BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐẠI SỐ SƠ CẤP

(Giáo trình đào tạo giáo viên trung học hệ Đại học, Cao đẳng sư phạm)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

HOÀNG HUY SƠN

ĐẠI SỐ SƠ CẤP

Giáo trình đào tạo giáo viên trung học hệ Đại học, Cao đẳng sư phạm

(Tái bản lần thứ 10)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

512/GD-01/6725.413-00 Mã số: 85k94v3

LỜI NÓI ĐẦU

Tài liệu "Đại số sơ cấp" được viết nhằm phục vụ sinh viên chuyên ngành Sư phạm Toán. Nội dung của tài liệu đề cập đến các vấn đề: Hàm số và đồ thị; Phương trình và hệ phương trình; Bất đẳng thức và bất phương trình.

Một số nội dung đề cập trong tài liệu, sinh viên đã được học sơ lược trong chương trình Toán phổ thông. Tuy nhiên, để trở thành thầy giáo dạy tốt môn Toán khi ra trường, đòi hỏi sinh viên phải nắm vững lý thuyết và hoàn thiện các phương pháp giải toán sơ cấp.

Xuất phát từ yêu cầu trên, chúng tôi cố gắng trình bày tương đối có hệ thống về cơ sở lý thuyết của các khái niệm: Hàm số; Phương trình; Bất đẳng thức; Bất phương trình; Hệ phương trình. Các nội dung chiếm một phần quan trọng trong chương trình Toán phổ thông như: Phương trình, bất phương trình vô tỉ; Phương trình, bất phương trình mũ và logarit; Phương trình lượng giác, chúng tôi trình bày thành các chương riêng để sinh viên dễ nghiên cứu.

Tài liệu được trình bày thành 6 chương:

1. Chương 1: Hàm số;
2. Chương 2: Phương trình – Hệ phương trình;
3. Chương 3: Bất đẳng thức – Bất phương trình;
4. Chương 4: Phương trình, bất phương trình vô tỉ;
5. Chương 5: Phương trình, bất phương trình mũ và logarit;
6. Chương 6: Phương trình lượng giác.

Một yêu cầu hết sức quan trọng trong giải toán là: Việc trình bày bài giải phải chặt chẽ và logic. Để rèn cho sinh viên những kỹ năng đó, chúng tôi cố gắng đưa vào tài liệu nhiều ví dụ về thực hành giải toán. Các ví dụ chiếm một khối lượng đáng kể trong tài liệu, giúp sinh viên có thể tự nghiên cứu tài liệu trước khi đến lớp. Điều này phù hợp với phương thức đào tạo theo hệ thống tín chỉ ở trường Đại học An Giang từ năm học 2009 – 2010.

Cuối mỗi chương có hệ thống bài tập đã được lựa chọn, nhiều về số lượng, đủ các mức độ từ dễ đến khó (đối với một số bài khó, chúng tôi có hướng dẫn cách giải), yêu cầu sinh viên tự giải để rèn kỹ năng tìm lời giải một bài toán. Với khối lượng quy định là 5 đơn vị học trình, tài liệu không thể đề cập hết tất cả các dạng toán hay gặp của các nội dung về phương trình, bất phương trình và hệ phương trình như một số tài liệu khác. Chúng tôi mong muốn ở sinh viên là tự tổng kết và đúc rút cho mình những kỹ năng giải toán thông qua tự giải các bài tập trong tài liệu.

Cuối cùng, chúng tôi rất mong nhận được các ý kiến đóng góp quí báu cho nội dung cũng như hình thức trình bày trong tài liệu của các bạn đồng nghiệp trong Bộ môn Toán và Hội đồng Khoa học Khoa Sư phạm cũng như các bạn sinh viên để tài liệu này có thể được hoàn chỉnh tốt hơn.

An Giang, tháng 02 năm 2009

Tác giả

MỤC LỤC

BẢNG MỘT SỐ KÍ HIỆU VÀ CHỮ VIẾT TẮT SỬ DỤNG TRONG TÀI LIỆU

$\mathbb{N}$: Tập hợp các số tự nhiên: $\{0;1;2;...\}$.

$\mathbb{Z}$: Tập hợp các số nguyên: $\{...;-2;-1;0;1;2;...\}$.

$\mathbb{Q}$: Tập hợp các số hữu tỉ: $\left\{\frac{a}{b} / a,b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$.

$\mathbb{R}$: Tập hợp các số thực.

$\mathbb{R}^*$: Tập hợp các số thực khác không.

$\mathbb{R}^+$: Tập hợp các số thực dương.

$\sum_{1}^{n}$: Phép lấy tổng từ 1 đến n.

$\{.../...\}$: Tập hợp.

T_f: Tập (miền) giá trị của hàm số f.

$\underset{x\in D}{Max}\, f(x)$: Giá trị lớn nhất của hàm số f trên tập D.

$\underset{x\in D}{Min}\, f(x)$: Giá trị nhỏ nhất của hàm số f trên tập D.

$\in$: Thuộc.

$\subseteq, \subset$: Tập con.

$\varnothing$: Tập hợp rỗng.

$\forall$: Mọi.

$\neq$: Khác.

\: Hiệu của hai tập hợp.

$\cup$: Hợp của hai tập hợp.

$\cap$: Giao của hai tập hợp.

$\bigcup_{1}^{n}$: Phép lấy hợp từ 1 đến n.

$\bigcap_{1}^{n}$: Phép lấy giao từ 1 đến n.

$\vee$: Hoặc (tuyển của hai mệnh đề).

$\Rightarrow$: Phép kéo theo, phương trình hệ quả.

$\Leftrightarrow$: Phép tương đương (khi và chỉ khi), phương trình tương đương.

Đpcm: Kết thúc chứng minh, điều phải chứng minh.

CHƯƠNG I. HÀM SỐ

§1. KHÁI NIỆM HÀM SỐ

1. Định nghĩa

Giả sử X và Y là hai tập hợp tùy ý. Nếu có một quy tắc f cho tương ứng mỗi $x \in X$ với một và chỉ một $y \in Y$ thì ta nói rằng f là một hàm từ X vào Y, kí hiệu

$$f : X \to Y$$
$$x \mapsto y = f(x)$$

Nếu X, Y là các tập hợp số thì f được gọi là một *hàm số*. Trong chương này chúng ta chỉ xét các hàm số thực của các biến số thực, nghĩa là $X \subseteq \mathbb{R}$; $Y \subseteq \mathbb{R}$.

X được gọi là *tập xác định* (hay là *miền xác định*) của hàm số f. (Người ta hay dùng kí hiệu tập xác định của hàm số là D).

Số thực $x \in X$ được gọi là biến số độc lập (gọi tắt là biến số hay đối số). Số thực $y = f(x) \in Y$ được gọi là giá trị của hàm số f tại điểm x. Tập hợp tất cả các giá trị $f(x)$ khi x lấy mọi số thực thuộc tập hợp X gọi là *tập giá trị (miền giá trị)* của hàm số f và được kí hiệu là T_f, (như vậy $T_f = \{f(x) \mid x \in X\} = f(X)$).

Hiển nhiên $T_f \subseteq Y$. Chú ý rằng T_f có thể là một tập hợp con thực sự của Y hoặc bằng tập Y.

Trong nhiều trường hợp, người ta cho hàm số f dưới dạng $x \mapsto f(x)$ hoặc $y = f(x)$ mà không nêu rõ tập xác định X và tập hợp Y chứa tập các giá trị của f. Khi đó, ta hiểu rằng $Y = \mathbb{R}$ và X là tập hợp các số thực $x \in \mathbb{R}$ sao cho quy tắc đã cho thì $f(x)$ tồn tại.

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x) = x^2 + 1$. Theo cách hiểu trên thì $Y = \mathbb{R}$; tập xác định của f là $D = \mathbb{R}$, tập các giá trị của f là $T_f = \{x^2 + 1 \mid x \in \mathbb{R}\} = [1; +\infty)$.

Ví dụ 2. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$. Khi đó, tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tập giá trị là $T_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ví dụ 3. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Tập xác định $D = [-1; 1]$, $T_f = [0; 1]$.

Ví dụ 4. Tìm tập giá trị của các hàm số

$a.\ y = f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$;

$b.\ y = f(x) = \dfrac{\sin x + 2\cos x + 1}{\sin x + \cos x + 2}$.

Giải.

$a.\ y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$. Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Giả sử $y_0 \in T_f$. Khi đó $y_0 = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$ (1) có nghiệm đối với x.

$(1) \Leftrightarrow y_0\left(x^2 + x + 1\right) = x^2 - x + 1 \Leftrightarrow \left(y_0 - 1\right)x^2 + \left(y_0 + 1\right)x + y_0 - 1 = 0$ (2).

Xét $y_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow y_0 = 1$; $(2) \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy $1 \in T_f$.

Xét $y_0 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow y_0 \neq 1$. Khi đó, (2) có nghiệm khi và chỉ khi

$\left(y_0 + 1\right)^2 - 4\left(y_0 - 1\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow -3y_0^2 + 10y_0 - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3} \leq y_0 \leq 3.$

Vậy $T_f = [\dfrac{1}{3}; 3]$.

b. Tập xác định của hàm số đã cho là $D = \mathbb{R}$. Cũng tương tự như câu *a.* y_0 thuộc tập giá trị của hàm số đã cho khi và chỉ khi $y_0 = \dfrac{\sin x + 2\cos x + 1}{\sin x + \cos x + 2}$ (1) có nghiệm đối với x

$(1) \Leftrightarrow y_0\left(\sin x + \cos x + 2\right) = \sin x + 2\cos x + 1 \Leftrightarrow \left(y_0 - 1\right)\sin x + \left(y_0 - 2\right)\cos x = 1 - 2y_0$.

(1) có nghiệm khi và chỉ khi

$\left(y_0 - 1\right)^2 + \left(y_0 - 2\right)^2 \geq \left(1 - 2y_0\right)^2 \Leftrightarrow y_0^2 + y_0 - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq y_0 \leq 1$.

Vậy $T_f = \left[-2; 1\right]$.

Ví dụ 5. Tìm tập giá trị của hàm số $y = f(x) = \cos\dfrac{2x}{1 + x^2}$.

Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

Đặt $t = \dfrac{2x}{1 + x^2}$, xem *t* là hàm số của biến *x*, áp dụng phương pháp đã trình bày ở ví dụ *4.a.* ta được với $x \in \mathbb{R}$ thì $t \in [-1; 1]$. Miền giá trị của hàm số $y = f(x) = \cos\dfrac{2x}{1 + x^2}$ trên tập xác định $D = \mathbb{R}$ cũng chính là miền giá trị của hàm số $y = \cos t$ với $t \in [-1; 1]$. Từ đó hàm số $y = f\left(x\right) = \cos\dfrac{2x}{1 + x^2}$ có tập giá trị là đoạn $\left[\cos 1; 1\right]$.

2. Đồ thị của hàm số

Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có tập xác định D, ta gọi tập hợp các điểm $\left(x; f\left(x\right)\right)$ với $\forall x \in D$ là *đồ thị* của hàm số $y = f\left(x\right)$.

Việc biểu diễn các điểm $\left(x; f\left(x\right)\right)$ thuộc đồ thị của hàm số $y = f\left(x\right)$ lên mặt phẳng tọa độ Oxy gọi là vẽ đồ thị của hàm số.

Chú ý rằng một đường $\left(\zeta\right)$ (đường cong hoặc đường thẳng) trong mặt phẳng tọa độ chỉ có thể là đồ thị của một hàm số nào đó, nếu nó cắt một đường thẳng cùng phương với trục *Oy* tại không quá tại một điểm.

3. Hàm số đơn điệu

3.1. Định nghĩa. Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định là tập *D*, khoảng $(a;b)$ là tập con của *D*. Khi đó ta có

Hàm số $y=f(x)$ gọi là *đồng biến* (hay *tăng*) trên khoảng $(a;b)$, nếu với $\forall x_1,x_2\in(a;b),\ x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

Hàm số $y=f(x)$ gọi là *nghịch biến* (hay *giảm*) trên khoảng $(a;b)$, nếu với $\forall x_1,x_2\in(a;b),\ x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$.

Một hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên khoảng $(a;b)$ thì ta nói *hàm số đơn điệu* trên khoảng đó.

3.2. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Hàm số $y=x^3$ đồng biến trên toàn bộ tập xác định $\mathbb{R}$.

Ví dụ 2. Hàm số $y=\dfrac{3x+1}{x-2}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định $(-\infty;2)$; $(2;+\infty)$.

Dựa vào định nghĩa 3.1, dễ dàng chứng minh được các tính chất sau

3.3. Tính chất

3.3.1. Nếu hàm số $y=f(x)$ đồng biến (nghịch biến) trên khoảng $(a;b)$, thì hàm số $y=f(x)+c$ (c là hằng số) cũng đồng biến (nghịch biến) trên khoảng $(a;b)$.

3.3.2. Nếu hàm số $y=f(x)$ đồng biến (nghịch biến) trên khoảng $(a;b)$, thì hàm số $y=kf(x)$ đồng biến (nghịch biến) trên khoảng $(a;b)$ nếu $k>0$; hàm số $y=kf(x)$ nghịch biến (đồng biến) trên khoảng $(a;b)$ nếu $k<0$.

3.3.3. Nếu hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ đồng biến (nghịch biến) trên khoảng $(a;b)$ thì hàm số $y=f(x)+g(x)$ đồng biến (nghịch biến) trên khoảng $(a;b)$.

3.3.4. Nếu hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ không âm trên khoảng $(a;b)$ và cùng đồng biến (nghịch biến) trên khoảng $(a;b)$, thì hàm số $y=f(x).g(x)$ đồng biến (nghịch biến) trên khoảng $(a;b)$.

Chú ý. Đồ thị của hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên khoảng $(a;b)$ cắt đường thẳng cùng phương với trục Ox nhiều nhất tại một điểm.

Giả sử hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a;b)$; hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a;b)$. Khi đó trên khoảng $(a;b)$, đồ thị của các hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau không quá tại một điểm.

Áp dụng. Tìm x thỏa mãn $5^{x-2}=3-x$.

Để ý rằng hàm số $y=f(x)=5^{x-2}$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$, còn hàm số $y=g(x)=3-x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Dễ thấy $x=2$ thỏa mãn phương trình đã cho. Vậy, $x=2$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

4. Hàm số chẵn, hàm số lẻ

4.1. Định nghĩa. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có tập xác định trên D.

Hàm số f gọi là *hàm số chẵn* nếu với mọi $x\in D$, ta có $-x\in D$ và $f\left(-x\right)=f\left(x\right)$.

Hàm số f gọi là *hàm số lẻ* nếu với mọi $x\in D$, ta có $-x\in D$ và $f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$.

4.2. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số $y=f\left(x\right)=\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}$.

Tập xác định của hàm số là $\left[-1;1\right]$ nên dễ thấy

$\forall x, x\in[-1;1]\Rightarrow -x\in[-1;1]$ và $f\left(-x\right)=\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}=-\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)=-f\left(x\right)$.

Vậy f là hàm số lẻ.

Ví dụ 2. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số $y=f\left(x\right)=\dfrac{x^2+1}{x+1}$.

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-1\right\}$.

Ta có $1\in D$ nhưng $-1\notin D$, nên hàm số đã cho không phải là hàm số chẵn cũng như hàm số lẻ.

Ví dụ 3. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số $y=f\left(x\right)=\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}$.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$, nên $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$.

Ta có

$\forall x\in D,\ f\left(-x\right)=\sqrt{\left(-x\right)^2+\left(-x\right)+1}+\sqrt{\left(-x\right)^2-\left(-x\right)+1}=\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2+x+1}=f\left(x\right)$. Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Ví dụ 4. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số $y=f\left(x\right)=x^2-4x$.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$, do đó $x\in D$ thì $-x\in D$.

Nhưng $f\left(1\right)=-3$; $f\left(-1\right)=5$, nên $f\left(1\right)\neq\pm f\left(-1\right)$.

Vậy, f không phải hàm số chẵn cũng như hàm số lẻ.

4.3. Đồ thị của hàm số chẵn và hàm số lẻ

Giả sử hàm số $y=f\left(x\right)$ có tập xác định D là hàm số chẵn và có đồ thị là $\left(G\right)$. Với mỗi điểm $M\left(x_0;y_0\right)$ thuộc đồ thị $\left(G\right)$, ta xét điểm đối xứng với nó qua trục tung là $M'\left(-x_0;y_0\right)$.

Từ định nghĩa hàm số chẵn, ta có $-x_0\in D$ và $f\left(-x_0\right)=f\left(x_0\right)$. Do đó

$M\in G\Leftrightarrow y_0=f\left(x_0\right)\Leftrightarrow y_0=f\left(-x_0\right)\Leftrightarrow M'\in\left(G\right)$.

Điều đó chứng tỏ $\left(G\right)$ có trục đối xứng là trục tung.

Nếu f là hàm số lẻ thì lí luận tương tự, ta cũng được (G) có tâm đối xứng là gốc tọa độ O.

5. Hàm số tuần hoàn

5.1. Định nghĩa. Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định D được gọi là *hàm số tuần hoàn* nếu tồn tại một số dương T sao cho với mọi $x \in D$ ta có

$i) x+T \in D$ và $x-T \in D$;

$ii) f(x \pm T) = f(x)$.

Số nhỏ nhất (nếu có) trong các số T có các tính chất trên gọi là chu kỳ của hàm số tuần hoàn $f(x)$.

5.2. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Các hàm số lượng giác $y = \cos x$; $y = \sin x$ là các hàm số tuần hoàn có chu kỳ $T = 2\pi$.

Các hàm số lượng giác $y = \tan x$; $y = \cot x$ là các hàm số tuần hoàn có chu kỳ $T = \pi$.

Ví dụ 2. Chứng minh các hàm số sau đây không phải là hàm số tuần hoàn

$y = f(x) = x^4 + 2x^3$;

$y = g(x) = \sqrt{2x-3}$;

$y = h(x) = \dfrac{x^3}{x^2-4}$.

Giải.

\+ Xét $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 + 2x^3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right.$

Nếu hàm số $y = f(x) = x^4 + 2x^3$ là hàm số tuần hoàn thì tồn tại số $T > 0$ sao cho $f(0+T) = f(0) = 0,$ suy ra $T > 0$ là nghiệm của $f(x),$ vô lý. Vậy, hàm số $f(x)$ không phải là hàm số tuần hoàn.

\+ Hàm số $y = g(x) = \sqrt{2x-3}$ cũng không phải là hàm số tuần hoàn, lập luận giống như đối với hàm số $f(x)$.

\+ Hàm số $y = h(x) = \dfrac{x^3}{x^2-4}$ có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$. Giả sử hàm số $h(x)$ là hàm số tuần hoàn thì tồn tại số thực dương T sao cho với $\forall x \in D \Rightarrow x \pm T \in D$. Do $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$, nên $2+T$ thuộc D suy ra $2 = (2+T) - T \in D$, vô lý. Vậy hàm số $h(x)$ không phải là hàm số tuần hoàn.

Chú ý. Chúng ta có một số dấu hiệu để nhận biết một hàm số đã cho không phải là một hàm số tuần hoàn, chẳng hạn ta có hai dấu hiệu sau.

\+ Nếu một hàm số có tập xác định dạng $D = \mathbb{R} \setminus A,$ với A là một tập hợp hữu hạn thì hàm số đó không phải là một hàm số tuần hoàn.

\+ Nếu phương trình $f(x) = k$ có nghiệm, nhưng số nghiệm là một số hữu hạn, thì hàm số

$y = f(x)$ không phải là một hàm số tuần hoàn.

Ví dụ 3. Cho hàm số

$$y = f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{1}{2+\tan^2 x}, & x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Chứng minh rằng hàm số $y = g(x) = f(x) + f(ax)$ là hàm số tuần hoàn, khi và chỉ khi a là một số hữu tỉ.

Giải.

Dễ dàng chứng minh được $f(x)$ là hàm số tuần hoàn.

Điều kiện đủ. Nếu a là số hữu tỉ thì $a = \dfrac{p}{q}$ với $p, q \in \mathbb{Z}, q > 0.$ Khi đó có số dương $T = q\pi$ thỏa

$$g(x + q\pi) = f(x + q\pi) + f(ax + aq\pi) = f(x) + f(ax + p\pi) = f(x) + f(ax) = g(x).$$

Chứng minh tương tự ta cũng được $g(x - q\pi) = g(x)$. Chứng tỏ hàm số $g(x)$ là hàm số tuần hoàn.

Điều kiện cần. Giả sử a là số vô tỉ. Ta thấy $g(0) = f(0) + f(0) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1.$ Nếu tồn tại $x_0 \neq 0$ sao cho $g(x_0) = 1$ thì $f(x_0) + f(ax_0) = 1,$ nhưng $0 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2}$ với mọi $x,$ nên suy ra $f(x_0) = f(ax_0) = \dfrac{1}{2}.$ Do đó $\tan x_0 = 0$ và $\tan(ax_0) = 0.$

Vì vậy $x_0 = m\pi$ và $ax_0 = n\pi$ với $m, n \in \mathbb{Z}.$

Do $x_0 \neq 0$ nên $a = \dfrac{ax_0}{x_0} = \dfrac{n\pi}{m\pi} = \dfrac{n}{m}$ là số hữu tỉ.

Điều này mâu thuẫn với a là số vô tỉ.

Suy ra phương trình $g(x) = 1$ chỉ có một nghiệm duy nhất $x = 0,$ nên $g(x)$ không phải là hàm số tuần hoàn. Vậy, nếu $g(x)$ là hàm số tuần hoàn thì a phải là số vô tỉ.

6. Hàm số hợp

6.1. Định nghĩa. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D_1 và $y = g(x)$ xác định trên D_2. Khi đó ta gọi *hàm số hợp* của hai hàm số f và g kí hiệu $g \circ f$ được xác định $y = (g \circ f)(x) = g[f(x)]$ xác định trên tập $D = \{x \in D_1 \mid f(x) \in D_2\}.$

6.2. Ví dụ

Cho các hàm số $y = f(x) = \lg x$; $y = g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}.$

Xác định các hàm số hợp $f \circ g$ và $g \circ f.$

Giải. Ta có $(g\circ f)(x)=g\left[f(x)\right]=g\left[\lg x\right]=\dfrac{\lg x+1}{\lg x-1}$.

Hàm số này xác định trên tập $(0;+\infty)\setminus\{10\}$.

$(f\circ g)(x)=f\left[g(x)\right]=f\left[\dfrac{x+1}{x-1}\right]=\lg\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$.

Hàm số này xác định trên tập $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

Ví dụ này cho thấy $g\circ f\neq f\circ g$.

7. Hàm số ngược

7.1. Định nghĩa. Cho hàm số

$$\begin{aligned} f:\ &X\to Y\\ &x\mapsto y=f(x)\end{aligned}$$

nếu với mỗi giá trị $y\in T_f=f(X)$, có một và chỉ một $x\in X$ sao cho $f(x)=y$, tức là phương trình $f(x)=y$ với ẩn x có nghiệm duy nhất, thì bằng cách cho tương ứng với mỗi $y\in f(X)$ phần tử duy nhất $x\in X$, ta xác định được hàm số

$$\begin{aligned} g:\ &f(X)\to X\\ &y\ \mapsto\ x=g(y)\end{aligned}$$

(x thỏa mãn $f(x)=y$).

Hàm số g xác định như vậy được gọi là *hàm số ngược* của hàm số f.

Theo thông lệ, người ta thường kí hiệu đối số là x và hàm số là y. Khi đó hàm số ngược của hàm số $y=f(x)$ sẽ được viết lại là $y=g(x)$.

Giả sử hàm số $y=f(x)$ có hàm số ngược, để tìm hàm số ngược của hàm số $y=f(x)$ ta giải phương trình $f(x)=y$ ẩn x, phương trình này có nghiệm duy nhất $x=g(y)$, đổi kí hiệu theo cách viết thông thường ta được hàm số ngược $y=g(x)$.

Chú ý. Người ta thường kí hiệu hàm số ngược của hàm số $y=f(x)$ là $y=f^{-1}(x)$.

7.2. Ví dụ

Cho hàm số $y=x^2-2x$ trên tập xác định $[1;+\infty)$. Tìm hàm số ngược.

Giải.

Trên tập xác định $[1;+\infty)$ phương trình $x^2-2x=y$ có nghiệm duy nhất $x=1+\sqrt{1+y}$.

Vậy hàm số ngược cần tìm là $y=1+\sqrt{1+x}$.

Chú ý.

Từ định nghĩa của hàm số ngược, suy ra rằng: Tập xác định của hàm số ngược $y=f^{-1}(x)$ là tập giá trị của hàm số $y=f(x)$, tập giá trị của hàm số ngược là tập xác định của hàm số

$y = f(x)$.

Dĩ nhiên hàm số $y = f(x)$ lại là hàm số ngược của hàm số $y = f^{-1}(x)$. Vì vậy ta nói hai hàm số $y = f(x)$ và $y = f^{-1}(x)$ là hai hàm số ngược nhau.

7.3. Điều kiện đủ để hàm số có hàm số ngược

7.3.1. Định lý. Mọi hàm số đồng biến (hay nghịch biến) trên tập xác định của nó đều có hàm số ngược.

Chứng minh. Giả sử hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên tập xác định D, với mỗi $y \in f(D)$ có ít nhất $x \in D$ sao cho $f(x) = y$. Ta chứng minh rằng x là duy nhất. Thật vậy, giả sử còn có x' ($x' \neq x, x < x'$ chẳng hạn) sao cho $y = f(x')$, thế thì $x < x'$ sẽ kéo theo $f(x) < f(x')$ vì hàm số đồng biến, do đó $f(x) \neq f(x')$; điều này mâu thuẫn với $f(x) = y = f(x')$. Vậy theo định nghĩa, hàm số $y = f(x)$ có hàm số ngược.

Chứng minh tương tự trong trường hợp hàm số nghịch biến.

7.4. Đồ thị của hàm số ngược

7.4.1. Định lý. Trong hệ trục tọa độ Đề Các vuông góc Oxy, đồ thị của hai hàm số ngược nhau $y = f(x)$ và $y = f^{-1}(x)$ đối xứng nhau qua đường phân giác thứ nhất $y = x$.

Chứng minh. Giả sử hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là D và tập giá trị là $T_f = f(D)$, khi đó hàm số ngược có tập xác định là $f(D)$ và tập giá trị là D.

Gọi $M(a;b)$ là một điểm trên đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta có $a \in D$, $b = f(a) \in f(D)$.

Theo định nghĩa của hàm số ngược, nếu $x = b$ thì $f^{-1}(b) = a$, nên $N(b;a)$ thuộc đồ thị của hàm số ngược $y = f^{-1}(x)$. Hai điểm M và N là đối xứng với nhau qua đường phân giác thứ nhất $y = x$. Như vậy mỗi điểm thuộc đồ thị của hàm số $y = f(x)$ đều đối xứng với một điểm thuộc đồ thị hàm số $y = f^{-1}(x)$ qua đường phân giác thứ nhất.

Ngược lại, ta cũng thấy rằng với mỗi điểm thuộc đồ thị của hàm số ngược $y = f^{-1}(x)$ đều đối xứng với một điểm thuộc đồ thị của hàm số $y = f(x)$ qua đường phân giác thứ nhất.

Vậy, đồ thị của hai hàm số ngược nhau đối xứng với nhau qua đường phân giác thứ nhất.

Chú ý. Từ tính chất của đồ thị hàm số ngược ta suy ra rằng đồ thị của hai hàm số ngược nhau, nếu cắt nhau thì cắt nhau trên đường thẳng $y = x$. Từ đó ta có thể áp dụng để giải các phương trình dạng $f(x) = f^{-1}(x)$ bằng cách đưa về phương trình $f(x) = x$ hoặc $f^{-1}(x) = x$. *Chẳng hạn ta xét ví dụ sau.*

Ví dụ. Giải phương trình $x^3 + (3 - a^2)a = 3.\sqrt[3]{3x + (a^2 - 3)a}$ với $a \in (-2;2)$.

Giải. Hàm số $y = \dfrac{x^3 + (3 - a^2)a}{3}$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên có hàm số ngược là

$y=\sqrt[3]{3x+\left(a^2-3\right)a}$. Hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y=\dfrac{x^3+\left(3-a^2\right)a}{3}$ và

$y=\sqrt[3]{3x+\left(a^2-3\right)a}$ chính là hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y=x$ và $y=\dfrac{x^3+\left(3-a^2\right)a}{3}$.

Do đó phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x^3+\left(3-a^2\right)a}{3}=x \Leftrightarrow x^3-3x+\left(3-a^2\right)a=0$$

$$\Leftrightarrow x^3-a^3-3(x-a)=0 \Leftrightarrow (x-a)\left(x^2+ax+a^2-3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a \\ x=\dfrac{-a\pm\sqrt{12-3a^2}}{2} \end{array}\right.$$ (do $a\in(-2;2)$ nên $12-3a^2>0$).

(Dĩ nhiên hai hàm số $y=\dfrac{x^3+\left(3-a^2\right)a}{3}$ và $y=\sqrt[3]{3x+\left(a^2-3\right)a}$ không trùng nhau)

Bằng phương pháp như trên chúng ta có thể giải được phương trình

$$x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}. \quad (1)$$

Thật vậy phương trình (1) có thể viết được dưới dạng $\dfrac{x^3+1}{2}=\sqrt[3]{2x-1}$

Hàm số $y=\dfrac{x^3+1}{2}$ có hàm số ngược là $y=\sqrt[3]{2x-1}$ (hai hàm số này không trùng nhau), nên phương trình (1) tương đương với $\dfrac{x^3+1}{2}=x$, từ đó ta được nghiệm $x=1$; $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Chú ý. Giải phương trình (1) có thể đặt $y=\sqrt[3]{2x-1}$ suy ra $y^3+1=2x$. Khi đó, phương trình (1) được viết thành hệ phương trình $\begin{cases} x^3+1=2y \\ y^3+1=2x \end{cases}$

Đây là hệ phương trình đối xứng ta sẽ nghiên cứu ở phần sau.

8. Các hàm số sơ cấp cơ bản

Ta gọi các hàm số sau đây là hàm số sơ cấp cơ bản

8.1. Hàm hằng: $y=a, a\in\mathbb{R}$

Hàm hằng $y=a$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$, tập giá trị $T_y=\{a\}$.

8.2. Hàm số lũy thừa: $y=f(x)=x^{\alpha}, \alpha\in\mathbb{R}$

Tập xác định của hàm số lũy thừa $y=x^{\alpha}$ tùy thuộc vào α, cụ thể ta có:

+ Nếu α nguyên dương thì $D=\mathbb{R}$.

+ Nếu α nguyên âm hoặc $\alpha=0$ thì $D=\mathbb{R}^*$.

+ Nếu α không nguyên thì $D = \mathbb{R}^+$.

Miền giá trị của hàm số lũy thừa cũng tùy thuộc vào α, chẳng hạn:

· $\alpha = 2$, ta có $y = f(x) = x^2; T_f = [0; +\infty)$.

· $\alpha = 3$, ta có $y = f(x) = x^3; T_f = \mathbb{R}$.

· $\alpha = \frac{1}{2}$, ta có $y = f(x) = x^{\frac{1}{2}}; T_f = [0; +\infty)$.

· $\alpha = -\frac{1}{3}$, ta có $y = f(x) = x^{-\frac{1}{3}}; T_f = \mathbb{R}^+$.

Chú ý. Với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$, đồ thị của hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ đi qua điểm $(1;1)$.

8.3. Hàm số mũ: $y = f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$

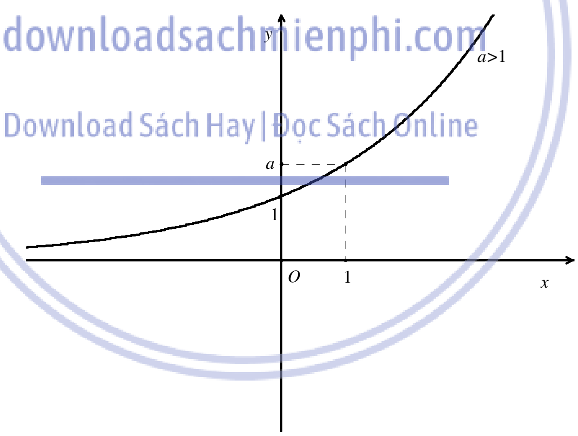
Hàm số mũ $y = a^x$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$. Miền giá trị của hàm số mũ là $T_f = (0; +\infty)$.

+ Nếu $a > 1$, thì hàm số mũ đồng biến trên tập xác định.

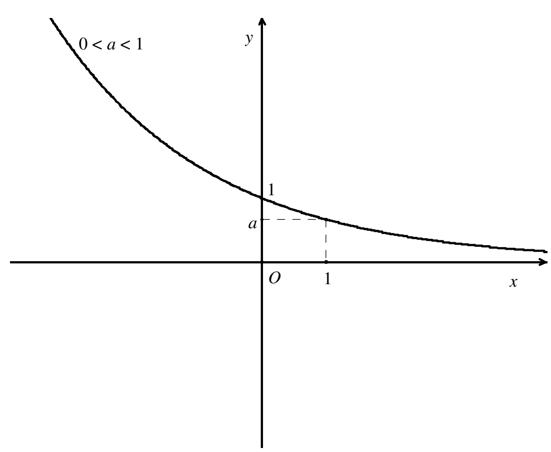
+ Nếu $0 < a < 1$, thì hàm số mũ nghịch biến trên tập xác định.

Chú ý. Đồ thị của hàm số mũ đi qua điểm $(0;1)$. Đồ thị của hàm số mũ như sau.

+ Đồ thị của hàm số $y = a^x, a > 1$



+ Đồ thị của hàm số $y = a^x, 0 < a < 1$



8.4. Hàm số logarit: $y = f(x) = \log_a x, a > 0, a \neq 1$

Hàm số logarit $y = \log_a x$ có tập xác định $D = (0; +\infty)$.

Miền giá trị của hàm số logarit là $T_f = \mathbb{R}$.

+ Nếu $a > 1$, thì hàm số logarit đồng biến trên tập xác định.

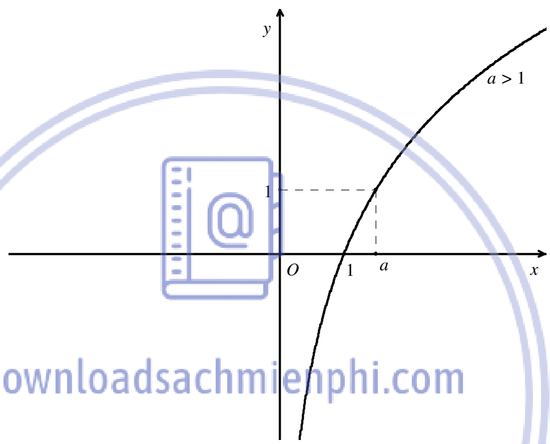
+ Nếu $0 < a < 1$, thì hàm số logarit nghịch biến trên tập xác định.

Chú ý. Đồ thị của hàm số logarit đi qua điểm $(1; 0)$.

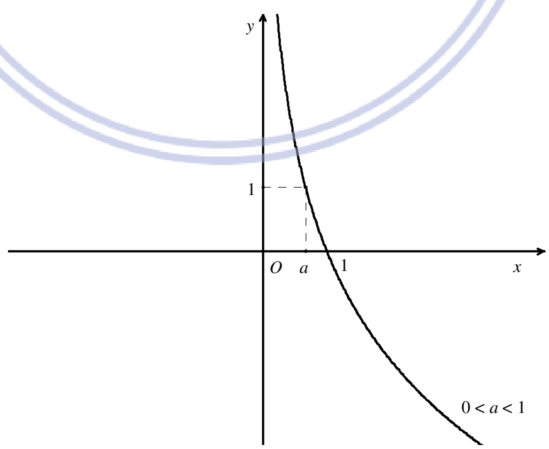
Hàm số $y = \log_a x$ và hàm số $y = a^x$ là hai hàm số ngược nhau.

Đồ thị của hàm số logarit như sau.

+ $y = \log_a x, a > 1$



+ $y = \log_a x, 0 < a < 1$



8.5. Hàm số lượng giác

8.5.1. Hàm số $y = \sin x$ và hàm số $y = \cos x$

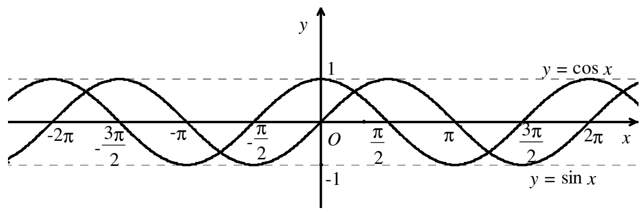
Các hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ đều có tập xác định $D = \mathbb{R}$,

và miền giá trị là đoạn $[-1;1]$. Các hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ đều là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$.

Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ, đồng biến trên mỗi khoảng $(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi), k \in \mathbb{Z}$; nghịch biến trên mỗi khoảng $(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi), k \in \mathbb{Z}$.

Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn, đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi), k \in \mathbb{Z}$; nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi), k \in \mathbb{Z}$.

Đồ thị của các hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ như sau.



8.5.2. Hàm số $y = \tan x; y = \cot x$

· Hàm số $y = \tan x$

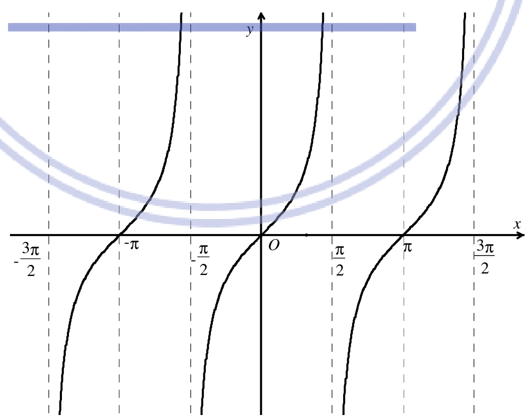
Hàm số $y = \tan x$ có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Miền giá trị là $\mathbb{R}$.

Hàm số $y = \tan x$ luôn luôn đồng biến trên mỗi khoảng $(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in \mathbb{Z}$.

Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ, và là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$.

Đồ thị của hàm số $y = \tan x$ như sau.



· Hàm số $y = \cot x$

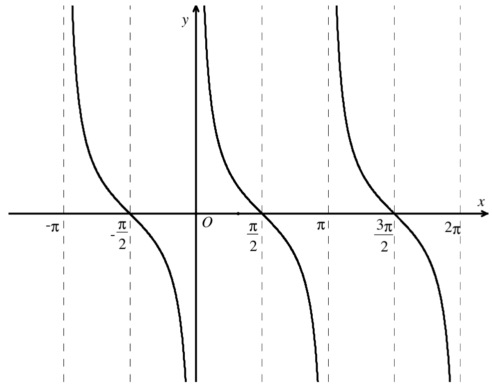
Hàm số $y = \cot x$ có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.

Miền giá trị là $\mathbb{R}$.

Hàm số $y = \cot x$ luôn luôn nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}$.

Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ, và là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$.

Đồ thị của hàm số $y = \cot x$ như sau.



8.6. Hàm số lượng giác ngược

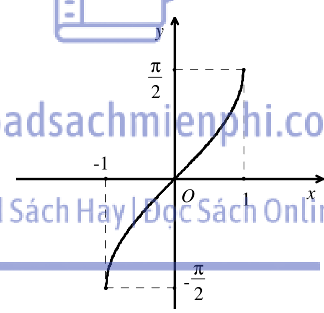
8.6.1. Hàm số $y = arc\sin x$

Hàm số $y = arc\sin x$ là hàm số ngược của hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$.

Hàm số $y = arc\sin x$ có tập xác định là $D = [-1;1]$. Miền giá trị là $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$.

Hàm số $y = arc\sin x$ tăng trên tập xác định. Hàm số $y = arc\sin x$ là hàm số lẻ.

Đồ thị của hàm số $y = arc\sin x$ như sau.



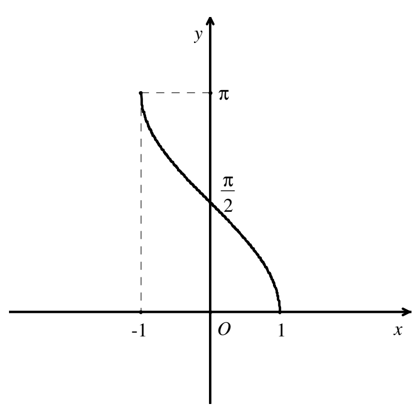
8.6.2. Hàm số $y = arc\cos x$

Hàm số $y = arc\cos x$ là hàm số ngược của hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $[0;\pi]$.

Hàm số $y = arc\cos x$ có tập xác định là $D = [-1;1]$. Miền giá trị là $[0;\pi]$.

Hàm số $y = arc\cos x$ giảm trên tập xác định.

Đồ thị của hàm số $y = arc\cos x$ như sau.



8.6.3. Hàm số $y = arc\tan x$

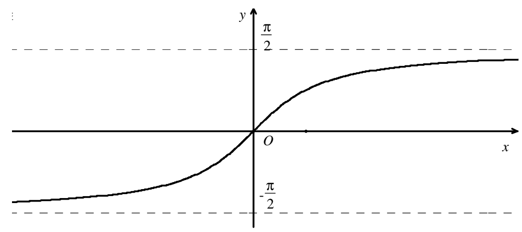
Hàm số $y = arc\tan x$ là hàm số ngược của hàm số $y = \tan x$ trên khoảng $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

Hàm số $y = arc\tan x$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$. Miền giá trị là $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

Hàm số $y = arc\tan x$ luôn luôn tăng trên tập xác định.

Hàm số $y = arc\tan x$ là hàm số lẻ.

Đồ thị của hàm số $y = arc\tan x$ như sau.



8.6.4. Hàm số $y = arc\cot x$

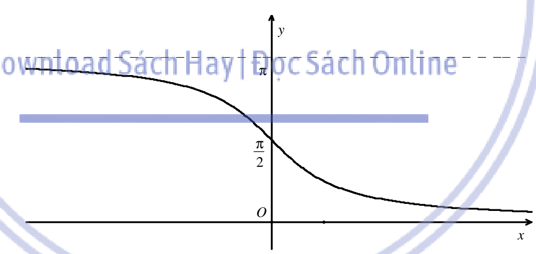
Hàm số $y = arc\cot x$ là hàm số ngược của hàm số $y = \cot x$ trên khoảng $(0; \pi)$.

Hàm số $y = arc\cot x$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$. Miền giá trị là $(0; \pi)$.

Hàm số $y = arc\cot x$ luôn luôn giảm trên tập xác định.

Hàm số $y = arc\cot x$ là hàm số lẻ.

Đồ thị của hàm số $y = arc\cot x$ như sau.



Ta gọi *hàm số sơ cấp* là hàm số cho bởi một công thức duy nhất $y = f(x)$ với $f(x)$ là tổng, hiệu, tích, thương hoặc là hàm hợp của một số hữu hạn các hàm số sơ cấp cơ bản.

§2. MỘT SỐ PHÉP BIẾN ĐỔI ĐỒ THỊ

1. Trục đối xứng, tâm đối xứng của đồ thị

Chúng ta đã biết đồ thị hàm số chẵn nhận trục Oy làm trục đối xứng, đồ thị hàm số lẻ nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng. Sau đây chúng ta đưa ra dấu hiệu cho biết đồ thị của một hàm số có trục đối xứng, tâm đối xứng. (Trong phần này chúng ta chỉ xét trục đối xứng của đồ thị hàm số, cùng phương với trục tung).

1.1. Định lý. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ nhận đường thẳng Δ có phương trình $x = \alpha$ làm trục đối xứng khi và chỉ khi $f(2\alpha - x) = f(x)$ với mọi $x \in D$.

Thật vậy, muốn cho đường thẳng Δ có phương trình $x = \alpha$ là trục đối xứng của đồ thị $y = f(x)$ thì ắt có và đủ là nếu điểm $M(x; y)$ thuộc đồ thị thì điểm M' đối xứng với điểm M qua Δ cũng thuộc đồ thị. Ở đây điểm M' có tọa độ $(2\alpha - x; y)$, như vậy với mọi $x \in D$

ta có $f(2\alpha - x) = f(x)$.

Ví dụ. Đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$ nhận đường thẳng $x = -\dfrac{b}{2a}$ làm trục đối xứng vì ta có $f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(-x - \dfrac{b}{a}\right)^2 + b\left(-x - \dfrac{b}{a}\right) + c$, với mọi $x \in \mathbb{R}$.

1.2. Định lý. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ nhận điểm $I(\alpha;\beta)$ làm tâm đối xứng khi và chỉ khi $f(2\alpha - x) = 2\beta - f(x), \forall x \in D$.

Thật vậy, muốn cho điểm $I(\alpha;\beta)$ là tâm đối xứng của đồ thị, ắt có và đủ là nếu điểm $M(x;y)$ thuộc đồ thị thì điểm M' đối xứng với nó qua I, tức là điểm có tọa độ $M'(2\alpha - x; 2\beta - y)$ cũng thuộc đồ thị, tức là với mọi $x \in D$, ta phải có

$$2\beta - f(x) = f(2\alpha - x).$$

Chú ý. Trong định lý 1.1 cho $\alpha = 0$ và trong định lý 1.2 cho $\alpha = \beta = 0$, ta được kết quả

+ Đồ thị của hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng.

+ Đồ thị hàm số lẻ nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.

Trong thực tế muốn chứng minh đồ thị hàm số $y = f(x)$ nhận đường thẳng $x = x_0$ làm trục đối xứng thì ta có thể làm như sau:

· Dời hệ trục tọa độ Oxy về hệ trục IXY, với $I(x_0;0)$ theo công thức $\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y \end{cases}$

· Lập hàm số mới bằng cách thay $x = X + x_0$; $y = Y$ vào hàm số $y = f(x)$;

· Chứng minh hàm số mới $Y = g(X)$ là hàm số chẵn để kết luận $x = x_0$ là trục đối xứng.

Tương tự như trên, muốn chứng minh $I(x_0, y_0)$ là tâm đối xứng của đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$, ta dời hệ trục tọa độ Oxy sang hệ trục IXY, bằng phép đặt $\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$;

Sau đó chứng minh hàm số mới $Y = g(X)$ là hàm số lẻ để kết luận điểm $I(x_0; y_0)$ là tâm đối xứng của đồ thị.

Ví dụ 1. Chứng minh đồ thị của hàm số $y = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - 1$ nhận đường thẳng $x = 1$ làm trục đối xứng. Từ đó tìm giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành.

Giải. Đặt $\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y \end{cases}$

Hàm số đã cho trở thành

$Y = (X+1)^4 - 4(X+1)^3 - 2(X+1)^2 + 12(X+1) - 1$

$\Leftrightarrow Y = X^4 - 8X^2 + 6.$

Hàm số $Y = X^4 - 8X^2 + 6$ là hàm số chẵn. Vậy đường thẳng $x = 1$ là trục đối xứng của đồ thị hàm số đã cho.

Đặt $t = X^2 \geq 0 \Rightarrow t^2 - 8t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = 4 \pm \sqrt{10}$

$\Rightarrow X_{1,2} = \pm\sqrt{4-\sqrt{10}},\ X_{3,4} = \pm\sqrt{4+\sqrt{10}} \Rightarrow x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{4-\sqrt{10}},\ x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{4+\sqrt{10}}.$

Vậy, có bốn giao điểm của đồ thị hàm số đã cho với trục hoành là

$(1+\sqrt{4-\sqrt{10}};0),\ (1-\sqrt{4-\sqrt{10}};0),\ (1+\sqrt{4+\sqrt{10}};0),\ (1-\sqrt{4+\sqrt{10}};0).$

Ví dụ 2. Chứng minh đồ thị hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\ \ (a \neq 0)$ nhận điểm uốn $I\left(-\dfrac{b}{3a}; f\left(-\dfrac{b}{3a}\right)\right)$ làm tâm đối xứng.

Giải.

Dời hệ trục tọa độ bằng phép đặt $\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$ với $x_0 = -\dfrac{b}{3a}$; $y_0 = f\left(-\dfrac{b}{3a}\right)$. Thay vào hàm số $y = f(x)$ ta được

$Y + y_0 = a(X + x_0)^3 + b(X + x_0)^2 + c(X + x_0) + d$

$\Leftrightarrow Y = aX^3 + (3ax_0^2 + 2bx_0 + c)X.$

Hàm này là hàm số lẻ nên đồ thị nhận I làm tâm đối xứng.

Như vậy, đồ thị hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\ \ (a \neq 0)$ nhận điểm uốn làm tâm đối xứng.

Ta cũng có kết quả: Đồ thị của các hàm số

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}, c \neq 0; ad - bc \neq 0;$$

$$y = \frac{ax^2+bx+c}{dx+e} (a.d \neq 0, \text{ mẫu và tử không có nghiệm chung})$$

nhận giao điểm của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = x^4 + (m+3)x^3 + 2(m+1)x^2$.

Tìm m để đồ thị của hàm số có trục đối xứng cùng phương với trục tung.

Giải.

Giả sử $x = \alpha$ là trục đối xứng của đồ thị hàm số đã cho. Đặt $x = X + \alpha$. Khi đó

$y = X^4 + (4\alpha + m + 3)X^3 + [6\alpha^2 + 3\alpha(m+3) + 2(m+1)]X^2$

$+[4\alpha^3 + 3\alpha^2(m+3) + 4\alpha(m+1)]X + \alpha^4 + (m+3)\alpha^3 + 2(m+1)\alpha^2$

phải là hàm số chẵn. Điều này tương đương với

$$\begin{cases} 4\alpha + m + 3 = 0 \quad (1) \\ 4\alpha^3 + 3\alpha^2(m+3) + 4\alpha(m+1) = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Thay (1) vào (2) ta được $-8\alpha(\alpha+1)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\alpha=0 \Rightarrow m=-3 \\ \alpha=-1 \Rightarrow m=1.\end{array}\right.$

2. Phép đối xứng qua trục tọa độ

2.1. Định lý. Đồ thị của các hàm số $y=f(x)$ và $y=-f(x)$ đối xứng nhau qua trục hoành.

Chứng minh. Với mỗi giá trị của $x\in D$ thì các hàm số $y=f(x)$ và $y=-f(x)$ cho ta hai giá trị đối nhau của y, do đó đồ thị của chúng đối xứng nhau qua trục hoành.

2.2. Định lý. Đồ thị của các hàm số $y=f(x)$ và $y=f(-x)$ đối xứng nhau qua trục tung.

Chứng minh tương tự như định lý 2.1.

3. Phép tịnh tiến song song với trục tung

3.1. Định lý. Đồ thị của hàm số $y=f(x)+b$ $\left(y=f(x)-b\right)$, $b>0$ suy ra từ đồ thị $y=f(x)$ bằng một phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{Oy}$ $\left(-\overrightarrow{Oy}\right)$ một đoạn bằng b.

Chứng minh. Thật vậy, gọi $O'XY$ là hệ trục mới suy ra từ hệ trục Oxy bằng một phép tịnh tiến song song với trục tung về phía trên một đoạn $OO'=b$. Công thức đổi hệ trục tọa độ là

$$\begin{cases} x=X \\ y=Y+b. \end{cases}$$

Bằng phép tịnh tiến đồ thị $y=f(x)$ với b đơn vị theo vectơ $\overrightarrow{Oy}$, ta thu được đồ thị của hàm số $y=f(x)$ xét theo hệ trục mới, tức cũng là đồ thị của hàm số $y=f(x)+b$.

Trường hợp đối với hàm số $y=f(x)-b$, chứng minh tương tự.

Ví dụ 1. Từ đồ thị hàm số $y=x$ suy ra đồ thị hàm số $y=x+2$ bằng phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{Oy}$ 2 đơn vị.

Ví dụ 2. Đồ thị của hàm số $y=x^2+3$ thu được từ parabol $y=x^2$ bằng cách tịnh tiến 3 đơn vị theo vectơ $\overrightarrow{Oy}$.

4. Phép tịnh tiến song song với trục hoành

4.1. Định lý. Đồ thị hàm số $y=f(x+a)$ $\left(y=f(x-a)\right)$, $a>0$ suy được từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ bằng phép tịnh tiến theo vectơ $-\overrightarrow{Ox}$ $\left(\overrightarrow{Ox}\right)$ một đoạn bằng a.

Chứng minh tương tự như định lý 3.1.

Chẳng hạn đồ thị của hàm số $y=(x-2)^2$ thu được từ phép tịnh tiến parabol $y=x^2$ theo vectơ $\overrightarrow{Ox}$ (sang bên phải) một đoạn bằng 2.

Nếu tịnh tiến parabol $y=x^2$ theo vectơ $-\overrightarrow{Ox}$ (sang bên trái) 2 đơn vị ta thu được đồ thị hàm số $y=(x+2)^2$.

Chú ý.

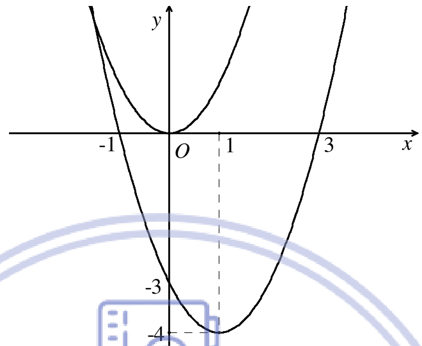
Ngoài phép tịnh tiến theo các trục tọa độ người ta còn đưa ra phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}\neq\vec{0}$.

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$, tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (a;b)$ thì được đồ thị hàm số $y = f(x-a) + b.$

Ví dụ 1. Từ đồ thị hàm số $y = f(x) = x^2$ suy ra đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x - 3$ bằng phép tịnh tiến theo véc tơ $\vec{v} = (1;-4).$

Thật vậy, ta có $y = x^2 - 2x - 3 = (x^2 - 2x + 1) - 4 = (x-1)^2 - 4 = f(x-1) - 4.$

Đồ thị của các hàm số $y = f(x) = x^2$ và $y = x^2 - 2x - 3$ vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ như sau.



Ví dụ 2. Tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x+1}$ theo véc tơ $\vec{v} = (-2;3)$ ta thu được đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x^2 + 9x + 19}{x+3}.$

Thật vậy, theo chú ý trên, thì tịnh tiến đồ thị của hàm số $y = f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x+1}$, theo véc tơ $\vec{v} = (-2;3)$ ta thu được đồ thị của hàm số

$$y = f(x+2) + 3 = \frac{(x+2)^2 + 2(x+2) + 2}{(x+2)+1} + 3$$

$$= \frac{x^2 + 4x + 4 + 2x + 4 + 2}{x+3} + 3 = \frac{x^2 + 6x + 10}{x+3} + 3$$

$$= \frac{x^2 + 6x + 10 + 3(x+3)}{x+3}$$

$$= \frac{x^2 + 6x + 10 + 3x + 9}{x+3}$$

$$= \frac{x^2 + 9x + 19}{x+3}.$$

5. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x$

a) Hãy dựng đồ thị của hàm số đã cho;

b) Từ đồ thị hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x,$ hãy suy ra các đồ thị sau đây, chỉ ra các phép biến đổi.

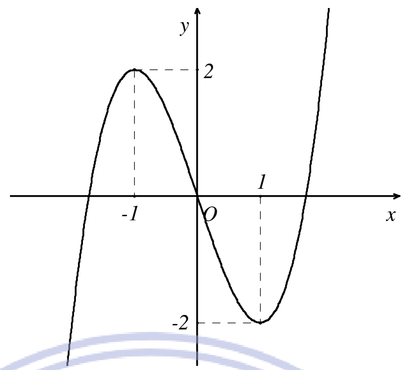
i) $y = x^3 - 3x + 2$;

ii) $y = x^3 - 3x^2$;

iii) $y = -x^3 + 3x$.

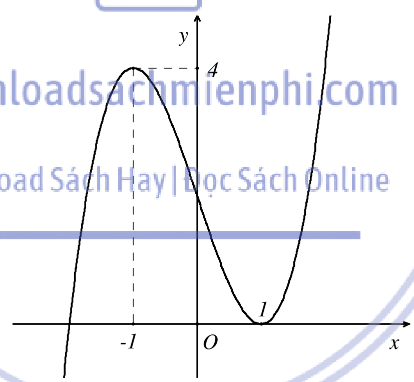
Giải.

a) Khảo sát hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x$, ta được đồ thị của hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x$ như sau



b) i) Từ đồ thị hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x$, suy ra đồ thị $y = x^3 - 3x + 2$ bằng phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{Oy}$ 2 đơn vị.

