https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

10 2013 Số 436

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 50

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre

DÀNH CHO TRUNG HỌC CƠ SỞ

VẬN DỤNG HẰNG ĐẲNG THỨC VÀO GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC

LƯU VĂN BIẾN
(GV THPT Hiệp Hòa 3, Bắc Giang)

Bài viết giới thiệu với bạn đọc một số kĩ năng vận dụng hằng đẳng thức để giải một số phương trình (PT) chứa căn bậc hai thông qua các thí dụ cụ thể.

Trước hết ta nhắc lại hai hằng đẳng thức quen thuộc

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2 \qquad (1)$$

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2 \qquad (2)$$

Chú ý. Trong phương trình, các số hạng chứa căn bậc hai thường đóng vai trò như số hạng $\pm 2ab$ trong hai hằng đẳng thức (1) và (2).

Chúng ta sẽ biến đổi PT đã cho về một trong hai dạng sau:

Dạng 1: $A^2=B^2 \Leftrightarrow A=B$ hoặc $A=-B$.

Dạng 2: $A_1^2+A_2^2+...+A_n^2=0$

$$\Leftrightarrow A_1=A_2=...=A_n=0.$$

★Thí dụ 1. *Giải phương trình*

$$2\sqrt{x+3}=9x^2-x-4.$$

Phân tích. Số hạng $2\sqrt{x+3}=2\sqrt{x+3}.1$ gợi cho ta đến số hạng $2ab$ trong hằng đẳng thức (1). Do đó để làm xuất hiện hằng đẳng thức (1) vấn đề còn lại là làm xuất hiện a^2 và b^2.

Lời giải. PT đã cho tương đương với

$$(x+3)+2\sqrt{x+3}+1=9x^2 \Leftrightarrow (\sqrt{x+3}+1)^2=(3x)^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+3}+1=3x \text{ hoặc } \sqrt{x+3}+1=-3x.$$

Giải các PT này cho ta các nghiệm $x=1$; $x=\dfrac{-5-\sqrt{97}}{18}$. □

★Thí dụ 2. *Giải phương trình*

$$x^2+9x+20=2\sqrt{3x+10}.$$

Phân tích. Số hạng $2\sqrt{3x+10}=2.\sqrt{3x+10}.1$ cũng gợi cho ta nghĩ đến số hạng $2ab$ trong hằng đẳng thức (1). Tuy nhiên, nếu biến đổi xuất hiện hằng đẳng thức (1) thì kết quả đạt được không như mong muốn. Nếu biến đổi xuất hiện hằng đẳng thức (2) thì ta sẽ đạt được mục đích.

Lời giải. PT đã cho tương đương với

$$((3x+10)-2\sqrt{3x+10}+1)+x^2+6x+9=0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3x+10}-1)^2+(x+3)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{3x+10}-1=0\\ x+3=0\end{cases} \Leftrightarrow x=-3. \square$$

Lưu ý. Tuỳ từng PT mà ta lựa chọn hằng đẳng thức (1) hay hằng đẳng thức (2).

★Thí dụ 3. *Giải phương trình*

$$\sqrt{2x-1}=x^2-3x+1.$$

Phân tích. Để xuất hiện số hạng $2ab$ trong hằng đẳng thức, ta nhân cả hai vế của PT với 2. Biến đổi ta được phương trình $(\sqrt{2x-1}+1)^2=2(x-1)^2$, với PT này việc tính toán vẫn còn phức tạp. Nếu nhân cả hai vế của PT với 4 ta sẽ được PT dễ giải hơn.

Lời giải. PT đã cho tương đương với

$$4\sqrt{2x-1}=4x^2-12x+4$$

$$\Leftrightarrow 4(2x-1)+4\sqrt{2x-1}+1=4x^2-4x+1$$

$$\Leftrightarrow (2\sqrt{2x-1}+1)^2=(2x-1)^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2\sqrt{2x-1}+1=2x-1\\ 2\sqrt{2x-1}+1=1-2x.\end{array}\right.$$

Giải các PT ta được nghiệm $x=2+\sqrt{2}$. □

Nhận xét. Cần linh hoạt khi làm xuất hiện số hạng $\pm 2ab$ trong hằng đẳng thức (1) và (2). Nếu cần thiết có thể nhân cả hai vế của phương trình với 2, 4, 6, 8,...Để hiểu rõ hơn ta xét tiếp các thí dụ sau.

