NGUYỄN ĐÌNH TRÍ (Chủ biên)
TẠ VĂN ĐĨNH - NGUYỄN HỒ QUỲNH

Bài tập
TOÁN CAO CẤP

Tập ba

Phép tính giải tích nhiều biến số

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

NGUYỄN ĐÌNH TRÍ (chủ biên)
TẠ VĂN ĐĨNH - NGUYỄN HỒ QUỲNH

Bài tập TOÁN CAO CẤP

TẬP BA

PHÉP TÍNH GIẢI TÍCH NHIỀU BIẾN SỐ

(Tái bản lần thứ tám)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

LỜI NÓI ĐẦU

Quyển bài tập này trình bày lời giải của các bài tập đã ra trong quyển Toán học cao cấp tập ba, phép tính giải tích nhiều biến số. Một số bài tập khác đã được bổ sung vào.

Như chúng ta đã biết, trong học toán, giữa việc hiểu sâu sắc lý thuyết và làm thành thạo các bài tập có một mối quan hệ mật thiết. Chính trong quá trình học lý thuyết rồi làm các bài tập, từ những bài tập vận dụng đơn giản lý thuyết đến những bài tập ngày càng khó hơn, chúng ta dần dần hiểu được các khái niệm toán học mới, nắm được các phương pháp cơ bản, nhớ được các kết quả cơ bản.

Đối với các bạn sinh viên dùng quyển sách này, chúng tôi khuyên các bạn hãy tự mình giải các bài tập đã ra trong giáo trình và chỉ xem lời giải trong quyển sách này để kiểm tra lại, tự mình đánh giá kết quả học tập của mình. Mong rằng quyển sách này giúp các bạn học tốt hơn và tìm được những lời giải hay hơn.

Quyển sách này viết lần đầu nên không tránh khỏi các sai sót. Chúng tôi mong nhận được ý kiến đóng góp của độc giả. Xin chân thành cảm ơn.

CÁC TÁC GIẢ

Chương I
HÀM SỐ NHIỀU BIẾN SỐ

A – ĐỀ BÀI

1. Tìm miền xác định của các hàm số sau

a) $f(x, y) = \ln xy$; b) $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x + y}} + \dfrac{1}{\sqrt{x - y}}$

c) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$;

d) $f(x, y) = \arcsin \dfrac{y - 1}{x}$; e) $f(x, y) = \sqrt{x \ln y}$

f) $f(x, y) = \dfrac{1}{y - x^2}$; g) $f(x, y) = \ln x + \ln \sin y$;

h) $f(x, y) = \dfrac{x}{\cos^2 y}$; i) $f(x, y) = \sqrt{y - x} \ln (y + x)$

2. Tìm giới hạn khi $(x, y) \to (0, 0)$ của các hàm số sau

a) $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$; b) $f(x, y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}$;

c) $f(x, y) = x \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$; d) $f(x, y) = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$;

e) $f(x, y) = \dfrac{1 + x^2 + y^2}{y^2} (1 - \cos y)$; f) $f(x, y) = \dfrac{x^\alpha y^\beta}{x^2 - xy + y^2}$,

$(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$

g) $f(x, y) = \dfrac{\sin x - \sin y}{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} y}$; h) $f(x, y) = \dfrac{\sin x - \operatorname{sh} y}{\operatorname{sh} x - \sin y}$.

3. Tính các đạo hàm riêng cấp một của các hàm số sau

a) $f(x, y) = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$; b) $f(x, y) = \ln (x + \sqrt{(x^2 + y^2)})$;

c) $f(x, y) = y^2 \sin \frac{x}{y}$; d) $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$

e) $f(x, y) = \arcsin (x - 2y)$; f) $f(x, y) = \ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$

g) $f(x, y) = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$; h) $f(x, y) = e^{xy} \cos x \sin y$

i) $f(x, y) = \ln (x + \ln y)$; j) $f(x, y) = x^{y^3}$ $(x > 0)$

k) $f(x, y, z) = x^{y^z}$ $(x > 0, y > 0)$; l) $f(x, y, z) = e^{xyz} \sin \frac{y}{z}$

m) $f(x, y, z) = e^{\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}}$; n) $f(x, y, z) = z \sin \frac{y}{x + z}$

4. Khảo sát sự liên tục của các hàm số sau và của các đạo hàm riêng cấp một của chúng

a)
$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right) & \text{nếu } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{nếu } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

b)
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{nếu } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{nếu } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

c)
$$f(x, y) = \begin{cases} x \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right)^2 & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

d)
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \sin y - y \sin x}{x^2 + y^2} & \text{nếu } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{nếu } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

5. Tính đạo hàm của các hàm số hợp sau

a) $z = e^{u^2 - 2v^2}$, $u = \cos x$, $v = \sqrt{x^2 + y^2}$;

b) $z = \ln (u^2 + v^2)$, $u = xy$, $v = \frac{x}{y}$;

c) $z = x^2 \ln y$, $x = \frac{u}{v}$, $y = 3u - 2v$;

d) $z = ue^{v} + ve^{-u}$, $\quad u = e^{x}, v = yx^{2}$;

e) $z = xe^{\frac{x}{y}}$, $\quad x = \cos t$, $\quad y = e^{2t}$

f) $z = x\sqrt{1 + y^{2}}$, $\quad x = te^{2t}, y = e^{-t}$;

6. Chứng minh rằng

a) Hàm số $z = y\ln(x^{2} - y^{2})$ thỏa mãn phương trình

$$\frac{1}{x}z'_{x} + \frac{1}{y}z'_{y} = \frac{z}{y^{2}}$$

b) Hàm số $z = y^{\frac{y}{x}}\sin\frac{y}{x}$ thỏa mãn phương trình

$$x^{2}z'_{x} + xyz'_{y} = yz$$

7. Tìm hàm số $z = z(x, y)$ thỏa mãn phương trình

a) $2z'_{x} - z'_{y} = 0$, bằng phép đổi biến số

$$u = x + y, v = x + 2y$$

b) $xz'_{x} - yz'_{y} = x^{2} - y^{2}$, bằng phép đổi biến số

$$u = x + y, v = xy$$

8. Tìm vi phân toàn phần của các hàm số

a) $z = \sin(x^{2} + y^{2})$; $\qquad$ b) $z = e^{x}(\cos y + x\sin y)$

c) $z = \ln\mathrm{tg}\frac{y}{x}$; $\qquad$ d) $z = \mathrm{arctg}\frac{x + y}{x - y}$

e) $z = e^{\frac{x}{y}} + e^{-\frac{y}{x}}$; $\qquad$ f) $z = \int_{x}^{y} e^{t^{2}}dt$

g) $z = \int_{xy}^{\frac{x}{y}} t^{2}\cos 2t\,dt$; $\qquad$ h) $u = y^{2}\sqrt{x^{3}} - 3y\sqrt[3]{z^{2}}$

i) $u = xe^{y} + ye^{z} + ze^{x}$; $\qquad$ j) $u = x^{y^{2}z}$ $(x > 0)$

9. Dùng vi phân, tính gần đúng các số sau

a) $\sqrt[3]{(1,02)^{2} + (0,05)^{2}}$; $\qquad$ b) $\ln(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1)$

1 c) $\sqrt{9 . (1,95)^{2} + (8,1)^{2}}$; $\qquad$ d) $\sqrt{\sin^{2} 1,55 + 8 . e^{0,015}}$

e) $\operatorname{arctg} \dfrac{1{,}02}{0{,}95}$; f) $(\sqrt{99} - \sqrt[3]{124})^3$

10. Tính đạo hàm của các hàm số ẩn xác định bởi các phương trình sau:

a) $x^3y - y^3x = a^4$, tính y' ;

b) $xe^y + ye^x - e^{xy} = 0$, tính y' ;

c) $\operatorname{arctg} \dfrac{x + y}{a} = \dfrac{y}{a}$, tính y' ;

d) $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$, tính y', y'' ;

e) $y^5 + 3x^2y^2 + 5x^4 = 12$, tính y' ;

f) $2y^2 + \sqrt[3]{xy} = 3x^2 + 17$, tính y' ;

g) $3\sin \dfrac{\sqrt{x}}{y} - 2\cos \dfrac{\sqrt{x}}{y} + 1 = 0$, tính y' ;

h) $x + y + z = e^z$, tính z'_x, z'_y ;

i) $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$, tính z'_x, z'_y ;

j) $xy^2z^3 + x^3y^2z = x + y + z$, tính z'_x , z'_y ;

k) $xe^y + yz + ze^x = 0$, tính z'_x, z'_y ;

l) $xyz = \cos (x + y + z)$, tính z'_x , z'_y ;

m) $y^2ze^{x+y} - \sin(xyz) = 0$, tính z'_x, z'_y ;

n) $\arcsin \sqrt[3]{\dfrac{x^3 + y^3 - 3x^2y}{x^3 + y^3 - 3xy^2}} = a$, tính y' ;

11. a) $z = f(x, y)$ là hàm số ẩn xác định bởi hệ thức

$$z - xe^{\frac{z}{y}} = 0$$

Tính gần đúng $f(0{,}02; 0{,}99)$

b) Cho hàm số

$$u = \frac{x + z}{y + z},$$

trong đó z là hàm số ẩn xác định bởi hệ thức

$$ze^z = xe^x + ye^y$$

Tính u'_x, u'_y

c) $z = z(x, y)$ là hàm số ẩn xác định bởi hệ thức

$$z^2 + \frac{2}{x} = \sqrt{y^2 - z^2}$$

Chứng minh rằng

$$x^2z'_x + \frac{1}{y}z'_y = \frac{1}{z}$$

d) $F(u, v)$ là một hàm số khả vi $z = z(x, y)$ là hàm số ẩn xác định bởi hệ thức

$$F(cx - az, cy - bz) = 0 \qquad (c \neq 0)$$

Chứng minh rằng

$$az'_x + bz'_y = c$$

e) $z = z(x, y)$ là hàm số ẩn xác định bởi hệ thức

$$x^2 + y^2 + z^2 = yf\left(\frac{z}{y}\right),$$

Trong đó f là một hàm số khả vi. Chứng minh rằng

$$(x^2 - y^2 - z^2)\, z'_x + 2xyz'_y = 2xz$$

f) Tính đạo hàm của các hàm số ẩn $y(x)$, $z(x)$ xác định bởi hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

1 g) $y = y(x)$ là hàm số ẩn xác định bởi hệ thức

$$x^3 + y^3 - 3xy - 1 = 0.$$

Tìm khai triển hữu hạn đến cấp 3 của y(x) ở lân cận của điểm $x = 0$.

h) Tìm khai triển hữu hạn đến cấp 3 ở lân cận điểm $x = 0$ của hàm số $y = y(x)$ xác định bởi hệ thức

$$\operatorname{arctg}(xy) + 1 = e^{x+y}.$$

12. Tính các đạo hàm riêng cấp hai của các hàm số sau

a) $f(x,y) = x^2y + x\sqrt{y}$; b) $f(x,y) = \sin(x+y) + \cos(x-y)$

c) $f(x,y) = \dfrac{1}{3}\sqrt{(x^2+y^2)^3}$; d) $f(x, y) = x^2\ln(x + y)$

e) $f(x, y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$; f) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$

g) $f(x, y) = x^{\ln y}$; h) $f(x, y) = \cos(ax + e^y)$

13. Tính $f''_{xy}(0, 0)$ và $f''_{yx}(0, 0)$ nếu

a)
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x+y} & \text{nếu } x \neq -y \\ 0 & \text{nếu } x = -y \end{cases}$$

b)
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - y^3x}{x^2+y^2} & \text{nếu } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{nếu } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

14. a) Tìm hàm số u(x, y) thỏa mãn phương trình $u''_{xy} = 0$

b) Tìm hàm số u(x, y) thỏa mãn phương trình $u''_{x^2} = 0$

c) Tìm hàm số u(x, y, z) thỏa mãn phương trình $u'''_{xyz} = 0$

d) Tìm hàm số u(x, y), biết rằng

$u''_{xx} = 12x^2y + 2$, $u'_y = x^4 - 30xy^5$, $u(0, 0) = 1$, $u(1, 1) = -2$

1 e) Tìm hàm số u(x, y), biết rằng

$$u'_x = x^2 - 2xy^2 + 3,\ u'_y = y^2 - 2x^2y + 3$$

f) Tìm hàm số u(x, y) biết

$$u'_x = \frac{(3x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}{x^2y},\ u'_y = \frac{(3y^2 - x^2)(x^2 + y^2)}{xy^2}$$

15. a) Chứng minh rằng hàm số $u(x, y) = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ thỏa mãn phương trình

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

(phương trình Laplace trong không gian $\mathbf{R}^2$)

b) Chứng minh rằng hàm số $u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ thỏa mãn phương trình

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

(phương trình Laplace trong $\mathbf{R}^3$).

c) Cùng câu hỏi như câu b) với hàm số

$$u(x, y, z) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \operatorname{arctg}\frac{z}{y} + \operatorname{arctg}\frac{x}{z}$$

d) Tìm hàm số u(x, y, z) có dạng u = f(r), trong đó $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, sao cho

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

16. Chứng minh rằng hàm số $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$, trong đó f là một hàm số có đạo hàm cấp hai liên tục, thỏa mãn phương trình

$$z''_{x^2}\, z''_{y^2} = (z''_{xy})^2.$$

1 **17.** a) Chứng minh rằng hàm số

$$z = f\left(\frac{y}{x}\right) + xg\left(\frac{y}{x}\right)$$

trong đó f, g là hai hàm số khả vi liên tục hai lần, thỏa mãn phương trình

$$x^2 z''_{x^2} + 2xyz''_{xy} + y^2 z''_{y^2} = 0 \;; \qquad (*)$$

b) Tìm hàm số $z = z(x, y)$ thỏa mãn phương trình (*) bằng cách đổi biến số $u = x$, $v = \dfrac{y}{x}$.

18. Tìm hàm số $z = z(x, y)$

a) Thỏa mãn phương trình

$$z''_{x^2} - a^2 z''_{y^2} = 0$$

bằng cách đổi biến số $u = y + ax$, $v = y - ax$;

b) Thỏa mãn phương trình

$$x^2 z''_{x^2} - y^2 z''_{y^2} = xz'_x - yz'_y$$

bằng cách đổi biến số $u = xy$, $v = \dfrac{y}{x}$.

19. a) Tính đạo hàm của hàm số $u = xy^2z^3$ tại điểm $M_0(1, 2, -1)$ theo hướng xác định bởi vectơ $\overrightarrow{M_0M_1}$ với $M_1(0, 4, -3)$;

b) Tính đạo hàm của hàm số $z = x^2 - xy + y^2$ tại điểm M(1, 1) theo hướng của vectơ $\vec{v} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$;

c) Tính đạo hàm của hàm số $z = \ln(x^2 + y^2)$ tại điểm M(3, 4) theo hướng của vectơ $\overrightarrow{\text{grad}z}$;

d) Tính đạo hàm của hàm số $z = \arcsin\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ tại điểm $M_0(1, 1, 1)$ theo hướng của vectơ $\overrightarrow{M_0M_1}$ với $M_1(3, 2, 3)$;

e) Tính đạo hàm của hàm số $u = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}$ theo hướng của bán kính vectơ $\vec{r}$ của điểm M(x, y, z). Với điều kiện nào đối
1 với các số dương a, b, c đạo hàm ấy bằng $|\overrightarrow{\text{grad}u}|$?

f) Tính đạo hàm của hàm số

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

theo hướng của vectơ $\vec{l}$ có các cosin chỉ hướng là ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$). Khi nào đạo hàm ấy triệt tiêu?

20. a) Cho hàm số $u = x^2y^2z^2$. Tính $\overrightarrow{\text{grad}}u$ và $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}$ tại $M_o(1, -1, 3)$ biết rằng $\vec{l}$ được xác định bởi vectơ $\overrightarrow{M_oM_1}$ với $M_1(0, 1, 1)$.

b) Cho hàm số $u = x\sin yz$. Xác định $\overrightarrow{\text{grad}}u$ và $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}$ tại $M_o(1, 3, 0)$ biết rằng $\vec{l}$ được xác định bởi vectơ $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$

c) Xét hàm số $z = xe^y$ tại điểm $M_o(2, 0)$. Tính vận tốc biến thiên của hàm số đó theo hướng từ M_o đến $M_1(5, 4)$. Theo hướng nào thì vận tốc biến thiên của z có giá trị tuyệt đối lớn nhất. Tính giá trị ấy.

d) Tìm độ lớn và hướng của $\overrightarrow{\text{grad}}u$, $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ tại điểm $M_o(1, 2, 1)$. Tại những điểm nào thì $\overrightarrow{\text{grad}}u$ vuông góc với trục Oz, tại những điểm nào thì $\overrightarrow{\text{grad}}u$ triệt tiêu.

21. Chứng minh rằng

a) Nếu u_1, u_2 là hai hàm số khả vi, C_1, C_2 là hai hằng số thì

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,(C_1u_1 + C_2u_2) = C_1\overrightarrow{\text{grad}}u_1 + C_2\overrightarrow{\text{grad}}u_2$$

b) Nếu u_1, u_2 là hai hàm số khả vi thì

$$\overrightarrow{\text{grad}}(u_1.u_2) = u_1.\overrightarrow{\text{grad}}u_2 + u_2\overrightarrow{\text{grad}}u_1$$

c) Nếu f, u là những hàm số khả vi thì

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f(u)) = f'(u).\overrightarrow{\text{grad}}u$$

22. a) Khai triển hàm số $f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$ theo công thức Taylor ở lân cận điểm $M_o(1, -2)$.

b) Khai triển hàm số $f(x, y) = x^y$ $(x > 0)$ theo công thức Taylor ở lân cận điểm $M_o(1, 1)$ đến các số hạng bậc 3.

1

23. Tìm cực trị của các hàm số

a) $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$;

b) $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$

c) $z = x + y - xe^y$;

d) $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$

e) $z = xy\ln(x^2 + y^2)$;

f) $z = xy\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, a > 0, b > 0$

g) $z = (x - y)^2 + (x + y)^3$;

h) $z = x^2(x + 1) + y^3$

i) $z = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$;

j) $z = x^2y^3(3x + 2y + 1)$.

24. Tính giá trị lớn nhất và bé nhất của hàm số

a) $z = x^2 - y^2$ trong miền D xác định bởi $x^2 + y^2 \leq 4$;

b) $z = x^2 + y^2$ trong miền D xác định bởi $(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 \leq 9$

c) $z = x^2y(4 - x - y)$ trong miền đóng D giới hạn bởi các đường thẳng $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$.

d) $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ trong miền đóng D giới hạn bởi các đường thẳng $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 2$.

e) $z = e^{-(x^2+y^2)}(2x^2 + 3y^2)$ trong miền D xác định bởi $x^2 + y^2 \leq 1$

f) $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ trong miền đóng D giới hạn bởi các đường thẳng $x = 0, x = \frac{\pi}{2}, y = 0, y = \frac{\pi}{2}$

g) $z = (a^2 - c^2)x^2 + (b^2 - c^2)y^2 + c^2 - [(a-c)x^2 + (b-c)y^2 + c]^2$,

với $a > b > c$, trong miền D xác định bởi $x^2 + y^2 \leq 1$.

25. Tìm cực trị của hàm số

a) $z = xy$ với điều kiện $x + y = 1$

1 b) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ với điều kiện $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$

c) $u = x^2 + y^2 + z^2$ với điều kiện $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, $a > b > c$

d) $u = x + y + z$ với điều kiện $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1$

26. Cho hình cầu bán kính R. Hình hộp chữ nhật nào nội tiếp trong hình cầu ấy có thể tích lớn nhất.

B - LỜI GIẢI

1. a) Hàm số $f(x, y) = \ln xy$ xác định khi $xy > 0$, vậy miền xác định của nó là tập hợp

$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x > 0, y > 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x < 0, y < 0\}$

b) Hàm số $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x + y}} + \dfrac{1}{\sqrt{x - y}}$ xác định khi $x + y > 0$ và $x - y > 0$. Miền xác định của nó là tập hợp.

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x > 0, -x < y < x\}$$

c) Hàm số $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ xác định khi $4 - x^2 - y^2 \geq 0$ và $x^2 + y^2 - 1 \geq 0$. Miền xác định của nó là vành khuyên đóng giới hạn bởi các đường tròn $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$.

d) Hàm số $f(x, y) = \arcsin\dfrac{y - 1}{x}$ xác định khi $-1 \leq \dfrac{y - 1}{x} \leq 1$.

Miền xác định của nó là tập hợp

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x > 0, 1 - x \leq y \leq 1 + x\} \cup$$
$$\cup \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x < 0, 1 + x \leq y \leq 1 - x\}$$

e) Hàm số $f(x, y) = \sqrt{x\ln y}$ xác định khi $x\ln y \geq 0$. Miền xác định
1 của nó là tập hợp

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \leq 0,\ 0 < y \leq 1\}$$

f) Hàm số $f(x, y) = \dfrac{1}{y - x^2}$ xác định khi $y - x^2 \neq 0$. Miền xác định của nó là tập hợp

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y \neq x^2\}.$$

g) Hàm số $f(x, y) = \ln x + \ln \sin y$ xác định khi $x > 0$ và $\sin y > 0$. Miền xác định của nó là tập hợp

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x > 0,\ 2n\pi < y < (2n + 1)\pi,\ n \in \mathbf{Z}\}.$$

h) Hàm số $f(x, y) = \dfrac{x}{\cos^2 y}$ xác định khi $\cos y \neq 0$. Miền xác định của nó là tập hợp

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y \neq (2n + 1)\frac{\pi}{2},\ n \in \mathbf{Z}\}.$$

i) Hàm số $f(x, y) = \sqrt{y - x}\, \ln(y + x)$ xác định khi $y - x \geq 0$, và $y + x > 0$. Miền xác định của nó là tập hợp

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y > 0,\ -y < x \leq y\}.$$

2. a) $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ xác định với $\forall\ (x, y) \neq (0, 0)$.

Cho $x = 0$, ta có $f(0, y) = -1$, $\forall y \neq 0$. Vậy $f(x, y) \to -1$ dọc theo trục Oy.

Cho $y = 0$, ta có $f(x, 0) = 1$, $\forall x \neq 0$. Vậy $f(x, y) \to 1$ dọc theo trục Ox.

Hàm số f dần tới hai giới hạn khác nhau theo hai phương khác nhau, vậy không tồn tại giới hạn của f khi $(x, y) \to (0, 0)$.

b) $f(x, y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}$ xác định $\forall\ (x, y) \neq (0, 0)$.

Cho $y = kx$, k là hằng số, ta có

1

$$f(x, y) = f(x, kx) = \frac{k^2x^3}{x^2 + k^4x^4} = \frac{k^2x}{1 + k^4x^2} \qquad \forall x \neq 0$$

Do đó $f(x, y) \to 0$ khi $(x, y) \to (0, 0)$ theo mọi đường thẳng $y = kx$. Điều đó không có nghĩa là giới hạn phải tìm bằng 0. Thật vậy, cho $x = y^2$, ta có

$$f(x, y) = f(y^2, y) = \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2} \qquad \forall y \neq 0$$

Do đó $f(x, y) \to \frac{1}{2}$ khi $(x, y) \to (0, 0)$ dọc theo đường parabôn $x = y^2$. Vậy không tồn tại giới hạn của f khi $(x, y) \to (0, 0)$.

c) $f(x, y) = x\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ không xác định khi $x = 0$. Ta có

$|f(x, y)| = |x\operatorname{arctg}\frac{y}{x}| \leq |x| . |\operatorname{arctg}\frac{y}{x}| \leq \frac{\pi}{2}|x|$

Do đó

$$\lim_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y) = 0 .$$

d) $f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ xác định $\forall(x, y) \neq (0, 0)$. Ta có

$|x^3 + y^3| = |(x + y)(x^2 - xy + y^2)| \leq |x + y| [x^2 + y^2 + |xy|]$

Nhưng $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ $\forall(x, y) \in \mathbf{R}^2$, do đó

$$|x^3 + y^3| \leq |x + y| . \frac{3}{2}(x^2 + y^2)$$

Suy ra

$$|f(x, y)| \leq \frac{3}{2}|x + y|$$

Vậy
$$\lim_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y) = 0 .$$

e) $f(x, y) = \frac{1 + x^2 + y^2}{y^2}(1 - \cos y)$ xác định $\forall y \neq 0$. Theo công thức khai triển hữu hạn của hàm số cosx, ta có

$$1 - \cos y = \frac{y^2}{2} + 0\,(y^2) \text{ khi } y \to 0$$

Do đó

$$f(x, y) = (1 + x^2 + y^2)\left(\frac{1}{2} + 0\,(1)\right) \text{ khi } y \to 0$$

Vậy

$$\lim_{(x,\, y) \to (0,\, 0)} f(x, y) = \frac{1}{2}$$

f) $f(x, y) = \dfrac{x^{\alpha} y^{\beta}}{x^2 - xy + y^2}$ xác định $\forall (x, y) \neq (0, 0)$.

Khi đó $x^2 - xy + y^2 > 0$. Một mặt, ta có $f(x, x) = x^{\alpha + \beta - 2}$ nên nếu $\alpha + \beta - 2 < 0$ thì giới hạn đã cho không tồn tại; mặt khác, nếu $\alpha < 0$, hoặc $\beta < 0$, thì không tồn tại $\lim\limits_{(x,\, y) \to (0,\, 0)} f(x, y)$.

Bây giờ ta xét trường hợp $\alpha + \beta - 2 > 0$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$. Đặt $k = \max(|x|, |y|)$. Ta có $|x^{\alpha} y^{\beta}| \leq k^{\alpha + \beta}$

vì $\quad x^2 - xy + y^2 = \left(x - \dfrac{y}{2}\right)^2 + \dfrac{3y^2}{4} = \left(y - \dfrac{x}{2}\right)^2 + \dfrac{3x^2}{4}$

nên $\quad |x^2 - xy + y^2| \geq \dfrac{3k^2}{4}$

Do đó $\quad |f(x, y)| \leq \dfrac{4}{3} k^{\alpha + \beta - 2}$

Vậy

$$\lim_{(x,\, y) \to (0,\, 0)} f(x, y) = 0$$

Nếu $\alpha + \beta - 2 = 0$ thì

$$\lim_{x \to 0} f(x, kx) = \lim_{x \to 0} \frac{x^{\alpha + \beta - 2} \cdot k^{\beta}}{1 - k + k^2} = \frac{k^{\beta}}{1 - k + k^2} \text{ (phụ thuộc k)}$$

Tóm lại giới hạn chỉ tồn tại khi $\alpha + \beta - 2 > 0$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, giới hạn ấy bằng 0.

g) $f(x, y) = \dfrac{\sin x - \sin y}{\text{sh}x - \text{sh}y} = \dfrac{2\sin\dfrac{x-y}{2}\cos\dfrac{x+y}{2}}{2\,\text{sh}\dfrac{x-y}{2}\,\text{ch}\dfrac{x+y}{2}}$

Khi $(x, y) \to (0, 0)$ ta có $\sin\dfrac{x-y}{2} \sim \text{sh}\dfrac{x-y}{2} \sim \dfrac{x-y}{2}$. Do đó

$$\lim_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y) = 1 .$$

h) Cho $x = y$, ta có $f(x, x) = -1\ \forall x \neq 0$. Vậy $f(x, y) \to -1$ khi $(x, y) \to (0, 0)$ dọc theo đường $y = x$.

Cho $y = 0$, ta được $f(x, 0) = 1\ \forall x \neq 0$. Vậy $f(x, 0) \to 1$ khi $(x, y) \to (0, 0)$ dọc theo đường $y = 0$.

Do đó không tồn tại $\lim\limits_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y)$.

3. a) $f(x, y) = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$

$$f'_x = \frac{(x^2 + y^2)\,3x^2 - (x^3 + y^3)\,2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4 - 2xy^3 + 3x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Vì lí do đối xứng giữa x và y, ta có

$$f'_y = \frac{y^4 - 2yx^3 + 3x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} .$$

b) $f(x, y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$

$$f'_x = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$f'_y = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{x\sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + y^2} .$$

c) $f(x, y) = y^2 \sin\dfrac{x}{y}$

$$f'_x = y^2\cos\frac{x}{y} \cdot \left(\frac{1}{y}\right) = y\cos\frac{x}{y}$$

$$f'_y = 2y\sin\frac{x}{y} + y^2\cos\frac{x}{y}\left(-\frac{x}{y^2}\right) = 2y\sin\frac{x}{y} - x\cos\frac{x}{y}\ .$$

d) $f(x, y) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$

$$f'_x = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$f'_y = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}\ .$$

e) $f(x, y) = \arcsin\,(x - 2y)$

$$f'_x = \frac{1}{\sqrt{1-(x-2y)^2}}\ ,\ f'_y = -\frac{2}{\sqrt{1-(x-2y)^2}}\ .$$

f) $f(x, y) = \ln\,(\sqrt{x^2+y^2} - x) - \ln\,(\sqrt{x^2+y^2} + x)$

$$f'_x = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - 1}{\sqrt{x^2+y^2} - x} - \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 1}{\sqrt{x^2+y^2} + x} = -\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}\ .$$

$$f'_y = \frac{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2} - x} - \frac{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2} + x} =$$

$$= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2} - x} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2} + x}\right) =$$

$$= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{2x}{y^2} = \frac{2x}{y\sqrt{x^2+y^2}}\ .$$

g) $f(x, y) = \operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$

$$f'_x = \frac{1}{1+\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}}\cdot\frac{(x^2+y^2)2x - (x^2-y^2)2x}{(x^2+y^2)^2} =$$

1

$$= \frac{x^2 + y^2}{2x^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}} \cdot \frac{4xy^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2}{x\sqrt{x^4 - y^4}}$$

$$f'_y = \frac{x^2 + y^2}{2x^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}} \cdot \frac{(x^2 + y^2)(-2y) - (x^2 - y^2)2y}{(x^2 + y^2)^2} =$$

$$= -\frac{x^2 + y^2}{2x^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}} \cdot \frac{4x^2y}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{y}{\sqrt{x^4 - y^4}} \;.$$

h) $f(x, y) = e^{xy}\cos x \sin y$

$$f'_x = e^{xy}y\cos x \sin y - e^{xy}\sin x \sin y$$

$$f'_y = e^{xy}x\cos x \sin y + e^{xy}\cos x \cos y \;.$$

i) $f(x, y) = \ln(x + \ln y)$

$$f'_x = \frac{1}{x + \ln y}, \quad f'_y = \frac{1}{y\,(x + \ln y)} \;.$$

f) $f(x, y) = x^{y^3}$

$$f'_x = y^3x^{y^3 - 1}, \; f'_y = x^{y^3} \,.\, 3y^2 \,.\, \ln x \;.$$

k) $f(x, y, z) = x^{y^z}$

$$f'_x = y^zx^{y^z - 1}, \; f'_y = x^{y^z} \,.\, zy^{z-1} \,.\, \ln x$$

$$f'_z = x^{y^z} \,.\, y^z \,.\, \ln y \,.\, \ln x \;.$$

l) $f(x, y, z) = e^{xyz}\sin\frac{y}{z}$

$$f'_x = e^{xyz}yz\sin\frac{y}{z}$$

1 $$f'_y = e^{xyz}xz\sin\frac{y}{z} + e^{xyz} \,.\, \frac{1}{z}\cos\frac{y}{z}$$

$$f'_z = e^{xyz}xy\sin\frac{y}{z} - e^{xyz}\frac{y}{z^2}\cos\frac{y}{z} .$$

m) $f(x, y, z) = e^{\frac{1}{x^2+y^2+z^2}}$

$$f'_x = -e^{\frac{1}{x^2+y^2+z^2}} \cdot \frac{2x}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$f'_y = -e^{\frac{1}{x^2+y^2+z^2}} \cdot \frac{2y}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$f'_z = -e^{\frac{1}{x^2+y^2+z^2}} \cdot \frac{2z}{(x^2+y^2+z^2)^2} .$$

n) $f(x, y, z) = z\sin\frac{y}{x+z}$

$$f'_x = -z . \frac{y}{(x+z)^2}\cos\frac{y}{x+z}$$

$$f'_y = z . \frac{1}{x+z}\cos\frac{y}{x+z}$$

$$f'_z = \sin\frac{y}{x+z} - z . \frac{y}{(x+z)^2}\cos\frac{y}{x+z} .$$

4. a) Ta có $\forall(x, y) \neq (0, 0)$

$$|f(x, y)| = (x^2 + y^2)\left|\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right| \leq x^2 + y^2$$

Do đó khi $(x, y) \to (0, 0)$, $f(x, y) \to 0 = f(0, 0)$. Hàm số $f(x, y)$ liên tục tại $(0, 0)$. Rõ ràng $f(x, y)$ liên tục tại mọi $(x, y) \neq (0, 0)$, vậy $f(x, y)$ liên tục trên $\mathbf{R}^2$.

Các đạo hàm riêng $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ tồn tại tại mọi $(x, y) \neq (0, 0)$. Bây giờ xét tại $(0, 0)$. Ta có $\forall x \neq 0$, $f(x, 0) = x^2\sin\frac{1}{x^2}$

Do đó $f'_x(0, 0) = \lim\limits_{h \to 0}\frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} h\sin\frac{1}{h^2} = 0$

Tương tự ta được $f'_y(0, 0) = 0$. Vậy các đạo hàm riêng $f'_x(x, y)$, $f'_y(x,y)$ tồn tại trên $\mathbf{R}^2$. Với $(x, y) \neq (0, 0)$ ta có

$$f'_x(x, y) = 2x\left(\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{1}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

Do đó với $x \neq 0$

$$f'_x(x, 0) = 2x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}$$

Từ đó ta thấy rằng không tồn tại

$$\lim_{x \to 0} f'_x(x, 0)$$

tức là $f'_x(x, y)$ không liên tục tại (0, 0). Vì vai trò của x và y đối xứng nhau nên $f'_y(x, y)$ cũng không liên tục tại (0, 0).

Tóm lại f(x, y) liên tục trên $\mathbf{R}^2$, các đạo hàm riêng $f'_x(x, y)$, $f'_y(x,y)$ tồn tại trên $\mathbf{R}^2$, nhưng chỉ liên tục tại $(x, y) \neq (0, 0)$.

b) hàm số $f(x, y) = \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$ liên tục tại mọi $(x, y) \neq (0, 0)$. Ta có

$$|f(x, y)| \leq \frac{|x|^3 + |y|^3}{x^2 + y^2} \leq |x| + |y|$$

Do đó $f(x, y) \to 0 = f(0, 0)$ khi $(x, y) \to (0, 0)$. Vậy hàm số f(x, y) cũng liên tục tại (0, 0). Suy ra f(x, y) liên tục trên $\mathbf{R}^2$.

Với $(x, y) \neq (0, 0)$, các đạo hàm riêng $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ đều tồn tại và liên tục

$$f'_x(x, y) = \frac{x(x^3 + 3xy^2 + 2y^3)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f'_y(x,y) = \frac{-y(y^3 + 3x^2y + 2x^3)}{(x^2 + y^2)^2}$$

1 Xét tại (0, 0) ta có

$$f'_x(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{-k}{k} = -1$$

Vậy các đạo hàm riêng $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ cũng tồn tại tại $(0, 0)$, nhưng chúng không liên tục tại $(0, 0)$, vì

$$f'_x(x, tx) = \frac{1 + 3t^2 + 2t^3}{(1 + t^2)^2}$$

Do đó khi $(x, y) \to (0, 0)$ theo đường $y = tx$ thì

$$f'_x(x, y) \to \frac{1 + 3t^2 + 2t^3}{(1 + t^2)^2},$$ giới hạn này thay đổi theo t.

Cũng vậy, ta có

$$f'_y(ty, y) = -\frac{1 + 3t^2 + t^3}{(1 + t^2)^2}$$

Do đó khi $(x, y) \to (0, 0)$ theo đường $x = ty$ thì

$$f'_y(x, y) \to -\frac{1 + 3t^2 + t^3}{(1 + t^2)^2},$$ giới hạn này cũng thay đổi theo t.

Vậy $f(x, y)$ liên tục trên $\mathbf{R}^2$, các đạo hàm riêng $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ tồn tại trên $\mathbf{R}^2$, nhưng chỉ liên tục tại $(x, y) \neq (0, 0)$.

c) Hàm số $f(x, y) = x\text{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)^2$ liên tục tại mọi $x \neq 0$. Ta có $\forall x \neq 0$

$$|f(x, y)| \leq |x| . \frac{\pi}{2}$$

Do đó $f(x, y) \to 0 = f(0, y)$ khi $x \to 0$. Vậy $f(x, y)$ cũng liên tục tại $x = 0$, suy ra $f(x, y)$ liên tục trên $\mathbf{R}^2$.

Với $x \neq 0$, các đạo hàm riêng $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ đều tồn tại và
1 liên tục

$$f'_x(x, y) = \text{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)^2 + x \, . \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^4} . 2\left(\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right) =$$

$$= \text{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{2x^2y^2}{x^4 + y^4}$$

$$f'_y(x, y) = x \, . \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^4} . 2\left(\frac{y}{x}\right) . \frac{1}{x} = \frac{2x^3y}{x^4 + y^4}$$

Bây giờ xét tại $x = 0$. Nếu $y \neq 0$, ta có

$$f'_x(0, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, y) - f(0, y)}{h} = \lim_{h \to 0} \text{arctg}\left(\frac{y}{h}\right)^2 = \frac{\pi}{2}$$

$$f'_y(0, y) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0, y + k) - f(0, y)}{k} = \lim_{k \to 0} 0 = 0$$

Nếu $y = 0$, ta có

$$f'_x(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \to 0} 0 = 0$$

Vậy các đạo hàm riêng $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ cũng tồn tại tại $x = 0$. Từ các kết quả trên, ta thấy rằng $f'_y(x, y)$ liên tục trên $\mathbf{R}^2$, nhưng $f'_x(x, y)$ liên tục trên $\mathbf{R}^2 \setminus (0, 0)$.

d) Hàm số $f(x, y) = \dfrac{x\sin y - y\sin x}{x^2 + y^2}$ liên tục tại mọi $(x, y) \neq (0, 0)$. Ta có $\forall (x, y) \neq (0, 0)$.

$$f(x, y) = \frac{x\left(y - \frac{y^3}{3!} + 0(y^3)\right) - y\left(x - \frac{x^3}{3!} + 0(x^3)\right)}{x^2 + y^2} =$$

1

$$= \frac{xy\,(x^2 - y^2)}{3!\;(x^2 + y^2)} + \frac{x.0(y^3) - y.0(x^3)}{x^2 + y^2}$$

Do đó khi $(x, y) \to (0, 0)$ thì $f(x, y) \to 0 = f(0, 0)$, hàm số $f(x, y)$ cũng liên tục tại $(0, 0)$, vậy nó liên tục trên $\mathbf{R}^2$.

Với $(x, y) \neq (0, 0)$, các đạo hàm riêng $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ đều tồn tại và liên tục.

$$f'_x(x, y) = \frac{(y^2 - x^2)\sin y - y(x^2 + y^2)\cos x + 2xy\sin x}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f'_y(x, y) = \frac{(y^2 - x^2)\sin x + x(x^2 + y^2)\cos y - 2xy\sin y}{(x^2 + y^2)^2}$$

Xét tại $(0, 0)$, ta có

$$f'_x(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \to 0} 0 = 0$$

Bạn đọc hãy chứng minh rằng không tồn tại các giới hạn

$$\lim_{(x, y) \to (0, 0)} f'_x(x, y), \quad \lim_{(x, y) \to (0, 0)} f'_y(x, y).$$

Như vậy hàm số $f(x, y)$ liên tục trên $\mathbf{R}^2$, các đạo hàm riêng $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ tồn tại trên R^2 nhưng chỉ liên tục trên $\mathbf{R}^2 \backslash (0, 0)$.

5. a) Ta có

$$z'_x = z'_u \cdot u'_x + z'_v \cdot v'_x$$

$$z'_y = z'_u \cdot u'_y + z'_v \cdot v'_y$$

Nhưng $\quad z'_u = e^{u^2 - 2v^2} \cdot 2u, \; z'_v = e^{u^2 - 2v^2}(-4v)$

$u'_x = -\sin x$, $u'_y = 0$, $v'_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $v'_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Do đó

$$z'_x = -e^{\cos^2 x - 2(x^2 + y^2)} \cdot (2\cos x \sin x + 4x)$$

$$z'_y = -e^{\cos^2 x - 2(x^2 + y^2)} \cdot 4y \; .$$

1 b) $\quad z'_u = \dfrac{2u}{u^2 + v^2}, \; z'_v = \dfrac{2v}{u^2 + v^2}$

$$u'_x = y\ ,\ v'_x = \frac{1}{y}\ ,\ u'_y = x,\ v'_y = -\frac{x}{y^2}$$

$$z'_x = \frac{2xy}{x^2y^2 + \dfrac{x^2}{y^2}}\, y + \frac{2\dfrac{x}{y}}{x^2y^2 + \dfrac{x^2}{y^2}}\, \frac{1}{y} =$$

$$= \frac{2xy^4}{x^2(1+y^4)} + \frac{2x}{x^2(1+y^4)} = \frac{2x(1+y^4)}{x^2(1+y^4)} = \frac{2}{x}$$

$$z'_y = \frac{2xy}{x^2y^2 + \dfrac{x^2}{y^2}}\, x + \frac{2\dfrac{x}{y}}{x^2y^2 + \dfrac{x^2}{y^2}} \left(-\frac{x}{y^2}\right) =$$

$$= \frac{2y^3}{1+y^4} - \frac{2}{(1+y^4)y} = \frac{2(y^4-1)}{y(y^4+1)}\ .$$

c) $z'_u = 2\dfrac{u}{v^2}\ln(3u - 2v) + \dfrac{3u^2}{v^2(3u-2v)}$

$z'_v = -2\dfrac{u^2}{v^3}\ln(3u-2v) - \dfrac{2u^2}{v^2(3u-2v)}\ .$

d) $z'_u = e^v - ve^{-u},\ z'_v = ue^v + e^{-u},$

$u'_x = e^x,\ u'_y = 0,\ v'_x = 2xy,\ v'_y = x^2$

Do đó

$$z'_x = (e^{yx^2} - yx^2e^{-e^x})\, e^x + (e^xe^{yx^2} + e^{-e^x})\, 2xy$$

$$z'_y = (e^xe^{yx^2} + e^{-e^x})\, x^2\ .$$

e) $z'_x = e^{\frac{x}{y}} + xe^{\frac{x}{y}}\,.\,\dfrac{1}{y} = e^{\frac{x}{y}}\left(1 + \dfrac{x}{y}\right)$

$z'_y = xe^{\frac{x}{y}}\,.\left(-\dfrac{x}{y^2}\right) = -\dfrac{x^2}{y^2}e^{\frac{x}{y}}$

$x'_t = -\sin t,\ y'_t = 2e^{2t}$

Do đó

1 $$\frac{dz}{dt} = -e^{e^{-2t}\cos t}\,[\sin t\,(1 + e^{-2t}\cos t) + 2e^{-2t}\cos^2 t]$$

f) $z'_x = \sqrt{1 + y^2}$, $z'_y = \dfrac{xy}{\sqrt{1 + y^2}}$

$x'_t = e^{2t} + 2te^{2t} = e^{2t}(1 + 2t)$, $y'_t = -e^{-t}$

Do đó

$$\frac{dz}{dt} = \sqrt{1 + e^{-2t}} \,.\, e^{2t}(1 + 2t) + \frac{te^t}{\sqrt{1 + e^{-2t}}}(-e^{-t}) =$$

$$= \frac{(1 + 2t)\,e^{2t}(1 + e^{-2t}) - t}{\sqrt{1 + e^{-2t}}} \,.$$

6. a) Ta có

$$z = y\ln(x^2 - y^2)$$

$$z'_x = y\,\frac{2x}{x^2 - y^2}$$

$$z'_y = \ln(x^2 - y^2) - y\,\frac{2y}{x^2 - y^2}$$

Do đó

$$\frac{1}{x}z'_x + \frac{1}{y}z'_y = \frac{1}{y}\ln(x^2 - y^2) = \frac{y\ln(x^2 - y^2)}{y^2} = \frac{z}{y^2} \,.$$

b) Ta có

$$z = y^{\frac{y}{x}}\sin\frac{y}{x}$$

$$z'_x = y^{\frac{y}{x}}\left(-\frac{y}{x^2}\ln y\right)\sin\frac{y}{x} + y^{\frac{y}{x}}\left(-\frac{y}{x^2}\right)\cos\frac{y}{x}$$

$$z'_y = y^{\frac{y}{x}} \,.\, \frac{1}{x}(1 + \ln y)\sin\frac{y}{x} + y^{\frac{y}{x}} \,.\, \cos\frac{y}{x} \,.\, \frac{1}{x}$$

Do đó $\quad x^2z'_x + xyz'_y = y^{\frac{y}{x}}\Big[-y\ln y\sin\frac{y}{x} - y\cos\frac{y}{x} +$

$$+\, y(1 + \ln y)\sin\frac{y}{x} + y\cos\frac{y}{x}\Big] =$$

1 $$= y^{\frac{y}{x}}\,y\sin\frac{y}{x} = yz \,.$$

7. a) Theo công thức tính đạo hàm của hàm số hợp, nếu thực hiện phép đổi biến số $u = x + y$, $v = x + 2y$, ta có

$$z'_x = z'_u + z'_v,\ z'_y = z'_u + 2z'_v$$

Hàm số z thỏa mãn phương trình

$$2z'_x - z'_y = 0 \text{ hay } z'_u = 0$$

Vậy z không phụ thuộc u, nó chỉ phụ thuộc v. Do đó

$$z = f(v)$$

trong đó f là một hàm số khả vi bất kỳ. Suy ra

$$z = f(x + 2y)\ .$$

b) Đổi biến số $u = x + y$, $v = xy$. Ta có

$$z'_x = z'_u + yz'_v,\ z'_y = z'_u + xz'_v$$

Thế vào phương trình đã cho, ta được

$$(x - y)z'_u = (x - y)(x + y)$$

hay

$$z'_u = u$$

Lấy nguyên hàm theo u hai vế của phương trình ấy, ta được

$$z = \frac{1}{2}u^2 + f(v),$$

trong đó f là một hàm số khả vi bất kỳ. Vậy

$$z = \frac{1}{2}(x + y)^2 + f(xy)\ .$$

8. a) $z = \sin(x^2 + y^2)$.

Do đó

$$dz = \cos(x^2 + y^2)\, d(x^2 + y^2) = \cos(x^2 + y^2)(2xdx + 2ydy)$$

1

b) $z = e^x (\cos y + x\sin y)$

$$z'_x = e^x (\cos y + x\sin y + \sin y)$$

$$z'_y = e^x (-\sin y + x\cos y)$$

Do đó

$$dz = e^x [(\cos y + \sin y + x\sin y)dx + (x\cos y - \sin y)dy].$$

c) $z = \ln \operatorname{tg} \dfrac{y}{x}$

Do đó
$$dz = \frac{1}{\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}} \cdot \frac{1}{\cos^2\dfrac{y}{x}} d\left(\frac{y}{x}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sin\dfrac{y}{x}\cos\dfrac{y}{x}} d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{2(xdy - ydx)}{x^2 \sin\dfrac{2y}{x}}.$$

d) $z = \operatorname{arctg} \dfrac{x + y}{x - y}$

Do đó

$$dz = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^2} d\left(\frac{x+y}{x-y}\right) = \frac{(x-y)^2}{2(x^2+y^2)} \cdot \frac{2(xdy - ydx)}{(x-y)^2} =$$

$$= \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

Cũng có thể nhận xét rằng z xác định khi $x \neq y$, nó không xác định khi x, y đồng thời bằng 0. Giả sử $x \neq 0$, ta có

$$z = \operatorname{arctg} \frac{1 + \dfrac{y}{x}}{1 - \dfrac{y}{x}} = \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

Do đó $dz = d\left(\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\right) = \dfrac{1}{1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2} d\left(\dfrac{y}{x}\right) =$

$$= \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

1

e) $z = e^{\frac{x}{y}} + e^{-\frac{y}{x}}$

$$z'_x = e^{\frac{x}{y}} . \frac{1}{y} + e^{-\frac{y}{x}} . \frac{y}{x^2}$$

$$z'_y = e^{\frac{x}{y}} \left(- \frac{x}{y^2} \right) + e^{-\frac{y}{x}} \left(- \frac{1}{x} \right)$$

Do đó

$$dz = \left(e^{\frac{x}{y}} . \frac{1}{y} + e^{-\frac{y}{x}} . \frac{y}{x^2} \right) dx - \left(e^{\frac{x}{y}} . \frac{x}{y^2} + e^{-\frac{y}{x}} . \frac{1}{x} \right) dy .$$

f) $z = \int\limits_x^y e^{t^2} dt$

$$z'_x = - e^{x^2} , \; z'_y = e^{y^2}$$

Do đó

$$dz = - e^{x^2} dx + e^{y^2} dy .$$

g) Đặt $u = xy$, $v = \frac{x}{y}$, ta có

$$z = \int\limits_u^v t^2 \cos 2t \, dt$$

Do đó

$$dz = z'_u du + z'_v dv =$$

$$= - u^2 \cos 2u \, du + v^2 \cos 2v \, dv$$

$$= - x^2y^2 \cos 2xy \, (xdy + ydx) + \frac{x^2}{y^2} \cos \frac{2x}{y} \left(\frac{ydx - xdy}{y^2} \right) .$$

h) $u = y^2 x^{\frac{3}{2}} - 3yz^{\frac{2}{3}}$

Do đó

1 $$du = 2yx^{\frac{3}{2}} dy + y^2 \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} dx - 3z^{\frac{2}{3}} dy - 3y \frac{2}{3} z^{-\frac{1}{3}} dz =$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{x}\, y^2 dx + (2y\sqrt{x^3} - 3\sqrt[3]{z^2})\, dy - \frac{2y}{\sqrt[3]{z}} dz \ .$$

i) $u = xe^y + ye^z + ze^x$

Do đó

$$u'_x = e^y + ze^x,\ u'_y = e^z + xe^y,\ u'_z = e^x + ye^z$$

$$du = (e^y + ze^x)\, dx + (e^z + xe^y)\, dy + (e^x + ye^z)\, dz \ .$$

j) $u = x^{y^2 z}\ (x > 0)$

$$u'_x = y^2 z x^{y^2 z - 1},\ u'_y = x^{y^2 z} . \ln x . 2yz,\ u'_z = x^{y^2 z} . \ln x . y^2$$

Do đó

$$du = x^{y^2 z}\left(\frac{y^2 z}{x} dx + 2yz\ln x dy + y^2 \ln x dz\right) .$$

9. a) Xét hàm số $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$. Ta có

$$\sqrt[3]{(1{,}02)^2 + (0{,}05)^2} = f(1 + \Delta x\ ;\ 0 + \Delta y),$$

trong đó $\Delta x = 0{,}02$, $\Delta y = 0{,}05$. Vì

$$f'_x(x, y) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 + y^2)^2}}\ , \qquad f'_y(x, y) = \frac{2y}{3\sqrt[3]{(x^2 + y^2)^2}}\ ,$$

ta được

$$f(1 + \Delta x,\ 0 + \Delta y) \approx f(0, 1) + f'_x(1, 0)\, \Delta x + f'_y(1, 0)\, \Delta y =$$

$$= 1 + \frac{2}{3} . (0{,}02) = 1{,}013 \ .$$

b) Xét hàm số $f(x, y) = \ln(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1)$. Ta có

$$\ln(\sqrt[3]{1{,}03} + \sqrt[4]{0{,}98} - 1) = f(1 + \Delta x,\ 1 + \Delta y),$$

trong đó $\Delta x = 0{,}03$, $\Delta y = -0{,}02$. Nhưng

$$f'_x(x, y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1)}$$

$$f'_y(x, y) = \frac{1}{4\sqrt[4]{y^3}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1)}$$

ta được $f(1 + \Delta x,\ 1 + \Delta y) \approx f(1, 1) + f'_x(1, 1).\ \Delta x + f'_y(x, y)\ .\ \Delta y =$

$$= 0 + \frac{0{,}03}{3} - \frac{0{,}02}{4} = 0{,}005\ .$$

c) Xét hàm số $f(x, y) = \sqrt{9x^2 + y^2}$. Ta cần tính

$$\sqrt{9\ .\ (1{,}95)^2 + (8{,}1)^2} = f(2 + \Delta x,\ 8 + \Delta y),$$

trong đó $\Delta x = -0{,}05$, $\Delta y = 0{,}1$. Vì

$$f'_x(x, y) = \frac{9x}{\sqrt{9x^2 + y^2}}\ ,\ f'_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{9x^2 + y^2}}\ ,$$

ta được $f(2 + \Delta x,\ 8 + \Delta y) \approx f(2, 8) + f'_x(2, 8).\ \Delta x + f'_y(2, 8).\ \Delta y =$

$$= 10 + \frac{9.2}{10}\ .\ (-0{,}05) + \frac{8}{10}\ .\ (0{,}1) =$$

$$= 9{,}99\ .$$

d) Xét hàm số $f(x, y) = \sqrt{\sin^2 x + 8e^y}$. Ta cần tính

$$\sqrt{\sin^2 1{,}55 + 8.e^{0{,}015}} = f\left(\frac{\pi}{2} + \Delta x,\ 0 + \Delta y\right),$$

trong đó $\Delta x = -0{,}021$ (vì $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}571$), $\Delta y = 0{,}015$. Ta có

$$f'_x(x, y) = \frac{2\sin x\cos x}{2\sqrt{\sin^2 x + 8e^y}}\ , \qquad f'_y(x, y) = \frac{8e^y}{2\sqrt{\sin^2 x + 8e^y}}$$

Do đó

$$f\left(\frac{\pi}{2} + \Delta x, 0 + \Delta y\right) \approx f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) + f'_x\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)\Delta x + f'_y\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)\Delta y =$$

$$= 3 + \frac{8\ .\ 0{,}015}{2\ .\ 3} = 3{,}02\ .$$

e) Xét hàm số $f(x, y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. Ta có

$$\operatorname{arctg}\frac{1{,}02}{0{,}95} = f(1 + \Delta x,\ 1 + \Delta y)$$

trong đó $\Delta y = 0{,}02$, $\Delta x = -0{,}05$. Ta có

$$f'_x(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \; f'_y(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Do đó

$$f(1 + \Delta x, 1 + \Delta y) \approx f(1, 1) + f'_x(1, 1).\ \Delta x + f'_y(1, 1).\ \Delta y =$$

$$= \text{arctg } 1 - \frac{1}{2}(-0{,}05) + \frac{1}{2}(0{,}02)$$

$$= \frac{\pi}{4} + 0{,}035 \approx 0{,}785 + 0{,}035 = 0{,}82$$

f) Xét hàm số $f(x, y) = (\sqrt{x} - \sqrt[3]{y})^3$. Ta cần tính

$$(\sqrt{99} - \sqrt[3]{124})^3 = f(100 + \Delta x,\ 125 + \Delta y),$$

trong đó $\Delta x = -1$, $\Delta y = -1$. Ta có

$$f'_x(x, y) = 3(\sqrt{x} - \sqrt[3]{y})^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'_y(x, y) = -3(\sqrt{x} - \sqrt[3]{y})^2 \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}$$

Do đó

$$f(100 + \Delta x, 125 + \Delta y) \approx f(100, 125) + f'_x(100; 125).\ (-1) +$$

$$+ f'_y(100; 125)\ .\ (-1) = 125 - \frac{3\ .\ 25}{2\ .\ 10} + \frac{25}{25} =$$

$$= 125 - 3{,}75 + 1 = 122{,}25$$

10. a) Ta có

$$f(x, y) = x^3y - y^3x - a^4 = 0$$

$$F'_x(x, y) = 3x^2y - y^3,\ F'_y(x, y) = x^3 - 3y^2x$$

Do đó

1

$$y' = \frac{-F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = \frac{y(3x^2 - y^2)}{x(3y^2 - x^2)}$$

b) Ta có

$$F(x, y) = xe^y + ye^x - e^{xy} = 0$$

$$F'_x(x, y) = e^y + ye^x - ye^{xy}$$

$$F'_y(x, y) = xe^y + e^x - xe^{xy}$$

Do đó $$y' = \frac{e^y + ye^x - ye^{xy}}{-xe^y - e^x + xe^{xy}}$$

c) Ta có

$$F(x, y) = \operatorname{arctg}\frac{x + y}{a} - \frac{y}{a} = 0$$

$$F'_x(x, y) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x + y}{a}\right)^2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{a}{(x + y)^2 + a^2}$$

$$F'_y(x, y) = \frac{a}{(x + y)^2 + a^2} - \frac{1}{a} = -\frac{(x + y)^2}{(x + y)^2 + a^2} \cdot \frac{1}{a}$$

Do đó $$y' = \frac{a^2}{(x + y)^2}$$

d) Ta có

$$F(x, y) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) - \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = 0$$

$$F'_x(x, y) = \frac{x + y}{x^2 + y^2}, \quad F'_y(x, y) = \frac{y - x}{x^2 + y^2}$$

Do đó $$y' = \frac{x + y}{x - y} \text{ (với } x \neq y\text{)}$$

Đẳng thức đó có thể viết là

$$(x - y)y' = x + y$$

Lấy đạo hàm hai vế đẳng thức này, ta được

1

$$(x - y)y'' + (1 - y')y' = 1 + y'$$

hay

$$(x - y)y'' = 1 + y'^2 = 1 + \left(\frac{x + y}{x - y}\right)^2 = \frac{2\,(x^2 + y^2)}{x - y}$$

Vậy

$$y'' = \frac{2\,(x^2 + y^2)}{(x - y)^3} \text{ (với } x \neq y) .$$

e) Ta có

$$F(x, y) = y^5 + 3x^2y^2 + 5x^4 - 12 = 0$$

$$F'_x(x, y) = 6xy^2 + 20x^3$$

$$F'_y(x, y) = 5y^4 + 6x^2y$$

Do đó
$$y' = -\frac{2x\,(3y^2 + 10x^2)}{y\,(5y^3 + 6x^2)} .$$

f) Ta có

$$F(x, y) = 2y^2 + \sqrt[3]{xy} - 3x^2 - 17 = 0$$

$$F'_x(x, y) = \frac{1}{3}(xy)^{-\frac{2}{3}}.\,y - 6x$$

$$F'_y(x, y) = 4y + \frac{1}{3}(xy)^{-\frac{2}{3}}.\,x$$

Do đó

$$y' = \frac{18x - x^{-\frac{2}{3}}\,y^{\frac{1}{3}}}{12y + x^{\frac{1}{3}}\,y^{-\frac{2}{3}}} .$$

g) Ta có

$$F(x, y) = 3\sin\frac{\sqrt{x}}{y} - 2\cos\frac{\sqrt{x}}{y} + 1 = 0$$

$$F'_x(x, y) = \frac{1}{2y\sqrt{x}}\left(3\cos\frac{\sqrt{x}}{y} + 2\sin\frac{\sqrt{x}}{y}\right)$$

1

$$F'_y(x, y) = -\frac{\sqrt{x}}{y^2}\left(3\cos\frac{\sqrt{x}}{y} + 2\sin\frac{\sqrt{x}}{y}\right)$$

Do đó

$$y' = \frac{1}{2y\sqrt{x}} \cdot \frac{y^2}{\sqrt{x}} = \frac{y}{2x} \quad .$$

h) Ta có

$$F(x, y, z) = e^z - x - y - z = 0$$

$$F'_x(x, y, z) = -1, \; F'_y(x, y, z) = -1$$

$$F'_z(x, y, z) = e^z - 1$$

Do đó

$$z'_x = z'_y = \frac{1}{e^z - 1} \quad .$$

i) Ta có

$$F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$$

$$F'_x(x, y, z) = 3x^2 - 3yz$$

$$F'_y(x, y, z) = 3y^2 - 3zx$$

$$F'_z(x, y, z) = 3z^2 - 3xy$$

Do đó $$z'_x = \frac{yz - x^2}{z^2 - xy} \quad , \qquad z'_y = \frac{zx - y^2}{z^2 - xy} \quad .$$

j) Ta có

$$F(x, y, z) = xy^2z^3 + x^3y^2z - x - y - z = 0$$

$$F'_x(x, y, z) = y^2z^3 + 3x^2y^2z - 1$$

$$F'_y(x, y, z) = 2xyz^3 + 2x^3yz - 1$$

$$F'_z(x, y, z) = 3xy^2z^2 + x^3y^2 - 1$$

Do đó $$z'_x = \frac{1 - y^2z^3 - 3x^2y^2z}{3xy^2z^2 + x^3y^2 - 1}, \quad z'_y = \frac{1 - 2xyz^3 - 2x^3yz}{3xy^2z^2 + x^3y^2 - 1} \quad .$$

k) Ta có

1 $$F(x, y, z) = xe^y + yz + ze^x = 0$$

$$F'_x(x, y, z) = e^y + ze^x$$

$$F'_y(x, y, z) = xe^y + z$$

$$F'_z(x, y, z) = y + e^x$$

Do đó

$$z'_x = -\frac{e^y + ze^x}{y + e^x}, \qquad z'_y = -\frac{xe^y + z}{y + e^x}.$$

l) Ta có

$$F(x, y, z) = xyz - \cos(x + y + z) = 0$$

$$F'_x(x, y, z) = yz + \sin(x + y + z)$$

$$F'_y(x, y, z) = zx + \sin(x + y + z)$$

$$F'_z(x, y, z) = xy + \sin(x + y + z)$$

Do đó

$$z'_x = -\frac{yz + \sin(x + y + z)}{xy + \sin(x + y + z)}, \quad z'_y = -\frac{zx + \sin(x + y + z)}{xy + \sin(x + y + z)}.$$

m) Ta có

$$F(x, y, z) = y^2ze^{x+y} - \sin(xyz) = 0$$

$$F'_x(x, y, z) = y^2ze^{x+y} - yz\cos(xyz)$$

$$F'_y(x, y, z) = 2yze^{x+y} + y^2ze^{x+y} - zx\cos(xyz)$$

$$F'_z(x, y, z) = y^2e^{x+y} - xy\cos(xyz)$$

Do đó

$$z'_x = -\frac{z\,(ye^{x+y} - \cos(xyz))}{ye^{x+y} - x\cos(xyz)}$$

$$z'_y = -\frac{z\,[y\,(y + 2)\,e^{x+y} - x\cos(xyz)]}{y\,[ye^{x+y} - x\cos(xyz)]}.$$

1

n) Ta có

$$F(x, y) = \arcsin \sqrt[3]{\frac{x^3 + y^3 - 3x^2y}{x^3 + y^3 - 3xy^2}} - a = 0$$

Hàm số F(x, y) là một hàm số thuần nhất bậc không, do đó theo công thức Euler ta có

$$xF'_x(x, y) + yF'_y(x, y) = 0 \qquad (*)$$

Mặt khác, nếu lấy đạo hàm theo x hai vế của phương trình F(x,y) = 0, ta được

$$F'_x(x, y) + F'_y(x, y)\, y' = 0 \qquad (**)$$

Từ hệ hai phương trình (*), (**), ta được

$$y' = \frac{y}{x}$$

Chú ý rằng kết quả này đúng với mọi hàm số ẩn xác định bởi hệ thức

$$\varphi(x, y) = a$$

trong đó $\varphi(x, y)$ là một hàm số thuần nhất bậc 0.

11. a) Ta có $f(0,02; 0,99) = f(0 + \Delta x, 1 + \Delta y)$, trong đó $\Delta x = 0,02$, $\Delta y = -0,01$. Theo công thức tính gần đúng bằng vi phân toàn phần, ta có

$$f(0 + \Delta x, 1 + \Delta y) \approx f(0, 1) + f'_x(0, 1)\,\Delta x + f'_y(0, 1)\,\Delta y$$

thế x = 0, y = 1 vào phương trình

$$z - xe^{\frac{z}{y}} = 0, \qquad (*)$$

ta được f(0, 1) = 0. Lấy đạo hàm theo x hai vế của phương trình (*), ta được

$$z'_x - e^{\frac{z}{y}} - xe^{\frac{z}{y}} \cdot \frac{z'_x}{y} = 0$$

hay $$z'_x\left(1-\frac{x}{y}e^{\frac{z}{y}}\right)=e^{\frac{z}{y}}$$

thế x = 0, y = 1 vào đẳng thức ấy, ta được $f'_x(0,\ 1) = 1$. Lấy đạo hàm theo y hai vế của phương trình (*), ta được

$$z'_y - xe^{\frac{z}{y}}\frac{yz'_y-z}{y^2}=0$$

hay

$$z'_y\left(1-\frac{x}{y}e^{\frac{z}{y}}\right)=-\frac{xz}{y^2}e^{\frac{z}{y}}$$

thế x = 0, y = 1 vào đẳng thức ấy, ta được $f'_y(0,\ 1) = 0$.

Do đó

$$f(0,\ 02;\ 0{,}99) \approx 0 + 1.(0{,}02) + 0.(-0{,}01) = 0{,}02\ .$$

b) Ta có

$$u'_x = \frac{(y+z)(1+z'_x)-(x+z)z'_x}{(y+z)^2} =$$

$$= \frac{(y-x)z'_x+(y+z)}{(y+z)^2}=\frac{y-x}{(y+z)^2}z'_x+\frac{1}{y+z}\ ,$$

$$u'_y = \frac{(y+z)z'_y-(x+z)(1+z'_y)}{(y+z)^2}$$

$$= \frac{(y-x)z'_y-(x+z)}{(y+z)^2}=\frac{y-x}{(y+z)^2}z'_y-\frac{x+z}{(y+z)^2}\ .$$

Mặt khác, lấy đạo hàm theo x hai vế của hệ thức

1 $ze^z = xe^x + ye^y$, ta được $(ze^z + e^z)z'_x = xe^x + e^x$.

Do đó $$z'_x = \frac{e^x(x+1)}{e^z(z+1)} \cdot$$

Tương tự, ta được

$$z'_y = \frac{e^y(x+1)}{e^z(z+1)} \cdot$$

Vậy

$$u'_x = \frac{y-x}{(y+z)^2} \cdot \frac{e^x(x+1)}{e^z(z+1)} + \frac{1}{y+z}$$

$$u'_y = \frac{y-x}{(y+z)^2} \cdot \frac{e^y(x+1)}{e^z(z+1)} - \frac{x+z}{(y+z)^2} .$$

c) Ta có

$$F(x, y, z) = z^2 + \frac{2}{x} - \sqrt{y^2-z^2} = 0 .$$

Do đó $$F'_x(x, y, z) = -\frac{2}{x^2} ,$$

$$F'_y(x, y, z) = -\frac{y}{\sqrt{y^2-z^2}} ,$$

$$F'_z(x, y, z) = 2z + \frac{z}{\sqrt{y^2-z^2}} .$$

Suy ra $$z'_x = \frac{\dfrac{2}{x^2}}{2z + \dfrac{z}{\sqrt{y^2-z^2}}}, \qquad z'_y = \frac{\dfrac{y}{\sqrt{y^2-z^2}}}{2z + \dfrac{z}{\sqrt{y^2-z^2}}} .$$

Vậy $$x^2z'_x + \frac{1}{y}z'_y = \frac{\left(2 + \dfrac{1}{\sqrt{y^2-z^2}}\right)}{z\left(2 + \dfrac{1}{\sqrt{y^2-z^2}}\right)} = \frac{1}{z} .$$

1

d) Lần lượt lấy đạo hàm theo x rồi lấy đạo hàm theo y hai vế của hệ thức

$$F(u, v) = 0,$$

trong đó

$$u = cx - az,\ v = cy - bz,$$

ta được

$$\begin{cases} (c - az'_x)F'_u(u,v) - bz'_x F'_v(u,v) = 0 \\ -az'_y F'_u(u,v) + (c - bz'_y)F'_v(u,v) = 0. \end{cases}$$

Xem đó là hệ hai phương trình đại số tuyến tính thuần nhất đối với $F'_u(u, v)$ và $F'_v(u, v)$. Điều kiện cần và đủ để hệ ấy có nghiệm không tầm thường là định thức của nó bằng không, tức là

$$\begin{vmatrix} c - az'_x & -bz'_x \\ -az'_y & c - bz'_y \end{vmatrix} = 0,$$

hay

$$c^2 - cbz'_y - acz'_x + abz'_x z'_y - abz'_x z'_y = 0.$$

Vì $c \neq 0$, ta được

$$az'_x + bz'_y = c.$$

e) Lần lượt lấy đạo hàm theo x, rồi lấy đạo hàm theo y hai vế của hệ thức

$$x^2 + y^2 + z^2 = yf\left(\frac{z}{y}\right),$$

ta được

$$2x + 2zz'_x = yf'\left(\frac{z}{y}\right)\frac{z'_x}{y} = z'_x f'\left(\frac{z}{y}\right). \qquad (*)$$

$$2y + 2zz'_y = f\left(\frac{z}{y}\right) + yf'\left(\frac{z}{y}\right)\frac{yz'_y - z}{y^2} =$$

$$= f\left(\frac{z}{y}\right) + \frac{yz'_y - z}{y^2} f'\left(\frac{z}{y}\right). \qquad (**)$$

Ta nhận xét rằng hệ thức mà ta cần chứng minh không chứa hàm số f một cách tường minh, do đó ta tìm cách khử f' từ hai đẳng thức (*) và (**). Nhân hai vế của (*) với $z - yz'_y$, nhân hai vế của (**) với yz'_x rồi cộng lại, ta được

$$(2x + 2zz'_x)(z - yz'_y) + (2y + 2zz'_y)yz'_x = yf\left(\frac{z}{y}\right)z'_x .$$

Nhưng theo giả thiết

$$yf\left(\frac{z}{y}\right) = x^2 + y^2 + z^2 .$$

Do đó $\quad 2xz - 2xyz'_y + 2z^2z'_x - 2xyz'_xz'_y + 2y^2z'_x + 2zyz'_xz'_y =$

$$= (x^2 + y^2 + z^2)z'_x .$$

Suy ra

$$2xz = (x^2 - y^2 - z^2)z'_x + 2xyz'_y .$$

f) Hệ hai phương trình

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 . \end{cases}$$

Xác định hai hàm số ẩn $y = y(x)$, $z = z(x)$. Lấy đạo hàm theo x hai vế các phương trình trên, ta được

$$\begin{cases} y'(x)+z'(x) = -1 \\ yy'(x)+zz'(x) = -x . \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ấy đối với $y'(x)$, $z'(x)$, ta được

$$y'(x) = \frac{x-z}{z-y}, \qquad z'(x) = \frac{y-x}{z-y} .$$

g) Thế $x = 0$ vào hệ thức

$$F(x, y): = x^3 + y^3 - 3xy - 1 = 0,$$

ta được $y = 1$. Vì

$$F'_y(x, y) = 3y^2 - 3x,$$

$F'_y(0, 1) = 3 \neq 0$, nên hệ thức $F(x, y) = 0$ xác định một hàm số ẩn $y = y(x)$ trong một lân cận U của điểm $x = 0$. Nó có đạo hàm mọi cấp trong lân cận ấy. Khai triển hữu hạn đến cấp 3 của nó trong lân cận ấy là

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2}x^2 + \frac{y'''(0)}{6}x^3 + 0(x^3)$$

Ta đã thấy $y(0) = 1$. Để tính $y'(0)$, ta lấy đạo hàm hai vế hệ thức

$$x^3 + y^3 - 3xy - 1 = 0,$$

ta được

$$3x^2 + 3y^2y' - 3y - 3xy' = 0 \qquad (*)$$

Thế $x = 0$ vào đẳng thức (*), ta được

$$3y^2(0)\, y'(0) = 3y(0) \text{ hay } y'(0) = 1.$$

Lấy đạo hàm hai vế hệ thức (*), ta được

$$6x + 6yy' + 3y^2y'' - 6y' - 3xy'' = 0 \qquad (**)$$

Thế $x = 0$ vào hệ thức (**), ta được $y''(0) = 0$. Lại lấy đạo hàm hai vế hệ thức (**), ta được

$$6 + 6y'^2 + 6yy'' + 6yy'y'' + 3y^2y''' - 9y'' - 3xy''' = 0 \quad (***)$$

Thế $x = 0$ vào hệ thức (***), ta được $y'''(0) = -4$.

Vậy khai triển hữu hạn đến cấp 3 của $y(x)$ trong lân cận U của điểm $x = 0$ là

1

$$y(x) = 1 + x - \frac{2}{3}x^3 + 0(x^3)$$

Chú thích: Câu này còn có thể giải bằng cách khác. Ta viết khai triển hữu hạn của y(x) trong lân cận U dưới dạng

$$y(x) = 1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + 0(x^3)$$

và tìm các hệ số a_1, a_2, a_3 bằng phương pháp hệ số bất định. Thế biểu thức ấy vào hệ thức F(x, y) = 0, ta được

$$x^3 + (1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + 0(x^3))^3 -$$

$$- 3x\,(1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + 0(x^3)) - 1 = 0,\ \forall\, x \in U$$

Nhưng $(1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + 0(x^3))^3 = 1 + a_1^3x^3 + 3a_1x +$

$$+3a_2x^2 + 3a_1^2x^2 + 3a_3x^3 + 0(x^3)$$

$$-3x(1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + 0(x^3)) = -3x - 3a_1x^2 - 3a_2x^3 + 0(x^3)$$

Do đó

$$x^3 + 1 + a_1^3x^3 + 3a_1x + 3a_2x^2 + 3a_1^2x^2 + 3a_3x^3 -$$

$$- 3x - 3a_1x^2 - 3a_2x^3 - 1 + 0(x^3) = 0$$

Hay

$$3\,(a_1 - 1)\,x + 3(a_2 + a_1^2 - a_1)x^2 + (1 + a_1^3 - 3a_2 + 3a_3)x^3 + $$
$$+ 0(x^3) = 0,\ \forall x \in U$$

Điều đó xẩy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a_1 - 1 = 0 \\ a_2 + a_1^2 - a_1 = 0 \\ 1 + a_1^3 - 3a_2 + 3a_3 = 0 \end{cases}$$

Nghiệm của hệ phương trình ấy là $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = -\dfrac{2}{3}$

Vậy khai triển hữu hạn phải tìm là

$$y(x) = 1 + x - \frac{2}{3}x^3 + 0(x^3).$$

h) Thế $x = 0$ vào hệ thức

$$F(x, y) = \text{arctg}(xy) + 1 - e^{x+y} = 0,$$

ta được $y = 0$. Ta có

$$F'_y(x, y) = \frac{x}{1+(xy)^2} - e^{x+y}.$$

Vì $F'_y(0, 0) = -1 \neq 0$, nên hệ thức $F(x, y) = 0$ xác định một hàm số ẩn $y = y(x)$ trong một lân cận U của điểm $x = 0$. Hàm số $y(x)$ có đạo hàm mọi cấp trong lân cận ấy vì $F(x, y)$ có đạo hàm riêng mọi cấp. Khai triển hữu hạn đến cấp 3 của nó trong U có dạng

$$y(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + 0(x^3)$$

(Vì $y(0) = 0$). Thế biểu thức ấy vào hệ thức $F(x, y) = 0$, ta được $\forall x \in U$

$$\text{arctg}(a_1x^2 + a_2x^3 + 0(x^3)) + 1 - e^{(1+a_1)x+a_2x^2+a_3x^3+0(x^3)} = 0. \quad (*)$$

Nhưng

$$\text{arctg}u = u - \frac{u^3}{3} + 0(u^3).$$

Do đó

$$\text{arctg}(a_1x^2 + a_2x^3 + 0(x^3)) = a_1x^2 + a_2x^3 + 0(x^3).$$

Và vì

$$e^v = 1 + v + \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{6} + 0(v^3),$$

nên ta có

$$e^{(1+a_1)x+a_2x^2+a_3x^3+0(x^3)} = 1 + (1 + a_1)x + a_2x^2 + a_3x^3 +$$

$$+ \frac{(1+a_1)^2}{2}x^2 + (1+a_1)a_2x^3 + \frac{(1+a_1)^3}{6}x^3 + 0(x^3).$$

1

Thế các biểu thức ấy vào hệ thức (*), ta được

$$a_1x^2 + a_2x^3 + 1 - 1 - (1 + a_1)x - a_2x^2 - a_3x^3 -$$

$$-\frac{(1+a_1)^2}{2}x^2 - (1 + a_1)a_2x^3 \; - \frac{(1+a_1)^3}{6}x^3 + 0(x^3) = 0 \; .$$

Hay $$(1 + a_1)x + \left(a_1 - a_2 - \frac{(1+a_1)^2}{2}\right)x^2 +$$

$$+\left(a_2 - a_3 - (1+a_1)a_2 \frac{(1+a_1)^3}{6}\right)x^3 + 0(x^3) = 0 \, ,$$

$\forall x \in U$. Điều đó chỉ có thể xẩy ra nếu các hệ số trong khai triển ấy bằng 0

$$\begin{cases} 1+a_1 = 0 \\ a_1 - a_2 - \dfrac{(1+a_1)^2}{2} = 0 \\ a_2 - a_3 - (1+a_1)a_2 - \dfrac{(1+a_1)^3}{6} = 0 . \end{cases}$$

Nghiệm của hệ phương trình là $a_1 = -1$, $a_2 = -1$, $a_3 = -1$. Vậy khai triển hữu hạn đến cấp 3 của hàm số $y(x)$ là:

$$y(x) = -x - x^2 - x^3 + 0(x^3).$$

12. a) $f(x, y) = x^2y + x\sqrt{y}$

$$f'_x(x, y) = 2xy + \sqrt{y} \, , \; f'_y(x, y) = x^2 + \frac{x}{2\sqrt{y}} \; ,$$

$$f''_{x^2}(x,y) = 2y \, , \; f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = 2x + \frac{1}{2\sqrt{y}} \; ,$$

$$f''_{y^2}(x,y) = -\frac{x}{4\sqrt{y^3}} .$$

b) $f(x, y) = \sin(x + y) + \cos(x - y)$

$f'_x(x, y) = \cos(x + y) - \sin(x - y)$

$f'_y(x, y) = \cos(x + y) + \sin(x - y)$

$f''_{x^2}(x,y) = -\sin(x + y) - \cos(x - y)$

$$f''_{xy}(x, y) = -\sin(x + y) + \cos(x - y)$$
$$f''_{y^2}(x,y) = -\sin(x + y) - \cos(x - y).$$

c) $$f(x, y) = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+y^2)^3}$$

$$f'_x(x, y) = \frac{1}{3}\frac{3}{2}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}.2x = x\sqrt{x^2+y^2},$$

$$f'_y(x, y) = y\sqrt{x^2+y^2}$$

$$f''_{x^2}(x, y) = \sqrt{x^2+y^2} + \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+y^2)}} = \frac{2x^2+y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)}},$$

$$f''_{xy}(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{(x^2+y^2)}},$$

$$f''_{y^2}(x,y) = \frac{x^2+2y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)}}.$$

d) $$f(x, y) = x^2\ln(x + y)$$

$$f'_x(x, y) = 2x\ln(x + y) + \frac{x^2}{x+y},$$

$$f'_y(x, y) = \frac{x^2}{x+y},$$

$$f''_{x^2}(x,y) = 2\ln(x + y) + \frac{2x}{x+y} + \frac{x^2+2xy}{(x+y)^2},$$

$$f''_{xy} = \frac{2x}{x+y} - \frac{x^2}{(x+y)^2},$$

$$f''_{y^2}(x,y) = -\frac{x^2}{(x+y)^2}.$$

e) $$f(x, y) = \ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$$

$$f'_x(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

1

$$f'_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}\,(x+\sqrt{x^2+y^2})},$$

$$f''_{x^2}(x, y) = \frac{-x}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}},$$

$$f''_{xy}(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}},$$

$$f''_{y^2}(x, y) = \frac{x^3+(x^2-y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}\,(x+\sqrt{x^2+y^2})^2}.$$

f) $f(x, y) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$

$$f'_x(x, y) = \frac{-y}{x^2+y^2}, \quad f'_y(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2},$$

$$f''_{x^2}(x,y) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad f''_{xy}(x, y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f''_{y^2}(x,y) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

g) $f(x, y) = x^{\ln y}$

$$f'_x(x, y) = \ln y . x^{\ln y - 1},\ f'_y(x, y) = x^{\ln y}.\ln x.\frac{1}{y},$$

$$f''_{x^2}(x,y) = \ln y(\ln y - 1)x^{\ln y-2},$$

$$f''_{xy}(x,y) = \frac{1}{y}\left(\ln y . x^{\ln y-1}.\ln x + x^{\ln y}.\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{y}.x^{\ln y-1}(\ln x \ln y+1),$$

$$f''_{y^2}(x, y) = \ln x\left(-\frac{1}{y^2}x^{\ln y} + \frac{1}{y}x^{\ln y}.\ln x.\frac{1}{y}\right),$$

$$= \frac{\ln x . x^{\ln y}}{y^2}(\ln x - 1).$$

h) $f(x, y) = \cos(ax + e^y)$

$$f'_x(x, y) = -\sin(ax + e^y).a,$$

$$f'_y(x, y) = -\sin(ax + e^y).e^y$$

$$f''_{x^2}(x, y) = -\cos(ax + e^y).a^2$$

$$f''_{xy}(x, y) = -\cos(ax + e^y).ae^y$$

$$f''_{y^2}(x, y) = -\cos(ax + e^y) \,.\, e^{2y} - \sin(ax + e^y) \,.\, e^y \,.$$

13. a) Với $x \neq -y$, ta có

$$f'_x(x, y) = \frac{(x + y)y^2 - xy^2}{(x + y)^2} = \frac{y^3}{(x + y)^2}$$

$$f'_y(x, y) = \frac{(x + y)2xy - xy^2}{(x + y)^2} = \frac{2x^2y + xy^2}{(x + y)^2}$$

Do đó ta có

$$f'_x(0, y) = y, \forall y \neq 0; \ f'_y(x, 0) = 0, \forall x \neq 0.$$

Ta lại có

$$f(x, 0) = 0 \ \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow f'_x(0, 0) = 0$$

$$f(0, y) = 0 \ \forall y \in \mathbf{R} \Rightarrow f'_y(0, 0) = 0$$

Từ các kết quả ấy, ta được

$$f''_{yx}(0, 0) = (f'_y)'_x(0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{f'_y(h, 0) - f'_y(0, 0)}{h} = 0$$

$$f''_{xy}(0, 0) = (f'_x)'_y(0, 0) = \lim_{k\to 0} \frac{f'_x(0, k) - f'_x(0, 0)}{k} =$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{k}{k} = 1$$

Chú thích: $f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$, theo định lý Schwarz các đạo hàm riêng cấp 2 $f''_{xy}(x, y)$, $f''_{yx}(x, y)$ không liên tục tại (0, 0). Ta có thể thấy lại điều đó. Thật vậy, với $x \neq -y$, ta có

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = \frac{y^4 + 3x^2y^2 + 4xy^3}{(x + y)^4}$$

Khi $(x, y) \to (0, 0)$ dọc theo trục hoành, $f''_{xy}(x, y) \to 0$

Khi $(x, y) \to (0, 0)$ dọc theo đường $y = x$, $f''_{xy}(x, y) \to \frac{1}{2} \neq 0$

Do đó $f''_{xy}(x, y)$ và $f''_{yx}(x, y)$ gián đoạn tại $(0, 0)$.

b) Với $(x, y) \neq (0, 0)$, ta có

$$f'_x(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)(3x^2y - y^3) - (x^3y - y^3x)\,2x}{(x^2 + y^2)^2} =$$

$$= \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f'_y(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)(x^3 - 3xy^2) - (x^3y - y^3x)\,2y}{(x^2 + y^2)^2} =$$

$$= -\frac{x(y^4 + 4x^2y^2 - x^4)}{(x^2 + y^2)^2}$$

Do đó

$$f'_x(0, y) = -\frac{y^5}{y^4} = -y \quad \forall y \neq 0$$

$$f'_y(x, 0) = \frac{x^5}{x^4} = x \qquad \forall x \neq 0.$$

Ta lại có

$$f(x, 0) = 0 \quad \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow f'x(0, 0) = 0$$

$$f(0, y) = 0 \quad \forall y \in \mathbf{R} \Rightarrow f'_y(0, 0) = 0$$

1 Suy ra

$$f''_{yx}(0,0) = (f'_y)'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f'_y(h,0) - f'_y(0,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1 \ ,$$

$$f''_{xy}(0,0) = (f'_x)'_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f'_x(0,k) - f'_x(0,0)}{k} =$$

$$= \lim_{k\to 0} -\frac{k}{k} = -1 \ .$$

Ta cũng có kết luận như ở câu trên.

14. a) Vì $u''_{xy} = (u'_x)'_y = 0$, nên u'_x không phụ thuộc y, hay

$$u'_x = f(x) \ ,$$

trong đó f là một hàm số tùy ý. Do đó

$$u(x, y) = F(x) + G(y),$$

trong đó F(x) là một hàm số khả vi tùy ý (vì là nguyên hàm của hàm số tùy ý f(x)), G(y) là một hàm số tùy ý (G(y) đóng vai trò của hằng số tùy ý khi lấy tích phân đối với x).

b) Từ hệ thức

$$u''_{x^2} = (u'_x)'_x = 0 \ ,$$

ta suy ra

$$u'_x = f(y) \ ,$$

trong đó f là một hàm số tuỳ ý. Do đó

$$u(x, y) = xf(y) + g(y) \ ,$$

g là một hàm số tùy ý.

c) Từ hệ thức

$$u'''_{xyz} = (u''_{xy})'_z = 0 \ ,$$

ta được

$$u''_{xy} = f(x, y) ,$$

trong đó f(x, y) là một hàm số tùy ý. Do đó, vì $u''_{xy} = (u'_x)'_y$ ta được

$$u'_x = f_1(x, y) + g(x, z) ,$$

trong đó $f_1(x, y)$ là một nguyên hàm theo y của f(x, y), g(x, z) là một hàm số tùy ý. Từ hệ thức ấy, ta suy ra

$$u(x, y, z) = F(x, y) + G(x, z) + H(y, z) ,$$

trong đó F, G, H là ba hàm số tùy ý, G khả vi, F khả vi hai lần.

d) Từ hệ thức

$$u''_{x^2} = 12x^2y+2 ,$$

suy ra

$$u'_x = 4x^3y + 2x + f(y),$$

trong đó f là một hàm số khả vi tuỳ ý. Do đó

$$u(x, y) = x^4y + x^2 + xf(y) + g(y) ,$$

g là một hàm số khả vi tuỳ ý. Lấy đạo hàm hai vế đối với y, ta được

$$u'_y = x^4 + xf'(y) + g'(y) .$$

Mặt khác, theo giả thiết

$$u'_y = x^4 - 30xy^5 .$$

Do đó

$$f'(y) = -30y^5, \quad g'(y) = 0 .$$

Suy ra

1 $$f(y) = -5y^6 + C_1, g(y) = C_2 .$$

Vậy

$$u(x, y) = x^4y + x^2 - 5xy^6 + C_1x + C_2 .$$

Nhưng vì $u(0, 0) = 1$, ta được $C_2 = 1$, và vì $u(1, 1) = -2$, ta được $C_1 = 0$. Do đó

$$u(x, y) = x^4y + x^2 - 5xy^6 + 1 .$$

e) Từ hệ thức

$$u'_x = x^2 - 2xy^2 + 3 ,$$

ta được

$$u = \frac{x^3}{3} - x^2y^2 + 3x + f(y) ,$$

trong đó f là một hàm số khả vi tùy ý. Do đó

$$u'_y = -2x^2y + f'(y) .$$

Nhưng theo giả thiết

$$u'_y = y^2 - 2x^2y + 3 .$$

So sánh hai biểu thức ấy của u'_y, ta được

$$f'(y) = y^2 + 3 .$$

Do đó

$$f(y) = \frac{y^3}{3} + 3y + C ,$$

trong đó C là hằng số tùy ý. Vậy

$$u(x, y) = \frac{1}{3}(x^3 + y^3) - x^2y^2 + 3(x+y) + C .$$

f) Từ hệ thức

1

$$u'_x = \frac{(3x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}{x^2y} = \frac{3x^2}{y} + 2y - \frac{y^3}{x^2} ,$$

ta được $$u(x, y) = \frac{x^3}{y} + 2xy + \frac{y^3}{x} + f(y),$$

trong đó f là một hàm số khả vi tùy ý. Do đó

$$u'_y = -\frac{x^3}{y^2} + 2x + \frac{3y^2}{x} + f'(y).$$

Theo giả thiết

$$u'_y = \frac{(3y^2-x^2)(x^2+y^2)}{xy^2} = \frac{3y^2}{x} + 2x - \frac{x^3}{y^2}.$$

So sánh hai biểu thức của u'_y, ta được

$$f'(y) = 0 \Rightarrow f(y) = C,$$

trong đó C là hằng số tùy ý. Vậy

$$u(x, y) = \frac{x^3}{y} + 2xy + \frac{y^3}{x} + C = \frac{(x^2+y^2)^2}{xy} + C.$$

15. a) Đặt $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Ta có $u = -\ln r$. Do đó

$$u'_x = \frac{-1}{r}.r'_x = \frac{-1}{r}.\frac{x}{r} = \frac{-x}{r^2}.$$

Vì vậy

$$u''_{x^2} = \frac{-r^2+x.2r.\frac{x}{r}}{r^4} = \frac{-r^2+2x^2}{r^4}.$$

Trong biểu thức của u, các biến số x, y có vai trò đối xứng, do đó

$$u''_{y^2} = \frac{-r^2+2y^2}{r^4}.$$

Suy ra $$\Delta u = u''_{x^2} + u''_{y^2} = \frac{-2r^2+2(x^2+y^2)}{r^4} = \frac{-2r^2+2r^2}{r^4} = 0.$$

b) Đặt $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Ta có $u = \frac{1}{r}$. Do đó

$$u'_x = -\frac{1}{r^2} \cdot r'_x = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{x}{r} = -\frac{x}{r^3}$$

Vì vậy

$$u''_{x^2} = -\frac{r^3 - x \cdot 3r^2 \cdot \dfrac{x}{r}}{r^6} = -\frac{r^3 - 3rx^2}{r^6}$$

Cũng vậy, ta được

$$u''_{y^2} = -\frac{r^3 - 3ry^2}{r^6}$$

$$u''_{z^2} = -\frac{r^3 - 3rz^2}{r^6}$$

Do đó

$$\Delta u = u''_{x^2} + u''_{y^2} + u''_{z^2} = -\frac{3r^3 - 3r\,(x^2 + y^2 + z^2)}{r^6} =$$

$$= \frac{3r^3 - 3r^3}{r^6} = 0 .$$

c) $\quad u(x, y, z) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \operatorname{arctg}\dfrac{z}{y} + \operatorname{arctg}\dfrac{x}{z}$

Do đó

$$u'_x = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) + \frac{1}{1 + \left(\dfrac{x}{z}\right)^2} \cdot \frac{1}{z} =$$

$$= -\frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{z}{x^2 + z^2}$$

$$u''_{x^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2xz}{(x^2 + z^2)^2}$$

Biểu thức của u không đổi khi ta hoán vị vòng quanh các biến số x, y, z. Do đó

$$u''_{y^2} = \frac{2yz}{(y^2 + z^2)^2} - \frac{2yx}{(y^2 + x^2)^2}$$

1

$$u''_{z^2} = \frac{2zx}{(x^2 + z^2)^2} - \frac{2zy}{(z^2 + y^2)^2}$$

Vậy

$$\Delta u = u''_{x^2} + u''_{y^2} + u''_{z^2} = 0 .$$

d) Ta có $u = f(r)$, trong đó $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Do đó

$$u'_x = f'(r) . r'_x = f'(r) . \frac{x}{r}$$

$$u''_{x^2} = f''(r) . \left(\frac{x}{r}\right)^2 + f'(r) \frac{r - x . \frac{x}{r}}{r^2} =$$

$$= f''(r) \left(\frac{x}{r}\right)^2 + f'(r) \frac{r^2 - x^2}{r^3}$$

Bằng cách hoán vị vòng quanh các biến số x, y, z, ta được u''_{y^2} và u''_{z^2}. Do đó

$$\Delta u = u''_{x^2} + u''_{y^2} + u''_{z^2} = f''(r) + \frac{3r^2 - r^2}{r^3} f'(r)$$
$$= f''(r) + \frac{2}{r} f'(r)$$

Ta cần tìm f sao cho

$$f''(r) + \frac{2}{r} f'(r) = 0$$

Đặt $f'(r) = g(r)$, ta được

$$g'(r) + \frac{2}{r} g(r) = 0$$

Hay

$$\frac{g'(r)}{g(r)} = -\frac{2}{r}$$

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được

$$\ln|g(r)| = -2\ln|r| + \ln|A| = \ln \frac{|A|}{r^2} ,$$

trong đó A là một hằng số tùy ý. Vậy

$$g(r) = \frac{A}{r^2}.$$

Nhưng $g(r) = f'(r) = \dfrac{A}{r^2}$, do đó

$$f(r) = -\frac{A}{r} + B,$$

trong đó B cũng là một hằng số tùy ý.

Chú ý rằng nếu chọn A = – 1, B = 0, ta được $f(r) = \dfrac{1}{r}$. Vậy hàm số $u(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ thỏa mãn phương trình $\Delta u = 0$, như đã thấy ở câu b) .

16. Đặt $u = \dfrac{y}{x}$, ta có $z = xf(u)$. Do đó

$$z'_x = f(u) + xf'(u)\left(-\frac{y}{x^2}\right) = f(u) - \frac{y}{x}f'(u)$$

$$z'_y = xf'(u)\frac{1}{x} = f'(u)$$

$$z''_{x^2} = f'(u)\left(-\frac{y}{x^2}\right) + \frac{y}{x^2}f'(u) - \frac{y}{x}f''(u)\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{y^2}{x^3}f''(u)$$

$$z''_{xy} = z''_{yx} = (z'_y)'_x = (f'(u))'_x = -\frac{y}{x^2}f''(u)$$

$$z''_{y^2} = (f'(u))'_y = \frac{1}{x}f''(u)$$

Ta được

$$z''_{x^2} \cdot z''_{y^2} = \frac{y^2}{x^4}[f''(u)]^2 = (z''_{xy})^2$$

Chú thích 1: Ta nhận xét rằng biểu thức của hàm số z chứa f, trong đó f là một hàm số bất kỳ khả vi liên tục hai lần, mà hệ thức ta cần chứng minh không chứa f một cách tường minh. Do đó, sau khi tính được

$$z'_x = f(u) - \frac{y}{x}f'(u) \qquad (*)$$

$$z'_y = f'(u) \qquad (**)$$

ta tìm cách khử f'(u) từ hai hệ thức (*) và (**), bằng cách nhân hai vế của (*) với x, nhân hai vế của (**) với y, rồi cộng lại, ta được

$$xz'_x + yz'_y = xf(u) = z \qquad (***)$$

Lần lượt lấy đạo hàm hai vế của (***) theo x rồi theo y, ta được

$$xz''_{x^2} + z'_x + yz''_{yx} = z'_x$$

$$xz''_{xy} + yz''_{y^2} + z'_y = z'_y$$

hay

$$xz''_{x^2} + yz''_{yx} = 0$$

$$xz''_{xy} + yz''_{y^2} = 0$$

Xem hệ ấy là hệ hai phương trình đại số tuyến tính thuần nhất đối với x, y. Nó có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi định thức của nó bằng 0:

$$\begin{vmatrix} z''_{x^2} & z''_{yx} \\ z''_{xy} & z''_{y^2} \end{vmatrix} = 0$$

tức là $$z''_{x^2} \cdot z''_{y^2} = (z''_{xy})^2.$$

Chú thích 2. Có thể nhận xét rằng hàm số $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$ là một hàm số thuần nhất bậc 1, do đó theo công thức Euler, ta có

$$xz'_x + yz'_y = z$$

Đó chính là hệ thức (***).

Cũng từ nhận xét này, ta suy ra rằng mọi hàm số z(x, y) thuần nhất bậc 1 đều thỏa mãn phương trình

$$z''_{x^2} \cdot z''_{y^2} = (z''_{xy})^2 .$$

17. a) Ta có

$$z = f\left(\frac{y}{x}\right) + xg\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$z'_x = f'\left(\frac{y}{x}\right).\left(-\frac{y}{x^2}\right) + xg'\left(\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right) + g\left(\frac{y}{x}\right),$$

hay

$$z'_x = -\frac{y}{x^2}f'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right) + g\left(\frac{y}{x}\right), \qquad (1)$$

$$z'_y = f'\left(\frac{y}{x}\right).\frac{1}{x} + xg'\left(\frac{y}{x}\right).\frac{1}{x},$$

hay

$$z'_y = \frac{1}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right) + g'\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (2)$$

Nhân hai vế của (1) với x, nhân hai vế của (2) với y rồi cộng lại, ta được

$$xz'_x + yz'_y = xg\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (3)$$

Lần lượt lấy đạo hàm hai vế của đẳng thức (3) theo x rồi theo y, ta được

$$xz''_{x^2} + z'_x + yz''_{yx} = -\frac{y}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right) + g\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (4)$$

$$xz''_{xy} + yz''_{y^2} + z'_y = g'\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (5)$$

Nhân hai vế của (4) với x, nhân hai vế của (5) với y, rồi cộng lại, ta được

$$x^2z''_{x^2} + 2xyz''_{xy} + y^2z''_{y^2} + xz'_x + yz'_y = xg\left(\frac{y}{x}\right)$$

hay do (3)

$$x^2z''_{x^2} + 2xyz''_{xy} + y^2z''_{y^2} = 0$$

1 Đó chính là phương trình (*) mà ta phải chứng minh.

b) Để giải phương trình (*), ta đổi biến số

$$u = x,\ v = \frac{y}{x}$$

Do đó

$$z'_x = z'_u \,.\, u'_x + z'_v \,.\, v'_x = z'_u - \frac{y}{x^2} z'_v$$

$$z'_y = z'_u \,.\, u'_y + z'_v \,.\, v'_y = \frac{1}{x} z'_v$$

$$z''_{x^2} = (z'_u)'_x - \frac{y}{x^2}(z'_v)'_x + \frac{2y}{x^3} z'_v =$$

$$= z''_{u^2} u'_x + z''_{uv} v'_x - \frac{y}{x^2}(z''_{vu} u'_x + z''_{v^2} v'_x) + \frac{2y}{x^3} z'_v$$

$$= z''_{u^2} - \frac{y}{x^2} z''_{uv} - \frac{y}{x^2} z''_{vu} + \frac{y^2}{x^4} z''_{v^2} + \frac{2y}{x^3} z'_v$$

$$= z''_{u^2} - \frac{2y}{x^2} z''_{uv} + \frac{y^2}{x^4} z''_{v^2} + \frac{2y}{x^3} z'_v$$

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = (z'_u)'_y - \frac{y}{x^2}(z'_v)'_y - \frac{1}{x^2} z'_v =$$

$$= z''_{uv} \frac{1}{x} - \frac{y}{x^2} \,.\, z''_{v^2} \,.\, \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} z'_v =$$

$$= \frac{1}{x} z''_{uv} - \frac{y}{x^3} z''_{v^2} - \frac{1}{x^2} z'_v$$

$$z''_{y^2} = \frac{1}{x^2} z''_{v^2}$$

Thế các biểu thức ấy vào phương trình (*), ta được

$$x^2 z''_{u^2} - 2yz''_{uv} + \frac{y^2}{x^2} z''_{v^2} + \frac{2y}{x} z'_v +$$

$$+ 2yz''_{uv} - \frac{2y^2}{x^2} z''_{v^2} - \frac{2y}{x} z'_v + \frac{y^2}{x^2} z''_{v^2} = x^2 z''_{u^2} = 0$$

Do đó

$$z''_{u^2} = 0$$

Mọi hàm số z có dạng

$$z = f(v) + ug(v)$$

trong đó f, g là những hàm số tùy ý, thỏa mãn phương trình ấy (xem bài tập 14, b).

Tóm lại hàm số có dạng

$$z(x, y) = f\left(\frac{y}{x}\right) + xg\left(\frac{y}{x}\right)$$

thỏa mãn phương trình (*).

