https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ❊ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Toán học & Tuổi trẻ

1
2004

SỐ 319 - NĂM THỨ 41 - TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Chúc Mừng Năm Mới

Giáp Thân 2004

TẠP CHÍ VĂN HỌC VÀ TUỔI TRẺ - MƯỜI NĂM HÌNH THÀNH VÀ PHÁT TRIỂN

Ngày 16/12/2003, tại trụ sở NXB Giáo dục đã diễn ra Lễ kỉ niệm mười năm Tạp chí *Văn học và Tuổi trẻ*. Đến dự buổi lễ có đại biểu của Ban Tư tưởng Văn hóa Trung ương, Bộ Văn hóa - Thông tin, Bộ Giáo dục và Đào tạo, lãnh đạo NXB Giáo dục, các ủy viên Hội đồng biên tập Tạp chí, các nhà văn, nhà giáo, nhà nghiên cứu thuộc Hội Nhà văn Việt Nam, Viện Văn học, trường Đại học Sư phạm, Sở Giáo dục và Đào tạo một số tỉnh, thành phố, các trường THPT, THCS Hà Nội.

TS. Nguyễn Kim Phong, Phó Tổng biên tập NXB Giáo dục, Tổng biên tập Tạp chí VHTT đã đọc diễn văn về quá trình hình thành và phát triển của Tạp chí. PGS. TS. Vũ Dương Thụy, Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NXB Giáo dục đã phát biểu chào mừng. Nhiều đại biểu đã phát biểu ý kiến đóng góp cho hoạt động của Tạp chí. Lãnh đạo NXB Giáo dục đã trao tặng phẩm cho một số ủy viên HĐBT và Cộng tác viên có nhiều đóng góp cho Tạp chí.

Chúng tôi xin trích đăng 2 bài phát biểu.

"Nhu cầu về một tờ Tạp chí phục vụ cho việc dạy - học môn Văn trong nhà trường xuất phát từ thực tế dạy học môn Văn, và điều đó được khẳng định khi NXB Giáo dục cho ra mắt *Văn học và Tuổi trẻ*.

Đối với nhiều em học sinh, Tạp chí đã trở thành nơi nâng đỡ, ươm mầm cho nhiều tài năng văn học. Có nhiều giáo viên dạy Văn, nhiều cán bộ nghiên cứu văn học trẻ từng tâm sự lúc còn là học sinh phổ thông, nhờ *Văn học và Tuổi trẻ* mà yêu môn Văn hơn, đạt kết quả cao ở môn Văn và sau cùng đã theo nghiệp văn..."

PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY

(Phó Tổng GĐ, Tổng biên tập NXB Giáo dục)

"Ngày 1/11/1991, Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo Trần Hồng Quân ra quyết định số 2798/TCCB tiếp nhận báo *Toán học và Tuổi trẻ* từ Viện Khoa học Việt Nam và giao cho NXBGD quản lí. Ngay từ giờ phút ấy, lãnh đạo NXBGD mà trước hết là Giám đốc Trần Trâm Phương, đã thấy đây là một cơ hội ngàn vàng vì khi được quản lí một tờ báo về một môn học quan trọng nhất trong nhà trường vốn có lịch sử hàng chục năm và đã được Nhà nước tặng thưởng Huân chương Lao động, NXB sẽ có thêm điều kiện để phát huy uy thế và thực lực, để hoàn thành tốt hơn nhiệm vụ chính trị của mình. Cũng ngay từ giờ phút ấy, chúng tôi vẫn thường trao đổi ý kiến với nhau một cách dí dỏm: Truyền thống thẩm mỹ phương Đông rất tôn trọng sự cân đối, có HAI môn học chiếm số giờ nhiều nhất, lẽ nào một môn có tạp chí mà môn kia lại không; chúng ta tự nhiên được ban tặng một bồn hoa đẹp, trước mắt phải làm cho nó đẹp hơn - ngay lượng phát hành số *Toán học và Tuổi trẻ* đầu tiên sau khi đưa về NXBGD đã tăng gấp 4 lần so với khi còn ở Viện Khoa học Việt Nam - đến một lúc nào đó, mọi người sẽ cảm thấy như thiếu vắng một cái gì đó và đòi hỏi nó xuất hiện: Đó chính là tờ *Văn học và Tuổi trẻ* ! Bởi vậy, bản thân sự ra đời của *Văn học và Tuổi trẻ* đã thể hiện tính chất giáo dục, màu sắc học đường sâu đậm. Chính điều ấy đã làm cho ấn phẩm độc đáo này luôn xác định được đúng các toạ độ của mình - VĂN HỌC, TUỔI TRẺ, HỌC ĐƯỜNG - trên con đường báo chí qua các chặng đường **tủ sách chuyên đề, đặc san** rồi **tạp chí**, dần xác định được bản sắc riêng giữa hàng loạt tên các NXB, tạp chí, tuần báo cùng mang từ TRẺ, như TRẺ, YÊU TRẺ, TÀI HOA TRẺ, VĂN NGHỆ TRẺ ..."

GS. NGUYỄN KHẮC PHI

(Nguyên Phó GĐ, Tổng biên tập NXB Giáo dục)

TRUNG HỌC CƠ SỞ

TÌM MIỀN GIÁ TRỊ của hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$

DOÃN XUÂN HUY
(GV THPT Ân Thi, Hưng Yên)

Ta xét hàm số $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c}$ (1) với các điều kiện sau : $a' \neq 0$, $a^2+b^2+c^2 \neq 0$ và $\Delta = b'^2 - 4a'c' < 0$, nghĩa là mẫu thức trong (1) là tam thức bậc hai không có nghiệm (luôn dương hoặc luôn âm). Nếu tìm được miền giá trị G của hàm số (1) thì cũng biết được giá trị lớn nhất (GTLN) và giá trị nhỏ nhất (GTNN) nếu có của hàm số đó. Để tìm miền giá trị của hàm số (1) có thể sử dụng các phương pháp đã nêu trong bài báo *Tìm cực trị một biểu thức bằng nhiều cách* của tác giả Nguyễn Ngọc Khoa đăng trong THTT số 303 (9/2002) và bài *Sử dụng phương pháp tham biến để tìm cực trị một biểu thức* của tác giả Phạm Thị Việt Thái đăng trong THTT số 313 (7/2003). Ở đây sử dụng *phương pháp tìm điều kiện để phương trình bậc hai có nghiệm.* Với mỗi giá trị x_o của (1) ta có giá trị

$$y_o = \frac{ax_o^2+bx_o+c}{a'x_o^2+b'x_o+c'}$$

$\Leftrightarrow (y_oa'-a)x_o^2+(y_ob'-b)x_o+y_oc'-c = 0$, hay x_o là nghiệm của phương trình (PT) ẩn x với tham số y sau

$$(ya'-a)x^2+(yb'-b)x+yc'-c=0 \qquad (2)$$

Ta cần tìm điều kiện của tham số y để PT (2) có nghiệm, từ đó xác định được miền giá trị G của hàm số (1).

Xét 3 trường hợp dưới đây tương ứng với dạng của tử thức trong (1).

Trường hợp 1. Với $a = b = 0$, $c \neq 0$ có hàm số

$$y = \frac{c}{a'x^2+b'x+c} \qquad (3)$$

Dễ thấy $y \neq 0$ với mọi x ở (3)

Lúc đó PT (2) có dạng

$$ya'x^2+yb'x+yc'-c=0 \qquad (4)$$

PT (4) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta_1 = y^2b'^2-4ya'(yc'-c) = y(y(b'^2-4a'c')+4a'c) \geq 0$

$\Leftrightarrow y(y.\Delta+4a'c) \geq 0$

Từ đó

• nếu $a'c > 0$ thì $0 < y \leq \dfrac{-4a'c}{\Delta}$ hay

$G = \left(0, \dfrac{-4a'c}{\Delta}\right]$ nên GTLN của y là $\dfrac{-4a'c}{\Delta}$ (không có GTNN)

• nếu $a'c < 0$ thì $\dfrac{-4a'c}{\Delta} \leq y < 0$ hay

$G = \left[\dfrac{-4a'c}{\Delta}, 0\right)$ nên GTNN của y là $\dfrac{-4a'c}{\Delta}$ (không có GTLN)

Trường hợp 2. Với $a = 0$, $b \neq 0$ có hàm số

$$y = \frac{bx+c}{a'x^2+b'x+c'} \qquad (5)$$

Lúc đó PT (2) có dạng

$$ya'x^2+(yb'-b)x+yc'-c=0 \qquad (6)$$

• Có $y = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-c}{b}$ theo (5).

• Với $y \neq 0$ thì PT (6) có nghiệm

$\Leftrightarrow \Delta_2 = (yb'-b)^2 - 4ya'(yc'-c) \geq 0.$

$\Leftrightarrow (b'^2-4a'c')y^2+2(2a'c-bb')y+b^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow f(y) = \Delta.y^2 - 2D_1y + b^2 \geq 0$ với $D_1 = bb'-2a'c$

Theo giả thiết $\Delta = b'^2 - 4a'c' < 0$ nên $\Delta_3 = D_1^2 - b^2.\Delta > 0 \Rightarrow$ PT $f(y) = 0$ có 2 nghiệm

$$y_1 = \frac{D_1+\sqrt{D_1^2-b^2.\Delta}}{\Delta} \text{ và } y_2 = \frac{D_1-\sqrt{D_1^2-b^2.\Delta}}{\Delta}$$

ĐK $f(y) \geq 0 \Leftrightarrow y_1 \leq y \leq y_2$

Do $f(0) = b^2 > 0 \Rightarrow \Delta.f(0) < 0 \Rightarrow y_1 < 0 < y_2$

Vậy tập giá trị của hàm số (5) là $G = [y_1, y_2]$

nên GTNN của y là $y_1 = \dfrac{D_1+\sqrt{D_1^2-b^2.\Delta}}{\Delta}$ và

GTLN của y là $y_2 = \dfrac{D_1-\sqrt{D_1^2-b^2.\Delta}}{\Delta}$

Trường hợp 3. Với $a \neq 0$ ta có hàm số (1). Biến đổi (1) về dạng

$$y = \frac{a}{a'} + \frac{(a'b-ab')x+(a'c-ac')}{a'(a'x^2+b'x+c')} \quad (7)$$

a) Nếu $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ thì $y = \frac{a}{a'}$ (hằng số)

b) Nếu $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ thì $y = \frac{a}{a'} + \frac{a'c-ac'}{a'(a'x^2+b'x+c')}$

Theo trường hợp 1 ta kết luận được :

• Nếu $a'c > ac'$ thì $G = \left(\frac{a}{a'}, \frac{a}{a'} - \frac{4(a'c-ac')}{\Delta}\right]$

nên GTLN của y là $y_3 = \frac{a}{a'} - \frac{4(a'c-ac')}{\Delta}$ (không có GTNN).

• Nếu $a'c < ac'$ thì $G = \left[\frac{a}{a'} - \frac{4(a'c-ac')}{\Delta}, \frac{a}{a'}\right)$

nên GTNN của y là $y_4 = \frac{a}{a'} - \frac{4(a'c-ac')}{\Delta}$ (không có GTLN).

c) Nếu $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$, theo trường hợp 2, trong dạng (7) đặt $B = \frac{a'b-ab'}{a'}$, $C = \frac{a'c-ac'}{a'}$ và $D_2 = Bb' - 2a'C = \frac{b'(a'b-ab')}{a'} - 2(a'c-ac')$.

PT(2) có dạng $ya'x^2 + (yb'-B)x + yc' - C = 0$

Với $y \neq 0$ PT này có nghiệm $\Leftrightarrow g(y) = \Delta.y^2 - 2D_2y + B^2 \geq 0$.

Vì $\Delta < 0$ nên $\Delta_4 = D_2^2 - B^2.\Delta > 0$, do đó PT$g(y) = 0$ có 2 nghiệm $y_5 = \frac{D_2 + \sqrt{D_2^2 - B^2.\Delta}}{\Delta}$ và $y_6 = \frac{D_2 + \sqrt{D_2^2 - B^2.\Delta}}{\Delta}$.

Cũng có $\Delta.g(0) < 0 \Rightarrow y_5 < 0 < y_6$.

Vậy tập giá trị của hàm số (7) là $G = [y_5, y_6]$ nên GTNN của y là $y_5 = \frac{D_2 + \sqrt{D_2^2 - B^2.\Delta}}{\Delta}$ và GTLN của y là $y_6 = \frac{D_2 + \sqrt{D_2^2 - B^2.\Delta}}{\Delta}$

Khi cho a, b, c, a', b', c' những giá trị cụ thể (hoặc 5 giá trị cụ thể còn một là tham số) sẽ có các bài toán trong trường hợp riêng. Các kết quả trên cũng cho biết với điều kiện nào của các hệ số a, b, c, a', b', c' thì hàm số (1) có GTNN hoặc có GTLN.

CÙNG CÁC CỘNG TÁC VIÊN VÀ BẠN ĐỌC

Từ khi về Bộ giáo dục và Đào tạo, thuộc Nhà xuất bản Giáo dục quản lí, tạp chí Toán học và Tuổi trẻ đã không ngừng lớn mạnh như tăng kì xuất bản, có bìa, tăng trang và thêm những chuyên mục mới. Bước sang tuổi 40 tạp chí tiếp tục có những phát triển mới và nhận được những đề xuất, kiến nghị về nội dung và hình thức của bạn viết và bạn đọc gần xa. Đáp ứng mong mỏi của bạn đọc và được sự đồng ý của Cục báo chí Bộ Văn hóa Thông tin từ 1.2004 tạp chí THTT sẽ tăng thêm 4 trang ruột thành 28 trang mỗi số. Tạp chí sẽ có điều kiện để đăng nhiều hơn các bài thuộc các chuyên mục : Lịch sử toán học, Toán học và đời sống, Bạn đọc tìm tòi, Thư bạn đọc, Nhìn ra thế giới, Giới thiệu về toán học hiện đại...

Bên cạnh đó, tạp chí mở thêm 3 chuyên mục mới là *Phương pháp giải toán, Từ kho tàng toán học* và *Tính toán cách nào?* Mục *Từ kho tàng toán học* sẽ gồm các bài viết khai thác các vấn đề tưởng như đã cũ để tìm ra cái mới, là các khám phá nho nhỏ trên con đường bạn đến lâu đài toán học đồ sộ. Giống như viên ngọc lóng lánh nhưng còn nằm trong khối đá xù xì thô ráp. Bạn hãy là người tìm ngọc trong đá. *Tính toán cách nào?* là mục giới thiệu các kĩ năng, phương pháp tính toán hợp lí, thông minh, các kiến thức và kinh nghiệm về tính toán gần đúng, ước lượng, những điều rất cần cho các kĩ sư tương lai và người lao động trong cuộc sống. Mục *Phương pháp giải toán* được tách riêng ra từ các chuyên mục đã có. Nó gồm các bài viết mà nội dung xoay quanh vấn đề phân tích đề bài, tìm lời giải, phán đoán kết quả và trình bày cách giải. Ở đây *phương pháp* là tiêu điểm và trọng tâm của bài viết. Chuyên mục này đáp ứng yêu cầu đổi mới dạy và học toán ở trường trung học.

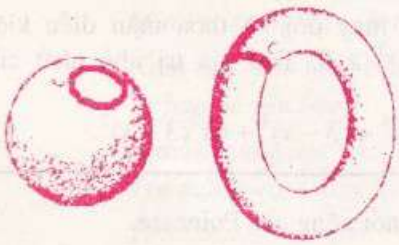
THTT chờ đợi nhận được nhiều bài viết của bạn đọc về các mục mới nói trên.

Cảm ơn các bạn .

THTT

Phỏng đoán POINCARÉ đã được chứng minh

Phỏng đoán Poăng-ca-rê do nhà toán học Pháp Giuyn-lơ Ăng-ri Poăng-ca-rê (Jules Henri Poincaré) nêu ra lần đầu tiên năm 1904, là một vấn đề trung tâm của tôpô học. Tôpô học nghiên cứu các tính chất hình học bất biến của một vật khi vật này bị kéo, xoắn hoặc co lại một cách liên tục. Trong tôpô không có các khoảng cách và một mặt phẳng là tương đương với bề mặt gợn sóng, chẳng hạn, một hình cầu nhẵn tương đương với một hình cầu móp méo, với điều kiện là bề mặt đó không bị chọc thủng, không bị dính ở điểm nào đó. Vỏ rỗng tạo thành bề mặt trái đất tạo ra cái mà các nhà tôpô học gọi là một hình cầu hai chiều. Nó có một tính chất duy nhất : nếu quấn xung quanh nó một cách bất kì một dây chun kín tưởng tượng và đàn hồi thì người ta sẽ có thể thu gọn dần dần dây đó luôn luôn nằm trên mặt cầu về một điểm của hình cầu (điều đó tương đương với việc coi hình cầu như một bề mặt đóng kín không có lỗ).



Trong trường hợp một cái săm thì không xảy ra như thế : một dây kín quấn ngang cái săm không có thể co dần lại thành một điểm trên bề mặt của săm mà không cắt đứt săm (hình xuyến, biểu thị bởi cái săm, được coi như một bề mặt đóng kín có đúng một lỗ). Từ thế kỉ 19, các nhà toán học biết rằng hình cầu là không gian duy nhất hai chiều đóng kín có tính chất như thế, nhưng cái gì xảy ra khi số chiều lớn hơn ?

Phỏng đoán Poincaré nêu ra một quy tắc tương đương về hình cầu ba chiều. Nguyên tắc này khẳng định đại thể rằng *hình cầu ba chiều là không gian duy nhất ba chiều đóng kín không có lỗ*. Phỏng đoán này nổi tiếng vì có vô số những "lời giải" đưa ra, nhưng tất cả đều sai lầm.

Jules Henri Poincaré (1854-1912)

Một nhà toán học Nga, Gri-gô-ri Pê-ren-man (Grigori Perelman), ở Viện Steklov tại Saint Petersbourg (LB Nga), đã khẳng định là chứng minh được phỏng đoán Poincaré. Thực ra Perelman đã công bố một loạt bài báo từ tháng 11 năm 2002. Nếu chứng minh của Perelman trong hai năm không còn gây tranh cãi nghi ngờ gì thì Perelman sẽ nhận giải thưởng 1 triệu đôla của Viện Toán học Clay, ở bang Massachusetts Hoa Kỳ. Trong hai tháng 3 và 4 năm 2003, Tomasz Mrowka nhà toán học ở MIT (Viện Công nghệ Massachusetts), dự hội nghị chuyên đề về chứng minh của Perelman, cho biết mỗi khi có ai đó nêu vấn đề bác bỏ, Perelman đều trả lời rõ ràng và ngắn gọn "*Rõ ràng rằng Perelman đã suy nghĩ từ rất lâu và rất sâu, khó có thể mắc sai lầm*".

Những kết quả mà Perelman thu được cho thấy rằng ông đã chứng minh một phỏng đoán tổng quát hơn phỏng đoán Poincaré, về vấn đề hình học những không gian ba chiều đưa ra trong những năm 1970 mà phỏng đoán Poincaré chỉ là trường hợp riêng. Hành trình cá nhân của Grigori Perelman có một số điều giống như Andrew Wiles là đã không cho các bạn đồng nghiệp biết, làm việc một mình trong tầng sát nóc nhà để giải định lí Fermat. Còn Perelman sống cấm cung suốt 8 năm gần đây ở Nga, không công bố gì.