★ Thí dụ 4. *Giải phương trình*

$$x^2 - x - 1000\sqrt{1+8000x} = 1000.$$

Để đơn giản ta đặt $a = 1000$. Khi đó PT trở thành $x^2 - x - a\sqrt{1+8ax} = a.$

Phân tích. • Nhân cả hai vế của PT với 2 và biến đổi xuất hiện hằng đẳng thức (2), PT này không giải được.

• Nhân cả hai vế của PT với 2 và biến đổi xuất hiện hằng đẳng thức (1), PT này không giải được.

• Nhân cả hai vế của PT với 4 và biến đổi xuất hiện hằng đẳng thức (2), PT không giải được.

• Nhân cả hai vế của PT với 4 và biến đổi xuất hiện hằng đẳng thức (1), PT giải được.

Lời giải. Phương trình $x^2 - x - a\sqrt{1+8ax} = a$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x - 4a\sqrt{1+8ax} = 4a$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 4(2a-1)x + (2a-1)^2$$

$$= (1+8ax) + 4a\sqrt{1+8ax} + 4a^2$$

$$\Leftrightarrow (2x+2a-1)^2 = (\sqrt{1+8ax} + 2a)^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+8ax} = 2x-1 \text{ hoặc } \sqrt{1+8ax} = -2x-4a-1.$$

Giải các PT này ta được nghiệm $x = 2a+1 = 2001.$ ☐

★ Thí dụ 5. *Giải phương trình*

$$7x^2 + 7x = \sqrt{\frac{4x+9}{28}}.$$

Lời giải. Nhân cả hai vế của PT với 28 ta được $196x^2 + 196x = \sqrt{28}\sqrt{4x+9}$

$$\Leftrightarrow 196x^2 + 196x = 2\sqrt{28x+63}$$

$$\Leftrightarrow 196x^2 + 224x + 64 = (28x+63) + 2\sqrt{28x+63} + 1$$

$$\Leftrightarrow (14x+8)^2 = \left(\sqrt{28x+63}+1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 14x+8 = \sqrt{28x+63}+1 \\ 14x+8 = -\sqrt{28x+63}-1. \end{array}\right.$$

Việc giải các PT này xin dành cho bạn đọc.

★ Thí dụ 6. *Giải phương trình*

$$\sqrt{4-3\sqrt{10-3x}} = x-2.$$

Lời giải. PT đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x-2 \ge 0 \\ 4-3\sqrt{10-3x} = (x-2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ -3\sqrt{10-3x} = x^2-4x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ -12\sqrt{10-3x} = 4x^2-16x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ 4(10-3x) - 12\sqrt{10-3x} + 9 = 4x^2 - 28x + 49 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ (2\sqrt{10-3x}-3)^2 = (2x-7)^2. \end{cases}$$

Từ đây ta tìm được nghiệm $x = 3$. ☐

★ Thí dụ 7. *Giải phương trình*

$$(4x-1)\sqrt{x^2+1} = 2x^2 + 2x + 1.$$

Lời giải. Nhân cả hai vế của PT với 8 ta được

$$8(4x-1)\sqrt{x^2+1} = 16x^2 + 16x + 8$$

$$\Leftrightarrow (4x-1)^2 - 8(4x-1)\sqrt{x^2+1} + 16(x^2+1) = 16x^2 - 24x + 9$$

$$\Leftrightarrow \left((4x-1) - 4\sqrt{x^2+1}\right)^2 = (4x-3)^2$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+1} = 1 \text{ hoặc } \sqrt{x^2+1} = 2x-1.$$

Giải các PT này ta được nghiệm $x = \frac{4}{3}$. ☐

★ Thí dụ 8. *Giải phương trình*

$$x\sqrt{x^2-x+1} + 2\sqrt{3x+1} = x^2 + x + 3.$$

Lời giải. Nhân cả hai vế của PT với 2 ta được $2x\sqrt{x^2-x+1} + 4\sqrt{3x+1} = 2x^2 + 2x + 6$

(Xem tiếp trang 8)

Hướng dẫn giải ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP.HỒ CHÍ MINH

NĂM HỌC 2013-2014

(Đề thi đăng trên TH&TT số 435, tháng 9 năm 2013)

Câu I. Biến đổi hệ PT thành

$$\begin{cases} y(x^2-2xy)=3 \\ x^2-2xy=4-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(4-y)=3 & (1) \\ x^2-2xy=4-y & (2) \end{cases}$$

Từ PT (1) ta tìm được $y=1$; $y=3$.

Thay vào PT (2) để tìm x.