18. a) Thực hiện phép đổi biến số

$$u = y + ax, v = y - ax,$$

ta có

$$z'_x = az'_u - az'_v$$

$$z'_y = z'_u + z'_v$$

$$z''_{x^2} = a(az''_{u^2} - az''_{uv}) - a(az''_{vu} - az''_{v^2}) =$$

$$= a^2z''_{u^2} - 2a^2z''_{uv} + a^2z''_{v^2}$$

$$z''_{y^2} = z''_{uu} + z''_{uv} + z''_{vu} + z''_{v^2} =$$

$$= z''_{u^2} + 2z''_{uv} + z''_{v^2}.$$

Thế vào phương trình đã cho, ta được

$$z''_{x^2} - a^2z''_{y^2} = -4a^2z''_{uv} = 0$$

Do đó

$$z''_{uv} = 0$$

Ta đã biết rằng phương trình đó được thỏa mãn bởi hàm số

$$z = f(u) + g(v),$$

trong đó f, g là hai hàm số khả vi tùy ý (xem bài tập 14, a).Vậy hàm số phải tìm là

$$z = f(y + ax) + g(y - ax)\,.$$

b) Đổi biến số $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$, ta có

$$z'_x = z'_u \cdot u'_x + z'_v \cdot v'_x = yz'_u - \frac{y}{x^2} z'_v$$

$$z'_y = z'_u \cdot u'_y + z'_v \cdot v'_y = xz'_u + \frac{1}{x} z'_v$$

$$z''_{x^2} = y\left(z''_{u^2} y - \frac{y}{x^2} z''_{uv}\right) - \frac{y}{x^2}\left(yz''_{vu} - \frac{y}{x^2} z''_{v^2}\right) + \frac{2y}{x^3} z'_v =$$

$$= y^2 z''_{u^2} - \frac{2y^2}{x^2} z''_{uv} + \frac{y^2}{x^4} z''_{v^2} + \frac{2y}{x^3} z'_v$$

$$z''_{y^2} = x\left(xz''_{u^2} + \frac{1}{x} z''_{uv}\right) + \frac{1}{x}\left(xz''_{vu} + \frac{1}{x} z''_{v^2}\right) =$$

$$= x^2 z''_{u^2} + 2z''_{uv} + \frac{1}{x^2} z''_{v^2}$$

Do đó $\quad xz'_x - yz'_y = -2\frac{y}{x} z'_v$

$$x^2 z''_{x^2} - y^2 z''_{y^2} = -4y^2 z''_{uv} + 2\frac{y}{x} z'_v$$

Thế các biểu thức ấy vào phương trình đã cho, ta được

$$4y^2 z''_{uv} = 4\frac{y}{x} z'_v$$

Hay

1 $$uz''_{uv} = z'_v$$

Đặt $g = z'_v$, ta được

$$ug'_u = g$$

Hay

$$\frac{g'_u}{g} = \frac{1}{u} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial u}(\ln|g|) = \frac{\partial}{\partial u}(\ln|u|)$$

Suy ra

$$\ln|g| = \ln|u| + \ln|h(v)|,$$

trong đó h(v) là một hàm số tùy ý, số hạng ln|h(v)| đóng vai trò của hằng số tích phân khi lấy tích phân theo u. Do đó

$$g = u.h(v)$$

Nhưng $g = z'_v$, vậy

$$z = u \,.\, H(v) + K(u)\,,$$

trong đó H(v) là một nguyên hàm của h(v), K(u) là một hàm số bất kỳ. Tóm lại hàm số phải tìm là

$$z(x, y) = xy\, H\left(\frac{y}{x}\right) + K(xy)\,,$$

trong đó H và K là hai hàm số khả vi tùy ý.

19. a) Gọi $\vec{l}$ là vectơ đơn vị của $\overrightarrow{M_oM_1}$. Vì vectơ $\overrightarrow{M_oM_1}$ có tọa độ là (– 1, 2, – 2) nên vectơ $\vec{l}$ có tọa độ là $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$. Ta có

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_o) = \frac{\partial u(M_o)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u(M_o)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u(M_o)}{\partial z}\cos\gamma$$

trong đó cosα, cosβ, cosγ là các tọa độ của $\vec{l}$. Vì

$$u = xy^2z^3,$$

ta có

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2z^3\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2xyz^3\,, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 3xy^2z^2$$

Do đó

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_o) = (-4)\left(-\frac{1}{3}\right) + (-4)\left(\frac{2}{3}\right) + 12 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{28}{3} \cdot$$

b) Gọi $\vec{l}$ là vectơ đơn vị của $\vec{v}$, các tọa độ của $\vec{l}$ là $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$. Ta có $z = x^2 - xy + y^2$, do đó $z'_x = 2x - y$, $z'_y = 2y - x$. Vậy

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}(M) = 1 . \frac{3}{5} + 1 . \frac{4}{5} = \frac{7}{5}$$

c) Ta có

$$z = \ln(x^2 + y^2)$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}z = \frac{2x}{x^2 + y^2}\vec{i} + \frac{2y}{x^2 + y^2}\vec{j}$$

Vậy vectơ $\overrightarrow{\text{grad}}z(M)$ có các tọa độ là $\left(\frac{6}{25}, \frac{8}{25}\right)$. Ta biết rằng

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = \text{ch}_{\vec{l}}\,\overrightarrow{\text{grad}}z$$

Do đó nếu hướng của $\vec{l}$ trùng với hướng của $\overrightarrow{\text{grad}}z$ thì

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = |\overrightarrow{\text{grad}}z|. \text{ Vậy}$$

$$\frac{\partial z(M)}{\partial \vec{l}} = \sqrt{\left(\frac{6}{25}\right)^2 + \left(\frac{8}{25}\right)^2} = \frac{2}{5} \cdot$$

d) Vectơ $\overrightarrow{M_oM_1}$ có các tọa độ (2, 1, 2), vectơ đơn vị $\vec{l}$ của nó có các tọa độ $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Ta có

$$u = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Do đó

$$u'_x = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{z^2}{x^2 + y^2}}} \cdot \left(- \frac{zx}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} \right) = - \frac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2 - z^2} \cdot (x^2 + y^2)}$$

$$u'_y = - \frac{yz}{\sqrt{x^2 + y^2 - z^2} \cdot (x^2 + y^2)}$$

$$u'_z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - z^2}}$$

Vậy

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_o) = - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6} \cdot$$

e) Bán kính vectơ $\vec{r}$ của điểm M(x, y, z) có các tọa độ là (x, y, z). Vectơ đơn vị $\vec{l}$ của nó có các tọa độ $\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right)$ trong đó $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Ta có

$$u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

Do đó

$$u'_x = \frac{2x}{a^2}, \; u'_y = \frac{2y}{b^2}, \; u'_z = \frac{2z}{c^2}$$

Vậy

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M) = \frac{1}{r} \left(\frac{2x^2}{a^2} + \frac{2y^2}{b^2} + \frac{2z^2}{c^2} \right) = \frac{2u}{r}$$

Đạo hàm ấy bằng $|\overrightarrow{\text{grad}u}|$ khi và chỉ khi hướng của $\vec{l}$ trùng với hướng của $\overrightarrow{\text{grad}u}$. Vì $\overrightarrow{\text{grad}u}$ có các tọa độ là $\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2}$, nên điều nói trên xảy ra khi và chỉ khi

1

$$\frac{x}{\dfrac{2x}{a^2}} = \frac{y}{\dfrac{2y}{b^2}} = \frac{z}{\dfrac{2z}{c^2}} > 0$$

tức là $a^2 = b^2 = c^2$, hay $a = b = c$.

f) Ta có $$u = \frac{1}{r}$$

trong đó $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, do đó

$$u'_x = u'_r \cdot r'_x = -\frac{1}{r^2}\cdot\frac{x}{r} = -\frac{x}{r^3},\ u'_y = -\frac{y}{r^3},\ u'_z = -\frac{z}{r^3}.$$

Vậy

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = -\frac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{r^3}$$
$$= -\frac{1}{r^2}\left(\frac{x}{r}\cos\alpha + \frac{y}{r}\cos\beta + \frac{z}{r}\cos\gamma\right)$$

Gọi $\vec{r_0}$ là vectơ đơn vị của bán kính vectơ $\vec{r}$ của điểm M(x, y, z). Ba tọa độ của $\vec{r_o}$ là $\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right)$, còn ba tọa độ của vectơ $\vec{l}$ là ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$), do đó

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = -\frac{1}{r^2}(\vec{r_0}, \vec{l})$$

Đạo hàm ấy triệt tiêu $\Leftrightarrow \vec{r_o} \perp \vec{l} \Leftrightarrow \vec{r} \perp \vec{l}$.

20. a) Ta có $u = x^2y^2z^2$. Do đó

$$u'_x = 2xy^2z^2,\ u'_y = 2x^2yz^2,\ u'_z = 2x^2y^2z$$

Vậy

$$\overrightarrow{\text{grad}u}\ (M_o) = u'_x(M_o)\vec{i} + u'_y(M_o)\vec{j} + u'_z(M_o)\vec{k}$$
$$= 18\vec{i} - 18\vec{j} + 6\vec{k}.$$

Vectơ $\overrightarrow{M_oM_1}$ có các tọa độ (– 1, 2, – 2), do đó vectơ đơn vị $\vec{l}$ của nó có tọa độ $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$. Do đó

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_o) = 18\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) - 18\cdot\left(\frac{2}{3}\right) + 6\left(-\frac{2}{3}\right) = -22\ .$$

1 b) Ta có u = xsinyz. Do đó

$$u'_x = \sin yz,\ u'_y = xz\cos yz,\ u'_z = xy\cos yz$$

Vậy

$$\overrightarrow{\text{grad}}u\,(M_o) = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 3\vec{k} = 3\vec{k}.$$

Các cosin chỉ hướng của vectơ $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ là $\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{2}{\sqrt{6}},\ -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$. Do đó

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_o) = 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} + 0 \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} + 3 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = -\sqrt{\frac{3}{2}}\,.$$

c) Ta có $z = xe^y$. Do đó

$$z'_x = e^y,\ z'_y = xe^y$$

Vận tốc biến thiên của z theo hướng của vectơ $\overrightarrow{M_oM_1}$ được biểu diễn bởi đạo hàm của z theo hướng ấy. Các tọa độ của vectơ $\overrightarrow{M_oM_1}$ là (3, 4), do đó vectơ đơn vị $\vec{l}$ của nó có tọa độ $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$. Vậy

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_o) = z'_x(M_o)\cos\alpha + z'_y(M_o)\cos\beta =$$

$$= 1 \cdot \frac{3}{5} + 2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{11}{5}$$

Vận tốc biến thiên của hàm số z tại M_0 có giá trị tuyệt đối đạt cực đại khi hướng lấy đạo hàm trùng với hướng của vectơ $\overrightarrow{\text{grad}}z\,(M_o) = \vec{i} + 2\vec{j}$. Giá trị cực đại ấy bằng

$$|\overrightarrow{\text{grad}}z\,(M_o)| = \sqrt{1 + 2^2} = \sqrt{5}\,.$$

d) Ta có $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$. Do đó

$$u'_x = 3x^2 - 3yz,\ u'_y = 3y^2 - 3zx,\ u'_z = 3z^2 - 3xy$$

Vậy $\quad \overrightarrow{\text{grad}}u\,(M_o) = -3\vec{i} + 9\vec{j} - 3\vec{k}.$

Suy ra $|\overrightarrow{\text{grad}}u\,(M_o)| = \sqrt{3^2 + 9^2 + 3^2} = \sqrt{99} = 3\sqrt{11}$. Ba cosin

1 chỉ hướng của $\overrightarrow{\text{grad}}u\,(M_o)$ là $\left(\frac{-1}{\sqrt{11}},\ \frac{3}{\sqrt{11}},\ -\frac{1}{\sqrt{11}}\right)$.

Vectơ $\overrightarrow{\text{grad}}u$ vuông góc với trục Oz khi toạ độ thứ ba của nó triệt tiêu, tức là khi $x^2 = xy$. Vectơ $\overrightarrow{\text{grad}}u$ triệt tiêu khi cả ba toạ độ của nó bằng không tức là khi

$$x^2 = yz,\ y^2 = zx,\ z^2 = xy$$

tức là

$$x = y = z\ .$$

21. a) Theo định nghĩa của gradiên, ta có

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,(C_1u_1 + C_2u_2) = \frac{\partial}{\partial x}(C_1u_1 + C_2u_2)\vec{i} + + \frac{\partial}{\partial y}(C_1u_1 + C_2u_2)\vec{j} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}(C_1u_1 + C_2u_2)\vec{k} =$$

$$= C_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u_1}{\partial z}\vec{k}\right) + C_2\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u_2}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u_2}{\partial z}\vec{k}\right) =$$

$$= C_1\,\overrightarrow{\text{grad}}\,u_1 + C_2\overrightarrow{\text{grad}}\,u_2\ .$$

b) $$\overrightarrow{\text{grad}}\,(u_1 \cdot u_2) = \frac{\partial}{\partial x}(u_1 \cdot u_2)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}(u_1 \cdot u_2)\,\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}(u_1 \cdot u_2)\,\vec{k} =$$

$$= \left(u_1\frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)\vec{i} + \left(u_1 \cdot \frac{\partial u_2}{\partial y} + u_2\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\vec{j} +$$

$$+ \left(u_1\frac{\partial u_2}{\partial z} + u_2\frac{\partial u_1}{\partial z}\right)\vec{k} = u_1\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u_2}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u_2}{\partial z}\vec{k}\right) +$$

$$+ u_2\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u_1}{\partial z}\vec{k}\right) = u_1\,\overrightarrow{\text{grad}}\,u_2 + u_2\,\overrightarrow{\text{grad}}\,u_1\ .$$

c) $$\overrightarrow{\text{grad}}\,(f(u)) = \frac{\partial}{\partial x}(f(u))\,\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}(f(u))\,\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}(f(u))\,\vec{k} =$$

$$= f'(u)\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + f'(u)\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + f'(u)\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} =$$

$$= f'(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\right) = f'(u)\,\overrightarrow{\text{grad}}.\,u\ .$$

22. a) Theo công thức Taylor, ta có

$$f(M) = f(M_o) + df(M_o) + \frac{1}{2!}d^2f(M_o) + \ldots + \frac{1}{n!}d^nf(M_o) + R_n,$$

trong đó R_n là phần dư. Vì $f(x, y)$ là một đa thức bậc hai đối với x, y, nên các đạo hàm riêng cấp lớn hơn hai của nó đều bằng không. Do đó

$$f(M) = f(M_o) + df(M_o) + \frac{1}{2!}d^2f(M_o).$$

Ta có

$f(M) = f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$

$f'_x(x, y) = 4x - y - 6,\ f'_y(x, y) = -x - 2y - 3$

$f''_{x^2}(x, y) = 4,\ f''_{xy}(x, y) = -1,\ f''_{y^2}(x, y) = -2$

Do đó

$f(M_o) = 5,\ f'_x(M_o) = 0,\ f'_y(M_o) = 0$

$f''_{x^2}(M_o) = 4,\ f''_{xy}(M_o) = -1,\ f''_{y^2}(M_o) = -2$

Suy ra

$df(M_o) = 0$

$d^2f(M_o) = 4(x - 1)^2 - 2(x - 1)(y + 2) - 2(y + 2)^2$

$f(x) = 5 + 2(x - 1)^2 - (x - 1)(y + 2) - (y + 2)^2.$

b) Ta có

$f(x, y) = x^y$

$f'_x(x, y) = yx^{y-1},\ f'_y(x, y) = x^y\ln x$

$f''_{x^2}(x, y) = y(y - 1)x^{y-2}$

$f''_{xy}(x, y) = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x = x^{y-1}(1 + y\ln x)$

$f''_{y^2}(x, y) = x^y\ln^2 x$

$f'''_{x^3}(x, y) = y(y - 1)(y - 2)x^{y-3}$

1 $f'''_{x^2y}(x, y) = (2y - 1)x^{y-2} + y(y - 1)x^{y-2}\ln x$

$f'''_{xy^2}(x, y) = x^{y-1}\ln x(1 + y\ln x) + x^{y-1}\ln x =$

$$= x^{y-1}(y\ln^2 x + 2\ln x)$$

$f'''_{y^3}(x, y) = x^y\ln^3 x$

Do đó

$f(M_o) = 1$, $f'_x(M_o) = 1$, $f'_y(M_o) = 0$, $f''_{x^2}(M_o) = 0$, $f''_{xy}(M_o) = 1$,

$f''_{y^2}(M_o) = 0$, $f'''_{x^3}(M_o) = 0$, $f'''_{x^2y}(M_o) = 1$, $f'''_{xy^2}(M_o) = 0$, $f'''_{y^3}(M_o) = 0$

Vậy

$$f(x, y) = x^y = 1 + (x - 1) + (x - 1)(y - 1) + \frac{1}{2}(x - 1)^2(y - 1) + R_3(x, y).$$

23. a) Hàm số $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$ xác định $\forall(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Ta có

$$p = z'_x = 4 - 2x,\ q = z'_y = -4 - 2y.$$

Cho $z'_x = 0$, $z'_y = 0$, ta được một điểm tới hạn duy nhất là điểm $M_o(2, -2)$. Ta có

$$r = z''_{x^2} = -2,\ s = z''_{xy} = 0,\ t = z''_{y^2} = -2$$

Vậy $s^2 - rt = -4 < 0$, do đó M_o là điểm cực trị. Vì $r < 0$, nên M_0 là điểm cực đại, $z_{max} = z(M_o) = z(2, -2) = 8$.

b) Hàm số $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$ xác định $\forall(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Ta có

$$p = 2x + y + 1,\ q = x + 2y - 1$$

Cho $p = 0$, $q = 0$, ta được một điểm tới hạn duy nhất là điểm $M_0(-1, 1)$. Ta có

$$r = 2,\ s = 1,\ t = 2$$

Do đó $s^2 - rt = 1 - 4 = -3 < 0$, vậy M_o là điểm cực trị. Đó là điểm cực tiểu vì $r > 0$, $z_{min} = z(M_o) = z(-1, 1) = 0$.

c) Hàm số $z = x + y - xe^y$ xác định $\forall(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Ta có

$$p = 1 - e^y, q = 1 - xe^y$$

Cho $p = 0$, $q = 0$, ta được một điểm tới hạn duy nhất là điểm $M_o(1, 0)$. Ta có

$$r = 0, s = -e^y, t = -xe^y$$

Tại điểm M_o, ta có $s^2 - rt = (-1)^2 = 1 > 0$, vậy M_o không là điểm cực trị, do đó hàm số z không có cực trị.

d) Hàm số $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$ xác định $\forall(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Ta có

$$p = 8x^3 - 2x = 2x(4x^2 - 1) = 2x(2x - 1)(2x + 1)$$

$$q = 4y^3 - 4y = 4y(y^2 - 1) = 4y(y - 1)(y + 1)$$

Cho $p = 0$, $q = 0$, ta được các điểm tới hạn sau

$$M_o(0, 0), M_1(0, 1), M_2(0, -1), M_3\left(\frac{1}{2}, 0\right), M_4\left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

$$M_5\left(\frac{1}{2}, -1\right), M_6\left(-\frac{1}{2}, 0\right), M_7\left(-\frac{1}{2}, 1\right), M_8\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$$

Tính các đạo hàm riêng cấp hai

$$r = 24x^2 - 2, s = 0, t = 12y^2 - 4$$

Tại điểm M_o, ta có $s^2 - rt = -8 < 0$. Vì $r(M_o) = -2 < 0$, nên M_o là điểm cực đại, $z_{max} = z(M_o) = 0$.

Tại các điểm M_1, M_2, ta có $s^2 - rt = 2.8 = 16 > 0$. Vậy M_1, M_2 không là điểm cực trị.

Tại các điểm M_3, M_6, $s^2 - rt = 4.4 = 16 > 0$. Do đó hàm số không đạt cực trị tại M_3, M_6.

Tại các điểm M_4, M_5, M_7, M_8, ta có $s^2 - rt = -4.8 = -32 < 0$. Vậy đó là các điểm cực trị. Tại các điểm ấy $r = 4 > 0$, các điểm ấy là các điểm cực tiểu:

1

$$z(M_4) = z(M_5) = z(M_7) = z(M_8) = z_{min} = -\frac{9}{8}$$

e) $z = xy\ln(x^2 + y^2)$ xác định $\forall(x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus (0, 0)$. Ta có

$$p = y\ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2y}{x^2 + y^2} = y\left[\ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2}{x^2 + y^2}\right]$$

$$q = x\left[\ln(x^2 + y^2) + \frac{2y^2}{x^2 + y^2}\right]$$

Vì $(x, y) \neq (0, 0)$, nên nếu cho p, q đồng thời triệt tiêu, ta được các hệ phương trình sau

$$\begin{cases} y = 0 \\ \ln(x^2 + y^2) + \dfrac{2y^2}{x^2 + y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ \ln(x^2 + y^2) + \dfrac{2x^2}{x^2 + y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln(x^2 + y^2) + \dfrac{2y^2}{x^2 + y^2} = 0 \\ \ln(x^2 + y^2) + \dfrac{2x^2}{x^2 + y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y^2 \\ \ln 2x^2 = -1 \end{cases}$$

Hệ cuối cùng có nghiệm là $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2e}}$, $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2e}}$. Vậy ta được các điểm tới hạn sau:

$$M_1(1, 0),\ M_2(-1, 0),\ M_3(0, 1),\ M_4(0, -1)$$

$$M_5\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right),\ M_6\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right),\ M_7\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right),$$

$$M_8\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$$

Tính các đạo hàm riêng cấp hai, ta được

$$r = y\left[\frac{2x}{x^2 + y^2} + \frac{(x^2 + y^2)\,4x - 2x^2 \,.\, 2x}{(x^2 + y^2)^2}\right] = \frac{6xy}{x^2 + y^2} - \frac{4x^3y}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$s = \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2}{x^2 + y^2} + y\left[\frac{2y}{x^2 + y^2} - \frac{4x^2y}{(x^2 + y^2)^2}\right] =$$

$$= \ln(x^2 + y^2) + 2 - \frac{4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$t = \frac{6xy}{x^2 + y^2} - \frac{4xy^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

Tại các điểm M_1, M_2, M_3, M_4, ta có $r = t = 0$, $s = 2$, do đó $s^2 - rt = 4 > 0$ Vậy các điểm ấy không là điểm cực trị.

Tại các điểm M_5, M_8, ta có $s = 0$, $r = t = 2$, $s^2 - rt = -4 < 0$. Vậy z đạt cực tiểu tại M_5, M_8,

$$z_{min} = z(M_5) = z(M_8) = -\frac{1}{2e}$$

Tại các điểm M_6, M_7, ta có $s = 0$, $r = t = -2$, $s^2 - rt = -4 < 0$, vậy z đạt cực đại tại M_6, M_7,

$$z_{max} = z(M_6) = z(M_7) = \frac{1}{2e}$$

f) Hàm số $z = xy\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ xác định khi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$. Ta có

$$p = y\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}} + xy\left(-\frac{x}{a^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{y\left(1 - \frac{2x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)}{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$q = \frac{x\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{2y^2}{b^2}\right)}{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

1 Cho p, q đồng thời triệt tiêu, ta được hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} y\left(1-\dfrac{2x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}\right) = 0 \\ x\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{2y^2}{b^2}\right) = 0 \end{cases}$$

Giải hệ ấy, ta được

– hoặc $x = 0,\ y = 0$

– hoặc $x = 0,\ 1 - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ hay $x = 0,\ y = \pm b$

– hoặc $y = 0,\ 1 - \dfrac{x^2}{a^2} = 0$ hay $x = \pm a,\ y = 0$

– hoặc $\begin{cases} 1-\dfrac{2x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2} = 0 \\ 1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{2y^2}{b^2} = 0 \end{cases}$

Hệ này có các nghiệm $x = \pm\dfrac{a\sqrt{3}}{3},\ y = \pm\dfrac{b\sqrt{3}}{3}$.

Vậy ta có các điểm tới hạn $M_o(0,\ 0)$, $M_1\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{b\sqrt{3}}{3}\right)$, $M_2\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3},\ -\dfrac{b\sqrt{3}}{3}\right)$, $M_3\left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{3},\ b\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $M_4\left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{3},\ -\dfrac{b\sqrt{3}}{3}\right)$. Còn các điểm $(a,\ 0)$, $(-a,\ 0)$, $(0,\ b)$, $(0,\ -b)$ nằm trên biên của miền xác định của hàm số z, ta không xét.

Tính các đạo hàm riêng cấp hai, ta được

$$r = \frac{\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(-\dfrac{4xy}{a^2}\right) - y\left(1-\dfrac{2x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}\right)\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-\dfrac{2x}{a^2}\right)}{\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}\right)} =$$

$$= \frac{\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}\right)\left(-\dfrac{4xy}{a^2}\right) + \dfrac{xy}{a^2}\left(1-\dfrac{2x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}\right)}{\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}\right)^{3/2}} =$$

$$= \frac{-\frac{xy}{a^2}\left(3 - \frac{2x^2}{a^2} - \frac{3y^2}{b^2}\right)}{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{3/2}}$$

$$s = \frac{1 - \frac{3x^2}{a^2} - \frac{3y^2}{b^2} + \frac{2x^4}{a^4} + \frac{3x^2y^2}{a^2b^2} + \frac{2y^4}{b^4}}{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{3/2}}$$

$$t = \frac{-\frac{xy}{b^2}\left(3 - \frac{3x^2}{a^2} - \frac{2y^2}{b^2}\right)}{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{3/2}}$$

Tại điểm M_o, $r = 0$, $s = 1$, $t = 0$, $s^2 - rt = 1 > 0$. Hàm số không đạt cực trị tại M_o.

Tại các điểm M_1, M_4, ta có $r = -\frac{4\sqrt{3}\,b}{3a}$, $t = -\frac{4\sqrt{3}\,a}{3b}$, $s = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$, do đó $s^2 - rt = -4 < 0$. Hàm số đạt cực đại tại M_1, M_4,

$$z_{max} = z(M_1) = z(M_4) = \frac{ab}{3\sqrt{3}}$$

Tại các điểm M_2, M_3, ta có $r = \frac{4\sqrt{3}\,b}{3a}$, $t = \frac{4\sqrt{3}\,a}{3b}$, $s = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$, do đó $s^2 - rt = -4 < 0$. Hàm số đạt cực tiểu tại M_2, M_3

$$z_{min} = z(M_2) = z(M_3) = -\frac{ab}{3\sqrt{3}}$$

g) hàm số $z = (x - y)^2 + (x + y)^3$ xác định $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$. Ta có

$$p = 2(x - y) + 3(x + y)^2$$

$$q = -2(x - y) + 3(x + y)^2$$

Cho p, q đồng thời triệt tiêu, ta được

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0, y = 0$$

Vậy chỉ có một điểm tới hạn duy nhất là gốc tọa độ O. Ta có

$$r = 2 + 6(x + y)$$
$$s = -2 + 6(x + y)$$
$$t = 2 + 6(x + y)$$

Tại gốc O, $s^2 - rt = 0$, ta chưa kết luận được ngay.

Ta có $z(0, 0) = 0$, $z(h, h) = (2h)^3 = 8h^3$, nó đổi dấu khi h đổi dấu, vậy gốc O không là điểm cực trị. Do đó hàm số không có cực trị.

h) hàm số $z = x^2(x + 1) + y^3$ xác định $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$. Ta có

$$p = 3x^2 + 2x, \ q = 3y^2$$

Cho p, q đồng thời triệt tiêu, ta được hai điểm tới hạn là $M_o(0, 0)$, $M_1\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$. Tính các đạo hàm riêng cấp hai

$$r = 6x + 2, \ s = 0, \ t = 6y$$

Tại M_o, ta có $r = 2$, $s = 0$, $t = 0$, do đó $s^2 - rt = 0$, ta chưa thể kết luận gì. Ta có $z(M_o) = z(0, 0) = 0$. Hãy xét giá trị của z ở lân cận điểm M_o. Vì $z(0,k) = k^3 > 0 = z(M_o)$ khi $k > 0$ và $z(0,k) = k^3 < 0 = z(M_o)$ khi $k < 0$. Vậy $z(M) - z(M_o)$ thay đổi dấu khi M chạy trong một lân cận của M_o, hàm số không đạt cực trị tại M_o. Hoàn toàn tương tự, ta có $z(M_1) = z\left(-\frac{2}{3}, 0\right) = \frac{4}{27}$, $z\left(-\frac{2}{3}, k\right) = \frac{4}{27} + k^3$. Hiệu $z(M) - z(M_1)$ thay đổi dấu khi M biến thiên trong một lân cận của M_1, hàm số không đạt cực trị tại M_1. Tóm
1 lại hàm số không có cực trị.

i) Hàm số $z = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$ xác định $\forall(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Ta có

$$p = 4x^3 - 4(x - y)$$

$$q = 4y^3 + 4(x - y)$$

Cho p, q đồng thời triệt tiêu, ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - (x - y) = 0 \\ y^3 + (x - y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = 0 \\ x^3 - (x - y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)(x^2 - xy + y^2) = 0 \\ x^3 - (x - y) = 0 \end{cases}$$

Rõ ràng (0, 0) là một nghiệm của hệ ấy. Nếu $(x, y) \neq (0, 0)$ ta có

$$x^2 - xy + y^2 = \frac{(x - y)^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} > 0$$

Vậy hệ phương trình trên tương đương với hệ

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x^3 - (x - y) = 0 \end{cases}$$

Từ hệ này, ta suy ra

$$x^3 - 2x = 0$$

Do đó với $x \neq 0$, ta được $x^2 = 2$ hay $x = \pm\sqrt{2}$. Vậy hệ ấy có hai nghiệm $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ và $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Tóm lại ta có 3 điểm tới hạn $M_o(0,0)$, $M_1(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $M_2(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Ta có

$$r = 12x^2 - 4,\ s = 4,\ t = 12y^2 - 4$$

Tại các điểm M_1, M_2, ta có $r = 20$, $s = 4$, $t = 20$, do đó $s^2 - rt = 16 - 400 < 0$, hàm số đạt cực tiểu tại M_1, M_2,

1

$$z_{min} = z(M_1) = z(M_2) = -8$$

Tại điểm M_0, ta có $r = -4$, $s = 4$, $t = -4$, $s^2 - rt = 0$. Ta chưa kết luận ngay được. Ta có

$$z(M_o) = z(0, 0) = 0$$

Ta xét dấu của hiệu $z(M) - z(M_o)$ khi M chạy trong 1 lân cận của điểm M_o. Ta có

$$z(x, -x) = 2x^4 - 8x^2 = -2x^2(4 - x^2) < 0 = z(M_0) \text{ với } 0 < |x| < 2$$

$$z(x, x) = 2x^4 > 0 = z(M_o)\ \forall x \neq 0\ ,$$

Vậy dấu của $z(M) - z(M_o))$ thay đổi khi M chạy trong lân cận của M_0. Hàm số không đạt cực trị tại M_0.

j) Hàm số $z = x^2y^3(3x + 2y + 1)$ xác định $\forall(x; y) \in \mathbf{R}^2$. Ta có

$$p = 2xy^3(3x + 2y + 1) + 3x^2y^3 = xy^3(9x + 4y + 2)$$

$$q = 3x^2y^2(3x + 2y + 1) + 2x^2y^3 = x^2y^2(9x + 8y + 3)$$

Giải hệ 2 phương trình

$$\begin{cases} xy^3(9x + 4y + 2) = 0 \\ x^2y^2(9x + 8y + 3) = 0 \end{cases}$$

ta được các nghiệm là

$$x = 0, y \in \mathbf{R};\ y = 0, x \in \mathbf{R};\ x = -\frac{1}{9}, y = -\frac{1}{4}.$$

Vậy các điểm tới hạn là những điểm nằm trên hai trục tọa độ và điểm $M_o\left(-\frac{1}{9}, -\frac{1}{4}\right)$.

Tính các đạo hàm riêng cấp hai, ta được

$$r = y^3(9x + 4y + 2) + 9xy^3 = 2(9x + 2y + 1)y^3$$

$$s = 2xy^2(9x + 8y + 3) + 9x^2y^2 = xy^2(27x + 16y + 6)$$

$$t = 2x^2y(9x + 8y + 3) + 8x^2y^2 = 2x^2y(9x + 12y + 3)$$

Tại điểm M_o, ta có $r = \frac{1}{4^3}$, $s = \frac{1}{9.4^2}$, $t = \frac{1}{2.9^2}$, do đó $s^2 - rt = \frac{1}{4^4.9^2} - \frac{1}{2.4^3.9^2} = -\frac{1}{4^4.9^2} < 0$. Vậy hàm số đạt cực tiểu tại M_o.

$$z_{min} = z\left(-\frac{1}{9}, -\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{31104}.$$

Tại các điểm tới hạn nằm trên hai trục tọa độ, ta có $s^2 - rt = 0$. Ta chưa có thể kết luận gì. Ta sẽ xét dấu của số gia của hàm số z tại các điểm ấy. Ta có

$$\Delta = z(h, y_o + k) - z(0, y_o) = h^2(y_o + k)^3[3h + 2(y_o + k) + 1]$$
$$= h^2(y_o + k)^2(y_o + k)(2y_o + 1 + 3h + 2k).$$

Khi h, k khá nhỏ, số gia Δ luôn cùng dấu với $y_o(2y_o + 1)$, vậy $\Delta > 0$ nếu $y_o(2y_o + 1) > 0$, tức là nếu $y_o < -\frac{1}{2}$ hoặc $y_o > 0$, $\Delta < 0$ nếu $-\frac{1}{2} < y_o < 0$. Do đó $z_{min}(0, y_o) = 0$ nếu $y_o < -\frac{1}{2}$ hoặc $y_o > 0$, $z_{max}(0, y_o) = 0$ nếu $-\frac{1}{2} < y_o < 0$. Các điểm (0, 0), $(0, -\frac{1}{2})$ không phải là điểm cực trị của z vì số gia Δ thay đổi dấu trong mọi lân cận đủ bé của các điểm ấy.

Cũng vậy, nếu xét dấu của số gia của hàm số z tại các điểm $(x_o, 0)$ trên trục Ox, ta thấy rằng số gia

$$\Delta' = z(x_o, k) - z(x_o, 0) = x_o^2 k^3(3x_o + 2k + 1)$$

thay đổi dấu khi k đổi dấu và có giá trị tuyệt đối khá bé. Vậy các điểm trên trục Ox không là điểm cực trị.

Tóm lại z đạt cực tiểu tại điểm $\left(-\frac{1}{9}, -\frac{1}{4}\right)$ và tại các điểm $(0, y_o)$ với $y_o < -\frac{1}{2}$ hoặc $y_o > 0$, đạt cực đại tại các điểm $(0, y_o)$ với $-\frac{1}{2} < y_o < 0$.

24. a) Hàm số $z = x^2 - y^2$ liên tục $\forall(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Ta có

$$p = 2x, \qquad q = -2y\,.$$

Vậy chỉ có một điểm tới hạn là gốc O, nó nằm trong miền D.

Ta có $\quad z\,(0, 0) = 0$.

Bây giờ ta xét giá trị của z trên biên của miền D, tức là trên đường tròn $x^2 + y^2 = 4$. Trên đường tròn ta có $y^2 = 4 - x^2$, do đó

$$z = 2x^2 - 4\,.$$

Ta phải tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của hàm số ấy khi $-2 \le x \le 2$. Dễ thấy rằng nó đạt giá trị lớn nhất bằng 4 khi $x = \pm 2$, và đạt giá trị nhỏ nhất bằng -4 khi $x = 0$. So sánh với giá trị của z tại điểm tới hạn (0, 0), ta thấy rằng hàm số z đạt giá trị lớn nhất bằng 4 tại hai điểm $(-2, 0)$, $(2, 0)$, đạt giá trị bé nhất bằng -4 tại hai điểm $(0, -2)$, $(0, 2)$.

b) Hàm số $z = x^2 + y^2$ liên tục $\forall(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Ta có

$$p = 2x, \quad q = 2y.$$

Vậy chỉ có một điểm tới hạn là gốc 0, nó nằm trong miền D. Ta có $z(0, 0) = 0$.

Biên của miền D có phương trình là:

$$(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 9\,.$$

Phương trình ấy có thể viết dưới dạng tham số

$$\begin{cases} x = \sqrt{2} + 3\cos t \\ y = \sqrt{2} + 3\sin t\,. \end{cases}$$

Vậy trên biên của miền D, ta có

$$z = x^2 + y^2 = 4 + 9 + 6\sqrt{2}\,(\sin t + \cos t)\,,\ 0 \le t \le 2\pi\,.$$

1 Nhưng

$$\sin t + \cos t = \sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Do đó

$$-\sqrt{2} \leq \sin t + \cos t \leq \sqrt{2}$$

Vậy $z = 13 + 6\sqrt{2}(\sin t + \cos t)$ đạt giá trị lớn nhất bằng 25 khi $t = \frac{\pi}{4}$, tức là tại $x = y = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, đạt giá trị nhỏ nhất bằng 1 khi $t = \frac{5\pi}{4}$, tức là tại $x = y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. So sánh với giá trị của z tại (0, 0), ta thấy rằng giá trị lớn nhất phải tìm là 25, giá trị bé nhất là 1.

c) Hàm số $z = x^2y(4 - x - y)$ liên tục $\forall(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Ta có

$$p = 2xy(4 - x - y) - x^2y = xy(8 - 3x - 2y)$$

$$q = x^2(4 - x - y) - x^2y = x^2(4 - x - 2y)$$

Điểm tới hạn là điểm có tọa độ (x, y) thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} xy(8 - 3x - 2y) = 0 \\ x^2(4 - x - 2y) = 0 \end{cases}$$

Giải hệ đó, ta được

$x = 0$, y tùy ý, hoặc $y = 0$, $x = 4$, hoặc $x = 2$, $y = 1$. Các điểm (0, y), (4, 0) đều nằm trên biên của miền D, còn điểm (2, 1) nằm trong miền D. Vậy ta chỉ cần so sánh giá trị của z tại điểm (2, 1) với giá trị của z ở trên biên của miền D. Ta có

$$z(2, 1) = 4$$

$$z(0, y) = 0$$

$$z(x, 0) = 0$$

Trên đường $x + y = 6$, ta có $z = 2x^3 - 12x^2$. Khi x biến thiên từ
1 0 đến 6, hàm số ấy đạt giá trị lớn nhất bằng 0 tại $x = 0$ và $x = 6$, đạt

giá trị nhỏ nhất bằng – 64 tại x = 4. Vậy z đạt giá trị lớn nhất bằng 4 tại điểm (2, 1), đạt giá trị nhỏ nhất bằng – 64 tại điểm (4, 2).

d) Hàm số $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ liên tục $\forall(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Ta có

$$p = 2x + 2y - 4$$

$$q = 2x + 8$$

Cho p va q đồng thời triệt tiêu, ta được một điểm tới hạn duy nhất (– 4, 6). Nhưng điểm ấy không thuộc miền D. Vậy ta chỉ cần xét giá trị **của z trên** biên của miền D.

Khi $x = 0$, ta có $z = 8y$ với $0 \le y \le 2$, z đạt giá trị nhỏ nhất bằng 0 tại $y = 0$, đạt giá trị lớn nhất bằng 16 tại $y = 2$.

Khi $x = 1$, ta có $z = 10y - 3$ với $0 \le y \le 2$, z đạt giá trị nhỏ nhất bằng – 3 tại $y = 0$, đạt giá trị lớn nhất bằng 17 tại $y = 2$.

Khi $y = 0$, ta có $z = x^2 - 4x$ với $0 \le x \le 1$, do đó $z' = 2x - 4 < 0$ trong khoảng đó, vậy z giảm trong đoạn [0, 1], nó đạt giá trị lớn nhất bằng 0 tại $x = 0$, đạt giá trị nhỏ nhất bằng – 3 tại $x = 1$.

Khi $y = 1$, $z = x^2 + 16$, nó luôn tăng trong đoạn [0, 1], đạt giá trị nhỏ nhất bằng 16 tại $x = 0$, đạt giá trị lớn nhất bằng 17 tại $x = 1$.

Tóm lại trong miền đóng D, hàm số z đạt giá trị lớn nhất bằng 17 tại điểm (1, 2), đạt giá trị nhỏ nhất bằng – 3 tại điểm (1, 0).

e) Hàm số $z = e^{-(x^2 + y^2)}(2x^2 + 3y^2)$ liên tục $\forall(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Ta có

$$p = e^{-(x^2 + y^2)}4x + e^{-(x^2 + y^2)}(-2x)(2x^2 + 3y^2) =$$

$$= e^{-(x^2 + y^2)}2x(2 - 2x^2 - 3y^2)$$

$$q = e^{-(x^2 + y^2)}6y + e^{-(x^2 + y^2)}(-2y)(2x^2 + 3y^2) =$$

1

$$= e^{-(x^2 + y^2)}2y(3 - 2x^2 - 3y^2)$$

Giải hệ hai phương trình

$$\begin{cases} e^{-(x^2+y^2)}\, 2x\,(2 - 2x^2 - 3y^2) = 0 \\ e^{-(x^2+y^2)}\, 2y\,(3 - 2x^2 - 3y^2) = 0 \end{cases}$$

Ta được các nghiệm (0, 0), (0, ± 1), (± 1, 0), còn hệ

$$\begin{cases} 2 - 2x^2 - 3y^2 = 0 \\ 2 - 2x^2 - 3y^2 = 0 \end{cases}$$

vô nghiệm. Các điểm (0, ± 1), (± 1, 0) nằm trên biên của miền D. Do đó chỉ cần so sánh giá trị của z tại điểm (0, 0) với giá trị của z ở trên biên của miền D. Ta có

$$z(0, 0) = 0$$

Biên của miền D có phương trình $x^2 + y^2 = 1$. Trên biên ấy

$$z = e^{-(x^2+y^2)}(2x^2 + 3y^2) = e^{-1}(2 + y^2), \quad -1 \le y \le 1.$$

Với $-1 \le y \le 1$, $z = e^{-1}(2 + y^2)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $2e^{-1}$ tại y = 0, đạt giá trị lớn nhất bằng $3e^{-1}$ tại y = ± 1.

Vậy trong miền D hàm số z đạt giá trị bé nhất bằng 0 tại điểm (0, 0), đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{3}{e}$ tại các điểm (0, – 1) và (0, 1).

f) Hàm số z = sinx + siny + sin(x + y) liên tục $\forall(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Ta có

$$p = \cos x + \cos(x + y)$$
$$q = \cos y + \cos(x + y)$$

Cho p, q đồng thời triệt tiêu, ta được hệ hai phương trình

$$\begin{cases} \cos x + \cos(x + y) = 0 \\ \cos y + \cos(x + y) = 0 \end{cases}$$

Từ hệ hai phương trình ấy, ta được

1

$$\cos x = \cos y$$

Vì $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$, ta suy ra x = y. Thế x = y vào phương trình đầu của hệ, ta được

$$\cos x + \cos 2x = 2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2} = 0$$

Vì $\quad 0 \le \frac{x}{2} \le \frac{\pi}{4}$ nên $\cos\frac{x}{2} \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$, suy ra

$$\cos\frac{3x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{3x}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

Vậy chỉ có một điểm tới hạn duy nhất $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$, điểm ấy nằm ở trong miền D. Vậy chỉ cần so sánh giá trị của z tại điểm ấy với giá trị của z trên biên của miền D. Ta có

$$z\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Trên cạnh x = 0, z = 2siny, $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$, nó đạt giá trị nhỏ nhất bằng 0 tại y = 0, giá trị lớn nhất bằng 2 tại $y = \frac{\pi}{2}$. Trên cạnh $x = \frac{\pi}{2}$, ta có

$$z = 1 + \sin y + \sin\left(\frac{\pi}{2} + y\right) =$$

$$= 1 + \sqrt{2}\sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right),\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2}$$

z đạt giá trị lớn nhất bằng $1 + \sqrt{2}$ khi $y = \frac{\pi}{4}$, đạt giá trị nhỏ nhất bằng $1 + \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 2$ khi y = 0 và $y = \frac{\pi}{2}$.

Vì lí do đối xứng giữa x và y trong biểu thức của z, ta thấy rằng trên cạnh y = 0 và trên cạnh $y = \frac{\pi}{2}$, z đạt giá trị nhỏ nhất và lớn nhất như trên cạnh x = 0 và $x = \frac{\pi}{2}$.

Tóm lại hàm số z đạt giá trị nhỏ nhất bằng 0 tại điểm (0, 0), đạt
1 giá trị lớn nhất bằng $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ tại điểm $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$.

g) $z = (a^2 - c^2)x^2 + (b^2 - c^2)y^2 + c^2 - [(a - c)x^2 + (b - c)y^2 + c]^2$

liên tục $\forall(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Ta có

$$p = 2(a^2 - c^2)x - 2[(a - c)x^2 + (b - c)y^2 + c]\, 2(a - c)x =$$

$$= 2(a - c)x\, [a - c - 2\,(a - c)x^2 - 2\,(b - c)y^2]$$

$$q = 2\,(b - c)y\, [b - c - 2\,(b - c)y^2 - 2\,(a - c)x^2]$$

Để tìm các điểm tới hạn, ta giải hệ hai phương trình

$$p = 0,\ q = 0$$

Ta được các nghiệm

$$x = 0,\ y = 0$$

$$x = 0,\ 1 - 2y^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y = 0,\ 1 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0,\ x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Còn hệ

$$\begin{cases} a - c - 2(a - c)x^2 - 2(b - c)y^2 = 0 \\ b - c - 2(b - c)y^2 - 2(a - c)x^2 = 0 \end{cases}$$

vô nghiệm vì $a > b > c$. Vậy ta có 5 điểm tới hạn

$M_0(0,\ 0)$, $M_1\left(0,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $M_2\left(0,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $M_3\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$, $M_4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$, chúng đều nằm bên trong miền D. Ta cần so sánh giá trị của z tại các điểm đó với giá trị của z trên biên của miền D. Ta có

$$z(M_0) = z(0, 0) = 0$$

$$z(M_1) = z(M_2) = \frac{b^2 - c^2}{2} + c^2 - \left(\frac{b - c}{2} + c\right)^2 = \left(\frac{b - c}{2}\right)^2$$

$$z(M_3) = z(M_4) = \left(\frac{a - c}{2}\right)^2$$

Trên biên của miền D, ta có $x^2 + y^2 = 1$, do đó

$$z = (a^2 - c^2)x^2 + (b^2 - c^2)(1 - x^2) + c^2 -$$
$$- [(a - c)x^2 + (b - c)(1 - x^2) + c]^2 = (a - b)^2x^2(1 - x^2),$$
$$-1 \le x \le 1.$$

Nó đạt giá trị nhỏ nhất bằng 0 tại $x = 0$ và $x = \pm 1$, đạt giá trị lớn nhất bằng $\left(\frac{a - b}{2}\right)^2$ tại $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

So sánh các giá trị đã tìm được, ta thấy z đạt giá trị lớn nhất bằng $\left(\frac{a - c}{2}\right)^2$ tại các điểm $\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ và đạt giá trị nhỏ nhất bằng 0 tại điểm (0, 0).

25. a) Ta có $z = xy$, trong đó x, y thỏa mãn điều kiện

$$g(x, y) = x + y - 1 = 0$$

Điều kiện cần của cực trị của z với điều kiện $g(x, y) = 0$ là

$$\frac{z'_x}{g'_x} = \frac{z'_y}{g'_y} \text{ hay } x = y$$

Thế đẳng thức đó vào điều kiện $g(x, y) = 0$, ta được

$$x = y = \frac{1}{2}.$$

Ta có một điểm tới hạn duy nhất $M_o\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Để xét xem điểm ấy có là điểm cực trị không, ta xét dấu của số gia

$$\Delta = z\left(\frac{1}{2} + h, \frac{1}{2} + k\right) - z\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) =$$
$$= \left(\frac{1}{2} + h\right)\left(\frac{1}{2} + k\right) - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}(h + k) + hk$$

Mặt khác, các tọa độ $\frac{1}{2} + h$, $\frac{1}{2} + k$ phải thỏa mãn điều kiện $g(x, y) = 0$, tức là

$$\frac{1}{2} + h + \frac{1}{2} + k = 1 \Leftrightarrow h + k = 0$$

Do đó

$$\Delta = hk < 0,$$

vì h, k trái dấu nhau. Vậy M_o là điểm cực đại có điều kiện, $z_{max} = z(M_o) = \frac{1}{4}$.

Chú thích: Lời giải trên nhằm trình bầy phương pháp chung để giải quyết những bài toán cực trị có điều kiện. Riêng bài toán này có thể giải rất đơn giản bằng cách đưa về tìm cực trị của hàm số một biến số. Thực vậy, vì $y = 1 - x$, ta có $z = xy = x(1 - x) = x - x^2$.

Nếu $x > 0$, $y > 0$, ta có thể dùng bất đẳng thức Cauchy

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x + y}{2}$$

để giải bài này.

b) Theo phương pháp nhân tử Lagrange, để tìm cực trị của hàm số $z(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ với điều kiện

$$g(x, y) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{a^2} = 0,$$

ta chỉ việc tìm cực trị của hàm số

$$F(x, y, \lambda) = z(x, y) + \lambda\, g(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \lambda \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{a^2}\right)$$

trong đó λ là nhân tử Lagrange. Ta có

$$F'_x(x, y, \lambda) = -\frac{1}{x^2} - \frac{2\lambda}{x^3}$$

$$F'_y(x, y, \lambda) = -\frac{1}{y^2} - \frac{2\lambda}{y^3}$$

Cho F'_x, F'_y đồng thời triệt tiêu, ta được $x = y = -2\lambda$. Thế các giá trị ấy vào điều kiện $g(x, y) = 0$, ta được

$$\frac{1}{2\lambda^2} = \frac{1}{a^2} \Leftrightarrow \lambda = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Vậy ta được 2 điểm tới hạn:

$$M_1\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right), \quad M_2\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$

Để xét xem M_1 có là điểm cực trị không, ta xét dấu của số gia của F tại M_1. Ta có

$$\Delta = F\left(\frac{a}{\sqrt{2}} + h, \frac{a}{\sqrt{2}} + k, \lambda\right) - F\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}, \lambda\right)$$

Tại M_1, $F'_x = F'_y = 0$. Do đó theo công thức Taylor, khi các số gia h, k rất bé, dấu của Δ được xác định bởi dấu của

$$F''_{x^2}(M_1, \lambda)h^2 + 2F''_{xy}(M_1, \lambda)hk + F''_{y^2}(M_1, \lambda)k^2.$$

Nhưng

$$F''_{x^2}(x, y, \lambda) = \frac{2}{x^3} + \frac{6\lambda}{x^4}$$

$$F''_{xy}(x, y, \lambda) = 0$$

$$F''_{y^2}(x, y, \lambda) = \frac{2}{y^3} + \frac{6\lambda}{y^4}$$

Tại M_1, ta có $\lambda = -\frac{x}{2} = -\frac{y}{2}$, do đó

$$F''_{x^2}(M_1, \lambda) = -\frac{2\sqrt{2}}{a^3}, F''_{xy}(M_1, \lambda) = 0, F''_{y^2}(M_1, \lambda) = -\frac{2\sqrt{2}}{a^3}$$

Vậy số gia Δ cùng dấu với biểu thức $-\frac{2\sqrt{2}}{a^3}(h^2 + k^2)$,

tức là $\Delta < 0$ với h, k khá bé. Do đó M_1 là điểm cực đại, $z_{max} = z(M_1) = \frac{\sqrt{2}}{a}$.

Tương tự như vậy, M_2 là điểm cực tiểu, $z_{min} = z(M_2) = -\frac{\sqrt{2}}{a}$.

c) Dùng phương pháp nhân tử Lagrange, ta tìm cực trị của hàm số

$$F(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right)$$

Các tọa độ (x, y, z) của điểm tới hạn là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} F'_x(x, y, z, \lambda) = 2x \left(1 + \dfrac{\lambda}{a^2} \right) = 0 \\ F'_y(x, y, z, \lambda) = 2y \left(1 + \dfrac{\lambda}{b^2} \right) = 0 \\ F'_z(x, y, z, \lambda) = 2z \left(1 + \dfrac{\lambda}{c^2} \right) = 0 \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này, ta được 6 điểm tới hạn

$$M_1(-a, 0, 0),\ M_2(a, 0, 0),\ M_3(0, b, 0)$$

$$M_4(0, -b, 0),\ M_5(0, 0, -c),\ M_6(0, 0, c)$$

Ứng với các điểm M_1, M_2, $\lambda = -a^2$; ứng với các điểm M_3, M_4, $\lambda = -b^2$, ứng với các điểm M_5, M_6, $\lambda = -c^2$.

Bây giờ ta xét điểm tới hạn M_1. Xét dấu của số gia của F tại M_1. Ta có

$$\Delta = F(-a + h, k, l, \lambda) - F(-a, 0, 0, \lambda).$$

Nó có dấu của biểu thức

$$F''_{x^2}(M_1, \lambda)h^2 + F''_{y^2}(M_1, \lambda)k^2 + F''_{z^2}(M_1, \lambda)h^2 +$$

$$+ 2F''_{xy}(M_1, \lambda)hk + 2F''_{yz}(M_1, \lambda)kl + 2F''_{zx}(M_1, \lambda)lh$$

Khi h, k khá bé. Nhưng

$$F''_{x^2}(x, y, z, \lambda) = 2\left(1 + \frac{\lambda}{a^2} \right),\ F''_{y^2}(x, y, z, \lambda) = 2\left(1 + \frac{\lambda}{b^2} \right),$$

$$F''_{z^2}(x, y, z, \lambda) = 2\left(1 + \frac{\lambda}{c^2} \right),$$

1 $$F''_{xy}(x, y, z, \lambda) = F''_{yz}(x, y, z, \lambda) = F''_{zx}(x, y, z, \lambda) = 0$$

Do đó

$$F''_{x^2}(M_1, \lambda) = 0, \qquad F''_{y^2}(M_1, \lambda) = 2\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right),$$

$$F''_{z^2}(M_1, \lambda) = 2\left(1 - \frac{a^2}{c^2}\right)$$

Suy ra rằng Δ có dấu của

$$2\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)k^2 + 2\left(1 - \frac{a^2}{c^2}\right)l^2 \text{ khi h, k đủ bé}$$

Vì $a > b > c > 0$, nên $\Delta < 0$ với h, k đủ bé, vậy M_1 là điểm cực đại, do đó M_2 cũng là điểm cực đại,

$$u_{max} = u(M_1) = u(M_2) = a^2$$

Hoàn toàn tương tự, có thể thấy rằng các điểm M_3, M_4 không là điểm cực trị, điểm M_5, M_6 là những điểm cực tiểu,

$$u_{min} = u(M_5) = u(M_6) = c^2$$

d) Ta tìm cực trị của hàm số

$$F(x, y, z, \lambda) = x + y + z + \lambda\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 1\right),$$

trong đó λ là nhân tử Lagrange. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} F'_x(x, y, z, \lambda) = 1 - \dfrac{\lambda}{x^2} = 0 \\ F'_y(x, y, z, \lambda) = 1 - \dfrac{\lambda}{y^2} = 0 \\ F'_z(x, y, z, \lambda) = 1 - \dfrac{\lambda}{z^2} = 0 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1 \end{cases}$$

Ta được 4 điểm tới hạn

$M_o(3, 3, 3)$, $M_1(1, 1, -1)$, $M_2(1, -1, 1)$, $M_3(1, 1, -1)$, λ ứng với
1 điểm M_o bằng 9, λ ứng với các điểm M_1, M_2, M_3 bằng 1.

Bây giờ xét dấu của số gia của F tại M_o. Ta có

$$\Delta = F(3 + h, 3 + k, 3 + l, \lambda) - F(3, 3, 3, \lambda).$$

Khi h, k, l khá bé, Δ có dấu của biểu thức

$$F''_{x^2}(M_o,\lambda)h^2 + F''_{y^2}(M_o,\lambda)k^2 + F''_{z^2}(M_o,\lambda)l^2 +$$

$$+ 2F''_{xy}(M_o, \lambda)hk + 2F''_{yz}(M_o, \lambda)kl + 2F''_{z^2}(M_o, \lambda)lh \cdot$$

Ta có

$$F''_{x^2}(x,y,z,\lambda) = \frac{2\lambda}{x^3}, \quad F''_{y^2}(x,y,z,\lambda) = \frac{2\lambda}{y^3}, \quad F''_{z^2}(x,y,z,\lambda) = \frac{2\lambda}{z^3}$$

$$F''xy(x, y, z, \lambda) = F''_{yz}(x, y, z, \lambda) = F''_{zx}(x, y, z, \lambda) = 0 \ .$$

Do đó

$$F''_{x^2}(M_o,\lambda) = \frac{2}{3}, \quad F''_{y^2}(M_o,\lambda) = \frac{2}{3}, \quad F''_{z^2}(M_o,\lambda) = \frac{2}{3}.$$

Vậy khi h, k, l đủ bé, Δ có dấu của biểu thức

$$\frac{2}{3}(h^2+k^2+l^2),$$

tức là $\Delta > 0$, M_o là điểm cực tiểu,

$$u_{min} = u(M_o) = 9 .$$

Xét điểm M_1, ta có

$$F''_{x^2}(M_1,\lambda) = 2, \quad F''_{y^2}(M_1,\lambda) = 2, \quad F''_{z^2}(M_1,\lambda) = -2 \ .$$

Vậy số gia của F tại M_1 có dấu của biểu thức

$$2h^2 + 2k^2 - 2l^2,$$

biểu thức này không là dạng xác định dấu vì $2[(h^2 + k^2) - l^2]$ có dấu thay đổi, vậy M_1 không là điểm cực trị có điều kiện của u. Các
1 điểm M_2, M_3 cũng không là điểm cực trị có điều kiện của u.

26. Trong hệ tọa độ đề các vuông góc, phương trình của mặt cầu tâm O bán kính R là

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 .$$

Không hạn chế tính tổng quát, ta chỉ xét những hình hộp chữ nhật có các cạnh song song với các trục toạ độ, nội tiếp trong hình cầu. Gọi (x, y, z) là tọa độ của đỉnh của hình hộp chữ nhật nằm trong góc phần tám thứ nhất. Ta có $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Ta phải tìm cực đại của hàm số

$$f(x, y, z) = xyz$$

với điều kiện

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 . \qquad (*)$$

Điều kiện cần của cực trị của hàm số f(x, y, z) với điều kiện g(x, y, z) = 0 là

$$\frac{f'_x}{g'_x} = \frac{f'_y}{g'_y} = \frac{f'_z}{g'_z} ,$$

hay
$$\frac{yz}{x} = \frac{zx}{y} = \frac{xy}{z} . \qquad (**)$$

Từ (**) suy ra $x = y = z$. Thế vào (*), ta được

$$x = y = z = \frac{R}{\sqrt{3}} .$$

Để xét xem điểm $\left(\frac{R}{\sqrt{3}}, \frac{R}{\sqrt{3}}, \frac{R}{\sqrt{3}}\right)$ có là điểm cực trị có điều kiện không, ta chỉ việc xét dấu của số gia

$$\Delta = f\left(\frac{R}{\sqrt{3}} + h, \frac{R}{\sqrt{3}} + k, \frac{R}{\sqrt{3}} + l\right) - f\left(\frac{R}{\sqrt{3}}, \frac{R}{\sqrt{3}}, \frac{R}{\sqrt{3}}\right) =$$

$$= \left(\frac{R}{\sqrt{3}} + h\right)\left(\frac{R}{\sqrt{3}} + k\right)\left(\frac{R}{\sqrt{3}} + l\right) - \frac{R^3}{3\sqrt{3}}$$

1

$$= \frac{R^2}{3}(h+k+l) + \frac{R}{\sqrt{3}}(hk+kl+lh)+hkl .$$

Vì điểm $\left(\dfrac{R}{\sqrt{3}} + h\,,\ \dfrac{R}{\sqrt{3}} + k\,,\ \dfrac{R}{\sqrt{3}} + l\right)$ cũng nằm trên mặt cầu, nên $\left(\dfrac{R}{\sqrt{3}} + h\right)^2 + \left(\dfrac{R}{\sqrt{3}} + k\right)^2 + \left(\dfrac{R}{\sqrt{3}} + l\right)^2 = R^2$

Do đó

$$\frac{2R}{\sqrt{3}}(h + k + l) + h^2 + k^2 + l^2 = 0$$

Suy ra $h + k + l < 0$. Với h, k, l đủ nhỏ, dấu của Δ là dấu của số hạng có bậc thấp nhất, tức là dấu của số hạng $\dfrac{2R}{\sqrt{3}}(h + k + l)$. Vậy $\Delta < 0$ với h, k, l đủ nhỏ, do đó điểm $\left(\dfrac{R}{\sqrt{3}}, \dfrac{R}{\sqrt{3}}, \dfrac{R}{\sqrt{3}}\right)$ là điểm cực đại có điều kiện. Do đó hình lập phương có cạnh bằng $\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$ là hình hộp chữ nhật nội tiếp có thể tích lớn nhất.

Chương II
ỨNG DỤNG CỦA PHÉP TÍNH VI PHÂN TRONG HÌNH HỌC

A – ĐỀ BÀI

1. Tính độ cong của

a) Đường $y = -x^3$ tại điểm có hoành độ $x = \dfrac{1}{2}$

b) Đường $xy = 1$ tại điểm $(1, 1)$

c) Đường $y^2 = 2px$ tại những điểm $(0, 0)$, $(\dfrac{p}{2}, p)$

d) Đường $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ tại các điểm $(0, b)$ và $(a, 0)$

e) Đường $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ tại điểm (x, y)

f) Đường $x = a\mathrm{cht}$, $y = b\mathrm{sht}$ tại điểm (x, y), $(a, b > 0)$

g) Đường $x = e^t\sin t$, $y = e^t\cos t$ tại điểm ứng với $t = 1$

h) Đường xoắn ốc Archimède có phương trình trong hệ tọa độ cực $r = a\varphi$ tại điểm bất kì, $(a > 0)$.

2. Tính khúc bán kính của

a) Đường $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ tại điểm $(0, 3)$.

b) Đường $y^2 = x^3$ tại điểm $(4, 8)$

c) Đường $y = \ln x$ tại điểm $(1, 0)$

d) Đường $y^2 = 2x - x^2$ tại điểm bất kì

e) Đường $y = \sin x$ tại điểm $(\dfrac{\pi}{2}, 1)$

1 f) Đường $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ tại điểm bất kì, $(a > 0)$

g) Đường $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$ tại điểm bất kì, $(a > 0)$;

h) Đường $x = 3t^2$, $y = 3t - t^3$ tại điểm ứng với $t = 1$;

i) Đường $r = a(1 + \cos\varphi)$ tại điểm bất kì, $(a > 0)$;

j) Đường $r = ae^{m\varphi}$ tại điểm bất kì, $(a > 0)$;

k) Đường $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ tại điểm bất kì, $(a > 0)$.

3. Tìm những điểm trên các đường cho dưới đây, tại đó khúc bán kính có giá trị bé nhất.

a) $y = \ln x$ b) $y = e^x$

c) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, $(a > 0)$; d) $y = \ln\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$, $(a > 0)$.

4. Viết phương trình đường túc bế của

a) Đường parabôn $y^2 = x + \frac{1}{2}$

b) Đường hypebôn $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

c) Đường axtrôit $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $(a > 0)$;

d) Đường $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$, $(a > 0)$;

e) Đường xiclôit $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $(a > 0)$;

f) Đường cacđiôit $r = a(1 + \cos\varphi)$, $(a > 0)$.

5. a) Tìm hình bao của họ đường tròn có bán kính bằng 2, có tâm nằm trên đường thẳng $y = x$.

b) Tìm hình bao của họ đường parabôn $cx^2 + c^2y = 1$, trong đó c là tham số

c) Tìm hình bao của họ đường parabôn $y = c^2(x - c)^2$, c là tham số.

d) Tìm hình bao của họ đường tròn có đường kính là các dây cung song song với trục Oy của đường elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

e) Tìm hình bao của họ đường tròn có tâm nằm trên parabôn $y^2 = 2px$ và đi qua gốc O.

f) Một đoạn thẳng có độ dài a di chuyển trong mặt phẳng Oxy sao cho hai mút của nó nằm trên hai trục tọa độ. Tìm hình bao của họ đoạn thẳng ấy.

g) Một đoạn thẳng di chuyển trong mặt phẳng Oxy sao cho tổng các đoạn mà nó chắn trên hai trục tọa độ không đổi và bằng a. Tìm hình bao của họ đường thẳng ấy.

h) Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm A(a, 0), B(0, a), M là một điểm chạy trên đoạn AB, MNPQ là hình chữ nhật có các cạnh song song với các trục tọa độ. Tìm hình bao của các đường elip E nhận Ox, Oy làm trục đối xứng, nội tiếp trong hình chữ nhật MNPQ.

i) M là một điểm chạy trên parabôn $y^2 = 2px$. Tìm hình bao của họ đường thẳng D đi qua M vuông góc với FM, F là tiêu điểm của parabôn.

j) Tìm hình bao của họ đường kính MN của một đường tròn bán kính R, lăn không trượt trên một đường thẳng cố định.

k) F là một điểm cố định có tọa độ $(\frac{p}{2}, 0)$, M là một điểm chạy trên trục Oy. Tìm hình bao của đường thẳng MT đi qua M vuông góc với HM.

6. Giả sử $\vec{p}(t)$, $\vec{q}(t)$ là các hàm vectơ khả vi. Chứng minh các công thức sau:

a) $\frac{d}{dt}(\vec{p}(t) + \vec{q}(t)) = \frac{d\vec{p}(t)}{dt} + \frac{d\vec{q}(t)}{dt}$

b) $\dfrac{d}{dt}(\alpha(t)\,.\,\vec{p}(t)) = \alpha(t)\,.\,\dfrac{d\vec{p}(t)}{dt} + \alpha'(t)\vec{p}(t)$, trong đó $\alpha(t)$ là một hàm số khả vi.

c) $\dfrac{d}{dt}(\vec{p}(t)\,.\,\vec{q}(t)) = \vec{p}(t)\,.\,\dfrac{d\vec{q}(t)}{dt} + \dfrac{d\vec{p}(t)}{dt}\,.\,\vec{q}(t)$

d) $\dfrac{d}{dt}(\vec{p}(t) \wedge \vec{q}(t)) = \vec{p}(t) \wedge \dfrac{d\vec{q}(t)}{dt} + \dfrac{d\vec{p}(t)}{dt} \wedge \vec{q}(t)$.

7. a) Chứng minh rằng nếu $\vec{p}(t)$ là hàm vectơ khả vi hai lần thì ta có

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{p}(t) \wedge \frac{d\vec{p}(t)}{dt}\right) = \vec{p}(t) \wedge \frac{d^2\vec{p}(t)}{dt^2}$$

b) Nếu các hàm vectơ $\vec{p}(t)$, $\vec{q}(t)$, $\vec{r}(t)$ khả vi, hãy tính

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}(t)\,,\ \vec{q}(t)\,,\ \vec{r}(t))$$

c) Chứng minh rằng nếu hàm vectơ $\vec{p}(t)$ khả vi ba lần và nếu

$$f(t) = \left(\vec{p}(t)\,,\ \frac{d\vec{p}(t)}{dt},\ \frac{d^2\vec{p}(t)}{dt^2}\right)$$

thì

$$f'(t) = \left(\vec{p}(t)\,,\ \frac{d\vec{p}(t)}{dt},\ \frac{d^3\vec{p}(t)}{dt^3}\right).$$

8. Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường

a) $x = a\sin^2 t$, $y = b\sin t\cos t$, $z = c\cos^2 t$ tại điểm ứng với $t = \dfrac{\pi}{4}$

b) $x = \dfrac{e^t\sin t}{\sqrt{2}}$, $y = 1$, $z = \dfrac{e^t\cos t}{\sqrt{2}}$ tại điểm ứng với $t = 0$

c) $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ tại điểm ứng với $t = 3$.

d) $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $z = 4\sin\dfrac{t}{2}$ tại điểm ứng với $t = \dfrac{\pi}{2}$

9. Cho đường

$$x = \frac{a}{3}(2\cos t - \cos 2t)$$

1 $$y = \frac{a}{3}(2\sin t - \sin 2t)$$

$$z = \frac{2a\sqrt{2}}{3}\cos\frac{t}{2}, \ (a > 0)$$

a) Tìm hình chiếu của nó trên mặt phẳng xOy

b) Chứng minh rằng nó nằm trên mặt cầu

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

và những tiếp tuyến của nó làm với trục Oz một góc không đổi.

10. Viết phương trình của tập hợp tất cả các giao điểm của tiếp tuyến của đường

$$x = a\sin t\cos t, \ y = a\cos^2 t, \ z = a\cos t$$

với mặt phẳng xOy

11. Chứng minh rằng đường

$$x = \frac{\cos t}{\operatorname{ch} t}, \ y = \frac{\sin t}{\operatorname{ch} t}, \ y = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}$$

nằm trên mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ và cắt các giao tuyến của mặt cầu với các mặt phẳng $z = a$, a không đổi, $-1 \le a \le 1$ theo một góc không đổi.

12. Tính độ cong của đường

a) $x = e^t, \ y = e^{-t}, \ z = t\sqrt{2}$

b) $x = e^{-t}\sin t, \ y = e^{-t}\cos t, \ z = e^t$

c) $x = 3(\cos t + t\sin t), \ y = 3(\sin t - t\cos t), \ z = 2t^2$

d) $x = t - \sin t + 4\cos\frac{t}{2}, \ y = t - \sin t - 4\cos\frac{t}{2}, \ z = \sqrt{2}\,(1 - \cos t)$

13. Viết phương trình pháp tuyến và tiếp diện của mặt

a) $x^2 - 4y^2 + 2z^2 = 6$ tại điểm (2, 2, 3).

b) $z = 2x^2 + 4y^2$ tại điểm (2, 1, 12)

c) $z = \ln(2x + y)$ tại điểm (– 1, 3, 0)

1 **14.** Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường

a) $x^2 + y^2 = 10$, $y^2 + z^2 = 25$ tại điểm $(1, 3, 4)$

b) $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 47$, $x^2 + 2y^2 = z$ tại điểm $(-2, 1, 6)$

B – LỜI GIẢI

1. a) Ta có $\qquad y = -x^3$

Tính các đạo hàm cấp 1 và cấp 2, ta được

$$y' = -3x^2,\ y'' = -6x$$

Khi $x = \frac{1}{2}$, ta có $y' = -\frac{3}{4}$, $y'' = -3$. Do đó độ cong của đường $y = -x^3$ tại $x = \frac{1}{2}$ bằng

$$C\Big|_{x=\frac{1}{2}} = \frac{3}{\left(1 + \frac{9}{16}\right)^{3/2}} = \frac{3 \cdot 4^3}{5^3} = \frac{192}{125}.$$

b) Ta có

$$y = \frac{1}{x}, \quad y' = -\frac{1}{x^2}, \quad y'' = \frac{2}{x^3}$$

Khi $x = 1$, ta có $y' = -1$, $\quad y'' = 2$. Do đó

$$C\Big|_{x=1} = \frac{2}{(\sqrt{2})^3} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

c) Lấy đạo hàm theo x hai lần phương trình

$$y^2 = 2px,$$

ta được

$$yy' = p, \qquad yy'' + y'^2 = 0$$

Do đó $\qquad y' = \frac{p}{y}, \qquad y'' = -\frac{y'^2}{y} = -\frac{p^2}{y^3}$

1

$$C = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \frac{p^2}{(p^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{p^2}{(p^2 + 2px)^{3/2}}$$

Vậy tại điểm (0, 0), ta có $C = \frac{1}{p}$; tại điểm $(\frac{p}{2}, p)$, ta có $C = \frac{1}{2\sqrt{2}\,p}$.

d) Phương trình $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ có thể viết là

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Đó là phương trình của đường elip; dạng tham số của nó là

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t$$

Do đó

$$x' = -a\sin t,\ y' = b\cos t;\ x'' = -a\cos t,\ y'' = -b\sin t$$

Vậy

$$C = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = \frac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}$$

Điểm (0, b) ứng với $t = \frac{\pi}{2}$, do đó độ cong của đường elip tại điểm đó bằng $\frac{ab}{a^3} = \frac{b}{a^2}$. Điểm (a, 0) ứng với t = 0, độ cong của đường elip tại điểm đó bằng $\frac{ab}{b^3} = \frac{a}{b^2}$.

e) Phương trình tham số của đường

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

là $$x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$$

Ta có $$x' = -3a\cos^2 t\sin t,\ y' = 3a\sin^2 t\cos t$$

$$x'' = -3a(-2\cos t\sin^2 t + \cos^3 t)$$

$$y'' = 3a(2\sin t\cos^2 t - \sin^3 t)$$

Do đó $$x'^2 + y'^2 = 9a^2\sin^2 t\cos^2 t$$

$$x'y'' - y'x'' = -9a^2\sin^2 t\cos^2 t$$

$$C = \frac{9a^2\sin^2t\cos^2 t}{|27a^3 \sin^3t\cos^3t|} = \frac{1}{3a|\sin t\cos t|} = \frac{1}{3(axy)^{\frac{1}{3}}}$$

f) Ta có

$$x = a\,\text{ch}t,\ y = b\,\text{sh}t$$

$$x' = a\,\text{sh}t,\ y' = b\,\text{ch}t$$

$$x'' = a\,\text{ch}t,\ y'' = b\,\text{sh}t$$

Do đó

$$x'^2 + y'^2 = a^2\text{sh}^2t + b^2\text{ch}^2t$$

$$x'y'' - y'x'' = ab(\text{sh}^2t - \text{ch}^2t) = -ab$$

$$C = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = \frac{ab}{(a^2\text{sh}^2t + b^2\text{ch}^2t)^{3/2}}$$

g) Ta có

$$x = e^t\sin t,\ y = e^t\cos t$$

$$x' = e^t(\sin t + \cos t),\ y' = e^t(\cos t - \sin t)$$

$$x'' = 2e^t\cos t,\ y'' = -2e^t\sin t$$

$$x'^2 + y'^2 = 2e^{2t}$$

$$x'y'' - y'x'' = -2e^{2t}$$

Do đó

$$C = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = \frac{2e^{2t}}{2\sqrt{2}\,e^{3t}} = \frac{1}{\sqrt{2}\,e^t}$$

Tại điểm ứng với $t = 1$, ta có $C = \dfrac{1}{e\sqrt{2}}$.

h) Ta có

$$r = a\varphi,\ r' = a,\ r'' = 0$$

Do đó

1

$$C = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{(r^2 + r'^2)^{3/2}} = \frac{a^2(\varphi^2 + 2)}{a^3(\varphi^2 + 1)^{3/2}} = \frac{1}{a}\,\frac{\varphi^2 + 2}{(\varphi^2 + 1)^{3/2}}$$

2. a) Đường $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ là đường elip, phương trình tham số của nó là:

$$x = 5\cos t, \quad y = 3\sin t \,.$$

Điểm (0, 3) ứng với $t = \frac{\pi}{2}$. Độ cong của đường elip tại điểm đó bằng $\frac{3}{25}$ (xem bài 1, câu d), vậy khúc bán kính của đường elip tại điểm đó bằng $\frac{25}{3}$.

b) Ta có $y = \pm x^{\frac{3}{2}}$. Điểm (4, 8) ứng với nhánh $y = x^{\frac{3}{2}}$. Do đó

$$y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}, \; y'' = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}} \,.$$

Vậy khúc bán kính của đường $y^2 = x^3$ tại điểm (4, 8) bằng

$$R\Big|_{x=4} = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}\Bigg|_{x=4} = \frac{80\sqrt{10}}{3} \,.$$

c) Ta có

$$y = \ln x, \; y' = \frac{1}{x}, \quad y'' = -\frac{1}{x^2} \,.$$

Do đó khúc bán kính của đường $y = \ln x$ tại điểm (1, 0) bằng

$$R\Big|_{x=1} = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2} \,.$$

d) Phương trình

$$y^2 = 2x - x^2 \,.$$

Có thể viết thành

$$(x-1)^2 + y^2 = 1 \,.$$

Đó là phương trình của đường tròn tâm tại điểm (0, 1), bán
1 kính bằng 1. Vậy khúc bán kính của đường ấy tại mọi điểm bằng 1.

e) Ta có

$$y = \sin x, \quad y' = \cos x, \quad y'' = -\sin x \,.$$

Vậy khúc bán kính của đường y = sinx tại điểm $(\frac{\pi}{2}, 0)$ bằng

$$R\bigg|_{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{(1+\cos^2 x)^{3/2}}{|-\sin x|}\bigg|_{x=\frac{\pi}{2}} = 1 \,.$$

f) Ta có

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$
$$x' = a(1 - \cos t), \quad y' = a\sin t$$
$$x'' = a\sin t, \qquad y'' = a\cos t \,.$$

Do đó

$$x'^2 + y'^2 = 2a^2(1 - \cos t) = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}$$

$$x'y'' - y'x'' = a^2(\cos t - 1) = -2a^2 \sin^2 \frac{t}{2} \,.$$

Vậy khúc bán kính của đường tại điểm bất kì bằng

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{|x'y'' - y'x''|} = \frac{8a^3\left|\sin^3 \frac{t}{2}\right|}{2a^2 \sin^2 \frac{t}{2}} = 4a\left|\sin \frac{t}{2}\right| .$$

g) Ta có

$$x = a(\cos t + t\sin t), \; y = a(\sin t - t\cos t)$$
$$x' = a(-\sin t + \sin t + t\cos t) = at\cos t$$
$$y' = a(\cos t - \cos t + t\sin t) = at\sin t$$
$$x'' = a(\cos t - t\sin t)$$
$$y'' = a(\sin t + t\cos t) \,.$$

Do đó

$$x'^2 + y'^2 = a^2t^2$$

1

$$x'y'' - y'x'' = a^2t^2(\sin^2 t + \cos^2 t) = a^2t^2.$$

Vậy khúc bán kính của đường tại điểm bất kì bằng

$$R = \frac{a^3 |t|^3}{a^2 t^2} = a|t| \cdot$$

h) Ta có

$$x = 3t^2,\ y = 3t - t^3$$

$$x' = 6t,\ y' = 3 - 3t^2$$

$$x'' = 6,\ y'' = -6t$$

Do đó

$$x'^2 + y'^2 = 36t^2 + 9 + 9t^4 - 18t^2 = 9(t^2 + 1)^2$$

$$x'y'' - y'x'' = -36^2 - 18 + 18t^2 = -18(t^2 + 1)$$

Vậy khúc bán kính của đường tại điểm ứng với t = 1 bằng

$$R = \frac{(36)^{3/2}}{36} = (36)^{1/2} = 6 \cdot$$

i) Ta có

$$r = a(1 + \cos\varphi),\ r' = -a\sin\varphi,\ r'' = -a\cos\varphi$$

Do đó

$$r^2 + r'^2 = 2a^2(1 + \cos\varphi) = 4a^2\cos^2\frac{\varphi}{2}$$

$$r^2 + 2r'^2 - rr'' = 3a^2(1 + \cos\varphi) = 6a^2\cos^2\frac{\varphi}{2}$$

Vậy khúc bán kính tại điểm bất kì bằng

$$R = \frac{(r^2 + r'^2)^{3/2}}{|r^2 + 2r'^2 - rr''|} = \frac{8a^3\left|\cos^3\frac{\varphi}{2}\right|}{6a^2\cos^2\frac{\varphi}{2}}$$

$$= \frac{4a}{3}\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|$$

j) Ta có

$$r = ae^{m\varphi},\ r' = ame^{m\varphi},\ r'' = am^2e^{m\varphi}$$

$$r^2 + r'^2 = a^2(1 + m^2)e^{2m\varphi}$$

$$r^2 + 2r'^2 - rr'' = a^2(1 + m^2)e^{2m\varphi}$$

Vậy khúc bán kính tại điểm bất kì bằng

$$R = \frac{a^3(1+m^2)^{3/2}e^{3m\varphi}}{a^2(1+m^2)e^{2m\varphi}} =$$

$$= a\sqrt{1+m^2}\,e^{m\varphi} = r\sqrt{1+m^2}$$

k) Ta có

$$r^2 = a^2\cos 2\varphi$$

Lấy đạo hàm hai vế theo φ, ta được

$$rr' = -a^2\sin 2\varphi \qquad (*)$$

Do đó

$$r^2 + r'^2 = r^2 + \frac{a^4\sin^2 2\varphi}{r^2} = \frac{r^4 + a^4\sin^2 2\varphi}{r^2} =$$

$$= \frac{a^4(\sin^2 2\varphi + \cos^2 2\varphi)}{r^2} = \frac{a^4}{r^2}$$

Lại lấy đạo hàm theo φ hai vế của đẳng thức (*), ta được

$$rr'' + r'^2 = -2a^2\cos 2\varphi$$

Do đó $\quad r^2 + 2r'^2 - rr'' = r^2 + 2r'^2 + r'^2 + 2a^2\cos 2\varphi =$

$$= 3(r^2 + r'^2) = \frac{3a^4}{r^2}$$

Vì vậy khúc bán kính tại một điểm bất kì bằng

$$R = \frac{a^6}{r^3}\cdot\frac{r^2}{3a^4} = \frac{a^2}{3r}$$

3. a) hàm số $y = \ln x$ xác định khi $x > 0$. Ta có

$$y' = \frac{1}{x}\ ,\quad y'' = -\frac{1}{x^2}$$

Do đó khúc bán kính của đường $y = \ln x$ tại điểm có hoành độ x bằng

$$R(x) = \frac{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{3/2}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{(x^2+1)^{3/2}}{x}$$

Ta có

$$R'(x) = \frac{x \cdot \frac{3}{2}(x^2+1)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x - (x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{x^2} = \frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{x^2}(2x^2-1)$$

$R'(x) = 0$ khi $2x^2 = 1$ hay $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Từ bảng biến thiên

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
R'		$-$	0	$+$	
R		$\searrow$		$\nearrow$	

ta suy ra rằng khúc bán kính R có giá trị bé nhất khi $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, nó ứng với điểm $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\ln 2\right)$

b) Hàm số $y = e^x$ xác định $\forall x \in \mathbf{R}$. Ta có

$$y' = e^x,\ y'' = e^x$$

Do đó

$$R(x) = \frac{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}}{e^x}$$

Ta có

$$R'(x) = \frac{(1+e^{2x})^{\frac{1}{2}}}{e^{2x}}(2e^{2x}-1)$$

$R'(x) = 0$ khi $2e^{2x}. = 1$, hay $e^{2x} = \frac{1}{2}$, hay $x = -\frac{1}{2}\ln 2$. Cũng như trong câu a), từ chiều biến thiên của R(x), ta thấy rằng khúc bán kính có giá trị bé nhất tại $x = -\frac{1}{2}\ln 2$, nó ứng với điểm $\left(-\frac{1}{2}\ln 2, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

c) Phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ có nghĩa khi $x > 0$, $y > 0$. Lấy đạo hàm hai vế phương trình đó theo x, ta được

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} y' = 0$$

Do đó $\quad y' = -\sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{\frac{a}{x}}$

$$y'' = \frac{\sqrt{a}}{2x^{3/2}}$$

Vậy

$$R(x) = \frac{\left(2 + \frac{a}{x} - 2\sqrt{\frac{a}{x}}\right)^{3/2}}{\frac{\sqrt{a}}{2x^{3/2}}} = \frac{2(2x + a - 2\sqrt{ax})^{3/2}}{\sqrt{a}}$$

Ta có

$$R'(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} 3(2x + a - 2\sqrt{ax})^{1/2} \left(2 - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}\right)$$

$$R'(x) = 0 \text{ khi } \quad 2 - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}} = 0 \text{ hay } x = \frac{a}{4}$$

Từ bảng xét dấu của $R'(x)$, ta suy ra rằng $R(x)$ có giá trị bé nhất khi $x = \frac{a}{4}$, nó ứng với điểm $\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{4}\right)$

d) Hàm số $y = a\ln\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$ xác định khi $-a < x < a$.

Ta có $\quad y' = -\frac{2ax}{a^2 - x^2}$

$$y'' = -2a\frac{a^2 - x^2 + 2x^2}{(a^2 - x^2)^2} = -2a\frac{a^2 + x^2}{(a^2 - x^2)^2}$$

$$1 + y'^2 = 1 + \frac{4a^2x^2}{(a^2 - x^2)^2} = \left(\frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}\right)^2$$

Vậy khúc bán kính tại điểm có hoành độ x bằng

$$R(x) = \frac{\left(\frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}\right)^3}{2a\frac{a^2 + x^2}{(a^2 - x^2)^2}} = \frac{1}{2a}\frac{(a^2 + x^2)^2}{a^2 - x^2}$$

1

Do đó

$$R'(x) = \frac{1}{2a} \cdot \frac{(a^2 - x^2)\, 2\, (a^2 + x^2) + (a^2 + x^2)^2}{(a^2 - x^2)^2} \cdot 2x =$$

$$= \frac{x\, (a^2 + x^2)\, (3a^2 - x^2)}{a\, (a^2 - x^2)^2}$$

Vì $-a < x < a$, nên $R'(x)$ có dấu của x và $R'(x) = 0$ khi $x = 0$. Do đó $R(x)$ có giá trị bé nhất tại $x = 0$, nó ứng với điểm $(0, 0)$.

4. a) Ta viết phương trình đường parabôn $y^2 = x + \frac{1}{2}$ dưới dạng tham số

$$x = t^2 - \frac{1}{2}, \quad y = t$$

Khi đó ta có

$$x' = 2t,\ y' = 1;\ x'' = 2,\ y'' = 0$$

Nếu gọi X, Y là tọa độ chạy của đường túc bế phải tìm, ta có

$$X = x - \frac{y'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - y'x''} = t^2 - \frac{1}{2} + \frac{1 + 4t^2}{2} = 3t^2$$

$$Y = y + \frac{x'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - y'x''} = t - \frac{2t\,(1 + 4t^2)}{2} = -4t^3$$

Khử t giữa hai phương trình ấy, ta được

$$\left(\frac{Y}{4}\right)^2 = \left(\frac{X}{3}\right)^3$$

hay

$$Y^2 = \frac{16}{27} X^3.$$

Đó là phương trình của đường túc bế phải tìm.

Chú thích. Nếu đổi biến số $\bar{x} = x + \frac{1}{2}$, phương trình của parabôn đã cho có thể viết là

1 $$y^2 = 2p\bar{x}, \text{ trong đó } p = \frac{1}{2}.$$

Theo kết quả đã biết trong giáo trình, phương trình đường túc bế của parabôn $y^2 = 2p\overline{x}$ là

$$Y^2 = \frac{8}{27p}(\overline{X} - p)^3 = \frac{16}{27}\left(\overline{X} - \frac{1}{2}\right)^3$$

Vậy phương trình đường túc bế của parabôn $y^2 = x + \frac{1}{2}$ là

$$Y^2 = \frac{16}{27}X^3 .$$

b) Phương trình của hypebôn

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > 0, b > 0)$$

có nghĩa khi $x \geq a$ hoặc $x \leq -a$. Lấy đạo hàm hai vế phương trình ấy đối với x, ta được

$$\frac{x}{a^2} - \frac{yy'}{b^2} = 0 \text{ hay } y' = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}$$

Do đó

$$y'' = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{y - xy'}{y^2} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{y - x\dfrac{b^2}{a^2} \cdot \dfrac{x}{y}}{y^2} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{a^2y^2 - b^2x^2}{a^2y^3} =$$

$$= -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{a^2b^2}{a^2y^3} = -\frac{b^4}{a^2y^3}$$

Vậy $$X = x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''} = x - \frac{\dfrac{b^2}{a^2} \cdot \dfrac{x}{y}\left(1 + \dfrac{b^4}{a^4} \cdot \dfrac{x^2}{y^2}\right)}{-\dfrac{b^4}{a^2y^3}} =$$

$$= x + \frac{x}{b^2}\left[b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right) + \frac{b^4}{a^4}x^2\right] = \frac{a^2 + b^2}{a^4}x^3$$

$$Y = y + \frac{1 + y'^2}{y''} = \frac{a^2 + b^2}{b^4}y^3$$

Đặt $c^2 = a^2 + b^2$, ta được

1

$$X = \frac{c^2}{a^4}x^3, \quad Y = \frac{c^2}{b^4}y^3$$

Vì x, y thỏa mãn phương trình của đường hypebôn, nên nếu khử x, y từ hai phương trình trên, ta được

$$(aX)^{\frac{2}{3}} - (bY)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}$$

đó là phương trình của đường túc bế phải tìm.

Chú thích. Ta cũng có thể sử dụng phương trình tham số của đường hypebôn:

$$x = \varepsilon a \text{ch} t, \ y = b \text{sh} t,$$

trong đó $\varepsilon = 1$ nếu $x > a$, $\varepsilon = -1$ nếu $x < -a$ Khi đó

$$x' = \varepsilon a \text{sh} t, \ x'' = \varepsilon a \text{ch} t$$

$$y' = b \text{ch} t, \ y'' = b \text{sh} t.$$

Do đó $$x'^2 + y'^2 = a^2 \text{sh}^2 t + b^2 \text{ch}^2 t,$$

$$x'y'' - y'x'' = -\varepsilon ab$$

Vậy

$$X = x - \frac{y'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - y'x''} = \varepsilon \frac{c^2}{a} \text{ch}^3 t$$

$$Y = y + \frac{x'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - y'x''} = \frac{c^2}{b} \text{sh}^3 t$$

Đó là phương trình tham số của đường túc bế. Khử t giữa hai phương trình ấy, ta lại được

$$(aX)^{\frac{2}{3}} - (bY)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}$$

c) Phương trình tham số của đường axtrôit

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

là $$x = a\cos^3 t, \ y = a\sin^3 t$$

1 Do đó $$x' = -3a\cos^2 t \sin t, \ y' = 3a\sin^2 t \cos t$$

$$x'^2 + y'^2 = 9a^2\sin^2t\cos^2t$$

$$x'y'' - y'x'' = -9a^2\sin^2t\cos^2t$$

Vậy phương trình tham số của đường túc bế của đường axtrôit là:

$$X = a\cos^3t + 3a\sin^2t\cos t$$

$$Y = a\sin^3t + 3a\sin t\cos^2t$$

Từ hai phương trình đó suy ra

$$X + Y = a(\cos t + \sin t)^3 = 2\sqrt{2}\, a\cos^3\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$X - Y = a(\cos t - \sin t)^3 = 2\sqrt{2}\, a\sin^3\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

hay

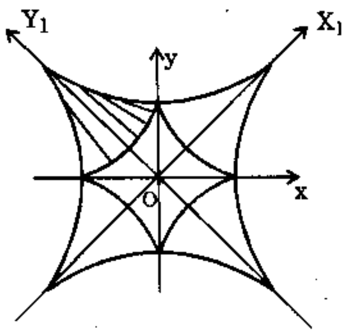
$$\frac{X + Y}{\sqrt{2}} = 2a\cos^3\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{X - Y}{\sqrt{2}} = 2a\sin^3\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

Nếu quay hệ trục tọa độ quanh gốc tọa độ một góc $\frac{\pi}{4}$ thì các tọa độ X_1, Y_1 của một điểm được biểu diễn qua các tọa độ X, Y của nó bởi công thức

$$X_1 = \frac{X + Y}{\sqrt{2}}, \quad Y_1 = \frac{X - Y}{\sqrt{2}}$$

Vậy phương trình tham số của đường túc bế phải tìm trong hệ tọa độ mới là $\quad X_1 = 2a\cos^3\tau,\ Y_1 = 2a\sin^3\tau$



Hình 1

$\tau = t - \frac{\pi}{4}$. Đó là phương trình của đường axtrôit có kích thước lớn gấp hai lần đường axtrôit đã cho. Nếu khử tham số τ từ hai phương trình trên, ta được

$$X_1^{2/3} + Y_1^{2/3} = (2a)^{2/3}$$

Như vậy đường túc bế của đường axtrôit được suy ra từ đường axtrôit bởi một phép vị tự tâm O tỉ số 2 và một phép quay quanh O một góc $\frac{\pi}{4}$ (h.1).

d) Ta có

$$x = a(\cos t + t\sin t),\ y = a(\sin t - t\cos t)$$

Do đó

$x' = at\cos t$, $y' = at\sin t$, $x'^2 + y'^2 = a^2t^2$, $x'y'' - y'x'' = a^2t^2$

Vậy phương trình tham số của đường túc bế phải tìm là

$$X = a(\cos t + t\sin t) - at\sin t = a\cos t$$

$$Y = a(\sin t - t\cos t) + at\cos t = a\sin t$$

Do đó đường túc bế chính là đường tròn tâm O bán kính a. Vì vậy đường cong đã cho là đường thân khai của đường tròn ấy.

e) Ta có

$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$$

$$x' = a(1 - \cos t),\ y' = a\sin t$$

$$x'' = a\sin t,\ y'' = a\cos t$$

$$x'^2 + y'^2 = 4a^2\sin^2\frac{t}{2}$$

$$x'y'' - y'x'' = -2a^2\sin^2\frac{t}{2}$$

Vậy phương trình tham số của đường túc bế của đường xiclôit là

$$X = a(t - \sin t) + 2a\sin t = a(t + \sin t)$$

$$Y = a(1 - \cos t) - 2a(1 - \cos t) = -a(1 - \cos t)$$

Đặt $t = \tau - \pi$, phương trình trên được viết là

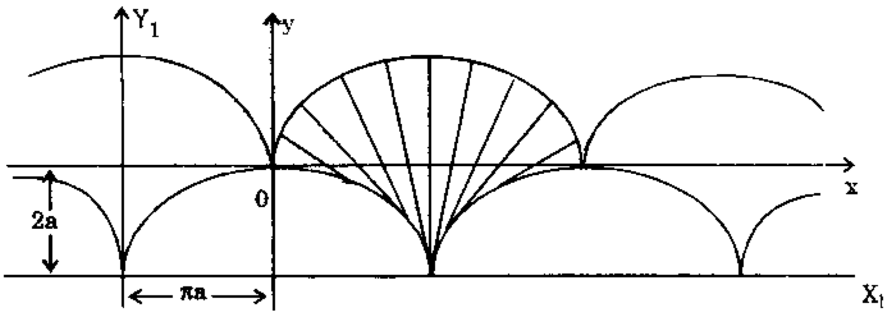
$$X = -\pi a + a(\tau - \sin\tau)$$
$$Y = -2a + a(1 - \cos\tau)$$

Thực hiện phép tịnh tiến hệ trục tọa độ bằng cách đặt

$$X_1 = X + \pi a, \; Y_1 = Y + 2a,$$

ta được $\quad X_1 = a(\tau - \sin\tau), \; Y_1 = a(1 - \cos\tau)$

Đó là phương trình tham số của đường túc bế phải tìm trong hệ trục tọa độ IX_1Y_1. Phương trình ấy cũng là phương trình của đường xiclôit cùng kích thước với đường xiclôit đã cho. Như vậy đường túc bế của đường xiclôit được suy ra từ đường xiclôit ấy bằng cách thực hiện một phép tịnh tiến song song với trục hoành một đoạn bằng πa sang trái và một phép tịnh tiến song song với trục tung một đoạn bằng 2a xuống dưới (hình 2)



Hình 2

f) Ta có

$$r = a(1 + \cos\varphi)$$

Do đó $\quad x = a(1 + \cos\varphi)\cos\varphi = a(\cos\varphi + \cos^2\varphi)$

$$y = a(1 + \cos\varphi)\sin\varphi = a(\sin\varphi + \sin\varphi\cos\varphi)$$

Vậy $\quad x' = a(-\sin\varphi - 2\cos\varphi\sin\varphi) = -a(\sin\varphi + \sin2\varphi)$

$$y' = a(\cos\varphi + \cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = a(\cos\varphi + \cos2\varphi)$$

$$x'' = -a(\cos\varphi + 2\cos 2\varphi)$$
$$y'' = -a(\sin\varphi + 2\sin 2\varphi)$$
$$x'^2 + y'^2 = 2a^2(1 + \cos\varphi)$$
$$x'y'' - y'x'' = 3a^2(1 + \cos 2\varphi)$$

Các phương trình tham số của đường túc bế phải tìm là

$$X = a(\cos\varphi + \cos^2\varphi) - \frac{2a}{3}(\cos\varphi + \cos 2\varphi)$$
$$= \frac{a}{3}(\cos\varphi - \cos^2\varphi + 2)$$
$$Y = a(\sin\varphi + \sin\varphi\cos\varphi) - \frac{2a}{3}(\sin\varphi + \sin 2\varphi)$$
$$= \frac{a}{3}\sin\varphi(1 - \cos\varphi)$$

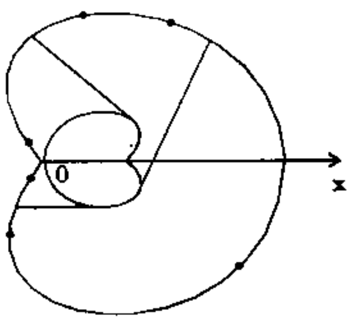
Đặt $t = \pi - \varphi$, các phương trình trên được viết là

$$X = -\frac{a}{3}(\cos t + \cos^2 t) + \frac{2a}{3}$$
$$Y = \frac{a}{3}\sin t(1 + \cos t)$$

Đổi biến số $X_1 = \frac{2a}{3} - X,\ Y_1 = Y,$

ta được $X_1 = \frac{a}{3}(1 + \cos t)\cos t$

$$Y_1 = \frac{a}{3}(1 + \cos t)\sin t$$



Hình 3

Đó là phương trình của đường cac-đi-ô-it có kích thước bằng $\frac{1}{3}$ kích thước đường cac-đi-ô-it đã cho (hình 3)

5. a) Vì tâm của họ đường tròn nằm trên đường $y = x$, gọi (c, c) là các tọa độ của tâm đường tròn. Phương trình của họ đường tròn ấy là

$$(x - c)^2 + (y - c)^2 - 4 = 0,$$

nó phụ thuộc tham số c. Lấy đạo hàm hai vế phương trình ấy đối với c, ta được

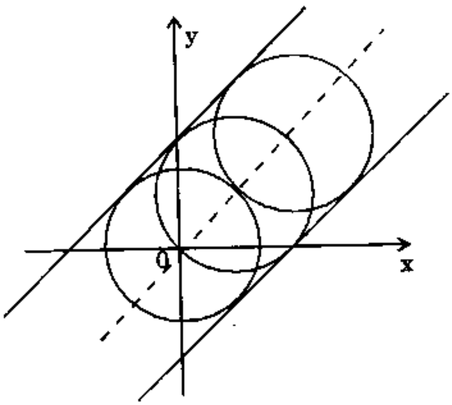
$$-2(x - c) - 2(y - c) = 0$$

Do đó

$$c = \frac{x + y}{2}$$

Thế biểu thức ấy vào phương trình của họ đường tròn, ta được $\frac{(y - x)^2}{2} = 4$ hay $y = x \pm 2\sqrt{2}$

Vì họ đường tròn không có điểm kì dị nên phương trình ấy là phương trình của hình bao phải tìm. Hình bao gồm hai đường thẳng song song với đường $y = x$ (hình 4).



1 *Hình 4*

b) Ta có họ parabôn phụ thuộc tham số c

$$cx^2 + c^2y - 1 = 0$$

Lấy đạo hàm hai vế đối với c, ta được

$$x^2 + 2cy = 0$$

Do đó

$$c = -\frac{x^2}{2y}$$

Thế biểu thức ấy vào phương trình của họ parabôn, ta được

$$y = -\frac{x^4}{4}$$

Đó là phương trình của hình bao phải tìm, vì họ parabôn không có điểm kì dị.

c) Xét họ parabôn phụ thuộc tham số c

$$y = c^2(x - c)^2$$

Lấy đạo hàm hai vế đối với c, ta được

$$2c(x - c)^2 - 2c^2(x - c) = 0$$

Hay

$$2c(x - c)(x - 2c) = 0$$

Do đó, hoặc $c = 0$, hoặc $c = x$, hoặc $c = \frac{x}{2}$. Thế các giá trị ấy vào phương trình của họ parabôn, ta được

$$\text{hoặc } y = 0, \text{ hoặc } y = \frac{x^4}{16}.$$

Vậy hình bao phải tìm gồm hai đường $y = 0$, $y = \frac{x^4}{16}$.