Đồ thị $y = x^3 - 3x + 2$ như sau



ii) Ta có

$$y = x^3 - 3x^2 = (x-1)^3 - 3(x-1) - 2$$
$$= f(x-1) - 2.$$

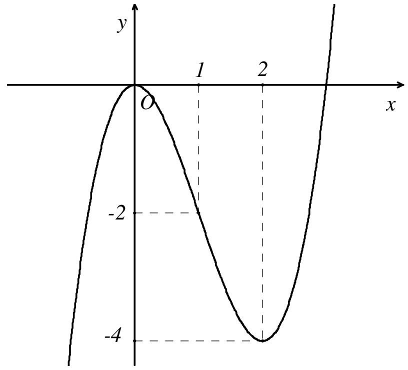
Do đó để có đồ thị $y = x^3 - 3x^2$ ta thực hiện hai bước:

+ *Bước 1:* Tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f(x)$ theo $\overrightarrow{Ox}$ 1 đơn vị ta được đồ thị (C_1)

+ *Bước 2:* Tịnh tiến (C_1) theo $-\overrightarrow{Oy}$ 2 đơn vị ta được đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$.

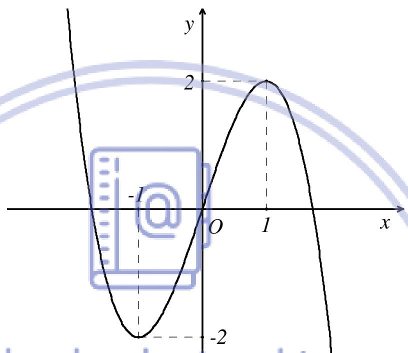
Hay nói cách khác, để có đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$ ta tịnh tiến đồ thị $y = f(x)$ theo vectơ $\vec{v} = (1; -2)$.

Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$ như sau



iii) Đối xứng qua Ox đồ thị $y=f(x)$ ta được đồ thị $y=-x^3+3x,$ hoặc là đối xứng qua trục tung đồ thị $y=f(x)$ ta cũng được đồ thị $y=-x^3+3x.$

Đồ thị hàm số $y=-x^3+3x$ như sau



Ví dụ 2. Xác định phép tịnh tiến đồ thị $y=x^3-3x^2$ theo vectơ $\vec{v}=(a;b)$ để được đồ thị $y=x^3+3x^2.$

Giải. Từ đồ thị $y=x^3-3x^2$ tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=(a;b)$ được đồ thị $y=x^3+3x^2$ khi và chỉ khi

$$x^3+3x^2=(x-a)^3-3(x-a)^2+b,\ \forall x$$

$$\Leftrightarrow x^3+3x^2=x^3-3(a+1)x^2+3(a^2+2a)x-a^3-3a^2+b,\ \forall x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3=-3(a+1) \\ 0=3(a^2+2a) \\ 0=-a^3-3a^2+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=4 \end{cases}$$

Vậy, tịnh tiến đồ thị $y=x^3-3x^2$ theo vectơ $\vec{v}=(-2;4)$ được đồ thị $y=x^3+3x^2.$

6. Đồ thị của một số hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối

6.1. Đồ thị hàm số $y=|f(x)|$

Ta có $y=|f(x)|=\begin{cases} f(x); & f(x)\ge 0 \\ -f(x); & f(x)<0 \end{cases}$

Do đó đồ thị của hàm số $y = |f(x)|$ gồm

+ Phần từ trục hoành trở lên của đồ thị hàm số $y = f(x)$;

+ Đối xứng phần đồ thị hàm số $y = f(x)$ phía dưới trục hoành qua trục hoành.

6.2. Đồ thị hàm số $y = f(|x|)$

Thấy ngay $y = f(|x|)$ là hàm số chẵn nên đồ thị có trục đối xứng là Oy. Với $x \geq 0$ thì $y = f(|x|) = f(x)$. Vậy đồ thị gồm hai phần

+ Phần bên phải Oy của đồ thị $y = f(x)$;

+ Đối xứng phần trên qua Oy.

6.3. Đồ thị hàm số $y = |u(x)|.v(x)$

Ta có $y = |u(x)|.v(x) = \begin{cases} u(x).v(x); & u(x) \geq 0 \\ -u(x).v(x); & u(x) < 0 \end{cases}$

Do đó ta vẽ đồ thị $y = f(x) = u(x).v(x)$ và từ đó đồ thị $y = |u(x)|.v(x)$ gồm

+ Phần đồ thị $y = f(x)$ trên miền $u(x) \geq 0$.

+ Đối xứng phần đồ thị $y = f(x)$ trên miền $u(x) < 0$ qua trục hoành.

6.4. Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra đường biểu diễn $|y| = f(x)$, (ζ)

Ta có nhận xét: Giả sử điểm $(x_0; y_0)$ thuộc (ζ) thì $(x_0; -y_0)$ cũng thuộc (ζ).

Vậy, (ζ) có trục đối xứng là Ox. Với $y \geq 0$ thì $|y| = f(x) \Leftrightarrow y = f(x)$.

Do đó (ζ) gồm hai phần

+ Phần đồ thị từ trục hoành trở lên của đồ thị $y = f(x)$

+ Đối xứng phần trên qua trục hoành để được phần còn lại.

Ví dụ. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{x^2 - x - 1}{x - 2}$

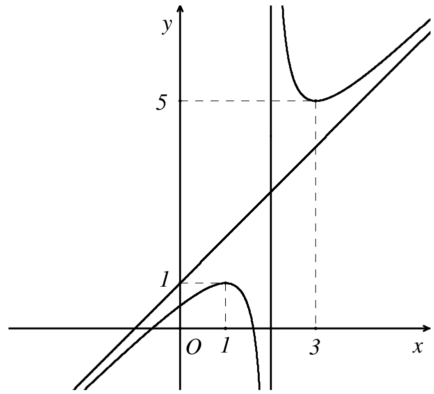
a) Dựng đồ thị của hàm số đã cho;

b) Từ đồ thị hàm số $y = f(x) = \dfrac{x^2 - x - 1}{x - 2}$, hãy vẽ các đường sau

$y = \dfrac{x^2 - x - 1}{|x - 2|}$; $y = \left|\dfrac{x^2 - x - 1}{x - 2}\right|$; $|y| = \dfrac{x^2 - x - 1}{x - 2}$; $y = \dfrac{x^2 - |x| - 1}{|x| - 2}$.

Giải.

a) Đồ thị của hàm số đã cho như sau.



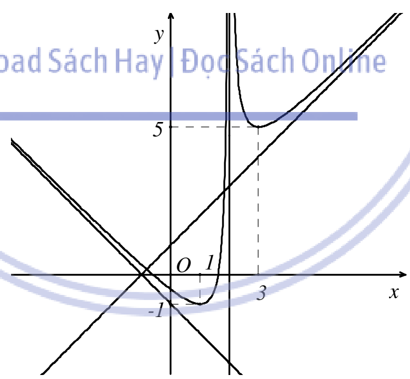
b) · Ta có $y=\dfrac{x^2-x-1}{|x-2|}=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-1}{x-2}; & x>2\\ -\dfrac{x^2-x-1}{x-2}; & x<2\end{cases}$

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-x-1}{|x-2|}$ gồm hai phần

+ Phần đồ thị $y=f\left(x\right)$ trên miền $x>2$;

+ Đối xứng phần đồ thị $y=f\left(x\right)$ trên miền $x<2$ qua trục hoành.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-x-1}{|x-2|}$ như sau.



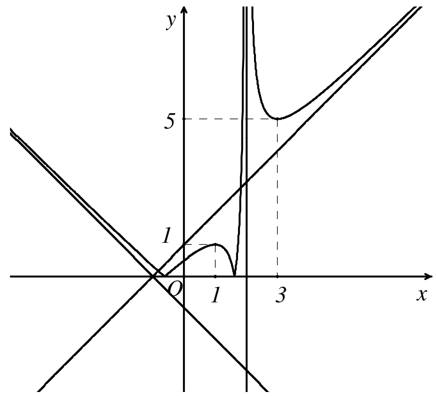
· Ta có $y=\left|\dfrac{x^2-x-1}{x-2}\right|=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-1}{x-2}; & f(x)\ge 0\\ -\dfrac{x^2-x-1}{x-2}; & f(x)<0\end{cases}$

Đồ thị hàm số $y=\left|\dfrac{x^2-x-1}{x-2}\right|$ gồm hai phần.

+ Phần từ trục hoành trở lên của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$;

+ Đối xứng phần đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ phía dưới trục hoành qua trục hoành.

Đồ thị hàm số $y=\left|\dfrac{x^2-x-1}{x-2}\right|$ như sau.



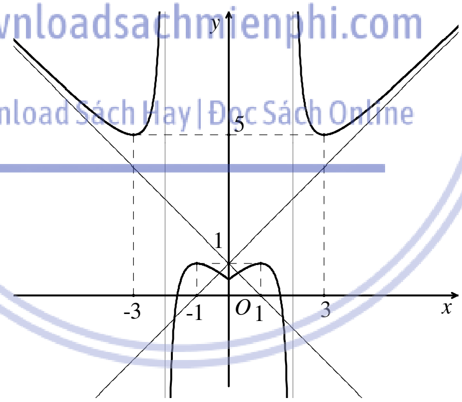
· Ta có $y=f\left(|x|\right)$ là hàm số chẵn nên đồ thị có trục đối xứng là Oy.

Với $x\ge 0$ thì $y=f\left(|x|\right)=f\left(x\right)$. Vậy đồ thị gồm hai phần.

+ Phần bên phải Oy của đồ thị $y=f\left(x\right)$;

+ Đối xứng phần trên qua Oy.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-|x|-1}{|x|-2}$ như sau



· Giả sử đường biểu diễn $|y|=f\left(x\right)$ là $\left(\zeta\right)$.

Ta có nhận xét sau đây:

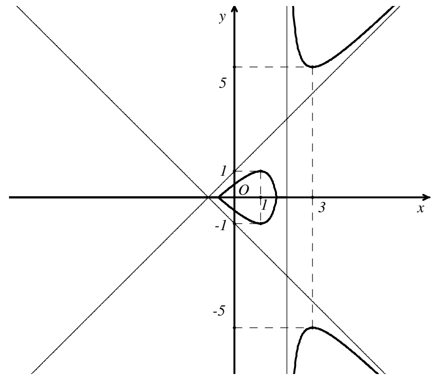
Nếu điểm $\left(x_0;y_0\right)$ thuộc $\left(\zeta\right)$ thì $\left(x_0;-y_0\right)$ cũng thuộc $\left(\zeta\right)$. Vậy $\left(\zeta\right)$ có trục đối xứng là Ox.
Với $y\ge 0$ thì $|y|=f\left(x\right)\Leftrightarrow y=f\left(x\right)$. Do đó $\left(\zeta\right)$ gồm hai phần.

+ Phần đồ thị từ trục hoành trở lên của đồ thị $y=f\left(x\right)$;

+ Đối xứng phần trên qua trục hoành để được phần còn lại.

Chúng ta chú ý rằng, $\left(\zeta\right)$ không phải là đồ thị của một hàm số, vì $|y|=f\left(x\right)$ không phải là một hàm số.

Đường biểu diễn $|y|=f\left(x\right)$ như sau.



§3. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

1. Định nghĩa

Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định trên tập D.

a) Số M được gọi là *giá trị lớn nhất* của hàm số $y = f\left(x\right)$ trên tập D nếu

$i)$ $\forall x \in D : f\left(x\right) \le M$;

$ii)$ $\exists x_0 \in D : f\left(x_0\right) = M$.

Kí hiệu $M = \underset{x \in D}{Max}\, f\left(x\right)$.

b) Số m được gọi là *giá trị nhỏ nhất* của hàm số $y = f\left(x\right)$ trên tập D nếu

$i)$ $\forall x \in D : f\left(x\right) \ge m$;

$ii)$ $\exists x_0 \in D : f\left(x_0\right) = m$.

Kí hiệu $m = \underset{x \in D}{Min}\, f\left(x\right)$.

2. Một số phương pháp tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

2.1. Phương pháp miền giá trị

Nội dung của phương pháp này như sau.

+ Xem $y = f\left(x\right)$ là phương trình đối với ẩn x và y là tham số;

+ Tìm điều kiện của y để phương trình $y = f\left(x\right)$ có nghiệm;

+ Từ điều kiện trên, biến đổi đưa đến dạng $m \le y \le M$. Xét dấu "=" xảy ra và kết luận $Minf\,(x) = m; Maxf\,(x) = M$.

2.2. Phương pháp đạo hàm

+ Khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = f\left(x\right)$;

+ Dựa vào bảng biến thiên để kết luận $Maxf\,(x); Minf\,(x)$.

Chú ý. Trong trường hợp tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f\left(x\right)$ trên đoạn $[a;b]$, ta có thể trình bày đơn giản như sau.

Bước 1. Tìm $f'(x)$ và tìm các điểm tới hạn $x_1, x_2, ..., x_n$ của $f\left(x\right)$ trên đoạn $[a;b]$;

Bước 2. Tính $f\left(x_1\right), f\left(x_2\right),..., f\left(x_n\right), f\left(a\right), f\left(b\right)$;

Bước 3. Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số trên, khi đó

$$M = \underset{x\in[a;b]}{Max} f\left(x\right);\ m = \underset{x\in[a;b]}{Min} f\left(x\right).$$

(Nếu hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, thì giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[a;b]$ bao giờ cũng tồn tại).

2.3. Phương pháp dùng bất đẳng thức

Dùng bất đẳng thức quen thuộc để chứng minh $f\left(x\right) \le M$ hoặc $f\left(x\right) \ge m.$

Phải chỉ ra tồn tại $x_0; x_1 \in D$ sao cho $f\left(x_0\right) = M$, $f\left(x_1\right) = m.$ Khi đó

$$M = \underset{x\in[a;b]}{Max} f\left(x\right);\ m = \underset{x\in[a;b]}{Min} f\left(x\right).$$

Chúng ta sẽ nghiên cứu kỹ về bất đẳng thức trong Chương III, tuy nhiên các bất đẳng thức quen thuộc sau đây sẽ được dùng để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số.

+ *Bất đẳng thức Côsi.* (Augustin Louis Cauchy,1789 – 1857. Nhà Toán học Pháp).

Cho n số thực $a_1, a_2, ..., a_n$ không âm. Thế thì

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

+ *Bất đẳng thức Bunhiacôpski.* (Victor Yakovlevich Bunyakovsky, 1804 – 1889. Nhà Toán học Nga).

Cho n cặp số thực $(a_i; b_i)$, $i = 1, 2,..., n.$

Thế thì

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi tồn tại $k \in \mathbb{R}$ sao cho $b_i = ka_i$, $i = 1, 2,..., n.$

+ *Bất đẳng thức về dấu giá trị tuyệt đối.* Cho $a, b, a_i, i = 1, 2, ..., n$ là các số thực. Thế thì

$$|a+b| \le |a| + |b| (*); \left||a| - |b|\right| \le |a-b| (**); |a_1 + a_2 + ... + a_n| \le |a_1| + |a_2| + ... + |a_n| \ (***)$$

Dấu " = " trong (*) và (**) xảy ra, khi và chỉ khi $ab \ge 0.$ Dấu " = " trong (***) xảy ra, khi và chỉ khi $a_i \ge 0$ hoặc $a_i \le 0, \forall i = 1, 2, ..., n.$

3. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = f(x) = \frac{x+1}{x^2 + x + 1}.$$

Giải.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Ta có

$$y' = \frac{(x^2+x+1)-(2x+1)(x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{-x^2-2x}{(x^2+x+1)^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow -x^2-2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên, ta được

$$Maxf(x) = 1; Minf(x) = -\frac{1}{3}.$$

Ví dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \frac{\cos x + 2\sin x + 3}{2\cos x - \sin x + 4}.$$

Giải.

Tập xác định của hàm số $y = f(x) = \dfrac{\cos x + 2\sin x + 3}{2\cos x - \sin x + 4}$ là $D = \mathbb{R}$.

Giả sử y_0 thuộc tập giá trị của hàm số đã cho, khi đó $y_0 = \dfrac{\cos x + 2\sin x + 3}{2\cos x - \sin x + 4}$ (1) có nghiệm đối với x.

(1) $\Leftrightarrow (2y_0 - 1)\cos x - (y_0 + 2)\sin x = 3 - 4y_0$.

(1) có nghiệm khi và chỉ khi

$$(2y_0-1)^2 + (y_0+2)^2 \geq (3-4y_0)^2 \Leftrightarrow 11y_0^2 - 24y_0 + 4 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{11} \leq y_0 \leq 2.$$

Chú ý rằng luôn tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $y_0 = 2$ và tồn tại $x_1 \in \mathbb{R}$ sao cho $y_0 = \dfrac{2}{11}$.

Vậy, $Maxf(x) = 2; Minf(x) = \dfrac{2}{11}$.

Ví dụ 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm

$$y = f(x) = x + \sqrt{2-x^2}.$$

Giải. Tập xác định $D = \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$.

Ta có

$$y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{2-x^2}} = \frac{\sqrt{2-x^2} - x}{\sqrt{2-x^2}}$$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

Hàm số có các điểm tới hạn là $x = 1$; $x = \pm\sqrt{2}.$

$f(1) = 2$; $f\left(\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}$; $f\left(-\sqrt{2}\right) = -\sqrt{2}.$

Vậy, $\underset{x\in[-\sqrt{2};\sqrt{2}]}{Max} f(x) = 2; \underset{x\in[-\sqrt{2};\sqrt{2}]}{Min} f(x) = -\sqrt{2}.$

Ví dụ 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}.$$

Giải. Điều kiện: $\begin{cases} 0 \le \cos x \le 1 \\ 0 \le \sin x \le 1 \end{cases}$

Khi đó $1 = \cos^2 x + \sin^2 x \le \sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}.$

Như vậy $Min y = 1$ đạt tại chẳng hạn $x = 0.$

Mặt khác theo bất đẳng thức Bunhiacôpski ta có

$$y = \sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x} \le \sqrt{\left(1^2 + 1^2\right)\left[\left(\sqrt{\cos x}\right)^2 + \left(\sqrt{\sin x}\right)^2\right]}$$

$$= \sqrt{2\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} \le \sqrt{2\sqrt{2}}.$$

Dấu "=" xảy ra chẳng hạn tại $x = \frac{\pi}{4}$. Vậy, $Max y = \sqrt{2\sqrt{2}}$ đạt tại $x = \frac{\pi}{4}.$

Ví dụ 5. Cho phương trình

$$3x^2 - 3mx + m^2 - 4 + \frac{12}{m^2} = 0 \ (1)$$

Hãy tìm m để biểu thức $A = x_1^3 + x_2^3$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất. Với x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1).

Giải. Phương trình đã cho có nghiệm x_1, x_2 khi và chỉ khi

$$\Delta' = 9m^2 - 12\left(m^2 - 4 + \frac{12}{m^2}\right) \ge 0 \Leftrightarrow 4 \le m^2 \le 12$$

$$\Leftrightarrow 2 \le |m| \le 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2\sqrt{3} \le m \le -2 \\ 2 \le m \le 2\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Ta có $A = x_1^3 + x_2^3 = \left(x_1 + x_2\right)^3 - 3x_1x_2\left(x_1 + x_2\right) = \frac{m}{2} - \frac{3}{2m}.$

Xét hàm số $y = f(m) = \frac{m}{2} - \frac{3}{2m}$ trên miền $D = \left[-2\sqrt{3}; -2\right] \cup \left[2; 2\sqrt{3}\right].$

$y'=\frac{1}{2}+\frac{3}{2m^2}>0,\ \forall m\in D,$ suy ra hàm số $f(m)$ tăng trong $\left[-2\sqrt{3};-2\right]$ và $\left[2;2\sqrt{3}\right]$.

Ta có $f(-2)=-\frac{1}{4}<\frac{1}{4}=f(2)$.

Vậy, khi $m=-2\sqrt{3}$ thì A đạt giá trị nhỏ nhất ;

$m=2\sqrt{3}$ thì A đạt giá trị lớn nhất.

Ví dụ 6. Cho hai số x, y thỏa mãn

$$8x^2+y^2+\frac{1}{4x^2}=4.$$

Xác định x, y để tích xy đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải.

Ta có $8x^2+y^2+\frac{1}{4x^2}=4 \Leftrightarrow \left(4x^2+\frac{1}{4x^2}-2\right)+\left(4x^2+y^2+4xy\right)-4xy-2=0$

$$\Leftrightarrow 4xy=\left(2x-\frac{1}{2x}\right)^2+(2x+y)^2-2\geq -2 \Leftrightarrow xy\geq -\frac{1}{2}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}2x=\frac{1}{2x}\\ -2x=y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y=-1\end{cases} \vee \begin{cases}x=-\frac{1}{2}\\ y=1\end{cases}$

Vậy, giá trị nhỏ nhất của xy là $-\frac{1}{2}$, đạt được khi và chỉ khi

$$(x;y)=\left(\frac{1}{2};-1\right) \text{ hoặc } (x;y)=\left(-\frac{1}{2};1\right).$$

Ví dụ 7. Cho ba số thực a,b,c thỏa mãn $a+b+c\leq 3$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$P=\frac{a+1+a\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{b+1+b\sqrt{b^2+1}}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{c+1+c\sqrt{c^2+1}}{\sqrt{c^2+1}}.$$

Giải.

Ta có $P=\frac{a+1+a\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{b+1+b\sqrt{b^2+1}}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{c+1+c\sqrt{c^2+1}}{\sqrt{c^2+1}}$

$$=\frac{a+1}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{b+1}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{c+1}{\sqrt{c^2+1}}+a+b+c.$$

Đặt $T=\frac{a+1}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{b+1}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{c+1}{\sqrt{c^2+1}}$.

Xét hàm số $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}$.

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}(x+1)}{x^2+1}=\frac{1-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1.$$

Như vậy, hàm số chỉ có một điểm tới hạn duy nhất và lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ ta được hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x=1$, giá trị lớn nhất là $\sqrt{2}$. Vậy, ta có $f(x)\le\sqrt{2}$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Suy ra $\frac{a+1}{\sqrt{a^2+1}}\le\sqrt{2}$. (1)

$\frac{b+1}{\sqrt{b^2+1}}\le\sqrt{2}$. (2)

$\frac{c+1}{\sqrt{c^2+1}}\le\sqrt{2}$. (3)

Cộng (1), (2) và (3) theo vế, ta được $T\le 3\sqrt{2}$ (4)

Theo giả thiết $a+b+c\le 3$ (5)

Cộng (4) và (5) theo vế, ta được $P\le 3\sqrt{2}+3$.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Vậy, $MaxP=3\sqrt{2}+3$.

Ví dụ 8. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y=f(x)=\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+15-8\sqrt{x-1}}.$$

Giải.

Điều kiện: $x\ge 1$.

Ta có $f(x)=\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+15-8\sqrt{x-1}}$

$$=\sqrt{x-1-4\sqrt{x-1}+4}+\sqrt{x-1-8\sqrt{x-1}+16}$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-4\right)^2}$$

$$=\left|\sqrt{x-1}-2\right|+\left|\sqrt{x-1}-4\right|$$

$$=\left|\sqrt{x-1}-2\right|+\left|4-\sqrt{x-1}\right|\ge\left|\sqrt{x-1}-2+4-\sqrt{x-1}\right|=2.$$

$$f(x)=2\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\sqrt{x-1}-2\right).\left(4-\sqrt{x-1}\right)\ge 0\\ x\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\le\sqrt{x-1}\le 4\\ x\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow 5\le x\le 17.$$

Vậy, $\underset{x\in[5;7]}{Min}\, f(x)=2.$

Ví dụ 9. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $u=\dfrac{3y^2-4xy}{x^2+y^2}$.

Giải.

Điều kiện: $x^2+y^2\neq 0$. Ta giả sử $x\neq 0$, khi đó, chia tử và mẫu của u cho x^2 ta được

$$u=\frac{3\left(\frac{y}{x}\right)^2-4\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Đặt $t=\dfrac{y}{x}$, khi đó $u=\dfrac{3t^2-4t}{1+t^2}$.

Giả sử u_0 là một giá trị bất kì của hàm số $u=\dfrac{3t^2-4t}{1+t^2}$. Khi đó, tồn tại $t\in\mathbb{R}$ sao cho phương trình $(u_0-3)t^2+4t+u_0=0$ (*) có nghiệm t.

· $u_0=3$, (*) trở thành $4t+3=0 \Leftrightarrow t=-\dfrac{3}{4}$. Do đó nhận $u_0=3$.

· $u_0\neq 3$, (*) có nghiệm khi và chỉ khi $4-u_0(u_0-3)\geq 0$

$$\Leftrightarrow -u_0^2+3u_0+4\geq 0$$

$$\Leftrightarrow -1\leq u_0\leq 4.$$

Do đó, với $-1\leq u_0\leq 4$ thì (*) có nghiệm. Từ đó suy ra $-1\leq u\leq 4$ với mọi $(x;y)$ thỏa $x^2+y^2\neq 0$.

Vậy, $Min\,u=-1$ và $Max\,u=4$.

Ví dụ 10. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$p=\sqrt{2x+1}+\sqrt{3y+1}+\sqrt{4z+1}$$

Trong đó x,y,z là ba số thực không âm thỏa $x+y+z=4$.

Giải.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski cho hai bộ số

$$(\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4});\left(\sqrt{x+\frac{1}{2}},\sqrt{y+\frac{1}{3}},\sqrt{z+\frac{1}{4}}\right)$$

Ta có $p^2\leq(2+3+4)\left(x+\dfrac{1}{2}+y+\dfrac{1}{3}+z+\dfrac{1}{4}\right)=9\left(4+\dfrac{13}{12}\right)=\dfrac{183}{4}$

$\Rightarrow p\leq\dfrac{\sqrt{183}}{2}.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x+y+z=4;(x,y,z\ge 0) \\ \dfrac{x+\frac{1}{2}}{2}=\dfrac{y+\frac{1}{3}}{3}=\dfrac{z+\frac{1}{4}}{4}=\dfrac{x+y+z+\frac{13}{12}}{9}=\dfrac{61}{108} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{17}{27} \\ y=\dfrac{49}{36} \\ z=\dfrac{217}{108} \end{cases}$$

Vậy, $Maxp=\dfrac{\sqrt{183}}{2}$.

Mặt khác, ta đặt $a=\sqrt{2x+1}, b=\sqrt{3y+1}, z=\sqrt{4z+1}, a,b,c\ge 1$.

$p^2=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ (1)

Mà $a^2+b^2+c^2=3+2(x+y+z)+(y+2z)\ge 3+2.4=11$ (2)

Do $a,b,c\ge 1 \Rightarrow (a-1)(b-1)+(b-1)(c-1)+(c-1)(a-1)\ge 0$

$\Leftrightarrow ab+bc+ca\ge 2(a+b+c)-3=2p-3$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $p^2\ge 11+2(2p-3)\Leftrightarrow p^2-4p-5\ge 0\Rightarrow p\ge 5$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x=4 \\ y=z=0. \end{cases}$$

Vậy, $Minp=5$.

Ví dụ 11. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T=\frac{1}{xyz}(yz\sqrt{x-1}+zx\sqrt{y-2}+xy\sqrt{z-3})$$

Giải.

Điều kiện: $x\ge 1, y\ge 2, z\ge 3$.

Biểu thức được viết lại $T=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x}+\dfrac{\sqrt{y-2}}{y}+\dfrac{\sqrt{z-3}}{z}$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi đối với hai số không âm $(x-1);1$ ta được

$$\sqrt{x-1}=\sqrt{(x-1).1}\le \frac{x-1+1}{2}=\frac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x-1}}{x}\le \frac{1}{2}.$$

Lập luận tương tự như trên, ta cũng có

$$\frac{\sqrt{y-2}}{y} \le \frac{1}{2\sqrt{2}}$$
$$\frac{\sqrt{z-3}}{z} \le \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Như vậy, ta được $T \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x-1=1 \\ y-2=2 \\ z-3=3 \\ x \ge 1, y \ge 2, z \ge 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=4 \\ z=6. \end{cases}$$

Vậy, $MaxT = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

2.4. Phương pháp tọa độ véc tơ

Ta có các bất đẳng thức về véc tơ như sau

· $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| \le |\vec{a}| + \left|\vec{b}\right|$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng.

· $\left||\vec{a}| - \left|\vec{b}\right|\right| \le \left|\vec{a}-\vec{b}\right|$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng.

· $\left|\vec{a}.\vec{b}\right| \le |\vec{a}|.\left|\vec{b}\right|$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương.

Ví dụ 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = f(x) = \sqrt{x^2+2x+2} + \sqrt{x^2-2x+2}$$

Giải.

Ta có

$$x^2+2x+2 = (x+1)^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$
$$x^2-2x+2 = (x-1)^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ta viết lại hàm số như sau

$$y = f(x) = \sqrt{(x+1)^2 + 1^2} + \sqrt{(x-1)^2 + 1^2}$$

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, xét hai véc tơ $\vec{u} = (x+1;1), \vec{v} = (1-x;1)$

Khi đó

$$\vec{u}+\vec{v} = (2;2), |\vec{u}| = \sqrt{(x+1)^2+1}, |\vec{v}| = \sqrt{(x-1)^2+1}$$
$$|\vec{u}+\vec{v}| = 2\sqrt{2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức $|\vec{u}+\vec{v}| \le |\vec{u}| + |\vec{v}|$, ta có

$y = f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2} + \sqrt{x^2 - 2x + 2} \geq 2\sqrt{2}.$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi hai véc tơ $\vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng. Vì hai véc tơ $\vec{u}, \vec{v}$ có tung độ bằng nhau nên hoành độ cũng phải bằng nhau, như vậy ta có

$x + 1 = 1 - x \Leftrightarrow x = 0.$

Vậy, $Min f(x) = 2\sqrt{2}$, đạt tại $x = 0.$

Ví dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$$y = f(x) = \sqrt{x + 17} + \sqrt{33 - x}$$

Giải.

Điều kiện: $-17 \leq x \leq 33.$

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, xét hai véc tơ $\vec{u} = (\sqrt{x+17}; \sqrt{33-x}), \vec{v} = (1;1).$

Khi đó

$\vec{u}.\vec{v} = \sqrt{x+17}.1 + \sqrt{33-x}.1 = f(x)$

$|\vec{u}| = \sqrt{x + 17 + 33 - x} = 5\sqrt{2}$

$|\vec{v}| = \sqrt{2}.$

Áp dụng bất đẳng thức: $|\vec{u}.\vec{v}| \leq |\vec{u}|.|\vec{v}|$

Ta được

$y = f(x) = \sqrt{x+17} + \sqrt{33-x} \leq 10.$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi hai véc tơ $\vec{u}, \vec{v}$ cùng phương. Vì véc tơ $\vec{v}$ có hoành độ và tung độ bằng nhau nên ta phải có

$\sqrt{x+17} = \sqrt{33-x}$

$\Leftrightarrow x = 8 \in [-17;33].$

Vậy, $\underset{x\in[-17;33]}{Max} f(x) = 10.$

BÀI TẬP CHƯƠNG I

Bài 1. Tìm tập giá trị của hàm số

$$y = \frac{2x-1}{x^2 + x + 4}.$$

Bài 2. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x^2 + a}$. Tìm các giá trị $a > 0$ để tập giá trị của hàm số đã cho chứa đoạn $[0;1]$.

Bài 3. Tìm các giá trị của m để hàm số

$$y = \frac{1}{x^2 - (m+1)x + m}$$

là hàm số chẵn.

Bài 4. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa $f(a+b)=f(a)+f(b), \forall a,b\in\mathbb{R}$. Chứng minh rằng

1) $f(0)=0$;

2) $y=f(x)$ là một hàm số lẻ.

Bài 5. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và là hàm số lẻ, thỏa $f(0)\neq 0$. Chứng minh rằng số nghiệm của phương trình $f(x)=0$ là một số chẵn.

Bài 6. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa $f(x)\neq 0, \forall x\in\mathbb{R}$ và

$$f(x_1+x_2)+f(x_1-x_2)=2f(x_1)f(x_2), \forall x_1,x_2\in\mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng

1) $f(0)=1$;

2) $y=f(x)$ là một hàm số chẵn.

Bài 7. Chứng minh các hàm số cho sau đây là hàm số tuần hoàn, tìm chu kì (nếu có)

1) $y=\cos(2x+3)$;

2) $y=\sin^2 x$.

Bài 8. Chứng minh các hàm số cho sau đây không phải là một hàm số tuần hoàn

1) $y=x^3+2x^2$;

2) $y=\sqrt{x-1}$;

3) $y=\dfrac{x}{x^2-1}$.

Bài 9. Chứng minh hàm số Dirichlê

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

là một hàm số tuần hoàn nhưng không có chu kỳ.

Bài 10. Cho các hàm số $y=f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ và $y=g(x)=2x-1$

1) Xác định hàm số $y=f(f(x))$;

2) Xác định hàm số $y=f(g(x))$.

Bài 11. Cho hàm số $y=f_1(x)=\dfrac{1}{1-x}$. Kí hiệu $f_n(x)=f(f_{n-1}(x))$, với $n\in\mathbb{N}$ và $n\geq 2$. Xác định hàm số $y=f_{100}(x)$.

Bài 12. Cho các hàm số $y=f(x)=\begin{cases}1-2x, & x<\dfrac{1}{2}\\ 2x-1, & x\geq\dfrac{1}{2}\end{cases}$ và $y=g(x)=\begin{cases}x-1, & x\geq 1\\ 1-x, & x<1.\end{cases}$

Xác định các hàm số hợp $y=f(g(x)), y=g(f(x))$.

Bài 13. Cho hàm số $y = f(x) = 2 - \sqrt{1-x}$.

Tìm hàm số ngược $y = f^{-1}(x)$.

Bài 14. 1) Hãy xác định véc tơ $\vec{v} = (a;b)$, sao cho khi tịnh tiến đồ thị của hàm số

$$y = \frac{x^2 + x - 3}{x+2}$$

theo véc tơ $\vec{v}$ ta được đồ thị của hàm số cho trong các trường hợp sau đây

a) $y = \dfrac{x^2 - x - 7}{x+2}$;

b) $y = \dfrac{x^2 + 7x + 9}{x+5}$;

c) $y = \dfrac{x^2 + 2x - 4}{x+3}$.

2) Từ đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x^2 + x - 3}{x+2}$, suy ra đồ thị của các hàm số sau bằng các phép biến đổi nào ?

a) $y = \dfrac{-x^2 - x + 3}{x+2}$;

b) $y = \dfrac{-x^2 + 5}{x+2}$;

Bài 15. Từ đồ thị của hàm số $y = \dfrac{1}{x}$, bằng các phép biến đổi đồ thị nào để nhận được đồ thị của hàm số $y = \dfrac{3x-7}{x-2}$?

Bài 16. Cho hàm số

$$y = \frac{x^2 - 3x + 1}{x-3}.$$

1) Dựng đồ thị (C) của hàm số đã cho;

2) Từ đồ thị (C) hãy suy ra đồ thị của các hàm số sau

a) $y = \left|\dfrac{x^2 - 3x + 1}{x-3}\right|$;

b) $y = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{|x-3|}$;

c) $y = \dfrac{|x|^2 - 3|x| + 1}{|x| - 3}$;

d) $y=\left|\dfrac{|x|^2-3|x|+1}{|x|-3}\right|$.

Bài 17. Chứng minh đồ thị của hàm số

$$y=\frac{5}{x^2-4x+3}$$

nhận đường thẳng $x=2$ làm trục đối xứng.

Bài 18. Chứng minh đồ thị của hàm số $y=x^4+4x^3+3x^2-2x$

có đúng một trục đối xứng cùng phương với trục tung.

Bài 19. Chứng minh đồ thị của hàm số

$$y=\frac{x^2+4x-2}{x^2+1}$$

không có tâm đối xứng.

Bài 20. Cho hàm số $y=x^4+4ax^3-2x^2-12ax$.

Tìm các giá trị của a để đồ thị của hàm số đã cho có trục đối xứng cùng phương với trục Oy.

Bài 21. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2m^2x+m^2}{x+1}$ có đồ thị là (C_m).

Tìm m để trên (C_m) tồn tại hai điểm đối xứng nhau qua gốc toạ độ.

Bài 22. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số cho sau đây

1) $y=2.3^{3x}-4.3^{2x}+2.3^x$ trên đoạn $[-1;1]$;

2) $y=\cos 3x-15\cos x+8$ trên đoạn $[\dfrac{\pi}{3};\dfrac{3\pi}{2}]$;

3) $y=\left|x^3-3x^2+5\right|$ trên đoạn $[0;3]$.

Bài 23. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số cho sau đây

1) $y=\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{2x-1}}$ trên đoạn $[\dfrac{3}{4};2]$;

2) $y=(\cos x+1)\sin x,\ x\in[0,2\pi]$.

Bài 24. Giả sử (x,y) là một nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}x+y=2-a\\ x^2+y^2+xy=3.\end{cases}$

Tìm các giá trị của a để biểu thức $M=x^2+y^2-xy$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

Bài 25. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$.

Bài 26. Cho $x>0, y>0$ thỏa mãn $x+y=\dfrac{5}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{4y}$.

Bài 27. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=|x+1|+|x-2|+|2x-5|$.

Bài 28. Cho hai số dương x, y thay đổi thỏa mãn điều kiện $x + y \geq 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \frac{3x^2 + 4}{4x} + \frac{y^3 + 2}{y^2}.$$

Bài 29. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T = \frac{1}{xyz}(yz\sqrt{x-3} + zx\sqrt{y-4} + xy\sqrt{z-5}).$$

Bài 30. Xét các số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2(y+z)}{yz} + \frac{y^2(z+x)}{zx} + \frac{z^2(x+y)}{xy}.$$

Bài 31. Cho các số a, b, c dương thay đổi thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{b^3}{(1+c)(1+a)} + \frac{c^3}{(1+a)(1+b)}.$$

Bài 32. Cho các số a, b, c dương thay đổi thỏa mãn điều kiện $a + b + c \geq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{c}} + \frac{c}{\sqrt{a}}.$$

Bài 33. Cho các số x, y, z dương thay đổi thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}.$$

Bài 34. Cho các số a, b, c dương thay đổi thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \frac{(1+a)(1+b)(1+c)}{(1-a)(1-b)(1-c)}.$$

Bài 35. Cho các số a, b, c dương thay đổi thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = \frac{ab^2 + bc^2 + ca^2}{(ab + bc + ca)^2}.$$

Bài 36. Cho các số x, y, z thay đổi thỏa mãn điều kiện $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A = |x + 2y + 3z - 8|.$$

Bài 37. Cho các số a, b, c dương thay đổi thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A=\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}.$$

Bài 38. Cho các số x,y thay đổi thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A=\frac{xy+y^2}{1+2x^2+2xy}.$$

Bài 39. Cho x,y,z là các số thực dương thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=x\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{yz}\right)+y\left(\frac{y}{2}+\frac{1}{zx}\right)+z\left(\frac{z}{2}+\frac{1}{xy}\right).$$

Bài 40. Cho x,y,z là các số thực dương thay đổi thỏa mãn điều kiện $xyz=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}}+\frac{y^2(z+x)}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}}+\frac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}.$$

Bài 41. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y=\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin x+\sqrt{1+2\cos^2 x}},x\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right].$$

CHƯƠNG II. PHƯƠNG TRÌNH – HỆ PHƯƠNG TRÌNH

§1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1. Phương trình

1.1. Định nghĩa

Cho hai hàm số của n biến thực $x_1,x_2,...,x_n$ là $f(x_1;x_2;...;x_n), g(x_1;x_2;...;x_n)$. Ta gọi bộ n số thực $(x_1;x_2;...;x_n)\in\mathbb{R}^n$ là một điểm trong $\mathbb{R}^n$. Khi đó các hàm số

$$f(x_1;x_2;...;x_n), g(x_1;x_2;...;x_n)$$

được xem là các hàm một biến x trong $\mathbb{R}^n$.

Ta gọi *Phương trình ẩn x* là mệnh đề chứa biến dạng $f(x)=g(x)$ (1)

trong đó, $f(x)$ và $g(x)$ là những biểu thức chứa *x*. Ta gọi $f(x)$ là vế trái, $g(x)$ là vế phải của phương trình (1). Nếu coi f và g là hàm của n biến trong không gian $\mathbb{R}$ thì (1) là phương trình của n ẩn $x_1,x_2,...,x_n$.

Giả sử *f(x)* có tập xác định là D_1, *g(x)* có tập xác định là D_2 thì $D=D_1\cap D_2$ gọi là *tập (miền) xác định* của phương trình (1).

Nếu $x_o\in D$ sao cho $f(x_o)=g(x_o)$ là một mệnh đề đúng thì x_o được gọi là một nghiệm của phương trình (1).

Giải phương trình (1) là tìm tất cả các nghiệm của nó, tập hợp các nghiệm của phương trình kí hiệu là S.

Nếu $S=\varnothing$ thì ta nói phương trình vô nghiệm.

Chú ý. Trong một phương trình (một hoặc nhiều ẩn), ngoài các chữ đóng vai trò là các ẩn số, còn có thể có các chữ khác được xem như những hằng số và được gọi là tham số. Giải và biện luận phương trình chứa tham số, nghĩa là xét xem với giá trị nào của tham số thì phương trình vô nghiệm, có nghiệm và tìm các nghiệm đó.

Chẳng hạn, $\left(m^2+1\right)x+5=0$ và $x^2+\left(m+1\right)x+2=0$ có thể được coi là các phương trình ẩn *x*, chứa tham số *m*.

1.2. Phương trình tương đương, phương trình hệ quả

1.2.1. Phương trình tương đương. Hai phương trình được gọi là *tương đương* với nhau khi chúng có cùng tập hợp nghiệm.

Khi hai phương trình $f(x)=g(x)$; $f_1(x)=g_1(x)$ tương đương với nhau ta dùng kí hiệu

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow f_1(x)=g_1(x).$$

Ví dụ. Hai phương trình $5x - 3 = 0$ và $2x-\frac{6}{5}=0$ tương đương với nhau vì cùng có nghiệm duy nhất là $x=\frac{3}{5}$.

Chú ý. Nếu theo định nghĩa trên thì hai phương trình vô nghiệm cũng được coi là tương đương với nhau vì có cùng tập hợp nghiệm đó là tập hợp $\varnothing$. Vì vậy, cách viết sau cũng coi như là đúng, tuy nhiên trong thực tế ít khi gặp. Chẳng hạn, $x^2+3=0\Leftrightarrow \cos x=3$.

Sự tương đương của hai phương trình có tính chất phản xạ, đối xứng, bắc cầu.

1.2.2. Phương trình hệ quả

Nếu mọi nghiệm của của phương trình $f(x)=g(x)$ đều là nghiệm của phương trình $f_1(x)=g_1(x)$ thì phương trình $f_1(x)=g_1(x)$ được gọi là *phương trình hệ quả* của phương trình $f(x)=g(x)$.

Ta dùng kí hiệu $f(x)=g(x)\Rightarrow f_1(x)=g_1(x).$

Ví dụ. Phương trình $\left(x^2-1\right)\left(x+3\right)=0$ là phương trình hệ quả của phương trình $x^2-1=0.$

1.2.3. Các phép biến đổi tương đương phương trình

Quá trình giải một phương trình là quá trình biến đổi phương trình đó để đi đến một phương trình đơn giản hơn mà ta đã biết cách giải. Nếu phép biến đổi không làm thay đổi tập xác định của phương trình thì phương trình đã cho được biến đổi tương đương, còn nếu làm thay đổi tập xác định của phương trình thì có thể tập hợp nghiệm của phương trình đã cho cũng đã bị thay đổi. Sau đây ta xét một số phép biến đổi tương đương.

1.2.3.1. Định lí. Cho phương trình $f(x)=g(x)$. Nếu $h(x)$ có nghĩa trong tập xác định của phương trình đã cho thì $f(x)=g(x)\Leftrightarrow f(x)+h(x)=g(x)+h(x).$ (1)

Chứng minh

Trong (1) ta cho *x* một giá trị *a* nào đó thuộc tập xác định của phương trình *f(x)* = *g(x)* thì ta có $f(a)=g(a)\Leftrightarrow f(a)+h(a)=g(a)+h(a)$ là một mệnh đề đúng.

Hệ quả 1. Có thể chuyển các hạng tử từ vế này sang vế kia của phương trình, nhưng phải đổi dấu của nó.

Hệ quả 2. Mọi phương trình đều có thể đưa về dạng mà vế phải bằng không.

Do vậy, ta luôn có thể kí hiệu phương trình là $F(x) = 0$.

Chú ý. Điều kiện $h(x)$ có nghĩa trong tập xác định của phương trình $f(x) = g(x)$ là điều kiện đủ nhưng không cần. Nói khác đi, nếu có điều kiện ấy thì

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$$

là phép biến đổi tương đương, còn nếu không có điều kiện ấy thì phép biến đổi trên có thể tương đương hoặc có thể không. Chẳng hạn, phương trình $x^2 = 1$ và phương trình $x^2 + \frac{1}{x-2} = 1 + \frac{1}{x-2}$ là tương đương, nhưng phương trình $x^2 = 1$ không tương đương với phương trình $x^2 + \frac{1}{x+1} = 1 + \frac{1}{x+1}$.

1.2.3.2. Định lí. Cho phương trình $f(x) = g(x)$. Nếu $h(x)$ có nghĩa và khác không trong tập xác định của phương trình đã cho thì

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x)h(x) = g(x)h(x).$$

Chứng minh tương tự như định lí 1.2.3.1.

Hệ quả. Có thể nhân hai vế của một phương trình với một số khác không tùy ý.

Ta cũng có nhận xét về $h(x)$ tương tự như định lí 1.2.3.1.

1.2.3.3. Định lí. Nếu nâng hai vế của một phương trình lên một lũy thừa bậc lẻ thì ta được một phương trình tương đương với phương trình đã cho.

Chứng minh.

Thật vậy, nếu a là nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ tức là $f(a) = g(a)$ là đúng thì ta có $[f(a)]^{2k+1} = [g(a)]^{2k+1}, k \in \mathbb{N}$.

Nghĩa là a là nghiệm của phương trình $[f(x)]^{2k+1} = [g(x)]^{2k+1}$.

Đảo lại, nếu a là nghiệm của phương trình $[f(x)]^{2k+1} = [g(x)]^{2k+1}$ thì $[f(a)]^{2k+1} = [g(a)]^{2k+1}$ là đẳng thức đúng. Do đó, $f(a) = g(a)$ cũng là đẳng thức đúng hay a là nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$.

Chú ý. Phép biến đổi nâng hai vế của phương trình lên một lũy thừa bậc chẵn là phép biến đổi hệ quả, nó chỉ là phép biến đổi tương đương nếu hai vế của phương trình đều không âm trên tập xác định.

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow [f(x)]^{2k} = [g(x)]^{2k}, (f(x) \geq 0, g(x) \geq 0).$$

Nếu sau một phép biến đổi nào đó, tập xác định của phương trình đã cho mở rộng ra thì tập hợp nghiệm của nó cũng có thể mở rộng ra, khi đó có thể xuất hiện những nghiệm, ta gọi là nghiệm ngoại lai (đối với phương trình đã cho). Những nghiệm ngoại lai đó (nếu có) là những nghiệm của phương trình sau khi biến đổi và thuộc vào phần mở rộng của tập xác định. Nếu tập xác định mở rộng ra nhưng không có nghiệm ngoại lai thì phương trình đã cho và phương trình biến đổi vẫn tương đương.

Nếu sau một phép biến đổi nào đó, tập xác định của phương trình đã cho bị thu hẹp lại thì tập nghiệm của nó cũng có thể bị thu hẹp lại, một số nghiệm nào đó có thể mất đi. Những nghiệm mất đi đó (nếu có) là những nghiệm của phương trình đã cho nhưng thuộc vào phần bị thu hẹp của tập xác định. Nếu tất cả các giá trị của ẩn số bị mất đi khi tập xác định bị thu hẹp không thỏa mãn phương trình đã cho, thì phương trình đã cho và phương trình biến đổi vẫn tương đương.

2. Hệ phương trình – Tuyển phương trình

2.1. Định nghĩa. Cho *m* phương trình

$$f_1(x) = g_1(x)$$
$$f_2(x) = g_2(x)$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$f_m(x) = g_m(x)$$

(có thể coi $x = (x_1; x_2; ...; x_n)$, khi đó các $f_i(x), g_i(x), i = 1, 2, ..., m$ là những hàm *n* biến).

Giả sử *m* phương trình đã cho có tập xác định lần lượt là $D_1, D_2, ..., D_m$.

Ta gọi *hệ m phương trình* kí hiệu là

$$(1)\begin{cases} f_1(x) = g_1(x) \\ f_2(x) = g_2(x) \\ \dots\dots\dots\dots \\ f_m(x) = g_m(x) \end{cases}$$

$D = \bigcap_{i=1}^{m} D_i$ là tập xác định của hệ (1).

Một giá trị $a \in D$ của biến *x* làm cho từng phương trình của hệ (1) đều trở thành đẳng thức đúng được gọi là một nghiệm của hệ (1). Kí hiệu S_i là tập hợp nghiệm của phương trình thứ *i* của hệ (1) thì tập hợp nghiệm của hệ (1) là $S = \bigcap_{i=1}^{m} S_i$. Khi $S = \varnothing$ ta nói hệ vô nghiệm.

2.2. Định nghĩa. Ta cũng gọi *tuyển của m phương trình* kí hiệu là

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x) = g_1(x) \\ f_2(x) = g_2(x) \\ \dots\dots\dots\dots \\ f_m(x) = g_m(x) \end{array}\right. \quad (2)$$

Tập xác định của tuyển phương trình (2) cũng là $D = \bigcap_{i=1}^{m} D_i$, với D_i là tập xác định của phương trình thứ *i*.

Nếu có một giá trị $a \in D$ của x làm cho một phương trình nào đó của tuyển phương trình (2) trở thành đẳng thức đúng thì *a* được gọi là một nghiệm của tuyển phương trình (2). Tập hợp nghiệm của tuyển phương trình (2) là $S = \bigcup_{i=1}^{m} S_i$, S_i là tập hợp nghiệm của phương trình thứ *i* của tuyển phương trình (2).

Khái niệm tương đương của hệ phương trình, tuyển phương trình cũng tương tự như phương trình.

2.3. Các định lí về hệ phương trình tương đương

2.3.1. Định lí. Nếu $F(x_1;x_2;...;x_n)=0 \Leftrightarrow x_1=f_1(x_2;...;x_n)$ thì

$$\begin{cases} F_1(x_1;x_2;...;x_n)=0 \\ F_2(x_1;x_2;...;x_n)=0 \\ .... \\ F_m(x_1;x_2;...;x_n)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=f_1(x_2;...;x_n) \\ F_2(f_1(x_2;...;x_n);x_2;...;x_n)=0 \\ .... \\ F_m(f_1(x_2;...;x_n);x_2;...;x_n)=0 \end{cases}$$

2.3.2. Định lí

$$\begin{cases} F_1=0 \\ F_2=0 \\ F_3=0 \\ .... \\ F_m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_1=0 \\ n_{12}F_1+n_{22}F_2=0 \\ n_{13}F_1+n_{23}F_2+n_{33}F_3=0 \\ .... \\ n_{1m}F_1+n_{2m}F_2+.....+n_{mm}F_m=0 \end{cases}$$

2.4. Định lí về tuyển phương trình tương đương

$$F_1.F_2...F_m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} F_1=0 \\ F_2=0 \\ .... \\ F_m=0 \end{array}\right.$$

§2. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT, BẬC HAI MỘT ẨN

1. Phương trình bậc nhất một ẩn

1.1. Định nghĩa. *Phương trình bậc nhất một ẩn* là phương trình $ax+b=0, a,b\in\mathbb{R}, a\neq 0$.

Phương trình bậc nhất có một nghiệm duy nhất $x=-\dfrac{b}{a}$.

1.2. Giải và biện luận phương trình dạng $ax+b=0$ (1)

· $a\neq 0$, phương trình (1) có một nghiệm duy nhất $x=-\dfrac{b}{a}$.

· $a=0, b\neq 0$, phương trình (1) vô nghiệm.

· $a=0, b=0$, phương trình (1) có nghiệm tùy ý.

Ví dụ. Giải và biện luận phương trình $\left(m^2-m\right)x=m-1$ (*)

Ta xét các trường hợp

(i) $m^2-m\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 0$ và $m\neq 1$ thì phương trình (*) có một nghiệm duy nhất là $x=\dfrac{1}{m}$

(ii) $m^2-m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=0 \end{array}\right.$

· $m=0$ thì (*) $\Leftrightarrow 0x=-1$, phương trình vô nghiệm.

· $m=1$ thì (*) $\Leftrightarrow 0x=0$, phương trình có nghiệm tùy ý.

Kết luận.

· Nếu $m \neq 0$ và $m \neq 1$ thì (*) có nghiệm là $x = \dfrac{1}{m}$.

· Nếu $m = 0$ thì (*) vô nghiệm.

· Nếu $m = 1$ thì (*) có nghiệm tùy ý.

1.3. Một số phương trình qui về phương trình bậc nhất một ẩn

Đó là các phương trình dạng: $\dfrac{ax+b}{cx+d} = 0; |ax+b| = |cx+d|; |ax+b| = cx+d$.

Khi giải phương trình dạng $\dfrac{ax+b}{cx+d} = 0$ ta phải đặt điều kiện cho mẫu khác không. Để giải các phương trình $|ax+b| = |cx+d|; |ax+b| = cx+d$, ta phải khử dấu giá trị tuyệt đối bằng định nghĩa và tính chất của dấu giá trị tuyệt đối.

· $|A| = \begin{cases} A; & A \geq 0 \\ -A; & A < 0 \end{cases}$

· $|A| = |B| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = B \\ A = -B \end{array}\right.$

· $|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} A = B \\ A = -B \end{array}\right. \end{cases}$

Ví dụ 1. Giải và biện luận phương trình

$$\frac{x-m}{x+1} = \frac{x-2}{x-1} \quad (*)$$

Điều kiện: $x \neq \pm 1$

Khi đó, $(*) \Leftrightarrow (x-m)(x-1) = (x-2)(x+1)$

$\Leftrightarrow mx = m+2 \quad (2)$

Ta xét các trường hợp

(i) $m \neq 0$ thì (2) có một nghiệm $x = \dfrac{m+2}{m}$.

So sánh với điều kiện:

· $x \neq 1 \Leftrightarrow \dfrac{m+2}{m} \neq 1 \Leftrightarrow m+2 \neq m \Leftrightarrow 2 \neq 0$, luôn thỏa.

· $x \neq -1 \Leftrightarrow \dfrac{m+2}{m} \neq -1 \Leftrightarrow m+2 \neq -m \Leftrightarrow m \neq -1$.

(ii) $m = 0$ thì $(2) \Leftrightarrow 0x = 2$, phương trình vô nghiệm.

Kết luận.

+ Nếu $m \neq 0$ và $m \neq -1$ thì (*) có nghiệm là $x = \frac{m+2}{m}$.

+ Nếu $m = 0$ hoặc $m = -1$ thì (*) vô nghiệm.

Ví dụ 2. Giải và biện luận phương trình

$$|mx + m - 2| = |x + m + 1| \quad (1)$$

Giải.

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} mx + m - 2 = x + m + 1 \\ mx + m - 2 = -x - m - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} (m-1)x = 3 & (1a) \\ (m+1)x = 1 - 2m & (1b) \end{array}\right.$$

* $(m-1)x = 3$ $(1a)$

· $m \neq 1$ thì $(1a) \Leftrightarrow x = \frac{3}{m-1}$

· $m = 1$ thì $(1a) \Leftrightarrow 0x = 3$, phương trình $(1a)$ vô nghiệm.

* $(m+1)x = 1 - 2m$ $(1b)$

· $m \neq -1$ thì $(1b) \Leftrightarrow x = \frac{1-2m}{m+1}$

· $m = -1$ thì $(1b) \Leftrightarrow 0x = 3$, phương trình $(1b)$ vô nghiệm.

Kết luận.

+ Nếu $m = 1$ thì phương trình (1) có một nghiệm là $x = -\frac{1}{2}$.

+ Nếu $m = -1$ thì phương trình (1) có một nghiệm là $x = -\frac{3}{2}$.

+ Nếu $m \neq 1$ và $m \neq -1$ thì phương trình (1) có hai nghiệm là $x = \frac{3}{m-1}$ và $x = \frac{1-2m}{m+1}$ (hai nghiệm không bằng nhau với $\forall m \in \mathbb{R}, m \neq \pm 1$).

Ví dụ 3. Tìm *m* để phương trình

$$\frac{3x - m}{\sqrt{x-2}} + \sqrt{x-2} = \frac{2x + 2m - 1}{\sqrt{x-2}} \quad (1)$$

vô nghiệm.

Giải.

Điều kiện: $x > 2$

Khi đó, $(1) \Leftrightarrow 3x - m + x - 2 = 2x + 2m - 1$

$$\Leftrightarrow 2x = 3m + 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3m+1}{2}$$

Phương trình (1) vô nghiệm khi và chỉ khi $\dfrac{3m+1}{2} \le 2 \Leftrightarrow 3m+1 \le 4 \Leftrightarrow m \le 1$.

