 \ll \omega^2 \end{aligned}$$

nếu  $\omega \ll 10^{23}$ s, và thường được bỏ qua ngoại trừ khi  $\omega \approx \omega_0$ . Bởi vậy nếu  $\omega \ll \omega_0$ ,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4$$

từ đó suy ra tiết diện ngang toàn phần

$$\sigma \propto \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4.$$

(b) Các electron lúc này trở nên tự do nên phương trình chuyển động trở thành

$$\ddot{\mathbf{r}} - \tau^* \dot{\mathbf{r}}^* = -\frac{e\mathbf{E}}{m} e^{-i\omega t},$$

có nghiệm ở trạng thái dừng

$$\mathbf{r} = \frac{e}{m} \frac{\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}}{\omega^2 + i\omega^3\tau} \approx \frac{e}{m\omega^2} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t},$$

Do

$$\frac{dP}{d\Omega} \propto |\bar{\mathbf{r}}|^2$$

nên tiết diện vi phân là

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto \left(\frac{\omega^2}{\omega^2}\right)^2 = \text{hằng số.}$$

Vậy tiết diện toàn phần đối với tán xạ bởi các electron tự do không phụ thuộc vào tần số.

### 3036

Khi quyển chắn cho trái đất rất nhiều bức xạ điện từ phát ra từ các nguồn bên ngoài. Các quá trình dưới đây có vai trò chủ đạo trong quá trình chắn sóng ở các vùng khác nhau của phổ sóng điện từ. Hãy đưa ra bước sóng, tần số hoặc năng lượng photon cân đúng cho từng quá trình đó.

1. Hấp thụ quang điện bởi electron ở lớp vỏ K của nitơ
2. Phản xạ từ plasma trong tầng điện ly
3. Quang phân huỷ ozon
5. Tán xạ Compton
5. Tạo cặp electron-positron

6. Hấp thụ bởi các kích thích quay  $H_2O$ .

Lời giải:

1. Một photon để có thể làm bật ra một electron từ lớp vỏ K của một nguyên tử nitơ thì cần phải có một năng lượng lớn hơn năng lượng liên kết của một electron lớp K của nitơ, tức là cỡ 420 eV. Tần số góc tương ứng là  $\omega = \frac{E}{\hbar} = \frac{402}{6,6 \times 10^{-16}} = 6 \times 10^{17} \text{ s}^{-1}$ .

2. Một sóng điện từ di tới một plasma sẽ bị phản xạ lại nếu tần số góc  $\omega$  của nó nhỏ hơn tần số (góc) của plasma

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m}},$$

ở đây  $N$  là số electron tự do trong một đơn vị thể tích plasma. Số  $N$  cực đại đối với các lớp trong tần điện ly là khoảng  $10^{12} \text{ m}^{-3}$ , dẫn tới

$$\begin{aligned}\omega_p &= \sqrt{\frac{4\pi Ne^2e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}} = c\sqrt{4\pi N r_0} \\ &= 3 \times 10^8 \sqrt{4\pi \times 10^{12} \times 2,8 \times 10^{-15}} = 5,6 \times 10^7 \text{ s}^{-1}.\end{aligned}$$

$r_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}$  là bán kính cổ điển của electron và bằng  $2,8 \times 10^{-15} \text{ m}^{-3}$ . Như vậy ta cần  $\omega < 6 \times 10^7 \text{ s}^{-1}$ .

3. Ozone,  $O_3$ , là thành phần nhỏ ở tầng khí quyển phía trên có nồng độ cực đại ở khoảng 25 km trên bề mặt của trái đất. Nó có thể bị phân ly khi hấp thụ một photon



Hiện tượng này xảy ra mạnh mẽ nhất với bức xạ có các bước sóng 2000–3000 Å, và yếu hơn với bức xạ 4500–8000 Å.

4. Tán xạ Compton quan trọng đối với sự chấn bức xạ khi bước sóng của bức xạ tới so được với bước sóng của electron

$$\lambda_C = \frac{\hbar}{m_e c} \approx 0,024 \text{ \AA}.$$

Tiết diện đối với tán xạ Compton giảm đi và quá trình tạo cặp của các electron trở nên quan trọng hơn khi tần số tăng lên.

5. Sự tạo cặp electron-positron chỉ có thể xảy ra khi năng lượng  $\varepsilon$  của một photon lớn hơn năng lượng nghỉ của cặp đó

$$\varepsilon \geq 2m_ec^2 = 1,02 \text{ MeV} .$$

Tần số (góc) của photon tương ứng là  $\omega = \frac{1.02 \times 10^6}{6.6 \times 10^{-15}} = 1,5 \times 10^{21} \text{ s}^{-1}$ .

6. Phổ quay của phân tử gồm các vạch

$$E_n = 2nB, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

với  $B = h^2/8\pi^2 I$ ,  $I$  là mômen quán tính của phân tử đó. Do mômen quán tính chính của  $H_2O$  là  $\sim 10^{-47} \text{ J}\cdot\text{s}^2$ , nên  $B \sim 10^{-21} \text{ J}$ . Năng lượng của một photon dẫn đến một chuyển đổi từ  $n = 0$  tới  $n = 1$  là  $\varepsilon = \Delta E_{1,0} = 2B \sim 10^{-21} \text{ J}$ , tần số góc tương ứng là

$$\omega = \frac{10^{-21}}{10^{-34}} = 10^{13} \text{ s}^{-1} .$$

### 3037

Để chuẩn bị cho một cuộc hạ cánh lên vùng phía sáng của mặt trăng ta cần phải đánh giá nhiệt độ của bề mặt mặt trăng. Ta có thể giả thiết rằng vật chất bề mặt của mặt trăng có tính cách điện tốt. Hãy đánh giá càng định lượng càng tốt giá trị của nhiệt độ này. Cho trước hằng số mặt trời là  $1353 \text{ W/m}^2$ . Cần phải có dữ kiện nào thêm để có đánh giá tốt hơn?

**Lời giải:**

Gọi độ hấp thụ của bề mặt mặt trăng là  $\alpha$ . Sư hấp thụ nhiệt và bức xạ từ bề mặt cân bằng nhau khi mặt trăng ở trạng thái ổn định

$$\varepsilon\sigma T^4 = \alpha I_0 .$$

ở đây  $I_0$  là hằng số mặt trời (năng thông mặt trời tới bề mặt của mặt trăng),  $\varepsilon\sigma T^4$  là bức xạ phát ra từ một đơn vị diện tích trên một giây bởi bề mặt của mặt trăng,  $\varepsilon$  là một thừa số bổ chính đưa vào để tính đến mặt trăng không phải là một vật đen,  $\sigma$  là hằng số Stefan-Boltzmann bằng  $5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2$ , và  $T$  nhiệt độ bề mặt. Để đánh giá sơ bộ  $T$ , ta cho  $\varepsilon = \alpha$ . Như vậy

$$T = \left( \frac{I_0}{\sigma} \right)^{\frac{1}{4}} = \left( \frac{1353}{5.67 \times 10^{-8}} \right)^{\frac{1}{4}} = 393 \text{ K} = 120^\circ\text{C}$$

Để đánh giá  $T$  tốt hơn, ta phải có thông tin về tỷ số  $\alpha/\varepsilon$ .

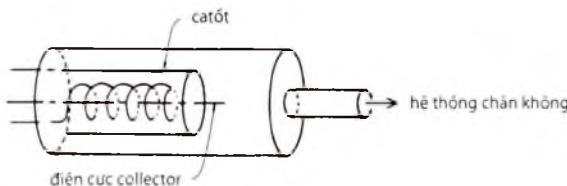
### 3038

Mô tả ngắn gọn cách do 8 trong số các đại lượng sau đây. Và đưa ra bậc độ lớn của các đại lượng đó.

- (1) Chân không trong một máy cyclotron
- (2) Từ trường của nam châm phô kê sử dụng cho các thí nghiệm hạt cơ bản
- (3) Nhiệt độ của một mẫu hidrô lỏng
- (4) Thời gian sống của muon
- (5) Hằng số Hubble
- (6) Hằng số Planck
- (7) Khoảng cách đến các ngôi sao ở gần nhất
- (8) Khoảng cách tới các thiên hà
- (9) Số Avogadro
- (10) Kích thước của một hạt nhân
- (11) Kích thước của một nguyên tử
- (12) Độ dịch Lamb
- (13) Nhiệt độ của bức xạ nền vũ trụ
- (14) Các thừa số g hạt nhân
- (15) Khối lượng của một meson hoặc cộng hưởng baryon

Lời giải:

- (1) Chân không trong một máy cyclotron

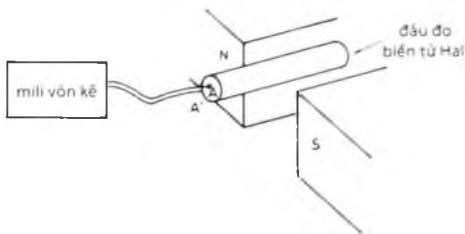


Hình 3.2

Phép đo chân không siêu cao trong một thiết bị cyclotron có thể được thực hiện bằng một đầu đo Bayard-Alpert được mô tả như trên hình 3.2. Các electron được phát ra từ catôt và được gia tốc bởi một điện thế cao sẽ ion hóa các phân tử khí dư thông qua va chạm. Các ion dương hình thành được thu nhận tại cực colector. Dòng catôt  $I_e$ , dòng colector  $I_i$  và áp suất được liên hệ với nhau qua hệ thức

$$\frac{I_i}{I_e} = kp,$$

ở đây  $k$  là một hằng số tỷ lệ. Bằng cách đo các giá trị dòng ta sẽ biết giá trị áp suất. Áp suất khoảng  $10^{-8}$ – $10^{-9}$  atmôtphe trong một hệ cyclotron.



Hình 3.3

(2) Từ trường của nam châm phổ kề sử dụng cho các thí nghiệm hạt cơ bản

Từ trường có thể được đo theo cách như sau. Một đầu đo gồm một biến tử Hall được đặt trong vùng từ trường và cho một dòng điện không đổi di qua biến tử đó tạo nên một thế hiệu điện thế Hall  $V_{AA'}$ , có thể đọc được bằng một mili vôn kế như chỉ ra trên hình 3.3. Với hệ số Hall  $K$  biết trước, công thức

$$V_{AA'} = K \frac{IB}{d}$$

cho biết cảm ứng từ  $B$  của từ trường. Đôi với một phổ kề dùng cho các thí nghiệm về hạt cơ bản,  $B \sim 10$  kGs.

(3) Nhiệt độ hidrô lỏng

Nhiệt độ của hidrô lỏng là khoảng 20 K. Nó có thể được xác định bằng một nhiệt kế áp suất hơi hidrô.

(4) Thời gian sống của muon

Một hạt muon phân rã theo phương trình sau

$$\mu^\pm \rightarrow e^\pm + \nu_e + \nu_\mu .$$

Do  $\mu^+$ ,  $\mu^-$  là các phản hạt của nhau nên chúng có cùng một thời gian sống trung bình,  $\tau = 2,2 \times 10^{-6}$  s, được định nghĩa như sau

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} ,$$

ở đây  $\Gamma$  là tốc độ phân rã, tức là xác suất để bất kỳ một hạt muon nào sẽ phân rã trong một đơn vị thời gian. Do

$$\frac{dN}{dt} = -\Gamma N ,$$

hay

$$N(t) = N(0)e^{-\Gamma t} ,$$

$\Gamma$  và  $\tau$  có thể tính được thông qua việc quan sát sự thay đổi của thông lượng muon trong tia vũ trụ theo độ cao hoặc bằng cách xác định phân bố thời gian của những phân rã muon sử dụng phép đếm xung.