Đường $y = 0$ tiếp xúc với tất cả các parabôn của họ ở đỉnh, còn đường $y = \frac{x^4}{16}$ tiếp xúc với tất cả các parabôn của họ ở điểm $x = 2c$, nó còn cắt các parabôn ấy ở điểm $x = -2c \pm 2c\sqrt{2}$.

d) Tâm của đường tròn nằm trên trục Ox, lấy hoành độ c của nó làm tham số. Bán kính của họ đường tròn bằng

$$\sqrt{\frac{b^2}{a^2}(a^2 - c^2)} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - c^2}$$

Vậy phương trình của họ đường tròn là

$$(x - c)^2 + y^2 - \frac{b^2}{a^2}(a^2 - c^2) = 0$$

Với $-a \leq c \leq a$. Lấy đạo hàm hai vế đối với c, ta được

$$-2(x - c) + \frac{2b^2}{a^2}c = 0$$

Do đó

$$c = \frac{a^2}{a^2 + b^2}x$$

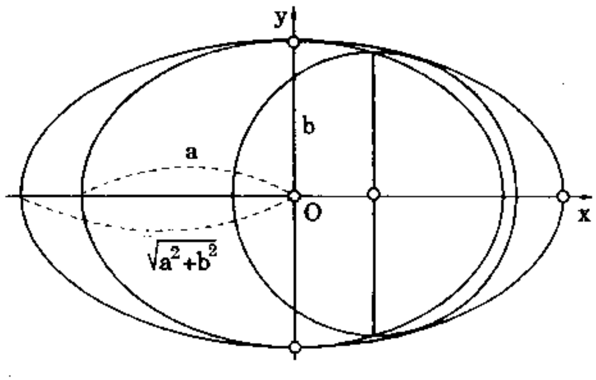
Thế biểu thức ấy vào phương trình của họ đường tròn, ta được

$$\left(x - \frac{a^2x}{a^2 + b^2}\right)^2 + y^2 - \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 - \frac{a^4x^2}{(a^2 + b^2)^2}\right) = 0$$

hay

$$\frac{x^2}{a^2 + b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Hình bao là một elip có các bán trục là $\sqrt{a^2 + b^2}$ và b (hình 5).



Hình 5

e) Tâm của đường tròn nằm trên parabôn $y^2 = 2px$. Lấy tung độ c của nó làm tham số. Tọa độ của tâm đường tròn là $\left(\frac{c^2}{2p}, c\right)$; bình phương của bán kính của đường tròn bằng

$$\frac{c^4}{4p^2} + c^2.$$

Vậy phương trình của họ đường tròn bằng

$$\left(x - \frac{c^2}{2p}\right)^2 + (y - c)^2 = c^2 + \frac{c^4}{4p^2}.$$

Hay

$$x^2 + y^2 - \frac{c^2}{p}x - 2cy = 0.$$

Lấy đạo hàm hai vế đối với c, ta được

$$-\frac{2cx}{p} - 2y = 0.$$

Hay

$$c = -\frac{py}{x}.$$

Thế biểu thức ấy vào phương trình của họ đường tròn, ta được

$$x^2 + y^2 + \frac{py^2}{x} = 0 \text{ hay } x(x^2 + y^2) + py^2 = 0.$$

Đó là phương trình của hình bao của họ đường tròn.

f) Phương trình của họ đường thẳng có thể viết là

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$$

trong đó

$$m^2 + n^2 = a^2.$$

Đặt

$$m = a\cos t,\ n = a\sin t.$$

Phương trình trên trở thành

$$\frac{x}{\cos t} + \frac{y}{\sin t} = a,$$

t là tham số. Lấy đạo hàm hai vế đối với t, ta được

$$\frac{x\sin t}{\cos^2 t} - \frac{y\cos t}{\sin^2 t} = 0.$$

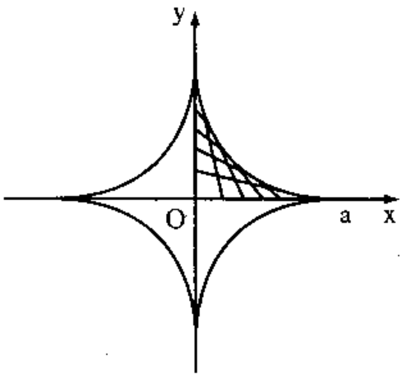
Do đó

$$\frac{x}{\cos^3 t} = \frac{y}{\sin^3 t}.$$

Suy ra
$$\frac{\dfrac{x}{\cos t}}{\cos^2 t} = \frac{\dfrac{y}{\sin t}}{\sin^2 t} = \frac{\dfrac{x}{\cos t} + \dfrac{y}{\sin t}}{\cos^2 t + \sin^2 t} = \frac{a}{1}.$$

Vậy $\quad x = a\cos^3 t, \qquad y = a\sin^3 t$

Hình bao là đường axtrôit (hình 6).



Hình 6

g) Vì lí do đối xứng, ta chỉ xét trong góc phần tư thứ nhất phương trình của họ đường thẳng có thể viết là

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1,$$

trong đó $\quad m + n = a.$

Vậy phương trình của họ đường thẳng là

$$(a - m)x + my = m(a - m)$$

trong đó m là tham số. Lấy đạo hàm hai vế đối với m, ta được

$$-x + y = a - 2m.$$

1

hay

$$m = \frac{a + x - y}{2}$$

Do đó

$$a - m = \frac{a - x + y}{2}$$

Thế các biểu thức ấy vào phương trình của họ đường thẳng, ta được

$$\frac{a - x + y}{2}x + \frac{a + x - y}{2}y = \frac{a^2 - (x - y)^2}{4}$$

Hay

$$x^2 + y^2 - 2xy - 2ax - 2ay + a^2 = 0$$

Hay

$$4xy = [a - (x + y)]^2$$

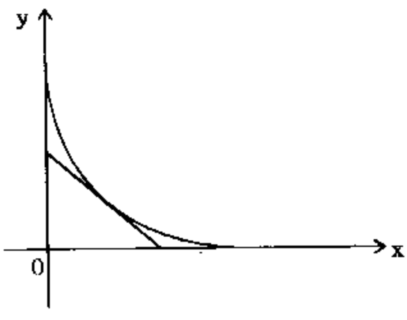
Trong góc phần tư thứ nhất, ta có $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$, phương trình trên tương đương với

$$2\sqrt{xy} = a - (x + y)$$

$$\Rightarrow x + y + 2\sqrt{xy} = a$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$$

Đó là phương trình của hình bao trong góc phần tư thứ nhất, nó biểu diễn 1 cung parabôn nhận đường phân giác thứ nhất làm trục và tiếp xúc với hai trục tọa độ ở các điểm (a, 0) và (0, a) (hình 7) .



Hình 7

h) Chọn hoành độ c của điểm M làm tham số, $0 \le c \le a$. Vì M nằm trên đoạn AB, nên tọa độ của nó là (c, a – c). Phương trình các elip E là

1

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{(a - c)^2} = 1$$

Lấy đạo hàm hai vế phương trình đó đối với c, ta được

$$-\frac{2x^2}{c^3} + \frac{2y^2}{(a-c)^3} = 0$$

Do đó

$$y^2 = x^2\left(\frac{a-c}{c}\right)^3$$

Thế biểu thức ấy vào phương trình của họ elip E, ta được

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{a-c}{c^3}x^2 = 1$$

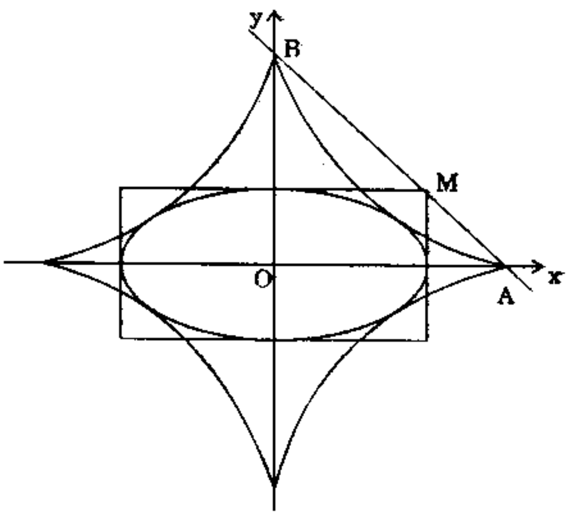
Do đó

$$x^2 = \frac{c^3}{a},\ y^2 = \frac{(a-c)^3}{a}$$

Bây giờ đổi tham số bằng cách đặt $c = a\cos^2 t$, điều này hợp lí vì $0 \leq c \leq a$, ta được các phương trình tham số của hình bao là:

$$x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$$

Đó là phương trình của đường axtrôit quen thuộc (hình 8)



Hình 8

i) Phương trình tham số của parabôn $y^2 = 2px$ là

$$x = 2pt^2, \; y = 2pt$$

Tiêu điểm F có tọa độ $\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$, do đó vectơ $\overrightarrow{FM}$ có tọa độ $\left(2pt^2 - \frac{p}{2},\ 2pt\right)$. Vậy phương trình của họ đường thẳng D là

$$(x - 2pt^2)(4t^2 - 1) + (y - 2pt)4t = 0$$

Hay $$(4t^2 - 1)x + 4ty - 2p(4t^4 + 3t^2) = 0$$

Lấy đạo hàm hai vế phương trình đó đối với t, ta được

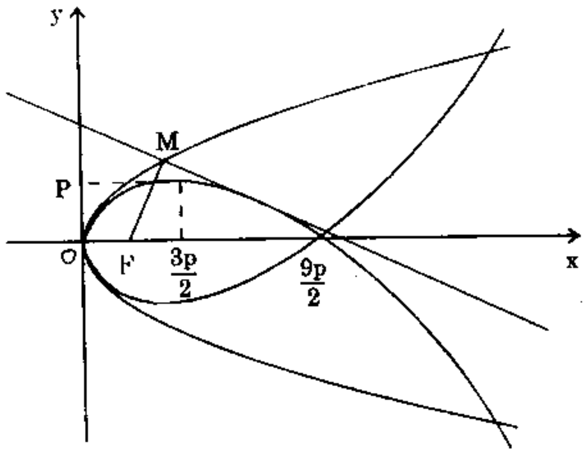
$$8tx + 4y - 32pt^3 - 12pt = 0$$

Do đó $$y = 8pt^3 + 3pt - 2tx$$

Thế vào phương trình của họ đường thẳng D và rút gọn, ta được các phương trình tham số của hình bao

$$x = 6pt^2, \; y = 3pt - 4pt^3$$

Hình bao được cho ở hình 9.



Hình 9

j) Chọn trục Ox trên đường thẳng. Gọi I là tâm của đường tròn, H là
1 hình chiếu của I lên trục Ox. Chọn gốc tọa-độ O sao cho độ dài đoạn OH

bằng độ dài cung $\overset{\frown}{HM}$ (hình 10). Chọn góc $\widehat{HIM} = t$ làm tham số. Khi đó toạ độ của I là (Rt, R). Do đó phương trình của đường kính MN là

$$y - R = \text{cotgt}\,(x - Rt)$$

Lấy đạo hàm hai vế phương trình đó đối với t, ta được

$$-\frac{1}{\sin^2 t}(x - Rt) - \frac{\cos t}{\sin t}R = 0$$

Do đó

$$x = Rt - R\sin t\cos t = R\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)$$

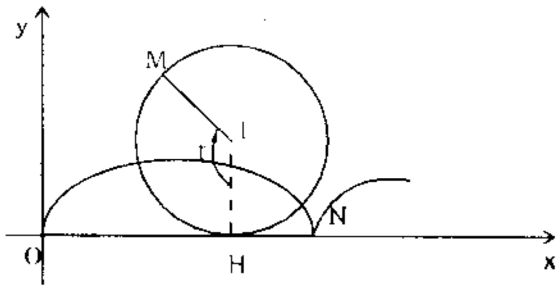
Thế vào phương trình của họ đường kính MN, ta được

$$y = R(1 - \cos^2 t) = R\sin^2 t = \frac{R}{2}(1 - \cos 2t)$$

Đổi tham số $2t = \varphi$, ta được các phương trình tham số của hình bao là

$$\begin{cases} x = \dfrac{R}{2}(\varphi - \sin\varphi) \\ y = \dfrac{R}{2}(1 - \cos\varphi) \end{cases}$$

Vậy hình bao là đường xiclôit (hình 10)



Hình 10

k) Chọn tung độ c của điểm M làm tham số. Hệ số góc của đường thẳng FM là $-\frac{2c}{p}$, do đó hệ số góc của đường thẳng MT là $\frac{p}{2c}$, vậy
1 phương trình của họ đường thẳng MT là

$$2cy = px + 2c^2$$

Lấy đạo hàm hai vế phương trình ấy đối với c, ta được

$$2y = 4c \quad \text{hay} \quad c = \frac{y}{2}$$

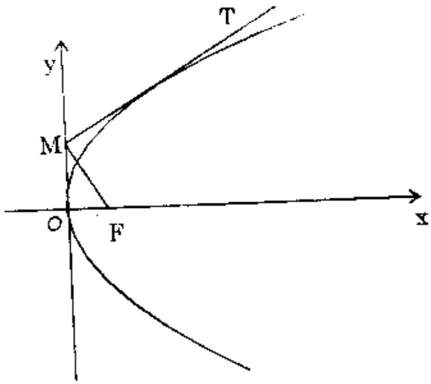
Thế vào phương trình của họ đường thẳng MT, ta được

$$y^2 = px + \frac{y^2}{2} \text{ hay } y^2 = 2px$$

Hình bao là đường parabôn (hình 11).

6. Gọi các tọa độ của các vectơ $\vec{p}(t)$, $\vec{q}(t)$ theo thứ tự là $x_1(t)$, $y_1(t)$, $z_1(t)$ và $x_2(t)$ $y_2(t)$, $z_2(t)$.

a) Các tọa độ của $\vec{p}(t) + \vec{q}(t)$ là $x_1(t) + x_2(t)$, $y_1(t) + y_2(t)$, $z_1(t) + z_2(t)$.



Do đó

Hình 11

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}(t) + \vec{q}(t)) = (x'_1(t) + x'_2(t))\vec{i} + (y'_1(t) + y'_2(t))\vec{j} +$$

$$+ (z'_1(t) + z'_2(t))\vec{k} = (x'_1(t)\vec{i} + y'_1(t)\vec{j} + z'_1(t)\vec{k}) +$$

$$+ (x'_2(t)\vec{i} + y'_2(t)\vec{j} + z'_2(t)\vec{k}) = \frac{d\vec{p}(t)}{dt} + \frac{d\vec{q}(t)}{dt}$$

b) Các tọa độ của $\alpha(t) . \vec{p}(t)$ là $\alpha(t)x_1(t)$, $\alpha(t)y_1(t)$, $\alpha(t)z_1(t)$. Do đó

1

$$\frac{d}{dt}(\alpha(t) . \vec{p}(t)) = [\alpha(t)x'_1(t) + \alpha'(t)x_1(t)]\vec{i} +$$

$$+ [\alpha(t)y'_1(t) + \alpha'(t)y_1(t)]\vec{j} + [\alpha(t)z'_1(t) + \alpha'(t)z_1(t)]\vec{k} =$$

$$= \alpha(t)[x'_1(t)\vec{i} + y'_1(t)\vec{j} + z'_1(t)\vec{k}] + \alpha'(t)[x_1(t)\vec{i} + y_1(t)\vec{j} + z_1(t)\vec{k}] =$$

$$= \alpha(t) \cdot \frac{d\vec{p}(t)}{dt} + \alpha'(t)\vec{p}(t)$$

c) $$\frac{d}{dt}(\vec{p}(t) \cdot \vec{q}(t)) = \frac{d}{dt}(x_1(t) \cdot x_2(t) + y_1(t) \cdot y_2(t) + z_1(t) \cdot z_2(t)) =$$

$$= (x_1(t)x'_2(t) + y_1(t)y'_2(t) + z_1(t)z'_2(t)) +$$

$$+ (x'_1(t)x_2(t) + y'_1(t)y_2(t) + z'_1(t)z_2(t)) = \vec{p}(t) \cdot \frac{d\vec{q}(t)}{dt} + \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{q}(t)$$

d) $$\frac{d}{dt}(\vec{p}(t) \wedge \vec{q}(t)) =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1(t) & y_1(t) & z_1(t) \\ x_2(t) & y_2(t) & z_2(t) \end{vmatrix} \right) =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_1(t) & y'_1(t) & z'_1(t) \\ x_2(t) & y_2(t) & z_2(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1(t) & y_1(t) & z_1(t) \\ x'_2(t) & y'_2(t) & z'_2(t) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{d\vec{p}(t)}{dt} \wedge \vec{q}(t) + \vec{p}(t) \wedge \frac{d\vec{q}(t)}{dt}$$

1 **7.** a) $$\frac{d}{dt}\left(\vec{p}(t) \wedge \frac{d\vec{p}(t)}{dt} \right) = \frac{d\vec{p}(t)}{dt} \wedge \frac{d\vec{p}(t)}{dt} + \vec{p}(t) \wedge \frac{d^2\vec{p}(t)}{dt^2} =$$

$$= \vec{p}(t) \wedge \frac{d^2\vec{p}(t)}{dt^2},$$

Vì $$\frac{d\vec{p}(t)}{dt} \wedge \frac{d\vec{p}(t)}{dt^2} = 0 .$$

b) Đặt các tọa độ của $\vec{p}(t), \vec{q}(t), \vec{r}(t)$ theo thứ tự là $x_1(t)$, $y_1(t)$, $z_1(t)$; $x_2(t)$, $y_2(t)$, $z_2(t)$; $x_3(t)$, $y_3(t)$, $z_3(t)$. Ta có

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}(t),\vec{q}(t),\vec{r}(t)) = \frac{d}{dt}\begin{vmatrix} x_1(t) & y_1(t) & z_1(t) \\ x_2(t) & y_2(t) & z_2(t) \\ x_3(t) & y_3(t) & z_3(t) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x'_1(t) & y'_1(t) & z'_1(t) \\ x_2(t) & y_2(t) & z_2(t) \\ x_3(t) & y_3(t) & z_3(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1(t) & y_1(t) & z_1(t) \\ x'_2(t) & y'_2(t) & z'_2(t) \\ x_3(t) & y_3(t) & z_3(t) \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} x_1(t) & y_1(t) & z_1(t) \\ x_2(t) & y_2(t) & z_2(t) \\ x'_3(t) & y'_3(t) & z'_3(t) \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{d\vec{p}(t)}{dt}, \vec{q}(t), \vec{r}(t)\right) + \left(\vec{p}(t), \frac{d\vec{q}(t)}{dt} \vec{r}(t)\right) + \left(\vec{p}(t), \vec{q}(t), \frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right) .$$

c) $$f'(t) = \left(\frac{d\vec{p}(t)}{dt}, \frac{d\vec{p}(t)}{dt}, \frac{d^2\vec{p}(t)}{dt^2}\right) + \left(\vec{p}(t), \frac{d^2\vec{p}(t)}{dt^2}, \frac{d^2\vec{p}(t)}{dt^2}\right) + \left(\vec{p}(t), \frac{d\vec{p}(t)}{dt}, \frac{d^3\vec{p}(t)}{dt^3}\right)$$

$$= \left(\vec{p}(t), \frac{d\vec{p}(t)}{dt}, \frac{d^3\vec{p}(t)}{dt^3}\right).$$

8. a) $x = a\sin^2 t$, $y = b\sin t\cos t$, $z = c\cos^2 t$

$x' = 2a\sin t\cos t = a\sin 2t$,

$y' = b(\cos^2 t - \sin^2 t) = b\cos 2t$

$z' = -2c\sin t\cos t = -c\sin 2t$.

Do đó

$$x\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{a}{2} \qquad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{b}{2}, \qquad z\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{c}{2} .$$

1

$$x'\left(\frac{\pi}{4}\right) = a, \qquad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0, \qquad z'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -c.$$

Vậy phương trình của tiếp tuyến là $\dfrac{x-\frac{a}{2}}{a} = \dfrac{y-\frac{b}{2}}{0} = \dfrac{z-\frac{c}{2}}{-c}$.

Phương trình của pháp diện là $a\left(x-\frac{a}{2}\right) - c\left(z-\frac{c}{2}\right) = 0$.

b) $x = \dfrac{e^t \sin t}{\sqrt{2}}, \quad y = 1, \quad z = \dfrac{e^t \cos t}{\sqrt{2}}$

$$x' = \frac{e^t(\sin t + \cos t)}{\sqrt{2}}, \quad y' = 0, \quad z' = \frac{e^t(\cos t - \sin t)}{\sqrt{2}}$$

$$x(0) = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad z(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x'(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y'(0) = 0, \quad z'(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Phương trình của tiếp tuyến là $\dfrac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{y-1}{0} = \dfrac{z-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

Phương trình của pháp diện là $\dfrac{\sqrt{2}}{2}x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(z - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$.

c) $x = t, y = t^2, z = t^3$

$x' = 1, y' = 2t, z' = 3t^2$

$x(3) = 3, y(3) = 9, z(3) = 27$

$x'(3) = 1, y'(3) = 6, z'(3) = 27$.

Phương trình của tiếp tuyến là

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-9}{6} = \frac{z-27}{27}.$$

Phương trình của pháp diện là

$$x - 3 + 6(y - 9) + 27(z - 27) = 0$$

d) $$x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t,\ z = 4\sin\frac{t}{2}$$

$$x' = 1 - \cos t,\ y' = \sin t,\ z' = 2\cos\frac{t}{2}$$

$$x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 1,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,\ z\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sqrt{2}$$

$$x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,\ z'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}$$

Phương trình của tiếp tuyến là

$$x - \frac{\pi}{2} + 1 = y - 1 = \frac{z - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

Phương trình của pháp diện là

$$x - \frac{\pi}{2} + 1 + y - 1 + \sqrt{2}\,(z - 2\sqrt{2}) = 0$$

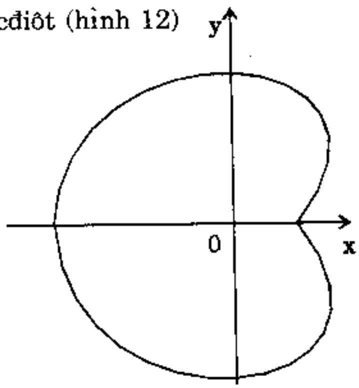
Hay $$x + y + \sqrt{2}z = \frac{\pi}{2} + 4$$

9. a) Phương trình tham số của hình chiếu của đường đã cho trên mặt phẳng xOy là

$$x = \frac{a}{3}(2\cos t - \cos 2t)\ (a > 0)$$

$$y = \frac{a}{3}(2\sin t - \sin 2t)$$

Đó là đường cacđiôt (hình 12)



Hình 12

1

b) Ta có

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2}{9}(4\cos^2 t - 4\cos t\cos 2t + \cos^2 2t +$$
$$+ 4\sin^2 t - 4\sin t\sin 2t + \sin^2 2t) + \frac{8a^2}{9}\cos^2\frac{t}{2} =$$
$$= \frac{a^2}{9}\left(5 - 4\cos t + 8\cos^2\frac{t}{2}\right) =$$
$$= \frac{a^2}{9}(5 - 4\cos t + 4 + 4\cos t) = a^2$$

Vậy đường đã cho nằm trên mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Ta có

$$x' = \frac{a}{3}(-2\sin t + 2\sin 2t)$$
$$y' = \frac{a}{3}(2\cos t - 2\cos 2t)$$
$$z' = -\frac{a\sqrt{3}}{2}\sin\frac{t}{2}$$
$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \frac{a^2}{9}\left(8 - 8\cos t + 2\sin^2\frac{t}{2}\right) = 2a^2\sin^2\frac{t}{2}$$

Do đó cosin chỉ phương thứ ba của tiếp tuyến của đường đã cho bằng

$$\frac{-\dfrac{a\sqrt{2}}{3}\sin\dfrac{t}{2}}{a\sqrt{2}\sin\dfrac{t}{2}} = -\frac{1}{3}$$

Vậy các tiếp tuyến ấy làm với trục Oz một góc không đổi.

10. Ta có

$$x = \frac{a}{2}\sin 2t,\ y = \frac{a}{2}(1 - \cos 2t),\ z = a\cos t.$$
$$x' = a\cos 2t,\ y' = \frac{a}{2}\sin 2t,\ z' = -a\sin t$$

Phương trình của tiếp tuyến của đường đã cho tại điểm ứng với tham số t là

$$\frac{x - \dfrac{a}{2}\sin 2t}{\cos 2t} = \frac{y - \dfrac{a}{2}(1 - \cos 2t)}{\sin 2t} = \frac{z - a\cos t}{-\sin t}$$

Giao điểm của tiếp tuyến ấy với mặt phẳng xOy có tọa độ (x, y, 0) thỏa mãn phương trình trên, tức là

$$x = \frac{a}{2}\sin 2t + \frac{a\cos t\cos 2t}{\sin t} =$$

$$= \frac{a}{2}\frac{\cos t(1 + \cos 2t)}{\sin t} = a\frac{\cos^3 t}{\sin t},$$

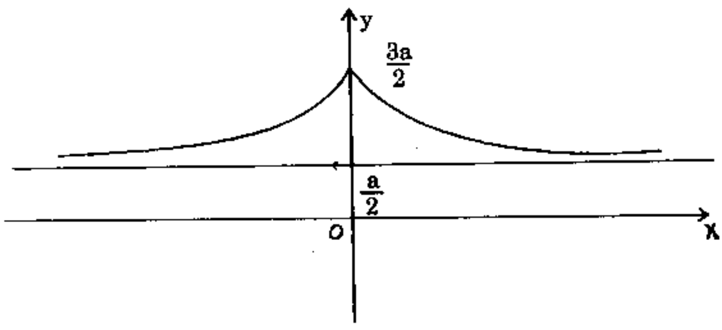
$$y = \frac{a}{2}(1 - \cos 2t) + \frac{a\sin 2t\cos t}{\sin t} =$$

$$= \frac{a}{2} + \frac{a}{2}(1 - \cos 2t) = \frac{a}{2}(1 + 2\sin^2 t)$$

Vậy phương trình tham số của tập hợp tất cả các giao điểm ấy là

$$x = a\frac{\cos^3 t}{\sin t}, \quad y = \frac{a}{2}(1 + 2\sin^2 t).$$

đó là phương trình của đường xixôit (hình 13).



Hình 13

11. Ta có

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{\cos^2 t + \sin^2 t + sh^2 t}{ch^2 t} = \frac{1 + sh^2 t}{ch^2 t} = 1$$

Vậy đường đã cho nằm trên mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Ta có

$$x' = \frac{-\text{chtsint} - \text{costsht}}{\text{ch}^2t}$$

$$y' = \frac{\text{chtcost} - \text{sintsht}}{\text{ch}^2t}$$

$$z' = \frac{\text{ch}^2t - \text{sh}^2t}{\text{ch}^2t} = \frac{1}{\text{ch}^2t}$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \frac{\text{ch}^2t + \text{sh}^2t + 1}{\text{ch}^4t} = \frac{2}{\text{ch}^2t}$$

Do đó các tọa độ của vectơ đơn vị $\vec{\tau}$ của tiếp tuyến của đường đã cho là

$$\left(\frac{-\text{chtsint} - \text{costsht}}{\sqrt{2}\text{cht}}, \frac{\text{chtcost} - \text{sintsht}}{\sqrt{2}\text{cht}}, \frac{1}{\sqrt{2}\text{cht}}\right)$$

Mặt khác, phương trình tham số của giao tuyến của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ với mặt phẳng $z = a$ là

$$x = \sqrt{1 - a^2}\text{cost},\ y = \sqrt{1 - a^2}\,\text{sint},\ z = a$$

Do đó

$$x' = -\sqrt{1 - a^2}\,\sin t,\ y' = \sqrt{1 - a^2}\,\text{cost},\ z' = 0$$

Các tọa độ của vectơ đơn vị $\vec{\tau}_1$ của tiếp tuyến của các giao tuyến ấy là $(-\text{sint}, \text{cost}, 0)$

Vậy

$$\vec{\tau}.\vec{\tau}_1 = \frac{(\text{chtsint} + \text{costsht})\,\text{sint} + (\text{chtcost} - \text{sintsht})\,\text{cost}}{\sqrt{2}\text{cht}}$$

$$= \frac{\text{cht}}{\sqrt{2}\,\text{cht}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Do đó các vectơ $\vec{\tau}, \vec{\tau}_1$ làm với nhau một góc không đổi

12. Độ cong C của đường có phương trình tham số

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$$

được cho bởi công thức

1

$$C = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2}}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{3/2}} .$$

a) Ta có

$x = e^t,\ y = e^{-t},\ z = t\sqrt{2}$

$x' = e^t,\ y' = -e^{-t},\ z = \sqrt{2}$

$x'' = e^t,\ y'' = e^{-t},\ z'' = 0$

$x'^2 + y'^2 + z'^2 = e^{2t} + e^{-2t} + 2 = (e^t + e^{-t})^2$

$x'y'' - y'x'' = 2,\ y'z'' - z'y'' = -\sqrt{2}\,e^{-t},\ z'x'' - x'z'' = \sqrt{2}\,e^t.$

Do đó

$$C = \frac{\sqrt{4+2e^{-2t}+2e^{2t}}}{(e^t+e^{-t})^3} = \frac{\sqrt{2}(e^t+e^{-t})}{(e^t+e^{-t})^3} = \frac{\sqrt{2}}{(e^t+e^{-t})^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{(x+y)^2} .$$

b) $x = e^t\sin t,\ y = e^t\cos t,\ z = e^t$

$x' = e^t(\sin t + \cos t),\ y' = e^t(\cos t - \sin t),\ z' = e^t$

$x'' = 2e^t\cos t,\ y'' = -2e^t\sin t,\ z'' = e^t$

$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 3e^{2t}$

$x'y'' - y'x'' = -2e^{2t}$

$y'z'' - z'y'' = e^{2t}(\cos t + \sin t)$

$z'x'' - x'z'' = e^{2t}(\cos t - \sin t)$

$(x'y'' - y'x'')^2 + (y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 = 6.e^{4t}.$

Vậy

1 $$C = \frac{\sqrt{6}e^{2t}}{3\sqrt{3}e^{3t}} = \frac{\sqrt{2}}{3}e^{-t} .$$

c) $x = 3(\cos t + t\sin t)$, $y = 3(\sin t - t\cos t)$, $z = 2t^2$

$$x' = 3t\cos t, \quad y' = 3t\sin t, \quad z' = 4t$$

$$x'' = 3(\cos t - t\sin t), \quad y'' = 3(\sin t + t\cos t), \quad z'' = 4$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 25t^2$$

$$x'y'' - y'x'' = 9t^2,\ y'z'' - z'y'' = -12t^2\cos t,\ z'x'' - x'z'' = -12t^2\sin t$$

$$(x'y'' - y'x'')^2 + (y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 = 225t^4.$$

Vậy

$$C = \frac{15t^2}{125t^3} = \frac{3}{25t}\ .$$

d) $x = t - \sin t + 4\cos\frac{t}{2}$, $y = t - \sin t - 4\cos\frac{t}{2}$, $z = \sqrt{2}(1 - \cos t)$

$$x' = 1 - \cos t - 2\sin\frac{t}{2}, \quad y' = 1 - \cos t + 2\sin\frac{t}{2}, \quad z' = \sqrt{2}\sin t\ ,$$

$$x'' = \sin t - \cos\frac{t}{2}, \quad y'' = \sin t + \cos\frac{t}{2}, \quad z'' = \sqrt{2}\cos t\ ,$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 2 + 2\cos^2\frac{t}{2} + 8\sin^2\frac{t}{2} - 4\cos t + 2\sin^2 t =$$

$$= 4 - 4\cos t + 8\sin^2\frac{t}{2} = 16\sin^2\frac{t}{2}\ ,$$

$$x'y'' - y'x'' = 2\left(\cos\frac{t}{2} - \cos t\cos\frac{t}{2} - 2\sin\frac{t}{2}\sin t\right) =$$

$$= -2\sin\frac{t}{2}\sin t = -4\sin^2\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2},$$

$$y'z'' - z'y'' = \sqrt{2}\left(\cos t - 1 + 2\sin\frac{t}{2}\cos t - \sin t\cos\frac{t}{2}\right) =$$

$$= \sqrt{2}(\cos t - 1)(1 + \sin\frac{t}{2}) = -2\sqrt{2}\sin^2\frac{t}{2}(1 + \sin\frac{t}{2}),$$

$$z'x'' - x'z'' = \sqrt{2}\left(1 - \cos t + 2\sin\frac{t}{2}\cos t - \sin t\cos\frac{t}{2}\right) =$$

1 $$= \sqrt{2}(\cos t - 1)(\sin\frac{t}{2} - 1) = -2\sqrt{2}\sin^2\frac{t}{2}(\sin\frac{t}{2} - 1)\ .$$

$$(x'y'' - y'x'')^2 + (y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 =$$

$$= 16\sin^4\frac{t}{2}\left(1 + \cos^2\frac{t}{2} + \sin^2\frac{t}{2}\right) = 32\sin^4\frac{t}{2}$$

Vậy

$$C = \frac{4\sqrt{2}\sin^2\dfrac{t}{2}}{4^3\sin^3\dfrac{t}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{16\sin\dfrac{t}{2}}$$

13. a) Ta có

$$f(x.y.z) = x^2 - 4y^2 + 2z^2 - 6 = 0$$

$$f'_x(x,y,z) = 2x,\ f'_y(x,y,z) = -8y,\quad f'_z(x,y,z) = 4z$$

$$f'_x(2,2,3) = 4,\ f'_y(2,2,3) = -16,\quad f'_z(2,2,3) = 12$$

Phương trình của pháp tuyến của mặt tại (2, 2, 3) là:

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-2}{-16} = \frac{z-3}{12}$$

hay $\quad x - 2 = \dfrac{y-2}{-4} = \dfrac{z-3}{3}$

Phương trình của tiếp diện tại điểm đó là

$$x - 2 - 4(y-2) + 3(z-3) = 0$$

b) $f(x, y, z) = 2x^2 + 4y^2 - z = 0$

$$f'_x(x, y, z) = 4x,\ f'_y(x, y, z) = 8y,\ f'_z(x, y, z) = -1$$

$$f'_x(2, 1, 12) = 8,\ f'_y(2, 1, 12) = 8,\ f'_z(2, 1, 12) = -1$$

Phương trình của pháp tuyến của mặt tại điểm (2,1,12) là

$$\frac{x-2}{8} = \frac{y-1}{8} = \frac{z-12}{-1}$$

Phương trình của tiếp diện tại điểm đó là

1 $\quad 8(x-2) + 8(y-1) - (z-12) = 0$

c) $f(x, y, z) = \ln(2x + y) - z = 0$

$$f'_x(x, y, z) = \frac{2}{2x + y},\ f'_y(x,y,z) = \frac{1}{2x + y},\ f'_z(x, y, z) = -1$$

$f'_x(-1, 3, 0) = 2$, $f'_y(-1, 3, 0) = 1$, $f'_z(-1, 3, 0) = -1$

Phương trình của pháp tuyến của mặt tại điểm (-1, 3, 0) là

$$\frac{x + 1}{2} = \frac{y - 3}{1} = \frac{z}{-1}$$

Phương trình của tiếp diện tại điểm đó là

$$2(x + 1) + (y - 3) - z = 0$$

14. a) Tiếp tuyến của đường đã cho tại điểm (1, 3, 4) là giao tuyến của tiếp diện của hai mặt

$$x^2 + y^2 = 10 \text{ và } y^2 + z^2 = 25$$

tại điểm ấy. Đặt $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 10$, $g(x, y, z) = y^2 + z^2 - 25$, ta có

$f'_x(x, y, z) = 2x$, $f'_y(x, y, z) = 2y$, $f'_z(x, y, z) = 0$

$g'_x(x, y, z) = 0$, $g'_y(x, y, z) = 2y$, $g'_z(x, y, z) = 2z$

$f'_x(1, 3, 4) = 2$, $f'_y(1, 3, 4) = 6$, $f'_z(1, 3, 4) = 0$

$g'_x(1, 3, 4) = 0$, $g'_y(1, 3, 4) = 6$, $g'_z(1, 3, 4) = 8$

Phương trình tiếp diện của mặt $x^2 + y^2 = 10$ tại (1, 3, 4) là

$$2(x - 1) + 6(y - 3) = 0 \text{ hay } (x - 1) + 3(y - 3) = 0$$

Phương trình tiếp diện của mặt $y^2 + z^2 = 25$ tại (1, 3, 4) là

$$6(y - 3) + 8(z - 4) = 0 \text{ hay } 3(y - 3) + 4(z - 4) = 0$$

Vậy phương trình của tiếp tuyến phải tìm là

$$\begin{cases} (x - 1) + 3(y - 3) = 0 \\ 3(y - 3) + 4(z - 4) = 0 \end{cases}$$

1 Hay $$\frac{x - 1}{12} = \frac{y - 3}{-4} = \frac{z - 4}{3}$$

Phương trình của pháp diện của đường tại (1, 3, 4) là

$$12(x-1) - 4(y-3) + 3(z-4) = 0$$

b) Đặt

$$f(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2 - 47 = 0,\ g(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - z = 0$$

$$f'_x(x, y, z) = 4x,\ f'_y(x, y, z) = 6y,\ f'_z(x, y, z) = 2z$$

$$g'_x(x, y, z) = 2x,\ g'_y(x, y, z) = 4y,\ g'_z(x, y, z) = -1$$

$$f'_x(-2, 1,6) = -8,\ f'_y(-2, 1,6) = 6,\ f'_z(-2, 1, 6) = 12$$

$$g'_x(-2, 1,6) = -4,\ g'_y(-2, 1,6) = 4,\ g'_z(-2, 1,6) = -1$$

Phương trình của tiếp diện của mặt $2x^2 + 3y^2 + z^2 - 47 = 0$ tại điểm (-2, 1, 6) là

$$-4(x+2) + 3(y-1) + 6(z-6) = 0$$

Phương trình của tiếp diện của mặt $x^2 + 2y^2 - z = 0$ tại điểm (–2, 1, 6) là $-4(x+2) + 4(y-1) - (z-6) = 0$

Vậy phương trình của tiếp tuyến với đường đã cho tại điểm (–2, 1, 6) là

$$\begin{cases} -4(x+2) + 3(y-1) + 6(z-6) = 0 \\ -4(x+2) + 4(y-1) - (z-6) = 0 \end{cases}$$

Hay

$$\frac{x+2}{27} = \frac{y-1}{28} = \frac{z-6}{4}$$

Phương trình pháp diện của đường đã cho tại điểm (–2, 1, 6) là

1 $$27(x+2) + 28(y-1) + 4(z-6) = 0.$$

Chương III

TÍCH PHÂN BỘI

A - ĐỀ BÀI

1. Chứng minh rằng tích phân phụ thuộc tham số

$$I(y) = \int_0^1 f(x, y)\, dx$$

trong đó f(x,y) là một hàm số gián đoạn xác định bởi

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } x \geq y \\ -1 \text{ nếu } x < y \end{cases}$$

là một hàm số liên tục của y. Vẽ đồ thị của hàm số $u = I(y)$

2. Khảo sát sự liên tục của tích phân

$$I(y) = \int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2 + y^2}\, dx$$

($f(x)$ liên tục và dương trên đoạn [0, 1]).

3. Tính các tích phân

a) $\int_0^1 x^\alpha (\ln x)^n\, dx$, trong đó $\alpha > 0$, n nguyên dương.

b) $\int_0^{\pi/2} \ln(1 + y\sin^2 x)\, dx$, trong đó $y > -1$.

4. Chứng minh rằng tích phân phụ thuộc tham số

1 $$I(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{arctg}\,(x + y)}{1 + x^2}\, dx.$$

là một hàm số liên tục và khả vi đối với $y \in \mathbf{R}$. Tính I' (y) rồi suy ra biểu thức của I (y).

5. Cho tích phân phụ thuộc tham số

$$I(y) = \int_0^{+\infty} e^{-\left(x^2 + \frac{y^2}{x^2}\right)} dx.$$

a) Chứng minh rằng tích phân ấy hội tụ đều đối với $y \in \mathbf{R}$ và có thể lấy đạo hàm dưới dấu tích phân với $y \in [a, b]$ với $a > 0$.

b) Chứng minh rằng $I'(y) = -2I(y)$. Suy ra biểu thức của I(y).

6. Tính các tích phân

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + y)^{n+1}}$, trong đó $y > 0$, n nguyên dương.

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx$, trong đó $\alpha > 0, \beta > 0$

c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2} dx$, trong đó $\alpha > 0, \beta > 0$

d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-kx} \frac{\sin yx}{x} dx$, trong đó $k \neq 0$.

e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos yx dx$.

f) $\displaystyle\int_0^{y} \frac{\ln(1 + yx)}{1 + x^2} dx$, trong đó $y \geq 0$.

7. f(x) là một hàm số liên tục với $x > 0$, sao cho $\displaystyle\int_\alpha^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ hội tụ $\forall \alpha > 0$ và $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f(x) = A$.

Chứng minh rằng

1 $$\int_0^{+\infty} \frac{f(x) - f(yx)}{x} dx = A\ln y, \quad \forall y > 0$$

8. Tính

a) $\iint\limits_D (x^2+xy-y^2)dxdy$, $D = \{(x, y): 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2\}$

b) $\iint\limits_D (\cos^2 x+\sin^2 y)dxdy$, $D = \{(x,y): 0 \le x \le \frac{\pi}{4}, 0 \le y \le \frac{\pi}{4}\}$

9. Đổi thứ tự tích phân trong các tích phân sau

a) $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{4} f(x,y)dy$;

b) $\int\limits_{1}^{3} dy \int\limits_{0}^{2y} f(x,y)dx$;

c) $\int\limits_{1}^{e} dx \int\limits_{0}^{\ln x} f(x,y)dy$;

d) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$;

e) $\int\limits_{0}^{2a} dx \int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)dy$ $(a > 0)$.

10. Tính $\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x+y)^3}$, D là miền xác định bởi $x \ge 1$, $y \ge 1$, $x + y \le 3$.

11. Tính $\iint\limits_D \frac{ydxdy}{x^2+1}$, D là miền xác định bởi $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x^2 + y^2 \le 1$.

12. Tính $\iint\limits_D x^2(y-x)dxdy$, D là miền giới hạn bởi các đường $y = x^2$ và $x = y^2$.

13. Tính $\iint\limits_D \ln(x+y)dxdy$, D là miền giới hạn bởi các đường
1 $x = 1$, $y = 1$, $y = x + 1$.

14. Tính $\iint\limits_D \frac{xdxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$, D là miền giới hạn bởi các đường $y^2 = 2x$ và $x = 2$.

15. Tính $\iint\limits_D \frac{xy}{x^2+y^2}dxdy$, D là miền giới hạn bởi các đường $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$.

16. Tính $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, D là miền giới hạn bởi các đường $x^2 + y^2 = 1$, $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$, trong góc phần tư thứ nhất.

17. Tính $\iint\limits_D |x+y|dxdy$, $D = \{(x, y): |x| \le 1, |y| \le 1\}$.

18. Tính $\iint\limits_D \sqrt{|y-x^2|}dxdy$, $D = \{(x, y): |x| \le 1, 0 \le y \le 2\}$.

19. Tính $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, $f(x, y) = \int\limits_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} zdz$

D là miền giới hạn bởi đường $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$.

20. Tính $\iint\limits_D (x-y)dxdy$, D là miền giới hạn bởi các đường $y = 2 - x^2$, $y = 2x - 1$.

21. Tính $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$, D là miền giới hạn bởi

a) Các đường tròn $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = 4a^2$, $a > 0$;

b) Đường hoa hồng bốn cánh $r = a\sin2\varphi$, $a > 0$.

22. Tính $\iint\limits_D (x^2+y^2+1)dxdy$, D là miền giới hạn bởi đường $x^2 + y^2 - x = 0$.

23. Tính $\iint\limits_D (x + 2y + 1)\,dxdy$, D là giao của hai hình tròn $x^2 + y^2 \le 2y$, $x^2 + y^2 \le 2x$.

24. Tính $\iint\limits_D \sqrt{4 - x^2 - y^2}\,dxdy$, $D = \{ (x,y): x^2 + y^2 \le 2x,\ y \ge 0\}$.

25. Tính $\iint\limits_D \sqrt{xy}\,dxdy$, $D = \{(x,y): (x^2 + y^2)^2 \le xy\}$.

26. Tính $\iint\limits_D e^{x^2}\,dxdy$, $D = \{ (x, y) : 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le \frac{x}{3}\}$.

27. Tính $\iint\limits_D (x + y)^3 (x - y)^2\,dxdy$, D là miền giới hạn bởi các đường $x + y = 1$, $x - y = 1$, $x + y = 3$, $x - y = -1$.

28. Tính $\iint\limits_D xy\,dxdy$, D là miền giới hạn bởi các đường $y^2 = x$, $y^2 = 3x$, $y = x$, $y = 2x$.

29. Tính $\iint\limits_D x^2y^2 \sqrt{1 - x^3 - y^3}\,dxdy$,

$$D = \{(x,y): x \ge 0,\ y \ge 0,\ x^3 + y^3 \le 1\}$$

30. Tính $\iint\limits_D (x + y)^2 \sin\pi (x + y)\,dxdy$, $D = \{(x, y) : x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + y \le 1\}$

31. Tính $\iint\limits_D (x^2 + y^2)(y^2 - x^2)^{xy}\,dxdy$, D là miền giới hạn bởi các đường $xy = a$, $xy = b$, $y^2 - x^2 = 1$, $y = x$, $a > 0$, $b > 0$.

32. Với $a > 0$, đặt

$$I_a = \iint\limits_{D_a} e^{-x^2-y^2}\,dxdy, \quad J_a = \iint\limits_{\Delta_a} e^{-x^2-y^2}\,dxdy,$$

trong đó :

$$D_a = \{(x,y): x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq a^2\}$$
$$\Delta_a = \{(x,y): 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a\}$$

a) Tính I_a

b) Chứng minh rằng $I_a \leq J_a \leq I_{\sqrt{2}a}$. Từ đó suy ra

$$\lim_{a \to +\infty} \int_0^a e^{-x^2} dx.$$

33. Tính $\iint\limits_D e^{-(x^2+xy+y^2)} dxdy$, $D = \{(x,y): x^2 + xy + y^2 = 1\}$

34. Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường

a) $x = 4y - y^2$, $x + y = 6$;

b) $y^2 = x^3$, $y^2 = 8(6 - x)^3$;

c) $y = 2^x$, $y = -\dfrac{x}{2}$, $y = 4$;

d) $r = a\cos\varphi$, $r = b\cos\varphi$ $(b > a > 0)$;

e) $r = a\sin2\varphi$;

f) $r = a(1+\cos\varphi)$, $(a > 0)$;

g) $r^2 = 2a^2\cos2\varphi$, $r = a$, phần của hình ứng với $r \geq a$.

35. Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi các mặt:

a) $z = 1 - x^2 - y^2$, $y = x$, $y = \sqrt{3}\,x$, $z = 0$ và nằm trong góc phần tám thứ nhất

b) $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + z^2 = a^2$;

c) $z = x^2 + y^2$, $z = x + y$;

d) $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$, $x^2 + y^2 = z^2$;

e) $z = x + y$, $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$, $z = 0$ $(x > 0, y > 0)$.

36. Tính diện tích của

a) Phần mặt nón $z^2 = x^2 + y^2$, $z \geq 0$ nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$;

b) Phần mặt parabôlôit $z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}$ $(a > 0,\ b > 0)$ nằm ở trong mặt trụ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

c) Phần mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ nằm ở trong hình trụ $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ $(a > 0)$;

d) Phần mặt parabôlôit $z = \frac{x^2+y^2}{2a}$ nằm ở trong hình trụ $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$ $(a > 0)$.

37. Xác định trọng tâm của các bản phẳng đồng chất giới hạn bởi các đường:

a) $y^2 = 4x + 4$, $y^2 = -2x + 4$;

b) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$;

c) $y^2 = x$; $x^2 = y$;

d) $y = \sqrt{2x - x^2}$, $y = 0$;

e) $r = a(1 + \cos\varphi)$ $(a > 0)$;

f) $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $x \geq 0$, $a > 0$.

38. Tính $\iiint\limits_V z\,dx\,dy\,dz$, V là miền xác định bởi $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$,

$$x \leq y \leq 2x,\ 0 \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}\ .$$

39. V là miền xác định bởi $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $x + y + z \leq 1$

a) Tính $\iiint\limits_V (1-x-y-z)dxdydz$;

b) Tính $\iiint\limits_V xyz(1-x-y-z)dxdydz$.

40. Tính $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz$, V là miền xác định bởi $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c} \leq 1$

41. Tính $\iiint\limits_V |xyz|dxdydz$, V là miền xác định bởi $x^2 + y^2 \leq 2z$, $0 \leq z \leq a$ $(a > 0)$.

42. Tính $\iiint\limits_V z^2dxdydz$, V là miền xác định bởi $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ $(a > 0)$.

43. Tính $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz$, V là miền xác định bởi $\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{3a^2} \leq 1$.

44. Tính $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}$, V là hình trụ xác định bởi $x^2 + y^2 \leq 1$, $-1 \leq z \leq 1$.

45. Tính $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$, V là miền xác định bởi $x^2 + y^2 \leq ax$, $0 \leq z \leq a$ $(a > 0)$.

46. Tính $\iiint\limits_V z^2dxdydz$, V là miền xác định bởi $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$.

47. Tính $\iiint\limits_V x^2y^2z^2dxdydz$, V là miền xác định bởi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leq 1$.

48. Tính $\iiint\limits_V (xy+yz+zx)dxdydz$, V là miền giới hạn bởi $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$.

49. V là miền xác định bởi các bất đẳng thức

$$0 \le x \le 1,\ x \le y \le 1,\ x \le z \le y.$$

f là một hàm số xác định, liên tục trên đoạn [0, 1].

Chứng minh rằng

$$\iiint\limits_V f(x)f(y)f(z)dxdydz = \frac{1}{6}\left(\int_0^1 f(t)dt\right)^3.$$

50. Tính thể tích của vật thể

a) Giới hạn bởi các mặt $z = x^2 + y^2$, $z = 2(x^2 + y^2)$, $y = x^2$, $y = x$;

b) Giới hạn bởi các mặt $z = x^2 + y^2$, $z^2 = x^2 + y^2$;

c) Xác định bởi $0 \le \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} \le 1$, $-h \le z \le h$;

d) Xác định bởi $0 \le z \le x^2 + y^2$, $x^2 \le y \le 1$;

e) Giới hạn bởi các mặt $x^2 + 2y^2 = az$, $z = y + a$, $a > 0$;

f) Giới hạn bởi các mặt phẳng $x + y + z = \pm 3$, $x + 2y - z = \pm 1$, $x + 4y + z = \pm 2$.

51. Tìm trọng tâm của vật thể đồng chất giới hạn bởi các mặt:

a) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}$, $z = c$ $(c > 0)$;

b) $z = x^2 + y^2$, $z = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$;

c) $x^2 + y^2 = 2az$, $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$, $z \ge 0$, $a > 0$;

d) $z = \dfrac{1}{2}y^2$, $z = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $2x + 3y - 12 = 0$;

1 e) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ với $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

B- LỜI GIẢI

1. Nếu $y \le 0$, ta có $f(x, y) = 1$, $\forall x \in [0, 1]$, do đó

$$I(y) = \int_0^1 1.dx = 1.$$

Nếu $y \ge 1$, ta có $f(x, y) = -1$, $\forall x \in [0, 1]$, do đó

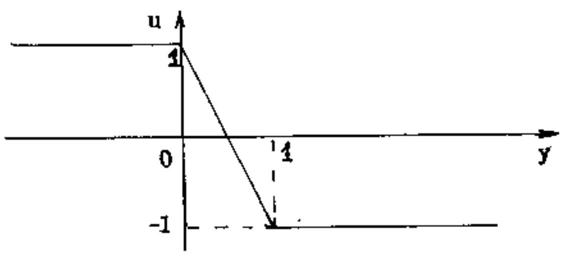
$$I(y) = \int_0^1 (-1).dx = -1.$$

Nếu $0 < y < 1$, ta có $I(y) = \int_0^y f(x,y)dx + \int_y^1 f(x,y)dx =$

$$= \int_0^y (-1)dx + \int_y^1 1.dx = 1 - 2y.$$

Vậy $$I(y) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } y \le 0 \\ 1-2y & \text{nếu } 0<y<1 \\ -1 & \text{nếu } y \ge 1 \end{cases}$$

Đó là một hàm số liên tục. Đồ thị của nó được cho ở hình 14.



Hình 14

2. Vì hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0, 1]$, nên hàm số dưới dấu tích phân $\frac{yf(x)}{x^2+y^2}$ liên tục trong các miền

1 $\{(x, y): 0 \le x \le 1, -A \le y \le -\delta\}$, $\{(x, y): 0 \le x \le 1, \delta \le y \le A\}$

Trong đó δ là một số dương bé tùy ý, A là một số dương lớn tuỳ ý, do đó hàm số $y \to I(y)$ liên tục $\forall y > 0$.

Bây giờ xét sự liên tục của I(y) tại y = 0. Vì các hàm số $\frac{y}{x^2+y^2}$ và f(x) khả tích theo x trên [0, 1], f(x) liên tục và không đổi dấu trên [0, 1], nên theo định lí trung bình thứ hai, ta có

$$I(y) = \int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2}\,dx = f(c(y)) \int_0^1 \frac{ydx}{x^2+y^2} = f(c(y))\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{y},$$

trong đó c(y) là một số nằm giữa 0 và 1, số đó đương nhiên phụ thuộc y. Nếu ε > 0 là một số bé tuỳ ý, ta có:

$$\left|I(\varepsilon)-I(-\varepsilon)\right| = [f(c(\varepsilon)+f(c(-\varepsilon))]\,\mathrm{arctg}\frac{1}{\varepsilon} \geq$$

$$\geq 2\min_{0\le x\le 1} f(x).\mathrm{arctg}\frac{1}{\varepsilon} \to \pi.\min_{0\le x\le 1} f(x)>0 \quad (\text{khi } \varepsilon \to 0^+),$$

Vậy hàm số I(y) gián đoạn tại y = 0 .

3. a) Xét tích phân

$$I(\alpha) = \int_0^1 f(x,\alpha)\,dx,$$

trong đó $\qquad f(x, \alpha) = x^\alpha, \quad \alpha > 0$

I(α) là một hàm số liên tục đối với α. Ta có

$$I(\alpha) = \left.\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right|_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}.$$

Đạo hàm $f'_\alpha(x, \alpha) = x^\alpha \ln x$ liên tục $\forall x \in (0, 1]$, có điểm gián đoạn bỏ được tại x = 0, vì

$$\lim_{x\to 0} x^\alpha \ln x = 0$$

1

Do đó ta có $\quad I'(\alpha) = -\dfrac{1}{(\alpha+1)^2} = \displaystyle\int_0^1 x^\alpha \ln x dx$.

Tương tự, ta có $I''(\alpha) = \dfrac{1.2}{(\alpha+1)^3} = \displaystyle\int_0^1 x^\alpha (\ln x)^2 dx$

$$I'''(\alpha) = -\frac{1.2.3}{(\alpha+1)^4} = \int_0^1 x^\alpha (\ln x)^3 dx$$

. . . .

$$I^{(n)}(\alpha) = \int_0^1 x^\alpha (\ln x)^n dx = (-1)^n \frac{n!}{(\alpha+1)^{n+1}}.$$

b) Vì hàm số $f(x, y) = \ln(1 + y\sin^2 x)$ liên tục trong miền $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \times (-1, +\infty)$ nên tích phân phụ thuộc tham số

$$I(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + y\sin^2 x)dx$$

liên tục $\forall y > -1$. Vì đạo hàm

$$f'_y(x, y) = \frac{\sin^2 x}{1+y\sin^2 x}$$

cũng liên tục trong miền $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \times (-1, +\infty)$, nên ta có

$$I'(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+y\sin^2 x} dx .$$

Để tính tích phân đó, ta đặt $t = \operatorname{tg} x$, do đó

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}, \qquad \sin x = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Vậy $\quad I'(y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{(1+t^2)(1+(1+y)t^2)}$.

Phân tích hàm dưới dấu tích phân thành các phân thức hữu tỉ đơn giản, ta có

$$\frac{t^2}{(1+t^2)(1+(1+y)t^2)} = \frac{At+B}{1+t^2} + \frac{Ct+D}{1+(1+y)t^2}. \qquad (*)$$

Nhân hai vế của (*) với $(1 + t^2)$ rồi cho $t = i$, ta được

$$\frac{1}{y} = Ai + B.$$

Do đó $A = 0$, $B = \frac{1}{y}$. Lại nhân hai vế của (*) với $[1 + (1 + y)t^2]$, rồi cho $t = i\frac{1}{\sqrt{y+1}}$, ta được

$$-\frac{1}{y} = \frac{C}{\sqrt{y+1}}i + D.$$

Do đó $C = 0$, $D = -\frac{1}{y}$. Vậy

$$I'(y) = \frac{1}{y}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} - \frac{1}{y}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+(\sqrt{1+y}\,t)^2}$$

$$= \frac{1}{y}\left[\operatorname{arctg} t\Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{\sqrt{1+y}}\operatorname{arctg}(\sqrt{1+y}\,t)\Big|_0^{+\infty}\right]$$

$$= \frac{1}{y}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{1+y}}\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2y}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{y+1}}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2y}\frac{\sqrt{y+1}-1}{\sqrt{y+1}} = \frac{\pi}{2\sqrt{y+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{y+1}+1}.$$

Từ đó, ta được:

$$I(y) = I(0) + \int_0^y \frac{\pi}{2\sqrt{y+1}}\cdot\frac{dy}{\sqrt{y+1}+1}$$

$$= \pi\ln(\sqrt{y+1}+1)\Big|_0^y = \pi\ln(\sqrt{y+1}+1) - \pi\ln 2.$$

Vì $\qquad I(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0dx = 0.$

Chú thích: Không thể tính tích phân I(y) bằng cách tìm nguyên hàm của $\ln(1 + y\sin^2 x)$.

4. Đặt $\qquad f(x, y) = \dfrac{\text{arctg}(x+y)}{1+x^2}.$

Ta có

$$|f(x,y)| \le \frac{\pi}{2}.\frac{1}{1+x^2}, \ \forall y \in \mathbf{R}$$

mà tích phân suy rộng $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ hội tụ, do đó tích phân suy rộng phụ thuộc tham số $I(y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$ hội tụ đều đối với $y \in \mathbf{R}$, vậy I(y) là một hàm số liên tục trên **R**. Ta có

$$|f'_y(x,y)| = \frac{1}{(1+x^2)[1+(x+y)^2]} \le \frac{1}{1+x^2}, \ \forall y \in \mathbf{R}.$$

Do đó tích phân suy rộng

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'_y(x,y)dx$$

hội tụ đều đối với $y \in \mathbf{R}$, vậy hàm I(y) khả vi trên **R** và ta có

$$I'(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)[1+(x+y)^2]}.$$

Để tính I'(y) ta phân tích hàm số dưới dấu tích phân thành phân thức hữu tỉ đơn giản. Ta có

$$\frac{1}{(1+x^2)[1+(x+y)^2]} = \frac{Ax+B}{1+x^2} + \frac{Cx+D}{1+(x+y)^2}. \qquad (*)$$

Nhân hai vế của (*) với $1 + x^2$ rồi cho $x = i$, ta được:

$$Ai + B = \frac{1}{1+(y+i)^2} = \frac{1}{y^2+2iy} = \frac{y-2i}{y(y^2+4)}.$$

Do đó

$$A = \frac{-2}{y(y^2+4)}, \quad B = \frac{1}{y^2+4}.$$

Nhân hai vế của (*) với $1 + (x + y)^2$, rồi cho $x = i - y$, ta được:

$$C(i - y) + D = \frac{1}{1+(i-y)^2} = \frac{1}{y^2-2iy} = \frac{y+2i}{y(y^2+4)}.$$

Do đó:

$$C = \frac{2}{y(y^2+4)}, \quad D = \frac{3}{y^2+4}.$$

Vậy

$$I'(y) = \frac{1}{y(y^2+4)} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{-2x+y}{1+x^2} + \frac{2x+3y}{1+(x+y)^2}\right] dx =$$

$$= \frac{1}{y(y^2+4)} \Big[-\ln(1+x^2) + y\operatorname{arctg}x + \ln(1+(x+y)^2) +$$

$$+ y\operatorname{arctg}(x+y)\Big]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2\pi}{y^2+4}.$$

Suy ra $\quad I(y) = I(0) + 2\pi \int_0^y \frac{dy}{y^2+4} = I(0) + \pi\operatorname{arctg}\frac{y}{2}.$

Nhưng $\quad I(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2}(\operatorname{arctg}x)^2 \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0.$

Do đó $\quad I(y) = \pi\operatorname{arctg}\frac{y}{2}.$

5. Đặt $\quad f(x, y) = e^{-\left(x^2+\frac{y^2}{x^2}\right)}.$

Ta có $\quad |f(x,y)| \le e^{-x^2}, \quad \forall y \in \mathbf{R}$.

Tích phân $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ hội tụ, vậy tích phân $I(y) = \int\limits_0^{+\infty} f(x,y)dx$ hội tụ đều đối với $y \in \mathbf{R}$. Xét tích phân

$$\int\limits_0^{+\infty} f'_y(x,y)dx = \int\limits_0^{1} f'_y(x,y)dx + \int\limits_1^{+\infty} f'_y(x,y)dx,$$

Tích phân $\int\limits_0^{1} f'_y(x,y)dx = \int\limits_0^{1} -\frac{2y}{x^2} e^{-(x^2+\frac{y^2}{x^2})} dx$ hội tụ đều đối với $y \in [a, b]$, vì

$$\left| -\frac{2y}{x^2} e^{-\left(x^2+\frac{y^2}{x^2}\right)} \right| \le \frac{2b}{x^2} e^{-\frac{a^2}{x^2}}$$

và tích phân $\int\limits_0^{1} \frac{2b}{x^2} e^{-\frac{a^2}{x^2}} dx$ hội tụ. Còn tích phân

$\int\limits_1^{+\infty} f'_y(x,y)dx = \int\limits_1^{+\infty} -\frac{2y}{x^2} e^{-(x^2+\frac{y^2}{x^2})} dx$ cũng hội tụ đều trên $[a, b]$, vì

$$\left| -\frac{2y}{x^2} e^{-\left(x^2+\frac{y^2}{x^2}\right)} \right| \le 2be^{-x^2}$$

và tích phân $\int\limits_1^{+\infty} 2be^{-x^2} dx$ hội tụ. Tóm lại, tích phân $\int\limits_0^{+\infty} f'_y(x,y)dx$

hội tụ đều đối với $y \in [a, b]$. Vậy $\forall y \in [a, b]$, ta có thể lấy đạo hàm dưới dấu tích phân, tức là

$$I'(y) = \int\limits_0^{+\infty} -\frac{2y}{x^2} e^{-(x^2+\frac{y^2}{x^2})} dx, \quad \forall y > 0.$$

1

b) Thực hiện phép đổi biến $\frac{y}{x} = t$ trong tích phân trên, ta được $-\frac{y}{x^2}dx = dt$, do đó

$$I'(y) = -2\int_0^{+\infty} e^{-(\frac{y^2}{t^2}+t^2)}dt = -2I(y).$$

Vậy

$$\frac{I'(y)}{I(y)} = -2 \Rightarrow \ln|I(y)| = \ln|C| - 2y,$$

trong đó C là hằng số tùy ý. Vậy

$$I(y) = Ce^{-2y}.$$

Cho y = 0, ta được $C = I(0) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ [1]. Do đó

$$I(y) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2y}.$$

Rõ ràng I(y) là hàm số chẵn, do đó

$$I(y) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2|y|} \quad \text{với} \quad y \neq 0.$$

6. a) Với y > 0, xét tích phân phụ thuộc tham số

$$I(y) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + y} = \frac{1}{\sqrt{y}}\text{arctg}\frac{x}{\sqrt{y}}\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.y^{-\frac{1}{2}}.$$

Lấy đạo hàm hai vế đối với y n lần, khi lấy đạo hàm vế trái, ta cứ lấy đạo hàm một cách hình thức dưới dấu tích phân. Ta được:

$$-\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+y)^2} = \frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)y^{-\frac{3}{2}}$$

---

[1] Tích phân này đã được trình bày ở sách Toán học cao cấp tập 2 trang 281, và còn được nêu ra trong bài tập 32 của chương này.

$$(-1)(-2)\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+y)^3}=\frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)y^{-\frac{5}{2}}$$

. . . .

$$(-1)^n n!\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+y)^{n+1}}=\frac{\pi}{2}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^n}y^{-\frac{2n+1}{2}}.$$

Do đó $$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+y)^{n+1}}=\frac{\pi}{2}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.y^{-n-\frac{1}{2}}.$$

Ta còn phải chứng minh rằng có thể lấy đạo hàm dưới dấu tích phân n lần của $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+y}$. Thật vậy, đặt $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y}$.

Hàm số f(x, y) cùng với các đạo hàm $f'_y(x, y) = -\frac{1}{(x^2+y)^2}$,

$f''_{y^2}(x,y) = \frac{1}{(x^2+y)^3}$, ..., $f^{(n)}_{y^n}(x,y)=(-1)^n\frac{1}{(x^2+y)^{n+1}}$ đều liên tục trong miền $\{(x, y): 0 \le x < +\infty, y \ge a > 0\}$. Trong miền ấy, ta có

$$\left|f'_y(x,y)\right| \le \frac{1}{(x^2+a)^2},\ldots,\left|f^{(n)}_{y^n}(x,y)\right| \le \frac{1}{(x^2+a)^{n+1}}$$

mà các tích phân (không phụ thuộc tham số y) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a)^2}$,...,

$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}}$ đều hội tụ. Do đó các tích phân

$$\int_0^{+\infty} f'_y(x,y)dx, \ldots, \int_0^{+\infty} f^{(n)}_{y^n}(x,y)dx$$

hội tụ đều đối với $y \ge a$. Vậy $\forall y > 0$, ta có thể lấy đạo hàm dưới dấu tích phân n lần $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+y}$.

1 b) Xét tích phân phụ thuộc tham số α

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx .$$

Đặt $f(x, \alpha) = \dfrac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}$, ta có $f'_\alpha(x, \alpha) = -e^{-\alpha x}$. Với $\alpha \geq a > 0$, ta có

$$\left|f'_\alpha(x,\alpha)\right| \leq e^{-ax} .$$

Tích phân $\int_0^{+\infty} e^{-ax}dx$ hội tụ, vậy tích phân $\int_0^{+\infty} f'_\alpha(x,\alpha)dx$ hội tụ đều đối với $\alpha \geq a$. Do đó $\forall\alpha > 0$, ta có thể lấy đạo hàm dưới dấu tích phân:

$$I'(\alpha) = \int_0^{+\infty} f'_\alpha(x, \alpha)dx = \int_0^{+\infty} - e^{-\alpha x}dx =$$

$$= \left.\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha}\right|_0^{+\infty} = -\frac{1}{\alpha}.$$

Vậy $I(\alpha) = -\ln\alpha + C$.

Trong hai vế, cho $\alpha = \beta$, ta được:

$$I(\beta) = -\ln\beta + C = 0.$$

Suy ra $C = \ln\beta$. Tóm lại

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} = \ln\beta - \ln\alpha = \ln\frac{\beta}{\alpha}.$$

c) Xét tích phân

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2} dx, \qquad \alpha > 0 , \beta > 0.$$

Đặt $f(x, \alpha) = \dfrac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2}$. Ta có $f'_\alpha(x, \alpha) = -e^{-\alpha x^2}$. Với $\alpha \geq a > 0$,

1 ta có:

$$\left| f'_\alpha(x,\alpha) \right| \le e^{-ax^2}$$

Tích phân $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}dx$ hội tụ, vậy tích phân $\int_a^{+\infty} f'_\alpha(x,\alpha)dx$ hội tụ đều đối với $\alpha \ge a$. Do đó $\forall\, \alpha > 0$, ta có thể lấy đạo hàm đối với tham số α dưới dấu tích phân

$$I'(\alpha) = -\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}dx$$

Trong tích phân ấy, đổi biến số $\sqrt{\alpha}\,x = y$, ta được

$$I'(\alpha) = -\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\frac{dy}{\sqrt{\alpha}} = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

Vậy

$$I(\alpha) = -\sqrt{\pi}\,\sqrt{\alpha} + C$$

Trong hai vế, cho $\alpha = \beta$, ta được

$$I(\beta) = -\sqrt{\pi}\,\sqrt{\beta} + C = 0$$

Do đó $C = \sqrt{\pi}\,\sqrt{\beta}$. Vậy

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2}dx = \sqrt{\pi}\,(\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha})\,.$$

d) Xét tích phân phụ thuộc tham số y

$$I(y) = \int_0^{+\infty} e^{-kx}\frac{\sin yx}{x}dx, \qquad k > 0$$

Đặt $f(x,y) = e^{-kx}\dfrac{\sin yx}{x}$. Ta có $f'_y(x,y) = e^{-kx}\cos yx$.

Với mọi $(x,y) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$, ta có

$$|f'_y(x,y)| \le e^{-kx}$$

Tích phân $\int\limits_0^{+\infty} e^{-kx}\,dx$ hội tụ, vậy tích phân $\int\limits_0^{+\infty} f(x,y)\,dx$ hội tụ đều đối với $y \in \mathbf{R}$. Do đó ta có thể lấy đạo hàm theo tham số y dưới dấu tích phân.

$$I'(y) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-kx} \cos yx dx$$

Bằng cách lấy tích phân phân đoạn hai lần, ta được

$$I'(y) = \left[\frac{e^{-kx}}{k^2+y^2}(y\sin yx - k\cos yx)\right]_0^{+\infty} = \frac{k}{k^2+y^2}$$

Do đó

$$I(y) = I(0) + \int\limits_0^{y} \frac{kdy}{k^2+y^2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{k}\ ,$$

Vì I (0) = 0.

e) Xét tích phân

$$I(y) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos yx dx$$

Đặt $f(x,y) = e^{-x^2}\cos yx$. Ta có $f'_y(x,y) = -e^{-x^2}\sin yx \,.\, x$

Với $(x,y) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$, ta có

$$|f'_y(x,y)| \le e^{-x^2}\,.\,x$$

Tích phân $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}.xdx$ hội tụ, vậy tích phân $\int\limits_0^{+\infty} f'_y(x,y)dx$ hội tụ đều đối với $y \in \mathbf{R}$. Do đó có thể lấy đạo hàm theo tham số y dưới dấu tích phân.

$$I'(y) = -\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin yx\,.\,xdx$$

1 Bằng cách lấy tích phân từng phần, ta được

$$I'(y) = \frac{1}{2}e^{-x^2}\sin yx \Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos yx \,.\, y dx =$$

$$= -\frac{y}{2} I(y)$$

Do đó

$$\frac{I'(y)}{I(y)} = -\frac{y}{2}$$

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được

$$\ln|I| = -\frac{y^2}{4} + \ln|C| \Rightarrow I = Ce^{-\frac{y^2}{4}}$$

Trong hai vế cho y = 0, ta được

$$I(0) = C = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Do đó

$$I(y) = \int_0^{+\infty} e^{-kx}\cos yx dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{y^2}{4}}$$

f) Hàm số $f(x,y) = \dfrac{\ln(1+yx)}{1+x^2}$ liên tục và khả vi trên $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$

Ta có

$$f'_y(x,y) = \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{x}{1+yx}$$

Do đó $I(y) = \int_0^y \dfrac{\ln(1+yx)}{1+x^2}dx$ liên tục và khả vi trên $\mathbf{R}_+$ và ta có

$$I'(y) = \int_0^y \frac{x}{(1+x^2)(1+yx)}dx + \frac{\ln(1+y^2)}{1+y^2}$$

Để tính tích phân trên, ta phân tích biểu thức dưới dấu tích phân thành các phân thức hữu tỉ đơn giản.

$$\frac{x}{(1+x^2)(1+yx)} = \frac{A}{1+yx} + \frac{Bx+C}{1+x^2} \qquad (*)$$

Nhân hai vế của (*) với $(1 + yx)$ rồi cho $x = -\dfrac{1}{y}$ vào hai vế, ta được.

$$A = -\frac{1}{y}\cdot\frac{y^2}{y^2+1} = -\frac{y}{y^2+1}$$

Nhân hai vế của (*) với $(1 + x^2)$ rồi cho $x = i$ vào hai vế, ta được

$$Bi + C = \frac{i}{1+yi} = \frac{i+y}{1+y^2} \Rightarrow B = \frac{1}{1+y^2}\ ,\ C = \frac{y}{1+y^2}$$

Do đó

$$\int_0^y \frac{x}{(1+x^2)(1+yx)}dx = -\frac{y}{y^2+1}\int_0^y \frac{dx}{1+yx} + \frac{1}{y^2+1}\int_0^x \frac{x+y}{1+x^2}dx =$$

$$= \Big[-\frac{1}{y^2+1}\ln(1+yx) + \frac{1}{2(y^2+1)}\ln(1+x^2) + \frac{y}{y^2+1}\text{arctg}x\Big]_0^y =$$

$$= -\frac{\ln(1+y^2)}{1+y^2} + \frac{1}{2}\frac{\ln(1+y^2)}{1+y^2} + \frac{y}{1+y^2}\text{arctg}y$$

Vậy

$$I'(y) = \frac{\ln(1+y^2)}{2(1+y^2)} + \frac{y}{1+y^2}\text{arctg}y$$

Suy ra

$$I(y) = \int_0^y \Big[\frac{\ln(1+y^2)}{2(1+y^2)} + \frac{y}{1+y^2}\text{arctg}y\Big]dy$$

Đổi biến số $\text{arctg}y = \varphi$, ta được $y = \text{tg}\varphi, \dfrac{dy}{1+y^2} = d\varphi$, do đó

$$I(y) = \int_0^\varphi \Big[\frac{\ln(1+\text{tg}^2\varphi)}{2} + \varphi\text{tg}\varphi\Big]d\varphi =$$

$$= -\int_0^\varphi \ln\cos\varphi d\varphi + \int_0^\varphi \varphi\text{tg}\varphi d\varphi$$

1 Tính tích phân thứ nhất bằng phương pháp phân đoạn, ta được

$$I(y) = -\varphi \ln\cos\varphi\Big|_0^{\varphi} - \int\limits_0^{\varphi} \varphi \operatorname{tg}\varphi d\varphi + \int\limits_0^{\varphi} \varphi \operatorname{tg}\varphi d\varphi =$$

$$= -\varphi \ln\cos\varphi = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}y.\ln(1+y^2).$$

7. Xét tích phân

$$J(\alpha, X) = \int\limits_{\alpha}^{X} \frac{f(x)-f(yx)}{x}dx = \int\limits_{\alpha}^{X} \frac{f(x)}{x}dx - \int\limits_{\alpha}^{X} \frac{f(yx)}{x}dx.$$

Trong tích phân thứ hai ở vế phải, ta đổi biến số $yx = t$, do đó $dx = \frac{1}{y}dt$. Vậy

$$J(\alpha, X) = \int\limits_{\alpha}^{X} \frac{f(x)}{x}dx - \int\limits_{\alpha y}^{Xy} \frac{f(t)}{t}dt =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\alpha y} \frac{f(x)}{x}dx + \int\limits_{\alpha y}^{X} \frac{f(x)}{x}dx + \int\limits_{Xy}^{X} \frac{f(x)}{x}dx + \int\limits_{X}^{\alpha y} \frac{f(x)}{x}dx =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\alpha y} \frac{f(x)}{x}dx + \int\limits_{Xy}^{X} \frac{f(x)}{x}dx.$$

Bây giờ cho $X \to +\infty$. Theo giả thiết, tích phân $\int\limits_{\alpha}^{+\infty} \frac{f(x)}{x}dx$ hội tụ, vì vậy $\lim\limits_{X\to+\infty} \int\limits_{Xy}^{X} \frac{f(x)}{x}dx = 0.$

Do đó $$\lim_{X\to+\infty} J(\alpha,x) = I(\alpha) = \int\limits_{\alpha}^{\alpha y} \frac{f(x)}{x}dx.$$

Ta lại cho $\alpha \to 0^+$. Vì hàm số $f(x)$ liên tục, hàm số $\frac{1}{x} > 0$ trên đoạn $[\alpha, \alpha y]$, theo định lí trung bình thứ hai, ta có

$$I(\alpha) = f(\xi).\int\limits_{\alpha}^{\alpha y}\frac{dx}{x} = f(\xi)\ln y,$$

trong đó $\xi \in (\alpha, \alpha y)$. Khi $\alpha \to 0^+$ thì $\alpha y \to 0^+$, do đó $\xi \to 0^+$.

$$\text{Vậy}\quad \int_0^{+\infty} \frac{f(x)-f(yx)}{x}dx = \lim_{\alpha\to 0^+} I(\alpha) = \lim_{\xi\to 0^+} f(\xi)\,.\,\ln y = A\,.\,\ln y\,.$$

8. a) $$\iint_D (x^2+xy-y^2)dxdy = \int_0^1 dx\int_0^2 (x^2+xy-y^2)dy =$$

$$= \int_0^1 dx.\left(x^2y + x\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=2} =$$

$$= \int_0^1 \left(2x^2+2x-\frac{8}{3}\right)dx = \left(\frac{2}{3}x^3+x^2-\frac{8}{3}x\right)\Bigg|_0^1 = -1.$$

b) $$\iint_D(\cos^2 x+\sin^2 y)dxdy = \iint_D\left(\frac{1+\cos 2x}{2}+\frac{1-\cos 2y}{2}\right)dxdy =$$

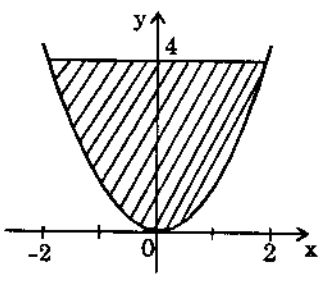
$$= \iint_D\left(1+\frac{\cos 2x-\cos 2y}{2}\right)dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1+\frac{\cos 2x-\cos 2y}{2}\right)dy =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx.\left(y+\frac{y}{2}\cos 2x-\frac{1}{4}\sin 2y\right)\Bigg|_{y=0}^{y=\frac{\pi}{4}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\cos 2x-\frac{1}{4}\right)dx =$$

$$= \left(\frac{\pi x}{4}+\frac{\pi}{16}\sin 2x-\frac{x}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{16}.$$

9. a) Miền lấy tích phân bị giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y = 4$, $x = -2$, $x = 2$. Hai đường $y = x^2$, $y = 4$ lại cắt nhau tại 2 điểm $x = \pm 2$. Do đó, nếu đổi thứ tự tích phân, ta được:

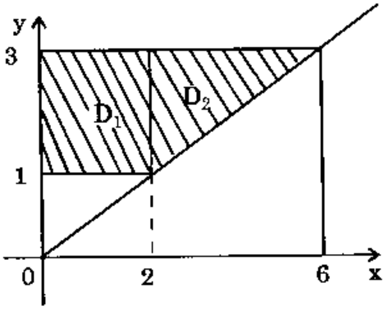
$$\int_{-2}^{2} dx\int_{x^2}^{4} f(x,y)dy = \int_0^4 dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx.$$



Hình 15

b) Miền lấy tích phân bị giới hạn
1 bởi các đường $x = 0$, $x = 2y$, $y = 1$,

y = 3 (hình 16). Khi đổi thứ tự tích phân, ta chia miền lấy tích phân thành 2 miền:



Hình 16

$D_1 = \{(x, y): 1 \le y \le 3,\ 0 \le x \le 2\}$,

$D_2 = \{(x, y): \frac{x}{2} \le y \le 3,\ 2 \le x \le 6\}$,

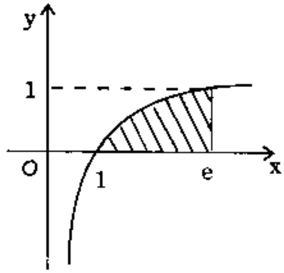
ta được

$$+\int_1^3 dy \int_0^{2y} f(x,y)dx = \int_0^2 dx \int_1^3 f(x,y)dy$$

$$+\int_2^6 dx \int_{\frac{x}{2}}^3 f(x,y)dy\ .$$

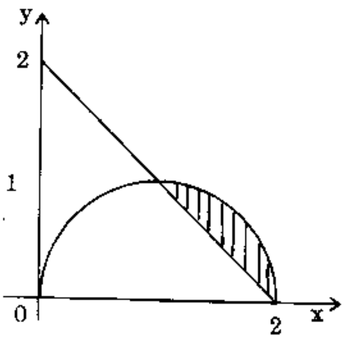
c) Miền lấy tích phân bị giới hạn bởi các đường y = 0, y = lnx, x = 1, x = e, đường y = lnx cắt đường y = 0 ở điểm x = 1 (hình 17). Do đó, đổi thứ tự tích phân, ta được:

$$\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x,y)dx\ .$$



Hình 17

d) Miền lấy tích phân bị giới hạn bởi các đường x = 2 − y, $x = 1 + \sqrt{1-y^2}$.



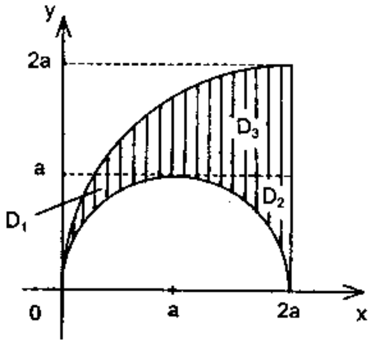
Hình 18

Đường thẳng x = 2 − y và đường tròn $x = 1 + \sqrt{1-y^2}$ cắt nhau tại hai điểm y = 0, y = 1 (hình 18). Vậy khi đổi thứ tự tích phân, ta được:

$$\int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx = \int_1^2 dx \int_{2-x}^{1+\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy\ .$$

e) Miền lấy tích phân bị giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{2ax-x^2}$,

$y = \sqrt{2ax}$, $x = 0$, $x = a$. Để đổi thứ tự tích phân, ta dựng đường thẳng $y = a$, nó tiếp xúc với đường tròn $y = \sqrt{2ax - x^2}$ và chia miền lấy tích phân thành ba miền nhỏ (hình 19),



Hình 19

$D_1 = \{(x,y): \dfrac{y^2}{2a} \le x \le a - \sqrt{a^2 - y^2},$
$0 \le y \le a\}$

$$D_2 = \{\,(x,y): a + \sqrt{a^2 - y^2} \le x \le 2a\,,\ 0 \le y \le a\}$$

$$D_3 = \{\,(x,y): \frac{y^2}{2a} \le x \le 2a,\ a \le y \le 2a\}.$$

Do đó $\displaystyle\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax - x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)dy = \int_0^a dy \int_{y^2/2a}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx +$

$$+ \int_0^a dy \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)dx + \int_a^{2a} dy \int_{y^2/2a}^{2a} f(x,y)dx$$

10. D là miền tam giác (hình 20). Ta có

$$\iint_D \frac{dxdy}{(x+y)^3} = \int_1^2 dx \int_1^{3-x} \frac{dy}{(x+y)^3}$$

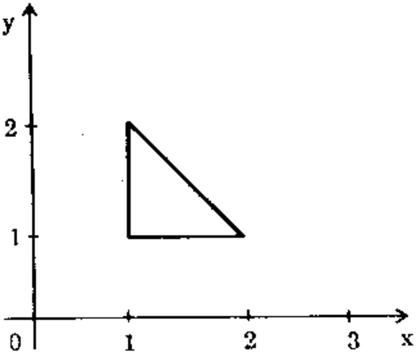
Nhưng

$$\int_1^{3-x} \frac{dy}{(x+y)^3} = -\frac{1}{2}\frac{1}{(x+y)^2}\Big|_{y=1}^{y=3-x} = \frac{1}{2(1+x)^2} - \frac{1}{18}$$

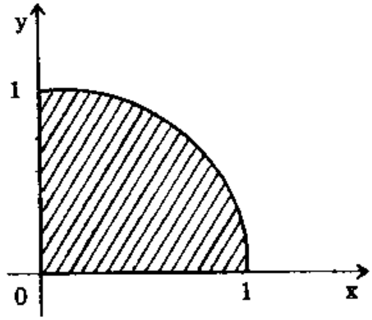
Do đó

$$\iint_D \frac{dxdy}{(x+y)^3} = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{1}{18}\int_1^2 dx = -\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}\Big|_1^2 - \frac{1}{18}x\Big|_1^2 =$$

$$= \frac{1}{36}.$$



Hình 20



Hình 21

11. D là một phần tư mặt tròn đơn vị nằm trong góc phần tư thứ nhất (hình 21). Ta có

$$\iint\limits_D \frac{ydxdy}{x^2+1} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}\int_0^{\sqrt{1-x^2}} ydy = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\cdot\frac{1-x^2}{2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{-x^2+1}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(-1+\frac{2}{x^2+1}\right)dx = -\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

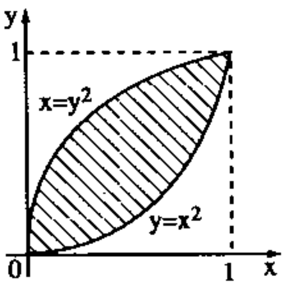
12. D được cho ở hình 22. Ta có

$$\iint\limits_D x^2(y-x)dxdy = \int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2y - x^3)dy =$$

$$= \int_0^1 dx\left(\frac{1}{2}x^2y^2 - x^3y\right)\Big|_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^3 - x^3\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^6 + x^5\right)dx =$$

$$= \left(\frac{1}{8}x^4 - \frac{2}{9}x^{\frac{9}{2}} - \frac{1}{14}x^7 + \frac{1}{6}x^6\right)\Big|_0^1 =$$



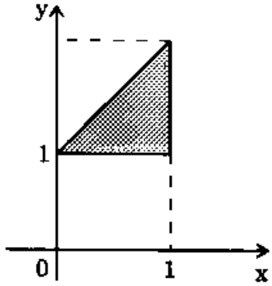
Hình 22

$$= \frac{1}{8} - \frac{2}{9} - \frac{1}{14} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{504}$$

13. D là miền tam giác (hình 23).

Ta có

$$I = \iint\limits_D \ln(x+y)dxdy = \int_0^1 dx \int_1^{1+x} \ln(x+y)dy$$



Hình 23

Bằng cách tích phân phân đoạn, ta được

$$\int_1^{1+x} \ln(x+y)dy = y\ln(x+y)\Big|_{y=1}^{y=1+x} - \int_1^{1+x} y\frac{dy}{x+y} =$$

$$=(1+x)\ln(1+2x) - \ln(1+x) - \int_1^{1+x}\left(1 - \frac{x}{x+y}\right)dy =$$

$$=(1+x)\ln(1+2x) - \ln(1+x) - x + x\ln(1+2x) - x\ln(1+x) =$$

$$= (1+2x)\ln(1+2x) - (1+x)\ln(1+x) - x$$

Do đó

$$I = \int_0^1 [(1+2x)\ln(1+2x) - (1+x)\ln(1+x) - x]dx.$$

Lại dùng phương pháp tích phân phân đoạn, ta được

$$I = \frac{(1+2x)^2}{4}.\ln(1+2x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{(1+2x)^2}{4}.\frac{2}{1+2x}dx - \frac{(1+x)^2}{2}\ln(1+x)\Big|_0^1 +$$

$$+ \int_0^1 \frac{(1+x)^2}{2}\cdot\frac{1}{1+x}dx - \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{9}{4}\ln3 - \frac{1}{8}(1+2x)^2\Big|_0^1 - 2\ln2 + \frac{1}{4}(1+x)^2\Big|_0^1 - \frac{1}{2} =$$

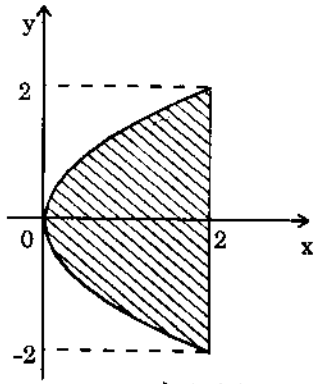
1

$$= \frac{9}{4}\ln3 - 1 - 2\ln2 + 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{9}{4}\ln3 - 2\ln2 - \frac{3}{4}.$$

14. Miền D nhận Ox làm trục đối xứng (hình 24), hàm số dưới dấu tích phân là chẵn đối với y, do đó

$$I = \iint\limits_D \frac{xdxdy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} =$$

$$= 2\iint\limits_{D_1} \frac{xdxdy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$$



Hình 24

Trong đó D_1 nằm trên trục Ox. Để tính tích phân kép này, ta tính tích phân theo x trước, rồi tính tích phân theo y sau. Ta được

$$I = 2\int_0^2 dy \int_{y^2/2}^2 \frac{xdx}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} = 2\int_0^2 \sqrt{1 + x^2 + y^2}\,\Big|_{\frac{y^2}{2}}^{2} dy =$$

$$= 2\int_0^2 \sqrt{5 + y^2}dy - 2\int_0^2 \sqrt{1 + \frac{y^4}{4} + y^2}\, dy = 2I_1 - 2I_2.$$

Ta có

$$I_2 = \int_0^2 \sqrt{\left(\frac{y^2}{2} + 1\right)^2} dy = \int_0^2 \left(\frac{y^2}{2} + 1\right)dy = \left(\frac{y^3}{6} + y\right)\Big|_0^2 = \frac{8}{6} + 2 = \frac{10}{3}$$

Để tính I_1, ta đổi biến số $y = \sqrt{5}\,\text{sht}$, do đó

$$dy = \sqrt{5}\,\text{chtdt}, \sqrt{5 + y^2} = \sqrt{5}\,\text{cht}$$

Khi y biến thiên từ 0 đến 2, t biến thiên từ 0 đến $\text{argsh}\,\frac{2}{\sqrt{5}}$

Đặt $\alpha = \text{argsh}\,\frac{2}{\sqrt{5}}$, ta được

1 $$I_1 = \int_0^\alpha 5\text{ch}^2\text{tdt} = \frac{5}{2}\int_0^\alpha (1 + \text{ch}2\text{t})dt =$$

$$= \frac{5}{2}(t + \frac{sh2t}{2})\Big|_0^{\alpha} = \frac{5}{2}(t + shtcht)\Big|_0^{\alpha} = \frac{5}{2}(\alpha + sh\alpha ch\alpha)$$

Nhưng $sh\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $ch\alpha = \frac{3}{\sqrt{5}}$, $\alpha = \ln(\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{5}}) = \frac{1}{2}\ln 5.$

Vậy $$I_1 = \frac{5}{2}\Big(\frac{1}{2}\ln 5 + \frac{6}{5}\Big) = \frac{5}{4}\ln 5 + 3$$

Do đó $$I = \frac{5}{2}\ln 5 + 6 - \frac{20}{3} = \frac{5}{2}\ln 5 - \frac{2}{3}.$$

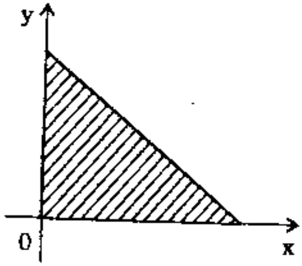
15. D là miền tam giác (hình 25).

Ta có $$I = \iint\limits_D \frac{xy}{x^2+y^2}dxdy = \int_0^1 xdx\int_0^{1-x}\frac{y}{x^2+y^2}dy =$$

$$= \int_0^1 x\,.\frac{1}{2}\Big[\ln(x^2+y^2)\Big]_0^{1-x}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x\ln(2x^2-2x+1)dx -$$

$$- \frac{1}{2}\int_0^1 x\ln(x^2)\,dx = \frac{1}{2}(I_1 - I_2)$$



Hình 25

Tính I_1 bằng tích phân phân đoạn, ta được

$$I_1 = \int_0^1 x\ln(2x^2-2x+1)dx = \frac{x^2}{2}\ln(2x^2-2x+1)\Big|_0^1 -$$

$$-\int_0^1\frac{x^2}{2}\cdot\frac{4x-2}{2x^2-2x+1}dx = -\int_0^1\frac{2x^3-x^2}{2x^2-2x+1}dx =$$

$$= -\int_0^1\Big(x + \frac{1}{2} - \frac{1}{4x^2-4x+2}\Big)dx$$

Ta có $4x^2 - 4x + 2 = (2x-1)^2 + 1$. Do đó

1 $$I_1 = -\Big[\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\text{arctg}(2x-1)\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4} - 1$$

Cũng tính I_2 bằng tích phân phân đoạn, ta được

$$I_2 = \int_0^1 2x\ln x dx = x^2\ln x \Big|_0^1 - \int_0^1 x dx = -\frac{1}{2}$$

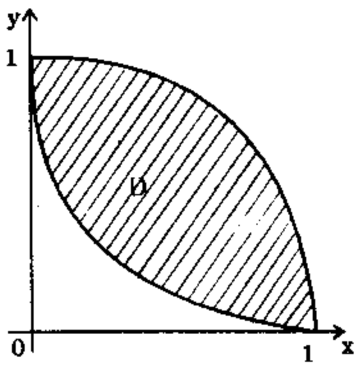
Vậy

$$I = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}.$$

16. Đường $x^2 + y^2 = 1$ là đường tròn đơn vị, còn đường $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ là đường parabôn nhận đường phân giác làm trục đối xứng, tiếp xúc với hai trục tọa độ tại hai điểm (1, 0) và (0, 1). Miền D được cho ở hình 26. Từ phương trình của đường tròn, ta rút ra $y = \sqrt{1 - x^2}$. Từ phương trình của đường parabôn ta rút ra.

$$\sqrt{y} = 1 - \sqrt{x} \Leftrightarrow y = 1 + x - 2\sqrt{x}$$

Vì $0 \le x \le 1$. Do đó



Hình 26

$$I = \iint\limits_D (x+y)\,dxdy = \int_0^1 dx \int_{1+x-2\sqrt{x}}^{\sqrt{1-x^2}} (x+y)dy \qquad =$$

$$= \int_0^1 dx\,.\,(xy + \frac{1}{2}y^2)\Big|_{y=1+x-2\sqrt{x}}^{y=\sqrt{1-x^2}} \qquad =$$

$$= \int_0^1 [x\sqrt{1-x^2} - x(1+x-2\sqrt{x}) + \frac{1}{2}(1-x^2) -$$

$$- \frac{1}{2}(1 + x^2 + 4x + 2x - 4\sqrt{x} - 4x\sqrt{x})]\,dx =$$

$$= \int_0^1 (x\sqrt{1-x^2} - 2x^2 - 4x + 4x\sqrt{x} + 2\sqrt{x})dx =$$

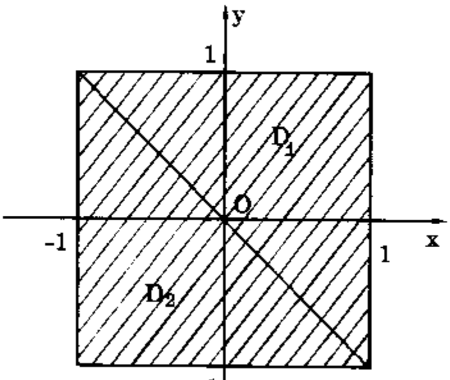
$$= \Big[-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{8}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{2}{3} - 2 + \frac{8}{5} + \frac{4}{3} = \frac{3}{5}$$

17. D là hình vuông được chia thành 2 miền như ở hình 27.

$D_1 = \{(x,y) : x + y \geq 0\} = \{(x,y) : |x| \leq 1, -x \leq y \leq 1\}$

$D_2 = \{(x,y) : x + y < 0\} = \{(x,y) : |x| \leq 1, -1 \leq y \leq -x\}$



Hình 27

Ta có

$$I = \iint\limits_{D} |x+y| dxdy = \iint\limits_{D_1} (x+y)dxdy - \iint\limits_{D_2} (x+y)dxdy = I_1 - I_2 .$$

Nhưng

$$I_1 = \int_{-1}^{1} dx \int_{-x}^{1} (x+y)dy = \int_{-1}^{1} \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_{y=-x}^{y=1} dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(x + \frac{1}{2} + x^2 - \frac{x^2}{2} \right) dx = 2\int_{0}^{1} \frac{x^2+1}{2} dx \qquad = \left(\frac{x^3}{3} + x \right)\Bigg|_{0}^{1} = \frac{4}{3} .$$

$$I_2 = \int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{-x} (x+y)dy = \int_{-1}^{1} \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_{y=-1}^{y=-x} dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(-x^2 + \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2} \right) dx = -2\int_{0}^{1} \frac{x^2+1}{2} dx = -\frac{4}{3} .$$

Vậy $\qquad I = I_1 - I_2 = \dfrac{8}{3} .$

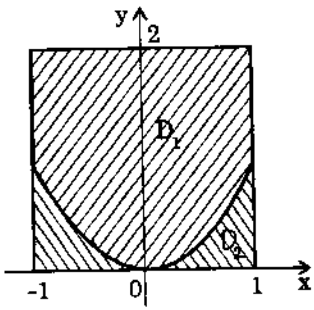
18. D là hình vuông được chia thành hai miền như ở hình 28.

$D_1 = \{(x, y): y \geq x^2\}$

$\quad = \{(x, y): |x| \leq 1, x^2 \leq y \leq 2\};$

$D_2 = \{(x, y): y < x^2\}$

$\quad = \{(x, y): |x| \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}.$



Hình 28

Ta có

$$I = \iint\limits_{D} \sqrt{|y-x^2|} dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D_1} \sqrt{y-x^2} dxdy + \iint\limits_{D_2} \sqrt{x^2-y} dxdy = I_1 + I_2 .$$

1

$$I_1 = \iint\limits_{D_1} \sqrt{y-x^2}\,dxdy = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{2} \sqrt{y-x^2}\,dy = \int\limits_{-1}^{1} \frac{2}{3}(y-x^2)^{\frac{3}{2}} \Bigg|_{y=x^2}^{y=2} dx =$$

$$= \frac{2}{3}\int\limits_{-1}^{1} (2-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{4}{3}\int\limits_{0}^{1} (2-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx\,.$$

Đổi biến số $x = \sqrt{2}\,\sin t$, do đó $dx = \sqrt{2}\,\cos t dt$, $2 - x^2 = 2\cos^2 t$.