Ví dụ 4. Tìm điều kiện của tham số *a, b* để phương trình

$$\frac{ax-1}{x-1}+\frac{b}{x+1}=\frac{ax^2+a}{x^2-1} \quad (1)$$

có nghiệm.

Giải.

Điều kiện: $x \ne \pm 1$

Khi đó, $(1) \Leftrightarrow (ax-1)(x+1)+b(x-1)=ax^2+a$

$\Leftrightarrow (a+b-1)x=a+b+1 \qquad (2)$

· Xét $a+b-1=0$, khi đó (2) vô nghiệm, do đó (1) vô nghiệm.

· Xét $a+b-1\ne 0$, khi đó $(2) \Leftrightarrow x=\dfrac{a+b+1}{a+b-1}$

Từ điều kiện ta phải có

$$\begin{cases} \dfrac{a+b+1}{a+b-1}\ne 1 \\ \dfrac{a+b+1}{a+b-1}\ne -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+1\ne a+b-1 \\ a+b+1\ne -a-b+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1\ne -1 \\ 2(a+b)\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow a+b\ne 0$$

Vậy, phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $a+b\ne 0$ và $a+b\ne 1$.

Ví dụ 5. Giải phương trình

$$\frac{|3-2x|-|x|}{|3x+2|+x-2}=5 \quad (1)$$

Giải.

Khi gặp bài toán có nhiều dấu giá trị tuyệt đối ta sẽ giải bằng cách chia khoảng để xét dấu.

Ta có bảng xét dấu sau

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$		0		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
x	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$
$2+3x$	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$
$3-2x$	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} |2+3x|+x-2\ne 0 & (1a) \\ |3-2x|-|x|=5\left(|2+3x|+x-2\right) & (1b) \end{cases}$$

Ta giải (1b).

+ Xét $x<-\dfrac{2}{3}$, $(1b) \Leftrightarrow 3-2x+x=5(-2-3x+x-2)$

$\Leftrightarrow 9x = -23 \Leftrightarrow x = -\dfrac{23}{9}$ (nhận).

+ Xét $-\dfrac{2}{3} \le x < 0, (1b) \Leftrightarrow 3 - 2x + x = 5(2 + 3x + x - 2)$

$\Leftrightarrow 21x = 3 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{7}$ (loại).

+ Xét $0 \le x < \dfrac{3}{2}, (1b) \Leftrightarrow 3 - 2x - x = 5(2 + 3x + x - 2)$

$\Leftrightarrow 23x = 3 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{23}$ (nhận)

+ Xét $x \ge \dfrac{3}{2}, (1b) \Leftrightarrow -3 + 2x - x = 5(2 + 3x + x - 2)$

$\Leftrightarrow 19x = -3 \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{19}$ (loại).

Thay lần lượt $x = -\dfrac{23}{9}$ và $x = \dfrac{3}{23}$ vào (1a) ta thấy cả hai giá trị đều thoả.

Vậy, nghiệm của phương trình là $x = -\dfrac{23}{9}$ và $x = \dfrac{3}{23}$.

2. Phương trình bậc hai một ẩn

2.1. Định nghĩa. *Phương trình bậc hai một ẩn* là phương trình có dạng $ax^2 + bx + c = 0$ (1), với a, b, c là các tham số thực, $a \ne 0$.

Biểu thức $\Delta = b^2 - 4ac$ được gọi là biệt thức của phương trình (1).

Xảy ra ba trường hợp sau:

i) Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình (1) vô nghiệm;

ii) Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình (1) có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$;

iii) Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Ngoài ra, nếu đặt $b' = \dfrac{b}{2}$ thì $\Delta' = b'^2 - ac$ gọi là biệt thức thu gọn của phương trình (1). Ta cũng có ba trường hợp sau:

i) Nếu $\Delta' < 0$ thì phương trình (1) vô nghiệm;

ii) Nếu $\Delta' = 0$ thì phương trình (1) có nghiệm kép là $x_1 = x_2 = -\dfrac{b'}{a}$;

iii) Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt là $x_{1,2} = \dfrac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$.

2.2. Định lí Viet

Nếu phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ có nghiệm x_1,x_2 thì

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \text{ và } x_1.x_2=\frac{c}{a}.$$

Đảo lại nếu hai số *x, y* thỏa mãn *x* + *y* = *S* và *x.y* = *P* thì *x, y* là nghiệm của phương trình bậc hai $X^2-SX+P=0$ (*) (Điều kiện để (*) có nghiệm là $S^2-4P\geq 0$).

Từ đó, ta có hệ quả sau:

2.2.1. Nếu *a* + *b* + *c* = 0 thì phương trình (1) có một nghiệm bằng 1 và nghiệm kia bằng $\frac{c}{a}$.

2.2.2. Nếu *a* – *b* + *c* = 0 thì phương trình (1) có một nghiệm bằng -1 và nghiệm kia bằng $-\frac{c}{a}$.

2.3. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Cho phương trình

$$x^2-2(1+2m)x+3+4m=0 \quad (1)$$

a) Tìm điều kiện để phương trình có nghiệm;

b) Tính biểu thức $x_1^3+x_2^3$ theo *m*;

c) Tìm *m* để phương trình có một nghiệm bằng ba lần nghiệm kia;

d) Viết phương trình bậc hai có nghiệm là x_1^2 và x_2^2, trong đó x_1,x_2 là nghiệm của phương trình (1).

Giải.

a) Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta=4m^2-2\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\geq\frac{\sqrt{2}}{2} \\ m\leq-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$

b) Ta có $A=x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)\left[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2\right]$

Theo định lí Viet ta có: $x_1+x_2=2(1+2m); x_1.x_2=3+4m$

Thay vào ta có: $A=2(1+2m)(16m^2+4m-5)$

c) Ta có $\begin{cases} x_1+x_2=2(1+2m) & \text{(a)} \\ x_1x_2=3+4m & \text{(b)} \\ x_1=3x_2 & \text{(c)}\end{cases}$

Thay (c) vào (a) ta có $x_2=\frac{1+2m}{2}$, do đó $x_1=\frac{3+6m}{2}$

Thay x_1,x_2 vào (b) ta được $\left(\frac{1+2m}{2}\right).\left(\frac{3+6m}{2}\right)=4m+3$

$$\Leftrightarrow 12m^2+12m+3=16m+12$$

$$\Leftrightarrow 12m^2 - 4m - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{-1 \pm 2\sqrt{7}}{6}$$

Kết hợp với điều kiện ban đầu (câu a) ta thấy hai giá trị này của m đều thỏa mãn.

d) $S = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left[2(1+2m)\right]^2 - 2(3+4m)$

$$= 2\left(8m^2 + 4m - 1\right)$$

$P = x_1^2 x_2^2 = (3+4m)^2$.

Vậy, phương trình cần tìm là: $X^2 - 2\left(8m^2 + 4m - 1\right)X + (3+4m)^2 = 0.$

Ví dụ 2. Giải và biện luận phương trình

$$\frac{a}{x-b} + \frac{b}{x-a} = 2 \quad (1)$$

Giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x \neq a \\ x \neq b \end{cases} (*)$

(1) $\Leftrightarrow a(x-a) + b(x-b) - 2(x-a)(x-b) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[x - (a+b)\right]\left[2x - (a+b)\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{a+b}{2} \\ x = a+b \end{array}\right.$$

Thử điều kiện (*)

$$\begin{cases} x = \dfrac{a+b}{2} \neq a \\ x = \dfrac{a+b}{2} \neq b \end{cases} \Leftrightarrow a \neq b \quad \text{và} \quad \begin{cases} x = a+b \neq a \\ x = a+b \neq b \end{cases} \Leftrightarrow ab \neq 0$$

Biện luận.

· Nếu $\begin{cases} a \neq b \\ ab \neq 0 \end{cases}$ thì phương trình (1) có nghiệm là $x = \dfrac{a+b}{2}; x = a+b$. Hai nghiệm này bằng nhau khi $a = -b \neq 0$.

· Nếu $\begin{cases} a \neq b \\ a = 0 \end{cases}$ thì phương trình (1) có nghiệm là $x = \dfrac{b}{2}$.

· Nếu $\begin{cases} a \neq b \\ b = 0 \end{cases}$ thì phương trình (1) có nghiệm là $x = \dfrac{a}{2}$.

· Nếu $a \neq b \neq 0$ thì phương trình (1) có nghiệm là $x = 2a$.

· Nếu $a = \ b = 0$ thì phương trình (1) vô nghiệm.

Ví dụ 3. Giải và biện luận phương trình

$$x+\frac{1}{x}=\frac{a-b}{a+b}+\frac{a+b}{a-b}\ (1)$$

Giải.

Điều kiện: $\begin{cases} a\neq \pm b \\ x\neq 0 \end{cases}$.

Ta có $(1)\Leftrightarrow\left(x-\frac{a-b}{a+b}\right)\left(x-\frac{a+b}{a-b}\right)=0\Leftrightarrow x=\frac{a+b}{a-b}\vee x=\frac{a-b}{a+b}$.

Biện luận.

· Nếu $a=\pm b$ thì phương trình vô nghiệm.

· Nếu $a\neq\pm b$ thì phương trình có 2 nghiệm $x=\frac{a-b}{a+b}$, $x=\frac{a+b}{a-b}$.

Ví dụ 4. Cho hai phương trình

$$x^2-x+m=0\ \ (1);\ \ x^2-3x+m=0\ \ (2).$$

Tìm m để phương trình (2) có một nghiệm khác không gấp hai lần một nghiệm của phương trình (1).

Giải.

Giả sử x_0 là một nghiệm của phương trình (1) và $2x_0$ là một nghiệm của phương trình (2). Khi đó

$$\begin{cases} x_0^2-x_0+m=0 \\ 4x_0^2-6x_0+m=0 \end{cases}\Rightarrow 3x_0^2-5x_0=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l} x_0=0 \\ x_0=\frac{5}{3} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow m=0\vee m=-\frac{10}{9}.$$

Với $m=0$, thay vào hai phương trình đã cho thì không thỏa, do đó $m=0$ bị loại.

Với $m=-\frac{10}{9}$, thấy thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vậy, giá trị cần tìm là $m=-\frac{10}{9}$.

Ví dụ 5. Chứng minh rằng nếu hai phương trình $x^2+p_1x+q_1=0$, $x^2+p_2x+q_2=0$ có nghiệm chung thì

$$(q_1-q_2)^2+(p_1-p_2)(q_2p_1-q_1p_2)=0.$$

Giải.

Hai phương trình có nghiệm chung khi và chỉ khi hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+p_1x+q_1=0 \\ x^2+p_2x+q_2=0 \end{cases}\text{ có nghiệm}$$

hay hệ phương trình $\begin{cases} p_1x+y=-q_1 \\ p_2x+y=-q_2 \end{cases}$ có nghiệm (ở đây $y=x^2$).

Ta có $D=p_1-p_2$.

+ Nếu $D\neq 0 \Leftrightarrow p_1=p_2$

Khi đó $x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{q_2-q_1}{p_1-p_2}$; $y=\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{p_2q_1-p_1q_2}{p_1-p_2}$

Mà $y=x^2 \Rightarrow (q_1-q_2)^2+(p_1-p_2)(q_2p_1-q_1p_2)=0$

+ Nếu $D=0 \Leftrightarrow p_1=p_2$ hệ $\begin{cases} p_1x+y=-q_1 \\ p_2x+y=-q_2 \end{cases}$ có nghiệm $\Leftrightarrow q_1=q_2$, khi đó ta cũng có $(q_1-q_2)^2+(p_1-p_2)(q_2p_1-q_1p_2)=0$.

Từ đó, ta có đpcm.

Ví dụ 6. Chứng minh rằng nếu $a_1a_2\geq 2(b_1+b_2)$ thì ít nhất một trong hai phương trình sau có nghiệm

$$x^2+a_1x+b_1=0;\ x^2+a_2x+b_2=0.$$

Giải.

$\Delta_1+\Delta_2=a_1^2-4b_1+a_2^2-4b_1\geq 2a_1a_2-4(b_1+b_2)\geq 0 \Rightarrow max(\Delta_1,\Delta_2)\geq 0$. Ta có đpcm.

Ví dụ 7. Giả sử phương trình $x^2+ax+b=0$ có nghiệm x_1,x_2; phương trình $x^2+cx+d=0$ có nghiệm x_3,x_4. Chứng minh rằng

$$2(x_1+x_3)(x_1+x_4)(x_2+x_3)(x_2+x_4)=2(b-d)^2-(a^2-c^2)(b-d)+(a+c)^2(b+d)$$

Giải.

$$(x_1+x_3)(x_1+x_4)=x_1^2+(x_3+x_4)x_1+x_3x_4=(d-b)-(a+c)x_1$$
$$(x_2+x_3)(x_2+x_4)=x_2^2+(x_3+x_4)x_2+x_3x_4=(d-b)-(a+c)x_2$$
$$\Rightarrow S=(x_1+x_3)(x_1+x_4)(x_2+x_3)(x_2+x_4)=(b-d)^2-(b-d)(a+c)a+(a+c)^2b$$

Tương tự

$$S=(d-b)^2-(d-b)(a+c)c+(a+c)^2d$$
$$\Rightarrow 2S=2(b-d)^2-(a^2-c^2)(b-d)+(a^2+c^2)^2(b+d).$$

Ví dụ 8. Cho phương trình

$$x^2-(2\sin\alpha-1)x+6\sin^2\alpha-\sin\alpha-1=0\ (1)$$

a) Tìm α để phương trình (1) có nghiệm;

b) Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình (1), tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=x_1^2+x_2^2$.

Giải.

a) Ta có

$$ycbt \Leftrightarrow 0 \le \Delta = -20\sin^2\alpha + 5 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le \sin\alpha \le \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \le \alpha \le \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee \ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \le \alpha \le \frac{7\pi}{6} + 2k\pi.$$

b) Ta có

$$A = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = -8\sin^2\alpha - 2\sin\alpha + 3 =$$

$$= \frac{25}{8} - 2(2\sin\alpha + \frac{1}{4})^2 \le \frac{25}{8}$$

$$A = \frac{25}{8} \Leftrightarrow \sin\alpha = -\frac{1}{8} \Rightarrow \max A = \frac{25}{8}.$$

Mặt khác

$$A = 3 - 8\sin^2\alpha - 2\sin\alpha \ge 3 - 8.\frac{1}{4} - 2.\frac{1}{2} = 0 \Rightarrow minA = 0 \text{ đạt được khi } \sin\alpha = \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 9. Tìm a để các nghiệm x_1, x_2 của phương trình $x^2 + ax + 1 = 0$ thỏa mãn

$$\frac{x_1^2}{x_2^2} + \frac{x_2^2}{x_1^2} > 7.$$

Giải.

Theo định lý Viet, vì x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 + ax + 1 = 0$ nên $x_1 + x_2 = -a, x_1x_2 = 1.$

Theo bài ra ta có

$$\frac{x_1^2}{x_2^2} + \frac{x_2^2}{x_1^2} > 7$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2\right]^2 - 2x_1^2x_2^2}{x_1^2x_2^2} > 7$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - 2)^2 - 2 > 7 \Leftrightarrow (a^2 - 2)^2 > 9.$$

Do đó

$$ycbt \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = a^2 - 4 \ge 0 \\ (a^2 - 2)^2 > 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 \ge 4 \\ |a^2 - 2| > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 \ge 4 \\ a^2 - 2 > 3 \end{cases} \Leftrightarrow |a| > \sqrt{5}.$$

3. Một số phương trình bậc bốn có thể đưa về phương trình bậc hai một ẩn (qua phép đặt ẩn phụ)

3.1. Phương trình trùng phương: $ax^4 + bx^2 + c = 0$, đặt $t = x^2 \ge 0$, khi đó phương trình đã cho được đưa về phương trình bậc hai đối với biến t.

3.2. Phương trình dạng: $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=k$, với $a+b=c+d$.

Đặt $t=(x+a)(x+b)$, khi đó phương trình đã cho được đưa về phương trình bậc hai đối với biến t.

3.3. Phương trình dạng: $\left(x+a\right)^4+\left(x+b\right)^4=c$. Đặt $t=x+\dfrac{a+b}{2}$, phương trình được đưa về phương trình trùng phương

$$2t^4+12\left(\frac{a-b}{2}\right)^2t^2+2\left(\frac{a-b}{2}\right)^4=c.$$

3.4. Phương trình dạng: $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0, (a\neq 0)$ (Phương trình bậc bốn hồi quy).

Chia hai vế của phương trình cho x^2 (vì $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình), phương trình trở thành $a\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+c=0.$

Đặt $t=x+\dfrac{1}{x}$, $|t|\geq 2$, ta được phương trình bậc hai theo biến t

$$at^2+bt+c-2a=0.$$

Đối với phương trình dạng $ax^4+bx^3+cx^2-bx+a=0, (a\neq 0)$ (Phương trình bậc bốn phản hồi quy), ta cũng có cách biến đổi như trên với phép đặt

$t=x-\dfrac{1}{x}$, $t\in\mathbb{R}$, khi đó phương trình đã cho được đưa về phương trình bậc hai theo biến t

$$at^2+bt+c+2a=0.$$

Ví dụ 1. Tìm m để phương trình

$$x^4-2(m+1)x^2+2m+1=0 \quad (1)$$

a) Có bốn nghiệm phân biệt;

b) Có ba nghiệm phân biệt;

c) Có hai nghiệm phân biệt.

Giải.

Đặt $t=x^2\geq 0$, phương trình (1) trở thành $t^2-2(m+1)t+2m+1=0$ (2)

a) (1) có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (2) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=\left(m+1\right)^2-2m-1>0\\ S=2(m+1)>0\\ P=2m+1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2>0\\ m>-1\\ m>-\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\ m>-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

b) (1) có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (2) có $t_1=0, t_2>0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P = 2m+1 = 0 \\ S = 2(m+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\dfrac{1}{2} \\ m > -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$$

c) (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi hoặc là (2) có nghiệm kép dương hoặc (2) có hai nghiệm trái dấu

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \Delta' = m^2 = 0 \\ S = 2(m+1) > 0 \end{cases} \\ P = 2m+1 < 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m < -\dfrac{1}{2}. \end{array} \right.$$

Ví dụ 2. Cho phương trình

$$(x+2)(x+3)(x-4)(x+9)+190 = m \ (1)$$

Tìm m để phương trình có nghiệm $x \in [-1;0]$.

Giải.

(1) $\Leftrightarrow (x^2+5x+6)(x^2+5x-36)+190 = m$

Đặt $t = x^2+5x; x \in [-1;0] \Rightarrow t \in [-4;0]$.

Ta có phương trình $(t+6)(t-36)+190 = m \Leftrightarrow t^2-30t-26 = m(2)$

(1) có nghiệm $x \in [-1;0]$ khi và chỉ khi (2) có nghiệm $t \in [-4;0]$, khi và chỉ khi m thuộc miền giá trị của hàm số $f(t) = t^2-30t-26$ trên đoạn $[-4;0]$.

$f'(t) = 2t-30 = 0 \Leftrightarrow t = 15 \notin [-4;0]$, $f'(t) < 0, \forall t \in [-4;0]$ nên hàm số $f(t) = t^2-30t-26$ nghịch biến do đó có miền giá trị trên đoạn $[-4;0]$ là $[f(0); f(-4)]; f(-4) = 110, f(0) = -26$.

Vậy, giá trị m cần tìm là $-26 \le m \le 110$.

Ví dụ 3. Cho phương trình

$$x^4+mx^3+2mx^2+mx+1 = 0 \ (1)$$

a) Giải phương trình khi $m = -\dfrac{1}{2}$;

b) Tìm m để phương trình có nghiệm.

Giải.

Do $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình (1) nên chia hai vế của phương trình (1) cho $x^2 \neq 0$, ta được

$$x^2+mx+2m+m.\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow (x^2+\frac{1}{x^2})+m(x+\frac{1}{x})+2m = 0$$

Đặt $t = x+\dfrac{1}{x}; |t| \ge 2 \Rightarrow x^2+\dfrac{1}{x^2} = t^2-2$.

Khi đó, phương trình trở thành $f(t) = t^2+mt+2m-2 = 0$. (2)

a) Với $m = -\dfrac{1}{2}$

$$(2) \Leftrightarrow t^2-\frac{1}{2}t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-\dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$$

Ta nhận $t=2 \Rightarrow x+\dfrac{1}{x}=2 \Leftrightarrow x=1.$

Vậy, với $m=-\dfrac{1}{2}$ phương trình có một nghiệm $x=1.$

b) Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm $|t|\geq 2.$ Xét bài toán ngược "Tìm điều kiện để phương trình đã cho vô nghiệm".

Phương trình (1) vô nghiệm khi và chỉ khi phương trình (2) hoặc vô nghiệm hoặc có hai nghiệm $\in(-2;2)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta<0 \\ \begin{cases} \Delta\geq 0 \\ af(-2)>0, af(2)>0 \\ -2<\dfrac{S}{2}<2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2-8m-8<0 \\ \begin{cases} m^2-8m-8\geq 0 \\ 2>0, 4m+2>0 \\ -2<-\dfrac{m}{2}<2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow -\frac{1}{2}<m<4+2\sqrt{2}.$$

Vậy, với $m\leq -\dfrac{1}{2} \vee m\geq 4+2\sqrt{2}$ thì phương trình đã cho có nghiệm.

Ví dụ 4. Giải phương trình

$$(x+4)(x+5)(x+7)(x+8)=4$$

Giải.

Viết lại phương trình dưới dạng

$$(x^2+12x+32)(x^2+12x+35)=4$$

Đặt $t=x^2+12x+32\geq -4,$ phương trình đã cho trở thành

$$t(t+3)=4 \Leftrightarrow t^2+3t-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-4 \end{array}\right.$$

Với $t=1,$ ta có $x^2+12x+32=1 \Leftrightarrow x^2+12x+31=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-6+\sqrt{5} \\ x=-6-\sqrt{5}. \end{array}\right.$

Với $t=-4,$ ta có $x^2+12x+32=-4 \Leftrightarrow x^2+12x+36=0 \Leftrightarrow x=-6.$

Vậy, phương trình đã cho có ba nghiệm $x=-6; x=-6\pm\sqrt{5}.$

Ví dụ 5. Giải phương trình

$$(x+4)^4+(x+6)^4=82$$

Giải.

Đặt $t = x + 5$, phương trình đã cho trở thành

$$(t-1)^4 + (t+1)^4 = 82 \Leftrightarrow 2t^4 + 12t^2 + 2 = 82 \Leftrightarrow t^4 + 6t^2 - 40 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4 \\ t = -10 \end{array}\right.$$

Với $t = 4$, ta có $x = -1$.

Với $t = -10$, ta có $x = -15$.

Vậy, phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -1; x = -15$.

§3. HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Trong mục này ta xét một số hệ phương trình hai ẩn.

1. Hệ gồm một phương trình bậc nhất và một phương trình bậc hai hai ẩn

Hệ phương trình có dạng

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \end{cases}$$

Phương pháp giải.

Sử dụng phương pháp thế: Rút x hoặc y từ phương trình bậc nhất rồi thay vào phương trình bậc hai trong hệ, ta được một phương trình một ẩn. Giải phương trình một ẩn này, sau đó tìm ẩn còn lại.

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 & (1) \\ 6x^2 - 3y^2 + 4x + 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải.

Từ phương trình (1) suy ra $y = x + 1$, thay vào phương trình (2) ta được

$$6x^2 - 3(x+1)^2 + 4x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ x = \dfrac{2}{3} \Rightarrow y = \dfrac{5}{3}. \end{array}\right.$$

Vậy, hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là $(0;1), (\dfrac{2}{3}; \dfrac{5}{3})$.

Chú ý. Có thể dùng phương pháp thế để giải những hệ phương trình phức tạp hơn, miễn là có thể biểu thị được một ẩn qua ẩn kia dưới dạng *đơn giản*. Ta xét một số ví dụ sau.

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 - 4xy + y^2 = 1 & (1) \\ y^2 - 3xy = 4 & (2) \end{cases}$$

Giải.

Nhận xét rằng nếu $(x; y)$ là nghiệm của hệ phương trình thì $y \neq 0$.

Từ phương trình (2), rút x theo y, ta được

$x = \dfrac{y^2 - 4}{3y}$ (3), thay (3) vào (1), ta được $2y^4 - 31y^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y^2 = 16 \\ y^2 = -\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$

Ta chọn $y^2 = 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -4 \Rightarrow x = -1 \\ y = 4 \Rightarrow x = 1. \end{array}\right.$

Vậy, hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là $(1; 4), (-1; -4)$.

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2y^2 + 7x - 21y = 18 \; (1) \\ xy^2 - xy + 3y^2 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Giải.

+ Xét $y = 0$, thay vào hệ phương trình ta được $x = \dfrac{18}{7}$. Vậy, hệ phương trình đã cho nhận $(\dfrac{18}{7}; 0)$ làm nghiệm.

+ Xét $y \neq 0$, khi đó (2) tương đương với $y(xy - x + 3y) = 0 \Leftrightarrow xy - x + 3y = 0 \Leftrightarrow xy = x - 3y$.

Thay $xy = x - 3y$ vào phương trình (1) ta được

$(x-3y)^2 + 7x - 21y = 18 \Leftrightarrow (x-3y)^2 + 7(x-3y) - 18 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 3y = -9 \\ x - 3y = 2. \end{array}\right.$

+ Với $x - 3y = -9$, ta có hệ phương trình

$\begin{cases} x - 3y = -9 \\ xy = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y - 9 \\ (3y-9)y + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y = -9 \\ 3y^2 - 9y + 9 = 0 \end{cases} (vn)$

+ Với $x - 3y = 2$, ta có hệ phương trình

$\begin{cases} x - 3y = 2 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y + 2 \\ (3y+2)y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y + 2 \\ 3y^2 + 2y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y + 2 \\ \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{-1+\sqrt{7}}{3} \\ y = \dfrac{-1-\sqrt{7}}{3} \end{array}\right. \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{7} \\ y = \dfrac{-1+\sqrt{7}}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 - \sqrt{7} \\ y = \dfrac{-1-\sqrt{7}}{3}. \end{cases}$

Vậy, hệ phương trình đã cho có ba nghiệm là $\left(\frac{18}{7};0\right), \left(1+\sqrt{7};\frac{-1+\sqrt{7}}{3}\right), \left(1-\sqrt{7};\frac{-1-\sqrt{7}}{3}\right)$.

2. Hệ phương trình đẳng cấp bậc hai

Hệ phương trình đẳng cấp bậc hai đối với hai ẩn x, y là hệ phương trình có dạng

$$\begin{cases} ax^2+bxy+cy^2=d \\ a'x^2+b'xy+c'y^2=d' \end{cases}$$

Phương pháp giải.

· Xét xem $x=0$ có thỏa hệ phương trình hay không;

· Khi $x\neq 0$, đặt $y=kx$

+ Thế $y=kx$ vào hệ phương trình, khử x ta được phương trình bậc hai theo k;

+ Giải tìm k, sau đó tìm $(x;y)$.

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x^2+2xy+y^2=11 & (1) \\ x^2+2xy+3y^2=17 & (2) \end{cases}$$

Giải.

· Xét $x=0,$ hệ phương trình trở thành $\begin{cases} y^2=11 \\ 3y^2=17 \end{cases}$ (vô nghiệm)

· Xét $x\neq 0$, đặt $y=kx$. Khi đó, hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} 3x^2+2kx^2+kx^2=11 \\ x^2+2kx^2+3kx^2=17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2\left(3+2k+k^2\right)=11 & (1') \\ x^2\left(1+2k+3k^2\right)=17 & (2') \end{cases}$$

Từ (1’) và (2’) suy ra $17(3+2k+k^2)=11(1+2k+3k^2)$

$$\Leftrightarrow 16k^2-12k-40=0$$

$$\Leftrightarrow 4k^2-3k-10=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=2 \\ k=-\frac{5}{4}. \end{array}\right.$$

+ Với $k=2 \Rightarrow \begin{cases} 11x^2=11 \\ y=2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \vee x=-1 \\ y=2x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases} \end{array}\right.$

+ Với $k=-\dfrac{5}{4}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{33x^2}{16}=11\\ y=-\dfrac{5}{4}x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{4}{\sqrt{3}}\vee x=-\dfrac{4}{\sqrt{3}}\\ y=-\dfrac{5}{4}x\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\dfrac{4}{\sqrt{3}}\\ y=-\dfrac{5}{\sqrt{3}}\end{cases}\\ \begin{cases}x=-\dfrac{4}{\sqrt{3}}\\ y=\dfrac{5}{\sqrt{3}}\end{cases}\end{array}\right.$

Vậy, hệ phương trình đã cho có bốn nghiệm là $(1;2);(-1;-2);\left(\dfrac{4}{\sqrt{3}};-\dfrac{5}{\sqrt{3}}\right);\left(-\dfrac{4}{\sqrt{3}};\dfrac{5}{\sqrt{3}}\right)$.

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}x^3-8x=y^3+2y\\ x^2-3=3(y^2+1)\end{cases}$$

Giải. *Cách 1.*

Tuy hệ phương trình đã cho không phải là hệ phương trình đẳng cấp bậc hai nhưng ta vẫn có thể giải bằng phương pháp như đã trình bày.

· Xét $y=0$, hệ phương trình trở thành $\begin{cases}x^3-8x=0\\ x^2=6\end{cases}$ (vô nghiệm)

· Xét $y\neq 0$ ta đặt $x=ky$

Thay vào hệ phương trình ta được

$$\begin{cases}k^3y^3-8ky=y^3+2y\\ k^2y^2-3=3y^2+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k^3y^2-8k=y^2+2\\ k^2y^2-3y^2=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(k^3-1)y^2=8k+2 & (1)\\ (k^2-3)y^2=6 & (2)\end{cases}$$

Lấy (1) chia cho (2) vế theo vế ta được: $k^3+k^2-12k=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k=0\\ k=3\\ k=-4\end{array}\right.$

+ Với $k=0,$ thay vào (2), ta được $-3y^2=6,$ hệ phương trình vô nghiệm.

+ Với $k=3,$ ta được $\begin{cases}y^2=1\\ x=3y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1\vee y=-1\\ x=3y\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=3\\ y=1\end{cases}\\ \begin{cases}x=-3\\ y=-1\end{cases}\end{array}\right.$

Với $k=-4,$ ta được $\begin{cases} y^2 = \dfrac{6}{13} \\ x=-4y \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-4\sqrt{\dfrac{6}{13}} \\ y=\sqrt{\dfrac{6}{13}} \end{cases} \\ \begin{cases} x=4\sqrt{\dfrac{6}{13}} \\ y=-\sqrt{\dfrac{6}{13}} \end{cases} \end{array}\right.$

Vậy, hệ phương trình đã cho có bốn nghiệm là $(3;1);(-3;-1);\left(-4\sqrt{\dfrac{6}{13}};\sqrt{\dfrac{6}{13}}\right);\left(4\sqrt{\dfrac{6}{13}};-\sqrt{\dfrac{6}{13}}\right).$

Cách 2. Ta giải bằng phương pháp thế như sau

Ta có $\begin{cases} x^2-8x=y^3+2y \\ x^2-3=3(y^2+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-y^3=2(4x+y) \\ x^2-3y^2=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x^3-y^3)=6(4x+y) & (1) \\ x^2-3y^2=6 & (2) \end{cases}$

Thế (2) vào (1) ta được

$$3(x^3-y^3)=(x^2-3y^2)(4x+y) \Leftrightarrow x\left(x^2+xy-12y^2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3y \\ x=-4y \end{array}\right.$$

+ Với $x=0,$ khi đó $(2) \Leftrightarrow y^2=-2,$ vô nghiệm.

+ Với $x=3y,$ khi đó $(2) \Leftrightarrow y^2=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases} \end{array}\right.$

+ Với $x=-4y,$ khi đó $(2) \Leftrightarrow y^2=\dfrac{6}{13} \Rightarrow \begin{cases} x=-4\sqrt{\dfrac{6}{13}} \\ y=\sqrt{\dfrac{6}{13}} \end{cases} \vee \begin{cases} x=4\sqrt{\dfrac{6}{13}} \\ y=-\sqrt{\dfrac{6}{13}} \end{cases}$

Vậy, hệ phương trình đã cho có bốn nghiệm là

$(3;1);(-3;-1);\left(-4\sqrt{\dfrac{6}{13}};\sqrt{\dfrac{6}{13}}\right);\left(4\sqrt{\dfrac{6}{13}};-\sqrt{\dfrac{6}{13}}\right).$

3. Hệ phương trình đối xứng

3.1. Hệ phương trình đối xứng loại I

Ta qui ước gọi một hệ hai phương trình chứa hai ẩn x, y là *hệ phương trình đối xứng loại I*, nếu ta thay thế x bởi y và y bởi x thì mỗi phương trình của hệ không thay đổi.

Phương pháp giải.

· Đặt $S=x+y, P=xy$ đưa hệ phương trình về hệ phương trình ẩn S và P.

· Tìm S, P, khi đó x, y là nghiệm của phương trình: $X^2 - SX + P = 0$, chú ý phải có điều kiện $S^2 - 4P \geq 0$.

3.2. Hệ phương trình đối xứng loại II

Ta qui ước gọi một hệ hai phương trình chứa hai ẩn x, y là *hệ phương trình đối xứng loại II*, nếu tráo đổi vai trò của x, y cho nhau thì phương trình này chuyển thành phương trình kia.

Phương pháp giải.

· Trừ từng vế các phương trình đã cho ta được phương trình mới, đưa phương trình này về phương trình tích.

· Ứng với từng trường hợp xảy ra, kết hợp với một trong hai phương trình của hệ để có một hệ phương trình con, giải hệ phương trình con này.

· Tổng hợp nghiệm.

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3(x-y) \\ x^2 + xy + y^2 = 7(x-y)^2 \end{cases}$$

Giải.

Cách 1.

Đặt $x = X, y = -Y$, hệ phương trình đã cho trở thành $\begin{cases} X^2 + XY + Y^2 = 3(X+Y) \\ X^2 - XY + Y^2 = 7(X+Y)^2 \end{cases}$

Đây là hệ phương trình đối xứng loại I đối với hai ẩn X, Y.

Đặt $S = X + Y, P = XY$, điều kiện $S^2 - 4P \geq 0$.

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} S^2 - P = 3S \\ S^2 - 3P = 7S^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 + 2S^2 - 3S = 0 \\ P = -2S^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - S = 0 \\ P = -2S^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 0 \\ P = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} S = 1 \\ P = -2 \end{cases}$$

· $\begin{cases} S = 0 \\ P = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X + Y = 0 \\ XY = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X = Y = 0$, do đó $x = y = 0$.

· $\begin{cases} S = 1 \\ P = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X + Y = 1 \\ XY = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 2 \\ Y = -1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} X = -1 \\ Y = 2 \end{cases}$

Do đó, $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$

Vậy, hệ phương trình đã cho có ba nghiệm $(0;0); (2;1); (-1;-2)$.

Cách 2.

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3(x-y) & (1) \\ x^2 + xy + y^2 = 7(x-y)^2 & (2) \end{cases}$$

Ta có $(2) \Leftrightarrow 2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2y \\ x = \dfrac{y}{2} \end{array}\right.$

· Với $x = 2y$ khi đó $(1) \Leftrightarrow y^2 - y = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \Rightarrow x = 0 \\ y = 1 \Rightarrow x = 2 \end{array}\right.$

· Với $x = \dfrac{y}{2}$ khi đó $(1) \Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = -1 \Rightarrow y = -2 \end{array}\right.$

Vậy, hệ phương trình có ba nghiệm $(0;0);(2;1);(-1;-2)$.

Chú ý. Bạn đọc cũng có thể giải theo phương pháp đối với hệ phương trình đẳng cấp.

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^4 - x^2y^2 + y^4 = 13 \end{cases}$$

Giải.

Ta có $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^4 - x^2y^2 + y^4 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ \left(x^2 + y^2\right)^2 - 3x^2y^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2y^2 = 4 \end{cases}$

Khi đó $x^2; y^2$ là các nghiệm của phương trình $X^2 - 5X + 4 = 0$; phương trình này có nghiệm là $X_1 = 1;\ X_2 = 4$.

Do đó, hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2y^2 = 4 \end{cases}$ tương đương với

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \vee x = -1 \\ y = 2 \vee y = -2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \vee x = -2 \\ y = 1 \vee y = -1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy, hệ phương trình đã cho có tám nghiệm là $(1;2)$; $(1;-2)$; $(-1;2)$; $(-1;-2)$; $(2;1)$; $(2;-1)$; $(-2;1)$; $(-2;-1)$.

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3y = \dfrac{y^2 + 2}{x^2} \\ 3x = \dfrac{x^2 + 2}{y^2} \end{cases}$$

Giải.

$$\begin{cases} 3y = \dfrac{y^2+2}{x^2} \\ 3x = \dfrac{x^2+2}{y^2} \end{cases} \quad (1)$$

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$ (do vế phải không âm nên vế trái cũng không âm)

Ta có $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, y > 0 \\ 3yx^2 = y^2 + 2 \\ 3xy^2 = x^2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, y > 0 \\ 3xy^2 = x^2 + 2 \\ 3xy(x-y) + x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, y > 0 \\ 3xy^2 = x^2 + 2 \\ (x-y)(3xy + x + y) = 0 \end{cases}$$

do $x > 0, y > 0$ suy ra $3xy + x + y > 0,$ nên ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} x > 0, y > 0 \\ 3xy^2 = x^2 + 2 \\ x = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, y > 0 \\ 3x^3 - x^2 - 2 = 0 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, y > 0 \\ (x-1)(3x^2 + 2x + 2) = 0 \\ x = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, y > 0 \\ x - 1 = 0 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, y > 0 \\ x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy, hệ phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất $(1;1)$.

Ví dụ 4. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} xy + x^2 = m(y-1) \\ xy + y^2 = m(x-1) \end{cases}$$

a) Tìm các giá trị của *m* để hệ phương trình có nghiệm duy nhất;

b) Giải hệ phương trình khi $m = -1$.

Giải.

a) Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} xy + x^2 = m(y-1) \\ x^2 - y^2 = m(y-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy + x^2 = m(y-1) \\ (x-y)(x+y+m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x = y \\ 2x^2 - m(x-1) = 0 \quad (*) \end{cases} & \text{(I)} \\ \begin{cases} y = -x - m \\ m^2 + m = 0 \end{cases} & \text{(II)} \end{array} \right.$$

Ta có hệ (II) hoặc vô nghiệm hoặc vô số nghiệm. Do đó, muốn hệ phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất thì điều kiện là hệ (I) có một nghiệm duy nhất đồng thời hệ (II) vô nghiệm.

Hệ (I) có một nghiệm duy nhất khi và chỉ khi phương trình (*) của hệ (I) có

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow m^2 - 8m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 8 \end{array} \right.$$

Ta nhận $m = 8$ vì khi $m = 8$ thì hệ (II) vô nghiệm.

Vậy, $m = 8$ thì hệ phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất.

b) Khi $m = -1$ thì hệ phương trình trở thành

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = y \\ 2x^2 + x - 1 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y = -x + 1 \\ 0 = 0 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = t \\ y = -t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Trong một số trường hợp, phương pháp giải đã trình bày ở trên không phải lúc nào cũng thuận lợi. Ta xét ví dụ sau.

Ví dụ 5. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + \dfrac{2xy}{\sqrt[3]{x^2 - 2x + 9}} = x^2 + y \\ y + \dfrac{2xy}{\sqrt[3]{y^2 - 2y + 9}} = y^2 + x \end{cases}$$

Giải.

Nếu trừ từng vế của hai phương trình của hệ thì sẽ khó đi đến kết quả, ta biến đổi hệ như sau

Hệ phương trình đã cho tương đương với $\begin{cases} x + \dfrac{2xy}{\sqrt[3]{(x-1)^2 + 8}} = x^2 + y \quad (1) \\ y + \dfrac{2xy}{\sqrt[3]{(y-1)^2 + 8}} = y^2 + x \quad (2) \end{cases}$

Cộng (1) và (2) theo vế ta được

$$x^2+y^2=\frac{2xy}{\sqrt[3]{(x-1)^2+8}}+\frac{2xy}{\sqrt[3]{(y-1)^2+8}}$$

Ta có nhận xét $\begin{cases}\sqrt[3]{(x-1)^2+8}\ge 2\\ \sqrt[3]{(y-1)^2+8}\ge 2\\ x^2+y^2\ge 0\end{cases}$

Từ đó suy ra $xy\ge 0.$

Như vậy, ta có

$$x^2+y^2=\frac{2xy}{\sqrt[3]{(x-1)^2+8}}+\frac{2xy}{\sqrt[3]{(y-1)^2+8}}\le\frac{2xy}{2}+\frac{2xy}{2}=2xy$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2\le 2xy\Leftrightarrow (x-y)^2\le 0$$

Như vậy, $x=y.$

Khi đó, (1) $\Leftrightarrow \dfrac{2x^2}{\sqrt[3]{(x-1)^2+8}}=x^2\Leftrightarrow x^2\left[\sqrt[3]{(x-1)^2+8}-2\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$

Vậy, $x=y=0\vee x=y=1.$

Thử lại, ta thấy $x=y=0, x=y=1$ thỏa hệ phương trình.

Vậy, hệ phương trình đã cho có hai nghiệm (0;0); (1;1).

Ví dụ 6. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}y^2=x^3-4x^2+7x & (1)\\ x^2=y^3-4y^2+7y & (2)\end{cases}$$

Giải.

Trừ (1) cho (2) vế theo vế ta được

$$y^2-x^2=x^3-4x^2+7x-y^3+4y^2-7y$$
$$\Leftrightarrow y^3-3y^2+7y=x^3-3x^2+7x$$
$$\Leftrightarrow f(y)=f(x)\qquad (*)$$

Với $f(t)=t^3-3t^2+7t.$

Ta có $f'(t)=3t^2-6t+7>0,\forall t\in\mathbb{R}.$

Do đó, hàm số $f(t)$ luôn luôn tăng trên toàn bộ $\mathbb{R}.$

Vì vậy, $(*)\Leftrightarrow x=y.$

Với $x=y,$ (1) trở thành $x^3-5x^2+7x=0\Leftrightarrow x=0.$

Thử lại ta được $x=y=0$ thỏa hệ phương trình đã cho.

Vậy, hệ phương trình có một nghiệm duy nhất là $(0;0).$

Ví dụ 7. Chứng minh rằng hệ phương trình sau có đúng hai nghiệm thỏa mãn điều kiện $x>0, y>0$.

$$\begin{cases} e^x = 100 - \dfrac{y}{\sqrt{y^2-1}} & (1) \\ e^y = 100 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} & (2) \end{cases}$$

Giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x>0 \\ y>0 \\ y^2-1>0 \\ x^2-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ y>1 \end{cases}$

Lấy (1) trừ cho (2) vế theo vế ta được

$$e^x - e^y = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{y}{\sqrt{y^2-1}} \Leftrightarrow e^x - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = e^y - \frac{y}{\sqrt{y^2-1}} \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

Xét hàm đặc trưng $f(t) = e^t - \dfrac{t}{\sqrt{t^2-1}}, t>1$

Khi đó, $f'(t) = e^t + \dfrac{1}{(t^2-1)\sqrt{t^2-1}} > 0, \forall t>1$

Suy ra, hàm số f là hàm đồng biến với mọi $t>1$

Do đó, $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y > 1$

Với $x = y$, ta được $e^x = 100 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} \Leftrightarrow e^x + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} - 100 = 0\ (*)$, $x>1$

Xét hàm số $g(x) = e^x + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} - 100$, $x>1$

Ta có $g'(x) = e^x - \dfrac{1}{\sqrt{\left(x^2-1\right)^3}}$ và $g''(x) = e^x + \dfrac{3x}{\sqrt{\left(x^2-1\right)^5}} > 0, \forall x>1$

Suy ra đồ thị hàm số g luôn luôn lõm với mọi $x>1$.

Mặt khác, $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = +\infty; \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.$

Ngoài ra, $g(2)<0$. Như vậy, đồ thị hàm số $g(x)$ cắt trục hoành tại đúng hai điểm có hoành độ lớn hơn 1. Do đó, phương trình (*) có đúng hai nghiệm phân biệt $x_1>1; x_2>1$.

Vậy, hệ phương trình có đúng hai nghiệm $\left(x_1; y_1\right); \left(x_2; y_2\right)$ thỏa điều kiện đã cho.

Ví dụ 8. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(1+a) \\ (x+y)^2 = 4 \end{cases}$$

Tìm các giá trị của a để hệ phương trình có đúng hai nghiệm.

Giải.

Đặt $S = x+y, P = xy; S^2 - 4P \geq 0.$ Khi đó hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} S^2 - 2P = 2(1+a) \\ S^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P = 1-a \\ S = \pm 2 \end{cases}$$

$(x; y)$ là nghiệm của phương trình

$$\left[\begin{array}{ll} X^2 - 2X + 1 - a = 0 & (i) \\ X^2 + 2X + 1 - a = 0 & (ii) \end{array}\right.$$

(i) có hai nghiệm là: $1+\sqrt{a}$, $1-\sqrt{a}$

(ii) có hai nghiệm là: $-1+\sqrt{a}$, $-1-\sqrt{a}$

Nếu $a > 0$ thì bốn giá trị này khác nhau và do đó hệ phương trình đã cho có bốn nghiệm khác nhau.

Nếu $a = 0$ thì hai nghiệm của (i) trùng nhau tại 1 và hai nghiệm của (ii) trùng nhau tại $-1,$ do đó hệ phương trình đã cho có đúng hai nghiệm $(1;1)$ và $(-1;-1).$

Vậy, hệ phương trình đã cho có đúng hai nghiệm khi và chỉ khi $a = 0.$

Ví dụ 9. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} y^2 = x^3 - 4x^2 + ax \\ x^2 = y^3 - 4y^2 + ay \end{cases}$$

Tìm a để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Giải.

Ta thấy nếu $(x; y)$ là nghiệm của hệ phương trình thì $(y; x)$ cũng là nghiệm của hệ. Vì vậy, để hệ phương trình có nghiệm duy nhất thì $x = y.$ Thay $y = x$ vào hệ phương trình đã cho, ta được

$$x^2 = x^3 - 4x^2 + ax$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - 5x + a) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 5x + a = 0 \end{array}\right.$$

Do đó, hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi phương trình $x^2 - 5x + a = 0$ hoặc có nghiệm kép bằng 0 hoặc vô nghiệm, tuy nhiên không xảy ra trường hợp thứ nhất.

Phương trình $x^2 - 5x + a = 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

$\Delta = 25 - 4a < 0$

$\Leftrightarrow a > \dfrac{25}{4}.$

Trừ hai phương trình theo từng vế ta được

$y^2 - x^2 = \left(x^3 - y^3\right) - 4\left(x^2 - y^2\right) + a\left(x - y\right)$

$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + ax = y^3 - 3y^2 + ay$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 3t^2 + at,$ ta có $f'(t) = 3t^2 - 6t + a > 0$ khi $a > \dfrac{25}{4},$ suy ra hàm số $f(t) = t^3 - 3t^2 + at$ đồng biến khi $a > \dfrac{25}{4},$ như vậy hệ không có nghiệm $(x; y), x \neq y$ với $a > \dfrac{25}{4}.$ Vậy, giá trị cần tìm của a là $a > \dfrac{25}{4}.$

4. Giải một số hệ khác

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y^2 + xy + x - 6y + 1 = 0 \\ y^3x - 8y^2 + x^2y + x = 0 \end{cases} (1)$$

Giải.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \left(xy+1\right) + \left(y^2 + x\right) = 6y \\ y^2\left(xy+1\right) + x\left(xy+1\right) = 9y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(xy+1\right) + \left(y^2 + x\right) = 6y \\ \left(xy+1\right)\left(y^2 + x\right) = 9y^2 \end{cases}$$

Như vậy, $\left(xy+1\right)$ và $\left(y^2 + x\right)$ có tổng và tích là $6y$ và $9y^2,$ do đó ta được

$\begin{cases} y^2 + x = 3y & (1) \\ xy + 1 = 3y & (2) \end{cases}$. Từ (1) $\Rightarrow$ $x = 3y - y^2$ thay vào (2) ta được $(3y - y^2)y + 1 = 3y$

$\Leftrightarrow \left(y-1\right)^3 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \Rightarrow x = 2.$

Vậy, nghiệm của hệ phương trình là (2;1).

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + 1 + y(y+x) = 4y \\ (x^2+1)(y+x-2) = y \end{cases}$$

Giải.

Nhận xét: Khi $y = 0,$ hệ phương trình vô nghiệm.

Với $y \neq 0,$ hệ phương trình tương đương với $\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{y} + y + x = 4 \\ \dfrac{x^2+1}{y}(y + x - 2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{y} + \left(y + x - 2\right) = 2 \\ \dfrac{x^2+1}{y}(y + x - 2) = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{y} = 1 \\ x+y-2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-2=0 \\ y=3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-2 \\ y=5 \end{cases}$$

Vậy, hệ phương trình có hai nghiệm là $(1;2);(-2;5)$.

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (x-y)(x^2+y^2)=13 \\ (x+y)(x^2-y^2)=25 \end{cases}$$

Giải.

Cách 1.

Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} (x-y)[(x-y)^2+2xy]=13 \\ (x-y)(x+y)^2 \qquad\qquad = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)[(x-y)^2+2xy]=13 \\ (x-y)[(x-y)^2+4xy]=25 \end{cases}$$

Đặt $u = x-y, v = xy$, ta có $\begin{cases} u(u^2+2v)=13 \quad (1) \\ u(u^2+4v)=25 \quad (2) \end{cases}$

Do $u=0$ không thỏa (1) và (2), nên ta lấy (1) chia cho (2) vế theo vế ta được

$$\frac{u^2+2v}{u^2+4v} = \frac{13}{25} \Leftrightarrow v = 6u^2.$$

Thế $v=6u^2$ vào (1) ta được $u^3=1 \Leftrightarrow u=1 \Rightarrow v=6$

Như vậy, ta được $\begin{cases} x-y=1 \\ xy=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

Vậy, nghiệm của hệ phương trình là $(-2;-3),(3;2)$.

Cách 2.

$$\begin{cases} (x-y)(x^2+y^2)=13 \\ (x+y)(x^2-y^2)=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+xy^2-yx^2-y^3=13 \quad (1) \\ x^3-xy^2+yx^2-y^3=25 \quad (2) \end{cases}$$

Cộng (1) và (2) theo vế và lấy (1) trừ cho (2) theo vế ta được hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases} 2x^3-2y^3=38 \\ 2xy^2-2x^2y=-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-y^3=19 \\ xy(x-y)=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x^2+xy+y^2)=19 \\ xy(x-y) \qquad\qquad = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)[(x-y)^2+3xy]=19 \\ xy(x-y) \qquad\qquad = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^3+3(x-y)xy=19 \\ xy(x-y) \qquad\qquad = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)=1 \\ xy(x-y)=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=1 \\ xy=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+1 \\ y^2+y-6=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-2 \\ y=-3 \end{cases}$$

Vậy, nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(-2;-3),(3;2)$.

Ví dụ 4. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+y+x^3y+xy^2+xy=-\dfrac{5}{4} \\ x^4+y^2+xy(1+2x)=-\dfrac{5}{4} \end{cases}$$

Giải.

Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x^2+y+xy(x^2+y)+xy=-\dfrac{5}{4} \\ (x^2+y)^2+xy=-\dfrac{5}{4} \end{cases}$$

Đặt $u=x^2+y; v=xy.$ Hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} u+uv+v=-\dfrac{5}{4} (1) \\ u^2+v=-\dfrac{5}{4} (2) \end{cases}$$

Trừ (2) cho (1) theo vế ta được $u^2-u-uv=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=0 \\ v=u-1 \end{array}\right.$

+ Trường hợp 1: $u=0 \Rightarrow v=-\dfrac{5}{4}$

Như vậy $\begin{cases} x^2+y=0 \\ xy=-\dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x^2 \\ x^3=\dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt[3]{\dfrac{5}{4}} \\ y=-\sqrt[3]{\dfrac{25}{16}} \end{cases}$

+ Trường hợp 2: $v=u-1$

$(2) \Leftrightarrow u^2+u-1=-\dfrac{5}{4} \Leftrightarrow u=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow v=-\dfrac{3}{2}$

Như vậy $\begin{cases} x^2+y=-\dfrac{1}{2} \\ xy=-\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-\dfrac{3}{2x}=-\dfrac{1}{2} \\ y=-\dfrac{3}{2x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$

Vậy, hệ phương trình đã cho có hai nghiệm $\left(1;-\dfrac{3}{2}\right);\left(\sqrt[3]{\dfrac{5}{4}};-\sqrt[3]{\dfrac{25}{16}}\right)$.

Ví dụ 5. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + x - x^2y - y = -2 \\ x^2y + y + x^2 = 5 \end{cases}$$

Giải. Ta có

$$\begin{cases} x^3 + x - x^2y - y = -2 \\ x^2y + y + x^2 = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2+1) - y(x^2+1) = -2 \\ y(x^2+1) + (x^2+1) = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+1)(x-y) = -2 (1) \\ (x^2+1)(y+1) = 6 \quad (2) \end{cases}$$

Chia (1) cho (2) theo vế ta được

$$\frac{x-y}{y+1} = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow 3x - 3y = -y - 1 \Leftrightarrow y = \frac{3x+1}{2}.$$

Thay vào (2)

$$(x^2+1)(\frac{3x+1}{2}+1) = 6 \Leftrightarrow (x^2+1)(3x+3) = 12$$

$$\Leftrightarrow (x^2+1)(x+1) = 4 \Leftrightarrow x^3 + x^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2.$$

Vậy, nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(1; 2)$.

Ví dụ 6. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x^2 + 2xy - y^2 + 2x + 2y = 0 \quad (1) \\ x\sqrt{y-3} + y\sqrt{3x-1} = x + y \quad (2) \end{cases}$$

Giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x \geq \dfrac{1}{3} \\ y \geq 3 \end{cases}$ (*)

Ta có

$$\begin{cases} 3x^2 + 2xy - y^2 + 2x + 2y = 0 \\ x\sqrt{y-3} + y\sqrt{3x-1} = x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2xy - y^2 + 2(x+y) = 0 \\ x\sqrt{y-3} + y\sqrt{3x-1} = x + y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(3x-y) + 2(x+y) = 0 \\ x\sqrt{y-3} + y\sqrt{3x-1} = x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(3x-y+2) = 0 \\ x\sqrt{y-3} + y\sqrt{3x-1} = x + y \end{cases}$$

Từ điều kiện (*) suy ra $x + y > 0,$ do đó ta phải có $3x - y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = 3x + 2.$

Thay vào (2) ta được

$x\sqrt{3x-1}+(3x+2)\sqrt{3x-1}=4x+2 \Leftrightarrow \sqrt{3x-1}(4x+2)=4x+2$

$\Leftrightarrow (2x+1)(\sqrt{3x-1}-1)=0$

Do điều kiện (*) nên $\sqrt{3x-1}-1=0 \Leftrightarrow \sqrt{3x-1}=1 \Leftrightarrow 3x=2 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3} \Rightarrow y=4.$

Cả hai giá trị đều thỏa điều kiện (*) nên nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(\frac{2}{3};4)$.

Ví dụ 7. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y+xy^2=6x^2 \\ 1+x^2y^2=5x^2 \end{cases}$$

Giải.

Vì $x=0$ không thỏa hệ phương trình nên chia hai vế của các phương trình của hệ cho $x^2 \neq 0$ ta được

$$\begin{cases} \frac{y}{x^2}+\frac{y^2}{x}=6 \\ \frac{1}{x^2}+y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{x}(\frac{1}{x}+y)=6 \\ (\frac{1}{x}+y)^2-2\frac{y}{x}=5 \end{cases}$$

Đặt $u=\frac{y}{x};v=\frac{1}{x}+y$, ta được hệ phương trình mới

$$\begin{cases} uv=6 \\ v^2-2u=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=\frac{v^2-5}{2} \\ v^3-5v-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=2 \\ v=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x}+y=3 \\ \frac{y}{x}=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x}=1 \\ y=2 \end{cases} \vee \begin{cases} \frac{1}{x}=2 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=1 \end{cases}$$

Vậy, hệ phương trình đã cho có hai nghiệm $(1;2);(\frac{1}{2};1)$.

Ví dụ 8. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2y(x^2-y^2)=3x \\ x(x^2+y^2)=10y \end{cases}$$

Giải.

Nhận xét: $(0;0)$ là nghiệm của hệ phương trình.

Ta xét các nghiệm $(x;y)\neq(0;0)$ và nhận thấy $xy>0$.