Những bài báo của Perelman khẳng định đã chứng minh điều mà người ta gọi là "phỏng đoán sự hình học hóa" (hoặc phỏng đoán Thurston), nêu đặc tính đầy đủ của hình học các không gian ba chiều. William P. Thurston, giáo sư trường đại học California ở Davis, đã đưa ra những phương tiện đo các khoảng cách giữa các điểm trên các mặt 3 chiều, trong khi đến tận những năm 1970 chưa có những phương pháp đo này (những mặt này được xem xét chỉ bằng cách nhìn tôpô).

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 HỆ THPT CHUYÊN TRƯỜNG ĐHKHTN HÀ NỘI NĂM 2003

MÔN THI : TOÁN HỌC

VÒNG 1. ***(Dành cho thí sinh thi vào chuyên Toán, Lí, Hóa, Sinh)***

(Thời gian làm bài : 150 phút)

Câu I. (2 điểm). Giải phương trình :

$$(\sqrt{x+5}-\sqrt{x+2})(1+\sqrt{x^2+7x+10}) = 3$$

Câu II. (2 điểm). Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x^3+3x^2y=5, \\ y^3+6xy^2=7. \end{cases}$$

Câu III. (2 điểm). Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn đẳng thức :

$$2y^2x + x + y + 1 = x^2 + 2y^2 + xy$$

Câu IV. (3 điểm). Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$ (R là một độ dài cho trước). M, N là hai điểm trên nửa đường tròn (O) sao cho M thuộc cung AN và tổng các khoảng cách từ A, B đến đường thẳng MN bằng $R\sqrt{3}$.

1. Tính độ dài đoạn MN theo R.

2. Gọi giao điểm của hai dây AN và BM là I, giao điểm của các đường thẳng AM và BN là K. Chứng minh rằng bốn điểm M, N, I, K cùng nằm trên một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó theo R.

3. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác KAB theo R khi M, N thay đổi nhưng vẫn thỏa mãn giả thiết của bài toán.

Câu V. (1 điểm): x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện : $x + y + z + xy + yz + zx = 6$.

Chứng minh rằng : $x^2 + y^2 + z^2 \geq 3$.

VÒNG 2. ***(Dành cho thí sinh thi vào chuyên Toán và chuyên Tin)***

(Thời gian làm bài : 150 phút)

Câu VI. (2 điểm). Cho phương trình :

$$x^4 + 2mx^2 + 4 = 0.$$

Tìm giá trị của tham số m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 32$$

Câu VII. (2 điểm). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x^2+xy-y^2-5x+y+2=0 \\ x^2+y^2+x+y-4=0 \end{cases}$$

Câu VIII. (2 điểm). Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn đẳng thức

$$x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$$

Câu IX. (3 điểm). Đường tròn tâm O nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại các điểm D, E, F. Đường tròn tâm O' bàng tiếp trong góc $\widehat{BAC}$ của tam giác ABC tiếp xúc với cạnh BC và phần kéo dài của các cạnh AB, AC tương ứng tại các điểm P, M, N.

1. Chứng minh rằng : $BP = CD$.

2. Trên đường thẳng MN ta lấy các điểm I và K sao cho $CK//AB$, $BI//AC$. Chứng minh rằng các tứ giác $BICE$ và $BKCF$ là các hình bình hành.

3. Gọi (S) là đường tròn đi qua 3 điểm I, K, P. Chứng minh rằng (S) tiếp xúc với các đường thẳng BC, BI, CK.

Câu X. (1 điểm).

Số thực x thay đổi và thỏa mãn điều kiện $x^2 + (3 - x)^2 \geq 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$p = x^4 + (3-x)^4 + 6x^2(3-x)^2.$$

Từ thế kỉ 19, các nhà toán học biết rằng có thể gán cho một loại không gian 2 chiều nào đó "một đa tạp" (manifold), một cấu trúc hình học chặt chẽ và luôn luôn đồng nhất. Đầu những năm 70. Thurston, lần đầu tiên đạt được các kết quả về đa tạp 3 chiều và nhận giải thưởng Fields, giải thưởng cao quý nhất về toán học. Công trình của Grigori Perelman cung cấp yếu tố cuối cùng của sự mô tả đầy đủ các bất biến tôpô của những đa tạp 3 chiều và qua đó giải được vấn đề nổi tiếng của Poincaré.

Tomasz Mrowka kết luận : "*Hoặc Grigori Perelman đã tìm được lời giải của bài toán, hoặc đã có những tiến bộ có ý nghĩa để tìm ra lời giải, những điều đó đều giúp ích cho tất cả chúng ta*".

NGUYỄN VĂN THIÊM

(Theo *Le Courrier International* 6-5-2003 và *La Recherche* tháng 7-8/2003)

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 CHUYÊN TOÁN - TIN

TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN, ĐÀ NẴNG

(Đề thi đã đăng trên THTT số 318, tháng 12 năm 2003)

Bài 1. a) Ta có :

$$P = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+2)+\sqrt{2}(\sqrt{3}+2+\sqrt{2})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+2)} = 1+\sqrt{2}$$

b) Từ giả thiết $x^2 - 2y^2 = xy$, suy ra $(x + y)(x - 2y) = 0$. Do $x + y \neq 0$ nên $x = 2y$.

Vậy $Q = \frac{x-y}{x+y} = \frac{2y-y}{2y+y} = \frac{1}{3}$.

Bài 2. a) Đặt $t = \sqrt[3]{x}$, phương trình (PT) đã cho trở thành $2t^2 - 5t - 3 = 0$. PT này có hai nghiệm $t_1 = -\frac{1}{2}$, $t_2 = 3$. Do đó PT đã cho có hai nghiệm : $x_1 = -\frac{1}{8}$, $x_2 = 27$.

b) PT $x^3 - x^2 - x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3x^3-3x^2-3x-1 = 0$

$\Leftrightarrow 4x^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

$\Leftrightarrow 4x^3 = (x + 1)^3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}-1}$.

Bài 3. a) Đặt $a - b = n$ (1), ($a, b, n \in N$ và $b \neq 0$) thì theo giả thiết : $\frac{a}{b} = n$ (2)

Từ (1), (2) có $bn - b = n$ hay $(n-1)b = n$ (3)

Nếu $n=1$ thì không thỏa mãn (3).

Nếu $n \neq 1$ thì $b = \frac{n}{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1}$ (4)

Do b là số tự nhiên nên $(n - 1)$ là ước của 1, hay $n - 1 = -1$ hoặc $n - 1 = 1$.

Với $n - 1 = -1$ thì $n = 0$, không thỏa mãn (3). Với $n - 1 = 1$ thì $n = 2$, từ (4) suy ra $b = 2$, lúc đó $a = 4$. Thử lại ta thấy $(a, b) = (4, 2)$ thỏa mãn đề bài.

b) Ta có :

$$P = \frac{1}{a}+\frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = \frac{5}{ab} \geq \frac{10}{(a+b)^2} = \frac{4}{5}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = \frac{5}{2}$.

Tóm lại giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{4}{5}$ đạt được khi $a = b = \frac{5}{2}$.

Bài 4. Từ PT $x - 3y - 3 = 0 \Rightarrow x = 3(y+1)$ (1), thay vào PT sau được :

$$5y^2 + 5y - 3 = 0 \qquad (2)$$

Do (x_1, y_1) và (x_2, y_2) là hai nghiệm của hệ phương trình, nên y_1, y_2 là hai nghiệm của (2).

Từ đó $y_1 + y_2 = -1$, $y_1y_2 = -\frac{3}{5}$ (3)

Từ (1) có $x_1 - x_2 = 3(y_1 - y_2)$, suy ra

$M = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 10(y_1 - y_2)^2$.

Từ (3) có $M = 10[(y_1+y_2)^2 - 4y_1y_2] = 34$.

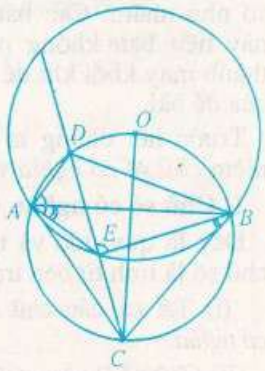
Bài 5. a) Ta có $\widehat{EBC} = \widehat{EAB}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{EB}$)

$\widehat{DCB} = \widehat{DAB}$

(cùng chắn $\overset{\frown}{BD}$).

Nên $\widehat{EBC}+\widehat{DCB} =$

$= \widehat{EAB}+\widehat{DAB}$.



Mặt khác :

$\widehat{EBC}+\widehat{DCB} = \widehat{BED}$,

$\widehat{EAB}+\widehat{DAB} = \widehat{DAE}$.

Vậy

$\widehat{BED} = \widehat{DAE}$ (đpcm).

b) Ta có

$\widehat{ADE} = \widehat{ABC} =$

$\widehat{CAB} = \widehat{EDB}$.

Theo kết quả a) $\widehat{BED} = \widehat{DAE}$, suy ra :

$\Delta BED \backsim \Delta EAD \Rightarrow \frac{DE}{DA} = \frac{DB}{DE}$ hay

$DE^2 = DA.DB$ (đpcm).

VÕ HỒNG TIẾN
(Sở GD-ĐT Đà Nẵng)

CHỮ SỐ CÓ NGHĨA và DẠNG TIÊU CHUẨN

VŨ KIM THỦY

Trong các đề kiểm tra và thi toán của các nước, một điều dễ nhận thấy là có nhiều bài tập yêu cầu tính toán và các phép tính khá phức tạp. Trong nhiều bài toán có các yêu cầu khác nhau về độ chính xác, về cách xác định và thể hiện kết quả. Việc xác định kết quả khi sử dụng máy tính cũng có yêu cầu như vậy. Để có thể tiếp cận với cách thi và những yêu cầu của đề thi như thế, loạt bài của chúng tôi đề cập đến những vấn đề về yêu cầu và kĩ năng tính. Ở đây các ví dụ không chú ý nhiều đến lắt léo về tư duy mà chỉ đòi hỏi sự tuân theo nghiêm ngặt các quy định về kết quả tính toán bên cạnh sự chọn lựa một cách tính hợp lí và nhanh nhất, sai số nhỏ nhất... Các bạn chớ coi thường vấn đề này nếu bạn không muốn công lao tính toán thành mây khói khi để kết quả khác với yêu cầu của đề bài.

Trước hết chúng ta cần nắm vững hai khái niệm *chữ số có nghĩa* và *dạng tiêu chuẩn*.

1. Chữ số có nghĩa. (Significant Figures)

Đây là quy ước và trong quy ước này thứ tự chữ số là tính từ bên trái sang phải.

(i) Tất cả các chữ số khác không là *chữ số có nghĩa.*

(ii) Chữ số 0 nằm giữa các chữ số khác không là *chữ số có nghĩa.*

(iii) Trong một số nguyên, các chữ số 0 sau chữ số khác không cuối cùng có thể là chữ số có nghĩa hoặc là không có nghĩa (để phân biệt cần có ghi chú).

(iv) Trong một số thập phân, các chữ số 0 trước chữ số khác không đầu tiên là *chữ số không có nghĩa.*

(v) Trong một số thập phân, các chữ số 0 sau chữ số khác không cuối cùng là *chữ số có nghĩa.*

Như vậy vấn đề dễ nhầm lẫn khi sử dụng quy ước này là các con số 0. Rắc rối nhất là trường hợp (iii). Nó có nguồn gốc thực tế là con số 30 chỉ số học sinh của một lớp thì số 0 này là hoàn toàn chính xác, trong khi số chỉ dân số một đô thị là 1300000 người thì các con số 0 chỉ là tương đối.

Trường hợp (v) cũng bắt nguồn từ một thực tế. Nếu nói chiều dài cái bàn là 1,20m thì ta coi độ chính xác của phép đo là đến cm, nếu nói là 1,200 m thì độ chính xác là mm.

Để thuận tiện từ nay về sau ta sẽ dùng kí hiệu = thay cho ≈ nhưng vẫn hiểu rằng kí hiệu đó chỉ số đo đúng hoặc gần đúng.

Ví dụ ở các cách viết sau nếu số bên trái là số đúng thì có thể nói (sau khi làm tròn số) :

7006 = 7000 chính xác đến 1 chữ số có nghĩa

7006 = 7000 chính xác đến 2 chữ số có nghĩa

7006 = 7010 chính xác đến 3 chữ số có nghĩa

7436 = 7000 chính xác đến 1 chữ số có nghĩa

0,00609 = 0,006 chính xác đến 1 chữ số có nghĩa

0,00609 = 0,0061 chính xác đến 2 chữ số có nghĩa

6,009 = 6,01 chính xác đến 3 chữ số có nghĩa.

Bạn có thể xem SGK và so sánh với khái niệm chữ số đáng tin.

2. Dạng tiêu chuẩn (Standard Form)

Các nhà khoa học thường phải làm việc với các số rất lớn hoặc rất nhỏ. Ví dụ khoảng cách từ sao Bêta đến Trái đất là :

300 000 000 000 000km. Số này có nhiều cách viết. Chẳng hạn

(i) 300×10^{12} km

(ii) 30×10^{13} km

(iii) 3×10^{14} km

Người ta đã thống nhất viết ở dạng tiêu chuẩn là $A \times 10^n$ trong đó $1 \le A < 10$ và n là số nguyên. Trong 3 cách viết trên thì cách (iii) là đúng ở dạng tiêu chuẩn. Dạng tiêu chuẩn còn gọi là *kí hiệu khoa học* (scientific notation). Dạng viết không có lũy thừa được gọi là *dạng thông thường* (ordinary form).

3. Các bài tập áp dụng

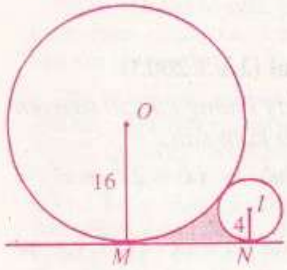
a) ***Ví dụ 1.*** *Tìm giá trị của góc x chính xác đến 3 chữ số có nghĩa nếu sinx = 0,45 và* $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Hướng dẫn giải. Sử dụng máy tính bỏ túi, ấn $0.45 . \boxed{\sin^{-1}}$ sẽ có kết quả 0,466 765 339. Do yêu cầu chính xác đến 3 chữ số có nghĩa nên kết quả là 0,467 rad.

Một số máy tính không có phím $\boxed{\sin^{-1}}$ thì ấn phím $\boxed{\text{inv}}$ trước khi ấn $\boxed{\sin}$. Đối với máy có DAL thì ấn $\boxed{\sin^{-1}}$ 0.45 $\boxed{=}$ để có kết quả.

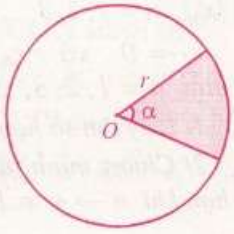
(Chú ý là trong yêu cầu viết chữ số có nghĩa hay viết kết quả đúng đến bao nhiêu chữ số thập phân vẫn tuân theo nguyên tắc làm tròn "5 lấy 4 bỏ".

Chẳng hạn, yêu cầu tìm x nếu $\tan x = 2,4$ và $0 < x < \frac{\pi}{2}$ với kết quả đúng đến 2 chữ số thập phân thì từ kết quả trên màn hình 1,176 005 207 ta viết là $x = 1,18$ rad).



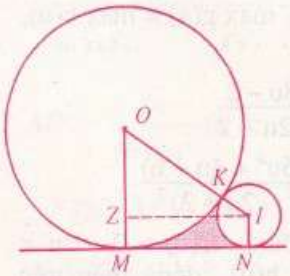
b) ***Ví dụ 2.*** *Hai hình tròn có bán kính 16cm và 4cm tiếp xúc ngoài nhau và cùng tiếp xúc với đường thẳng MN như hình vẽ. Tìm diện tích được gạch chéo giới hạn giữa hai hình tròn và đường thẳng với kết quả chính xác đến 3 chữ số có nghĩa.*

Hướng dẫn giải.
Trước tiên, để thuận tiện cho các bài tính toán diện tích chúng ta làm quen với công thức tính diện tích hình quạt $S_q = \frac{1}{2}r^2\alpha$. (Kết quả này có được nhờ tỉ lệ thức $\frac{S_q}{\pi r^2} = \frac{\alpha}{2\pi}$).



Trở lại bài toán, trong quá trình tính các phép tính trung gian do yêu cầu của đề bài ta cần chọn các kết quả với 4 chữ số có nghĩa.

Hạ $IZ \perp OM$, ta có $MZ = NI = 4$cm, $OZ = 12$cm và $OI = 20$cm.



Theo định lí Pitago $IZ = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$(cm).

Ta có $\sin\widehat{IOZ} = \frac{16}{20}$ nên sđ$\widehat{IOZ} = 0,9273$ rad.

Trong hình thang $OINM$ có sđ$\widehat{OIN} = \pi - 0,9273 = 2,214$ (rad).

Diện tích hình thang $OINM = \frac{1}{2}(MO + NI)IZ = \frac{1}{2}(4+16).16 = 160(\text{cm}^2)$

Diện tích hình quạt $OKM = \frac{1}{2}r^2.\text{sđ}\widehat{IOZ} = \frac{1}{2}.16^2.0,9273 = 118,7\ (\text{cm}^2)$.

Diện tích hình quạt $IKN = \frac{1}{2}r^2.\text{sđ}\widehat{OIN} = \frac{1}{2}.4^2.2,214 = 17,71\ (\text{cm}^2)$

Do đó diện tích miền gạch chéo là :

$160 - 118,7 - 17,71 = 23,59\ (\text{cm}^2)$.

Theo yêu cầu bài toán lấy kết quả là $23,6(\text{cm}^2)$.

c) ***Ví dụ 3.*** *Khoảng cách trung bình từ Mặt trăng đến Trái đất là $2,56 \times 10^{-3}$ đơn vị thiên văn. Biết rằng một đơn vị thiên văn là $1,50 \times 10^8$km. Tính khoảng cách trung bình theo km từ Mặt trăng đến Trái đất và viết kết quả ở dạng tiêu chuẩn.*

Hướng dẫn giải. Khoảng cách trung bình từ Mặt trăng đến Trái đất tính theo km là :

$2,56 \times 10^{-3} \times 1,50 \times 10^8 = 3,84 \times 10^5$ (km).

Chú ý : Bài này không yêu cầu về độ chính xác của chữ số có nghĩa nên kết quả có thể viết $3,840 \times 10^5$ km. Tuy nhiên, đề bài cho 2 chữ số thập phân thì ta nên để kết quả có 2 chữ số thập phân.

Chú ý rằng nếu đề bài không chỉ rõ số chữ số có nghĩa thì với 2 bài toán lần lượt cho $\pi = 3,14$ và $\pi = 3,142$ ta lấy kết quả tương ứng sẽ là 2 và 3 chữ số thập phân như số π.

Bây giờ mời các bạn hãy giải các bài tập sau :

1. Biểu diễn các số

(i) 2,149 chính xác đến một chữ số thập phân.

(ii) 408 chính xác đến hai chữ số có nghĩa.

(iii) 0,0054 ở dạng tiêu chuẩn.

2. Đổi 486mm ra cm chính xác đến hàng đơn vị (đúng đến cm gần nhất).

3. Ước lượng giá trị của $\frac{5,96}{2,02}$ đến một chữ số có nghĩa.