#### (5) Hằng số Hubble

Định luật Hubble liên hệ giữa  $R$  và vận tốc lùi ra xa  $v$  của một thiên hà ở xa:  $R = \frac{v}{H}$ , ở đây  $H$  là hằng số Hubble. Sử dụng  $v$  tính được từ sự dịch về phía dờ của các vạch phổ và  $R$  xác định thông qua các quan sát vũ trụ khác, ta có thể xác định được  $H$ .  $H = 100$  km/s/Mpc.

#### (6) Hằng số Planck

Bước sóng Compton  $\lambda_C = \frac{\hbar}{mc}$  của electron có thể được xác định từ độ dịch Compton  $\Delta\lambda = \lambda_C(1 - \cos\theta)$  suy từ tán xạ Compton. Biết khối lượng electron, hằng số Planck có thể được suy ra:  $h \sim 6,626 \times 10^{-34}$  J.s.

#### (7) Khoảng cách đến ngôi sao gần

Sử dụng phương pháp thị sai lượng giác, khoảng cách đến một ngôi sao ở gần trong khoảng 30 parsec từ hệ mặt trời có thể xác định được. Bán trục lớn của quỹ đạo trái đất được sử dụng làm đường dây. Góc giữa các đường vẽ từ ngôi sao đến hai đầu mút của trục là góc thị sai từ đó khoảng cách của ngôi sao có thể được suy ra qua phép tính hình học.

#### (8) Khoảng cách đến các thiên hà

Dộ roi biểu kiến (quang thông quan sát được) của một ngôi sao hoặc thiên hà phụ thuộc vào khoảng cách của nó. Các khoảng cách đến các thiên hà trong khoảng một vài megaparsec có thể do được bằng cách sử dụng các ngôi sao biến quang Cepheid. Đối với các ngôi sao này ta có thể sử dụng hệ thức giữa chu kỳ biến đổi ánh sáng và độ roi biểu kiến, hệ thức đó được chuẩn theo các sao Cepheid trong thiên hà của chúng ta. Đối với các ngân hà ở xa hơn, khoảng cách được đánh giá bởi độ dịch về phía đỏ bằng cách sử dụng hệ thức Hubble.

#### (9) Số Avogardo

Lượng phản ứng hóa học xảy ra tại một điện cực trong quá trình điện ly có thể được biểu diễn theo mol như sau  $n = Q/zF$ , ở đây  $Q$  điện tích tổng được cung cấp,  $z$  là điện tích của một ion và  $F$  là hằng số Faraday. Như vậy  $F$  có thể được xác định một cách chính xác bằng phương pháp điện hóa. Như vậy số Avogadro được tính thông qua

$$N_A = \frac{F}{e} = 6,023 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

khi sử dụng diện tích của electron mà ta có thể xác định một cách chính xác bởi phương pháp giọt dầu Millikan.

#### (10) Kích thước của một hạt nhân

Trong thí nghiệm Rutherford về tán xạ của các hạt  $\alpha$  bởi các hạt nhân nặng người ta thấy rằng với các năng lượng hạt  $\alpha$ - trung bình, các kết quả thí nghiệm phù hợp với giả thiết của Rutherford về lực tỷ lệ nghịch bình phương của tương tác (Coulomb). Khi năng lượng được tăng lên thì sự sai lệch khỏi giả thiết này xuất hiện đặc biệt là ở các góc lớn. Sự sai lệch này có liên quan với một thực tế là đường đi của các hạt  $\alpha$  tiến gần hơn tới hạt nhân ở các năng lượng cao ở đó định luật tỷ lệ nghịch bình phương không còn đúng nữa. Khoảng cách tại đó tương tác thay đổi bản chất của nó được xem như là bán kính của hạt nhân. Nó thay đổi từ một vài lần của  $10^{-15}\text{m}$  với các hạt nhân nhẹ tới khoảng  $10^{-14}\text{m}$  đối với các hạt nhân nặng. Một đánh giá sơ bộ được thực hiện bằng cách cho một hạt  $\alpha$  tiến sát nhất có thể tới một hạt nhân diện tích  $Ze^2$ :

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

hay

$$r = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 T} = \frac{2 \times 100 \times (1.6 \times 10^{-19})^2 \times 9 \times 10^9}{6 \times 10^6 \times 1.6 \times 10^{-19}} \simeq 5 \times 10^{-14} \text{ m}.$$

khi sử dụng  $T = 6 \text{ MeV}$ ,  $Z = 100$ .

#### (11) Kích thước của một nguyên tử

Chọn một nguyên tố mà các nguyên tử của nó được sắp xếp trong một mạng tinh thể lập phương. Nếu nó có khối lượng nguyên tử  $A$  và mật độ do được bằng  $\rho$ , thì bán kính nguyên tử  $r$  được xác định bằng

$$\frac{4}{3}\pi r^3 N_A = A/\rho .$$

$N_A$  là số Avogadro, hay

$$r = \left( \frac{3A}{4\pi\rho N_A} \right)^{\frac{1}{3}} \sim 10^{-10} \text{ m.}$$

#### (12) Độ dịch Lamb

Vào năm 1947 Lamb và Rutherford đã đo khoảng năng lượng giữa các trạng thái  $E_{2,0,1/2}$  và  $E_{2,1,1/2}$  của nguyên tử hidrô,  $\Delta E = 4,37516 \times 10^{-6} \text{ eV}$ , bằng cách sử dụng phổ kẽ tần số radio. Biểu thức lý thuyết chính xác đối với sự chênh lệch năng lượng này lần đầu tiên được đưa ra bởi Lamb và hiệu ứng này được biết dưới tên độ dịch Lamb.

#### (13) Nhiệt độ của bức xạ nền vũ trụ

Phân bố phổ của bức xạ nền vũ trụ được đo và các kết quả được so sánh với phổ vật đen để tìm ra nhiệt độ thích hợp. Hoặc định luật dịch chuyển Wien được sử dụng để tính nhiệt độ từ bước sóng  $\lambda_{\max}$  tương ứng với cường độ cực đại.  $T \approx 3 \text{ K}$ .

#### (14) Các thừa số g hạt nhân

Bằng cách đo tần số tiến động Larmor của một hạt nhân trong một từ trường  $H$ ,

$$\omega = \frac{\mu H}{I\hbar} = \frac{g\mu_N H}{\hbar} .$$

ở đây  $\mu_N$  là magneton hạt nhân,  $H$  là từ trường ngoài và  $\mu = g\mu_N I$  là mômen từ hạt nhân, có thể tính được thừa số  $g$  hạt nhân. Nó có thể có giá trị dương hoặc âm và độ lớn của nó ở trong khoảng 0,1-10.

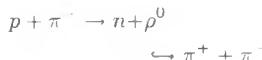
#### (15) Khối lượng của một meson hoặc cộng hưởng baryon

Một trạng thái cộng hưởng có một thời gian sống chỉ cỡ  $10^{-23}$  đến  $10^{-22} \text{ s}$  và khối lượng của nó được xác định bằng cách đo các giá trị năng lượng

$E_1, E_2, E_3, \dots$  và các xung lượng  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \dots$  của các hạt cộng hưởng và sử dụng phương trình tương đối tính

$$m^2 c^4 = (E_1 + E_2 + E_3 + \dots)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 + \dots)^2 c^2.$$

Ví dụ, trong phản ứng



khối lượng của  $\rho^0$  được tính bởi

$$mc^2 = \sqrt{(E_1 + E_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 c^2}.$$

Bằng thực nghiệm tương tác quan sát được diễn ra như sau

$$p + \pi^- \rightarrow n + \pi^+ + \pi^-.$$

Nếu tính toán trên dẫn đến một cực đại của phân bố của  $m$ , thì trạng thái cộng hưởng được khẳng định và khối lượng của nó được xác định. Theo cách này ta tìm được  $m_{\rho^0} \approx 776 \text{ MeV}/c^2$ .

### 3039

A. Mô tả ngắn gọn cách đo chính xác nhất có thể 4 đại lượng sau đây. Trong từng trường hợp, hãy mô tả thiết bị và giải thích cẩn thận các nguyên lý hoạt động của nó.

- (1) Độ giàu tự nhiên tương đối của hai đồng vị bền của nguyên tố đồng.
- (2) Áp suất trong buồng chân không của hệ cyclotron (xấp xỉ bằng  $10^{-8} \text{ atm.}$ )
- (3) Momen từ của hạt nhân đotêri:
- (4) Nhiệt độ bề mặt của mặt trời.
- (5) Thời gian sống của trạng thái hạt nhân tồn tại ngắn ( $\sim 10^{-22} \text{ s}$ )

B. Đánh giá rất thô (tức là trong khoảng một bậc độ lớn) đối với các đại lượng sau đây. Chỉ ra phương pháp thực hiện.

- (1) Năng lượng giải phóng sau vụ nổ hạt nhân trong đó 1 kg  $\text{U}^{235}$  bị phân hạch.
- (2) Bán kính của nguyên tử mumesic là nguyên tử hiđrô trong đó électron được thay thế bằng một hạt muon

(3) Bán kính của một máy gia tốc proton 10 TeV ( $1 \text{ TeV} = 10^{12} \text{ eV}$ ).

**Lời giải:**

A. (1) Độ giàu tự nhiên tương đối của một đồng vị là số phần trăm trong hỗn hợp tự nhiên của nguyên tố đó. Trước hết chuẩn bị một mẫu Cu tự nhiên là hỗn hợp của các đồng vị  $^{63}\text{Cu}$  và  $^{65}\text{Cu}$ . Sau đó dùng một khối phổ kế do khối lượng  $m$  của mỗi một dạng đồng vị theo bán kính cong  $R$  của quỹ đạo của nó trong từ trường  $B$  bằng cách sử dụng hệ thức

$$R = \frac{mv}{qB}.$$

Giả thiết khối lượng của các đồng vị đo được tương ứng là  $63u$  và  $65u$ , ở đây  $u$  là một hằng số. Ta cũng đo khối lượng  $M$  trên một mol của mẫu bằng một phương pháp hóa học. Giả thiết khối lượng trung bình của một nguyên tử tìm được là  $M/N_A = 63,54u$ . Đặt  $x$  là độ giàu tương đối của  $^{63}\text{Cu}$ , và  $1 - x$  là độ giàu tương đối của  $^{65}\text{Cu}$ , ta có

$$63x + 65(1 - x) = 63,54,$$

và do đó

$$x = 68,94\%, \quad 1 - x = 31,06\%.$$

(2) Xem **Bài tập 3038 (1)**.

(3) Mômen xung lượng toàn phần của một hạt nhân là tổng vectơ của các mômen spin của các nucleon và được biết như là mômen spin hạt nhân.