Hệ PT có bốn nghiệm $(x\,;\,y)$ là $(3;\,1)$, $(-1;-1)$, $(3+\sqrt{10};3)$, $(3-\sqrt{10};3)$.

Câu II. 1) *Không tồn tại.* Giả sử tồn tại số chính phương $a^2 (a\in\mathbb{N})$ có tổng các chữ số là 2013. Vì $2013 \vdots 3$ nên $a^2 \vdots 3 \Rightarrow a \vdots 3 \Rightarrow a^2 \vdots 9$ hay tổng các chữ số của a^2 là số chia hết cho 9. Mà 2013 không chia hết cho 9 (mâu thuẫn).

2) Ta có $(x+y)^5=120y+3<120(x+y)$

$\Rightarrow (x+y)^4<120<4^4 \Rightarrow x+y<4.$

Do $x,y\in\mathbb{N}^*$ nên $2\le x+y<4$; mà $120y+3$ là số lẻ, suy ra $x+y$ là số lẻ. Do đó $x+y=3$. Vì vậy $3^5=120y+3 \Leftrightarrow y=2$, dẫn đến $x=1$.

Câu III. Áp dụng BĐT: *Với $a>0$, $b>0$ luôn có* $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\ge\frac{1}{a+b}$, ta thấy

$$\frac{x}{2x+y+z}+\frac{y}{x+2y+z}+\frac{z}{x+y+2z}$$

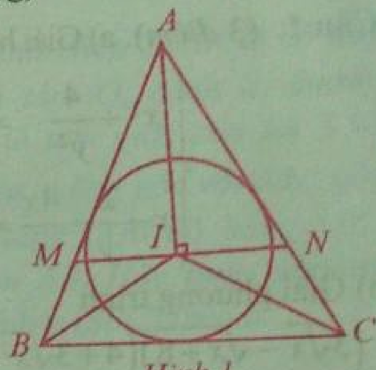
$$\le\frac{x}{4}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}\right)+\frac{y}{4}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}\right)+\frac{z}{4}\left(\frac{1}{x+z}+\frac{1}{y+z}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{x+y}{x+y}+\frac{x+z}{x+z}+\frac{y+z}{y+z}\right)=\frac{3}{4} \text{ (đpcm).}$$

Câu IV. 1) (h.1) a) Do AI là phân giác và là đường cao trong tam giác AMN nên $IM=IN$; $AM=AN$. Ta có $\widehat{BIC}=180^o-(\widehat{IBC}+\widehat{ICB})=$

$180^o-\left(\frac{\widehat{ABC}}{2}+\frac{\widehat{ACB}}{2}\right)=90^o+\frac{\widehat{BAC}}{2}$. Ngoài ra $\widehat{BMI}=\widehat{CNI}=90^o+\frac{\widehat{BAC}}{2}$. Do đó $\Delta MBI \backsim$

$\Delta IBC \backsim \Delta NIC$ (g.g) (1)



Hình 1

Suy ra $\frac{IM}{CN}=\frac{BM}{IN}$

$\Leftrightarrow BM.CN=IM.IN$

$=IM^2$.

b) Từ (1) suy ra $\frac{IB}{BC}=\frac{BM}{IB}$

$\Rightarrow IB^2=BM.BC.$

Tương tự $IC^2=CN.BC$.

Lại có $IA^2=AM^2-IM^2$

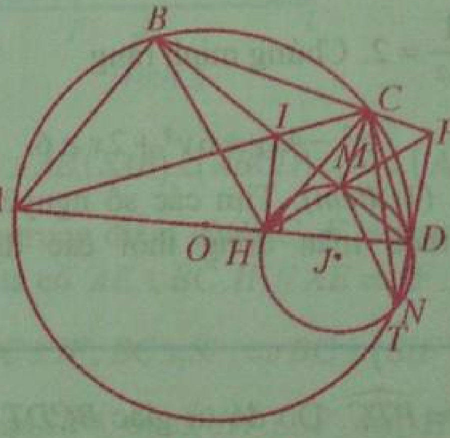
$=(AB-BM)(AC-CN)-BM.CN$

$=AB.AC-AB.CN-AC.BM.$

Suy ra $BC.IA^2=AB.BC.CA-AB.IC^2-AC.IB^2$.

Từ đó suy ra điều cần chứng minh.

2) (h.2)



Hình 2

a) Dễ thấy tứ giác $ICDH$ nội tiếp đường tròn đường kính ID (tâm M). Suy ra $\widehat{IMH}=2\widehat{ICH}=2\widehat{IDH}$. Lại có $\widehat{BCA}=\widehat{IDH}$ suy ra $\widehat{BCH}=\widehat{IMH}(=2\widehat{IDH})$.