4. Biểu diễn $\sqrt[3]{0,000008}$ dưới dạng tiêu chuẩn.

ĐỀ VÀ ĐÁP ÁN THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA MÔN TOÁN - LỚP 12 THPT NĂM HỌC 2002-2003

BẢNG B

NGUYỄN KHẮC MINH
(Cục Khảo thí và Kiểm định CLGD - Bộ GD&ĐT)

I. ĐỀ THI

Ngày thi thứ nhất (12/3/2003)

Bài 1: *Cho hàm số f xác định trên tập hợp số thực R, lấy giá trị trên R và thỏa mãn điều kiện*

$$f(\cot gx) = \sin 2x + \cos 2x$$

với mọi x thuộc khoảng $(0; \pi)$.

Hãy tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(\sin^2 x).f(\cos^2 x)$ trên R.

Bài 2: *Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Trên đường thẳng AC lấy các điểm M, N sao cho $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC}$. Gọi D là hình chiếu vuông góc của M trên đường thẳng BC, E là hình chiếu vuông góc của N trên đường thẳng AB.*

1/ Chứng minh rằng trực tâm H của tam giác ABC nằm trên đường tròn tâm O' ngoại tiếp tam giác BED.

2/ Chứng minh rằng trung điểm của đoạn thẳng AN đối xứng với B qua trung điểm của đoạn thẳng OO'.

Bài 3: *Xét số nguyên $n > 1$. Người ta muốn tô tất cả các số tự nhiên bởi hai màu xanh, đỏ sao cho các điều kiện sau được đồng thời thỏa mãn:*

i/ Mỗi số được tô bởi một màu, và mỗi màu đều được dùng để tô vô số số;

ii/ Tổng của n số đôi một khác nhau cùng màu là số có cùng màu đó.

Hỏi có thể thực hiện được phép tô màu nói trên hay không, nếu:

1/ $n = 2002$?

2/ $n = 2003$?

Ngày thi thứ hai (13/3/2003)

Bài 4: *Hỏi có tồn tại hay không các số nguyên x, y, u, v, t thỏa mãn điều kiện sau:*

$$x^2 + y^2 = (x+1)^2 + u^2 = (x+2)^2 + v^2 = (x+3)^2 + t^2.$$

Bài 5: *Hãy tìm tất cả các đa thức P(x) với hệ số thực, thỏa mãn hệ thức*

$$(x^3+3x^2+3x+2)P(x-1) = (x^3-3x^2+3x-2)P(x)$$

với mọi số thực x.

Bài 6: *Cho số thực $\alpha \neq 0$, và cho dãy số thực $\{x_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, xác định bởi:*

$$x_1 = 0 \quad \text{và} \quad x_{n+1}(x_n + \alpha) = \alpha + 1 \quad \text{với mọi } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

1/ Hãy tìm số hạng tổng quát của dãy $\{x_n\}$.

2/ Chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$. Hãy tìm giới hạn đó.

II. ĐÁP ÁN

Bài 1: Ta có:

$$f(\cot gx) = \sin 2x + \cos 2x \quad \forall x \in (0; \pi)$$

$$\Leftrightarrow f(\cot gx) = \frac{2\cot gx}{\cot g^2 x + 1} + \frac{\cot g^2 x - 1}{\cot g^2 x + 1}$$

$$= \frac{\cot g^2 x + 2\cot gx - 1}{\cot g^2 x + 1} \quad \forall x \in (0; \pi).$$

Từ đó, với lưu ý rằng với mỗi $t \in R$ đều tồn tại $x \in (0; \pi)$ sao cho $\cot gx = t$, ta được:

$$f(t) = \frac{t^2 + 2t - 1}{t^2 + 1} \quad \forall t \in R.$$

Dẫn tới:

$$g(x) = f(\sin^2 x).f(\cos^2 x) =$$

$$= \frac{\sin^4 2x + 32\sin^2 2x - 32}{\sin^4 2x - 8\sin^2 2x + 32} \quad \forall x \in R. \qquad (1)$$

Đặt $u = (1/4)\sin^2 2x$. Dễ thấy, khi x chạy qua R thì u chạy qua $[0; 1/4]$. Vì vậy, từ (1) ta được:

$$\min_{x \in R} g(x) = \min_{0 \le u \le 1/4} h(u) \text{ và } \max_{x \in R} g(x) = \max_{0 \le u \le 1/4} h(u),$$

trong đó $h(u) = \dfrac{u^2 + 8u - 2}{u^2 - 2u + 2}$

Ta có: $h'(u) = \dfrac{2(-5u^2 + 4u + 6)}{(u^2 - 2u + 2)^2}$

Dễ dàng chứng minh được $h'(u) > 0 \quad \forall u \in [0; 1/4]$. Suy ra hàm h(u) đồng biến trên

[0; 1/4]. Vì vậy, trên [0; 1/4] ta có: min h(u) = h(0) = -1 và max h(u) = h(1/4) = 1/25.

Vậy: min g(x) = -1, đạt được chẳng hạn khi x = 0.

max g(x) = 1/25, đạt được chẳng hạn khi $x = \pi/4$.

• **Chú ý**: Đối với bài làm của thí sinh, yêu cầu trình bày chi tiết việc chứng minh $h'(u) > 0$ $\forall u \in [0; 1/4]$.

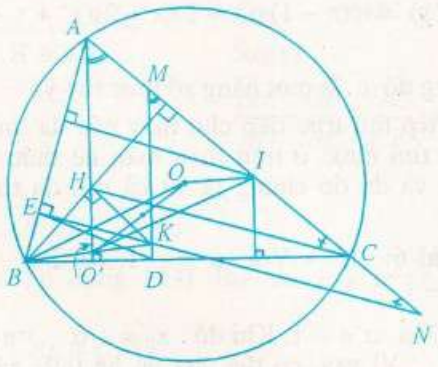
Bài 2: 1/ Gọi K là giao điểm của các đường thẳng MD và NE. Dễ thấy, đường tròn đường kính BK ngoại tiếp Δ BED.

Ta có:

AH // MK (vì cùng vuông góc với BC).

CH // NK (vì cùng vuông góc với BC).

Suy ra: ∠ HAC = ∠ KMN và ∠ ACH = ∠ MNK.



Từ các đẳng thức trên và giả thiết AC = MN suy ra Δ AHC = Δ MKN. Do đó d(K, AC) = d(H, AC). Mà K và H nằm cùng phía đối với đường thẳng AC, nên KH // AC. Suy ra KH ⊥ BH. Do đó H nằm trên đường tròn đường kính BK ngoại tiếp Δ BED.

2/ Từ chứng minh của phần trên hiển nhiên có O' là trung điểm của đoạn thẳng BK. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AN. Dễ thấy, hình chiếu vuông góc của I trên BA và trên BC tương ứng là trung điểm của EA và DC. Do đó, hình chiếu vuông góc của vectơ $\overrightarrow{O'I}$ trên BA và trên BC tương ứng bằng 1/2 vectơ $\overrightarrow{BA}$ và 1/2 vectơ $\overrightarrow{BC}$. Suy ra $\overrightarrow{O'I} = \overrightarrow{BO}$. Do đó, tứ giác BO'IO là hình bình hành. Vì thế, các điểm B và I đối xứng với nhau qua trung điểm của đoạn thẳng OO'.

Bài 3: 1/ Xét $n = 2002$. Ta sẽ chứng minh rằng câu trả lời cho câu hỏi của bài toán trong trường hợp này là "*không*".

Thật vậy, giả sử, ngược lại, ta có thể tô tất cả các số tự nhiên bằng hai màu xanh, đỏ sao cho mỗi số được tô bởi một màu, mỗi màu được dùng để tô vô số số, và tổng của 2002 số đôi một khác nhau cùng màu là số có cùng màu đó. Khi đó, do có vô số số được tô bởi màu xanh và có vô số số được tô bởi màu đỏ nên:

+ Tồn tại số a_1 mà a_1 được tô bởi màu xanh và số $b_1 = a_1 + 1$ được tô bởi màu đỏ;

+ Tồn tại số $b_2 > b_1$ mà b_2 được tô bởi màu đỏ và số $a_2 = b_2 + 1$ được tô bởi màu xanh;

+ Tồn tại số $a_3 > a_2$ mà a_3 được tô bởi màu xanh và số $b_3 = a_3 + 1$ được tô bởi màu đỏ;

+ Tồn tại số $b_4 > b_3$ mà b_4 được tô bởi màu đỏ và số $a_4 = b_4 + 1$ được tô bởi màu xanh;

...

+ Tồn tại số $a_{2001} > a_{2000}$ mà a_{2001} được tô bởi màu xanh và số $b_{2001} = a_{2001} + 1$ được tô bởi màu đỏ;

+ Tồn tại số $b_{2002} > b_{2001}$ mà b_{2002} được tô bởi màu đỏ và số $a_{2002} = b_{2002} + 1$ được tô bởi màu xanh.

Tóm lại, tồn tại 2002 số $a_1, a_2, \ldots, a_{2001}, a_{2002}$ đôi một khác nhau và 2002 số $b_1, b_2, \ldots, b_{2001}, b_{2002}$ đôi một khác nhau thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

(i) 2002 số $a_1, a_2, \ldots, a_{2001}, a_{2002}$ được tô bởi màu xanh; và 2002 số $b_1, b_2, \ldots, b_{2001}, b_{2002}$ được tô bởi màu đỏ.

(ii) $b_{2k-1} = a_{2k-1} + 1$ và $b_{2k} = a_{2k} - 1$ với mọi $k = 1, 2, \ldots, 1001$.

Từ điều kiện (i) suy ra số $a = a_1 + a_2 + \ldots + a_{2001} + a_{2002}$ được tô bởi màu xanh, và số $b = b_1 + b_2 + \ldots + b_{2001} + b_{2002}$ được tô bởi màu đỏ.

Từ điều kiện (ii) dễ dàng suy ra a = b. Do đó a và b phải được tô cùng màu, mâu thuẫn với điều vừa nhận được ở trên. Từ đó suy ra điều cần chứng minh.

2/ Với $n = 2003$, xét cách tô màu sau: Tô tất cả các số chẵn bởi màu xanh và tô tất cả các số lẻ bởi màu đỏ. Dễ thấy, cách tô màu vừa nêu thỏa mãn tất cả các yêu cầu của bài toán. Vậy, trong trường hợp này câu trả lời cho câu hỏi của bài ra là "*có*".

Bài 4: • Dễ thấy, với a là một số nguyên tùy ý, ta có:

$$a^2 \equiv \begin{cases} 1 \pmod 8 \text{ nếu } a \equiv \pm 1 \pmod 4 \\ 0 \pmod 8 \text{ nếu } a \equiv 0 \pmod 4 \\ 4 \pmod 8 \text{ nếu } a \equiv 2 \pmod 4 \end{cases}$$

Suy ra, với a, b là hai số nguyên tùy ý, ta có:

$$a^2 + b^2 \equiv \begin{cases} 2; 1; 5 \pmod 8 \text{ nếu } a \equiv \pm 1 \pmod 4 \\ 1; 0; 4 \pmod 8 \text{ nếu } a \equiv 0 \pmod 4 \\ 5; 4; 0 \pmod 8 \text{ nếu } a \equiv 2 \pmod 4 \end{cases}$$

• Giả sử tồn tại các số nguyên x, y, u, v, t thỏa mãn các hệ thức của đề bài. Khi đó, do x, x + 1, x + 2, x + 3 lập thành một hệ thặng dư đầy đủ modulo 4 nên, theo trên, phải tồn tại số nguyên m sao cho

$$m \in \{2; 1; 5\} \cap \{1; 0; 4\} \cap \{5; 4; 0\} = \varnothing.$$

Điều vô lý vừa nhận được cho thấy giả sử nêu trên là sai, nghĩa là *không tồn tại các số nguyên* x, y, u, v, t *thỏa mãn các hệ thức của đề bài.*

Bài 5: Ta có:

$$(x^3 + 3x^2 + 3x + 2)P(x - 1) =$$
$$= (x^3 - 3x^2 + 3x - 2)P(x) \quad \forall x \in R \qquad (2)$$
$$\Leftrightarrow \quad (x + 2)(x^2 + x + 1)\,P(x - 1) =$$
$$= (x - 2)(x^2 - x + 1)P(x) \quad \forall x \in R \qquad (3)$$

Thay $x = -2$ vào (3) ta được

$$0 = -28.P(-2) \Rightarrow P(-2) = 0.$$

Thay $x = 2$ vào (3) ta được

$$28.P(1) = 0 \Rightarrow P(1) = 0.$$

Từ đó:

+ Thay $x = -1$ vào (2) ta được

$$0 = -9.P(-1) \Rightarrow P(-1) = 0.$$

+ Thay $x = 1$ vào (2) ta được

$$9.P(0) = 0 \Rightarrow P(0) = 0.$$

Từ các kết quả trên suy ra

$$P(x) = (x - 1)x(x + 1)(x + 2)Q(x) \ \forall x \in R \quad (4)$$

trong đó Q(x) là một đa thức với hệ số thực của biến x. Dẫn tới:

$$P(x - 1) = (x - 2)(x - 1)x(x + 1)Q(x - 1) \quad \forall x \in R. \qquad (5)$$

Từ (3), (4) và (5) ta được:

$$(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)(x^2+x+1)Q(x-1)$$
$$= (x - 2)(x - 1)x(x + 1)(x + 2)(x^2 - x + 1)Q(x)$$
$$\forall x \in R.$$

Suy ra: $(x^2 + x + 1)Q(x - 1) = (x^2 - x + 1)Q(x)$ $\forall x \neq 0; \pm 1; \pm 2$.

Do mỗi vế của đẳng thức trên là một đa thức của biến x nên

$$(x^2+x+1)Q(x-1) = (x^2-x+1)Q(x) \ \forall x \in R \ (6)$$

Từ đó, do $(x^2 + x + 1, x^2 - x + 1) = 1$, suy ra:

$$Q(x) = (x^2 + x + 1)R(x) \ \forall x \in R \qquad (7)$$

trong đó R(x) là một đa thức với hệ số thực của x.

Dẫn tới:

$$Q(x - 1) = (x^2 - x + 1)R(x - 1) \ \forall x \in R \quad (8)$$

Từ (6), (7) và (8) ta được:

$$(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)R(x - 1) =$$
$$= (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)R(x) \quad \forall x \in R.$$

Từ đó, do $(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) \neq 0$ $\forall x \in R$, ta được $R(x - 1) = R(x)$ $\forall x \in R$. Suy ra R(x) là đa thức hằng. Từ đây và (7), (4) ta được:

$$P(x) = c(x - 1)x(x + 1)(x + 2)(x^2 + x + 1) \quad \forall x \in R,$$

trong đó c là một hằng số thực tùy ý.

Phép thử trực tiếp cho thấy các đa thức P(x) vừa tìm được ở trên thỏa mãn hệ thức của đề bài, và do đó chúng là tất cả các đa thức cần tìm.

Bài 6: 1/ • Với $\alpha = -1$, dễ thấy $x_n = 0$ $\forall n = 1, 2, 3, \ldots$.

• Xét $\alpha \neq -1$. Khi đó $x_n \neq -\alpha$ $\forall n = 1, 2, 3, \ldots$. Vì vậy, có thể viết lại hệ thức xác định dãy $\{x_n\}$ dưới dạng tương đương sau:

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + 1}{x_n + \alpha} \quad \forall n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (9)$$

Vì $x_1 = 0$ nên từ hệ thức trên ta được $x_2 = \dfrac{\alpha + 1}{\alpha}$.

Đặt $p_1 = 0$, $p_2 = \alpha + 1$, $q_1 = 1$, $q_2 = \alpha$; ta có $x_1 = \dfrac{p_1}{q_1}$ và $x_2 = \dfrac{p_2}{q_2}$. Giả sử x_k có dạng $x_k = \dfrac{p_k}{q_k}$. Khi đó từ (9) suy ra x_{k+1} có dạng $x_{k+1} = \dfrac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$, trong đó $p_{k+1} = (\alpha + 1)q_k$ và $q_{k+1} = \alpha q_k + p_k$. Vì vậy, theo nguyên lí qui nạp, x_n có dạng $x_n = \dfrac{p_n}{q_n}$ $\forall n = 1, 2, 3, \ldots$; trong đó $\{p_n\}$ và $\{q_n\}$ xác định bởi: $p_1 = 0$,

(Xem tiếp trang 24)

GIÚP BẠN TỰ ÔN THI

Để đáp ứng nhu cầu đông đảo của các bạn chuẩn bị thi tốt nghiệp THPT và Đại học, Cao đẳng Tạp chí THTT sẽ lần lượt đăng một số đề của các giáo viên giàu kinh nghiệm nhằm giúp các bạn tự rèn luyện các phương pháp giải các loại bài thường gặp trong đề thi, và điều không kém phần quan trọng là cách trình bày lời giải bài thi trong thời gian cho phép. Phần hướng dẫn giải sẽ đăng trong số báo tiếp theo.

ĐỀ TỰ ÔN THI SỐ 1

(Thời gian làm bài : 180 phút)

Câu I. (2 điểm)

Cho hàm số : $y = \dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$ (C)

1) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số.

2) Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận của (C). Hãy viết phương trình hai đường thẳng đi qua I sao cho chúng có hệ số góc nguyên và cắt (C) tại 4 điểm phân biệt là các đỉnh của một hình chữ nhật.

Câu II. (2 điểm)

1) Bằng định nghĩa, hãy tính đạo hàm của hàm số : $f(x) = |x|^3 + e^x$ tại điểm $x = 0$.

2) Biện luận theo m, miền xác định của hàm số : $y = \dfrac{\sqrt{mx^2+(m+3)x+3}}{x+1}$

3) Các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z \le 0$$

Hãy tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức : $F = 2x + 3y - 2z$.

Câu III. (2 điểm)

1) Các góc của tam giác ABC thỏa mãn điều kiện :

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = \sin A + \sin B + \sin C + 4\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{C-A}{2}$$

Chứng minh rằng tam giác ABC đều.

2. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 3\operatorname{tg}\dfrac{y}{2} + 6\sin x = 2\sin(y-x) \\ \operatorname{tg}\dfrac{y}{2} - 2\sin x = 6\sin(y+x) \end{cases}$$

Câu IV. (2 điểm)

1) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcác vuông góc Oxy cho Hypebol $y = \dfrac{a}{x}$ $(a \ne 0)$. (H). Trên (H) lấy 6 điểm phân biệt A_i $(i = 1, ..., 6)$ sao cho : $A_1A_2 \,//\, A_4A_5$; $A_2A_3 \,//\, A_5A_6$. Chứng minh rằng : $A_3A_4 \,//\, A_1A_6$.

2) Cho tứ diện $ABCD$ có bán kính mặt cầu nội tiếp là r. Chứng minh rằng : $V_{ABCD} \ge \dfrac{32}{3}r^3$.

Câu V. (2 điểm)

1) Tìm $x > 0$ sao cho : $\displaystyle\int_0^x \frac{t^2.e^t}{(t+2)^2}dt = 1$.

2) Có bao nhiêu số tự nhiên có đúng 2004 chữ số mà tổng các chữ số bằng 4.

ĐẶNG VŨ HÀ
(Hà Tây)

ĐÓN ĐỌC

THTT SỐ 320 (2/2004)

- Ứng dụng của một hệ thức truy hồi.
- Phương pháp viết cát tuyến của đường cong.
- Hướng dẫn giải đề thi chọn học sinh giỏi toán THPT quốc gia bảng A năm 2003.
- Đề thi tuyển sinh lớp 10 PTCTT ĐHSP Hà Nội 2003.
- Hướng dẫn giải đề thi tuyển sinh lớp 10 PTCTT ĐHKHTN Hà Nội 2003.
- Đề tự ôn thi ĐH số 2. Hướng dẫn giải đề tự ôn thi ĐH số 1.
- Toán học và cơ cấu các loại đồng tiền.