Khi một hạt nhân mang điện tích thì spin của nó tạo nên một mômen từ hạt nhân  $\mu = g\mu_n T$ , ở đây  $\mu_n$  là magneton hạt nhân và  $I$  là spin hạt nhân. Trong một từ trường ngoài  $H_0$  các hạt nhân sẽ có  $2I + 1$  mức năng lượng spin. Một trường điện từ xoay chiều tần số radio được tác dụng vuông góc với từ trường ngoài để cảm ứng các chuyển đổi giữa các mức năng lượng spin gần nhau. Đặt hai mức năng lượng gần nhau của hạt nhân đột biến là  $E_I$  và  $E_{I+1}$ . Chuyển đổi giữa chúng sẽ tạo nên một vạch cộng hưởng có tần số góc

$$\omega = \frac{E_I - E_{I+1}}{\hbar} = \frac{g\mu_n H_0}{\hbar}$$

do  $E_I = -g\mu_n I H_0$ . Điều này dẫn tới mômen từ của hạt nhân đột biến là

$$\mu(^2\text{H}) = 0,85742 \mu_n.$$

ở dây magneton hạt nhân  $\mu_n$  có giá trị bằng  $5,051 \times 10^{-27}$  J/T. Về mặt thực nghiêm các phép đo được thực hiện bằng cách sử dụng một máy đo cộng hưởng từ hạt nhân.

(4) Phổ bức xạ mặt trời thu được ngoài khí quyển trái đất rất giống với phổ của một vật đen. Khi đó, từ bước sóng tìm được ứng với cường độ cực đại,  $\lambda_m \approx 4900 \text{ \AA}$ , dùng định luật dịch chuyển Wien:  $\lambda_m T = 2.898 \times 10^7 \text{ \AA}\cdot\text{K}$ , ta tìm được  $T = 5,9 \times 10^3 \text{ K}$ .

(5) Một trạng thái hạt nhân có thời gian sống  $\sim 10^{-22} \text{ s}$  là một trạng thái cộng hưởng mà sự tồn tại của nó chỉ được khẳng định bởi sự xuất hiện một định hép trong phân bố phổ tần số của khói lượng hiệu dụng tính được từ các năng lượng và xung lượng của các hạt thứ cấp giả thiết được tạo ra trong quá trình phân rã nó (xem Bài tập 3038 (15)). Thời gian sống của nó được đánh giá từ nguyên lý bất định

$$\Delta t \cdot \Delta E \gtrsim \frac{\hbar}{2},$$

ở đây  $\Delta E = \Delta mc^2$ ,  $\Delta m$  là độ rộng của định trong phân bố khói lượng hiệu dụng.

### B. (1) Để đánh giá thô ta giả thiết



ở đây X và Y là các hạt nhân có  $A = 117$ . Năng lượng liên kết trung bình của mỗi một nucleon trong một hạt nhân có số khói  $A$  là  $7,7 \text{ MeV}$  đối với  $A \approx 236$  và  $8,6 \text{ MeV}$  đối với  $A \approx 117$ . Vậy năng lượng liên kết của  ${}^{236}\text{U}$  là  $236 \times 7,7 = 1817 \text{ MeV}$  và của X và Y là  $2 \times 117 \times 8,6 = 2012 \text{ MeV}$ , và như vậy một năng lượng khoảng  $195 \text{ MeV}$  được giải phóng sau một lần phân hạch. Do 1 kg  ${}^{235}\text{U}$  chứa

$$\frac{10^3 \times 6,02 \times 10^{23}}{235} = 2,56 \times 10^{24}$$

nguyên tử  ${}^{235}\text{U}$ , sự phân hạch của chúng toả ra năng lượng bằng

$$2,56 \times 10^{24} \times 195 = 5 \times 10^{26} \text{ MeV}.$$

(2) Bán kính  $a$  thứ nhất của nguyên tử Bohr tỷ lệ nghịch với khói lượng  $m$  của hạt quay trên quỹ đạo đó

$$\frac{a_\mu}{a_e} = \frac{m_e}{m_\mu}.$$

Do  $a_e \approx 0,5 \text{ \AA}$ ,  $m_\mu = 210 m_e$ , nên

$$a_\mu = 0,5 \times \frac{1}{210} \approx 0,0023 \text{ \AA}.$$

(3) Bán kính  $R$  của quỹ đạo của một proton khối lượng  $m$ , điện tích  $e$ , vận tốc  $v$ , thửa số Lorentz  $\gamma$  trong một từ trường có cảm ứng từ  $B$  được tính bởi

$$\frac{m\gamma v^2}{R} = evB.$$

Do đó

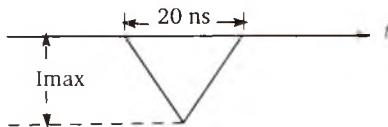
$$R = \frac{pc}{eBc},$$

ở đây  $p$  là xung lượng của proton. Lấy  $B \approx 5 \text{ T}$ , do  $pc \approx 10 \text{ TeV} = 10^{13} \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-6} \text{ J}$ , ta có

$$R = \frac{1,6 \times 10^{-6}}{1,6 \times 10^{-19} \times 5 \times 3 \times 10^8} = 6,7 \times 10^3 \text{ m} = 6,7 \text{ km}.$$

### 3040

Một ống nhân quang điện được sử dụng để phát hiện các xung ánh sáng gồm một số lượng photon nhỏ nhưng cố định. Hiệu suất quang điện trung bình là 10%. Tức là xác suất để một photon bứt ra được một electron quang điện là 10%. Giả thiết hệ số khuếch đại của ống quang điện là  $10^6$  và dòng ra theo thời gian có thể được coi gần đúng như chỉ ra trong hình 3.4.



Hình 3.4

(a)  $I_{\max}$ , khi lấy trung bình của rất nhiều xung, bằng  $80 \mu\text{A}$ ,  $N$  photon trung bình trong mỗi xung bằng bao nhiêu?

(b) Xác suất tính theo  $N$ , để một xung ánh sáng tới mà không được phát hiện (tức là không tạo ra được các electron quang điện) bằng bao nhiêu?

(c) Những hiệu ứng nào gây ra sự thăng giáng các giá trị của  $I_{\max}$  ?

**Lời giải:**

(a) Lượng điện tích tổng cộng của một xung dòng là

$$Q = \int I dt ,$$

bằng diện tích của tam giác trên hình 3.6. Do đó

$$Q = \frac{1}{2} \times 20 \times 10^{-9} \times 80 \times 10^{-6} = 8 \times 10^{-13} C$$

và số electron được mang bởi một xung là

$$n = \frac{Q}{e} = \frac{8 \times 10^{-13}}{1,6 \times 10^{-19}} = 5 \times 10^6 .$$

Như vậy số các electron quang điện được phát ra từ một xung ánh sáng là

$$n' = n/10^6 = 5 ,$$

và từ đó dẫn đến số photon trong một xung ánh sáng là

$$N = n'/0,1 = 50 .$$

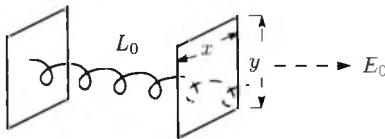
(b) Xác suất để tất cả các photon của một xung ánh sáng tới mà không bị phát hiện là

$$\left( \frac{90}{100} \right)^N = (0,9)^{50} = 5,15 \times 10^{-3} = 0,52\% .$$

(c) Trong mỗi xung có một xác suất xác định đối với một số photon không phát hiện được. Như vậy số photon được phát hiện sẽ thay đổi từ xung này đến xung khác. Do đó dòng cực đại  $I_{max}$  sẽ thay đổi quanh một giá trị trung bình. Số photon càng lớn trong một xung thì sự dao động của dòng cực đại càng nhỏ.

### 3041

Hai bản dẫn điện có diện tích  $A$  đặt song song và cách nhau một khoảng  $L_0$  (tính từ mặt trong của hai mặt). Chúng dược nối với nhau bằng một lò xo dẫn điện có chiều dài khi không chịu ứng suất là  $L_0$  và độ cứng  $k$ . Cả hệ trung hoà về điện. Lò xo ở trạng thái tự do. ( $L_0$  là nhỏ so với các kích thước ngang



Hình 3.5

của các bản). Hệ sau đó chịu tác dụng của một điện trường đều  $E_0$  vuông góc với mặt các bản. Khoảng cách cân bằng giữa các đĩa bây giờ là  $L$ . Tính  $L$  theo  $E_0$ ,  $L_0$ ,  $k$ , và  $A$ .

### Lời giải:

Khi khoảng cách giữa hai bản mỏng là nhỏ so với các kích thước ngang của hai bản ta có thể coi hiệu ứng chấn là hoàn toàn và lấy giá trị điện trường bên trong bằng  $E_{in} = 0$ . Áp dụng định lý Gauss, ta được

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

trong đó  $S$  là mặt kín bao sát một bản. Khi đó, vì  $E_{in} = 0$  và mọi hiệu ứng ở mép có thể bỏ qua, ta có

$$E_0 A = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad \text{hay} \quad Q = \epsilon_0 E_0 A,$$

ở đây  $Q$  là độ lớn của diện tích ở các bản. Lực tác dụng của điện trường lên từng bản là

$$F = \int E_0 \sigma \, dS = E_0 \sigma A = E_0 \left( \frac{Q}{A} \right) A = \epsilon_0 E_0^2 A.$$

Đặt  $z$  là độ giãn của lò xo do lực này gây ra. Theo định luật Hooke

$$F = kz,$$

hay

$$z = \frac{\epsilon_0 E_0^2 A}{k}.$$

Do đó, khoảng cách cân bằng là

$$L = L_0 + z = L_0 + \frac{\epsilon_0 E_0^2 A}{k}.$$

## 3042

Laze Shiva ở Livermore phát 10 kJ bức xạ có bước sóng  $1 \mu$  trong  $10^{-9}$  giây tới một diện tích  $10^{-3} \text{ cm}^2$ .

(a) Tìm mật độ công suất, điện trường cực đại, mật độ năng lượng trong trường điện từ, và áp suất bức xạ, theo các đơn vị thực hành MKS.

(b) Nếu toàn bộ năng lượng được hấp thụ và chuyển thành năng lượng nhiệt phân bố đồng nhất trên một quả cầu kích thước đúng bằng kích thước của diện tích trên chứa  $5 \times 10^{18}$  nguyên tử hidrô (bị ion hóa hoàn toàn), hãy tính áp suất của vật liệu này và chỉ ra rằng áp suất bức xạ của ánh sáng laze mặc dù rất lớn nhưng vẫn còn quá thấp để giữ đám mây nguyên tử và phải để cho nó lan tỏa đi.