Do đó

$$I_1 = \frac{16}{3}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 t dt = \frac{16}{3}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2 dt =$$

$$= \frac{16}{3}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{8}\cos 4t\right) dt =$$

$$= \frac{16}{3}\left(\frac{3t}{8} + \frac{\sin 2t}{4} + \frac{\sin 4t}{32}\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{16}{3}\left(\frac{3}{8}\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{3}\,.$$

Tính I_2, ta được

$$I_2 = \iint\limits_{D_2} \sqrt{x^2-y}\,dxdy = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{x^2} \sqrt{x^2-y}\,dy =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} -\frac{2}{3}(x^2-y)^{\frac{3}{2}} \Bigg|_{y=0}^{y=x^2} dx = \frac{2}{3}\int\limits_{-1}^{1} \left|x^3\right| dx = \frac{4}{3}\int\limits_{0}^{1} x^3 dx = \frac{4}{3}\cdot\frac{x^4}{4}\Bigg|_{0}^{1} = \frac{1}{3}.$$

Vậy: $\qquad I = I_1 + I_2 = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{5}{3}.$

19. Ta có

$$f(x,y) = \frac{1}{2}z^2\Bigg|_{0}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} = \frac{c^2}{2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right).$$

D là miền elip nhận các trục tọa độ làm trục đối xứng, xác định bởi

$$-a \le x \le a,\ -\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \le y \le \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

Ta có

$$I = \iint_D f(x,y)\,dxdy = \frac{c^2}{2}\int_{-a}^{a} dx \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)dy =$$

$$= c^2\int_{-a}^{a}\left(\frac{a^2-x^2}{a^2}y-\frac{y^3}{3b^2}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dx \quad =$$

$$= \frac{4bc^2}{3a^3}\int_0^a (a^2-x^2)^{3/2}dx$$

Đổi biến số $x = a\sin t,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$. Ta được

$$= \frac{4bc^2}{3a^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^4\cos^4 t\,dt = \frac{4}{3}abc^2 . \frac{3}{4} . \frac{1}{2} . \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}abc^2$$

Chú thích : Bài này cũng có thể giải được bằng cách đổi biến số

$$u = \frac{x}{a}\ ,\ v = \frac{y}{b}$$

Do đó $\qquad x = au\ ,\qquad y = bv$

Đó là một song ánh biến miền D lên miền D' trong mặt phẳng (u,v) giới hạn bởi đường tròn $u^2 + v^2 = 1$. Ta có

$$J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = ab$$

Vậy

$$I = \iint_{D'} \frac{abc^2}{2}(1-u^2-v^2)\,dudv$$

1

Chuyển sang tọa độ cực (r, φ). Miền D'' trong mặt phẳng (r, φ) tương ứng với D' được xác định bởi

$$0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le 1$$

Suy ra

$$I = \frac{abc^2}{2} \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^1 (1 - r^2)\, r dr = \frac{abc^2}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi abc^2}{4}$$

20. Đường $y = 2 - x^2$ là đường parabôn có đỉnh tại điểm (0, 2), nhận Oy làm trục đối xứng, đường $y = 2x - 1$ là đường thẳng, chúng cắt nhau tại hai điểm (–3, –7) và (1,1) (**hình 29**). Ta có

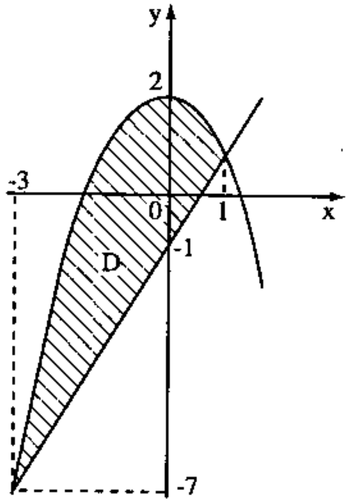
$$\iint_D (x - y)dxdy = \int_{-3}^{1} dx \int_{2x-1}^{2-x^2} (x - y)\, dy = \int_{-3}^{1} \left[xy - \frac{1}{2}y^2 \right]_{y=2x-1}^{y=2-x^2} dx =$$

$$= \int_{-3}^{1} [x(2 - x^2) - x(2x - 1) - \frac{1}{2}(2 - x^2)^2 + \frac{1}{2}(2x - 1)^2]\, dx =$$

$$= \int_{-3}^{1} (2x - x^3 - 2x^2 + x - 2 - \frac{1}{2}x^4 + 2x^2 + 2x^2 + \frac{1}{2} - 2x)\, dx =$$

$$= \int_{-3}^{1} (-\frac{1}{2}x^4 - x^3 + 2x^2 + x - \frac{3}{2})\, dx =$$

$$= (-\frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x)\Big|_{-3}^{1} = \frac{64}{15}$$



Hình 29

21. a) Miền D là hình vành khăn (hình 30). Chuyển sang tọa độ cực, miền lấy tích phân D' tương ứng trong mặt phẳng (r, φ) được xác định bởi các bất đẳng thức

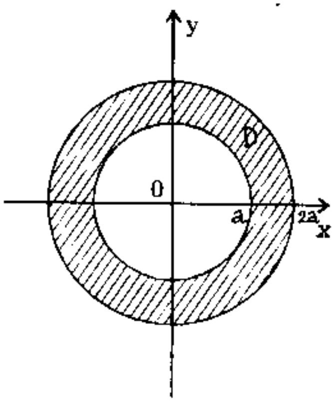
1

$$0 \le \varphi \le 2\pi,\ a \le r \le 2a$$

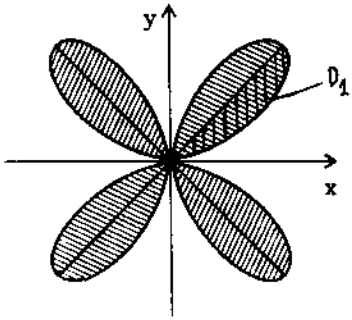
Vậy

$$I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy = \iint_{D'} r^2 dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^{2a} r^2 dr =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{r^3}{3}\right)\Big|_a^{2a} = \int_0^{2\pi} \frac{7a^3}{3}\,d\varphi = \frac{14\pi a^3}{3}$$



Hình 30



Hình 31

b) Miền D được cho ở hình 31, nó nhận các trục Ox , Oy và các đường phân giác y = x, y = –x làm trục đối xứng. Hàm số dưới dấu tích phân là chẵn đối với x, chẵn đối với y và không đổi khi ta thay (x, y) bởi (y, x) hoặc thay (x, y) bởi (y, –x) nên

$$I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy = 8\iint_{D_1} \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy\,,$$

D_1 là phần của miền D được chỉ ra ở hình 31. Chuyển sang tọa độ cực, miền D'_1 tương ứng trong mặt phẳng (r, φ) được xác định bởi các bất đẳng thức.

$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}\ , \quad 0 \le r \le a\sin 2\varphi$$

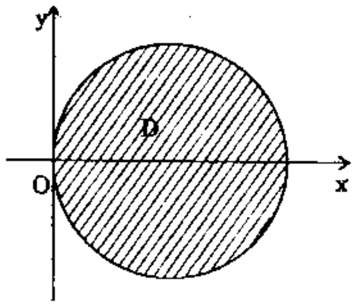
1 Vậy

$$I = 8\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sin 2\varphi} r^2 dr = 8\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{r^3}{3}\Big|_{r=0}^{r=a\sin 2\varphi} d\varphi = \frac{8a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 2\varphi\, d\varphi.$$

Đổi biến số $u = 2\varphi$. Ta có $d\varphi = \dfrac{du}{2}$. Vậy

$$I = \frac{8a^3}{2\,.\,3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 u du = \frac{4a^3}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{8a^3}{9}.$$

22. Đường $x^2 + y^2 - x = 0$ là đường tròn có tâm tại điểm $(\frac{1}{2}, 0)$, có bán kính bằng $\frac{1}{2}$ (hình 32). Chuyển sang tọa độ cực, phương trình của đường đó là $r = \cos\varphi$. Vậy miền lấy tích phân D' tương ứng trong mặt phẳng (r, φ) được xác định bởi



Hình 32

$$-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le r \le \cos\varphi.$$

Do đó $\displaystyle\iint_D (x^2 + y^2 + 1)\, dxdy = \iint_{D'} (r^2 + 1) r dr d\varphi =$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos\varphi} (r^3 + r) dr = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{r^4}{4} + \frac{r^2}{2}\right)\Big|_0^{\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1}{4}\cos^4\varphi + \frac{1}{2}\cos^2\varphi\right) d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{3}{8} + 1\right) = \frac{11\pi}{32}.$$

23. Gọi I là giao điểm khác O của hai đường tròn $x^2 + y^2 = 2y$, $x^2 + y^2 = 2x$. Đoạn OI chia miền D thành hai miền D_1 và D_2.

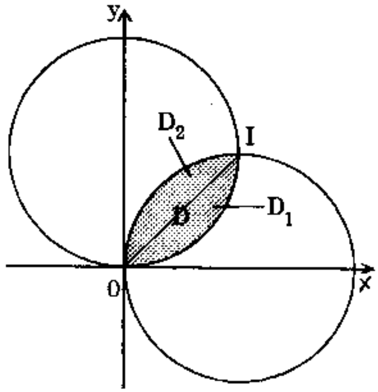
Chuyển sang hệ tọa độ cực, phương trình của hai đường tròn trên theo thứ tự là:

$$r = 2\sin\varphi, \qquad r = 2\cos\varphi .$$

Các miền D'_1, D'_2 trong mặt phẳng (r, φ) tương ứng với D_1, D_2 được xác định bởi:

$D'_1 = \{(r,\varphi): 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}, 0 \le r \le 2\sin\varphi\}$;

$D'_2 = \{(r, \varphi): \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, 0 \le r \le 2\cos\varphi\}$.



Hình 33

$$\text{Vậy } I = \iint\limits_D (x+2y+1)dxdy = \iint\limits_{D'_1\cup D'_2}[r(\cos\varphi+2\sin\varphi)+1]rdrd\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{2\sin\varphi}\left[r^2(\cos\varphi+2\sin\varphi)+r\right]dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi}\left[r^2(\cos\varphi+2\sin\varphi)+r\right]dr =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[(\cos\varphi+2\sin\varphi)\frac{r^3}{3}+\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=2\sin\varphi} d\varphi + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left[(\cos\varphi+2\sin\varphi)\frac{r^3}{3}+\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=2\cos\varphi} d\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{8}{3}\sin^3\varphi\cos\varphi+\frac{16}{3}\sin^4\varphi+2\sin^2\varphi\right)d\varphi \; +$$

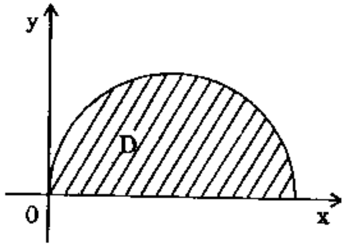
$$+ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{8}{3}\cos^4\varphi+\frac{16}{3}\cos^3\varphi\sin\varphi+2\cos^2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= \left[\frac{8}{3}\frac{\sin^4\varphi}{4}+\frac{16}{3}\left(\frac{3}{8}\varphi-\frac{\sin 2\varphi}{4}+\frac{\sin 4\varphi}{32}\right)+\varphi-\frac{\sin 2\varphi}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} +$$

$$+ \left[\frac{8}{3}\left(\frac{3}{8}\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{4}+\frac{\sin 4\varphi}{32}\right)-\frac{16}{3}\frac{\cos^4\varphi}{4}+\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{5}{2}\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$$

1

24. Chuyển sang tọa độ cực, phương trình của đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$ là $r = 2\cos\varphi$. Miền D' trong mặt phẳng (r, φ) tương ứng với miền D được xác định bởi các bất đẳng thức



Hình 34

$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le r \le 2\cos\varphi.$$

$$I = \iint_{D'} \sqrt{4-r^2}\, r\,dr\,d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \sqrt{4-r^2}\, r\,dr =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(4-r^2)^{3/2}\right]_0^{2\cos\varphi} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{8}{3}\left(1-\sin^3\varphi\right)d\varphi =$$

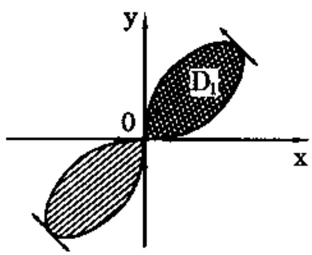
$$= \frac{8}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

25. Miền lấy tích phân được cho ở hình 35. Nó được giới hạn bởi đường

$(x^2 + y^2)^2 = xy$. Chuyển sang tọa độ cực, phương trình đó được viết là:

$$r^2 = \sin\varphi\cos\varphi = \frac{1}{2}\sin 2\varphi.$$

Đường đó là đường lemnixcat nằm trong các góc



Hình 35

phần tư thứ nhất và thứ ba, nhận đường phân giác thứ nhất làm trục đối xứng. Nó được suy từ đường lemnixcat quen thuộc $r^2 = \frac{1}{2}\cos 2\varphi$, bằng một phép quay góc $\frac{\pi}{4}$ quanh gốc O. Vì lí do đối xứng của miền D cũng như của hàm số dưới dấu tích phân, ta có

$$I = 2\iint_{D_1} \sqrt{xy}\,dxdy$$

trong đó D_1 là phần của miền D nằm trong góc phần tư thứ nhất. Miền D'_1 trong mặt phẳng (r, φ) tương ứng với D_1 được xác định bởi các bất đẳng thức

$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le r \le \sqrt{\frac{1}{2}\sin 2\varphi}\ .$$

Vậy

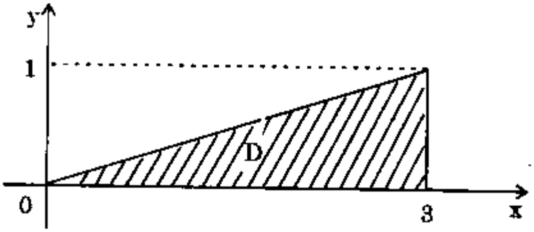
$$I = 2\iint_{D'_1} \sqrt{\sin\varphi\cos\varphi}\ rdrd\varphi$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\sin 2\varphi}{2}}d\varphi \int_0^{\sqrt{\frac{\sin 2\varphi}{2}}} r^2 dr = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{\frac{\sin 2\varphi}{2}}\right)^4 d\varphi =$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\varphi d\varphi = \frac{1}{12}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4\varphi)d\varphi = \frac{\pi}{24}.$$

26. I là miền tam giác (hình 36). Chuyển sang tọa độ cực, phương trình của đường thẳng $y = \frac{x}{3}$ được viết là $\varphi = \text{arctg}\frac{1}{3}$, còn phương trình đường thẳng x = 3 là $r = \frac{3}{\cos\varphi}$. Miền D' trong mặt phẳng (r, φ) tương ứng với D được xác định bởi các bất đẳng thức

$$0 \le \varphi \le \text{arctg}\frac{1}{3},\quad 0 \le r \le \frac{3}{\cos\varphi}\ .$$



Hình 36

Ta có

$$I = \iint\limits_{D'} e^{r^2\cos^2\varphi}\, r dr d\varphi = \int\limits_0^{\operatorname{arctg}\frac{1}{3}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{3}{\cos\varphi}} e^{r^2\cos^2\varphi}\, r dr \quad .$$

Đổi biến số $r^2\cos^2\varphi = u$, ta có $du = 2r\cos^2\varphi dr$, do đó

$$\int\limits_0^{\frac{3}{\cos\varphi}} e^{r^2\cos^2\varphi}\, r dr = \int\limits_0^{9} \frac{e^u du}{2\cos^2\varphi} = \frac{1}{2\cos^2\varphi}\left(e^u\right)_o^9 = \frac{e^9 - 1}{2\cos^2\varphi}.$$

Vậy

$$I = \frac{e^9 - 1}{2}\int\limits_0^{\operatorname{arctg}\frac{1}{3}} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{e^9 - 1}{2}\operatorname{tg}\varphi\Big|_0^{\operatorname{arctg}\frac{1}{3}} = \frac{e^9 - 1}{6} .$$

27. D là miền hình vuông (hình 37). Đổi biến số

$$u = x + y,\ v = x - y$$

Do đó

1

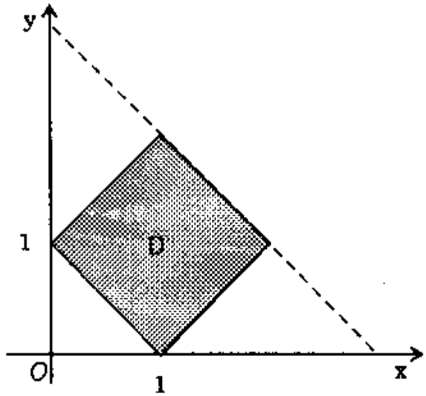
$$x = \frac{1}{2}(u + v),\ y = \frac{1}{2}(u - v)$$

Đó là một song ánh biến miền D lên miền D' xác định bởi

$$1 \leqslant u \leqslant 3, -1 \leqslant v \leqslant 1$$

Ta có

$$J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$



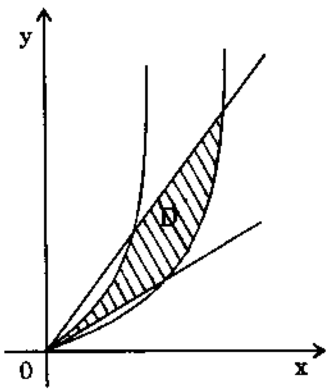
Hình 37

Do đó

$$\iint_D (x+y)^3 \ (x-y)^2 dxdy = \frac{1}{2}\iint_{D'} u^3v^2dudv =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^3 u^3du \cdot \int_{-1}^1 v^2dv = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^4}{4}\Big|_1^3 \cdot \frac{v^3}{3}\Big|_{-1}^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{80}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{20}{3}$$



Hình 38

28. Miền D được cho ở hình 38. Thực hiện phép đổi biến số

$$\frac{y^2}{x} = u \ , \ \frac{y}{x} = v$$

Do đó

$$x = \frac{u}{v^2} \ , \ y = \frac{u}{v}$$

Đó là một song ánh biến miền D lên miền D' trong mặt phẳng (u, v) xác định bởi các bất đẳng thức

$$1 \le u \le 3,\ 1 \le v \le 2.$$

Ta có

$$J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_u \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{v^2} & -\dfrac{2u}{v^3} \\ \dfrac{1}{v} & -\dfrac{u}{v^2} \end{vmatrix} = \frac{u}{v^4}.$$

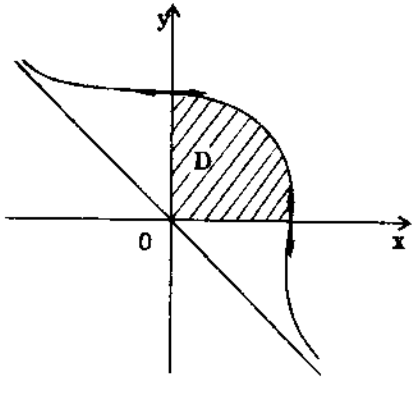
Do đó

$$\iint_D xydxdy = \iint_{D'} \frac{u}{v^2}\cdot\frac{u}{v}\cdot\frac{u}{v^4}\,dudv =$$

$$= \iint_{D'} \frac{u^3}{v^7}\,dudv = \int_1^3 u^3du \int_1^2 \frac{dv}{v^7} =$$

$$= \frac{u^4}{4}\Bigg|_1^3 \left(-\frac{1}{6v^6}\right)\Bigg|_1^2 = 20.\frac{1}{6}.\frac{63}{64} = \frac{105}{32}.$$

29. Miền D được cho ở hình 39. Thực hiện phép đổi biến số $x^3 = u$, $y^3 = v$.



Hình 39

Ta có

$x = u^{\frac{1}{3}}, y = v^{\frac{1}{3}}$. Đó là một song ánh biến miền D lên miền D' trong mặt phẳng (u, v) xác định bởi các bất đẳng thức

$$u \ge 0, \quad v \ge 0, \quad u + v \le 1.$$

Ta có

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{3}u^{-2/3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}v^{-2/3} \end{vmatrix} = \frac{1}{9}u^{-2/3}.v^{-2/3} .$$

Do đó

$$\iint\limits_{D} x^2y^2\sqrt{1-x^3-y^3}\,dxdy = \frac{1}{9}\iint\limits_{D'}\sqrt[3]{1-u-v}\,dudv =$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^1 du\int_0^{1-u}(1-u-v)^{1/3}dv = \frac{1}{9}\int_0^1 -\frac{3}{4}(1-u-v)^{4/3}\Bigg|_{v=0}^{v=1-u} du$$

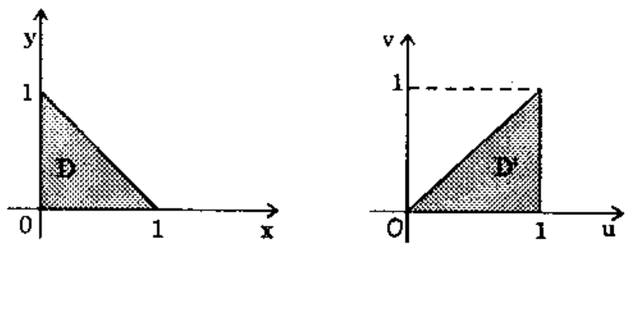
$$= \frac{1}{12}\int_0^1 (1-u)^{4/3}du = -\frac{1}{12}\cdot\frac{3}{7}(1-u)^{7/3}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{28}.$$

30. D là miền tam giác cho ở hình 40. Đổi biến số

$$x + y = u, \qquad x = v.$$

Ta có

$$x = v, \qquad y = u - v$$



Hình 40

Đó là một song ánh biến miền D lên miền D' trong mặt phẳng (u, v) xác định bởi các bất đẳng thức.

$$v \geq 0\,,\ u - v \geq 0,\ \ u \leq 1$$

(hình 40). Ta có

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

Do đó

$$I = \iint\limits_{D} (x+y)^2 \sin\pi(x+y)dxdy = \iint\limits_{D'} u^2 \sin\pi u du dv =$$

$$= \int_0^1 u^2 \sin\pi u du \int_0^u dv = \int_0^1 u^3 \sin\pi u du$$

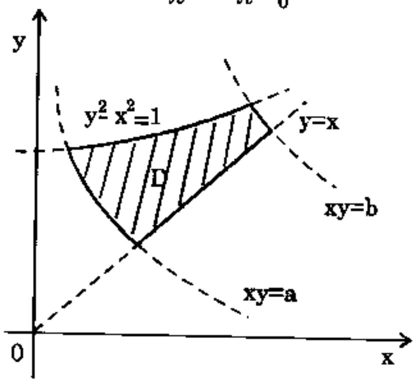
Bằng cách lấy tích phân phân đoạn 3 lần liên tiếp, ta được

$$I = -u^3 \frac{\cos\pi u}{\pi}\Big|_0^1 + \frac{3}{\pi}\int_0^1 u^2 \cos\pi u du =$$

$$= \frac{1}{\pi} + \frac{3}{\pi}\left[u^2 \frac{\sin\pi u}{\pi}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin\pi u}{\pi} 2udu\right] = \frac{1}{\pi} - \frac{6}{\pi^2}\int_0^1 u\sin\pi u du =$$

$$= \frac{1}{\pi} - \frac{6}{\pi^2}\left[-u\frac{\cos\pi u}{\pi}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos\pi u}{\pi} du\right]$$

$$= \frac{1}{\pi} - \frac{6}{\pi^3} - \frac{6}{\pi^3}\int_0^1 \cos\pi u du = \frac{1}{\pi} - \frac{6}{\pi^3}\,.$$



Hình 41

31. Miền D được cho ở h.41. Thực hiện phép đổi biến số

$$xy = u,\ y^2 - x^2 = v \qquad (*)$$

Đó là một song ánh biến miền D lên miền D' trong mặt phẳng (u, v) xác định bởi các bất đẳng thức

$$a \le u \le b \;,\; 0 \le v \le 1.$$

Thật vậy với mỗi cặp (u, v) cho trước, từ (*) suy ra

$$y = \frac{u}{x} \Rightarrow \frac{u^2}{x^2} - x^2 = v \Rightarrow x^4 + vx^2 - u^2 = 0$$

Với v > 0, phương trình trùng phương ấy chỉ có một nghiệm dương x, từ đó ta được $y = \dfrac{u}{x}$. Tóm lại với mỗi cặp số (u, v) cho trước, chỉ có một cặp số (x, y) tương ứng duy nhất.

Ta có

$$J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{1}{\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} y & x \\ -2x & 2y \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{1}{2(x^2 + y^2)} \neq 0 \quad , \qquad \forall\,(x, y) \in D.$$

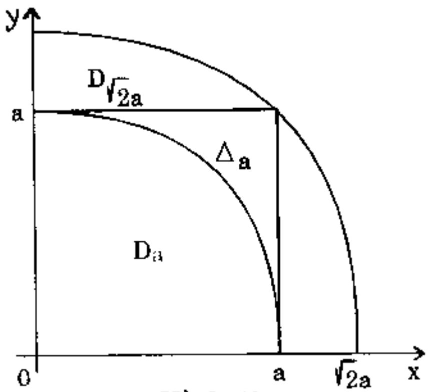
Vậy

$$\iint\limits_D (y^2 - x^2)^{xy}(x^2 + y^2)dxdy = \frac{1}{2}\iint\limits_{D'} v^u dudv = \frac{1}{2}\int_a^b du \int_0^1 v^u\, dv =$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b \frac{v^{u+1}}{u+1}\Big|_{v=0}^{v=1} du = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{du}{u+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{b+1}{a+1}$$

32. a) Miền D_a được cho ở hình 42. Chuyển sang tọa độ cực, miền D'_a trong mặt phẳng (r, φ) tương ứng với D_a được
1 xác định bởi các bất đẳng thức.



Hình 42

$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le r \le a.$$

Ta có $$I_a = \iint\limits_{D'_a} e^{-r^2} r\, dr d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^a e^{-r^2} r\, dr = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^a d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{4}(1 - e^{-a^2}).$$

b) Vì $e^{-x^2-y^2} > 0$ $\quad \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$, và vì

$$D_a \subset \Delta_a \subset D_{\sqrt{2}a}$$

(xem hình 42), ta có

$$\iint\limits_{D_a} e^{-x^2-y^2} dxdy \le \iint\limits_{\Delta_a} e^{-x^2-y^2} dxdy \le \iint\limits_{D_{\sqrt{2}a}} e^{-x^2-y^2} dxdy.$$

Mặt khác

$$J_a = \iint\limits_{\Delta_a} e^{-x^2-y^2} dxdy = \int\limits_0^a e^{-x^2} dx \int\limits_0^a e^{-y^2} dy = \left(\int\limits_0^a e^{-x^2} dx \right)^2.$$

Nhưng $$I_a \le J_a \le I_{\sqrt{2}a}.$$

Do đó

$$\frac{\pi}{4}(1 - e^{-a^2}) \le J_a \le \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2a^2}).$$

Vậy $$\lim_{a \to +\infty} J_a = \lim_{a \to +\infty} \left(\int\limits_0^a e^{-x^2} dx \right)^2 = \frac{\pi}{4}.$$

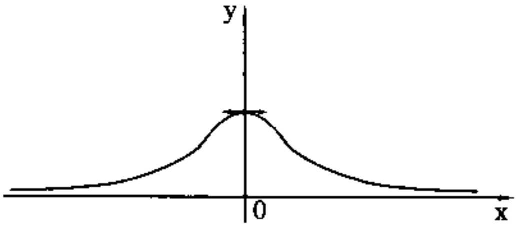
Suy ra $$\lim_{a \to +\infty} \int\limits_0^a e^{-x^2} dx = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Vì hàm số $x \mapsto e^{-x^2}$ là chẵn, nên ta có

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

1 Tích phân ấy được gọi là tích phân Gauss, nó bằng diện tích

của hình phẳng giới hạn bởi đường hình chuông $y = e^{-x^2}$ với đường tiệm cận của nó (hình 43).



Hình 43

33. D là miền giới hạn bởi đường elip $x^2 + xy + y^2 = 1$. Ta có

$$x^2 + xy + y^2 = \left(x+\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{y\sqrt{3}}{2}\right)^2 .$$

Thực hiện phép đổi biến số

$$x + \frac{y}{2} = u, \qquad \frac{y\sqrt{3}}{2} = v .$$

Ta có $\qquad x = u - \frac{v}{\sqrt{3}}, \qquad y = \frac{2v}{\sqrt{3}}$.

Đó là một song ánh biến miền D lên miền D' trong mặt phẳng (u, v) giới hạn bởi đường $u^2 + v^2 = 1$. Ta có

$$J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} = \frac{2}{\sqrt{3}} .$$

Do đó: $\qquad I = \iint\limits_D e^{-(x^2+xy+y^2)}dxdy = \frac{2}{\sqrt{3}} \iint\limits_{D'} e^{-(u^2+v^2)}dudv$.

D' là miền tròn. Chuyển sang tọa độ cực (r, φ). Miền D'' trong mặt phẳng (r, φ) tương ứng với D' được xác định bởi:

1

$$0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le r \le 1 .$$

Suy ra

$$I = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 e^{-r^2} r dr = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 2\pi \cdot \left(-\frac{1}{2} e^{-r^2}\right)\Big|_0^1 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

34. a) Đường $x = 4y - y^2$ là đường parabôn có đỉnh tại điểm (4,2), có trục song song với trục Ox, cắt trục Oy tại hai điểm (0, 0) và (0,4). Đường $x + y = 6$ là đường thẳng cắt các trục Ox , Oy theo thứ tự tại các điểm (6,0) và (0,6). Hai đường ấy giao nhau tại các điểm có tung độ thỏa mãn phương trình.

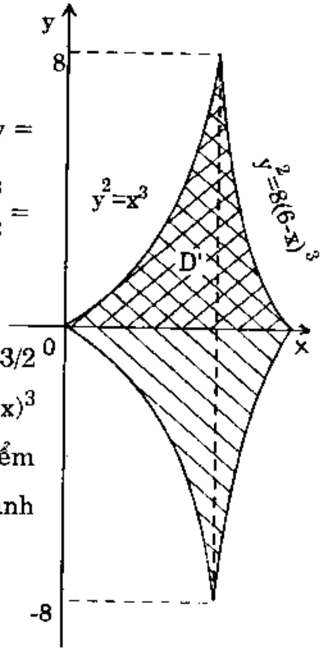
$$4y - y^2 = 6 - y \Leftrightarrow y^2 - 5y + 6 = 0 \Rightarrow y = 2, y = 3,$$

tức là tại điểm (4,2), (3,3). D là miền giới hạn bởi hai đường đó. Diện tích của miền D bằng

$$S = \iint_D dxdy = \int_2^3 dy \int_{6-y}^{4y-y^2} dx = \int_2^3 (4y - y^2 - 6 + y)dy =$$

$$= \int_2^3 (-y^2 + 5y - 6)dy = \left(-\frac{1}{3}y^3 + \frac{5}{2}y^2 - 6y\right)\Big|_2^3 =$$

$$= -\frac{1}{3}(27 - 8) + \frac{5}{2}(9 - 4) - 6 = \frac{1}{6}$$



Hình 44

b) Đường $y^2 = x^3$ là đường parabôn bậc 3/2 có điểm lùi tại gốc 0, còn đường $y^2 = 8(6 - x)^3$ là đường parabôn bậc $\frac{3}{2}$ có điểm lùi tại điểm (6,0). Hai đường ấy cắt nhau tại điểm có hoành độ thỏa mãn phương trình

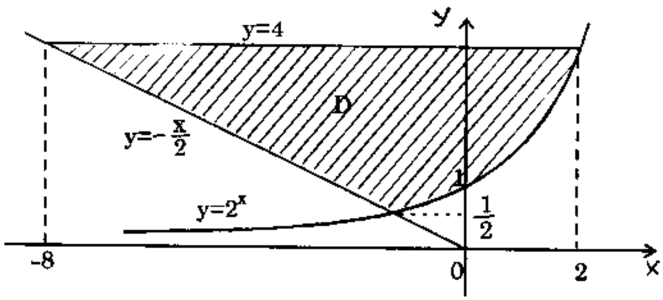
$$x^3 = 8(6 - x)^3 \Leftrightarrow x = 4,$$

tức là chúng cắt nhau tại hai điểm (4,8) và (4, – 8) (hình 44). Diện tích của miền D giới
1 hạn bởi đường cong ấy, vì lý do đối xứng, bằng

$$S = 2\iint\limits_{D'} dxdy = 2\int_0^8 dy \int_{y^{2/3}}^{6-\frac{y^{2/3}}{2}} dx =$$

$$= 2\int_0^8 (6 - \frac{3}{2}y^{\frac{2}{3}})dy = 2(6y - \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{5}y^{\frac{5}{3}})\Big|_0^8 = 2(48 - \frac{9}{10}\cdot 32) = \frac{192}{5}\,.$$

c) Đường $y = 4$ cắt đường $y = 2^x$ tại điểm (2.4) và cắt đường $y = -\dfrac{x}{2}$ tại điểm (-8, 4). Đường $y = 2^x$ cắt đường $y = -\dfrac{x}{2}$ tại điểm $(-1, \dfrac{1}{2})$ (hình 45). Từ các phương trình $y = -\dfrac{x}{2}$, $y = 2^x = e^{x\ln 2}$, ta suy ra $x = -2y$, $x = \dfrac{\ln y}{\ln 2}$. Diện tích S của miền D giới hạn bởi ba đường trên bằng

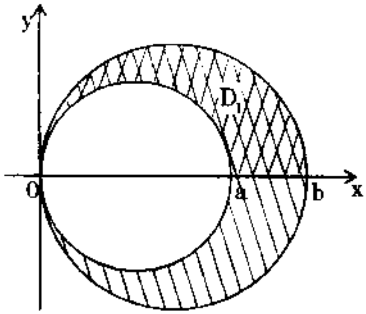


Hình 45

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int_{\frac{1}{2}}^{4} dy \int_{-2y}^{\frac{\ln y}{\ln 2}} dx = \int_{1/2}^{4} (\frac{\ln y}{\ln 2} + 2y)dy =$$

$$= \Big(\frac{y\ln y - y}{\ln 2} + y^2\Big)\Big|_{\frac{1}{2}}^{4} = \frac{1}{\ln 2}\Big[4\ln 4 - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} - (4 - \frac{1}{2})\Big] + 16 - \frac{1}{4} =$$

1 $$= \frac{17}{2} - \frac{7}{2\ln 2} + \frac{63}{4} = \frac{97}{4} - \frac{7}{2\ln 2}\,.$$



Hình 46

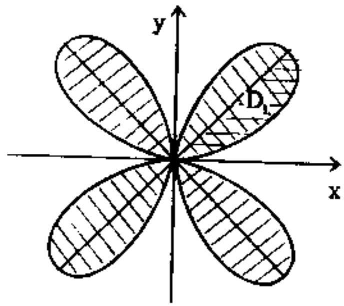
d) Gọi D là miền giới hạn bởi hai đường $r = a\cos\varphi$, $r = b\cos\varphi$ $(0<a<b)$, D_1 là phần của miền D nằm trên trục Ox. Vì lí do đối xứng, diện tích của miền D bằng

$$S = 2\iint\limits_{D'_1} rdrd\varphi =$$

$$= 2.\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{a\cos\varphi}^{b\cos\varphi} rdr =$$

$$= 2.\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (b^2 - a^2)\cos^2\varphi d\varphi = (b^2 - a^2)\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}(b^2 - a^2) .$$

e) Đường $r = a\sin 2\varphi$ nhận các trục Ox, Oy và các đường phân giác $y = x$, $y = -x$ làm trục đối xứng. Gọi D là miền giới hạn bởi đường $r = a\sin 2\varphi$, D_1 là phần của miền D nằm giữa hai tia $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Ta có

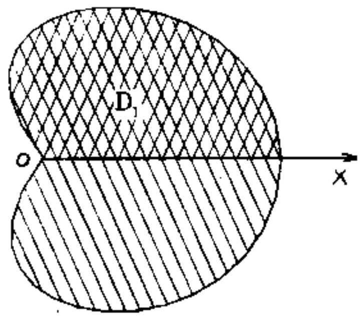


Hình 47

$$\frac{S}{8} = \iint\limits_{D'_1} rdrd\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a^2\sin^2 2\varphi}{2} d\varphi = a^2.\frac{\pi}{16} \Rightarrow S = \frac{a^2\pi}{2} .$$

1

f) Gọi D là miền giới hạn bởi đường $r = a(1 + \cos\varphi)$, D_1 là phần của miền D nằm trên trục Ox (hình 48). Vì lí do đối xứng, diện tích của miền D bằng



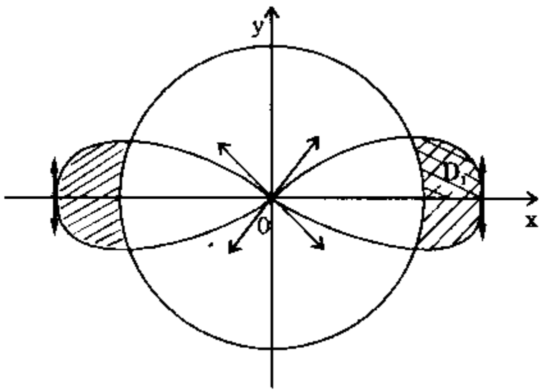
Hình 48

$$S = 2\iint\limits_{D'_1} r dr d\varphi = 2\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{a(1+\cos\varphi)} r dr =$$

$$\int_0^{\pi} a^2 (1 + \cos\varphi)^2 d\varphi = 4a^2\int_0^{\pi} \cos^4 \frac{\varphi}{2} d\varphi =$$

$$= 8a^2 \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi a^2$$

g) Gọi D là phần của hình giới hạn bởi đường $r^2 = 2a^2\cos 2\varphi$ nằm ngoài đường $r = a$, D_1 là phần của D nằm trong góc phần tư thứ nhất (hình 49). Vì lí do đối xứng, diện tích của miền D bằng



Hình 49

$$S = 4\iint\limits_{D'_1} r dr d\varphi$$

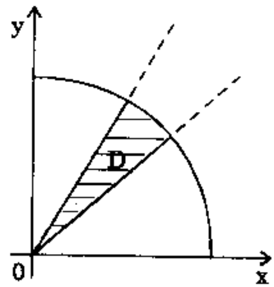
Hai đường $r^2 = 2a^2\cos 2\varphi$ và $r = a$ cắt nhau tại các điểm có góc cực φ thoả mãn phương trình

$$2a^2\cos 2\varphi = a^2 \Leftrightarrow \cos 2\varphi = \frac{1}{2}$$

Suy ra $\qquad \varphi = \pm\frac{\pi}{6}, \varphi = \pm\frac{5\pi}{6}$. Vậy

$$S = 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int_a^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} rdr = 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}}(2\cos 2\varphi - 1)d\varphi = \frac{3\sqrt{3}-\pi}{3}a^2$$

35. a) Mặt $z = 1 - x^2 - y^2$ là mặt parabôlôit tròn xoay có đỉnh tại điểm (0, 0, 1), nhận Oz làm trục, quay bề lõm về phía $z < 0$, nó cắt mặt phẳng $z = 0$ theo đường tròn $x^2 + y^2 = 1$. Vậy thể tích của vật thể giới hạn bởi các mặt $z = 1 - x^2 - y^2$, $z = 0$, $y = x$, $y = x\sqrt{3}$, nằm trong góc phần tám thứ nhất bằng



Hình 50

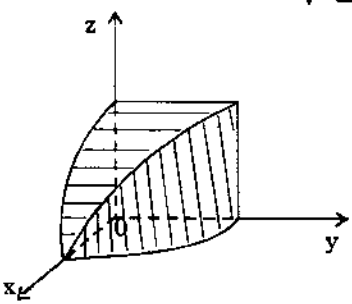
$$V = \iint_D (1 - x^2 - y^2)dxdy$$

trong đó D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $x^2 + y^2 = 1, y = x, y = x\sqrt{3}$ nằm trong góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng xoy (hình 50). Chuyển sang toạ độ cực, ta được

$$V = \iint_{D'} (1 + r^2)\,rdrd\varphi$$

Trong tọa độ cực, phương trình của đường $x^2 + y^2 = 1$ là $r = 1$, của các đường thẳng $y = x$, $y = x\sqrt{3}$ theo thứ tự là $\varphi = \frac{\pi}{4}, \varphi = \frac{\pi}{3}$.

Do đó



Hình 51

$$V = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^1 (r - r^3)dr = \frac{\pi}{12}\cdot\left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{48}.$$

b) Mặt $x^2 + y^2 = a^2$ là mặt trụ có đường sinh song song với Oz, cắt mặt phẳng xOy theo đường tròn $x^2 + y^2 = a^2$; mặt $x^2 + z^2 = a^2$ là mặt trụ có đường sinh song song với Oy, cắt mặt phẳng xOz theo đường tròn $x^2 + z^2 = a^2$ (hình 51). Vì lí do đối xứng, thể tích V của vật thể giới hạn bởi hai mặt ấy bằng 8 lần thể tích của phần vật thể ấy nằm trong góc phần tám thứ nhất. Vậy

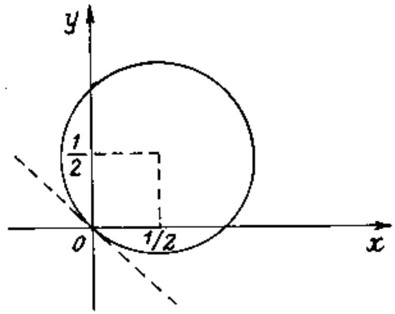
$$\frac{V}{8} = \iint_D z\,dxdy = \iint_D \sqrt{a^2 - x^2}\,dxdy,$$

trong đó D là phần của miền tròn $x^2 + y^2 \le a^2$ nằm trong góc phần tư thứ nhất trên mặt phẳng xOy. Do đó

$$V = 8\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} dy = 8\int_0^a (a^2 - x^2)dx =$$

$$= 8\left(a^2x - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^a = \frac{16}{3}a^3.$$

c) Mặt $z = x^2 + y^2$ là mặt parabôlôit tròn xoay có đỉnh tại gốc tọa độ, nhận Oz làm trục đối xứng, quay bề lõm về phía $z > 0$. Mặt $z = x + y$ là mặt phẳng đi qua gốc tọa độ. Hình chiếu xuống mặt phẳng xOy của giao tuyến của hai mặt trên có phương trình là:



Hình 52

$x^2 + y^2 = x + y$ hay

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

1

Đó là phương trình của đường tròn có tâm tại điểm $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, có bán kính bằng $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (hình 52). Gọi D là miền trong mặt phẳng xOy giới hạn bởi đường tròn trên. Thể tích của vật thể giới hạn bởi các mặt $z = x^2 + y^2$ và $z = x + y$ bằng

$$V = \iint_D [x + y - (x^2 + y^2)]dxdy$$

chuyển sang toạ độ cực, phương trình của đường tròn $x^2 + y^2 = x + y$ là $r = \cos\varphi + \sin\varphi$. Miền D' trong mặt phẳng (r, φ) tương ứng với D được xác định bởi các bất đẳng thức

$$-\frac{\pi}{4} \le \varphi \le 3\frac{\pi}{4},\ 0 \le r \le \cos\varphi + \sin\varphi .$$

Vậy $$V = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\cos\varphi+\sin\varphi} [r(\cos\varphi+\sin\varphi) - r^2]r\,dr =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left[\frac{r^3}{3}(\cos\varphi + \sin\varphi) - \frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=\cos\varphi+\sin\varphi} d\varphi =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{(\cos\varphi+\sin\varphi)^4}{12} d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{(\sqrt{2})^4 \sin^4\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)}{12} d\varphi$$

Đổi biến số $\varphi + \frac{\pi}{4} = t$, ta được

$$V = \frac{1}{3}\int_0^{\pi} \sin^4 t dt = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t dt = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}.$$

d) Mặt $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ là mặt cầu đi qua gốc tọa độ, có tâm tại điểm (0, 0, 1). Mặt $x^2 + y^2 = z^2$ là mặt nón tròn xoay, có đỉnh tại gốc tọa độ, nhận trục Oz làm trục đối xứng. Ngoài gốc tọa độ, hai mặt ấy cắt nhau tại những điểm có cao độ z thoả mãn phương trình

$$2z - z^2 = z^2 \Rightarrow z = 1.$$

Vậy phương trình của hình chiếu xuống mặt phẳng xOy của giao tuyến của hai mặt $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ và $x^2 + y^2 = z^2$ là

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Gọi D là miền trong mặt phẳng xOy giới hạn bởi đường tròn ấy. Từ các phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ và $x^2 + y^2 = z^2$ ta lần lượt rút ra $z = 1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ và $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Vậy thể tích của vật thể giới hạn bởi các mặt $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$, $x^2 + y^2 = z^2$ bằng

$$V = \iint_D (1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2})dxdy$$

chuyển sang tọa độ cực, ta được

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1 + \sqrt{1 - r^2} - r)r\,dr$$

$$= 2\pi.\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3} - \frac{1}{3}(1 - r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = 2\pi\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right) = \pi.$$

e) Vật thể được giới hạn ở phía trên bởi mặt phẳng $z = x + y$, ở phía dưới bởi mặt phẳng $z = 0$, xung quanh bởi mặt trụ $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$ $(x > 0, y > 0)$. Thể tích của nó bằng

$$V = \iint_D (x + y)dxdy,$$

D là miền trong mặt phẳng xOy, giới hạn bởi đường Lemnixcat $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$ $(x > 0, y > 0)$.

Chuyển sang tọa độ cực, phương trình đường lemnixcat là $r^2 = \sin 2\varphi$, do đó $r = \sqrt{\sin 2\varphi}$ $(0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2})$. Miền D' trong mặt

1 phẳng (r, φ) tương ứng với D được xác định bởi:

$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le r \le \sqrt{\sin 2\varphi}$$

Vậy

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt{\sin 2\varphi}} (\sin\varphi + \cos\varphi) r^2 dr =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\varphi + \cos\varphi)\frac{1}{3}(r^3)\Big|_0^{\sqrt{\sin 2\varphi}} d\varphi$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\varphi + \cos\varphi)\sin^{3/2} 2\varphi d\varphi .$$

Ta có

$\sin 2\varphi = 1 - (\sin\varphi - \cos\varphi)^2$, $(\sin\varphi + \cos\varphi)d\varphi = d(\sin\varphi - \cos\varphi)$.
Do đó nếu đặt $u = \sin\varphi - \cos\varphi$, ta được

$$V = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} (1-u^2)^{\frac{3}{2}} du = \frac{2}{3}\int_0^{1} (1-u^2)^{\frac{3}{2}} du$$

Bây giờ đổi biến số $u = \sin t$, ta có $du = \cos t dt$, vậy

$$V = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = \frac{2}{3}.\frac{3}{4}.\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}.$$

36. a) Những điểm trên giao tuyến của phần mặt nón $z^2 = x^2 + y^2$ ứng với $z \ge 0$ và mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$ có cao độ z thoả mãn phương trình $z = 1$. Vậy phương trình của hình chiếu xuống mặt phẳng xOy của giao tuyến ấy là:

$$x^2 + y^2 = 1 .$$

Gọi D là miền phẳng giới hạn bởi đường tròn đó. Phương trình của phần mặt nón ứng với $z \ge 0$ là:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Do đó

$$p = z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad q = z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Vậy diện tích phải tìm bằng

$$S = \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dxdy = \sqrt{2}\iint_D dxdy.$$

Nhưng $\iint_D dxdy$ = diện tích miền D = π. Vậy

$$S = \pi\sqrt{2}.$$

b) Ta có

$$z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \;\Rightarrow\; p = \frac{2x}{a},\; q = \frac{2y}{b},$$

$$1 + p^2 + q^2 = 1 + 4\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right).$$

Vậy diện tích của phần mặt parabôlôit $z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}$ nằm trong hình trụ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ bằng

$$S = \iint_D \sqrt{1 + 4\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)}\,dxdy,$$

trong đó D là miền trong mặt phẳng xOy, giới hạn bởi đường elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Đổi biến số

$$x = ar\cos\varphi, \quad y = br\sin\varphi.$$

Ta có

$$J = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -ar\sin\varphi \\ b\sin\varphi & br\cos\varphi \end{vmatrix} = abr.$$

1

Miền D' trong mặt phẳng (r, φ) tương ứng với D được xác định bởi các bất đẳng thức

$$0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le 1.$$

Vậy

$$S = ab\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1+4r^2}\,r\,dr = 2\pi ab.\frac{1}{8}.\frac{2}{3}(1+4r^2)^{3/2}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{\pi ab}{6}(5\sqrt{5}-1).$$

c) Phương trình của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ xác định một hàm số ẩn z(x, y). Lấy đạo hàm hai vế phương trình ấy đối với x, ta được:

$$2x + 2zp = 0 \Rightarrow p = -\frac{x}{z}.$$

Tương tự, ta được:

$$q = -\frac{y}{z}.$$

Do đó

$$1 + p^2 + q^2 = 1 + \frac{x^2+y^2}{z^2} = \frac{a^2}{z^2}.$$

Vì lí do đối xứng, diện tích của phần mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ nằm trong hình trụ $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ bằng 8 lần diện tích của phần của mặt ấy trong góc phần tám thứ nhất. Gọi D là diện tích của miền trong góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng xOy, giới hạn bởi đường lemnixcat $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$. Diện tích phải tìm bằng

$$S = 8\iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$$

chuyển sang tọa độ cực, phương trình của đường lemnixcat là $r^2 = a^2\cos 2\varphi$. Vậy

1

$$S = 8\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}}\, r dr = 8a\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1}\sqrt{a^2 - r^2} \right]_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi =$$

$$= 8a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \sqrt{2}\sin\varphi)\, d\varphi = 8a^2(\varphi + \sqrt{2}\cos\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 8a^2\left(\frac{\pi}{4} + 1 - \sqrt{2}\right)$$

d) Ta có

$$z = \frac{x^2 + y^2}{2a}, \quad p = \frac{x}{a}, \; q = \frac{y}{a}$$

$$1 + p^2 + q^2 = 1 + \frac{x^2 + y^2}{a^2} = \frac{a^2 + x^2 + y^2}{a^2}$$

Mặt trụ $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy$ nhận mặt phẳng $x = y$ làm mặt phẳng đối xứng. Gọi D là miền trong mặt phẳng xOy giới hạn bởi đường lemnixcat $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy$ ứng với $y \leqslant x$ và $x \geqslant 0$. Vì lí do đối xứng, diện tích phải tìm bằng

$$S = 4\iint_D \sqrt{\frac{a^2 + x^2 + y^2}{a^2}}\, dxdy$$

Chuyển sang tọa độ cực, phương trình đường $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$ là $r^2 = a^2\sin 2\varphi$, vậy

$$S = \frac{4}{a}\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} \sqrt{a^2 + r^2}\, r dr = \frac{4}{3a}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (a^2 + r^2)^{3/2}\Big|_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} d\varphi$$

$$= \frac{4a^2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[(1 + \sin 2\varphi)^{3/2} - 1 \right] d\varphi = \frac{4a^2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin\varphi + \cos\varphi)^3 d\varphi - \frac{4a^2}{3}\cdot\frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{4a^2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sqrt{2}\sin^3\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) d\varphi - \frac{\pi a^2}{3} =$$

$$= \frac{4a^2}{3}.2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}[\cos^2(\varphi+\frac{\pi}{4})-1]d\cos(\varphi+\frac{\pi}{4})-\frac{\pi a^2}{3} =$$

$$= \frac{4a^2}{3}.2\sqrt{2}\Big[\frac{1}{3}\cos^3(\varphi+\frac{\pi}{4})-\cos(\varphi+\frac{\pi}{4})\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{\pi a^2}{3} =$$

$$= \frac{8a^2\sqrt{2}}{3}(-\frac{1}{6\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}})-\frac{\pi a^2}{3} = \frac{a^2}{9}(20-3\pi)$$

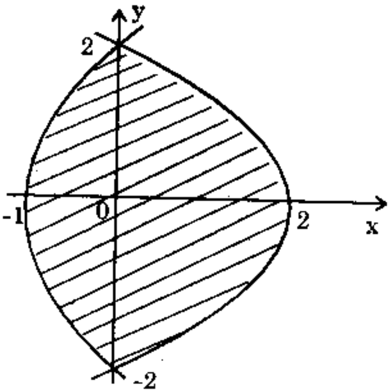
37. a) Bản phẳng giới hạn bởi các đường $y^2 = 4x + 4$, $y^2 = -2x + 4$ nhận ox làm trục đối xứng (hình 53), do đó nếu G là trọng tâm của nó thì $Y_G = 0$. Tính x_G, ta có

$$\iint_D dxdy = 2\int_0^2 dy\int_{\frac{1}{4}(y^2-4)}^{\frac{1}{2}(4-y^2)} dx =$$

$$= 2\int_0^2\Big(\frac{4-y^2}{2}-\frac{y^2-4}{4}\Big)dx =$$

$$= 2\int_0^2(3-\frac{3y^2}{4})dy =$$

$$= 6\Big[y-\frac{1}{12}y^3\Big]_0^2 = 8$$



Hình 53

$$\iint_D xdxdy = 2\int_0^2 dy\int_{\frac{1}{4}(y^2-4)}^{\frac{1}{2}(4-y^2)} xdx =$$

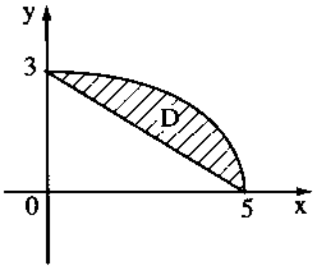
$$= \int_0^2\Big[\frac{1}{4}(4-y^2)^2-\frac{1}{16}(y^2-4)^2\Big]dy =$$

1

$$= \int_0^2 \left(\frac{3}{16}y^4 - \frac{3}{2}y^2 + 3\right)dy =$$

$$= \left[\frac{3}{16}.\frac{y^5}{5} - \frac{y^3}{2} + 3y\right]_0^2 = \frac{16}{5}.$$

Do đó $x_G = \frac{1}{8}.\frac{16}{5} = \frac{2}{5}$.



Hình 54

b) Ta có

$$\iint_D dxdy = \int_0^5 dx \int_{3\left(1-\frac{x}{5}\right)}^{\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}} dy =$$

$$= \int_0^5 \left(\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2} - 3 + \frac{3x}{5}\right)dx =$$

$$= \frac{3}{5}\int_0^5 \sqrt{25-x^2}\,dx + \left(-3x + \frac{3x^2}{10}\right)\Bigg|_0^5.$$

Trong tích phân ở vế phải, ta đổi biến số $x = 5\sin t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, ta được

$$\iint_D dxdy = \frac{3}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 25\cos^2 t\,dt - \frac{15}{2} = \frac{3}{5}.25.\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2} - \frac{15}{2} = \frac{15}{4}(\pi - 2).$$

Mặt khác

$$\iint_D xdxdy = \int_0^5 xdx \int_{3(1-\frac{x}{5})}^{\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}} dy = \int_0^5 \left[\frac{3}{5}x\sqrt{25-x^2} - 3x(1-\frac{x}{5})\right]dx =$$

$$= \left[-\frac{3}{5}.\frac{1}{2}.\frac{2}{3}(25-x^2)^{3/2} - \frac{3x^2}{2} + \frac{x^3}{5}\right]_0^5 = (25 - \frac{75}{2} + 25) = \frac{25}{2}.$$

$$\iint\limits_D y\,dxdy = \int_0^5 dx \int_{3\left(1-\frac{x}{5}\right)}^{\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}} y\,dy = \int_0^5 \frac{1}{2}\left[\frac{9}{25}(25-x^2) - 9\left(1-\frac{x}{5}\right)^2\right]dx$$

$$= \frac{9}{25}\int_0^5 (5x - x^2)dx = \frac{9}{25}\left(\frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^5$$

$$= \frac{9}{25}\left(\frac{125}{2} - \frac{125}{3}\right) = \frac{9}{25}\cdot\frac{125}{6} = \frac{15}{2}.$$

Vậy $\quad x_G = \frac{25}{2}\cdot\frac{4}{15(\pi-2)} = \frac{2}{3(\pi-2)}.$

$$y_G = \frac{15}{2}\cdot\frac{4}{15(\pi-2)} = \frac{10}{\pi-2}$$

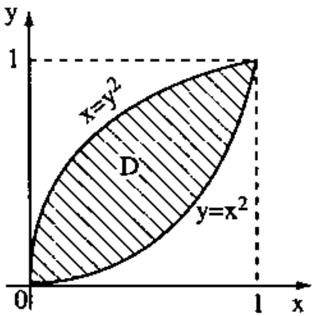
c) Gọi D là bản phẳng đồng chất giới hạn bởi các đường parabôn $y^2 = x$, $x^2 = y$ (h.55), ta có :

$$\iint\limits_D dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy =$$

$$= \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

$$\iint\limits_D y\,dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} y\,dy =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}(x - x^4)dx = \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^5}{10}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{20}$$



Hình 55

Do đó $y_G = \frac{3}{20}.3 = \frac{9}{20}$.

Vì D nhận đường y = x làm trục đối xứng nên

$$x_G = y_G = \frac{9}{20}.$$

d) Bản phẳng D giới hạn bởi các đường tròn $y = \sqrt{2x - x^2}$ và đường thẳng y = 0 nhận đường x = 1 làm trục đối xứng (h. 56), do đó $x_G = 1$. Tính y_G, ta có

$$\iint_D dxdy = \frac{\pi}{2},$$

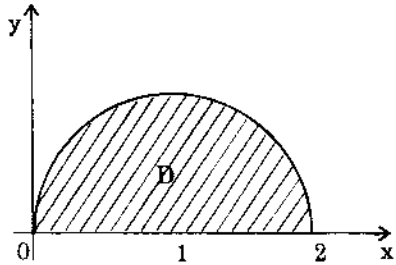
đó là diện tích của nửa hình tròn có bán kính 1. Ta lại có

$$\iint_D ydxdy = \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} ydy =$$

$$\int_0^2 \frac{1}{2}(2x - x^2)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)\Big|_0^2 = \frac{2}{3}$$

Do đó

$$y_G = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{4}{3\pi}$$



Hình 56

e) Bản phẳng D giới hạn bởi đường hình tim $r = a(1 + \cos\varphi)$, nhận trục Ox làm trục đối xứng (h.57). Do đó

$$y_G = 0.$$

Tính x_G , ta có

$$\iint_D dxdy = 2\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{a(1+\cos\varphi)} rdr =$$

$$= 2\int_0^{\pi} \frac{1}{2}a^2(1 + \cos\varphi)^2 d\varphi = \int_0^{\pi} 4a^2\cos^4\frac{\varphi}{2}d\varphi =$$

$$= 8a^2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi a^2}{2}$$

1 Mặt khác

$$\iint\limits_D xdxdy = 2\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{a(1+\cos\varphi)} r^2\cos\varphi dr = 2\int_0^{\pi} \frac{1}{3}a^3(1+\cos\varphi)^3\cos\varphi d\varphi$$

$$= \frac{2a^3}{3}\int_0^{\pi} 8\cos^6\frac{\varphi}{2}\left(2\cos^2\frac{\varphi}{2} - 1\right)d\varphi$$

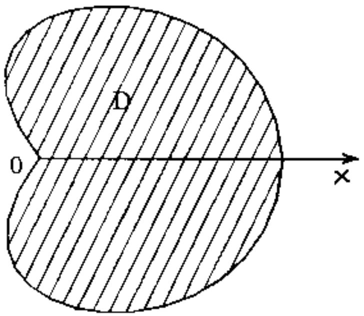
Đổi biến số $t = \dfrac{\varphi}{2}$, ta được

$$\iint\limits_D xdxdy = \frac{4a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (16\cos^8 t - 8\cos^6 t)dt =$$

$$= \frac{4a^3}{3}\left(16\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - 8\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \frac{5\pi a^3}{4}.$$

Vậy

$$x_G = \frac{5\pi a^3}{4}\cdot\frac{2}{3\pi a^2} = \frac{5a}{6}.$$



Hình 57

f) Chuyển sang tọa độ cực, bản phẳng D đã cho giới hạn bởi đường $r^2 = a^2\cos 2\varphi$, $-\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$. Nó nhận Ox làm trục đối xứng, do đó

$$y_G = 0$$

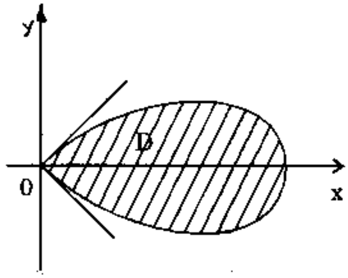
Tính x_G, ta có

$$\iint\limits_D dxdy = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} rdr =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\varphi d\varphi = a^2\frac{\sin 2\varphi}{2}\Big|_0^{\pi/4} = \frac{a^2}{2}.$$

Mặt khác

$$\iint_D xdxdy = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} r^2\cos\varphi dr =$$



$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a^3}{3} (\cos 2\varphi)^{3/2} \cos\varphi d\varphi$$

Hình 58

$$= \frac{2a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - 2\sin^2\varphi)^{3/2} \cos\varphi \, d\varphi = \frac{2a^3}{3} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (1 - 2u^2)^{3/2} du$$

trong đó $u = \sin\varphi$. Lại đổi biến số $u\sqrt{2} = \sin t$, $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$, ta được

$$\iint_D xdxdy = \frac{2a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t dt =$$

$$= \frac{a^3\sqrt{2}}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = \frac{a^3\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi\sqrt{2}a^3}{16}.$$

Vậy

$$x_G = \frac{\pi\sqrt{2}a^3}{16} \cdot \frac{2}{a^2} = \frac{\pi a\sqrt{2}}{8}.$$

38. Ta có

$$\iiint_V zdxdydz = \int_0^{\frac{1}{4}} dx \int_x^{2x} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} zdz =$$

1 $$= \int_0^{\frac{1}{4}} dx \int_x^{2x} \frac{1}{2}(1 - x^2 - y^2)\, dy = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{4}} \left(y - yx^2 - \frac{1}{3}y^3\right) \Big|_{y=x}^{y=2x} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{4}}(2x - 2x^3 - \frac{8}{3}x^3 - x + x^3 + \frac{1}{3}x^3)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{4}}(x - \frac{10}{3}x^3)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{6}x^4\right]_0^{\frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{32} - \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{256}\right) = \frac{43}{3072}.$$

39. a) Ta có

$$\iiint\limits_V (1 - x - y - z)dxdydz = \int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{1-x-y}(1 - x - y - z)dz =$$

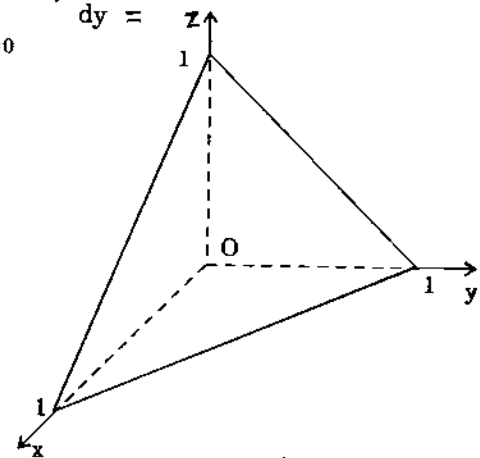
$$= \int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left[(1 - x - y)\,z - \frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=1-x-y} dy =$$

$$= \int_0^1 dx\int_0^{1-x}\frac{(1 - x - y)^2}{2}\,dy =$$

$$= \int_0^1 -\frac{(1 - x - y)^3}{2\,.\,3}\Big|_{y=0}^{y=1-x} dx =$$

$$= \frac{1}{3!}\int_0^1 (1 - x)^3\,dx =$$

$$= -\frac{1}{3!}\,\frac{(1-x)^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4!}.$$



Hình 59

b) Trước hết, xét tích phân

$$I_\alpha = \int_0^a x(a - x)^\alpha dx\,,\ \alpha > 0.$$

Đổi biến số $y = a - x$, ta được

$$I_\alpha = \int_0^a (a - y)y^\alpha dy = \left(a\frac{y^{\alpha+1}}{\alpha + 1} - \frac{y^{\alpha+2}}{\alpha + 2}\right)\Big|_0^a =$$

1 $$= a^{\alpha+2}\left(\frac{1}{\alpha + 1} - \frac{1}{\alpha + 2}\right) = \frac{a^{\alpha+2}}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)}.$$

Ta có

$$I = \iiint\limits_V xyz(1-x-y-z)dxdydz$$

$$= \int_0^1 xdx \int_0^{1-x} ydy \int_0^{1-x-y} z(1-x-y-z)dz.$$

Nhưng theo kết quả trên

$$\int_0^{1-x-y} z(1-x-y-z)dz = \frac{(1-x-y)^3}{2.3}.$$

Vậy

$$I = \int_0^1 xdx \int_0^{1-x} \frac{1}{3!} y(1-x-y)^3 dy =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{3!}\frac{1}{4.5}x(1-x)^5 dx = \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{4.5}\cdot\frac{1}{6.7} = \frac{1}{7!}.$$

40. Ta có

$$I = \iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz = \int_0^a dx \int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} dy \int_0^{c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)} (x^2+y^2+z^2)dz =$$

$$= \int_0^a dx \int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} \left[(x^2+y^2)z + \frac{1}{3}z^3\right]_{z=0}^{z=c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)} dy =$$

$$= \int_0^a dx \int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} \left[c(x^2+y^2)\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right) + \frac{1}{3}c^3\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^3\right]dy$$

$$= \int_0^a dx \int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} \left[cx^2\left(1-\frac{x}{a}\right) + cy^2\left(1-\frac{x}{a}\right) - \frac{c}{b}(x^2y+y^3) + \frac{c^3}{3}\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^3\right]dy$$

$$= \int_0^a \left[cx^2\left(1-\frac{x}{a}\right)y + \frac{1}{3}cy^3\left(1-\frac{x}{a}\right) - \frac{c}{b}\left(\frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}y^4\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{12}c^3b\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^4 \right]_{y=0}^{y=b\left(1-\frac{x}{a}\right)} dx =$$

$$= \int_0^a \left[bcx^2\left(1-\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{1}{3}cb^3\left(1-\frac{x}{a}\right)^4 - \frac{bc}{2}x^2\left(1-\frac{x}{a}\right)^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4}cb^3\left(1-\frac{x}{a}\right)^4 + \frac{c^3b}{12}\left(1-\frac{x}{a}\right)^4 \right] dx =$$

$$= \frac{bc}{2}\int_0^a x^2\left(1-\frac{x}{a}\right)^2 dx + \frac{bc^3+cb^3}{12}\int_0^a \left(1-\frac{x}{a}\right)^4 dx .$$

Nhưng

$$\int_0^a x^2\left(1-\frac{x}{a}\right)^2 dx = \int_0^a \left(x^2 - \frac{2x^3}{a} + \frac{x^4}{a^2}\right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^4}{4a} + \frac{x^5}{5a^2}\right)\Bigg|_0^a = \frac{a^3}{30},$$

$$\int_0^a \left(1-\frac{x}{a}\right)^4 dx = -\frac{a}{5}\left(1-\frac{x}{a}\right)^5\Bigg|_0^a = \frac{a}{5}.$$

Vậy
$$I = \frac{a^3bc + abc^3 + ab^3c}{60}$$
$$= \frac{abc}{60}(a^2+b^2+c^2).$$

41. V là miền giới hạn bởi mặt parabôlôit tròn xoay $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ và mặt phẳng $z = a$ $(a > 0)$. Miền V chỉ nằm về phía $z > 0$. Vì tính đối xứng của miền V và vì hàm số dưới dấu tích phân $|xyz|$ là chẵn đối với x, chẵn đối với y, nên nếu gọi V_1 là

1

phần của miền V nằm trong góc phần tám thứ nhất, ta có:

$$I = 4\iiint\limits_{V_1}|xyz|dxdydz = 4\iiint\limits_{V_1}xyzdxdydz.$$

Phương trình của hình chiếu xuống mặt phẳng xOy của giao tuyến của hai mặt $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ và $z = a$ là $x^2 + y^2 = 2a$.

Vậy hình chiếu xuống mặt phẳng xOy của miền V_1 là miền D_1 giới hạn bởi đường tròn $x^2 + y^2 = 2a$ nằm trong góc phần tư thứ nhất. Do đó

$$I = 4\iint\limits_{D_1}xydxdy\int\limits_{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}^{a}zdz = 4\iint\limits_{D_1}xy\frac{1}{2}\left[a^2 - \frac{(x^2+y^2)^2}{4}\right]dxdy.$$

Chuyển sang tọa độ cực, ta có

$$I = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{2a}}\frac{1}{2}\left(a^2 - \frac{r^4}{4}\right)r^3dr.$$

Nhưng

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\sin\varphi = \frac{1}{2}\sin^2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2},$$

$$\int\limits_0^{\sqrt{2a}}\left(a^2 - \frac{r^4}{4}\right)r^3dr = \left(a^2\frac{r^4}{4} - \frac{r^8}{32}\right)\Big|_0^{\sqrt{2a}} = \frac{a^4}{2}.$$

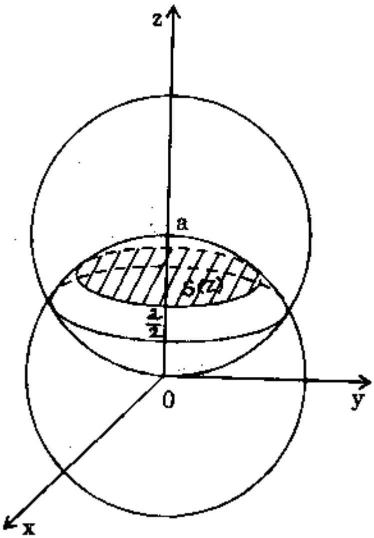
Vậy

$$I = 4.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{a^4}{2} = \frac{a^4}{2}.$$

42. Những điểm trên giao tuyến của hai mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$, $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ có cao độ thỏa mãn phương trình $2az = a^2$, do đó $z = \frac{a}{2}$. Mặt phẳng $z = \frac{a}{2}$ chia miền V thành hai miền:

$V_1 = \{(x, y, z) \in V: z \ge \frac{a}{2}\}$;

$V_2 = \{(x, y, z) \in V: z < \frac{a}{2}\}$;



Hình 60

Ta có:

$$I = \iiint\limits_V z^2 dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{V_1} z^2 dxdydz + \iiint\limits_{V_2} z^2 dxdydz$$

$= I_1 + I_2$.

Để tính I_1, ta gọi S(z) là thiết diện của miền V_1 với mặt phẳng đi qua điểm (0, 0, z) vuông góc với trục Oz.

Ta có

$$I_1 = \int_{\frac{a}{2}}^{a} z^2 dz \iint\limits_{S(Z)} dxdy$$

Nhưng $\iint\limits_{S(Z)} dxdy$ = diện tích $S(z) = \pi(x^2 + y^2) = \pi(a^2 - z^2)$.

Do đó

$$I_1 = \pi\int_{\frac{a}{2}}^{a} z^2(a^2 - z^2)dz = \pi\left(\frac{a^2z^3}{3} - \frac{z^5}{5}\right)\Bigg|_{\frac{a}{2}}^{a} = \frac{47a^5}{480}\pi .$$

Tương tự

$$I_2 = \pi\int_0^{\frac{a}{2}} z^2(2az - z^2)dz = \pi\left(\frac{az^4}{2} - \frac{z^5}{5}\right)\Bigg|_0^{\frac{a}{2}} = \frac{a^5}{40}\pi .$$

Vậy $\qquad I = I_1 + I_2 = \frac{59a^5}{480}\pi .$

43. Thực hiện phép đổi biến số

$$x = u, \quad y = v, \quad z = \sqrt{3}w .$$

Đó là một song ánh biến miền V xác định bởi bất đẳng thức $\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{3a^2}\le 1$ thành hình cầu V' trong không gian (u, v, w) xác định bởi $u^2 + v^2 + w^2 \le a^2$. Ta có

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \sqrt{3} .$$

Vậy

$$I = \iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz = \sqrt{3}\iiint\limits_{V'} (u^2+v^2+3w^2)dudvdw .$$

Chuyển sang tọa độ cầu, ta được:

$$I = \sqrt{3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi}(\sin^2\theta + 3\cos^2\theta)\sin\theta d\theta \int_0^a r^4 dr .$$

Ta có

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi , \quad \int_0^a r^4 dr = \frac{a^5}{5} ,$$

$$\int_0^{\pi}(\sin^2\theta + 3\cos^2\theta)\sin\theta d\theta = -\int_0^{\pi}(1+2\cos^2\theta)d(\cos\theta) =$$

$$= -\left(\cos\theta + \frac{2}{3}\cos^3\theta\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{10}{3} .$$

Do đó

$$I = \sqrt{3}.2\pi.\frac{10}{3}.\frac{a^5}{5} = \frac{4\pi}{\sqrt{3}}a^5 .$$

44. Đổi biến số x = u, y = v, z − 2 = w. Đó là một song ánh biến hình trụ đã cho V thành hình trụ V' trong không gian (u, v, w) xác định bởi:

$$u^2 + v^2 \le 1, \qquad -3 \le v \le -1$$

Vì J = 1, nên ta có

$$I = \iiint\limits_{V} \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-2)^2}} = \iiint\limits_{V'} \frac{dudvdw}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}$$

Chuyển sang tọa độ trụ, ta có

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 rdr \int_{-3}^{-1} \frac{dw}{\sqrt{r^2 + w^2}} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \ln(w + \sqrt{r^2 + w^2}) \Big|_{w=-3}^{w=-1} rdr =$$

$$= 2\pi \Big[\int_0^1 \ln(\sqrt{r^2 + 1} - 1)rdr - \int_0^1 \ln(\sqrt{r^2 + 9} - 3)rdr = 2\pi (I_1 - I_2).$$

Khi $r \to 0$, $\ln(\sqrt{r^2 + 1} - 1) \to -\infty$, nhưng ta sẽ chứng minh rằng $r \ln(\sqrt{r^2 + 1} - 1) \to 0$. Thật vậy, khi $r \to 0$, ta có

$$\sqrt{r^2 + 1} - 1 = 1 + \frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{8} r^4 + 0(r^4) - 1 =$$

$$= \frac{1}{2} r^2 (1 - \frac{1}{4} r^2 + 0(r^2)).$$

Do đó

$$\ln(\sqrt{1 + r^2} - 1) = 2\ln r - \ln 2 + \ln(1 - \frac{1}{4} r^2 + 0(r^2)) =$$

$$= 2\ln r - \ln 2 - \frac{1}{4} r^2 + 0(r^2).$$

$$r \ln(\sqrt{1 + r^2} - 1) = 2r\ln r - r\ln 2 - \frac{1}{4} r^3 + 0(r^3)$$

Suy ra

$$\lim_{r \to 0} r\ln(\sqrt{1 + r^2} - 1) = 0.$$

Vậy tích phân I_1 có nghĩa. Cũng như vậy với tích phân I_2.

Để tính I_1, ta đổi biến số $\sqrt{r^2+1} = t$, do đó $r^2+1 = t^2$, rdr = tdt. Ta được

$$\int \ln(\sqrt{r^2+1}-1)rdr = \int t\ln(t-1)dt = \frac{t^2}{2}\ln(t-1) - \frac{1}{2}\int \frac{t^2}{t-1}dt =$$

$$= \frac{t^2}{2}\ln(t-1) - \frac{1}{2}\int (t+1+\frac{1}{t-1})dt =$$

$$= \frac{t^2}{2}\ln(t-1) - \frac{t^2}{4} - \frac{t}{2} - \frac{1}{2}\ln(t-1) + C =$$

$$= \frac{t^2-1}{2}\ln(t-1) - \frac{t^2}{4} - \frac{t}{2} + C.$$

Do đó

$$I_1 = \left[\frac{t^2-1}{2}\ln(t-1) - \frac{t^2}{4} - \frac{t}{2}\right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}-1) - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1).$$

Cũng như vậy, để tính I_2, ta đặt $\sqrt{r^2+9} = t$. Ta có

$$\int \ln(\sqrt{r^2+9}-3)rdr = \int t\ln(t-3)dt = \frac{t^2}{2}\ln(t-3) - \frac{1}{2}\int \frac{t^2}{t-3}dt =$$

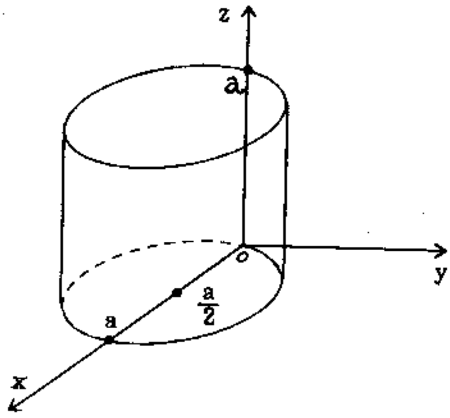
$$= \frac{t^2}{2}\ln(t-3) - \frac{1}{2}\int (t+3+\frac{9}{t-3})dt =$$

$$= \frac{t^2}{2}\ln(t-3) - \frac{t^2}{4} - \frac{3t}{2} - \frac{9}{2}\ln(t-3) + C =$$

$$= \frac{t^2-9}{2}\ln(t-3) - \frac{t^2}{4} - \frac{3t}{2} + C.$$

Vậy

$$I_2 = \frac{1}{2}\ln(\sqrt{10}-3) - \frac{1}{4} - \frac{3}{2}(\sqrt{10}-3).$$



Hình 61

Do đó

$$I = 2\pi(I_1 - I_2) =$$

$$= \pi\left(\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{10}-3} + 3\sqrt{10} - 8 - \sqrt{2}\right).$$

45. V là miền hình trụ cho ở hình 61. Hình chiếu của nó xuống mặt phẳng xOy là miền tròn giới hạn bởi đường tròn $x^2 + y^2 = ax$ có tâm tại điểm $(\frac{a}{2}, 0)$, có bán kính $\frac{a}{2}$. Phương trình của đường tròn ấy trong hệ tọa độ cực là $r = a\cos\varphi$. Gọi V_1 là phần của miền V ứng với $y \geq 0$. Vì miền V nhận mặt phẳng $y = 0$ làm mặt phẳng đối xứng và vì hàm số dưới dấu tích phân là chẵn đối với y, ta có:

$$I = \iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+a^2)^2} = 2\iiint\limits_{V_1} \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+a^2)^2}.$$

Chuyển sang tọa độ trụ, ta được:

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} \frac{rdr}{(r^2+a^2)^2} \int_0^a dz.$$

Ta có $\int_0^a dz = a$. Để tính $\int_0^{a\cos\varphi} \frac{rdr}{(r^2+a^2)^2}$, ta đổi biến số $r^2 + a^2 = u$, do đó $du = 2rdr$, vậy

$$\int_a^{a\cos\varphi} \frac{rdr}{(r^2+a^2)^2} = \frac{1}{2}\int_{a^2}^{a^2(1+\cos^2\varphi)} \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{2u}\Bigg|_{a^2}^{a^2(1+\cos^2\varphi)} =$$

$$= \frac{1}{2a^2}\left(1 - \frac{1}{1+\cos^2\varphi}\right).$$

Do đó

$$I = \frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1 - \frac{1}{1+\cos^2\varphi}\right)d\varphi = \frac{\pi}{2a} - \frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{1+\cos^2\varphi} .$$

Hàm số dưới dấu tích phân ở vế phải là chẵn đối với $\cos\varphi$, ta đổi biến số $t = \mathrm{tg}\varphi$, do đó

$$\varphi = \mathrm{arctg}t,\ d\varphi = \frac{dt}{1+t^2},\ \cos^2\varphi = \frac{1}{1+t^2} .$$

Vậy

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{1+\cos^2\varphi} = \int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} .$$

Cuối cùng ta được

$$I = \frac{\pi}{2a}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

46. V là hình cầu tâm O, bán kính R. Chuyển sang tọa độ cầu, ta được:

$$I = \iiint\limits_V z^2dxdydz = \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta d\theta\int_0^R r^4dr .$$

Nhưng

$$\int_0^{2\pi}d\varphi = 2\pi\ ;\ \int_0^R r^4dr = \frac{R^5}{5} .$$

Đặt $\cos\theta = u$, ta được:

$$\int_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta d\theta = \int_{-1}^{1}u^2du = 2\int_0^1 u^2du = \frac{2}{3} .$$

Vậy

$$I = 2\pi.\frac{2}{3}.\frac{R^5}{5} = \frac{4\pi R^5}{15}.$$

47. V là hình elipxôit. Gọi V_1 là phần của V nằm **trong góc** phần tám thứ nhất. Dễ thấy rằng

$$I = \iiint\limits_V x^2y^2z^2dxdydz = 8\iiint\limits_{V_1} x^2y^2z^2dxdydz.$$

Đổi biến số $x = au, \quad y = bv, \quad z = cw.$

Đó là một song ánh biến miền V_1 thành miền V'_1 là một phần tám hình cầu đơn vị, nằm ở góc phần tám thứ nhất của không gian (u, v, w). Định thức Jacobi của phép biến đổi trên bằng abc, nên

$$I = 8\iiint\limits_{V_1} a^3b^3c^3u^2v^2w^2dudvdw$$

Chuyển sang tọa độ cầu, ta được:

$$I = 8a^3b^3c^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r^8\sin^5\theta\cos^2\theta\cos^2\varphi\sin^2\varphi dr$$

$$= 8a^3b^3c^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\sin^2\varphi d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\theta\cos^2\theta d\theta\int_0^1 r^8dr.$$

Ta có $\displaystyle\int_0^1 r^8dr = \frac{1}{9}$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\theta\cos^2\theta d\theta = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\theta)^2\cos^2\theta d(\cos\theta) =$$

$$= \int_0^1(1-2u^2+u^4)u^2du = \int_0^1(u^6-2u^4+u^2)du =$$

$$= \left(\frac{u^7}{7} - 2\frac{u^5}{5} + \frac{u^3}{3} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{1}{7} - \frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{8}{105},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 \varphi - \cos^4 \varphi) d\varphi = \frac{1}{2} . \frac{\pi}{2} - \frac{3}{4} . \frac{1}{2} . \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{16} .$$

Do đó

$$I = 8a^3b^3c^3 . \frac{1}{9} . \frac{8}{105} . \frac{\pi}{16} = \frac{4\pi}{945} a^3b^3c^3 .$$

48. Xét tích phân

$$I = \iiint_V (xy + yz + zx) dxdydz$$

trong đó V là hình cầu tâm O, bán kính R. Trong tích phân ấy, nếu thay x bởi –x, giữ y, z không đổi thì phép biến đổi ấy là một song ánh biến V lên chính nó.

Mặt khác giá trị tuyệt đối của định thức Jacobi của phép biến đổi ấy bằng 1. Do đó:

$$I = \iiint_V (-xy + yz - zx) dxdydz$$

Tương tự như vậy nếu thay y bằng – y mà giữ x, z không đổi, rồi thay z bằng –z mà giữ x, y không đổi, ta có:

$$I = \iiint_V (-xy - yz + zx) dxdydz ,$$

$$I = \iiint_V (xy - yz - zx) dxdydz .$$

1 Cộng bốn đẳng thức trên lại, ta được 4I = 0

Do đó I = 0.

49. Hàm số f xác định và liên tục trên đoạn [0, 1]. Giả sử **F** là một hàm số xác định trên [0, 1] bởi đẳng thức

$$F(u) = \int_0^u f(t)dt \ .$$

Ta có:

$$I = \iiint_V f(x)f(y)f(z)dxdydz = \int_0^1 f(x)dx \int_x^1 f(y)dy \int_x^y f(z)dz \ .$$

Với x cố định $\in [0, 1]$, ta có

$$\int_x^1 f(y)dy \int_x^y f(z)dz = \int_x^1 f(y)[F(y) - F(x)]dy =$$

$$= \int_x^1 F'(y)[F(y) - F(x)]dx = \left[\frac{1}{2}(F(y))^2 - F(x)F(y)\right]_{y=x}^{y=1}$$

$$= \frac{1}{2}[F(x) - F(1)]^2 .$$

Do đó

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 [F(x) - F(1)]^2 f(x)dx = \frac{1}{6}[F(x) - F(1)]^3\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{6}[F(1) - F(0)]^3 = \frac{1}{6}\left(\int_0^1 f(t)dt\right)^3 .$$

50. Gọi V là vật thể giới hạn bởi các mặt parabôlôit tròn xoay $z = x^2 + y^2$, $z = 2(x^2 + y^2)$, mặt phẳng $y = x$ và mặt trụ $y = x^2$. Hình chiếu xuống mặt phẳng xOy của miền V là miền giới hạn bởi đường thẳng $y = x$ và đường parabôn $y = x^2$, hai đường này giao nhau tại $x = 0$ và $x = 1$. Vậy miền V được xác định bởi các bất đẳng thức

1

$$0 \le x \le 1, \quad x^2 \le y \le x, \quad x^2 + y^2 \le z \le 2(x^2 + y^2) .$$

Do đó thể tích của miền V bằng

$$\iiint\limits_V dxdydz = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} dy \int_{x^2+y^2}^{2(x^2+y^2)} dz = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} (x^2+y^2)dy =$$

$$= \int_0^1 \left(x^2y + \frac{1}{3}y^3 \right)\Bigg|_{y=x^2}^{y=x} dx = \int_0^1 \left(\frac{4}{3}x^3 - x^4 - \frac{1}{3}x^6 \right) dx =$$

$$= \left(\frac{4}{12}x^4 - \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{21}x^7 \right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{35}.$$

b) Gọi V là vật thể giới hạn bởi mặt parabôlôit tròn xoay $z = x^2 + y^2$ và mặt nón tròn xoay $z^2 = x^2 + y^2$. Những điểm thuộc giao tuyến của hai mặt ấy có cao độ z thoả mãn phương trình $z^2 = z$ tức là $z = 0$, $z = 1$. Vậy hình chiếu của giao tuyến của hai mặt ấy xuống mặt phẳng xOy có phương trình là $x^2 + y^2 = 1$. Vật thể V lại nhận các mặt phẳng tọa độ $x = 0$, $y = 0$ làm mặt phẳng đối xứng. Do đó, chuyển sang tọa độ trụ để tính thể tích của vật thể V, ta được:

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 rdr \int_{r^2}^{r} dz = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 (r - r^2)rdr =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi . \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4} \right)\Bigg|_0^1 = 4.\frac{\pi}{2}.\frac{1}{12} = \frac{\pi}{6}.$$

c) Gọi V là vật thể xác định bởi các bất đẳng thức

$$0 \le \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \le 1,\ -h \le z \le h.$$

1

Thể tích của vật thể ấy bằng

$$I = \iiint\limits_V dxdydz = \int_{-h}^{h} dz \iint\limits_{S(z)} dxdy$$

trong đó S(z) là thiết diện của vật thể V bởi mặt phẳng đi qua điểm (0, 0, z) vuông góc với trục Oz. Hình chiếu của S(z) xuống mặt phẳng xOy là miền xác định bởi

$$\frac{z^2}{c^2} \leqslant \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1 + \frac{z^2}{c^2}$$

tức là miền nằm giữa hai đường elip

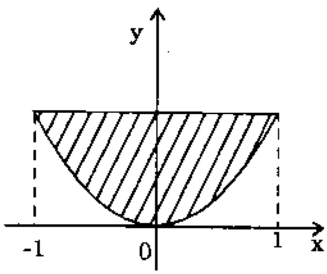
$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1 + \frac{z^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1 + \frac{z^2}{c^2}}\right)^2} = 1 \quad \text{và} \quad \frac{x^2}{\left(\frac{az}{c}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\frac{z}{c}\right)^2} = 1 .$$

Do đó diện tích của S(z) bằng $\pi ab(1 + \frac{z^2}{c^2}) - \pi ab\frac{z^2}{c^2} = \pi ab.$

Vậy thể tích của vật thể V bằng $I = \int_{-h}^{h} \pi abdz = 2\pi abh$.

d) Gọi V là vật thể xác định bởi $0 \leqslant z \leqslant x^2 + y^2, x^2 \leqslant y \leqslant 1.$ Hình chiếu của miền V xuống mặt phẳng xOy là miền giới hạn bởi các đường $y = x^2$ và $y = 1$ (h.62)

Vì lí do đối xứng, nếu gọi V_1 là phần của V nằm về phía x > 0, thể tích của vật thể V bằng



Hình 62

$$2\int_0^1 dx \int_{x^2}^1 dy \int_0^{x^2+y^2} dz =$$

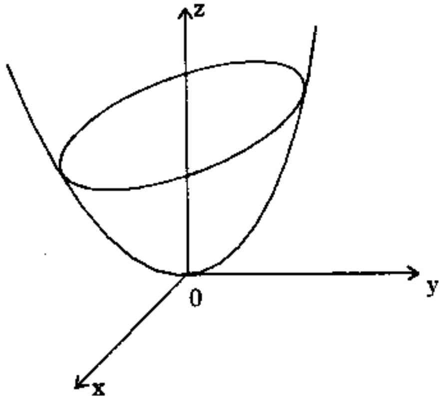
$$= 2\int_0^1 dx \int_{x^2}^1 (x^2+y^2)\, dy = 2\int_0^1 (x^2y + \frac{1}{3}y^3)\Big|_{y=x^2}^{y=1} dx =$$

$$= 2\int_0^1 (x^2 - x^4 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x^6)\, dx =$$

$$= 2\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x}{3} - \frac{x^7}{21}\right)\Big|_0^1 = 2\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{21}\right) = \frac{88}{105}.$$

e) Gọi V là vật thể giới hạn bởi mặt parabôlôit $z = \frac{1}{a}(x^2 + 2y^2)$ và mặt phẳng $z = y + a$ (h. 63). Phương trình của hình chiếu của giao tuyến của hai mặt ấy xuống mặt phẳng xOy là

$$x^2 + 2y^2 = ay + a^2 \text{ hay } x^2 + 2(y - \frac{a}{4})^2 = \frac{9a^2}{8}$$



Hình 63

Do đó hình chiếu của vật thể V xuống mặt phẳng xOy là miền D giới hạn bởi đường elip đó. Thể tích của vật thể V bằng

$$I = \iiint\limits_V dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{\frac{1}{a}(x^2+2y^2)}^{y+a} dz = \iint\limits_D [y+a - \frac{1}{a}(x^2+2y^2)dxdy \ .$$

Thực hiện phép đổi biến số

$$x = u, \quad \sqrt{2}\left(y - \frac{a}{4}\right) = v .$$

Đó là một song ánh biến miền D lên miền tròn mặt phẳng (u, v) xác định bởi $u^2 + v^2 \le \dfrac{9a^2}{8}$. Định thức Jacobi của phép biến đổi ấy bằng

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} .$$

Do đó

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \iint\limits_{D'} \left[\frac{v}{\sqrt{2}} + \frac{5a}{4} - \frac{1}{a}\left(u^2 + \frac{a^2}{8} + v^2 + \frac{av}{\sqrt{2}} \right) \right] dudv$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \iint\limits_{D'} \left[\frac{9a}{8} - \frac{1}{a}(u^2 + v^2) \right] dudv$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} . \frac{9a}{8} . \pi . \frac{9a^2}{8} - \frac{1}{a\sqrt{2}} \iint\limits_{D'} (u^2 + v^2) dudv$$

chuyển sang tọa độ cực, ta được:

$$\iint\limits_{D'} (u^2+v^2)dudv = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{3a}{2\sqrt{2}}} r^3 dr = 2\pi . \frac{r^4}{4}\Bigg|_0^{\frac{3a}{2\sqrt{2}}} = 2\pi . \frac{1}{4} . \frac{81a^4}{64} .$$

Do đó

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{81}{64}.\pi a^3\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{3^4}{\sqrt{2}.2^7}\pi a^3.$$

f) Gọi V là vật thể giới hạn bởi các mặt phẳng

$$x + y + z = \pm 3, \quad x + 2y - z = \pm 1, \quad x + 4y + z = \pm 2.$$

Thể tích của nó bằng $\quad I = \iiint\limits_V dxdydz.$

Thực hiện phép đổi biến số

$$u = x + y + z, \quad v = x + 2y - z, \quad w = x + 4y + z$$

đó là một song ánh biến miền V lên miền V' trong không gian (u, v, w) xác định bởi

$$-3 \le u \le 3, \quad -1 \le v \le 1, \quad -2 \le w \le 2.$$

Ta có:

$$\frac{D(u, v w)}{D(x, y, z)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 6 - 2 + 2 = 6.$$

Do đó

$$\frac{D(x, y\ z)}{D(u, v, w)} = \frac{1}{6}$$

Vậy

$$I = \frac{1}{6}\iiint\limits_{V'} du\,dv\,dw = \frac{1}{6}.6\,.2.4 = 8\ .$$

51. a) Vật thể đồng chất V giới hạn bởi mặt nón $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ và mặt phẳng $z = c$ nhận trục Oz làm trục đối xứng. Do đó trọng tâm G của nó nằm trên Oz, vậy $x_G = y_G = 0$. Để tính z_G, ta phải tính các tích phân $\iiint\limits_V dx\,dy\,dz$, $\iiint\limits_V z\,dx\,dy\,dz$.

Phương trình hình chiếu của giao tuyến của hai mặt xuống mặt phẳng xOy là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

Vậy hình chiếu của vật thể V xuống mặt phẳng xOy là miền giới hạn bởi đường elip ấy. Thực hiện phép đổi biến số

$$x = au, \qquad y = bv, \qquad z = w$$

rồi chuyển qua tọa độ trụ để tính hai tích phân trên, ta được

$$\iiint\limits_V dxdydz = ab\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^1 rdr\int_{cr}^{c} dw = 2\pi ab\int_0^1 c\,(1-r)\,rdr$$

$$= 2\pi abc\int_0^1 (r - r^2)\,dr = 2\,\pi\,abc\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{3}abc$$

$$\iiint\limits_V zdxdydz = ab\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 rdr\int_{cr}^{c} wdw = 2\pi ab\int_0^1 \frac{c^2}{2}(1-r^2)\ rdr =$$

$$= \pi abc^2\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}\pi abc^2$$

Vậy

$$z_G = \frac{1}{4}\pi\, abc^2\,\frac{3}{\pi abc} = \frac{3c}{4}\,.$$

b) Vật thể V giới hạn bởi các mặt $z = x^2 + y^2$, $z = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$ nằm trong góc phần tám thứ nhất, nhận mặt phẳng $y = x$ làm mặt phẳng đối xứng, do đó nếu G là trọng tâm của V thì $x_G = y_G$. Ta có

$$\iiint\limits_V dxdydz = \int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{x^2+y^2} dz = \int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x^2+y^2)\ dy =$$

$$= \int_0^1\left[x^2y + \frac{1}{3}y^3\right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \int_0^1\left[x^2(1-x) + \frac{1}{3}(1-x)^3\right]dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{12}(1-x)^4\right]_0^1 = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

$$\iiint\limits_V xdxdydz = \int_0^1 xdx\int_0^{1-x} dy\int_0^{x^2+y^2} dz = \int_0^1 xdx\int_0^{1-x}(x^2+y^2)\,dy =$$

$$= \int_0^1[x^2(1-x) + \frac{1}{3}(1-x)^3]\,xdx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 + \frac{1}{3}\int_0^1 x(1-x)^3\,dx =$$

$$= \frac{1}{20}+\frac{1}{3}\left[-x\frac{(1-x)^4}{4}\Bigg|_0^1+\int_0^1\frac{(1-x)^4}{4}dx\right] =$$

$$= \frac{1}{20}-\frac{1}{3}\frac{(1-x)^5}{20}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{20}+\frac{1}{60}=\frac{1}{15}.$$

$$\iiint_V zdxdydz = \int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{x^2+y^2}zdz = \int_0^1 dx\int_0^{1-x}\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1\left[x^4(1-x)+\frac{2}{3}x^2(1-x)^3+\frac{1}{5}(1-x)^5\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}-\frac{(1-x)^6}{30}\right]_0^1+\frac{1}{3}\int_0^1 x^2(1-x)^3dx =$$

$$= \frac{1}{30}+\frac{1}{3}\left[-x^2\frac{(1-x)^4}{4}\Bigg|_0^1+\int_0^1 2x\frac{(1-x)^4}{4}dx\right] =$$

$$= \frac{1}{30}+\frac{1}{6}\left[-x\frac{(1-x)^5}{5}\Bigg|_0^1+\int_0^1\frac{(1-x)^5}{5}dx\right] =$$

$$= \frac{1}{30}-\frac{1}{30}\frac{(1-x)^6}{6}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{30}+\frac{1}{180}=\frac{7}{180}.$$

Do đó

$$x_G = y_G = \frac{1}{15}.6=\frac{2}{5}, \qquad z_G = \frac{7}{180}.6=\frac{7}{30}.$$

c) Vật thể V giới hạn bởi các mặt $x^2 + y^2 = 2az$, $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$, với $z \geqslant 0$ nhận trục Oz làm trục đối xứng, do đó trọng tâm G của nó nằm trên Oz, vậy $x_G = y_G = 0$, chỉ còn phải tính z_G.

Những điểm trên giao tuyến của hai mặt $x^2 + y^2 = 2az$ và $x^2 + y^2 = 3a^2 - z^2$ có cao độ z thoả mãn phương trình

$$2az = 3a^2 - z^2 \text{ hay } z^2 + 2az - 3a^2 = 0$$

Do đó $z = a$. Vậy phương trình hình chiếu của giao tuyến của hai mặt trên xuống mặt phẳng xOy là

$$x^2 + y^2 = 2a^2$$

Hình chiếu của vật thể V xuống mặt phẳng xOy là miền giới hạn bởi đường tròn đó.

Chuyển sang hệ tọa độ trụ, ta được

$$\iiint\limits_V dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2}} rdr \int_{\frac{r^2}{2a}}^{\sqrt{3a^2 - r^2}} dz = 2\pi \int_0^{a\sqrt{2}} (\sqrt{3a^2 - r^2} - \frac{r^2}{2a})\, rdr =$$

$$= 2\pi \int_0^{a\sqrt{2}} \sqrt{3a^2 - r^2}\, rdr - \frac{2\pi}{2a} \frac{r^4}{4} \Big|_0^{a\sqrt{2}} =$$

$$= 2\pi \left[-\frac{1}{2} (3a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3} \right]_0^{a\sqrt{2}} - \pi a^3 =$$

$$= \frac{2\pi a^3}{3} (3\sqrt{3} - 1) - \pi a^3 = \pi a^3 (2\sqrt{3} - \frac{5}{3})$$

$$\iiint\limits_V zdxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2}} rdr \int_{\frac{r^2}{2a}}^{\sqrt{3a^2 - r^2}} zdz = 2\pi \int_0^{a\sqrt{2}} \frac{1}{2} (3a^2 - r^2 - \frac{r^4}{4a^2})\, rdr =$$

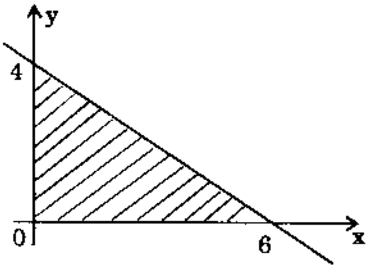
1

$$= \pi \left(3a^2 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{24a^2} \right)\Big|_0^{a\sqrt{2}} = \pi \left(3a^4 - a^4 - \frac{1}{3} a^4\right) = \frac{5\pi a^4}{3}$$

Vậy

$$z_G = \frac{5\pi a^4}{3} \cdot \frac{3}{\pi a^3 \cdot (6\sqrt{3} - 5)} = \frac{5a}{6\sqrt{3} - 5}.$$

d) Hình chiếu xuống mặt phẳng xOy của vật thể V giới hạn bởi các mặt $z = \frac{1}{2}y^2$, $z = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $2x + 3y - 12 = 0$ là miền tam giác giới hạn bởi các đường $x = 0$, $y = 0$, $2x + 3y - 12 = 0$.



Hình 64

Ta có

$$\iiint_V dxdydz = \int_0^6 dx \int_0^{4-\frac{2}{3}x} dy \int_0^{\frac{1}{2}y^2} dz =$$

$$= \int_0^6 dx \int_0^{4-\frac{2}{3}x} \frac{1}{2}y^2\,dy = \frac{1}{2}\int_0^6 \frac{y^3}{3}\Big|_0^{4-\frac{2}{3}x} dx =$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^6 (4 - \frac{2}{3}x)^3 dx = \frac{1}{6}(4 - \frac{2}{3}x)^4 \cdot \frac{1}{4}(-\frac{3}{2})\Big|_0^6 = \frac{4^4 \cdot 3}{6 \cdot 4 \cdot 2} = 4^2$$

$$\iiint_V x dxdydz = \int_0^6 x dx \int_0^{4-\frac{2}{3}x} dy \int_0^{\frac{1}{2}y^2} dz = \frac{1}{6}\int_0^6 x(4 - \frac{2}{3}x)^3 dx =$$

$$= \frac{1}{6}\left[-x\left(\frac{3}{2}\right)\frac{1}{4}\left(4 - \frac{2}{3}x\right)^4\Big|_0^6 + \frac{3}{2^3}\int_0^6 (4 - \frac{2}{3}x)^4 dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2^4}\left(4 - \frac{2}{3}x\right)^5 \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)\Big|_0^6 = \frac{4^5 \cdot 3}{2^5 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 2^5}{5}$$

$$\iiint_V y dxdydz = \int_0^6 dx \int_0^{4-\frac{2}{3}x} y dy \int_0^{\frac{1}{2}y^2} dz = \int_0^6 dx \int_0^{4-\frac{2}{3}x} \frac{1}{2}y^3\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}.\int_0^6 \frac{y^4}{4}\Bigg|_0^{4-\frac{2}{3}x} dx = \frac{1}{2^3}\int_0^6 (4-\frac{2}{3}x)^4 dx =$$

$$= \frac{1}{2^3}.\frac{1}{5}\left(4-\frac{2}{3}x\right)^5.\left(-\frac{3}{2}\right)\Bigg|_0^6 = \frac{1}{2^3}.\frac{4^5}{5}.\frac{3}{2} = \frac{3.2^6}{5}.$$

$$\iiint\limits_V z dxdydz = \int_0^6 dx \int_0^{4-\frac{2}{3}x} dy \int_0^{\frac{1}{2}y^2} z dz = \int_0^6 dx \int_0^{4-\frac{2}{3}x} \frac{y^4}{8} dy$$

$$= \frac{1}{8}.\int_0^6 \frac{1}{5} y^5 \Bigg|_0^{4-\frac{2}{3}x} dx = \frac{1}{2^3.5}\int_0^6 (4-\frac{2}{3}x)^5 dx$$

$$= \frac{1}{2^3.5}.(4-\frac{2}{3}x)^6.\frac{1}{6}(-\frac{3}{2})\Bigg|_0^6 = \frac{1}{2^3.5}.4^6.\frac{1}{2} = \frac{2^7}{5}.$$

Vậy

$$x_G = \frac{3.2^5}{5.2^4} = \frac{6}{5},\ y_G = \frac{3.2^6}{5.2^4} = \frac{12}{5},\ z_G = \frac{2^7}{5.2^4} = \frac{2^3}{5} = \frac{8}{5}.$$

e) Vật thể V là phần của hình elipxôit giới hạn bởi mặt $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, nằm trong góc phần tám thứ nhất. Ta có

$$\iiint\limits_V dxdydz = \frac{\pi}{6}abc.$$

Vì tích phân ấy bằng thể tích của V, tức là bằng $\frac{1}{8}$ thể tích của hình elipxôit.