Mời các bạn đặt mua THTT tại các cơ sở Bưu điện.

THTT

TÌM ĐIỀU KIỆN CỦA THAM SỐ ĐỂ HỆ PHƯƠNG TRÌNH CÓ NGHIỆM

HUỲNH DUY THỦY
(GV THPT Tăng Bạt Hổ, Hoài Nhơn, Bình Định)

Trong các bài toán về phương trình (PT), bất phương trình (BPT), hệ PT , hệ BPT ta gặp khá nhiều bài toán chứa tham số với yêu cầu : Tìm điều kiện (ĐK) đối với tham số để PT, hệ PT, BPT, hệ BPT đã cho thỏa mãn một điều kiện ràng buộc nào đó.

Trong số các cách giải bài toán trên việc *tìm điều kiện cần* cho tham số thỏa mãn ĐK ràng buộc nói trên là rất cần thiết. Thông thường các biểu thức giải tích có trong PT, hệ PT, BPT, hệ BPT ẩn dấu một tính chất nào đó. *Ta cần phát hiện và khai thác tính chất ấy để tìm ra mối quan hệ đặc biệt hoặc một ràng buộc đối với tham số, từ đó tìm ra điều kiện cần*, đây là chìa khóa để giải quyết bài toán.

Giải loại toán này thường qua bốn bước sau :

• Nhận xét về tính chất của nghiệm của PT, hệ PT, BPT, hệ BPT.

• Từ nhận xét trên và ĐK ràng buộc suy ra một điều kiện cần của tham số.

• Với giá trị tìm được của tham số cần chứng tỏ rằng PT, hệ PT, BPT, hệ BPT thỏa mãn ĐK ràng buộc.

• Kết luận.

Thông qua các bài toán cụ thể chúng tôi sẽ làm sáng tỏ việc khai thác các tính chất ẩn dấu chứa trong các biểu thức để giải một số bài toán hay thuộc dạng này.

Bài toán 1. *Cho PT :* $4^x + 2 = m.2^x.\sin\pi x$ (1)

Tìm giá trị của tham số m để PT (1) có nghiệm duy nhất.

Lời giải. • *Nhận xét.* PT (1) ⇔

$$2^x + 2^{1-x} = m\sin\pi x \qquad (2)$$

Nhận thấy PT (2) có một tính chất đặc biệt : *Nếu x_o là nghiệm của PT thì $1 - x_o$ cũng là nghiệm của PT đó.* Thật vậy nếu thay x_o bởi $1 - x_o$ thì $\sin\pi(1 - x_o) = \sin(\pi - \pi x_o) = \sin\pi x_o$ nên PT (2) vẫn có dạng như trước.

• Do đó *điều kiện cần* để PT (1) có *nghiệm duy nhất* là $x_o = 1 - x_o \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$. Thay $x_o = \frac{1}{2}$ vào (2) ta được $m = 2\sqrt{2}$.

Với $m = 2\sqrt{2}$ thì PT (2) trở thành :

$$2^x + 2^{1-x} = 2\sqrt{2}.\sin\pi x \qquad (3)$$

Ta có : $2^x + 2^{1-x} \geq 2\sqrt{2^x.2^{1-x}} = 2\sqrt{2}$.

Mặt khác $2\sqrt{2}.\sin\pi x \leq 2\sqrt{2}$.

Dấu đẳng thức xảy ra ở hai BĐT trên khi và chỉ khi : $\begin{cases} 2^x = 2^{1-x} \\ \sin\pi x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$. Vậy PT (3) có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{2}$.

• *Kết luận :* PT đã cho có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $m = 2\sqrt{2}$.

Bài toán 2. *Cho hệ phương trình*

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{1-y} = a+1 \\ \sqrt{1-x} + \sqrt{y} = a+1 \end{cases}$$

Tìm giá trị của tham số a để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Lời giải. • *Nhận xét.* ĐK có nghĩa : $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ (*).

Hệ PT có tính chất : Nếu (x_o, y_o) là nghiệm của hệ thì $(1-x_o, 1-y_o)$ cũng là nghiệm của hệ đó. Do tính duy nhất nghiệm của hệ nên có $\begin{cases} x_o = 1 - x_o \\ y_o = 1 - y_o \end{cases} \Leftrightarrow x_o = y_o = \frac{1}{2}$ thỏa mãn (*).

• Thay $x_o = y_o = \frac{1}{2}$ vào hệ ta được $a = \sqrt{2} - 1$ (đây là *ĐK cần* để hệ đã cho có nghiệm duy nhất).

• Với $a = \sqrt{2}-1$, hệ trên có dạng

$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{1-y}=\sqrt{2}\\ \sqrt{y}+\sqrt{1-x}=\sqrt{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{1-y}=\sqrt{2} & (1)\\ \sqrt{x}+\sqrt{1-x}+\sqrt{y}+\sqrt{1-y}=2\sqrt{2} & (2)\end{cases}$$

Theo BĐT Bu–nhi–a–cốp–xki :

$\sqrt{x}+\sqrt{1-x}\le\sqrt{2}$ và $\sqrt{y}+\sqrt{1-y}\le\sqrt{2}$, từ đó $\sqrt{x}+\sqrt{1-x}+\sqrt{y}+\sqrt{1-y}\le 2\sqrt{2}$.

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}x=1-x\\ y=1-y\end{cases} \Leftrightarrow x=y=\dfrac{1}{2}$

hay hệ (1), (2) có nghiệm duy nhất $(x, y) = \left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$.

• *Kết luận :* Hệ đã cho ở đầu bài có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $a = \sqrt{2}-1$.

Bài toán 3. *Cho hệ PT*

$$\begin{cases}z.\cos(x-y)+(2+xy)\sin(x+y)-z=0 & (1)\\ x^2+(y-1)^2+z^2=m+2x & (2)\\ (x+y+m\sin^2 z)\,[(1-m)\ln(1-xy)+1]=0 & (3)\end{cases}$$

Tìm giá trị của tham số m để hệ có nghiệm duy nhất.

Lời giải. • Nhận xét rằng PT (2) của hệ có thể viết lại dưới dạng :

$$(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=m+1.$$

Từ đó và từ hệ trên ta thấy nếu (x_o, y_o, z_o) là nghiệm của hệ thì (y_o, x_o, z_o) cũng là nghiệm của hệ.

• Do đó $x = y$ là *ĐK cần* để hệ có nghiệm duy nhất. Với $x = y$, PT (1) của hệ có dạng :

$$(2+x^2)\sin 2x=0 \Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2}\ (k\in Z)$$

Từ (3) có $xy < 1$, suy ra : $xy = \dfrac{k^2\pi^2}{4} < 1 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = y = 0$.

Thay vào PT (2) có $z^2 = m - 1$, PT này có nghiệm duy nhất khi $m = 1$.

• Ta chứng minh $m = 1$ thì hệ đã cho có nghiệm duy nhất. Thực vậy : với $m = 1$ PT (3) có dạng :

$x + y + \sin^2 z = 0 \Rightarrow x + y \le 0$. PT (2) có dạng : $x^2+y^2+z^2 = 2(x + y)$. Từ đó suy ra $x = y = z = 0$, hay hệ có nghiệm duy nhất $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

• *Kết luận :* Hệ đã cho có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $m = 1$.

Bài toán 4. *Tìm giá trị lớn nhất của a để BPT sau có ít nhất một nghiệm :*

$$\sqrt{a^3}.(x-1)^2+\frac{\sqrt{a}}{(x-1)^2}\le\sqrt[4]{a^3}\left|\sin\frac{\pi x}{2}\right|.$$

Lời giải. • *Nhận xét.* Giả sử x_o là 1 nghiệm của BPT với ĐK $x_o \ne 1$, $a \ge 0$. Khi đó

$$\sqrt{a^3}\,(x_o-1)^2+\frac{\sqrt{a}}{(x_o-1)^2}\le\sqrt[4]{a^3}\left|\sin\frac{\pi x}{2}\right|\le\sqrt[4]{a^3}\quad(1)$$

Áp dụng BĐT Cô-si có :

$$\sqrt{a^3.(x_o-1)^2}+\frac{\sqrt{a}}{(x_o-1)^2}\ge$$

$$\ge 2\sqrt{\sqrt{a^3}.(x_o-1)^2.\frac{\sqrt{a}}{(x_o-1)^2}}=2a\qquad(2)$$

• Từ (1), (2) suy ra ĐK cần của tham số là $2a\le\sqrt[4]{a^3}$ hay $0\le a\le\dfrac{1}{16}$.

• Với $a=\dfrac{1}{16}$ thì áp dụng BĐT Cô-si có

$$\frac{1}{8}\le\frac{(x-1)^2}{64}+\frac{1}{4(x-1)^2}\le\frac{1}{8}\left|\sin\frac{\pi x}{2}\right|$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\left|\sin\dfrac{\pi x}{2}\right|=1\\ (x-1)^4=2^4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\pi x=\pi+2k\pi\ (k\in Z)\\ \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=3.\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=3.\end{array}\right.$$

• *Kết luận :* Giá trị lớn nhất của a thỏa mãn đề bài là $a=\dfrac{1}{16}$.

Bài toán 5. *Cho hệ bất phương trình :*

$$\begin{cases}(3-2\sqrt{2})^y+(3+2\sqrt{2})^y-3m=x^2+6x+5\\ y^2-(m^2-5m+6)x^2=0\\ -6\le x\le 0\end{cases}$$

Xác định giá trị của tham số m để hệ có nghiệm duy nhất.

Lời giải. Nhận xét rằng :

(Xem tiếp trang 26)

CÁC LỚP TRUNG HỌC CƠ SỞ

Bài T1/319. (Lớp 6). Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình sau :

$$3^x + 1 = (y+1)^2$$

NGUYỄN TRẦN PHƯƠNG
(SV K6 Tin CĐSP Vĩnh Phúc)

Bài T2/319. (Lớp 7). Tam giác ABC có $BC = 2AB$. Gọi M là trung điểm của BC và D là trung điểm của BM. Chứng minh rằng $AC = 2AD$.

HUỲNH QUANG LÂU
(GV THCS Ngô Mây, Phù Cát, Bình Định)

Bài T3/319. Tìm ước số nguyên tố p của số $2^{37} - 1 = 137\,438\,953\,471$, biết rằng $p < 300$.

LÊ QUANG NẪM
(Cao học khoa Toán Tin ĐHKHTN Tp. HCM)

Bài T4/319. Giải phương trình sau với n là số nguyên dương đã cho :

$$(16x^{4n}+1)(y^{4n}+1)(z^{4n}+1) = 32x^{2n}y^{2n}z^{2n}$$

NGUYỄN ANH THUẤN
(GV THCS Trần Văn Ơn, Hồng Bàng, Hải Phòng)

Bài T5/319. Giả sử a, b, c là các số thực thỏa mãn $abc > 0$ và $|ab+bc+ca| = 2\sqrt{2004abc}$

Chứng minh rằng

$$(a+b-2004)(b+c-2004)(c+a-2004) \le 0.$$

PHAN LÊ NHẬT DUY
(GV THCS Lâm Mộng Quang, Vinh Mỹ, Phú Lộc, Thừa Thiên Huế)

Bài T6/319. Cho tam giác ABC có góc không nhọn với $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$$

TRẦN DŨNG TIẾN
(GV THCS Hợp Hòa, Tam Dương, Vĩnh Phúc)

Bài T7/319. Hai đường tròn tâm O bán kính R và tâm O' bán kính R' cắt nhau tại A và B. Từ điểm C trên tia đối của tia AB kẻ các tiếp tuyến CD và CE với đường tròn tâm O (D, E là các tiếp điểm và điểm E nằm trong đường tròn tâm O'). AD và AE cắt đường tròn tâm O' lần nữa lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng đường thẳng DE cắt MN tại trung điểm của MN.

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(Tp. Hồ Chí Minh)

CÁC LỚP TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

Bài T8/319. Một tờ giấy kẻ ô vuông gồm m hàng n cột ($m + n \ge 3$). Tô màu k ô vuông sao cho một ô bất kì nếu không được tô màu thì có ít nhất một điểm chung với một ô được tô màu. Tìm giá trị nhỏ nhất của k.

ĐINH VĂN KHÂM
(GV THPT Lương Văn Tụy, Ninh Bình)

Bài T9/319. Chứng minh rằng

$$x^2y + y^2z + z^2x \le x^3 + y^3 + z^3 \le$$
$$\le 1 + \frac{1}{2}(x^4 + y^4 + z^4)$$

trong đó x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 2$.

DƯƠNG CHÂU DINH
(GV THPT Lê Quý Đôn, Quảng Trị)

Bài T10/319. Tìm tất cả các hàm số $f : N^* \to N^*$ thỏa mãn điều kiện

$$2\left(f(m^2+n^2)\right)^3 = f^2(m).f(n) + f^2(n).f(m)$$

với mọi m khác n.

TÔ MINH HOÀNG
(SV K5, Hệ CNKHTN, ĐHKHTN Hà Nội)

Bài T11/319. Gọi AD, BE, CF là các đường cao của một tam giác nhọn ABC. Các cặp đoạn thẳng AD và EF, BE và FD, CF và DE cắt nhau tại M, N, P theo thứ tự. Kí hiệu S là diện tích tam giác. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{S_{ABC}} \le \frac{S_{MNP}}{S^2_{DEF}} \le \frac{1}{8\cos A.\cos B.\cos C.S_{ABC}}.$$

TRẦN NGỌC DIỆP
(K51A, khoa Toán, ĐHSP Hà Nội)

Bài T12/319. Xét các hình chóp tứ giác đều $SABCD$ với góc phẳng ở đỉnh $\widehat{ASB} = \alpha$ ($0 < \alpha \le 60^o$). Góc nhị diện cạnh bên bằng φ. Xác định α để biểu thức $P = \cos 3\varphi - 9\cos\varphi$ đạt giá trị lớn nhất.

HỒ CÔNG DŨNG
(GV THPT Trần Hưng Đạo, Bình Thuận)

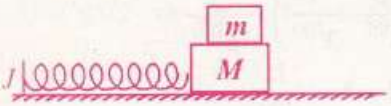
CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/319. Một lò xo có độ cứng k=80(N/m). Độ dài tự nhiên l_o = 20(cm), một đầu cố định tại J đầu kia mắc vào một vật khối lượng

$M = 200$ (g). Trên M đặt thêm vật có khối lượng $m = 600$ (g). Đặt hệ thống trên mặt phẳng nằm ngang nhẵn (hình vẽ). Ban đầu giữ vật M sao cho lò xo có độ dài $l_1 = 21$cm rồi thả nhẹ nhàng thì hệ dao động điều hòa.

1) Hãy viết phương trình dao động của hệ.

2) Sau khi dao động được 1,5 chu kì thì người ta cất đi vật m. Hãy viết phương trình dao động của vật còn lại. Mốc thời gian như cũ.



CHU VĂN BIÊN
(ĐH Hồng Đức, Thanh Hóa)

Bài L2/319. Hai thấu kính mỏng O_1 và O_2 cùng trục chính đặt cách nhau một khoảng $l = 32$cm. Thấu kính O_1 có tiêu cự $f_1 = 20$cm, O_2 có tiêu cự $f_2 = -10$cm. Một vật phẳng nhỏ AB đặt vuông góc với trục chính và ở trước O_1. Một màn hứng ảnh E đặt vuông góc với trục chính và ở sau O_2.

1) Để có thể hứng được ảnh của vật AB trên màn E, phải đặt vật trong khoảng nào ?

2) Người tìm được một vị trí đặt vật (để cho ảnh rõ trên màn) mà khi giữ vật và màn cố định, đổi chỗ hai thấu kính cho nhau (O_1 sang vị trí O_2 và O_2 sang vị trí O_1) thì ảnh các vật vẫn hiện rõ trên màn. Xác định vị trí của vật lúc đó.

3) Muốn ảnh của vật AB qua hệ là một ảnh có độ lớn không đổi và không phụ thuộc vào vị trí đặt vật, thì phải dịch chuyển O_2 một khoảng bao nhiêu, theo chiều nào so với vị trí ban đầu của nó (khi chưa đổi chỗ) ? Hãy cho biết bản chất của ảnh đó (thật hay ảo).

NGUYỄN QUANG HẬU
(Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/319. (For 6th grade). Find solutions in positive integers of the equation $3^x + 1 = (y+1)^2$

T2/319. (For 7th grade). Let be given a triangle ABC with $BC = 2AB$. Let M be the midpoint of BC and D be the midpoint of BM. Prove that $AC = 2AD$.

T3/319. Find the prime divisor $p < 300$ of the number $2^{37} - 1 = 137438953471$.

T4/319. Solve the equation

$$(16x^{4n}+1)(y^{4n}+1)(z^{4n}+1) = 32x^{2n}y^{2n}z^{2n}$$

where n is a given positive integer.

T5/319. Let a, b, c be real numbers satisfying the conditions : $\begin{cases} abc > 0, \\ |ab+bc+ca| = 2\sqrt{2004abc}. \end{cases}$

Prove that

$$(a+b-2004)(b+c-2004)(c+a-2004) \le 0.$$

T6/319. ABC is an arbitrary not acute triangle. Put $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Find the least value of the expression $\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$.

T7/319. The circle (O, R) with center O, radius R cuts the circle (O', R') with center O', radius R' at A and B. From a point C on the opposite ray of the ray AB, draw the tangents CD and CE to the circle (O, R) (D and E are tangent points, E lies inside (O', R')). AD and AE cut again the circle (O', R') respectively at M and N. Prove that the line DE passes through the midpoint of MN.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T8/319. Consider the colourings of a rectangular board of size $m \times n$ ($m + n \ge 3$) such that k little squares of the board are coloured and each not coloured little squares has at least a common point with a coloured little square. Find the least value of k.

T9/319. Prove that

$$x^2y+y^2z+z^2x \le x^3+y^3+z^3 \le 1 + \frac{1}{2}(x^4+y^4+z^4),$$

for non negative real numbers x, y, z satisfying the condition $x + y + z = 2$.

T10/319. Find all functions $f : N^* \to N^*$ satisfying the condition

$$2\left(f(m^2+n^2)\right)^3 = f^2(m).f(n) + f^2(n).f(m)$$

for all distinct $m, n \in N^*$.

(Xem tiếp trang 24)

Bài T1/315. (Lớp 6). *Gọi A là tích các số nguyên liên tiếp từ 1 đến 1001 và B là tích các số nguyên liên tiếp từ 1002 đến 2002. Hỏi số A + B có chia hết cho 2003 không ?*

Bạn tìm được mấy cách giải ?

Lời giải. ***Cách 1.*** Ta có $A = 1.2...1001$ và $B = 1002.1003...2002$.

Ta viết

$B = (2003-1001)(2003-1000)...(2003-1)$

Nếu thực hiện các phép toán để khai triển B thì ta được một tổng mà trong đó, ngoài số hạng $-1001.1000...2.1$, tất cả các số hạng còn lại đều chứa thừa số 2003.

Như vậy $B = 2003n - 1001.1000....2.1 = 2003n - A$ với n là một số tự nhiên.