**Lời giải:**

(a) Mật độ công suất trung bình là

$$\langle S \rangle = \frac{\text{năng lượng}}{At} = \frac{10 \times 10^3}{10^{-3} \times 10^{-4} \times 10^{-9}} = 10^{20} \text{ J/s.m}^2$$

Bức xạ điện từ có mật độ năng lượng trung bình  $\epsilon_0 \langle E^2 \rangle$ , do vậy

$$\langle S \rangle = \epsilon_0 c \langle E^2 \rangle = \frac{\langle E^2 \rangle}{\mu_0 c}$$

Như vậy

$$\sqrt{\langle E^2 \rangle} = \sqrt{\langle S \rangle \mu_0 c} = \sqrt{10^{20} \times 4\pi \times 10^{-7} \times 3 \times 10^8} = 1.94 \times 10^{11} \text{ V/m},$$

và giá trị cực đại của điện trường là

$$E_0 = \sqrt{2 \langle E^2 \rangle} = 2.75 \times 10^{11} \text{ V/m}.$$

Mật độ năng lượng trung bình là

$$\langle U \rangle = \epsilon_0 c \langle E^2 \rangle = \frac{\langle S \rangle}{c} = 3.33 \times 10^{11} \text{ J/m}^3.$$

và áp suất bức xạ là

$$P = \frac{\langle U \rangle}{c} \cdot c = \langle U \rangle = 3.3 \times 10^{11} \text{ Pa}.$$

(b) Do toàn bộ năng lượng hấp thụ được chuyển thành dòng năng của chuyển động nhiệt của các nguyên tử hidrô, ta có

$$W = \frac{3}{2} N k T.$$

ở đây  $N$  là số các nguyên tử hiđrô tham gia và  $k$  là hằng số Boltzmann. Coi các nguyên tử hiđrô như là một khí lý tưởng, ta có

$$pv = NkT ,$$

và do đó

$$p = \frac{NkT}{v} = \frac{2W}{3v} = \frac{2W}{3} \left( \frac{4}{3} \pi R^3 \right)^{-1} .$$

Do bán kính  $R$  của quả cầu có liên quan đến diện tích  $A$  qua biểu thức  $\pi R^2 = A$ , nên biểu thức trên trở thành

$$p = \frac{W}{2\pi} \left( \frac{\pi}{A} \right)^{\frac{3}{2}} .$$

Với  $W = 10^4$  J,  $A = 10^{-7}$  m<sup>2</sup>, ta được  $p = 2.80 \times 10^{14}$  Pa. Do áp suất này lớn hơn rất nhiều so với áp suất bức xạ tạo bởi ánh sáng laze, nên áp suất bức xạ không thể giữ đám mây nguyên tử lại với nhau mà phải để nó tỏa ra tự do.

### 3043

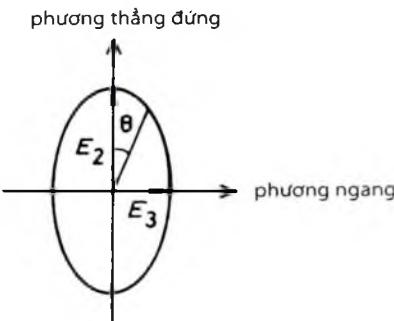
Ánh sáng có độ phân cực chưa biết được kiểm tra bằng một kính phân cực và thấy cường độ truyền qua cực đại  $I_{\max} = I_0$  đối với mặt phẳng phân cực theo phương thẳng đứng và cường độ cực tiểu  $I_{\min} = 2I_0/3$  đối với mặt phẳng phân cực theo phương ngang.

(a) Từ thông tin trên có thể xác định được cường độ sáng truyền qua kính phân cực tại bất kỳ một góc  $\theta$  nào so với phương thẳng đứng hay không? Nếu được hãy viết biểu thức của  $I(\theta)$  theo  $I_0$  và  $\theta$ .

(b) Ánh sáng được truyền qua một bản một phần tư bước sóng có các trục theo phương thẳng đứng và phương ngang, sau đó đi qua một kính phân cực. Sau khi đi qua tấm phân cực này, cường độ cực đại theo phương làm với phương thẳng đứng một góc  $30^\circ$ . Hãy cho biết thông tin nhiều nhất có thể về sự phân cực của ánh sáng tới (phân không phân cực, các vị trí của trục dài và trục ngắn của phân cực elip, các cường độ tương đối theo các trục dài và ngắn).

**Lời giải:**

(a) Giả thiết ánh sáng tới là hỗn hợp của ánh sáng không phân cực và phân cực elip. Một ánh sáng phân cực elip có thể được xem như là hỗn hợp của hai thành phần phân cực thẳng có mặt phẳng phân cực vuông góc với



Hình 3.6

nhau, có biên độ khác nhau và lệch pha nhau một góc  $90^\circ$ . Gọi các cường độ của thành phần không phân cực, thành phần với mặt phẳng phân cực song song với phương thẳng đứng và thành phần với mặt phẳng phân cực song song với phương ngang lần lượt là  $I_1, I_2, I_3$ . Khi đó,

$$\begin{aligned}I_1 + I_2 &= I_0, \\I_1 + I_3 &= \frac{2I_0}{3}.\end{aligned}$$

Nếu kính phân cực bây giờ bị quay đi quanh trục của nó một góc  $\theta$ , như chỉ ra trên hình 3.6 thì cường độ truyền qua là

$$\begin{aligned}I(\theta) &= I_1 + I_2 \cos^2 \theta + I_3 \sin^2 \theta \\&= (I_1 + I_2) \cos^2 \theta + (I_1 + I_3) \sin^2 \theta \\&= I_0 \cos^2 \theta + \frac{2}{3} I_0 \sin^2 \theta \\&= I_0 \left(1 - \frac{1}{3} \sin^2 \theta\right).\end{aligned}$$

(b) Khi đi qua một bản một phần tư bước sóng hai thành phần phân cực thẳng sẽ bị thay đổi pha đi một lượng bằng  $-90^\circ$ , do đó ánh sáng phân cực elip trở thành phân cực thẳng với mặt phẳng phân cực tạo một góc  $\theta$  với phương thẳng đứng được tính bởi

$$\tan \theta = \sqrt{\frac{E_3^2}{E_2^2}} = \sqrt{\frac{I_3}{I_2}}.$$

Với  $\theta = 30^\circ$ , ta có  $I_2 = 3I_3$ . Kết hợp với các kết quả trong câu (a) ta có

$$I_3 = \frac{1}{6}I_0, \quad I_1 = \frac{1}{2}I_0, \quad I_2 = \frac{1}{2}I_0.$$

Phần không phân cực của ánh sáng là  $\frac{I_1}{I_0} = \frac{1}{2}$ . Đối với ánh sáng phân cực elip trực dài trùng với phương thẳng đứng còn trực ngắn trùng với phương ngang và tỷ số giữa hai cường độ sáng theo các trực dài và ngắn là

$$I_2/I_3 = 3.$$

### 3044

Một kết quả thực nghiệm  $y$  được tính toán từ công thức  $y = \frac{(a-3b)\sqrt{x}}{g}$ . Các giá trị ở về phải của phương trình do được là  $a \pm \Delta a$ ,  $b \pm \Delta b$ ,  $x \pm \Delta x$ ,  $g \pm \Delta g$ , ở đây  $\Delta a$ ,  $\Delta b$ ,  $\Delta x$ , và  $\Delta g$  là các giá trị cản quan phương của các sai số ngẫu nhiên và sai số không tương quan của  $a$ ,  $b$ ,  $x$ , và  $g$ .

Hãy tìm một biểu thức cho  $\Delta y/y$  theo  $a$ ,  $b$ ,  $x$ ,  $g$ ,  $\Delta a$ ,  $\Delta b$ ,  $\Delta x$  và  $\Delta g$ , ở đây  $\Delta y$  là giá trị cản quan phương của sai số ngẫu nhiên của  $y$ .

**Lời giải:**

Lấy loga hai vế của phương trình ta được

$$\ln y = \ln(a - 3b) + \frac{1}{2} \ln x - \ln g.$$

Lấy vị phân ta được

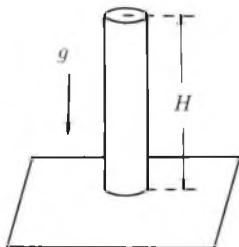
$$\frac{\delta y}{y} = \frac{\delta a - 3\delta b}{a - 3b} - \frac{1}{2} \frac{\delta x}{x} - \frac{\delta g}{g}.$$

Xét các độ lệch cản quan phương biểu thức trên trở thành

$$\frac{\Delta y}{y} = \left[ \left( \frac{\Delta a}{a - 3b} \right)^2 + \left( \frac{3\Delta b}{a - 3b} \right)^2 + \left( \frac{\Delta x}{2x} \right)^2 + \left( \frac{\Delta g}{g} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

### 3045

Một thanh hình trụ dài hẹp (tiết diện tròn) đứng trên một mặt phẳng và trong một trường hấp dẫn như trên hình 3.7. Thanh trụ có mật độ  $\rho$ , chiều



Hình 3.7

cao  $H$  và bán kính  $R$ . Cấu hình này không tuyệt đối bền nếu  $H/2 > R$ . Đổi với  $\rho$  và  $H$  cho trước, hãy sử dụng nguyên lý bất định để đánh giá bậc độ lớn của  $R$  phải bằng bao nhiêu để thanh trụ này đứng vững trong thời gian dài.

### Lời giải:

Khi thanh trụ đặt nằm trên mặt phẳng ngang, đây là một trạng thái bền có thể năng lượng trường là

$$E_0 = mgR = \pi\rho g R^3 H .$$

Khi nó đứng thẳng trên một đầu, đây là trạng thái với thế năng trọng trường là

$$E_1 = mg \frac{H}{2} = \frac{\pi}{2} \rho g R^2 H^2 .$$

Hiệu năng lượng giữa hai trạng thái là

$$\Delta E = E_1 - E_0 = \pi \rho g R^2 H \left( \frac{H}{2} - R \right) .$$

Nếu  $\Delta E > 0$ , hoặc  $\frac{H}{2} > R$ , trạng thái thẳng đứng  $E_1$  không hoàn toàn bền và nó có thể chuyển sang trạng thái nằm ngang. Theo nguyên lý bất định

$$\Delta E \Delta t \sim \hbar .$$

ở đây  $\Delta t$  là khoảng thời gian chuyển từ trạng thái thẳng đứng sang trạng thái nằm ngang, ta có

$$\pi \rho g R^2 H \left( \frac{H}{2} - R \right) \Delta t \sim \hbar .$$

Để  $\Delta t$  lớn thì,  $\Delta E \sim 0$ , dẫn tới  $R \sim \frac{H}{2}$ . Đánh giá tốt hơn là

$$R \sim \frac{H}{2} - \frac{h}{\pi \rho g R^2 H \Delta t} \sim \frac{H}{2} - \frac{4h}{\pi \rho g H^3 \Delta t} .$$

## 3046

Giả thiết rằng tầng điện ly ở trạng thái cân bằng nhiệt tại nhiệt độ  $T$ . Trong tầng điện ly này có các electron (khối lượng  $m$ ) và các ion mang điện tích nguyên tố (khối lượng  $M$ ). Nếu không có sự có mặt của điện trường lớn thì các electron và các ion này phải có các độ cao tỷ lệ rất khác nhau, ứng với các giá trị  $kT/mg$  và  $kT/Mg$  electron. Điều này sẽ gây ra một điện trường lớn và do đó làm thay đổi mối liên hệ giữa mật độ và độ cao.

Tính đến trường tĩnh điện này, hãy tìm

- (a) hệ thức mật độ-dộ cao,
- (b) biên độ (và phương) của điện trường tự hợp  $\mathbf{E}$ ,
- (c) giá trị số của  $E$  nếu ion là các proton. (Có thể bỏ qua độ cong của bờ mặt trái đất. Thực tế điện trường này là đều)

Lời giải:

(a) Sử dụng một hệ tọa độ với gốc tại bờ mặt trái đất và trục  $z$  theo phương thẳng đứng. Điện trường tự hợp  $\mathbf{E}$  theo phương  $z$

$$E = -\frac{\partial V}{\partial z},$$

hoặc

$$V = -Ez$$

giả thiết  $E$  là đều. Khi đó, một electron và một ion ở độ cao  $z$  sẽ có các giá trị năng lượng như sau

$$\epsilon_e = mgz + eEz,$$

$$\epsilon_i = Mgz - eEz,$$

và các mật độ số hạt

$$n_e = n_{e0} e^{-\epsilon_e/kT} = n_{e0} e^{-(mg+eE)z/kT},$$

$$n_i = n_{i0} e^{-\epsilon_i/kT} = n_{i0} e^{-(Mg-eE)z/kT}$$

là các hàm của độ cao.