Chia theo vế hai phương trình của hệ đã cho ta được

$$\frac{2y(x^2-y^2)}{x(x^2+y^2)}=\frac{3x}{10y}\Leftrightarrow\frac{2\left(\frac{y}{x}\right)^2\left[1-\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\frac{3}{10}.$$

Đặt $t=\left(\frac{y}{x}\right)^2, t>0,$ ta được

$$20t^2-7t+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{1}{4}\\ t=\frac{3}{5}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(\frac{y}{x})^2=\frac{1}{4}\\ (\frac{y}{x})^2=\frac{3}{5}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2y\\ x=y\sqrt{\frac{5}{3}}\end{array}\right.$$

Trường hợp 1: $x=2y\Rightarrow y^2=1,$ ta được nghiệm là $(2;1),(-2;-1).$

Trường hợp 2: $x=y\sqrt{\frac{5}{3}}\Rightarrow y^2=\frac{15}{4}\sqrt{\frac{3}{5}},$ ta được nghiệm là

$$\left(\frac{5}{2}\sqrt[4]{\frac{3}{5}};\frac{5}{2}\sqrt[4]{\frac{27}{125}}\right),\left(-\frac{5}{2}\sqrt[4]{\frac{3}{5}};-\frac{5}{2}\sqrt[4]{\frac{27}{125}}\right).$$

Vậy, hệ phương trình đã cho có năm nghiệm là

$$(0;0),\ (2;1),(-2;-1),\ \left(\frac{5}{2}\sqrt[4]{\frac{3}{5}};\frac{5}{2}\sqrt[4]{\frac{27}{125}}\right),\left(-\frac{5}{2}\sqrt[4]{\frac{3}{5}};-\frac{5}{2}\sqrt[4]{\frac{27}{125}}\right).$$

Ví dụ 9. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}(2x+y)^2-5(4x^2-y^2)+6(2x-y)^2=0(*)\\ 2x+y+\dfrac{1}{2x-y}=3\end{cases}$$

Giải. Điều kiện: $2x-y\neq0,$ chia cả hai vế của (*) cho $(2x-y)^2\neq0,$ ta được

$$\left(\frac{2x+y}{2x-y}\right)^2-5\frac{2x+y}{2x-y}+6=0.$$

Đặt $t=\dfrac{2x+y}{2x-y},$ ta được phương trình $t^2-5t+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\ t=3\end{array}\right.$

· $t=2,$ hệ phương trình trở thành $\begin{cases}2x+y+\dfrac{1}{2x-y}=3\\ (2x+y).\dfrac{1}{2x-y}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y=1\\ \dfrac{1}{2x-y}=2\end{cases}\vee\begin{cases}2x+y=2\\ \dfrac{1}{2x-y}=1\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{8} \\ y = \dfrac{1}{4} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \dfrac{3}{4} \\ y = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

· $t = 3$, hệ phương trình trở thành $\begin{cases} 2x + y + \dfrac{1}{2x - y} = 3 \\ (2x + y).\dfrac{1}{2x - y} = 3 \end{cases}$

Trường hợp này hệ phương trình vô nghiệm.

Vậy, hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là $\begin{cases} x = \dfrac{3}{8} \\ y = \dfrac{1}{4} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \dfrac{3}{4} \\ y = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Ví dụ 10. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 3} + 2\sqrt{x} = 3 + \sqrt{y} \\ \sqrt{y^2 + 3} + 2\sqrt{y} = 3 + \sqrt{x} \end{cases}$$

Giải. Điều kiện: $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Trừ theo vế của hai phương trình cho nhau ta được

$$\sqrt{x^2 + 3} + 3\sqrt{x} + 3 = \sqrt{y^2 + 3} + 3\sqrt{y} + 3$$

Xét hàm số đặc trưng: $f(t) = \sqrt{t^2 + 3} + 3\sqrt{t} + 3$. Tập xác định của hàm số $f(t)$ là $D = [0; +\infty)$.

$f'(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t^2 + 3}} + \dfrac{3}{2\sqrt{t}} > 0, \forall t \in D \Rightarrow$ hàm số đồng biến. Vậy, ta có

$\sqrt{x^2 + 3} + 3\sqrt{x} + 3 = \sqrt{y^2 + 3} + 3\sqrt{y} + 3 \;\Leftrightarrow\; x = y$. Với $x = y$, hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} x = y \\ \sqrt{x^2 + 3} + 2\sqrt{x} = 3 + \sqrt{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \sqrt{x^2 + 3} = 3 - \sqrt{x} \;(*) \end{cases}$$

Ta giải (*). Hàm số $y = \sqrt{x^2 + 3}$ là một hàm số đồng biến trên $D = [0; +\infty)$.

Hàm số $y = 3 - \sqrt{x}$ nghịch biến trên D. Vì vậy (*) có nhiều nhất một nghiệm, thử được $x = 1$ thỏa phương trình. Cuối cùng thấy rằng $x = y = 1$ thỏa hệ phương trình đã cho.

Vậy, hệ phương trình có một nghiệm duy nhất là $(1;1)$.

BÀI TẬP CHƯƠNG II

Bài 1. Giải và biện luận các phương trình

1) $m^2x + 4m - 3 = x + m^2$;

2) $(a+b)^2 + 2a^2 = 2a(a+b) + (a^2+b^2)x$;

3) $a^2x + 2ab = b^2x + a^2 + b^2$;

4) $a(ax+b) = 4ax + b^2 - 5$.

Bài 2 Giải và biện luận các phương trình

1) $\dfrac{2x+m}{x-1} - \dfrac{x+m-1}{x} = 1$;

2) $\dfrac{mx^2}{|x|-1} - m|x| = 2m+1$;

3) $\dfrac{2mx-1}{\sqrt{x-1}} - 2\sqrt{x-1} = \dfrac{m+1}{\sqrt{x-1}}$.

Bài 3. Giải và biện luận phương trình

$$m^2x^2 - m(5m+1)x - (5m+2) = 0.$$

Bài 4. Giải và biện luận phương trình sau theo hai tham số a và b

$$(a+b)x^2 - (a^2+4ab+b^2)x + 2ab(a+b) = 0.$$

Bài 5. Cho a, b, c là ba số khác nhau và khác 0. Chứng minh rằng

Nếu các phương trình $x^2 + ax + bc = 0$ và $x^2 + bx + ca = 0$ có đúng một nghiệm chung thì nghiệm còn lại của chúng thỏa mãn phương trình $x^2 + cx + ab = 0$.

Bài 6. Cho phương trình

$$mx^2 - 2(m-3)x + m - 4 = 0$$

Tìm các giá trị của m để phương trình có đúng một nghiệm dương.

Bài 7. Cho phương trình

$$(m-1)x^4 + 2(m-3)x^2 + m + 3 = 0$$

Tìm các giá trị của m để phương trình trên vô nghiệm.

Bài 8. Cho phương trình

$$x^2 - 2x - m|x-1| + m^2 = 0$$

Tìm các giá trị của m để phương trình trên có nghiệm.

Bài 9. 1) Tìm các giá trị của k để phương trình sau có bốn nghiệm phân biệt

$$(x-1)^2 = 2|x-k|.$$

2) Xác định các giá trị của a để phương trình $\left|-2x^2+10x-8\right| = x^2 - 5x + a$ có bốn nghiệm phân biệt.

Bài 10. Giải các phương trình sau

1) $(x-1)(x+5)(x-3)(x+7)=297$;

2) $(x+2)(x-3)(x+1)(x+6)=-36$;

3) $x(x-2)(x+2)(x+4)=18$.

Bài 11. Giải các phương trình sau

1) $x^4+(x-1)^4=97$;

2) $(x+3)^4+(x+5)^4=16$;

3) $(x+2)^4+(x+6)^4=2$.

Bài 12. Giải các phương trình sau

1) $6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0$;

2) $x^4+x^3-4x^2+x+1=0$;

3) $x^4-5x^3+10x^2-10x+4=0$;

4) $2x^4-21x^3+74x^2-105x+50=0$;

5) $2x^4+5x^3+x^2+5x+2=0$.

Bài 13. Biện luận theo m số nghiệm của phương trình: $(x+3)(x-1)(x+5)(x-3)-40=m$.

Bài 14. Giải các hệ phương trình

1) $\begin{cases}\sqrt{2x+y+1}-\sqrt{x+y}=1\\ 3x+2y=4;\end{cases}$

2) $\begin{cases}2xy-3\dfrac{x}{y}=15\\ xy+\dfrac{x}{y}=15;\end{cases}$

3) $\begin{cases}x^2-xy=12\\ y^2-xy=28;\end{cases}$

4) $\begin{cases}\sqrt{x+y}-\sqrt{3x+2y}=-1\\ \sqrt{x+y}+x-y=0;\end{cases}$

5) $\begin{cases}x^2+y^2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=4\\ x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=4;\end{cases}$

6) $\begin{cases}x^2+y^2+6x+2y=0\\ x+y+8=0;\end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2+y^2-xy=13 \\ x+y-\sqrt{xy}=3; \end{cases}$

8) $\begin{cases} x+y+x^2+y^2=8 \\ xy(x+1)(y+1)=12; \end{cases}$

9) $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=4 \\ x(x+y+1)+y(y+1)=2; \end{cases}$

10) $\begin{cases} (x^2+y^2)xy=78 \\ x^4+y^4=97; \end{cases}$

11) $\begin{cases} x^3-y^3=7(x-y) \\ x^2+y^2=x+y+2; \end{cases}$

12) $\begin{cases} \sqrt{x+2}+\sqrt{y-3}=10 \\ \sqrt[4]{x+2}+\sqrt[4]{y-3}=4; \end{cases}$

13) $\begin{cases} (x-1)(y-1)(x+y-2)=6 \\ x^2+y^2-2x-2y-3=0; \end{cases}$

14) $\begin{cases} xy+x+1=7y \\ x^2y^2+xy+1=13y^2; \end{cases}$

15) $\begin{cases} x(x+y+1)-3=0 \\ (x+y)^2-\dfrac{5}{x^2}+1=0. \end{cases}$

Bài 15. Giải các hệ phương trình

1) $\begin{cases} x^2-3xy=4y \\ y^2-3xy=4x; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 7x+y-\dfrac{1}{x^2}=0 \\ 7y+x-\dfrac{1}{y^2}=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2=\sqrt{y-1}+2x-1 \\ y^2=\sqrt{x-1}+2y-1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x-\dfrac{1}{x}=y-\dfrac{1}{y} \\ 2y=x^3+1; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^4+2x^3y+x^2y^2=2x+9 \\ x^2+2xy=6x+6; \end{cases}$

6) $\begin{cases} xy+x+y=x^2-2y^2 \\ x\sqrt{2y}-y\sqrt{x-1}=2x-2y; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^4-x^3y+x^2y^2=1 \\ x^3y-x^2+xy=-1; \end{cases}$

8) $\begin{cases} x^3-3x^2y+2x-6y=-15 \\ x^3+x^2y+2x+2y=9; \end{cases}$

9) $\begin{cases} x^2+y^2-3x+4y=1 \\ 3x^2-2y^2-9x-8y=3; \end{cases}$

10) $\begin{cases} (x-y)^2y=2 \\ x^3-y^3=19; \end{cases}$

11) $\begin{cases} x^3+y^3=1 \\ x^2y+2xy^2+y^3=2; \end{cases}$

12) $\begin{cases} x^3-y^3=x^2-y \\ x^2+y^2=x-y. \end{cases}$

Bài 16. Giải các hệ phương trình

1) $\begin{cases} \sqrt[3]{x-y}=\sqrt{x-y} \\ x+y=\sqrt{x+y+2}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2+y^2=25-xy \\ y(x+y)=10; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=2 \\ \sqrt{x+3}+\sqrt{y+3}=4; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x^2+xy+3x+y=3 \\ xy^2+2x^2+y^2+2x=2; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2y^2-2x^2+y^3-2y=y^2 \\ x^2+y^2-y-2=0; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x+\sqrt{x^2-2x+2}=3^{y-1}+1 \\ y+\sqrt{y^2-2y+2}=3^{x-1}+1; \end{cases}$

7) $\begin{cases} xy-3x-2y=16 \\ x^2+y^2-2x-4y=33; \end{cases}$

8) $\begin{cases} \sqrt{x-3}+\sqrt{y+2}=3 \\ x+y=\sqrt{xy+2x-3y-6}+4; \end{cases}$

9) $\begin{cases} (x+y)(2-\dfrac{1}{xy})=\dfrac{9}{2} \\ (x-y)(2+\dfrac{1}{xy})=\dfrac{5}{2}; \end{cases}$

10) $\begin{cases} x^2+xy=2 \\ x^3+2xy^2-2y=x; \end{cases}$

11) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{7}{\sqrt{xy}}+1 \\ x\sqrt{xy}+y\sqrt{xy}=78. \end{cases}$

Bài 17. Chứng minh rằng với $a \neq 0$, hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x^2=y+\dfrac{a^2}{y} \\ 2y^2=x+\dfrac{a^2}{x} \end{cases}$$

có nghiệm duy nhất.

Bài 18. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2-4xy+y^2=k \\ y^2-3xy=4 \end{cases}$$

1) Giải hệ với $k=1$;

2) Chứng minh rằng hệ phương trình đã cho luôn luôn có nghiệm với mọi k.

Bài 19. Tìm các giá trị của a để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{y+2}=a \\ x+y=3a. \end{cases}$$

Bài 20. Tìm các giá trị của m để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} 4x-y-m=0 \\ -3x+\sqrt{x(y+1)}=-1. \end{cases}$$

Bài 21. Tìm các giá trị của m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x = y^2 - y + m \\ y = x^2 - x + m \end{cases}$$

Bài 22. Tìm các giá trị của m để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 4 \le 0 \\ 3x^2 - mx\sqrt{x} + 16 = 0. \end{cases}$$

Bài 23. Tìm các giá trị của m để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y} = m \\ \sqrt{y+1} + \sqrt{x} = 1. \end{cases}$$

Bài 24. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x + xy + y = m + 1 \\ x^2 y + xy^2 = m. \end{cases}$$

1) Giải hệ phương trình với $m = 2$;

2) Tìm các giá trị của m để hệ phương trình có ít nhất một nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn $x > 0; y > 0$.

Bài 25. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} m(x^2 + 1) + y^2 = m + 1 \\ x^2 + my^2 = 1 \end{cases}$$

1) Giải hệ phương trình khi $m = 1$;

2) Tìm các giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm.

Bài 26. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 - my^2 + 2x + 2 - m = 0 \\ m(x^2 + 2x + 2) - y^2 = m + 2 \end{cases}$$

1) Giải hệ phương trình khi $m = -1$;

2) Tìm các giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm.

Bài 27. Tìm các giá trị của m để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x(x+2)(2x+y) = 9 \\ x^2 + 4x + y = m. \end{cases}$$

Bài 28. Tìm các giá trị của m để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y-2} = \sqrt{m} \\ \sqrt{x-2} + \sqrt{y+1} = \sqrt{m}. \end{cases}$$

CHƯƠNG III. BẤT ĐẲNG THỨC – BẤT PHƯƠNG TRÌNH

§1. ĐẠI CƯƠNG VỀ BẤT ĐẲNG THỨC

1. Định nghĩa

Cho hai số $a, b \in K$ (K là trường số hữu tỉ $\mathbb{Q}$ hay trường số thực $\mathbb{R}$). Ta nói a lớn hơn b và kí hiệu $a > b$ nếu $a - b$ là một số dương. Khi đó, ta cũng nói b bé hơn a và kí hiệu $b < a$.

Ta nói a lớn hơn hay bằng b và viết là $a \geq b$ nếu $a - b$ là một số dương hay bằng không. Khi đó, ta cũng nói b bé hơn hay bằng a và viết $b \leq a$.

Giả sử $A(x), B(x)$ là hai biểu thức toán học với tập xác định chung là D của biến số x (hoặc có thể xem là hai biểu thức toán học của cùng n biến số $x_1, x_2, ..., x_n$ nếu ta xem $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in K^n$).

Ta nói $A(x) < B(x)$ hay $B(x) > A(x)$

$(A(x) \leq B(x)$ hay $B(x) \geq A(x))$

Nếu tại mọi giá trị của biến số $x \in D$ ta đều có:

$A(x_0) < B(x_0)$ hay $B(x_0) > A(x_0)$

$(A(x_0) \leq B(x_0)$ hay $B(x_0) \geq A(x_0))$ là các bất đẳng thức đúng.

Ta gọi $a > b$; $a \geq b$; $A(x) < B(x)$; $A(x) \leq B(x)$ là *bất đẳng thức.*

Ví dụ. $12 \geq 7$; $x^2 - x + 2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$; $y + \dfrac{1}{y} \geq 2, \forall y \in \mathbb{R}^+$ là các bất đẳng thức.

2. Tính chất cơ bản của bất đẳng thức

Ta chứng minh được dễ dàng các tính chất sau đây, trong đó $A, B, C, ...$ là các số hoặc các biểu thức toán học của cùng một số biến số xét trên cùng một trường số K.

2.1. $A < B \Leftrightarrow B > A$

2.2. $A > B, B > C \Rightarrow A > C$

2.3. $A > B \Rightarrow A + C > B + C$

2.4. $\begin{cases} A > B \\ C > D \end{cases} \Rightarrow A + C > B + D$

2.5. $A > B \Rightarrow \begin{cases} Am > Bm; & m > 0 \\ Am < Bm; & m < 0 \end{cases}$

2.6. $\begin{cases} A > B \\ C > D \end{cases} \Rightarrow A - D > B - C$

2.7. $\begin{cases} A > B > 0 \\ C > D > 0 \end{cases} \Rightarrow AC > BD$

2.8. $A > B > 0 \Rightarrow A^n > B^n \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

2.9. $A > B > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{A} > \sqrt[n]{B} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\})$

2.10. $A > B > 0$ hoặc $B < A < 0 \Rightarrow \dfrac{1}{B} > \dfrac{1}{A}$.

3. Một số bất đẳng thức quan trọng

Các bất đẳng thức sau đây thường được dùng để giải các bài toán về bất đẳng thức.

3.1. Bất đẳng thức về dấu giá trị tuyệt đối. Cho $a, b, a_i, i = 1, 2, ..., n$ là các số thực. Thế thì

$$|a+b| \le |a| + |b| \, (*); \big||a| - |b|\big| \le |a-b| \, (**); \, |a_1 + a_2 + ... + a_n| \le |a_1| + |a_2| + ... + |a_n| \, (***).$$

Dấu " = " trong (*) và (**) xảy ra, khi và chỉ khi $ab \ge 0$.

Dấu " = " trong (***) xảy ra, khi và chỉ khi các số $a_i \ge 0$ hoặc $a_i \le 0, \forall i = 1, 2, ..., n$.

3.2. Bất đẳng thức Côsi

Cho n số thực $a_1, a_2, ..., a_n$ không âm. Thế thì

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

3.3. Bất đẳng thức Bunhiacôpski

Cho n cặp số thực $(a_i; b_i)$, $i = 1, 2, ..., n$.

Thế thì

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi tồn tại $k \in \mathbb{R}$ sao cho $b_i = ka_i$, *i = 1, 2,..., n.*

4. Các phương pháp chứng minh bất đẳng thức

4.1. Phương pháp qui về định nghĩa

Để chứng minh $A > B$ (hoặc $A \ge B$), ta chứng minh $A - B > 0$ (hoặc $A - B \ge 0$).

Ví dụ 1. Giả sử a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh rằng

$$a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a+b)^2 > a^3 + b^3 + c^3 \quad (1)$$

Giải.

Ta có

$a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a+b)^2 - a^3 - b^3 - c^3$

$= a[(b-c)^2 - a^2] + b[(c-a)^2 - b^2] + c[(a+b)^2 - c^2]$

$= (a+b-c)[c^2 - (a-b)^2] = (a+b-c)(c+a-b)(b+c-a) > 0$

Bất đẳng thức trên đúng. Vậy (1) đúng.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \geq a(b+c+d+e), \forall a,b,c,d,e.$$

Khi nào dấu "=" xảy ra?

Giải.

Ta có

$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2-a(b+c+d+e)=$

$=a^2+b^2+c^2+d^2+e^2-ab-ac-ad-ae=$

$=\left(\dfrac{a^2}{4}-ab+b^2\right)+\left(\dfrac{a^2}{4}-ac+c^2\right)+\left(\dfrac{a^2}{4}-ad+d^2\right)+\left(\dfrac{a^2}{4}-ae+e^2\right)$

$=\left(\dfrac{a}{2}-b\right)^2+\left(\dfrac{a}{2}-c\right)^2+\left(\dfrac{a}{2}-d\right)^2+\left(\dfrac{a}{2}-e\right)^2 \geq 0.$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{a}{2}=b=c=d=e.$

4.2. Phương pháp biến đổi tương đương

Để chứng minh bất đẳng thức đã cho là đúng, ta biến đổi bất đẳng thức đã cho tương đương với một bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Khi đó ta có kết luận bất đẳng thức đã cho là đúng.

Ví dụ 1. Cho $a>c, b>c>0$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}<\sqrt{ab}. \quad (1)$$

Giải.

Ta có (1) $\Leftrightarrow c(a-c)+c(b-c)+2c\sqrt{(a-c)(b-c)}<ab$

$\Leftrightarrow 2c\sqrt{(a-c)(b-c)}<2c^2-c(a+b)+ab.$

$\Leftrightarrow c^2+(a-c)(b-c)-2c\sqrt{(a-c)(b-c)}>0.$

$\Leftrightarrow \left[c-\sqrt{(a-c)(b-c)}\right]^2>0.$

Bất đẳng thức trên luôn đúng.

Vậy (1) đúng.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng với a,b,c,d là những số thực bất kì, ta luôn có bất đẳng thức

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} \quad (1)$$

Giải.

(1) $\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+d^2+2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \geq a^2+b^2+c^2+d^2+2(ac+bd)$

$\Leftrightarrow \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \geq ac+bd$ (2).

Nếu vế phải của (2) âm thì (2) đúng do đó (1) đúng, nếu vế phải của (2) không âm thì bình phương hai vế của bất đẳng thức (2) ta được

$a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 \geq a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2$

$\Leftrightarrow a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (ad - bc)^2 \geq 0.$ (3)

Bất đẳng thức (3) đúng, do đó bất đẳng thức (2) đúng và như vậy (1) đúng.

Chú ý. Nếu áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski thì bất đẳng thức (2) đúng.

4.3. Phương pháp vận dụng các bất đẳng thức đã biết

Từ các bất đẳng thức đã biết là đúng ta suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

Ví dụ 1. a, b, c là ba cạnh của một tam giác, p là nửa chu vi. Chứng minh rằng

$$\sqrt{p}\left(\sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c}\right) \leq 2p.$$

Dấu "=" có xảy ra được không?

Giải.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương p và $p-a$, ta có

$\sqrt{p(p-a)} \leq \dfrac{p+(p-a)}{2} = p - \dfrac{a}{2}$ (1)

Tương tự ta được

$\sqrt{p(p-b)} \leq p - \dfrac{b}{2}$ (2)

$\sqrt{p(p-c)} \leq p - \dfrac{c}{2}$ (3)

Cộng (1), (2), (3) theo vế ta được

$\sqrt{p}\left(\sqrt{(p-a)} + \sqrt{(p-b)} + \sqrt{(p-c)}\right) \leq 3p - \dfrac{a+b+c}{2} = 2p.$ (đpcm)

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} p = p - a \\ p = p - b \\ p = p - c \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 0.$$

Điều này không thể được vì a, b, c là độ dài cạnh tam giác. Vậy, Dấu " = " không xảy ra.

Ví dụ 2. Cho x, y thỏa $x^2 + y^2 = 1$.

Chứng minh $|2x + 3y| \leq \sqrt{13}$. Khi nào dấu "=" xảy ra?

Giải.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski, ta có

$|2x + 3y| \leq \sqrt{(2^2 + 3^2)(x^2 + y^2)} \leq \sqrt{13}.$ (đpcm)

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

Hệ này có nghiệm, chẳng hạn $x = \dfrac{2}{\sqrt{13}}, y = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$.

Ví dụ 3. Cho a, b, c, d là các số thực dương và $\dfrac{1}{a+1} + \dfrac{1}{b+1} + \dfrac{1}{c+1} + \dfrac{1}{d+1} \geq 3$.

Chứng minh $abcd \leq \dfrac{1}{81}$.

Giải.

Từ giả thiết ta suy ra

$$\frac{1}{a+1} \geq \left(1 - \frac{1}{b+1}\right) + \left(1 - \frac{1}{c+1}\right) + \left(1 - \frac{1}{d+1}\right) = \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} + \frac{d}{d+1}.$$

Theo bất đẳng thức Côsi ta có

$$\frac{1}{a+1} \geq 3\sqrt[3]{\frac{bcd}{(b+1)(c+1)(d+1)}}.$$

Lập luận tương tự cho $\dfrac{1}{b+1}; \dfrac{1}{c+1}; \dfrac{1}{d+1}$ và nhân bốn bất đẳng thức theo vế ta được

$$\frac{1}{(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)} \geq \frac{81.abcd}{(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)}.$$

Từ đây ta suy ra $abcd \leq \dfrac{1}{81}$.

Ví dụ 4. Cho $2n$ số dương $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$. Chứng minh

$$\sqrt[n]{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)...(a_n + b_n)} \geq \sqrt[n]{a_1.a_2...a_n} + \sqrt[n]{b_1.b_2...b_n}$$

Khi nào dấu "=" xảy ra?

Giải.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho n số dương $\dfrac{a_i}{a_i + b_i}, (i = 1, 2, ..., n)$ ta có

$$\frac{1}{n}\left(\frac{a_1}{a_1 + b_1} + \frac{a_2}{a_2 + b_2} + ... + \frac{a_n}{a_n + b_n}\right) \geq \sqrt[n]{\frac{a_1}{a_1 + b_1} . \frac{a_2}{a_2 + b_2} ... \frac{a_n}{a_n + b_n}} \quad (*)$$

và với n số dương $\dfrac{b_i}{a_i + b_i}, (i = 1, 2, ..., n)$ ta có

$$\frac{1}{n}\left(\frac{b_1}{a_1 + b_1} + \frac{b_2}{a_2 + b_2} + ... + \frac{b_n}{a_n + b_n}\right) \geq \sqrt[n]{\frac{b_1}{a_1 + b_1} . \frac{b_2}{a_2 + b_2} ... \frac{b_n}{a_n + b_n}} \quad (**)$$

Cộng hai bất đẳng thức (*) và (**) theo vế ta được

$$\frac{1}{n}\left(\frac{a_1+b_1}{a_1+b_1}+\frac{a_2+b_2}{a_2+b_2}+...+\frac{a_n+b_n}{a_n+b_n}\right)\ge\frac{\sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}+\sqrt[n]{b_1.b_2...b_n}}{\sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)...(a_n+b_n)}}$$

$$\Leftrightarrow 1\ge\frac{\sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}+\sqrt[n]{b_1.b_2...b_n}}{\sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)...(a_n+b_n)}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)...(a_n+b_n)}\ge\sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}+\sqrt[n]{b_1.b_2...b_n}$$

(đpcm)

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\dfrac{a_1}{a_1+b_1}=\dfrac{a_2}{a_2+b_2}=...=\dfrac{a_n}{a_n+b_n}\\ \dfrac{b_1}{a_1+b_1}=\dfrac{b_2}{a_2+b_2}=...=\dfrac{b_n}{a_n+b_n}\end{cases}\Leftrightarrow\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}.$$

Ví dụ 5. Cho các số dương a,b,c,x,y,z thỏa $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=1$. Chứng minh rằng

$$x+y+z\ge\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2$$

Khi nào dấu "=" xảy ra?

Giải.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski cho ba cặp số

$$\sqrt{\frac{a}{x}},\sqrt{\frac{b}{y}},\sqrt{\frac{c}{z}}$$

$$\sqrt{x},\sqrt{y},\sqrt{z}$$

Ta được

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2=\left(\sqrt{\frac{a}{x}}\sqrt{x}+\sqrt{\frac{b}{y}}\sqrt{y}+\sqrt{\frac{c}{z}}\sqrt{z}\right)^2$$

$$\Rightarrow\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2\le\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)(x+y+z)$$

$$\Rightarrow x+y+z\ge\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2.$$

(đpcm)

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{\sqrt{\frac{a}{x}}}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{\frac{b}{y}}}{\sqrt{y}}=\frac{\sqrt{\frac{c}{z}}}{\sqrt{z}}\Leftrightarrow\frac{a}{x^2}=\frac{b}{y^2}=\frac{c}{z^2}\Rightarrow\frac{1}{y}=\frac{1}{x}\sqrt{\frac{a}{b}};\frac{1}{z}=\frac{1}{x}\sqrt{\frac{a}{c}}.$$

Do đó

$$1=\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x}\sqrt{\frac{a}{b}}+\frac{c}{x}\sqrt{\frac{a}{c}}$$

$$\Rightarrow x=\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})$$

$$y=\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})$$

$$z=\sqrt{c}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}).$$

Ví dụ 6. Chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt{4x+3}+\sqrt{4y+3}\sqrt{4z+3}\le\sqrt{39}$$

với $x,y,z\ge -\frac{3}{4}, x+y+z=1$. Dấu "=" xảy ra khi nào?

Giải.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski cho ba cặp số

$$1;\sqrt{4x+3};1;\sqrt{4y+3};1;\sqrt{4z+3}$$

Ta được

$$1.\sqrt{4x+3}+1.\sqrt{4y+3}+1.\sqrt{4z+3}\le$$

$$\le\sqrt{1^2+1^2+1^2}.\sqrt{(4x+3)+(4y+3)+(4z+3)}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{4x+3}+\sqrt{4y+3}+\sqrt{4z+3}\le\sqrt{3}.\sqrt{4(x+y+z)+9}=\sqrt{39}.$$

(đpcm).

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Chú ý. Chúng ta có thể sử dụng tổng hợp nhiều phương pháp, ta xét một số ví dụ sau.

Ví dụ 7.

a) Chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{xyz}\le\sqrt[3]{(a+x)(b+y)(c+z)}\ (1)$$

với a,b,c,x,y,z là các số thực dương.

b) Áp dụng kết quả câu a) chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}\le 2\sqrt[3]{3}\ \ (2)$$

Giải.

a) Ta có

$$(1)\Leftrightarrow abc+xyz+3\sqrt[3]{(abc)^2xyz}+3\sqrt[3]{abc(xyz)^2}\le(a+x)(b+y)(c+z)$$

$$\Leftrightarrow abc+xyz+3\sqrt[3]{(abc)^2xyz}+3\sqrt[3]{abc(xyz)^2}\le abc+xyz+abz+ayc+xbc+xyc+xbz+ayz$$

$$\Leftrightarrow\sqrt[3]{(abc)^2xyz}+3\sqrt[3]{abc(xyz)^2}\le(abz+ayc+xbc)+(xyc+xbz+ayz)\ (3)$$

Mà theo bất đẳng thức Côsi, ta có

$$abz+ayc+xbc\ge 3\sqrt[3]{(abc)^2xyz} \quad (*)$$

$$ayz+xbz+xyc\ge 3\sqrt[3]{abc(xyz)^2} \quad (**)$$

Cộng hai bất đẳng thức cùng chiều (*) và (**) ta thu được (3) và do đó (1) đã được chứng minh.

b) Áp dụng bất đẳng thức (1) với $a=3+\sqrt[3]{3}, b=1, c=1, x=3-\sqrt[3]{3}, y=1, z=1$

Ta được

$$\sqrt[3]{(3+\sqrt[3]{3}).1.1}+\sqrt[3]{(3-\sqrt[3]{3}).1.1}\le\sqrt[3]{(3+\sqrt[3]{3}+3-\sqrt[3]{3})(1+1)(1+1)}=\sqrt[3]{6.2.2}=2\sqrt[3]{3}.\text{(đpcm)}$$

4.4. Phương pháp sử dụng tam thức bậc hai

Ví dụ 1. Chứng minh bất đẳng thức Bunhiacôpski

Cho $2n$ số thực $a_1,a_2,...,a_n,b_1,b_2,...,b_n$.

Chứng minh rằng: $|a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n|\le\sqrt{\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2\right)}$.

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi tồn tại $k\in\mathbb{R}$ sao cho $b_i=ka_i, \forall i=\overline{1,n}$.

Giải.

Đặt $f(x)=(a_1x-b_1)^2+(a_2x-b_2)^2+...+(a_nx-b_n)^2\ge 0, \forall x$.

Mặt khác ta có thể viết

$$f(x)=\left(a_1^2+...+a_n^2\right)x^2-2(a_1b_1+...+a_nb_n)x+\left(b_1^2+...+b_n^2\right)$$

Như vậy, $f(x)$ là một tam thức bậc hai đối với biến x (giả sử $a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\ne 0$), do đó phải có biệt số $\Delta'\le 0$, tức là

$$(a_1b_1+...+a_nb_n)^2-(a_1^2+...+a_n^2)(b_1^2+...+b_n^2)\le 0.$$

Từ đây ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Dấu " = " trong bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$(a_1x-b_1)^2=...=(a_nx-b_n)^2=0$$

$$\Leftrightarrow b_i=ka_i, k\in\mathbb{R}, i=\overline{1,n}.$$

Chú ý. Nếu $a_1^2+a_2^2+...+a_n^2=0\Leftrightarrow a_1=a_2=...=a_n=0$ thì kết quả là tầm thường.

Ví dụ 2. Cho A,B,C là ba góc của một tam giác. Chứng minh rằng

$$1+\frac{1}{2}x^2\ge\cos A+(\cos B+\cos C)x, \forall x\in\mathbb{R}.$$

Giải.

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-(\cos B+\cos C)x+2\sin^2\frac{A}{2}\ge 0 \ \forall x$$

Ta có

$$\Delta = (\cos B + \cos C)^2 - 4\sin^2\frac{A}{2} = 4\sin^2\frac{A}{2}(\cos^2\frac{B-C}{2} - 1) \le 0.$$

Vậy, suy ra điều phải chứng minh.

4.5. Phương pháp chứng minh qui nạp

Ví dụ 1. Chứng minh bất đẳng thức Côsi.

Cho n số thực không âm $a_1, a_2, ... a_n$. Khi đó ta có bất đẳng thức

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Giải.

+ Với $n = 2$ thì bất đẳng thức đúng.

+ Giả sử bất đẳng thức đã đúng đến n, ta chứng minh rằng nó cũng đúng cho $n+1$.

Giả sử có $n+1$ số không âm $a_1, a_2, ... a_n, a_{n+1}$. Lấy thêm $n-1$ số như sau

$$a_{n+2} = a_{n+3} = ... = a_{2n} = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_{n+1}}{n+1}. \ (*)$$

Để ý rằng

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n(n+1)}\right]$$

Nên ta có

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_{n+1}}{n+1} = \frac{1}{2}\left[\frac{a_1 + a_2 + ... + a_{n+1}}{n} + \frac{1}{n}(n-1)\frac{a_1 + a_2 + ... + a_{n+1}}{n+1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} + \frac{a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{2n}}{n}\right]$$

$$\ge \sqrt{\left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\right)\left(\frac{a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{2n}}{n}\right)} (**)$$

$$\ge \sqrt[2n]{a_1.a_2...a_{n+1}} \sqrt[2n]{\left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_{n+1}}{n+1}\right)^{n-1}}$$

Từ đó ta suy ra

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1} \ge a_1.a_2...a_{n+1} \text{ hay } \frac{a_1 + a_2 + ... + a_{n+1}}{n+1} \ge \sqrt[n+1]{a_1.a_2...a_{n+1}} \text{ (đpcm).}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi dấu "=" trong (**) xảy ra, khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n; a_{n+1} = a_{n+2} = ... = a_{2n}$. Kết hợp với giả thiết (*) ta có $(n+1)a_{n+1} = na_1 + a_{n+1} \Rightarrow a_{n+1} = a_1$. Vậy, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_{n+1}$.

Ví dụ 2. Giả sử $x_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + ... + \sqrt{2}}}$ với n dấu căn. Chứng minh rằng $x_n < 2$ với mọi $n \ge 1$.

Giải.

+ Xét $n=1$ ta có $x_1=\sqrt{2}<2$, đúng.

+ Giả sử đã có $x_n<2$, ta chứng minh $x_{n+1}<2$.

Thật vậy, ta có

$$x_{n+1}=\sqrt{2+\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}_{n}}=\sqrt{2+x_n}.$$

Ta đã có $x_n<2$ nên $x_n+2<4$, do đó $x_{n+1}<2$ (đpcm).

4.6. Phương pháp vec tơ

Một số kết quả sau có thể suy ra từ các tính chất của các phép toán véc tơ.

Giả sử $\vec{a}=(a_1;a_2),\vec{b}=(b_1;b_2)$. Ta có

· $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$

· $\vec{a}\pm\vec{b}=(a_1\pm b_1;a_2\pm b_2)$

· $k\vec{a}=(ka_1;ka_2)$

· $\vec{a}.\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$

· $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b})$

· $(\vec{a})^2=|\vec{a}|^2\ge 0$

· $|\vec{a}+\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\vec{a},\vec{b}$ cùng hướng.

· $\left||\vec{a}|-|\vec{b}|\right|\le|\vec{a}-\vec{b}|$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\vec{a},\vec{b}$ cùng hướng.

· $|\vec{a}.\vec{b}|\le|\vec{a}|.|\vec{b}|$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\vec{a},\vec{b}$ cùng phương.

Ví dụ 1. Với mọi số thực a,b,c, chứng minh rằng

$$\sqrt{(a+c)^2+b^2}+\sqrt{(a-c)^2+b^2}\ge 2\sqrt{a^2+b^2}$$

Khi nào dấu đẳng thức xảy ra?

Giải.

Đặt $\vec{u}=(a+c;b),\vec{v}=(a-c;b),\vec{t}=(2a;2b)$.

Ta có $\vec{u}+\vec{v}=\vec{t}$

và $|\vec{u}|=\sqrt{(a+c)^2+b^2};|\vec{v}|=\sqrt{(a-c)^2+b^2},|\vec{t}|=2\sqrt{a^2+b^2}$

Áp dụng bất đẳng thức $|\vec{u}+\vec{v}|\le|\vec{u}|+|\vec{v}|$, ta được

$\sqrt{(a+c)^2+b^2}+\sqrt{(a-c)^2+b^2}\ge 2\sqrt{a^2+b^2}$ (đpcm).

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u},\vec{v}$ cùng hướng.

Khi đó

+ Nếu $b\neq 0$ thì $c=0$.

+ Nếu $b=0$ thì $|a|\geq|c|$.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\cos^4 x+\cos^4 y}+\sin^2 x+\sin^2 y\geq\sqrt{2},\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Giải.

Đặt $\vec{a}=(\cos^2 x;\cos^2 y);\vec{b}=(\sin^2 x;0);\vec{c}=(0;\sin^2 y);\vec{d}=(1;1)$.

Ta có $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{d}$.

Áp dụng bất đẳng thức $|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|\geq|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=|\vec{d}|$

Ta được $\sqrt{\cos^4 x+\cos^4 y}+\sin^2 x+\sin^2 y\geq\sqrt{2}$ (đpcm).

Ví dụ 3. Chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt{a}+4\sqrt{1-\frac{a}{2}}\leq 3\sqrt{2},\text{ với } 0\leq a\leq 2.$$

Khi nào dấu đẳng thức xảy ra?

Giải.

Đặt $\vec{v}=(1;2\sqrt{2}),\vec{u}=(\sqrt{a};\sqrt{2-a})$.

Khi đó ta có $|\vec{v}|=3;|\vec{u}|=\sqrt{2}$.

Mặt khác $\vec{u}.\vec{v}=\sqrt{a}+2\sqrt{2}\sqrt{2-a}=\sqrt{a}+4\sqrt{1-\frac{a}{2}}$

Áp dụng bất đẳng thức $|\vec{u}.\vec{v}|\leq|\vec{u}|.|\vec{v}|$

Ta được $\sqrt{a}+4\sqrt{1-\frac{a}{2}}\leq 3\sqrt{2}$. (đpcm)

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u},\vec{v}$ cùng hướng. Khi đó

$\frac{\sqrt{a}}{1}=\frac{\sqrt{2-a}}{2\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\sqrt{a}=\sqrt{2-a}$

$8a=2-a\Leftrightarrow a=\frac{2}{9}$.

Chú ý. Có thể sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski.

Ví dụ 4. Chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt{\cos^4 x+1}-\sqrt{\sin^4 x+1}\leq|\cos 2x|$$

Giải. Xét ba véc tơ

$\vec{a}=(\cos^2 x;1),\vec{b}=(\sin^2 x;1),\vec{c}=(\cos 2x;0).$

Áp dụng bất đẳng thức

$$|\vec{a}|-|\vec{b}|\le|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{c}|$$

Ta có $\sqrt{\cos^4 x+1}-\sqrt{\sin^4 x+1}\le|\cos 2x|$. (đpcm)

Ví dụ 5. Cho n số thực $a_1,a_2,...,a_n$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{(1-a_1)^2+1}+\sqrt{(a_1-a_2)^2+1}+...+\sqrt{(a_{n-1}-a_n)^2+1}+\sqrt{(n+2-a_n)^2+1}\ge(n+1)\sqrt{2}.$$

Giải.

Xét $n+2$ véc tơ

$\vec{v}_1=(a_1-1;1),\vec{v}_2=(a_2-a_1;1);...;\vec{v}_n=(a_n-a_{n-1};1);$
$\vec{v}_{n+1}=(n+2-a_n;1),\vec{v}_{n+2}=(n+1;n+1).$

Khi đó ta có $\vec{v}_1+\vec{v}_2+...+\vec{v}_{n+1}=\vec{v}_{n+2}$, và

$|\vec{v}_1|=\sqrt{(1-a_1)^2+1},|\vec{v}_2|=\sqrt{(a_2-a_1)^2+1},...,|\vec{v}_n|=\sqrt{(a_n-a_{n-1})^2+1},$
$|\vec{v}_{n+1}|=\sqrt{(n+2-a_n)^2+1},|\vec{v}_{n+2}|=(n+1)\sqrt{2}.$

Áp dụng bất đẳng thức tổng quát

$$|\vec{v}_1|+|\vec{v}_2|+...+|\vec{v}_{n+1}|\ge|\vec{v}_1+\vec{v}_2+...+\vec{v}_{n+1}|=|\vec{v}_{n+2}|$$

ta được đpcm.

§2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH

1. Định nghĩa

Cho hai hàm số $f(x),g(x)$, với $x\in\mathbb{R}^n$ trong đó $f(x),g(x)$ lần lượt có miền xác định là D_1,D_2. Hai hàm số $f(x),g(x)$ được xét trong $D=D_1\cap D_2$.

Bất phương trình $f(x)>g(x)$ (1) là kí hiệu của hàm mệnh đề "Giá trị tại x của hàm số f lớn hơn giá trị tại x của hàm số g".

Giải bất phương trình là tìm các giá trị $x_0\in D$ sao cho $f(x_0)>g(x_0)$ là một bất đẳng thức đúng. Giá trị x_0 được gọi là một nghiệm của bất phương trình (1).

Chú ý.

· Nếu $n=1$ thì ta có bất phương trình một ẩn x trên $\mathbb{R}$.

· Nếu $n>1$ thì ta có thể xem $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$.

Khi đó, ta có bất phương trình n ẩn $x_1,x_2,...,x_n$.

Hoàn toàn tương tự như trên ta định nghĩa được khái niệm các bất phương trình

$$f(x)<g(x);\ f(x)\ge g(x);\ f(x)\le g(x).$$

Các khái niệm hệ bất phương trình, tuyển bất phương trình được định nghĩa tương tự như trường hợp phương trình.

2. Sự tương đương của các bất phương trình

Khái niệm bất phương trình tương đương, bất phương trình hệ quả cũng được định nghĩa tương tự như đối với phương trình. Sau đây ta đưa ra một số định lý về bất phương trình tương đương.

Ta kí hiệu các vế của bất phương trình bởi $f, g, \ldots$, không ghi tên các ẩn để cho gọn, nhưng có thể hiểu là một ẩn hoặc cùng n ẩn.

2.1. Định lý. $f > g \Leftrightarrow g < f$.

2.2. Định lý. $f > g \Leftrightarrow f + h > g + h$.

(h có nghĩa trong miền xác định của bất phương trình đã cho).

2.3. Định lý.

$$f > g \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} fh > gh \\ h > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} fh < gh \\ h < 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

2.4. Định lý.

$$f.g > 0 \Leftrightarrow \frac{f}{g} > 0.$$

Chú ý. Tuy nhiên, đối với các hệ bất phương trình thì các định lý làm cơ sở cho các phương pháp thế và phương pháp khử trong lý thuyết hệ phương trình không còn đúng nữa.

Chẳng hạn, các hệ bất phương trình

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} F_1 > 0 \\ F_2 > 0 \end{cases} \quad \text{và (II)} \quad \begin{cases} F_1 > 0 \\ F_1 + F_2 > 0 \end{cases}$$

là không tương đương.

Thật vậy, (II) là hệ quả của (I), song (I) lại không phải là hệ quả của (II).

3. Ứng dụng của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất vào việc giải phương trình và bất phương trình

Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là D, giả sử hàm số $y = f(x)$ có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên D, khi đó ta có:

• Bất phương trình $f(x) \geq \alpha$ có nghiệm $x \in D$ khi và chỉ khi

$\underset{x \in D}{Max}\, f(x) \geq \alpha.$

• Bất phương trình $f(x) \geq \alpha$ nghiệm đúng với mọi $x \in D$ khi và chỉ khi

$\underset{x \in D}{Min}\, f(x) \geq \alpha.$

• Bất phương trình $f(x) \le \beta$ có nghiệm $x \in D$ khi và chỉ khi

$\underset{x\in D}{Min} f(x) \le \beta.$

• Bất phương trình $f(x) \le \beta$ nghiệm đúng với mọi $x \in D$ khi và chỉ khi

$\underset{x\in D}{Max} f(x) \le \beta.$

• Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên D thì phương trình $f(x) = \alpha$ có nghiệm $x \in D$ khi và chỉ khi $\underset{x\in D}{Min} f(x) \le \alpha \le \underset{x\in D}{Max} f(x).$

§ 3. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT, BẬC HAI MỘT ẨN

1. Bất phương trình bậc nhất một ẩn

1.1. Bất phương trình bậc nhất một ẩn

Định nghĩa. *Bất phương trình bậc nhất một ẩn* là bất phương trình có dạng $ax+b>0$ (1), hoặc $ax+b<0$; $ax+b\ge 0$; $ax+b\le 0$ $(a,b\in\mathbb{R}, a\ne 0)$.

Các trường hợp nghiệm của bất phương trình bậc nhất $ax+b>0$ (1)

· Nếu $a>0$, (1) có tập nghiệm là $S=\left\{x\in\mathbb{R} / x>\frac{-b}{a}\right\}$;

· Nếu $a<0$, (1) có tập nghiệm là $S=\left\{x\in\mathbb{R} / x<\frac{-b}{a}\right\}$.

1.2. Giải và biện luận bất phương trình $ax+b>0$

· Nếu $a>0$ thì (1) $\Leftrightarrow x>-\frac{b}{a}$. Vậy, tập nghiệm của (1) là $S=\left(\frac{-b}{a};+\infty\right)$;

· Nếu $a<0$ thì (1) $\Leftrightarrow x<-\frac{b}{a}$. Vậy, tập nghiệm của (1) là $S=\left(-\infty;\frac{-b}{a}\right)$;

· Nếu $a=0$ thì (1) trở thành $0x>-b$. Do đó

(1) vô nghiệm nếu $b\le 0$;

(1) nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ nếu $b>0$.

Ví dụ. Giải và biện luận bất phương trình

$$2(x-m)-m-1<3-mx \quad (1)$$

Giải.

$(1)\Leftrightarrow (m+2)x<3m+4$

· $m+2>0\Leftrightarrow m>-2$

$(1)\Leftrightarrow x<\frac{3m+4}{m+2}$

· $m+2<0\Leftrightarrow m<-2$

$(1) \Leftrightarrow x > \dfrac{3m+4}{m+2}$

· $m+2=0 \Leftrightarrow m=-2$

(1) trở thành $0x<-2$: vô nghiệm

Kết luận.

· $m>-2$: Tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(-\infty; \dfrac{3m+4}{m+2}\right)$.

· $m<-2$: Tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(\dfrac{3m+4}{m+2}; +\infty\right)$.

· $m=-2$: Tập nghiệm của bất phương trình là $S\neq\varnothing$.

1.3. Định lý về dấu của nhị thức bậc nhất $f(x)=ax+b; a\neq 0$

Đặt $x_0=\dfrac{-b}{a}$ là nghiệm của $f(x)$. Khi đó, ta có

i) $f(x)$ cùng dấu với hệ số a khi $x_0>\dfrac{-b}{a}$;

ii) $f(x)$ trái dấu với hệ số a khi $x_0<\dfrac{-b}{a}$.

Kết quả của định lý được tóm tắt trong bảng sau

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)=ax+b$	trái dấu với a	0	cùng dấu với a

Chú ý.

1. Sử dụng định lý về dấu của nhị thức bậc nhất ta có thể giải được các bất phương trình dạng

$$\frac{P(x)}{Q(x)}<0;\ \frac{P(x)}{Q(x)}>0;\ \frac{P(x)}{Q(x)}\leq 0;\ \frac{P(x)}{Q(x)}\geq 0.$$

Trong đó, $P(x)$ và $Q(x)$ là tích của những nhị thức bậc nhất.

2. Để giải các bất phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối, ta khử dấu giá trị tuyệt đối bằng định nghĩa và các tính chất sau

· $|f(x)|<g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)<g(x) \\ f(x)>-g(x) \end{cases}$

· $|f(x)|>g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)>g(x) \\ f(x)<-g(x) \end{array}\right.$

· $|f(x)|>|g(x)| \Leftrightarrow [f(x)]^2>[g(x)]^2$

· $|f(x)| < |g(x)| \Leftrightarrow [f(x)]^2 < [g(x)]^2$.

Ví dụ 1. Giải bất phương trình

$$\frac{3}{x-2} \leq \frac{5}{2x-1} \quad (2).$$

Giải.

$$(2) \Leftrightarrow \frac{3}{x-2} - \frac{5}{2x-1} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(2x-1)-5(x-2)}{(x-2)(2x-1)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+7}{(x-2)(2x-1)} \leq 0.$$

Lập bảng xét dấu vế trái của bất phương trình ta được nghiệm của bất phương trình là $x \leq 7$ hoặc $\frac{1}{2} < x < 2$.

Ví dụ 2. Giải bất phương trình

$$\left|\frac{2x-5}{x-3}\right| > 1$$

Giải.

$$\left|\frac{2x-5}{x-3}\right| > 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{2x-5}{x-3} > 1 \\ \dfrac{2x-5}{x-3} < -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{2x-5-x+3}{x-3} > 0 \\ \dfrac{2x-5+x-3}{x-3} < 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x-2}{x-3} > 0 \\ \dfrac{3x-8}{x-3} < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 2 \vee x > 3 \\ \dfrac{8}{3} < x < 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \vee x > \dfrac{8}{3} \\ x \neq 3 \end{cases}$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $\begin{cases} x < 2 \vee x > \dfrac{8}{3} \\ x \neq 3. \end{cases}$

2. Bất phương trình bậc hai một ẩn

2.1. Định lý về dấu của tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$; $a \neq 0$

Định lý. Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$

+ Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in \mathbb{R}$;

+ Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x \neq -\frac{b}{2a}$;

+ Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2, (x_1 < x_2)$.

Khi đó $f(x)$ trái dấu với hệ số a nếu x nằm trong khoảng $(x_1; x_2)$, $f(x)$ cùng dấu với hệ số a nếu x nằm ngoài đoạn $[x_1; x_2]$.

Chứng minh.

Ta có

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$$

$$= a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2})$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

• Trường hợp 1: $\Delta < 0$. Khi đó

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$, do đó nếu $a > 0$ thì $f(x) > 0$ và ngược lại $a < 0$ thì $f(x) < 0$. Hay nói cách khác tam thức $f(x)$ luôn luôn cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in \mathbb{R}$.

• Trường hợp 2: $\Delta = 0$. Khi đó

$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ luôn luôn cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \left(-\frac{b}{2a}\right)$.

• Trường hợp 3: $\Delta > 0$. Khi đó tam thức $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và $f(x)$ được viết dưới dạng

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, giả sử $x_1 < x_2$.

Lập bảng xét dấu biểu thức $(x - x_1)(x - x_2)$ ta được

$$(x - x_1)(x - x_2) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < x_1 \\ x > x_2 \end{array}\right.$$

$(x - x_1)(x - x_2) < 0 \Leftrightarrow x_1 < x < x_2$.

Suy ra $f(x)$ trái với hệ số a với mọi x nằm trong khoảng $(x_1; x_2)$, $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi x nằm ngoài đoạn $[x_1; x_2]$.

2.2. Bất phương trình bậc hai một ẩn

Định nghĩa. *Bất phương trình bậc hai ẩn* x là bất phương trình có dạng $ax^2 + bx + c > 0$ (hoặc $ax^2 + bx + c \geq 0; ax^2 + bx + c < 0; ax^2 + bx + c \leq 0$). Với $a, b, c \in \mathbb{R}$ và $a \neq 0$.

Cách giải.

Để giải bất phương trình bậc hai ta áp dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai.

Chú ý. Cũng như trường hợp bất phương trình bậc nhất, ta cũng giải được các bất phương trình dạng

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0;\quad \frac{P(x)}{Q(x)} < 0\;;\quad \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0\;;\quad \frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0.$$

Trong đó $P(x)$; $Q(x)$ là tích các tam thức bậc hai.

Ví dụ 1. Giải bất phương trình

$$\frac{2x^2-16x+27}{x^2-7x+10} \leq 2$$

Giải.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{2x^2-16x+27}{x^2-7x+10} - 2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2-16x+27-2\left(x^2-7x+10\right)}{x^2-7x+10} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x+7}{x^2-7x+10} \leq 0$$

Lập bảng xét dấu vế trái của bất phương trình ta được nghiệm của bất phương trình đã cho là

$$x \in \left(2;\frac{7}{2}\right] \cup (5;+\infty).$$

Ví dụ 2. Giải và biện luận bất phương trình

$$f(x) = (m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3m - 3 \geq 0 \;\; (1)$$

Giải.

+ Trường hợp 1: $m=-1$

$(1) \Leftrightarrow 4x-6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$

+ Trường hợp 2: $m \neq -1$

$$\Delta' = (m-1)^2 - (m+1)(3m-3) = 2(m-1)(-m-2)$$

Lập bảng xét dấu hệ số a và biệt số Δ'

m	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$a=m+1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$\Delta'=(m-1)(-m-2)$		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	

a) $m<-2$, khi đó $\begin{cases} a<0 \\ \Delta'<0 \end{cases}$

Suy ra $f\left(x\right)<0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Như vậy (1) vô nghiệm.

b/ $m=-2$, khi đó $\begin{cases}a<0\\ \Delta'=0\end{cases}$ nghiệm của (1) là $x=3$.

c/ $-2<m<-1$, khi đó $\begin{cases}a<0\\ \Delta'>0\end{cases}$

Suy ra $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt

$$x_1=\frac{m-1-\sqrt{\Delta'}}{m+1}$$
$$x_2=\frac{m-1+\sqrt{\Delta'}}{m+1}$$

Trường hợp này $a<0$ nên $x_1<x_2$.

Nghiệm của (1) là $x_2\leq x\leq x_1$.

d) $-1<m<1$. Khi đó $\begin{cases}a>0\\ \Delta'>0\end{cases}$, $x_1<x_2$.

Nghiệm của (1) là $x\leq x_1\vee x\geq x_2$.

e) $m\geq 1$. Khi đó $\begin{cases}a>0\\ \Delta'\leq 0\end{cases}$

suy ra $f(x)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$, nghiệm của (1) là $\forall x\in\mathbb{R}$.

Kết luận.

· $m=-1: x\geq\frac{3}{2}$

· $m<-2$: vô nghiệm

· $m=-2: x=3$

· $-2<m<-1: x_2\leq x\leq x_1$

· $-1<m<1: x\leq x_1\vee x\geq x_2$

· $m\geq 1:\forall x\in\mathbb{R}$.

Ví dụ 3. Tìm m để $f(x)=mx^2+4x+m>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Giải.

Xét $m=0$, khi đó $f(x)=4x>0\Leftrightarrow x>0$, Do đó $m=0$, không chấp nhận được.

Xét $m\neq 0$, $f(x)>0\,\forall x\in R\Leftrightarrow\begin{cases}a=m>0\\ \Delta'=4-m^2<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ m<-2\vee m>2\end{cases}\Leftrightarrow m>2$

Vậy, giá trị m cần tìm là $m>2$.

2.3. Định lý đảo về dấu của tam thức bậc hai

Theo định lý về dấu của tam thức bậc hai thì chỉ trong trường hợp $f(x)$ có nghiệm x_1, x_2 thì $af(x)<0$ và $x_2<x<x_1$, do đó ta có định lý đảo của định lý về dấu của tam thức bậc hai như sau.

Định lý. Cho tam thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c$, nếu tồn tại số thực α sao cho $af(\alpha)<0$ thì $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 $(x_1<x_2)$ và α nằm trong khoảng $(x_1;x_2)$.