Từ đó, ta được $A + B = 2003n$ là một số chia hết cho 2003.

Cách 2. Ta có các cặp số nguyên sau đây có cùng số dư khi chia cho 2003 : 1002 và -1001 1003 và -1000, ..., 2002 và -1.

Do đó tích $B = 1002.1003...2002$ và tích $-A = -1001.1000...2.1$ có cùng số dư khi chia cho 2003 nên $A + B = B - (-A)$ chia hết cho 2003.

Nhận xét. 1) Một số bạn đã đưa ra bài toán tổng quát sau : Nếu a và $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số nguyên và n là số tự nhiên lẻ thì $a_1a_2...a_n + (a-a_1)(a-a_2)...(a-a_n) \vdots a$.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Hà Nội : *Nguyễn Đức Minh*, 7H, THCS Lê Quý Đôn, Cầu Giấy ; **Hà Tây :** *Trần Thị Huyền Trang*, 7B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa, *Nguyễn Hoàng Anh*, 6A, THCS Nguyễn Văn Huyên, Hoài Đức ; **Hải Dương :** *Nguyễn Anh Dũng*, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách ; **Khánh Hòa :** *Nguyễn Xuân Quý*, lớp 6, THCS Trần Nhật Duật, Tp. Nha Trang.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T2/315. (Lớp 7). *Chứng minh rằng tổng*

$$A = \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^4} + ... + \frac{1}{3^{4n-2}} - \frac{1}{3^{4n}} + ... + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{100}}$$

nhỏ hơn 0,1. Hãy tổng quát hóa bài toán trên.

Lời giải.

$$9A = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} - ... + \frac{1}{3^{4n-4}} - \frac{1}{3^{4n-2}} + ... + \frac{1}{3^{96}} - \frac{1}{3^{98}}$$

$$\Rightarrow 9A = 1 - \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^4} + ... - \frac{1}{3^{4n-4}} + \frac{1}{3^{4n-2}} - ... - \frac{1}{3^{96}} + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{100}}\right) - \frac{1}{3^{100}}$$

$$\Rightarrow 9A = 1 - A - \frac{1}{3^{100}}$$

$$\Rightarrow 10A = 1 - \frac{1}{3^{100}} < 1 \Rightarrow A < \frac{1}{10} = 0,1.$$

Bài toán tổng quát : Chứng minh rằng tổng $B = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^4} + ... + \frac{1}{a^{4n-2}} - \frac{1}{a^{4n}}$ nhỏ hơn $\frac{1}{a^2+1}$, trong đó $n \in N^*$.

Chứng minh tương tự như trên.

Nhận xét. Một số bạn biến đổi dài hoặc nêu bài toán tổng quát chưa chính xác. Các bạn sau có lời giải đúng, gọn :

Phú Thọ : *Đinh Thu Trang, Trần Minh Nguyên Hạnh*, 7A1, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh ; *Tạ Thị Kim Phượng, Nguyễn Thùy Dung, Vũ Ngọc Bích, Trần Hòa Bình*, 7A1, THCS Lâm Thao ; **Vĩnh Phúc :** *Dương Thu Trang, Nguyễn Khánh Duy*, 7B, THCS Lập Thạch, *Trần Văn Dương*, 7A, THCS Yên Lạc ; **Hà Tây :** *Trần Thị Thùy Trang*, 7B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa ; **Bắc Ninh :** *Hoàng Văn Hiếu*, 7B, THCS Yên Phong ; **Hải Dương :** *Phạm Ngọc Hiến, Nguyễn Anh Tú*, 7B, THCS Lê Quý Đôn, Tp. Hải Dương ; **Quảng Nam :** *Nguyễn Thiên Nhật Hồng*, 7/2, THCS Trần Cao Vân, Duy Xuyên ; **Bình Định :** *Nguyễn Sử Phương Phúc*, 7A2, *Tào Nguyễn Quang Khanh*, 7A1, *Thái Quang Huy, Huỳnh Hoàng Vy*, 7A4, THCS Ngô Mây, Phù Cát.

VIỆT HẢI

Bài T3/315. *Tìm giá trị lớn nhất của tổng* $T = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, *trong đó a, b, c là các số nguyên dương thỏa mãn* $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1$.

Lời giải. (Của bạn *Nguyễn Thị Hoàng Oanh*, 9^1, THCS Đinh Tiên Hoàng, Ninh Hòa, **Khánh Hòa**).

Do vai trò của a, b, c bình đẳng, ta giả sử $a \le b \le c$. Vì $a, b, c \in Z^+$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1$ (*) nên $2 \le a \le b \le c$. Xét các trường hợp :

1) $a = 2$, thì từ (*) suy ra $b \geq 3$.

+ Nếu $b = 3$ thì $T = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{c} < 1 \Leftrightarrow c > 6$. Để T đạt giá trị lớn nhất thì $c = 7$. Khi đó $T = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}=\frac{41}{42}$.

+ Nếu $b \geq 4$ thì do (*) ta có $c \geq 5$. Khi đó $T \leq \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{19}{20}<\frac{41}{42}$.

2) $a \geq 3$, thì $b \geq 3$ và do (*) ta có $c \geq 4$. Khi đó $T \leq \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{11}{12}<\frac{41}{42}$.

Vậy giá trị lớn nhất của T đạt được là $\frac{41}{42}$ khi $(a, b, c) = (2, 3, 7)$ và các hoán vị của nó.

Nhận xét. 1) Nhiều bạn đã đưa ra kết quả sai do xét thiếu một số trường hợp. Chỉ một số ít bạn giải đúng, chặt chẽ bài này. Các bạn có lời giải tốt ngoài bạn Oanh là : **Bắc Ninh :** *Tạ Khắc Công*, 8^b, THCS Yên Khang ; **Hải Dương :** *Nguyễn Mạnh Đức*, 9A1, THCS Chu Văn An, Thanh Hà ; **Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Xuân Thọ*, 9B, THCS Vĩnh Yên ; *Nguyễn Hoài Nam*, 9D, THCS Liên Bảo, Vĩnh Yên ; **Thanh Hóa :** *Nguyễn Đức Thương*, 9B, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc ; *Lê Xuân Thống Nhất*, 9B, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa ; **Bắc Giang :** *Phan Ngọc Thức*, 9A, THCS Nguyên Hồng, Tân Yên.

TRẦN HỮU NAM

Bài T4/315. *Giải phương trình*

$$\sqrt{\frac{42}{5-x}}+\sqrt{\frac{60}{7-x}}=6 \qquad (1)$$

Lời giải. (Của bạn *Nguyễn Kim Thuật*, 9A , THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**).

ĐK để PT (1) có nghĩa là $x < 5$.

$$(1) \Leftrightarrow \left(3-\sqrt{\frac{42}{5-x}}\right)+\left(3-\sqrt{\frac{60}{7-x}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{9-\frac{42}{5-x}}{3+\sqrt{\frac{42}{5-x}}}+\frac{9-\frac{60}{7-x}}{3+\sqrt{\frac{60}{7-x}}}=0$$

Rút gọn tử thức của hai phân thức trên được $3(1-3x).A = 0$, trong đó biểu thức $A > 0$, suy ra PT này có nghiệm duy nhất $x = 1/3$. Thử lại đúng.

Nhận xét. Khá đông bạn giải bài toán này và hầu hết đều tìm đúng nghiệm. Tuy vậy vẫn có bạn kết luận sai là phương trình vô nghiệm. Một số bạn dùng bất đẳng thức để chứng minh rằm hàm số ở vế trái của (1) là đồng biến trong khoảng $(-\infty, 5)$ nên PT (1) có nghiệm duy nhất rồi thử để chứng tỏ $x = 1/3$ là nghiệm. Lưu ý khi giải phương trình : việc thử lại nghiệm chỉ bỏ qua được nếu các phép biến đổi từ PT này sang PT kia là tương đương.

Ngoài bạn Thuật, các bạn sau đây có lời giải chính xác, đầy đủ và ngắn gọn :

Bắc Giang : *Thân Ngọc Thức*, 9A, THCS Nguyên Hồng, Tân Yên ; **Bắc Ninh :** *Hoàng Văn Hiếu*, 7B, THCS Yên Phong ; **Hà Nội :** *Đỗ Xuân Quang*, 9H, THCS Lê Quý Đôn ; **Hà Tây :** *Đinh Hoàng Tùng*, 9A, THCS Lê Lợi Thị xã Hà Đông ; **Hà Tĩnh :** *Vương Bằng Việt*, 7, THCS Lê Quý Đôn ; **Hải Dương :** *Lại Nguyễn Thanh*, 9/3, THCS Lê Quý Đôn ; **Hưng Yên :** *Phạm Huy Khắc*, 9A, THCS Bình Minh, Khoái Châu ; **Khánh Hòa :** *Võ Thái Thông*, 8/4, Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh ; **Nghệ An :** *Đinh Thị Minh Nguyệt* và *Trịnh Văn Nam*, 9C, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, *Võ Đình Hùng* và *Trần Anh Tuấn*, 9B, THCS Bạch Liêu, Yên Thành, **Phú Thọ :** *Nguyễn Hải Nam* và *Trần Mạnh Trung*, 9A, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh, *Nguyễn Bảo Linh*, 9A, THCS Văn Lang, Việt Trì, *Hoàng Việt Hưng*, 9A, THCS Lâm Thao ; **Thanh Hóa :** *Lê Hữu Tuấn*, 8B, *Lê Viết Tuấn*, *Lê Xuân Thống Nhất* và *Lê Ngọc Tuấn*, 9B, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoằng Hóa, *Lê Trâm Anh*, 7D, THCS Điện Biên, Tp. Thanh Hóa, *Bùi Phong Quang*, 9A, *Lê Trung Thành*, *Lê Tuấn Anh*, *Nguyễn Đức Chương*, 9B, THCS Lê Hữu Lộc, Hậu Lộc, *Doãn Thanh* và *Trịnh Huy Giang*, 9A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn ; **Tiền Giang :** *Phạm Hồng Nhật*, THPT Nguyễn Đình Chiểu, Mĩ Tho ; **Vĩnh Long :** *Dương Công Định*, THPT Nguyễn Bỉnh Khiêm ; **Vĩnh Phúc :** *Đoàn Mạnh Hùng*, *Đỗ Đình Khang*, *Nguyễn Hải Long* và *Nguyễn Hữu Kiên*, 9A, THCS Yên Lạc, *Hoàng Thị Minh Huệ*, *Phạm Huy*, 9C, THCS Tam Dương.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T5/315. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $xy + yz + zx$ trong đó x, y, z là các số thực dương thỏa mãn các điều kiện : $x \geq y \geq z$ và $32 - 3x^2 = z^2 = 16 - 4y^2$.*

Lời giải. (Dựa theo bạn *Nguyễn Kim Thuật*, 9A, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**).

Từ giả thiết của đề bài ta có : $y^2 = \frac{16-z^2}{4}$; $x^2 = \frac{32-z^2}{3}$. Vì $y \geq z$ nên $\frac{16-z^2}{4} \geq z^2 \Rightarrow 5z^2 \leq 16$ hay $z \leq \frac{4}{\sqrt{5}}$ (1).

Mặt khác : $x^2 - 3y^2 = \frac{32-z^2}{3} - \frac{48-3z^2}{4} = \frac{5z^2-16}{12} \leq 0$ (theo (1)) suy ra $x \leq y\sqrt{3}$ (2).

Từ đó $xy \leq \sqrt{3}y^2$

$$xz = \sqrt{3}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}.z\right) \le \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{x^2}{3}+z^2\right) \le \frac{\sqrt{3}}{2}(y^2+z^2);$$

$$yz \le \frac{1}{2}(y^2+z^2).$$

Suy ra : $xy + yz + zx \le$

$$\sqrt{3}y^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}(y^2+z^2) + \frac{1}{2}(y^2+z^2)$$

$$= \left(\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{16-z^2}{4}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)z^2$$

$$= 2(3\sqrt{3}+1)+\left(\frac{3+\sqrt{3}}{8}\right)z^2$$

$$\le (6\sqrt{3}+2)+\left(\frac{3+\sqrt{3}}{8}\right).\frac{16}{5} = \frac{32\sqrt{3}+16}{5}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi : $x = 4\sqrt{\frac{3}{5}}$, $y = z = \frac{4}{\sqrt{5}}$.

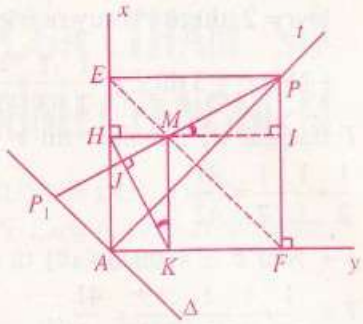
Tóm lại giá trị lớn nhất của biểu thức $xy + yz + zx$ là $\frac{(32\sqrt{3}+16)}{5}$, đạt được khi và chỉ khi : $(x, y, z) = \left(4\sqrt{\frac{3}{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$.

Nhận xét. Từ ĐK $3x^2 = 4y^2 + 16$ suy ra $x > y$ rồi. Một số bạn tìm được Max($xy+yz+zx$) = 16, đạt được khi $(x, y, z) = (2\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\sqrt{2})$. Đây là kết quả không chính xác bởi vì bộ số (x, y, z) này không thỏa mãn ĐK : $x \ge y \ge z$. Ngoài bạn *Thuật* các bạn sau có lời giải tốt hơn cả : **Bắc Giang :** *Thân Ngọc Thức*, 9A, THCS Nguyên Hồng, Tân Yên ; **Vĩnh Phúc :** *Đoàn Mạnh Hùng, Đỗ Đình Khanh, Nguyễn Hữu Kiên*, 9A, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, *Nguyễn Xuân Thọ*, 9B, THCS Vĩnh Yên, Tx. Vĩnh Yên ; **Hải Dương :** *Hoàng Đình Phương, Lại Nguyễn Thanh*, 9/3, THCS Lê Quý Đôn ; **Thanh Hóa :** *Lê Quang Trưởng*, 9D, THCS Lê Quý Đôn, Bỉm Sơn ; **Nghệ An :** *Trương Việt Đức*, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

HỒ QUANG VINH

Bài T6/315. *Cho góc $\widehat{xAy} = 90^o$ và một điểm M nào đó nằm bên trong góc xAy. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của M trên Ax, Ay. Trên đường thẳng qua M vuông góc với HK lấy điểm P thỏa mãn PM = HK. Tìm quỹ tích điểm P khi M thay đổi bên trong góc xAy.*

Lời giải. *1. Phần thuận.*



a) Trường hợp M và P nằm cùng phía đối với đường thẳng HK. Khi đó P nằm trong góc xAy. Từ P hạ $PE \perp Ax$, $PF \perp Ay$ ($E \in Ax$, $F \in Ay$), HM kéo dài cắt PF tại I. Hai tam giác vuông MIP và KMH có $HK = PM$ (gt), $\widehat{HKM} = \widehat{PMI}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc) $\Rightarrow \Delta MIP = \Delta KMH \Rightarrow MI = KM = FI$ và $IP = MH = KA \Rightarrow PF = AF$ hay $PF = PE \Rightarrow P$ thuộc tia phân giác At của góc xAy.

b) Trường hợp M và P nằm khác phía đối với HK. Bằng cách lấy P_1 đối xứng với P qua M ta có ΔAPP_1 vuông tại A (do $MP = MP_1 = MA$), suy ra P thuộc đường thẳng Δ vuông góc với tia phân giác At của góc xAy tại A.

2. Phần đảo. Lấy P' thuộc tia phân giác của góc xAy (trường hợp $P' \in \Delta$ bạn đọc tự làm). Hạ $P'E' \perp Ax$, $P'F' \perp Ay$. Lấy M' thuộc $E'F'$. Gọi H' và K' lần lượt là hình chiếu của M' trên Ax, Ay. Đường thẳng $P'M'$ cắt $H'K'$ tại J'. Ta phải chứng minh $M'P' \perp H'K'$ và $M'P' = H'K'$. Thật vậy, ta có $AE'P'F'$ là hình vuông $\Rightarrow M'P' = M'A = H'K'$. Mặt khác, $\Delta M'I'P' = \Delta K'M'H' \Rightarrow \widehat{H'K'M'} = \widehat{P'M'I'} = \widehat{H'M'J'} \Rightarrow M'J' \perp H'K'$.

3. Kết luận. Quỹ tích các điểm P khi M thay đổi trong góc xAy là tia phân giác At của góc xAy và đường thẳng Δ vuông góc với tia At tại A.

Nhận xét. 1. Nhiều bạn xét thiếu trường hợp nên kết luận quỹ tích không đầy đủ.

2. Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Vĩnh Phúc : *Nguyễn Văn Ngọc*, lớp 9, THCS Lãng Công, Lập Thạch ; **Nam Định :** *Vũ Ngọc Đào*, 9A4, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên ; **Hải Dương :** *Vũ Thị Quỳnh Hoa*, 9C, THCS Chu Văn An, Sao Đỏ ; **Hưng Yên :** *Bùi Thanh Huyền*, 9A3, THCS Chu Mạnh Trinh, Văn Giang;**Thanh Hóa :** *Trần Quang Trường*, 9B, THCS Quảng Thắng, Tp. Thanh Hóa ; *Lê Xuân Thống Nhất*, 9B, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa ; **Nghệ An :** *Nguyễn Huy Quân, Trần Đức Nhân*, 9A, THCS Thị trấn Quán Hành, Nghi Lộc ; *Đinh Thị Minh Nguyệt*, 9C, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu ; *Lê Ngọc Thạch*, 9A, THCS Lý Nhật

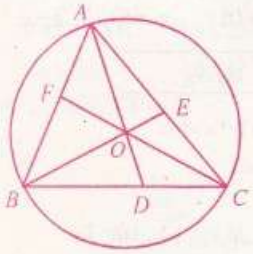
Quang, Đô Lương ; **Khánh Hòa :** *Võ Thái Thông*, 8/4, THCS Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T7/315. *Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R. Gọi D, E, F lần lượt là giao điểm của các đường thẳng AO với BC, BO với AC, CO với AB. Chứng minh rằng :* $AD + BE + CF \geq \frac{9R}{2}$.

Lời giải. Kí hiệu S là diện tích. Ta có

$$\frac{OA}{AD} = \frac{S_{AOC}}{S_{ADC}} = \frac{S_{AOB}}{S_{ABD}} = \frac{S_{AOB}+S_{AOC}}{S_{ABC}}$$



Tương tự

$$\frac{OB}{BE} = \frac{S_{OAB}+S_{OBC}}{S_{ABC}}$$

$$\frac{OC}{CF} = \frac{S_{OAC}+S_{OBC}}{S_{ABC}}.$$

Suy ra

$$\frac{OA}{AD}+\frac{OB}{BE}+\frac{OC}{CF} = 2$$

hay $R\left(\frac{1}{AB}+\frac{1}{BE}+\frac{1}{CF}\right) = 2.$

Từ đó áp dụng BĐT Bu–nhi–a–côp–xki ta được

$$2(AD + BE + CF) =$$

$$= R(AD + BE + CF)\left(\frac{1}{AD}+\frac{1}{BE}+\frac{1}{CF}\right) \geq 9R$$

Vậy $AD + BE + CF \geq \frac{9R}{2}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt : **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Kim Thuật, Nguyễn Hữu Kiên*, 9A, THCS Yên Lạc, *Hoàng Thị Minh Huệ*, 9C, THCS Tam Dương ; **Hải Dương :** *Vũ Đình Quý*, 9B, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách ; **Hà Nam :** *Nguyễn Mạnh An*, 9B, THCS Trần Phú, Phủ Lý ; **Nam Định :** *Trần Quang Huy*, 9A1, THCS Phùng Chí Kiên ; **Thanh Hóa :** *Nguyễn Lưu Bách*, 8C, *Trương Bá Thực*, 9B, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc ; **Hà Tĩnh :** *Hồ Vũ Hải*, 9A, THCS Nguyễn Du ; **Khánh Hòa :** *Nguyễn Thị Hoàng Oanh*, 9^1, THCS Đinh Tiên Hoàng ; **Tp. Hồ Chí Minh :** *Đoàn Đắc Thành*, 8^1, THCS Nguyễn Du.