(b) Do

$$\Delta \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

đối với một điện trường đều, nên mật độ điện tích tổng cộng là  $\rho = 0$  ở khắp mọi nơi. Điều này có nghĩa là

$$-en_e + en_i = 0,$$

hay

$$n_{e0} = n_{i0}, \quad mg + eE = Mg - eE.$$

Phương trình cuối cùng dẫn đến

$$E = \frac{(M-m)g}{2e} \approx \frac{Mg}{2e}$$

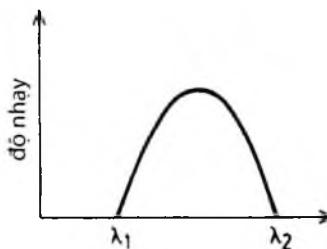
với  $M \gg m$ .

(c) Nếu các ion là các proton thì ta có  $M = 1.672 \times 10^{-27}$  kg,  $e = 1.602 \times 10^{-19}$  C, và

$$E = \frac{1.672 \times 10^{-27} \times 9.807}{2 \times 1.602 \times 10^{-19}} = 5.12 \times 10^{-8} \text{ V m}^{-2}.$$

### 3047

Xét một loại ống nhân quang điện thường gặp trong phòng thí nghiệm. Ví dụ nó có năm tầng khuếch đại, và nhà sản xuất khuyên cáo là điện áp cực đại có thể sử dụng là 700 volt. Giả thiết độ nhạy theo bước sóng được mô tả trên hình 3.8.



Hình 3.8

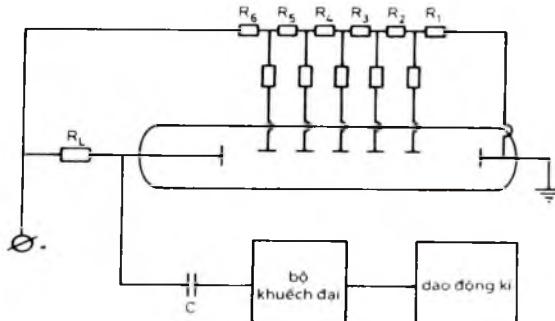
- (a) Tại sao ống quang không nhạy với bước sóng nhỏ hơn  $\lambda_1$ ?
- (b) Tại sao ống quang không nhạy với bước sóng lớn hơn  $\lambda_2$ ?
- (c) Hãy vẽ mạch điện cần sử dụng với ống nhân quang điện này để quan sát các xung ánh sáng 20 nano giây bằng một dao động ký khuếch đại. Số đồ cần phải chia ra các đường nối tới catôt, dinôt, anôt, và dao động ký.

Lời giải:

(a) Với các bước sóng ngắn hơn, hoặc có tần số cao hơn, do tiết diện ngang để có tương tác giữa các electron tại catôt của ống nhân quang điện với photon là rất nhỏ, nên có rất ít electron được phát ra. Thực tế khi bước sóng nhỏ hơn một giá trị  $\lambda_1$ , thì số các electron phát ra thực tế bằng không, tức là ống nhân quang điện có độ nhạy bằng không.

(b) Đôi với các bước sóng dài hơn, hoặc tần số thấp hơn, cửa sổ của ống nhân quang điện sẽ hấp thụ mạnh các photon tới. Nếu bước sóng dài hơn một giá trị  $\lambda_2$ , thì năng lượng  $h\nu$  của photon quá nhỏ để làm bật các electron ra khỏi catôt, do đó độ nhạy trong vùng này cũng bằng không.

(c) Một mạch điện hợp lý được chỉ ra trên hình 3.9, ở dây  $R_{LC}$  trong khoảng  $\tau$  tới  $5\tau$  với  $\tau = 20$  ns.



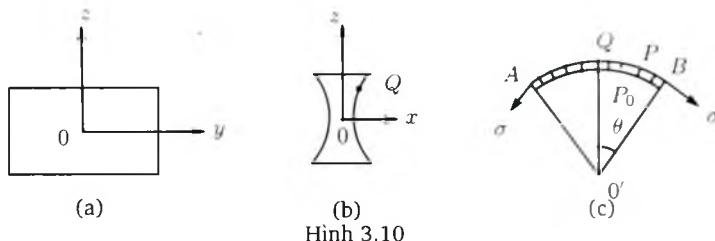
Hình 3.9

### 3048

Hãy xét một màng mỏng nước xà phòng căng trên một vòng dây đặt thẳng đứng. Cho gia tốc trọng trường là  $g$ , mật độ chất lỏng là  $\rho$ , sức căng bề mặt là  $\sigma$ . Hãy tìm các phương trình cho áp suất chất lỏng và độ dày màng mỏng theo hàm của độ cao của màng mỏng đó.

Lời giải:

Để tiện ta xét trường hợp ba chiều của một vòng dây hình chữ nhật thẳng



Hình 3.10

dứng với các mặt rất dài theo phương  $y$  nhưng lai ngắn theo phương  $z$  như chỉ ra trên hình 3.10(a). Hình dáng của màng đối với các tiết diện  $xz$  bất kỳ được chỉ ra trên hình 3.10(b) là như nhau với mọi giá trị của  $y$ .

Giả thiết áp suất khí quyển là  $p_0$  và áp suất chất lỏng gần điểm  $Q$  của màng là  $p$ . Điều kiện biên theo phương  $x$  là

$$p = p_0 - \sigma / R \; .$$

*R* là bán kính cong của màng.

Phương trình này có thể dễ dàng chứng minh như sau. Xét một mặt cắt của mảng song song với mặt phẳng  $xz$  có độ dày đơn vị (theo phương  $y$ ). Tiết diện trong mặt phẳng  $xz$  được gắn với hai đoạn thẳng song song với trục  $x$  và hai cung tròn như chỉ ra trên hình 3.10(b). Xét một nguyên tố cung AB có tâm tại Q. Như chỉ ra trên hình 3.10(c), lực căng bề mặt tổng hợp xuất hiện do theo QO' có độ lớn  $2\sigma \sin \theta$ , và được cân bằng với lực do áp suất dư của phần tử cung tròn đó. Như vậy

$$2R\theta(p - p_0) + 2\sigma \sin \theta = 0.$$

Cho  $\theta \rightarrow 0$ , ta có

$$p - p_0 = -\frac{\sigma}{R} \ .$$

đúng như đã được phát biểu ở trên.

Đặt chiều dày của màng là  $t = 2f(z)$ . Vậy thì độ cong của cung là

$$R^{-1} = f''/(1 + f'^2)^{3/2}$$

ở đây  $f' = \frac{df}{dz}$ , và do đó

$$p = p_0 - \sigma f''/(1 + f'^2)^{3/2}$$

Nhưng do màng thẳng đứng nằm ở trạng thái cân bằng tĩnh, nên áp suất thỏa mãn phương trình

$$p(z) = p(z=0) - \rho g z .$$

Do đó

$$p(z=0) - \rho g z = p_0 - \sigma f''/(1+f'^2)^{3/2} .$$

Chú ý rằng  $p_0$  và  $p(z=0)$  là các hằng số và

$$\Delta p = p_0 - p(z=0)$$

cũng là một hằng số, nên ta có

$$(1+f'^2)^{-\frac{3}{2}} \frac{df'}{dz} = \frac{\Delta p + \rho g z}{\sigma} .$$

Lấy tích phân ta được

$$f'/(1+f'^2)^{1/2} = \frac{1}{\sigma} \left( \Delta p z + \frac{1}{2} \rho g z^2 \right) + C_1 .$$

ở đây  $C_1$  là một hằng số. Tại  $z=0$  tiếp tuyến của cung song song với phương  $z$  và do đó  $f'=0$ , dẫn đến  $C_1=0$ . Như vậy

$$f'/(1+f'^2)^{1/2} = \frac{1}{\sigma} \left( \Delta p z + \frac{1}{2} \rho g z^2 \right) \approx f' .$$

do  $f' \ll 1$  vì màng rất mỏng. Lấy tích phân lần nữa ta được

$$f(z) = \frac{1}{\sigma} \left( \frac{\Delta p}{2} z^2 + \frac{1}{6} \rho g z^3 \right) + C_2 .$$

Nếu chiều dày màng tại  $z=0$  là  $2f_0$ , thì  $C_2=f_0$ . Như vậy

$$p(z) = p(z=0) - \rho g z = p_0 - \Delta p - \rho g z .$$

và chiều dày của màng là

$$t = 2f(z) = \frac{2}{\sigma} \left( \frac{\Delta p}{2} + \frac{1}{6} \rho g z \right) z^2 + 2f_0 .$$

### 3.3. CÁC KỸ THUẬT TOÁN HỌC (3049–3056)

**3049**

Xét phương trình vi phân không thuần nhất

$$f''(x) + 2zf'(x) + k^2 f(x) = \delta(x - x_0)$$

ở đây  $k$  và  $z > 0$  là các hằng số thực và  $\delta(x)$  là hàm  $\delta$ -Dirac. Hãy tìm nghiệm tổng quát với  $k^2 > z^2$ .

**Lời giải:**

Trước hết chúng ta tìm nghiệm tổng quát cho phương trình vi phân thuần nhất tương ứng

$$f''(x) + 2zf'(x) + k^2 f(x) = 0.$$

Đặt  $f(x) = e^{\lambda x}$ . Thay vào ta có

$$\lambda^2 + 2z\lambda + k^2 = 0,$$

Phương trình này có nghiệm là

$$\lambda = -z \pm i\sqrt{k^2 - z^2}.$$

Như vậy nghiệm tổng quát là

$$f(x) = A_1 e^{(-z+i\sqrt{k^2-z^2})x} + A_2 e^{(-z-i\sqrt{k^2-z^2})x}.$$

ở đây  $A_1$  và  $A_2$  là các hằng số.

Tiếp theo ta tìm một nghiệm riêng của phương trình gốc. Biểu diễn dưới dạng khai triển Fourier,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(p) e^{ip(x-x_0)} dp,$$

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ip(x-x_0)} dp.$$

Thay vào phương trình không thuần nhất

$$g(p) = \frac{1}{k^2 + 2izp - p^2}.$$

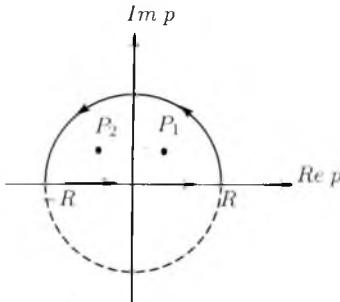
Do đó nghiệm riêng là

$$f(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ip(x-x_0)}}{p^2 - 2izp - k^2} dp.$$

Do  $p^2 - 2izp - k^2 = (p - p_1)(p - p_2)$ , ở đây

$$p_1 = iz + \sqrt{k^2 - z^2}, \quad p_2 = iz - \sqrt{k^2 - z^2},$$

với  $z > 0$ ,  $k^2 > z^2$ , nên tồn tại hai điểm kỳ dị  $p_1, p_2$  ở nửa trên của mặt phẳng phức.