Đổi biến số x = au, y = bv, z = cw rồi chuyển sang tọa độ cầu,
1 ta được:

$$\iiint_V x\,dxdydz = a^2bc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta d\theta\int_0^1 r^3dr =$$

$$= a^2bc.1.\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2}.\frac{1}{4}=\frac{1}{16}\pi a^2bc,$$

$$\iiint_V y\,dxdydz = ab^2c\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta d\theta\int_0^1 r^3dr$$

$$= ab^2c.1.\frac{\pi}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{4}=\frac{1}{16}\pi ab^2c,$$

$$\iiint_V z\,dxdydz = abc^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta d\theta\int_0^1 r^3dr$$

$$= abc^2\frac{\pi}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{4}=\frac{1}{16}\pi abc^2.$$

Vậy

$$x_G = \frac{1}{16}\pi a^2bc.\frac{6}{\pi abc}=\frac{3}{8}a, \qquad y_G = \frac{3}{8}b, \qquad z_G = \frac{3}{8}c.$$

Chương IV

TÍCH PHÂN ĐƯỜNG. TÍCH PHÂN MẶT

A- ĐỀ BÀI

1. Tính các tích phân đường

a) $\int\limits_{AB}(x-y)ds$, AB là đoạn thẳng nối hai điểm A(0, 0), B(4, 3);

b) $\int\limits_{L}xyds$, L là biên của hình chữ nhật ABCD, A(0, 0), B(4, 0), C(4, 2), D(0, 2);

c) $\int\limits_{L}(x^2+y^2)ds$, L là biên của hình tam giác OAB, với O(0, 0), A(1, 1), B(−1, 1);

d) $\int\limits_{L}(x^{4/3}+y^{4/3})ds$, L là đường axtrôit $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ $(a > 0)$;

e) $\int\limits_{L}xyds$, L là cung đường elip $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ nằm trong góc phần tư thứ nhất;

f) $\int\limits_{L}|y|ds$, L là đường cacđiôit $r = a(1 + \cos\varphi)$ $(a > 0)$;

g) $\int\limits_{L}ye^{-x}ds$, L là đường $x = \ln(1 + t^2)$, $y = 2\text{arctg}t - t + 3$, $0 \le t \le 1$;

h) $\int\limits_{L}\sqrt{2y}ds$, L là đường $x = t$, $y = \frac{1}{2}t^2$, $z = \frac{1}{3}t^3$, $0 \le t \le 1$;

i) $\int\limits_{L}xyzds$, L là đường $x = t$, $y = \frac{1}{3}\sqrt{8t^3}$, $z=\frac{1}{2}t^2$, $0 \le t \le 1$;

1

j) $\int\limits_L x^2 ds$, L là đường $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$ $(a > 0)$;

k) $\int\limits_L zds$, L là đường $x^2 + y^2 = z^2$, $y^2 = ax$ từ điểm (0, 0, 0) đến điểm $(a, a, a\sqrt{2})$ $(a > 0)$.

2. Tính khối lượng của

a) Đường $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$, $0 \le x \le a$, biết khối lượng riêng $\rho(x, y) = \dfrac{1}{y}$, $(a > 0)$;

b) Đường $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $0 \le t \le \pi$ biết khối lượng riêng $\rho(x, y) = |x|$, $(a > 0)$;

c) Đường đinh ốc $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$, $0 \le t \le 2\pi$ biết khối lượng riêng $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

3. Xác định trọng tâm của đường đồng chất

a) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le \pi$;

b) $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $0 \le t \le \pi$, $(a > 0)$;

c) $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $0 \le t \le \pi$.

4. Tính các tích phân đường

a) $\int\limits_{ABC} (x - y)^2 dx + (x + y)^2 dy$, ABC là đường gấp khúc, A(0, 0), B(2, 2), C(4, 0) ;

b) $\int\limits_L y dx - (y + x^2) dy$, L là cung parabôn $y = 2x - x^2$ nằm ở trên trục Ox theo chiều kim đồng hồ;

c) $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \sqrt{x} dy - \sqrt{x}\ln(x+1) dx$, $\overset{\frown}{AB}$ là cung đường $y = (x - 1)\ln(x + 1)$ giữa hai điểm có hoành độ 0 và 1;

d) $\int_L (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$, L là đường $y = 1 - |1 - x|$, $0 \le x \le 2$;

e) $\int_L (2a-y)dx+xdy$, L là đường $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$, $(a > 0)$;

f) $\int_L (x+y)dx+(x-y)dy$, L là đường elip $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ chạy ngược chiều kim đồng hồ;

g) $\int_{\overset{\frown}{AB}} \frac{-2xy.dx+(x^2-y^2)dy}{x^2+y^2}$, $\overset{\frown}{AB}$ là nửa đường tròn $x^2 + y^2 = 2y$ về phía $x \ge 0$ nối điểm A(0, 0) với điểm B(0, 2);

h) $\int_{\overset{\frown}{OA}} xdy+\frac{y}{1+x}dx$, $\overset{\frown}{OA}$ là cung đường $y = 2\sqrt{x}-x$ nối điểm O(0, 0) với điểm A(4, 0) ;

i) $\int_L \frac{ydx}{x^2+y^2}$, L là đường parabôn $y^2 = 2x + 1$ theo chiều y giảm.

5. Tính $\int_{AB} (xy-1)dx+x^2ydy$ theo các đường nối điểm A(1, 0) với điểm B(0, 2)

a) $2x + y = 2$;

b) $4x + y^2 = 4$;

c) $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ theo chiều dương.

6. Tính trực tiếp các tích phân đường sau rồi kiểm tra lại
1 bằng công thức Green

a) $\int\limits_L (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy$, L là đường kín gồm hai cung parabôn $y = x^2$ và $x = y^2$ theo chiều dương;

b) $\int\limits_L (2x^3 - y^3)dx + (x^3 + y^3)dy$, L là đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ theo chiều dương;

c) $\int\limits_{OABO} (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$, OABO là đường gấp khúc kín với các đỉnh O(0, 0), A(1, 0), B(0, 1).

7. Tính các tích phân đường

a) $\int\limits_L xy\left[-\left(x + \frac{y}{2}\right)dx + \left(\frac{x}{2} + y\right)dy\right]$, L là biên của tam giác ABC theo chiều dương với các đỉnh A(–1, 0), B(1, –2), C(1, 2);

b) $\int\limits_{ABC} 2(x^2 + y^2)dx + (4y + 3)xdy$, ABC là đường gấp khúc với các đỉnh A(0, 0), B(1, 1), C(0, 2);

c) $\int\limits_L (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$, L là đường tròn $x^2 + y^2 = ax$ theo chiều dương (a > 0);

d) $\int\limits_L x^3\left(y + \frac{x}{4}\right)dy - y^3\left(x + \frac{y}{4}\right)dx$, L là đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$ theo chiều dương;

e) $\int\limits_L (xy + e^x \sin x + x + y)dx + (xy - e^{-y} + x - \sin y)dy$, L là đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$ theo chiều dương.

8. Tích phân đường

$$\int \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx + \left(\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy$$

có phụ thuộc đường lấy tích phân không ? Tính tích phân ấy từ điểm $A(1, \pi)$ đến điểm $B(2, \pi)$ theo một đường không cắt trục Oy.

9. Tích phân đường

$$\int \frac{x^2 + y^2}{xy}\left(\frac{3x^2 - y^2}{x}dx + \frac{3y^2 - x^2}{y}dy\right)$$

có phụ thuộc đường lấy tích phân không ? Tính tích phân ấy trên cung $\overset{\frown}{AB}$ xác định bởi

$$x = t + \cos^2 t\,,\ y = 1 + \sin^2 t\,,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

10. Tìm các số m, n sao cho tích phân đường

$$\int_L [(x + a)(y + b)^2 + (n - m)by + amy]dx +$$

$$+[(x + a)^2(y + b) + 2(n - 1)ax]dy = 0$$

với mọi đường kín L và với mọi giá trị của a, b.

11. Chứng minh rằng các biểu thức Pdx + Qdy sau đây là vi phân toàn phần của một hàm số u(x, y) nào đó. Tìm u

a) $(x^2 - 2xy^2 + 3)dx + (y^2 - 2x^2y + 3)dy$;

b) $(2x - 3xy^2 + 2y)dx + (2x - 3x^2y + 2y)dy$;

c) $[e^{x+y} + \cos(x - y)]dx + [e^{x+y} - \cos(x - y) + 2]dy$;

d) $e^x[e^y(x - y + 2) + y]dx + e^x[e^y(x - y) + 1]dy$;

e) $\dfrac{xdx}{x^2 + y^2} + \dfrac{1 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2}ydy$.

12. Tìm m để biểu thức

$$\frac{(x - y)dx + (x + y)dy}{(x^2 + y^2)^m}$$

là vi phân toàn phần của một hàm số u(x, y) nào đó. Tìm u.

13. Tìm a, b để biểu thức

$$\frac{(ax^2 + 2xy + y^2)\,dx - (x^2 + 2xy + by^2)dy}{(x^2 + y^2)^2}$$

là vi phân toàn phần của một hàm số u (x, y) nào đó. Tìm u.

14. Tìm α, β để tích phân đường

$$\int_L \frac{y\,(1 - x^2 + \alpha y^2)\,dx + x(1 - y^2 + \beta x^2)dy}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

không phụ thuộc đường lấy tích phân. Tính tích phân ấy từ điểm A (0,0) đến điểm B (a, b) ứng với các giá trị α, β đã tìm được.

15. Tính $\int_L \frac{xdx + ydy}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$, L là đường elíp $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ·

16. Tính các tích phân đường

a) $\int_L (y^2 - z^2)\,dx + 2yzdy - x^2dz$, C là đường $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$

($0 \leqslant t \leqslant 1$) theo chiều tăng của tham số t.

b) $\int_L ydx + zdy + xdz$, L là đường đinh ốc

$x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ ($0 \leqslant t \leqslant 2\pi$) theo chiều tăng của tham số;

c) $\int_L (y - z)\,dx + (z - x)\,dy + (x - y)\,dz$, L là đường tròn $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $y = x\,tg\alpha$, theo chiều dương nếu nhìn từ hướng $x > 0$.

d) $\int_L zdx + xdy + ydz$, L là đường tròn $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + z = 1$, theo chiều dương nếu mặt phẳng $x + z = 1$ được định hướng bởi véc tơ pháp (1, 0,1).

17. Tính các tích phân mặt

a) $\iint\limits_S (x + y + z)\, dS$, S là biên của hình lập phương $\{(x,y,z) : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1\}$;

b) $\iint\limits_S (z + 2x + \frac{4y}{3})\, dS$, S là phần của mặt phẳng $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ nằm trong góc phần tám thứ nhất.

c) $\iint\limits_S (yz + zx + xy)\, dS$, S là phần của mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, $(a > 0)$;

d) $\iint\limits_S y\,dS$, S là phần của mặt $z = x + y^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 2$.

e) $\iint\limits_S (x^2z^2 + z^2y^2)\, dS$; S là mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $a > 0$;

f) $\iint\limits_S z\,dS$, S là biên của vật thể giới hạn bởi các mặt $z = 0$, $z = x + 1$, $x^2 + y^2 = 1$;

g) $\iint\limits_S (y^2 + z^2)\, dS$, S là phần của mặt parabôlôit $x = 4 - y^2 - z^2$ nằm ở trên mặt phẳng $x = 0$.

18. Tìm khối lượng của

a) Mặt S xác định bởi $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, $0 \leqslant z \leqslant 1$, nếu khối lượng riêng $\rho(x, y, z) = z$;

b) Nửa mặt cầu S có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geqslant 0$, nếu khối lượng riêng $\rho(x, y, z) = \frac{z}{a}$, $(a > 0)$.

19. Xác định trọng tâm của mặt đồng chất S cho bởi

a) $z = 2 - \dfrac{x^2 + y^2}{2}$, $z \geqslant 0$;

b) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ bị cắt bởi mặt $x^2 + y^2 = ax$, $(a > 0)$;

c) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geqslant 0$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant a$, $(a > 0)$.

20. Tính các tích phân mặt

a) $\iint\limits_S xyzdxdy$, S là mặt ngoài của phần hình cầu xác định bởi $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$;

b) $\iint\limits_S xdydz + dxdz + xz^2dxdy$, S là mặt ngoài của phần hình cầu xác định bởi $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

c) $\iint\limits_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, S là mặt ngoài của hình cầu $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$, $(R > 0)$;

d) $\iint\limits_S \dfrac{dydz}{x} + \dfrac{dzdx}{y} + \dfrac{dxdy}{z}$, S là mặt ngoài của elipxôit $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$;

e) $\iint\limits_S xdydz + ydzdx - zdxdy$, S là phía ngoài của nửa mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geqslant 0$.

21. Dùng công thức Ostrogradsky, tính các tích phân mặt

a $\iint\limits_S xzdydz + yxdzdx + zydxdy$, S là phía ngoài của biên của hình chóp $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, $x + y + z \leqslant 1$;

b) $\iint\limits_S x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$, S là phía ngoài của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $(R > 0)$;

c) $\iint\limits_S x^2\,dydz + y^2\,dzdx + z^2\,dxdy$, S là phía ngoài của biên của hình lập phương $V = \{(x, y, z) ; 0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant a, 0 \leqslant z \leqslant a\}$.

22. Giả sử α (x) là hàm số khả vi liên tục sao cho tích phân mặt $I = \iint\limits_S (1 + x^2)\,\alpha(x)dydz + 2\alpha(x)\,xy\,dzdx - 3zdxdy$, trong đó S là một mặt giới hạn bởi đường kín, chỉ phụ thuộc L mà không phụ thuộc S.

a) Chứng minh rằng nếu đặt $\beta(x) = (1 + x^2)^2\,\alpha(x)$ thì ta có $\beta'(x) = 3\,(1 + x^2)$. Suy ra biểu thức của α (x).

b) Chứng minh rằng nếu α (x) thỏa mãn điều kiện $\alpha(0) = 0$ thì tích phân mặt I bằng tích phân đường

$$J = \int\limits_L \frac{2x^2\,(x^2 + 3)\,yzdx}{(1 + x^2)^2} - \frac{x(x^2 + 3)zdy}{1 + x^2}$$

Tính tích phân ấy nếu L là đường tròn x = cost, y = sint, z = 1 theo chiều t tăng.

23. Tính tích phân đường

$$I = \int\limits_L (y^2 + z^2)\,dx + (z^2 + x^2)\,dy + (x^2 + y^2)\,dz,$$

L là giao tuyến của các mặt $x^2 + y^2 + z^2 = 2ay$, $x^2 + y^2 = 2by$, $z > 0$, $a > b > 0$, hướng đi trên L là ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ phía $z > 0$. Kiểm tra lại kết quả bằng cách áp dụng định lí Stokes.

24. Tính các tích phân đường

a) $\int\limits_L (y + z)dx + (z + x)\,dy + (x + y)\,dz$, L là giao tuyến của các mặt $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, hướng đi trên L là ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ phía $z > 0$.

b) $\int\limits_L 2xy^2zdx + 2x^2yzdy + (x^2y^2 - 2z)dz$, L là đường x = cost, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t, z = \frac{1}{2}\sin t$ hướng theo chiều tăng của t;

c) $\int\limits_L (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$, L là giao tuyến của các mặt $x^2 + y^2 = a^2$, $\frac{x}{a} + \frac{z}{b} = 1$, $a > 0$, $b > 0$, hướng đi trên L là ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ phía $z > 0$;

d) $\int\limits_L (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$,

L là giao tuyến của biên của hình lập phương

$$\{(x, y, z): \quad 0 \le x \le a, \quad 0 \le y \le a, \quad 0 \le z \le a\}$$

với mặt phẳng $x + y + z = \frac{3a}{2}$, hướng đi trên L là ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ phía $z > 0$.

25. Chứng minh các công thức

a) $\operatorname{div}(g\vec{F}) = \overrightarrow{\operatorname{grad}}(g).\vec{F} + g.\operatorname{div}\vec{F}$;

b) $\operatorname{div}(\vec{G} \wedge \vec{F}) = \vec{F}.\overrightarrow{\operatorname{rot}}\vec{G} - \vec{G}.\overrightarrow{\operatorname{rot}}\vec{F}$;

c) $\overrightarrow{\operatorname{rot}}(g\vec{F}) = \overrightarrow{\operatorname{grad}}g \wedge \vec{F} + g.\overrightarrow{\operatorname{rot}}\vec{F}$.

26. Chứng minh rằng các trường vectơ sau đây là những trường thế. Tìm hàm số thế vị của trường

a) $\vec{F}(x, y) = e^{-x}\left[\frac{1}{x+y} - \ln(x+y)\right]\vec{i} + \frac{e^{-x}}{x+y}\vec{j}$;

b) $\vec{F}(x, y, z) = yz(2x + y + z)\vec{i} + zx(2y + z + x)\vec{j} + xy(2z + x + y)\vec{k}$;

c) $\vec{F}(x, y, z) = (y + z)\vec{i} + (z + x)\vec{j} + (x + y)\vec{k}$.

27. Tính thông lượng của các trường vectơ

a) $\vec{F}(x,y,z) = xy\vec{i} + yz\vec{j} + zx\vec{k}$ qua phần S của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, hướng ra ngoài;

b) $\vec{F}(x,y,z) = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$ qua mặt cầu S có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = x$, hướng ra ngoài;

c) $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ qua phần S của mặt cầu

$z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $z \geq 0$ hướng lên trên.

28. Chứng minh rằng

a) Nếu $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$

P, Q, R là các đạo hàm riêng cấp hai liên tục, thì

$$\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{F}) = 0$$

b) nếu f(x, y, z) có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục thì

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}f) = 0.$$

29. Cho vectơ

$$\vec{F}(x,y,z) = xf(r)\vec{i} + yf(r)\vec{j} + 2zf(r)\vec{k},$$

trong đó $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Tìm hàm số f để tồn tại một vectơ $\vec{G}$ sao cho $\vec{F} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}.\vec{G}$, biết rằng f(1) = 1. Tìm một biểu thức của các thành phần của $\vec{G}$ biết rằng thành phần thứ ba của nó bằng không.

30. Tính công của lực

$$\vec{F} = (y+z)\vec{i} + (z+x)\vec{j} + (x+y)\vec{k}$$

dọc theo cung bé nhất của đường tròn lớn của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ nối các điểm M(3, 4, 0) và N(0, 0, 5).

31. M là điểm có tọa độ (x, y, z). Đặt OM = r. Tìm hàm số f(r) thoả mãn điều kiện f(1) = 1 sao cho trường vectơ $f(r).\overrightarrow{OM}$ có thông lượng bảo toàn. Tính thông lượng của trường vectơ ấy qua mặt cầu S tâm O bán kính R hướng ra ngoài. Có thể áp dụng định lí Ostrogradsky để tính thông lượng ấy được không?

B- LỜI GIẢI

1. a) Phương trình của đường thẳng AB là $y = \frac{3}{4}x$, do đó $y' = \frac{3}{4}$. Vậy

$$\int_{AB}(x-y)ds = \int_0^4 (x - \frac{3}{4}x)\sqrt{1+\frac{9}{16}}dx = \frac{5}{4}\int_0^4 \frac{x}{4}dx = \frac{5}{2}.$$

b) Ta có

$$I = \int_L xyds = \int_{AB} xyds + \int_{BC} xyds + \int_{DC} xyds + \int_{AD} xyds .$$

Trên đoạn AB ta có y = 0, do đó $\int_{AB} xyds = 0$. Cũng như vậy $\int_{AD} xyds = 0$. Trên đoạn BC, ta có x = 4, ds = dy, vậy

$$\int_{BC} xyds = \int_0^2 4ydy = 2y^2\Big|_0^2 = 8.$$

Trên đoạn DC ta có y = 2, ds = dx, vậy

$$\int_{DC} xyds = \int_0^4 2xdx = x^2\Big|_0^4 = 16 .$$

Do đó

$$I = 8 + 16 = 24.$$

c) Ta có

$$I = \int_L (x^2+y^2)ds = \int_{OA}(x^2+y^2)ds + \int_{BA}(x^2+y^2)ds + \int_{BO}(x^2+y^2)ds$$

Trên đoạn OA ta có y = x, do đó y' = 1, ds $= \sqrt{1+1}dx$, vậy

$$\int_{OA}(x^2+y^2)ds=\sqrt{2}\int_0^1 2x^2dx=\sqrt{2}\,\frac{2}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Trên đoạn BA ta có y = 1, do đó ds = dx, vậy

$$\int_{BA}(x^2+y^2)ds=\int_{-1}^1(x^2+1)dx=2\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Big|_0^1=\frac{8}{3}.$$

Trên đoạn BO ta có y = –x, do đó y' = –1, ds = $\sqrt{1+1}dx$, Vậy

$$\int_{BO}(x^2+y^2)ds=\int_{-1}^0\sqrt{2}\,2x^2dx=\frac{2\sqrt{2}}{3}x^3\Big|_{-1}^0=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Do đó

$$I=\frac{4\sqrt{2}+8}{3}=\frac{4}{3}(\sqrt{2}+2).$$

d) Trước hết ta nhận xét rằng đường axtrôit L nhận các trục Ox, Oy làm trục đối xứng và hàm số dưới dấu tích phân không đổi nếu ta thay (x, y) bởi (–x, y) hoặc bởi (–x, –y) hoặc bởi (x, –y), do đó nếu gọi L_1 là phần của L nằm trong góc phần tư thứ nhất thì

$I=\int_L(x^{4/3}+y^{4/3})ds=4\int_{L_1}(x^{4/3}+y^{4/3})ds$. Phương trình tham số của đường axtrôit $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ là

$$x=a\cos^3 t,\qquad y=a\sin^3 t.$$

Do đó

$$x'=-3a\cos^2 t\sin t,\qquad y'=3a\sin^2 t\cos t,$$

$$ds=\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt=3a|\sin t\cos t|dt.$$

1 Vậy

$$I = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{4/3}(\cos^4 t+\sin^4 t)3a\sin t\cos t dt$$

$$= 12a^{\frac{7}{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^5 t\sin t+\sin^5 t\cos t)dt$$

$$= 12a^{\frac{7}{3}}\left(\frac{-1}{6}\cos^6 t+\frac{1}{6}\sin^6 t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 12a^{\frac{7}{3}}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right) = 4a^{\frac{7}{3}}.$$

c) Phương trình tham số của đường elip $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ là

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t.$$

Do đó

$$x' = -a\sin t, \qquad y' = b\cos t.$$

Vậy

$$I = \int_L xyds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t.b\sin t\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt =$$

$$= \frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\sqrt{a^2\frac{1-\cos 2t}{2}+b^2\frac{1+\cos 2t}{2}}\,dt.$$

Đặt $\cos 2t = u$, ta có $-2\sin 2tdt = du$. Do đó

$$I = \frac{ab}{4}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2-a^2}{2}u}\,du$$

$$= \frac{ab}{4}.\frac{2}{b^2-a^2}\left(\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2-a^2}{2}u\right)^{\frac{3}{2}}.\frac{2}{3}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{ab}{3}.\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}.$$

f) Đường cacđiôit L nhận trục Ox làm trục đối xứng. Hàm số dưới dấu tích phân không đổi nếu ta thay y bằng $-y$. Do đó nếu gọi L_1 là phần của L nằm trên trục Ox thì

$$I = \int_L |y|\, ds = 2\int_{L_1} y ds$$

Phương trình của đường L là $r = a\,(1 + \cos\varphi)$. Lấy φ làm tham số, phương trình tham số của L là

$$x = a\,(1 + \cos\varphi)\cos\varphi,\ y = a(1 + \cos\varphi)\sin\varphi$$

$$ds = \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi = a\sqrt{(1 + \cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= a\sqrt{2(1 + \cos\varphi)}\, d\varphi = 2a\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right| d\varphi$$

Vậy

$$I = 4a^2\int_0^{\pi}(1 + \cos\varphi)\sin\varphi\cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 16a^2\int_0^{\pi}\cos^4\frac{\pi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi$$

Đặt $\cos\frac{\varphi}{2} = u$, ta có $-\frac{1}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = du$, do đó

$$I = -32a^2\int_1^0 u^4 du = 32a^2\,\frac{u^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{32a^2}{5}.$$

g) Ta có

$$x = \ln\,(1 + t^2),\ y = 2\mathrm{arctg}t - t + 3$$

$$x' = \frac{2t}{1 + t^2},\quad y' = \frac{2}{1 + t^2} - 1 = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

1

$$x'^2 + y'^2 = \frac{4t^2 + (1 - t^2)^2}{(1 + t^2)^2} = 1,\quad ds = dt$$

Do đó

$$I = \int_0^1 \frac{2\text{arctgt} - t + 3}{1 + t^2} dt =$$

$$= \Big[(\text{arctgt})^2 - \frac{1}{2} \ln (1 + t^2) + 3\text{arctgt} \Big]_0^1 = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{3\pi}{4}$$

h) Ta có

$$x' = 1,\ y' = t,\ z' = t^2$$

Do đó

$$\int_L \sqrt{2y}\, ds = \int_0^1 t \sqrt{1 + t^2 + t^4}\, dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{(t^2 + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}\, d (t^2 + \frac{1}{2}) =$$

$$= \frac{1}{2} \Big[\frac{t^2 + \frac{1}{2}}{2} \sqrt{t^4 + t^2 + 1} + \frac{3}{8} \ln (t^2 + \frac{1}{2} + \sqrt{t^4 + t^2 + 1}) \Big]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{8} (3\sqrt{3} - 1 + \frac{3}{2} \ln \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}).$$

i) Ta có

$$x = t,\ y = \frac{\sqrt{8}}{3} t^{3/2},\ z = \frac{1}{2} t^2$$

$$x' = 1, \qquad y' = \frac{\sqrt{8}}{2} t^{1/2}, \qquad z' = t$$

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt = |t+1|\, dt$$

Do đó

$$\int_L xyzds = \frac{\sqrt{8}}{6} \int_0^1 t^{\frac{9}{2}} (t + 1)\, dt = \frac{\sqrt{2}}{3} \Big[\frac{2}{13} t^{\frac{13}{2}} + \frac{2}{11} t^{\frac{11}{2}} \Big]_0^1 =$$

1 $$= \frac{\sqrt{2}}{3} \left(\frac{2}{13} + \frac{2}{11} \right) = \frac{16\sqrt{2}}{143}$$

j) L là giao tuyến của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ có tâm ở gốc tọa độ, bán kính a và mặt phẳng $x + y + z = 0$ đi qua gốc tọa độ. Do đó L là một đường tròn lớn của mặt cầu, tâm ở gốc tọa độ, bán kính a, nó có độ dài bằng $2\pi a$.

Ta nhận xét rằng L không thay đổi khi ta hoán vị vòng quanh x, y, z. Do đó $\int_L x^2\,ds = \int_L y^2 ds = \int_L z^2 ds$.

Vậy

$$\int_L x^2 ds = \frac{1}{3}\int_L (x^2 + y^2 + z^2)\ ds$$

nhưng trên đường L, ta có $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, do đó

$$\int_L x^2\,ds = \frac{a^2}{3}\int_L ds = \frac{a^2}{3}\,.\,2\pi a = \frac{2\pi a^3}{3}$$

Vì $\int_L ds$ bằng độ dài của đường L.

k) Chọn x làm tham số. Phương trình tham số của đường L là

$$x = x,\ y = \sqrt{ax},\ z = \sqrt{x^2 + ax},\ 0 \leqslant x \leqslant a.$$

Do đó

$$x' = 1,\ y' = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x}}\ ,\ z' = \frac{2x + a}{2\sqrt{x^2 + ax}}$$

$$ds = \sqrt{1 + \frac{a}{4x} + \frac{(2x + a)^2}{4\,(x^2 + ax)}}\ dx =$$

$$= \frac{\sqrt{8x^2 + 9ax + 2a^2}}{2\sqrt{x^2 + ax}}\ dx =$$

Vậy

$$\int_L z ds = \frac{1}{2}\int_0^a \sqrt{8x^2+9ax+2a^2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^a \sqrt{\left(2\sqrt{2}\,x+\frac{9a}{4\sqrt{2}}\right)^2-\frac{17}{32}a^2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{8\sqrt{2}}\Big[(2\sqrt{2}\,x+\frac{9a}{4\sqrt{2}})\sqrt{8x^2+9ax+2a^2} -$$

$$- \frac{17a^2}{32}\ln\left(2\sqrt{2}\,x+\frac{9a}{4\sqrt{2}}+\sqrt{8x^2+9ax+2a^2}\right)\Big]_o^a =$$

$$= \frac{a^2}{8\sqrt{2}}\left(\frac{25\sqrt{38}-18}{8} - \frac{17}{32}\ln\frac{25+4\sqrt{38}}{17}\right) =$$

$$= \frac{a^2}{256\sqrt{2}}\left(100\sqrt{38}-72-17\ln\frac{25+4\sqrt{38}}{17}\right).$$

2. a) Ta có

$$m = \int_L \frac{1}{y} ds,$$

trong đó L là đường $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right) = a\,\text{ch}\frac{x}{a}$, $0 \leqslant x \leqslant a$.

Vì $y' = \text{sh}\frac{x}{a}$; nên $\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{\text{ch}^2\frac{x}{a}} = \text{ch}\frac{x}{a}$. Do đó

$$m = \int_0^a \frac{1}{a}\frac{\text{ch}\frac{x}{a}}{\text{ch}\frac{x}{a}}dx = \frac{1}{a}\int_0^a dx = 1 .$$

b) Ta có

1

$$m = \int_L |x| \, ds ,$$

trong đó L là đường x = acost, y = asint, $0 \leqslant t \leqslant \pi$. Dễ thấy rằng nếu L_1 là phần của đường L ứng với $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$ thì

$$m = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x ds$$

Vì x' = − asint, y' = acost, ds = adt, nên

$$m = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos t dt = 2a^2 .$$

c) Ta có

$$m = \int_L \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, ds$$

trong đó L là đường x = cost, y = sint, z = t, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

Nhưng

$$x' = -\sin t, \quad y' = \cos t, \quad z' = 1$$
$$ds = \sqrt{2} \, dt$$

Do đó

$$m = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \sqrt{1 + t^2} \, dt =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[t \sqrt{1 + t^2} + \ln (t + \sqrt{1 + t^2}) \right]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[2\pi \sqrt{1 + 4\pi^2} + \ln (2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2}) \right] .$$

3. a) Gọi G là trọng tâm của đường L có phương trình

$$x = a(t - \sin t), \qquad y = a(1 - \cos t), \qquad 0 \le t \le \pi .$$

Vì L là đường đồng chất, có thể xem như khối lượng riêng của nó $\rho(x, y) = 1$. Do đó các tọa độ của G được cho bởi

$$x_G = \frac{1}{m}\int_L x\,ds, \qquad y_G = \frac{1}{m}\int_L y\,ds,$$

trong đó

$$m = \int_L ds .$$

Ta có $$ds = \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,dt = 2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt .$$

Do đó

$$m = 2a\int_0^\pi \sin\frac{t}{2}\,dt = -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^\pi = 4a,$$

$$x_G = \frac{1}{4a}\int_L x\,ds = \frac{1}{4a}\int_0^\pi a(t-\sin t)2a\sin\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= \frac{a}{2}\left[\int_0^\pi t\sin\frac{t}{2}\,dt - \int_0^\pi \sin t\sin\frac{t}{2}\,dt\right] =$$

$$= \frac{a}{2}\left[-2t\cos\frac{t}{2}\Big|_0^\pi + 2\int_0^\pi \cos\frac{t}{2}\,dt - 2\int_0^\pi \sin^2\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\,dt\right]$$

$$= \frac{a}{2}\left[4\sin\frac{t}{2} - \frac{4}{3}\sin^3\frac{t}{2}\right]_0^\pi = \frac{a}{2}\left(4 - \frac{4}{3}\right) = \frac{4a}{3},$$

$$y_G = \frac{1}{4a}\int_L y\,ds = \frac{1}{4a}\int_0^\pi a(1-\cos t)2a\sin\frac{t}{2}\,dt =$$

1

$$= \frac{a}{2}\int_0^{\pi}\left(\sin\frac{t}{2} - \sin\frac{t}{2}\cos t\right)dt =$$

$$= \frac{a}{2}\int_0^{\pi}\left(\sin\frac{t}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{3t}{2} + \frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}\right)dt =$$

$$= \frac{a}{2}\left(-2\cos\frac{t}{2} + \frac{1}{3}\cos\frac{3t}{2} - \cos\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{a}{2}\left(2 - \frac{1}{3} + 1\right) = \frac{4a}{3}.$$

b) Đường đồng chất L có phương trình x = acost, y = asint, $0 \le t \le \pi$ nhận Oy làm trục đối xứng, nên trọng tâm G của nó nằm trên Oy, tức là $x_G = 0$. Ta chỉ phải tính y_G. Ta có

x' = –asint, y' = acost, ds = adt

$$\int_L ds = a\int_0^{\pi} dt = \pi a \ ,$$

$$\int_L y ds = a^2\int_0^{\pi}\sin t dt = a^2(-\cos t)\Big|_0^{\pi} = 2a^2 \ .$$

Do đó

$$y_G = \frac{2a^2}{\pi a} = \frac{2a}{\pi}.$$

c) Đường đồng chất L trong không gian có phương trình

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \ z = bt, \quad 0 \le t \le \pi \ .$$

Ta có

$$x' = -a\sin t, \quad y' = a\cos t, \quad z' = b \ .$$

Do đó

1 $$ds = \sqrt{a^2 + b^2}dt \ .$$

$$\int_L ds = \sqrt{a^2+b^2}\int_0^{\pi} dt = \pi\sqrt{a^2+b^2}\ ,$$

$$\int_L xds = \sqrt{a^2+b^2}\int_0^{\pi} a\cos t dt = 0\ ,$$

$$\int_L yds = \sqrt{a^2+b^2}\int_0^{\pi} a\sin t dt = a\sqrt{a^2+b^2}\cos t\Big|_{\pi}^{0} =$$

$$= 2a\sqrt{a^2+b^2}\ ,$$

$$\int_L zds = \sqrt{a^2+b^2}\int_0^{\pi} btdt = b\sqrt{a^2+b^2}\ \frac{t^2}{2}\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2}b\ \sqrt{a^2+b^2}\ \pi^2\ .$$

Vậy $\quad x_G = 0, \quad y_G = \dfrac{2a}{\pi}, \quad z_G = \dfrac{\pi b}{2}.$

4. a) Ta có

$$I = \int_{ABC}(x-y)^2dx + (x+y)^2dy = \int_{AB}(x-y)^2dx + (x+y)^2dy\ +$$

$$+ \int_{BC}(x-y)^2dx + (x+y)^2dy\ = I_1 + I_2\ .$$

Trên đoạn thẳng AB,ta có $y = x$, $dy = dx$, do đó

$$I_1 = \int_0^2 4x^2dx = \frac{4}{3}x^3\Big|_0^2 = \frac{4}{3}.8 = \frac{32}{3}.$$

Trên đoạn thẳng BC,ta có $y = 4 - x$, $dy = -dx$, do đó

$$I_2 = \int_2^4[(2x-4)^2 - 16]dx = \left[\frac{1}{6}(2x-4)^3 - 16x\right]_2^4 = -\frac{64}{3}.$$

Vậy

$$I = \frac{32}{3} - \frac{64}{3} = -\frac{32}{3}.$$

b) Parabôn $y = 2x - x^2$ cắt trục Ox tại hai điểm $x = 0$, $x = 2$. Ta có $dy = (2 - 2x)dx$, do đó

$$I = \int_L y dx - (y+x^2)dy = \int_0^2 [(2x-x^2) - 2x(2-2x)]dx =$$

$$= \int_0^2 (3x^2 - 2x)dx = \left[x^3 - x^2\right]_0^2 = 8 - 4 = 4.$$

c) Trên đường $y = (x - 1)\ln(x + 1)$, ta có

$$dy = \left[\frac{x-1}{x+1} + \ln(x+1)\right]dx.$$

Do đó

$$I = \int_{\overset{\frown}{AB}} \sqrt{x}dy - \sqrt{x}\ln(x+1)dx =$$

$$= \int_0^1 \left\{\sqrt{x}\left[\frac{x-1}{x+1} + \ln(x+1)\right] - \sqrt{x}\ln(x+1)\right\}dx =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{x}\,\frac{x-1}{x+1}dx,$$

đặt $x = t^2$, ta được:

$$I = \int_0^1 \frac{t^2-1}{t^2+1}2t^2dt = 2\int_0^1 \left(t^2 - 2 + \frac{2}{t^2+1}\right)dt =$$

$$= 2\left[\frac{t^3}{3} - 2t + 2\text{arctg}t\right]_0^1 = \pi - \frac{10}{3}.$$

1 d) Phương trình của đường L là

$$y = \begin{cases} x & \text{nếu } 0 \le x \le 1 \\ 2-x & \text{nếu } 1 \le x \le 2 . \end{cases}$$

Do đó

$$\int_L (x^2+y^2)dx + (x^2-y^2)dy = \int_0^1 2x^2 dx \; +$$

$$+ \int_1^2 \left[x^2 + (2-x)^2 - (x^2-(2-x)^2)\right]dx =$$

$$= 2\int_0^1 x^2 dx + 2\int_1^2 (2-x)^2 dx = 2\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 - 2\frac{(2-3)^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{4}{3}.$$

e) Trên đường L, ta có

$$x = a(t - \sin t), \qquad y = a(1 - \cos t),$$

$$dx = a(1 - \cos t)dt, \quad dy = a\sin t dt .$$

Do đó

$$\int_L (2a - y)dx + xdy =$$

$$= \int_0^{2\pi} [a^2(1+\cos t)(1-\cos t) + a^2(t - \sin t)\sin t]dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} t\sin t dt = a^2\left[-t\cos t\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos t dt\right] = -2\pi a^2 .$$

f) Phương trình tham số của elíp $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ là

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t .$$

Do đó $\quad dx = -a\sin t dt, \; dy = b\cos t dt .$

1

Vậy

$$\int_L (x+y)dx+(x-y)dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} [(a\cos t + b\sin t)(-a\sin t)+(a\cot s - b\sin t)b\cos t]dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (ab\cos 2t - \frac{a^2+b^2}{2}\sin 2t)dt =$$

$$= \left[\frac{ab\sin 2t}{2} + \frac{a^2+b^2}{2}\frac{\cos 2t}{2}\right]_0^{2\pi} = 0.$$

g) Phương trình tham số của nửa đường tròn $x^2 + (y-1)^2 = 1$ về phía $x \geq 0$ là

$$x = \cos t, \quad y = 1 + \sin t, \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Do đó

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \frac{-2xydx+(x^2-y^2)dy}{x^2+y^2} =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos t(1+\sin t)\sin t + (\cos^2 t - 1 - \sin^2 t - 2\sin t)\cos t}{\cos^2 t + (1+\sin t)^2} dt = 0.$$

Vì tử số của biểu thức dưới dấu tích phân bằng

$$\sin^2 t\cos t + \cos^3 t - \cos t = \cos t - \cos t = 0.$$

h) Đặt $\sqrt{x} = t$, phương trình tham số của cung OA là

$x = t^2, \quad y = 2t - t^2, \quad 0 \leq t \leq 2.$ Ta có

1

$$\int\limits_{\overset{\frown}{OA}} xdy + \frac{y}{1+x}\,dx = \int\limits_0^2 \left[2t^2(1-t) + \frac{(2t-t^2)\,2t}{1+t^2}\right] dt =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(2t^2 - 2t^3 - 2t + 4 + \frac{2t-4}{1+t^2}\right) dt =$$

$$= \left[\frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^4 - t^2 + 4t + \ln(1+t^2) - 4\text{arctgt}\right]_o^2 =$$

$$= \frac{4}{3} + \ln 5 - 4\text{arctg}2 \;.$$

i) Trên đường parabôn $y^2 = 2x + 1$ ta có $x = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$

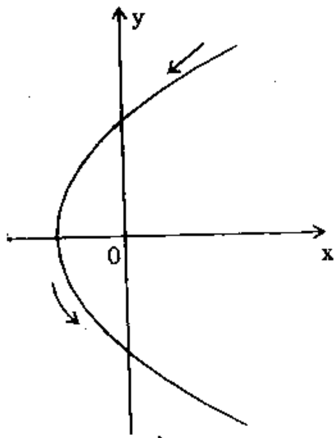
$dx = ydy$. Do đó

$$I = \int\limits_L \frac{ydx}{x^2+y^2} = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4y^2dy}{(y^2+1)^2} = -8\int_0^{+\infty} \frac{y^2dy}{(1+y^2)^2}$$

đổi biến số $y = \text{tg}\varphi$, ta được

$$I = -8\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi d\varphi =$$

$$= -8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = -2\pi \;.$$



Hình 65

5. a) Trên đường $2x + y = 2$, ta có

$y = 2 - 2x$, $dy = -2dx$, do đó

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} (xy-1)\,dx + x^2ydy = \int\limits_1^o [x(2-2x) - 1 - 2x^2(2-2x)]\,dx =$$

1

$$= \int_1^0 (4x^3 - 6x^2 + 2x - 1)\,dx = \left[x^4 - 2x^3 + x^2 - x\right]_1^0 = 1 .$$

b) Trên đường $4x + y^2 = 4$, ta có $x = 1 - \frac{y^2}{4}$, do đó

$dx = -\frac{1}{2}ydy$

Vậy $$\int_{\overset{\frown}{AB}} (xy - 1)\,dx + x^2 ydy =$$

$$= \int_0^2 \left\{ -\frac{1}{2}\left[(1 - \frac{y^2}{4})y - 1\right] y + (1 - \frac{y^2}{4})^2 y \right\} dy =$$

$$= \int_0^2 \left(-\frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{8} + \frac{y}{2} + y - \frac{y^3}{2} + \frac{y^5}{16} \right) dy =$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{y^5}{16} + \frac{y^4}{8} - \frac{y^3}{2} - \frac{y^2}{2} + \frac{3}{2}y \right) dy =$$

$$= \left[\frac{y^6}{96} + \frac{y^5}{40} - \frac{y^4}{8} - \frac{y^3}{6} + \frac{3y^2}{4} \right]_0^2 = \frac{2}{3} + \frac{4}{5} - 2 - \frac{4}{3} + 3 = \frac{17}{15} .$$

c) Phương trình tham số của đường elip $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ nối hai điểm A (1, 0), B (0, 2) theo chiều dương là

$x = \cos t,\ y = 2\sin t,\ 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$

Vậy

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} (xy - 1)\,dx + x^2 ydy =$$

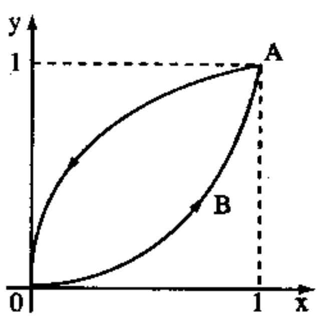
1

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(2\sin t \cos t - 1)(-\sin t) + 4\cos^3 t \sin t \right] dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-2\sin^2 t \cos t + \sin t + 4\cos^3 t \sin t)\, dt =$$

$$= \left[-\frac{2}{3}\sin^3 t - \cos t - \cos^4 t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{3} + 2 = \frac{4}{3}.$$

6. a) Hai đường $y = x^2$ và $x = y^2$ cắt nhau tại hai điểm O (0, 0) và A (1, 1) (h.66). Dọc theo cung OBA, ta có $y = x^2$, $dy = 2xdx$, do đó



Hình 66

$$\int_{\overset{\frown}{OBA}} (2xy - x^2)\, dx + (x + y^2)\, dy =$$

$$= \int_0^1 [2x^3 - x^2 + 2(x + x^4)x]\, dx =$$

$$= \int_0^1 (2x^5 + 2x^3 + x^2)\, dx =$$

$$= \left[\frac{2}{6}x^6 + \frac{2}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{7}{6}$$

Dọc theo cung $\overset{\frown}{OCA}$, ta có $x = y^2$, $dx = 2ydy$, do đó

$$\int_{\overset{\frown}{ACO}} (2xy - x^2)\, dx + (x + y^2)\, dy = \int_1^0 [(2y^3 - y^4)\, 2y + 2y^2]\, dy =$$

$$= \int_1^0 (4y^4 - 2y^5 + 2y^2)\, dy = \left[\frac{4}{5}y^5 - \frac{2}{6}y^6 + \frac{2}{3}y^3 \right]_1^0 = -\frac{17}{15}$$

Vậy

$$I = \int_L (2xy - x^2)dx + (x + y^2)\,dy = \frac{7}{6} - \frac{17}{15} = \frac{1}{30}$$

Công thức Green cho ta

$$I = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(x + y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(2xy - x^2) \right] dxdy$$

trong đó D là miền giới hạn bởi đường L. Vậy

$$I = \iint_D (1 - 2x)\,dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (1 - 2x)\,dy =$$

$$= \int_0^1 \left[y - 2xy \right]_{y = x^2}^{y = \sqrt{x}} dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - 2x\sqrt{x} - x^2 + 2x^3)\,dx =$$

$$= \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - 2 \cdot \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{30}$$

b) Phương trình tham số của đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ là

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad -\pi \leqslant t \leqslant \pi$$

Vậy

$$I = \int_L (2x^3 - y^3)\,dx + (x^3 + y^3)\,dy =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} [\,(2\cos^3 t - \sin^3 t)\,(-\sin t) + (\cos^3 t + \sin^3 t)\cos t]\,dt =$$

1

$$= \int_{-\pi}^{\pi} (-2\cos^3 t \sin t + \sin^4 t + \cos^4 t + \sin^3 t \cos t)\,dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}(\sin^4 t+\cos^4 t)dt = 2\int_{0}^{\pi}(\sin^4 t+\cos^4 t)dt \; .$$

Vì $-2\cos^3 t\sin t$ và $\sin^3 t\cos t$ là những hàm số lẻ, còn $\sin^4 t$ **và** $\cos^4 t$ là những hàm số chẵn. Ta lại có

$$\int_0^{\pi}(\sin^4 t+\cos^4 t)dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4 t+\cos^4 t)dt =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\,dt = 4.\frac{3}{4}.\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}.$$

Vậy $\qquad I = 2.\frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$.

Nếu áp dụng công thức Green, ta được:

$$I = \iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}(x^3+y^3) - \frac{\partial}{\partial y}(2x^3-y^3)\right]dxdy = 3\iint_D(x^2+y^2)dxdy$$

trong đó D là miền giới hạn bởi đường tròn L. Chuyển sang tọa độ cực, ta được:

$$I = 3\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 r^3 dr = 3.2\pi.\frac{1}{4} = \frac{3\pi}{2}.$$

c) Trên OA, $y = 0$, $dy = 0$, do đó

$$\int_{OA}(x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy = \int_0^1 x^2dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Trên AB ta có $x + y = 1$ hay $y = 1 - x$, $dy = -dx$, do đó

$$\int_{AB}(x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy = \int_1^0[x^2+(1-x)^2-x^2+(1-x)^2]dx =$$

$$= 2\int_1^0 (1-x)^2 dx = -\frac{2}{3}(1-x)^3\Big|_1^0 = -\frac{2}{3}.$$

Trên OB ta có x = 0, dx = 0, do đó

$$\int_{BO} (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy = -\int_1^0 y^2 dy = -\frac{y^3}{3}\Big|_1^0 = \frac{1}{3}.$$

Vậy

$$\int_{OABO} (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy = \frac{1}{3}-\frac{2}{3}+\frac{1}{3} = 0.$$

Đặt $P(x, y) = x^2 + y^2$, $Q(x, y) = x^2 - y^2$. Gọi D là miền tam giác giới hạn bởi đường OABO. Công thức Green cho ta

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \iint_D 2(x-y)dxdy$$

$$= 2\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x-y)dy = 2\int_0^1 \left[xy - \frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=1-x} dx =$$

$$= 2\int_0^1 \left[x(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2}\right]dx = 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{(1-x)^3}{6}\right]_0^1$$

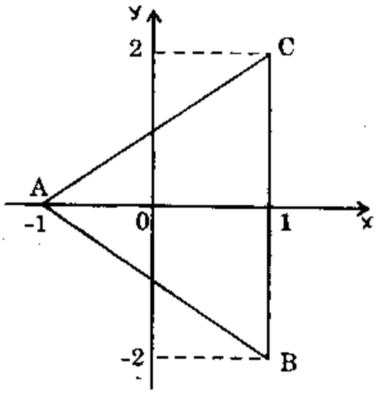
$$= 2\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\right) = 0.$$

7. a) Đặt $P(x, y) = -xy\left(x + \frac{y}{2}\right)$, $Q(x, y) = xy\left(\frac{x}{2} + y\right)$. Ta có

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = xy + y^2; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -x^2 - xy.$$

1 Áp dụng công thức Green, ta được:

$$I = \int_L xy\left[-(x+\frac{y}{2})dx + (\frac{x}{2}+y)dy\right] = \iint_D (x^2+2xy+y^2)dxdy\,,$$



Hình 67

D là miền tam giác giới hạn bởi L.(hình 67). Phương trình của các đường thẳng AB, AC theo thứ tự là $y = -1 - x$, $y = 1 + x$. Ta có

$$I = \int_{-1}^{1} dx \int_{-(1+x)}^{1+x} (x^2+2xy+y^2)dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} dx \int_{-(1+x)}^{1+x} (x^2+y^2)dy =$$

$$= 2\int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{1+x} (x^2+y^2)dy\,.$$

Vì số hạng 2xy là lẻ đối với y, còn các số hạng x^2, y^2 là chẵn đối với y. Do đó

$$I = 2\int_{-1}^{1}\left[x^2y+\frac{1}{3}y^3\right]_{y=0}^{y=1+x} dx = 2\int_{-1}^{1}\left[x^2(1+x)+\frac{1}{3}(1+x)^3\right]dx$$

$$= 4\int_0^1\left(x^2+\frac{1}{3}+x^2\right)dx = 4\left[\frac{2}{3}x^3+\frac{x}{3}\right]_0^1 = 4\,.$$

b) ABC là đường gấp khúc không kín. Ta có

$$I = \int_{ABC} 2(x^2+y^2)dx + (4y+3)xdy =$$

$$= \int_{ABCA} 2(x^2+y^2)dx + (4y+3)xdy -$$

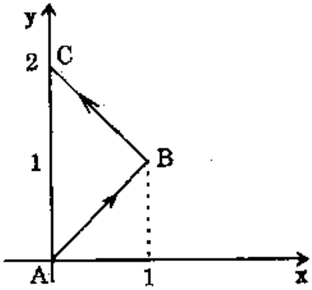
$$- \int_{CA} 2(x^2+y^2)dx + (4y+3)xdy\,.$$

Nhưng dọc theo đoạn thẳng CA ta có $x = 0$, do đó $dx = 0$. vì vậy

$$\int_{CA} 2(x^2 + y^2)dx + (4y + 3)xdy = 0$$

do đó:

$$I = \int_{ABCA} 2(x^2 + y^2)dx + (4y + 3)xdy$$



Hình 68

ABCA là đường gấp khúc kín. Gọi D là miền tam giác giới hạn bởi đường đó. Đặt

$$P(x, y) = 2(x^2 + y^2), \qquad Q(x, y) = (4y + 3)x ,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 4y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 4y+3 .$$

Theo công thức Green, ta được:

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 3 \iint_D dxdy .$$

Nhưng $\iint_D dxdy$ bằng diện tích miền tam giác D, vậy $I = 3$.

c) Đặt

$$P(x, y) = xy + x + y, \qquad Q(x, y) = xy + x - y.$$

Ta có

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x + 1; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = y + 1 .$$

Áp dụng công thức Green vào tích phân đường

$$I = \int_L Pdx + Qdy \quad , \text{ ta được}$$

$$I = \iint_D (y - x)\ dxdy$$

trong đó D là miền tròn giới hạn bởi đường L. Chuyển sang tọa độ cực, phương trình của đường tròn L là $r = a\cos\varphi$, $\frac{-\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$. Ta được

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} r^2 (\sin\varphi - \cos\varphi)\, dr = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin\varphi - \cos\varphi) \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{a\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^3}{3} (\sin\varphi - \cos\varphi) \cos^3\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{-2a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi\, d\varphi = -\frac{2a^3}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi a^3}{8}$$

d) Đặt

$$P\ (x, y) = -y^3\ (x + \frac{y}{4}) \quad , \quad Q\ (x, y) = x^3\ (y + \frac{x}{4})$$

Ta có

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -y^3 - 3x\, y^2 \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = x^3 + 3\, x^2 y$$

Theo công thức Green, ta có

$$I = \int_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy\ ,$$

D là miền tròn giới hạn bởi đường L. Vậy

$$I = \iint\limits_D (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)\,dxdy = \iint\limits_D (x+y)^3\,dxdy$$

Chuyển sang tọa độ cực, ta được

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} (\cos\varphi + \sin\varphi)^3\ r^4 dr =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi + \sin\varphi)^3 \left[\frac{r^5}{5}\right]_o^{2\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^5}{5} (\cos\varphi + \sin\varphi)^3 \cos^5\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{2^6}{5} \int_o^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3\varphi + 3\cos\varphi\sin^2\varphi) \cos^5\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{2^6}{5} \int_o^{\frac{\pi}{2}} (3\cos^6\varphi - 2\cos^8\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{2^6}{5} \left(3 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}.$$

8. Ta có

1 $$P(x, y) = 1 - \frac{y^2}{x^2} \cos\frac{y}{x}$$

$$Q(x, y) = \sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}.$$

Do đó

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{2y}{x^2}\cos\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^3}\sin\frac{y}{x} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Các hàm số P(x, y), Q(x, y), $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ đều liên tục $\forall x \neq 0$. Do đó tích phân đường

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy$$

dọc theo mọi đường nối hai điểm A, B không cắt trục Oy đều bằng nhau. Để tính tích phân ấy ta chọn đường lấy tích phân là đoạn thẳng nối AB. Dọc theo đoạn thẳng đó ta có $y = \pi$, do đó dy = 0, vậy

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy = \int_1^2 \left(1 - \frac{\pi^2}{x^2}\cos\frac{\pi}{x}\right)dx =$$

$$= \left[x + \pi\sin\frac{\pi}{x}\right]_1^2 = \pi + 1.$$

9. Đặt

$$P(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)(3x^2 - y^2)}{x^2 y} = \frac{3x^2}{y} + 2y - \frac{y^3}{x^2},$$

$$Q(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)(3y^2 - x^2)}{xy^2} = \frac{3y^2}{x} + 2x - \frac{x^3}{y^2}.$$

Ta có

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{3y^2}{x^2} + 2 - \frac{3x^2}{y^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Các hàm số P(x, y), Q(x, y), $\dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ liên tục tại mọi điểm (x, y) thỏa mãn điều kiện $xy \neq 0$. Do đó tích phân đường

$$\int P dx + Q dy$$

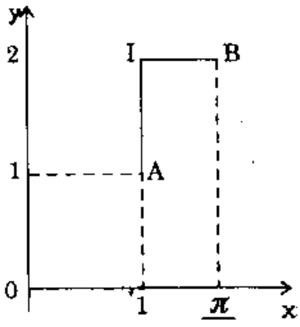
dọc theo mọi đường không cắt hai trục tọa độ chỉ phụ thuộc hai điểm mút. Cung AB xác định bởi

$$x = t + \cos^2 t, \quad y = 1 + \sin^2 t, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

nằm trọn trong góc phần tư thứ nhất, không cắt các trục tọa độ, điểm A ứng với t = 0, nó có tọa độ (1, 1), điểm B ứng với $t = \dfrac{\pi}{2}$, nó có tọa độ $(\dfrac{\pi}{2}, 2)$. Theo kết quả trên, ta có

$$I = \int_{\overset{\frown}{AB}} P dx + Q dy = \int_{AIB} P dx + Q dy$$

trong đó AIB là đường gấp khúc gồm đoạn AI song song với Oy và đoạn IB song song với Ox (h.69). Dọc theo AI, ta có x = 1, dx = 0.



Hình 69

Vậy

$$\int_{AI} P dx + Q dy = \int_1^2 \left(3y^2 + 2 - \frac{1}{y^2}\right) dy =$$

$$= \left[y^3 + 2y + \frac{1}{y}\right]_1^2 = \frac{(y^2+1)^2}{y}\Bigg|_1^2 = \frac{25}{2} - 4.$$

Dọc theo IB, ta có y = 2, dy = 0, do đó:

$$\int_{IB} P dx + Q dy = \int_1^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3x^2}{2} + 4 - \frac{8}{x^2}\right) dx = \left[\frac{x^3}{2} + 4x + \frac{8}{x}\right]_1^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{(x^2+4)^2}{2x}\Big|_1^{\frac{\pi}{2}} = \frac{(\pi^2+16)^2}{16\pi} - \frac{25}{2}$$

Vậy

$$I = \frac{(\pi^2 + 16)^2}{16\pi} - 4 .$$

10. Đặt

$$P(x, y) = (x + a)(y + b)^2 + (n - m)by + may$$

$$Q(x, y) = (x + a)^2 (y + b) + 2(n - 1)ax$$

Ta có

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2(x + a)(y + b) + (n - m)b + ma$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2(x+a)(y+b) + 2(n - 1)a$$

Các hàm số P, Q, $\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial Q}{\partial x}$ liên tục $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$. Điều kiện ắt có và đủ để tích phân đường

$$\int_L Pdx + Qdy = 0$$

với mọi đường kín L là

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

hay $\qquad ma + (n - m)b = 2(n - 1)a$

Điều đó đúng với mọi giá trị của a, b, vì vậy ta có

$$\begin{cases} m = 2n - 2 \\ n - m = 0 \end{cases}$$

Do đó

$$n = m = 2$$

11. a) Ta có

$$P(x, y) = x^2 - 2xy^2 + 3$$

$$Q(x, y) = y^2 - 2x^2y + 3$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -4xy = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Do đó Pdx + Qdy là vi phân toàn phần của một hàm số u (x, y) nào đó. Vì P, Q, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ liên tục trên $\mathbf{R}^2$, nên hàm số u được cho bởi công thức

$$u(x,y) = \int_{x_o}^{x} P(x, y_o)\,dx + \int_{y_o}^{y} Q(x,y)\,dy + C$$

trong đó x_o, y_o là những số cố định nào đó, C là hằng số tùy ý. Chọn $x_o = y_o = 0$, ta được

$$u(x,y) = \int_0^x (x^2+3)\,dx + \int_0^y (y^2 - 2x^2y + 3)\,dy + C =$$

$$= \frac{x^3}{3} + 3x + \frac{y^3}{3} - x^2y^2 + 3y + C =$$

$$= \frac{x^3 + y^3}{3} + 3(x+y) - x^2y^2 + C.$$

Chú thích : Ta có thể tìm u (x, y) biết $\frac{\partial u}{\partial x} = x^2 - 2xy^2 + 3$,

1 $\frac{\partial u}{\partial y} = y^2 - 2x^2y + 3$ như sau :

Do $\dfrac{\partial u}{\partial x} = x^2 - 2xy^2 + 3$, ta được $u(x, y) = \dfrac{x^3}{3} - x^2y^2 + 3x + \varphi(y)$

trong đó Q (y) là một hàm số khả vi tùy ý. Từ đó ta được

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2x^2y + \varphi'(y)$$

So sánh với biểu thức của $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ ở trên, ta được

$$\varphi'(y) = y^2 + 3$$

Do đó

$\varphi(y) = \dfrac{y^3}{3} + 3y + C$, C là hằng số tùy ý. Vậy

$$u = \frac{x^3}{3} - x^2y^2 + 3x + \frac{y^3}{3} + 3y + C$$

$$= \frac{x^3 + y^3}{3} + 3(x + y) - x^2y^2 + C \ .$$

b) Ta có

$$P(x, y) = 2x - 3xy^2 + 2y$$

$$Q(x, y) = 2x - 3x^2y + 2y$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -6xy + 2 = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Vậy Pdx + Qdy là vi phân toàn phần của một hàm số u (x, y) nào đó. Vì P, Q, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ liên tục trên $\mathbf{R}^2$, nên ta được

$$u(x,y) = \int_0^x 2x\,dx + \int_0^y (2x - 3x^2y + 2y)\,dy + C =$$

$$= x^2 + 2xy - \frac{3}{2}x^2y^2 + y^2 + C$$

trong đó C là hằng số tùy ý .

c) Ta có

$$P\ (x,\ y) = e^{x+y} + \cos\ (x - y)$$

$$Q\ (x,\ y) = e^{x+y} - \cos\ (x - y) + 2$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^{x+y} + \sin(x-y) = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Do đó Pdx + Qdy là vi phân của một hàm số u (x, y) nào đó. Các hàm số P, Q, $\frac{\partial P}{\partial y}$; $\frac{\partial Q}{\partial x}$ liên tục trên R^2, ta có

$$u\,(x,y) = \int_0^x (e^x + \cos x)\,dx + \int_0^y \left[e^{x+y} - \cos(x-y) + 2\right] dy + C =$$

$$= \left[e^x + \sin x\right]_o^x + \left[e^{x+y} + \sin(x-y) + 2y\right]_o^y + C =$$

$$= e^x + \sin x + e^{x+y} - e^x + \sin(x-y) - \sin x + 2y + C =$$

$$= e^{x+y} + \sin(x-y) + 2y + C\,.$$

d) Ta có

$$P\ (x,\ y) = e^x\ [e^y\ (x - y + 2) + y\ ]$$

$$Q\ (x,\ y) = e^x\ [e^y\ (x - y) + 1]$$

1

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^x[\,e^y(x - y + 2 - 1) + 1],\ \frac{\partial Q}{\partial x} = e^x[\,e^y(x-y) + 1 + e^y]$$

Do đó $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, Pdx + Qdy là vi phân toàn phần của **một hàm** số u(x, y) nào đó. Các hàm số P, Q, $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ liên tục trên $\mathbf{R}^2$, **vậy**

$$u(x, y) = \int_0^x e^x(x+2)dx + \int_0^y e^x[e^y(x-y)+1]dy + C =$$

$$= e^x(x+2)\Big|_0^x - \int_0^x e^x dx + e^x\left[e^y(x-y)\Big|_0^y + \int_0^y e^y dy + y\right] + C =$$

$$= e^x(x+2) - 2 - e^x + 1 + e^x[e^y(x-y) - x + e^y - 1 + y] + C =$$

$$= e^x[e^y(x-y+1)+y] + C'$$

trong đó C' = C + 1 cũng là một hằng số tùy ý.

e) Ta có

$$P(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2},$$

$$Q(x, y) = \frac{1-x^2-y^2}{x^2+y^2}y,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = y\frac{(x^2+y^2)(-2x)-(1-x^2-y^2)2x}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Do đó Pdx + Qdy là vi phân toàn phần của một hàm số u(x, y)
1 nào đó. Hàm số u ấy thỏa mãn phương trình

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2}\ .$$

Do đó

$$u(x, y) = \int \frac{xdx}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+f(y),$$

trong đó f(y) là một hàm số nào đó của biến số y mà ta sẽ xác định. Từ đó suy ra

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}+f'(y)\ .$$

So sánh với

$$\frac{\partial u}{\partial y}=y\frac{1-x^2-y^2}{x^2+y^2}=\frac{y}{x^2+y^2}-y\ ,$$

ta được $\qquad f'(y) = -y$.

Do đó

$$f(y) = -\frac{y^2}{2} + C,$$ C là hằng số tùy ý. Vậy

$$u(x, y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)-\frac{y^2}{2} + C.$$

12. Ta có

$$P(x, y) = \frac{x-y}{(x^2+y^2)^m},$$

$$Q(x, y) = \frac{x+y}{(x^2+y^2)^m},$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-(x^2+y^2)^m-(x-y)m(x^2+y^2)^{m-1}2y}{(x^2+y^2)^{2m}}=$$

$$= \frac{-(x^2+y^2) - 2my(x-y)}{(x^2+y^2)^{m+1}} =$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2)^m - (x+y)\,m\,(x^2+y^2)^{m-1}\,2x}{(x^2+y^2)^{2m}} =$$

$$= \frac{(x^2+y^2) - 2mx\,(x+y)}{(x^2+y^2)^{m+1}}$$

Các hàm số P, Q, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ liên tục $\forall\,(x, y) \neq (0, 0)$. Do đó trong mọi miền đơn liên không chứa gốc tọa độ, điều kiện át có và đủ để Pdx + Qdy là vi phân toàn phần của một hàm số u (x, y) nào đó là

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

hay

$$-(x^2+y^2) - 2my(x-y) = (x^2+y^2) - 2mx\,(x+y)$$

hay

$$2\,(x^2+y^2) = 2m\,(x^2+xy-xy+y^2) = 2m\,(x^2+y^2)$$

Do đó

$$m = 1$$

Với m = 1, ta có

$$P\,(x, y)\,dx + Q\,(x, y)\,dy = \frac{(x-y)\,dx + (x+y)\,dy}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{xdx + ydy}{x^2+y^2} + \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} =$$

$$= d\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right) + d\,(\operatorname{arctg}\frac{y}{x})$$

Vậy với m = 1, Pdx + Qdy là vi phân toàn phần của hàm số

$$u\ (x,\ y)\ =\ \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+C$$

C là hằng số tùy ý .

13. Ta có $\quad P\,(x, y)\ =\ \dfrac{ax^2\ +\ 2xy\ +\ y^2}{(x^2+y^2)^2}$

$$Q\,(x\ ,y)\ =\ -\frac{x^2+2xy+by^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Do đó

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{(x^2+y^2)^2\,2\,(x+y)-(ax^2+2xy+y^2)\,2\,(x^2+y^2)\,2y}{(x^2+y^2)^4}=$$

$$=\frac{2}{(x^2+y^2)^3}\left[x^3-3xy^2+(1-2a)\,x^2y-y^3\right]$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{(x^2+y^2)^2\,2\,(x+y)-(x^2+2xy+by^2)\,2(x^2+y^2)\,2x}{(x^2+y^2)^4}=$$

$$=\frac{2}{(x^2+y^2)^3}\left[x^3+(2b-1)\,xy^2+3x^2y-y^3\right]$$

Các hàm số P, Q, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ liên tục $\forall$ (x, y) $\neq$ (0, 0). Do đó trong mọi miền đơn liên không chứa gốc tọa độ, điều kiện ắt có và đủ để Pdx + Qdy là vi phân toàn phần của một hàm số u (x, y) nào đó là

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

Bằng cách đồng nhất hệ số, ta suy ra

$$2b-1=-3\Rightarrow b=-1$$

1 $$1-2a=3\Rightarrow a=-1$$

Tóm lại, biểu thức

$$\frac{-x^2+2xy+y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx-\frac{x^2+2xy-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy$$

là vi phân toàn phần của một hàm số u (x, y) nào đó. Ta có

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-x^2+2xy+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Do đó

$$u(x,y)=\int\frac{-x^2+2xy+y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx=\int\frac{-2x^2+2xy+(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}\,dx=$$

$$=-\int\frac{2x^2dx}{(x^2+y^2)^2}+y\int\frac{2xdx}{(x^2+y^2)^2}+\int\frac{dx}{x^2+y^2}$$

Nhưng

$$\int\frac{2x^2dx}{(x^2+y^2)^2}=\int x\,.\,\frac{2xdx}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{x}{x^2+y^2}+\int\frac{dx}{x^2+y^2}$$

Do đó $\quad u(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}+y\displaystyle\int\frac{2xdx}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x-y}{x^2+y^2}+f(y),$

trong đó f(y) là một hàm số mà ta sẽ xác định. Từ đó ta có

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-(x^2+y^2)-(x-y)\,2y}{(x^2+y^2)^2}+f'(y)=-\frac{x^2+2xy-y^2}{(x^2+y^2)^2}+f'(y)$$

So sánh với điều đã biết

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x^2+2xy-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

1 ta được $f'(y)=0$, do đó $f(y)=C$, C là hằng số tùy ý.

Vậy $\qquad u(x,y) = \dfrac{x-y}{x^2+y^2} + C$.

14. Ta có $P(x,y) = \dfrac{y(1-x^2+\alpha y^2)}{(1+x^2+y^2)^2} = \dfrac{y-yx^2+\alpha y^3}{(1+x^2+y^2)^2}$

$$Q(x,y) = \frac{x(1-y^2+\beta x^2)}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{x-xy^2+\beta x^3}{(1+x^2+y^2)^2}$$

Do đó

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{(1+x^2+y^2)^2(1-x^2+3\alpha y^2)-(y-yx^2+\alpha y^3)\,2(1+x^2+y^2)\,2y}{(1+x^2+y^2)^4} =$$

$$= \frac{1-x^4+3(\alpha+1)x^2y^2+3(\alpha-1)y^2-\alpha y^4}{(1+x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{(1+x^2+y^2)^2(1-y^2+3\beta x^2)-(x-xy^2+\beta x^3)\,2(1+x^2+y^2)\,2x}{(1+x^2+y^2)^4}$$

$$= \frac{1+3(\beta-1)x^2-\beta x^4+3(\beta+1)x^2y^2-y^4}{(1+x^2+y^2)^3}$$

Các hàm số P, Q, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ liên tục trên $\mathbf{R}^2$. Do đó muốn cho tích phân đường

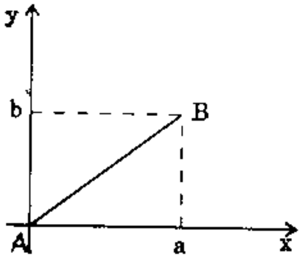
$$\int_L P dx + Q dy$$

Không phụ thuộc vào đường L, điều kiện cần và đủ là

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

đồng nhất các hệ số trong $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ và $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, ta được $\qquad \alpha = \beta = 1$

Với $\alpha = \beta = 1$, tích phân đường $\int\limits_L Pdx + Qdy$ không phụ thuộc L. Để tính tích phân ấy từ A(0,0) đến B(a,b), ta chọn đường lấy tích phân là đoạn thẳng nối AB.



Hình 70

Phương trình của đường thẳng đi qua A, B là y = kx, với $k = \dfrac{b}{a}$ (hình 70). Do đó dy = kdx. Vậy

$$I = \int\limits_{AB} Pdx + Qdy =$$

$$= \int_0^a \frac{kx(1 - x^2 + k^2x^2)dx + x(1 - k^2x^2 + x^2)kdx}{(1 + x^2 + k^2x^2)^2} =$$

$$= \int_0^a \frac{2kxdx}{[1 + (1 + k^2)x^2]^2} = -\frac{k}{1 + k^2} \cdot \frac{1}{1 + (1 + k^2)x^2}\bigg|_0^a =$$

$$= \frac{ka^2}{1 + (1 + k^2)a^2} = \frac{ab}{1 + a^2 + b^2}.$$

15. Ta có

$$xdx + ydy = \frac{1}{2}d(x^2 + y^2 + 1)$$

Do đó

$$\frac{xdx + ydy}{(x^2 + y^2 + 1)^2} = d\left(-\frac{1}{2(x^2 + y^2 + 1)}\right).$$

L là đường elip $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, một đường kín, do đó

$$\int\limits_L \frac{xdx + ydy}{(x^2 + y^2 + 1)^2} = 0,$$

16. a) Ta có

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3 \ (0 \le t \le 1)$$

$$dx = dt, \quad dy = 2tdt, \quad dz = 3t^2\,dt$$

Do đó

$$\int_L (y^2 - z^2)dx + 2yzdy - x^2dz =$$

$$= \int_0^1 [(t^4 - t^6) + 4t^6 - 3t^4]dt =$$

$$= \int_0^1 (3t^6 - 2t^4)dt = \left[3\frac{t^7}{7} - 2\frac{t^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{35}.$$

b) $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ ($0 \le t \le 2\pi$)

$dx = -a\sin t dt$, $dy = a\cos t dt$, $dz = bdt$

Vậy

$$\int_L ydx + zdy + xdz = \int_0^{2\pi} [-a^2\sin^2 t + ab(1+t)\cos t]dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{a^2}{2}(1 - \cos 2t) + ab(1+t)\cos t\right] dt =$$

$$= \left[-\frac{a^2}{2}\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right) + ab(1+t)\sin t + ab\cos t\right]_0^{2\pi} = -\pi a^2.$$

c) Trước hết ta lập phương trình tham số của đường L. Thế $y = x\,\mathrm{tg}\alpha$ vào phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, ta được

$$\frac{x^2}{\cos^2\alpha} + z^2 = a^2$$

Đặt $\frac{x}{\cos\alpha} = a\cos\varphi$, $z = a\sin\varphi$, y là tham số, ta được phương trình tham số của L là

$$x = a\cos\alpha\cos\varphi, \ y = a\sin\alpha\cos\varphi, \ z = a\sin\varphi, \ (0 \le \varphi \le 2\pi)$$

Do đó

$$dx = -a\cos\alpha \sin\varphi d\varphi, \quad dy = -a\sin\alpha \sin\varphi d\varphi, \quad dz = a\cos\varphi d\varphi$$

Đưa tích phân đường đã cho về tích phân xác định, ta được

$$I = a^2\int_0^{2\pi} [(\sin\alpha\cos\varphi - \sin\varphi)(-\cos\alpha\sin\varphi) + (\sin\varphi - \cos\alpha\cos\varphi) .$$

$$(-\sin\alpha\sin\varphi) + (\cos\alpha - \sin\alpha)\cos^2\varphi]d\varphi =$$

$$= a^2\int_0^{2\pi} (\cos\alpha - \sin\alpha)d\varphi = 2\pi a^2 (\cos\alpha - \sin\alpha) =$$

$$= 2\sqrt{2}\pi a^2 \sin(\frac{\pi}{4} - \alpha)$$

d) Thế $z = 1 - x$ vào phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, ta được

$$y^2 = 2x(1 - x)$$

Vế phải không âm nếu $0 \le x \le 1$. Đặt

$$x = \cos^2\frac{t}{2} = \frac{1 + \cos t}{2}$$

Do đó

$$y^2 = 2\cos^2\frac{t}{2}\sin^2\frac{t}{2} = \frac{\sin^2 t}{2}$$

Suy ra $\qquad y = \dfrac{\sin t}{\sqrt{2}}$

Và $\qquad z = 1 - x = \dfrac{1 - \cos t}{2}$

Do đó các phương trình tham số của L là

$$x = \frac{1 + \cos t}{2}, \quad y = \frac{\sin t}{\sqrt{2}}, \quad z = \frac{1 - \cos t}{2}, \qquad -\pi \le t \le \pi$$

Vậy

$$\int_L zdx + xdy + ydz =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1-\cos t}{2}\left(-\frac{\sin t}{2}\right) + \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)\frac{\cos t}{\sqrt{2}} + \frac{\sin^2 t}{2\sqrt{2}}\right] dt =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos t)dt = \sqrt{2}\int_0^{\pi}\cos^2\frac{t}{2}dt = 2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

17. a) Biên S của hình lập phương gồm sáu mặt. Đặt

$S_1 = \{(x,y,z): z = 0,\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$

$S_2 = \{(x,y,z): z = 1,\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$

$S_3 = \{(x,y,z): y = 0,\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le z \le 1\}$

$S_4 = \{(x,y,z): y = 1,\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le z \le 1\}$

$S_5 = \{(x,y,z): x = 0,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1\}$

$S_6 = \{(x,y,z): x = 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1\}$

Trên mặt S_1, ta có $z = 0$, do đó $p = q = 0$, $dS = dxdy$. Vậy nếu

$D_1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$, ta có

$$\iint_{S_1}(x+y+z)dS = \iint_D (x+y)dxdy = \int_0^1 dx\int_0^1 (x+y)dy =$$

$$= \int_0^1 \left(xy + \frac{1}{2}y^2\right)\Big|_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1\left(x+\frac{1}{2}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\right]_0^1 = 1.$$

Trên mặt S_2 ta có $z = 1$, $dS = dxdy$, do đó

$$\iint_{S_2}(x+y+z)dS = \iint_D (x+y+1)dxdy =$$

$$= \iint_D (x+y)dxdy + \iint_D dxdy = 1 + 1 = 2.$$

Vậy $\iint_S (x+y+z)dS = 3(1+2) = 9$

b) Trên mặt phẳng $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4} = 1$, ta có

$$z = 4 - 2x - \frac{4}{3}y$$

Do đó

$$p = -2,\ q = -\frac{4}{3}\ )\ dS = \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dxdy = \frac{\sqrt{61}}{3}\ dxdy.$$

Hình chiếu của mặt S xuống mặt phẳng xOy là miền D giới hạn bởi các trục Ox , Oy và đường thẳng $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$. Miền D được xác định bởi các bất đẳng thức

$$0 \le x \le 2\ ,\ 0 \le y \le \frac{3}{2}x$$

Vậy

$$\iint\limits_S (z + 2x + \frac{4y}{3})dS = \iint\limits_D (4 - 2x - \frac{4}{3}y + 2x + \frac{4}{3}y)\frac{\sqrt{61}}{3}dxdy =$$

$$= \frac{4.\sqrt{61}}{3}\iint\limits_D dxdy = \frac{4.\sqrt{61}}{3}\ .\ 3 = 4\sqrt{61}\ .$$

c) Trên mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, ta có

$$p = \frac{x}{z}\ ,\ q = \frac{y}{z}$$

$$dS = \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2}}\,dxdy = \sqrt{2}\ dxdy$$

Hình chiếu của S xuống mặt phẳng xOy là miền D giới hạn bởi đường tròn $x^2 + y^2 = 2ax$. Do đó

$$I = \iint\limits_S (yz + zx + xy)dS = \sqrt{2}\iint\limits_D [\sqrt{x^2 + y^2}\,(x + y) + xy]dxdy$$

chuyển sang tọa độ cực, ta có

$$I = \sqrt{2}\iint\limits_{D'} [(\cos\varphi + \sin\varphi) + \cos\varphi\sin\varphi]\ r^3drd\varphi\ ,$$

D' là miền trong mặt phẳng $(r\ ,\ \varphi)$ tương ứng với D . Nó được xác định bởi các bất đẳng thức

1

$$-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \le r \le 2a\cos\varphi$$

Vậy

$$I = \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi + \sin\varphi + \cos\varphi\sin\varphi)d\varphi\int_{0}^{2a\cos\varphi} r^3\,dr =$$

$$= 4\sqrt{2}a^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi + \sin\varphi + \cos\varphi\sin\varphi)\cos^4\varphi d\varphi =$$

$$= 8\sqrt{2}a^4\int_{0}^{\pi/2}\cos^5\varphi d\varphi = 8\sqrt{2}\,a^4\,\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} = \frac{64a^4\sqrt{2}}{15}.$$

d) Trên mặt $z = x + y^2$, ta có

$$p = 1\,,\ q = 2y\,,\ dS = \sqrt{1 + 1 + 4y^2}\,dxdy$$

Hình chiếu của S xuống mặt phẳng xOy là hình chữ nhật D xác định bởi

$$0 \le x \le 1\,,\ 0 \le y \le 2$$

Do đó

$$\iint_S y dS = \iint_D y\sqrt{2 + 4y^2}\,dxdy =$$

$$= \int_0^1 dx\int_0^2 \sqrt{2}\,y\sqrt{1 + 2y^2}\,dy =$$

$$= \sqrt{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}(1 + 2y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 = \frac{13\sqrt{2}}{3}.$$

e) Mặt cầu S nhận mặt phẳng $z = 0$ làm mặt phẳng đối xứng. Hàm số dưới dấu tích phân là chẵn đối với z. Do đó nếu gọi S_1 là phần của mặt cầu S nằm ở trên mặt phẳng $z = 0$, ta có

$$I = \iint_S (x^2z^2 + z^2y^2)dS = 2\iint_{S_1}(x^2z^2 + z^2y^2)dS.$$

Từ phương trình của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, ta được

$$2x + 2zp = 0 \to p = -\frac{x}{z}$$

Tương tự

$$q = -\frac{y}{z}$$

Do đó

$$1 + p^2 + q^2 = 1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2} = \frac{a^2}{z^2}, \quad dS = \frac{a}{|z|}dxdy$$

Hình chiếu của S_1 lên mặt phẳng xOy là miền D giới hạn bởi đường tròn $x^2 + y^2 = a^2$. Vậy

$$I = 2\iint_D z^2(x^2 + y^2)\frac{a}{z}\,dxdy = 2a\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,(x^2 + y^2)dxdy.$$

Chuyển sang tọa độ cực, ta được

$$I = 2a\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2}\,r^3dr$$

Đổi biến số $r = a\sin t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, ta có $dr = a\cos t dt$, $\sqrt{a^2 - r^2} = a\cos t$, do đó

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - r^2}\,r^3dr = a^5\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3t\cos^2t dt =$$

$$= a^5\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3t dt - a^5\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5t dt =$$

$$= a^5\left(\frac{2}{3} - \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}a^5 = \frac{2a^5}{15}$$

Vậy

$$I = 2a \cdot 2\pi \cdot \frac{2a^5}{15} = \frac{8\pi a^6}{15}.$$

f) Mặt S được cho ở hình 71. Nó gồm có ba mặt

$S_1 = \{(x,y,z): x^2 + y^2 \le 1 , z = 0 \}$

$S_2 = \{(x,y,z): x^2 + y^2 \le 1 , z = x + 1 \}$

$S_3 = \{(x,y,z): x^2 + y^2 = 1 , 0 \le z \le x + 1 \}$

Trên mặt S_1 , ta có $z = 0$, do đó

$$I_1 = \iint_{S_1} z dS = \iint_{S_1} 0.dS = 0$$

Trên mặt S_2 , ta có $z = x + 1$, do đó $p = 1$, $q = 0$, vậy

$$dS = \sqrt{2}\, dxdy .$$

Hình chiếu của S_2 xuống mặt phẳng xOy là miền D giới hạn bởi đường tròn $x^2 + y^2 = 1$. Vì vậy

$$I_2 = \iint_{S_2} z dS = \iint_D (x + 1)\sqrt{2} dxdy$$

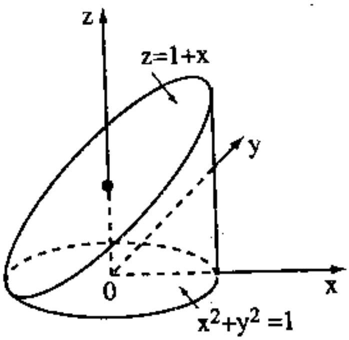
Chuyển sang tọa độ cực, ta được

$$I_2 = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (r\cos\varphi + 1)rdr =$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^3}{3}\cos\varphi + \frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=1} d\varphi =$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{3}\cos\varphi + \frac{1}{2} \right) d\varphi =$$

$$= \sqrt{2} \left(\frac{\sin\varphi}{3} + \frac{\varphi}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = \pi\sqrt{2} .$$



Hình 71

Còn mặt S_3 nhận mặt phẳng xOz làm mặt phẳng đối xứng. Hàm

1

số dưới dấu tích phân là chẵn đối với y. Vì vậy nếu gọi S'_3 là phần của S_3 nằm trên mặt phẳng xOz, ta có

$$I_3 = \iint_{S_3} zdS = 2\iint_{S'_3} zdS$$

Phương trình của S'_3 là

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

Do đó $y'_x = -\dfrac{x}{y}$, $y'_z = 0$

$$1 + y'^2_x + y'^2_z = 1 + \frac{x^2}{y^2} = \frac{x^2 + y^2}{y^2} = \frac{1}{y^2}$$

$$dS = \frac{1}{y}\,dxdz = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dxdz\,.$$

Hình chiếu của S'_3 lên mặt phẳng xOz là miền D' xác định bởi

$$-1 \le x \le 1,\ 0 \le z \le x + 1$$

Do đó

$$I_3 = \iint_{S_3} zdS = 2\iint_{D'} \frac{zdxdz}{\sqrt{1 - x^2}} = 2\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \int_0^{x+1} zdz =$$

$$= 2\int_{-1}^{1} \frac{1}{2} z^2 \Big|_0^{x+1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \int_{-1}^{1} \frac{(x + 1)^2}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$$

Đặt $x = \sin t$, $-\dfrac{\pi}{2} \le t \le \dfrac{\pi}{2}$, ta có

$$dx = \cos t\,dt,\ \sqrt{1 - x^2} = \cos t$$

Vậy

$$I_3 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin t + 1)^2 \, dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin^2 t + 2\sin t + 1) \, dt =$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} (\sin^2 t + 1) \, dt = 2\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}$$

Cuối cùng ta được

$$I = \iint_S z dS = I_1 + I_2 + I_3 = \pi\left(\sqrt{2} + \frac{3}{2}\right).$$

g) Trên mặt S ta có

$$x = 4 - y^2 - z^2$$

Do đó

$$x'_y = -2y, \ x'_z = -2z, \ dS = \sqrt{1 + 4(y^2 + z^2)} \, dydz$$

Hình chiếu của mặt S xuống mặt phẳng $x = 0$ là miền D giới hạn bởi đường tròn $y^2 + z^2 = 4$. Do đó

$$I = \iint_S (y^2 + z^2) \, dS = \iint_D (y^2 + z^2)\sqrt{1 + 4(y^2 + z^2)} \, dydz$$

Chuyển sang tọa độ cực, ta được

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r^2 \sqrt{1 + 4r^2} \, rdr$$

Đổi biến số $\sqrt{1 + 4r^2} = u$. Ta có

$$1 + 4r^2 = u^2 \Rightarrow 4rdr = udu$$

Vậy

$$I = 2\pi \int_1^{\sqrt{17}} \frac{1}{16}(u^4 - u^2) \, du =$$

$$= \frac{\pi}{8}\left(\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3}\right)\Big|_1^{\sqrt{17}} = \frac{\pi}{120}(782\sqrt{17} + 2) = \frac{\pi}{60}(391\sqrt{17} + 1).$$

18. a) Vì $\rho\ (x, y, z) = z$, nên

$$m = \iint_S z dS$$

Trên mặt S ta có

$$Z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2), \qquad 0 \le z \le 1$$

Do đó

$$p = x, \quad q = y, dS = \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dxdy$$

Hình chiếu của S xuống mặt phẳng xOy là miền D giới hạn bởi đường tròn $x^2 + y^2 = 2$. Vậy

$$m = \iint_D \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dxdy$$

Chuyển sang tọa độ cực, ta được

$$m = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r^2\sqrt{1 + r^2}\, rdr$$

Đặt $\sqrt{1 + r^2} = u$. Ta có $r^2 = u^2 - 1$, $rdr = udu$. Vậy

$$m = \pi\int_1^{\sqrt{3}} u^2(u^2 - 1)\, du = \pi\left(\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3}\right)\Big|_1^{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{2\pi(6\sqrt{3} + 1)}{15}.$$

b) Ta có

$$m = \frac{1}{a}\iint_S z dS$$

Trên mặt S, ta có $\quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Do đó

$$p = -\frac{x}{z}, \quad q = -\frac{y}{z}, \qquad 1 + p^2 + q^2 = \frac{a^2}{z^2}$$

Hình chiếu của mặt S xuống mặt phẳng xOy là miền tròn D giới hạn bởi

$$x^2 + y^2 = a^2. \text{ Vậy}$$

$$m = \frac{1}{a}\iint_D z\frac{a}{z}\,dxdy = \iint_D dxdy = \pi a^2,$$

Vì $\iint_D dxdy$ bằng diện tích của miền D .

19. a) Mặt S nhận trục Oz làm trục đối xứng. Vì mặt S đồng chất, nên trọng tâm G của nó nằm trên trục Oz, tức là

$$x_G = 0, \qquad y_G = 0$$

Chỉ còn phân tích z_G. Trên mặt S ta có

$$z = 2 - \frac{x^2 + y^2}{2}$$

Do đó

$$p = -x,\ q = -y,\ dS = \sqrt{1 + x^2 + y^2}\,dxdy$$

Phương trình của giao tuyến của hai mặt $z = 2 - \dfrac{x^2 + y^2}{2}$ và $z = 0$ là $x^2 + y^2 = 4$. Vậy hình chiếu của S xuống mặt phẳng xOy là miền D giới hạn bởi đường tròn đó. Vậy

$$\iint_S dS = \iint_D \sqrt{1 + x^2 + y^2}\,dxdy$$

Chuyển sang tọa độ cực, ta được

$$\iint_S dS = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \sqrt{1 + r^2}\,rdr =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{3} \cdot (1 + r^2)^{3/2}\Big|_0^2 = \frac{2\pi}{3}(5\sqrt{5} - 1)$$

Cũng như vậy, tính $\iint_S zdS$, ta được

$$\iint_S zdS = \iint_D \left(2 - \frac{x^2 + y^2}{2}\right)\sqrt{1 + x^2 + y^2}\,dxdy =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \left(2 - \frac{r^2}{2}\right)\sqrt{1+r^2}\, rdr.$$

Đổi biến số $\sqrt{1+r^2} = u$, ta được $r^2 = u^2 - 1$, $rdr = udu$, do đó

$$\iint_S zdS = 2\pi \int_1^{\sqrt{5}} \left(\frac{5}{2} - \frac{u^2}{2}\right) u^2 du = \pi \int_1^{\sqrt{5}} (5u^2 - u^4)du$$

$$= \pi\left[\frac{5u^3}{3} - \frac{u^5}{5}\right]_1^{\sqrt{5}} = \pi\frac{50\sqrt{5} - 22}{15}.$$

Do đó

$$z_G = \frac{\pi(50\sqrt{5} - 22)}{15} \cdot \frac{3}{2\pi(5\sqrt{5} - 1)} = \frac{307 - 15\sqrt{5}}{310}.$$

b) Ta có $\quad z = \sqrt{x^2 + y^2}, p = \frac{x}{z}, q = \frac{y}{z}, 1 + p^2 + q^2 = 2.$

Do đó $\quad dS = \sqrt{2}\, dxdy.\quad$ Vậy

$$\iint_S dS = \sqrt{2} \iint_D dxdy,$$

trong đó D là hình chiếu của S xuống mặt phẳng xOy, đó là miền giới hạn bởi đường tròn $x^2 + y^2 = ax$ có bán kính $\frac{a}{2}$. Do đó

$$\iint_S dS = \sqrt{2} \iint_D dxdy = \frac{\pi a^2\sqrt{2}}{4}.$$

Ta có

$$\iint_S xdS = \sqrt{2} \iint_D xdxdy.$$

Chuyển sang tọa độ cực, ta được:

$$\iint_S xdS = \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} r^2 dr = \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^3}{3} \cos^4 \varphi d\varphi =$$

$$= \frac{2}{3}a^3\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi d\varphi = \frac{2a^3\sqrt{2}}{3}.\frac{3}{4}.\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^3\sqrt{2}}{8}.$$

Tương tự, ta có

$$\iint_S ydS = \sqrt{2}\iint_D ydxdy = \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^{a\cos\varphi} r^2 dr =$$

$$= \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^3}{3}\cos^3\varphi\sin\varphi d\varphi = 0.$$

$$\iint_S zdS = \sqrt{2}\iint_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy = \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{a\cos\varphi} r^2 dr$$

$$= \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^3}{3}\cos^3\varphi d\varphi = \frac{2\sqrt{2}a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi d\varphi = \frac{2\sqrt{2}}{3}a^3.\frac{2}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{9}a^3.$$

Do đó $\quad x_G = \frac{\pi a^3\sqrt{2}}{8}.\frac{4}{\pi a^2\sqrt{2}} = \frac{a}{2}, \qquad y_G = 0,$

$$z_G = \frac{4\sqrt{2}}{9}a^3.\frac{4}{\pi a^2\sqrt{2}} = \frac{16a}{9\pi}.$$

c) Mặt S nằm trong góc phần tám thứ nhất, nhận mặt phẳng $x = y$ làm mặt phẳng đối xứng, do đó $x_G = y_G$.

Trên mặt S, ta có $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, do đó $p = -\frac{x}{z}$, $q = -\frac{y}{z}$,

$$1 + p^2 + q^2 = 1 + \frac{x^2+y^2}{z^2} = \frac{a^2}{z^2},$$

$$dS = \frac{a}{z}dxdy = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy.$$

Vậy

$$\iint\limits_S dS = a\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \ ,$$

D là hình chiếu của S xuống mặt phẳng xOy, nó là miền tam giác giới hạn bởi các đường thẳng x = 0, y = 0, x + y = a. Do đó

$$\iint\limits_S dS = a\int_0^a dx \int_0^{a-x} \frac{dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

$$= a\int_0^a \left[\arcsin \frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}} \right]_{y=0}^{y=a-x} dx$$

$$= a\int_0^a \arcsin \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} dx = a.I \ .$$

Đặt $\arcsin\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}} = t$, ta được $\sin^2 t = \dfrac{a-x}{a+x}$.

Do đó

$$x = a\frac{1-\sin^2 t}{1+\sin^2 t}, \qquad dx = -\frac{2a}{(1+\sin^2 t)^2} 2\sin t\cos t dt \ .$$

Vậy

$$I = 2a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2t\sin t\cos t dt}{(1+\sin^2 t)^2} \ .$$

Áp dụng công thức tích phân phân đoạn, ta được:

1

$$I = 2a\left[-\frac{t}{1+\sin^2 t}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+\sin^2 t} \right] =$$

$$= 2a\left[-\frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\mathrm{cotg}t)}{2+\mathrm{cotg}^2 t}\right] =$$

$$= 2a\left[-\frac{\pi}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{cotg}t}{\sqrt{2}}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\right] = \frac{\pi a}{2}(\sqrt{2}-1)\,.$$

Vậy

$$\iint_S dS = \frac{\pi a^2}{2}(\sqrt{2}-1)\,.$$

Ta có

$$\iint_S x dS = a\iint_D \frac{xdxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

$$= a\int_0^a dy \int_0^{a-y} \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} =$$

$$= a\int_0^a (a^2-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}\Bigg|_{x=a-y}^{x=0} dy =$$

$$= a\int_0^a \sqrt{a^2-y^2}\,dy - a\sqrt{2}\int_0^a \sqrt{y(a-y)}\,dy\,.$$

Đổi biến số $y = a\sin u$, $0 \le u \le \dfrac{\pi}{2}$ trong tích phân **thứ nhất,** $y = a\sin^2 v$, $0 \le v \le \dfrac{\pi}{2}$ trong tích phân thứ hai, ta được:

$$\iint_S x dS = a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u du - 2a^3\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 v\cos^2 v dv =$$

$$= a^3\frac{\pi}{4} - 2\sqrt{2}a^3.\frac{\pi}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{4} = a^3\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Do đó $$x_G = y_G = \frac{a^3 \frac{\pi}{4}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\frac{\pi a^2}{2}(\sqrt{2}-1)} = \frac{a}{2\sqrt{2}}.$$

Ta có $$\iint\limits_S z dS = a \iint\limits_D dxdy = \frac{a^3}{2}.$$

Do đó $$z_G = \frac{\frac{a^3}{2}}{\frac{\pi a^2}{2}(\sqrt{2}-1)} = \frac{a(\sqrt{2}+1)}{\pi}.$$

20. a) Gọi S_1 là phần của mặt S nằm trên mặt phẳng $z = 0$, phương trình của nó là $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$, S_2 là phần của mặt S nằm dưới mặt phẳng $z = 0$, nó có phương trình là $z = -\sqrt{1-x^2-y^2}$ vì vectơ pháp của S_1 làm với Oz một góc nhọn, vectơ pháp của S_2 làm với Oz một góc tù, nên ta có

$$\iint\limits_{S_1} xyzdxdy = \iint\limits_D xy\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy,$$

trong đó D là hình chiếu của S lên mặt phẳng xOy, đó là miền xác định bởi $x^2 + y^2 \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$. Cũng vậy

$$I = \iint\limits_{S_2} xyzdxdy = \iint\limits_D xy\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy.$$

Do đó

$$I = \iint\limits_S xyzdxdy = 2\iint\limits_D xy\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy.$$

Chuyển sang tọa độ cực, ta được:

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi d\varphi \int_0^1 r^3\sqrt{1-r^2}dr.$$

Nhưng

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi d\varphi = \frac{1}{2}\sin^2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Đặt $r = \sin t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, ta có $dr = \cos t dt$, $\sqrt{1-r^2} = \cos t$, do đó

$$\int_0^1 r^3\sqrt{1-r^2}dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\cos^2 tdt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 t - \sin^5 t)dt = \frac{2}{3} - \frac{4}{5}.\frac{2}{3} = \frac{2}{3}.\frac{1}{5} = \frac{2}{15}.$$

Vậy $\qquad I = 2.\frac{1}{2}.\frac{2}{15} = \frac{2}{15}.$

b) Vectơ pháp của mặt S làm với các trục tọa độ những góc nhọn. Do đó

$$I_1 = \iint_S xdydz = \iint_D xy\sqrt{1-y^2-z^2}dydz,$$

D_1 là hình chiếu của S lên mặt phẳng yOz, đó là miền xác định bởi $y^2 + z^2 \le 1$, $y \ge 0$, $z \ge 0$. Chuyển sang tọa độ cực, ta được:

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 (1-r^2)^{1/2} rdr = \frac{\pi}{2}.\frac{1}{2}(1-r^2)^{3/2}.\frac{2}{3}\Big|_1^0 = \frac{\pi}{6}.$$

Gọi D_2 là hình chiếu của S lên mặt phẳng zOx, đó là miền tròn xác định bởi $x^2 + z^2 \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$. Ta có

$$I_2 = \iint_S dxdz = \iint_{D_2} dxdz = \frac{\pi}{4}.$$

Gọi D_3 là hình chiếu của S lên mặt phẳng xOy, đó là miền tròn xác định bởi $x^2 + y^2 \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$. Ta có

$$I_3 = \iint_S xz^2dxdy = \iint_{D_3} x(1-x^2-y^2)dxdy$$

1 Chuyển sang tọa độ cực, ta được:

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi \int_0^1 r^2(1 - r^2)\, dr =$$

$$= 1 . \left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$$

Vậy

$$\iint_S x dydz + dzdx + xz^2 dxdy = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{5\pi}{12} + \frac{2}{15}.$$

c) Trước hết ta tính tích phân $I_1 = \iint_S z^2 dxdy$. Gọi S_1 là phần của mặt S nằm trên mặt phẳng z = c, phương trình của nó là $z = c + \sqrt{R^2 - (x - a)^2 - (y - b)^2}$, vectơ pháp của nó làm với Oz một góc nhọn. Gọi S_2 là phần của mặt S nằm dưới mặt phẳng z = c, phương trình của nó là $z = c - \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y - b)^2}$, vectơ pháp của nó làm với Oz một góc tù. Gọi D là hình chiếu của mặt S lên mặt phẳng xOy, đó là miền tròn giới hạn bởi đường tròn $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$. Ta có

$$I_1 = \iint_{S_1} z^2 dxdy + \iint_{S_2} z^2 dxdy =$$

$$= \iint_D \left(c + \sqrt{R^2 - (x - a)^2 - (y - b)^2}\right)^2 dxdy -$$

$$- \iint_D (c - \sqrt{R^2 - (x - a)^2 - (y - b)^2})^2 dxdy =$$

$$= 4c \iint_D \sqrt{R^2 - (x - a)^2 - (y - b)^2} dxdy$$

Chuyển sang tọa độ cực theo các công thức

$$x - a = r\cos\varphi \ , \ y - b = r\sin\varphi \ , \ 0 \le \varphi \le 2\pi$$

Ta được

$$I_1 = 4c\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2}\, r dr$$

$$= 8\pi c \frac{1}{2}(R^2 - r^2)^{3/2} \cdot \frac{2}{3}\Big|_R^0 = \frac{8\pi c}{3}R^3$$

Tương tự như vậy

$$I_2 = \iint_S y^2 dzdx = \frac{8\pi b}{3}R^3$$

$$I_3 = \iint_S x^2 dydz = \frac{8\pi a}{3}R^3$$

Vậy $\quad \iint_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy = I_1 + I_2 + I_3 =$

$$= \frac{8\pi R^3}{3}(a + b + c) .$$

d) Xét tích phân $I_1 = \iint_S \frac{dxdy}{z}$. Tương tự như ở bài c) , nếu gọi D là hình chiếu của S lên mặt phẳng xOy, ta có

$$I_1 = 2\iint_D \frac{dxdy}{c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}$$

D là miền giới hạn bởi đường elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Đổi biến số

$$u = \frac{x}{a} \quad , \quad v = \frac{y}{b}$$

Đó là một song ánh biến D lên miền D' trong mặt phẳng (u, v) giới hạn bởi đường tròn $u^2 + v^2 = 1$. Định thức Jacobi của phép đổi biến số trên bằng

$$J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = ab$$

Do đó

$$I_1 = 2ab \iint_{D'} \frac{dudv}{c\sqrt{1 - u^2 - v^2}}$$

Chuyển sang tọa độ cực, ta được

$$I_1 = \frac{2ab}{c} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{rdr}{\sqrt{1 - r^2}} =$$

$$= 4\pi \frac{ab}{c} \left[-\sqrt{1 - r^2} \right]_0^1 = 4\pi \frac{ab}{c}$$

Tương tự, ta có

$$I_2 = \iint_S \frac{dzdx}{y} = 4\pi \frac{ca}{b}$$

$$I_3 = \iint_S \frac{dydz}{x} = 4\pi \frac{bc}{a}$$

Vậy

$$\iint_S \frac{dydz}{x} + \frac{dzdx}{y} + \frac{dxdy}{z} = 4\pi \left(\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \right).$$

e) Phương trình của mặt S là

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \ z \geq 0.$$

Do đó các cosin chỉ hướng của vectơ pháp tại điểm (x, y, z) của mặt S hướng ra ngoài là

$$\cos\alpha = x, \ \cos\beta = y, \ \cos\gamma = z$$

Nếu gọi dS là yếu tố diện tích trên mặt S, ta có

$$dxdy = dS\cos\gamma, \ dydz = dS\cos\alpha, \ dzdx = dS\cos\beta.$$

1

Do đó

$$I = \iint_S \left(x \cdot \frac{x}{z} + y \cdot \frac{y}{z} - z\right) dxdy = \iint_S \frac{x^2 + y^2 - z^2}{z} dxdy$$

$$= \iint_S \frac{x^2 + y^2 - 1 + x^2 + y^2}{z} dxdy$$

$$= \iint_D \frac{2x^2 + 2y^2 - 1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dxdy$$

D là hình chiếu của S lên mặt phẳng xOy chuyển sang tọa độ cực, ta được

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^1 \frac{2r^2 - 1}{\sqrt{1 - r^2}} rdr$$

Đổi biến $r = \sin t$, $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, ta được

$$I = 2\pi \int_0^{\pi/2} (2\sin^3 t - \sin t)dt = \frac{2\pi}{3}.$$

Chú thích : S là mặt không kín. Gọi S_1 là phần của mặt phẳng $z = 0$ nằm trong hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ hướng ra ngoài. Ta có

$$I = \iint_S \omega + \iint_{S_1} \omega - \iint_{S_1} \omega = \iint_{S \cup S_1} \omega - \iint_{S_1} \omega,$$

ω là biểu thức dưới dấu tích phân đã cho. $S \cup S_1$ là một mặt kín. Gọi V là vật thể giới hạn bởi mặt kín ấy, tức là nửa hình cầu. Các hàm số

$$P = x,\ Q = y,\ R = -z$$

liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một của chúng trong miền V, do đó áp dụng công thức Ostrogradsky, ta được

$$\iint\limits_{S \cup S_1} xdydz + ydzdx - zdxdy \quad = \iiint\limits_{V} dxdydz = \frac{2\pi}{3}.$$

Vì S_1 nằm trên mặt phẳng $z = 0$, nên ta có

$$\iint\limits_{S_1} xdydz + ydzdx - zdxdy = 0$$

Ta thấy lại kết quả trước : $I = \dfrac{2\pi}{3} - 0 = \dfrac{2\pi}{3}$.