VŨ KIM THỦY

Bài T8/315. *Tìm tất cả các số tự nhiên a sao cho tồn tại số tự nhiên n > 1 mà* $a^n + 1$ *chia hết cho* n^2.

Lời giải. (Của bạn *Nguyễn Triều Dương*, 12A1, THPT ch.Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc**.

Giả sử tìm được $a \in N$ sao cho $\exists n \in N, n > 1$ và $(a^n+1) \vdots n^2$. Trước hết n lẻ. Thật vậy nếu n chẵn thì $n^2 \equiv 0 \pmod 4$ mâu thuẫn với a^n+1 đồng dư với 1 hoặc 2(mod 4) (do a^n là số chính phương).

Gọi p là ước nguyên tố bé nhất của n (p lẻ). Ta có $a^n \equiv -1 \pmod p \Leftrightarrow (-a)^n \equiv 1 \pmod p$ (*). Gọi h là cấp của $(-a) \pmod p$, nghĩa là số mũ n bé nhất thỏa mãn (*). Theo tính chất cơ bản của cấp thì $h|(p-1)$ và $h|n$.

Nếu $h \geq 2$ thì h có ước nguyên tố q. Khi đó $q|n$ và $q \leq h \leq p-1 < p$. Điều này trái với giả thiết p là ước nguyên tố bé nhất của n. Thành thử $h = 1$ hay $(a+1) \vdots p$.

Vậy $a+1$ phải có ước nguyên tố lẻ.

Ngược lại giả sử $a + 1$ có ước nguyên tố lẻ p. Ta chứng minh $(a^p+1) \vdots p^2$. Thật vậy $a^p + 1 = (a + 1)(a^{p-1} - a^{p-2} + ... - a + 1)$. Vì $a \equiv -1 \pmod p$ và p lẻ nên $a^{p-1} - a^{p-2} - a + 1 \equiv p \equiv 0 \pmod p$. Do đó $(a^p+1) \vdots p^2$.

Kết luận : Các số $a \in N^*$ cần tìm là các số a mà $a+1$ có ước lẻ. Nói cách khác $a \neq 2^k - 1$.

Nhận xét : Đa số các bạn tham gia giải bài này giải đúng, trong đó một số bạn giải hơi dài. Các bạn có lời giải tốt : *Nguyễn Đình Hiển*, 12CT Lê Hồng Phong, **Tp. HCM** ; *Nguyễn Anh Tuấn*, 10, THPT chuyên Hải Dương, *Trương Minh Tiến*, 11A1, THPT Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng** ; *Đại Thị Hương*, 11A1, THPT ch. **Vĩnh Phúc** ; *Nguyễn Trung Kiên*, 10A1, khối PTCT Toán, ĐHSP **Hà Nội**, *Trần Hoàng Đức*, THPT Phan Bội Châu, **Nghệ An** ; *Nguyễn Quang Huy*, 10 chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ** ; *Nguyễn Tuyết Mai*, PTNK **Bắc Giang**.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T9/315. *Chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{\sin^{n+2} x}{\cos^n x} + \frac{\cos^{n+2} x}{\sin^n x} \geq 1$$

trong đó $0 < x < \frac{\pi}{2}$ *và n là số nguyên dương.*

Lời giải.

Vì $0 < x < \frac{\pi}{2}$ nên ta có

$$(\sin^{2n} x - \cos^{2n} x)(\sin^2 x - \cos^2 x) \geq 0$$

hay $(tg^n x - \cot g^n x)(\sin^2 x - \cos^2 x) \geq 0$

$\Leftrightarrow \text{tg}^n x \sin^2 x + \text{cotg}^n x \cos^2 x \geq$

$\geq \text{cotg}^n x \sin^2 x + \text{tg}^n x \cos^2 x$

Suy ra $\frac{\sin^{n+2} x}{\cos^n x} + \frac{\cos^{n+2} x}{\sin^n x} \geq$

$\frac{1}{2}(\text{tg}^n x + \text{cotg}^n x)(\sin^2 x + \cos^2 x) \geq 1$

(vì $\text{tg}^n x + \text{cotg}^n x \geq 2$, theo BĐT Cô-si).

Vậy : $\frac{\sin^{n+2} x}{\cos^n x} + \frac{\cos^{n+2} x}{\sin^n x} \geq 1.$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\sin^2 x = \cos^2 x$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$ hay $x = \frac{\pi}{4}$.

Nhận xét. Đây là một đề toán quen thuộc và dễ. Có hơn 300 bài giải gửi đến tòa soạn. Đa số các bạn đều làm theo cách trên.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T10/315. *Các dãy số (u_n) và (v_n) $(n = 0, 1, 2, ...)$ được xác định bởi :*

$u_o = 2001, u_1 = 2002, v_o = v_1 = 1,$

$$u_{n+2} = 2002\sqrt{\frac{u_n}{v_{n+1}^{2001}}},\ v_{n+2} = 2002\sqrt{\frac{v_n}{u_{n+1}^{2001}}}$$

với mọi $n = 0, 1, 2, ...$

Chứng minh rằng tồn tại các giới hạn sau và tìm các giới hạn đó :

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n},\ \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1},\ \lim_{n\to+\infty} v_{2n},\ \lim_{n\to+\infty} v_{2n+1}$$

Lời giải. Nhận xét $u_n > 0$, $v_n > 0$ với mọi $n = 0, 1, 2, ...$ Để đơn giản, chúng ta kí hiệu $\alpha = 2002$, $\alpha \in R$, $\alpha > 1$.

Đặt $x_n = \ln u_n - \ln v_n$, $n = 0, 1, 2, ...$

Ta có $\frac{u_{n+2}}{v_{n+2}} = \sqrt[\alpha]{\frac{u_n}{v_n}.\left(\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}\right)^{\alpha-1}}$

Suy ra $\ln\left(\frac{u_{n+2}}{v_{n+2}}\right) = \frac{1}{\alpha}.\ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right) + \frac{\alpha-1}{\alpha}\ln\left(\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}\right)$,

tức là $x_{n+2} = \frac{\alpha-1}{\alpha}.x_{n+1} + \frac{1}{\alpha}x_n$ với mọi $n = 0, 1, 2, ...$

Chú ý $x_o = \ln(\alpha - 1)$, $x_1 = \ln\alpha$.

Chứng minh bằng quy nạp theo $n = 0, 1, 2, ...$

ta có $x_n = A + B.\left(-\frac{1}{\alpha}\right)^n$. (1)

trong đó $A = \frac{1}{\alpha+1}.\ln\left((\alpha-1).\alpha^\alpha\right)$,

$$B = \frac{\alpha}{\alpha+1}.\ln\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right).$$

(Chúng ta dùng phương trình đặc trưng của dãy số (x_n) để tìm ra công thức trên).

Tương tự, đặt $y_n = \ln u_n + \ln v_n$, $n = 0, 1, 2, ...$

Ta có $u_{n+2}.v_{n+2} = \sqrt[\alpha]{\frac{u_n.v_n}{(u_{n+1}.v_{n+1})^{\alpha-1}}}$.

Suy ra $\ln(u_{n+2}.v_{n+2}) =$

$= \frac{1}{\alpha}\ln(u_n.v_n) - \frac{\alpha-1}{\alpha}\ln(u_{n+1}.v_{n+1})$, tức là

$y_{n+2} = \frac{1}{\alpha}y_n - \frac{\alpha-1}{\alpha}y_{n+1}$ với mọi $n = 0, 1, 2, ...$

Chú ý $y_o = \ln(\alpha - 1)$, $y_1 = \ln\alpha$.

Chứng minh bằng quy nạp theo $n = 0, 1, 2, ...$

$y_n = C(-1)^n + D.\frac{1}{\alpha^n}$, trong đó

$C = \frac{1}{\alpha+1}.\ln\left(\frac{\alpha-1}{\alpha^\alpha}\right)$, $D = \frac{1}{\alpha+1}.\ln\left(\alpha.(\alpha-1)\right)$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty}(\ln u_n - \ln v_n) = A$,

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\ln u_{2n} + \ln v_{2n}\right) = C$

và $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\ln u_{2n+1} + \ln v_{2n+1}\right) = -C$.

Do đó $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln u_{2n} = \frac{A+C}{2} =$

$= \frac{1}{2(\alpha+1)}\left(\ln((\alpha-1).\alpha^\alpha) + \ln\left(\frac{\alpha-1}{\alpha^\alpha}\right)\right)$

$= \frac{1}{\alpha+1}\ln(\alpha-1) = \ln\sqrt[2003]{2001}$,

$\lim\limits_{n\to+\infty}\ln u_{2n+1} = \frac{A-C}{2} = \frac{1}{\alpha+1}.\ln(\alpha^\alpha)$

$= \ln\sqrt[2003]{2002^{2002}}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \ln v_{2n} = \frac{C-A}{2} = \ln\left(\frac{1}{\sqrt[2003]{2002^{2002}}}\right),$$

$$\lim_{n\to+\infty} \ln v_{2n+1} = \frac{-C-A}{2} = \ln\left(\frac{1}{\sqrt[2003]{2001}}\right).$$

Bởi vậy : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \sqrt[2003]{2001}$,

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \sqrt[2003]{2002^{2002}},$$

$$\lim_{n\to+\infty} v_{2n} = \frac{1}{\sqrt[2003]{2002^{2002}}},$$

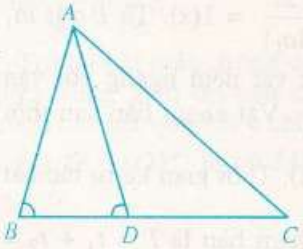
$$\lim_{n\to+\infty} v_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt[2003]{2001}}.$$

Nhận xét. Do sơ suất, yêu cầu chứng minh ở đề bài lần trước chưa chuẩn xác xin được sửa lại như trên. Thành thật xin lỗi bạn đọc.

Đây là bài toán cơ bản của dãy số. Các bạn sau có lời giải tốt : **Hà Nội :** *Nguyễn Lệnh Quân*, 11A1, PTCT-T, ĐHSP, *Lê Hùng Việt Bảo*, 12T, ĐHKHTN ; **Hải Dương :** *Nguyễn Tiến Dũng*, 10A1, THPT Thanh Hà ; **Thanh Hóa :** *Trần Mạnh Tuấn*, 11T, THPT Lam Sơn ; **Nghệ An:** *Phan Đình Phúc*, 11A1, THPT Phan Bội Châu ; **Quảng Trị :** *Lê Tiến Triển*, 11T, THPT Lê Quý Đôn ; **Tp. HCM:** *Nguyễn Thanh Bình, Nguyễn Lâm Hưng, Nguyễn Hữu Tân*, 12T, PTCT, ĐHQG ; **Đồng Tháp :** *Lê Quang Trường*, 12T, THPT Cao Lãnh ; **Bình Định :** *Nguyễn Phúc Thọ*, 11T, THPT Lê Quý Đôn ; **An Giang:** *Trần Trọng Quốc Trưởng*, 12T, THPT Thoại Ngọc Hầu, Tp. Long Xuyên.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T11/315. *Cho tam giác ABC với $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ và $\widehat{B} > \widehat{C}$. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để $\widehat{A} = 2(\widehat{B}-\widehat{C})$ là $(b-c)(b+c)^2 = a^2b$.*



Lời giải. (Của bạn *Phạm Huy Hoàng*, 10T, THPT NK Trần Phú, **Hải Phòng**).

Gọi AD là phân giác của góc $\widehat{BAC}$ (hình vẽ). Ta có :

$$AD^2 = \frac{bc}{(b+c)^2}(b+c+a)(b+c-a) \quad (*)$$

Vậy : $\widehat{A} = 2(\widehat{B}-\widehat{C})$

$$\Leftrightarrow \frac{\widehat{A}}{2} + \widehat{C} = \widehat{B}$$

$$\Leftrightarrow \widehat{ADB} = \widehat{ABD} \Leftrightarrow AB = AD \Leftrightarrow AB^2 = AD^2$$

$$\Leftrightarrow c^2 = \frac{bc}{(b+c)^2}(b+c+a)(b+c-a) \text{ (theo (*))}$$

$$\Leftrightarrow c(b+c)^2 = b((b+c)^2 - a^2)$$

$$\Leftrightarrow (b-c)(b+c)^2 = a^2b \text{ (đpcm).}$$

Nhận xét. 1) Đây là bài toán dễ. Ngoài lời giải trên còn nhiều lời giải khác. Có một vài bạn đưa ra lời giải thuần túy hình học. Tuy nhiên, trong lời giải đó ta lại thấy bóng dáng của phép chứng minh công thức (*) bằng phương pháp hình học.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt.

Nguyễn Trọng Hữu, Nguyễn Thùy Dương, 10T, THPT chuyên Hà Nam, Tx. Phủ Lý, **Hà Nam** ; *Nguyễn Văn Việt*, 12T, THPT Lê Quý Đôn, **Quảng Trị** ; *Lí Ngọc Tâm*, 10T, THPT chuyên Thái Nguyên, **Thái Nguyên** ; *Vương Đình Duyên*, 11A1, THPT Phan Bội Châu, Vinh, *Nguyễn Thị Minh, Võ Tuấn Anh*, 10A1, *Nguyễn Doãn Hiệp*, 10A2, khối PTCTT – ĐH Vinh, **Nghệ An** ; *Lê Khắc Tấn*, 12A1, THPT ch. Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc** ; *Lữ Thiện Nhân*, 10T, THPT Sa Đéc, **Đồng Tháp**.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài T12/315. *Gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. Gọi S_i là diện tích mặt đối diện với đỉnh A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) tương ứng. M là điểm tùy ý trong không gian. Chứng minh rằng*

$$\frac{MA_1}{S_1} + \frac{MA_2}{S_2} + \frac{MA_3}{S_3} + \frac{MA_4}{S_4} \geq \frac{2\sqrt{3}}{R} \quad (1)$$

Lời giải. Kí hiệu : $A_2A_3 = a_1$, $A_4A_1 = a'_1$; $A_3A_1 = a_2$, $A_4A_2 = a'_2$; $A_1A_2 = a_3$, $A_4A_3 = a'_3$, $A_iA'_i = m_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$), trong đó A'_i là trọng tâm của mặt (tam giác) đối diện với đỉnh A_i, G và O lần lượt là trọng tâm và tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. Đặt : $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{3}(a_i^2 + a'^2_i)$.

Thế thì dễ thấy ta có các đẳng thức và BĐT sau đây :

$GA_i = \frac{3}{4}m_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) ; $\sum\limits_{i=1}^{4} m_i^2 = \frac{4}{9}\alpha$ (Sử dụng công thức Lép-nít) ;

$$9m_4^2 = 3(a'^2_1 + a'^2_2 + a'^2_3) - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \quad (2)$$

$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \geq 4S_4\sqrt{3}$ (và ba BĐT tương tự)

Để thiết lập BĐT (1) cần tìm, ta sử dụng các đẳng thức và BĐT ở trên, ngoài ra ta cần chứng minh hai BĐT nữa :

$$16R^2 \geq \alpha \quad (3)$$

$\alpha\sqrt{\alpha} \geq 12\sqrt{12}\, S_i m_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Thật vậy, từ hệ thức

$\sum_{i=1}^{4} \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{4} \overrightarrow{OA_i} = 4\overrightarrow{OG}$, ta được :

$$16.OG^2 = 16R^2 - \sum_{i=1}^{3}\left(a_i^2 + a_i'^2\right) = 16R^2 - \alpha.$$

Suy ra : $16R^2 \geq \alpha$, và (3) được chứng minh.

Bây giờ, ta chứng minh BĐT (4)

Với $i = 4$, ta được :

$$9m_4^2 = 3(a_1'^2 + a_2'^2 + a_3'^2) - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2).$$

Từ đó suy ra (sử dụng BĐT Cô-si với ba số dương :

$$3\alpha = 9m_4^2 + 4(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \geq$$

$$9m_4^2 + 2\sqrt{3}S_4 + 2\sqrt{3}S_4 \geq 36\sqrt[3]{S_i^2 m_i^2}$$

và do đó, ta được BĐT (4) cần tìm : $\alpha\sqrt{\alpha} \geq 12\sqrt{12}.S_i m_i$ $(\forall i = 1, 2, 3, 4)$.

Từ (4) suy ra : $4R\alpha \geq 12\sqrt{12}\, S_i m_i$, hay là $R\alpha \geq 3\sqrt{12} S_i m_i$ $(\forall i = 1, 2, 3, 4)$.

Ta có : $\dfrac{MA_i}{S_i} = \dfrac{4MA_i\, GA_i}{3S_i m_i} \geq \dfrac{4\sqrt{12}\, MA_i\, GA_i}{R\alpha}$

$$\geq \frac{4\sqrt{12}\ \overline{MA_i}\ \overline{GA_i}}{R\alpha} =$$

$$= \frac{4\sqrt{12}\ \overline{MG}.\overline{GA_i}}{R\alpha} + \frac{4\sqrt{12}\ \overline{GA_i}^2}{R\alpha} \qquad (5)$$

Cuối cùng, cộng theo từng vế 4 BĐT dạng (5) với $i = 1, 2, 3, 4$, ta thu được BĐT (1) cần tìm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi các đẳng thức xảy ra đồng thời ở các BĐT (2), (3), (4) và do đó, khi và chỉ khi $A_1A_2A_3A_4$ là một *tứ diện đều*.

Nhận xét. 1) Số các bạn tham gia giải bài toán này quá ít, và hầu hết có lời giải đúng. Đáng tiếc có bạn giải sai (xuất phát từ một BĐT véctơ không đúng).

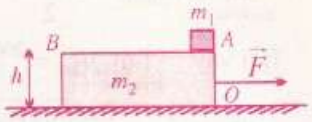
2) Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Bắc Giang : *La Văn Thịnh*, 12A1, THPT II, Hiệp Hòa; **Phú Thọ :** *Lê Việt Hà*, 12A1, THPT chuyên Hùng Vương, Tp. Việt Trì ; **Nghệ An :** *Nguyễn Ngọc Cường*, 12A1, *Nguyễn Đức Minh* và *Lê Văn Vinh*, 11A1, THPT Phan Bội Châu, Tp. Vinh ; **Quảng Trị :** *Trương Song Hào*, 12 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị.