Vậy tứ giác $BCMH$ nội tiếp.

b) Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác HMD cắt PD tại T (khác D) suy ra $PC.PB=PD.PT(=PM.PH)$ nên $\Delta PBD \backsim \Delta PTC$

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN HÀ TĨNH
NĂM HỌC 2013-2014
(Thời gian làm bài: 150 phút)

Câu 1. (*3 điểm*). a) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+\dfrac{4}{y^2} = 4 \\ x-\dfrac{2}{y}-\dfrac{4x}{y}=-2. \end{cases}$$

b) Giải phương trình

$$\left(3\sqrt{x}-\sqrt{x+8}\right)\left(4+3\sqrt{x^2+8x}\right)=16(x-1).$$

Câu 2. (*2 điểm*)

a) Cho ba số thực x,y,z thỏa mãn

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ (x-1)^3+(y-2)^3+(z-3)^3=0. \end{cases}$$

Tính giá trị của biểu thức

$$F=(x-1)^{2013}+(y-2)^{2013}+(z-3)^{2013}.$$

b) Cho các số thực dương x,y thỏa mãn $\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=2$. Chứng minh rằng

$$x^2-4xy+6y^2+2x\geq 6.$$

Câu 3. (*1 điểm*). Tìm các số nguyên dương a,b,c thỏa mãn đồng thời các điều kiện $\dfrac{a-b\sqrt{5}}{b-c\sqrt{5}}$ là số hữu tỉ và $a^2+b^2+c^2$ là số nguyên tố.

Câu 4. (*3 điểm*). Cho tam giác ABC có $AB=AC=a$ và $\widehat{BAC}=120^o$. Kí hiệu $(A;\,AB)$ là đường tròn tâm A, bán kính AB. Các tiếp tuyến của $(A;\,AB)$ tại B, C cắt nhau tại D. Gọi M là một điểm di động trên cung nhỏ BC của đường tròn $(A;\,AB)$ (M khác B, C). Tiếp tuyến tại M của đường tròn $(A;\,AB)$ cắt DB, DC lần lượt tại E, F. Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của các đường thẳng AE, AF với đường thẳng BC.

a) Chứng minh $ABEQ$ là tứ giác nội tiếp được trong một đường tròn và các đường thẳng AM, EQ, FP đồng quy.

b) Xác định vị trí của M trên cung nhỏ BC của $(A;\,AB)$ để diện tích tam giác APQ nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó theo a.

Câu 5. (*1 điểm*). Từ một đa giác đều 15 đỉnh, ta chọn ra 7 đỉnh bất kì. Chứng minh rằng có 3 đỉnh trong số các đỉnh đã chọn là 3 đỉnh của một tam giác cân.

TỪ HỮU SƠN (*GV THPT chuyên Hà Tĩnh*)
Sưu tầm và giới thiệu

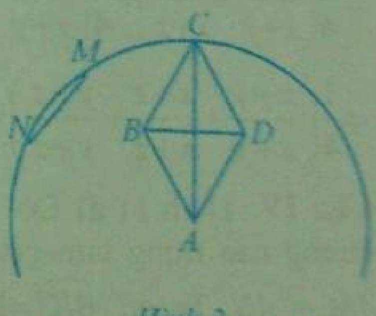
$\Rightarrow \widehat{PBD}=\widehat{PTC}$. Do đó tứ giác $BCDT$ nội tiếp suy ra T thuộc đường tròn (O), hay $T\equiv N$. Vậy ba điểm P, D, N thẳng hàng.

Câu V. (h.3) Xét các hình thoi $ABCD$ có cạnh 1cm, điểm A cố định và $\widehat{BAD}=60^o$. Khi đó $AB=BC=CD=DA=BD=1$cm.

Bốn điểm A, B, C, D được tô bằng ba màu nên tồn tại hai điểm được tô cùng màu.

- Nếu một trong năm đoạn thẳng AB, BC, CD, DA, BD có hai đầu cùng màu, chẳng hạn AB thì hai điểm A, B thỏa mãn đề bài.

- Nếu không có đoạn thẳng nào trong năm đoạn AB, BC, CD, DA, BD có hai đầu cùng màu thì C cùng màu với A. Dẫn đến các điểm thuộc đường tròn tâm A, bán kính $AC=\sqrt{3}$ cm được tô cùng màu với A. Khi đó lấy M, N bất kì thuộc đường tròn $(A;\sqrt{3}\text{cm})$ sao cho $MN=1$cm thì hai điểm M, N thỏa mãn yêu cầu bài toán.