Từ định lý đảo về dấu của tam thức $f(x)$ ta có phép so sánh nghiệm của $f(x)$ với một số α như sau.

+ Nếu $f(\alpha)=0$ thì α là nghiệm của $f(x)$;

+ Nếu $af(\alpha)<0$ thì α nằm giữa hai nghiệm x_1, x_2 của $f(x)$;

+ Nếu $af(\alpha)>0$ và $f(x)$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì α nằm ngoài đoạn $[x_1;x_2]$ và hơn nữa

· $\alpha<x_1<x_2$ nếu $\dfrac{s}{2}>\alpha$;

· $x_1<x_2<\alpha$ nếu $\dfrac{s}{2}<\alpha$.

Hệ quả. Điều kiện để tam thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c$ có hai nghiệm, trong đó có một nghiệm nằm trong khoảng $(\alpha;\beta)$, còn nghiệm kia nằm ngoài đoạn $[\alpha;\beta]$ là $f(\alpha).f(\beta)<0$.

Chứng minh.

Thật vậy, theo giả thiết ta có $f(\alpha).f(\beta)<0$ suy ra $a^2 f(\alpha)f(\beta)<0$

hay $[af(\alpha)][af(\beta)]<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}af(\alpha)>0\\ af(\beta)<0\end{cases}\\ \begin{cases}af(\alpha)<0\\ af(\beta)>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\alpha<x_1<\beta<x_2\\ x_1<\alpha<x_2<\beta\end{array}\right.$

Vậy, ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 1. Cho a, b, c là ba số dương phân biệt. Chứng minh phương trình

$$a(x-b)(x-c)+b(x-a)(x-c)+c(x-b(x-a)=0$$

có hai nghiệm phân biệt.

Giải.

Không mất tính tổng quát, giả sử $a<b<c$ và đặt

$f(x)=\ a(x-b)(x-c+b(x-a)(x-c)+c(x-b(x-a)$

Ta có $f(b)=b(b-a)(b-c)<0$ và hệ số của x^2 trong tam thức $f(x)$ bằng $a+b+c>0$.

Vậy, phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

Ví dụ 2. Cho phương trình

$$x^2-6mx+(2-2m+9m^2)=0 \text{ (1)}.$$

Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa điều kiện

a) $x_1<4<x_2$;

b) $3<x_1\le x_2$.

Giải.

Đặt $f(x)= x^2-6mx+(2-2m+9m^2)$

a) $x_1<4<x_2 \Leftrightarrow af(4)<0 \Leftrightarrow 9m^2-26m+18<0 \Leftrightarrow \dfrac{13-\sqrt{17}}{9}<m<\dfrac{13+\sqrt{17}}{9}$

b) $3<x_1\le x_2 \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta' = 2m-2\ge 0\\ af(3)=9m^2-20m+11>0\\ \dfrac{s}{2}-3=3m-3\end{cases} \Leftrightarrow m>\dfrac{11}{9}.$

Ví dụ 3. Cho hai phương trình

$$f(x)=x^2+3x+2m=0 \text{ (1)}$$
$$g(x)=x^2+6x+5m=0 \text{ (2)}$$

Tìm m để mỗi phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt và các nghiệm của phương trình (1) và (2) xen kẽ nhau.

Giải.

Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1), khi đó

$$ycbt \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta f = 9-8m>0\\ g(x_1)g(x_2)<0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}9-8m>0\\ \left[f(x_1)+3(x_1+m)\right]\left[f(x_2)+3(x_2+m)\right]<0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}9-8m>0\\ 9m(m-1)<0\end{cases} \Leftrightarrow 0<m<1.$$

Ví dụ 4. Chứng minh rằng phương trình

$$f(x)=ab(x-a)(x-b)+bc(x-b)(x-c)+ca(x-c)(x-a)=0$$

có nghiệm với mọi $a,b,c\in\mathbb{R}$.

Giải.

Ta có

$$f(a)f(b)f(c)=-a^2b^2c^2(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2\le 0.$$

Như vậy, trong ba giá trị $f(a), f(b), f(c)$ chắc chắn phải có một giá trị không dương, chẳng hạn $f(a) \le 0$.

Mặt khác, ta có $f(0) = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \ge 0 \Rightarrow f(0)f(a) \le 0$. Mà $y = f(x)$ là hàm số liên tục trên toàn trục số nên chắc chắn phương trình $y = f(x) = 0$ có nghiệm $x_0 \in [0;a]$.

Ví dụ 5. Tìm a để phương trình

$$(1-a)tg^2x - \frac{2}{cosx} + 1 + 3a = 0\,(1)$$

có nhiều hơn một nghiệm thuộc khoảng $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Giải.

(1) $\Leftrightarrow (1-a)\frac{1}{cos^2x} - \frac{2}{cosx} + 4a = 0$. Đặt $t = \frac{1}{cosx}$, do $x \in (0;\frac{\pi}{2})$ nên $t > 1$.

Yêu cầu bài toán được thỏa khi và chỉ khi phương trình

$$f(t) = (1-a)t^2 - 2t + 4a = 0$$

có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn điều kiện $1 < t_1 < t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ (1-a)f(1) > 0 \\ 1 < \dfrac{S}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{3} < a < 1 \\ a \ne \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Ví dụ 6. So sánh nghiệm của phương trình

$$f(x) = (m-2)x^2 - 2(m+1)x + m - 5 = 0\,(1)$$

với -1.

Giải.

· Khi $m = 2$, (1) trở thành $-6x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} > -1$.

· Khi $m \ne 2$, Ta có

$\Delta' = (m+1)^2 - (m-2)(m-5) = 9m - 9$

$af(-1) = (m-2)(4m-5)$

$\frac{S}{2} + 1 = \frac{m+1}{m-2} + 1 = \frac{2m-1}{m-2}$.

Lập bảng xét dấu $\Delta', af(-1), \frac{S}{2} + 1$ và dựa vào định lý đảo về dấu của tam thức bậc hai, ta có bảng tổng hợp sau.

m	Δ'	$af(-1)$	$\frac{S}{2}+1$	So sánh các nghiệm với -1
$-\infty$				
	$-$	$+$	$+$	Phương trình vô nghiệm
$\frac{1}{2}$			0	
	$-$	$+$	$-$	
1	0			$x_1 = x_2 = -2 < -1$
	$+$	$+$	$-$	$x_1 < x_2 < -1$
$\frac{5}{4}$		0		$x_1 = -5 < x_2 = -1$
	$+$	$-$	$-$	$x_1 < -1 < x_2$
2		0	‖	$x = -\frac{1}{2} > -1$
	$+$	$+$	$+$	$-1 < x_1 < x_2$
$+\infty$				

Ví dụ 7. Với giá trị nào của m thì bất phương trình $mx^4 - 4x + m \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$?

Giải.

Ta có

$mx^4 - 4x + m \geq 0$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m \geq \dfrac{4x}{x^4+1}$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Đặt $f(x) = \dfrac{4x}{x^4+1}$.

Như vậy, $m \geq \dfrac{4x}{x^4+1}$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $Max f(x) \leq m$. Ta có

$$f'(x) = \frac{4(1-3x^4)}{(1+x^4)^2},\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{\sqrt[4]{3}} \\ x = -\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}} \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$		$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\sqrt[4]{27}$	$\nearrow$	$\sqrt[4]{27}$	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên, ta nhận được $Max f(x) = \sqrt[4]{27}$ (khi $x = \dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$).

Vậy, $m \geq \sqrt[4]{27}$ là giá trị cần tìm thỏa đề bài.

Ví dụ 8. Cho bất phương trình

$$\sin^4 x+\cos^4 x-\cos 2x+\frac{1}{4}\sin^2 2x+a\le 0 \ (1).$$

Với giá trị nào của a thì bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$?

Giải.

Ta có $(1)\Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x-\cos 2x+\frac{1}{4}\sin^2 2x\le -a$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4}\left(1-\cos^2 2x\right)-\cos 2x+1\le -a$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 2x-4\cos 2x+3\le -4a. \ (2)$$

Đặt $t = \cos 2x$, với $x\in\mathbb{R}$ thì $-1\le t\le 1$. Bất phương trình (2) trở thành

$$t^2-4t+3\le -4a \Leftrightarrow 4a\le -t^2+4t-3 \ (3)$$

Xét hàm số $f(t)=-t^2+4t-3$ trên đoạn $[-1;1]$, ta có (1) đúng với $\forall x\in\mathbb{R}$ khi và chỉ khi (3) đúng với $\forall t\in[-1;1]$, khi và chỉ khi $\underset{t\in[-1;1]}{Min} f(t)\ge 4a.$

$f'(t)=-2t+4.$

$f'(t)=0\Leftrightarrow t=2\notin[-1;1].$

$f(-1)=-8;\ f(1)=0$

nên $\underset{t\in[-1;1]}{Min} f(t)=-8.$ Vậy ta có $4a\ge -8\Leftrightarrow a\ge -2.$

Giá trị cần tìm là $a\ge -2.$

Ví dụ 9. Tìm p để phương trình

$$\frac{4x^2}{1+2x^2+x^4}+\frac{2px}{1+x^2}+1-p^2=0$$

có nghiệm.

Giải. Đặt $t=\frac{2x}{1+x^2}\in[-1;1]\Rightarrow ycbt\Leftrightarrow$ tìm p để $f(t)=t^2+pt+1-p^2=0$ có nghiệm thuộc $[-1;1]$.

a) $f(-1)=0\Rightarrow p=1;-2$

b) $f(1)=0\Rightarrow p=-1;2$

c) $f(-1)f(1)<0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-2<p<-1\\ 1<p<2\end{array}\right.$

d) Cả hai nghiệm thuộc $(-1;1)\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta\ge 0\\ f(1)>0,\ f(-1)>0\\ -1<\frac{S}{2}<1\end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1<p\le -\frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}}\le p<1\end{array}\right.$.

Vậy, các giá trị cần tìm là $\frac{2}{\sqrt{5}} \leq |p| < 1$.

Ví dụ 10. Tìm a để phương trình

$$(a+1)x^2 - (8a+1)x + 6a = 0$$

có đúng một nghiệm thuộc $(0;1)$.

Giải.

· Xét $a+1=0,$ phương trình trở thành $7x-6=0 \Leftrightarrow x=\frac{6}{7} \in (0;1) \Rightarrow a=-1$ (nhận).

· Xét $a+1 \neq 0,$ để ý rằng $f(0)f(1) = -6a^2 \leq 0.$ Do đó

Nếu $a=0,$ phương trình trở thành $x^2 - x = 0$ có nghiệm $x=0,\ x=1$ (loại).

Nếu $a \neq 0 \Rightarrow f(0)f(1) < 0 \Rightarrow$ phương trình có nghiệm thuộc $(0;1)$.

Vậy, giá trị cần tìm là $a \neq 0$.

Ví dụ 11. Cho phương trình

$$f(x) = 2x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 4m + 3 = 0\ (1)$$

1) Tìm m để phương trình (1) có ít nhất một nghiệm lớn hơn hoặc bằng 1;

2) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1). Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = |x_1x_2 - 2(x_1 + x_2)|$.

Giải.

1) Yêu cầu bài toán được thỏa khi và chỉ khi

$$\left[\begin{array}{l} f(1) \leq 0 \\ \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ f(1) \geq 0 \\ 1 < \frac{S}{2} = -\frac{m+1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2 + 6m + 7 \leq 0 \\ \begin{cases} -5 \leq m \leq -1 \\ m < -3 - \sqrt{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3-\sqrt{2} \leq m \leq -3+\sqrt{2} \\ -5 \leq m < -3-\sqrt{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow -5 \leq m \leq -3 + \sqrt{2}.$$

2) Vì x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1) nên theo hệ thức Viet ta có

$x_1 + x_2 = -(m+1); x_1.x_2 = \frac{1}{2}(m^2 + 4m + 3).$ Do đó ta có

$$A=\frac{1}{2}|m^2+8m+7|=\frac{1}{2}|(m+1)(m+7)|\overset{(-5\le m\le -1)}{=}\frac{1}{2}(-m^2-8m-7)$$

$$=\frac{1}{2}\left[9-(m+4)^2\right]\le\frac{9}{2}.$$

Vậy, $MaxA=\frac{9}{2}$, đạt được khi $m=4.$

Ví dụ 12. Cho hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x^2+2x+a\le 0 & (1)\\ x^2-4x-6a\le 0 & (2)\end{cases}$$

1) Tìm a để hệ bất phương trình có nghiệm;

2) Tìm a để hệ bất phương trình có nghiệm duy nhất.

Giải.

1) Ta có

$(1)\Leftrightarrow x_1=-1-\sqrt{1-a}\le x\le -1+\sqrt{1-a}=x_2\ (a\le -1).$

$(2)\Leftrightarrow x_3=2-\sqrt{6a+4}\le x\le 2+\sqrt{6a+4}=x_4\ \left(a\ge -\frac{2}{3}\right).$

Với $-\frac{2}{3}\le a\le 1$ ta tìm a để $[x_1;x_2]\cap[x_3;x_4]\ne\varnothing$ (*).

Vì $x_1<x_4$ nên

$(*)\Leftrightarrow x_3\le x_2\Leftrightarrow \sqrt{1-a}+\sqrt{6a+4}\ge 3$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{(1-a)(4+6a)}\ge 4-5a$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{4}{5}<a\le 1\\ \begin{cases}-\frac{2}{3}\le a\le\frac{4}{5}\\ 49a^2-48a\le 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow 0\le a\le 1.$$

2) Các khả năng để hệ bất phương trình có nghiệm duy nhất là

$x_1=x_2\Rightarrow\Delta_1'=0\Rightarrow a=1$ thoả mãn.

$x_3=x_4\Rightarrow\Delta_2'=0\Rightarrow a=-\frac{2}{3}$ (loại).

$x_2=x_3\Rightarrow a=0.$

Vậy, giá trị cần tìm để hệ bất phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $\left[\begin{array}{l}a=0\\ a=1.\end{array}\right.$

BÀI TẬP CHƯƠNG III

Bài 1. 1) Chứng minh rằng với mọi a,b,c ta có

a) $a^2+b^2+1\ge ab+a+b$; Đẳng thức xảy ra khi nào?

b) $a^2+b^2+4\ge ab+2(a+b)$; Đẳng thức xảy ra khi nào?

c) $\dfrac{a^2}{4}+b^2+c^2\ge ab-ac+2bc$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

2) Cho x,y,z là các số dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{y^2+yz+z^2}+\sqrt{z^2+zx+x^2}\ge\sqrt{3}(x+y+z).$$

3) Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{3(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}\ge 9.$$

4) Cho $x\ge 0,\ y\ge 0.$ Chứng minh rằng

$$(x+y)^2+\frac{x+y}{2}\ge 2x\sqrt{y}+2y\sqrt{x}.$$

Bài 2. Chứng minh rằng

1) $\dfrac{a}{bc}+\dfrac{b}{ca}+\dfrac{c}{ab}\ge 2\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}\right), (a,b,c>0);$

2) $1<\dfrac{a}{a+b+c}+\dfrac{b}{b+c+d}+\dfrac{c}{c+d+a}+\dfrac{d}{d+a+b}<2, (a,b,c,d>0).$

3) $1<\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}<2$, ($a,b,c$ là độ dài ba cạnh của một tam giác).

Bài 3. 1) Chứng minh rằng

$a)\ (a+b)(ab+1)\ge 4ab\ (a,b>0);$

$b)\ (a+b)(b+c)(c+a)\ge 8abc\ (a,b,c>0);$

$c)\ a^2(1+b^2)+b^2(1+c^2)+c^2(1+a^2)\ge 6abc.$

2) Cho $a>0,b>0,c>0.$ Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{a+b+c}{2}.$$

Bài 4. 1) Cho u,v,x,y thỏa $u^2+v^2=x^2+y^2=1$. Chứng minh rằng

a) $|ux+vy|\le 1;$

b) $|u(x+y)+v(x-y)|\le\sqrt{2}$.

2) Cho $x>0,y>0,z>0$ và $xyz=1.$ Chứng minh rằng

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\geq\frac{3}{2}.$$ Khi nào đẳng thức xảy ra?

3) Cho $a>0,b>0,c>0$ và $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\geq 30.$$ Khi nào đẳng thức xảy ra?

Bài 5. 1) Cho $a^2+b^2+c^2+d^2=1$. Chứng minh rằng

$$(x^2+ax+b)^2+(x^2+cx+d)^2\leq(2x^2+1)^2,\forall x\in\mathbb{R}.$$

2) Cho a,b,c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=abc$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a+2b+3c}+\frac{1}{2a+3b+c}+\frac{1}{3a+b+2c}<\frac{3}{\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2}.$$

Bài 6. 1) Chứng minh $(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x})^2+(\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x})^2\geq\frac{25}{2}$. Khi nào đẳng thức xảy ra?

2) Cho $x,y>0$ và thỏa $x^2+y^2=1$. Chứng minh rằng

$$(1+x)\left(1+\frac{1}{y}\right)+(1+y)\left(1+\frac{1}{x}\right)\geq 4+3\sqrt{2}.$$ Khi nào đẳng thức xảy ra?

Bài 7. 1) Chứng minh rằng với mọi $x\in\mathbb{R}; x\neq 0, x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}$, ta luôn có

$$\frac{1}{x^2}+1\leq\sqrt{\left(\frac{\tan^2 x}{x^2}+1\right)\left(\frac{\cot^2 x}{x^2}+1\right)}.$$ Khi nào đẳng thức xảy ra?

2) Cho a,b,c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=abc$.

Chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt{b^2+2a^2}}{ab}+\frac{\sqrt{c^2+2b^2}}{bc}+\frac{\sqrt{a^2+2c^2}}{ca}\geq\sqrt{3}.$$

Khi nào đẳng thức xảy ra?

3) Cho $x,y,z>0$ và thỏa $x+y+z\leq 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}}\geq\sqrt{82}.$$

4) Cho $x,y,z>0$ và thỏa $xyz=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy}+\frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz}+\frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx}\geq 3\sqrt{3}.$$

Khi nào đẳng thức xảy ra?

Bài 8. 1) Chứng minh rằng với mọi x,y thì

$$x^2(1+\sin^2 y)+2x(\sin y+\cos y)+1+\cos^2 y>0.$$

2) Cho $a \geq b > 0$. Chứng minh rằng

$$\left(2^a + \frac{1}{2^a}\right)^b \leq \left(2^b + \frac{1}{2^b}\right)^a.$$

3) Chứng minh: $2\sin x + \tan x - 3x > 0$, với $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

4) Chứng minh: $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$, với mọi $x > 0$.

Bài 9. 1) Cho a, b, c là các số không âm. Chứng minh rằng

$$a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \leq 3abc.$$

2) Cho $a, b, c,$ là các số dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{2a+b+c} + \frac{b}{2b+c+a} + \frac{c}{2c+a+b} \leq \frac{3}{4}.$$

3) Chứng minh rằng với mọi số thực dương x, y, z thỏa mãn $x(x+y+z) = 3yz$, ta có $(x+y)^3 + (x+z)^3 + 3(x+y)(x+z)(y+z) \leq 5(x+z)^3$.

Khi nào đẳng thức xảy ra?

Bài 10. 1) Cho a, b là các số dương, $n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng

$$(1+\frac{a}{b})^n + (1+\frac{b}{a})^n \geq 2^{n+1}.$$

2) Cho $a \geq 0, b \geq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{a^n + b^n}{2}.$$

Bài 11. Cho $a, b, c,$ là các số dương. Chứng minh rằng

1) $\dfrac{1}{a^3+b^3+abc} + \dfrac{1}{b^3+c^3+abc} + \dfrac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \dfrac{1}{abc}$;

2) $\dfrac{a^2}{b+c} + \dfrac{b^2}{c+a} + \dfrac{c^2}{a+b} \geq \dfrac{a+b+c}{2}$.

Bài 12. Giải các bất phương trình sau

1) $\dfrac{2x-5}{|x-3|} + 1 > 0$;

2) $x^2 \leq \left|1 - \dfrac{2}{x^2}\right|$;

3) $\dfrac{|x-2|}{x^2-5x+6|} \geq 3$;

4) $\left|\dfrac{2-3|x|}{1+x}\right| \leq 1$;

5) $\dfrac{|x+2|-x}{x} \geq 2$;

6) $\dfrac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|} \geq 1$.

Bài 13. Giải các bất phương trình sau

1) $\dfrac{2-x}{x^3+x^2} > \dfrac{1-2x}{x^3-2x^2}$;

2) $\dfrac{x^4-3x^3+2x^2}{x^2-x-30} > 0$;

3) $\dfrac{x^3-3x^2-x+3}{2x-x^2} \leq 0$;

4) $\dfrac{x^4-4x^2+3}{x^2-8x+15} \leq 0$;

5) $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{x^2-x+1} < \dfrac{2x+3}{x^3+1}$;

6) $x^2+(x+1)^2 \leq \dfrac{15}{x^2+x+1}$;

7) $2x^3+x^2-5x+2>0$;

8) $2x^3+x+3 \leq 0$.

Bài 14. Giải và biện luận các bất phương trình sau theo tham số m

1) $(m-3)x^2-2mx+m-6 \leq 0$;

2) $(m-4)x^2-2(m-2)x+m-1 \geq 0$;

3) $mx^2-2(m-3)x+m-4<0$.

Bài 15. Cho tam thức bậc hai

$$f(x)=(m+1)x^2-2(m-1)x+3m-3$$

Tìm các giá trị của m để

1) Bất phương trình $f(x)<0$ vô nghiệm;

2) Bất phương trình $f(x) \geq 0$ có nghiệm.

Bài 16. Tìm các giá trị của m để các bất phương trình sau có tập hợp nghiệm là $\mathbb{R}$

1) $1 \le \dfrac{3x^2 - mx + 5}{2x^2 - x + 1} < 6;$

2) $\left|\dfrac{x^2 + mx + 1}{x^2 + 1}\right| < 2.$

Bài 17. Tìm các giá trị của m để các phương trình sau đây có các nghiệm x_1, x_2 thỏa điều kiện được chỉ ra

1) $x^2 - (2m+3)x + m^2 = 0$; $x_1 < 3 < x_2$;

2) $mx^2 + 2(m-1)x + m - 5 = 0$; $x_1 < x_2 < 2$;

3) $(m-1)x^2 - (m-5)x + m - 1 = 0$; $-1 < x_2 < x_2$.

Bài 18. Biện luận theo m vị trí của số 1 với các nghiệm của phương trình

$$(3-m)x^2 - 2(2m-5)x - 2m + 5 = 0.$$

Bài 19. Tìm các giá trị của m để các phương trình sau có nghiệm x_1, x_2 thỏa điều kiện được chỉ ra

1) $mx^2 - 2(m+1)x + m + 5 = 0$; $x_1 < 0 < x_2 < 2$;

2) $(m-2)x^2 - 2mx + 2m - 3 = 0$; $-6 < x_1 < 4 < x_2$.

Bài 20. Biện luận theo m vị trí của số 0 và số 2 đối với nghiệm của phương trình

$$mx^2 - 2(m-1)x + m - 3 = 0.$$

Bài 21. Tìm các giá trị của m để phương trình

$$2x^2 + (2m-1)x + m - 1 = 0$$

có một nghiệm nằm trong khoảng $(-1;3)$, còn nghiệm kia nhỏ hơn -1.

Bài 22. Cho phương trình

$$(m-1)x^2 - 2mx + m + 5 = 0$$

Tìm các giá trị của m để phương trình

1) Có hai nghiệm đều lớn hơn 2;

2) Có ít nhất một nghiệm lớn hơn 2.

Bài 23. Cho $f(x) = mx^2 - 2(m+1)x - m + 5$.

Tìm các giá trị của m để $f(x) > 0, \ \forall x < 1$.

Bài 24. Cho $f(x) = 2x^2 - (3m+1)x - (3m+9)$.

Tìm các giá trị của m để $f(x) \le 0, \ \forall x \in [-2;1]$.

Bài 25. Cho $f(x) = (m-2)^2 x^2 - 3(m-6)x - m - 1$.

Tìm các giá trị của m để $f(x) < 0, \ \forall x \in (-1,0)$.

Bài 26. Cho bất phương trình

$$(x+2)(x+4)(x^2+6x+10) \geq m.$$

Tìm các giá trị của m để bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Bài 27. Cho bất phương trình

$$2\cos^2 x + 3m\cos x + 1 \geq 0.$$

Tìm các giá trị của m để bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in [0;\pi]$.

Bài 28. Cho bất phương trình

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + (2m+3)(x+\frac{1}{x}) + 2(m+2) > 0.$$

Tìm các giá trị của m để bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x \neq 0$.

Bài 29. Cho bất phương trình

$$x^3 - (2m+1)x^2 + 3(m+4)x - m - 12 > 0.$$

Tìm các giá trị của m để bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x > 1$.

Bài 30. Cho bất phương trình

$$(x-1)(x+1)(x+3)(x+5) > m.$$

Tìm các giá trị của m để bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x > -1$.

Bài 31. Cho bất phương trình

$$x(x-2)(x+2)(x+4) < 2m.$$

Tìm các giá trị của m để bất phương trình có nghiệm $x > 0$.

Bài 32. Chứng minh rằng phương trình $4^x\left(4x^2+1\right)=1$ có đúng ba nghiệm phân biệt.

CHƯƠNG IV. PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

§1. PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

1. Định nghĩa và các định lý

1.1. Định nghĩa

Ta gọi *phương trình vô tỉ*, mọi phương trình có chứa ẩn dưới dấu căn hay nói khác đi đó là phương trình dạng $f(x)=0$, trong đó $f(x)$ là một hàm số có chứa căn thức của biến số.

1.2. Các định lý. (*Các định lý sau làm cơ sở cho việc giải phương trình vô tỉ*).

1.2.1. Định lý. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \left[f(x)\right]^{2k+1} = [g(x)]^{2k+1}$

1.2.2. Định lý. $\sqrt[2k+1]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = [g(x)]^{2k+1}$

1.2.3. Định lý. $\sqrt[2k+1]{f(x)} = \sqrt[2k+1]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

1.2.4. Định lý. $\sqrt[2k]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = [g(x)]^{2k} \end{cases}$

1.2.5. *Định lý.* $\sqrt[2k]{f(x)} = \sqrt[2k]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \vee g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$

(Với k là số tự nhiên khác 0).

Việc chứng minh các định lý trên hết sức dễ dàng nhờ tính chất của lũy thừa và căn thức. Chúng tôi dành cho bạn đọc.

2. Các phương pháp giải phương trình vô tỉ

2.1. Phương pháp nâng lên lũy thừa

Ví dụ 1. Giải phương trình

$$\sqrt{x+3} = 3x-1 \quad (1)$$

Giải.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{3} \\ 3x^2 - 7x - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{3} \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\dfrac{2}{9} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy, phương trình có một nghiệm là $x = 1$.

Ví dụ 2. Giải phương trình

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = \sqrt{2x-8}$$

Giải. Để các căn bậc hai có nghĩa ta phải có điều kiện

$$\begin{cases} 2x - 8 \geq 0 \\ 7 - x \geq 0 \\ x + 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4 \leq x \leq 7.$$

Ta có

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = \sqrt{2x-8}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2x-8} + \sqrt{7-x} = \sqrt{x+3}$$
$$\Leftrightarrow 2x - 8 + 2\sqrt{(2x-8)(7-x)} + 7 - x = x + 3$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(2x-8)(7-x)} = 2$$

$\Leftrightarrow (2x-8)(7-x)=4$

$\Leftrightarrow -2x^2+22x-60=0$

$\Leftrightarrow x^2-11x+30=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=6 \end{array}\right.$

Cả hai giá trị của x đều thỏa mãn điều kiện trên. Vậy, phương trình đã cho có hai nghiệm $x=5; x=6$.

Ví dụ 3. Giải phương trình

$$\sqrt{-x^2+4x+5}+\sqrt{1-x^2}=2$$

Giải.

Điều kiện: $-1 \le x \le 1\,(*)$

Nếu bình phương hai vế của phương trình ta sẽ đưa đến phương trình bậc cao, do đó chuyển hạng tử thứ hai sang vế phải ta được

$$\sqrt{-x^2+4x+5}=2-\sqrt{1-x^2}$$

Với điều kiện $-1 \le x \le 1$ thì vế phải của phương trình trên không âm nên bình phương hai vế của phương trình ta được phương trình tương đương

$-x^2+4x+5=4-4\sqrt{1-x^2}+1-x^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}=-x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0 \\ 1-x^2=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0 \\ 2x^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

Giá trị của x thỏa mãn điều kiện (*).

Vậy, phương trình đã cho có một nghiệm $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Ví dụ 4. Giải phương trình

$$\sqrt{x^3-1}=-x^3-4x+5$$

Giải.

$\sqrt{x^3-1}$ có nghĩa khi và chỉ khi $x \ge 1$. Để bình phương được hai vế ta cần đặt điều kiện cho vế phải không âm, ta có

$-x^3-4x+5 \ge 0$

$\Leftrightarrow (x-1)\left(-x^2-x-5\right) \ge 0$

$\Leftrightarrow x \le 1.$

Như vậy, nghiệm của phương trình chỉ có thể $x=1$. Ta thử được phương trình nhận $x=1$ làm nghiệm. Vậy, phương trình có một nghiệm duy nhất là $x=1$.

Ví dụ 5. Giải phương trình

$$\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}=\sqrt[3]{x-1}\ \ (1)$$

Giải. (1) $\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}\right)^3=x-1$

$\Leftrightarrow 4x+2+3\sqrt[3]{(x+1)(3x+1)}\left(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}\right)=x-1$ (2)

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(x+1)(3x+1)}\left(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}\right)=-x-1$ (3)

Thay $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}$ bởi $\sqrt[3]{x-1}$ vào (3) ta được phương trình hệ quả
$\sqrt[3]{(x+1)(3x+1)}\sqrt[3]{x-1}=-x-1$ (4)

$\Leftrightarrow (x+1)(3x+1)(x-1)=-(x+1)^3$

$\Leftrightarrow x^3+x^2=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Thử lại thì chỉ có $x=-1$ thỏa phương trình (1). Vậy, phương trình (1) có một nghiệm là $x=-1$.

Chú ý. Tất cả các phép biến đổi đều là tương đương, chỉ từ (3) đến (4) là phép biến đổi hệ quả, tức là phép thế $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}$ bởi $\sqrt[3]{x-1}$.

Chúng ta thử phân tích để thấy rõ khi thế $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}$ bởi $\sqrt[3]{x-1}$ không phải là phép biến đổi tương đương. Để cho gọn ta đặt $u=\sqrt[3]{x+1}, v=\sqrt[3]{3x+1}$, $t=\sqrt[3]{x-1}$. Lúc đó ta có

$u+v=t$ (1)

$\Leftrightarrow (u+v)^3=t^3$ (2)

$\Leftrightarrow u^3+v^3+3uv(u+v)=t^3$ (3)

Thay $u+v=t$ vào (3) ta được

$$u^3+v^3+3uvt=t^3 \quad (4)$$

Chúng ta khẳng định (4) là hệ quả của (3) và phép biến đổi từ (3) đến (4) không làm mở rộng tập xác định nên (4) phải được biến đổi thành dạng

$$(u+v-t).A(x)=0$$

Nghiệm ngoại lai xuất hiện chắc chắn là nghiệm của phương trình $A(x)=0$.

Ta có

(4) $\Leftrightarrow u^3+v^3+3uvt-t^3=0$

$\Leftrightarrow (u+v-t)[(u-v)^2+(v+t)^2+(t+u)^2]=0.$

Trở lại ban đầu ta có $A(x)=[(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{3x+1})^2+(\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt[3]{x-1})^2+(\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+1})^2]$.

Rõ ràng $x=0$ là nghiệm của phương trình $A(x)=0$.

Qua bài toán này, chúng ta thấy có những phép biến đổi phương trình tưởng như là phép biến đổi tương đương nhưng thực chất là phép biến đổi hệ quả.

2.2. Phương pháp đặt ẩn phụ

Ví dụ 1. Giải phương trình

$$4x^2-12x-5\sqrt{4x^2-12x+11}+15=0 \quad (*)$$

Giải.

Đặt $t=\sqrt{4x^2-12x+11}$

Điều kiện: $t\geq 0$

Khi đó phương trình $(*)$ trở thành

$$t^2-5t+4=0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=4 \end{array}\right.$$

Với $t=1$ ta có

$$\sqrt{4x^2-12x+11}=1 \quad \Leftrightarrow \ 4x^2-12x+11=1$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-12x+10=0.$$

Trường hợp này phương trình vô nghiệm.

Với $t=4$ ta có

$$\sqrt{4x^2-12x+11}=4$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-12x+11=16$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-12x-5=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3+\sqrt{14}}{2} \\ x=\dfrac{3-\sqrt{14}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình đã cho có nghiệm là $x=\dfrac{3+\sqrt{14}}{2}$ hoặc $x=\dfrac{3-\sqrt{14}}{2}$.

Ví dụ 2. Giải phương trình

$$\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}-\sqrt{(3+x)(6-x)}=3 \ (1)$$

Giải.

Cách 1.

Điều kiện: $\begin{cases} 3+x\geq 0 \\ 6-x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3\leq x\leq 6$

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{3+x}\geq 0 \\ v=\sqrt{6-x}\geq 0 \end{cases}$

Ta có hệ phương trình theo u và v

$$\begin{cases} u+v-uv=3 \\ u^2+v^2=9 \end{cases} (*)$$

Đặt $S=u+v, P=uv; S\geq 0; P\geq 0; S^2-4P\geq 0.$

Khi đó $(*)$ trở thành hệ

$$\begin{cases} S-P=3 \\ S^2-2P=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=S-3 \\ S^2-2S-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=-1 \\ P=-4 \end{cases} \vee \begin{cases} S=3 \\ P=0. \end{cases}$$

Chỉ có $\begin{cases} S=3 \\ P=0 \end{cases}$ thỏa điều kiện.

Với $\begin{cases} S=3 \\ P=0 \end{cases}$ thì $u,\ v$ là nghiệm của phương trình

$$t^2-3t=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=3 \end{array}\right.$$

Khi đó ta có

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{3+x}=0 \\ \sqrt{6-x}=3 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{3+x}=3 \\ \sqrt{6-x}=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=6 \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình đã cho có nghiệm là $x=-3$ hoặc $x=6.$

Cách 2. Đặt

$$t=\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}\geq 0$$

$$\Rightarrow t^2=9+2\sqrt{(3+x)(6-x)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(3+x)(6-x)}=\frac{t^2-9}{2}$$

(1) trở thành phương trình theo biến t

$$t-\frac{t^2-9}{2}=3$$

$$\Leftrightarrow t^2-2t-3=0$$

$$\left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=3. \end{array}\right.$$

Ta nhận $t=3 \Rightarrow \sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}=3,$ điều kiện $-3\leq x\leq 6.$ Bình phương hai vế của phương trình ta được $\sqrt{(3+x)(6-x)}=0 \Leftrightarrow x=-3 \vee x=6.$

Vậy, phương trình đã cho có nghiệm là $x=-3$ hoặc $x=6$.

Ví dụ 3. Giải phương trình

$$2\sqrt[5]{(1+x)^2}+3\sqrt[5]{1-x^2}+\sqrt[5]{(1-x)^2}=0 \quad (1)$$

Giải.

Vì $x=-1$ không là nghiệm, nên chia hai vế của (1) cho $\sqrt[5]{(x+1)^2}$ ta được phương trình

$$2+3\sqrt[5]{\frac{1-x}{1+x}}+\sqrt[5]{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}=0$$

Đặt $t=\sqrt[5]{\frac{1-x}{1+x}}$. Ta có phương trình $t^2+3t+2=0$ (2)

$$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt[5]{\frac{1-x}{1+x}}=-1 \\ \sqrt[5]{\frac{1-x}{1+x}}=-2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1-x}{1+x}=-1 \\ \frac{1-x}{1+x}=-32 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=-\frac{33}{31}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm là $x=-\frac{33}{31}$.

Ví dụ 4. Cho phương trình chứa tham số m

$$2\left(x^2-2x\right)+\sqrt{x^2-2x-3}-m=0 \quad (1)$$

Tìm m để phương trình có nghiệm thuộc đoạn $[4;5]$.

Giải.

Đặt $t=\sqrt{x^2-2x-3},\ x\in[4;5]$

Ta có phương trình $2t^2+t+6-m=0 \Leftrightarrow 2t^2+t+6=m(2)$.

Với $x\in[4;5]$ thì $t\in\left[\sqrt{5};2\sqrt{3}\right]$. Từ đó (1) có nghiệm thuộc đoạn $[4;5] \Leftrightarrow$ (2) có nghiệm thuộc đoạn $\left[\sqrt{5};2\sqrt{3}\right] \Leftrightarrow \underset{t\in[\sqrt{5};2\sqrt{3}]}{Min} f(t)\le m\le \underset{t\in[\sqrt{5};2\sqrt{3}]}{Max} f(t)$

với $f(t)=2t^2+t+6.$ Ta có $f'(t)=2t+1=0 \Leftrightarrow t=-\frac{1}{2}\notin[\sqrt{5};2\sqrt{3}]$.

$f(\sqrt{5})=16+\sqrt{5},\ f(2\sqrt{3})=30+2\sqrt{3}.$

Như vậy, (2) có nghiệm thuộc đoạn $\left[\sqrt{5};2\sqrt{3}\right]$ khi và chỉ khi $16+\sqrt{5}\le m\le 30+2\sqrt{3}$.

Vậy, giá trị m cần tìm là $16+\sqrt{5} \le m \le 30+2\sqrt{3}$.

Ví dụ 5. Giải phương trình

$$x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1} \quad (1).$$

Giải.

Đặt $t=\sqrt[3]{2x-1} \Rightarrow t^3=2x-1$, (1) trở thành $x^3+1=2t \Rightarrow x^3=2t-1$. Như vậy ta có

$$\begin{cases} x^3=2t-1 \\ t^3=2x-1 \end{cases} \Rightarrow x^3-t^3=2(t-x).$$

Từ đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3+1=2t \\ x^3-t^3=2(t-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+1=2t \\ (x-t)\left[\left(x+\dfrac{t}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}t^2+2\right]=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=x \\ x^3-2x+1=0 \end{cases} \Rightarrow x=1 \vee x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy, phương trình đã cho có nghiệm là $x=1 \vee x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Ví dụ 6. Giải phương trình

$$x^2+\sqrt{x+5}=5 \quad (1).$$

Giải.

Đặt $t=\sqrt{x+5} \ge 0 \to t^2=x+5$

$$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+t=5 \\ t^2-x=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+t=5 \\ (x+t)(x-t+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t=-x \ge 0 \\ x^2-x-5=0 \end{cases} \\ \begin{cases} t=x+1 \\ x^2+x-4=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le 0 \\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{21}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge -1 \\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1-\sqrt{21}}{2} \\ x=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2} \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình đã cho có nghiệm là $x=\dfrac{1-\sqrt{21}}{2} \vee x=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$.

Ví dụ 7. Cho phương trình

$$\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}+\sqrt{16-x^2}=m\,(1)$$

Tìm m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm.

Giải. Đặt $t=\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\ge 0;-4\le x\le 4.$

$$\Rightarrow t^2=8+2\sqrt{16-x^2}\Leftrightarrow \sqrt{16-x^2}=\frac{t^2-8}{2}$$

(1) trở thành $t^2+2t-8=2m.$

Xét hàm số $t=h(x)=\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x};-4\le x\le 4$

$$h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{4+x}}-\frac{1}{2\sqrt{4-x}}=\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{2\sqrt{4-x}.\sqrt{4+x}}$$

$h'(x)=0\Leftrightarrow x=0;h(-4)=h(4)=2\sqrt{2};h(0)=4.$

Như vậy $x\in[-4;4]\Rightarrow t\in[2\sqrt{2};4].$

Ta có nhận xét: Khi $t=4$ thì phương trình $t=\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}$ có một nghiệm $x,$ khi $2\sqrt{2}\le t<4$ thì phương trình $t=\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}$ có hai nghiệm $x.$

Xét hàm số $f(t)=t^2+2t-8$

$f'(t)=2t+2=0\Leftrightarrow t=-1\notin[2\sqrt{2};4].$ Hàm số $f(t)=t^2+2t-8$ đồng biến trên $[2\sqrt{2};4]$ nên đường thẳng $y=2m$ cắt đồ thị hàm số $y=f(t)=t^2+2t-8$ trên $[2\sqrt{2};4]$ nhiều nhất tại đúng một điểm.

Mặt khác ta có $f(2\sqrt{2})=4\sqrt{2};f(4)=16.$ Kết hợp với nhận xét trên thì phương trình (1) có hai nghiệm khi và chỉ khi $4\sqrt{2}\le 2m<16$ hay $2\sqrt{2}\le m<8.$

Ví dụ 8. Cho phương trình

$$\frac{2(1+x^2)}{1-x^2}+m\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)+2m=0$$

Tìm m để phương trình có nghiệm.

Giải.

Điều kiện: $|x|<1.$

Đặt $t=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\ge 2.$ Suy ra

$$t^2=\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)^2=\frac{1+x}{1-x}+2+\frac{1-x}{1+x}=\frac{2(1+x^2)}{1-x^2}+2$$

$$\Rightarrow \frac{2(1+x^2)}{1-x^2}=t^2-2.$$

Phương trình (1) có dạng

$$t^2+mt+2m-2=0 \Leftrightarrow m=\frac{-t^2+2}{t+2}=f(t).$$

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi m thuộc miền giá trị của hàm số $f(t)=\dfrac{-t^2+2}{t+2}, t\geq 2.$

Ta có $f'(t)=\dfrac{-t^2-4t-2}{(t+2)^2}<0, \forall t\geq 2 \Rightarrow$ hàm số nghịch biến.

$f(2)=-\dfrac{1}{2}, \lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=-\infty.$ Vậy, phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi $m\leq -\dfrac{1}{2}.$

2.3. Phương pháp lượng giác hóa

Trong một số trường hợp, nếu chúng ta đặt ẩn phụ bởi các hàm số lượng giác, thì việc giải quyết bài toán trở nên dễ dàng hơn. Kiến thức cần nhớ như sau.

+ Nếu trong phương trình, điều kiện của ẩn x là $-k\leq x\leq k, k>0$ hay phương trình có chứa $\sqrt{k^2-x^2}$ thì đặt $x=k\sin t, t\in[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}];$ hoặc đặt $x=k\cos t, t\in[0;\pi].$

+ Nếu trong phương trình, điều kiện của ẩn x là $|x|\geq k, k>0$ hay phương trình có chứa $\sqrt{x^2-k^2}$ thì đặt $x=\dfrac{k}{\cos t}; t\in[0;\dfrac{\pi}{2})\cup[\pi;\dfrac{3\pi}{2});$ hoặc đặt $x=\dfrac{k}{\sin t}, t\in[-\dfrac{\pi}{2};0)\cup(0;\dfrac{\pi}{2}].$

+ Nếu trong phương trình, ẩn x nhận mọi giá trị thuộc $\mathbb{R}$ hay phương trình có chứa $\sqrt{x^2+k^2}$ thì đặt $x=k\tan t, t\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right).$

Ngoài ra, tùy từng trường hợp, cũng có thể đặt $x=\cos^2 t; x=\sin^2 t, \ldots$

Sau đây ta xét một số ví dụ.

Ví dụ 1. Giải phương trình

$$1+\frac{2}{3}\sqrt{x-x^2}=\sqrt{x}+\sqrt{1-x} \quad (1)$$

Giải. Điều kiện: $\begin{cases} x-x^2\geq 0 \\ x\geq 0 \\ 1-x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0\leq x\leq 1.$

Đặt $x=\cos^2 t, t\in[0;\dfrac{\pi}{2}].$ Khi đó phương trình (1) được biến đổi về dạng

$$1+\frac{2}{3}\sqrt{\cos^2 t-\cos^4 t}=\sqrt{\cos^2 t}+\sqrt{1-\cos^2 t}$$
$$\Leftrightarrow 3+2|\sin t\cos t|=3(|\cos t|+|\sin t|)$$
$$\Leftrightarrow 3+2\sin t\cos t=3(\cos t+\sin t).$$

Đặt $u=\sin t+\cos t, 1\le u\le\sqrt{2}, \sin t\cos t=\dfrac{u^2-1}{2}$.

Ta có phương trình $3+u^2-1=3u \Leftrightarrow u^2-3u+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=1\\ u=2.\end{array}\right.$

Ta chọn $u=1\Rightarrow \sin t+\cos t=1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(t+\dfrac{\pi}{4})=1 \Leftrightarrow \sin(t+\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=k2\pi\\ t=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi k\end{array}\right.; k\in\mathbb{Z}.$$

Vì $t\in[0;\dfrac{\pi}{2}]$, nên ta chọn $\left[\begin{array}{l} t=0\\ t=\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\cos^2 0=1\\ x=\cos^2\dfrac{\pi}{2}=0.\end{array}\right.$

Vậy, phương trình đã cho có hai nghiệm là $\left[\begin{array}{l} x=0\\ x=1.\end{array}\right.$

Ví dụ 2. Giải phương trình

$$\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=2 \quad (1)$$

Giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x^2-1\ge 0\\ x-\sqrt{x^2-1}\ge 0\\ x+\sqrt{x^2-1}\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow x\ge 1$. Đặt $x=\dfrac{1}{\sin t}, t\in(0;\dfrac{\pi}{2})$. Khi đó vế trái của phương trình (1)

được biến đổi về dạng

$$\sqrt{\frac{1}{\sin t}-\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t}-1}}+\sqrt{\frac{1}{\sin t}+\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t}-1}}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{\sin t}-\cot t}+\sqrt{\frac{1}{\sin t}+\cot t}$$

$$=\sqrt{\frac{1-\cos t}{\sin t}}+\sqrt{\frac{1+\cos t}{\sin t}}$$

$$=\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}}+\sqrt{\frac{2\cos^2\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}}$$

$$=\sqrt{\tan\frac{t}{2}}+\sqrt{\cot\frac{t}{2}}\ge 2$$

(Theo bất đẳng thức Côsi)

Do đó phương trình (1) tương đương với điều kiện để dấu bằng xảy ra

$$\sqrt{\tan\frac{t}{2}}=\sqrt{\cot\frac{t}{2}}\Leftrightarrow\begin{cases}\tan\frac{t}{2}\ge 0\\ \tan\frac{t}{2}=\cot\frac{t}{2}\end{cases}\Leftrightarrow t=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x=1.$$

Vậy, phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất là $x=1$.

Ví dụ 3. Cho phương trình: $\sqrt[4]{x^2+1}-\sqrt{x}=m$ (1)

Tìm m để phương trình đã cho có nghiệm.

Giải. Điều kiện: $x\ge 0$. Đặt $x=\tan t, t\in[0;\frac{\pi}{2})$. Ta có, phương trình (1) trở thành

$$\sqrt[4]{\tan^2 t+1}-\sqrt{\tan t}=m\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{\cos t}}-\sqrt{\tan t}=m\Leftrightarrow\frac{1-\sqrt{\sin t}}{\sqrt{\cos t}}=m.$$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{1-\sqrt{\sin t}}{\sqrt{\cos t}}, f'(t)=\dfrac{\sin t.\sqrt{\sin t}-1}{\sqrt{2\sin t.\cos t}}<0, \forall t\in(0;\frac{\pi}{2})$,

Suy ra hàm số luôn luôn nghịch biến trên khoảng $(0;\frac{\pi}{2})$. Mặt khác ta có

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sqrt{\sin t}}{\sqrt{\cos t}}=\lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin t)\sqrt{\cos t}}{\cos t\left(1+\sqrt{\sin t}\right)}=\lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\cos\frac{t}{2}-\sin\frac{t}{2}\right)^2\sqrt{\cos t}}{\left(\cos^2\frac{t}{2}-\sin^2\frac{t}{2}\right)\left(1+\sqrt{\sin t}\right)}$$

$$=\lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\cos\frac{t}{2}-\sin\frac{t}{2}\right)\sqrt{\cos t}}{\left(\cos\frac{t}{2}+\sin\frac{t}{2}\right)\left(1+\sqrt{\sin t}\right)}=0,$$

và $f(0)=1$, như vậy miền giá trị của hàm số $f(t), t\in[0;\frac{\pi}{2})$ là $T_f=(0;1]$.

Vậy, phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $0<m\le 1$.

2.4. Một số phương pháp khác

Ví dụ 1. Giải phương trình

$$x+\sqrt{2-x^2}=2\sqrt{x^2-2x+2}$$

Giải. Điều kiện: $x+\sqrt{2-x^2}\ge 0$.

Ta có

$2\sqrt{x^2-2x+2}=2\sqrt{(x-1)^2+1}\ge 2$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=1$.

$x+\sqrt{2-x^2}\le 2$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=1$.

Phương trình (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x+\sqrt{2-x^2}=2 \\ 2\sqrt{x^2-2x+2}=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$.

Vậy, phương trình có một nghiệm duy nhất $x=1$.

Ví dụ 2. Giải phương trình

$$\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=\frac{x}{2} \quad (1)$$

Giải.

Ta có

$$x+4\sqrt{x-4}=\left(\sqrt{x-4}+2\right)^2$$

$$x-4\sqrt{x-4}=\left(\sqrt{x-4}-2\right)^2$$

Phương trình (1) tương đương với

$$\left|\sqrt{x-4}+2\right|+\left|\sqrt{x-4}-2\right|=\frac{x}{2}$$

Điều kiện: $x\ge 4$. Ta có

· $\sqrt{x-4}+2>0\Rightarrow\left|\sqrt{x-4}+2\right|=\sqrt{x-4}+2$

· $\left|\sqrt{x-4}-2\right|=\left[\begin{array}{ll}\sqrt{x-4}-2; & x\ge 8 \\ 2-\sqrt{x-4}; & 4\le x<8.\end{array}\right.$

Vì vậy

$$(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}2\sqrt{x-4}=\frac{x}{2}, & x\ge 8 \quad (2) \\ 4=\frac{x}{2}, & 4\le x<8 \; (3)\end{array}\right.$$

Giải hai phương trình (2) và (3) ta được $x=8$ là nghiệm của (1).

Ví dụ 3. Giải phương trình

$$\frac{x^2}{\sqrt{3x-2}}-\sqrt{3x-2}=1-x \quad (1)$$

Giải.

Điều kiện: $x>\frac{3}{2}$

$$(1)\Leftrightarrow x^2-3x+2=(1-x)\sqrt{3x-2}\Leftrightarrow(x-1)\left[(x-2)+\sqrt{3x-2}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ \sqrt{3x-2}=2-x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \begin{cases} x\le 2 \\ 3x-2=(2-x)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x=1.$$

Vậy, phương trình có một nghiệm duy nhất $x=1$.

Ví dụ 4. Giải phương trình

$$(4x-1)\sqrt{x^2+1}=2x^2+2x+1 \ (1)$$

Giải.

Đặt $t=\sqrt{x^2+1}\ge 1 \Rightarrow t^2=x^2+1 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow (4x-1)t=2t^2+2x-1$

$\Leftrightarrow 2t^2-(4x-1)t+(2x-1)=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}$ (loại) $\vee\ t=2x-1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}=2x-1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{1}{2} \\ x^2+1=(2x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{1}{2} \\ x=0 \vee x=\dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{4}{3}.$$

Vậy, phương trình có một nghiệm duy nhất $x=\dfrac{4}{3}$.

Ví dụ 5. Giải phương trình

$$x+2\sqrt{7-x}=2\sqrt{x-1}+\sqrt{-x^2+8x-7}+1$$

Giải.

Điều kiện: $1\le x\le 7$

Ta có

$x+2\sqrt{7-x}=2\sqrt{x-1}+\sqrt{-x^2+8x-7}+1$

$\Leftrightarrow (x-1)-2\sqrt{x-1}+2\sqrt{7-x}-\sqrt{(x-1)(7-x)}=0$

$\Leftrightarrow (x-1)-2\sqrt{x-1}+2\sqrt{7-x}-\sqrt{x-1}\sqrt{7-x}=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}\left(\sqrt{x-1}-2\right)-\sqrt{7-x}\left(\sqrt{x-1}-2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1}-2\right)\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{7-x}\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x-1}=2 \\ \sqrt{x-1}=\sqrt{7-x} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=4. \end{array}\right.$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình là $x=4 \vee x=5$.

Ví dụ 6. Tìm m để phương trình

$$\sqrt[4]{x^4-13x+m}+x-1=0$$

có đúng một nghiệm.

Giải.

$$\sqrt[4]{x^4-13x+m}+x-1=0 \Leftrightarrow \sqrt[4]{x^4-13x+m}=1-x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\le 1 \\ x^4-13x+m=(1-x)^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 1 \\ -4x^3+6x^2+9x+1=m \end{cases}$$

Xét hàm số

$$f(x)=-4x^3+6x^2+9x+1, x\le 1$$

$$f'(x)=-12x^2+12x+9$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{2} \\ x=\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1
f'		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	12

Dựa vào bảng biến thiên ta được giá trị m cần tìm là

$$\left[\begin{array}{l} m=-\dfrac{3}{2} \\ m>12. \end{array}\right.$$

Ví dụ 7. Tìm m để phương trình

$$\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-6\sqrt{x-4}+5}=m \quad (1)$$

có đúng hai nghiệm.

Giải. Phương trình (1) chính là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số

$y=\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-6\sqrt{x-4}+5}$ và đường thẳng $y=m.$

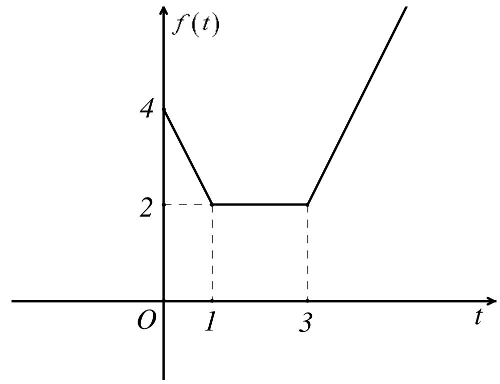
Đặt $t=\sqrt{x-4}\ge 0.$ (1) trở thành $\sqrt{t^2-2t+1}+\sqrt{t^2-6t+9}=m \Leftrightarrow |t-1|+|t-3|=m.(2)$

Ta có nhận xét rằng, ứng với mỗi $t\ge 0$ thì phương trình $t=\sqrt{x-4}$ cho ta một nghiệm $x.$ Do đó (1) có đúng hai nghiệm x khi và chỉ khi (2) có đúng hai nghiệm $t\ge 0.$

Xét hàm số $f(t)=|t-1|+|t-3|, t\ge 0$

$$f(t)=\begin{cases}-2t+4; & 0\le t<1\\ 2; & 1\le t<3\\ 2t-4; & t\ge 3\end{cases}$$

Vẽ đồ thị hàm số $f(t)$, ta được phương trình đã cho có đúng hai nghiệm khi và chỉ khi $2<m\le 4$.



Ví dụ 8. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases}\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{y}=m\\ x-\sqrt{y}=0\end{cases}$$

Giải. Điều kiện: $x\ge 0, y\ge 0.$

$$\begin{cases}\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{y}=m\\ x-\sqrt{y}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{2x^2+1}+x=m\ (1)\\ y=x^2\end{cases}$$

Hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (1) có nghiệm $x\ge 0$.

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{2x^2+1}+x;\ x\ge 0.$

$f'(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}+1>0, \forall x\ge 0 \Rightarrow f(x)$ đồng biến. Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy, hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m\ge 1$.

Ví dụ 9. Tìm m để phương trình

$$x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}=m(\sqrt{5-x}+\sqrt{4-x})\ (1)$$

có nghiệm.

Giải.

Điều kiện: $0\le x\le 4.$

(1) $\Leftrightarrow (x\sqrt{x}+\sqrt{x+12})(\sqrt{5-x}-\sqrt{4-x})=m$

Xét hàm số $y=f(x)=(x\sqrt{x}+\sqrt{x+12})(\sqrt{5-x}-\sqrt{4-x})=h(x).g(x)$ có tập xác định là $D=[0;4]$.

Nhận xét rằng $h(x)=x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}$ đồng biến và không âm trên D.

Hàm số $g(x)=\sqrt{5-x}-\sqrt{4-x}$ có $g'(x)=\dfrac{\sqrt{5-x}-\sqrt{4-x}}{2\sqrt{5-x}.\sqrt{4-x}}>0,\forall x\in D\Rightarrow$ hàm số $g(x)=\sqrt{5-x}-\sqrt{4-x}$ đồng biến trên D và cũng thấy rằng $g(x)$ không âm trên D.

Như vậy, hàm số $f(x)$ đồng biến trên D.

Vậy, phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$f(0)\le m\le f(4)\Leftrightarrow 2\sqrt{3}(\sqrt{5}-2)\le m\le 12.$$

Ví dụ 10. Tìm m để phương trình

$$x+\frac{11}{2x}+\sqrt{4+\frac{28}{x^2}}=m$$

Có nghiệm $x>0$.