Ngoài ra, bạn *Hào* còn đạt được kết quả (BĐT) mạnh hơn như sau : $\sum_{i=1}^{4} \dfrac{MA_i}{S_i} \geq \dfrac{8\sqrt{3}}{\sqrt{\alpha}}$. Bạn *Hào* và một số bạn khác có nhận xét thêm : BĐT (1) được chuyển sang không gian từ một BĐT trong Hình học phẳng ; M là điểm bất kì trong mp của ΔABC, ta có : $\dfrac{MA}{a} + \dfrac{MB}{b} + \dfrac{MC}{c} \geq \sqrt{3}$.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài L1/315. *Một vật nhỏ khối lượng $m_1 = 1kg$ (coi như 1 chất điểm) đặt trên vật thứ hai khối lượng $m_2 = 3kg$ có độ dài $AB = l = 1(m)$. Vật m_2 đặt trên bàn nằm ngang nhẵn, hệ số ma sát giữa m_1 và m_2 là $k = 0,1$ (hình vẽ). Vật m_2 cao $h = 0,8$ (m). Lấy $g = 10m/s^2$. Kéo m_2 với một lực không đổi nằm ngang có độ lớn $F = 10(N)$. Hỏi sau bao lâu kể từ lúc bắt đầu kéo m_1 sẽ chạm mặt bàn và điểm chạm bàn cách O một đoạn bao nhiêu ? Cho biết ban đầu m_1 ở mép A.*



Lời giải. Chọn chiều dương như hình vẽ. Khi vật m_2 chuyển động do tác dụng của lực $\vec{F}$ (về bên phải) thì m_2 chịu tác dụng của lực ma sát (do m_1 tác dụng) có cường độ km_1g, có chiều hướng về bên trái. Gia tốc của m_2 so với bàn : $a_2 = \dfrac{F - km_1g}{m_2} = 3(m/s^2)$. Lực tác dụng lên m_1, gồm lực có cường độ km_1g (do m_2 tác dụng) hướng về bên phải và lực quán tính có cường độ m_1a_2 hướng về bên trái. Gia tốc của m_1 so với m_2 là : $a_1 = \dfrac{km_1g - m_1a_2}{m_1} = -2\ (m/s^2)$ (chứng tỏ m_1 chuyển động về bên trái). Gia tốc của m_1 so với bàn là : $a = a_1 + a_2 = 1m/s^2$. Thời gian m_1 đi từ A tới B là : $t_1 = \sqrt{\dfrac{2l}{|a_1|}} = 1(s)$. Từ B vật m_1 chuyển động như một vật ném ngang với vận tốc : $v_B = at_1 = 1m/s$. Vật chạm bàn sau thời gian $t_2 = \sqrt{\dfrac{2h}{g}} = 0,4(s)$. Thời gian kể từ lúc bắt đầu kéo đến lúc m_1 chạm bàn là $T = t_1 + t_2 = 1,4(s)$ và điểm chạm bàn cách O một khoảng :

$$s = \frac{at_1^2}{2} + v_B t_2 = 0,9(m).$$

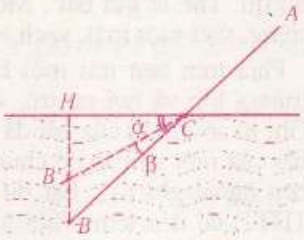
Nhận xét. Các em có lời giải gọn và đúng :

Đắc Lắc : *Nguyễn Chí Linh*, 11A, THPT Phan Bội Châu, Krông Năng ; **Bắc Ninh :** *Lê Minh Huy*, 12 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh, *Nguyễn Bá Chuyên*, 12A1,

THPT Quế Võ I ; **Bắc Giang :** *Nguyễn Tuyết Mai*, 12A, THPT NK Ngô Sĩ Liên ; **Hà Tây :** *Lê Đắc Hải*, 11L2, THPT Nguyễn Huệ, Hà Đông ; **Yên Bái :** *Phan Long Thành*, 12E, THPT Trần Nhật Duật ; **Thanh Hóa :** *Bùi Văn Trung*, 10F, THPT Lam Sơn ; **Hòa Bình :** *Đoàn Tuấn Tú*, 11 Lí 1, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình; **Phú Thọ :** *Nguyễn Nhật Minh*, 12E, THPT Đoan Hùng ; **Ninh Bình :** *Trần Văn Quỳnh*, 11K, THPT Yên Khánh B ; **Nam Định :** *Phạm Hoài Sơn*, 12H, THPT Trần Hưng Đạo ; **Quảng Bình :** *Trương Hoàng Long*, 11I, THPT số I Bố Trạch ; **Vĩnh Phúc :** *Trần Bắc, Phạm Quang Chiến*, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Quảng Ngãi :** *Nguyễn Tấn Duy*, 11 Lí, THPT chuyên Lê Khiết ; **Nghệ An :** *Nguyễn Duy Cường*, 11A3, K31, *Chu Đức Anh*, 10A3, THPT chuyên Phan Bội Châu, Vinh, *Nguyễn Quang Phương*, 11A1, THPT Nghi Lộc I ; *Lê Văn Lương*, 12C, THPT Nghĩa Đàn.

MAI ANH

Bài L2/315. *Cắm nghiêng một thước thẳng AB vào chậu nước (chiết suất của nước $n = \frac{4}{3}$). Mắt nhìn thẳng đứng xuống phần thước chìm trong nước gần C (C là giao điểm của thước với mặt nước) sẽ thấy thước bị "gãy" tại C một góc β. Tìm giá trị cực đại của β.*



Lời giải. Thực chất yêu cầu của bài toán là tìm góc nghiêng α của thước (so với mặt nước) để β đạt giá trị cực đại. Mắt nhìn thẳng đứng vào đầu B của thanh sẽ thấy ảnh B' của thanh nằm trên đường BH vuông góc với mặt nước. Ta có : $\frac{HB'}{HB} = \frac{1}{n}$ (1). Mặt khác, theo hình vẽ, ta lại có $\frac{HB'}{HB} = \frac{\text{tg}(\alpha-\beta)}{\text{tg}\alpha}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra :

$$\text{tg}\beta = \frac{n-1}{\text{tg}\alpha + \frac{n}{\text{tg}\alpha}}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho biểu thức ở mẫu số, ta thấy : β đạt giá trị cực đại khi $\text{tg}\alpha = \sqrt{n}$, tức là khi $\alpha \approx 49^o6'$. Khi đó $\beta_{max} \approx 8^o12'$.

Nhận xét. Các em có lời giải gọn và đúng :

Nghệ An : *Lê Thành Công*, 12B, THPT Nam Đàn 1, *Thái Bá Sơn*, K30A3, *Nguyễn Duy Cường*, 11A3 K31, THPT Phan Bội Châu, Vinh ; **Thái Nguyên :** *Phạm Hồng Nam*, 11B6, PT trung tâm Sông Công ; **Bắc Ninh :** *Nguyễn Quang Huy*, 12A1, *Vũ Văn Thọ*, *Chu Thanh Bình*, Lí 12, THPT chuyên Bắc Ninh ; **Bắc Giang :** *Dương Trung Hiếu*, 11B, THPT NK Ngô Sĩ Liên ; **Nam Định :** *Vũ Ngọc Kiên*, 11 Lí, THPT chuyên Lê Hồng Phong ; **Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Thị Phương Dung*, 11A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Ninh Bình :** *Lê Hồng Lĩnh*, 12 Lí, THPT Lương Văn Tuy ; **Hải Dương :** *Mạc Trường Giang*, 12C5, THPT Nhị Chiểu, Kinh Môn ; **Thanh Hóa :** *Lưu Đức Minh*, 11K2, THPT Lam Sơn ; **Hưng Yên :** *Nguyễn Ngọc Mai*, 12 Lí, THPT chuyên Hưng Yên ; **Phú Thọ:** *Nguyễn Minh Tân*, 12A4, THPT Thanh Thủy ; **Quảng Ngãi :** *Nguyễn Văn Toàn*, 12C1, THPT Trần Quang Diệu ; **Hà Tĩnh :** *Nguyễn Văn Nam*, 12D, THPT Lê Quý Đôn, Thạch Hà ; **Đắc Lắc :** *Lưu Xuân Bách*, 12 Lí, THPT chuyên Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột.

MAI ANH

THỂ LỆ GỬI BÀI CHO TẠP CHÍ TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ

- Bài cần đánh máy hoặc viết tay sạch sẽ, không dập xóa, trên một mặt giấy. Hình vẽ rõ ràng. Không gửi bản photocopy. Nếu bài đã chế bản nên gửi kèm file.
- Mỗi bài dài không quá 2000 chữ hoặc không quá 4 trang A4 chế bản vi tính.
- Bài dịch cần gửi kèm bản photocopy bài gốc.
- Mỗi đề ra đều có kèm lời giải và không ghi 2 đề trên cùng 1 tờ giấy. Không nhận đề ra của học sinh phổ thông.
- Bài viết cho mục *Học sinh tìm tòi* cần có thẩm định của thầy giáo toán và xác nhận của Hiệu trưởng.
- Ghi đầy đủ họ và tên thật, địa chỉ để tiện liên hệ. Mỗi bài chỉ gửi một lần. Bài không đăng không trả lại bản thảo.
- Ảnh gửi đăng phải là ảnh màu, cỡ nhỏ nhất 9 × 12. Sau ảnh ghi rõ nội dung ảnh và tên người chụp.
- Đối với bài giải gửi dự thi, mỗi bài viết trên một tờ giấy riêng. Phía trên bên trái ghi số thứ tự của bài, bên phải ghi rõ họ tên, trường lớp, địa chỉ gia đình. Bài chỉ gửi về một địa chỉ : *Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, 187B Giảng Võ, Hà Nội*. Ngoài phong bì ghi rõ : *Dự thi giải toán số tạp chí ...* Không gửi bài giải của nhiều số tạp chí trong cùng một phong bì. Bài gửi có dán tem. Không cần gửi thư bảo đảm.
- Thời hạn nhận bài giải *Đề ra kì này* là hai tháng tính từ cuối tháng số tạp chí đó. Các bài giải khác là 1 tháng.

THTT

ĐỀ VÀ ĐÁP ÁN ...

(Tiếp theo trang 10)

$q_1 = 1, q_2 = \alpha$ và $p_{n+1} = (\alpha + 1)q_n$, $q_{n+1} = \alpha q_n + p_n$ $\forall n = 1, 2, 3, \ldots$.

Từ các hệ thức xác định $\{p_n\}$ và $\{q_n\}$ suy ra dãy $\{q_n\}$ xác định bởi:

$q_1 = 1, q_2 = \alpha$ và $q_{n+1} = \alpha q_n + (\alpha + 1)q_{n-1}$ $\forall n = 2, 3, \ldots$. (10)

Từ (10) ta có phương trình đặc trưng của dãy $\{q_n\}$ là: $x^2 - \alpha x - (\alpha + 1) = 0$.

Phương trình trên có hai nghiệm: $x_1 = -1$ và $x_2 = \alpha + 1$. Do đó:

- Nếu $\alpha = -2$ thì $q_n = (-1)^{n-1} + (-1)^{n-1} \times (n-1)$ $\forall n = 1, 2, 3, \ldots$.

- Nếu $\alpha \neq -2$ thì $q_n = \dfrac{(-1)^{n-1} + (\alpha+1)^n}{\alpha + 2}$ $\forall n = 1, 2, 3, \ldots$.

Suy ra:

- Nếu $\alpha = -2$ thì $p_1 = 0$ và $p_n = -[(-1)^{n-2} + (-1)^{n-2}.(n-2)]$ $\forall n \geq 2$.

- Nếu $\alpha \neq -2$ thì $p_1 = 0$ và

$$p_n = \frac{(-1)^{n-2} + (\alpha+1)^{n-1}}{\alpha + 2}(\alpha + 1) \quad \forall n \geq 2.$$

Do đó:

- Nếu $\alpha = -2$ thì $x_n = \dfrac{n-1}{n}$ $\forall n = 1, 2, 3, \ldots$

- Nếu $\alpha \neq -2$ thì

$$x_n = \frac{[(-1)^{n-2} + (\alpha+1)^{n-1}](\alpha+1)}{(-1)^{n-1} + (\alpha+1)^n} \quad \forall n = 1, 2, \ldots$$

2/ • Dễ thấy:

- Nếu $\alpha = -1$ thì $\lim x_n = 0$.

- Nếu $\alpha = -2$ thì $\lim x_n = 1$.

• Xét $\alpha \neq -2$. Khi đó ta có:

$$x_{2k-1} = \frac{(\alpha+1)^{2k-1} - (\alpha+1)}{1 + (\alpha+1)^{2k-1}} \quad \forall k = 1, 2, 3, \ldots;$$

$$x_{2k} = \frac{(\alpha+1) + (\alpha+1)^{2k}}{(\alpha+1)^{2k} - 1} \quad \forall k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Suy ra:

- Nếu $|\alpha + 1| > 1$ thì $\lim x_{2k-1} = 1$ và $\lim x_{2k} = 1$.

- Nếu $|\alpha + 1| < 1$ thì $\lim x_{2k-1} = -(\alpha + 1)$ và $\lim x_{2k} = -(\alpha + 1)$.

Vì vậy dãy $\{x_n\}$ là dãy hội tụ và

- Nếu $|\alpha + 1| > 1$ thì $\lim x_n = 1$.

- Nếu $|\alpha + 1| < 1$ thì $\lim x_n = -(\alpha + 1)$.

THÔNG BÁO

VỀ CUỘC THI GIẢI TOÁN ĐẶC BIỆT CHÀO MỪNG 40 NĂM THTT

Chúng tôi vui mừng thông báo đến các bạn học sinh là tạp chí THTT sẽ tổ chức Cuộc thi Giải toán đặc biệt mừng kỉ niệm 40 năm ngày ra số báo đầu tiên (1964-2004). Trong mỗi số từ số 321 (tháng 3.2003) đến số 325 (tháng 7.2003) sẽ đăng các đề toán : 2 đề cho các bạn THPT và 2 đề cho các bạn THCS. Các bạn THCS có thể giải bài THPT còn ngược lại các bạn THPT giải bài THCS không được tính điểm. Lời giải sẽ đăng lần lượt trên các số báo từ 325 (tháng 7.2003) đến 329 (tháng 11.2003). Kết quả cuộc thi được công bố trên số 330 và trao giải vào dịp cuối năm 2004 trong lễ kỉ niệm 40 năm THTT. Sẽ có giải tập thể cho trường có nhiều học sinh dự thi. Thể lệ gửi bài : Mỗi bài viết trên tờ giấy riêng, viết một mặt, sạch sẽ, hình vẽ rõ ràng.

Phía trên bên trái mỗi bài ghi họ tên, địa chỉ trường lớp và nơi cư trú, số điện thoại (nếu có). Ghi rõ số thứ tự của bài đã in trên báo. Tất cả các bài của một số báo để chung trong một phong bì, bên ngoài ghi rõ : Bài dự thi Giải toán 40 năm THTT, có dán tem. Thời hạn nhận bài là 2 tháng tính từ cuối tháng của số báo có đăng đề toán.

Bên cạnh đó, cuộc thi thường niên vẫn tiến hành với số lượng đề giảm đi so với trước trong 5 số báo nói trên, các số còn lại vẫn như cũ. Mong được các bạn hưởng ứng nhiệt tình.

THTT

PROBLEMS IN THIS ISSUE

(Tiếp trang 15)

T11/319. Let AD, BE, CF be the altitudes of an acute triangle ABC. Let M, N, P be respectively the points of intersection of the segments AD and EF, BE and FD, CF and DE. Let S denote the area of triangle. Prove that

$$\frac{1}{S_{ABC}} \leq \frac{S_{MNP}}{S_{DEF}^2} \leq \frac{1}{8\cos A.\cos B.\cos C.S_{ABC}}$$

T12/319. Consider arbitrary regular quadrilateral pyramids $SABCD$, the measure α of the flat angle $\widehat{ASB}$ of which satisfies $0 < \alpha \leq 60^\circ$. Let φ be the measure of the bihedral angle of side SA. Determine α so that the expression $P = \cos 3\varphi - 9\cos\varphi$ attains its greatest value.

Giải đáp: MỪNG XUÂN GIÁP THÂN

Không khí mùa xuân đã về rất sớm với tòa soạn THTT khi những bài thơ đầu tiên của bạn đọc gửi về tham dự cuộc thi của CLB. Cuộc thi *đố bạn làm thơ* vẫn đang tiếp tục. Trong số 320 ra 2.2004 chúng tôi sẽ nêu danh sách các bạn đoạt giải. Kì này mời các bạn đọc bài thơ của PGS. TS. Đào Văn Dũng, khoa Toán Cơ Tin, ĐH Khoa học Tự nhiên, ĐHQG Hà Nội và bạn Nguyễn Minh Hằng.

YÊU BÁO TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Bốn mùa báo Toán ra đều
Mươi nghìn đề toán rất nhiều đề hay
Năm nào báo cũng hết ngay
Vì càng đọc báo, càng say báo nhiều
Bạn, tôi, thấy toán đều yêu
Trẻ vui, thích toán, sớm chiều học chăm
Yêu toán, thầy dậy tận tâm
Toán học - Tuổi trẻ, ươm mầm tài năng.

ĐÀO VĂN DŨNG

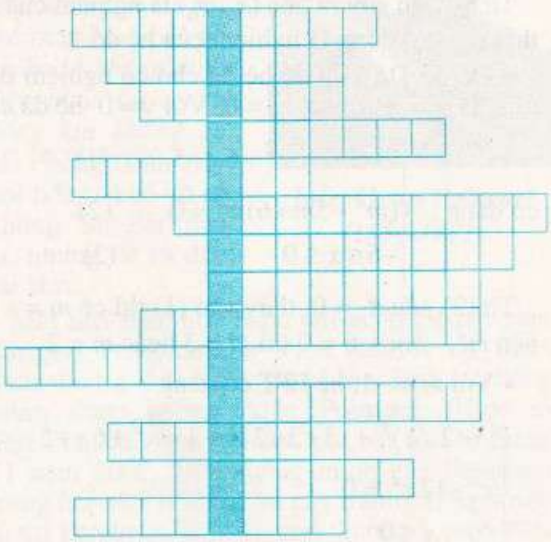
TOÁN LÀ BẠN

Bốn thập kỉ trôi qua,
Mươi triệu người giải toán.
Năm nay, báo tăng trang,
Vì bạn bè yêu báo.
Bạn ơi, cùng đọc báo,
Trẻ mãi cùng chúng ta.
Yêu toán ta học giỏi.
Toán là bạn của ta.

NGUYỄN MINH HẰNG
(Lớp 6B, THCS Thành Công, Hà Nội)

Ô CHỮ NĂM GIÁP THÂN

Ngày Tết, bạn thường gặp những niềm vui nào, những phong tục tập quán nghìn năm nào ? Ô chữ năm Giáp Thân sẽ đem lại cho bạn niềm vui nho nhỏ trong những ngày đầu Xuân. Nào mời các bạn cùng giải theo thứ tự hàng ngang từ trên xuống dưới.



1. Biểu tượng của đất theo sự tích trời tròn đất vuông.
2. Món ăn chuẩn bị khá lâu trước Tết.
3. Mâm được bày trên bàn thờ suốt từ ngày ông Táo đến hết Tết Nguyên đán.
4. Các gia đình miền Bắc thích có ... trong phòng khách.
5. Các gia đình ở phương Nam thích có ... trong ngày Xuân.
6. Việc mọi gia đình thường làm trước giao thừa.
7. Chúng ta chào tạm biệt...
8. Đã đến giờ phút...
9. Tưng bừng chào đón năm mới những phút đầu tiên.
10. Nếu bạn là người đến đầu tiên.
11. Phong tục mà trẻ nhỏ rất thích.
12. Nhiều bà mẹ ở Đồng bằng Trung du Bắc Bộ còn giữ phong tục này trong những ngày đầu năm âm lịch.
13. Thứ đồ chơi bán nhiều trong ngày Mùng Một Tết.
14. Đông người, độc đáo vì họp đầu xuân và chỉ đúng 1 ngày.