Hình 3.11

Đối với  $x > x_0$ , lấy đường cong  $C$  của tích phân ở nửa trên của mặt phẳng phức  $p$  như chỉ ra trên hình 3.11 ta nhận được (tham khảo Bài tập 3050 (c))

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{e^{ip(x-x_0)} dp}{p^2 - 2izp - k^2} \right] \\ &= -\frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi i \left[ \frac{e^{i(x-x_0)(iz+\sqrt{k^2-z^2})}}{2\sqrt{k^2-z^2}} - \frac{e^{i(x-x_0)(iz-\sqrt{k^2-z^2})}}{2\sqrt{k^2-z^2}} \right] \\ &= \frac{\sin[(x-x_0)\sqrt{k^2-z^2}]}{\sqrt{k^2-z^2}} e^{-(x-x_0)z}. \end{aligned}$$

Đối với  $x < x_0$ , ta phải sử dụng đường cong  $C$  của tích phân ở nửa dưới của đường tròn như chỉ ra trên hình 3.11, như đã làm cho nửa vòng tròn trên và dẫn đến một thừa số

$$e^{-i(\operatorname{Re} p + i\operatorname{Im} p)|x-x_0|} = e^{\operatorname{Im} p|x-x_0|} e^{-i\operatorname{Re} p|x-x_0|}$$

tiễn tới vô cực khi  $R \rightarrow \infty$ . Tuy nhiên, do nửa vòng tròn phía dưới không có điểm kỳ dị thường nên  $f(x) = 0$  với  $x < x_0$ .

Như vậy nghiệm tổng quát là

$$f(x) = A_1 e^{(-z + i\sqrt{k^2 - z^2})x} + A_2 e^{(-z - i\sqrt{k^2 - z^2})x} \\ + \Theta(x - x_0) \frac{\sin[(x - x_0)\sqrt{k^2 - z^2}]}{\sqrt{k^2 - z^2}} e^{-|x-x_0|z}.$$

ở đây

$$\Theta(x - x_0) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x > x_0 \\ 0 & \text{nếu } x \leq x_0 \end{cases}$$

### 3050

- (a) Tính tổng của chuỗi  $y = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$  ( $|x| < 1$ )
- (b) Nếu  $f(x) = xe^{-x/\lambda}$  trong khoảng  $0 < x < \infty$ , hãy tìm giá trị trung bình và giá trị có xác suất cao nhất của  $x$ .
- (c) Đánh giá
- $$I = \int_0^\infty \frac{dx}{4 + x^4}.$$
- (d) Tìm các trị riêng và các vectơ riêng chuẩn hóa của ma trận

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Các vectơ riêng này có trực giao hay không? Hãy bình luận.

Lời giải:

(a) Do

$$y = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1} + \dots,$$

ta có

$$xy = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots + nx^n + \dots$$

và như vậy

$$y - xy = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1} + \dots = \frac{1}{1-x}$$

do  $|x| < 1$ . Do đó

$$y = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

(b) Giá trị trung bình của  $x$  là

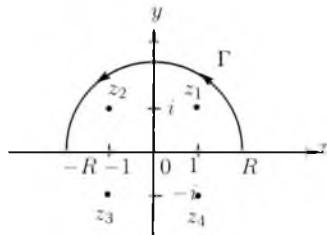
$$\bar{x} = \frac{\int_0^\infty xf(x)dx}{\int_0^\infty f(x)dx} = \frac{\int_0^\infty x^2e^{-x/\lambda}dx}{\int_0^\infty xe^{-x/\lambda}dx} = \frac{2\lambda \int_0^\infty xe^{-x/\lambda}dx}{\int_0^\infty xe^{-x/\lambda}dx} = 2\lambda.$$

ở đây phép lũy tích phân từng phần đã được sử dụng và giả thiết rằng  $\lambda > 0$ . Giá trị ứng với xác suất cao nhất của  $x$ ,  $x_m$ , được tính bởi

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_{x_m} = 0.$$

suy ra  $x_m = \lambda$ .

Chú ý rằng nếu  $\lambda < 0$ , thì  $f(x)$  sẽ tiến tới vô cực tại  $\infty$  và giá trị trung bình và giá trị có xác suất cao nhất cũng không xác định.



Hình 3.12

(c) Viết

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dx}{x^4 + 4} + \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dx}{x^4 + 4} \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^4 + 4} + \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dx}{x^4 + 4} = \frac{1}{2} \int_{\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 4} \end{aligned}$$

và xét

$$\oint_C \frac{dz}{z^4 + 4},$$

ở đây  $C$  là đường cong kín trên hình 3.12 gồm đường nối từ  $-R$  tới  $R$  và đường bán nguyệt  $\Gamma$ , đi ngược chiều kim đồng hồ, trong mặt phẳng phức. Do

$$\frac{1}{z^4 + 4} = \frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)}.$$

ở đây

$$z_1 = 1 + i, \quad z_2 = -1 + i, \quad z_3 = -1 - i, \quad z_4 = 1 - i.$$

Theo lý thuyết thăng đư, ta có

$$\begin{aligned} & \oint_C \frac{dz}{z^4 + 4} \\ &= 2\pi i \left[ \frac{1}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_1 - z_4)} + \frac{1}{(z_2 - z_1)(z_2 - z_3)(z_2 - z_4)} \right] \\ &= 2\pi i \left[ \frac{1}{2(2+2i) \cdot 2i} - \frac{1}{2 \cdot 2i(-2+2i)} \right] = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Nhưng

$$\oint_C \frac{dz}{z^4 + 4} = \int_{-R}^R \frac{dx}{x^4 + 4} + \int_{\Gamma} \frac{dz}{z^4 + 4} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 4}$$

do  $R \rightarrow \infty$ . Như vậy

$$I = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}.$$

(d) Phương trình đặc trưng của ma trận

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & 4 \\ 2 & 3 - \lambda & 0 \\ 5 & 0 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

hay  $(\lambda - 3)(\lambda + 3)(\lambda - 7) = 0$ , có các nghiệm  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = -3$  và  $\lambda_3 = 7$ . Đây là những trị riêng của ma trận đã cho. Với  $\lambda_1 = 3$ , phương trình ma trận

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

có các nghiệm

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = -2x_3. \end{cases}$$

Vậy vectơ riêng tương ứng là

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

và vectơ riêng chuẩn hóa là

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Với  $\lambda_2 = -3$ , phương trình ma trận

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \\ 5 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

có các nghiệm

$$\begin{cases} x_2 = -\frac{1}{3}x_1, \\ x_3 = -\frac{5}{6}x_1, \end{cases}$$

dẫn tới vectơ riêng chuẩn hóa là

$$\frac{6}{\sqrt{65}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{5}{6} \end{pmatrix},$$

Với  $\lambda_3 = 7$ , phương trình ma trận

$$\begin{pmatrix} -6 & 2 & 4 \\ 2 & -4 & 0 \\ 5 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

có các nghiệm

$$\begin{cases} x_2 = \frac{1}{2}x_1, \\ x_3 = \frac{5}{4}x_1, \end{cases}$$

dẫn tới vectơ riêng chuẩn hóa là

$$\frac{4}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix},$$

Ba vectơ riêng này không trực giao do ma trận

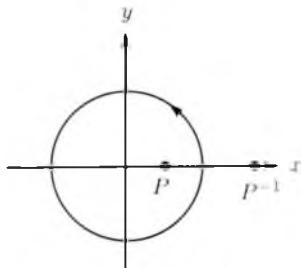
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

không phải là Hecmit vì nhin chung  $a_{ij} \neq a_{ji}$ .

## 3051

Tính

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - 2p \cos x + p^2} \quad \text{với } 0 < p < 1.$$



Hình 3.13

Lời giải:

Đặt  $z = e^{ix}$ . Vậy  $dx = dz/iz$ ,  $\cos x = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$ , và

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - 2p \cos x + p^2} \\ &= \oint_C \frac{dz}{iz[1 - p(z + z^{-1}) + p^2]} = -\frac{1}{ip} \oint_C \frac{dz}{(z - p^{-1})(z - p)}. \end{aligned}$$

ở đây  $C$  là vòng tròn bán kính đơn vị như chỉ ra trên hình 3.13. Chỉ có một cực  $p$  nằm bên trong đường tròn. Thặng dư tại cực  $p$  này là

$$\frac{1}{p - p^{-1}}.$$

Như vậy theo lý thuyết thặng dư ta có

$$I = -\frac{1}{ip} \cdot \frac{2\pi i}{p - p^{-1}} = \frac{2\pi}{1 - p^2}.$$

## 3052

Tính tổng chuỗi vô hạn  $S(x) = 1 + 2x^2 + 3x^3 + \dots$  đối với  $|x| < 1$ .

**Lời giải:**

Viết lại tổng ta được

$$\begin{aligned}
 S(x) &= (x + 2x^2 + 3x^3 + \dots) + (1 - x) \\
 &= x(1 + 2x + 3x^2 + \dots) + (1 - x) \\
 &= x \frac{d}{dx} (x + x^2 + x^3 + \dots) + (1 - x) \\
 &= x \frac{d}{dx} \left( \frac{x}{1-x} \right) + (1 - x) \\
 &= \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{(1-x)^2} + (1 - x) \\
 &= \frac{x}{(1-x)^2} + (1 - x).
 \end{aligned}$$

### 3053

Tìm một nghiệm đối xứng cầu và tiến tới không tại vô cực cho mỗi phương trình vi phân đạo hàm riêng sau đây:

$$(1) \nabla^2 U(\mathbf{r}) = -4\pi\delta(\mathbf{r})$$

$$(2) (\nabla^2 + k^2)U(\mathbf{r}) = -4\pi\delta(\mathbf{r})$$

$$(3) \left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) U(\mathbf{r}, t) = -4\pi f(t)\delta(\mathbf{r})$$

**Lời giải:**

(1) Do

$$\nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) = -4\pi\delta(\mathbf{r}),$$

Nên một nghiệm đối xứng cầu của phương trình vi phân này là

$$U(\mathbf{r}) = a + \frac{b}{r},$$

ở đây  $a, b$  là các hằng số. Để  $U \rightarrow 0$  khi  $r \rightarrow \infty$ , ta cần có  $a = 0$ .

Xét tiếp

$$\int_V \nabla^2 U(\mathbf{r}) dV = -4\pi \int_V \delta(\mathbf{r}) dV = -4\pi.$$

Vì theo định lý Gauss

$$\begin{aligned}\int_V \nabla^2 U(\mathbf{r}) dV &= \oint_S \nabla U(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} \\ &= -\frac{b}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = -4\pi b.\end{aligned}$$

ở đây ta đã lấy  $V$  là một quả cầu bán kính  $r$  có tâm tại gốc, nên  $b = 1$ . Do đó nghiệm cần tìm là

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{r}.$$

(2) Nếu  $r \neq 0$ , thì phương trình vi phân trở thành

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2}(rU) + k^2 U = 0,$$

hay

$$\frac{d^2}{dr^2}(rU) + k^2(rU) = 0,$$

Nghiệm của phương trình này là  $rU = e^{\pm ikr}$ . Do đó

$$U = \frac{1}{r}(c_1 e^{ikr} + c_2 e^{-ikr}).$$

ở đây  $c_1, c_2$  là các hằng số.