21. a) Đặt $V = \{(x, y, z) : x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0, x + y + z \leqslant 1\}$.

Các hàm số $P(x, y, z) = xz$, $Q(x, y, z) = yx$, $R(x, y, z) = zy$ liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một của chúng trong miền V. Do đó theo công thức Ostrogradsky, ta được

$$\iint\limits_{S} xzdydz + yxdzdx + zydxdy =$$

$$= \iiint\limits_{V} (x + y + z)dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (x + y + z)dz$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[xz + yz + \frac{1}{2} z^2 \right]_{z=0}^{z=1-x-y} dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[x(1-x-y) + y(1-x-y) + \frac{1}{2}(1-x-y)^2 \right] dy.$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[x(1-x) + \frac{1}{2}(1-x)^2 - xy - \frac{y^2}{2} \right] dy =$$

$$= \int_0^1 \left[x(1-x)y + \frac{1}{2}(1-x)^2 y - \frac{1}{2} xy^2 - \frac{1}{6} y^3 \right]_0^{1-x} dx =$$

1

$$= \int_0^1 \left[x(1-x)^2 + \frac{1}{2}(1-x)^3 - \frac{1}{2}x(1-x)^2 - \frac{1}{6}(1-x)^3 \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x(1-x)^2 + \frac{1}{2}(1-x)^3 - \frac{1}{6}(1-x)^3 \right] dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^2 dx - \frac{1}{6}\int_0^1 (1-x)^3 dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{(1-x)^3}{3}\Bigg|_0^1 + \frac{1}{6}\frac{(1-x)^4}{4}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{8}.$$

b) Gọi V là vật thể giới hạn bởi mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Các hàm số $P(x, y, z) = x^3$, $Q(x, y, z) = y^3$, $R(x, y, z) = z^3$ liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một của chúng trong miền V.

Áp dụng công thức Ostrogradsky, ta được:

$$I = \iint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy = 3\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz .$$

Chuyển sang tọa độ cầu, ta được:

$$I = 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^R r^4 dr =$$

$$= 3.2\pi.2.\frac{R^5}{5} = \frac{12}{5}\pi R^5 .$$

c) Các hàm số $P(x, y, z) = x^2$, $Q(x, y, z) = y^2$, $R(x, y, z) = z^2$ liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một của chúng trong miềnV. Công thức Ostrogradsky cho ta

$$\iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy = 2\iiint_V (x+y+z) dxdydz =$$

$$= 2\int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a (x+y+z) dz = 2\int_0^a dx \int_0^a \left[xz + yz + \frac{1}{2}z^2 \right]_{z=0}^{z=a} dy =$$

1

$$= 2\int_0^a dx \int_0^a (xa + ya + \frac{1}{2}a^2)dy =$$

$$= 2\int_0^a \left[xay + \frac{1}{2}ay^2 + \frac{1}{2}a^2y \right]_{y=0}^{y=a} dx =$$

$$= 2\int_0^a (xa^2 + a^3)dx = 2\left[\frac{1}{2}x^2a^2 + a^3x \right]_0^a =$$

$$= 2 \cdot \frac{3}{2}a^4 = 3a^4 .$$

22. a) Các hàm số

$P(x,y,z) = (1 + x^2)\,\alpha(x)$, $Q(x,y,z) = 2\alpha(x)xy$, $R(x,y,z) = -3z$

liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một của chúng trong $\mathbf{R}^3$. Từ định lý Ostrogradsky, suy ra rằng tích phân mặt I chỉ phụ thuộc đường kín L mà không phụ thuộc S khi và chỉ khi

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = (1 + x^2)\alpha'(x) + 4x\alpha(x) - 3 = 0$$

hay

$$(1 + x^2)^2\alpha'(x) + 4x\alpha(x)(1 + x^2) - 3(1 + x^2) = 0$$

Do đó nếu $\beta(x) = (1 + x^2)^2\alpha(x)$ thì đẳng thức trên cho ta

$$\beta'(x) = 3(1 + x^2)$$

Vậy

$$\beta(x) = 3x + x^3 + K ,$$

K là hằng số tùy ý, và

$$\alpha(x) = \frac{3x + x^3 + K}{(1 + x^2)^2}$$

b) Nếu $\alpha(x)$ thỏa mãn điều kiện $\alpha(0) = 0$ thì $K = 0$, vậy

$$I = \iint_S \frac{3x + x^3}{1 + x^2} dydz + 2\frac{3x + x^3}{(1 + x^2)^2} xydzdx - 3zdxdy$$

theo định lý StoKes, tích phân ấy bằng tích phân đường

$$\int_L P_1 dx + Q_1 dy + R_1 dz$$

trong đó

$$P_1 = \frac{2x^2 (x^3 + 3) yz}{(1 + x^2)^2} \quad , \quad Q_1 = -\frac{x(x^2 + 3) z}{1 + x^2}, R_1 = 0$$

Thật vậy, ta có

$$\frac{\partial R_1}{\partial y} - \frac{\partial Q_1}{\partial z} = \frac{x^3 + 3x}{1 + x^2}$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial z} - \frac{\partial R_1}{\partial x} = \frac{2(3x + x^3) xy}{(1 + x^2)^2}$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y} = -\frac{z}{(1 + x^2)^2}(3x^4 + 6x^2 + 3) = -3z$$

Khi L là đường tròn $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 1$, ta tính tích phân đường bằng tích phân mặt, và vì tích phân mặt ấy không phụ thuộc S, chỉ phụ thuộc L, ta chọn S là phần của mặt phẳng đi qua L, tức là mặt phẳng $z = 1$. Ta được

$$J = -3\iint_S dxdy = -3\pi$$

23. Phương trình tham số của đường L là

$$x = b\cos t,\ y = b(1 + \sin t),\ z = \sqrt{2b(a - b)}\left(\sin\frac{t}{2} + \cos\frac{t}{2}\right)$$

Có thể dùng các phương trình tham số ấy để đưa tích phân đường I về tích phân xác định theo t, nhưng tính toán sẽ dài.

Ta nhận xét rằng

$$x^2dx + y^2dy + z^2 dz = \frac{1}{3} d(x^3 + y^3 + z^3)$$

L là đường kín, do đó

$$\int_L x^2dx + y^2 dy + z^2 dz = 0$$

Vậy ta có thể viết

$$I = \int_L (x^2 + y^2 + z^2)\,dx + (x^2 + y^2 + z^2)\,dy + (x^2 + y^2 + z^2)\,dz =$$

$$= \int_L (x^2 + y^2 + z^2)\ (dx + dy + dz) =$$

$$= \int_L 2ay\,(dx + dy + dz)$$

$$= 2a \int_L ydx + ydy + ydz$$

Nhưng $\int_L ydy = 0$, vì $ydy = \frac{1}{2} d\,(y^2)$. Gọi C là hình chiếu của L lên mặt phẳng xOy, đó là đường tròn $x^2 + y^2 = 2by$, có bán kính b. Ta có

$$\int_L ydx = \int_C ydx = -\pi b^2$$

(πb^2 là diện tích của vòng tròn giới hạn bởi C). Ngoài ra $\int_L ydz = 0$ vì hình chiếu của L lên mặt phẳng yOz là một cung đường không kín, diện tích của phần mặt phẳng giới hạn bởi cung ấy bằng không. Vậy

$$I = -2\pi ab^2$$

Cách khác đặt

$P(x, y, z) = y^2 + z^2$, $Q\,(x, y, z) = z^2 + x^2$, $R(x, y, z) = x^2 + y^2$

Ta có

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y \ , \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = 2z$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = 2z \ , \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = 2x \ , \quad \frac{\partial R}{\partial z} = 2z$$

Các hàm số P, Q, R liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một của chúng $\forall \ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. Do đó công thức StoKes cho ta

$$I = 2\iint\limits_S (y - z)\,dydz + (z - x)\,dzdx + (x - y)\,dxdy$$

trong đó S là phía trên của phần mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 2ay$ nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 2by$, $z > 0$

Phương trình của mặt cầu có thể viết là

$$x^2 + (y - a)^2 + z^2 - a^2 = 0$$

Vectơ pháp của mặt cầu định hướng làm với Oz một góc nhọn, vì vậy các cosin chỉ hướng của nó là

$$\cos\alpha = \frac{x}{a} \ , \ \cos\beta = \frac{y - a}{a} , \ \cos\gamma = \frac{z}{a}$$

Gọi dS là yếu tố diện tích trên mặt S, ta có

$$dxdy = dS\cos\gamma = \frac{z}{a}dS$$

$$dydz = dS\cos\alpha = \frac{x}{a}dS$$

$$dzdx = dS\cos\beta = \frac{y - a}{a}dS$$

Vậy

1

$$I = \frac{2}{a}\iint_S [x(y-z) + (y-a)(z-x) + z(x-y)]\,dS =$$

$$= 2\iint_S (x-z)\,dS$$

Nhưng $\iint_S x dS = 0$, vì hàm số dưới dấu tích phân là lẻ đối với x và mặt S nhận mặt phẳng x = 0 làm mặt phẳng đối xứng. Do đó

$$I = -2\iint_S z dS = -2a\iint_S \frac{z}{a} dS = -2a\iint_D dxdy$$

trong đó D là hình chiếu của S lên mặt phẳng xOy, đó là một miền tròn có bán kính b, vì vậy

$$\iint_D dxdy = \pi b^2$$

Suy ra

$$I = -2\pi ab^2 .$$

24. a) L là một đường kín, xdx + ydy + zdz là vi phân toàn phần của hàm số $\frac{x^2+y^2+z^2}{2}$. Do đó

$$\int_L xdx + ydy + zdz = 0$$

Vì vậy

$$I = \int_L (y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz =$$

$$= \int_L (x+y+z)\,dx + (z+x+y)\,dy + (x+y+z)\,dz =$$

$$= \int_L (x+y+z)\,d(x+y+z) = 0 .$$

b) Ta nhận xét rằng

$$2xy^2zdx + 2x^2yzdy + (x^2y^2 - 2z)\,dz = d(x^2y^2z - z^2)$$

là một đường kín trên mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, do đó

$$\int\limits_L 2xy^2zdx + 2x^2yzdy + (x^2y^2 - 2z)dz = 0$$

c) Đặt

$P(x, y, z) = y - z$, $Q(x, y, z) = z - x$, $R(x, y, z) = x - y$

Ta có

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1\ , \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -1$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = 1\ , \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -1$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = 1\ , \quad \frac{\partial R}{\partial y} = -1$$

Theo công thức StoKes, ta có

$$I = \int\limits_L (y - z)\,dx + (z - x)\,dy + (x - y)\,dz =$$

$$= -2\iint\limits_S dydz + dzdx + dxdy$$

S là phần của mặt phẳng $\frac{x}{a} + \frac{z}{b} = 1$ giới hạn bởi đường L mà vectơ pháp của nó làm với trục Oz một góc nhọn. Các cosin chỉ hướng của vectơ pháp ấy là

$$\cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos\beta = 0, \quad \cos\gamma = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Gọi dS là yếu tố diện tích trên mặt S, ta có

$$dxdy = dS\cos\gamma = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}dS$$

$$dydz = dS\cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}dS$$

$$dzdx = dS\cos\beta = 0$$

$$\text{Vậy} \quad I = -2\iint\limits_S \frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}\, dS = \frac{-2\,(a+b)}{a} \iint\limits_S \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\, dS$$

$$= -2\,\frac{(a+b)}{a} \iint\limits_D dxdy\,,$$

trong đó D là hình chiếu của S lên mặt phẳng xOy, đó là miền tròn có bán kính bằng a. Do đó

$$I = -2\frac{(a+b)}{a}\,\pi a^2 = -2\pi a(a+b)\ .$$

d) $P\,(x, y, z) = y^2 - z^2$, $Q\,(x, y, z) = z^2 - x^2$, $R\,(x, y, z) = x^2 - y^2$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y\ , \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -2z$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = 2z\ , \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -2x$$

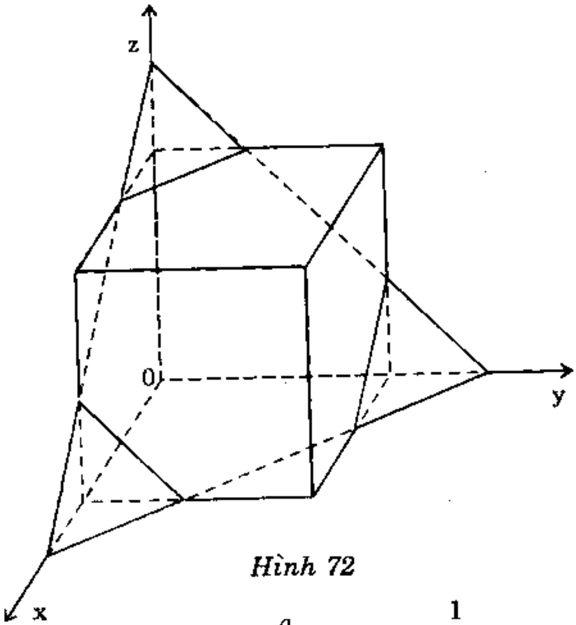
$$\frac{\partial R}{\partial x} = 2x\ , \quad \frac{\partial R}{\partial y} = -2y$$

Công thức StoKes cho ta

$$I = \int\limits_L (y^2 - z^2)\, dx + (z^2 - x^2)\, dy + (x^2 - y^2)\, dz =$$

$$= -2\iint\limits_S (y+z)\, dydz + (z+x)\, dzdx + (x+y)\, dxdy$$

trong đó S là phần của mặt phẳng $x + y + z = \frac{3a}{2}$ giới hạn bởi đường L, véc tơ pháp của nó làm với trục Oz một góc nhọn. Các cosin chỉ
1 hướng của vectơ pháp ấy là



Hình 72

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

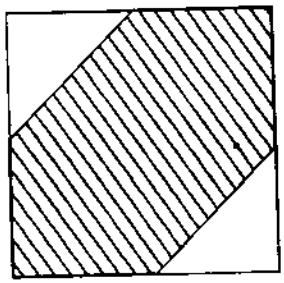
Do đó nếu dS là yếu tố diện tích trên mặt S, ta có

$$I = -2\iint_S 2(x+y+z)\,\frac{dS}{\sqrt{3}} = -2\iint_S 3a\,\frac{dS}{\sqrt{3}} = -6a\iint_D dxdy,$$

trong đó D là hình chiếu của S lên mặt phẳng xOy (h.73). Diện tích của miền D bằng

$$a^2 - 2.\frac{1}{2}.\frac{a}{2}.\frac{a}{2} = \frac{3a^2}{4}$$

Vậy $I = -6a\,.\,\frac{3a^2}{4} = -\frac{9}{2}a^3$.



Hình 73

25. a) Giả sử vectơ $\vec{F}$ có ba thành phần là P, Q, R. Vậy vectơ g $\vec{F}$ có ba thành phần là gP, gQ, gR. Do đó

$$\operatorname{div}(g\vec{F}) = \frac{\partial}{\partial x}(gP) + \frac{\partial}{\partial y}(gQ) + \frac{\partial}{\partial z}(gR)$$

$$= g\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) + \frac{\partial g}{\partial x}P + \frac{\partial g}{\partial y}Q + \frac{\partial g}{\partial z}R$$

$$= g.\operatorname{div}\vec{F} + \overrightarrow{\operatorname{grad}}g.\vec{F}.$$

b) Giả sử ba thành phần của vectơ $\vec{F}$ là P, Q, R còn ba thành phần của vectơ $\vec{G}$ là P_1, Q_1, R_1. Ta có

$$\vec{G} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ P_1 & Q_1 & R_1 \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (Q_1R - R_1Q)\vec{i} + (R_1P - P_1R)\vec{j} + (P_1Q - Q_1P)\vec{k}.$$

Do đó

$$\operatorname{div}(\vec{G} \wedge \vec{F}) = \frac{\partial}{\partial x}(Q_1R - R_1Q) + \frac{\partial}{\partial y}(R_1P - P_1R) + \frac{\partial}{\partial z}(P_1Q - Q_1P)$$

$$= \frac{\partial Q_1}{\partial x}R + Q_1\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial R_1}{\partial x}Q - R_1\frac{\partial Q}{\partial x} +$$

$$+ \frac{\partial R_1}{\partial y}P + R_1\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P_1}{\partial y}R - P_1\frac{\partial R}{\partial y} +$$

$$+ \frac{\partial P_1}{\partial z}Q + P_1\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial Q_1}{\partial z}P - Q_1\frac{\partial P}{\partial z} =$$

$$= P\left(\frac{\partial R_1}{\partial y} - \frac{\partial Q_1}{\partial z}\right) + Q\left(\frac{\partial P_1}{\partial z} - \frac{\partial R_1}{\partial x}\right) + R\left(\frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y}\right) +$$

$$+ P_1\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q_1\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R_1\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right).$$

1

Nhưng $\left(\frac{\partial R_1}{\partial y}-\frac{\partial Q_1}{\partial z}\right),\left(\frac{\partial P_1}{\partial z}-\frac{\partial R_1}{\partial x}\right),\left(\frac{\partial Q_1}{\partial x}-\frac{\partial P_1}{\partial y}\right)$ **là ba thành phần của** $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{G}$, $\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right),\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right),\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$ **là ba thành phần** của $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{F}$. Vậy $\text{div}(\vec{G}\wedge\vec{F})=\vec{F}.\overrightarrow{\text{rot}}.\vec{G}-\vec{G}.\overrightarrow{\text{rot}}.\vec{F}$.

c) Ta có

$$\overrightarrow{\text{rot}}g\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ gP & gQ & gR\end{vmatrix}$$

$$=\left(g\frac{\partial R}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial y}R-g\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial g}{\partial z}Q\right)\vec{i}\ +$$

$$+\left(g\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{\partial g}{\partial z}P-g\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial g}{\partial x}R\right)\vec{j}\ +$$

$$+\left(g\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}Q-g\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial g}{\partial y}P\right)\vec{k}=$$

$$=g\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+g\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+g\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}+$$

$$+\left(R\frac{\partial g}{\partial y}-Q\frac{\partial g}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(P\frac{\partial g}{\partial z}-R\frac{\partial g}{\partial y}\right)\vec{j}+\left(Q\frac{\partial g}{\partial x}-P\frac{\partial g}{\partial y}\right)\vec{k}=$$

$$=g.\overrightarrow{\text{rot}}\vec{F}+\overrightarrow{\text{grad}}g\wedge\vec{F}.$$

26. a) Hai thành phần của vectơ $\vec{F}$ là:

$$P(x,y)=e^{-x}\left[\frac{1}{x+y}-\ln(x+y)\right],\ Q(x,y)=\frac{e^{-x}}{x+y}.$$

1

Ta có

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^{-x}\left[-\frac{1}{(x+y)^2}-\frac{1}{x+y}\right]$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{(x+y)^2}\left[-(x+y)e^{-x}-e^{-x}\right]$$

Vậy $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Do đó Pdx + Qdy là vi phân toàn phần của một hàm số u (x, y) nào đó, trường vectơ $\vec{F}$ là một trường thế mà hàm số thế vị là u. Ta có

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P = e^{-x}\left[\frac{1}{x+y}-\ln(x+y)\right] \qquad (*)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q = \frac{e^{-x}}{x+y} \qquad (**)$$

Từ (**) ta được

$$u(x,y) = \int \frac{e^{-x}}{x+y}dy = e^{-x}\ln(x+y) + \varphi(x),$$

trong đó $\varphi(x)$ là một hàm số nào đó. Do đó

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{e^{-x}}{x+y} - e^{-x}\ln(x+y) + \varphi'(x)$$

So sánh với (*), ta được $\varphi'(x) = 0$, do đó $\varphi(x) = C$, C là hằng số tùy ý. Vậy

$$u(x,y) = e^{-x}\ln(x+y) + C.$$

b) Đặt

$$P = yz(2x+y+z),\ Q = zx(2y+z+x),\ R = xy(2z+x+y)$$

Ta có

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} = x(x+2y+2z)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = y(2x + y + 2z)$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = z\,(2x + 2y + z)$$

Do đó Pdx + Qdy + Rdz là vi phân toàn phần của một hàm số u (x, y, z) nào đó, trường vectơ $\vec{F}$ là một trường thế mà hàm số thế vị là u. Hàm số thế vị u được tính bởi công thức

$$u\,(x\,,y,z) = \int_{x_o}^{x} P\,(x,y_o\,,z_o)\,dx + \int_{y_o}^{y} Q\,(x\,,y\,,z_o)\,dy + $$
$$+ \int_{z_o}^{z} R\,(x,y,z)\;dz \;+\; C$$

trong đó (x_o, y_o, z_o) là một điểm nào đó trong $\mathbf{R}^3$, C là hằng số tùy ý. Các hàm số P, Q, R và các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trong $\mathbf{R}^3$. Ta chọn $x_o = y_o = z_o$, ta được

$$u\,(x\,,y\,,z) = \int_{0}^{z} xy\,(2z + x + y)\,dz + C =$$
$$= xyz^2 + x^2yz + xy^2z + C = xyz\;(x + y + z) + C.$$

c) Dễ dàng thấy rằng biểu thức Pdx + Qdy + Rdz, trong đó

$$P = y + z,\ Q = z + x,\ R = x + y$$

là vi phân toàn phần của một hàm số u (x, y, z) nào đó. Vậy trường vectơ.

$$\vec{F}\,(x,y,z) = (y + z)\,\vec{i} + (z+x)\,\vec{j} + (x + y)\,\vec{k}$$

là một trường thế. Tính hàm số thế vị u(x,y,z) theo công thức (***) của câu b) trong đó $x_o = y_o = z_o = 0$, ta được

$$u\,(x\,,y\,,z) = \int_{0}^{y} x\,dy + \int_{0}^{z} (x + y)\;dz + C =$$

1 $$= xy + xz + yz + C\,.$$

27. a) Thông lượng của trường vectơ $\vec{F} = (xy, yz, zx)$ qua mặ
S bằng

$$I = \iint_S xydydz + yzdzdx + zxdxdy\ .$$

Dễ thấy rằng

$$\iint_S xydydz = \iint_S yzdzdx = \iint_S zxdxdy\ .$$

Do đó

$$I = 3\iint_S zxdxdy\ .$$

Gọi D là hình chiếu của S lên mặt phẳng xOy, D là miề
$\{(x, y): x^2 + y^2 \le R^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$. Vectơ pháp của mặt S làm với O
một góc nhọn, do đó

$$I = 3\iint_D x\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dxdy\ .$$

Chuyển sang tọa độ cực, ta được:

$$\begin{aligned} I &= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2}\,r^2 dr \\ &= 3\int_0^R \sqrt{R^2 - r^2}\,r^2 dr \end{aligned}$$

Đổi biến số $r = R\sin t$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$, ta được

$$I = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^4 \sin^2 t\cos^2 t dt = 3R^4\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t dt\right) =$$

$$= 3R^4\,\frac{\pi}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{4} = \frac{3\pi R^4}{16}\,.$$

1 b) Ta phải tính tích phân mặt

$$I = \iint\limits_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy .$$

Các hàm số $P = x^3$, $Q = y^3$, $R = z^3$, $\frac{\partial P}{\partial x} = 3x^2$, $\frac{\partial P}{\partial y} = 3y^2$, $\frac{\partial P}{\partial z} = 3z^2$ liên tục trong $\mathbf{R}^3$. Công thức Ostrogradsky cho ta

$$I = 3\iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz ,$$

trong đó V là hình cầu giới hạn bởi S. Có thể viết phương trình của S là $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{4}$. Vì vậy phép đổi biến số

$$u = x - \frac{1}{2}, \quad v = y, \quad w = z$$

là một song ánh biến V lên hình cầu V' trong không gian (u, v, w) xác định bởi $u^2 + v^2 + w^2 \le \frac{1}{4}$. Định thức Jacobi của phép đổi biến số ấy bằng 1. Do đó

$$I = 3\iiint\limits_{V'} [(u + \frac{1}{2})^2 + v^2 + w^2]dudvdw =$$

$$= 3\iiint\limits_{V'} (u^2 + v^2 + w^2)dudvdw + 3\iiint\limits_{V'} ududvdw +$$

$$+ 3\iiint\limits_{V'} \frac{1}{4} dudvdw = 3I_1 + 3I_2 + 3I_3 .$$

Ta có

$$I_3 = \frac{1}{4}\iiint\limits_{V'} dudvdw = \frac{1}{4}.\frac{4}{3}\pi.\frac{1}{2^3} = \frac{\pi}{24},$$

vì $\iiint\limits_{V'} dudvdw$ bằng thể tích của hình cầu V'.

$$I_2 = \iiint\limits_{V'} ududvdw = 0$$

vì hàm số dưới dấu tích phân là lẻ đối với u và miền V' nhận mặt phẳng u = 0 làm mặt phẳng đối xứng.

Chuyển sang tọa độ cầu để tính I_3, ta được

$$I_3 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{\frac{1}{2}} r^4 \, dr = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{1}{5 \cdot 2^5} = \frac{\pi}{40}$$

Vậy

$$I = \frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{40} = \frac{8\pi}{40} = \frac{\pi}{5}.$$

c) Thông lượng của $\vec{F}(x, y, z)$ qua mặt S bằng

$$I = \iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy$$

S là nửa mặt cầu $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $z \geq 0$, hướng lên trên. Nó không kín. Gọi S_1 là phần của mặt phẳng z = 0 giới hạn bởi đường tròn $x^2 + y^2 = 1$, hướng xuống dưới. Ta có

$$I = \iint_{S \cup S_1} xdydz + ydzdx + zdxdy - \iint_{S_1} xdydz + ydzdx + zdxdy$$

Nhưng $\iint_{S_1} xdydz + ydzdx + zdxdy = 0$, do đó

$$I = \iint_{S \cup S_1} xdydz + ydzdx + zdxdy$$

Gọi V là vật thể giới hạn bởi $S \cup S_1$, đó là nửa hình cầu có bán kính bằng 1. Theo công thức Ostrogradsky, ta có

$$I = 3\iiint_V dxdydz = 3 \cdot \frac{2}{3}\pi = 2\pi$$

28. a) Nếu ba thành phần của $\vec{F}$ là P, Q, R thì

1

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Do đó

$$\operatorname{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{F}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} = 0 .$$

b) Ta có

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}f}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)\vec{k} = 0 .$$

29. Để tồn tại một vectơ $\vec{G}$ sao cho $\vec{F} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{G}$, ta phải có

$$\operatorname{div}\vec{F} = \operatorname{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{G}) = 0$$

(xem câu a) bài 28). Ta có

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}[xf(r)] + \frac{\partial}{\partial y}[yf(r)] + \frac{\partial}{\partial z}[2z\,f(r)]$$

Nhưng

$$\frac{\partial}{\partial x}[xf(r)] = f(r) + xf'(r)\frac{\partial r}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}[y\,f(r)] = f(r) + y\,f'(r)\frac{\partial r}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}[2zf(r)] = 2f(r)$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$$

Do đó

$$\text{div } \vec{F} = 4f(r) + rf'(r) = 0$$

hay
$$\frac{f'(r)}{f(r)} = -\frac{4}{r}$$

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được

$$\ln |f(r)| = \ln \frac{|C|}{r^4}$$

C là một hằng số tùy ý. Do đó

$$f(r) = \frac{C}{r^4}$$

Điều kiện $f(1) = 1$ cho ta $C = 1$, vậy các thành phần của $\vec{F}$ là

$$\frac{x}{(x^2+y^2)^2}, \frac{y}{(x^2+y^2)^2}, \frac{2z}{(x^2+y^2)^2}$$

Nếu tồn tại vectơ $\vec{G}$ sao cho $\vec{F} = \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{G}$ thì các thành phần X, Y, Z của $\vec{G}$ thỏa mãn các hệ thức

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{x}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{y}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{2z}{(x^2+y^2)^2}$$

Với điều kiện $Z = 0$, ta được

$$\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{y}{(x^2+y^2)^2} \qquad (*)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = -\frac{x}{(x^2+y^2)^2} \qquad (**)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{2z}{(x^2+y^2)^2} \qquad (***)$$

Từ (*), (**) ta suy ra

$$X = \int \frac{y}{(x^2 + y^2)^2} dz = \frac{yz}{(x^2 + y^2)^2} + g(x, y)$$

$$Y = -\int \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} dz = -\frac{xz}{(x^2 + y^2)^2} + h(x, y)$$

trong đó g (x, y), h (x, y) là hai hàm số nào đó của x, y. Do đó

$$\frac{\partial X}{\partial y} = z\frac{(x^2 + y^2)^2 - y \,.\, 2\,(x^2 + y^2)\,2y}{(x^2 + y^2)^4} + g'_y(x, y) =$$

$$= z \,.\, \frac{(x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)^3} + g'_y(x, y)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = -z \,.\, \frac{(y^2 - 3x^2)}{(x^2 + y^2)^3} + h'_x(x, y)$$

Vậy

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = z\frac{3x^2 - y^2 - x^2 + 3y^2}{(x^2 + y^2)^2} + h'_x(x, y) - g'_y(x, y) =$$

$$= \frac{2z}{(x^2 + y^2)^2} + h'_x(x, y) - g'_y(x, y)$$

So sánh với (***), ta được

$$h'_x(x, y) = g'_y(x, y)$$

Điều kiện này được thỏa mãn đặc biệt khi

$$h(x, y) = g(x, y) = 0$$

Vậy một biểu thức của các thành phần của vecto $\vec{G}$ là

$$\frac{yz}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{-xz}{(x^2 + y^2)^2}, 0$$

Chú thích: Nếu tồn tại một vectơ $\vec{G}_1 \neq \vec{G}$ sao cho

$$\vec{F} = \overrightarrow{\text{rot}}\vec{G}_1$$

thì ta có

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{G} = \overrightarrow{\text{rot}}\vec{G}_1$$

hay

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{G} - \vec{G}_1) = 0 .$$

Điều đó có nghĩa là

$$\vec{G} - \vec{G}_1 = \overrightarrow{\text{grad}} f ,$$

trong đó f là một hàm số tùy ý có đạo hàm riêng cấp hai liên tục (xem câu b, bài 28). Nói cách khác $\vec{G}$ và $\vec{G}_1$ sai khác nhau một vectơ bằng građiên của một hàm số tuỳ ý có đạo hàm riêng cấp hai liên tục.

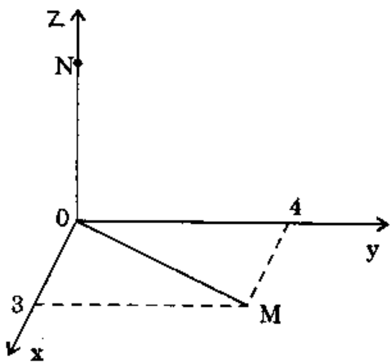
30. Công của lực $\bar{F}$ dọc theo cung MN bằng tích phân đường

$$I = \int_{\widehat{MN}} (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$$

Đặt P = y + z, Q = z + x, R = x + y, ta có

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 .$$

Vậy Pdx + Qdy + Rdz là vi phân toàn phần của một hàm số nào đó. P, Q, R và các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trên $\mathbf{R}^3$, do đó tích phân đường $\int_{\widehat{MN}} Pdx + Qdy + Rdz$ không phụ thuộc đường lấy tích phân. Chọn đường lấy tích phân gồm đoạn thẳng MO nối M với gốc O trong mặt phẳng xOy và đoạn thẳng ON trên trục Oz (hình 74).



Hình 74

Trên đoạn MO, ta có z = 0, do đó dz = 0, $y = \frac{4x}{3}$, do đó $dy = \frac{4}{3}dx$, vậy

$$\int_{MO}(y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz = \int_3^0 \frac{8}{3}xdx = -12$$

Trên đoạn ON, ta có x = 0, y = 0, dx = 0, dy = 0, vậy

$$\int_{ON}(y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz = 0.$$

Do đó I = −12.

31. Trường vectơ $f(r).\overrightarrow{OM}$ có thông lượng bảo toàn

$$\operatorname{div}(f(r).\overrightarrow{OM}) = 0.$$

Ta có

$$\operatorname{div}(f(r).\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, f(r)\,.\,\overrightarrow{OM} + f(r)\operatorname{div}(\overrightarrow{OM})$$

(xem câu a) bài 25). Nhưng

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}}f(r) = \frac{\partial}{\partial x}(f(r))\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}(f(r))\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}(f(r))\vec{k}$$

$$= f'(r)\left[\frac{\partial r}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial r}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial r}{\partial z}\vec{k}\right]$$

$$= f'(r)\left[\frac{x}{r}\vec{i} + \frac{y}{r}\vec{j} + \frac{z}{r}\vec{k}\right] =$$

$$= \frac{f'(r)}{r}(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}) = \frac{f'(r)}{r}\overrightarrow{OM}.$$

Do đó

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}}(f(r)).\overrightarrow{OM} = \frac{f'(r)}{r}\overrightarrow{OM}^2 = rf'(r)$$

Ta lại có

$$\text{div }(\vec{OM}) = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 3$$

Vậy trường vectơ $f(r).\vec{OM}$ có thông lượng bảo toàn khi và chỉ khi

$$rf'(r) + 3f(r) = 0 \text{ hay } \frac{f'(r)}{f(r)} = -\frac{3}{r}$$

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được

$$\ln|f(r)| = \ln\frac{|C|}{r^3}$$

trong đó C là hằng số tùy ý. Do đó

$$f(r) = \frac{C}{r^3}$$

Điều kiện $f(1) = 1$ cho ta $C = 1$, vậy $\quad f(r) = \frac{1}{r^3}$

Tóm lại trường vectơ $\frac{\vec{OM}}{r^3}$ có thông lượng bảo toàn. Vectơ ấy có ba thành phần là $\frac{x}{r^3}$, $\frac{y}{r^3}$, $\frac{z}{r^3}$. Do đó thông lượng của trường vectơ ấy qua mặt cầu S được tính bởi tích phân mặt

$$I = \iint_S \frac{x}{r^3}dydz + \frac{y}{r^3}dzdx + \frac{z}{r^3}dxdy =$$

$$= \frac{1}{R^3}\iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy$$

Nhưng tích phân mặt ở vế phải bằng 3 lần thể tích của hình cầu bán kính R, vậy

$$I = \frac{1}{R^3}.4\pi R^3 = 4\pi$$

Nếu ta áp dụng định lý Ostrogradsky để tính thông lượng của trường vectơ $\frac{\vec{OM}}{r^3}$, ta sẽ được thông lượng $I = 0$, vì $\text{div}\left(\frac{\vec{OM}}{r^3}\right) = 0$,

1 nhưng kết qủa này sai, vì vectơ $\frac{\vec{OM}}{r^3}$ không xác định khi $r = 0$.

Chương V

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

A – ĐỀ BÀI

1. Giải các phương trình vi phân có biến số phân li

a) $x\,(1 + y^2)^2\,dx + y\,(1 + x^2)^2\,dy = 0$

b) $(x^2 - yx^2)\,y' + y^2 + xy^2 = 0$

c) $y'\cos 2y - \sin y = 0$

d) $y' = \dfrac{\ln x + 1}{\ln y + 1}$

e) $\dfrac{e^y - 1}{e^y - 2}\,y' = \dfrac{1}{x}$

f) $y' + \sin(x + y) = \sin(x - y)$

g) $y' = \dfrac{\cos y - \sin y - 1}{\cos x - \sin x + 1}$

h) $y' = \cos(x - y)$

i) $y' = x^2 + 2xy - 1 + y^2$

j) $y' = \dfrac{1}{x - y} + 1$.

2. Tìm nghiệm riêng của phương trình vi phân thỏa mãn điều kiện ban đầu:

a) $x\sqrt{1 + y^2}\,dx + y\sqrt{1 + x^2}\,dy = 0\,, \quad y\big|_{x = 0} = 1$

b) $(1 + e^{2x})y^2\,dy = e^x\,dx\,, \quad y\big|_{x = 0} = 0$

c) $\sin x dy - y \ln y dx = 0,\ y\big|_{x=0} = 1$;

d) $(x^2 + 1)y' = y^2 + 4,\ y\big|_{x=1} = 2$;

e) $y'\sin x\cos y + \cos x\sin y = 0,\ y\big|_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$.

3. Giải các phương trình vi phân

a) $x = y' + y'^3$;

b) $x = y' + e^{y'}$;

c) $y = y'^2\sin y'$;

d) $y^3 + y'^3 - yy' = 0$;

e) $y' = \dfrac{x+y-3}{(x+y-1)^2}$;

f) $(\sqrt{xy}+1)xy' - (\sqrt{xy}-1)y = 0$;

g) $\sqrt{1-x^2}\,y' - y^2 - 1 = 0$;

h) $y(x^2 + y^2 - 1)y' - x = 0$.

4. Giải các phương trình vi phân thuần nhất cấp một

a) $(y - x)dx + (y + x)dy = 0$;

b) $xdy - ydx = \sqrt{x^2+y^2}\,dx$;

c) $xyy' + x^2 - 2y^2 = 0$;

d) $(3x^2 + y^2)y + (y^2 - x^2)xy' = 0$;

e) $2(x + yy')^2 = y^2(1 + y'^2)$ (chuyển sang tọa độ cực) ;

f) $x\cos\frac{y}{x}(ydx + xdy) = y\sin\frac{y}{x}(xdy - ydx)$;

g) $xy' - y + x\,\mathrm{th}\frac{y}{x} = 0$;

h) $x^2y' + y^2 + xy(y' - 1) = 0$;

i) $y' = \dfrac{x-y+1}{x+y+3}$;

j) $y' = 2\left(\dfrac{y+2}{x+y-1}\right)^2$.

5. Tiếp tuyến và pháp tuyến của đường cong phẳng **L tại M** cắt trục Ox ở T và N, cắt trục Oy ở T' và N'. Tìm những đường cong L thỏa mãn điều kiện sau, $\forall M \in L$

a) $\overline{ON'} = OM$;

b) $\overrightarrow{ON'} = 2\overrightarrow{OT'}$;

c) $\overline{TN} = 2a$.

6. Giải các phương trình vi phân tuyến tính cấp một

a) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$;

b) $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$;

c) $y' - \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^3,\ y\big|_{x=0} = \dfrac{1}{2}$;

d) $(1 + x^2)y' + xy = 1,\ y\big|_{x=0} = 0$;

e) $2ydx + (y^2 - 6x)dy = 0$;

f) $xy' - y = x^2\text{arctg}x$;

g) $y' - \dfrac{y}{x\ln x} = x\ln x,\ y\big|_{x=e} = \dfrac{e^2}{2}$;

h) $(x^3 + x)y' + 3x^2y = \sqrt{x^2+1}$;

i) $x(1 + x^2)y' - (x^2 - 1)y + 2x = 0$;

j) $(x^2 - 4)y' + xy = 4$;

k) $2x(x - 1)y' + (2x - 1)y + 1 = 0$;

7. a) Chứng minh rằng phương trình

$$x(x^2 + 1)y' - (2x^2 + 3)y = 3$$

có một nghiệm là một tam thức bậc hai. Giải phương trình ấy;

b) Cùng câu hỏi với phương trình

$$(x^3 - x)y' + (1 - 2x^2)y + 1 = 0.$$

8. Chứng minh rằng hàm số $y = x\int_1^x e^{t^2}\,dt$ là nghiệm của phương trình

$$xy' - y = x^2e^{x^2}.$$

Tìm nghiệm riêng của phương trình ấy thoả mãn điều kiện

$$y\big|_{x=1} = 1.$$

9. Giải phương trình $xy' - 2y = x^3 + x$. Tìm tập hợp các điểm uốn của họ đường tích phân.

10. Giải các phương trình vi phân cấp một phi tuyến

a) $xy^2 + x^2(x + 1)yy' + 3x - 5 = 0$;

b) $y' + xy = x^3y^3$;

c) $(y\ln x - 2)ydx = xdy$;

d) $y' + y = e^{\frac{x}{2}}\sqrt{y},\ y\big|_{x=0} = \dfrac{9}{4}$;

e) $ydx + (x + x^2y)dy = 0$;

f) $\dfrac{dy}{dx}(x^2y^3 + xy) = 1$;

g) $xy'^2 + yy' - 2x = 0$;

h) $y = xy' + y'^2 + 1$;

i) $y = xy' + \dfrac{a}{y'}$;

j) $2y - xy' - 2y'^3 = 0$;

k) $y = xy' + \dfrac{y'}{y'+1}$.

11. Tiếp tuyến tại điểm M của đường cong phẳng L cắt trục Oy tại T. Tìm đường L đi qua điểm $(1, \dfrac{1}{2})$, biết rằng ta có:

$$\overline{OT} = y^2, \forall M(x, y) \in L .$$

12. a) Chứng minh rằng phương trình vi phân

$$(x^3 - 1)y' = y^2 + x^2y - 2x$$

có một nghiệm riêng dạng $y_1 = x^\alpha$. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình ấy bằng cách đổi hàm số phải tìm $y = y_1 + z$.

b) Chứng minh rằng $y = x$ là một nghiệm riêng của phương trình vi phân

$$2x^2y' = (x - 1)(y^2 - x^2) + 2xy .$$

Giải phương trình ấy bằng cách đặt $y = x + z$.

13. Chứng minh rằng các phương trình sau là phương trình vi phân toàn phần. Giải chúng

a) $(x + y + 1)dx + (x - y^2 + 3)dy = 0$;

b) $2(3xy^2 + 3y^3)dx + 3(2x^2y + y^2)dy = 0$;

c) $3x^2(1 + \ln y)dx - \left(2y - \dfrac{x^3}{y}\right)dy = 0$;

d) $\left[\dfrac{y^2}{(x-y)^2} - \dfrac{1}{x}\right]dx + \left[\dfrac{1}{y} - \dfrac{x^2}{(x-y)^2}\right]dy = 0$;

e) $\left(\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y} - \frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x} + 1\right) dx + \left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x} - \frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y} + \frac{1}{y^2}\right) dy = 0.$

14. a) Giải phương trình

$$(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3})\, dx + (x^2 + y^2)\, dy = 0$$

bằng cách tìm thừa số tích phân dạng $\alpha(x)$

b) Giải phương trình

$$y\,(1 + xy)\, dx - xdy = 0$$

bằng cách tìm thừa số tích phân dạng $\alpha(y)$

c) Giải phương trình

$$xdy + ydx - xy^2 \ln x dx = 0$$

bằng cách tìm thừa số tích phân dạng $\alpha\,(xy)$

d) Giải phương trình

$$xdx + (2x + y)\, dy = 0$$

bằng cách tìm thừa số tích phân dạng $\alpha\,(x + y)$.

15. Giải các phương trình

a) $y' - \frac{y}{2x} = 5x^2y^5$;

b) $xy' = y - x\cos^2\frac{y}{x}$;

c) $y' = \frac{2x^3y - y^4}{x^4 - 2xy^3}$;

d) $xy' + y = \frac{1}{x^2y^2}$;

1 e) $y' = \frac{y(x + 1)}{x^2} - \frac{2y}{x}\ln\left(\frac{y}{x}\right)$.

16. Tìm quĩ đạo trực giao của các họ đường cong phụ thuộc tham số C

a) $y^2 = 2p(x - C)$

b) $x^2 - y^2 = C$

c) $x^2 + y^2 = 2Cx$

d) $(x^2 + y^2)^2 = C^2(x^2 - y^2)$

e) $(x - C)^2 + y^2 = a^2$, a là hằng số xác định .

17. Giải các phương trình vi phân cấp hai khuyết

a) $xy'' - y' = x^2 e^x$

b) $y'' - \dfrac{y'}{x - 1} - x(x - 1) = 0, \quad y\big|_{x=2} = 1, \quad y'\big|_{x=2} = -1$

c) $y'' + 2y'(1 - 2y) = 0, \; y\big|_{x=0} = 0, \; y'\big|_{x=0} = \dfrac{1}{2}$

d) $xy'' - y' = x^2\ln x, \quad y\big|_{x=1} = -\dfrac{4}{9}, \quad y'\big|_{x=1} = -1$

e) $yy'' - y'^2 + y'^3 = 0$

f) $y''^2 + y'^2 = a^2$

g) $y'' = \dfrac{1}{2y'}$

h) $yy'' + y^3 - y'^2 = 0$

i) $3y'y''^2 - (1 + y'^2)y''' = 0$

18. Giải phương trình vi phân cấp hai tuyến tính

a) $x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = 0$, biết rằng nó có một nghiệm riêng có dạng $y_1(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

b) $(2x + 1) y'' + (4x - 2) y' - 8y = 0$, biết rằng nó có một nghiệm riêng có dạng $y_1 (x) = e^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

c) $(x^2 - 1) y'' - 6y = 0$, biết rằng nó có một nghiệm riêng $y_1 (x)$ có dạng đa thức

d) $(2x - x^2) y'' + (x^2 - 2) y' + 2 (1 - x) y = 0$,

$$y\Big|_{x=1} = 0 \,;\; y'\Big|_{x=1} = 1$$

biết rằng nó có một nghiệm riêng $y_1 (x) = e^x$

e) $(2x - x^2) y'' + 2(x - 1) y' - 2y = -2$ biết rằng nó có hai nghiệm riêng là $y_1 (x) = 1$, $y_2 (x) = x$

f) $x(x + 1) y'' + (x + 2) y' - y = x + \dfrac{1}{x}$, biết rằng phương trình thuần nhất tương ứng của nó có một nghiệm riêng dạng đa thức.

g) $x(x^2 + 3) y'' - 2 (2x^2 + 3) y' + 6xy =$

$= e^{-x} (x^4 + x^3 + x^2 - 9x - 12)$

biết rằng nó có một nghiệm riêng dạng $Y = (ax + b) e^{-x}$, $a, b \in \mathbf{R}$ và phương trình thuần nhất tương ứng của nó có một nghiệm riêng có dạng $y_1 = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

19. Giải các phương trình

a) $y'' - y = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$

b) $y'' + 2y' + y = 3e^{-x} . \sqrt{x + 1}$

c) $y'' + y = tgx$

d) $y'' + 5y' + 6y = \dfrac{1}{1 + e^{2x}}$

1 e) $y'' + y = \dfrac{1}{\cos 2x \sqrt{\cos 2x}}$.

20. Giải các phương trình

a) $y'' - 7y' + 6y = \sin x$

b) $y'' + 9y = 6e^{3x}$

c) $y'' - 3y' = 2 - 6x$

d) $y'' - 2y' + 3y = e^{-x} \cos x$

e) $y'' + 4y = 2\sin 2x$

f) $y'' + 2y' + y = 4e^{-x}$

g) $y'' - 9y' + 20y = x^2 e^{4x}$

h) $y'' + 4y' - 5y = 2e^{x}$

i) $y'' + 2y' + 5y = 2xe^{-x} \cos 2x$

j) $y'' + y = x^2 \cos^2 x$

k) $y'' - 3y' = e^{3x} - 18x$

l) $y'' + y = \cos^3 x$

m) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \cos^2 x$

n) $y'' - 2y' + (1 + \alpha^2)\, y = (1 + 4\alpha^2)\cos\alpha x$, α là tham số $\neq 0$,

$$y\Big|_{x=0} = 1 \;, \quad y'\Big|_{x=0} = 0$$

o) $y'' + 6y' + 9y = xe^{\alpha x}$, α là tham số

1 p) $y'' - (m + 1)\, y' + my = e^{x} - x - 1$, m là tham số

21. Giải phương trình

a) $x^2y'' + xy' - 4y = x^2\ln x$

b) $x^2y'' - 2y = x^3\cos x$

c) $y'' - y' = e^{2x}\cos e^x$ bằng cách đổi biến số $t = e^x$

d) $(x^2 + 1)\, y'' + 2xy' + \dfrac{4y}{x^2 + 1} = \dfrac{2x}{(x^2 + 1)^2}$ bằng cách đổi biến số $x = \text{tg}t,\ -\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}$

e) $(x^2 + 1)\, y'' + xy' - y = 0$ bằng cách đổi biến số $x = \text{sh}t$

f) $x^2 y'' - 2xy' + (2 - x^2)\, y = 0$ bằng cách đổi hàm số phải tìm $z = \dfrac{y}{x}$

g) $x^2 y'' + 4xy' + (x^2 + 2)\, y = \dfrac{1}{\cos x}$ bằng phép biến đổi $y = \dfrac{u}{x^2}$

h) $(1 + x^2)^2 y'' + 2x\,(1 + x^2)\, y' + y = 0$ bằng phép biến đổi

$$y = \frac{u}{\sqrt{1 + x^2}}$$

i) $(x^2 + 1)\, y'' + xy' - \alpha^2 y = 0$ $(\alpha > 0)$ bằng cách tìm phép biến đổi $x = \varphi(t)$ để đưa phương trình về phương trình tuyến tính có hệ số không đổi.

j) $y''\cos x + y'\sin x - y\cos^3 x = 0$ bằng cách tìm phép biến đổi $t = \varphi(x)$ để đưa phương trình về phương trình tuyến tính có hệ số không đổi.

22. a) Đặt $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Tìm hàm số $\varphi(r)$ để cho hàm số

$$u(x,y,z) = \frac{\varphi(r)}{r}$$

thỏa mãn phương trình

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 4u$$

b) Đặt $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Tìm hàm số $\varphi(r)$ để cho hàm số

$$u(x,y) = \varphi(r)$$

thỏa mãn phương trình

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{xy}{r^\alpha}, \quad \alpha \text{ là hằng số}.$$

23. Phương trình có dạng $F(x, \frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}) = 0$ được gọi là phương trình vi phân thuần nhất cấp hai. Chứng minh rằng có thể đưa nó về phương trình cấp một bằng cách đổi hàm số phải tìm $z = \frac{y'}{y}$. Giải phương trình

a) $yy'' - y'^2 + yy' + x^2y^2 = 0$

b) $x^2yy'' = (y - xy')^2$

c) $yy'' - y'^2 = 0$

d) $xyy'' + xy'^2 - yy' = 0$

24. a) Tìm nghiệm khai triển được thành chuỗi lũy thừa của phương trình

$$4xy'' + 2y' - y = 0$$

b) Tìm nghiệm khai triển được thành chuỗi lũy thừa của phương trình

$$2x(1 - x)y' + (1 - 2x)y = 1$$

c) Tìm nghiệm khai triển được thành chuỗi lũy thừa của phương trình

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

thoả mãn điều kiện $y\big|_{x=0} = 0$, $y'\big|_{x=0} = 1$. Từ đó tìm nghiệm tổng quát của phương trình.

d) Tìm nghiệm khai triển được thành chuỗi lũy thừa của phương trình

$$y'' - 2xy' + y = 0 .$$

25. Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} y' = 4y - 2z \\ z' = y + z \end{cases}$;

b) $\begin{cases} y' = 3y - 2z \\ z' = 2y - z \end{cases}$;

c) $\begin{cases} y' = y + 8z + e^{x} \\ z' = 2y + z + e^{-3x} \end{cases}$;

d) $\begin{cases} y' = y + z - 3 \\ z' = -2y + 3z + 1 \end{cases}$

$y\big|_{x=0} = 0$, $z\big|_{x=0} = 0$;

e) $\begin{cases} y' = 1 - \dfrac{1}{z} \\ z' = \dfrac{1}{y - x} \end{cases}$;

f) $\begin{cases} y' = \dfrac{y}{2y + 3z} \\ z' = \dfrac{z}{2y + 3z} \end{cases}$

$y\big|_{x=0} = 1$, $z\big|_{x=0} = 2$;

g) $\begin{cases} y' = \dfrac{x}{yz} \\ z' = \dfrac{x}{y^2} \end{cases}$;

h) $\begin{cases} (z - y)^2 y' = z \\ (z - y)^2 z' = y \end{cases}$;

i) $\dfrac{dx}{y + z} = \dfrac{dy}{z + x} = \dfrac{dz}{x + y}$.

26. Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} y' = z - y \\ z' = -y - 3z \end{cases}$,

b) $\begin{cases} y' = 4y - 3z \\ z' = 3y + 4z \end{cases}$;

c) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + y + z \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y + z \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y - z \end{cases}$; d) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 2y + z \\ \dfrac{dz}{dt} = x + z \end{cases}$.

B- LỜI GIẢI

1. a) Phân li biến số, ta được:

$$\frac{xdx}{(1+x^2)^2} + \frac{ydy}{(1+y^2)^2} = 0 .$$

Lấy tích phân hai vế, ta được:

$$-\frac{1}{2(1+x^2)} - \frac{1}{2(1+y^2)} = C .$$

Vậy tích phân tổng quát của phương trình là:

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} = K ,$$

trong đó K = –2C là hằng số tùy ý.

b) * $xy \neq 0$, phương trình có thể viết là:

$$\frac{(1-y)dy}{y^2} + \frac{1+x}{x^2}dx = 0 .$$

Lấy tích phân hai vế, ta được:

$$-\frac{1}{y} - \ln|y| - \frac{1}{x} + \ln|x| = C ,$$

C là hằng số tùy ý. Vậy tích phân tổng quát của phương trình là:

$$\ln\left|\frac{x}{y}\right| - \frac{x+y}{xy} = C , \ (xy \neq 0)$$

* $y = 0$ cũng là nghiệm của phương trình.

c) Ta có

* $\sin y \neq 0$:

$$dx = \frac{\cos 2y}{\sin y}dy = \frac{1-2\sin^2 y}{\sin y}dy.$$

Do đó

$$x = \int \frac{dy}{\sin y} - 2\int \sin y dy = \ln\left|tg\frac{y}{2}\right| + 2\cos y + C.$$

* $\sin y = 0 \Rightarrow y = k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$ cũng là nghiệm.

d) Ta có $\quad (\ln x + 1)dx = (\ln y + 1)dy$.

Do đó $\quad \int (\ln x+1)dx = \int (\ln y+1)dy$.

Hay $\quad x\ln x = y\ln y + C$.

e) Lấy tích phân hai vế phương trình

$$\frac{e^y-1}{e^y-2}dy = \frac{dx}{x}$$

Ta được $\quad \int \frac{e^y-1}{e^y-2}dy = \ln|x|$.

Trong tích phân ở vế trái, ta đổi biến số $t = e^y$, do đó $y = \ln t$, $dy = \frac{dt}{t}$. Do đó

$$\int \frac{e^y-1}{e^y-2}dy = \int \frac{t-1}{t-2}.\frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-2}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\ln t + \frac{1}{2}\ln|t-2| + C$$

$$= \frac{1}{2}\left(y + \ln\left|e^y - 2\right|\right) + C.$$

Vậy tích phân tổng quát của phương trình là:

$$\ln|e^y - 2| + y - 2\ln|x| + C = 0.$$

f) Ta có

$$\frac{dy}{dx} + \sin(x+y) - \sin(x-y) = \frac{dy}{dx} + 2\sin y \cos x = 0.$$

Do đó:

* $\sin y \neq 0$ ($y \neq k\pi$) thì:

$$\frac{dy}{\sin y} + 2\cos x dx = 0.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được:

$$\ln\left|\text{tg}\frac{y}{2}\right| + 2\sin x = C \ (y \neq k\pi).$$

* $\sin y = 0 \Rightarrow y = k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) cũng là nghiệm.

g) Ta có

* Nếu $\cos y - \sin y - 1 \neq 0$ thì:

$$\frac{dy}{\cos y - \sin y - 1} = \frac{dx}{\cos x - \sin x + 1}$$

Do đó $I_1 = \int \frac{dy}{\cos y - \sin y - 1} = \int \frac{dx}{\cos x - \sin x + 1} = I_2.$

Trong tích phân I_1, đặt $t = \text{tg}\frac{y}{2}$, $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{y}{2} \leq \frac{\pi}{2}$ do đó

$$y = 2\text{arctg}t,\ dy = \frac{2dt}{1+t^2}. \quad \text{Ta được}$$

$$I_1 = -\int \frac{dt}{t(t+1)} = \int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t}\right)dt$$

$$= \ln|1+t| - \ln|t| + \ln|C_1| = \ln\left|\frac{C_1(1+\text{tg}\frac{y}{2})}{\text{tg}\frac{y}{2}}\right|$$

Trong tích phân I_2, đặt $\tau = tg\frac{x}{2}$, $-\frac{\pi}{2} \le \frac{x}{2} \le \frac{\pi}{2}$, ta được

$$I_2 = \int \frac{d\tau}{1-\tau} = -\ln|1-\tau| + \ln|C_2| = \ln\left|\frac{C_2}{1 - tg\frac{x}{2}}\right|$$

Vậy tích phân tổng quát của phương trình là

$$tg\frac{y}{2} = C(1 + tg\frac{y}{2})(1 - tg\frac{x}{2})$$

Trong đó $C = \frac{C_1}{C_2}$ là hằng số tùy ý.

* Nếu $\cos y - \sin y - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4} + y) = 1 \Rightarrow y = 2k\pi$ và $y = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ cũng là nghiệm

h) Đặt $z = x - y$. Ta có $z' = 1 - y'$. Phương trình đã cho trở thành

$$z' = 1 - \cos z = 2\sin^2\frac{z}{2}$$

* Nếu $\sin\frac{z}{2} \ne 0$ $(z = x - y \ne 2k\pi)$ thì :

$$dx = \frac{dz}{2\sin^2\frac{z}{2}}$$

lấy nguyên hàm hai vế, ta được

$$x = -\cot g\frac{z}{2} + C$$

Vậy $x + \cot g\frac{x-y}{2} = C$, $(y \ne x + 2k\pi,\quad k \in Z)$

* Nếu $\sin z = 0 \Rightarrow z = x - y = 2k\pi \Rightarrow y = x - 2k\pi$ cũng là nghiệm.

i) Ta có

$$y' = x^2 + 2xy - 1 + y^2 = (x + y)^2 - 1$$

Đặt x + y = z. Ta có z' = 1 + y'. Phương trình được viết lại thành

$$z' = z^2 \text{ hay } \frac{dz}{z^2} = dx \text{ (nếu } z = x + y \neq 0)$$

Do đó $$x = \int \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{z} + C = -\frac{1}{x+y} + C$$

Suy ra $$x + y = \frac{1}{C - x} \qquad (x + y \neq 0)$$

* Nếu $z = x + y = 0 \Rightarrow y = -x$ cũng là nghiệm

j) Đặt x – y = z. Ta có z' = 1 – y'. Phương trình đã cho được viết lại thành

$$1 - z' = \frac{1}{z} + 1 \text{ hay } zdz + dx = 0$$

Do đó $$\frac{z^2}{2} + x = C$$

Hay $$(x - y)^2 + 2x = C_1 \ ,$$

$C_1 = 2C$ là hằng số tùy ý

2. a) Phân li biến số, ta được

$$\frac{xdx}{\sqrt{1 + x^2}} + \frac{ydy}{\sqrt{1 + y^2}} = 0$$

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được

$$\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + y^2} = C$$

trong đó C là hằng số tùy ý. Do điều kiện $y\Big|_{x=0} = 1$, ta được

$$C = 1 + \sqrt{2}$$

Vậy tích phân riêng của phương trình là

$$\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + y^2} = \sqrt{2} + 1$$

b) Phương trình đã cho có thể viết là

$$y^2dy = \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}}$$

Lấy nguyên hàm hai vế, ta có

$$\frac{y^3}{3} = \operatorname{arctg}e^x + C,$$

C là hằng số tùy ý. Từ điều kiện $y|_{x=0} = 0$, ta được

$$0 = \frac{\pi}{4} + C, \text{ hay } C = -\frac{\pi}{4}$$

Vậy tích phân riêng của phương trình là

$$y^3 = 3\operatorname{arctg}e^x - \frac{3\pi}{4} .$$

c) Phân li biến số, ta được

$$\frac{dy}{y\ln y} = \frac{dx}{\sin x}$$

Vì $\frac{dy}{y} = d(\ln y)$ nên lấy tích phân hai vế, ta được

$$\ln(|\ln y|) = \ln\left(\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|\right) + \ln|C|$$

hay $$\ln y = C \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

Từ điều kiện $y|_{x=0} = 1$, ta được

$$0 = C.\ 0$$

1 Điều kiện này được thỏa mãn với mọi C. Điều đó chứng tỏ

rằng mọi nghiệm của phương trình đều thoả mãn điều kiện ấy. Nói cách khác mọi đường tích phân của phương trình đều đi qua điểm (0, 1). Vậy điều kiện duy nhất nghiệm của phương trình không được thoả mãn tại điểm đó.

d) Ta có

$$\frac{dy}{y^2+4}=\frac{dx}{x^2+1}.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{y}{2}=\operatorname{arctg}x+C.$$

Vì $\quad y\big|_{x=1}=2, \quad$ nên ta có

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+C \qquad \text{hay} \qquad C=-\frac{\pi}{8}.$$

Vậy tích phân riêng của phương trình là:

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{2}=2\operatorname{arctg}x-\frac{\pi}{4}.$$

Do đó

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}x-\frac{\pi}{4}\right).$$

Hay

$$\frac{y}{2}=\frac{\dfrac{2x}{1-x^2}-1}{1+\dfrac{2x}{1-x^2}}=\frac{2x-1+x^2}{2x+1-x^2}.$$

Vậy nghiệm riêng của phương trình là:

$$y=\frac{4x+2(x^2-1)}{2x+1-x^2}.$$

e) Phân li biến số, ta được

$$\frac{\cos y dy}{\sin y}+\frac{\cos x dx}{\sin x}=0.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$\ln|\sin y| + \ln|\sin x| = \ln|C|,$$

hay

$$\sin x \sin y = C .$$

Vì $y\big|_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$, ta được $C = \frac{1}{2}$. Vậy tích phân riêng của phương trình là:

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}.$$

3. a) Phương trình $x = y' + y'^3$ khuyết y. Đặt $y' = t$, ta có

$$x = t + t^3 .$$

Vì $\frac{dy}{dx} = t$, ta có:

$$dy = tdx = t(1 + 3t^2)dt = (t + 3t^3)dt .$$

Do đó

$$y = \frac{t^2}{2} + \frac{3t^4}{4} + C.$$

Vậy phương trình tham số của đường tích phân tổng quát là:

$$x = t + t^3, \qquad y = \frac{t^2}{2} + \frac{3t^4}{4} + C.$$

b) Phương trình $x = y' + e^{y'}$ khuyết y. Đặt $y' = t$, ta có:

$$x = t + e^t ,$$

do đó

$$dy = tdx = t(1 + e^t)dt .$$

Vậy

$$y = \int tdt + \int te^t dt = \frac{t^2}{2} + te^t - e^t + C .$$

Phương trình tham số của đường tích phân tổng quát là:

$$x = t + e^t, \qquad y = \frac{t^2}{2} + te^t - e^t + C.$$

1

c) Phương trình $y = y'^2\sin y'$ khuyết x. Đặt $y' = t$, ta có

$$y = t^2\sin t\,.$$

Do đó

$$dx = \frac{dy}{t} = \frac{2t\sin t + t^2\cos t}{t} = 2\sin t + t\cos t\,.$$

Vậy
$$x = -2\cos t + \int t\cos t\,dt =$$

$$= -2\cos t + t\sin t - \int \sin t\,dt =$$

$$= -\cos t + t\sin t + C.$$

Phương trình tham số của đường tích phân tổng quát là:

$$x = -\cos t + t\sin t + C, \qquad y = t^2\sin t\,.$$

d) Phương trình $y^3 + y'^3 - yy' = 0$, khuyết x, nhưng phương trình ấy không giải ra được đối với y, hoặc đối với y'. Dạng của phương trình ấy gợi cho ta đưa tham số t vào bằng cách đặt $y' = ty$ (xem ví dụ lá Descartes, mục 2, chương 5, quyển toán học cao cấp tập 2). Ta được

$$y = \frac{t}{t^3+1}, \qquad y' = \frac{t^2}{t^3+1}\,.$$

Nhưng

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{t^3+1-3t^3}{(t^3+1)^2}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{t^2}{t^3+1}\,.$$

Do đó

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1-2t^3}{t^2(t^3+1)}, \qquad x = \int \frac{1-2t^3}{t^2(t^3+1)}dt\,.$$

Để tính tích phân ấy, ta phải phân tích phân thức hữu tỉ dưới dấu tích phân thành tổng của các phân thức hữu tỉ đơn giản. Nhưng ta có thể trước hết đổi biến số $t = \frac{1}{u}$, do đó $dt = -\frac{du}{u^2}$, vậy

1

$$x = \int \frac{2-u^3}{u^3+1}du = \int\left(\frac{3}{u^3+1} - 1\right)du = 3\int \frac{du}{u^3+1} - u$$

Ta có

$$\frac{3}{u^3+1} \equiv \frac{A}{u+1} + \frac{Bu+C}{u^2-u+1} \qquad (*)$$

Nhân hai vế của (*) với (u + 1) rồi cho u = –1, ta được A = 1. Nhân hai vế của (*) với u rồi cho $u \to \infty$, ta được

$$A + B = 0 \quad \Rightarrow \quad B = -1$$

Cho u = 0 trong hai vế của (*), ta được $A + C = 0 \Rightarrow C = 2$.

Vậy

$$\int \frac{3du}{u^3+1} = \int \frac{du}{u+1} - \int \frac{u-2}{u^2-u+1}du$$

$$= \ln|u+1| - \int \frac{1}{2}\frac{2u-1-3}{u^2-u+1}du =$$

$$= \ln|u+1| - \frac{1}{2}\ln(u^2-u+1) + \frac{3}{2}\int \frac{d\left(u-\frac{1}{2}\right)}{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{(u+1)^2}{u^2-u+1} + \sqrt{3}\,\text{arctg}\frac{2u-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Vậy phương trình tham số của đường tích phân tổng quát là

$$\begin{cases} x = -u + \frac{1}{2}\ln\frac{(u+1)^2}{u^2-u+1} + \sqrt{3}\,\text{arctg}\frac{2u-1}{\sqrt{3}} + C \\ y = \frac{u^2}{u^3+1}. \end{cases}$$

e) Đặt x + y – 1 = z. Ta có 1 + y' = z'. Phương trình đã cho trở thành

$$z' - 1 = \frac{z-2}{z^2} \quad \text{hay} \quad z' = \frac{z^2+z-2}{z^2}.$$

Do đó

1

$$dx = \frac{z^2dz}{z^2 + z - 2}$$

Vậy

$$x = \int \left(1 + \frac{2 - z}{z^2 + z - 2}\right) dz = z + \int \frac{2 - z}{z^2 + z - 2} dz =$$

$$= z + \int \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z - 1} - \frac{4}{3}\frac{1}{z + 2}\right) dz =$$

$$= z + \frac{1}{3}\ln|z - 1| - \frac{4}{3}\ln|z + 2| + C$$

Suy ra $\quad x = x + y - 1 + \frac{1}{3}\ln|x + y| - \frac{4}{3}\ln|x + y + 1| + C$

Vậy tích phân tổng quát của phương trình là

$$y + \frac{1}{3}\ln|x + y| - \frac{4}{3}\ln|x + y - 1| + C_1 = 0$$

trong đó $C_1 = C - 1$ là hằng số tùy ý.

f) Đặt $\sqrt{xy} = u$. Ta có $xy = u^2$, do đó $xy' + y = 2uu'$, phương trình đã cho trở thành

$$(u + 1)(2uu' - y) - (u - 1)y = 0$$

Hay $\quad 2uu'(u + 1) - 2uy = 0$

Hay $\quad u'(u + 1) - \frac{u^2}{x} = 0$

Phân li biến số, ta được

$$\frac{(u + 1)\,du}{u^2} = \frac{dx}{x}$$

Tích phân hai vế, ta có

$$\ln|u| - \frac{1}{u} = \ln|x| + C$$

Do đó $\frac{1}{2}\ln|y| - \frac{1}{\sqrt{xy}} - \frac{1}{2}\ln|x| - C = 0$.

g) Đổi biến số $x = \sin t$, $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$. Ta có $\sqrt{1-x^2} = \cos t$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = y'\cos t = y'\sqrt{1-x^2}$$

Phương trình đã cho trở thành

$$\frac{dy}{dt} = 1 + y^2 \quad \text{hay} \quad \frac{dy}{1+y^2} = dt$$

Do đó

$$\text{arctg}y = t + C = \arcsin x + C$$

Vậy $y = \text{tg}(\text{arctg}y) = \text{tg}(\arcsin x + C) =$

$$= \frac{\text{tg}(\arcsin x) + \text{tg}C}{1 - \text{tg}(\arcsin x)\text{tg}C}$$

Nhưng

$$\text{tg}(\arcsin x) = \frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Do đó

$$y = \frac{\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} + K}{1 - K\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}} = \frac{x + K\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2} - Kx},$$

trong đó $K = \text{tg}C$ là hằng số tùy ý

h) Viết phương trình đã cho dưới dạng

$$y(x^2 + y^2)dy - ydy - xdx = 0$$

Đặt $u = x^2 + y^2$, ta được $du = 2xdx + 2ydy$. Phương trình trở thành

$$yudy = \frac{1}{2}du$$

Phân li biến số, ta được

$$2ydy = \frac{du}{u}$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$y^2 = \ln u + C$$

Do đó $$e^{y^2} = e^C . u = Ku = K\ (x^2 + y^2)$$

Tích phân tổng quát của phương trình là

$$\frac{e^{y^2}}{x^2 + y^2} = K$$

trong đó $K = e^C$ là hằng số tùy ý.

4. a) Có thể viết phương trình đã cho dưới dạng

$$y' = \frac{x - y}{x + y}$$

Đặt $y = ux$, u là một hàm số của x. Ta có

$$xu' + u = \frac{1 - u}{1 + u}$$

Hay $$\frac{dx}{x} + \frac{(u + 1)\,du}{u^2 + 2u - 1} = 0$$

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được

$$\ln |x| \sqrt{u^2 + 2u - 1} = \ln|C|$$

Do đó $$x\sqrt{u^2 + 2u - 1} = C$$

Bình phương hai vế, thay u bởi $\frac{y}{x}$, ta được

$$y^2 + 2xy - x^2 = C^2$$

Đó là tích phân tổng quát của phương trình.

Cũng có thể xem

$$x = \frac{C}{\sqrt{u^2 + 2u - 1}}, \quad y = \frac{Cu}{\sqrt{u^2 + 2u - 1}}$$

là phương trình tham số của họ đường tích phân tổng quát.

b) Ta có

$$xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$$

Đặt $y = xu$, ta được với $x > 0$

$$x \frac{du}{dx} = \sqrt{1 + u^2}$$

Phân li biến số

$$\frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{dx}{x}$$

Do đó

$$\ln (u + \sqrt{1 + u^2}) = \ln |Cx| ,$$

C là hằng số tùy ý, hay

$$u + \sqrt{1 + u^2} = Cx$$

Bình phương hai vế đẳng thức $\sqrt{1 + u^2} = Cx - u$, rồi thế $u = \frac{y}{x}$, ta được

$$1 + 2Cy - C^2x^2 = 0$$

Với $x < 0$, ta cũng được kết quả tương tự.

c) Đặt $y = xu$, thế vào phương trình, ta được

$$xu \frac{du}{dx} + 1 - u^2 = 0$$

* Nếu $u \neq \pm 1$ tức $y \neq \pm x$ thì:

$$\frac{udu}{u^2 - 1} = \frac{dx}{x}$$

Do đó

$$\ln \sqrt{u^2 - 1} = \ln |Cx|$$

C là hằng số tùy ý. Do đó

$$\frac{y^2 - x^2}{x^2} = C^2x^2$$

Suy ra

$$y = \pm x\sqrt{1 + C^2x^2} \qquad (y \neq \pm x)$$

* nếu $u = \pm 1 \Rightarrow y = \pm x$ là nghiệm .

d) Đặt $y = xu$, phương trình trở thành

$$(u^2 - 1)x\frac{du}{dx} + 2u^3 + 2u = 0$$

Hay

$$\frac{u^2 - 1}{2u(u^2 + 1)}du + \frac{dx}{x} = 0 \qquad (*)$$

Phân tích $\dfrac{u^2 - 1}{2u(u^2 + 1)}$ thành tổng các phân thức hữu tỉ đơn giản, ta được

$$\frac{u^2 - 1}{2u(u^2 + 1)} = -\frac{1}{2u} + \frac{u}{u^2 + 1}$$

Do đó lấy nguyên hàm hai vế phương trình (*), ta được

$$\ln\frac{|x|\sqrt{u^2 + 1}}{\sqrt{u}} = \ln|C|,$$

C là hằng số tùy ý, suy ra

$$\frac{x^2(u^2 + 1)}{u} = C^2$$

Hay $$x(x^2 + y^2) - C^2y = 0$$

Chú thích: Chuyển sang tọa độ cực $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, phương trình của đường tích phân tổng quát là

$$r^2 = C^2 \operatorname{tg}\varphi$$

Từ nhận xét này, ta thấy rằng cũng có thể giải phương trình đã cho bằng cách chuyển sang tọa độ cực. Ta có

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dr}{d\varphi}\sin\varphi + r\cos\varphi}{\dfrac{dr}{d\varphi}\cos\varphi - r\sin\varphi}$$

Thế vào phương trình đã cho, ta được

$$\frac{dr}{r} = \frac{d\varphi}{\sin 2\varphi}$$

Nghiệm tổng quát của nó là $r^2 = C^2 \operatorname{tg}\varphi$.

e) Chuyển sang tọa độ cực $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, và ký hiệu $\dot{r} = \dfrac{dr}{d\varphi}$, ta có

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi}{\dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi}$$

Ta được

$$2(x + yy')^2 = 2\left(r\cos\varphi + r\sin\varphi\,\frac{\dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi}{\dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi}\right)^2 =$$

$$= \frac{2r^2\dot{r}^2}{(\dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi)^2},$$

$$y^2(1 + y'^2) = r^2\sin^2\varphi\left[1 + \left(\frac{\dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi}{\dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi}\right)^2\right] =$$

$$= r^2\sin^2\varphi\,\frac{\dot{r}^2 + r^2}{(\dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi)^2}$$

Phương trình đã cho trở thành

$$r^2\dot{r}^2\sin^2\varphi + r^4\sin^2\varphi = 2r^2r^2$$

Hay

$$r^2\sin^2\varphi = \dot{r}^2(2 - \sin^2\varphi) = \dot{r}^2(1 + \cos^2\varphi)$$

Do đó

1

$$\dot{r} = \pm \ r \frac{\sin\varphi}{\sqrt{1 + \cos^2\varphi}}$$

Phân li biến số, ta được

$$\frac{dr}{r} = \pm \frac{\sin\varphi d\varphi}{\sqrt{1 + \cos^2\varphi}}$$

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được

$$\ln r = \pm \ln(\cos\varphi + \sqrt{1 + \cos^2\varphi}) + \ln|C| ,$$

C là hằng số tùy ý, do đó

$$r = C(\sqrt{1 + \cos^2\varphi} \pm \cos\varphi)$$

Trở về tọa độ đề các, ta được

$$x^2 + y^2 + 2Cx - C^2 = 0$$

Họ đường tích phân tổng quát là họ đường tròn suy ra từ đường tròn tâm tại điểm (1, 0), bán kính $\sqrt{2}$ bằng phép vị tự tâm O.

f) Có thể viết lại phương trình đã cho như sau

$$\cos\frac{y}{x} . (ydx + xdy) - xy . \sin\frac{y}{x} . \frac{xdy - ydx}{x^2} = 0$$

Hay

$$\cos\frac{y}{x} . d(xy) + xyd(\cos\frac{y}{x}) = 0$$

Hay

$$d(xy . \cos\frac{y}{x}) = 0$$

Do đó, lấy nguyên hàm hai vế, ta được

$$xy . \cos\frac{y}{x} = C$$

C là hằng số tùy ý.

g) Đặt y = xu. Thế vào phương trình đã cho, ta được

$$x\frac{du}{dx} + \text{thu} = 0$$

Phân li biến số

$$\frac{\text{chudu}}{\text{shu}} + \frac{dx}{x} = 0$$

Do đó $\quad \ln|x\text{shu}| = \ln|C|,$

C là hằng số tùy ý. Do đó

$$x\text{shu} = C$$

Hay

$$u = \frac{y}{x} = \text{argsh}\,\frac{C}{x}$$

Suy ra

$$y = x\text{argsh}\,\frac{C}{x}\,.$$

h) Đặt y = xu. Thế vào phương trình đã cho, ta được

$$x\frac{du}{dx}(1 + u) + 2u^2 = 0$$

Hay

$$\frac{(1 + u)\,du}{2u^2} + \frac{dx}{x} = 0$$

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được

$$-\frac{1}{2u} + \frac{1}{2}\ln|u| + \ln|x| = \ln|C|,$$

C là hằng số tùy ý. Do đó

$$x\sqrt{|u|}\;e^{-\frac{1}{2u}} = C$$

Vậy

$$x = \frac{C}{\sqrt{|u|}}\,e^{\frac{1}{2u}}, \quad y = \frac{Cu}{\sqrt{|u|}}\,e^{\frac{1}{2u}}$$

là phương trình tham số của họ đường tích phân tổng quát.

i) Phương trình đã cho không phải là phương trình thuần nhất, do sự có mặt của các số hạng 1 và 3 ở vế phải. Nhưng ta có thể đưa phương trình đã cho về dạng phương trình thuần nhất bằng phép tịnh tiến các trục tọa độ. Đặt

$x = X + a$, $y = Y + b$, phương trình trở thành

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X-Y+a-b+1}{X+Y+a+b+3}. \tag{*}$$

Chọn a, b sao cho

$$\begin{cases} a - b + 1 = 0 \\ a + b + 3 = 0. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ấy, ta được $a = -2$, $b = -1$. Khi ấy phương trình (*) trở thành

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X-Y}{X+Y}.$$

Đó là một phương trình thuần nhất. Tích phân tổng quát của nó là:

$$Y^2 + 2XY - X^2 = C^2,$$

(xem câu a, bài tập này). Vậy tích phân tổng quát của phương trình đã cho là:

$$(y + 1)^2 + 2(x + 2)(y + 1) - (x + 2)^2 = C^2,$$

hay $$y^2 + 2xy - x^2 - 2x + 6y = K,$$

K là hằng số tùy ý.

j) Thực hiện phép biến đổi $x = X + a$, $y = Y + b$,

a, b là hai hằng số. Phương trình đã cho trở thành

$$\frac{dY}{dX} = 2\left(\frac{Y+b+2}{X+Y+a+b-1}\right)^2$$

Chọn a, b sao cho

$$\begin{cases} b+2=0 \\ a+b-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2 \\ a=3 \end{cases}.$$

Khi ấy, ta được phương trình thuần nhất

$$\frac{dY}{dX} = 2\left(\frac{Y}{X+Y}\right)^2.$$

Đặt Y = X.U. Thế vào phương trình trên, ta được

$$X\frac{dU}{dX}+U = 2\left(\frac{U}{1+U}\right)^2.$$

Do đó

$$\frac{(1+U)^2 dU}{U(1+U^2)} + \frac{dX}{X} = 0.$$

Hay

$$\frac{dU}{U} + 2\frac{dU}{1+U^2} + \frac{dX}{X} = 0.$$

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được:

$$\ln|UXe^{2\mathrm{arctg}U}| = \ln|C|,$$

C là hằng số tùy ý. Do đó

$$UXe^{2\mathrm{arctg}U} = Ye^{2\mathrm{arctg}\frac{Y}{X}} = C.$$

Suy ra

$$y+2 = Ce^{-2\mathrm{arctg}\frac{y+2}{x-3}}.$$

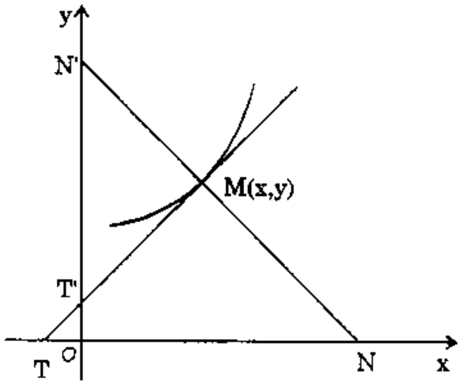
Giả sử phương trình của đường C là y = f(x). Phương trình của tiếp tuyến tại M là:

1

$$Y - y = y'(X - x)$$

Phương trình của pháp tuyến tại M là:

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x).$$



Hình 75

Cho Y = 0 lần lượt vào các phương trình (*) và (**), ta được:

$$X = \overline{OT} = x - \frac{y}{y'},$$

$$X = \overline{ON} = x + yy'.$$

Cho X = 0 lần lượt vào các phương trình (*) và (**), ta được:

$$Y = \overline{OT'} = y - xy'$$

$$Y = \overline{ON'} = y + \frac{x}{y'}.$$

a) Từ điều kiện $\overline{ON'} = OM$, ta được:

$$y + \frac{x}{y'} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Đó là một phương trình vi phân thuần nhất. Viết nó dưới dạng

$$y + x\frac{dx}{dy} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Đặt x = uy, ta có $\frac{dx}{dy} = y\frac{du}{dy} + u$. Thế vào phương trình, ta được với $y > 0$

$$1 + u^2 + uy\frac{du}{dy} = \sqrt{1 + u^2}.$$

Phân li biến số, ta được:

$$\frac{dy}{y} = \frac{udu}{\sqrt{1+u^2} - (1+u^2)}.$$

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được:

$$\ln y = \int \frac{udu}{\sqrt{1+u^2}-(1+u^2)}.$$

Đổi biến số $v = \sqrt{1+u^2}$, ta có $v^2 = t + u^2$, $2vdv = 2udu$, do đó

$$\ln y = \int \frac{vdv}{v-v^2} = -\int \frac{dv}{v-1} = \ln\frac{C}{v-1},$$

trong đó C là hằng số tùy ý dương. Suy ra

$$y = \frac{C}{\sqrt{1+u^2}-1} = \frac{Cy}{\sqrt{y^2+x^2}-y}.$$

Hay

$$\sqrt{y^2+x^2} - y = C.$$

Với $y < 0$, ta được:

$$y - \sqrt{y^2+x^2} = C,$$

C là hằng số tùy ý âm.

b) Đường cong L phải tìm thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{ON'} = 2\overrightarrow{OT'}$, do đó $y + \frac{x}{y'} = 2(y - xy')$.

Đó cũng là một phương trình thuần nhất cấp một. Nhưng chú ý rằng có thể viết phương trình ấy dưới dạng

$$y = x(2y' + \frac{1}{y'}).$$

Đặt $y' = t$, ta có

$$y = x(2t + \frac{1}{t}),$$

$$dy = tdx = (2t + \frac{1}{t})dx + x(2 - \frac{1}{t^2})dt,$$

do đó

$$\frac{dx}{x} = \frac{1-2t^2}{t(1+t^2)}dt = \frac{1+t^2-3t^2}{t(1+t^2)}dt = \frac{dt}{t} - \frac{3tdt}{1+t^2}$$

Lấy nguyên hàm vế đầu và vế cuối, ta được

$$\ln|x| = \ln|t| - \frac{3}{2}\ln(1+t^2) + \ln|C| = \ln\left|Ct(1+t^2)^{-3/2}\right|$$

trong đó C là hằng số tùy ý. Vậy

$$x = Ct(1+t^2)^{-3/2}$$

Thế vào hệ thức $y = x\left(2t + \frac{1}{t}\right)$, ta được

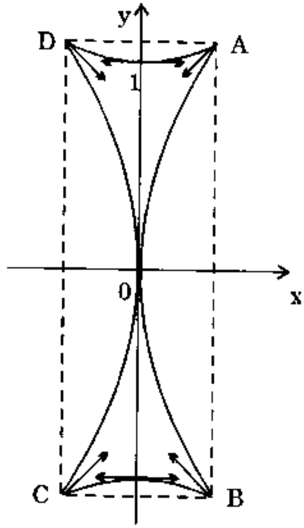
$$y = C(2t^2+1)(1+t^2)^{-3/2}$$

Vậy các phương trình tham số của đường L là

$$x = Ct(1+t^2)^{-3/2},$$

$$y = C(2t^2+1)(1+t^2)^{-3/2}$$

ứng với $C = \pm 1$, nếu đổi tham số $t = \mathrm{tg}\varphi$, ta được



Hình 76

$$x = \sin\varphi\cos^2\varphi\ ,\ y = \cos\varphi(\sin^2\varphi + 1)$$

Đường đó nhận Ox, Oy làm trục đối xứng, có 4 điểm lùi A, B, C, D, điểm A ứng với $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\varphi = \sqrt{\frac{2}{3}}$, có các tọa độ $\left(\frac{2\sqrt{3}}{9}, \frac{4\sqrt{6}}{9}\right)$ (h. 76) .

c) Đường L thỏa mãn điều kiện

1

$$\overline{TN} = \overline{ON} - \overline{OT} = yy' + \frac{y}{y'} = 2a$$

Đó là một phương trình vi phân cấp 1 khuyết x. Đặt y' = t, ta được

$$y = \frac{2at}{t^2 + 1}$$

$$dy = 2a\,\frac{1 - t^2}{(t^2 + 1)^2}\,dt = tdx$$

Do đó
$$dy = 2a\,\frac{1 - t^2}{(t^2 + 1)^2}\,dt = tdx$$

Vậy
$$dx = 2a\,\frac{1 - t^2}{t\,(t^2 + 1)^2}\,dt$$

Đặt $t = tg\varphi$, ta được

$$dx = 2a\,\frac{(1 - tg^2\varphi)\,(1 + tg^2\varphi)}{tg\varphi\,(1 + tg^2\varphi)^2}\,d\varphi = 2a\,(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\,\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\,d\varphi =$$

$$= 2a\,\frac{(1 - 2\sin^2\varphi)}{\sin\varphi}\cos\varphi\,d\varphi = 2a\,(\mathrm{cotg}\varphi - \sin 2\varphi)\,d\varphi$$

Do đó

$$x = 2a\ln|\sin\varphi| + a\cos 2\varphi + C$$

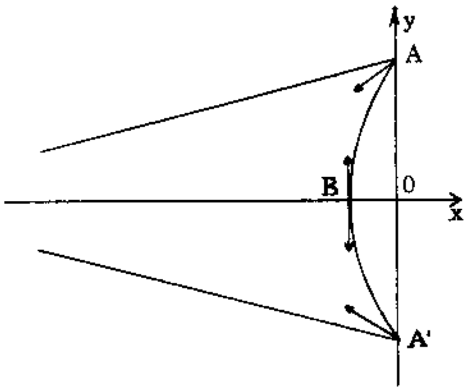
$$= a(\cos 2\varphi + \ln(1 - \cos 2\varphi)) + C$$

$$y = 2a\,\frac{tg\varphi}{1 + tg^2\varphi} = a\sin 2\varphi$$

Lại đặt $2\varphi = \tau$, ta được các phương trình tham số của đường L là

$$x = a\,[\cos\tau + \ln(1 - \cos\tau)]\,,\ y = a\sin\tau$$

1 Đường L_o ứng với C = 0 được cho ở hình 77. Nó có hai



Hình 77

điểm lùi A (0, a) và A' (0, –a), nhận Ox làm trục đối xứng và làm tiệm cận ngang về phía $-\infty$. Điểm B tại đó tiếp tuyến thẳng đứng có hoành độ $x = a(\ln 2 - 1)$. Các đường L khác suy từ L_o bằng phép tịnh tiến song song với Ox.

6. a) Phương trình thuần nhất tương ứng là

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 0$$

Phân li biến số, ta được

$$\frac{dy}{y} = -2xdx$$

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được $\ln\left|\frac{y}{K}\right| = -x^2 = \ln e^{-x^2}$ trong đó K là một hằng số tùy ý. Do đó $y = Ke^{-x^2}$

Đó là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất. Để tìm nghiệm của phương trình không thuần nhất, ta cho hằng số K biến thiên, tức là xem K là hàm số của x rồi thế vào phương trình không thuần nhất, ta được

$$K'e^{-x^2} - 2xKe^{-x^2} + 2xKe^{-x^2} = xe^{-x^2}$$

Hay $K' = x$

Do đó $K = \dfrac{x^2}{2} + C$, C là hằng số tùy ý.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + C\right) e^{-x^2}$$

b) Phương trình thuần nhất tương ứng là

$$(1 + x^2)\frac{dy}{dx} = 2xy \quad \text{hay} \quad \frac{dy}{y} = \frac{2xdx}{1 + x^2}$$

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được

$$\ln\left|\frac{y}{K}\right| = \ln(1 + x^2),$$

K là hằng số tùy ý. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$y = K(1 + x^2)$$

Xem K là hàm số của x, thế vào phương trình không thuần nhất, ta được

$$K' = 1 \Rightarrow K = x + C$$

C là hằng số tùy ý. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là

$$y = (x + C)(1 + x^2).$$

c) Phương trình thuần nhất tương ứng là

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = 0, \quad \text{hay}$$

$$\frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x+1}$$

nghiệm tổng quát của nó là

$$y = K(x+1)^2$$

K là hằng số tùy ý. Cho K biến thiên, thế vào phương trình không thuần nhất, ta được.

$$K'(x+1)^2 + 2K(x+1) - \frac{2K(x+1)^2}{x+1} = (x+1)^3$$

Suy ra

$$K' = x + 1$$

Do đó

$$K = \frac{x^2}{2} + x + C$$

C là hằng số tùy ý. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + x + C\right)(x+1)^2$$

Từ điều kiện $y|_{x=0} = \frac{1}{2}$, ta được $C = \frac{1}{2}$. Vậy ta được nghiệm riêng của phương trình đã cho là

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}\right)(x+1)^2.$$

d) Phương trình thuần nhất tương ứng là

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx} + xy = 0, \text{ hay } \frac{dy}{y} + \frac{xdx}{1+x^2} = 0$$

nghiệm tổng quát của nó là

1

$$y = \frac{K}{\sqrt{1+x^2}},$$

K là hằng số tùy ý. Xem K là hàm số của x, thế vào phương trình không thuần nhất, ta được

$$(1 + x^2)\left(\frac{K'}{\sqrt{1 + x^2}} - K\frac{x}{\sqrt{(1 + x^2)^3}}\right) + x\frac{K}{\sqrt{1 + x^2}} = 1$$

Hay

$$K' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

Do đó

$$K = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) + C,$$

C là hằng số tùy ý. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là

$$y = \frac{\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) + C}{\sqrt{1 + x^2}}$$

Từ điều kiện $y\Big|_{x=0} = 0$, ta được $C = 0$. Vậy nghiệm riêng của phương trình thỏa mãn điều kiện trên là

$$y = \frac{\ln(x + \sqrt{1 + x^2})}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

e) Phương trình đã cho không phải là phương trình tuyến tính đối với y. Nhưng nếu ta viết nó dưới dạng.

$$2y\frac{dx}{dy} - 6x + y^2 = 0$$

thì ta được một phương trình tuyến tính đối với x (y). Phương trình thuần nhất tương ứng là

$$2y\frac{dx}{dy} - 6x = 0 \text{ hay } \frac{dx}{x} = 3\frac{dy}{y}$$

nghiệm tổng quát của nó là

1 $$x = Ky^3,$$

K là hằng số tùy ý. Xem K là hàm số của x, thế vào phương trình không thuần nhất, ta được

$$2y\,(K'y^3 + 3Ky^2) + y^2 - 6Ky^3 = 0$$

Suy ra

$$K' = -\frac{1}{2y^2}$$

Do đó

$$K = \frac{1}{2y} + C$$

C là hằng số tùy ý. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$x = \left(\frac{1}{2y} + C\right) y^3 = Cy^3 + \frac{y^2}{2}\,.$$

f) Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là

$$y = Kx,$$

K là hằng số tùy ý. Xem K là hàm số của x và thế vào phương trình không thuần nhất, ta được

$$x(K'x + K) - Kx = x^2\text{arctg}x$$

Hay $K' = \text{arctg}x$

Do đó

$$K = \int \text{arctg}x\,dx = x\,\text{arctg}x - \int x\,\frac{dx}{1 + x^2} =$$

$$= x\,\text{arctg}x - \frac{1}{2}\ln\,(1 + x^2) + C,$$

C là hằng số tùy ý. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

1 $$y = [x\,\text{arctg}x - \frac{1}{2}\ln\,(1 + x^2) + C]\,x =$$

$$= x^2\text{arctg}x - \frac{x}{2}\ln(1 + x^2) + Cx$$

g) Phương trình có nghĩa khi $x > 0$. Phương trình thuần nhất tương ứng là

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x\ln x} \qquad \text{hay} \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x\ln x}$$

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được

$$\ln\left|\frac{y}{K}\right| = \int\frac{dx}{x\ln x} = \int\frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln|\ln x|$$

K là hằng số tùy ý. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là $y = K\ln x$

Xem K là hàm số của x, thế vào phương trình không thuần nhất, ta được

$$K'\ln x + \frac{K}{x} - \frac{K\ln x}{x\ln x} = x\ln x$$

Suy ra $K' = x$

Do đó

$$K = \frac{x^2}{2} + C,$$

C là hằng số tùy ý. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)\ln x$$

Từ điều kiện $y\Big|_{x=e} = \frac{e^2}{2}$, ta được $C = 0$. Vậy nghiệm riêng của phương trình đã cho thỏa mãn điều kiện trên là

$$y = \frac{x^2}{2}\ln x$$

h) Phương trình thuần nhất tương ứng là

$$x(x^2+1)\frac{dy}{dx} + 3x^2y = 0 \qquad \text{hay} \quad \frac{dy}{y} + \frac{3xdx}{x^2+1} = 0$$

nghiệm tổng quát của nó là

$y = \dfrac{K}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$, K là hằng số tùy ý. Cho K biến thiên, thế vào phương trình không thuần nhất, ta được

$$\frac{xK'}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} \text{ hay } K' = \frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x}$$

Do đó

$$K = \frac{x^2}{2} + \ln x + C,$$

C là hằng số tùy ý. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = \frac{\frac{x^2}{2} + \ln x + C}{\sqrt{(x^2+1)^3}}.$$

i) Phương trình thuần nhất tương ứng là

$$x(1+x^2)\frac{dy}{dx} = (x^2-1)\,y \text{ hay } \frac{dy}{y} = \frac{x^2-1}{x(1+x^2)}dx =$$

$$= \frac{-(1+x^2)+2x^2}{x(1+x^2)}dx = \left(-\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+1}\right)dx$$

Do đó

$$\ln\left|\frac{y}{K}\right| = -\ln|x| + \ln(x^2+1) = \ln\frac{x^2+1}{|x|}$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$y = K\frac{x^2+1}{x}$$

K là hằng số tùy ý. Cho K biến thiên, thế vào phương trình không thuần nhất, ta được:

$$K' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

Do đó

$$K = -\int \frac{2xdx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{1+x^2} + C,$$

C là hằng số tùy ý. Nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là

$$y = \left(\frac{1}{1+x^2} + C\right)\left(\frac{x^2+1}{x}\right) = \frac{1}{x} + C\,\frac{x^2+1}{x} =$$

$$= Cx + \frac{1}{x}(C+1) \;.$$

j) Phương trình thuần nhất tương ứng là:

$$(x^2-4)\frac{dy}{dx} + xy = 0 \text{ hay } \frac{dy}{y} + \frac{xdx}{x^2-4} = 0$$

nghiệm tổng quát của nó là

$$y = \frac{K}{\sqrt{|x^2-4|}} = \begin{cases} \dfrac{K}{\sqrt{|x^2-4|}} & \text{nếu } x < -2 \text{ hoặc } x > 2 \\ \dfrac{K}{\sqrt{4-x^2}} & \text{nếu } -2 < x < 2 \end{cases}$$

trong đó K là hằng số tùy ý. Cho K biến thiên rồi thế vào phương trình không thuần nhất.