Cột tô màu sẽ đem đến cho các bạn một niềm vui.

BÍNH NAM HÀ

TÌM ĐIỀU KIỆN CỦA THAM SỐ ...

(Tiếp trang 13)

$$(3+2\sqrt{2})^y = \frac{1}{(3-2\sqrt{2})^y} = (3-2\sqrt{2})^{-y}.$$

Từ hệ trên suy ra nếu (x_o, y_o) là nghiệm của hệ thì $(x_o, -y_o)$ cũng là nghiệm của hệ đó.

• Do đó *ĐK cần* để hệ đã cho có nghiệm duy nhất là $y_o = -y_o \Rightarrow y_o = 0$. Với $y = 0$ hệ đã cho có dạng : $\begin{cases} 2-3m = x^2+6x+5 & (1) \\ (m^2-5m+6)x^2 = 0 & (2) \\ -6 \le x \le 0 & (3) \end{cases}$

Từ (2) nếu $x = 0$, thay vào (1) thì có $m = -1$; nếu $m^2 - 5m + 6 = 0$ thì $m = 3$ hoặc $m = 2$.

• Với $m = -1$, hệ BPT có dạng

$$\begin{cases} (3-2\sqrt{2})^y + (3+2\sqrt{2})^y + 3 = x^2+6x+5 \\ y^2 - 12x^2 = 0 \\ -6 \le x \le 0 \end{cases}$$

Từ $-6 \le x \le 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 5 \le 5$, mặt khác

$(3-2\sqrt{2})^y + (3+2\sqrt{2})^y + 3 =$

$= (3-2\sqrt{2})^y + \dfrac{1}{(3-2\sqrt{2})^y} + 3 \ge 5$. Do đó hệ có nghiệm duy nhất $(x, y) = (0, 0)$.

Với $m = 3$ hoặc $m = 2$ thì PT thứ hai của hệ có dạng $y^2 = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow$ PT thứ nhất của hệ có dạng $2 - 3m = x^2 + 6x + 5$ (4).

Với $m = 3$ thì PT (4) vô nghiệm.

Với $m = 2$ thì PT (4) có nghiệm $x = -3$.

• *Kết luận* : Hệ BPT đã cho có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $m = -1$ hoặc $m = 2$.

Để kết thúc bài báo đề nghị bạn đọc giải các bài toán sau theo phương pháp trên.

1) Cho hệ PT : $\begin{cases} (a-1)x^5 + y^5 = 1 \\ e^{bx} + (a-1)by^4 = a^2 \end{cases}$

Tìm giá trị của tham số a để hệ PT có nghiệm với mọi b. (ĐS : $a = -1$)

2) Tìm m để hệ : $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \sin x = m \\ \dfrac{y}{x} + \sin y = m \end{cases}$

có duy nhất một nghiệm thỏa mãn $0 < x \le 2\pi$, $0 < y \le 2\pi$ (ĐS $m = 0$ hoặc $m = 2$).

Giải đáp bài : TÌM TẬP HỢP ĐIỂM

(THTT số 315, tháng 9 năm 2003)

Học sinh đó kêu lên *"Ơ-rê-ka ! tập hợp tâm các đường tròn C_α là đường tròn (C) có PT : $(x+1)^2 + y^2 = 1$"* là không chính xác. Lí do dẫn đến sai lầm là việc bạn đó đã quên làm bước *giới hạn tập hợp điểm*, bởi lẽ tham số α bị ràng buộc bởi các điều kiện :

$(\cos\alpha - 1)^2 + \sin^2\alpha - 3 \ge 0$ (ĐK để tồn tại họ đường tròn C_α) và

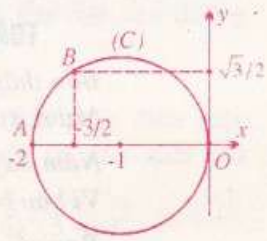
$0 \le \alpha \le \pi$ (giả thiết bài toán) (*)

Như vậy đến đây chúng ta có thể khẳng định rằng tập hợp điểm cần tìm chỉ là một phần của đường tròn (C) mà thôi !

Khắc phục sai lầm : Có thể giới hạn tập hợp điểm cần tìm như sau :

Từ (*) có $\begin{cases} -1 \le \cos\alpha \le -\dfrac{1}{2} \\ 0 \le \alpha \le \pi \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{2\pi}{3} \le \alpha \le \pi$.

Vì $x_I = \cos\alpha - 1$, mà $-1 \le \cos\alpha \le -1/2$ nên $-2 \le x_I \le -\dfrac{3}{2}$ (1).



Mặt khác: $y_I = \sin\alpha$, $\alpha \in [2\pi/3, \pi]$, suy ra $0 \le y_I \le \sqrt{3}/2$ (2). Từ (1), (2) suy ra tập hợp các điểm I là cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ của đường tròn (C), trong đó : $A(-2, 0)$, $B\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Phần đảo được tiến hành một cách khá đơn giản.

Các bạn sau có lời bình hay hơn cả :

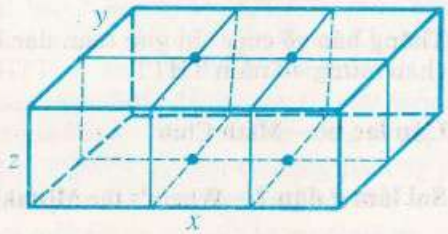
Hà Nội : *Nguyễn Đình Huy*, SV K51A, khoa Toán – Tin ĐHSP Hà Nội ; *Phạm Lê Hưng*,

Giải đáp bài :

TỪ ĐỘ DÀI ĐOÁN THỂ TÍCH

Kiện hàng hình hộp chữ nhật có kích thước $x \times y \times z$ và dây có 4 nút buộc như hình dưới. Độ dài dây buộc là :

$$2x + 4y + 6z = 18 \text{ (dm)} \qquad (*)$$



Áp dụng BĐT Cô-si và (*) có :

$$\frac{2x+4y+6z}{3} \geq \sqrt[3]{2x.4y.6z} \Rightarrow 6^3 \geq 48.xyz.$$

$$\Leftrightarrow V = xyz \leq \frac{6^3}{48} = \frac{9}{2} = 4{,}5 \text{ (dm}^3\text{)}$$

Đẳng thức xảy ra khi $2x = 4y = 6z \Rightarrow x = 2y = 3z$. Thay vào (*) được

$$9z^3 = 9 \Rightarrow z = 1 \text{ (dm)} \Rightarrow y = \frac{3}{2}z = 1{,}5 \text{ (dm) và}$$

$x = 3$ (dm).

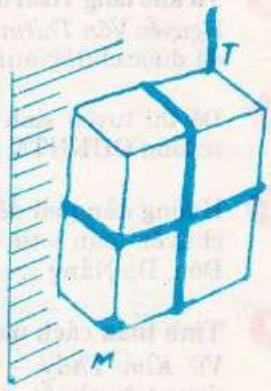
Với $x = 3$dm, $y = 1{,}5$dm và $z = 1$dm thì thể tích hình hộp là lớn nhất và bằng $V = 4{,}5\text{dm}^3$.

Các bạn gửi bài giải đều cho 4 nút buộc nằm ở một mặt của hình hộp chữ nhật nên có 2 dây buộc ngang và 2 dây buộc dọc, dẫn đến thể tích hình hộp nhỏ hơn kết quả lời giải trên.

VÂN KHANH

KIẾN BÒ TRÊN BÁNH CHƯNG

Một chiếc bánh chưng được treo trên một sợi dây tại điểm T và một mặt áp sát vào tủ. Các chú kiến theo dây treo đến T và muốn đi tiếp đến M nơi có nhiều mỡ. Tình cờ các đường đi đều theo các cạnh của bánh chưng hoặc dây lạt buột và đều là đường ngắn. Có bao nhiêu đường đi tất cả nhỉ nếu kiến không bò được theo 2 đoạn dây áp sát tủ?



VŨ ĐÔ QUAN

12H2, THPT Hà Nội – Amsterdam ; **Thanh Hóa :** *Nguyễn Quốc Hưng*, 12A4, THPT Lương Đắc Bằng, Hoằng Hóa ; **Nghệ An :** *Nguyễn Viết Khôi*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, Tp. Vinh ; **Quảng Ngãi :** *Đặng Quốc Việt*, 12T2, THPT chuyên Lê Khiết.

NGỌC HIỂN

BAO NHIÊU CÁCH CHỌN ?

Trong đề thi tuyển sinh vào các trường Đại học và Cao đẳng thường có bài toán liên quan đến việc tính tổ hợp chập k của n phần tử. Chẳng hạn : *"Từ một nhóm học sinh gồm 7 nam và 6 nữ, thầy giáo cần chọn ra 5 học sinh tham dự mít tinh tại trường với yêu cầu có cả nam và nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ?"*.

Có thí sinh đã giải như sau : Có 7 cách chọn 1 học sinh nam và 6 cách chọn 1 học sinh nữ nên có 42 cách chọn một cặp nam, nữ. Ta chọn thêm 3 học sinh bất kì trong 11 em còn lại. Như thế ta cũng có nhóm học sinh thỏa mãn yêu cầu của bài ra. Vậy có tất cả $42.C_{11}^3 = 42.165 = 6930$ (cách chọn).

Cách chọn trên có hợp lí không ? Theo bạn có bao nhiêu cách chọn ?

NGUYỄN THANH CẢNH
(GV Toán, CĐSP Hưng Yên)

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

Toán học và Tuổi trẻ
Mathematics and Youth

NĂM THỨ 41
Số 319 (1-2004)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT - Fax : 04.5144272
Email : toanhoctt@yahoo.com

TRONG SỐ NÀY

1 **Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary Schools**
Doãn Xuân Huy – Tìm miền giá trị của hàm số $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$

2 Cùng các cộng tác viên và bạn đọc

3 **Từ kho tàng Toán học - From Math Treasure**
Nguyễn Văn Thiêm – Phỏng đoán Poincaré đã được chứng minh.

4 Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT chuyên trường ĐHKHTN Hà Nội năm 2003

5 Hướng dẫn giải đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên toán – tin trường THPT Lê Quý Đôn, Đà Nẵng

6 **Tính toán cách nào – How to Calculate ?**
Vũ Kim Thủy – Chữ số có nghĩa và dạng tiêu chuẩn

8 Đề và đáp án thi chọn học sinh giỏi quốc gia môn Toán - lớp 12 THPT năm học 2002–2003 – Bảng B

11 **Chuẩn bị thi vào Đại học – University Entrance Preparation**
Đặng Vũ Hà – Đề tự ôn thi số 1.

12 **Phương pháp giải toán – Math Problem Solving**
Huỳnh Duy Thủy – Tìm điều kiện của tham số để hệ phương trình có nghiệm.

14 **Đề ra kì này – Problems in This Issue**
T1/319, ..., T12/319, L1, L2/319.

16 **Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems**
Giải các bài của số 315.

24 Thông báo về cuộc thi giải toán đặc biệt chào mừng 40 năm THTT.

25 **Câu lạc bộ – Math Club**

26 **Sai lầm ở đâu ? – Where's the Mistake ?**

27 **Giải trí toán học – Math Recreation**

Bìa 2 : Tạp chí Văn học và Tuổi trẻ – 10 năm hình thành và phát triển

Bìa 3 : **Toán học muôn màu – Multifarious Mathematics** – Nối chuỗi dây chuyền

Bìa 4 : Khoa Toán trường Đại học Tây Bắc

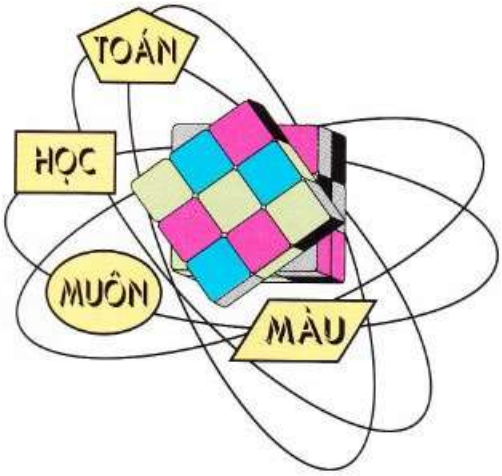
Tổng biên tập :
NGUYỄN CẢNH TOÀN

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NXB Giáo dục :
NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NXB Giáo dục :
VŨ DƯƠNG THỤY

Trưởng ban biên tập : NGUYỄN VIỆT HẢI
Trị sự : VŨ ANH THƯ

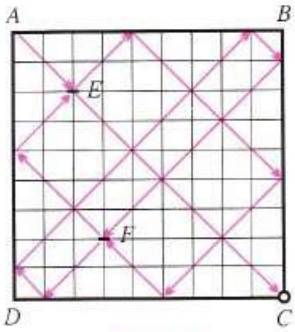
Biên tập : VŨ KIM THỦY, HỒ QUANG VINH
Trình bày : NGUYỄN THỊ OANH, NGUYỄN KIM DUNG, LƯU CHÍ ĐỒNG, BÙI QUANG TUẤN

Đại diện phía Nam : TRẦN CHÍ HIẾU, 231 Nguyễn Văn Cừ, Q. 5, Tp. Hồ Chí Minh. ĐT : 08.8309049



BẮN BI TRÊN BÀN HÌNH VUÔNG

Trên một bàn gỗ phẳng nhẵn hình vuông $ABCD$ kích thước 9×9 ô vuông, xung quanh có thành phẳng cao hơn viên bi, người ta bắn bi từ A theo hướng AC để cuối cùng viên bi rơi vào hố C. Viên bi (nhẹ) đập vào thành bàn hoặc đập vào vật chắn E, F (rất nặng) nằm theo chiều ngang thì đổi hướng sao cho góc tới bằng góc phản xạ như ở hình 1 (nhưng chưa đi qua hết các ô vuông).

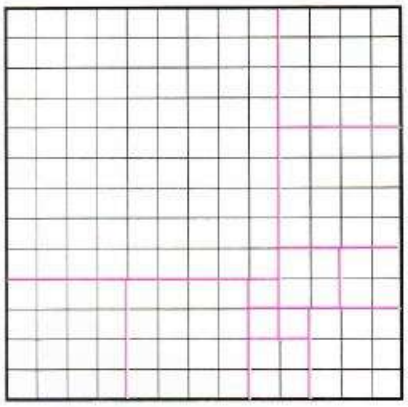


Hình 1

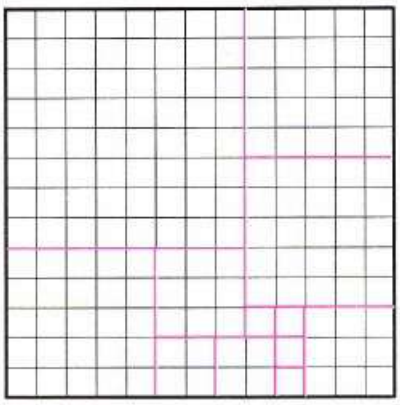
Dành cho bạn đọc

Phải đặt ít nhất là bao nhiêu vật chắn nằm ngang sao cho viên bi đi từ A đến C và đi qua một đường chéo của tất cả các ô vuông ? Cách đặt các vật chắn đó như thế nào ?

Giải đáp : PHÂN CHIA HÌNH VUÔNG THÀNH CÁC HÌNH VUÔNG



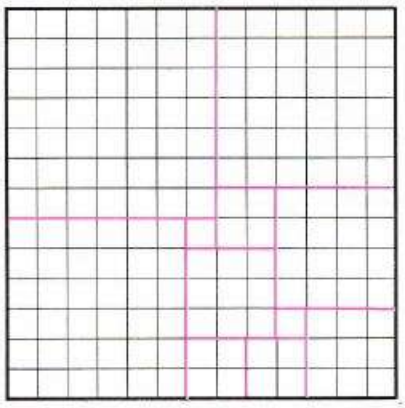
Hình 2



Hình 3

Có nhiều cách phân chia hình vuông $ABCD$ kích thước 13 × 13 ô vuông thành $k = 12$ hình vuông, chẳng hạn như ở hình 2 (ô vuông lớn nhất $a^2 = 9^2$), hình 3 ($a^2 = 8^2$).

Chú ý rằng nếu ô vuông lớn nhất a^2 với $a \geq 7$ thì chỉ có 1 ô vuông lớn nhất và nó phải nằm ở một góc của $ABCD$ vì nếu không thì $k > 11$. Sau khi xếp 1 ô vuông $a^2 = 7^2$, 2 ô $b^2 = 6^2$ ở ba góc hình vuông $ABCD$ thì còn hình diện tích 48 ô vuông (hình vuông $7^2 = 49$ ô nhưng khuyết một góc) mà ta có thể phân chia thành 8 ô vuông (có thể 9 ô vuông) như ở hình 4 (hoặc lấy đối xứng qua AC), lúc đó $k = 11$ nhỏ nhất và $13^2 = 1.7^2 + 2.6^2 + 1.4^2 + 2.3^2 + 3.2^2 + 2.1^2$.



Hình 4

Các bạn sau được nhận tặng phẩm :

1) *Phạm Anh Tuấn*, 11A3, THPT số 3 Quảng Trạch, **Quảng Bình**.

2) *Nguyễn Viết Dũng*, 11B, THPT Hoàng Mai, Quỳnh Thiện, Quỳnh Lưu, **Nghệ An**.

PHI PHI

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

KHOA TOÁN TRƯỜNG ĐẠI HỌC TÂY BẮC

Khoa Toán trường Đại học Tây Bắc được thành lập tháng 10 năm 2002, tiền thân là Khoa Toán Lí, trường Cao đẳng Sư phạm Tây Bắc. Trong 44 năm phát triển của trường CĐSP Tây Bắc, khoa luôn là đơn vị dẫn đầu trong nhiều hoạt động. Nhiệm vụ của khoa là đào tạo cử nhân ĐHSP Toán 4 năm, cử nhân ĐHSP chuyên tu Toán 2 năm, cử nhân CĐSP 3 năm và nghiên cứu khoa học, bồi dưỡng giáo viên. Khoa hiện có 34 giảng viên trong đó có 2 đang là nghiên cứu sinh, 14 có trình độ thạc sĩ, 8 đang theo học thạc sĩ, có 10 giảng viên giỏi cấp cơ sở.

Số sinh viên đang theo học là 934 và số sinh viên đã đào tạo là 3000. Đến nay khoa đã được nhận 5 bằng khen của Trung ương Hội sinh viên, 22 bằng khen của Trung ương Đoàn TNCS, 10 bằng khen của Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo, 2 bằng khen của Thủ tướng Chính phủ tặng cho tập thể và các cá nhân. Khoa đã có 29 đề tài nghiên cứu trong đó có 2 đề tài cấp Bộ. Tới đây Khoa đang dự kiến phát triển thêm ngành đào tạo cử nhân SP Tin học và cử nhân SP Vật lí.

Hội nghị CNVC khoa Toán năm học 2003-2004

ISSN : 0866-8035 Chế bản tại Tòa soạn
Chỉ số : 12884 In tại Nhà máy in Diên Hồng, 187B phố Giảng Võ Giá : 3400 đồng
Mã số : 8BT21M4 In xong và nộp lưu chiểu tháng 1 năm 2004 Ba nghìn bốn trăm đồng