Giải.

Xét hàm số $y=f(x)=x+\dfrac{11}{2x}+\sqrt{4+\dfrac{28}{x^2}}$, ta có

$$y'=1-\frac{11}{2x^2}-\frac{14}{x^3\sqrt{1+\frac{7}{x^2}}}=\frac{2x^2\sqrt{x^2+7}-11\sqrt{x^2+7}-28}{2x^2\sqrt{x^2+7}}$$

$y'=0\Leftrightarrow 2x^2\sqrt{x^2+7}-11\sqrt{x^2+7}-28=0$. Đặt $t=\sqrt{x^2+7}\ge\sqrt{7}\Rightarrow x^2=t^2-7$

Ta có $2(t^2-7)t-11t-28=0\Leftrightarrow 2t^3-25t-28=0\Leftrightarrow t=4\vee t=\dfrac{-4\pm\sqrt{2}}{2}$.

Do $t\ge\sqrt{7}$, nên ta chọn $t=4\Rightarrow x=3$.

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left(x+\frac{11}{2x}+\sqrt{4+\frac{28}{x^2}}\right)=+\infty,\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{11}{2x}+\sqrt{4+\frac{28}{x^2}}\right)=+\infty.$$

$f(3)=\dfrac{15}{2}$. Như vậy miền giá trị của hàm số $y=x+\dfrac{11}{2x}+\sqrt{4+\dfrac{28}{x^2}}$ trên $(0;+\infty)$ là $T_f=[\dfrac{15}{2};+\infty)$. Vậy, phương trình đã cho có nghiệm $x>0$, khi và chỉ khi $m\ge\dfrac{15}{2}$.

§2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

1. Định nghĩa và các định lý

1.1. Định nghĩa

Bất phương trình vô tỉ là một bất phương trình có chứa ẩn dưới dấu căn thức. Nói khác đi đó là một bất phương trình có dạng $f(x)>0$, (hoặc $f(x)<0, f(x)\geq 0, f(x)\leq 0$), trong đó $f(x)$ là hàm số có chứa căn thức của biến số.

1.2. Các định lý

1.2.1. Định lý. $\sqrt[2k+1]{f(x)}\geq g(x)\Leftrightarrow f(x)\geq g^{2k+1}(x)$.

1.2.2. Định lý. $\sqrt[2k+1]{f(x)}\leq g(x)\Leftrightarrow f(x)\leq g^{2k+1}(x)$.

1.2.3. Định lý. $\sqrt[2k]{f(x)}\geq g(x)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}g(x)\leq 0\\ f(x)\geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}g(x)\geq 0\\ f(x)\geq g^{2k}(x)\end{cases}\end{array}\right.$

1.2.4. Định lý. $\sqrt[2k]{f(x)}\leq g(x)\Leftrightarrow \begin{cases}f(x)\geq 0\\ g(x)\geq 0\\ f(x)\leq [g(x)]^{2k}\end{cases}$

2. Các phương pháp giải bất phương trình vô tỉ

2.1. Phương pháp nâng lũy thừa

Ví dụ 1. Giải bất phương trình

$$\sqrt{2-x}>\sqrt{7-x}-\sqrt{-3-2x}$$

Giải.

Điều kiện: $\begin{cases}2-x\geq 0\\ 7-x\geq 0\\ -3-2x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 2\\ x\leq 7\\ x\leq\dfrac{-3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x\leq\dfrac{-3}{2}\ (*)$

Ta có

$\sqrt{2-x}>\sqrt{7-x}-\sqrt{-3-2x}$

$\Leftrightarrow\sqrt{2-x}+\sqrt{-3-2x}>\sqrt{7-x}$

$\Leftrightarrow 2-x+2\sqrt{(2-x)(-3-2x)}-3-2x>7-x$

$\Leftrightarrow\sqrt{2x^2-x-6}>x+4$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x<-4\\ 2x^2-x-6\geq 0\end{cases}\vee\begin{cases}x\geq -4\\ 2x^2-x-6>(x+4)^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x<-4\\ \left[\begin{array}{l}x\leq -\dfrac{3}{2}\\ x>2\end{array}\right.\end{cases}\vee\begin{cases}x\geq -4\\ \left[\begin{array}{l}x<-2\\ x>11\end{array}\right.\end{cases}$

$x < -4 \vee -4 \le x < -2$

$\Leftrightarrow x < -2$

Kết hợp với điều kiện (*) thì nghiệm của bất phương trình đã cho là $x < -2$.

Ví dụ 2. Giải bất phương trình

$$\sqrt[3]{3x^2 - 1} \ge \sqrt[3]{2x^2 + 1}$$

Giải. Lập phương hai vế của bất phương trình đã cho ta được bất phương trình tương đương

$3x^2 - 1 \ge 2x^2 + 1$

$\Leftrightarrow x^2 - 2 \ge 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -\sqrt{2} \\ x \ge \sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình đã cho là $\left[\begin{array}{l} x \le -\sqrt{2} \\ x \ge \sqrt{2}. \end{array}\right.$

Ví dụ 3. Giải bất phương trình

$$\frac{\sqrt{x^2 - 16}}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{x-3} < \frac{5}{\sqrt{x-3}}$$

Giải. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x \ge 4 \\ \sqrt{x^2 - 16} + x - 3 < 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 4 \\ \sqrt{x^2 - 16} < 8 - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 \le x < 8 \\ x^2 - 16 < (8 - x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 \le x < 8 \\ x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow 4 \le x < 5$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình đã cho là $4 \le x < 5$.

Ví dụ 4. Giải bất phương trình

$$\sqrt{6x+1} - \sqrt{8x} \le \sqrt{2x+3} - \sqrt{4x+2}$$

Giải. Điều kiện:

$$\begin{cases} 6x + 1 \ge 0 \\ 8x \ge 0 \\ 2x + 3 \ge 0 \\ 4x + 2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 0 \; (*)$$

Khi đó, bất phương trình đã cho tương đương với

$\sqrt{6x+1}+\sqrt{4x+2}\le\sqrt{2x+3}+\sqrt{8x}$

$\Leftrightarrow 10x+3+2\sqrt{6x+1}.\sqrt{4x+2}\le 10x+3+2\sqrt{2x+3}.\sqrt{8x}$

$\Leftrightarrow \sqrt{24x^2+16x+2}\le\sqrt{16x^2+24x}$

$\Leftrightarrow 4x^2-4x+1\le 0$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}.$

$x=\dfrac{1}{2}$ thỏa điều kiện (*). Vậy, bất phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=\dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 5. Giải bất phương trình

$$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\le 2-\frac{x^2}{4}\ (1)$$

Giải.

Điều kiện để các căn bậc hai có nghĩa là $-1\le x\le 1$.

Khi đó vế phải của (1) cũng không âm, do đó bình phương hai vế của bất phương trình đã cho ta được bất phương trình tương đương

$2+2\sqrt{1-x^2}\le 4-x^2+\dfrac{x^4}{16}$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^4}{16}+(1-x^2)-2\sqrt{1-x^2}+1\ge 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^4}{16}+(\sqrt{1-x^2}-1)^2\ge 0.$

Bất phương trình cuối luôn đúng.

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $-1\le x\le 1$.

2.2. Phương pháp đặt ẩn phụ

Ví dụ 1. Giải bất phương trình

$$\sqrt{5x^2+10x+1}\ge 7-2x-x^2$$

Giải.

Đặt $t=\sqrt{5x^2+10x+1}\ge 0$. Bất phương trình trở thành

$t\ge 7-\dfrac{t^2-1}{5}$

$\Leftrightarrow t^2+5t-36\ge 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\le -9 \\ t\ge 4\end{array}\right.$

Vì $t\ge 0$, nên ta nhận $t\ge 4$, ta có

$t=\sqrt{5x^2+10x+1}\ge 4$

$\Leftrightarrow 5x^2+10x+1\ge 16$

$\Leftrightarrow x^2+2x-3\ge 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le -3 \\ x\ge 1 \end{array}\right.$

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $\left[\begin{array}{l} x\le -3 \\ x\ge 1 \end{array}\right.$.

Ví dụ 2. Giải bất phương trình

$$\frac{x}{x+1}-2\sqrt{\frac{x+1}{x}}>3$$

Giải.

Đặt $t=\sqrt{\frac{x+1}{x}}>0.$ Bất phương trình trở thành

$\frac{1}{t^2}-2t>3$

$\Leftrightarrow 2t^3+3t^2-1<0$

$\Leftrightarrow -1<t<\frac{1}{2}$

Vì $t>0$, nên ta nhận $0<t<\frac{1}{2}$, như vậy ta được

$0<\sqrt{\frac{x+1}{x}}<\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 0<\frac{x+1}{x}<\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1)>0 \\ x(3x+4)<0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow -\frac{4}{3}<x<-1.$

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $-\frac{4}{3}<x<-1.$

Ví dụ 3. Cho bất phương trình

$$-4\sqrt{(4-x)(2+x)}\le x^2-2x+a-18\ \ (1).$$

a) Giải bất phương trình (1) khi $a=6$;

b) Tìm a để bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x\in[-2;4]$.

Giải.

Điều kiện: $-2 < x \le 4$. Đặt $t = \sqrt{(4-x)(2+x)} = \sqrt{-x^2+2x+8}$.

Theo bất đẳng thức Côsi ta có

$t = \sqrt{(4-x)(2+x)} \le \frac{1}{2}\left[(4-x)+(2+x)\right] = 3$

$t = 3 \Leftrightarrow x = 1 \in [-2;4]$.

Như vậy, với $x \in [-2;4]$ thì $t \in [0;3]$.

$(1) \Leftrightarrow g(t) = t^2 - 4t + 10 - a \le 0$

a) Nếu $a = 6$, ta có $g(t) = t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2 \le 0 \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow \sqrt{-x^2+2x+8} = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1+\sqrt{5} \\ x = 1-\sqrt{5}. \end{array}\right.$

b) Trường hợp tổng quát, yêu cầu bài toán được thỏa khi và chỉ khi

$$g(t) \le 0,\ \forall t \in [0;3] \Leftrightarrow \underset{t\in[0;3]}{Max}\, g(t) \le 0.$$

Ta có $g'(t) = 2t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \in [0;3]$, nên $\underset{t\in[0;3]}{Max}\, g(t) = Max\{g(0); g(2); g(3)\}$

$= g(0) = 10 - a.$

Vậy, ta có $10 - a \le 0 \Leftrightarrow a \ge 10.$

Ví dụ 4. Cho bất phương trình

$$m(\sqrt{x^2-2x+2}+1) + x(x-2) \le 0 \quad (1)$$

Tìm m để bất phương trình đã cho có nghiệm $x \in [0;1+\sqrt{3}]$.

Giải. Đặt $t(x) = \sqrt{x^2-2x+2}$

$t'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}} = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [0;1+\sqrt{3}]$

Bảng biến thiên

x	0		1		$1+\sqrt{3}$
$t'(x)$		$-$	0	$+$	
$t(x)$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2

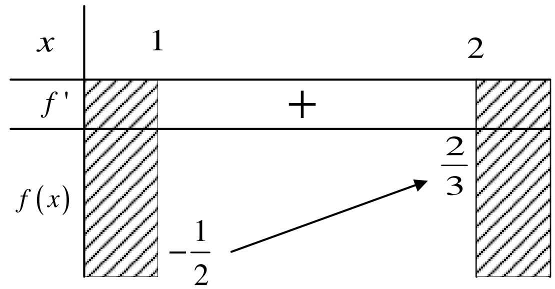
$\forall x \in [0;1+\sqrt{3}] \Rightarrow t \in [1;2]$.

Ta có (1) $\Leftrightarrow m(t+1) + 2 - t^2 \le 0 \Leftrightarrow m \le \frac{t^2-2}{t+1}, t \in [1;2]$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2-2}{t+1}, t \in [1;2]$,

$$f'(t)=\frac{t^2+2t+2}{(t+1)^2}>0,\forall t\in[1;2].$$

Bảng biến thiên



Yêu cầu bài toán được thỏa khi và chỉ khi $m\le\frac{2}{3}$.

2.3. Một số phương pháp khác

Ví dụ 1. Giải bất phương trình

$$\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-4x+3}\ge 2\sqrt{x^2-5x+4}\ (1)$$

Giải.

$(1)\Leftrightarrow\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-4x+3}-2\sqrt{x^2-5x+4}\ge 0\ \ (*)$

Điều kiện: $x\le 1\vee x\ge 4.$

$a)\,x\ge 4\Rightarrow x-1>x-2>x-3>x-4\ge 0$

$(*)\Leftrightarrow\sqrt{x-1}\left[\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x-4}\right)+\left(\sqrt{x-3}-\sqrt{x-4}\right)\right]\ge 0,$ đúng, như vậy $x\ge 4$ là nghiệm.

$b)\,x\le 1\Rightarrow 0\ge x-1>x-2>x-3>x-4$

$(*)\Leftrightarrow\sqrt{1-x}\left[\left(\sqrt{2-x}-\sqrt{4-x}\right)+\left(\sqrt{3-x}-\sqrt{4-x}\right)\right]\ge 0\Leftrightarrow x=1.$

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $\left[\begin{array}{l}x\ge 4\\ x=1.\end{array}\right.$

Ví dụ 2. Giải bất phương trình

$$4(x+1)^2<(2x+10)\left(1-\sqrt{3+2x}\right)^2.$$

Giải. Điều kiện: $-\frac{3}{2}\le x\ne -1$. Bất phương trình tương tương với

$$\frac{4(x+1)^2}{\left(1-\sqrt{3+2x}\right)^2}<2x+10$$

$$\Leftrightarrow\left(1+\sqrt{3+2x}\right)^2<2x+10$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{3+2x}<3\Leftrightarrow x<3.$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình đã cho là $\begin{cases} -\frac{3}{2} \le x < 3 \\ x \ne -1. \end{cases}$

Ví dụ 3. Giải bất phương trình

$$(x-3)\sqrt{x^2-4} \le x^2 - 9 \ (1)$$

Giải. Điều kiện: $\left[\begin{array}{l} x \le -2 \\ x \ge 2 \end{array}\right.$

Ta có (1) $\Leftrightarrow (x-3)\sqrt{x^2-4} \le (x-3)(x+3)$

· Xét $x = 3$, bất phương trình (1) đúng

· Xét $x > 3$, (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x^2-4} \le (x+3)$

$\Leftrightarrow x^2 - 4 \le x^2 + 6x + 9$

$\Leftrightarrow x \ge -\frac{13}{6}$

$\Rightarrow x > 3$ là nghiệm.

· Xét $\left[\begin{array}{l} 2 \le x < 3 \\ -3 \le x \le -2 \end{array}\right.$

(1) $\Leftrightarrow \sqrt{x^2-4} \ge x+3$

$\Leftrightarrow x^2 - 4 \ge x^2 + 6x + 9$

$\Leftrightarrow x \le -\frac{13}{6}$

$\Rightarrow -3 \le x \le -\frac{13}{6}$ là nghiệm.

· Xét $x < -3$, (1) luôn đúng.

Vậy, nghiệm của bất phương trình đã cho là $\left[\begin{array}{l} x \ge 3 \\ x \le -\frac{13}{6}. \end{array}\right.$

Ví dụ 4. Giải bất phương trình

$$\sqrt{x^4 - 2x^2 + 1} \ge 1 - x. \ (1)$$

Giải.

(1) $\Leftrightarrow \left|x^2 - 1\right| \ge 1 - x.$

Với $x \ge 1$, (1) luôn đúng.

Với $x < 1 \Rightarrow 1 - x > 0 \Rightarrow$ (1) $\Leftrightarrow \left|1 + x\right| \ge 1$

$\Leftrightarrow (1+x)^2 \ge 1$

$\Leftrightarrow x(x+2) \ge 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -2 \\ x \ge 0 \end{array}\right.$

Ta chọn $\left[\begin{array}{l} x \le -2 \\ 0 \le x \le 1 \end{array}\right.$

Vậy, nghiệm của bất phương trình đã cho là $\left[\begin{array}{l} x \le -2 \\ x \ge 0. \end{array}\right.$

BÀI TẬP CHƯƠNG IV

Bài 1. Giải các phương trình

1) $(16-x^2)\sqrt{3-x}=0;$

2) $(9-x^2)\sqrt{2-x}=0;$

3) $\sqrt{4+2x-x^2}=x-2;$

4) $\sqrt{1+4x-x^2}=x-1;$

5) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}=2\sqrt{x};$

6) $\sqrt{x+1}+\sqrt{4x+13}=\sqrt{3x+12};$

7) $(x+3)\sqrt{10-x^2}=x^2-x-12;$

8) $\sqrt{x+4}-\sqrt{1-x}=\sqrt{1-2x}.$

Bài 2. Giải các phương trình

1) $3x^2+15x+2\sqrt{x^2+5x+1}=2;$

2) $\sqrt{x^2-3x+3}+\sqrt{x^2-3x+6}=3;$

3) $\sqrt{x+2}+\sqrt{5-x}+\sqrt{(x+2)(5-x)}=4;$

4) $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}=2x-12+2\sqrt{x^2-16};$

5) $1+\frac{2}{3}\sqrt{x-x^2}=\sqrt{x}+\sqrt{1-x};$

6) $1+\sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}}=x;$

7) $\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}=4;$

8) $x\sqrt[3]{35-x^3}(x+\sqrt[3]{35-x^3})=30;$

9) $x^3+2=3\sqrt[3]{3x-2};$

10) $2\sqrt[3]{(1+x)^2}+3\sqrt[3]{1-x^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}=0;$

11) $2x+6\sqrt[3]{1-x}+2=0;$

12) $3\sqrt{x+1}=3x^2-8x+3;$

13) $\sqrt{x}+\sqrt{3x+1}=x^2+x+1.$

Bài 3. Giải các phương trình

1) $x\sqrt{x^2+15}-\sqrt{x}\sqrt[4]{x^2+15}=2;$

2) $\sqrt{2-x}+\dfrac{4}{\sqrt{2-x}+3}=2;$

3) $\sqrt{9-5x}=\sqrt{3-x}+\dfrac{6}{\sqrt{3-x}};$

4) $\dfrac{4}{x+\sqrt{x^2+x}}-\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2+x}}=\dfrac{3}{x};$

5) $\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2-2x+1}=2;$

6) $(2x^2+6x+10)\sqrt{x^2+3x}-11x^2-33x+8=0.$

7) $\sqrt{2x^2+4x}-3\sqrt{x+2}-2x+3\sqrt{2x}=0;$

8) $2\sqrt[3]{3x-2}+3\sqrt{6-5x}-8=0;$

9) $\sqrt[4]{x+1}=\left(32\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{x+1}\right)x;$

10) $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1};$

11) $\sqrt[3]{9-x}=2-\sqrt{x-1};$

12) $2\sqrt[3]{1-x^2}+\sqrt{4-x^2}=4.$

Bài 4. Giải các phương trình

1) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\dfrac{x+3}{2};$

2) $2\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+1}=4;$

3) $\dfrac{2(x^2-2x+4)}{\sqrt{x+2}}=2\sqrt{x+2}+3\sqrt{x^2-2x+4};$

4) $2(x^2-3x+2)=3\sqrt{x^3+8};$

5) $x^3+\sqrt{(1-x^2)^3}=x\sqrt{2(1-x^2)};$

6) $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left[\sqrt{(1-x)^3}-\sqrt{(1+x)^3}\right]=2+\sqrt{1-x^2};$

7) $\sqrt{1-x}-2x\sqrt{1-x^2}-2x^2+1=0$;

8) $\sqrt{x^2+1}+\dfrac{x^2+1}{2x}=\dfrac{(x^2+1)^2}{2x(1-x^2)}$;

9) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{3-2x}=\dfrac{(2x-1)^2}{2}$.

Bài 5. Giải các bất phương trình

1) $(x-1)\sqrt{x^2-x-2}\geq 0$;

2) $(x^2-1)\sqrt{x^2-x-2}\geq 0$;

3) $\sqrt{2x-x^2}<5-x$;

4) $\sqrt{x^2-3x+2}-x-3>0$;

5) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+4}>0$;

6) $\sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{3x^2+5x+2}>1$;

7) $\sqrt{x}+\sqrt{x+9}\geq\sqrt{x+1}+\sqrt{x+4}$;

8) $\sqrt{5x-1}-\sqrt{x-1}>\sqrt{2x-4}$;

9) $\sqrt{x^2+3x+2}+\sqrt{x^2+6x+5}\leq\sqrt{2x^2+9x+7}$;

10) $\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x^2+2x-3}\leq\sqrt{x^2+4x-5}$;

11) $\dfrac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x}<3$.

Bài 6. Giải các bất phương trình

1) $2\sqrt{x^2-4x+3}\geq -x^2+4x-5$;

2) $5\sqrt{x}+\dfrac{5}{2\sqrt{x}}\leq 2x+\dfrac{1}{2x}+4$;

3) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}+2\sqrt{(x-1)(x+3)}>4-2x$;

4) $x^3+x^2+3x\sqrt{x+1}+2>0$;

5) $\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}+2\sqrt{49x^2+7x-42}<181-14x$;

6) $\sqrt{2(x-2)^2+2x}\leq x-2+\sqrt{x}$;

7) $\sqrt{2(x+2)^2+2(2x-1)}>x+2+\sqrt{2x-1}$;

8) $x^2+4x\geq(x+4)\sqrt{x^2-2x+4}$;

9) $x^2-1\le 2x\sqrt{x^2+2x}$;

10) $(x-1)\sqrt{2x-1}\le 3(x-1)$;

11) $\left(x^2-1\right)\left(\sqrt{x^2-1}-1\right)+\sqrt{x^2-1}-6>0$;

12) $x\sqrt{2x-1}\le 5-4x$;

13) $\sqrt{x^3-2x^2}+x<x\sqrt{x}+\sqrt{x^2-2x}$.

Bài 7. Giải các bất phương trình

1) $\sqrt{41-\dfrac{16}{x}}\ge \dfrac{2}{x}+3$;

2) $x^2\ge x(2+\sqrt{12-2x-x^2})$;

3) $\sqrt{4-x^2}+\dfrac{|x|}{x}\ge 0$;

4) $\dfrac{x^2-13x+40}{\sqrt{19x-x^2-78}}\le 0$;

5) $x-\sqrt{1-|x|}<0$;

6) $\dfrac{\sqrt{2(x^2-16)}}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{x-3}>\dfrac{7}{\sqrt{x-3}}$;

7) $\sqrt{x^2+4x}+4\sqrt{x+4}-2x-8\sqrt{x}>0$;

8) $\dfrac{1}{1-x^2}+1>\dfrac{3x}{\sqrt{1-x^2}}$;

9) $\sqrt{x}>1+\sqrt[3]{x-1}$;

10) $x+\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-4}}>3\sqrt{5}$.

Bài 8. Tìm các giá trị của m để phương trình sau có đúng hai nghiệm phân biệt

$$\sqrt{x-5-2\sqrt{x-6}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-6}-2}=m.$$

Bài 9. Tìm các giá trị của m để các phương trình sau có nghiệm

1) $x+\sqrt{4-x^2}+x\sqrt{4-x^2}=m$;

2) $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{4}{\sqrt{x}}+4x=4(\dfrac{1}{x}+2\sqrt{x})+m$.

Bài 10. Cho phương trình

$$x^2+(m^2-\frac{5}{3})\sqrt{x^2+4}+2-m^3=0.$$

Chứng minh rằng phương trình có nghiệm với mọi $m > 0$.

Bài 11. Cho phương trình

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x+4}+\sqrt{x^2+5x+4}+x+2m=0.$$

Tìm các giá trị của m để phương trình có nghiệm không âm.

Bài 12. Biện luận theo m số nghiệm của phương trình

$$\sqrt{5+x}+\sqrt{7-x}+m\sqrt{(5+x)(7-x)}=2m+1.$$

Bài 13. Tìm các giá trị của m để phương trình sau có nghiệm

$$3\sqrt{x-1}+m\sqrt{x+1}=2\sqrt[4]{x^2-1}\,.$$

Bài 14. Tìm các giá trị của m để bất phương trình

$$m(\sqrt{x^2-2x+2}+1)\geq x^2-2x+6+\sqrt{x^2-2x+2}$$

có nghiệm thuộc đoạn [0; 2].

Bài 15. Tìm các giá trị của m để phương trình

$$\sqrt{x^4+4x+m}+\sqrt[4]{x^4+4x+m}=6$$

có hai nghiệm.

Bài 16. Chứng minh rằng với mọi $m>-1$, phương trình sau luôn luôn có hai nghiệm phân biệt

$$x^2-2x-3=\sqrt{(m+1)(x-3)}.$$

Bài 17. Cho phương trình

$$\sqrt{(x-1)^3}+mx=m+1.$$

Chứng minh rằng phương trình luôn luôn có một nghiệm duy nhất với mọi m.

Bài 18. Tìm các giá trị của m để bất phương trình

$$\sqrt{(4+x)(6-x)}\leq x^2-2x+m$$

nghiệm đúng với mọi $x\in[-4;6]$.

Bài 19. Tìm các giá trị của m để bất phương trình

$$mx-\sqrt{x-3}\leq m+1$$

có nghiệm.

Bài 20. Tìm các giá trị của m để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt

$$\sqrt{x^2+mx+2}=2x+1.$$

Bài 21. Cho bất phương trình

$$(x+1)(x+3)\leq m\sqrt{x^2+4x+5}$$

1) Giải bất phương trình khi $m=-1$;

2) Tìm các giá trị của m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x\in[-2;-2+\sqrt{3}]$.

Bài 22. Cho bất phương trình

$$\sqrt{(3+x)(7-x)}\le x^2-4x+m.$$

Tìm các giá trị của m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x\in[-3;7]$.

Bài 23. Cho bất phương trình

$$\sqrt{4x-2}+\sqrt{16-4x}\le m.$$

Tìm các giá trị của m để bất phương trình có nghiệm.

Bài 24. Cho bất phương trình

$$\sqrt{1-x^2}\ge m-x.$$

Tìm các giá trị của m để bất phương trình có nghiệm.

Bài 25. Cho bất phương trình

$$\sqrt{12-3x^2}\le x-m.$$

Tìm các giá trị của m để bất phương trình có một nghiệm duy nhất.

Bài 26. Cho bất phương trình

$$m\sqrt{2x^2+7}<x+m.$$

1) Giải bất phương trình khi $m=\frac{1}{2}$;

2) Tìm các giá trị của m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Bài 27. Cho bất phương trình

$$\sqrt{x^2-2mx}>1-x.$$

Tìm các giá trị của m để tập hợp nghiệm của bất phương trình đã cho chứa đoạn $[\frac{1}{4};1]$.

Bài 28. Tìm các giá trị của m để phương trình $m\left(\sqrt{x-2}+2\sqrt[4]{x^2-4}\right)-\sqrt{x+2}=2\sqrt[4]{x^2-4}$ có nghiệm.

Bài 29. Tìm các giá trị của m để bất phương trình $x^3+3x^2-1\le m\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)^3$ có nghiệm.

Bài 30. Tìm các giá trị của m để phương trình sau có đúng hai nghiệm phân biệt

$$\sqrt[4]{2x}+\sqrt{2x}+2\sqrt[4]{6-x}+2\sqrt{6-x}=m.$$

Bài 31. Tìm các giá trị của m để bất phương trình sau có nghiệm $x<-1$

$$x^2+mx-1>(x+m)\sqrt{x^2-1}.$$

Bài 32. Tìm các giá trị của m để phương trình sau có nghiệm

$$x^2+mx-4=(x+m)\sqrt{x^2-4}.$$

CHƯƠNG V. PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGARIT

§1. NHẮC LẠI LOGARIT

1. Định nghĩa. Cho a là một số dương khác 1 và b là một số dương. Số thực α sao cho $a^{\alpha}=b$ được gọi là logarit cơ số a của b và kí hiệu là $\log_a b$ tức là

$$\alpha=\log_a b \Leftrightarrow a^{\alpha}=b.$$

Chú ý.

• Khi viết $\log_a b$ thì phải hiểu là $a>0, a\neq 1; b>0.$

• Trường hợp cơ số $a=10$ thì logarit cơ số 10 của số dương b ta viết là $\lg b$ và đọc là logarit thập phân của b.

• Với $a=e$ thì logarit cơ số e của số dương b ta viết là $\ln b$ và đọc là logarit tự nhiên của b. (Số e là giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}$ xấp xỉ bằng $2,718281828...$).

Từ định nghĩa ta có một số kết quả sau.

• $\log_a 1=0$, $\log_a a=1;$

• $\log_a a^b=b$

• $a^{\log_a b}=b$

2. Các tính chất của logarit

2.1. Định lý.

$i)\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c; 1\neq a>0; b,c>0$

$ii)\log_a\left(\dfrac{b}{c}\right)=\log_a b-\log_a c; 1\neq a>0; b,c>0$

$iii)\log_a b^{\alpha}=\alpha\log_a b; 1\neq a>0; b>0; \alpha\in\mathbb{R}.$

Chú ý. Trong *iii)* nếu $\alpha=2k, k\in\mathbb{N}^*$ thì $\log_a b^{2k}=2k\log_a|b|; 1\neq a>0; b\neq 0.$

Hệ quả

$i)\log_a\left(\dfrac{1}{b}\right)=-\log_a b; 1\neq a>0; b>0$

$ii)\log_a\sqrt[n]{b}=\dfrac{1}{n}\log_a b; 1\neq a>0; b>0; n\in\mathbb{N}, n\geq 2.$

2.2. Định lý

$\log_b c=\dfrac{\log_a c}{\log_a b}$ hay $\log_a b.\log_b c=\log_a c; 1\neq a>0; 1\neq b>0; c>0.$

Hệ quả

$i)\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$ hay $\log_a b.\log_b a=1; 1\neq a>0; 1\neq b>0..$

$ii)\ \log_{a^{\alpha}} c = \dfrac{1}{\alpha}\log_a c; 1 \neq a > 0; c > 0; \alpha \neq 0.$

$iii)\ a^{\log_b c} = c^{\log_b a}; 1 \neq b > 0; a, c > 0.$

§2. PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

1. Định nghĩa. *Phương trình, bất phương trình mũ* là phương trình, bất phương trình mà ẩn số có mặt ở số mũ của lũy thừa.

Trong một số trường hợp ta xét thêm ẩn số có mặt ở cả cơ số của lũy thừa, khi đó ta phải xét hai trường hợp: cơ số $a > 1$ và $0 < a < 1$.

2. Một số phương pháp giải phương trình mũ

2.1. Phương pháp logarit hóa

Các dạng cơ bản

· $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ f(x) = g(x) \end{array}\right. \end{cases}$

· $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b, 1 \neq a > 0; b > 0.$

Ví dụ 1. Giải phương trình

$$2^{x+3} = 5^x \quad (1)$$

Giải. (1) $\Leftrightarrow \log_2 2^{x+3} = \log_2 5^x$

$\Leftrightarrow x + 3 = x\log_2 5$

$\Leftrightarrow 3 = x(\log_2 5 - 1) \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{\log_2 5}.$

Vậy, phương trình đã cho có nghiệm là $x = \dfrac{3}{\log_2 5 - 1}.$

Ví dụ 2. Giải phương trình

$$2^{x^2-2x}3^x = \frac{3}{2} \quad (1)$$

Giải. (1) $\Leftrightarrow \log_2 2^{x^2-2x}.3^x = \log_2 \dfrac{3}{2}$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + x\log_2 3 = \log_2 \dfrac{3}{2}.$

$\Leftrightarrow x^2 + x(\log_2 3 - 2) + 1 - \log_2 3 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 1 - \log_2 3 \end{array}\right.$

Vậy, phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 1 \vee x = 1 - \log_2 3.$

2.2. Phương pháp đặt ẩn số phụ

Ví dụ 1. Giải phương trình

$$4^x + 6^x = 9^x \quad (1)$$

Giải.

$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{4}{9}\right)^x + \left(\frac{6}{9}\right)^x = 1$

$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + \left(\frac{2}{3}\right)^x - 1 = 0 \ (1)$

Đặt $t = \left(\frac{2}{3}\right)^x > 0$ (1) trở thành $t^2 + t - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ t = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

Do t > 0 nên ta chọn $t = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$,

suy ra $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = \log_{\frac{2}{3}} \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Ví dụ 2. Giải phương trình

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4 \quad (1)$$

Giải. Đặt $t = \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x > 0$ ta có

(1) trở thành $t + \dfrac{1}{t} = 4$

$\Leftrightarrow t^2 - 4t + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2-\sqrt{3} > 0 \\ t = 2+\sqrt{3} > 0 \end{array}\right.$

$+\, t = 2-\sqrt{3} \Rightarrow \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 2-\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \left(2-\sqrt{3}\right)^{\frac{x}{2}} = 2-\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \dfrac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow x = 2$

$+ t = 2+\sqrt{3} \Rightarrow \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 2+\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \left(2-\sqrt{3}\right)^{\frac{x}{2}} = 2+\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow -\dfrac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow x = -2$

Vậy, phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 2 \vee x = -2.$

Ví dụ 3. Giải phương trình

$$4^x + 4^{-x} + 2^x + 2^{-x} = 10 \quad (1)$$

Giải. Đặt $2^x = t > 0$

(1) trở thành $t^2 + \dfrac{1}{t^2} + t + \dfrac{1}{t} = 10$

$\Leftrightarrow \left(t+\dfrac{1}{t}\right)^2 - 2 + \left(t+\dfrac{1}{t}\right) - 10 = 0$

$\Leftrightarrow \left(t+\dfrac{1}{t}\right)^2 + \left(t+\dfrac{1}{t}\right) - 12 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t+\dfrac{1}{t} = -4 \\ t+\dfrac{1}{t} = 3. \end{array}\right.$

Vì $t > 0,$ nên ta chọn $t + \dfrac{1}{t} = 3$

$t + \dfrac{1}{t} = 3 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 1 = 0 \ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} > 0 \\ t = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} > 0 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \\ 2^x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \log_2 \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \\ x = \log_2 \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

Vậy, phương trình đã cho có hai nghiệm là

$\left[\begin{array}{l} x = \log_2 \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \\ x = \log_2 \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}. \end{array}\right.$

Ví dụ 4. Giải phương trình

$$2^{3x+1}-7.2^{2x}+7.2^{x}-2=0 \quad (1)$$

Giải.

Đặt $t=2^{x}>0$

(1) trở thành $2t^3-7t^2+7t-2=0$

$\Leftrightarrow (t-1)\left(2t^2-5t+2\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=2 \\ t=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x=1 \\ 2^x=2 \\ 2^x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-1. \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình đã cho có ba nghiệm là $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-1. \end{array}\right.$

Ví dụ 5. Giải phương trình

$$2.4^{x^2+1}+6^{x^2+1}=9^{x^2+1} \qquad (1)$$

Giải.

$(1)\Leftrightarrow 2.2^{2\left(x^2+1\right)}+\left(2.3\right)^{x^2+1}=3^{2\left(x^2+1\right)}$

$\Leftrightarrow 2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x^2+1}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2\left(x^2+1\right)}$

Đặt $t=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x^2+1}\geq\dfrac{3}{2}$, ta được phương trình:

$t^2-t-2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-1 \end{array}\right.$

Ta nhận $t=2\Rightarrow\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x^2+1}=2\Leftrightarrow x^2+1=\log_{\frac{3}{2}}2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{\log_{\frac{3}{2}}2-1} \\ x=-\sqrt{\log_{\frac{3}{2}}2-1} \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm là $\left[\begin{array}{l} x=\sqrt{\log_{\frac{3}{2}}2-1} \\ x=-\sqrt{\log_{\frac{3}{2}}2-1} \end{array}\right.$

Ví dụ 6. Giải phương trình

$$2^{2x^2+1}-9.2^{x^2+x}+2^{2x+2}=0 \qquad (1)$$

Giải.

$(1) \Leftrightarrow 2^{2x^2-2x-1} - 9.2^{x^2-x-2} + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}.2^{2x^2-2x} - \frac{9}{4}.2^{x^2-x} + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2.2^{2x^2-2x} - 9.2^{x^2-x} + 4 = 0$

Đặt $t = 2^{x^2-x} > 0,$ ta có phương trình

$2t^2 - 9t + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4 \\ t = \frac{1}{2} \end{array}\right.$

· $t = 4$ ta có: $2^{x^2-x} = 4 \Leftrightarrow x^2 - x = 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$

· $t = \frac{1}{2}$ ta có: $2^{x^2-x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - x = -1 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0 \quad (VN)$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = -1, x = 2$.

Ví dụ 7. Giải phương trình

$$2^{3x} - 6.2^x - \frac{1}{2^{3.(x-1)}} + \frac{12}{2^x} = 1 \quad (1)$$

Giải.

$(1) \Leftrightarrow \left(2^{3x} - \frac{2^3}{2^{3x}}\right) - 6\left(2^x - \frac{2}{2^x}\right) = 1$

Đặt $t = 2^x - \frac{2}{2^x}$ ta có $2^{3x} - \frac{2^3}{2^{3x}} = \left(2^x - \frac{2}{2^x}\right)^3 + 3.2^x.\frac{2}{2^x}\left(2^x - \frac{2}{2^x}\right) = t^3 + 6t$

Khi đó ta có phương trình: $t^3 + 6t - 6t = 1 \Leftrightarrow t = 1$

Suy ra $2^x - \frac{2}{2^x} = 1 \Leftrightarrow \left(2^x\right)^2 - 2^x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = -1 \\ 2^x = 2 \end{array}\right.$

Ta chọn $2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1$

Vậy, phương trình có một nghiệm duy nhất $x = 1$.

Ví dụ 8. Giải phương trình

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 - 2^{2x}}} = \left(1 + 2\sqrt{1 - 2^{2x}}\right)2^x$$

Giải.

Điều kiện: $1 - 2^{2x} \ge 0 \Leftrightarrow 2^{2x} \le 1 \Leftrightarrow x \le 0$

Như vậy ta có $0 < 2^x \le 1$, do đó đặt $2^x = \sin t$ với $t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Phương trình trở thành

$\sqrt{1 + \sqrt{1 - \sin^2 t}} = \sin t\left(1 + 2\sqrt{1 - \sin^2 t}\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{1 + \cos t} = \sin t\,(1 + 2\cos t)$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}.\cos\frac{t}{2} = \sin t + \sin 2t$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}.\cos\frac{t}{2} = 2\sin\frac{3t}{2}.\cos\frac{t}{2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}.\cos\frac{t}{2}\left(1-\sqrt{2}\sin\frac{3t}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\frac{t}{2}=0\\ \sin\frac{3t}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$$

do $t\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right]$ nên ta chỉ nhận $\sin\frac{3t}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ từ đó ta được

$$\left[\begin{array}{l}t=\frac{\pi}{6}\\ t=\frac{\pi}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2^x=\frac{1}{2}\\ 2^x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=0\end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x=-1; x=0$.

2.3. Phương pháp sử dụng tính chất đơn điệu của hàm số

Sử dụng tính chất đơn điệu của hàm số để giải phương trình là cách giải khá quen thuộc. Ta có ba hướng áp dụng như sau.

1. Biến đổi phương trình về dạng

$$f(x)=k\ (1)$$

với k là hằng số.

Nếu hàm số $f(x)$ đồng biến (nghịch biến) trên khoảng $(a;b)$ thì phương trình (1) có nhiều nhất một nghiệm trên khoảng $(a;b)$. Do đó nếu tìm được x_0 thuộc khoảng $(a;b)$ sao cho $f(x_0)=k$ thì x_0 là nghiệm duy nhất của phương trình.

2. Biến đổi phương trình về dạng

$$f(x)=g(x)\ (2)$$

Nếu hàm số $y=f(x)$ đồng biến (nghịch biến) trên khoảng $(a;b)$, nhưng hàm số $y=g(x)$ nghịch biến (đồng biến) cũng trên khoảng đó thì phương trình (2) có nhiều nhất một nghiệm trên khoảng $(a;b)$. Do đó, nếu tìm được x_0 thuộc khoảng $(a;b)$ sao cho $f(x_0)=g(x_0)$ thì x_0 là nghiệm duy nhất của phương trình.

3. Biến đổi phương trình về dạng

$$f(u)=f(v)\ (3)$$

Xét hàm số $y=f(x)$, nếu hàm số này đơn điệu trên khoảng $(a;b)$ thì khi đó phương trình (3) tương đương với $u=v; u,v\in(a;b)$.

Ví dụ 1. Giải phương trình

$$2^x=3^{\frac{x}{2}}+1\ \ (1)$$

Giải.

$$(1)\Leftrightarrow 1=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Hàm số $f(x)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x$

nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên phương trình nếu có nghiệm thì chỉ có nghiệm duy nhất, ta thử được $x=2$ thỏa phương trình.

Vậy, phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất $x=2.$

Ví dụ 2. Giải phương trình

$$3^{2x-3}+(3x-10).3^{x-2}+3-x=0 \ (1)$$

Giải.

Đặt $t=3^{x-2}>0$

Viết lại phương trình (1) dưới dạng $3t^2+(3x-10)t+3-x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{1}{3} \\ t=3-x \end{array}\right.$

· Với $t=\frac{1}{3} \Rightarrow 3^{x-2}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow x-2=-1 \Leftrightarrow x=1.$

· Với $t=3-x \Rightarrow 3^{x-2}=3-x.$

Hàm số $y=3^{x-2}$ đồng biến trên toàn trục số, còn hàm số $y=3-x$ luôn luôn nghịch biến và ta thử được $x=2$ thỏa phương trình.

Vậy, phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=1,\ x=2.$

Ví dụ 3. Giải phương trình

$$-2^{x^2-x}+2^{x-1}=(x-1)^2 \ (1)$$

Giải.

Viết lại phương trình (1) dưới dạng $2^{x-1}+x-1=2^{x^2-x}+x^2-x.$

Xét hàm số $f(t)=2^t+t,$ ta có, hàm số này luôn luôn đồng biến trên toàn trục số.

Như vậy, phương trình được viết dưới dạng $f(x-1)=f(x^2-x) \Leftrightarrow x-1=x^2-x \Leftrightarrow x=1.$

Vậy, phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất là $x=1.$

Ví dụ 4. Giải phương trình

$$x^3+2^{3x}+3x.2^{2x}+(1+3x^2).2^x+x-2=0 \ (1)$$

Giải. Viết lại phương trình (1) dạng $(2^x+x)^3+(2^x+x)=2 \ (2)$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t,$ hàm số này luôn luôn đồng biến trên toàn trục số và $f(1)=2,$ do đó

(2) $\Leftrightarrow 2^x+x=1 \Leftrightarrow 2^x=1-x.$ (3)

Cũng lập luận nhờ tính chất đơn điệu của hàm số thì phương trình (3) chỉ có một nghiệm duy nhất là $x=0.$

Vậy, phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất là $x=0.$

Ví dụ 5. Giải phương trình

$$9^x + 2(x-2)3^x + 2x - 5 = 0 \quad (1)$$

Giải.

Đặt $t = 3^x > 0$

(1) trở thành $t^2 + 2(x-2)t + 2x - 5 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 < 0 \\ t = -2x + 5 \end{array}\right.$$

Như vậy, ta có $3^x = -2x + 5$

$\Leftrightarrow 3^x + 2x - 5 = 0$

Hàm số $y = 3^x + 2x - 5$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, do đó phương trình có nhiều nhất một nghiệm, thử được $x = 1$ thỏa phương trình.

Vậy, phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất $x = 1$.

Ví dụ 6. Cho phương trình

$$5^{x^2+2mx+2} - 5^{2x^2+4mx+m+2} = x^2 + 2mx + m \quad (1)$$

Tìm m để phương trình có nghiệm.

Giải.

Đặt $t = x^2 + 2mx + 2$, phương trình (1) trở thành

$$5^t + t = 5^{2t+m-2} + 2t + m - 2 \; (2)$$

Xét hàm số $f(t) = 5^t + t$, hàm số này đồng biến trên toàn trục số do đó

$(2) \Leftrightarrow f(t) = f(2t + m - 2) \Leftrightarrow t = 2t + m - 2 \Leftrightarrow t + m - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 2mx + m = 0 \; (3)$

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi (3) có nghiệm, khi và chỉ khi

$\Delta' = m^2 - m \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq 0 \\ m \geq 1. \end{array}\right.$ Vậy, giá trị m cần tìm là $\left[\begin{array}{l} m \leq 0 \\ m \geq 1. \end{array}\right.$

2.4. Một số phương pháp khác

Ví dụ 1. Giải phương trình

$$2^{x^2+x} - 4.2^{x^2-x} - 2^{2x} + 4 = 0 \quad (1)$$

Giải.

$(1) \Leftrightarrow \left(2^{x^2+x} - 2^{2x}\right) - 4\left(2^{x^2-x} - 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow 2^{2x}\left(2^{x^2-x} - 1\right) - 4\left(2^{x^2-x} - 1\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left(2^{x^2-x}-1\right)\left(2^{2x}-4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{x^2-x}=1 \\ 2^{2x}=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x=0 \\ 2x=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \vee x=1 \\ x=1. \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x=1.$

Ví dụ 2. Giải phương trình $5^{3x}+9.5^x+27\left(5^{-3x}+5^{-x}\right)=64$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow \left(5^x\right)^3+3.5^{2x}.\frac{3}{5^x}+3.5^x.\frac{9}{5^{2x}}+\left(\frac{3}{5^x}\right)^3=4^3$$

$$\Leftrightarrow \left(5^x+\frac{3}{5^x}\right)^3=4^3 \Leftrightarrow 5^x+\frac{3}{5^x}=4$$

$$\Leftrightarrow \left(5^x\right)^2-4.5^x+3=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5^x=1 \\ 5^x=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\log_5 3. \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=0 \vee x=\log_5 3$.

Ví dụ 3. Tìm k để phương trình

$$9^x-(k-1)3^x+2k=0 \quad (1)$$

có nghiệm duy nhất.

Giải.

Đặt $t=3^x>0$. (1) trở thành $t^2-(k-1)t+2k=0$ (2)

(1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ (2) có đúng một nghiệm dương.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=t_2>0 \\ t_1<0<t_2 \\ t_1=0; t_2>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \Delta=0 \\ S=t_1+t_2>0 \end{cases} \\ P=t_1.t_2<0 \\ \begin{cases} P=t_1.t_2=0 \\ S=t_1+t_2>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (k-2)^2-8k=0 \\ k-1>0 \end{cases} \\ 2k<0 \\ \begin{cases} 2k=0 \\ k-1=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=5+2\sqrt{6} \\ k<0 \end{array}\right.$$

Vậy, giá trị k cần tìm là $\left[\begin{array}{l} k=5+2\sqrt{6} \\ k<0. \end{array}\right.$

Ví dụ 4. Cho phương trình

$$\frac{m}{4^x} - \frac{2m+1}{2^x} + m + 4 = 0 \quad (1)$$

Tìm m sao cho phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $-1 < x_1 < 0 < x_2$.

Giải. Đặt $t = \frac{1}{2^x} > 0$

(1) trở thành $mt^2 - (2m+1)t + m + 4 = 0$ (2)

Ta có $-1 < x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow -x_2 < 0 < -x_1 < 1$

$$\Leftrightarrow 2^{-x_2} < 2^0 < 2^{-x_1} < 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2^{x_2}} < 1 < \frac{1}{2^{x_1}} < 2 \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow t_2 < 1 < t_1 < 2 \quad (3)$$

Đặt vế trái của (2) là $f(t)$, thì

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} mf(1) < 0 \\ mf(2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m < 0 \\ m(m+2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -2$$

Vậy, với $m < -2$ thì (1) có hai nghiệm thỏa $-1 < x_1 < 0 < x_2$.

Sau đây ta giải một số hệ phương trình mũ.

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 4^{2x^2-2} - 2^{2x^2+y} + 4^y = 1 \\ 2^{2y+2} - 3.2^{2x^2+y} = 16 \end{cases}$$

Giải.

Viết lại hệ phương trình dưới dạng

$$\begin{cases} 4^{2(x^2-1)} - 4.4^{x^2-1}.2^y + 2^{2y} = 1 \\ 2^{2y} - 3.4^{x^2-1}.2^y = 4 \end{cases} \quad (1)$$

Đặt $\begin{cases} u = 4^{x^2-1} \\ v = 2^y \end{cases}; u \geq \frac{1}{4}, v > 0.$

Khi đó (1) được viết thành

$$\begin{cases} u^2 - 4uv + v^2 = 1 & (a) \\ v^2 - 3uv = 4 & (b) \end{cases}$$

Do $v > 0$ nên từ $(b) \Rightarrow u = \frac{v^2 - 4}{3v}$ thay vào (a) ta được

$$2v^4 - 31v^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v^2 = 16 \\ v^2 = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Ta nhận $v^2 = 16 \Leftrightarrow v = 4$ (do $v > 0$) $\Rightarrow u = 1$.

Như vậy, ta có $\begin{cases} 4^{x^2-1} = 1 \\ 2^y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \vee x = -1 \\ y = 2. \end{cases}$

Vậy, hệ phương trình đã cho có hai nghiệm $(1;2), (-1;2)$.

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3^x - 3^y = y - x \quad (1) \\ x^2 + xy + y^2 = 12 (2) \end{cases}$$

Giải.

Ta viết phương trình (1) dưới dạng

$$3^x + x = 3^y + y \ (3)$$

Xét hàm số $f(t) = 3^t + t$, hàm này đồng biến trên $\mathbb{R}$, do đó (3) $\Leftrightarrow x = y$.

Khi đó hệ trở thành $\begin{cases} x = y \\ x^2 + xy + y^2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 3x^2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = 2 \vee x = -2. \end{cases}$

Vậy, hệ phương trình đã cho có hai nghiệm $(2;2), (-2;-2)$.

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2^x - 2^y = (y - x)(xy + 2) \quad (1) \\ x^2 + y^2 = 2 \quad (2) \end{cases}$$

Giải.

Thay (2) vào (1) ta được

$$2^x - 2^y = (y - x)(x^2 + xy + y^2) = y^3 - x^3$$

$$\Leftrightarrow 2^x + x^3 = 2^y + y^3 \ (3)$$

Áp dụng phương pháp giải như Ví dụ 2, ta cũng được hệ phương trình đã cho có hai nghiệm $(1;1), (-1;-1)$.

Ví dụ 4. Tìm m để hệ phương trình

$$\begin{cases} 2^x + m.3^y = 3m \\ m.2^x + 3^y = 2m + 1 \end{cases} \quad (1)$$

Có nghiệm duy nhất. Tìm nghiệm duy nhất đó.

Giải.

Đặt $\begin{cases} u = 2^x > 0 \\ v = 3^y > 0 \end{cases}$

Khi đó hệ được biến đổi về dạng

$$\begin{cases} u + mv = 3m \\ mu + v = 2m + 1 \end{cases} (2)$$

Ta có $D = 1 - m^2;\ D_u = -2m^2 + 2m;\ D_v = -3m^2 + 2m + 1.$

Hệ phương trình (1) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi hệ phương trình (2) có nghiệm duy nhất $(u;v), u > 0, v > 0.$

$$u = \frac{D_u}{D} = \frac{2m}{m-1} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 1 \end{array}\right.$$

$$v = \frac{D_v}{D} = \frac{-3m-1}{m+1} > 0 \Leftrightarrow -1 < m < -\frac{1}{3}$$

Vậy, giá trị m cần tìm là $-1 < m < -\frac{1}{3}.$

Khi đó nghiệm duy nhất của hệ phương trình là

$$\begin{cases} x = \log_2 \dfrac{2m}{m-1} \\ y = \log_3 \dfrac{-3m-1}{m+1}. \end{cases}$$

3. Một số phương pháp giải bất phương trình mũ

3.1. Phương pháp logarit hóa

Các dạng cơ bản

· $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \end{array}\right.$.

· $a^{f(x)} < b\ \ (b > 0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ f(x) < \log_a b \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) > \log_a b \end{cases} \end{array}\right.$.

· $a^{f(x)} > b$ (1). $(0 < a \neq 1)$

i) Nếu $b \leq 0$ thì (1) $\Leftrightarrow f(x)$ có nghĩa.

ii) Nếu $b > 0$ thì:

+ Trường hợp 1: $a > 1$

(1) $\Leftrightarrow f(x) > \log_a b$

+ Trường hợp 2: $0 < a < 1$

(1) $\Leftrightarrow f(x) < \log_a b$

Ví dụ 1. Giải bất phương trình

$$7^x + 7^{x+1} + 7^{x+2} < 5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} \text{ (1)}$$

Giải.

$(1) \Leftrightarrow 7^x(1+7+49) < 5^x(1+5+25)$

$\Leftrightarrow 57.7^x < 31.5^x$

$\Leftrightarrow \left(\frac{7}{5}\right)^x < \frac{31}{57} \Leftrightarrow x < \log_{\frac{7}{5}} \frac{31}{57}.$

Vậy, bất phương trình đã cho có nghiệm là $x < \log_{\frac{5}{7}} \frac{31}{57}.$

Ví dụ 2. Giải bất phương trình

$$(x^2 - x + 1)^{x^2+2x} \le 1 \text{ (1)}$$

Giải.

Nhận xét: $x^2 - x + 1 > 0$ với mọi x. Ta xét 3 trường hợp sau

Trường hợp 1: $x^2 - x + 1 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$, các giá trị $x = 0, x = 1$ là nghiệm của bất phương trình (1) vì thay vào (1) ta được $1 \le 1$ (đúng).

Trường hợp 2: $x^2 - x + 1 > 1 \Leftrightarrow x^2 - x > 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x > 1 \end{array}\right.$$

Khi đó $(1) \Leftrightarrow \log_{x^2-x+1}(x^2 - x + 1)^{x^2+2x} \le 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x \le 0 \Leftrightarrow -2 \le x \le 0$

Kết hợp với điều kiện $\left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x > 1 \end{array}\right.$ ta được $-2 \le x \le 0.$

Trường hợp 3: $0 < x^2 - x + 1 < 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x < 0 \\ x^2 - x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 1$

$$(1) \Leftrightarrow x^2 + 2x \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 0 \\ x \leq -2. \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện đang xét, ta chọn nghiệm là $0 < x < 1$.

Vậy, nghiệm của bất phương trình đã cho là $-2 \leq x \leq 1$.

3.2. Phương pháp đặt ẩn số phụ

Ví dụ 1. Giải bất phương trình

$$\frac{2^{1-x} - 2^x + 1}{2^x - 1} \leq 0 \quad (1)$$

Giải.

Đặt $t = 2^x > 0$, (1) trở thành

$$\frac{2t^{-1} - 2t + 1}{t - 1} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-t^2 + t + 2}{t(t-1)} \leq 0$$

Lập bảng xét dấu vế trái ta nhận được

$$\left[\begin{array}{l} 0 < t < 1 \\ t \geq 2. \end{array}\right.$$

Từ đó suy ra

$$\left[\begin{array}{l} 0 < 2^x < 1 \\ 2^x \geq 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x \geq 1 \end{array}\right.$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình đã cho là $\left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x \geq 1. \end{array}\right.$

Ví dụ 2. Giải bất phương trình

$$5.36^x - 2.81^x - 3.16^x \leq 0 \ (1)$$

Giải.

$$(1) \Leftrightarrow 5.\left(\frac{36}{81}\right)^x - 2 - 3.\left(\frac{16}{81}\right)^x \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 5.\left(\frac{4}{9}\right)^x - 2 - 3.\left(\frac{4}{9}\right)^{2x} \leq 0$$

Đặt $t = \left(\frac{4}{9}\right)^x > 0$, ta có bất phương trình theo ẩn t

$$3t^2-5t+2\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\le \dfrac{2}{3} \\ t\ge 1. \end{array}\right.$$

Như vậy, ta có

$$\left[\begin{array}{l} 0<\left(\dfrac{4}{9}\right)^x\le \dfrac{2}{3} \\ \left(\dfrac{4}{9}\right)^x\ge 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge \dfrac{1}{2} \\ x\le 0 \end{array}\right.$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình đã cho là $\left[\begin{array}{l} x\ge \dfrac{1}{2} \\ x\le 0. \end{array}\right.$

Ví dụ 3. Giải bất phương trình

$$\frac{4^x}{4^x-3^x}<4 \quad (1)$$

Giải. (1) $\Leftrightarrow \dfrac{4^x}{4^x-3^x}-4<0$

$$\Leftrightarrow \frac{-3.4^x+4.3^x}{4^x-3^x}<0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3+4\left(\dfrac{3}{4}\right)^x}{1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^x}<0.$$

Đặt $t=\left(\dfrac{3}{4}\right)^x>0$, ta có bất phương trình

$$\frac{4t-3}{t-1}>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t<\dfrac{3}{4}, \\ t>1 \end{array}\right.$$

Suy ra $\left[\begin{array}{l} 0<t<\dfrac{3}{4} \\ t>1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<\left(\dfrac{3}{4}\right)^x<\dfrac{3}{4} \\ \left(\dfrac{3}{4}\right)^x>1 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>1 \\ x<0. \end{array}\right.$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình đã cho là $\left[\begin{array}{l} x>1 \\ x<0. \end{array}\right.$

Ví dụ 4. Giải bất phương trình

$$\left(5+\sqrt{21}\right)^x+\left(5-\sqrt{21}\right)^x \le 5.2^x \quad (1)$$

Giải.