Với  $r \rightarrow 0$ ,

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2}(rU) \gg k^2 U$$

và phương trình vi phân đã cho trở thành

$$\nabla^2 U \approx -4\pi\delta(\mathbf{r}),$$

và nghiệm đối xứng cầu của nó đã được tính trong câu (1) là

$$U = \frac{1}{r}.$$

Như vậy đối với  $r \rightarrow 0$ ,

$$\frac{c_1 + c_2}{r} = \frac{1}{r},$$

hay

$$c_1 + c_2 = 1.$$

và nghiệm cần tìm là

$$U = \frac{1}{r} [e^{ikr} + c_2(e^{-ikr} - e^{ikr})] .$$

(3) Đổi với  $U(\mathbf{r})$  đổi xứng cầu ta có

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rU) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -4\pi f(t)\delta(\mathbf{r}) .$$

Nếu  $\mathbf{r} \neq 0$ , thì phương trình này trở thành phương trình sóng

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rU) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(rU) = 0$$

với nghiệm tổng quát là

$$rU = F_1\left(t - \frac{r}{c}\right) + F_2\left(t + \frac{r}{c}\right) ,$$

ở đây  $F_1, F_2$  là các hàm tùy ý. Nghiệm  $F_2$  hàm ý rằng kết quả lại xảy ra trước nguyên nhân nên thường được bỏ qua. Do vậy

$$U = \frac{1}{r} F_1\left(t - \frac{r}{c}\right) .$$

Với  $r \rightarrow 0$ ,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rU) \gg \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

và phương trình vi phân trở thành

$$\nabla^2 U \approx -4\pi f(t)\delta(\mathbf{r}) .$$

mà nghiệm của nó được tính trong câu (1) với ( $b = f(t)$ )

$$U = \frac{f(t)}{r} .$$

So sánh các biểu thức trên suy ra  $F_1(t) = f(t)$  đổi với  $r \rightarrow 0$ . Như vậy, ta cần phải lấy

$$F_1\left(t - \frac{r}{c}\right) = f\left(t - \frac{r}{c}\right) ,$$

và nghiệm cần tìm là

$$U = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right) .$$

## 3054

Chuỗi  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! z^n$  phân kỳ. Tuy nhiên, nó có thể được "lấy tổng" bằng cách tìm một hàm  $F(z)$  có tính chất

$$\lim_{|z| \rightarrow 0} \frac{1}{n!} \frac{d^n F(z)}{dz^n} = (-1)^n n! \quad (1)$$

đối với  $|\arg z| \leq \pi - \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , và  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

(a) Sử dụng công thức  $\Gamma(n+1) = n! = \int_0^\infty d\lambda e^{-\lambda} \lambda^n$  để thu được  $F(z)$  dưới dạng biểu diễn tích phân.

(b) Viết  $F(z)$  theo biểu diễn Hilbert

$$F(z) = \int dx \frac{\rho(x)}{x-z} .$$

(c) Xét các hàm có dạng  $f(z) = c \exp\left(\frac{-b}{z^a}\right)$ , với  $b$  là thực và dương. Dưới các điều kiện cụ thể  $f(z)$  có thể được cộng vào  $F(z)$  mà không làm ảnh hưởng đến các giới hạn (1) với mọi giá trị hữu hạn  $n = 0, 1, 2, \dots$  và với mọi  $\varepsilon > 0$ . Các điều kiện này là gì? (Giả thiết  $a$  là thực)

**Lời giải:**

(a) Đôi với một giá trị  $n$  cho trước, giả thiết với  $|z| \rightarrow 0$

$$\frac{d^n F_n}{dz^n} = (-1)^n (n!)^2 .$$

Lấy tích phân, ta được

$$\frac{d^{n-1} F_n}{dz^{n-1}} = (-1)^n (n!)^2 z + A .$$

hay

$$(-1)^{n-1} [(n-1)!]^2 = (-1)^n (n!)^2 z + A .$$

ở đây hằng số tích phân  $A$  thu được bằng cách đặt  $z = 0$ . Tiếp tục quá trình trên, ta tìm được

$$F_n(z) = \sum_0^n (-1)^r r! z^r .$$

Đặc biệt, đối với  $n \rightarrow \infty$  ta có

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_0^{\infty} (-1)^n n! z^n \\ &= \int_0^{\infty} d_{\lambda} e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \lambda^n z^n . \end{aligned}$$

Với  $|z| \rightarrow 0$  ta luôn có thể lấy  $|\lambda z| < 1$ , khi đó

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \lambda^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda z)^n = \frac{1}{1 + \lambda z} .$$

Do đó

$$F(z) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda} d\lambda}{1 + \lambda z} .$$

(b) Đặt  $\lambda = -\frac{1}{x}$ . Phương trình trên trở thành

$$F(z) = \int_{-\infty}^0 \frac{\left(\frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}}\right) dx}{x - z} ,$$

Đây chính là biểu diễn Hilbert.

(c) Yêu cầu là với  $|z| \rightarrow 0$ ,  $|f(z)|$  tiến tới 0 nhanh hơn  $|F(z)|$ , và như vậy nhanh hơn mọi bậc của  $z$ . Do

$$\begin{aligned} f(z) &= c \exp[-b(|z|e^{i\theta})^{-a}] \\ &= c \exp\{-b|z|^{-a}[\cos(a\theta) - i \sin(a\theta)]\} . \\ |f(z)| &= |c| \exp[-b|z|^{-a} \cos(a\theta)] . \end{aligned}$$

Nên  $|f(z)| \rightarrow 0$  khi  $|z| \rightarrow 0$  nếu

$$a \geq \delta \quad \text{với} \quad \delta > 0$$

và

$$\cos(a\theta) > 0, \quad \text{hoặc} \quad a|\theta| \leq \frac{\pi}{2} - \delta' \quad \text{với} \quad \delta' > 0 .$$

Ta đã có giả thiết

$$|\theta| \leq \pi - \varepsilon \quad \text{với} \quad \varepsilon > 0 .$$

ở đây  $\theta = \arg z$ , hay

$$a|\theta| \leq a\pi - a\varepsilon .$$

Tất cả các điều kiện trên đều thỏa mãn nếu

$$0 < \delta \leq a \leq \frac{1}{2}, \quad \delta' = \varepsilon.$$

### 3055

(a) Giải phương trình vi phân

$$\left( \frac{d}{dt} + 2 \right) \left( \frac{d}{dt} + 1 \right) y = 1.$$

với các điều kiện ban đầu  $\frac{dy}{dt}|_{t=0} = y|_{t=0} = 0$ .

(b) Tính tích phân xác định

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{(a^2 + x^2)^2}$$

với “a” thực.

(c) Tính các trị riêng của ma trận

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 2 & 0 \\ i & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**Lời giải:**

(a) Phương trình này thường được viết là

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 1.$$

Phương trình đặc trưng của nó là

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

có nghiệm

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -1.$$

Như vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$y(t) = Ae^{-2t} + Be^{-t}.$$

Nghiệm riêng là  $y = \frac{1}{2}$ , do đó nghiệm tổng quát của phương trình vi phân đã cho là

$$y = Ae^{-2t} + Be^{-t} + \frac{1}{2}.$$

Các điều kiện ban đầu dẫn đến

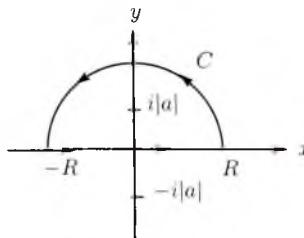
$$A + B + \frac{1}{2} = 0, \quad -2A - B = 0,$$

Suy ra

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = -1.$$

Như vậy

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{-2t} - e^{-t} + \frac{1}{2}.$$



Hình 3.14

(b) Xét

$$\oint_C \frac{dz}{(z^2 + a^2)^2},$$

ở đây  $C$  là đường bán nguyệt chỉ ra trên hình 3.14.

Do

$$(z^2 + a^2)^{-2} = (z - i|a|)^{-2}(z + i|a|)^{-2},$$

nên tích phân có một cực bậc 2 nằm trong  $C$  tại  $z_1 = i|a|$ . Thặng dư tại  $z_1$  là

$$\lim_{z \rightarrow i|a|} \frac{1}{(2-1)!} \frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}} \left[ \frac{(z - i|a|)^2}{(z^2 + a^2)^2} \right] = \frac{-2}{(z + i|a|)^3} \Big|_{z=i|a|} = \frac{1}{4i|a|^3}.$$

Do đó

$$\oint_C \frac{dz}{(z^2 + a^2)^2} = \frac{2\pi i}{4i|a|^3} = \frac{\pi}{2|a|^3}.$$

Mặt khác,

$$\oint_C = \int_{-R}^R \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} + \int_{\Gamma} \frac{dz}{(z^2 + a^2)^2} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} + 0$$

khi  $R \rightarrow \infty$ . Vì vậy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{\pi}{2|a|^3}.$$

(c) Phương trình đặc trưng

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & -i \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ i & 0 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 2)(\lambda^2 - 2) = 0$$

có các nghiệm

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = \sqrt{2}, \quad \lambda_3 = -\sqrt{2}.$$

Đây là các trị riêng của ma trận  $M$ .

### 3056

Xét một hệ tuyến tính một chiều có độ dịch chuyển  $y(t)$  thoả mãn phương trình

$$c_1 \ddot{y} + c_2 \dot{y} + c_3 y = F(t),$$

ở đây  $c_1, c_2, c_3$  không phụ thuộc thời gian nhưng chưa biết trước. Tại thời điểm  $t = 0$ , hệ ở trạng thái nghỉ tại  $y = 0$ .

Cho phản hồi từ hệ khi chịu lực tác dụng không đổi có biên độ  $F_0$  và trong khoảng thời gian từ  $t = 0$  đến  $t = 10T$  là  $y_0(t)$ .

Hãy tìm với các dữ liệu đã cho,

(a) độ dịch chuyển tại  $t = 50T$  khi chịu lực  $F_0/5$  tác dụng trong khoảng  $t = 0$  và  $t = 50T$ ,

(b) độ dịch chuyển tại  $t = 6T$  khi chịu lực  $F_0$  tác dụng trong khoảng  $t = 0$  và  $t = T$ .

(c) Hãy giờ hãy xét một lực bất kỳ  $F(t)$  tác dụng trong khoảng  $t = 0$  và  $t = T$ , ở đây  $F(0) = F(T) = 0$ . Chứng tỏ rằng độ dịch chuyển tại  $t = 6T$  thực tế có thể xác định được và nó có thể được viết dưới dạng

$$y(6T) = A \int_0^T y_0(6T - t) \dot{F}(t) dt.$$

ở đây  $A$  là một hằng số.