Hình 3

Chuẩn bị cho kì thi tốt nghiệp THPT và thi vào Đại học

BÀI TOÁN KHOẢNG CÁCH TỪ ĐIỂM ĐẾN MẶT PHẲNG

LƯU VĂN NGÂN
(GV THPT chuyên Bắc Ninh)

Trong các đề thi tuyển sinh vào Đại học, Cao đẳng các năm gần đây, phần hình học không gian luôn xuất hiện câu hỏi về tính khoảng cách. Trong đó, khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng không những được hỏi tính trực tiếp, mà còn được sử dụng để tính các loại khoảng cách khác hoặc tính thể tích khối đa diện. Bài viết này, xin được trình bày các phương pháp tính và ứng dụng của loại khoảng cách này.

1. PHƯƠNG PHÁP TRỰC TIẾP

Để tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P), ta dựng đường thẳng d đi qua A và vuông góc với (P). Gọi $H = d \cap (P)$, khi đó $d(A;(P)) = AH$.

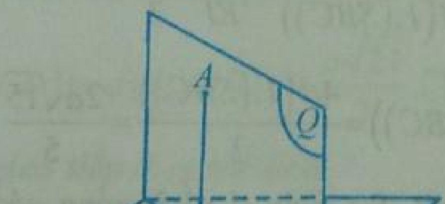
**) Nếu có sẵn đường thẳng Δ vuông góc với mp(P), ta dựng d qua A và song song với Δ.*

**) Nếu đường thẳng Δ chưa được xác định, ta thực hiện theo các bước*

- Chọn trong mp (P) một đường thẳng a, rồi dựng mp (Q) qua A và vuông góc với a, (khi đó $(Q) \perp (P)$).

- Dựng giao tuyến $b = (P) \cap (Q)$.

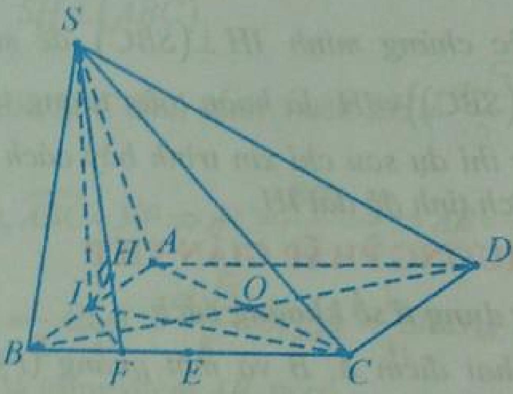
- Trong mp (Q), dựng $AH \perp b, H \in b$, khi đó $d(A;(P)) = AH$ (h.1).



Hình 1

★**Thí dụ 1.** *Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O, cạnh a, đường chéo $AC = a$. SAB là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy; góc giữa SC và mặt phẳng (ABCD) bằng 60°. Gọi I là trung điểm AB. Hãy tính khoảng cách từ I đến mặt phẳng (SBC) theo a.*

Lời giải. (h.2)



Hình 2

Ta có $SI \perp AB, (SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SI \perp (ABCD)$.

Gọi E là trung điểm của BC, F là trung điểm của BE, ta có $AE \perp BC, IF // AE \Rightarrow IF \perp BC$.

Ta có $BC \perp IF, BC \perp SI \Rightarrow BC \perp (SIF)$.

Trong mp(SIF), dựng $IH \perp SF$ với $H \in SF$.

Ta có $IH \perp SF, IH \perp BC \Rightarrow IH \perp (SBC)$.

Do đó $d(I,(SBC)) = IH$.

Góc giữa SC và mp($ABCD$) là $\widehat{SCI}$ nên $\widehat{SCI} = 60^o, CI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SI = CI.\tan\widehat{SCI} = \dfrac{3a}{2}$.