Nếu $x < -2$ hoặc $x > 2$, ta được

$$K' = \frac{4}{\sqrt{x^2-4}}$$

Do đó

$$K = \int \frac{4dx}{\sqrt{x^2-4}}$$

Nếu $x > 2$, ta đổi biến số $x = 2\text{ch}t$, do đó

$$dx = 2\text{sh}t dt,\ \sqrt{x^2-4} = 2\text{sh}t$$

$$K = 4\int dt = 4t + C = 4\text{argch}\,\frac{x}{2} + C,$$

C là hằng số tùy ý. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là

$$y = \frac{4\text{argch}\,\frac{x}{2} + C}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

Nếu $x < -2$, ta đổi biến số $x = -2\text{ch}t$ và được

$$K = -4\,\text{argch}\,(-\frac{x}{2}) + C$$

do đó

$$y = \frac{-4\text{argch}\,(-\frac{x}{2}) + C}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

Nếu $-2 < x < 2$, ta được

$$K' = -\frac{4}{\sqrt{4 - x^2}}$$

Do đó

$$K = -4\int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} = 4\arccos\frac{x}{2} + C,$$

C là hằng số tùy ý. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = \frac{4\arccos\frac{x}{2} + C}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

k) Phương trình thuần nhất tương ứng là

$$2(x^2 - x)\,\frac{dy}{dx} + (2x - 1)\,y = 0$$

Phân li biến số, ta được

$$\frac{dy}{y} = -\frac{(2x - 1)}{2(x^2 - x)}\,dx$$

Do đó

1

$$\ln\left|\frac{y}{K}\right| = \ln\frac{1}{\sqrt{|x^2-x|}} ,$$

K là hằng số tùy ý. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$y = \frac{K}{\sqrt{|x^2-x|}} = \begin{cases} \dfrac{K}{\sqrt{x^2-x}} & \text{nếu } x < 0 \text{ hoặc } x > 1 \\ \dfrac{K}{\sqrt{x-x^2}} & \text{nếu } 0 < x < 1 \end{cases}$$

Xem K là hàm số của x rồi thế vào phương trình không thuần nhất.

Nếu $x < 0$ hoặc $x > 1$, ta được

$$K' = -\frac{1}{2\sqrt{x^2-x}}$$

Do đó

$$K = -\frac{1}{2}\ln\left(x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x}\right) + C ,$$

C là hằng số tùy ý. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là

$$y = \frac{-\frac{1}{2}\ln(x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x}) + C}{\sqrt{x^2-x}}$$

Nếu $0 < x < 1$, ta được

$$K' = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$$

Do đó

$$K = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = \frac{1}{2}\int\frac{d(x-\frac{1}{2})}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin(2x-1) + C .$$

Vậy

$$y = \frac{\frac{1}{2}\arcsin(2x-1) + C}{\sqrt{x-x^2}} ,$$

7. a) Giả sử $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, là nghiệm của phương trình đã cho. Thế vào phương trình ấy, ta được đồng nhất thức

$$x(x^2 + 1)(2ax + b) - (2x^2 + 3)(ax^2 + bx + c) = 3$$

Hay

$$-bx^3 - (a + 2c)x^2 - 2bx - 3c = 3$$

Đồng nhất các hệ số, ta được

$$b = 0 \text{ , } a + 2c = 0 \text{ , } -3c = 3$$

Suy ra

$$b = 0 \text{ , } c = -1, \ a = 2$$

Vậy một nghiệm riêng của phương trình đã cho là

$$y = 2x^2 - 1 \text{ .}$$

Muốn tìm nghiệm tổng quát của nó, ta chỉ cần tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng

$$x(x^2 + 1)y' - (2x^2 + 3)y = 0$$

Phân li biến số, ta được

$$\frac{dy}{y} = \frac{2x^2 + 3}{x(x^2 + 1)}dx = \frac{3}{x}dx - \frac{xdx}{x^2 + 1}$$

Do đó $$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = 3\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) =$$

$$= \ln\frac{|x|^3}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

C là hằng số tùy ý. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$y = C\frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 1}} \text{ .}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình phải tìm là

$$y = 2x^2 - 1 + C\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} \cdot$$

b) Bằng cách đồng nhất hệ số sau khi thế $y = ax^2 + bx + c$ vào phương trình đã cho, ta được một nghiệm riêng của nó là

$$y = 2x^2 - 1 .$$

Vậy chỉ cần tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng

$$(x^3 - x)\frac{dy}{dx} + (1 - 2x^2)y = 0$$

Phân li biến số, ta được

$$\frac{dy}{y} = \frac{2x^2 - 1}{x(x^2 - 1)}dx = \frac{dx}{x} + \frac{xdx}{x^2 - 1}$$

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = \ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x^2 - 1| = \ln(|x|\sqrt{|x^2 - 1|})$$

trong đó C là hằng số tùy ý, vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$y = Cx\sqrt{|x^2 - 1|} .$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là

$$y = 2x^2 - 1 + Cx\sqrt{|x^2 - 1|} .$$

8. Ta có

$$y = x\int_1^x e^{t^2}dt$$

$$y' = xe^{x^2} + \int_1^x e^{t^2}dt .$$

Thế vào vế trái của phương trình đã cho, ta được

$$xy' - y = x^2e^{x^2} + x\int_1^x e^{t^2}dt - x\int_1^x e^{t^2}dt = x^2e^{x^2}$$

Do đó

$$y = x\int_1^x e^{t^2}dt$$

là một nghiệm riêng của phương trình

$$xy' - y = x^2e^{x^2}$$

Muốn tìm nghiệm tổng quát của phương trình ấy, chỉ cần tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng $xy' - y = 0$. Nghiệm ấy là

$$y = Cx ,$$

trong đó C là hằng số tùy ý. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = Cx + x\int_1^x e^{t^2}dt .$$

Từ điều kiện $y\Big|_{x=1} = 1$, ta được $C = 1$. Vậy nghiệm riêng của phương trình thỏa mãn điều kiện trên là

$$y = x + \int_1^x e^{t^2}dt$$

9. Phương trình thuần nhất tương ứng là

$$x\frac{dy}{dx} = 2y$$

Phân li biến số, ta được

$$\frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x} .$$

Nghiệm tổng quát của nó là $y = Kx^2$, K là hằng số tùy ý. Bằng phương pháp biến thiên hằng số, ta được nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = x^3 - x + Cx^2 , \qquad (*)$$

1 trong đó C là hằng số tùy ý.

Ta có

$$y' = 3x^2 - 1 + 2Cx\ , \quad y'' = 6x + 2C$$

y'' là một nhị thức bậc nhất, nó đổi dấu khi x đi qua nghiệm của nó. Một điểm (x,y) là điểm uốn của họ đường tích phân tổng quát khi và chỉ khi (x,y) thỏa mãn phương trình (*) và phương trình

$$6x + 2C = 0\ . \qquad\qquad (**)$$

Khử C giữa các phương trình (*) và (**), ta được

$$y = x^3 - x + (-3x)\ .\ x^2 = -2x^3 - x\ .$$

Đó là phương trình của tập hợp các điểm uốn của họ đường tích phân tổng quát.

10. a) Đặt $y^2 = z$. Ta có $2yy' = z'$. Phương trình đã cho trở thành

$$xz + \frac{1}{2}x^2(x + 1)\, z' + 3x - 5 = 0\ .$$

Đó là một phương trình vi phân tuyến tính cấp một đối với z. Phương trình thuần nhất tương ứng với nó là

$$xz + \frac{1}{2}x^2(x + 1)\frac{dz}{dx} = 0$$

Phân li biến số, ta được

$$\frac{dz}{z} = \frac{-2dx}{x(x+1)} = -2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx\ .$$

Do đó $\qquad \ln\left|\frac{z}{K}\right| = -2\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)^2,$

K là hằng số tùy ý. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$z = K\left(\frac{x+1}{x}\right)^2$$

Xem K là hàm số của x, thế vào phương trình không thuần nhất, ta được

$$K' = \frac{10 - 6x}{(x + 1)^3}.$$

Do đó

$$K = \int \frac{10 - 6x}{(x + 1)^3} dx = \int \frac{16 - 6(x + 1)}{(x + 1)^3} dx =$$

$$= 16 \int \frac{dx}{(x + 1)^3} - 6\int \frac{dx}{(x + 1)^2} = -\frac{8}{(x + 1)^2} + \frac{6}{x + 1} + C,$$

C là hằng số tùy ý. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là

$$z = \left(-\frac{8}{(x + 1)^2} + \frac{6}{(x + 1)} + C\right)\left(\frac{x + 1}{x}\right)^2$$

Nhưng $z = y^2$, vậy

$$y^2 = -\frac{8}{x^2} + 6\frac{x + 1}{x} + C\left(\frac{x + 1}{x}\right)^2.$$

b) Phương trình đã cho là phương trình Bernoully. Chia hai vế cho y^3 và đặt $y^{-2} = z$, ta được

$$-\frac{1}{2}\frac{dz}{dx} + xz = x^3.$$

Đó là một phương trình tuyến tính đối với z. Phương trình thuần nhất tương ứng với nó là

$$-\frac{1}{2}\frac{dz}{dx} + xz = 0.$$

Phân li biến số, ta được

$$\frac{dz}{z} = 2xdx$$

Nghiệm tổng quát của nó là

$$z = Ke^{x^2},$$

K là hằng số tùy ý. Dùng phương pháp biến thiên hằng số, ta được

$$K' = -2x^3e^{-x^2}.$$

Do đó $$K = -\int 2x^3e^{-x^2}dx.$$

Đổi biến số $x^2 = u$, ta được

$$K = -\int ue^{-u}du = ue^{-u} + e^{-u} + C$$

C là hằng số tùy ý. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là

$z = (x^2e^{-x^2} + e^{-x^2} + c)e^{x^2} = x^2 + 1 + Ce^{x^2}$ .Vì $z = \dfrac{1}{y^2}$, nên ta có

$$y^2(x^2 + 1 + Ce^{x^2}) = 1.$$

c) Phương trình đã cho có nghĩa khi $x > 0$ và được viết là

$$xy' = y^2 \ln x - 2y.$$

Đó là phương trình Bernoully. Chia hai vế cho y^2, ta được

$$xy^{-2}y' = \ln x - 2y^{-1}.$$

Đặt $y^{-1} = z$. Ta có $z' = -y^{-2}y'$. Do đó

$$-xz' + 2z = \ln x.$$

Đó là một phương trình tuyến tính đối với z. Phương trình thuần nhất tương ứng là

$$-xz' + 2z = 0.$$

Nghiệm tổng quát của nó là

$$z = Kx^2,$$

K là hằng số tùy ý. Bằng phương pháp biến thiên hằng số, ta được

$$K' = -\frac{\ln x}{x^3}$$

Do đó

$$K = -\int \frac{\ln x dx}{x^3} = -\Big(-\frac{1}{2x^2}\ln x + \int \frac{1}{2x^2}\frac{dx}{x}\Big) =$$

$$= \frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{4x^2} + C ,$$

C là hằng số tùy ý. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là

$$z = \Big(\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{4x^2} + C\Big)x^2 = \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{4} + Cx^2$$

Nhưng $z = y^{-1}$, nên ta được

$$y\Big(\frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{4} + Cx^2\Big) = 1 .$$

d) Phương trình đã cho là phương trình Bernoully. Chia hai vế cho $y^{\frac{1}{2}}$ rồi đặt $z = y^{\frac{1}{2}}$, ta được phương trình tuyến tính đối với z:

$$2z' + z = e^{\frac{x}{2}}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là

$$z = Ke^{-\frac{x}{2}} ,$$

K là hằng số tùy ý. Xem K là hàm số của x, thế vào phương trình không thuần nhất, ta được

$$K' = \frac{1}{2}e^x$$

Do đó

$$K = \frac{1}{2}e^x + C ,$$

C là hằng số tùy ý. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là

$$z = \left(\frac{1}{2}e^x + C\right) e^{-\frac{x}{2}}$$

Vậy

$$y^{\frac{1}{2}} = (\frac{1}{2}e^x + C)e^{-\frac{x}{2}}$$

Từ điều kiện $y\Big|_{x=0} = \dfrac{9}{4}$, ta được $C = 1$. Vậy nghiệm riêng của phương trình đã cho thỏa mãn điều kiện trên là

$$y = (\frac{1}{2}e^x + 1)^2 e^{-x}.$$

e) Viết phương trình đã cho dưới dạng

$$y\frac{dx}{dy} + x + x^2y = 0$$

Đó là phương trình Bernoully đối với x(y). Chia hai vế cho x^2 , rồi đặt $z = x^{-1}$, ta được phương trình tuyến tính đối với z(y)

$$-y\frac{dz}{dy} + z + y = 0$$

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là

$$z = Ky ,$$

K là hằng số tùy ý. Xem K là hàm số của y, thế vào phương trình không thuần nhất, ta được

$$\frac{dK}{dy} = \frac{1}{y} .$$

Do đó

$$K = \ln|y| + C ,$$

C là hằng số tùy ý. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là

$$z = (\ln|y| + C)y$$

Vậy:
$$\frac{1}{x} = (\ln|y| + C)y .$$

f) Viết phương trình đã cho dưới dạng

$$\frac{dx}{dy} - xy = x^2y^3 .$$

Đó là phương trình Bernoully đối với x(y). Chia hai vế cho x^2, đặt $z = x^{-1}$, ta được

$$-\frac{dz}{dy} - yz = y^3$$

Đó là một phương trình tuyến tính đối với z(y). Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là

$$z = Ke^{-\frac{y^2}{2}} ,$$

trong đó K là hằng số tùy ý. Bằng phương pháp biến thiên hằng số để tìm nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất, ta được

$$K' = -y^3e^{\frac{y^2}{2}}$$

Do đó

$$K = -\int y^3e^{y^2/2}\,dy = -y^2\,e^{y^2/2} + 2e^{y^2/2} + C ,$$

c là hằng số tùy ý. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là

$$z = (-y^2e^{\frac{y^2}{2}} + 2e^{\frac{y^2}{2}} + C)e^{-\frac{y^2}{2}} = -y^2 + 2 + Ce^{-\frac{y^2}{2}} .$$

Do đó

$$\frac{1}{x} = -y^2 + 2 + Ce^{-\frac{y^2}{2}} .$$

g) Phương trình đã cho là phương trình thuần nhất, nhưng không biểu diễn y' dưới dạng hữu tỉ được. Chú ý rằng $y' = 0$ không thể là nghiệm của phương trình đã cho được. Giải phương trình ấy đối với y, ta được

$$y = \frac{2x}{y'} - xy'$$

Đặt $y' = t$, ta được $\quad y = \dfrac{2x}{t} - xt .$

Do đó

$$dy = \frac{2dx}{t} - \frac{2xdt}{t^2} - xdt - tdx .$$

Nhưng vì $\frac{dy}{dx} = t$, ta có $dy = tdx$. Thế vào phương trình trên, ta được

$$\left(\frac{2}{t} - 2t\right) dx = \left(\frac{2}{t^2} + 1\right) xdt \qquad (*)$$

Ta nhận xét rằng $t = \pm 1$ thỏa mãn phương trình (*).

Nếu $t \neq \pm 1$, từ (*) ta suy ra

$$\frac{dx}{x} = \frac{2 + t^2}{2t(1-t)(1+t)} dt = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{t} - \frac{3}{2(1+t)} + \frac{3}{2(1-t)}\right)$$

Do đó

$$\ln\left|\frac{x}{C}\right| = \ln|t| - \frac{3}{4}\ln|t+1| - \frac{3}{4}\ln|t-1| ,$$

C là hằng số tùy ý. Vậy

$$x = Ct\,|t^2 - 1|^{-\frac{3}{4}}$$

Suy ra

$$y = \frac{2x}{t} - xt = C(2 - t^2)\,|t^2 - 1|^{-\frac{3}{4}}$$

Vậy các phương trình tham số của họ đường tích phân tổng quát là

$$\begin{cases} x = Ct\,|t^2 - 1|^{-\frac{3}{4}} \\ y = C(2 - t^2)|t^2 - 1|^{-\frac{3}{4}} \end{cases}$$

Các nghiệm $y = \pm x$, ứng với $t = \pm 1$, không thuộc họ nghiệm tổng quát. Đó là các nghiệm kì dị .

h) Phương trình đã cho là phương trình Clairaut. Đặt $y' = t$, ta được

$$y = xt + t^2 + 1 .$$

Do đó

$$dy = xdt + tdx + 2tdt .$$

Nhưng vì $\frac{dy}{dx} = t$, nên $dy = tdx$. Thế vào phương trình trên, ta được

$$(x + 2t)dt = 0 .$$

Do đó:

Hoặc $x = -2t \Rightarrow y = (-2t)t + t^2 + 1 = 1 - t^2$

Hoặc $dt = 0 \Rightarrow t = C$, C là hằng số tùy ý, vậy

$$y = Cx + C^2 + 1 .$$

Vậy ta được

* Đường parabol P có phương trình tham số $x = -2t$, $y = 1 - t^2$. Khử t giữa hai phương trình ấy, ta được $y = 1 - \frac{x^2}{4}$

* Họ đường thẳng D_C có phương trình $y = Cx + C^2 + 1$.

Như đã chứng minh trong giáo trình, đường tích phân kì dị P là hình bao của họ đường tích phân tổng quát D_C (h. 78) .

c) Phương trình đã cho là phương trình Clairaut. Đặt y' = t. Ta được

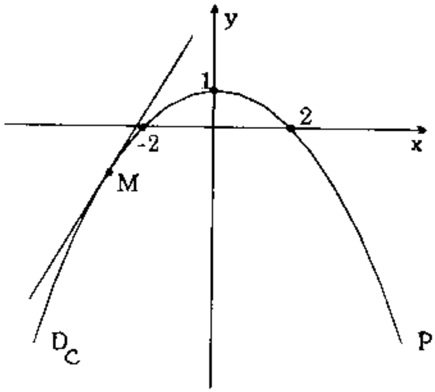
$$y = xt + \frac{a}{t} .$$

Do đó

$$dy = xdt + tdx - \frac{adt}{t^2} = tdx .$$

Suy ra

$$dt \left(x - \frac{a}{t^2}\right) = 0 .$$



Hình 78

Nếu dt = 0 thì t = C , C là hằng số tùy ý. Ta được nghiệm tổng quát

$$y = Cx + \frac{a}{C}.$$

biểu diễn một họ đường thẳng phụ thuộc tham số C. Nếu $x = \frac{a}{t^2}$, ta có $y = \frac{a}{t^2}.t + \frac{a}{t} = \frac{2a}{t}$. Khử t giữa hai phương trình ấy, ta được đường tích phân kì dị.

$$y^2 = 4ax.$$

f) Phương trình

$$2y - xy' - 2y'^3 = 0$$

là phương trình Lagrange. Đặt y' = t , ta được

$$y = \frac{xt}{2} + t^3.$$

Do đó

$$dy = tdx = \frac{xdt + tdx}{2} + 3t^2dt.$$

Suy ra

$$t\frac{dx}{dt} - x = 6t^2 .$$

Đó là một phương trình tuyến tính đối với hàm số x(t). Nghiệm tổng quát của nó là

$$x = 6t^2 + Ct ,$$

trong đó C là hằng số tùy ý. Do đó

$$y = \frac{xt}{2} + t^3 = 4t^3 + Ct^2 .$$

Vậy phương trình tham số của họ đường tích phân tổng quát là

$$x = 6t^2 + Ct , y = 4t^3 + Ct^2 .$$

k) Phương trình

$$y = xy' + \frac{y'}{y' + 1}$$

là phương trình Clairaut. Đặt y' = t, ta được

$$y = xt + \frac{t}{t + 1} .$$

Do đó

$$dy = tdx = xdt + tdx + \frac{dt}{(t + 1)^2} .$$

Suy ra $$dt\left(x + \frac{1}{(t + 1)^2}\right) = 0 .$$

Nếu dt = 0 thì t = C , C là hằng số tùy ý. Ta được nghiệm tổng quát

$$y = Cx + \frac{C}{C + 1} ,$$

nó biểu diễn một họ đường thẳng phụ thuộc tham số C .

1 Nếu $x = -\frac{1}{(t + 1)^2}$, ta có

$$y = -\frac{t}{(t+1)^2} + \frac{t}{t+1} = \frac{t^2}{(t+1)^2} .$$

Khử t giữa hai phương trình ấy, ta được

$$(x + y)^2 + 2x - 2y + 1 = 0 .$$

Nó biểu diễn một parabôn có trục là đường phân giác thứ hai. Parabôn ấy là hình bao của họ đường thẳng phụ thuộc tham số C nêu ở trên.

11. Ta có $\overline{OT} = y - xy'$. (xem bài tập 5 chương này). Vậy ta phải tìm đường L đi qua điểm $(1 , \frac{1}{2})$ thỏa mãn phương trình

$$y - xy' = y^2 .$$

Đó là phương trình Bernoully. Chia hai vế cho y^2 , rồi đặt $z = y^{-1}$, ta được phương trình

$$z + xz' = 1 .$$

Đó là một phương trình tuyến tính đối với z. Nghiệm tổng quát của nó là

$$z = \frac{x + C}{x}$$

trong đó C là hằng số tùy ý. Vậy

$$\frac{1}{y} = \frac{x + C}{x} .$$

Từ điều kiện $y\Big|_{x=1} = \frac{1}{2}$, ta được $C = 1$. Do đó đường cong phải tìm có phương trình là

$$y = \frac{x}{x + 1} .$$

12. a) Thế $y = x^{\alpha}$ vào phương trình

$$(x^3 - 1)y' = y^2 + x^2y - 2x ,$$

Ta được

$$\alpha x^{\alpha + 2} - \alpha x^{\alpha - 1} = x^{2\alpha} + x^{\alpha + 2} - 2x .$$

Do đó $$(\alpha - 1)x^{\alpha+2} - x^{2\alpha} = \alpha\, x^{\alpha-1} - 2x .$$

Hay

$$x^{2\alpha}[\,(\alpha - 1)x^{2 - \alpha} - 1] = x^{\alpha - 1}(\alpha - 2x^{2 - \alpha})$$

Rõ ràng hai vế đồng nhất bằng không nếu $\alpha = 2$. Vậy phương trình có một nghiệm riêng là $y_1 = x^2$.

Đặt $y = x^2 + z$. Thế vào phương trình đã cho, ta được

$$(x^3 - 1)(2x + z') = (x^2 + z)^2 + (x^2 + z)x - 2x$$

Hay

$$(x^3 - 1)\ z' = z^2 + 3x^2 z .$$

Đó là một phương trình Bernoulli đối với z. Có thể giải nó bằng cách chia hai vế cho z^2, rồi đặt $z^{-1} = Z$. Nhưng ta nhận xét rằng có thể viết phương trình ấy dưới dạng

$$\frac{-(x^3 - 1)z' + 3x^2 z}{z^2} = -1 .$$

Hay

$$\left(\frac{x^3 - 1}{z}\right)' = -1 .$$

Do đó

$$\frac{x^3 - 1}{z} = -x + C ,$$

C là hằng số tùy ý. Suy ra

$$z = \frac{x^3 - 1}{C - x}, \qquad y = x^2 + \frac{x^3 - 1}{C - x} = \frac{Cx^2 - 1}{C - x} .$$

1 *Chú thích.* Phương trình vi phân có dạng

$$a(x)y' = b(x)y^2 + c(x)y + d(x)$$

được gọi là phương trình Riccatti. Có thể giải được phương trình ấy nếu biết được một nghiệm riêng của nó.

b) Rõ ràng hàm số $y = x$ thỏa mãn phương trình

$$2x^2y' = (x - 1)(y^2 - x^2) + 2xy .$$

Đặt $y = x + z$. Thế vào phương trình trên ta được

$$2x^2z' = 2x^2z + (x - 1)z^2 .$$

Đó là phương trình Bernoulli đối với z. Chia hai vế của nó cho z^2 , đặt $u = z^{-1}$, ta được

$$-2x^2u' = 2x^2u + x - 1 .$$

Đó là một phương trình tuyến tính đối với u. Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là

$$u = Ke^{-x} ,$$

trong đó K là hằng số tùy ý. Xem K là hàm số của x, thế vào phương trình không thuần nhất, ta được

$$K = \int \frac{1 - x}{2x^2} e^x dx .$$

Ta có

$$\int \frac{1}{2x} e^x dx = \frac{1}{2x} e^x + \int e^x \frac{1}{2x^2} dx .$$

Do đó

$$K = \int e^x \left(\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x} \right) dx = -\frac{1}{2x} e^x + C ,$$

C là hằng số tùy ý. Vậy

$$u = \left(-\frac{1}{2x} e^x + C \right) e^{-x} = Ce^{-x} - \frac{1}{2x} = \frac{C_1xe^{-x} - 1}{2x}$$

1 trong đó $C_1 = 2C$. Suy ra

$$y = x + z = x + \frac{1}{u} = x\left(1 + \frac{2}{C_1xe^{-x} - 1}\right) = x\frac{C_1xe^{-x} + 1}{C_1xe^{-x} - 1}.$$

13. a) Đặt $P(x,y) = x + y + 1$, $Q(x,y) = (x - y^2 + 3)$. Ta có

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Vậy phương trình $(x + y + 1)dx + (x - y^2 + 3)dy = 0$ là phương trình vi phân toàn phần. P,Q và các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trong $\mathbf{R}^2$. Tích phân tổng quát của phương trình ấy được cho bởi công thức

(1) $$\int_{x_o}^{x} P(x,y_o)dx + \int_{y_o}^{y} Q(x,y)dy = C,$$

trong đó x_0, y_0 là hai số nào đó, C là hằng số tùy ý.

Chọn $x_0 = y_0 = 0$, ta được

$$\int_0^x (x + 1)dx + \int_0^y (x - y^2 + 3)dy = C.$$

Hay

$$\frac{x^2}{2} + x + xy - \frac{y^3}{3} + 3y = C.$$

b) Đặt $P(x,y) = 2(3xy^2 + 2x^3)$, $Q(x,y) = 3(2x^2y + y^2)$. Ta có

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 12xy = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Vậy phương trình đã cho là phương trình vi phân toàn phần. P, Q và các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trên $\mathbf{R}^2$. Tích phân tổng quát của nó được cho bởi

$$\int_0^x 4x^3dx + \int_0^y (6x^2y + 3y^2)dy = C.$$

Hay

$$x^4 + 3x^2y^2 + y^3 = C.$$

c) Phương trình đã cho có nghĩa trong miền $D = \{(x,y): y > 0\}$.

Đặt $P(x,y) = 3x^2(1 + \ln y)$, $Q(x,y) = -\left(2y - \dfrac{x^3}{y}\right)$. Ta có

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{3x^2}{y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

P,Q và các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trong miền D. Áp dụng công thức (1) với $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, ta được

$$\int_0^x 3x^2 dx - \int_1^y \left(2y - \frac{x^3}{y}\right) dy = C .$$

Hay

$$x^3 - y^2 + x^3 \ln y + 1 = C .$$

Hay

$$x^3 - y^2 + x^3 \ln y = C'$$

trong đó C' = C − 1 , C' cũng là một hằng số tùy ý.

d) Phương trình đã cho có nghĩa khi

$$x \neq 0 , \quad y \neq 0 , \quad x \neq y . \qquad (*)$$

Đặt $P(x,y) = \dfrac{y^2}{(x-y)^2} - \dfrac{1}{x}$, $\quad Q(x,y) = \dfrac{1}{y} - \dfrac{x^2}{(x-y)^2}$. Ta có

$$\frac{\partial P}{\partial Q} = \frac{2xy}{(x-y)^3} = \frac{\partial Q}{\partial x} .$$

Vậy phương trình đã cho là phương trình vi phân toàn phần trong miền thỏa mãn điều kiện (*). Nếu Pdx + Qdy là vi phân toàn phần của hàm số u, thì tích phân tổng quát của phương trình đã cho là u = C, C là hằng số tùy ý. Vậy ta chỉ cần tìm u(x,y) biết rằng

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{x} \qquad (**)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{y} - \frac{x^2}{(x-y)^2} \qquad (***)$$

1 Từ (**) suy ra

$$u(x,y) = -\frac{y^2}{x-y} - \ln|x| + f(y)\ ,$$

f là một hàm số khả vi tùy ý. Do đó

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2xy - y^2}{(x-y)^2} + f'(y) = 1 - \frac{x^2}{(x-y)^2} + f'(y)\ .$$

So sánh với (***), ta được

$$f'(y) = \frac{1}{y} - 1$$

Vậy

$$f(y) = \ln|y| - y + K$$

Do đó

$$u(x,y) = -\left(\frac{y^2}{x-y} + y\right) + \ln\left|\frac{y}{x}\right| + K =$$

$$= -\frac{xy}{x-y} + \ln\left|\frac{y}{x}\right| + K$$

Tích phân tổng quát của phương trình đã cho là

$$\ln\left|\frac{y}{x}\right| - \frac{xy}{x-y} = C\ .$$

e) Ta có

$$\left(\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y} - \frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x} + 1\right)dx + \left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x} - \frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y} + \frac{1}{y^2}\right)dy =$$

$$= \sin\frac{x}{y}\cdot\left(\frac{ydx - xdy}{y^2}\right) - \cos\frac{y}{x}\cdot\left(\frac{ydx - xdy}{x^2}\right) + dx + \frac{dy}{y^2} =$$

$$= \sin\frac{x}{y}\cdot d\left(\frac{x}{y}\right) - \cos\frac{y}{x}\, d\left(\frac{y}{x}\right) + dx - d\left(\frac{1}{y}\right) =$$

$$= -d\left(\cos\frac{x}{y}\right) + d\left(\sin\frac{y}{x}\right) + d\left(x - \frac{1}{y}\right) =$$

$$= d\left(\sin\frac{y}{x} - \cos\frac{x}{y} + x - \frac{1}{y}\right) = 0\ .$$

Vậy phương trình đã cho là phương trình vi phân toàn phần. Tích phân tổng quát của nó là:

$$\sin\frac{y}{x}-\cos\frac{x}{y}+x-\frac{1}{y}=C,$$

C là hằng số tùy ý.

14. a) $\alpha(x)$ là thừa số tích phân của phương trình đã cho nếu

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\alpha(x)(2xy+x^2y+\frac{y^3}{3})\right]=\frac{\partial}{\partial x}[\alpha(x)(x^2+y^2)].$$

Hay

$$\alpha(x)(2x+x^2+y^2)=\alpha(x).2x+\alpha'(x)(x^2+y^2).$$

Hay $$\alpha(x)=\alpha'(x).$$

Do đó $$\alpha(x)=Ke^x,$$

K là hằng số tùy ý. Vậy phương trình

$$e^x(2xy+x^2y+\frac{y^3}{3})dx+e^x(x^2+y^2)dy=0$$

là phương trình vi phân toàn phần. Nó tương đương với phương trình đã cho. Tích phân tổng quát của nó được cho bởi

$$\int_0^y e^x(x^2+y^2)dy=e^x(x^2y+\frac{y^3}{3})=C.$$

b) Phương trình đã cho có một nghiệm là $y = 0$. Bây giờ ta xét $y \neq 0$. Ta cần tìm hàm số $\alpha(y)$ sao cho

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\alpha(y)(y+xy^2)\right]=\frac{\partial}{\partial x}[-\alpha(y)x].$$

Hay

$$\alpha'(y)(y+xy^2)+\alpha(y)(1+2xy)=-\alpha(y).$$

Hay

1 $$y(1+xy)\alpha'(y)+2(1+xy)\alpha(y)=0$$

Vì $y = -\frac{1}{x}$ không phải là nghiệm của phương trình đã cho, ta có thể giả thiết rằng $1 + xy \neq 0$. Từ phương trình trên ta suy ra

$$y\frac{d\alpha}{dy} + 2\alpha = 0 \quad \text{hay} \quad \frac{d\alpha}{\alpha} + 2\frac{dy}{y} = 0.$$

Do đó

$$\alpha(y) = \frac{K}{y^2},$$

K là hằng số tùy ý. Vậy phương trình

$$\frac{1+xy}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy = 0,$$

là phương trình vi phân toàn phần. Có thể viết nó như sau:

$$\frac{ydx - xdy}{y^2} + xdx = d\left(\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2}\right) = 0.$$

Với $y \neq 0$, nó tương đương với phương trình đã cho. Tích phân tổng quát của nó là

$$\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = C,$$

C là hằng số tùy ý.

c) Phương trình đã cho có nghĩa khi $x > 0$. $y = 0$ là một nghiệm của nó. Bây giờ ta xét với $y \neq 0$. Hàm số $\alpha(xy)$ là thừa số tích phân của phương trình nếu

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\alpha(xy)(y - xy^2 \ln x)\right] = \frac{\partial}{\partial x}[\alpha(xy)x].$$

Nếu đặt $z = xy$, ta được:

$$\frac{d\alpha(z)}{dz}.x(y - xy^2 \ln x) + (1 - 2xy\ln x)\alpha(z) = \frac{d\alpha(z)}{dz}xy + \alpha(xy)$$

Do đó với $\ln x \neq 0$ (tức là $x \neq 1$) ta được

$$z^2\frac{d\alpha}{dz} + 2\alpha z = 0 \quad \text{hay} \quad \frac{d\alpha}{\alpha} + 2\frac{dz}{z} = 0 .$$

Suy ra

$$\alpha = \frac{K}{z^2} = \frac{K}{x^2 y^2} ,$$

K là hằng số tùy ý. Vậy phương trình

$$\frac{xdy + ydx}{x^2y^2} - \frac{1}{x}\ln x\, dx = 0$$

là phương trình vi phân toàn phần. Vì

$$\frac{xdy + ydx}{x^2y^2} = -d(\frac{1}{xy}) , \frac{1}{x}\ln x dx = d(\frac{1}{2}\ln^2 x)$$

nên có thể viết phương trình ấy như sau

$$d\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{2}\ln^2 x\right) = 0 .$$

Với $x > 0$, $y \neq 0$, nó tương đương với phương trình đã cho. Tích phân tổng quát của nó rõ ràng là

$$\frac{1}{xy} + \frac{1}{2}\ln^2 x = C ,$$

C là hằng số tùy ý.

d) Ta có thể thấy ngay rằng $y = -x$ là một nghiệm của phương trình đã cho. Bây giờ xét trường hợp $y \neq -x$. Hàm số $\alpha(z)$, trong đó $z = x + y$ là thừa số tích phân của phương trình nếu

$$\frac{\partial}{\partial y}[x\alpha(z)] = \frac{\partial}{\partial x}[(2x + y)\alpha(z)]$$

Hay

$$x\frac{d\alpha}{dz} = (2x + y)\frac{d\alpha}{dz} + 2\alpha$$

Hay

1

$$z\frac{d\alpha}{dz} + 2\alpha = 0$$

Suy ra

$$\frac{d\alpha}{\alpha} + 2\frac{dz}{z} = 0$$

Do đó $$\alpha = \frac{K}{z^2} = \frac{K}{(x + y)^2},$$

K là hằng số tùy ý. Vậy phương trình

$$\frac{xdx + (2x + y)dy}{(x + y)^2} = 0$$

là phương trình vi phân toàn phần. Nó tương đương với phương trình đã cho nếu $x \neq -y$. Bạn đọc hãy chứng minh rằng tích phân tổng quát của phương trình vi phân toàn phần ấy là

$$\ln|x + y| - \frac{x}{x + y} = C,$$

C là hằng số tùy ý.

15. a) Phương trình đã cho là phương trình Bernoully. Chia hai vế cho y^5 , rồi đặt $y^{-4} = z$, ta được phương trình tuyến tính đối với z

$$-\frac{z'}{4} - \frac{z}{2x} = 5x^2$$

Nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất là

$$z = \frac{K}{x^2},$$

K là hằng số tùy ý. Xem K là hàm số của x, thế vào phương trình không thuần nhất, ta được

$$K = C - 4x^5,$$

C là hằng số tùy ý. Do đó nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là

$$z = \frac{C - 4x^5}{x^2}.$$

Do đó $$y^4 = \frac{x^2}{C - 4x^5}.$$

b) Phương trình đã cho là phương trình thuần nhất.

Đặt $y = xu$, thế vào phương trình, ta được

$$x\frac{du}{dx} = -\cos^2 u \quad \text{hay} \quad \frac{dx}{x} = -\frac{du}{\cos^2 u} .$$

Do đó

$$\ln\left|\frac{x}{C}\right| = -\mathrm{tg}u = -\mathrm{tg}\frac{y}{x}$$

C là hằng số tùy ý. Vậy

$$y = -x\,\mathrm{arctg}\ln\left|\frac{x}{C}\right| .$$

c) Phương trình đã cho là phương trình thuần nhất.

Đặt $y = xu$, thế vào phương trình, ta được

$$\frac{dx}{x} = \frac{(1-2u^3)}{u^4+u}du = \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} + \frac{1-2u}{u^2-u+1}\right)du .$$

Do đó

$$\ln|x| = \ln|u| - \ln|u+1| - \ln(u^2-u+1) + \ln|C| = $$
$$= \ln\frac{|Cu|}{|u^3+1|} ,$$

trong đó C là hằng số tùy ý. Suy ra

$$x = \frac{Cu}{u^3+1}$$

Thế $u = \frac{y}{x}$, ta được

$$xy = C(x^3+y^3) .$$

d) Phương trình có nghĩa khi $xy \neq 0$. Đặt $z = xy$, ta có $z' = xy' + y$. Do đó phương trình trở thành

$$z' = \frac{1}{z^2} \quad \text{hay} \quad z^2z' = 1 .$$

Do đó

$$\frac{z^3}{3} = x + C$$

Vậy tích phân tổng quát của phương trình đã cho là

$$x^3y^3 = 3x + C_1 ,$$

$C_1 = 3C$ là hằng số tùy ý.

e) Phương trình có nghĩa khi $xy > 0$. Đặt $z = \ln(\frac{y}{x})$, ta có $y = xe^z$. Thế vào phương trình, ta được

$$xz' + 2z = \frac{1}{x} .$$

Đó là một phương trình tuyến tính đối với z. Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$z = \frac{K}{x^2} ,$$

K là hằng số tùy ý. Xem K là hàm số của x, thế vào phương trình không thuần nhất, ta được

$$K' = 1 \Rightarrow K = x + C ,$$

C là hằng số tùy ý. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất đối với z là

$$z = \frac{x + C}{x^2} = \frac{1}{x} + \frac{C}{x^2} .$$

Do đó

$$y = xe^{\frac{1}{x} + \frac{C}{x^2}} .$$

16. a) Phương trình của họ đường cong là

$$y^2 = 2p(x - C) .$$

Lấy đạo hàm hai vế theo x, ta được

$$y\,y' = p .$$

Đó là phương trình vi phân của họ ấy. Thay y' bởi $-\dfrac{1}{y'}$, ta được phương trình vi phân của quỹ đạo trực giao là:

$$y + py' = 0 \quad \text{hay} \quad \frac{dy}{y} + \frac{dx}{p} = 0.$$

Do đó

$$\ln\left|\frac{y}{K}\right| = -\frac{x}{p},$$

trong đó K là hằng số tùy ý, hay

$$y = Ke^{-\frac{x}{p}} \Rightarrow y = Ce^{-x}.$$

Đó là phương trình của quỹ đạo trực giao phải tìm.

b) Ta có

$$x^2 - y^2 = C.$$

Lấy đạo hàm hai vế theo x, ta được phương trình vi phân của họ

$$x - yy' = 0,$$

thay y' bởi $-\dfrac{1}{y'}$, ta được phương trình vi phân của quỹ đạo trực giao

$$x + \frac{x}{y'} = 0 \quad \text{hay} \quad \frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0.$$

Do đó

$$\ln|y| + \ln|x| = \ln|K|,$$

K là hằng số tùy ý. Vậy phương trình của quỹ đạo trực giao là:

$$y = \frac{K}{x}.$$

c) Phương trình của họ đường cong là $x^2 + y^2 = 2Cx$.

Lấy đạo hàm hai vế đối với x, ta được $2x + 2yy' = 2C$.

Khử C giữa hai phương trình ấy, ta được $2x + 2yy' = \dfrac{x^2 + y^2}{x}$.

Đó là phương trình vi phân của họ đường cong. Thay y' bởi $-\frac{1}{y'}$, ta được phương trình vi phân của quỹ đạo trực giao

$$2x - 2\frac{y}{y'} = \frac{x^2 + y^2}{x}.$$

Hay $$(x^2 - y^2)y' = 2xy.$$

Đó là một phương trình thuần nhất. Đặt y = ux, thế vào phương trình ấy, ta được:

$$\frac{dx}{x} = \frac{(1-u^2)du}{u^3 + u} = \left(\frac{1}{u} - \frac{2u}{u^2+1}\right)du.$$

Do đó

$$\ln\left|\frac{x}{K}\right| = \ln\frac{|u|}{u^2+1},$$

K là hằng số tùy ý, hay

$$x = \frac{Ku}{u^2+1} = \frac{Kxy}{x^2+y^2}.$$

Vậy phương trình của quỹ đạo trực giao là $y = \frac{1}{K}(x^2 + y^2)$.

d) Phương trình của họ đường cong là $(x^2 + y^2)^2 = C^2(x^2 - y^2)$.

Lấy đạo hàm hai vế đối với x, ta được:

$$2(x^2 + y^2)(2x + 2yy') = C^2(2x - 2yy').$$

Khử C giữa hai phương trình trên, ta được:

$$2(x^2 - y^2)(x + yy') = (x^2 + y^2)(x - yy').$$

Đó là phương trình vi phân của họ đường cong. Thay y' bởi $-\frac{1}{y'}$, ta được phương trình vi phân của quỹ đạo trực giao

$$(x^3 - 3xy^2)y' = y(3x^2 - y^2).$$

Đó là một phương trình thuần nhất. Đặt y = ux, thế vào phương trình ấy, ta được:

$$2\frac{dx}{x} = \frac{1-3u^2}{u(u^2+1)}du = \left(\frac{1}{u} - \frac{4u}{u^2+1}\right)du.$$

208.

Do đó

$$\ln(x^2) = \ln\frac{|u|}{(u^2+1)^2} + \ln|K| ,$$

trong đó K là hằng số tùy ý, suy ra

$$x^2 = \frac{Ku}{(u^2+1)^2}$$

Thế $u = \frac{y}{x}$, ta được phương trình của quỹ đạo trực giao là

$$Kxy = (x^2+y^2)^2 .$$

Chú thích: Họ đường cong đã cho là họ lemnixcat phụ thuộc tham số C. Chuyển sang hệ tọa độ đề các, phương trình của họ ấy là

$$r^2 = C^2\cos 2\varphi . \qquad (*)$$

Lấy đạo hàm hai vế đối với φ, ta được

$$rr' = -2C^2\sin 2\varphi \qquad (**)$$

Khử C giữa hai phương trình (*) , (* *), ta được phương trình vi phân của họ lemnixcat là

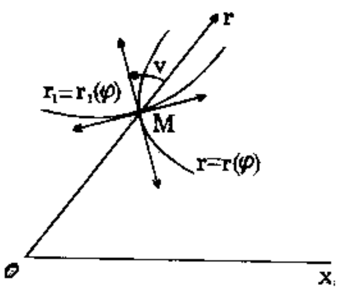
$$\frac{r}{r'} = -\frac{\cos 2\varphi}{\sin 2\varphi} \qquad (***)$$

Giả sử hai đường $r=r(\varphi)$ và $r_1 = r_1(\varphi)$ cắt nhau tại M dưới một góc vuông (h.79). Gọi V và V_1 theo thứ tự là góc hợp bởi tiếp tuyến dương của các đường $r = r(\varphi)$, $r_1 = r_1(\varphi)$ với $\vec{OM}$. Ta có

$$\mathrm{tg}V = \frac{r}{r'} \ , \ \mathrm{tg}V_1 = \frac{r_1}{r'_1}$$

Vì các tiếp tuyến của hai đường trên tại M vuông góc với nhau nên ta có

1 $$\mathrm{tg}V_1 = -\mathrm{cotg}V .$$



Hình 79

Do đó $$\frac{r_1}{r'_1} = -\frac{r'}{r}.$$

Vậy phương trình vi phân của quỹ đạo trực giao của họ lemnixcat được suy ra từ phương trình (***) bằng cách thay $\frac{r}{r'}$ bởi $-\frac{r'}{r}$. Ta được
$$\frac{r'}{r} = \frac{\cos 2\varphi}{\sin 2\varphi}.$$

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được
$$2\ln\left|\frac{r}{K}\right| = \ln|\sin 2\varphi|.$$

Do đó $$r^2 = K^2\sin 2\varphi.$$

Qũy đạo trực giao cũng là 1 họ lemnixcat.

Cũng dễ dàng thấy rằng đường $r^2 = \sin 2\varphi$ được suy ra từ đường $r^2 = \cos 2\varphi$ bằng một phép quay góc $\frac{\pi}{2}$ quanh gốc 0.

e) Phương trình $(x - C)^2 + y^2 = a^2$ biểu diễn họ đường tròn có tâm (C, O) trên trục Ox và bán kính bằng a. Lấy đạo hàm hai vế đối với x, ta được
$$x - C + yy' = 0.$$

Khử C giữa hai phương trình trên, ta được phương trình vi phân của họ đường tròn trên là
$$y^2y'^2 + y^2 = a^2.$$

Do đó phương trình vi phân của quỹ đạo trực giao là
$$\frac{y^2}{y'^2} + y^2 = a^2.$$

Suy ra
$$dx = \pm\frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y}dy.$$

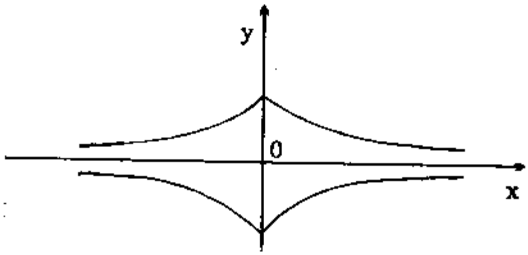
Đặt $y = a\sin t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, ta được
$$dx = a\frac{\cos^2 t}{\sin t}dt = \frac{a}{\sin t}dt - a\sin t dt$$

Do đó
$$\begin{cases} x = a\ln\left|tg\dfrac{t}{2}\right| + a\cos t + C \\ y = a\sin t \end{cases}$$

Các đường của qũy đạo trực giao được suy từ đường

$$\begin{cases} x = a\left(\ln\left|tg\dfrac{t}{2}\right| + \cos t\right) \\ y = a\sin t \end{cases}$$

(h. 80) bằng những phép tịnh tiến song song với Ox.



Hình 80

17. a) Phương trình đã cho là phương trình khuyết y. Đặt $y' = p$, ta được

$$xp' - p = x^2e^x .$$

Đó là một phương trình tuyến tính cấp một đối với p. Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là

$$p = Kx .$$

Dùng phương pháp biến thiên hằng số, ta được

$$K = e^x + C ,$$

C là hằng số tùy ý. Do đó

$$p = y' = (e^x + C)x = xe^x + Cx .$$

Suy ra

1

$$y = \int xe^x dx + C\frac{x^2}{2} = e^x(x-1) + C_1x^2 + C_2 ,$$

$$C_1 = \frac{C}{2} \text{ và } C_2 \textit{ là những hằng số tùy ý.}$$

b) Phương trình đã cho khuyết y. Đặt $y' = p$, ta được

$$p' - \frac{p}{x-1} = x(x-1)$$

Đó là một phương trình tuyến tính cấp một đối với p. Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là

$$p = K(x-1) ,$$

K là hằng số tùy ý. Xem K là hàm số của x, thế vào phương trình không thuần nhất, ta được

$$K = \frac{x^2}{2} + C ,$$

C là hằng số tùy ý. Do đó

$$P = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)(x-1) .$$

Từ điều kiện $y'\Big|_{x=2} = -1$, ta được $C = -3$. Vậy

$$y' = p = \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2} - 3x + 3 .$$

Do đó

$$y = \frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^2}{2} + 3x + D .$$

Từ điều kiện $y\Big|_{x=2} = 1$, ta được $D = \frac{1}{3}$. Do đó nghiệm phải tìm là

$$y = \frac{1}{24}(3x^4 - 4x^3 - 36x^2 + 72x + 8) .$$

c) Phương trình đã cho khuyết x. Đặt $y' = p$, ta có

1 $$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}.$$

Phương trình đã cho trở thành

$$p\left[\frac{dp}{dy} + 2(1-2y)\right] = 0\,.$$

Nếu $p = 0$ thì $y = C$, C là hằng số tùy ý, cũng là một nghiệm của phương trình đã cho, nhưng nó không thỏa mãn điều kiện đặt ra. Vậy ta xét phương trình

$$\frac{dp}{dy} + 2\,(1-2y) = 0\,.$$

Phân li biến số, ta được

$$\frac{dp}{2} + (1-2y)\,dy = 0\,.$$

Do đó
$$\frac{p}{2} + y - y^2 = C_1$$

C_1 là hằng số tùy ý. Từ điều kiện $y\Big|_{x=0} = 0\,,\ y'\Big|_{x=0} = \frac{1}{2}$, ta rút ra $C_1 = \frac{1}{4}$. Do đó từ phương trình trên, ta được

$$2dx = \frac{dy}{y^2 - y + \frac{1}{4}} = \frac{dy}{(y-\frac{1}{2})^2}\,.$$

Vậy

$$2x + C_2 = -\frac{1}{y-\frac{1}{2}}$$

C_2 là hằng số tùy ý. Từ điều kiện $y\Big|_{x=0} = 0$, ta được $C_2 = 2$. Vậy nghiệm riêng của phương trình thỏa mãn các điều kiện đã cho là

$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\,(x+1)}\,.$$

d) Phương trình đã cho khuyết y. Đặt $y' = p$, ta được

$$xp' - p = x^2\ln x\,.$$

Đó là một phương trình tuyến tính cấp một đối với p. Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là

$$p = Kx\,,$$

K là hằng số tùy ý. Bằng phương pháp biến thiên hằng số, ta được

$$K' = \ln x \Rightarrow K = x\ln x - x + C,$$

C là hằng số tùy ý. Do đó

$$P = y' = x^2\ln x - x^2 + Cx .$$

Từ điều kiện $y'\Big|_{x=1} = -1$, ta được $C = 0$. Vậy

$$y = \int x^2 \ln x \, dx - \frac{x^3}{3} = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} - \frac{x^3}{3} + C_1$$

C_1 là hằng số tùy ý. Từ điều kiện $y\Big|_{x=1} = -\frac{4}{9}$, ta được $C_1 = 0$. Vậy nghiệm riêng của phương trình thỏa mãn các điều kiện trên là

$$y = \frac{x^3}{3}(\ln x - \frac{4}{3}) \cdot$$

e) Phương trình đã cho khuyết x. Đặt $y' = p$, $y'' = p\frac{dp}{dy}$. Phương trình trở thành

$$yp\frac{dp}{dy} - p^2 + p^3 = 0$$

Nếu $p = 0$, ta được $y = C$, C là hằng số tùy ý. Vậy $y = C$ là một nghiệm của phương trình đã cho.

Nếu $p \neq 0$, chia hai vế của phương trình trên cho p, ta được

$$y\frac{dp}{dy} + p^2 - p = 0$$

hay $$\frac{dy}{y} = \frac{dp}{p(1-p)} = \frac{dp}{1-p} + \frac{dp}{p}$$

Do đó

$$\ln|y| = \ln\left|\frac{C_1 p}{p-1}\right|,$$

C_1 là hằng số tùy ý . Vậy $y = \frac{C_1 p}{p-1} \Rightarrow p = \frac{y}{y - C_1}$

Nhưng $p = \dfrac{dy}{dx}$, do đó ta có $\dfrac{y - C_1}{y} dy = dx$

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được

$y - C_1 \ln|y| = x + C_2$

f) Phương trình đã cho khuyết cả x lẫn y. Đặt y' = p, ta được

$$p'^2 + p^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad p' = \frac{dp}{dx} = \pm \sqrt{a^2 - p^2}$$

Phân li biến số, ta được $\dfrac{dp}{\sqrt{a^2 - p^2}} = \pm dx$

Do đó $\arcsin \dfrac{p}{a} = \pm (x + C_1)$,

C_1 là hằng số tùy ý. Suy ra $p = y' = \pm a \sin(x + C_1)$

Vậy $$y = \mp a\cos(x + C_1) + C_2$$

C_2 cũng là hằng số tùy ý.

g) Phương trình đã cho khuyết x. Đặt y'= p, ta được

$$p' = \frac{1}{2p} \Rightarrow 2pdp = dx$$

Do đó $$p^2 = x + C_1$$

C_1 là hằng số tùy ý. Suy ra $y' = p = \sqrt{x + C_1}$

Vậy $$y = \frac{2}{3}(x + C_1)^{3/2} + C_2,$$

C_2 là hằng số tùy ý.

h) Phương trình đã cho khuyết x. Đặt y'= p, ta có $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$. Phương trình trở thành

$$yp\frac{dp}{dy} + y^3 - p^2 = 0$$

Đặt $p^2 = z$, ta được

$$\frac{1}{2} y \frac{dz}{dy} - z = -y^3 \qquad (*)$$

Đó là một phương trình tuyến tính cấp một đối với z. Có thể dự đoán rằng phương trình ấy có một nghiệm riêng dạng $z = ay^3$. Thế biểu thức ấy vào phương trình, ta được $a = -2$. Còn nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng với (*) là $z = Ky^2$

trong đó K là hằng số tùy ý. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình (*) là $z = -2y^3 + Ky^2$

Do đó $$p = y' = \pm y\sqrt{K - 2y}$$

Suy ra $$dx = \pm \frac{dy}{y\sqrt{K - 2y}}$$

$$x = \pm \int \frac{dy}{y\sqrt{K - 2y}}$$

Đổi biến số $\sqrt{K - 2y} = t$, ta được $y = \dfrac{K - t^2}{2}$, do đó $x = \pm 2\int \dfrac{dt}{t^2 - K}$

Có thể xảy ra 3 trường hợp.

Nếu $K = 0$, ta có $x = \pm \dfrac{2}{t} + C$, C là hằng số tùy ý, do đó

$$y = -\frac{t^2}{2} = -\frac{2}{(x - C)^2}$$

Nếu $K > 0$, đặt $K = \alpha^2$, $\alpha > 0$, ta được

$$x = \pm \frac{1}{\alpha} \ln \left| \frac{t - \alpha}{t + \alpha} \right| + C, \quad y = \frac{\alpha^2 - t^2}{2}$$

Khử t giữa hai phương trình ấy, ta được

$$y = \frac{\alpha^2}{1 \pm \operatorname{ch} \alpha(x - C)}$$

1 Nếu $K < 0$, đặt $K = -\alpha^2$, $\alpha > 0$, ta được

$$x = \pm \frac{2}{\alpha} \text{ arctg} \frac{t}{\alpha} + C, \quad y = -\frac{\alpha^2 + t^2}{2}$$

Khử t giữa hai phương trình ấy, ta được

$$y = -\frac{\alpha^2}{1 + \cos\alpha(x - C)}$$

i) Phương trình đã cho là một phương trình cấp 3 khuyết y. Đặt y'= p, ta được

$$3pp'^2 - (1+p^2)p'' = 0$$

Đó là một phương trình cấp hai đối với p, khuyết x. Đặt p' = z, ta có $p'' = z\frac{dz}{dp}$ do đó

$$3pz^2 - (1 + p^2)\, z \frac{dz}{dp} = 0$$

Nếu z = 0, ta có y'' = 0, do đó

$$y = C_1x + C_2,$$

C_1, C_2 là hằng số tùy ý. Nếu $z \neq 0$, ta được

$$3pz - (1 + p^2) \frac{dz}{dp} = 0$$

Phân li biến số, ta được

$$\frac{dz}{z} = \frac{3pdp}{1 + p^2} \Rightarrow z = C(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}$$

Nhưng $z = p' = \frac{dp}{dx}$, do đó $x = \frac{1}{C}\int(1 + p^2)^{-\frac{3}{2}} dp$

Đổi biến số $p = \text{tg}\varphi$, $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, ta được

$$x = \frac{1}{C} \int \cos\varphi d\varphi = \frac{1}{C} \sin\varphi + C_1 .$$

vì $p = \frac{dy}{dx}$, ta có $dy = \text{tg}\varphi \cdot \frac{1}{C} \cdot \cos\varphi d\varphi = \frac{1}{C} \sin\varphi d\varphi$. Vậy

$$y = -\frac{1}{C} \cos\varphi + C_2$$

Khử φ giữa x và y, ta được

$$(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = \frac{1}{C^2}.$$

18. a) Giả sử $y_1 = x^\alpha$ là một nghiệm của phương trình

$$x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = 0$$

Ta có $y'_1 = \alpha x^{\alpha-1}$, $y_1'' = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2}$. Thế vào phương trình, ta được đồng nhất thức

$$(\ln x - 1)\alpha(\alpha - 1)x^\alpha - \alpha x^\alpha + x^\alpha = x^\alpha[\alpha(\alpha - 1)\ln x - \alpha^2 + 1] = 0$$

Do đó

$$\begin{cases} \alpha(\alpha - 1) = 0 \\ \alpha^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Suy ra $\alpha = 1$. Ta thử lại dễ dàng rằng y = x là nghiệm của phương trình.

Bây giờ tìm nghiệm y_2 của phương trình, độc lập tuyến tính với y_1 bằng cách đặt $y_2 = xu$

Ta có $y_2' = xu' + u$, $y_2'' = xu'' + 2u'$

Thế vào phương trình, ta được

$$x(\ln x - 1)u'' + (2\ln x - 3)u' = 0$$

Đó là một phương trình cấp hai đối với u, khuyết u. Đặt u'=p, ta được

$$x(\ln x - 1)\frac{dp}{dx} + (2\ln x - 3)p = 0$$

Phân li biến số, ta được

$$\frac{dp}{p} + \frac{2\ln x - 3}{x(\ln x - 1)}\,dx = 0$$

Do đó

$$\ln|p| = -\int \frac{2\ln x - 3}{x(\ln x - 1)}\,dx = -\int \frac{2v - 3}{v - 1}\,dv$$

Với $v = \ln x$. Vậy

$$\ln|p| = -\int\left(2 - \frac{1}{v - 1}\right) dv = -2v + \ln|v - 1| =$$

$$= -2\ln x + \ln|\ln x - 1| = \ln\frac{|\ln x - 1|}{x^2}$$

Ở đây ta chọn hằng số tùy ý của tích phân bằng 0. Suy ra

$$p = u' = \frac{\ln x - 1}{x^2}$$

Do đó $$u = \int \frac{\ln x - 1}{x^2}\,dx = -\frac{\ln x}{x}$$

Vậy $$y_2 = xu = -\ln x$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính là x và $-\ln x$, do đó nghiệm tổng quát của nó là

$y = C_1 x + C_2 \ln x$,

C_1, C_2 là những hằng số tùy ý.

Chú thích: Ta biết rằng nếu biết nghiệm riêng $y_1(x)$ của phương trình cấp hai tuyến tính

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

thì một nghiệm riêng $y_2(x)$ độc lập tuyến tính với y_1 của nó được cho bởi công thức liouville

$$y_2(x) = y_1(x) \cdot \int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int p(x)dx}\,dx$$

Trong bài toán này, ta có $p(x) = -\dfrac{1}{x(\ln x - 1)}$. Do đó

$$-\int p(x)dx = \int \frac{dx}{x(\ln x - 1)} = \ln|\ln x - 1|.$$

Suy ra $\qquad y_2(x) = x\int \dfrac{\ln x - 1}{x^2}dx = x.\left(-\dfrac{\ln x}{x}\right) = -\ln x.$

b) Thế $y = e^{\alpha x}$ vào phương trình đã cho, ta được:

$$e^{\alpha x}[(2\alpha^2 + 4\alpha)x + (\alpha^2 - 2\alpha - 8)] = 0.$$

Đẳng thức ấy là một đồng nhất thức khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 2\alpha^2 + 4\alpha = 0 \\ \alpha^2 - 2\alpha - 8 = 0. \end{cases}$$

Hệ ấy có nghiệm duy nhất $\alpha = -2$. Vậy $y_1 = e^{-2x}$ là một nghiệm riêng của phương trình.

Ta tìm nghiệm riêng y_2 của phương trình độc lập tuyến tính với y_1 dưới dạng

$$y_2 = e^{-2x}.u.$$

Thế vào phương trình, ta được

$$(2x + 1)u'' - (4x + 6)u' = 0.$$

Đặt $u' = p$, ta được

$$\frac{dp}{p} = \frac{4x+6}{2x+1}dx = \left(2 + \frac{4}{2x+1}\right)dx.$$

Do đó $\qquad \ln|p| = 2x + \ln(2x + 1)^2 = \ln(e^{2x}.(2x + 1)^2).$

Suy ra $\qquad p = u' = (2x + 1)^2.e^{2x}.$

Dùng tích phân phân đoạn hai lần liên tiếp, ta được

$$u = \left[\frac{(2x+1)^2}{2} - 2x\right]e^{2x}.$$

Vậy $$y_2 = \frac{(2x+1)^2}{2} - 2x.$$

Và nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = C_1e^{-2x} + C_2\left[\frac{(2x+1)^2}{2} - 2x\right],$$

C_1, C_2 là hằng số tùy ý.

c) Giả sử $y_1 = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ là một nghiệm riêng của phương trình

$$(x^2 - 1)y'' - 6y = 0.$$

Thế y_1 vào phương trình ấy, ta được:

$$[n(n-1) - 6]x^n + [(n-1)(n-2)a_1 - 6a_1]x^{n-2} + \ldots = 0.$$

Do đó $$n(n-1) - 6 = n^2 - n - 6 = 0.$$

Phương trình ấy có hai nghiệm $n = 3$ và $n = -2$. Bậc của đa thức phải là số nguyên dương, nên chỉ lấy $n = 3$. Vậy y_1 là đa thức bậc 3 có dạng

$$y_1 = x^3 + ax^2 + bx + c.$$

Thế biểu thức ấy vào phương trình đã cho, ta được

$$-6ax^2 + (2a - 6b - 6)x + (2a + 6c) = 0.$$

Phương trình ấy là đồng nhất thức nếu

$$\begin{cases} a = 0 \\ 2a - 6b - 6 = 0 \\ 2a + 6c = 0, \end{cases}$$

suy ra $a = 0$, $b = -1$, $c = 0$. Tóm lại $y_1 = x^3 - x$ là một nghiệm riêng của phương trình.

Bây giờ ta tính nghiệm y_2 của phương trình độc lập tuyến tính với y_1 theo công thức Liouville. Vì p(x) = 0, ta có

$$y_2(x) = (x^3 - x)\int \frac{dx}{(x^3 - x)^2} = (x^3 - x)\int \frac{dx}{x^2(x-1)^2(x+1)^2}.$$

Ta có
$$\frac{1}{x^2(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{(x-1)^2} +$$

$$+ \frac{D}{x-1} + \frac{E}{(x+1)^2} + \frac{F}{x+1}. \qquad (*)$$

Nhân hai vế của (*) với x^2 rồi cho x = 0, ta được A = 1 .

Nhân hai vế của (*) với $(x - 1)^2$ rồi cho x = 1, ta được $C = \frac{1}{4}$.

Nhân hai vế của (*) với $(x + 1)^2$ rồi cho x = −1, ta được $\mathbf{E} = \frac{1}{4}$.

Nhân hai vế của (*) với x rồi cho $x \to \infty$, ta được **B + D + F** = 0.

Thế x = 2 vào hai vế của (*), ta được $\frac{B}{2} + D + \frac{F}{3} = -\frac{1}{2}$.

Thế x = −2 vào hai vế của (*), ta được $\frac{B}{2} + \frac{D}{3} + F = \frac{1}{2}$.

Giải hệ 3 phương trình đối với B, D, F, ta được

$$B = 0, \qquad D = -\frac{3}{4}, \qquad F = \frac{3}{4}.$$

Do đó

$$y_2(x) = (x^3 - x)\left[-\frac{1}{x} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right) + \frac{3}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\right] =$$

$$= (x^3 - x)\left[\frac{2-3x^2}{2x(x^2-1)} + \frac{3}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\right] =$$

$$= 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3(x^3-x)}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| .$$

Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = C_1(x^3 - x) + C_2\left[1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3(x^3-x)}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\right].$$

d) Rõ ràng $y_1 = e^x$ là một nghiệm riêng của phương trình đã cho. Ta tìm nghiệm y_2 của phương trình ấy độc lập tuyến tính đối với y_1 bằng công thức Liouville. Ta có

$$-\int p(x)dx = \int \frac{x^2-2}{x^2-2x}dx = \int\left(1 + \frac{2x-2}{x^2-2x}\right)dx =$$

$$= x + \ln|x^2 - 2x| = \ln e^x|x^2 - 2x| .$$

Do đó

$$y_2(x) = e^x \int \frac{|x^2-2x|}{e^x}dx = e^x \int \frac{x^2-2x}{e^x}dx .$$

Sai khác dấu ±. Bằng tích phân phân đoạn 2 lần liên tiếp, ta được

$$y_2(x) = e^x.(-x^2.e^{-x}) = -x^2 .$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = C_1e^x + C_2x^2 ,$$

C_1, C_2 là các hằng số tùy ý. Do đó

$$y' = C_1e^x + 2C_2x .$$

Thế các điều kiện $y|_{x=1} = 0$, $y'|_{x=1} = 1$, ta được:

1

$$\begin{cases} C_1e + C_2 = 0 \\ C_1e + 2C_2 = 1. \end{cases}$$

Từ đó, ta được $C_2 = 1$, $C_1 = -\frac{1}{e}$. Vậy nghiệm phải tìm là $y = -e^{x-1} + x^2$.

e) Dễ dàng thấy rằng $y_1 = 1$ và $y_2 = x$ là hai nghiệm của phương trình

$$(2x - x^2)y'' + 2(x - 1)y' - 2y = -2 \qquad (*)$$

Từ nguyên lí chồng chất nghiệm đối với phương trình tuyến tính, ta suy ra rằng hiệu $Y_1 = x - 1$ là một nghiệm riêng của phương trình thuần nhất

$$(2x - x^2)y'' + 2(x - 1)y' - 2y = 0 \qquad (**)$$

Ta tìm một nghiệm riêng Y_2 của phương trình ấy độc lập tuyến tính đối với Y_1 theo công thức Liouville.

$$Y_2 = (x-1)\int \frac{1}{(x-1)^2} e^{\int \frac{2x-2}{x^2-2x}dx} dx =$$

$$= (x-1)\int \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}dx = (x-1)\int \left(1 - \frac{1}{(x-1)^2}\right)dx =$$

$$= (x-1)\left(x + \frac{1}{x-1}\right) = x^2 - x + 1 .$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình (**) là

$$y = K_1(x - 1) + K_2(x^2 - x + 1) =$$

$$= (K_1 - K_2)(x - 1) + K_2x^2$$

$$= C_1(x - 1) + C_2x^2 ,$$

trong đó $C_1 = K_1 - K_2$, $C_2 = K_2$ là những hằng số tùy ý. Nghiệm tổng quát của phương trình (*) là

$$y = C_1(x - 1) + C_2x^2 + 1.$$

f) Vì phương trình thuần nhất tương ứng có một nghiệm riêng có dạng đa thức, thế

$$y = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n$$

vào phương trình đó, ta được một đồng nhất thức

$$(x^2 + x)[n(n-1)x^{n-2} + ...] + (x + 2)[nx^{n-1} + ...] - x^n - ... = 0.$$

Hay $\qquad [n(n-1) + n - 1]x^n + ... = 0.$

Vì đa thức ở vế trái đồng nhất không, nên mọi hệ số của nó đều bằng 0, do đó

$$n(n-1) + n - 1 = n^2 - 1 = 0.$$

Suy ra n = 1, nghiệm đa thức của phương trình thuần nhất là đa thức bậc 1:

$$y = x + a .$$

Thế biểu thức ấy vào phương trình thuần nhất, ta được a = 2. Vậy một nghiệm riêng của phương trình thuần nhất là $y_1 = x + 2$. Ta tìm nghiệm riêng y_2 của phương trình ấy độc lập tuyến tính với y_1 theo công thức Liouville

$$y_2 = (x+2)\int \frac{1}{(x+2)^2} e^{-\int \frac{x+2}{x(x+1)}dx} dx =$$

$$= (x+2)\int \frac{x+1}{x^2(x+2)^2} dx .$$

Sai khác dấu ±. Ta có

$$\int \frac{x+1}{x^2(x+2)^2} dx = \frac{1}{4}\int \frac{(x+2)^2 - x^2}{x^2(x+2)^2} dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{(x+2)^2}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2x(x+2)}$$

Vậy $y_2 = -\frac{1}{2x}$

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$y = C_1(x+2) + C_2\frac{1}{x} \qquad (*)$$

C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

Để tìm nghiệm của phương trình không thuần nhất

$$y'' + \frac{x+2}{x(x+1)}y' - \frac{1}{x(x+1)}y = \frac{x^2+1}{x^2(x+1)}$$

Ta dùng phương pháp biến thiên hằng số. Xem C_1, C_2 là những hàm số của x. C_1, C_2 thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} C'_1(x+2) + \dfrac{C'_2}{x} = 0 \\ C'_1 - \dfrac{C'_2}{x^2} = \dfrac{x^2+1}{x^2(x+1)} \end{cases}$$

Ta được

$$C'_1 = \frac{x^2+1}{2x(x+1)^2} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$C'_2 = -\frac{(x+2)(x^2+1)}{2x(x+1)^2} = -\frac{x}{2} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

Do đó

$$C_1 = \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{x+1} + K_1$$

$$C_2 = -\frac{x^2}{4} + \frac{1}{x+1} + K_2$$

K_1, K_2 là các hằng số tùy ý. Nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là

$$y = \frac{x+2}{2}\ln|x| + \frac{x+2}{x+1} - \frac{x}{4} + \frac{1}{x(x+1)} + K_1(x+2) + \frac{K_2}{x}\ .$$

g) $y_1 = x^\alpha$ là một nghiệm riêng của phương trình thuần nhất tương ứng. Thế nó vào phương trình, ta được đồng nhất thức

$$x^{\alpha+1}(\alpha^2 - 5\alpha + 6) + x^{\alpha-1}.3\alpha(\alpha - 3) = 0$$

Do đó
$$\begin{cases} \alpha^2 - 5\alpha + 6 = 0 \\ \alpha(\alpha - 3) = 0 \end{cases}$$

Hệ ấy có nghiệm duy nhất là $\alpha = 3$. Vậy một nghiệm riêng của phương trình thuần nhất là $y_1 = x^3$.

Áp dụng công thức Liouville để tìm nghiệm riêng y_2 của phương trình ấy, độc lập tuyến tính với y_1, ta được

$$y_2 = x^3\int\frac{1}{x^6}\, e^{\int\frac{4x^2+6}{x(x^2+3)}dx}\, dx$$

Nhưng

$$\int\frac{4x^2+6}{x(x^2+3)}dx = \int\left(\frac{2}{x} + \frac{2x}{x^2+3}\right)dx = \ln x^2(x^2+3)$$

Do đó
$$y_2 = x^3\int\frac{x^2+3}{x^4}dx = -(x^2+1)$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$y = C_1x^3 + C_2(x^2+1).$$

C_1, C_2 là hai hằng số tùy ý

Bây giờ ta tìm một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất có dạng

$$y = e^{-x}(ax + b)$$

Thế vào phương trình ấy, ta được đồng nhất thức

$$ax^4 + (b + 2a)x^3 + (5a + 4b)x^2 + 9bx + 6b - 6a =$$

$$= x^4 + x^3 + x^2 - 9x - 12$$

Đồng nhất các hệ số, ta được $a = 1$, $b = -1$. Vậy một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất là $y = e^{-x}(x - 1)$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình ấy là

$$y = C_1x^3 + C_2(x^2 + 1) + e^{-x}(x - 1) .$$

19. a) Phương trình đã cho là phương trình cấp hai tuyến tính hệ số không đổi. Phương trình đặc trưng của phương trình thuần nhất tương ứng là $\quad k^2 - 1 = 0$

nó có 2 nghiệm thực $k = \pm 1$, do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x}$$

C_1, C_2 là những hằng số tùy ý. Dùng phương pháp biến thiên hằng số, ta thấy rằng biểu thức ấy là nghiệm của phương trình không thuần nhất nếu C_1, C_2 là những hàm số của x thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} C'_1e^x + C'_2e^{-x} = 0 \\ C'_1e^x - C'_2e^{-x} = \dfrac{e^x}{e^x + 1} \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ấy, ta được

$$C'_1 = \frac{1}{2(e^x + 1)} \ , \quad C'_2 = -\frac{e^{2x}}{2(e^x + 1)}$$

Do đó $\qquad C_1 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \frac{dx}{e^x + 1} = \frac{1}{2}\Big[\, x - \ln(e^x + 1) + K_1\Big]$

$$C_2 = -\frac{1}{2}\int \frac{e^{2x}dx}{e^x + 1} = -\frac{1}{2}\left[e^x - \ln(e^x + 1) + K_2\right]$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = \frac{1}{2}e^x\left[x - \ln(e^x + 1) + K_1\right] - \frac{1}{2}e^{-x}\left[e^x - \ln(e^x + 1) + K_2\right].$$

b) Phương trình đặc trưng của phương trình thuần nhất tương ứng là

$$k^2 + 2k + 1 = 0$$

Nó có 1 nghiệm kép $k = -1$. Do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$y = (C_1 + C_2x)e^{-x} = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$$

C_1, C_2 là các hằng số tùy ý. Biểu thức ấy trong đó C_1 và C_2 là những hàm số là nghiệm của phương trình không thuần nhất nếu C_1, C_2 thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} C'_1e^{-x} + C'_2xe^{-x} = 0 \\ -C'_1e^{-x} + C'_2e^{-x} - C'_2xe^{-x} = 3e^{-x}\sqrt{1+x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C'_1 + C'_2x = 0 \\ -C'_1 - C'_2x + C'_2 = 3\sqrt{1+x} \end{cases}$$

Giải hệ ấy, ta được

$$C'_2 = 3\sqrt{1+x}, \qquad C'_1 = -3x\sqrt{1+x}$$

Do đó

$$C_2 = 2(1+x)^{3/2} + K_1, \quad C_1 = 2(1+x)^{3/2} - \frac{6}{5}(1+x)^{5/2} + K_2$$

Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = e^{-x}\left[K_1 + K_2 x + \frac{4}{5}(1+x)^{5/2}\right].$$

c) Nghiệm của phương trình đặc trưng $k^2 + 1 = 0$ là $k = \pm i$. Do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là:

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x\ ,$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số tuỳ ý. Biểu thức ấy, trong đó C_1, C_2 là các hàm số của x, là nghiệm của phương trình đã cho nếu C_1, C_2 thoả mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} C'_1\cos x + C'_2\sin x = 0 \\ -C'_1\sin x + C'_2\cos x = \operatorname{tg}x. \end{cases}$$

Nghiệm của hệ ấy là

$$C'_2 = \sin x\ ,$$

$$C'_1 = -\frac{\sin^2 x}{\cos x} = \cos x - \frac{1}{\cos x}.$$

Do đó $$C_2 = -\cos x + K_2\ ,$$

$$C_1 = \sin x - \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + K_1.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = -\cos x\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + K_1\cos x + K_2\sin x.$$

d) Nghiệm của phương trình đặc trưng $k^2 + 5k + 6 = 0$ là $k = -2$, $k = -3$. Do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là:

$$y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x}$$

Trong đó C_1, C_2 là các hằng số tùy ý. Dùng phương pháp biến thiên hằng số, ta thấy rằng biểu thức trên, trong đó C_1, C_2 là các hàm số, là nghiệm của phương trình đã cho nếu C'_1, C'_2 thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} C'_1 e^{-2x} + C'_2 e^{-3x} = 0 \\ -2C'_1 e^{-2x} - 3C'_2 e^{-3x} = \dfrac{1}{1+e^{2x}} \end{cases}.$$

Giải hệ ấy, ta được

$$C'_2 = \frac{-e^{3x}}{1+e^{2x}},\ C'_1 = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}.$$

Do đó

$$C_1 = \int \frac{e^{2x}dx}{1+e^{2x}} = \frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) + K_1,$$

$$C_2 = -\int \frac{e^{3x}dx}{1+e^{2x}} = -e^x + \operatorname{arctg} e^x + K_2,$$

K_1, K_2 là các hằng số tùy ý. Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = \overline{K}_1e^{-2x} + K_2e^{-3x} + \frac{1}{2}e^{-2x}\ln(1+e^{2x}) + e^{-3x}\operatorname{arctg} e^x,$$

trong đó $\overline{K}_1 = K_1 - 1$.

e) Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là:

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x,$$

C_1, C_2 là các hằng số tuỳ ý. Biểu thức ấy là nghiệm của phương trình không thuần nhất nếu C_1, C_2 là hai hàm số của x thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} C'_1 \cos x + C'_2 \sin x = 0 \\ -C'_1 \sin x + C'_2 \cos x = \dfrac{1}{\cos 2x\sqrt{\cos 2x}} \end{cases}.$$

Do đó

$$C'_2 = \frac{\cos x}{(\cos 2x)^{3/2}},\ C'_1 = -\frac{\sin x}{(\cos 2x)^{3/2}}.$$

Suy ra $$C_2 = \int \frac{\cos x}{(\cos 2x)^{3/2}}dx = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}} + K_2,$$

$$C_1 = -\int \frac{\sin x}{(\cos 2x)^{3/2}}dx = -\frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}} + K_1,$$

K_1, K_2 là những hằng số tùy ý. Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = K_1\cos x + K_2\sin x - \sqrt{\cos 2x}.$$

20. a) Phương trình đặc trưng của phương trình thuần nhất tương ứng là $k^2 - 7k + 6 = 0$.

Nó có hai nghiệm $k = 1$, $k = 6$. Do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là $y = C_1e^x + C_2e^{6x}$.

Vế phải của phương trình đã cho có dạng $P_n(x)\sin\beta x$, $P_n(x)$ là đa thức bậc n. Ở đây $n = 0$, $\beta = 1$. Vì $\pm i\beta = \pm i$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng, nên ta tìm một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất có dạng

$$Y = A\cos x + B\sin x.$$

Do đó $$Y' = -A\sin x + B\cos x,$$

$$Y'' = -A\cos x - B\sin x.$$

Thế vào phương trình, ta được đồng nhất thức

$$(5A - 7B)\cos x + (5B + 7A)\sin x = \sin x.$$

Suy ra: $$\begin{cases} 5A - 7B = 0 \\ 7A + 5B = 1 \end{cases}.$$

Nghiệm của hệ đó là: $A = \dfrac{7}{74}, B = \dfrac{5}{74}$. Vậy

$$Y = \frac{1}{74}(7\cos x + 5\sin x).$$

Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = C_1e^x + C_2e^{6x} + \frac{1}{74}(7\cos x + 5\sin x).$$

b) Phương trình đặc trưng của phương trình thuần nhất tương ứng là:

$$k^2 + 9 = 0\,.$$

Nó có hai nghiệm phức liên hợp là $k = \pm 3i$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là:

$$y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x\,.$$

Vế phải của phương trình đã cho có dạng $e^{\alpha x}P_0(x)$, trong đó $\alpha = 3$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng. Vậy ta tìm một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất có dạng $Y = Ae^{3x}$. Thế vào phương trình ấy, ta được:

$$A = \frac{1}{3}.$$

Vậy $Y = \dfrac{1}{3}e^{3x}$. Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + \frac{1}{3}e^{3x}\,.$$

c) Phương trình đặc trưng của phương trình thuần nhất tương ứng là $k^2 - 3k = 0$. Nó có hai nghiệm $k = 0$, $k = 3$. Do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là:

1 $$y = C_1 + C_2e^{3x}\,.$$

Vế phải của phương trình đã cho có dạng $e^{\alpha x}P_1(x)$, trong đó $\alpha = 0$ là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng. Do đó ta tìm một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất có dạng

$$Y = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx$$

Thế vào phương trình, ta được đồng nhất thức

$$2A - 3B - 6Ax = 2-6x$$

Do đó $\begin{cases} 2A - 3B = 2 \\ -6A = -6 \end{cases}$

Vậy A = 1, B = 0. Suy ra $y = x^2$. Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = C_1 + C_2e^{3x} + x^2.$$

d) Đặt $y = e^{-x}z$ thế vào phương trình

$$y'' - 2y' + 3y = e^{-x}\cos x$$

Ta được

$$z'' - 4z' + 6z = \cos x \qquad (*)$$

Phương trình đặc trưng của phương trình thuần nhất tương ứng với (*) là $k^2 - 4k + 6 = 0$. Nó có 2 nghiệm phức liên hợp $k = 2 \pm \sqrt{2}\,i$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$z = e^{2x}(C_1\cos\sqrt{2}\,x + C_2\sin\sqrt{2}\,x)$$

Vế phải của (*) có dạng $e^{\alpha x}\cos\beta x$, trong đó $\alpha = 0$, $\pm i\beta = \pm i$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng. Do đó ta tìm một nghiệm riêng của phương trình (*) có dạng

$$Z = A\cos x + B\sin x$$

Thế vào phương trình (*), ta được đồng nhất thức

$$(5A - 4B)\cos x + (4A + 5B)\sin x = \cos x$$

Do đó $$\begin{cases} 5A - 4B = 1 \\ 4A + 5B = 0 \end{cases}$$

Nghiệm của hệ ấy là $A = \frac{5}{41}$, $B = -\frac{4}{41}$. Vậy

$$Z = \frac{5\cos x - 4\sin x}{41}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (*) là

$$z = e^{2x}(C_1\cos\sqrt{2}\,x + C_2\sin\sqrt{2}\,x) + \frac{5\cos x - 4\sin x}{41}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = e^{-x}z = e^{x}(C_1\cos\sqrt{2}x + C_2\sin\sqrt{2}x) + e^{-x}\frac{5\cos x - 4\sin x}{41}.$$

e) Phương trình đặc trưng của phương trình thuần nhất tương ứng là $k^2 + 4 = 0$, nó có 2 nghiệm phức liên hợp $k = \pm 2i$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$$

Vế phải của phương trình đã cho có dạng $P_0(x)\sin\beta x$, $\beta = 2$. Vì $\pm i\beta = \pm 2i$ là nghiệm của phương trình đặc trưng nên ta tìm một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất có dạng

$$y = x(A\cos 2x + B\sin 2x)$$

Ta có

$$Y' = (A + 2Bx)\cos 2x + (B - 2Ax)\sin 2x$$

$$Y'' = (4B - 4Ax)\cos 2x - (4A + 4Bx)\sin 2x$$

Thế vào phương trình ta được đồng nhất thức

1

$$4B\cos 2x - 4A\sin 2x = 2\sin 2x.$$

Do đó $\quad 4B = 0, \quad -4A = 2$.

Vậy $\quad B = 0, \quad A = -\frac{1}{2}$. $\quad$ Suy ra $\quad Y = -\frac{x}{2}\cos 2x$.

Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - \frac{x}{2}\cos 2x.$$

f) Phương trình đặc trưng $k^2 + 2k + 1 = 0$ có nghiệm kép $k = -1$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là:

$$y = (C_1 + C_2x)e^{-x}.$$

Vế phải của phương trình đã cho có dạng $P_O(x)e^{\beta x}$, $\beta = -1$ là nghiệm kép của phương trình đặc trưng, do đó ta tìm một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất có dạng: $Y = Ax^2e^{-x}$.

Ta có

$$Y' = Ae^{-x}(2x - x^2),$$

$$Y'' = Ae^{-x}(x^2 - 4x + 2).$$

Thế vào phương trình, ta được đồng nhất thức

$$2Ae^{-x} = 4e^{-x}.$$

Do đó $A = 2$. Vậy $Y = 2x^2e^{-x}$. Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = (C_1 + C_2x + 2x^2)e^{-x}.$$

g) Phương trình đặc trưng $k^2 - 9k + 20 = 0$ có 2 nghiệm $k = 4$, $k = 5$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là:

$$y = C_1e^{4x} + C_2e^{5x}.$$

Vế phải của phương trình đã cho có dạng $P_2(x)e^{\beta x}$, $\beta = 4$ là nghiệm của phương trình đặc trưng, do đó ta tìm một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất có dạng

$$Y = x(Ax^2 + Bx + C)e^{4x}.$$

Ta có $$Y' = e^{4x}[4Ax^3 + (3A + 4B)x^2 + (2B + 4C)x + C],$$

$$Y'' = e^{4x}[(16Ax^3 + (24A + 16B)x^2 + (6A + 16B + 16C)x + (2B + 8C)].$$

Thế vào phương trình đã cho, ta được đồng nhất thức

$$-3Ax^2 + (6A - 2B)x + 2B - C = x^2.$$

Do đó $$-3A = 1, \quad 6A - 2B = 0, \quad 2B - C = 0.$$

Suy ra $$A = -\frac{1}{3}, \qquad B = -1, \qquad C = -1.$$

Vậy

$$Y = -(\frac{x^3}{3} + x^2 + 2x)e^{4x}.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = C_1e^{4x} + C_2e^{5x} - (\frac{x^3}{3} + x^2 + 2x)e^{4x}.$$

h) Phương trình đặc trưng $k^2 + 4k - 5 = 0$ có hai nghiệm $k = 1$, $k = -5$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là:

$$y = C_1e^x + C_2e^{-5x}.$$

Vế phải của phương trình đã cho có dạng $P_0(x)e^{\beta x}$, $\beta = 1$ là nghiệm của phương trình đặc trưng. Vậy ta tìm một nghiệm riêng
1 của phương trình đã cho có dạng:

$$Y = Axe^x$$

Thế vào phương trình, ta được $A = \frac{1}{3}$. Vậy $Y = \frac{1}{3}xe^x$

Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-5x} + \frac{1}{3}xe^x .$$

i) Đặt $y = e^{-x}z$. Thế vào phương trình đã cho, ta được

$$z'' + 4z = 2x\cos 2x \qquad (*)$$

Đó là một phương trình tuyến tính cấp hai với hệ số không đổi, nhưng vế phải đơn giản hơn vế phải của phương trình đã cho

Phương trình đặc trưng của (*) là $k^2 + 4 = 0$, nó có hai nghiệm phức liên hợp là $k = \pm 2i$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất ứng với (*) là

$$z = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$$

Vế phải của (*) có dạng $P_1(x)\cos\beta x$, $\pm i\beta = \pm 2i$ là nghiệm của phương trình đặc trưng, do đó ta tìm một nghiệm riêng của (*) có dạng

$$Z = x[(Ax + B)\cos 2x + (Cx + D)\sin 2x]$$

Ta có

$$Z' = [2Cx^2 + 2(A + D)x + B]\cos 2x + [-2Ax^2 + 2(C - B)x + D]\sin 2x$$

$$Z'' = [-4Ax^2 + 4(2C - B)x + 2(A + 2D)]\cos 2x +$$

$$+ [-4Cx^2 - 4(2A + D)x + 2(C - 2B)]\sin 2x$$

Thế vào phương trình (*) ta được đồng nhất thức

$$8Cx\cos 2x - 8Ax\sin 2x + 2(A + 2D)\cos 2x + 2(C - 2B)\sin 2x = 2x\cos 2x$$

Do đó $\quad 8C = 2, A = 0, A + 2D = 0, C - 2B = 0$

Suy ra $\quad C = \frac{1}{4}, A = 0, D = 0, B = \frac{1}{8}$. Vậy

$$Z = \frac{x}{8}\cos 2x + \frac{x^2}{4}\sin 2x$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (*) là

$$z = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{x}{8}\cos 2x + \frac{x^2}{4}\sin 2x$$

Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = e^{-x}z = e^{-x}\left(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{x}{8}\cos 2x + \frac{x^2}{4}\sin 2x\right).$$

j) Nghiệm của phương trình đặc trưng $k^2 + 1 = 0$ là $k = \pm i$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x$$

Vế phải của phương trình đã cho là

$$x^2\cos^2 x = \frac{x^2}{2} + \frac{x^2\cos 2x}{2}$$

Áp dụng nguyên lí chồng nghiệm, trước hết ta tìm nghiệm riêng của phương trình

$$y'' + y = \frac{x^2}{2} \qquad (*)$$

Có dạng $Y_1 = Ax^2 + Bx + C$, vì vế phải có dạng $e^{\alpha x}P_2(x)$, $\alpha = 0$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng. Thế Y_1 vào phương trình (*), ta được đồng nhất thức

$$Ax^2 + Bx + 2A + C = \frac{x^2}{2}$$

Do đó $\quad A = \frac{1}{2},\ B = 0, C = -1$

Vậy $$Y_1 = \frac{x^2}{2} - 1$$

Bây giờ ta tìm nghiệm riêng của phương trình

$$y'' + y = \frac{x^2}{2}\cos 2x \qquad (**)$$

Có dạng

$$Y_2 = (A_1x^2 + B_1x + C_1)\cos 2x + (A_2x^2 + B_2x + C_2)\sin 2x$$

Thế vào phương trình (**), ta được đồng nhất thức

$$[-3A_1 x^2 + (8A_2 - 3B_1)x + 2A_1 + 4B_2 - 3C_1]\cos 2x +$$
$$+ [-3A_2 x^2 - (8A_1 + 3B_2)x + 2A_2 - 4B_1 - 3C_2]\sin 2x = \frac{x^2}{2}\cos 2x$$

Do đó

$$\begin{cases} -3A_1 = \frac{1}{2} \\ 8A_2 - 3B_1 = 0 \\ 2A_1 + 4B_2 - 3C_1 = 0 \\ -3A_2 = 0 \\ 8A_1 + 3B_2 = 0 \\ 2A_2 - 4B_1 - 3C_2 = 0 \end{cases}$$

Suy ra $A_1 = -\frac{1}{6}$, $B_1 = 0$, $C_1 = \frac{13}{27}$, $A_2 = 0$, $B_2 = \frac{4}{9}$, $C_2 = 0$.

Vậy

$$Y_2 = \left(\frac{13}{27} - \frac{x^2}{6}\right)\cos 2x + \frac{4x}{9}\sin 2x .$$

Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{x^2}{2} - 1 + \left(\frac{13}{27} - \frac{x^2}{6}\right)\cos 2x + \frac{4x}{9}\sin 2x .$$

k) Nghiệm của phương trình đặc trưng $k^2 - 3k = 0$ là $k = 0$, $k = 3$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là

$$y = C_1 + C_2e^{3x}$$

Theo nguyên lý chồng nghiệm, trước hết ta tìm nghiệm riêng của phương trình

$$y'' - 3y' = e^{3x} .$$

dưới dạng $Y_1 = Axe^{3x}$, vì vế phải có dạng $e^{\beta x}$, $\beta = 3$ là nghiệm của phương trình đặc trưng. Thế Y_1 vào phương trình, ta được $A = \frac{1}{3}$, do đó $Y_1 = \frac{1}{3}xe^{3x}$.

Bây giờ ta tìm nghiệm riêng của phương trình

$$y'' - 3y' = -18x$$

dưới dạng $Y_2 = x(Bx + C)$, vì vế phải có dạng $e^{\beta x}P_1(x)$, $\beta = 0$ là nghiệm của phương trình đặc trưng. Thế Y_2 vào phương trình ta được đồng nhất thức

$$-6Bx + 2B - 3C = -18x .$$

Do đó $$-6B = -18 , 2B - 3C = 0$$

suy ra $B = 3$, $C = 2$, $Y_2 = x(3x + 2)$.

Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = C_1 + C_2e^{3x} + x(3x + 2) + \frac{x}{3}e^{3x} .$$

l) Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x .$$

Vì $\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x$, nên theo nguyên lí chồng nghiệm trước hết ta tìm nghiệm riêng của phương trình

$$y'' + y = \frac{1}{4}\cos 3x$$

dưới dạng $Y_1 = A\cos 3x + B\sin 3x$. Thế vào phương trình ta được đồng nhất thức

1

$$-8A\cos 3x - 8B\sin 3x = \frac{1}{4}\cos 3x .$$

Do đó

$$-8A = \frac{1}{4} , 8B = 0$$

Suy ra $$A = -\frac{1}{32} , B = 0 , Y_1 = -\frac{1}{32}\cos 3x$$

Bây giờ ta tìm nghiệm riêng của phương trình

$$y'' + y = \frac{3}{4}\cos x$$

dưới dạng $Y_2 = x(C\cos x + D\sin x)$, vì vế phải của phương trình có dạng $e^{\beta x}P_0(x)$, $\pm i\beta = \pm i$ là nghiệm của phương trình đặc trưng. Thế Y_2 vào phương trình, ta được

$$(2D - Cx)\cos x - (2C + Dx)\sin x + Cx\cos x + Dx\sin x = \frac{3}{4}\cos x .$$

Do đó

$$2D = \frac{3}{4} , 2C = 0$$

Suy ra $$D = \frac{3}{8} , C = 0 , Y_2 = \frac{3x}{8}\sin x .$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{1}{32}\cos 3x + \frac{3}{8}x\sin x .$$

m) Đặt $y = e^{2x}z$. Thế vào phương trình

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\cos^2 x .$$

Ta được $$z'' = \cos^2 x .$$

Do đó

$$z' = \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C_1 .$$

Vậy

$$z = \frac{x^2}{4} - \frac{\cos 2x}{8} + C_1x + C_2 .$$

Suy ra nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = e^{2x}(C_1x + C_2 + \frac{x^2}{4} - \frac{\cos 2x}{8}) .$$

n) Phương trình đặc trưng $k^2 - 2k + (1 + \alpha^2) = 0$ có 2 nghiệm phức liên hợp $k = 1 \pm \alpha i$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là

$$y = e^x(C_1\cos\alpha x + C_2\sin\alpha x) .$$

Vế phải của phương trình có dạng $P_0(x)\cos\alpha x$, $\pm i\alpha$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng, do đó ta tìm một nghiệm riêng của phương trình có dạng

$$Y = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x .$$

Thế vào phương trình, ta được đồng nhất thức

$$(-2B\alpha + A)\cos\alpha x + (2A\alpha + B)\sin\alpha x = (1 + 4\alpha^2)\cos\alpha x .$$

Do đó

$$\begin{cases} A - 2B\alpha = 1 + 4\alpha^2 \\ 2A\alpha + B = 0 \end{cases}$$

Suy ra $A = 1$, $B = -2\alpha$. Vậy

$$Y = \cos\alpha x - 2\alpha\sin\alpha x$$

Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = e^x(C_1\cos\alpha x + C_2\sin\alpha x) + \cos\alpha x - 2\alpha\sin\alpha x .$$

Do đó

$$y' = e^x(C_1\cos\alpha x + C_2\sin\alpha x - C_1\alpha\sin\alpha x + C_2\alpha\cos\alpha x) -$$

$$- \alpha\sin\alpha x - 2\alpha^2\cos\alpha x .$$

Từ các điều kiện $y\big|_{x=0} = 1$, $y'\big|_{x=0} = 0$, ta được

1 $$C_1 + 1 = 1 \ , C_1 + C_2\alpha - 2\alpha^2 = 0 .$$

Do đó $C_1 = 0$, $C_2 = 2\alpha$. Vậy nghiệm riêng cần tìm là

$$y = \cos\alpha x + 2\alpha(e^x - 1)\sin\alpha x .$$

o) Phương trình đặc trưng $k^2 + 6k + 9 = 0$ có nghiệm kép $k = -3$. Do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là

$$y = (C_1 + C_2x)e^{-3x} .$$

Bây giờ ta tìm một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất. Vế phải của nó là $xe^{\alpha x}$, vậy có 2 trường hợp.

Giả sử $\alpha \neq -3$. Ta tìm nghiệm riêng của nó có dạng

$$Y = (Ax + B)e^{\alpha x} .$$

Thế vào phương trình ta được

$$(A\alpha^2 + 6A\alpha + 9A)x + 2A\alpha + B\alpha^2 + 6B\alpha + 6A + 9B = x$$

Do đó

$$\begin{cases} A(\alpha^2 + 6\alpha + 9) = 1 \\ 2A(\alpha + 3) + B(\alpha^2 + 6\alpha + 9) = 0 \end{cases}$$

Vì $\alpha \neq -3$ nên $\alpha^2 + 6\alpha + 9 = (\alpha + 3)^2 \neq 0$. Từ hệ trên suy ra

$$A = \frac{1}{(\alpha + 3)^2}, \ B = -\frac{2(\alpha + 3)}{(\alpha + 3)^4} = -\frac{2}{(\alpha + 3)^3}$$

Vậy

$$Y = \frac{1}{(\alpha + 3)^2}\left(x - \frac{2}{\alpha + 3}\right)e^{\alpha x} .$$

Giả sử $\alpha = -3$, α là nghiệm kép của phương trình đặc trưng. Ta tìm nghiệm riêng của phương trình đã cho có dạng

$$Y = x^2(Cx + D)e^{\alpha x} = (Cx^3 + Dx^2)e^{\alpha x}.$$

Thế vào phương trình, ta được đồng nhất thức

$$(\alpha^2C + 6\alpha C + 9C)x^3 + (6\alpha C + 18C + \alpha^2D + 6\alpha D + 9D)x^2 +$$
$$+ \ (6C + 4\alpha D + 12D)x + 2D = x .$$

Do đó

$$\begin{cases} C(\alpha + 3)^2 = 0 \\ 6C(\alpha + 3) + D(\alpha + 3)^2 = 0 \\ 6C + 4D(\alpha + 3) = 1 \\ 2D = 0 \end{cases}$$

Vì $\alpha + 3 = 0$, từ hệ trên suy ra $C = \frac{1}{6}$, $D = 0$, $Y = \frac{1}{6}x^3e^{-3x}$.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = (C_1x + C_2)e^{-3x} + \frac{1}{(\alpha + 3)^2}(x - \frac{2}{\alpha + 3})e^{\alpha x} \quad \text{nếu } \alpha \neq -3$$

$$y = (C_1x + C_2 + \frac{1}{6}x^3)e^{-3x} \quad \text{nếu } \alpha = -3 .$$

p) Nghiệm của phương trình đặc trưng $k^2 - (m + 1)k + m = 0$ là $k = 1$, $k = m$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$y = C_1e^x + C_2e^{mx} \text{ nếu } m \neq 1$$

$$y = (C_1 + C_2x)e^x \text{ nếu } m = 1$$

Dùng phương pháp chồng nghiệm, trước hết ta tìm nghiệm riêng của phương trình

$$y'' - (m + 1)y' + my = e^x \qquad (*)$$

Nếu $m \neq 1$, ta tìm nghiệm riêng Y_1 của (*) có dạng

$$Y_1 = Axe^x ,$$

vì vế phải của (*) có dạng $P_0(x)e^{\beta x}$, $\beta = 1$ là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng. Thế Y_1 vào (*) , ta được

$$A = \frac{1}{1 - m} .$$

Vậy

$$Y_1 = \frac{x}{1 - m}e^x .$$

Nếu $m = 1$, phương trình đặc trưng có nghiệm kép là 1, ta tìm nghiệm riêng Y_1 của (*) có dạng

$$Y_1 = Bx^2e^x .$$

Thế vào phương trình (*), ta được $B = \frac{1}{2}$. Vậy

$$Y_1 = \frac{x^2}{2}e^x .$$

Bây giờ ta tìm nghiệm riêng của phương trình

$$y'' - (m+1)y' + my = -(x+1) \qquad (**)$$

Vế phải của (**) có dạng $P_1(x)e^{\beta x}$, $\beta = 0$. Do đó nếu $m \neq 0$,

ta tìm nghiệm riêng của (**) có dạng $Y_2 = Cx + D$. Thế vào (**), ta được đồng nhất thức

$$mCx + mD - mC - C = -x - 1$$

Do đó

$$\begin{cases} mC = -1 \\ mD - mC - C = -1 \end{cases}$$

Suy ra $C = -\frac{1}{m}$, $D = -\frac{1+2m}{m^2}$, $Y_2 = -\frac{1+2m}{m^2} - \frac{x}{m}$.