**Lời giải:**

(a) Ta đã có

$$c_1\ddot{y}_0(t) + c_2\dot{y}_0(t) + c_3y_0(t) = F(0)$$

hay là

$$c_1 \frac{\ddot{y}_0(t)}{5} + c_2 \frac{\dot{y}_0(t)}{5} + c_3 \frac{y_0(t)}{5} = \frac{F_0}{5} \quad \text{với } 0 \leq t \leq 10T$$

và

$$c_1\ddot{y}_0(t) + c_2\dot{y}_0(t) + c_3y_0(t) = 0 \quad \text{với } 10T < t,$$

và ta phải tìm  $y(t)$  thỏa mãn

$$\begin{cases} c_1\ddot{y}(t) + c_2\dot{y}(t) + c_3y(t) = \frac{F_0}{5}, & 0 \leq t \leq 50T, \\ c_1\ddot{y}(t) + c_2\dot{y}(t) + c_3y(t) = 0, & 50T < t. \end{cases} \quad (1)$$

Vì hệ là tuyến tính nên phản hồi  $y(t)$  của nó đối với một lực không đổi  $\frac{F_0}{5}$  tác dụng trong khoảng 0–50T có thể được xem là chồng chập tuyến tính của phản hồi đối với năm lực hằng số, mỗi lực có độ lớn bằng  $\frac{F_0}{5}$  tác dụng trong các khoảng kế tiếp nhau 0–10T, 10T–20T, 20T–30T, 30T–40T, 40T–50T. Như vậy

$$\begin{cases} c_1 \frac{\ddot{y}_0(t)}{5} + c_2 \frac{\dot{y}_0(t)}{5} + c_3 \frac{y_0(t)}{5} = \frac{F_0}{5}, & 0 \leq t \leq 10T, \\ c_1 \frac{\ddot{y}_0(t)}{5} + c_2 \frac{\dot{y}_0(t)}{5} + c_3 \frac{y_0(t)}{5} = 0, & t > 10T; \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} c_1 \frac{\ddot{y}_0(t-10T)}{5} + c_2 \frac{\dot{y}_0(t-10T)}{5} + c_3 \frac{y_0(t-10T)}{5} = \frac{F_0}{5}, & 10T \leq t \leq 20T, \\ c_1 \frac{\ddot{y}_0(t-10T)}{5} + c_2 \frac{\dot{y}_0(t-10T)}{5} + c_3 \frac{y_0(t-10T)}{5} = 0, & t > 20T; \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} c_1 \frac{\ddot{y}_0(t-20T)}{5} + c_2 \frac{\dot{y}_0(t-20T)}{5} + c_3 \frac{y_0(t-20T)}{5} = \frac{F_0}{5}, & 20T \leq t \leq 30T, \\ c_1 \frac{\ddot{y}_0(t-20T)}{5} + c_2 \frac{\dot{y}_0(t-20T)}{5} + c_3 \frac{y_0(t-20T)}{5} = 0, & t > 30T; \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} c_1 \frac{\ddot{y}_0(t-30T)}{5} + c_2 \frac{\dot{y}_0(t-30T)}{5} + c_3 \frac{y_0(t-30T)}{5} = \frac{F_0}{5}, & 30T \leq t \leq 40T, \\ c_1 \frac{\ddot{y}_0(t-30T)}{5} + c_2 \frac{\dot{y}_0(t-30T)}{5} + c_3 \frac{y_0(t-30T)}{5} = 0, & t > 40T; \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} c_1 \frac{\ddot{y}_0(t-40T)}{5} + c_2 \frac{\dot{y}_0(t-40T)}{5} + c_3 \frac{y_0(t-40T)}{5} = \frac{F_0}{5}, & 40T \leq t \leq 50T, \\ c_1 \frac{\ddot{y}_0(t-40T)}{5} + c_2 \frac{\dot{y}_0(t-40T)}{5} + c_3 \frac{y_0(t-40T)}{5} = 0, & t > 50T. \end{cases} \quad (6)$$

Kết hợp (2)-(6) ta có (1) với

$$\begin{aligned} y(t) = & \frac{1}{5}[y_0(t) + y_0(t-10T)\theta(t-10T) + y_0(t-20T)\theta(t-20T) \\ & + y_0(t-30T)\theta(t-30T) + y_0(t-40T)\theta(t-40T)], \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

ở đây

$$\theta(t - t_0) = \begin{cases} 1, & t \geq t_0, \\ 0, & t < t_0. \end{cases}$$

Độ dịch chuyển cần tìm là  $y(50T)$  được tính bởi công thức trên với  $t = 50T$ .

(b) Xét hiệu ứng của  $F_0$  tác dụng trong khoảng  $0 \leq t \leq 10T$  và hiệu ứng của  $F_0$  tác dụng trong khoảng  $T \leq t \leq 11T$ , ta có

$$\begin{cases} c_1\ddot{y}_0(t) + c_2\dot{y}_0(t) + c_3y_0(t) = F_0, & 0 \leq t \leq 10T, \\ c_1\ddot{y}_0(t) + c_2\dot{y}_0(t) + c_3y_0(t) = 0, & t > 10T. \end{cases}$$

và

$$\begin{cases} c_1\ddot{y}_0(t - T) + c_2\dot{y}_0(t - T) + c_3y_0(t - T) = F_0, & T \leq t \leq 11T, \\ c_1\ddot{y}_0(t - T) + c_2\dot{y}_0(t - T) + c_3y_0(t - T) = 0, & t > 11T. \end{cases}$$

Trừ các phương trình trên, ta được

$$\begin{aligned} &c_1[\ddot{y}_0(t) - \ddot{y}_0(t - T)\theta(t - T)] + c_2[\dot{y}_0(t) - \dot{y}_0(t - T)\theta(t - T)] \\ &+ c_3[y_0(t) - y_0(t - T)\theta(t - T)] = \begin{cases} F_0, & 0 \leq t \leq T, \\ 0, & T < t \leq 10T, \\ -F_0, & 10T < t \leq 11T, \\ 0, & t > 11T. \end{cases} \end{aligned}$$

Do một chuyển động ở thời điểm trước không bị ảnh hưởng bởi các điều kiện áp dụng cho thời điểm sau, nên hai phương trình đều thuộc hệ phương trình trên là đúng dẫn trong khoảng  $0 \leq t \leq 10T$ . Như vậy

$$y(t) = y_0(t) - y_0(t - T), \quad 0 \leq t \leq 10T.$$

và do đó

$$y(6T) = y_0(6T) - y_0(5T).$$

(c) Theo cách tương tự, xét các hiệu ứng của  $F_0$  tác dụng trong khoảng  $0 \leq t \leq 10T$  và trong khoảng  $T \leq t \leq (10 + \tau)T$ , ở đây  $\tau > 0$ , ta được

$$(1) c_1\ddot{y}_0(t) + c_2\dot{y}_0(t) + c_3y_0(t) = F_0, \quad 0 \leq t \leq 10T,$$

$$(2) c_1\ddot{y}_0(t - \tau) + c_2\dot{y}_0(t - \tau) + c_3y_0(t - \tau) = F_0, \quad \tau \leq t \leq 10 + \tau T.$$

Từ (1)-(2), ta có

$$\begin{aligned} c_1 \frac{d^2}{dt^2} [y_0(t) - y_0(t-\tau)\theta(t-\tau)] + c_2 \frac{d}{dt} [y_0(t) - y_0(t-\tau)\theta(t-\tau)] \\ + c_3 [y_0(t) - y_0(t-\tau)\theta(t-\tau)] = \begin{cases} F_0, & 0 \leq t \leq \tau, \\ 0, & \tau < t \leq 10T. \end{cases} \end{aligned}$$

Sử dụng định nghĩa về đạo hàm theo thời gian

$$\begin{aligned} y_0(t) - y_0(t-\tau)\theta(t-\tau) &= \begin{cases} \dot{y}_0(t)t, & 0 \leq t \leq \tau, \\ \dot{y}_0(t)\tau, & \tau < t. \end{cases} \\ &\approx \dot{y}_0(t)\tau \quad \text{với } \tau \rightarrow 0, \end{aligned}$$

Ta có thể viết lại phương trình trên như sau

$$c_1 \frac{d^2}{dt^2} \dot{y}_0(t) + c_2 \frac{d}{dt} \dot{y}_0(t) + c_3 \dot{y}_0(t) = \begin{cases} \frac{F}{\tau}, & 0 \leq t \leq \tau \\ 0, & t > \tau. \end{cases}$$

Với  $\tau \rightarrow 0$ , phương trình này trở thành

$$c_1 \frac{d^2}{dt^2} \dot{y}_0(t) + c_2 \frac{d}{dt} \dot{y}_0(t) + c_3 \dot{y}_0(t) = B\delta(t), \quad 0 \leq t \leq 10T.$$

ở đây  $B$  là một hằng số. Thay  $t$  bởi  $t-\tau$ , nhân hai vế với  $F(\tau)d\tau$  và lấy tích phân theo  $\tau$  trong khoảng từ 0 đến  $T$ , ta thu được

$$\begin{aligned} c_1 \frac{d^2}{dt^2} \left[ \int_0^T \dot{y}_0(t-\tau) F(\tau) d\tau \right] + c_2 \frac{d}{dt} \left[ \int_0^T \dot{y}_0(t-\tau) F(\tau) d\tau \right] \\ + c_3 \int_0^T \dot{y}_0(t-\tau) F(\tau) d\tau = B \int_0^T \delta(t-\tau) F(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Ta cần tìm  $y(t)$  thỏa mãn

$$\begin{aligned} c_1 \ddot{y}(t) + c_2 \dot{y}(t) + c_3 y(t) &= \begin{cases} F(t), & 0 \leq t \leq T, \\ 0, & t > T. \end{cases} \\ &= \int_0^T \delta(t-\tau) F(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

So sánh hai phương trình vi phân trên ta có với  $t \leq 10T$

$$\begin{aligned} y(t) &= B^{-1} \int_0^T \dot{y}_0(t-\tau) F(\tau) d\tau \\ &= -B^{-1} F(\tau) y_0(t-\tau)|_0^T + B^{-1} \int_0^T y_0(t-\tau) F(\tau) d\tau \\ &= A \int_0^T y_0(t-\tau) \bar{F}(\tau) d\tau \end{aligned}$$

khi  $F(0) = F(T) = 0$ . Chú ý rằng hằng số  $B^{-1}$  đã được thay thế bởi  $A$ . Như vậy

$$y(6T) = A \int_0^T y_0(6T-\tau) \bar{F}(\tau) d\tau .$$

*Chịu trách nhiệm xuất bản:*  
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRÂN ÁI  
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

---

*Tổ chức bàn thảo và chịu trách nhiệm nội dung:*  
Giám đốc Công ty Sách dịch và Tủ điện Giáo dục NGUYỄN NHƯ Ý

*Biên tập nội dung:*  
PHẠM VĂN THIẾU

*Trình bày bìa:*  
HOÀNG ANH TUÂN

*Sửa bản in:*  
ĐỖ THỊ TÔ NGA

*Ché bản:*  
NGUYỄN HỮU ĐIỀN

---

**BÀI TẬP VÀ LỜI GIẢI CHÁT RÁN, THUYẾT TƯƠNG ĐỐI  
VÀ CÁC VẤN ĐỀ LIÊN QUAN**  
Mã số: 8Z077K8

In 1.000 bản (QĐ 1696/QĐ-GD) khổ 16 x 24. Tại CTCP In Anh Việt.

Địa chỉ: Số 74, ngõ 310, đường Nghi Tàm, Hà Nội.

Số ĐKKHXB: 234-2008/CXB/109-492/GD.

In xong và nộp lưu chiểu tháng 09 năm 2008.