Chia hai vế cho $2^x>0$ ta được

$$\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^x+\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^x \le 5$$

Đặt $t=\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^x>0$, ta có bất phương trình

$$t+\frac{1}{t}\le 5 \Leftrightarrow t^2-5t+1\le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5-\sqrt{21}}{2}\le t\le \frac{5+\sqrt{21}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5-\sqrt{21}}{2}\le \left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^x \le \frac{5+\sqrt{21}}{2}$$

$$\Leftrightarrow -1\le x\le 1$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $-1\le x\le 1$.

Ví dụ 5. Giải bất phương trình

$$2^{2\sqrt{x+3}-x-6}+15.2^{\sqrt{x+3}-5}<2^x \quad (1)$$

Giải.

Chia hai vế của bất phương trình (1) cho $2^x>0$, ta được bất phương trình

$$2^{2\sqrt{x+3}-2x-6}+15.2^{\sqrt{x+3}-x-5}<1$$

$$\Leftrightarrow 4.2^{2\left(\sqrt{x+3}-x-3\right)}+15.2^{\sqrt{x+3}-x-3}-4<0$$

Đặt $t=2^{\sqrt{x+3}-x-3}>0$, ta có bất phương trình

$$4t^2+15t-4<0$$

$$\Leftrightarrow (4+t)(4t-1)<0$$

$$\Leftrightarrow -4<t<\frac{1}{4}$$

Vì $t>0$ nên ta chọn $0<t<\frac{1}{4}$, như vậy ta có

$$0<2^{\sqrt{x+3}-x-3}<\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+3}-x-3<-2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+3}<x+1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1>0 \\ x+3\ge 0 \\ x+3<(x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x\ge -3 \\ x^2+x-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>1.$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $x > 1$.

Ví dụ 6. Giải bất phương trình

$$6^x + 2^{x+2} > 4.3^x + 2^{2x} \ (1)$$

Giải.

Đặt $\begin{cases} u = 3^x > 0 \\ v = 2^x > 0 \end{cases}$, ta có bất phương trình

$u.v + 4v - 4u - v^2 > 0$

$\Leftrightarrow (u - v)(v - 4) > 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u > v \\ v > 4 \end{cases} \vee \begin{cases} u < v \\ v < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x > 2^x \\ 2^x > 4 \end{cases} \vee \begin{cases} 3^x < 2^x \\ 2^x < 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2 \vee x < 0.$

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $x > 2 \vee x < 0$.

3.3. Phương pháp sử dụng tính chất đơn điệu của hàm số

Có hai hướng áp dụng như sau

1. Biến đổi bất phương trình về dạng

$$f(x) > k \ (1) \ (k \text{ là hằng số})$$

Nếu hàm số $f(x)$ đơn điệu trên khoảng $(a;b)$ (giả sử đồng biến).

Khi đó ta có nhận xét: Giả sử x_0 thuộc $(a;b)$ là nghiệm của phương trình $f(x) = k,$ thì

Với $x \le x_0 \Leftrightarrow f(x) \le f(x_0) = k \Rightarrow$ (1) vô nghiệm.

Với $x > x_0 \Leftrightarrow f(x) > f(x_0) = k \Rightarrow$ (1) nghiệm đúng.

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $x > x_0$.

2. Biến đổi bất phương trình về dạng

$$f(u) < f(v) \ \ (2)$$

Xét hàm số $y = f(x)$, giả sử hàm số đồng biến trên khoảng $(a;b)$, khi đó

$$f(u) < f(v) \Leftrightarrow u < v; u, v \in (a, b).$$

Ví dụ 1. Giải bất phương trình

$$2.2^x + 3.3^x > 6^x - 1 \ (1)$$

Giải.

Chia hai vế của bất phương trình (1) cho $6^x > 0$, ta được

$\dfrac{2}{3^x} + \dfrac{3}{2^x} + \dfrac{1}{6^x} > 1.$

Xét hàm số $y = f(x) = \dfrac{2}{3^x} + \dfrac{3}{2^x} + \dfrac{1}{6^x}$, là hàm số nghịch biến trên toàn trục số và $f(2) = 1.$

Ta có nhận xét:

+ Với $x \geq 2$, thì $f(x) \leq f(2) = 1 \Rightarrow$ (1) không nghiệm đúng.

+ Với $x < 2$, thì $f(x) > f(2) = 1 \Rightarrow$ (1) đúng.

Vậy, nghiệm của bất phương trình đã cho là $x < 2$.

Ví dụ 2. Giải bất phương trình

$$3^{\sqrt{2(x-1)}+1} - 3^x \leq x^2 - 4x + 3 \; (1)$$

Giải.

Điều kiện: $x \geq 1.$ (*)

Viết lại bất phương trình dưới dạng

$$3^{\sqrt{2(x-1)}+1} + 2(x-1) \leq 3^x + x^2 - 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow 3^{\sqrt{2(x-1)}+1} + 2(x-1) \leq 3^{(x-1)+1} + (x-1)^2 \; (2)$$

Xét hàm số $y = f(x) = 3^{x+1} + x^2$, hàm số này đồng biến trên $[1;+\infty)$. Khi đó ta có

$$(2) \Leftrightarrow f(\sqrt{2(x-1)}) \leq f(x-1) \Leftrightarrow \sqrt{2(x-1)} \leq x-1$$

$$\Leftrightarrow 2(x-1) \leq (x-1)^2$$

$$\Leftrightarrow 2x - 2 \leq x^2 - 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 3 \\ x \leq 1. \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện (*) ta được nghiệm của bất phương trình đã cho là $x \geq 3 \vee x = 1$.

3.4. Một số ví dụ khác

Ví dụ 1. Tìm m để bất phương trình

$$2^{\sin^2 x} + 3^{\cos^2 x} \geq m.3^{\sin^2 x} \; (1)$$

có nghiệm.

Giải.

Chia hai vế của bất phương trình (1) cho $3^{\sin^2 x} > 0$ ta được

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\sin^2 x} + \frac{3^{\cos^2 x}}{3^{\sin^2 x}} \geq m$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{\sin^2 x} + \frac{3^{1-\sin^2 x}}{3^{\sin^2 x}} \geq m$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{\sin^2 x} + 3.\left(\frac{1}{9}\right)^{\sin^2 x} \geq m.$$

Xét hàm số $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{\sin^2 x}+3.\left(\frac{1}{9}\right)^{\sin^2 x}$

Các hàm số $y=g(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^{\sin^2 x}$, $y=h(x)=\left(\frac{1}{9}\right)^{\sin^2 x}$ nghịch biến trên toàn trục số, nên hàm số

$y=\left(\frac{2}{3}\right)^{\sin^2 x}+3.\left(\frac{1}{9}\right)^{\sin^2 x}=g(x)+3h(x)$ là một hàm nghịch biến trên toàn trục số, do vậy ta có

$0\le \sin^2 x\le 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{1}+3.\left(\frac{1}{9}\right)^{1}\le \left(\frac{2}{3}\right)^{\sin^2 x}+3.\left(\frac{1}{9}\right)^{\sin^2 x}\le \left(\frac{2}{3}\right)^{0}+3.\left(\frac{1}{9}\right)^{0}$

$\Leftrightarrow 1\le y\le 4.$

Như vậy, $Maxy=4.$ Từ đó, bất phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi $m\le 4.$

Ví dụ 2. Tìm a để bất phương trình

$$a.4^{x}+(a-1)2^{x+2}+a-1>0\,(1)$$

nghiệm đúng với mọi x.

Giải.

Đặt $t=2^{x}>0,$ khi đó ta có bất phương trình $at^2+4(a-1)t+a-1>0\,(2).$

Yêu cầu bài toán được thỏa khi và chỉ khi bất phương trình (2) đúng với mọi $t>0.$ Ta có $at^2+4(a-1)t+a-1>0$

$\Leftrightarrow a>\frac{4t+1}{t^2+4t+1}=g(t)$

Như vậy (2) đúng với mọi $t>0 \Leftrightarrow a>\frac{4t+1}{t^2+4t+1}=g(t), t>0.$

$g'(t)=\frac{-4t^2-2t}{(t^2+4t+1)^2}<0, \forall t>0.$ Lập bảng biến thiên của hàm số $g(t), t\in(0;+\infty),$ ta được miền giá trị $T_g=(0;1).$ Vậy giá trị cần tìm là $a\ge 1.$

Ví dụ 3. Tìm m để mọi nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{x}}+3\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}+1}>12\;(1)$ cũng là nghiệm của bất phương trình $(m-2)^2x^2-3(m-6)x-(m+1)<0\;(2).$

Giải.

Đặt $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=t>0 \Rightarrow (1)\Leftrightarrow t^2+t-12>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t>3 \\ t<-4. \end{array}\right.$

Như vậy , ta có

$t = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}} > 3 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x} < -1$

$\Leftrightarrow \frac{x+1}{x} < 0$

$\Leftrightarrow -1 < x < 0.$

· Nếu $m = 2$, $(2) \Leftrightarrow 12x - 3 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{4}$, thỏa mãn yêu cầu bài toán

· Nếu $m \neq 2$, khi đó yêu cầu bài toán được thỏa

$\Leftrightarrow \begin{cases} f(-1) \leq 0 \\ f(0) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 5; m \neq 2.$

Vậy, giá trị m cần tìm là $-1 \leq m \leq 5$.

Ví dụ 4. Giải bất phương trình

$$4x^2 + 3^{\sqrt{x}}x + 3^{1+\sqrt{x}} < 2.3^{\sqrt{x}}x^2 + 2x + 6 \ (1)$$

Giải. (1) $\Leftrightarrow \left(2x^2 - x - 3\right)\left(3^{\sqrt{x}} - 2\right) > 0.(2)$

Ta có $3^{\sqrt{x}} - 2 > 0 \Leftrightarrow x - \log_3^2 2 > 0$, nên ta được (2) tương đương với

$\begin{cases} x \geq 0 \\ (x+1)(2x-3)\left(x - \log_3^2 2\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leq x < \log_3^2 2 \\ x > \frac{3}{2}. \end{array}\right.$

§3. PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

1. Định nghĩa. *Phương trình, bất phương trình logarit* là phương trình, bất phương trình có ẩn chứa trong biểu thức dưới dấu logarit.

Trong một số trường hợp có xét cả ẩn chứa ở cơ số của logarit, khi đó ta phải xét hai trường hợp của cơ số: $a > 1$ và $0 < a < 1$.

2. Một số phương pháp giải phương trình logarit

2.1. Phương pháp mũ hóa

Các dạng cơ bản

· $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, a \neq 1 \\ f(x) = a^b \end{cases}$

· $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, a \neq 1 \\ f(x) > 0, (g(x) > 0) \\ f(x) = g(x) \end{cases}$

Ví dụ 1. Giải phương trình

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-1) + \log_{\frac{1}{2}}(x+1) - 2\log_{\frac{1}{2}}(7-x) = 1 \text{ (1)}$$

Giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x-1>0 \\ x+1>0 \\ 7-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 7$ (*)

(1) $\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x^2-1) - 2\log_{\frac{1}{2}}(7-x) = 1.$

$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x^2-1) - \log_{\frac{1}{2}}(7-x)^2 = 1$

$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x^2-1}{(7-x)^2} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-1}{(7-x)^2} = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x^2 + 14x - 51 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -17 \end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện (*) ta được nghiệm của phương trình đã cho là $x = 3$.

Ví dụ 2. Giải phương trình

$$\log_3(x-1)^2 + \log_{\sqrt{3}}(2x-1) = 2 \text{ (1)}$$

Giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x-1 \neq 0 \\ 2x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x > \dfrac{1}{2} \end{cases}$ (*)

(1) $\Leftrightarrow 2\log_3|x-1| + 2\log_3(2x-1) = 2$

$\Leftrightarrow \log_3|x-1| + \log_3(2x-1) = 1$

$\Leftrightarrow \log_3\left[|x-1|(2x-1)\right] = 1$

$\Leftrightarrow |x-1|(2x-1) = 3$ (2)

. Xét $\dfrac{1}{2} < x < 1$

(2) $\Leftrightarrow (1-x)(2x-1) = 3$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 4 = 0$ (Phương trình vô nghiệm).

. Xét $x > 1$

(2) $\Leftrightarrow (x-1)(2x-1) = 3 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

So với điều kiện (*) ta nhận $x = 2$.

Vậy, phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất $x = 2$.

Ví dụ 3. Giải phương trình

$$\log_4(x-1) + \frac{1}{\log_{2x+1} 4} = \frac{1}{2} + \log_2 \sqrt{x+2} \quad (1)$$

Giải. Điều kiện:

$$\begin{cases} x-1>0 \\ x+2>0 \\ 2x+1>0 \\ 2x+1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x>-2 \\ x>-\dfrac{1}{2} \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1. (*)$$

Với điều kiện $x > 1$, ta có

(1) $\Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_2(x-1) + \frac{1}{2}\log_2(2x+1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_2(x+2)$

$\Leftrightarrow \log_2(x-1) + \log_2(2x+1) = 1 + \log_2(x+2)$

$\Leftrightarrow \log_2\left[(x-1)(2x+1)\right] = \log_2(2x+4)$

$\Leftrightarrow (x-1)(2x+1) = 2x+4$

$\Leftrightarrow 2x^2 + x - 2x - 1 - 2x - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \dfrac{5}{2} \end{array}\right.$$

So với điều kiện (*) ta được $x = \frac{5}{2}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Ví dụ 4. Giải phương trình

$$2(\log_9 x)^2 = \log_3 x\left[\log_3\left(\sqrt{2x+1} - 1\right)\right] \ (1)$$

Giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x>0 \\ 2x+1>0 \\ \sqrt{2x+1}-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x>-\dfrac{1}{2} \\ \sqrt{2x+1}>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ 2x+1>1 \end{cases} \Leftrightarrow x>0.$

Với điều kiện $x>0$, ta có

$$(1) \Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{2}\log_3 x\right)^2 = \log_3 x\left[\log_3\left(\sqrt{2x+1}-1\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_3{}^2 x = \log_3 x\left[\log_3\left(\sqrt{2x+1}-1\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \log_3 x\left[\log_3 x - 2\log_3\left(\sqrt{2x+1}-1\right)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x = 0 \\ \log_3 x - \log_3\left(\sqrt{2x+1}-1\right)^2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x = 2x+1-2\sqrt{2x+1}+1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ 2\sqrt{2x+1} = x+2,\ (x>0) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ 4(2x+1)=(x+2)^2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-4x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=0 \\ x=4 \end{array}\right.$$

Vì $x>0$ nên nghiệm của phương trình là $x=1$, $x=4$.

Ví dụ 5. Giải phương trình

$$\log_4(x+1)^2+2=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{4-x}+\log_8(4+x)^3 \quad (1)$$

Giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x+1\neq 0 \\ 4-x>0 \\ 4+x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -1 \\ x<4 \\ x>-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -1 \\ -4<x<4 \end{cases} (*)$

$$(1) \Leftrightarrow \log_2|x+1|+2 = 2\log_2\sqrt{4-x}+\log_2(x+4)$$

$$\Leftrightarrow \log_2|x+1|+\log_2 4 = \log_2(4-x)+\log_2(x+4)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 4|x+1| = \log_2\left(16-x^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 4|x+1| = 16-x^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4(x+1)=16-x^2 \\ 4(x+1)=x^2-16 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+4x-12=0 \\ x^2-4x-20=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-6 \\ x=2 \\ x=2+2\sqrt{6} \\ x=2-2\sqrt{6} \end{array}\right.$$

So với điều kiện $(*)$ thì nghiệm của phương trình là $x=2, x=2-2\sqrt{6}$.

Ví dụ 6. Giải phương trình

$$\log_{2+\sqrt{3}}\sqrt{x^2-3x+2}+\log_{2-\sqrt{3}}\sqrt{x-1}=\log_{7-4\sqrt{3}}(x+2) \qquad (1)$$

Giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x^2-3x+2>0 \\ x-1>0 \\ x+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<1 \vee x>2 \\ x>1 \\ x>-2 \end{cases} \Leftrightarrow x>2.$

Ta có nhận xét rằng

$\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=1 \Rightarrow 2+\sqrt{3}=\left(2-\sqrt{3}\right)^{-1}$

$7-4\sqrt{3}=\left(2-\sqrt{3}\right)^2$

Do đó

$(1) \Leftrightarrow -\log_{2-\sqrt{3}}\sqrt{x^2-3x+2}+\log_{2-\sqrt{3}}\sqrt{x-1}=\frac{1}{2}\log_{2-\sqrt{3}}(x+2)$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\log_{2-\sqrt{3}}\left(x^2-3x+2\right)+\frac{1}{2}\log_{2-\sqrt{3}}(x-1)=\frac{1}{2}\log_{2-\sqrt{3}}(x+2)$

$\Leftrightarrow \log_{2-\sqrt{3}}\frac{x-1}{x^2-3x+2}=\log_{2-\sqrt{3}}(x+2)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x-2}=x+2$

$\Leftrightarrow x^2-4=1 \Leftrightarrow x^2=5 \Leftrightarrow x=\sqrt{5}\,(do\ \ x>2)$

Vậy, phương trình có một nghiệm $x=\sqrt{5}$.

Ví dụ 7. Giải phương trình

$$\log_2\frac{\left(x^2-x\right)^2}{x}+\left[\log_2\left(x^2-x\right)\right].\log_2 x-2=0 \qquad (1)$$

Giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x>0 \\ x^2-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>1 \quad (*)$

Ta có

$(1) \Leftrightarrow 2\log_2\left(x^2-x\right)-\log_2 x+\left[\log_2\left(x^2-x\right)\right].\log_2 x-2=0$

$\Leftrightarrow 2\left[\log_2\left(x^2-x\right)-1\right]+\left[\log_2\left(x^2-x\right)-1\right].\log_2 x=0$

$\Leftrightarrow \left[\log_2\left(x^2-x\right)-1\right]\left(\log_2 x+2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2\left(x^2-x\right)-1=0 \\ \log_2 x+2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x=2 \\ x=\frac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \\ x=\frac{1}{4} \end{array}\right.$

So với điều kiện $(*)$ ta nhận $x=2$.

Vậy, phương trình có một nghiệm là $x=2$.

2.2. Phương pháp đặt ẩn phụ

Ví dụ 1. Giải phương trình

$$\log_3(3^x-1).\log_3(3^{x+1}-3)=6 \ (1)$$

Giải.

Điều kiện: $3^x-1>0 \Leftrightarrow x>0$

$(1) \Leftrightarrow \log_3(3^x-1).\log_3\left[3(3^x-1)\right]=6$

$\Leftrightarrow \log_3(3^x-1)\left[1+\log_3(3^x-1)\right]=6$

$\Leftrightarrow \left[\log_3(3^x-1)\right]^2+\log_3(3^x-1)-6=0$

Đặt $t=\log_3(3^x-1)$, ta có phương trình $t^2+t-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-3 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3(3^x-1)=2 \\ \log_3(3^x-1)=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x-1=9 \\ 3^x-1=\dfrac{1}{27} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x=10 \\ 3^x=\dfrac{28}{27} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\log_3 10 \\ x=\log_3\dfrac{28}{27}. \end{array}\right.$

Cả hai giá trị trên đều thỏa điều kiện $x>0$ nên là nghiệm của phương trình đã cho.

Ví dụ 2. Giải phương trình

$$\log_2^2 x+(x-1)\log_2 x+2x-6=0 \ (1)$$

Giải.

Đặt $t=\log_2 x$

(1) trở thành $t^2+(x-1)t+2x-6=0$

$\Leftrightarrow t^2-t-6+x(t+2)=0$

$\Leftrightarrow (t+2)(t-3)+x(t+2)=0$

$\Leftrightarrow (t+2)(t-3+x)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=3-x. \end{array}\right.$

Với $t=-2$, ta có $\log_2 x=-2 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{4}$

Với $t=3-x$, ta có $\log_2 x=-x+3$ (*)

Hàm số $y=\log_2 x$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Hàm số $y=-x+3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó, trên $(0;+\infty)$ phương trình (*) có nhiều nhất một nghiệm, ta thử được $x=2$ thỏa phương trình (*) nên là nghiệm.

Vậy, phương trình đã cho có hai nghiệm $x=\frac{1}{4}\vee x=2$.

Ví dụ 3. Giải phương trình

$$\log_{2x-1}\left(2x^2+x-1\right)+\log_{x+1}(2x-1)^2=4 \quad (1)$$

Giải.

Điều kiện:

$$\begin{cases}2x^2+x-1>0\\2x-1>0\\2x-1\neq 1\\x+1>0\\x+1\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\frac{1}{2}\\x\neq 1\end{cases}\quad (*)$$

$$(1)\Leftrightarrow \log_{2x-1}(x+1)(2x-1)+2\log_{x+1}|2x-1|=4$$

$$\Leftrightarrow \log_{2x-1}(x+1)(2x-1)+2\log_{x+1}(2x-1)=4.\left(x>\frac{1}{2}\Rightarrow |2x-1|=2x-1\right)$$

$$\Leftrightarrow 1+\log_{2x-1}(x+1)+2\log_{x+1}(2x-1)=4$$

$$\Leftrightarrow 2\log_{x+1}^2(2x-1)-3\log_{x+1}(2x-1)+1=0$$

Đặt $t=\log_{x+1}(2x-1)$, ta có phương trình

$$2t^2-3t+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=\frac{1}{2}.\end{array}\right.$$

· $\log_{x+1}(2x-1)=1\Leftrightarrow 2x-1=x+1\Leftrightarrow x=2.$

· $\log_{x+1}(2x-1)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2x-1=\sqrt{x+1}\Leftrightarrow (2x-1)^2=x+1$

$$\Leftrightarrow 4x^2-5x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\frac{5}{4}\end{array}\right.$$

So với điều kiện (*) thì nghiệm của phương trình đã cho là $x=2\vee x=\frac{5}{4}$.

Ví dụ 4. Giải phương trình

$$\log_2(x-\sqrt{x^2-1})+3\log_2(x+\sqrt{x^2-1})=2 \ \ (1)$$

Giải. Trước hết ta có điều kiện sau

$$\begin{cases} x^2-1\geq 0 \\ x-\sqrt{x^2-1}>0 \Leftrightarrow x\geq 1.(*) \\ x+\sqrt{x^2-1}>0 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} u=\log_2(x-\sqrt{x^2-1}) \\ v=\log_2(x+\sqrt{x^2-1}) \end{cases}$

Nhận xét rằng

$$u+v=\log_2(x-\sqrt{x^2-1})+\log_2(x+\sqrt{x^2-1})$$
$$=\log_2[(x-\sqrt{x^2-1}).(x+\sqrt{x^2-1})]$$
$$=\log_2 1=0.$$

Khi đó phương trình (1) được chuyển thành hệ phương trình

$$\begin{cases} u+v=0 \\ u+3v=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=-v \\ v=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=-1 \\ v=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x-\sqrt{x^2-1})=-1 \\ \log_2(x+\sqrt{x^2-1})=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-\sqrt{x^2-1}=\dfrac{1}{2} \\ x+\sqrt{x^2-1}=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{5}{4}.$$

$x=\dfrac{5}{4}$ thỏa điều kiện (*). Vậy, phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất là $x=\dfrac{5}{4}$.

2.3. Phương pháp sử dụng tính chất đơn điệu của hàm số

Ví dụ 1. Giải phương trình

$$\log_2(x^2-4)+x=\log_2[8(x+2)]$$

Giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x^2-4>0 \\ x+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>2.$

Viết lại phương trình dưới dạng

$$\log_2(x^2-4)-\log_2(x+2)=3-x \Leftrightarrow \log_2\frac{x^2-4}{x+2}=3-x$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x-2)=3-x \ (*)$$

Hàm số $y=\log_2(x-2)$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$, cũng trên khoảng đó hàm số $y=3-x$ nghịch biến. Do đó phương trình (*) có nhiều nhất một nghiệm, ta thấy rằng $x=3$ thỏa phương trình (*).

Vậy, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=3$.

Ví dụ 2. Giải phương trình

$$\log_3(x+3^{\log_6 x})=\log_6 x\ (1)$$

Giải. Điều kiện: $\begin{cases} x+3^{\log_6 x}>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>0.$

Đặt $t=\log_6 x \Rightarrow x=6^t$.

Viết lại phương trình dưới dạng

$$\log_2(6^t+3^t)=t \Leftrightarrow 6^t+3^t=2^t \Leftrightarrow 3^t+\left(\frac{3}{2}\right)^t=1\ (2)$$

Hàm số $y=3^t+\left(\frac{3}{2}\right)^t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên (2) nếu có nghiệm thì có nghiệm duy nhất, ta thử được $t=-1$ thỏa phương trình (2). Vậy ta có $\log_6 x=-1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{6}$.

Vậy, phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất là $x=\frac{1}{6}$.

Ví dụ 3. Giải phương trình

$$\log_{\sqrt{5}}(x^2-2x-3)=2\log_2(x^2-2x-4)(1)$$

Giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x^2-2x-3>0 \\ x^2-2x-4>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<1-\sqrt{5} \\ x>1+\sqrt{5} \end{array}\right.(*)$

Viết lại phương trình (1) dưới dạng

$\log_{\sqrt{5}}(x^2-2x-3)=\log_2(x^2-2x-4)$

$\Leftrightarrow \log_5(x^2-2x-3)=\log_4(x^2-2x-4)\ (2)$

Đặt $t=x^2-2x-4$

(2) được đưa về dạng $\log_5(t+1)=\log_4 t\quad (3)$.

Đặt $y=\log_4 t \Rightarrow t=4^y$, (3) được chuyển thành hệ

$\begin{cases} t=4^y \\ t+1=5^y \end{cases} \Rightarrow 4^y+1=5^y \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^y+\left(\frac{1}{5}\right)^y=5 \Leftrightarrow y=1$ (do hàm số $f=\left(\frac{4}{5}\right)^y+\left(\frac{1}{5}\right)^y$ nghịch biến).

Với $y=1 \Leftrightarrow t=4 \Leftrightarrow x^2-2x-4=4 \Leftrightarrow x^2-2x-8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Cả hai giá trị trên đều thỏa điều kiện (*) nên là nghiệm của phương trình đã cho.

Sau đây ta giải một số hệ phương trình lôgarit.

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 4x^2 - y^2 = 2 \\ \log_2(2x+y) - \log_3(2x-y) = 1 \end{cases}$$

Giải.

Điều kiện: $\begin{cases} 2x+y>0 \\ 2x-y>0 \end{cases}$ (*)

Từ phương trình thứ nhất của hệ phương trình, lấy logarit cơ số 2 hai vế, ta được

$\log_2(4x^2-y^2)=1 \Leftrightarrow \log_2(2x+y)+\log_2(2x-y)=1$

$\Leftrightarrow \log_2(2x+y)=1-\log_2(2x-y)$

Thế vào phương trình thứ hai, ta được

$1-\log_2(2x-y)-\log_3 2.\log_2(2x-y)=1$

$\Leftrightarrow (1+\log_3 2)\log_2(2x-y)=0$

$\Leftrightarrow \log_2(2x-y)=0 \Leftrightarrow 2x-y=1.$

Vậy, ta được hệ phương trình mới

$$\begin{cases} 4x^2 - y^2 = 2 \\ 2x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=2 \\ 2x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3}{4} \\ y=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Cả hai giá trị trên thỏa điều kiện (*) nên hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(\frac{3}{4};\frac{1}{2})$.

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \ln(xy) = \ln^2 x + 1 \\ \ln(xy) = \ln^2 y + 1 \end{cases}$$

Giải. Điều kiện: $x>0; y>0(*)$

Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ v=\ln y \end{cases}$

Hệ phương trình đã cho được biến đổi về dạng

$$\begin{cases} u=v^2-v+1 \\ v=u^2-u+1 \end{cases}$$

Trừ từng vế của hai phương trình ta được

$$u-v=-(u^2-v^2)+(u-v)\Leftrightarrow u^2-v^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=v\\u=-v\end{array}\right.$$

Khi đó hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases}u=v\\u^2-2u+1=0\end{cases}\vee\begin{cases}u=-v\\u^2+1=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}u=1\\v=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\ln x=1\\\ln y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=e\\y=e.\end{cases}$$

Cả hai giá trị trên thỏa điều kiện (*) nên hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(e;e)$.

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\log_3(x-y+3)=1-x+y\\\log_{x^2+2}(4x^2-y-1)=\log_{x^2+2}(2y^2+x-1)\end{cases}$$

Giải.

Điều kiện: $\begin{cases}x-y+3>0\\4x^2-y-1>0\\2y^2+x-1>0\end{cases}$ (*)

Xét phương trình thứ nhất của hệ phương trình với phép đổi biến $t=x-y+3>0$, ta được $\log_3 t=4-t$ (**).

Nhận xét:

Vế trái của (**) là biểu thức của một hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$, cũng trên khoảng đó, vế phải là biểu thức của một hàm số nghịch biến, do đó phương trình (**) có nhiều nhất một nghiệm. Ta thấy ngay $t=3$ là nghiệm của phương trình (**). Khi đó ta có $x-y+3=3\Leftrightarrow x=y.$

Vậy, hệ phương trình được viết lại dưới dạng

$$\begin{cases}x=y\\\log_{x^2+2}(4x^2-y-1)=\log_{x^2+2}(2y^2+x-1)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\x^2-x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}\\\begin{cases}x=1\\y=1.\end{cases}\end{array}\right.$$

So với điều kiện (*) thì hệ phương trình đã cho có một nghiệm là $(1;1)$.

Ví dụ 4. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 4^{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}} = 32 \\ \log_3(x-y) = 1 - \log_3(x+y) \end{cases}$$

Giải. Điều kiện: $\begin{cases} x-y>0 \\ x+y>0\,(*) \\ x,y\neq 0 \end{cases}$

Hệ phương trình đã cho được biến đổi về dạng

$$\begin{cases} 2(\frac{x}{y}+\frac{y}{x})=5 \\ \log_3(x^2-y^2)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(\frac{x}{y}+\frac{y}{x})=5\ (1) \\ x^2-y^2=3\quad (2) \end{cases}$$

Giải (1)

Đặt $t=\frac{x}{y} \Rightarrow \frac{y}{x}=\frac{1}{t}$.

Ta có (1) $\Leftrightarrow 2(t+\frac{1}{t})=5 \Leftrightarrow 2t^2-5t+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=\frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=2y \\ y=2x \end{array}\right.$

Với $x=2y,(2) \Leftrightarrow 4y^2-y^2=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \Rightarrow x=2 \\ y=-1 \Rightarrow x=-2 \end{array}\right.$

Ta nhận $x=2; y=1$.

Với $y=2x,(2) \Leftrightarrow x^2-4x^2=3 \Leftrightarrow x^2=-1$. Vô nghiệm.

Vậy, hệ phương trình đã cho có một nghiệm $(2;1)$.

3. Một số phương pháp giải bất phương trình logarit

3.1. Phương pháp mũ hóa

Các dạng cơ bản

· $\log_a f(x) < b \Leftrightarrow \begin{cases} a>1 \\ 0<f(x)<a^b \end{cases} \vee \begin{cases} 0<a<1 \\ f(x)>a^b \end{cases}$

· $\log_a f(x) > b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a>1 \\ f(x)>a^b \end{cases} \\ \begin{cases} 0<a<1 \\ 0<f(x)<a^b \end{cases} \end{array}\right.$

· $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a>1 \\ f(x)>g(x) \\ g(x)>0 \end{cases} \vee \begin{cases} 0<a<1 \\ f(x)<g(x) \\ f(x)>0 \end{cases}$

Ví dụ 1. Giải bất phương trình

$$\log_3\left[\log_{\frac{9}{16}}\left(x^2-4x+3\right)\right] \le 0 \text{ (1)}$$

Giải.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{\frac{9}{16}}\left(x^2-4x+3\right) \le 1 \\ \log_{\frac{9}{16}}\left(x^2-4x+3\right) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+3 \ge \dfrac{9}{16} \\ x^2-4x+3<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16x^2-64x+39 \ge 0 \\ x^2-4x+2<0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{3}{4} \vee x \ge \dfrac{13}{4} \\ 2-\sqrt{2}<x<2+\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-\sqrt{2}<x\le\dfrac{3}{4} \\ \dfrac{13}{4} \le x<2+\sqrt{2} \end{cases}$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình đã cho là $\left[\begin{array}{l} 2-\sqrt{2}<x\le\dfrac{3}{4} \\ \dfrac{13}{4}\le x<2+\sqrt{2}. \end{array}\right.$

Ví dụ 2. Giải bất phương trình

$$\log_{x+1}(-2x) > 2 \text{ (1)}$$

Giải.

Điều kiện: $\begin{cases} -2x>0 \\ x+1>0; x+1\ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1<x<0$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow -2x<(x+1)^2 \Leftrightarrow x^2+4x+1>0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-2-\sqrt{3} \\ x>-2+\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

So với điều kiện (*) thì nghiệm của bất phương trình đã cho là $-2+\sqrt{3}<x<0$.

Ví dụ 3. Giải bất phương trình

$$\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{2x^2-3x+1}+\frac{1}{2}\log_2(x-1)^2 \ge \frac{1}{2} \text{ (1)}$$

Giải.

Điều kiện: $\begin{cases} 2x^2-3x+1>0 \\ x-1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<\dfrac{1}{2} \\ x>1 \end{array}\right.$

$$(1)\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\log_2\left(2x^2-3x+1\right)+\frac{1}{2}\log_2\left(x-1\right)^2\geq\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1+\log_2\left(2x^2-3x+1\right)\leq\log_2\left(x-1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left[2\left(2x^2-3x+1\right)\right]\leq\log_2\left(x-1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 2\left(2x^2-3x+1\right)\leq\left(x-1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2-4x+1\leq 0\Leftrightarrow\frac{1}{3}\leq x\leq 1$$

So với điều kiện (*), ta có nghiệm của bất phương trình đã cho là $\frac{1}{3}\leq x<\frac{1}{2}$.

Ví dụ 4. Giải bất phương trình

$$\log_x\left(5x^2-8x+3\right)>2\,(1)$$

Giải.

Xét $x>1$

$(1)\Leftrightarrow 5x^2-8x+3>x^2\Leftrightarrow 4x^2-8x+3>0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x>\dfrac{3}{2} \\ x<\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Ta nhận $x>\frac{3}{2}$.

· Xét $0<x<1$

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases} 5x^2-8x+3<x^2 \\ 5x^2-8x+3>0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 4x^2-8x+3<0 \\ 5x^2-8x+3>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} \dfrac{1}{2}<x<\dfrac{3}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x>1 \\ x<\dfrac{3}{5} \end{array}\right. \end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{2}<x<\dfrac{3}{5} \\ 1<x<\dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$$

Ta nhận $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{5}$.

Vậy, nghiệm của bất phương trình đã cho là $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{5} \vee x > \frac{3}{2}$.

3.2. Phương pháp đặt ẩn số phụ

Ví dụ 1. Giải bất phương trình

$$\left(\log_x 8 + \log_4 x^2\right)\log_2 \sqrt{2x} \geq 0 \quad (1)$$

Giải.

Điều kiện: $0 < x \neq 1.(*)$

$$(1) \Leftrightarrow \left(3\log_x 2 + \log_2 x\right)\frac{1}{2}(1 + \log_2 x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{\log_2 x} + \log_2 x\right)\left(1 + \log_2 x\right) \geq 0$$

Đặt $t = \log_2 x \ \ (t \neq 0)$, ta có

$$\left(\frac{3}{t} + t\right)(1 + t) \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{t^2 + 3}{t}\right)(t + 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{t+1}{t} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \leq -1 \\ t > 0 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x \leq -1 \\ \log_2 x > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ x > 1. \end{array}\right.$$

So với điều kiện (*) ta được nghiệm của bất phương trình đã cho là $\left[\begin{array}{l} 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ x > 1. \end{array}\right.$

Ví dụ 2. Giải bất phương trình

$$(\log_3^2 x + \frac{1}{\log_{x^3} 3} - \frac{1}{\log_{81} 3})\log_{9x} 3 > 0 \, (1)$$

Giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq \frac{1}{9} \end{cases}$

(1) tương đương với $\dfrac{\log_3^2 x+3\log_3 x-4}{\log_3 x+2}>0$

Đặt $t=\log_3 x,$ bất phương trình trở thành

$$\frac{t^2+3t-4}{t+2}>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-4<t<-2\\ t>1\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}-4<\log_3 x<-2\\ \log_3 x>1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{81}<x<\dfrac{1}{9}\\ x>3.\end{array}\right.$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình đã cho là $\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{81}<x<\dfrac{1}{9}\\ x>3.\end{array}\right.$

Ví dụ 3. Cho bất phương trình

$$\log_2^2 x-2(m+1)\log_2 x+m^2+2m\le 0\ (1)$$

Tìm m để bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x\in[1;2]$.

Giải.

Điều kiện: $x>0.$

Đặt $t=\log_2 x,$ khi đó bất phương trình (1) trở thành

$f(t)=t^2-2(m+1)t+m^2+2m\le 0.\ (2)$

Với $x\in[1;2],$ ta có biến đổi

$1\le x\le 2\Leftrightarrow \log_2 1\le \log_2 x\le \log_2 2\Leftrightarrow 0\le t\le 1.$

Vậy (1) nghiệm đúng với $\forall x\in[1;2]$ khi và chỉ khi (2) nghiệm đúng với $\forall t\in[0;1]$

$\Leftrightarrow f(t)=0$ có hai nghiệm t_1,t_2 thỏa mãn $t_1\le 1<2\le t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} af(0)\le 0\\ af(1)\le 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2+2m\le 0\\ m^2-1\le 0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow -1\le m\le 1.$

Ví dụ 4. Cho bất phương trình

$$\sqrt{\log_2 x^3-m}\ge \log_2 x\ (1)$$

a) Giải bất phương trình khi $m=2;$

b) Tìm m để tập hợp nghiệm của bất phương trình là đoạn $[2;8]$.

Giải.

a) Đặt $t=\log_2 x,$ khi đó bất phương trình (1) trở thành $\sqrt{3t-m}\ge t(2).$ Ta có

$$\sqrt{3t-m}\ge t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}t\le 0\\ 3t-m\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}t>0\\ 3t-m\ge t^2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}t\le 0\\ t\ge \dfrac{m}{3}\end{cases}\\ \begin{cases}t>0\\ f(t)=t^2-3t+m\le 0\end{cases}\end{array}\right.$$

Với $m=2,$ ta có

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}t\le 0\\ t\ge \dfrac{2}{3}\end{cases}\\ \begin{cases}t>0\\ t^2-3t+2\le 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases}t>0\\ 1\le t\le 2\end{cases} \Leftrightarrow 1\le \log_2 x\le 2 \Leftrightarrow 2\le x\le 4.$$

Vậy, khi $m=2,$ bất phương trình (1) có nghiệm là $2\le x\le 4.$

b) Với $2\le x\le 8 \Leftrightarrow \log_2 2\le \log_2 x\le \log_2 8 \Leftrightarrow 1\le t\le 3.$

Tập hợp nghiệm của bất phương trình (1) là đoạn $[2;8]$ khi và chỉ khi tập hợp nghiệm của bất phương trình (2) là đoạn $[1;3].$

$\Leftrightarrow f(t)=t^2-3t+m$ có hai nghiệm phân biệt $t_1=1;t_2=3.$

$\Leftrightarrow \begin{cases}f(1)=0\\ f(3)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m=2\\ m=0\end{cases}$ (vô nghiệm)

Vậy, không tồn tại m thỏa đề bài.

Ví dụ 5. Cho bất phương trình

$$\frac{\log_2^2 x}{\sqrt{\log_2^2 x-1}}\ge m \quad (1)$$

Tìm m để bất phương trình (1) nghiệm đúng với $\forall x>0.$

Giải.

Đặt $t=\log_2^2 x,$ điều kiện: $t>1.$

Khi đó (1) trở thành $\dfrac{t}{\sqrt{t-1}}\ge m.$ (2). Đặt $y=f(t)=\dfrac{t}{\sqrt{t-1}},$ ta có

(1) nghiệm đúng với $\forall x>0$ khi và chỉ khi (2) nghiệm đúng với $\forall t>1$

$\Leftrightarrow \underset{t\in(1;+\infty)}{Min} f(t)\ge m.$

$f'(t)=\dfrac{t-2}{\sqrt{(t-1)^3}},$ $f'(t)=0\Leftrightarrow t=2\in(1;+\infty).$ Ta nhận thấy được $\underset{t\in(1;+\infty)}{Min} f(t)=f(2)=1.$

Vậy, giá trị m cần tìm là $m\le 1.$

3.3. Phương pháp sử dụng tính chất đơn điệu của hàm số

Ví dụ 1. Giải bất phương trình

$$x+\log_2 x>1 \quad (1)$$

Giải.

Điều kiện: $x>0.$

Hàm số $y=f(x)=x+\log_2 x$ đồng biến trên $D=(0;+\infty).$

Ta có $f(1)=1,$ do đó

+ Nếu $x>1,$ thì $f(x)>f(1)\Leftrightarrow x+\log_2 x>1\Rightarrow x>1$ là nghiệm của (1).

+ Nếu $0<x\le 1,$ thì $f(x)\le f(1)\Leftrightarrow x+\log_2 x\le 1\Rightarrow 0<x\le 1$ không phải là nghiệm của bất phương trình đã cho.

Vậy, nghiệm của bất phương trình đã cho là $x>1.$

Ví dụ 2. Giải bất phương trình

$$\log_3\frac{\sqrt{x^2-x-12}}{7-x}+x\le 7-\sqrt{x^2-x-12} \quad (1)$$

Giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x^2-x-12\ge 0 \\ \dfrac{\sqrt{x^2-x-12}}{7-x}>0 \end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4<x<7 \\ x<-3 \end{array}\right. \quad (*)$

Viết lại bất phương trình dưới dạng

$\log_3\sqrt{x^2-x-12}+\sqrt{x^2-x-12}\le \log_3(7-x)+7-x. \ (2)$

Xét hàm số $f(x)=\log_3 x+x,$ hàm số này đồng biến trên từng khoảng xác định của bất phương trình (1). Khi đó (2) tương đương với

$\sqrt{x^2-x-12}\le 7-x$

$\Leftrightarrow x^2-x-12\le (7-x)^2$

$\Leftrightarrow x^2-x-12\le 49-14x+x^2$

$\Leftrightarrow 13x\le 61$

$\Leftrightarrow x\le \dfrac{61}{13}.$

Kết hợp với điều kiện (*) ta được nghiệm của bất phương trình đã cho là

$$\left[\begin{array}{l} 4<x<\dfrac{61}{13} \\ x<-3. \end{array}\right.$$

Ví dụ 3. Giải bất phương trình

$$x^2+(\log_2 x-2)x+\log_2 x-3>0 \quad (1)$$

Giải. Điều kiện: $x > 0$.

Vế trái của (1) nếu xem là tam thức bậc hai đối với biến x thì (1) được viết lại là

$$(x+1)(x+\log_2 x-3) > 0 (2)$$

Do điều kiện $x > 0$, nên (2) tương đương với

$x+\log_2 x-3 > 0 \Leftrightarrow x+\log_2 x > 3$

Hàm số $y = f(x) = x+\log_2 x$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ và $f(2) = 3$.

+ Với $x > 2$, thì $f(x) > f(2) = 3 \Rightarrow$ $x > 2$ là nghiệm của bất phương trình (1).

+ Với $0 < x \le 2$, thì $f(x) \le f(2) = 3 \Rightarrow 0 < x \le 2$ không là nghiệm của bất phương trình (1).

Vậy, nghiệm của bất phương trình đã cho là $x > 2$.

BÀI TẬP CHƯƠNG V

Bài 1. Giải các phương trình

1) $4^x - 10.2^{x-1} = 24$;

2) $4.2^{2x} - 6^x = 18.3^{2x}$;

3) $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 162$;

4) $9^{\log_{\frac{1}{3}}(x+1)} = 5^{\log_{\frac{1}{5}}(2x^2+1)}$;

5) $4^{x-\sqrt{x^2-5}} - 12.2^{x-1-\sqrt{x^2-5}} + 8 = 0$;

6) $9^{x^2+x-1} - 10.3^{x^2+x-2} + 1 = 0$;

7) $3.4^x + (3x-10).2^x + 3 - x = 0$;

8) $x^2 + (2^x - 3)x + 2(1-2^x) = 0$;

9) $4.3^{3x} - 3^{x+1} = \sqrt{1-9^x}$;

10) $4^{x^2-3x+2} + 4^{x^2+6x+5} = 4^{2x^2+3x+7} + 1$;

11) $e^{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} = \tan x$.

Bài 2. Giải các bất phương trình

1) $4^x - 2.5^{2x} - 10^x > 0$;

2) $\sqrt{9^x - 3^{x+2}} > 3^x - 9$;

3) $\dfrac{4^x + 2x - 4}{x-1} \le 2$;

4) $\sqrt{15.2^{x+1} + 1} \ge |2^x - 1| + 2^{x+1}$;

5) $2^{(\log_2 x)^2} + x^{\log_2 x} \le 4$;

6) $(\sqrt{10}-3)^{\frac{x+1}{x+3}}-(\sqrt{10}+3)^{\frac{x-3}{x-1}}\geq 0;$

7) $4x^2+x.2^{x^2+1}+3.2^{x^2}>x^2.2^{x^2}+8x+12;$

8) $\sqrt{8+2^{x+1}-4^x}+2^{x+1}>5;$

9) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{|x+2|}{2-|x|}}>9.$

Bài 3. Giải và biện luận phương trình

$$2^{m^2x+6}-2^{4x+3m}=(4-m^2)x+3m-6.$$

Bài 4. Tìm các giá trị của m để phương trình sau có nghiệm

$$4^x+4^{-x}=m(2^x+2^{-x}+1).$$

Bài 5. Giải các hệ phương trình

1) $\begin{cases}4^{x+y}=128\\5^{3x-2y-3}=1;\end{cases}$

2) $\begin{cases}8^{\log_9(x-4y)}=1\\4^{x-2y}-7.2^{x-2y}=8;\end{cases}$

3) $\begin{cases}2^{3x}=5y^2-4y\\\dfrac{4^x+2^{x+1}}{2^x+2}=y;\end{cases}$

4) $\begin{cases}9^{\log_2(xy)}=3+2(xy)^{\log_2 3}\\x^2+y^2=3x+3y+6;\end{cases}$

5) $\begin{cases}(x^2+y)2^{y-x^2}=1\\9(x^2+y)=6^{x^2-y};\end{cases}$

6) $\begin{cases}3^x-3^y=(y-x)(xy+8)\\x^2+y^2=8;\end{cases}$

7) $\begin{cases}3^x+x=3+y\\3^y+y=3+x;\end{cases}$

8) $\begin{cases}2^{2|x|+1}-3.2^{|x|}=y^2-2\\2y^2-3y=2^{2|x|}-2;\end{cases}$

9) $\begin{cases} 4^{\log_3(xy)} = 2 + (xy)^{\log_3 2} \\ x^2 + y^2 - 3x - 3y = 12; \end{cases}$

10) $\begin{cases} 2^{2x} + 4^{2y} = 2 \\ 2^x + 4^y + 2^{x+2y} = 3; \end{cases}$

11) $\begin{cases} 2^{x^2-1} - 2^{y^2-1} = \ln \dfrac{y}{x} \\ \sqrt{y^2+3} + 2\sqrt{y} = 3 + \sqrt{x}. \end{cases}$

Bài 6. Giải các phương trình

1) $\log_3\left(3^x - 8\right) = 2 - x;$

2) $\log_{x-1} 3 = 2;$

3) $\dfrac{\log_2\left(9-2^x\right)}{3-x} = 1;$

4) $\dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x+3) + \dfrac{1}{4}\log_4(x-8)^8 = \log_2(4x);$

5) $\log_2\left(4^x + 15.2^x + 27\right) + 2\log_2\dfrac{1}{4.2^x - 3} = 0;$

6) $\log_7\left(2^x - 1\right) + \log_7\left(2^x - 7\right) = 1;$

7) $2\left(\log_2 x + 1\right)\log_4 x + \log_2\dfrac{1}{4} = 0;$

8) $2\log_3\left(4x-3\right) + \log_{\frac{1}{3}}\left(2x+3\right) = 2;$

9) $\log_3\left(\log_{\frac{1}{2}}^2 x - 3\log_{\frac{1}{2}} x + 5\right) = 2;$

10) $\log_x 2 + 2\log_{2x} 4 = \log_{\sqrt{2x}} 8;$

11) $\log_{\sqrt{2}}\sqrt{x+1} - \log_{\frac{1}{2}}\left(3-x\right) - \log_8\left(x-1\right)^3 = 0;$

12) $\log_3\left(9^x + 9\right) = x + \log_3\left(28 - 2.3^x\right);$

13) $16\log_{27x^3} x - 3\log_{3x} x^2 = 0;$

14) $\sqrt{\log_2 2x^2 + \log_4 16x} = \log_4 x^3;$

15) $\left[\log_2(2^x+1)\right].\log_2(2^{x+1}+2) = 6;$

16) $\log_{2-2x^2}(2-x^2-x^4)=2-\dfrac{1}{\log_{\frac{3}{4}}(2-2x^2)}$;

17) $(x+1)\log_3^2 x+4x\log_3 x-16=0$;

18) $\left(\log_3\dfrac{3}{x}\right).\log_2 x-\log_3\dfrac{x^3}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}+\log_2\sqrt{x}$;

19) $\log_{3-4x^2}(9-16x^4)=2+\dfrac{1}{\log_2(3-4x^2)}$;

20) $\left[\log_2(4^{x+1}+4)\right].\log_2(4^x+1)=\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\sqrt{\dfrac{1}{8}}$;

21) $\left[\log_2(2x^2)\right].\log_2(16x)=\dfrac{9}{2}\log_2^2 x$;

22) $\lg\sqrt{x+1}+3\lg\sqrt{1-x}=\lg\sqrt{1-x^2}$;

23) $x+\lg(1+2^x)=x\lg 5+\lg 6$;

24) $\log_2\dfrac{2^x-1}{|x|}=1+x-2^x$;

25) $\log_3(\sqrt{x^2-3x+2}+2)+\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-x^2+3x-1}=2$;

26) $\log_3(\sqrt{x}+2)=\log_2(\sqrt{x}+1)$;

27) $\dfrac{3}{2^x+\sqrt{1+\log_2 x}}=1$;

28) $\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}(x^2-2x-2)=\log_{2+\sqrt{3}}(x^2-2x-3)$;

29) $\sqrt[3]{2-\lg x}=1-\sqrt{\lg x-1}$;

30) $\sqrt{3+\log_2(x^2-4x+5)}+2\sqrt{5-\log_2(x^2-4x+5)}=6$;

31) $\log_2^2 x+\sqrt{\log_2 x+1}=1$.

Bài 7. Giải các bất phương trình

1) $\log_{\frac{1}{2}} x+2\log_{\frac{1}{4}}(x-1)+\log_2 6\le 0$;

2) $\log_x\left[\log_3(9^x-72)\right]\le 1$;

3) $\log_{2x+3} x^2<1$;

4) $\log_{9x^2}(-x^2+2x+6)\le\dfrac{1}{2}$;

5) $\log_{\frac{1}{2}}(4^x+4) \geq \log_{\frac{1}{2}}(2^{2x+1}-3.2^x)$;

6) $\log_{x-3}\left[2(x^2-10x+24)\right] \geq \log_{x-3}(x^2-9)$;

7) $\dfrac{1}{\log_3(x+1)} < \dfrac{1}{2\log_9\sqrt{x^2+6x+9}}$;

8) $\dfrac{(\log_2 x)^2+3}{\log_2 x+3} > 2$;

9) $\left[\log_2(2^x-1)\right].\log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1}-2) > -2$;

10) $\left[\log_4(18-2^x)\right].\log_2\dfrac{18-2^x}{8} \leq -1$;

11) $\left[\log_4(3^x-1)\right].\log_{\frac{1}{4}}\dfrac{3^x-1}{16} \leq \dfrac{3}{4}$;

12) $\log_{|x|}(\sqrt{9-x^2}-x-1) \geq 1$;

13) $\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}^2 x+4\log_2\sqrt{x}} < \sqrt{2}(4-\log_{16} x^4)$;

14) $\log_x 2x \leq \sqrt{\log_x 2x^3}$;

15) $\dfrac{\lg^2 x-3\lg x+3}{\lg x-1} < 1$;

16) $\dfrac{\log_{\frac{1}{2}}(x+3)^2-\log_{\frac{1}{3}}(x+3)^3}{x+1} > 0$;

17) $\log_5 x+\log_x\dfrac{x}{3} < \dfrac{(2-\log_3 x)\log_5 x}{\log_3 x}$;

18) $\dfrac{x^2-4}{\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1)} < 0$;

19) $\log_x 2x \leq \sqrt{\log_x(2x)^3}$;

20) $\log_2 x+\log_3(x+1) < 2$;

21) $\log_2\sqrt{x+1}+\log_3\sqrt{x+9} > 1$;

Bài 8. Giải các hệ phương trình

1) $\begin{cases}\log_4 x-\log_2 y=0\\ x^2-2y^2=8;\end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{1}{2}y + 4 \\ \log_3(x+2y) + \log_{\frac{1}{3}}(x-2y) = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3^x 2^y = 972 \\ \log_{\sqrt{3}}(x-y) = 2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2^x.8^{-y} = 2\sqrt{2} \\ \log_9 \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}\log_3(9y); \end{cases}$

5) $\begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0 \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2\log_2 x - 3^y = 15 \\ 3^y.\log_2 x = 2\log_2 x + 3^{y+1}; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 x = -2\log_{\frac{1}{2}} 4 \\ \log_4 x + \log_2 y = 5; \end{cases}$

8) $\begin{cases} \log_x(xy) = \log_y x^2 \\ y^{2\log_y x} = 4y + 3; \end{cases}$

9) $\begin{cases} \log_{\frac{1}{4}}(y-x) - \log_4 \dfrac{1}{y} = 1 \\ x^2 + y^2 = 25; \end{cases}$

10) $\begin{cases} \log_2(x^2 + y^2) = 5 \\ 2\log_4 x + \log_2 y = 4; \end{cases}$

11) $\begin{cases} \log_y \sqrt{xy} = \log_x y \\ 2^x + 2^y = 3; \end{cases}$

12) $\begin{cases} \log_x(x^3 + 2x^2 - 3x - 5y) = 3 \\ \log_y(y^3 + 2y^2 - 3y - 5x) = 3; \end{cases}$

13) $\begin{cases} x - 4|y| + 3 = 0 \\ \sqrt{\log_4 x} - \sqrt{\log_2 y} = 0; \end{cases}$

14) $\begin{cases} \log_4 x - \log_x y = \dfrac{7}{6} \\ xy = 16; \end{cases}$

15) $\begin{cases} \log_2 x + 2\log_2 y = 3 \\ x^2 + y^4 = 16; \end{cases}$

16) $\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{2-y} = 1 \\ 3\log_9(9x^2) - \log_3 y^3 = 3; \end{cases}$

17) $\begin{cases} \ln(1+x) - \ln(1+y) = x - y \\ x^2 - 12xy + 20y^2 = 0; \end{cases}$

18) $\begin{cases} x^{\log_8 y} + y^{\log_8 x} = 4 \\ \log_4 x - \log_4 y = 1; \end{cases}$

19) $\begin{cases} \log_2 \sqrt{x+3} = 1 + \log_3 y \\ \log_2 \sqrt{y+3} = 1 + \log_3 x; \end{cases}$

20) $\begin{cases} 3^{\lg x} = 4^{\lg y} \\ (4x)^{\lg 4} = (3y)^{\lg 3}; \end{cases}$

21) $\begin{cases} x + \log_3 y = 3 \\ \left(2y^2 - y + 12\right).3^x = 81y; \end{cases}$

22) $\begin{cases} \log_2\left(x^2 + y^2\right) = 1 + \log_2(xy) \\ 3^{x^2 - xy + y^2} = 81; \end{cases}$

23) $\begin{cases} 4^{\sqrt{x}} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{1-y} \\ 3^{\log_9 x} = \dfrac{y}{3}. \end{cases}$

Bài 9. Cho phương trình

$$\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 1 = 0 \quad (1)$$

1) Giải phương trình khi $m = 2$;

2) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $[1; 3^{\sqrt{3}}]$.