$AE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow IF = \dfrac{AE}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Từ đó

$$\frac{1}{IH^2}=\frac{1}{IS^2}+\frac{1}{IF^2}=\frac{4}{9a^2}+\frac{16}{3a^2}=\frac{52}{9a^2}.$$

Do đó $d\left(I,(SBC)\right)=IH=\dfrac{3a\sqrt{13}}{26}$. □

***Nhận xét*.** • *Trong mặt phẳng (SBC) chọn a là đường thẳng BC vì đã có $SI\perp BC$, ta chỉ cần dựng qua I, đường thẳng $IF\perp BC$ nữa là được mặt phẳng $(SIF)\perp BC$.*

• *Có thể không cần xác định được chính xác vị trí điểm F, ta dựng $IF\perp BC$ và tính IF theo công thức $\dfrac{1}{IF^2}=\dfrac{1}{IB^2}+\dfrac{1}{IC^2}$, từ đó suy ra*

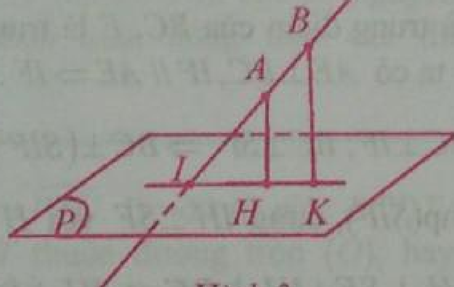
$$\frac{1}{IH^2}=\frac{1}{IS^2}+\frac{1}{IB^2}+\frac{1}{IC^2}.$$

• *Việc chứng minh $IH\perp(SBC)$ để suy ra $d\left(I,(SBC)\right)=IH$ là hoàn toàn tương tự. Do đó từ thí dụ sau chỉ xin trình bày cách dựng và cách tính độ dài IH.*

2. PHƯƠNG PHÁP GIÁN TIẾP

a. Sử dụng tỉ số khoảng cách

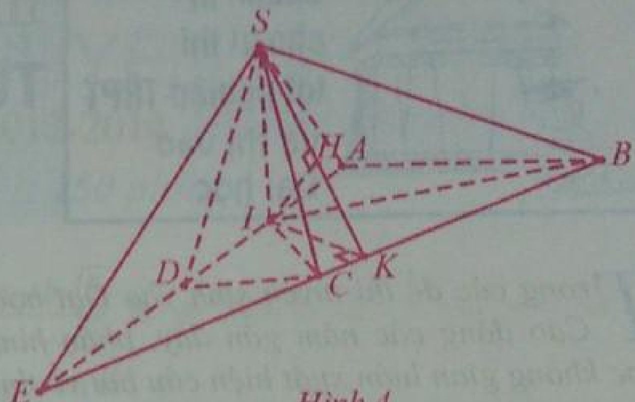
Cho hai điểm A, B và mặt phẳng (P). Gọi $I=AB\cap(P)$, khi đó $\dfrac{d\left(A,(P)\right)}{d\left(B,(P)\right)}=\dfrac{IA}{IB}$ (h.3).



Hình 3

★Thí dụ 2. *Cho hình chóp S. ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D; $AB=AD=2a$, $CD=a$; góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) bằng 60°. Gọi I là trung điểm AD, hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Tính theo a khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).*

Lời giải. (h.4)



Hình 4

Ta có $(SBI)\perp(ABCD),(SCI)\perp(ABCD)$ $\Rightarrow SI\perp(ABCD)$.

Trong mp(*ABCD*), dựng $IK\perp BC, K\in BC$; trong mp(*SIK*), dựng $IH\perp SK, H\in SK$. Từ $IH\perp(SBC)\Rightarrow d\left(I,(SBC)\right)=IH$.

$$S_{IBC}=S_{ABCD}-S_{DIC}-S_{ABI}=3a^2-\frac{a^2}{2}-a^2=\frac{3a^2}{2},$$

$$BC=\sqrt{2a^2+a^2}=a\sqrt{5}\Rightarrow IK=\frac{2S_{IBC}}{BC}=\frac{3a^2}{a\sqrt{5}}=\frac{3a\sqrt{5}}{5}.$$

Góc giữa hai mặt phẳng (*SBC*) và (*ABCD*) là $\widehat{SKI}$ nên $\widehat{SKI}=60^0\Rightarrow SI=IK.\tan\widehat{SKI}=\dfrac{3a\sqrt{15}}{5}$.

Ta có $\dfrac{1}{IH^2}=\dfrac{1}{IS^2}+\dfrac{1}{IK^2}=\dfrac{5}{27a^2}+\dfrac{5}{9a^2}=\dfrac{20}{27a^2}$

suy ra $d\left(I,(SBC)\right)=IH=\dfrac{3a\sqrt{15}}{10}$.

Trong mp(*ABCD*), gọi $E=AD\cap BC$ thì $E=AI\cap(SBC)$.