Nếu $m = 0$, ta tìm nghiệm riêng của (**) có dạng

$$Y_2 = x(Ex + F) .$$

Thế vào (**), ta được đồng nhất thức

$$-2Ex + 2E - F = -x - 1 .$$

Do đó

$$\begin{cases} -2E \quad = -1 \\ 2E - F = -1 \end{cases}$$

Vậy $E = \frac{1}{2}$, $F = 2$, $Y_2 = \frac{x^2}{2} + 2x$

Tóm lại nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = C_1e^x + C_2e^{mx} + \frac{xe^x}{1-m} - \frac{2}{m} - \frac{1}{m^2} \quad \text{nếu } m \neq 0 \text{ , } m \neq 1$$

$$y = C_1e^x + C_2 + xe^x + \frac{x^2}{2} + 2x \qquad \text{nếu } m = 0$$

$$y = (C_1 + C_2x)e^x + \frac{x^2}{2}e^x - x - 3 \qquad \text{nếu } m = 1 .$$

21. a) Phương trình đã cho có nghĩa khi $x > 0$. Phương trình thuần nhất tương ứng là phương trình Euler. Đặt $x = e^t$, phương trình đã cho trở thành

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4y = te^{2t} \qquad (*)$$

Đó là một phương trình tuyến tính cấp hai có hệ số không đổi. Nghiệm của phương trình đặc trưng $k^2 - 4 = 0$ là $k = \pm 2$. Do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng

$$y = C_1e^{2t} + C_2e^{-2t} .$$

Vế phải của (*) có dạng $P_1(t)e^{\beta t}$, $\beta = 2$ là nghiệm của phương trình đặc trưng, do đó ta tìm nghiệm riêng của (*) có dạng

$$Y = t(At + B)e^{2t}$$

Thế vào phương trình (*), ta được đồng nhất thức

$$8At + (4B + 2A) = t .$$

Do đó

$$8A = 1 \text{ , } 4B + 2A = t .$$

Suy ra $A = \frac{1}{8}$, $B = -\frac{1}{16}$, $Y = \left(\frac{t^2}{8} - \frac{t}{16}\right)e^{2t}$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình (*) là

1

$$y = C_1e^{2t} + C_2e^{-2t} + \left(\frac{t^2}{8} - \frac{t}{16}\right) e^{2t} .$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = \left(C_1 + \frac{1}{8}\ln^2 x - \frac{1}{16}\ln x \right) x^2 + \frac{C_2}{x^2} .$$

b) Phương trình thuần nhất

$$x^2 y'' - 2y = 0$$

là phương trình Euler. Đặt $|x| = e^t$. Ta được

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 2y = 0 \qquad (*)$$

Đó là một phương trình tuyến tính cấp hai có hệ số không đổi. Phương trình đặc trưng của nó $k^2 - k - 2 = 0$ có hai nghiệm $k = 2$, $k = -1$. Vậy nghiệm tổng quát của (*) là

$$y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} .$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là:

$$y = C_1 x^2 + \frac{C_2}{x} ,$$

C_1 , C_2 là các hằng số tùy ý. Dùng phương pháp biến thiên hằng số, ta thấy biểu thức ấy là nghiệm của phương trình đã cho nếu C_1, C_2 là hai hàm số của x thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} C'_1 x^2 + \dfrac{C'_2}{x} = 0 \\ 2C'_1 x - \dfrac{C'_2}{x^2} = x\cos x \end{cases}$$

(vì phương trình đã cho tương đương với phương trình : $y'' - \dfrac{2y}{x^2} = x\cos x$) .

Giải hệ ấy, ta được

$$C'_1 = \frac{1}{3}\cos x \ , \ C'_2 = -\frac{1}{3}x^3 \cos x .$$

1 Do đó $\qquad C_1 = \dfrac{1}{3}\sin x + K_1$

$$C_2 = -\frac{1}{3}\int x^3\cos x dx$$

Dùng tích phân phân đoạn 3 lần liên tiếp, ta được

$$C_2 = -\frac{x^3}{3}\sin x - x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + K_2$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = \left(\frac{1}{3}\sin x + K_1\right)x^2 + \left(-\frac{x^3}{3}\sin x - x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + K_2\right)\frac{1}{x} =$$

$$= K_1x^2 + \frac{K_2}{x} + 2\sin x + \frac{2 - x^2}{x}\cos x .$$

c) Đổi biến số $t = e^x$. Ta có

$$y' = \frac{dy}{dt}e^x , \qquad y'' = \frac{d^2y}{dt^2}e^{2x} + \frac{dy}{dt}e^x$$

Thế vào phương trình $y'' - y' = e^{2x}\cos e^x$, ta được

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \cos t$$

Do đó

$$\frac{dy}{dt} = \sin t + C_1 ,$$

C_1 là hằng số tùy ý. Suy ra

$$y = -\cos t + C_1t + C_2 ,$$

C_2 là hằng số tùy ý. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = -\cos e^x + C_1e^x + C_2 .$$

d) Đổi biến số $x = \operatorname{tg}t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$. Ta có $t = \operatorname{arctg}x$, do đó

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{1 + x^2}$$

1

$$y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{1}{(1 + x^2)^2} - \frac{dy}{dt}\cdot\frac{2x}{(1 + x^2)^2} .$$

Thế vào phương trình đã cho, ta được

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = \sin 2t \qquad (*)$$

Đó là phương trình tuyến tính cấp hai hệ số không đổi. Phương trình đặc trưng $k^2 + 4 = 0$ có hai nghiệm phức liên hợp $k = \pm 2i$, vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$y = C_1\cos 2t + C_2\sin 2t$$

Vế phải của (*) có dạng $P_o(t)\sin\beta t$, $\pm\beta i = \pm 2i$ là nghiệm của phương trình đặc trưng, nên ta tìm nghiệm riêng của (*) có dạng

$$Y = t(A\cos 2t + B\sin 2t)$$

Thế vào phương trình (*), ta được đồng nhất thức

$$-4A\sin 2t + 4B\cos 2t = \sin 2t$$

Do đó $-4A = 1$, $4B = 0$. Suy ra $A = -\frac{1}{4}$, $B = 0$, $Y = -\frac{1}{4}t\cos 2t$

Nghiệm tổng quát của phương trình (*) là

$$y = C_1\cos 2t + C_2\sin 2t - \frac{1}{4}t\cos 2t$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = C_1\frac{1-x^2}{1+x^2} + C_2\frac{2x}{1+x^2} - \frac{1}{4}\,\frac{1-x^2}{1+x^2}\,\mathrm{arctg}x$$

e) Đổi biến số $x = \mathrm{sh}t$. Ta có $\frac{dx}{dt} = \mathrm{ch}t$. Do đó

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\mathrm{ch}t}$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\mathrm{ch}t}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\mathrm{ch}t}\right)\cdot\frac{1}{\mathrm{ch}t} =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{ch}^2 t}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{\mathrm{sh}t}{\mathrm{ch}t}\cdot\frac{1}{\mathrm{ch}^2 t}\cdot\frac{dy}{dt}$$

Thế vào phương trình đã cho, ta được

$$\frac{d^2y}{dt^2} - y = 0$$

Đó là một phương trình tuyến tính cấp hai hệ số không đổi. Nghiệm tổng quát của nó là

$$y = C_1e^t + C_2e^{-t}$$

Nhưng $t = \text{argsh}x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, do đó

$$-t = \ln(\sqrt{x^2+1} - x)$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = C_1(\sqrt{x^2+1} + x) + C_2(\sqrt{x^2+1} - x) .$$

f) $x = 0$ không là nghiệm. $x \neq 0$, đặt $z = \frac{y}{x}$ hay $y = xz$, ta có $y' = xz' + z$, $y'' = xz'' + 2z'$.

Thế vào phương trình, ta được

$$z'' - z = 0$$

Nghiệm tổng quát của nó là

$$z = C_1e^x + C_2e^{-x}$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = x(C_1e^x + C_2e^{-x}) .$$

g) Đặt $y = \frac{u}{x^2}$, ta có $u = x^2y$, $u' = x^2y' + 2xy$,

$u'' = x^2y'' + 4xy' + 2y$. Thế vào phương trình đã cho, ta được

$$u'' + u = \frac{1}{\cos x} \qquad (*)$$

Đó là một phương trình cấp hai tuyến tính hệ số không đổi. Nghiệm của phương trình đặc trưng $k^2 + 1 = 0$ là $k = \pm i$. Do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x.$$

C_1, C_2 là các hằng số tùy ý. Biểu thức ấy là nghiệm của phương trình (*) nếu C_1, C_2 là những hàm số của x thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} C'_1 \cos x + C'_2 \sin x = 0 \\ -C'_1 \sin x + C'_2 \cos x = \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Giải hệ ấy, ta được:

$$C'_2 = 1, \qquad C'_1 = -\frac{\sin x}{\cos x}.$$

Do đó

$$C_2 = x + K_2, \quad C_1 = \ln|\cos x| + K_1 .$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình (*) là:

$$u = (\ln|\cos x| + K_1)\cos x + (x + K_2)\sin x.$$

Suy ra nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = \frac{1}{x^2}(K_1\cos x + K_2\sin x + \cos x\ln|\cos x| + x\sin x).$$

h) Đặt $y = \dfrac{u}{\sqrt{1+x^2}}$. Ta có $u = y\sqrt{1+x^2}$. Do đó

$$u' = \sqrt{1+x^2}\,y' + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,y,$$

$$u'' = \sqrt{1+x^2}\,y'' + \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\,y' + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,y - \frac{x^2}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\,y.$$

Thế vào phương trình đã cho, ta được

$$u'' = 0.$$

Do đó $\qquad u = C_1x + C_2$,

C_1, C_2 là các hằng số tùy ý. Suy ra nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = \frac{C_1x + C_2}{\sqrt{1+x^2}}.$$

i) Giả sử $x = \varphi(t)$ là một song ánh. Ta có

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\varphi'(t)},$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}\right) = \left(\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{1}{\varphi'(t)} - \frac{\varphi''(t)}{\varphi'^2(t)}\frac{dy}{dt}\right)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}$$

$$= \frac{1}{\varphi'^2}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{\varphi''}{\varphi'^3}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

Thế vào phương trình đã cho, ta được

$$\frac{\varphi^2+1}{\varphi'^2}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\varphi\varphi'^2 - (\varphi^2+1)\varphi''}{\varphi'^3}\cdot\frac{dy}{dt} - \alpha^2 y = 0.$$

Vì α là hằng số, ta cần chọn φ sao cho

$$\begin{cases} \dfrac{\varphi^2+1}{\varphi'^2} = a & (*) \\ \dfrac{\varphi\varphi'^2 - (\varphi^2+1)\varphi''}{\varphi'^3} = b & (**) \end{cases}$$

a, b là các hằng số. Từ (1) suy ra

$$\varphi^2 + 1 = a\varphi'^2.$$

Thế vào (**), ta được: $\varphi - a\varphi'' = b\varphi'$ (***)

Chọn a = 1, giải (*), ta được

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi^2+1}} = \pm\, dt.$$

Do đó $\quad$ $\text{argsh}\varphi = \pm t + C.$

Chọn dấu + với C = 0, ta được $\text{argsh}\varphi = t$ hay $\varphi = \text{sh}t$. Khi đó phương trình (***) được thoả mãn với b = 0. Tóm lại nếu thực hiện phép đổi biến $x = \varphi(t) = \text{sh}t$, phương trình đã cho trở thành

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \alpha^2 y = 0$$

Nghiệm tổng quát của nó là

$$y = C_1e^{\alpha t} + C_2e^{-\alpha t}$$

Nhưng $t = \text{argshx} = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, do đó nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = C_1(\sqrt{x^2+1} + x)^{\alpha} + C_2(\sqrt{x^2+1} - x)^{\alpha}.$$

j) Giả sử $t = \varphi(x)$ là một song ánh . Ta có

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\varphi'(x)$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\varphi'(x)\right) = \frac{d^2y}{dt^2}\varphi'^2(x) + \frac{dy}{dt}\varphi''(x)$$

Thế vào phương trình, ta được

$$\frac{d^2y}{dt^2}\varphi'^2\cos x + \frac{dy}{dt}\varphi''\cos x + \frac{dy}{dt}\varphi'\sin x - y\cos^3 x = 0$$

Vì $\varphi'(x) \neq 0$, với $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, chia hai vế của phương trình trên với $\varphi'^2\cos x$, ta được

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\left(\frac{\varphi''}{\varphi'^2} + \frac{\text{tg}x}{\varphi'}\right) - y\frac{\cos^2 x}{\varphi'^2} = 0$$

Ta cần chọn φ sao cho

$$\begin{cases} \dfrac{\cos x}{\varphi'} = a & (*) \\ \dfrac{\varphi''}{\varphi'^2} + \dfrac{\text{tg}x}{\varphi'} = b & (**) \end{cases}$$

a,b là các hằng số. Từ (*) suy ra

$$\varphi'(x) = \frac{\cos x}{a},\ \varphi(x) = \frac{\sin x}{a} + C$$

C là hằng số tùy ý. Thế vào (**), ta được

$$b = 0,\ \forall a \in \mathbf{R},\ \forall C \in \mathbf{R}$$

Chọn a = 1 , C = 0 , ta được $\varphi(x) = \sin x$. Phương trình trên trở thành

$$\frac{d^2y}{dt^2} - y = 0$$

nghiệm tổng quát của nó là

$$y = C_1e^t + C_2e^{-t}$$

Nhưng $t = \sin x$, nên nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = C_1e^{\sin x} + C_2e^{-\sin x}$$

22. a) Ta có

$$u = \frac{\varphi(r)}{r}\ ,\ r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Do đó

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{r\varphi' - \varphi}{r^2}\cdot\frac{x}{r} = \frac{r\varphi' - \varphi}{r^3}x\ ,$$

Vậy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{r\varphi' - \varphi}{r^3} + x\frac{r^3.r\varphi'' - (r\varphi' - \varphi)3r^2}{r^6}\cdot\frac{x}{r} =$$
$$= \frac{r\varphi' - \varphi}{r^3} + x^2\frac{r^4\varphi'' - 3r^3\varphi' + 3r^2\varphi}{r^7}$$

vì vai trò đối xứng của x,y,z, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ (hoặc $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$) được suy ra từ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ bằng cách thay trong biểu thức của nó x bởi y (hoặc z). Vậy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 3\frac{r\varphi' - \varphi}{r^3} + \frac{r^2}{r^7}(r^4\varphi'' - 3r^3\varphi' + 3r^2\varphi) =$$
$$= \frac{3\varphi'}{r^2} - \frac{3\varphi}{r^3} + \frac{\varphi''}{r} - \frac{3\varphi'}{r^2} + \frac{3\varphi}{r^3} = \frac{\varphi''}{r}$$

Thế vào phương trình đã cho, ta được

$$\varphi'' - 4\varphi = 0$$

1

Đó là một phương trình cấp hai tuyến tính hệ số không đổi. Nghiệm tổng quát của nó là

$$\varphi(r) = C_1e^{2r} + C_2e^{-2r} ,$$

C_1 , C_2 là các hằng số tùy ý.

b) Ta có

$$u(x,y) = \varphi(r) , r^2 = x^2 + y^2$$

Do đó

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(r) . \frac{x}{r} = x . \frac{\varphi'}{r}$$

Suy ra

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x . \frac{r\varphi'' - \varphi'}{r^2} . \frac{y}{r} = xy . \frac{r\varphi'' - \varphi'}{r^3}$$

Thế vào phương trình đã cho, ta được

$$\frac{r\varphi'' - \varphi'}{r^3} = \frac{1}{r^{\alpha}}$$

Hay

$$r\varphi'' - \varphi' = r^{3-\alpha}$$

Đó là một phương trình cấp hai của $\varphi(r)$, khuyết φ .

Đặt $p = \varphi'$, ta được

$$rp' - p = r^{3-\alpha} \qquad (*)$$

Đó là phương trình tuyến tính cấp một về p. Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là

$$p = Kr ,$$

K là hằng số tùy ý. Xem K là hàm số của r, thế biểu thức ấy vào phương trình (*) , ta được

$$K' = r^{1-\alpha}$$

1 có 2 trường hợp $\alpha \neq 2$ và $\alpha = 2$. Xét trường hợp $\alpha \neq 2$. Ta có

$$K = \frac{r^{2-\alpha}}{2-\alpha} + C_1 \ ,$$

C_1 là hằng số tùy ý. Do đó

$$p = \varphi' = \frac{r^{3-\alpha}}{2-\alpha} + C_1 r$$

Suy ra

$$\varphi(r) = \begin{cases} \dfrac{r^{4-\alpha}}{(2-\alpha)(4-\alpha)} + C_1\dfrac{r^2}{2} + C_2 & \text{nếu } \alpha \neq 4 \\[2ex] -\dfrac{1}{2}\ln r + C_1\dfrac{r^2}{2} + C_2 & \text{nếu } \alpha = 4 \end{cases}$$

Bây giờ ta xét trường hợp $\alpha = 2$. Khi đó

$$K' = r^{-1} \Rightarrow K = \ln r + C_1$$

C_1 là hằng số tùy ý. Do đó

$$p = \varphi' = r\ln r + C_1 r$$

Suy ra

$$\varphi = \int r\ln r dr + C_1\frac{r^2}{2} =$$

$$= \frac{r^2}{2}\ln r - \frac{r^2}{4} + C_1\frac{r^2}{2} + C_2$$

Tóm lại:

Nếu $\alpha \neq 2$, $\alpha \neq 4$, $\varphi(r) = \dfrac{r^{4-\alpha}}{(2-\alpha)(4-\alpha)} + Ar^2 + B$

Nếu $\alpha = 4$, $\varphi(r) = -\dfrac{1}{2}\ln r + Ar^2 + B$

Nếu $\alpha = 2$, $\varphi(r) = \dfrac{r^2}{2}\ln r + Ar^2 + B$.

23. Bằng cách đặt $\dfrac{y'}{y} = z$, ta có $y' = zy$, do đó

$$y'' = z'y + zy' = z'y + z^2y = y(z' + z^2)$$

Phương trình trở thành

$$F(x,z,z' + z^2) = 0$$

Đó là một phương trình cấp một đối với z. Nếu ta tìm được nghiệm tổng quát của nó là

$$z = \varphi(x,C_1)\ ,$$

thì vì $z = \dfrac{y'}{y}$, ta được

$$\ln|y| = \int \varphi(x,C_1)dx \quad \Rightarrow \quad y = C_2\, g\,(x,C_1).$$

a) Rõ ràng y = 0 là một nghiệm của phương trình

$$yy'' - y'^2 + yy' + x^2y^2 = 0$$

Bây giờ xét $y \neq 0$, chia hai vế của phương trình cho y^2 , ta được

$$\frac{y''}{y} - \left(\frac{y'}{y}\right)^2 + \frac{y'}{y} + x^2 = 0$$

Đặt $z = \dfrac{y'}{y}$, ta được $\dfrac{y''}{y} = z' + z^2$. Vậy phương trình trở thành

$$z' + z = -x^2$$

Đó là một phương trình tuyến tính cấp một đối với z. Nghiệm tổng quát của nó là

$$z = \frac{y'}{y} = -x^2 + 2x - 2 + C_1e^{-x}$$

Do đó

$$\ln\left|\frac{y}{C_2}\right| = -\frac{x^3}{3} + x^2 - 2x - C_1e^{-x}$$

Suy ra

$$y = C_2\, e^{-\frac{x^3}{3} + x^2 - 2x - C_1e^{-x}}\ .$$

b) Đặt y' = zy. Thế vào phương trình

$$x^2yy'' = (y - xy')^2$$

Ta được

$$xz' + 2z = \frac{1}{x}$$

Đó là một phương trình tuyến tính cấp một đối với z. Nghiệm tổng quát của nó là

$$z = \frac{y'}{y} = \frac{1}{x} + \frac{C_1}{x^2}$$

Do đó

$$\ln\left|\frac{y}{C_2}\right| = \ln|x| - \frac{C_1}{x} = \ln|x|e^{-\frac{C_1}{x}}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = C_2e^{xe^{-C_1/x}}.$$

c) Đặt y' = zy . Thế vào phương trình, ta được

$$z' = 0$$

Do đó

$$z = \frac{y'}{y} = C_1$$

Suy ra

$$\ln\left|\frac{y}{C_2}\right| = C_1x$$

Nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = C_2e^{C_1x}.$$

d) Đặt y' = zy. Thế vào phương trình, ta được phương trình Bernoully đối với z

$$xz' - z + 2xz^2 = 0$$

chia hai vế cho z^2, đặt $Z = z^{-1}$, ta được phương trình tuyến tính cấp một đối với Z.

$$xZ' + Z = 2x$$

Nghiệm tổng quát của nó là

$$Z = \frac{x^2 + C_1}{x}.$$

Vậy

$$z = \frac{y'}{y} = \frac{x}{x^2 + C_1}.$$

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được

$$\ln\left|\frac{y}{C_2}\right| = \int \frac{xdx}{x^2 + C_1} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2 + C_1\right|.$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = C_2\sqrt{\left|x^2 + C_1\right|}.$$

24. a) Giả sử chuỗi lũy thừa

$$y = a_o + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

có bán kính hội tụ R, là nghiệm của phương trình đã cho.

Ta có

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots$$

$$y'' = 2a_2 + 2.3a_3x + \ldots + (n-1)na_nx^{n-2} + \ldots$$

Thế vào phương trình, ta được đồng nhất thức

$$(-a_o + 2a_1) + (-a_1 + 12a_2)x + (-a_2 + 30a_3)x^2 + \ldots$$

$$\ldots + [-a_{n-1} + (2n-1)2na_n]x^{n-1} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}[-a_{n-1} + (2n-1)2na_n]x^{n-1} = 0.$$

Do đó ta có $\forall n \geq 1$

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{(2n-1).2n}.$$

Suy ra

$$a_1 = \frac{a_o}{1.2}$$

$$a_2 = \frac{a_1}{3.\ 4}$$

$$a_3 = \frac{a_2}{5.6}$$

. . . . . .

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{(2n-1).2n} \ .$$

Nhân các đẳng thức ấy với nhau từng vế một, ta được

$$a_n = \frac{a_0}{(2n)!} .$$

Vậy nghiệm phải tìm là:

$$y = a_0\left(1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!}+....+\frac{x^n}{(2n)!}+...\right) = a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!} = a_0 f(x),$$

a_o là hằng số tuỳ ý Dùng quy tắc D'Alembert đối với chuỗi lũy thừa $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!}$, ta thấy ngay rằng bán kính hội tụ của nó là $R = \infty$. Do đó f(x) xác định trên **R.**

Chú thích. Ta nhận xét rằng

$$\text{ch}t = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{(2n)!} .$$

Nếu $x \geq 0$, đặt $x = t^2$ với $t = \sqrt{x}$, ta được $f(x) = \text{ch}\sqrt{x}$.

Nếu $x < 0$, đặt $x = -t^2$ với $t = \sqrt{-x}$, ta được

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n)!} = \cos t = \cos\sqrt{-x} .$$

Như vậy

$$f(x) = \begin{cases} \text{ch}\sqrt{x} & \text{nếu } x \geq 0 \\ \cos\sqrt{-x} & \text{nếu } x < 0 \end{cases},$$

vì f(x) là tổng của một chuỗi luỹ thừa hội tụ trên R, nên f(x) khả vi vô hạn lần trên R, do đó nó cũng khả vi vô hạn lần tại x = 0. Bạn đọc có thể kiểm tra lại điều ấy.

Có thể tìm được, chẳng hạn bằng công thức Liouville nghiệm g(x) độc lập tuyến tính với f(x) của phương trình. Ta được

$$g(x) = \begin{cases} \operatorname{sh}\sqrt{x} & \text{nếu } x \geq 0 \\ \sin\sqrt{-x} & \text{nếu } x < 0 \end{cases}.$$

Nhưng hàm số g(x) lại không khai triển được thành chuỗi lũy thừa, vì nó không khả vi tại x = 0.

b) Giả sử

$$y = a_o + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots,\ |x| \leq R$$

là nghiệm của phương trình

$$2x(1-x)y' + (1-2x)y = 1.$$

Thế biểu thức của y vào phương trình, ta được đồng nhất thức

$$a_o + (3a_1 - 2a_o)x + (5a_2 - 4a_1)x^2 + \ldots + [(2n+1)a_n - 2na_{n-1}]x^n + \ldots$$

$$= a_o + \sum_{n=1}^{\infty}[(2n+1)a_n - 2na_{n-1}]x^n = 1.$$

Do đó $a_o = 1$

$$a_n = \frac{2n}{2n+1}a_{n-1},\quad \forall n \geq 1.$$

Suy ra $a_o = 1$

$$a_n = \frac{2.4.6....(2n)}{1.3.5.7....(2n+1)} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!},\quad \forall n \geq 1.$$

Nghiệm phải tìm là

$$y = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^n.$$

Bán kính hội tụ của nó là:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n} = 1.$$

Bây giờ xét tại 2 mút $x = \pm 1$. Tại $x = 1$, ta có chuỗi số

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{với} \quad a_n > \frac{2.4.6....(2n)}{2.4.6....(2n+2)} = \frac{1}{2n+2}.$$

Vậy chuỗi số phân kì

Tại $x = -1$, ta có chuỗi số đan dấu $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$.

Rõ ràng a_n giảm khi n tăng vì $0 < \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \dfrac{2n}{2n+1} < 1$. Ta sẽ chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Thật vậy

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)...\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right),$$

$$\ln a_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{2k+1}\right).$$

Vì $\ln\left(1 - \dfrac{1}{2n+1}\right) \sim \left(-\dfrac{1}{2n+1}\right) \sim \left(-\dfrac{1}{2n}\right)$ khi $n \to \infty$, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \dfrac{1}{2n+1}\right)$ phân kì. Chuỗi số ấy lại có toàn số hạng âm, vậy $\lim\limits_{n\to\infty} \ln a_n = -\infty$, do đó $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Theo định lí Leibniz chuỗi đan dấu $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ hội tụ. Vậy nghiệm khai triển được thành chuỗi lũy thừa của phương trình đã cho hội tụ với $-1 \le x < 1$.

Bạn đọc có thể kiểm tra lại, chẳng hạn bằng cách giải phương trình đã cho bằng phương pháp biến thiên hằng số, rằng nghiệm nhận được ở trên chính là:

1

$$y = \begin{cases} \dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} & \text{nếu } 0 \le x < 1 \\ \dfrac{\operatorname{argsh}\sqrt{-x}}{\sqrt{x(x-1)}} & \text{nếu } -1 \le x < 0\,. \end{cases}$$

c) Giả sử

$$y = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots, \ |x| < R$$

là nghiệm của phương trình

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

thỏa mãn điều kiện

$$y\big|_{x=0} = 0, \qquad y'\big|_{x=0} = 1.$$

Từ các điều kiện ấy, ta được $a_o = 0$, $a_1 = 1$. Thế y vào phương trình, ta được đồng nhất thức

$$2(a_o + a_2) + 6a_3 x + 4(3a_4 - a_2)x^2 + \ldots$$

$$\ldots + [(n+1)(n+2)a_{n+2} + (-n^2 - n + 2)a_n]x^n + \ldots = 0.$$

Do đó

$$a_2 = a_3 = a_4 = 0\,,$$

$$a_{n+2} = \frac{n^2 + n - 2}{(n+1)(n+2)}a_n = \frac{n-1}{n+1}a_n \qquad \forall n > 1.$$

Như vậy $a_1 = 1$, $a_n = 0$ $\forall n \ne 1$. Do đó $y_1 = x$ là nghiệm khai triển được thành chuỗi lũy thừa của phương trình thoả mãn các điều kiện đề ra. Để tìm nghiệm tổng quát của phương trình, ta chỉ việc tìm nghiệm y_2 độc lập tuyến tính với y_1. Đặt

$$y_2 = x.u(x).$$

Thế vào phương trình, ta được

$$x(1 - x^2)u'' + 2(1 - 2x^2)u' = 0.$$

Đó là một phương trình tuyến tính cấp 2 đối với u, khuyết u.

Đặt u' = p, ta được

$$x(1-x^2)p' + 2(1-2x^2)p = 0$$

phân li biến số, ta được

$$\frac{p'}{p} = 2\frac{2x^2-1}{x(1-x^2)} = 2\left(\frac{x}{1-x^2} - \frac{1}{x}\right).$$

Do đó

$$\ln\left|\frac{p}{K_1}\right| = -\ln\left|1-x^2\right| - \ln x^2 = \ln\frac{1}{x^2\left|1-x^2\right|}.$$

Vậy

$$p = u' = \frac{K_1}{x^2(1-x^2)}.$$

Suy ra

$$u = K_1\int\frac{dx}{x^2(1-x^2)} = K_1\int\left(\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{x^2}\right)dx =$$

$$= \frac{K_1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - \frac{K_1}{x} + K_2.$$

Chọn $K_1 = 1$, $K_2 = 0$, ta được

$$u = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - \frac{1}{x}.$$

Do đó

$$y_2 = xu = \frac{x}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - 1.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = C_1x + C_2\left(\frac{x}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - 1\right).$$

d) Giả sử chuỗi lũy thừa

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

Có bán kính hội tụ R là nghiệm của phương trình

$$xy'' - 2xy' + y = 0 .$$

Thế biểu thức của y vào phương trình, ta được đồng nhất thức

$$(a_o + 2a_2) + [(1 - 2)a_1 + 2.3a_3]x + [(1 - 2.2)a_2 + 3.4a_4]x^2 +$$

$$\ldots + [(1 - 2n)a_n + (n + 1)(n + 2)a_{n+2}]x^n + \ldots = 0 .$$

Do đó

$$a_2 = -\frac{1}{1.2}a_o , \qquad a_3 = \frac{1}{2.3}a_1 ,\ldots,$$

$$a_{n+2} = \frac{2n-1}{(n+1)(n+2)}a_n , \ \forall n \in \mathbf{N} .$$

Suy ra

$$a_2 = -\frac{1}{1.2}a_o , \qquad a_3 = \frac{1}{2.3}a_1 ,$$

$$a_4 = \frac{3}{3.4}a_2 , \qquad a_5 = \frac{5}{4.5}a_3 ,$$

$$a_6 = \frac{7}{5.6}a_4 , \qquad a_7 = \frac{9}{6.7}a_5 ,$$

. . . .

$$a_{2k} = \frac{4k-5}{(2k-1)2k}a_{2k-2} , \qquad a_{2k+1} = \frac{4k-3}{2k(2k+1)}a_{2k-1} .$$

Nhân hai vế các đẳng thức biểu diễn các hệ số a_2, a_4, ..., a_{2k} với nhau, ta được:

$$a_{2k} = -\frac{3.7.11.......(4k-5)}{(2k)!}a_o .$$

Nhân hai vế các đẳng thức biểu diễn các hệ số a_3, a_5, ..., a_{2k+1} với nhau, ta được

$$a_{2k+1} = \frac{1.5.9.......(4k-3)}{(2k+1)!} a_1 .$$

Do đó nghiệm khai triển được thành chuỗi lũy thừa của phương trình đã cho là:

$$y = a_o \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3.7.11.....(4n-5)}{(2n)!} x^{2n} \right) +$$

$$+ \ a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1.5.9......(4n-3)}{(2n+1)!} x^{2n+1} .$$

Dùng quy tắc D'Alembert, có thể dễ dàng thấy rằng các chuỗi lũy thừa

$$y_1(x) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3.7.11.....(4n-5)}{(2n)!} x^{2n} ,$$

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1.5.9......(4n-3)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

đều có bán kính hội tụ $R = \infty$.

Chú thích: Nếu ta đòi hỏi thêm rằng nghiệm của phương trình thỏa mãn điều kiện $y\big|_{x=0} = 0$, $y'\big|_{x=0} = 1$, thì từ các điều kiện ấy suy ra $a_o = y(0) = 0$, $a_1 = y'\big|_{x=0} = 1$. Nghiệm phải tìm là:

$$y = y_2(x).$$

25. a) Lấy đạo hàm hai vế phương trình sau của hệ, ta được

$$z'' = y' + z'.$$

Thay y' bởi vế phải của phương trình đầu, ta có

1

$$z'' = 4y - 2z + z'.$$

Nhưng $y = z' - z$, ta được

$$z'' = 4(z' - z) - 2z + z' = 5z' - 6z$$

Ta được phương trình cấp 2 tuyến tính hệ số không đổi

$$z'' - 5z' + 6z = 0$$

Nghiệm tổng quát của nó là

$$z = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$$

Do đó $$z' = 2C_1e^{2x} + 3C_2e^{3x}$$

Vậy $$y = z' - z = C_1e^{2x} + 2C_2e^{3x}.$$

b) Lấy đạo hàm hai vế phương trình sau của hệ, ta được

$$z'' = 2y' - z'$$

Thay y' bởi vế phải của phương trình đầu, ta có

$$z'' = 2(3y - 2z) - z' = 6y - 4z - z'$$

Từ phương trình sau của hệ, ta lại có $y = \frac{1}{2}(z' + z)$. Do đó

$$z'' = 3(z' + z) - 4z - z'$$

Hay $$z'' - 2z' + z = 0$$

Nghiệm tổng quát của nó là

$$z = (C_1 + C_2x)e^x$$

Suy ra $$y = \frac{1}{2}(z' + z) = (C_1 + C_2x)e^x + \frac{1}{2}C_2e^x.$$

Chú thích: Có thể giải bài này như sau: Trừ hai phương trình của hệ từng vế một, ta được

$$y' - z' = (y - z)' = y - z$$

Do đó $\quad y - z = C_1e^x$ hay $y = z + C_1e^x$

Thế vào phương trình sau của hệ, ta được phương trình cấp một

$$z' = z + C_1e^x$$

nghiệm tổng quát của nó là

$$z = (2C_1x + C_2)e^x$$

Suy ra $\quad y = z + C_1 e^x = (2C_1 x + C_2) e^x + C_1e^x$

c) Lấy đạo hàm hai vế phương trình đầu của hệ, ta được

$$y'' = y' + 8z' + e^x$$

Thay z' bởi vế phải của phương trình sau, ta có

$$y'' = y' + 8\,(2y + z + e^{-3x}) + e^x = y' + 16y + 8z + 8e^{-3x} + e^x$$

Nhưng từ phương trình đầu của hệ ta có $8z + e^x = y' - y$. Do đó

$$y'' = y' + 16y + y' - y + 8e^{-3x}$$

Hay $\quad y'' - 2y' - 15y = 8e^{-3x}$

Đó là một phương trình cấp hai tuyến tính có hệ số không đổi, không thuần nhất. Nghiệm của phương trình đặc trưng $k^2 - 2k - 15 = 0$ là $k = 5$ và $k = -3$. Do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là

$$y = C_1 e^{5x} + C_2e^{-3x}$$

Tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất dưới dạng $Y = Axe^{-3x}$. Thế vào phương trình ấy, ta được $A = -1$. Vậy $Y = -xe^{-3x}$. Nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là

1

$$y = C_1e^{5x} + C_2 e^{-3x} - xe^{-3x}$$

Do đó $\quad y' = 5C_1 e^{5x} - 3C_2 e^{-3x} + 3xe^{-3x} - e^{-3x}$

Vậy $\quad z = \dfrac{1}{8}(y' - y - e^{x}) =$

$$= \frac{C_1}{2}e^{5x} - \frac{C_2}{2}e^{-3x} + \frac{1}{2}xe^{-3x} - \frac{1}{8}e^{-3x} - \frac{1}{8}e^{x}.$$

d) Đạo hàm hai vế phương trình đầu của hệ, ta được

$$y'' = y' + z'$$

Thay z' bởi vế phải của phương trình sau, ta có

$$y'' = y' - 2y + 3z + 1$$

Nhưng từ phương trình đầu của hệ, ta có $z = y' - y + 3$, do đó

$$y'' = y' - 2y + 3(y' - y + 3) + 1$$

Suy ra $\quad y'' - 4y' + 5y = 10$

Đó là một phương trình cấp hai tuyến tính có hệ số không đổi. Nghiệm của phương trình đặc trưng $k^2 - 4k + 5 = 0$ là hai số phức liên hợp $k = 2 \pm i$; do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là

$$y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

Tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất dạng $Y = A$, thế vào phương trình ấy, ta được $A = 2$. Vậy

$$y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + 2$$

Vì $\quad z = y' - y + 3$, ta được

$$z = e^{2x}[(C_1 + C_2)\cos x + (C_2 - C_1)\sin x] + 1$$

1 Từ điều kiện $y\big|_{x=0} = 0$, $z\big|_{x=0} = 0$, ta được $C_1 = -2$, $C_2 = 1$

Vậy nghiệm phải tìm là

$$y = e^{2x}(-2\cos x + \sin x) + 2$$

$$z = e^{2x}(-\cos x + 3\sin x) + 1\ .$$

e) Có thể viết lại hệ phương trình đã cho như sau:

$$\begin{cases} dy - dx = -\dfrac{dx}{z} \\[2ex] \dfrac{dx}{y-x} = dz \end{cases}$$

Nhân hai phương trình ấy từng vế một, ta được

$$\frac{d(y-x)}{y-x} + \frac{dz}{z} = 0$$

Do đó

$$\ln|y-x| + \ln|z| = \ln|C_1|$$

hay $$(y-x)z = C_1$$

Do đó $z = \dfrac{C_1}{y-x}$. Thế vào phương trình đầu của hệ, ta được

$$\frac{d(y-x)}{y-x} + \frac{dx}{C_1} = 0$$

Suy ra

$$(y-x)e^{\frac{x}{C_1}} = C_2$$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ đã cho là

$$y = x + C_2 e^{-\frac{x}{C_1}}, \ z = \frac{C_1}{C_2} e^{\frac{x}{C_1}}\ .$$

f) viết lại hệ như sau

1

$$\frac{dx}{2y+3z} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

Từ phương trình sau, ta được

$$\ln|z| = \ln|y| + \ln|C_1|.$$

Hay $$z = C_1 y \qquad (*)$$

Từ hệ trên suy ra

$$\frac{dx}{2y+3z} = \frac{2dy+3dz}{2y+3z}.$$

Hay $$dx = 2dy + 3dz.$$

Suy ra $$2y + 3z - x = C_2. \qquad (**)$$

Thế các điều kiện $y\big|_{x=0} = 1$, $z\big|_{x=0} = 2$ vào (*) và (**), ta được $C_1 = 2$, $C_2 = 8$. Do đó nghiệm phải tìm là

$$y = \frac{x}{8} + 1, \qquad z = \frac{x}{4} + 2.$$

g) Viết lại hệ đã cho như sau:

$$y'yz = x, \qquad z'y^2 = x.$$

Suy ra

$$\frac{y'}{z'} = \frac{y}{z} \quad \text{hay} \quad \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z}.$$

Do đó $$\ln|z| = \ln|y| + \ln|C_1|.$$

Hay $$z = C_1 y.$$

Nhân phương trình đầu của hệ với 2 rồi cộng với phương trình sau, ta được:

$$2yy'z + z'y^2 = 3x \quad \text{hay} \quad (zy^2)' = 3x.$$

Do đó $$zy^2 - \frac{3}{2}x^2 = C_2.$$

1 Vậy tích phân tổng quát của hệ là:

$$\frac{z}{y} = C_1, \qquad zy^2 - \frac{3}{2}x^2 = C_2 .$$

h) Viết lại hệ đã cho dưới dạng

$$\frac{dx}{(z-y)^2} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{y} .$$

Từ phương trình sau suy ra

$$ydy - zdz = 0$$

Do đó $$y^2 - z^2 = C_1 .$$

Từ hệ trên, ta có

$$\frac{dx}{(z-y)^2} = \frac{dy-dz}{z-y} .$$

Hay

$$dx + (z-y)d(z-y) = 0 .$$

Do đó $$2x + (z-y)^2 = C_2 .$$

Vậy tích phân tổng quát của hệ là:

$$y^2 - z^2 = C_1, \qquad 2x + (z-y)^2 = C_2 .$$

i) Từ hệ đã cho,suy ra

$$\frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{z+x} = \frac{dz}{x+y} = \frac{d(x+y+z)}{2(x+y+z)} = -\frac{d(z-x)}{z-x} = -\frac{d(y-x)}{y-x} .$$

Từ phương trình cuối,suy ra

$$\ln|z-x| = \ln|y-x| + \ln|C_1| .$$

Hay $$\frac{z-x}{y-x} = C_1 .$$

Từ phương trình

$$\frac{1}{2}\frac{d(x+y+z)}{(x+y+z)} + \frac{d(y-x)}{y-x} = 0 ,$$

1

ta được

$$(y - x)^2(x + y + z) = C_2 .$$

Vậy tích phân tổng quát của hệ là:

$$\frac{z-x}{y-x} = C_1, \qquad (y - x)^2(x + y + z) = C_2 .$$

26. a) Hệ

$$\begin{cases} y' = z - y \\ z' = -y - 3z \end{cases}$$

là hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất có hệ số không đổi. Phương trình đặc trưng của nó là:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{hay} \quad \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 .$$

Nó có một nghiệm kép $\lambda = -2$. Ta tìm nghiệm của hệ có dạng

$$y = (ax + b)e^{-2x} ,$$

$$z = (cx + d)e^{-2x} .$$

Thế vào hệ, ta được các đồng nhất thức

$$\begin{cases} -2ax+(a-2b) = (c-a)x+d-b \\ -2cx+(c-2d) = -(a+3c)x - (b+3d) . \end{cases}$$

Do đó, ta được:

$$\begin{cases} -2a = c-a \\ a-2b = d-b \\ -2c = -(a+3c) \\ c-2d = -(b+3d) . \end{cases}$$

Suy ra $a = -c$, $a = b + d$. Đặt $a = C_1$, $b = C_2$, ta có $c = -C_1$, $d = C_1 - C_2$. Vậy nghiệm tổng quát của hệ là:

$$y = (C_1x + C_2)e^{-2x},$$

$$z = (-C_1x + C_1 - C_2)e^{-2x}.$$

b) Phương trình đặc trưng của hệ đã cho là:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Hay $$(4-\lambda)^2 + 9 = 0.$$

Nó có hai nghiệm phức liên hợp $\lambda = 4 \pm 3i$. Ứng với $\lambda = 4 + 3i$, ta có hệ phương trình để xác định vectơ riêng

$$\begin{cases} -3ip_1 - 3p_2 = 0 \\ 3p_1 - 3ip_2 = 0 \end{cases}.$$

Thực chất hệ đó chỉ gồm một phương trình là:

$$3ip_1 + 3p_2 = 0.$$

Ta có thể lấy $p_1 = 1$, $p_2 = -i$. Do đó ta có nghiệm

$$y_1 = e^{(4+3i)x} = e^{4x}(\cos 3x + i\sin 3x),$$

$$z_1 = -ie^{(4+3i)x} = e^{4x}(\sin 3x - i\cos 3x).$$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ là

$$y = e^{4x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x),$$

$$z = e^{4x}(C_1\sin 3x - C_2\cos 3x).$$

c) Phương trình đặc trưng của hệ đã cho là:

Hay
$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1 - \lambda)\ (\lambda + 2)^2 = 0$$

Nó có 1 nghiệm đơn $\lambda = 1$ và 1 nghiệm kép $\lambda = -2$.

Ta tìm nghiệm của hệ dưới dạng

$$x = a_1e^t + (b_1t + c_1)\, e^{-2t}$$

$$y = a_2e^t + (b_2t + c_2)\, e^{-2t}$$

$$z = a_3e^t + (b_3t + c_3)\, e^{-2t}$$

Ta có

$$x' = a_1e^t + (b_1 - 2c_1 - 2b_1t)\, e^{-2t}$$

$$y' = a_2e^t + (b_2 - 2c_2 - 2b_2t)\, e^{-2t}$$

$$z' = a_3e^t + (b_3 - 2c_3 - 2b_3t)\, e^{-2t}$$

Thế vào hệ phương trình, ta được các đồng nhất thức

$$a_1e^t + (b_1 - 2c_1 - 2b_1t)\, e^{-2t} =$$

$$= (-a_1 + a_2 + a_3)\, e^t + \Big[-c_1 + c_2 + c_3 + (-b_1 + b_2 + b_3)\, t \Big]\, e^{-2t},$$

$$a_2e^t + (h_2 - 2c_2 - 2b_2t)\, e^{-2t} =$$

$$= (a_1 - a_2 + a_3)\, e^t + [c_1 - c_2 + c_3 + (b_1 - b_2 + b_3)\, t\,]\, e^{-2t}$$

$$a_3e^t + (b_3 - 2c_3 - 2b_3t)\, e^{-2t} =$$

$$= (a_1 + a_2 - a_3)\, e^t + [c_1 + c_2 - c_3 + (b_1 + b_2 - b_3)\, t\,]\, e^{-2t}.$$

Do đó

$$\begin{cases} a_1 = -a_1 + a_2 + a_3 \\ a_2 = a_1 - a_2 + a_3 \\ a_3 = a_1 + a_2 - a_3 \\ b_1 - 2c_1 = -c_1 + c_2 + c_3 \\ b_2 - 2c_2 = c_1 - c_2 + c_3 \\ b_3 - 2c_3 = c_1 + c_2 - c_3 \\ -2b_1 = -b_1 + b_2 + b_3 \\ -2b_2 = b_1 - b_2 + b_3 \\ -2b_3 = b_1 + b_2 - b_3 \end{cases}$$

Hệ ấy tương đương với

$$\begin{cases} -2a_1 + a_2 + a_3 = 0 & (1) \\ a_1 - 2a_2 + a_3 = 0 & (2) \\ a_1 + a_2 - 2a_3 = 0 & (3) \\ b_1 = c_1 + c_2 + c_3 & (4) \\ b_2 = c_1 + c_2 + c_3 & (5) \\ b_3 = c_1 + c_2 + c_3 & (6) \\ b_1 + b_2 + b_3 = 0 & (7) \end{cases}$$

Từ các đẳng thức (4) - (7) suy ra

$$c_1 + c_2 + c_3 = b_1 = b_2 = b_3 = 0$$

trừ hai đẳng thức (2), (1) từng vế một, ta được

$$3a_1 - 3a_2 = 0 \text{ hay } a_1 = a_2$$

Thế vào đẳng thức (3), ta được

$$a_1 = a_2 = a_3$$

cho $a_1 = a_2 = a_3 = C_1$, $c_2 = C_2$, $c_3 = C_3$, ta có

$$C_1 = -(C_2 + C_3)$$

Do đó nghiệm tổng quát của hệ phương trình đã cho là

$$x = C_1e^t - (C_2+C_3)e^{-2t}$$

$$y = C_1e^t + C_2e^{-2t}$$

$$z = C_1e^t + C_3e^{-2t}$$

d) Phương trình đặc trưng của hệ phương trình đã cho là

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Hay

$$(\lambda-2)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) = 0$$

Nó có một nghiệm thực $\lambda = 2$ và hai nghiệm phức liên hợp $\lambda = 1 \pm i$.

Ứng với $\lambda = 2$, ta được hệ phương trình để xác định vectơ riêng.

$$\begin{cases} -p_1 + p_2 = 0 \\ -p_1 + p_3 = 0 \\ p_1 - p_3 = 0 \end{cases}$$

Suy ra $p_1 = p_2 = p_3$. Có thể cho $p_1 = p_2 = p_3 = C_1$

ứng với $\lambda = 1+ i$, ta có hệ phương trình để xác định vectơ riêng

$$\begin{cases} -ip_1 + p_2 = 0 \\ -p_1 + (1-i)p_2 + p_3 = 0 \\ p_1 - ip_3 = 0 \end{cases}$$

Suy ra $ip_1 = p_2 = -p_3$. Ta lấy $p_1 = 1$, $p_2 = i$, $p_3 = -i$

Ta có nghiệm

$$x_2 = 1e^{(1+i)t} = e^t(\cos t + i\sin t)$$

$$y_2 = ie^{(1+i)t} = ie^t(\cos t + i\sin t) = e^t(-\sin t + i\cos t)$$

$$z_2 = -ie^{(1+i)t} = -ie^t(\cos t + i\sin t) = e^t(\sin t - i\cos t)$$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ đã cho là

$$x = C_1e^{2t} + C_2e^t\cos t + C_3e^t\sin t$$

$$y = C_1e^{2t} - C_2e^t\sin t + C_3e^t\cos t$$

$$z = C_1e^{2t} + C_2e^t\sin t - C_3e^t\cos t$$

MỘT SỐ BÀI TOÁN TỔNG HỢP

BÀI TOÁN 1

Cho hàm số f(x,y) xác định trên $\mathbf{R}^2$, có các đạo hàm riêng đến cấp hai liên tục. Thực hiện phép đổi biến số

$$\begin{cases} x + ay = u \\ x + by = v \end{cases} \qquad (1)$$

trong đó a, b là các hằng số. Đặt

$$f(x, y) = f(x\,(u, v), y\,(u, v)) = F\,(u, v)\,.$$

1. Với điều kiện nào đối với a, b, phép biến đổi trên là một song ánh. Tính các đạo hàm riêng cấp 1 và cấp 2 của f theo các đạo hàm riêng của F. Nếu hàm số f có đạo hàm riêng mọi cấp, có thể mở rộng các kết quả trên như thế nào?

2. Nếu $a = 1$, $b = -1$, hãy tìm hàm số f (x, y) sao cho

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \qquad (*)$$

3. Xét phương trình

$$A\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2B\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + C\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \qquad (**)$$

trong đó A, B, C là những hằng số. Chứng minh rằng với một số điều kiện đối với A, B, C, có thể chọn các hằng số a, b sao cho phép biến đổi trên đưa phương trình (**) về dạng

1

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0\,.$$

Từ đó suy ra nghiệm của phương trình (**)

BÀI TOÁN 2

Cho phương trình vi phân

$$y'' + 2y' + 2y = e^{-x}\cos \alpha x,\ \alpha \text{ là tham số .}$$

1. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình

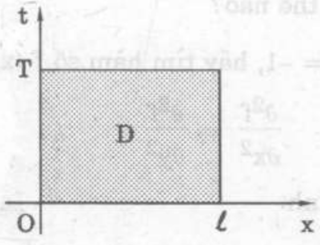
2. Tìm nghiệm riêng $y_o(x, \alpha)$ của phương trình thỏa mãn các điều kiện

$$y_0(0, \alpha) = 1\ ,\ y'_0(0, \alpha) = -2$$

Chứng minh rằng hàm số $\alpha \in \mathbf{R} \mapsto y_o(x, \alpha) \in \mathbf{R}$ là liên tục.

BÀI TOÁN 3

Giả sử $D = \{ (x, t) \in \mathbf{R}^2 : 0 < x < \ell, 0 < t < T \}$ (hình 81)



Hình 81

vấn đề đặt ra là tìm hàm số u (x, t) thỏa mãn phương trình

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \text{ trong miền D,} \qquad (1)$$

thỏa mãn các điều kiện

1 $$u\Big|_{x=0} = 0,\ u\Big|_{x=l} = 0, \qquad (2)$$

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x), \tag{3}$$

trong đó $\varphi(x)$ là một hàm số cho trước, khả vi liên tục trên đoạn $[0, l]$ và thỏa mãn điều kiện.

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0 \tag{4}$$

1. Chứng minh rằng hàm số $u(x, t)$ có dạng

$$u(x, t) = X(x).\ T(t)$$

thỏa mãn phương trình (1) trong D và điều kiện (2) là những hàm số có dạng

$$u(x, t) = u_n(x,t) = c_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi}{l}x, \qquad n \in \mathbf{N}^*$$

trong đó c_n là các hằng số tùy ý.

2. Xác định các hệ số c_n sao cho chuỗi hàm số

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi}{l}x$$

là nghiệm của phương trình (1) trong D, thỏa mãn các điều kiện (2), (3) .

BÀI TOÁN 4

Cho tích phân suy rộng

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t^y)}{t^y(1+xt)}\,dt$$

trong đó $x \geq 0$, $y > 0$ là hai tham số

1. a) Giả sử $x > 0$, chứng minh rằng tích phân hội tụ

b) Giả sử $x = 0$, chứng minh rằng tích phân hội tụ nếu $y > \frac{1}{2}$.

2. Với $y > 0$, xét hàm số $x \mapsto f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t^y)}{t^y(1 + xt)} dt$

a) Chứng minh rằng f(x) liên tục trên khoảng $(0, +\infty)$

b) Chứng minh rằng f(x) khả vi trên khoảng $(0, +\infty)$

c) Tính đạo hàm cấp k của f(x)

3. Với $x \geq 0$, xét hàm số $y \mapsto g(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t^y)}{t^y(1 + xt)} dt$

a) chứng minh rằng g (y) liên tục trên khoảng $(0, +\infty)$ nếu $x > 0$.

b) Chứng minh rằng g(y) liên tục trên khoảng $(\frac{1}{2}, +\infty)$ nếu $x = 0$.

4. Với $x > 0$, xét hàm số $x \rightarrow h(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t^x)}{t^x(1 + xt)} dt$

a) Chứng minh rằng h(x) liên tục trên khoảng $(0, +\infty)$

b) Chứng minh rằng $h(x) \rightarrow 0$ khi $x \rightarrow +\infty$

c) Xét sự hội tụ của chuỗi số có số hạng tổng quát là $v_n = \int_0^{+\infty} \frac{|\sin(t^n)|}{t^n(1 + nt)} dt$

BÀI TOÁN 5

Xét phương trình vi phân

$$x^2y'' + (a + 1)xy' + (x^2 + \frac{1}{4})y = 0 \qquad (1)$$

trong đó $a \geq 1$, $x \in R_+^*$

1. Chứng minh rằng phương trình (1) có ít nhất một nghiệm có dạng $y = x^\alpha f(x)$, trong đó α là một hằng số, f(x) là tổng của một chuỗi
1 lũy thừa có bán kính hội tụ bằng ∞, $f(0) \neq 0$.

2. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình (1) khi $a = 2$.

BÀI TOÁN 6

1. Tìm những nghiệm xác định trên $\mathbf{R}$ của phương trình

$$x^2y'' - 2y = 3x^2 . \qquad (1)$$

2. Cho phương trình vi phân

$$y'\ln x + 2xy^2 - \frac{y}{x} = 0, x \in \mathbf{R}_+^* \qquad (2)$$

a) Giải phương trình (2) ;

b) Cho $y_0 \in \mathbf{R}$. Xét sự tồn tại nghiệm xác định trên $\mathbf{R}_+^*$ của phương trình (2) thỏa mãn điều kiện

$$y(1) = y_0 .$$

LỜI GIẢI

BÀI TOÁN 1:

1) Phép đổi biến số (1) là một song ánh khi và chỉ khi hệ phương trình (1) có nghiệm duy nhất $\forall(u, v) \in R^2$, tức là khi và chỉ khi định thức của hệ ấy khác 0,

$$\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{vmatrix} = b - a \neq 0 .$$

Ta cũng nhận xét rằng nếu a = b thì u = v, vậy hai biến số mới u, v không phải là biến số độc lập.

Ta có

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v} ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = a\frac{\partial F}{\partial u} + b\frac{\partial F}{\partial v} .$$

Do đó

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} .$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial F}{\partial u} + b\frac{\partial F}{\partial v}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial u}\left(a\frac{\partial F}{\partial u} + b\frac{\partial F}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(a\frac{\partial F}{\partial u} + b\frac{\partial F}{\partial v}\right)$$

$$= a\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + (a+b)\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + b\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} .$$

1

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(a\frac{\partial F}{\partial u} + b\,\frac{\partial F}{\partial v}\right) =$$

$$= a\frac{\partial}{\partial u}\left(a\frac{\partial F}{\partial u} + b\frac{\partial F}{\partial v}\right) + b\frac{\partial}{\partial v}\left(a\frac{\partial F}{\partial u} + b\frac{\partial F}{\partial v}\right) =$$

$$= a^2\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2ab\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v} + b^2\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$$

Nếu dùng kí hiệu tượng trưng, ta có

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)^2 F$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)\left(a\frac{\partial}{\partial u} + b\frac{\partial}{\partial v}\right) F$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left(a\frac{\partial}{\partial u} + b\frac{\partial}{\partial v}\right)^2 F$$

Nếu f(x, y) có đạo hàm riêng mọi cấp, có thể chứng minh bằng quy nạp rằng ta có

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^\alpha\,\partial y^\beta} = \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)^\alpha \left(a\frac{\partial}{\partial u} + b\frac{\partial}{\partial v}\right)^\beta f \quad ,$$

trong đó α và β là hai số nguyên dương có tổng bằng n.

2) Nếu a = 1, b = –1, ta có u = x + y, v = x – y

Phương trình $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

trở thành $\left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)^2 F = \left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}\right)^2 F,$

hay $$\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0$$

Hàm số F(u, v) thỏa mãn phương trình ấy là

$$F(u,v) = \varphi(u) + \psi(v),$$

trong đó φ và ψ là những hàm số tùy ý khả vi liên tục hai lần. Vậy hàm số f(x, y) thỏa mãn phương trình (*) là

$$f(x, y) = \varphi(x + y) + \psi(x - y) .$$

3) Phép đổi biến số (1) biến phương trình (**) thành

$$A\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial u\, \partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\right) + 2B\left(a\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + (a+b)\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + b\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\right) +$$

$$+ C\left(a^2\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2ab\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + b^2\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\right) = 0$$

hay

$$(A + 2Ba + Ca^2)\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2[A + B(a + b) + Cab]\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u} +$$

$$+ (A + 2Bb + Cb^2)\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = 0$$

Ta có thể chọn hai số a, b phân biệt sao cho

$$Ca^2 + 2Ba + A = 0$$

$$Cb^2 + 2Bb + A = 0$$

nếu điều kiện $B^2 - AC > 0$ được thỏa mãn. Thật vậy, khi đó chỉ cần chọn a, b là 2 nghiệm phân biệt của phương trình bậc hai

$$Ct^2 + 2Bt + A = 0 \qquad (***)$$

Khi ấy ta có

$$(**) \Leftrightarrow k \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0$$

Nếu như điều kiện sau được thỏa mãn:

$$k = A + B(a + b) + Cab \neq 0$$

Nhưng ta có theo định lý Viête

$$a + b = -\frac{2B}{C}, \quad ab = \frac{A}{C}$$

Do đó

$$k = A + B\left(-\frac{2B}{C}\right) + C.\frac{A}{C} = \frac{2(AC - B^2)}{C} \neq 0 \text{ nếu } C \neq 0$$

Vậy nếu $B^2 - AC > 0$ và $C \neq 0$ thì

$$(**) \Leftrightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0$$

Hàm số $F(u,v)$ thỏa mãn phương trình $\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0$ là

$$F(u,v) = \varphi(u) + \psi(v),$$

do đó hàm số $f(x,y)$ thỏa mãn phương trình (**) là

$$f(x,y) = \varphi(x + ay) + \psi(x + by),$$

trong đó a, b là hai nghiệm của phương trình (***), φ, ψ là hai hàm số tùy ý khả vi liên tục hai lần.

Nếu $B^2 - AC > 0$, $C = 0$, $A \neq 0$, ta chỉ việc thực hiện phép đổi biến số

$$\begin{cases} y + \alpha x = u \\ y + \beta x = v \end{cases}$$

1

trong đó α, β là hai nghiệm phân biệt của phương trình bậc hai.

$$At^2 + 2Bt = 0,$$

tức là $\alpha = 0$, $\beta = -\dfrac{2B}{A}$. Trong trường hợp này, ta có

$$(**) \Leftrightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0$$

Do đó ta được

$$f(x, y) = \varphi(y) + \psi(y + \beta x)$$

Nếu $C = A = 0$, $B \neq 0$, thì đương nhiên nghiệm của phương trình (**) là

$$f(x,y) = \varphi(x) + \psi(y)$$

Trong các trường hợp khác, không thể giải phương trình (**) bằng các phép đổi biến số nêu trên.

BÀI TOÁN 2.

1. Đặt $y = e^{-x}z$. Ta có

$$y' = e^{-x}z' - e^{-x}z$$

$$y'' = e^{-x}z'' - 2e^{-x}z' + e^{-x}z$$

Thế vào phương trình đã cho, ta được

$$z'' + z = \cos \alpha x \qquad (*)$$

Đó là một phương trình vi phân cấp hai tuyến tính với hệ số không đổi. Phương trình đặc trưng của nó là

$$k^2 + 1 = 0,$$

phương trình ấy có hai nghiệm phức liên hợp $k = \pm i$. Vậy nghiệm
1 tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

Nếu $\alpha \neq \pm 1$, thì vì $\pm i\alpha$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng, ta tìm một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất (*) có dạng

$$Z = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x$$

Ta có
$$Z' = -A\alpha\sin\alpha x + B\alpha\cos\alpha x$$

$$Z'' = -A\alpha^2\cos\alpha x - B\alpha^2\sin\alpha x$$

thế vào phương trình (*), ta được đồng nhất thức

$$(1-\alpha^2)A\cos\alpha x + (1-\alpha^2)B\sin\alpha x = \cos\alpha x$$

Do đó
$$B = 0, \quad A = \frac{1}{1-\alpha^2}$$

Vậy
$$Z = \frac{1}{1-\alpha^2}\cos\alpha x$$

Nếu $\alpha = \pm 1$ thì $\pm i\alpha$ là nghiệm của phương trình đặc trưng, ta tìm một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất (*) có dạng

$$\overline{Z} = x(\overline{A}\cos x + \overline{B}\sin x)$$

Ta có

$$\overline{Z'} = x(-\overline{A}\sin x + \overline{B}\cos x) + \overline{A}\cos x + \overline{B}\sin x$$

$$\overline{Z''} = x(-\overline{A}\cos x - \overline{B}\sin x) - 2\overline{A}\sin x + 2\overline{B}\cos x$$

Thế vào phương trình (*), ta được đồng nhất thức

$$-2\overline{A}\sin x + 2\overline{B}\cos x = \cos x$$

Do đó
$$\overline{A} = 0, \quad \overline{B} = \frac{1}{2}$$

1 Vậy
$$\overline{Z} = \frac{1}{2}x\sin x$$

Tóm lại nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = \begin{cases} e^{-x}\left(C_1\cos x + C_2\sin x + \dfrac{1}{1-\alpha^2}\cos\alpha x\right) & \text{nếu } \alpha \neq \pm 1 \\[2ex] e^{-x}\left(C_1\cos x + C_2\sin x + \dfrac{1}{2}x\sin x\right) & \text{nếu } \alpha = \pm 1 \end{cases}.$$

2. Nếu $\alpha \neq \pm 1$, ta có

$$y = e^{-x}\left(C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{1-\alpha^2}\cos\alpha x\right)$$

Do đó

$$y' = e^{-x}\left(-C_1\sin x + C_2\cos x - \frac{\alpha}{1-\alpha^2}\sin\alpha x\right) -$$

$$- e^{-x}\left(C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{1-\alpha^2}\cos\alpha x\right)$$

Thế các điều kiện $y\big|_{x=0} = 1$, $y'\big|_{x=0} = -2$ vào các biểu thức trên, ta được

$$\begin{cases} C_1 + \dfrac{1}{1-\alpha^2} = 1 \\[2ex] C_2 - C_1 - \dfrac{1}{1-\alpha^2} = -2 \end{cases}$$

Giải hệ ấy, ta được

$$C_1 = -\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}, \qquad C_2 = -1$$

Vậy

$$y_o(x,\alpha) = e^{-x}\left(-\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\cos x - \sin x + \frac{1}{1-\alpha^2}\cos\alpha x\right) \text{ nếu } \alpha \neq \pm 1$$

Nếu $\alpha = \pm 1$, ta có

1

$$y = e^{-x}\left(C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{2}x\sin x\right)$$

Do đó $\quad y' = e^{-x}(-C_1\sin x + C_2\cos x + \frac{1}{2}x\cos x + \frac{1}{2}\sin x) -$

$$- e^{-x}(C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{2}x\sin x)$$

Từ các điều kiện $y\Big|_{x=0} = 1$, $y'\Big|_{x=0} = -2$, ta được

$$\begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 - C_1 = -2 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 1,\ C_2 = -1$$

Vậy

$$y_o(x, \alpha) = e^{-x}(\cos x - \sin x + \frac{1}{2}x\sin x) \qquad \text{nếu } \alpha = \pm 1$$

Bây giờ ta xét hàm số

$$\alpha \in \mathbf{R} \mapsto y_o(x,\alpha) =$$

$$= \begin{cases} e^{-x}\left(-\dfrac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\cos\alpha x - \sin x + \dfrac{1}{1-\alpha^2}\cos\alpha x\right) & \text{nếu } \alpha \neq \pm 1 \\ e^{-x}(\cos x - \sin x + \dfrac{1}{2}x\sin x) & \text{nếu } \alpha = \pm 1 \end{cases}$$

Rõ ràng hàm số đó liên tục với mọi $\alpha \neq \pm 1$. Chỉ còn phải khảo sát tính liên tục của hàm số đó tại $\alpha = 1$. Trường hợp $\alpha = -1$ được quyvề trường hợp $\alpha = 1$, vì hàm số $\alpha \mapsto y_o(x,\alpha)$ là chẵn. Theo quytắc L'Hospital, ta có

$$\lim_{\alpha \to 1} \frac{\cos\alpha x - \alpha^2\cos x}{1-\alpha^2} = \lim_{\alpha \to 1} \frac{-x\sin\alpha x - 2\alpha\cos x}{-2\alpha} =$$

$$= \frac{x}{2}\sin x + \cos x$$

Do đó

$$\lim_{\alpha \to 1} y_o(x,\alpha) = y_o(x,1)$$

Vậy hàm số $\alpha \mapsto y_o(x, \alpha)$ liên tục tại mọi $\alpha \in \mathbf{R}$.

Một cách tổng quát, người ta chứng minh được rằng nếu các hệ số và vế phải của một phương trình vi phân tuyến tính là những hàm số liên tục của tham số α thì nghiệm riêng y_o (x, α) của phương trình ấy ứng với các điều kiện ban đầu cho trước không phụ thuộc vào α là một hàm số liên tục của α.

BÀI TOÁN 3.

1. Đương nhiên hàm $u(x, t) \equiv 0$ thỏa mãn phương trình (1) và điều kiện (2). Bây giờ ta tìm những hàm số có dạng

$$u(x, t) = X(x).\,T(t) \tag{*}$$

không đồng nhất không, thỏa mãn phương trình (1) và điều kiện (2). Thế biểu thức (*) vào phương trình (1), ta được

$$X''(x)\,.\,T(t) = X(x).\,T'(t)$$

Hay

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)}$$

Vế trái của đẳng thức ấy chỉ phụ thuộc x, vế phải chỉ phụ thuộc t; hai vế luôn bằng nhau, hai biến số x, t lại độc lập với nhau, điều đó xảy ra khi và chỉ khi hai vế cùng bằng một hằng số λ. Do đó

$$X'' - \lambda X = 0 \tag{**}$$

$$T' - \lambda T = 0 \tag{***}$$

Từ các điều kiện (2), ta suy ra

$$X(0) = X(l) = 0 \tag{****}$$

Vậy ta tìm những hàm số X(x) không đồng nhất không, thỏa mãn
1 phương trình (**) và điều kiện (****). Phương trình (**) là phương

trình vi phân cấp 2 tuyến tính có hệ số không đổi. Phương trình đặc trưng của nó là

$$r^2 - \lambda = 0 .$$

Giả sử $\lambda > 0$. Đặt $\lambda = \alpha^2$. Phương trình đặc trưng có hai nghiệm thực phân biệt $r = \pm\alpha$. Nghiệm tổng quát của phương trình (**) là

$$X = C_1e^{\alpha x} + C_2e^{-\alpha x} .$$

Từ các điều kiện (****), ta được

$$\begin{cases} C_1+C_2=0 \\ C_1e^{\alpha l}+C_2e^{-\alpha l}=0 \end{cases} .$$

Định thức của hệ phương trình ấy là:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\alpha l} & e^{-\alpha l} \end{vmatrix} = e^{-\alpha l} - e^{\alpha l} \neq 0 .$$

Do đó $C_1 = C_2 = 0$, suy ra $X(x) \equiv 0$, nghiệm này không thích hợp.

Giả sử $\lambda = 0$. Nghiệm tổng quát của phương trình (**) là

$$X = C_1x + C_2 .$$

Thế các điều kiện (****) vào, ta được $C_1 = C_2 = 0$, suy ra $X(x) \equiv 0$, nghiệm này cũng không thích hợp. Xét trường hợp $\lambda < 0$. Đặt $\lambda = -\alpha^2$. Phương trình đặc trưng có hai nghiệm phức liên hợp $r = \pm i\alpha$. Do đó nghiệm tổng quát của phương trình (**) là:

$$X = C_1\cos\alpha x + C_2\sin\alpha x$$

Điều kiện $X(0) = 0$ cho ta $C_1 = 0$, còn điều kiện $X(l) = 0$ cho ta

$$\sin\alpha l = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha l = n\pi,\ n \in \mathbf{Z}$$

Tóm lại nếu $\lambda = \lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$, $n \in \mathbf{N}^*$, phương trình (**) với các điều kiện (****) có nghiệm không tầm thường

$$X_n(x) = a_n \sin\frac{n\pi}{l}x\,.$$

Với $\lambda = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$, phương trình vi phân tuyến tính cấp một

$$T' - \lambda T = 0$$

có nghiệm tổng quát là:

$$T_n(t) = b_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}\,.$$

Như vậy, những hàm số có dạng (*) thỏa mãn phương trình (1) và điều kiện (2) là:

$$u_n(x,\,t) = c_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}.\sin\frac{n\pi}{l}x,\quad n \in \mathbf{N}$$

trong đó $\qquad c_n = a_n b_n$.

2) Ta lập chuỗi hàm số

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}.\sin\frac{n\pi}{l}x \tag{4}$$

Giả sử chuỗi hàm số ấy hội tụ đều trong miền $\overline{D} = \{(x,\,t)\colon 0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T\}$. Khi ấy tổng $u(x,\,t)$ của chuỗi ấy liên tục trong miền $\overline{D}$. Thế điều kiện (3) vào, ta được

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi}{l}x \tag{5}$$

Đó là công thức khai triển Fourier của hàm số $\varphi(x)$ theo họ các hàm sin. Theo giả thiết, hàm số $\varphi(x)$ thỏa mãn các điều kiện của định lý Dirichlet, vậy ta có

$$c_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \tag{6}$$

Ta sẽ chứng minh rằng chuỗi hàm số (4), trong đó c_n được xác định bởi công thức (6), hội tụ đều trong miền $\overline{D}$, có thể lấy đạo hàm từng số hạng chuỗi hàm số đó một lần theo t, hai lần theo x trong miền D.

Thật vậy, vì hàm số $\varphi(x)$ khả vi liên tục trên [0, l], thoả mãn điều kiện $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, nên chuỗi Fourier của nó hội tụ tuyệt đối và đều trên [0, l] tới $\varphi(x)$.

Ta có $\forall(x,t) \in \overline{D}, \forall n \in N^*$

$$0 \le e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} \le 1$$

Do đó

$$0 \le \left| c_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi}{l}x \right| \le |c_n| \left|\sin\frac{n\pi}{l}x\right|$$

chuỗi hàm số có số hạng tổng quát là $|c_n|\left|\sin\frac{n\pi}{l}x\right|$ hội tụ đều trên $[0,l]$, vậy chuỗi hàm số có số hạng tổng quát là $u_n(x,t)$ hội tụ đều trên $\overline{D}$, do đó tổng $u(x,t)$ của nó là một hàm số liên tục trên $\overline{D}$.

Để chứng minh rằng có thể lấy đạo hàm từng số hạng chuỗi hàm số (4) theo t trong miền D, ta chỉ việc chứng minh rằng chuỗi hàm số mà số hạng tổng quát là

$$-c_n\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi}{l}x$$

hội tụ đều trong miền $\{\ (x,t): 0 \le x \le l, 0 < t_o \le t \le T\ \}, \forall t_o > 0$

Vì $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} = 0$, nên ta có với n đủ lớn

$$\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} \le 1$$

Với những n ấy, ta có

$$\left|-c_n\left(\frac{n\pi}{1}\right)^2 e^{-\left(\frac{n\pi}{1}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi}{1}x\right| \le |c_n|\left|\sin\frac{n\pi}{1}x\right|$$

Do đó chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} -c_n\left(\frac{n\pi}{1}\right)^2 \sin\frac{n\pi x}{1}$ hội tụ đều trong D. Tương tự như vậy, ta chứng minh được rằng có thể lấy đạo hàm từng số hạng chuỗi hàm số (4) hai lần đối với x trong D.

Vì các hàm số $u_n(x,t)$ đều thoả mãn phương trình (1) và điều kiện (2), nên chuỗi hàm số $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$ cũng thoả mãn phương trình (1) và điều kiện (2). Nó cũng thoả mãn điều kiện (3) vì các hệ số c_n được xác định bởi điều kiện (6)

BÀI TOÁN 4.

1. a) Ta có

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t^y)}{t^y(1+xt)}dt = \int_0^1\frac{\sin(t^y)}{t^y(1+xt)}dt + \int_1^{+\infty}\frac{\sin(t^y)}{t^y(1+xt)}dt$$

Trong câu này, $x > 0$, $y > 0$. Tích phân thứ nhất ở vế phải hội tụ vì khi $t \to 0$, hàm số dưới dấu tích phân dần tới 1. Tích phân thứ hai ở vế phải hội tụ tuyệt đối vì ta có :

$$\frac{\sin(t^y)}{t^y(1+xt)} \le \frac{1}{xt^{y+1}}$$

mà tích phân $\int_1^{+\infty}\frac{1}{xt^{y+1}}dt$ hội tụ $y + 1 > 1$. Vậy tích phân

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t^y)}{t^y(1+xt)}dt \text{ hội tụ}$$

b) Nếu $x = 0$, ta xét tích phân

1

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t^y)}{t^y}dt = \int_0^1\frac{\sin(t^y)}{t^y}dt + \int_1^{+\infty}\frac{\sin(t^y)}{t^y}dt$$

Tích phân thứ nhất ở vế phải hội tụ vì hàm số dưới dấu tích phân dần tới 1 khi $t \to 0$. Nếu $y > 1$ thì tích phân thứ hai của vế phải hội tụ tuyệt đối vì ta có

$$\left|\frac{\sin(t^y)}{t^y}\right| \le \frac{1}{t^y}.$$

Ta sẽ chứng minh rằng nó cũng hội tụ nếu $\frac{1}{2} < y \le 1$.

Thật vậy, ta đổi biến số $t^y = u$, do đó

$$t = u^{\frac{1}{y}}, \qquad dt = \frac{1}{y} u^{\frac{1}{y}-1} du.$$

Vậy

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^y)}{t^y} dt = \frac{1}{y} \int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^\beta} du = \frac{1}{y} \int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^\beta} du,$$

trong đó $\beta = 2 - \frac{1}{y} > 0$. Bằng tích phân từng phần, ta được

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u^\beta} du = \lim_{U \to +\infty} \int_1^U \frac{\sin u}{u^\beta} du =$$

$$= \lim_{U \to +\infty} \left[-\frac{\cos u}{u^\beta}\Big|_1^U - \beta \int_1^U \frac{\cos u}{u^{\beta+1}} du \right]$$

$$= \cos 1 - \beta \int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u^{\beta+1}} du.$$

Tích phân ở vế phải của đẳng thức này hội tụ vì ta có

$$\left|\frac{\cos u}{u^{\beta+1}}\right| \le \frac{1}{u^{\beta+1}} \text{ với } \beta + 1 > 1.$$

Tóm lại $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t^y)}{t^y} dt$ hội tụ nếu $y > \frac{1}{2}$.

2. Với $y > 0$ cố định, xét hàm số

$$x \in \mathbf{R}_+^* \mapsto f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t^y)}{t^y(1+xt)} dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{\sin(t^y)}{t^y(1+xt)}dt + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^y)}{t^y(1+xt)}dt.$$

a) Tích phân thứ nhất của vế phải là một hàm số liên tục của x trên $\mathbf{R}_+^*$, vì hàm số dưới dấu tích phân là liên tục đối với (x, t) $\in \mathbf{R}_+^* \times [0, 1]$. Bây giờ ta xét tích phân thứ hai. Nếu $x_o > 0$, ta có $\forall x \geq x_o$

$$\left|\frac{\sin(t^y)}{t^y(1+xt)}\right| dt < \frac{1}{x_o t^{y+1}}.$$

$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{y+1}}$ hội tụ, vì $y + 1 > 1$, do đó

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^y)}{t^y(1+xt)}dt$ hội tụ đều đối với $x \in [x_o, +\infty)$, $\forall x_o > 0$. Vậy tích phân đó là một hàm số liên tục của x trong khoảng $(0, +\infty)$. Như vậy, hàm số f(x) liên tục trong khoảng $(0, +\infty)$.

b) Ta có

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sin(t^y)}{t^y(1+xt)}\right) = -\frac{\sin(t^y)}{t^{y-1}(1+xt)^2}.$$

Để chứng minh rằng hàm số f(x) khả vi trong khoảng $(0, +\infty)$, ta chỉ việc chứng minh rằng tích phân suy rộng

$$-\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t^y)}{t^{y-1}(1+xt)^2}dt \qquad (*)$$

hội tụ đều đối với $x \in (0, +\infty)$. Ta có

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin(t^y)}{t^{y-1}(1+xt)^2} = 0.$$

Do đó chỉ cần xét sự hội tụ của tích phân suy rộng (*) tại $+\infty$.
1 Ta có $\forall x \geq x_o > 0$

$$\left| -\frac{\sin(t^y)}{t^{y-1}(1+xt)^2} \right| \le \frac{1}{x_o^2 t^{y+1}}$$

Tích phân suy rộng $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{y+1}}$ hội tụ, vậy tích phân suy rộng (*) hội tụ đều đối với $x \in [x_o, +\infty)$, $\forall\, x_o > 0$. Do đó hàm số f(x) khả vi trên $(0, +\infty)$ và

$$f'(x) = -\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(t^y)}{t^{y-1}(1+xt)^2}\, dt \cdot$$

c) Áp dụng lập luận trong câu b) cho các đạo hàm cấp cao của f(x). Ta có

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(\frac{\sin(t^y)}{t^y(1+xt)}\right) = (-1)^k\, k!\, \frac{\sin(t^y)}{t^{y-k}(1+xt)^{k+1}}$$

Ta có $\forall x \ge x_o$

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(\frac{\sin(t^y)}{t^y(1+xt)}\right) \right| \le \frac{k!}{x_o^{k+1}\, t^{y+1}}$$

Do đó tích phân suy rộng

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(\frac{\sin(t^y)}{t^y(1+xt)}\right) dt$$

hội tụ đều đối với $x \in [x_o, +\infty)$, $\forall x_o > 0$. Vậy hàm số f(x) khả vi k lần và ta có

$$f^{(k)}(x) = \int\limits_0^{+\infty} (-1)^k\, k!\, \frac{\sin(t^k)}{t^{k-y}(1+xt)^{k+1}} \cdot$$

1 3. Với $x \ge 0$ cố định, xét hàm số

$$y \in \mathbf{R}^*_+ \mapsto g(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t^y)}{t^y(1 + xt)}\, dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{\sin(t^y)}{t^y(1 + xt)}\, dt + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^y)}{t^y(1 + xt)}\, dt$$

a) Tích phân thứ nhất của vế phải là một hàm số liên tục của $y \in \mathbf{R}^*_+$, vì hàm số dưới dấu tích phân là liên tục đối với $(y, t) \in \mathbf{R}^*_+ \times [0,1]$. Xét tích phân thứ hai. Nếu $y \geq a > 0$ thì $\forall\ t \geq 1$ ta có $t^y \geq t^a$, do đó

$$\left|\frac{\sin(t^y)}{t^y(1 + xt)}\right| \leq \frac{1}{t^a(1 + xt)} < \frac{1}{xt^{a+1}}$$

Chú ý rằng trong câu này ta giả thiết $x > 0$. Tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{a+1}}$ hội tụ, vì $a + 1 > 1$. Vậy $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^y)}{t^y(1 + xt)}\, dt$ hội tụ đều đối với $y \in [a, +\infty)$, $\forall\ a > 0$. Tích phân ấy là một hàm số liên tục đối với y trong $\mathbf{R}^*_+$. Tóm lại hàm số g(y) liên tục trong khoảng $(0\ ,\ +\infty)$.

b) Nếu $x = 0$, ta có

$$g(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t^y)}{t^y}\, dt = \int_0^1 \frac{\sin(t^y)}{t^y}\, dt + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^y)}{t^y}\, dt$$

Dễ thấy rằng tích phân thứ nhất ở vế phải là một hàm số liên tục của $y \in \mathbf{R}^*_+$. Trong tích phân thứ hai, ta đổi biến số $t^y = u$ như ở
1 câu 1. Ta được

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin(t^y)}{t^y}dt=\int_1^{+\infty}\frac{\sin u}{u^{2-1/y}}du=\int_1^{U}\frac{\sin u}{u^{2-1/y}}du+\int_U^{+\infty}\frac{\sin u}{u^{2-1/y}}du\,.$$

Ta sẽ chứng minh rằng nếu $y>\frac{1}{2}$, thì với mọi $\varepsilon>0$ cho trước, tồn tại một số $U_o(\varepsilon)$ sao cho

$$\left|\int_U^{+\infty}\frac{\sin u}{u^{2-1/y}}du\right|<\varepsilon\,,\quad \forall U>U_o(\varepsilon)\,.$$

Thật vậy, ta xác định được số n nguyên dương sao cho

$$(n-1)\pi<U\le n\pi\,.$$

Ta có

$$\int_U^{+\infty}\frac{\sin u}{u^{2-1/y}}du=\int_U^{n\pi}\frac{\sin u}{u^{2-1/y}}du+\sum_{p=n}^{+\infty}\int_{p\pi}^{(p+1)\pi}\frac{\sin u}{u^{2-1/y}}du\,.$$

Chuỗi số ở vế phải là chuỗi đan dấu, số hạng tổng quát của nó có giá trị tuyệt đối giảm dần tới 0, vì vậy về giá trị tuyệt đối, tổng của nó bé hơn số hạng đầu tiên. Do đó

$$\left|\int_U^{+\infty}\frac{\sin u}{u^{2-1/y}}du\right|\le\left|\int_U^{n\pi}\frac{\sin u}{u^{2-1/y}}du\right|+\left|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin u}{u^{2-1/y}}du\right|<$$

$$<\int_{(n-1)\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin u|}{u^{2-1/y}}du<\int_{(n-1)\pi}^{(n+1)\pi}u^{\frac{1}{y}-2}du<2\pi[(n-1)\pi]^{\frac{1}{y}-2}\,,$$

vì $\frac{1}{y}-2<0$. Do đó $\forall y\ge a>\frac{1}{2}$. Ta có

$$\left|\int_U^{+\infty}\frac{\sin u}{u^{2-1/y}}du\right|<2\pi[(n-1)\pi]^{\frac{1}{a}-2}<\varepsilon\,,$$

nếu $n\ge n_o(\varepsilon)$, số $n_o(\varepsilon)$ chỉ phụ thuộc ε, không phụ thuộc y. Như vậy muốn cho $\left|\int_U^{+\infty}\frac{\sin u}{u^{2-1/y}}du\right|<\varepsilon$, chỉ cần chọn $U>\pi n_o(\varepsilon)=U_o(\varepsilon)$. Tóm lại,tích phân suy rộng $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\sin(t^y)}{t^y}dt$ là hội tụ đều đối với $y \in [a, +\infty)$, $\forall a > \frac{1}{2}$ do đó là hàm số liên tục của $y \in (\frac{1}{2}, +\infty)$.

4. Với $x > 0$, xét hàm số

$$x \mapsto h(x) = \int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin(t^x)}{t^x(1+xt)}dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{1}\frac{\sin(t^x)}{t^x(1+xt)}dt + \int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\sin(t^x)}{t^x(1+xt)}dt.$$

a) Tích phân thứ nhất của vế phải liên tục đối với $x \in \mathbf{R}_+^*$ vì hàm số dưới dấu tích phân liên tục đối với $(x, t) \in \mathbf{R}_+^* \times [0, 1]$. Xét tích phân thứ hai, ta có $\forall x \geq x_o > 0$

$$\left|\frac{\sin(t^x)}{t^x(1+xt)}\right| \leq \frac{1}{x_0 t^{x_0+1}}.$$

Vậy tích phân thứ hai hội tụ đều đối với $x \in [x_o, +\infty)$, $\forall x_o > 0$ do đó nó liên tục đối với $x \in (0, +\infty)$. Vậy $h(x)$ liên tục đối với x trong khoảng $(0, +\infty)$.

b) Ta có

$$\left|\int\limits_{0}^{1}\frac{\sin(t^x)}{t^x(1+xt)}dt\right| < \int\limits_{0}^{1}\frac{dt}{1+xt} = \frac{1}{x}\ln(1+x) \to 0 \text{ khi } x \to +\infty,$$

$$\left|\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\sin(t^x)}{t^x(1+xt)}dt\right| \leq \int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dt}{t^x} = \frac{1}{x-1} \to 0 \text{ khi } x \to +\infty.$$

Do đó $h(x) \to 0$ khi $x \to +\infty$.

c) Ta có

$$v_n = \int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin(t^n)}{t^n(1+nt)}dt \geq \int\limits_{0}^{1}\frac{\sin(t^n)}{t^n(1+nt)}dt.$$

1

Vì $t \in [0, 1]$, nên $t^n \in [0, 1] \subset [0, \frac{\pi}{2}]$. Trên đoạn $[0, \frac{\pi}{2}]$, ta có $\sin\alpha \geq \frac{2}{\pi}\alpha$, vậy

$$\sin t^n \geq \frac{2}{\pi}.$$

Do đó với n đủ lớn

$$v_n \geq \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{dt}{1+nt} = \frac{2}{\pi}\frac{\ln(1+n)}{n} > \frac{2}{\pi n}.$$

Vậy chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ phân kì.

BÀI TOÁN 5

1. Giả sử phương trình (1) có một nghiệm có dạng

$$y = x^\alpha f(x) = x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n =$$

$$= c_o x^\alpha + c_1 x^{1+\alpha} + c_2 x^{2+\alpha} + \ldots + c_n x^{n+\alpha} + \ldots$$

Ta có

$$y' = c_o \alpha x^{\alpha-1} + c_1(1+\alpha)x^\alpha + c_2(2+\alpha)x^{\alpha+1} + \ldots + c_n(n+\alpha)x^{n+\alpha-1} + \ldots$$

$$y'' = c_o\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + c_1(\alpha+1)\alpha x^{\alpha-1} + \ldots$$

$$+ c_n(\alpha+n)(\alpha+n-1)x^{n+\alpha-2} + \ldots +$$

Thế vào phương trình (1), ta được đồng nhất thức

$$0 = x^\alpha\{[\alpha(\alpha-1) + (a+1)\alpha + \frac{1}{4}]c_o + [(\alpha+1)\alpha + (a+1)(\alpha+1) +$$

$$+ \frac{1}{4}]c_1 x + \{[(\alpha+2)(\alpha+1) + (a+1)(\alpha+2) + \frac{1}{4}]c_2 + c_o\}x^2 + \ldots +$$

$$+ \{[(\alpha+n)(\alpha+n-1) + (a+1)(\alpha+n) + \frac{1}{4}]c_n + c_{n-2}\}x^n + \ldots\}$$

Do đó

$$[\alpha(\alpha - 1) + (a + 1)\alpha + \frac{1}{4}] = 0$$

$$[(\alpha + 1)\alpha + (a + 1)(\alpha + 1) + \frac{1}{4}]c_1 = 0$$

$$[(\alpha + 2)(\alpha + 1) + (a + 1)(\alpha + 2) + \frac{1}{4}]c_2 + c_o = 0$$

. . . .

$$[(\alpha + n)(\alpha + n - 1) + (a + 1)(\alpha + n) + \frac{1}{4}]c_n + c_{n-2} = 0$$

. . . .

Đặt $P(x) = x(x - 1) + (a + 1)x + \frac{1}{4} = x^2 + ax + \frac{1}{4}$. Ta được

$$P(\alpha)c_o = 0 \qquad (*)$$

$$P(\alpha + 1)c_1 = 0 \qquad (**)$$

$$P(\alpha + n)c_n + c_{n-2} = 0, \ \forall n \geq 2 \qquad (***)$$

Giả sử hai nghiệm của tam thức bậc hai P(x) là:

$$\alpha_1 = -\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 1}, \qquad \alpha_2 = -\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 1}.$$

Bây giờ ta chọn $\alpha = \alpha_1$. Khi đó, ta có:

$$P(\alpha) = 0,$$

$$P(\alpha + n) \neq 0, \forall n \in \mathbf{N}^*$$

Từ (***) ta được

$$c_n = -\frac{c_{n-2}}{P(\alpha + n)}, \qquad \forall n \geq 2$$

1

Từ (**) suy ra $c_1 = 0$

Do đó

$$c_{2n+1} = 0 \qquad \forall n \in \mathbf{N}$$

Từ (*) ta thấy rằng c_o có thể lấy mọi giá trị. Ta chọn $c_o = 1$. Khi đó, ta được

$$c_2 = -\frac{1}{P(\alpha + 2)}$$

$$c_4 = -\frac{c_2}{P(\alpha + 4)}$$

. . . .

$$c_{2n} = -\frac{c_{2n-2}}{P(\alpha + 2n)}$$

Nhân các đẳng thức ấy với nhau, ta được

$$c_{2n} = (-1)^n \frac{1}{P(\alpha + 2) \, . \, P(\alpha + 4) \, ... P(\alpha + 2n)} =$$

$$= (-1)^n \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n} P(\alpha + 2k)} \; , \qquad \forall\, n \in \mathbf{N}^*$$

Vậy

$$y = x^{\alpha} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n} P(\alpha + 2k)} x^{2n} \right]$$

Đặt

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n} P(\alpha + 2k)} x^{2n}$$

Ta được

$$y = x^{\alpha} f(x) \; ,$$

1 trong đó $f(0) = 1 \neq 0$, ta có

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|c_{2n+2}|}{|c_n|} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{P(\alpha + 2n + 2)} = 0$$

Do đó bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa f(x) bằng ∞. Chuỗi lũy thừa ấy hội tụ tuyệt đối trên **R**.

2. Nếu a = 2 thì hai nghiệm của tam thức bậc hai

$$P(x) = x^2 + 2x + \frac{1}{4}$$

là $\alpha_1 = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\alpha_2 = -1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$. Theo kết qủa của câu trên, phương trình (1) có một nghiệm riêng là $y_1 = x^{\alpha_1} f(x)$, f(x) là tổng của một chuỗi lũy thừa hội tụ trên **R** và $f(0) = 1 \neq 0$.

Nếu ta chọn $\alpha = \alpha_2$, thì ta cũng có

$$P(\alpha) = 0$$

$$P(\alpha + n) \neq 0 \qquad \forall n \in \mathbf{N}^*$$

Vì hiệu $\alpha_1 - \alpha_2 = \sqrt{3} \notin \mathbf{N}^*$. Bằng cách xây dựng như ở câu 1, ta được một nghiệm riêng $y_2 = x^{\alpha_2} g(x)$, g(x) là tổng của một chuỗi lũy thừa hội tụ trên **R** và $g(0) = 1 \neq 0$.

Ta chứng minh rằng hai nghiệm riêng y_1 và y_2 là độc lập tuyến tính. Thật vậy, giả sử ta có

$$C_1 x^{\alpha_1} f(x) + C_2 x^{\alpha_2} g(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbf{R}^*_+$$

Nhân đẳng thức đó với $x^{-\alpha_2}$ rồi cho $x \to 0^+$, ta được $C_2 = 0$, vì $\alpha_2 < \alpha_1$. Dễ dàng suy ra $C_1 = 0$. Vậy y_1 và y_2 là độc lập tuyến tính .

1 Nghiệm tổng quát của phương trình (1) là

$$y = C_1 x^{\alpha_1} f(x) + C_2 x^{\alpha_2} g(x) .$$

BÀI TOÁN 6

1. Phương trình (1) là phương trình vi phân cấp 2 tuyến tính. Ta tìm nghiệm của phương trình thuần nhất tương ứng

$$x^2 y'' - 2y = 0 \qquad (*)$$

dưới dạng $y = x^\alpha$, α là một hằng số mà ta sẽ xác định. Ta có

$$y' = \alpha x^{\alpha - 1}, \quad y'' = \alpha(\alpha - 1) x^{\alpha - 2}$$

Thế vào phương trình (*), ta được đồng nhất thức

$$(\alpha^2 - \alpha - 2) x^\alpha = 0$$

Do đó

$$\alpha^2 - \alpha - 2 = 0 \Rightarrow \alpha = 2, \alpha = -1$$

Vậy phương trình (*) có hai nghiệm riêng $y = x^2$ và $y = \frac{1}{x}$ hai nghiệm ấy độc lập tuyến tính với nhau, do đó nghiệm tổng quát của phương trình (*) là

$$y = C_1 x^2 + C_2 \frac{1}{x} \qquad (**)$$

Dùng phương pháp biến thiên hằng số, ta thấy rằng biểu thức (**) là nghiệm của phương trình (1) nếu C_1, C_2 là các hàm số của x thỏa mãn hệ phương trình.

$$\begin{cases} C'_1 x^2 + C'_2 \dfrac{1}{x} = 0 \\ C'_1 2x - C'_2 \dfrac{1}{x^2} = 3 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ấy, ta được

1

$$C'_1 = \frac{1}{x}\ ,\quad C'_2 = -x^2$$

Do đó
$$C_1 = \ln|x| + A$$
$$C_2 = -\frac{x^3}{3} + B$$

A, B là các hằng số tùy ý. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình (1) là

$$y = \begin{cases} A_1x^2 + \dfrac{B_1}{x} + x^2\ln|x| - \dfrac{x^3}{3} & \text{nếu } x \in (-\infty\ ,\ 0) \\ A_2x^2 + \dfrac{B_2}{x} + x^2\ln x - \dfrac{x^3}{3} & \text{nếu } x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

Muốn cho các biểu thức trên có thể được kéo dài, để cho một nghiệm xác định trên toàn **R**, ta phải có $B_1 = B_2 = 0$, nếu không y không có giới hạn hữu hạn tại $x = 0$. Nhưng sự có mặt của số hạng $x^2\ln|x|$ làm cho y'' không thể có giới hạn hữu hạn tại $x = 0$. Vậy phương trình (1) không có nghiệm xác định trên toàn **R**.

2. Phương trình (2) là phương trình Bernoully. Vì hệ số của y' trong phương trình (2) là lnx, triệt tiêu khi $x = 1$, nên ta giải phương trình (2) trên các khoảng $I_1 = (0,1)$ và $I_2 = (1, +\infty)$.

Rõ ràng $y = 0$ là một nghiệm của phương trình (2). Nếu $y \neq 0$, chia hai vế của phương trình (2) cho y^2, ta được

$$y'y^{-2}\ln x - \frac{y^{-1}}{x} + 2x = 0$$

Đặt $z = y^{-1}$. Ta có $z' = -y^{-2}y'$. Phương trình trên trở thành

$$z'\ln x + \frac{z}{x} = 2x \qquad (***)$$

Đó là một phương trình tuyến tính cấp một đối với z.

Phương trình thuần nhất tương ứng của nó là

1

$$z'\ln x + \frac{z}{x} = 0.$$

Hay $$\frac{z'}{z} + \frac{1}{x\ln x} = 0$$

Do đó $$\ln|z| = -\ln|\ln x| + \ln|C| = \ln\left|\frac{C}{\ln x}\right|.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là:

$$z = \frac{C}{\ln x},$$

C là hằng số tùy ý. Xem C là hàm số của x, thế biểu thức $z = \dfrac{C}{\ln x}$ vào phương trình không thuần nhất (***), ta được:

$$C' = 2x$$

Do đó $$C = x^2 - K,$$

K là hằng số tùy ý. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình (***) là

$$z = \frac{x^2 - K_i}{\ln x}, \qquad \text{nếu} \qquad x \in I_i,\ i = 1, 2.$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình (2) là:

$$y = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{x^2 - K_1} & \text{nếu } x \in I_1 \\ \dfrac{\ln x}{x^2 - K_2} & \text{nếu } x \in I_2. \end{cases}$$

2. Muốn cho nghiệm y được xác định trên toàn $I_1(I_2)$, ta phải có $K_1 \le 0$ hoặc $K_1 \ge 1$ $(K_2 \le 1)$.

Ngoài ra, nếu $K_1 \ne 1$ $(K_2 \ne 1)$, ta có $y(1) = 0$, đạo hàm bên trái của y tại 1 bằng $\dfrac{1}{1-K_1}$ ($y(1) = 0$, đạo hàm bên phải của y tại 1 bằng $\dfrac{1}{1-K_2}$). Còn nếu $K_1 = 1$ $(K_2 = 1)$ thì $y(1) = \dfrac{1}{2}$. Từ những nhận xét trên ta suy ra rằng: Nếu $y \equiv 0$ trên I_1, thì $y \equiv 0$ trên I_2. Vậy $y \equiv 0$ trên toàn $\mathbf{R}_+^*$.

Nếu $y = \dfrac{\ln x}{x^2 - K_1}$ trên I_1 với $K_1 \neq 1$, thì $y = \dfrac{\ln x}{x^2 - K_2}$ trên I_2 với $K_2 \neq 1$ và vì đạo hàm bên trái và đạo hàm bên phải của y tại 1 bằng nhau, ta được $K_1 = K_2$, vì vậy $K_1 = K_2 \leq 0$.

Nếu $y = \dfrac{\ln x}{x^2 - K_1}$ trên I_1 với $K_1 = 1$, thì $y = \dfrac{\ln x}{x^2 - K_2}$ trên I_2 với $K_2 = 1$. Trong trường hợp này

$$y = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{x^2 - 1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{nếu } x = 1 \end{cases}.$$

Có thể kiểm tra dễ dàng rằng y khả vi tại $x = 1$.

Tóm lại, các nghiệm xác định trên toàn $\mathbf{R}_+^*$ là:

$$y \equiv 0,$$

$$y = \frac{\ln x}{x^2 - K} \qquad \text{với } K \leq 0,$$

$$y = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{x^2 - 1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{nếu } x = 1. \end{cases}$$

Vậy nếu $y_o \in \mathbf{R}$ cho trước, thì nghiệm xác định trên toàn $\mathbf{R}_+^*$ của phương trình (2) thỏa mãn điều kiện $y(1) = y_o$ tồn tại khi và chỉ khi $y_o = 0$ hoặc $y_o = \dfrac{1}{2}$. Nếu $y_o = 0$ thì có vô số nghiệm, còn nếu $y_o = \dfrac{1}{2}$ thì chỉ có một nghiệm.

MỤC LỤC

	Trang
LỜI NÓI ĐẦU	3
Chương I. **Hàm số nhiều biến số**	
Đề bài	5
Lời giải	15
Chương II. **Ứng dụng của phép tính vi phân trong hình học**	95
Đề bài	95
Lời giải	100
Chương III. **Tích phân bội**	138
Đề bài	138
Lời giải	147
Chương IV. **Tích phân đường – Tích phân mặt**	231
Đề bài	231
Lời giải	242
Chương V. **Phương trình vi phân**	323
Đề bài	323
Lời giải	335
Một số bài toán tổng hợp	467

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Biên tập lần đầu và tái bản :

PHẠM BẢO KHUÊ

Biên tập mĩ thuật :

TẠ TRỌNG TRÍ

Sửa bản in :

PHẠM BẢO KHUÊ
NGUYỄN MINH LÝ

Sắp chữ :

PHÒNG CHẾ BẢN (NXB GIÁO DỤC)

BÀI TẬP TOÁN CAO CẤP - TẬP BA

Mã số : 7K282T6 - DAI

In 5.000 cuốn, khổ 14,3 x 20,3 cm tại Công ty cổ phần In Diên Hồng 187B Giảng Võ-Hà Nội. Số in : 173/P. Số XB : 04-2006/CXB/123-1860/GD.
In xong và nộp lưu chiểu quý III năm 2006.

1

CÔNG TY CỔ PHẦN SÁCH ĐẠI HỌC - DẠY NGHỀ
HEVOBCO
Địa chỉ : 25 HànThuyên, Hà Nội

8 934980 685594

Giá : **25.600đ**