Bài 10. Tìm các giá trị của m để phương trình

$$4(\log_2 \sqrt{x})^2 - \log_{\frac{1}{2}} x + m = 0$$

có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

V.11. Tìm các giá trị của a để phương trình

$$25^{\sqrt{1-t^2}}-(a+2)5^{\sqrt{1-t^2}}+2a+1=0 \text{ có nghiệm.}$$

Bài 12. Tìm các giá trị của a để phương trình

$$2\log_3^2 x-\left|\log_3 x\right|+a=0 \text{ có bốn nghiệm phân biệt.}$$

Bài 13. Chứng minh rằng với mọi giá trị của $a>0$ hệ phương trình sau có một nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} e^x-e^y=\ln(1+x)-\ln(1+y) \\ y-x=a. \end{cases}$$

Bài 14. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 2^{2x}+4^{2y}=m \\ 2^x+4^y+2^{x+2y}=m \end{cases}$$

Tìm các giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm.

Bài 15. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 2^{\sqrt{x}+1}=y-\sqrt{y+1}+m+1 \\ \sqrt{y+1}=2^{2\sqrt{x}+2}-2^{\sqrt{x}+1}+m \end{cases}$$

1) Giải hệ phương trình khi $m=0$;

2) Tìm các giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm;

3) Tìm các giá trị của m để hệ phương trình có một nghiệm duy nhất.

Bài 16. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 2^x-2^y=y-x \\ 2x^2-4mx-y^2=3m \end{cases}$$

1) Giải hệ phương trình khi $m=-1$;

2) Tìm các giá trị của m để hệ phương trình có đúng hai nghiệm.

Bài 17. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 3^x+x=3m+y \\ 3^y+y=3m+x \end{cases}$$

1) Giải hệ phương trình khi $m=1$;

2) Tìm các giá trị của m để hệ phương trình vô nghiệm.

Bài 18. Tìm các giá trị của m để hệ phương trình sau có một nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ \log_2 x + \log_2 y = m. \end{cases}$$

Bài 19. Tìm các giá trị của m để hệ phương trình sau có nghiệm $(x; y); x > 1, y < 4.$

$$\begin{cases} x^2 - y^4 = 0 \\ \log_2 \dfrac{x}{y} = m \log_y x. \end{cases}$$

Bài 20. Tìm các giá trị của m để hệ phương trình sau có đúng bốn nghiệm

$$\begin{cases} 4^x.4^y = 8.2^{xy} \\ 3 + \log_2 x + \log_2 y = \log_2(x^2 + y^2 + m). \end{cases}$$

Bài 21. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x} + 2\lg y = 3m \\ x - 3\lg y^2 = 1 \end{cases}$$

1) Giải hệ phương trình với $m = 1;$

2) Tìm các giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm $(x; y); x \geq 1.$

Bài 22. Tìm các giá trị của m để hệ phương trình sau có một nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} \lg^2 x + \lg^2 y = 1 \\ \lg \dfrac{x}{y} = m. \end{cases}$$

CHƯƠNG VI. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

§1. CÁC CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI LƯỢNG GIÁC

Ta quy ước các biểu thức trong các công thức sau đều có nghĩa.

1. Công thức cộng

1) $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

2) $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

3) $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

4) $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

5) $\tan(a + b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

6) $\tan(a - b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}.$

2. Công thức nhân

2.1. Công thức nhân đôi

1) $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$

2) $\sin 2a = 2\sin a\cos a$

3) $\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$.

2.1.1. Công thức hạ bậc

1) $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos 2a}{2}$

2) $\sin^2 a = \dfrac{1-\cos 2a}{2}$.

2.1.2. Công thức tính theo $\cos 2a$

1) $\cos^2 a = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2a)$

2) $\sin^2 a = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2a)$

3) $\tan^2 a = \dfrac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}$.

2.1.3. Công thức tính theo $\tan\dfrac{a}{2} = t$

1) $\cos a = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

2) $\sin a = \dfrac{2t}{1+t^2}$

3) $\tan a = \dfrac{2t}{1-t^2}$.

2.2. Công thức nhân ba

1) $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$

2) $\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$

3) $\tan 3a = \dfrac{3\tan a - \tan^3 a}{1-3\tan^2 a}$.

3. Công thức biến đổi tích thành tổng

1) $\cos a\cos b = \dfrac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$

2) $\sin a\sin b = -\dfrac{1}{2}[\cos(a+b)-\cos(a-b)]$

3) $\sin a\cos b = \dfrac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$.

4. Công thức biến đổi tổng thành tích

1) $\cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$

2) $\cos a-\cos b=-2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$

3) $\sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$

4) $\sin a-\sin b=2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$.

Một số công thức quen thuộc

1) $\cos a+\sin a=\sqrt{2}\cos(a-\frac{\pi}{4})$

2) $\cos a+\sin a=\sqrt{2}\sin(a+\frac{\pi}{4})$

3) $\cos a-\sin a=\sqrt{2}\cos(a+\frac{\pi}{4})$

4) $\cos a-\sin a=-\sqrt{2}\sin(a-\frac{\pi}{4})$

5) $\cos^4 a+\sin^4 a=1-2\sin^2 a\cos^2 a$

6) $\cos^6 a+\sin^6 a=1-3\sin^2 a\cos^2 a$.

§2. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

1. Phương trình $\sin x=a$ (1)

· Nếu $|a|>1$ thì phương trình (1) vô nghiệm.

· Nếu $|a|\le 1$ thì phương trình (1) có nghiệm.

Gọi α là số đo của góc sao cho $\sin\alpha=a$

Ta có $(1)\Leftrightarrow \sin x=\sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\alpha+k2\pi \\ x=\pi-\alpha+k2\pi \end{array}\right.;k\in\mathbb{Z}$

(nếu α cho bằng radian).

Hay $(1)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\alpha+k.360^0 \\ x=180^0-\alpha+k.360^0 \end{array}\right.;k\in\mathbb{Z}$

(nếu α cho bằng độ).

Các trường hợp đặc biệt

· $\sin x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$

· $\sin x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$

· $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

2. Phương trình $\cos x = a$ (2)

· Nếu $|a| > 1$ thì phương trình (2) vô nghiệm.

· Nếu $|a| \le 1$ thì phương trình (2) có nghiệm.

Gọi α là số đo góc sao cho $\cos\alpha = a$

Ta có $(2) \Leftrightarrow \cos x = \cos\alpha$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{array}\right. ; k \in \mathbb{Z}.$$

(nếu α cho bằng radian).

Hay $(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k.360^0 \\ x = -\alpha + k.360^0 \end{array}\right. ; k \in \mathbb{Z}.$

(nếu α cho bằng độ).

Các trường hợp đặc biệt

· $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

· $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

· $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

3. Phương trình $\tan x = a\,(3)$

(3) xác định với mọi $x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Gọi α là số đo góc sao cho $\tan\alpha = a$, thì

$(3) \Leftrightarrow \tan x = \tan\alpha$

$\Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(nếu α cho bằng radian).

Hay (3) $\Leftrightarrow x = \alpha + k.180^0, k \in \mathbb{Z}.$

(nếu α cho bằng độ).

Chú ý. Nếu phương trình ban đầu dạng $\tan u = \tan v\,(*)$

Thì điều kiện là $u \ne \frac{\pi}{2} + k\pi$, $v \ne \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Khi đó (*) $\Leftrightarrow u = v + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

4. Phương trình $\cot x = a\,(4)$

(4) xác định với mọi $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Gọi α là số đo góc sao cho $\cot\alpha = a$, thì

$(4) \Leftrightarrow \cot x = \cot\alpha$

$\Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(nếu α cho bằng radian).

Hay (4) $\Leftrightarrow x = \alpha + k.180^0, k \in \mathbb{Z}.$

(nếu α cho bằng độ).

Chú ý. Nếu phương trình ban đầu dạng $\cot u = \cot v\,(**)$

thì điều kiện là $u \neq k\pi$, $v \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, khi đó $(**) \Leftrightarrow u = v + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

§3. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC THƯỜNG GẶP

1. Phương trình bậc nhất, bậc hai, bậc cao đối với một hàm số lượng giác

Cách giải.

+ Đối với các phương trình bậc nhất đối với một hàm số lượng giác ta biến đổi ngay về phương trình lượng giác cơ bản.

+ Đối với các phương trình bậc hai, bậc cao đối với một hàm số lượng giác ta đặt ẩn phụ, sau đó giải phương trình theo ẩn phụ.

Chú ý. Nếu đặt $t = \cos x$ hay $t = \sin x$ thì điều kiện $|t| \leq 1$.

Ví dụ 1. Giải phương trình

$$5\sin x - 2 = 3(1 - \sin x)\tan^2 x \quad (1)$$

Giải.

Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\ (*)$

$(1) \Leftrightarrow 5\sin x - 2 = 3(1 - \sin x)\dfrac{\sin^2 x}{\cos x^2}$

$\Leftrightarrow 5\sin x - 2 = 3(1 - \sin x)\dfrac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x}$

$\Leftrightarrow 5\sin x - 2 = \dfrac{3\sin^2 x}{1 + \sin x}$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{1}{2} \\ \sin x = -2. \end{array}\right.$

Ta nhận $\sin x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$, (thỏa điều kiện (*))

Ví dụ 2. Giải phương trình

$$\sin 3x + 2\cos 2x - 2 = 0. \ (1)$$

Giải.

$(1) \Leftrightarrow 3\sin x - 4\sin^3 x + 2\left(1 - 2\sin^2 x\right) - 2 = 0$

$\Leftrightarrow 4\sin^3 x + 4\sin^2 x - 3\sin x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = \dfrac{-3}{2} \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. ;k \in \mathbb{Z}.$$

2. Phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ **và** $\cos x$

Phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$ là phương trình có dạng

$$a\sin x + b\cos x = c \ (1), a, b, c \in \mathbb{R}$$

Cách giải.

Cách 1. Chia hai vế của (1) cho $\sqrt{a^2 + b^2}$, ta được

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \ (2)$$

Đặt $\cos\beta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin\beta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Khi đó (2) trở thành $\cos\beta\sin x + \sin\beta\cos x = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Hay $\sin\left(x+\beta\right) = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \ (3)$

(3) có nghiệm $\Leftrightarrow \left|\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \le 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \ge c^2$

Phương trình (3) đã biết cách giải trong §1.

Cách 2. Chia hai vế của (1) cho a rồi đặt $\dfrac{b}{a} = \tan\alpha$

Ta được $\sin x + \tan\alpha\cos x = \dfrac{c}{a}$

$\Leftrightarrow \sin x\cos\alpha + \sin\alpha\cos x = \dfrac{c}{a}\cos\alpha$

$\Leftrightarrow \sin\left(x+\alpha\right) = \dfrac{c}{a}\cos\alpha \ (*)$

Đây là phương trình đã xét trong §1.

Chú ý rằng (*) có nghiệm khi và chỉ khi $\left|\frac{c}{a}\cos\alpha\right| \le 1$.

Ví dụ. Giải phương trình

$$3\sin 3x - \sqrt{3}\cos 9x = 1 + 4\sin^3 3x \ (1)$$

Giải.

Ta có (1) $\Leftrightarrow (3\sin 3x - 4\sin^3 3x) - \sqrt{3}\cos 9x = 1$

$\Leftrightarrow \sin 9x - \sqrt{3}\cos 9x = 1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 9x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 9x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \sin(9x - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 9x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 9x - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{9}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{7\pi}{54} + \frac{k2\pi}{9}, k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

3. Phương trình thuần nhất bậc hai đối với $\sin x$ **và** $\cos x$

Đó là phương trình dạng

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0\ (2), a, b, c \in \mathbb{R}$$

Cách giải.

· Xét $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ xem có phải là một nghiệm của phương trình không.

· Xét $x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi$, khi đó $\cos^2 x \ne 0$, chia 2 vế phương trình cho $\cos^2 x$ ta được

$$a\tan^2 x + b\tan x + c = 0.$$

Đây là phương trình bậc hai đối với $\tan x$ ta đã biết cách giải.

Chú ý.

· Nếu phương trình với vế phải khác 0

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d$$

Ta viết phương trình dạng

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)$$

rồi chuyển vế phải sang vế trái.

· Cũng có thể giải phương trình (2) bằng cách biến đổi về phương trình bậc nhất đối với $\sin 2x$ và $\cos 2x$, nhờ các công thức

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

· Đối với phương trình thuần nhất bậc ba đối với $\sin x$ và $\cos x$

$$a\cos^3 x + b\cos^2 x\sin x + c\sin^2 x\cos x + d\sin^3 x = 0$$

Ta cũng biến đổi đưa về phương trình bậc ba đối với $\tan x$.

Ví dụ 1. Giải phương trình

$$\cos^2 x - \sqrt{3}\sin 2x = 1 + \sin^2 x \;(1)$$

Giải.

Vì $\cos x = 0$ không là nghiệm nên chia hai vế của (1) cho $\cos^2 x \neq 0,$ ta được

$$1 - 2\sqrt{3}\tan x = \left(1+\tan^2 x\right) + \tan^2 x$$

$$\Leftrightarrow 2\tan^2 x + 2\sqrt{3}\tan x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = 0\\ \tan x = -\sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi\\ x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 2. Giải phương trình

$$\cos^3 x - 4\sin^3 x - 3\cos x\sin^2 x + \sin x = 0 \;(1)$$

Giải.

Vì $\cos x = 0$ không thỏa phương trình nên chia hai vế của (1) cho $\cos^3 x \neq 0$ ta được

$$1 - 4\tan^3 x - 3\tan^2 x + \tan x\left(1+\tan^2 x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\tan^3 x + 3\tan^2 x - \tan x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\tan x + 1\right)\left(3\tan^2 x - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = -1\\ \tan x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi\\ x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi\end{array}\right.; k \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 3. Giải phương trình $\sin^3\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin x$ (1)

Giải.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sin x - \cos x)^3 = \sqrt{2}\sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin^3 x - 3\sin^2 x.\cos x + 3\sin x.\cos^2 x - \cos^3 x = 4\sin x \ \ (2)$$

Vì $\cos x = 0$ không là nghiệm nên chia hai vế của (2) cho $\cos^3 x \neq 0$, ta được

$$(2) \Leftrightarrow \tan^3 x - 3\tan^2 x + 3\tan x - 1 = 4\left(\tan^2 x + 1\right)\tan x.$$

$$\Leftrightarrow 3\tan^3 x + 3\tan^2 x + \tan x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Ví du 4. Giải phương trình

$$3\cos^4 x - 4\sin^2 x\cos^2 x + \sin^4 x = 0 \ \ (1)$$

Giải. Đây là phương trình thuần nhất bậc bốn đối với $\sin x$ và $\cos x$

Do $\cos = 0$ không là nghiệm nên chia hai vế của (1) cho $\cos^4 x \neq 0$

Ta được

$$3 - 4\tan^2 x + \tan^4 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan^2 x = 1 \\ \tan^2 x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

4. Phương trình đối xứng đối với $\sin x$ và $\cos x$

Phương trình đối xứng đối với $\sin x$ và $\cos x$ là phương trình dạng

$$a(\sin x + \cos x) + b\sin x\cos x + c = 0\ (3), a, b, c \in \mathbb{R}$$

Cách giải. Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, điều kiện $|t| \leq \sqrt{2}$.

Khi đó $t^2 = 1 + 2\sin x\cos x$

Suy ra $\sin x\cos x = \dfrac{t^2 - 1}{2}$.

Thay vào phương trình (3) ta được

$$at + \frac{b\left(t^2 - 1\right)}{2} + c = 0 \text{ hay } bt^2 + 2at + (2c - b) = 0. \ (*)$$

Giải phương trình (*) tìm t và chọn nghiệm thỏa $|t| \leq \sqrt{2}$.

Chú ý. Phương pháp giải đã trình bày ở trên cũng có thể áp dụng cho phương trình

$$a(\sin x - \cos x) - b\sin x\cos x + c = 0$$

bằng cách đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$.

Khi đó $\sin x\cos x = \frac{1-t^2}{2}$.

Ví dụ 1. Giải phương trình

$$2(\sin x + \cos x) + 6\sin x\cos x - 2 = 0 \quad (1)$$

Giải.

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$.

$$(1) \Leftrightarrow 2t + 6\frac{(t^2-1)}{2} - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3t^2 + 2t - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \frac{-5}{3}. \end{array}\right.$$

Ta chọn $t = 1 \Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right., \ k \in \mathbb{Z}$$

Ví dụ 2. Giải phương trình

$$\sin 2x + 2\sqrt{2}(\sin x - \cos x) - 3 = 0 \, (1)$$

Giải.

Đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$.

(1) trở thành $1 - t^2 + 2\sqrt{2}t - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow t^2 - 2\sqrt{2}t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

§4. CÁC PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC KHÁC

Có nhiều phương trình lượng giác mà để giải chúng, ta cần sử dụng các phép biến đổi lượng giác để đưa về các phương trình đã xét trong §1 và §2.

Sau đây ta xét một số ví dụ.

1. Sử dụng công thức hạ bậc, góc nhân đôi, góc nhân ba

Ví dụ 1. Giải phương trình

$$\sin 2x-2\cos x+2\sin x-2=0\,(1)$$

Giải.

(1) $\Leftrightarrow \sin x\cos x-\cos x+\sin x-1=0$

· Xét $x=\pi+k2\pi$ là nghiệm của phương trình.

· Xét $x\neq\pi+k2\pi\Leftrightarrow\frac{x}{2}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,$ đặt $\tan\frac{x}{2}=t$

Phương trình (1) trở thành $\frac{2t}{1+t^2}.\frac{1-t^2}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}-1=0$

$\Leftrightarrow t^2-2t+1=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow\tan\frac{x}{2}=1\Leftrightarrow\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi.$

Vậy, phương trình đã cho có nghiệm là

$x=\pi+k2\pi;\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$

Chú ý. Khi đặt ẩn phụ $\tan\frac{x}{2}=t,$ nếu không xét $x=\pi+k2\pi$ thì có thể bị sót nghiệm.

Ví dụ 2. Giải các phương trình sau

a) $\cos^2 3x\cos 2x-\cos^2 x=0\,(1)$

b) $\cos^4 x+\sin^4 x+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{3}{2}=0\,(2)$

Giải.

a) $(1)\Leftrightarrow\frac{1+\cos 6x}{2}\cos 2x-\frac{1+\cos 2x}{2}=0$

$\Leftrightarrow\cos 6x\cos 2x-1=0$

$\Leftrightarrow\left(4\cos^3 2x-3\cos 2x\right)\cos 2x-1=0$

$\Leftrightarrow 4\cos^4 2x-3\cos^2 2x-1=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos^2 2x=1\\ \cos^2 2x=-\frac{1}{4}\end{array}\right.\Leftrightarrow\cos^2 2x=1\Leftrightarrow\sin 2x=0\Leftrightarrow 2x=k\pi\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2};k\in\mathbb{Z}.$$

b) $(2) \Leftrightarrow \left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-2\sin^2 x\cos^2 x+\frac{1}{2}\left[\sin\left(4x-\frac{\pi}{2}\right)+\sin 2x\right]-\frac{3}{2}=0$

$\Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x+\frac{1}{2}(\sin 2x-\cos 4x)-\frac{3}{2}=0$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\sin^2 2x-\frac{1}{2}\left(1-2\sin^2 2x\right)+\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}=0$

$\Leftrightarrow \sin^2 2x+\sin 2x-2=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x=1\\ \sin 2x=-2\end{array}\right. \Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi; k\in\mathbb{Z}.$

Ví dụ 3. Giải các phương trình sau

a) $4\cos^3 x+3\sqrt{2}\sin 2x=8\cos x(1)$

b) $\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+4\sin x=2+\sqrt{2}(1-\sin x)(2)$

Giải.

a) $(1) \Leftrightarrow 4\cos^3 x+6\sqrt{2}\sin x\cos x-8\cos x=0$

$\Leftrightarrow \cos x\left(2\cos^2 x+3\sqrt{2}\sin x-4\right)=0$

$\Leftrightarrow \cos x\left[2\left(1-\sin^2 x\right)+3\sqrt{2}\sin x-4\right]=0$

$\Leftrightarrow \cos x\left(-2\sin^2 x+3\sqrt{2}\sin x-2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin x=\sqrt{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{4}+k2\pi; \quad k\in\mathbb{Z}.\\ x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.$

b) $\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+4\sin x=2+\sqrt{2}(1-\sin x)(2)$

$(2) \Leftrightarrow 2\cos 2x\cos\frac{\pi}{4}+4\sin x=2+\sqrt{2}(1-\sin x)$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\sin^2 x-\left(4+\sqrt{2}\right)\sin x+2=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=\sqrt{2}\\ \sin x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right. ;k\in\mathbb{Z}.$$

Ví dụ 4. Giải phương trình

$$\cos\frac{4x}{3}=\cos^2 x.(1)$$

Giải.

$$(1)\Leftrightarrow \cos\frac{4x}{3}=\frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 2t=1+\cos 3t;(t=\frac{2x}{3})$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 t-4\cos^2 t-3\cos t+3=0$$

$$\Leftrightarrow (\cos t-1)\left(4\cos^2 t-3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos t-1=0\\ \cos^2 t=\dfrac{1+\cos 2t}{2}=\dfrac{3}{4}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos t=1\\ \cos 2t=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3k\pi\\ x=\pm\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{3k\pi}{2}\end{array}\right. ;k\in\mathbb{Z}.$$

Ví dụ 5. Giải phương trình

$$2\cos^2\frac{3x}{5}+1=3\cos\frac{4x}{5}\ (1)$$

Giải.

$$(1)\Leftrightarrow 1+\cos\frac{6x}{5}+1=3\cos\frac{4x}{5}\Leftrightarrow 2+\cos 3t=3\cos 2t;(t=\frac{2x}{5})$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 t-6\cos^2 t-3\cos t+5=0\Leftrightarrow (\cos t-1)\left(4\cos^2 t-2\cos t-5\right)=0$$

$$a)\cos t-1=0\Leftrightarrow t=\frac{2x}{5}=2k\pi\Leftrightarrow x=5k\pi, k\in\mathbb{Z}.$$

$b)\ 4\cos^2 t-2\cos t-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos t=\dfrac{1-\sqrt{21}}{4}\\ \cos t=\dfrac{1+\sqrt{21}}{4}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \cos t=\dfrac{1-\sqrt{21}}{4} \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{5}{2}\arccos\dfrac{1-\sqrt{21}}{4}+5k\pi, k\in\mathbb{Z}.$

Ví dụ 6. Giải phương trình

$$\sin^4 x+\cos^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{4}.\ (1)$$

Giải.

$$(1)\Leftrightarrow\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left[\frac{1+\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)}{2}\right]^2=\frac{1}{4}$$

$\Leftrightarrow(1-\cos 2x)^2+(1-\sin 2x)^2=1$

$\Leftrightarrow \sin 2x+\cos 2x=1$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)=1$

$\Leftrightarrow x=k\pi\vee x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}.$

Ví dụ 7. Giải phương trình

$$\cos^3 x\cos 3x+\sin^3 x\sin 3x=\frac{\sqrt{2}}{4}\ (1).$$

Giải. Vế trái của (1) bằng

$\dfrac{\cos 3x+3\cos x}{4}\cos 3x+\dfrac{-\sin 3x+3\sin x}{4}\sin 3x$

$=\dfrac{1}{4}\left(\cos^2 3x-\sin^2 3x\right)+\dfrac{3}{4}\left(\cos x\cos 3x+\sin x\sin 3x\right)$

$=\dfrac{1}{4}\cos 6x+\dfrac{3}{4}\cos 2x$

$=\dfrac{1}{4}\left(4\cos^3 2x-3\cos 2x\right)+\dfrac{3}{4}\cos 2x=\cos^3 2x.$

$(1)\Leftrightarrow\cos^3 2x=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\Leftrightarrow\cos 2x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{8}+k\pi, k\in\mathbb{Z}.$

Ví dụ 8. Giải phương trình

$$2\cos^3 x + \cos 2x + \sin x = 0 \ (1)$$

Giải.

(1) $\Leftrightarrow 2\cos^3 x + \cos^2 x - \sin^2 x + \sin x = 0$

$\Leftrightarrow \cos^2 x(2\cos x + 1) + \sin x(1 - \sin x) = 0$

$\Leftrightarrow (1 - \sin x)\left[(1 + \sin x)(2\cos x + 1) + \sin x\right] = 0$

$\Leftrightarrow (1 - \sin x)\left[(\sin x + \cos x)^2 + 2(\sin x + \cos x)\right] = 0$

$\Leftrightarrow (1 - \sin x)(\sin x + \cos x)(\sin x + \cos x + 2) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 - \sin x = 0 \\ \sin x + \cos x = 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ tgx = -1 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. ; k \in \mathbb{Z}.$

Ví dụ 9. Giải phương trình

$$\cos^4 x - \cos 2x + 2\sin^6 x = 0 \ (1)$$

Giải.

(1) $\Leftrightarrow \cos^4 x - 1 + 2\sin^2 x + 2\sin^6 x = 0$

$\Leftrightarrow (\cos^2 x - 1)(\cos^2 x + 1) + 2\sin^2 x(1 + \sin^4 x) = 0$

$\Leftrightarrow \sin^2 x\left[2(1 + \sin^4 x) - (\cos^2 x + 1)\right] = 0$

$\Leftrightarrow \sin^2 x(2\sin^4 x + \sin^2 x) = 0$

$\Leftrightarrow \sin^4 x(2\sin^2 x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \sin^4 x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi; k \in \mathbb{Z}.$

Ví dụ 10. Giải phương trình

$$4\cos x - 2\cos 2x - \cos 4x = 1 \ (1)$$

Giải.

(1) $\Leftrightarrow 4\cos x - 2\cos 2x - (\cos 4x + 1) = 0 \Leftrightarrow 4\cos x - 2\cos 2x - 2\cos^2 2x = 0$

$\Leftrightarrow 4\cos x - 2\cos 2x(1+\cos 2x) = 0 \Leftrightarrow 4\cos x - 4\cos 2x\cos^2 x = 0$

$\Leftrightarrow \cos x(1 - \cos 2x\cos x) = 0 \Leftrightarrow \cos x(2 - \cos x - \cos 3x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = 2k\pi \end{array}\right. ; k \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 11. Giải phương trình

$$\cos 2x - \cos 6x + 4(3\sin x - 4\sin^3 x + 1) = 0 \ \ (1)$$

Giải. Phương trình (1) tương đương với

$(1+\cos 2x) + (1-\cos 6x) + 4\sin 3x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x + 2\sin^2 3x + 4\sin 3x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x + 2(\sin 3x + 1)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin 3x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \pm 1 \\ 3\sin x - 4\sin^3 x = -1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}.$

2. Dạng phân thức

Chú ý. Khi giải các phương trình có chứa ẩn dưới mẫu, ta phải đặt điều kiện cho mẫu khác không.

Ví dụ 1. Giải phương trình

$$3\cos x + 4\sin x + \frac{6}{3\cos x + 4\sin x + 1} = 6 \ (1)$$

Giải. Đặt $t = 3\cos x + 4\sin x \Rightarrow$ phương trình (1) trở thành $t + \dfrac{6}{t+1} = 6.$ (2)

Điều kiện: $t + 1 \neq 0 \Leftrightarrow t \neq -1.$

(2) $\Leftrightarrow t(t+1) + 6 = 6(t+1) \Leftrightarrow t(t-5) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 5 \ \ (t \neq -1).$

$t = 3\cos x + 4\sin x = 5\left(\dfrac{3}{5}\cos x + \dfrac{4}{5}\sin x\right) = 5\cos\left(x - \arccos\dfrac{3}{5}\right)$

a) $t = 0 \Leftrightarrow \cos\left(x - \arccos\dfrac{3}{5}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \arccos\dfrac{3}{5} + \dfrac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}.$

b) $t = 5 \Leftrightarrow \cos\left(x - \arccos\dfrac{3}{5}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \arccos\dfrac{3}{5} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}.$

Ví dụ 2. Giải phương trình

$$\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin 2x}=\frac{2}{\sin 4x}.\ (1)$$

Giải.

Điều kiện: $\sin 4x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{k\pi}{4},k\in\mathbb{Z}$ (*).

$(1)\Leftrightarrow 4\sin x\cos 2x+2\cos 2x=2\Leftrightarrow 4\sin x\cos 2x+2\left(1-2\sin^2 x\right)=2$

$\Leftrightarrow 4\sin x\left(\cos 2x-\sin x\right)=0\Leftrightarrow \sin x\left(2\sin^2 x+\sin x-1\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin x=-1.\\ \sin x=\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

So với điều kiện (*) ta chọn $\sin x=\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+2k\pi\\ x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi\end{array}\right.;k\in\mathbb{Z}.$$

Ví dụ 3. Giải phương trình

$$6\sin x-2\cos^3 x=\frac{5\sin 4x\cos x}{2\cos 2x}.\ (1)$$

Giải.

Điều kiện: $\cos 2x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}.$

$(1)\Leftrightarrow 6\sin x-2\cos^3 x=5\sin 2x\cos x$

$\Leftrightarrow 6\sin x-2\cos^3 x=10\sin x\cos^2 x\ \ (*).$

Vì $\cos x=0$ không là nghiệm nên chia hai vế của phương trình (*) cho $2\cos^3 x$ ta nhận được $3\tan x\left(1+\tan^2 x\right)-1=5\tan x$

$\Leftrightarrow 3\tan^3 x-2\tan x-1=0\Leftrightarrow\left(\tan x-1\right)\left(3\tan^2 x+3\tan x+1\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left(\tan x-1\right)\left[\left(\sqrt{3}\tan x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]=0\Leftrightarrow \tan x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi;k\in\mathbb{Z}.$$

So với điều kiện của phương trình thì $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ không thỏa. Vậy, phương trình đã cho vô nghiệm.

3. Dạng chứa $\tan x$ **và** $\cot x$

Chú ý. Đối với các phương trình chứa $\tan x$ và $\cot x$, ta phải đặt điều kiện cho $\tan x$ và $\cot x$ xác định.

Ví dụ 1. Giải phương trình

$$\cot x-\tan x=\sin x+\cos x \ (1)$$

Giải.

Điều kiện: $\sin x\neq 0\wedge\cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}.$ (*)

$(1)\Leftrightarrow\cos^2 x-\sin^2 x=\left(\cos x+\sin x\right)\cos x\sin x$

$\Leftrightarrow\left(\sin x+\cos x\right)\left(\sin x-\cos x+\sin x\cos x\right)=0$

$a)$ $\sin x+\cos x=0\Leftrightarrow\tan x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi;k\in\mathbb{Z}.$

$x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$ thỏa điều kiện (*).

$b)$ $\sin x-\cos x+\sin x\cos x=0$. Đặt

$t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]\Rightarrow\frac{1-t^2}{2}=\sin x\cos x.$

$pt\Leftrightarrow t+\frac{1-t^2}{2}=0\Leftrightarrow t^2-2t-1=0\Leftrightarrow t=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1-\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+\arcsin\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+k2\pi\\ x=\frac{5\pi}{4}-\arcsin\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+k2\pi\end{array}\right.;k\in\mathbb{Z}.$$

(Thỏa điều kiện (*)).

Ví dụ 2. Giải phương trình

$$\cot 2x+\cot 3x+\frac{1}{\sin x\sin 2x\sin 3x}=0.$$

Giải.

Điều kiện: $\sin x.\sin 2x.\sin 3x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{k\pi}{2}\wedge x\neq\frac{k\pi}{3},k\in\mathbb{Z}.$

$pt \Leftrightarrow 0 = \dfrac{\sin 5x}{\sin 2x \sin 3x} + \dfrac{1}{\sin x \sin 2x \sin 3x} = 0 \Leftrightarrow \sin x \sin 5x = -1,$ suy ra

$1 = |\sin 5x \sin x| = |\sin 5x||\sin x| \le 1.1 = 1 \Rightarrow \begin{cases} |\sin x| = 1 \\ |\sin 5x| = 1 \end{cases} \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0$ (loại vì điều kiện). Vậy phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 3. Giải phương trình

$$6\tan x + 5\cot 3x = \tan 2x.$$

Giải.

Điều kiện: $\cos x \ne 0 \wedge \cos 2x \ne 0 \wedge \sin 3x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi \wedge x \ne \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \wedge x \ne \dfrac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$

$pt \Leftrightarrow 5(\tan x + \cot 3x) = \tan 2x - \tan x \Leftrightarrow \dfrac{5\cos 2x}{\cos x \sin 3x} = \dfrac{\sin x}{\cos x \cos 2x}$

$\Leftrightarrow 5\cos^2 2x = \sin x \sin 3x = \dfrac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x) \Leftrightarrow 12\cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x = \dfrac{1}{3} \vee \cos 2x = -\dfrac{1}{4}$ (thỏa mãn điều kiện).

$\Leftrightarrow x = \pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{1}{3} + k\pi \vee x = \pm\dfrac{1}{2}\arccos\left(-\dfrac{1}{4}\right) + k\pi; k \in \mathbb{Z}.$

Ví dụ 4. Giải phương trình

$$2(\tan x - \sin x) + 3(\cot x - \cos x) + 5 = 0.$$

Giải.

Điều kiện: $\sin x \ne 0 \wedge \cos x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

$pt \Leftrightarrow 2\left(\dfrac{\sin x}{\cos x} - \sin x + 1\right) + 3\left(\dfrac{\cos x}{\sin x} - \cos x + 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow 0 = \dfrac{2}{\cos x}(\sin x + \cos x - \sin x \cos x) + \dfrac{3}{\sin x}(\sin x + \cos x - \sin x \cos x)$

$\Leftrightarrow 0 = \left(\dfrac{2}{\cos x} + \dfrac{3}{\sin x}\right)(\sin x + \cos x - \sin x \cos x)$

(a) $\dfrac{2}{\cos x} + \dfrac{3}{\sin x} = 0 \Leftrightarrow \tan x = -\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x = \arctan\left(-\dfrac{3}{2}\right) + k\pi; k \in \mathbb{Z}.$ Thỏa điều kiện.

(b) $\sin x + \cos x - \sin x \cos x = 0.$

Đặt $t = \sin x + \cos x \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right] \Rightarrow \dfrac{t^2 - 1}{2} = \sin x \cos x.$

$pt \Leftrightarrow t^2-2t-1=0 \Rightarrow t=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1-\sqrt{2} \Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow x=\pm\arccos\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

Ví dụ 5. Giải phương trình

$$\tan^2 x=\frac{1+\cos x}{1-\sin x}\ (1)$$

Giải. Điều kiện: $\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \sin x\neq 1.\end{cases} \Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}.(*)$

$(1) \Leftrightarrow 0=\frac{1+\cos x}{1-\sin x}\left(1-\frac{1-\cos x}{1+\sin x}\right)=\frac{(1+\cos x)(\sin x+\cos x)}{\cos^2 x}$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=-1\\ \sin x+\cos x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=-1\\ \tan x=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pi+2k\pi\\ x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.;k\in\mathbb{Z}.$

$x=\pi+k2\pi\vee x=-\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ thỏa điều kiện (*) nên là nghiệm của phương trình đã cho.

Ví dụ 6. Giải phương trình

$$\tan^2 x=\frac{1-\cos^3 x}{1-\sin^3 x}\ (1)$$

Giải. Điều kiện: $\begin{cases}\cos x\neq 0\\ 1-\sin^3 x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}.(*)$

$(1) \Leftrightarrow \frac{1-\cos^2 x}{1-\sin^2 x}=\frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{(1-\sin x)(1+\sin x+\sin^2 x)}$

$\Leftrightarrow \frac{(1-\cos x)}{(1-\sin x)}.\left(\frac{1+\cos x+\cos^2 x}{1+\sin x+\sin^2 x}-\frac{1+\cos x}{1+\sin x}\right)=0$

$\Leftrightarrow (1-\cos x)(\cos x-\sin x)(\sin x+\cos x+\sin x\cos x)=0$

$(a)\ 1-\cos x=0 \Leftrightarrow \cos x=1 \Leftrightarrow x=2k\pi, k\in\mathbb{Z}.$

$(b)\ \cos x-\sin x=0 \Leftrightarrow \tan x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}.$

$(c)\ \sin x+\cos x+\sin x\cos x=0.$

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right] \Rightarrow \sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}.$

Ta có phương trình theo ẩn t

$t^2+2t-1=0 \Rightarrow t=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-1+\sqrt{2} \Leftrightarrow x=\pm\arccos\frac{-1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4}+2k\pi.\ k\in\mathbb{Z}.$

Các công thức nghiệm trên đều thỏa điều kiện (*) nên là nghiệm của phương trình đã cho.

4. Một số phương trình giải bằng phương pháp đặc biệt

Ngoài các phương pháp cơ bản giải phương trình lượng giác đã nêu ở các mục trên, chúng ta còn có một số cách giải đặc biệt, sử dụng các kết quả sau

· $A^2+B^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases}$ · $\begin{cases} A\le m \\ B\ge m \\ A=B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=m \\ B=m \end{cases}$ · $\begin{cases} A\le A_1 \\ B\le B_1 \\ A+B=A_1+B_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=A_1 \\ B=B_1 \end{cases}$

Ví dụ 1. Giải phương trình

$$\sin^2 x+\frac{1}{4}\sin^2 3x=\sin x\sin^2 3x \ (1)$$

Giải.

$$(1)\Leftrightarrow\left(\sin x-\frac{1}{2}\sin^2 3x\right)^2+\frac{1}{4}\sin^2 3x(1-\sin^2 3x)=0\Leftrightarrow\left(\sin x-\frac{1}{2}\sin^2 3x\right)^2+\frac{1}{16}\sin^2 6x=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\sin x-\frac{1}{2}\sin^2 3x\right)=0 \\ \sin 6x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x=\frac{1}{4}(1-\cos 6x) \\ \cos 6x=1\vee\cos 6x=-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos 6x=1 \\ \sin x=0\end{cases} \\ \begin{cases}\cos 6x=-1 \\ \sin x=\frac{1}{2}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k\pi \\ x=\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi.\end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có nghiệm là $x=k\pi; x=\frac{\pi}{6}+k2\pi; x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Ví dụ 2. Giải phương trình

$$(\cos 4x-\cos 2x)^2=5+\sin 3x \ (1)$$

Giải.

$(1)\Leftrightarrow 4\sin^2 3x\sin^2 x=5+\sin 3x \ (2)$. Do $\begin{cases}4\sin^2 3x\sin^2 x\le 4 \\ 5+\sin 3x\ge 4\end{cases}$, nên ta có

$$(2)\Leftrightarrow\begin{cases}\sin^2 3x\sin^2 x=4 \\ 5+\sin 3x=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin 3x=-1 \\ \sin^2 x=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x=\frac{3\pi}{2}+k2\pi \\ x=\frac{\pi}{2}+l\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{2}+\frac{k2\pi}{3} \\ x=\frac{\pi}{2}+l\pi\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+m2\pi, m\in\mathbb{Z}.$$

Vậy, nghiệm của phương trình đã cho là $x=\frac{\pi}{2}+m2\pi, m\in\mathbb{Z}$.

Ví dụ 3. Giải phương trình

$$\sin x-2\sin 2x-\sin 3x=2\sqrt{2}\ (1)$$

Giải.

Ta có vế trái của phương trình (1) bằng

$$\sin x-2\sin 2x-\sin 3x=-2\cos 2x\sin x-2\sin 2x\le\sqrt{(-2\cos 2x)^2+(-2\sin 2x)^2}\sqrt{\sin^2 x+1^2}$$

$$=\sqrt{4(\sin^2 x+1)}\le 2\sqrt{2}.$$

Vậy, (1) $\Leftrightarrow\begin{cases}\sin^2 x=1\\ \dfrac{\cos 2x}{\sin x}=\dfrac{\sin 2x}{1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x=0\\ \dfrac{1-2\sin^2 x}{\sin x}=\dfrac{2\sin x\cos x}{1}\end{cases}$ (*)

Hệ (*) vô nghiệm. Vậy, phương trình (1) vô nghiệm.

Ví dụ 4. Giải phương trình

$$\sin^3 x+\cos^3 x=2-\sin^4 x\ (1)$$

Giải. Ta có vế trái của (1): $\sin^3 x+\cos^3 x\le|\sin x|^3+|\cos x|^3\le|\sin x|^2+|\cos x|^2\le 1$.

Vế phải của (1): $2-\sin^4 x\ge 1$.

Vậy, (1) $\Leftrightarrow\begin{cases}\cos^3 x=\cos^2 x\\ \sin^3 x=\sin^2 x\\ \sin^4 x=1\end{cases}\Leftrightarrow\sin x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi.$

Vậy, nghiệm của phương trình đã cho là $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

5. Một số phương trình chứa tham số

Ví dụ 1. Cho phương trình

$$\sin^6 x+\cos^6 x=m|\sin 2x|\ (1)$$

Tìm m để phương trình có nghiệm.

Giải. Ta có

$$\sin^6 x+\cos^6 x=m|\sin 2x|\Leftrightarrow 1-3\sin^2 x\cos^2 x=m|\sin 2x|\Leftrightarrow 1-\frac{3}{4}|\sin 2x|^2=m|\sin 2x|\,(*)$$

Do $\sin 2x=0$ không thỏa phương trình nên

(*) $\Leftrightarrow m=\dfrac{1}{|\sin 2x|}-\dfrac{3}{4}|\sin 2x|$. Đặt $t=|\sin 2x|, 0<t\le 1$. Ta xét hàm số

$$y=f(t)=\frac{1}{t}-\frac{3}{4}t,\ f'(t)=-\frac{1}{t^2}-\frac{3}{4}<0.\ \lim_{t\to 0^+}f(t)=+\infty;\ f(1)=\frac{1}{4}.$$

Suy ra miền giá trị của hàm số $f(t)$ là $T_f = [\frac{1}{4}; +\infty)$.

Vậy, giá trị cần tìm của m để phương trình (1) có nghiệm là $m \geq \frac{1}{4}$.

Ví dụ 2. Cho phương trình

$$\frac{3}{\sin^2 x} + 3\tan^2 x + m(\tan x + \cot x) - 1 = 0 \ (1)$$

Tìm m để phương trình có nghiệm.

Giải. Ta có

$(1) \Leftrightarrow 3(1 + \cot^2 x) + 3\tan^2 x + m(\tan x + \cot x) - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 3(\tan x + \cot x)^2 + m(\tan x + \cot x) - 4 = 0.$

Đặt $t = \tan x + \cot x, |t| \geq 2,$ ta có phương trình $3t^2 + mt - 4 = 0 \Leftrightarrow mt = 4 - 3t^2$

$\Leftrightarrow m = \frac{4 - 3t^2}{t} = f(t), f'(t) = -\frac{4}{t^2} - 3 < 0.$

Suy ra hàm số $f(t)$ nghịch biến, mà $\lim\limits_{t \to \pm\infty} f(t) = \mp\infty, f(-2) = 4, f(2) = -4.$

Do đó miền giá trị của hàm số $f(t)$ là $T_f = (-\infty; -4] \cup [4; +\infty).$

Vậy, giá trị cần tìm của m để phương trình (1) có nghiệm là $m \leq -4 \vee m \geq 4.$

Ví dụ 3. Cho phương trình

$$\sin 2(x - \pi) - \sin(3x - \pi) = m\sin x \ (1)$$

Tìm m để phương trình có nghiệm $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Giải. Ta có

$(1) \Leftrightarrow \sin 2x + \sin 3x = m\sin x \Leftrightarrow 2\sin x\cos x + 3\sin x - 4\sin^3 x = m\sin x$

$\Leftrightarrow \sin x(2\cos x + 3 - 4\sin^2 x) = m\sin x \Leftrightarrow \sin x(4\cos^2 x + 2\cos x - 1) = m\sin x$

$\Leftrightarrow 4\cos^2 x + 2\cos x - 1 = m, (x \neq k\pi). (*)$

Đặt $t = \cos x,$ do $x \neq k\pi$ nên $t \in (-1;1).$ (*) trở thành $4t^2 + 2t - 1 = m$. Yêu cầu bài toán được thỏa khi và chỉ khi m thuộc miền giá trị của hàm số $f(t) = 4t^2 + 2t - 1, t \in (-1;1).$

Ta có $f'(t) = 8t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{4} \in (-1;1).$ $f(-\frac{1}{4}) = -\frac{5}{4}, f(-1) = 1, f(1) = 5.$

Miền giá trị của hàm số $f(t)$ trên khoảng $(-1;1)$ là $T_f = [-\frac{5}{4}; 5).$ Vậy, giá trị cần tìm của m là $-\frac{5}{4} \leq m < 5.$

Ví dụ 4. Cho phương trình

$$\sin^2 3x + (m^2 - 3)\sin 3x + m^2 - 4 = 0 \ (1)$$

Tìm m để phương trình (1) có đúng bốn nghiệm thuộc đoạn $[\frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3}]$.

Giải. Đặt $t=\sin 3x, |t|\le 1$. Khi đó phương trình (1) trở thành

$t^2+(m^2-3)t+m^2-4=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=4-m^2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 3x=-1 \\ \sin 3x=4-m^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{6}+\frac{k2\pi}{3}, k\in\mathbb{Z} \\ \sin 3x=4-m^2 \ (2) \end{array}\right.$$

Ta nhận thấy rằng họ nghiệm $x=-\frac{\pi}{6}+\frac{k2\pi}{3}$, có đúng một giá trị $x=\frac{7\pi}{6}\in[\frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3}]$.

Vậy, để phương trình (1) có đúng bốn nghiệm thuộc đoạn $[\frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3}]$, điều kiện là phương trình (2) có đúng ba nghiệm khác $\frac{7\pi}{6}$ thuộc đoạn $[\frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3}]$.

Ta có $x\in[\frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3}]\Leftrightarrow 3x\in[2\pi;4\pi]$, do đó điều kiện là $\sin 3x=0\Leftrightarrow 4-m^2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=2 \end{array}\right.$

Khi đó ta được ba nghiệm là $x=\frac{2\pi}{3}\vee x=\pi\vee x=\frac{4\pi}{3}$.

Vậy, với $m=2\vee m=-2$ thì phương trình (1) có đúng bốn nghiệm thuộc đoạn $[\frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3}]$.

BÀI TẬP CHƯƠNG VI

Bài 1. Giải các phương trình

1) $\sqrt{3}\sin x-\cos x=\sqrt{2}$;

2) $\cos x+2\cos 2x=1$;

3) $\cos 4x+2\cos^2 x=0$;

4) $2\cos^2 x+4\cos x=3\sin^2 x$;

5) $\cos x-\sin x+3\sin 2x-1=0$;

6) $2\sin 2x-3\sqrt{3}(\sin x+\cos x)+3\sqrt{3}=0$;

7) $\sin 2x+\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})=1$;

8) $\sin^2 x+2\sin x\operatorname{coss} x-2\cos^2 x=\frac{1}{2}$;

9) $\cos x+\sin x=\frac{\cos 2x}{1-\sin 2x}$;

10) $\sin^3 x-\cos^3 x=1+\sin x\cos x$.

Bài 2. Giải các phương trình

1) $2\cos^2 x - 1 = \sin 3x$;

2) $\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x} = (\sin x + \cos x)^2$;

3) $1 + \tan 2x = \dfrac{1-\sin 2x}{\cos^2 2x}$;

4) $\tan 3x - \tan x = \sin 2x$;

5) $(\sin x - \sin 2x)(\sin x + \sin 2x) = \sin^2 3x$;

6) $\sin x + \sin 3x + 4\cos^3 x = 0$;

7) $\sin 2x = 1 + \sqrt{2}\cos x + \cos 2x$;

8) $2\cos^6 x + \sin^4 x + \cos 2x = 0$;

9) $2\cos^2 3x\cos^2 x - \cos^2 3x + \sin^2 x - 1 = 0$.

Bài 3. Giải các phương trình

1) $\sin x + \cot\dfrac{x}{2} = 2$;

2) $\sin 2x + \cos 2x + \tan x = 2$;

3) $\cos 4x - \dfrac{3\left(1-\tan^2 x\right)}{1+\tan^2 x} + 2 = 0$;

4) $\dfrac{\tan x - 1}{\tan x + 1} + \cot 2x = 0, (0 < x < \pi)$;

5) $\tan^3 x - 1 + \dfrac{1}{\cos^2 x} - 3\cot(\dfrac{\pi}{2} - x) = 3, (\pi < x < \dfrac{3\pi}{2})$;

6) $\cos^3 x\sin x - \sin^3 x\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{8}$;

7) $\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x$;

8) $\cos 3x - 4\cos 2x + 3\cos x - 4 = 0, \quad x \in [0,14]$;

9) $\sin^4 x + \sin^4(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{8}) + \cos^4 x = \dfrac{1}{2}\sin^2 2x$;

10) $2\cos 2x - 8\cos x + 7 = \dfrac{1}{\cos x}$.

Bài 4. Giải các phương trình

1) $5\left(\sin x + \dfrac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2\sin 2x}\right) = \cos 2x + 3, x \in (0; 2\pi)$;

2) $\sin 2x.\cos x = \tan 3x.\sin(x + \dfrac{\pi}{6}) - \cos 2x.\sin x$;

3) $\cot x - 1 = \dfrac{\cos 2x}{1+\tan x} + \sin^2 x - \dfrac{1}{2}\sin 2x$;

4) $\sin 4x \sin 2x + \sin 9x \sin 3x = \cos^2 x$;

5) $\cos^2 x \sin^4 x + \cos 2x = 2\cos x(\sin x + \cos x) - 1$;

6) $\sqrt{3}\cos 4x + \sin 4x - 2\cos 3x = 0$;

7) $4\cos^2 x - 2\cos^2 2x = 1 + \cos 4x$;

8) $2\sin^2(x - \frac{\pi}{4}) = 2\sin^2 x - \tan x$;

9) $\cos 3x + 2\cos 2x = 1 - 2\sin x \sin 2x$;

10) $(2\sin x - 1)(2\cos x + \sin x) = \sin 2x - \cos x$;

11) $\sqrt{3}\cos 5x - 2\sin 3x \cos 2x - \sin x = 0$;

12) $\sin x + \cos x \sin 2x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\left(\cos 4x + \sin^3 x\right)$.

Bài 5. Giải các phương trình

1) $\tan^4 x + 1 = \dfrac{(2 - \sin^2 2x)\sin 3x}{\cos^4 x}$;

2) $\dfrac{\sin^4 x + \cos^4 x}{5\sin 2x} = \dfrac{1}{2}\cot 2x - \dfrac{1}{8\sin 2x}$;

3) $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$;

4) $-2\cos^2 x \sin^2 x + \cos(x - \frac{\pi}{4})\sin(3x - \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2} = 0$;

5) $\cot x + \sin x(1 + \tan x \tan \frac{x}{2}) = 4$;

6) $\dfrac{2(\cos^6 x + \sin^6 x) - \sin x \cos x}{\sqrt{2} - 2\sin x} = 0$;

7) $\cos 3x + \cos 2x - \cos x - 1 = 0$;

8) $\sqrt{13 - 18\tan x} = 6\tan x - 3$;

9) $\cos^4 x - \sin^4 x = |\cos x| + |\sin x|$;

10) $\cos^{13} x + \sin^{14} x = 1$.

Bài 6. Giải các phương trình

1) $\tan x = \cot x + 4\cos^2 2x$;

2) $\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\sqrt{3}\left(2\cos^2 x + \cos x - 2\right) + \left(3 - 2\cos x\right)\sin x = 0$;

4) $\left(1 + 2\cos 3x\right)\sin x + \sin 2x = 2\sin^2\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)$;

5) $1+\sin\frac{x}{2}\sin x-\cos\frac{x}{2}\sin^2 x=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$;

6) $\cos^2(x+\frac{\pi}{3})+\sin^2(x+\frac{\pi}{6})=2\sin x-\frac{1}{4}$;

7) $\dfrac{\sin 3x-4\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-3}{\sin 3x-1}=0$;

8) $\cos 3x\cos^3 x-\sin 3x\sin^3 x=\frac{2+3\sqrt{2}}{8}$;

9) $4\sin 3x\sin x+4\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+1=0$;

10) $\sin 3x+\sqrt{3}\cos 3x+\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x=\sin x+\sqrt{3}\cos x$;

11) $\sin^2 x\left(1+\tan x\right)=3\sin x\left(\cos x-\sin x\right)+3$;

12) $\frac{\sin 2x}{\cos x}+\frac{\cos 2x}{\sin x}=\tan x-\cot x$;

13) $\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)}=4\sin\left(\frac{7\pi}{4}-x\right)$;

14) $\sin^3 x-\sqrt{3}\cos^3 x=\sin x\cos^2 x-\sqrt{3}\sin^2 x\cos x$;

15) $2\sin x\left(1+\cos 2x\right)+\sin 2x=1+2\cos x$;

16) $\dfrac{\left(1-2\sin x\right)\cos x}{\left(1+2\sin x\right)\left(1-\sin x\right)}=\sqrt{3}$.

Bài 7. Tìm các giá trị của tham số m để các phương trình cho sau đây có nghiệm

1) $\tan^2 x+\cot^2 x+m(\tan x+\cot x)+2m=0$;

2) $m(\sin x+\cos x)+\sin 2x+m-1=0$;

3) $4(\cos x-\sin x)+\sin 2x=m$.

Bài 8. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình sau có nghiệm thỏa $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$

$$\cos^2 x-2m\cos x+4\left(m-1\right)=0.$$

Bài 9. Giải và biện luận phương trình theo tham số m

$$\sin^2 x+2\sin x\cos x-2\cos^2 x=m.$$

Bài 10. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình $m\cos^2 2x-2\sin 2x+m-2=0$ có nghiệm trong khoảng $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Đặng Hùng Thắng. 1998. Phương trình, bất phương trình và hệ phương trình. Hà Nội: NXB Giáo dục.

Đoàn Quỳnh (Tổng chủ biên) – Nguyễn Huy Đoan (Chủ biên) Nguyễn Xuân Liêm – Đặng Hùng Thắng – Trần Văn Vuông. 2008. Đại số 10 (Nâng cao). Hà Nội: NXB Giáo dục.

Đoàn Quỳnh (Tổng chủ biên) – Nguyễn Huy Đoan (Chủ biên) Nguyễn Xuân Liêm – Nguyễn Khắc Minh – Đặng Hùng Thắng. 2008. Đại số và Giải tích 11 (Nâng cao). Hà Nội: NXB Giáo dục.

Đoàn Quỳnh (Tổng chủ biên) – Nguyễn Huy Đoan (Chủ biên) Trần Phương Dung – Nguyễn Xuân Liêm – Đặng Hùng Thắng). 2008. Giải tích 12 (Nâng cao). Hà Nội: NXB Giáo dục.

Hoàng Kỳ. 1999. Đại số sơ cấp. Hà Nội: NXB Giáo dục.

Hoàng Kỳ. 2007. Giáo trình căn số và toán vô tỉ. Hà Nội: NXB Giáo dục.

Nguyễn Thái Hòe. 2001. Dùng ẩn phụ để giải toán. Hà Nội: NXB Giáo dục.

Nguyễn Văn Mậu. 2001. Phương pháp giải phương trình và bất phương trình. Hà Nội: NXB Giáo dục.

Phan Đức Chính. 1999. Bất đẳng thức. Hà Nội: NXB Giáo dục.

Phan Đức Chính – Nguyễn Dương Thụy – Tạ Mân – Đào Tam – Lê Thống Nhất. 1996. Các bài giảng luyện thi môn Toán – Tập 2. Hà Nội: NXB Giáo dục.

Phan Huy Khải. 2001. Phương pháp đồ thị để biện luận hệ phương trình chứa tham số. Hà Nội: NXB Giáo dục.

Trần Phương. 1995. Phương pháp mới giải đề thi tuyển sinh môn Toán. Hà Nội: NXB Giáo dục.

Đề thi tuyển sinh vào Đại học, Cao đẳng toàn quốc từ năm 2002 – 2003 đến 2007 – 2008.

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ. Hà Nội: NXB Giáo dục.

М.И.Сканави, Б.А.Кордемский,…1978. СБОРНИК КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ для поступающих во втузы. Москва. “высшая школа”.

Ю.В.Нестеренко, С.Н.Олехник, М.К.Потапов.1986. ЗАДАЧИ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ ПО МАТЕМАТИКЕ. Москва. “Наука”.

V.A.Kretsmar.1978. Bài tập Đại số sơ cấp – Tập 1. Vũ Dương Thụy – Nguyễn Duy Thuận, dịch. Hà Nội: NXB Giáo dục.

V.A.Kretsmar.1978. Bài tập Đại số sơ cấp – Tập 2. Vũ Dương Thụy – Nguyễn Duy Thuận, dịch. Hà Nội: NXB Giáo dục.

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Tổng biên tập VŨ DƯƠNG THUỴ

Biên tập :
NFUYỄN TRỌNG BÁ
Trình bày bìa:
NGUYỄN QUỐC ĐẠI

GIÁO TRÌNH ĐẠI SỐ SƠ CẤP

In 100.000 cuốn khổ 24 x 35 cm tại Công ti In Tiến An.
Giấy phép xuất bản số 6725.413-00/ XB-QLXB, kí ngày 19/11/2022.
In xong và nộp lưu chiểu quý IV năm 2022.

Cùng tác giả:

Giá: 38.000đ