Ta có $\dfrac{d\left(A,(SBC)\right)}{d\left(I,(SBC)\right)}=\dfrac{EA}{EI}=\dfrac{4}{3}$. Do đó

$$d\left(A,(SBC)\right)=\frac{4d\left(I,(SBC)\right)}{3}=\frac{2a\sqrt{15}}{5}.\ \square$$

***Nhận xét*.** *Sử dụng tỉ số khoảng cách, ta có thể tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng thông qua điểm khác, quan trọng là biết cách xuất phát từ điểm nào trước. Từ dấu hiệu $SI\perp(ABCD)$, ta chọn tính khoảng cách từ* *điểm I đến (SBC) bằng phương pháp trực tiếp trước. Sau đó dựa vào tỉ số khoảng cách, suy ra khoảng cách cần tìm.*

b. Sử dụng các kết quả

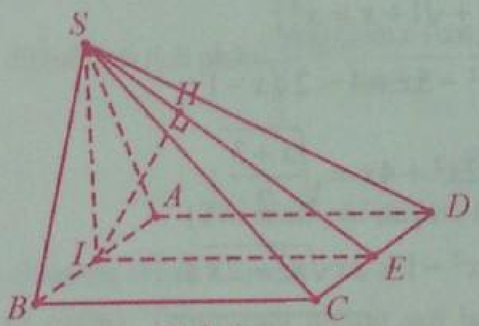
- Nếu $a//(P)$ thì $d(A;(P))=d(B;(P)), \forall A,B\in a$.
- Nếu $(P)//(Q)$ thì $d(A,(Q))=d(B,(Q)), A,B\in(P)$.

★Thí dụ 3 (Khối B năm 2013).

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính theo a khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD).

Lời giải. (h.5) Gọi I là trung điểm AB, ta có $SI\perp AB$ và $(SAB)\perp(ABCD)\Rightarrow SI\perp(ABCD)$.

Gọi E là trung điểm CD, trong mp(SIE), dựng $IH\perp SE, H\in SE$ thì $IH\perp(SCD)$, suy ra $d(I,(SCD))=IH$.



Hình 5

Ta có $SI=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}, IE=a$. Xét tam giác vuông SIE có $\dfrac{1}{IH^2}=\dfrac{1}{IS^2}+\dfrac{1}{IE^2}=\dfrac{4}{3a^2}+\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{7}{3a^2}$

suy ra $d(I,(SCD))=IH=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Mà $AB//CD$ nên $AB//(SCD)$. Từ đó

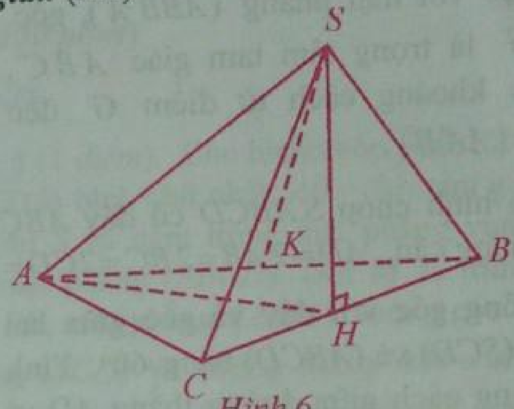
$$d(A,(SCD))=d(I,(SCD))=\frac{a\sqrt{21}}{7}.\square$$

c. Tính gián tiếp theo thể tích

★Thí dụ 4 (Khối A - A_1 năm 2013).

Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông tại A, $\widehat{ABC}=30^o$, SBC là tam giác đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính theo a khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB).

Lời giải. (h.6)



Hình 6

Ta có $d(C,(SAB))=\dfrac{3V_{S.ABC}}{S_{SAB}}$. Gọi H là trung điểm của BC, ta có $SH\perp BC, (SBC)\perp(ABC)$ suy ra $SH\perp(ABC)$.

Tam giác SBC đều, cạnh a nên $SH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$BC=a, \widehat{ABC}=30^0\Rightarrow AC=\frac{BC}{2}=\frac{a}{2}\Rightarrow AB=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.AC=\frac{a^2\sqrt{3}}{8}\Rightarrow V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SH.S_{ABC}=\frac{a^3}{16}.$$

Gọi K là trung điểm AB, ta có

$$\left.\begin{array}{l}HA=HB=HC\\ SH\perp(ABC)\end{array}\right\}\Rightarrow SA=SB\Rightarrow SK\perp AB.$$

$SK=\sqrt{SB^2-KB^2}=\sqrt{a^2-\dfrac{3a^2}{16}}=\dfrac{a\sqrt{13}}{4}$ suy ra

$$S_{SAB}=\frac{1}{2}SK.AB=\frac{a^2\sqrt{39}}{16}.$$

Do đó $d(C,(SAB))=\dfrac{3V_{S.ABC}}{S_{SAB}}=\dfrac{a\sqrt{39}}{13}.\square$

BÀI TẬP

1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AD=2AB=2BC=2a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với đáy, góc giữa SC và mặt phẳng ($ABCD$) bằng 45^o. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Tính theo a khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SCD).

2. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AC=a, BC=2a, \widehat{ACB}=120^\circ$, đường thẳng $A'C$ tạo với mặt phẳng $(ABB'A')$ góc 30°. Gọi G' là trọng tâm tam giác $A'B'C'$, tính theo a khoảng cách từ điểm G' đến mặt phẳng $(AA'B)$.

3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân, $AD=2AB=2BC=2CD=2a$. SA vuông góc với đáy và góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ bằng 60°. Tính theo a khoảng cách giữa đường thẳng AD và mặt phẳng (SBC).

4. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB=BC=2a$; hai mặt phẳng (SAB), (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M là trung điểm của AB, mặt phẳng qua SM và song song với BC, cắt AC tại N. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60°. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN.

5. (Khối A - A_1 năm 2012). Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60°. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC.

6. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA', BB'. Tính theo a khoảng cách giữa đường thẳng $B'M$ và mặt phẳng (ACN).

VẬN DỤNG HẰNG ĐẲNG THỨC...

(Tiếp trang 2)

$$\Leftrightarrow \left(x^2-2x\sqrt{x^2-x+1}+(x^2-x+1)\right) +\left((3x+1)-4\sqrt{3x+1}+4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)^2+\left(\sqrt{3x+1}-2\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x^2-x+1}-x=0\\ \sqrt{3x+1}-2=0\end{cases} \Leftrightarrow x=1. \square$$

Để kết thúc bài viết mời các bạn thử vận dụng hai hằng đẳng thức (1) và (2) để giải các phương trình chứa căn bậc hai sau:

1. $2\sqrt{2x-1}=x^2-2x$;
2. $\sqrt{x+1}=x^2+4x+5$;
3. $x^2-2=\sqrt{x+2}$;
4. $x^2+x+12\sqrt{x+1}=36$;
5. $2x^2+2x+1=\sqrt{4x+1}$;
6. $\sqrt{3x-2}=-4x^2+21x-22$;
7. $x^4+\sqrt{x^2+3}=3$;
8. $1+\sqrt{1+x}=x^2$;
9. $x^2-5x+4=2\sqrt{x-1}$;
10. $2x^2+4x=\sqrt{\dfrac{x+3}{2}}$;
11. $x^2-1=2x\sqrt{x^2-2x}$;
12. $(x+3)\sqrt{(4-x)(12+x)}=28-x$;
13. $x^2+3x+1=(x+3)\sqrt{x^2+1}$;
14. $(x+1)\sqrt{x^2-3x+3}=x^2-2x+3$;
15. $(x+2)\sqrt{x^2-2x+2}=x^2+x-1$;
16. $(x+1)\sqrt{x^2-2x+3}=x^2+1$;
17. $2(1-x)\sqrt{x^2+2x-1}=x^2-2x-1$;
18. $x+4\sqrt{x+3}+2\sqrt{3-2x}=11$;
19. $\sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}=x+4$;
20. $2\sqrt{2x+4}+4\sqrt{2-x}=\sqrt{9x^2+16}$;
21. $4x^2+3x+3=4x\sqrt{x+3}+2\sqrt{2x-1}$;
22. $1+x-2x^2=\sqrt{4x^2-1}-\sqrt{2x+1}$.

ĐỀ SỐ 2

(Thời gian làm bài: 180 phút)

PHẦN CHUNG

Câu 1 (2 *điểm*). Cho hàm số $y=-x^3+3x^2-2 \ (C)$

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.

2) Xác định m để đường thẳng $\Delta: y=m(2-x)+2$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt $A(2;2)$, B, C sao cho tích các hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (C) tại B và C đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 2 (1 *điểm*) Giải phương trình

$$\cos 3x+\sin 2x-2\sin x-\cos x+1=0.$$

Câu 3 (1 *điểm*) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 4x^3-3x+(y-1)\sqrt{2y+1}=0 \\ 2x^2+x+\sqrt{-y(2y+1)}=0. \end{cases}$$

Câu 4 (1 *điểm*) Tính tích phân $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log_2(3\sin x+\cos x)}{\sin^2 x}dx$

Câu 5 (1 *điểm*). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=2a$, tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M là trung điểm của SD, mặt phẳng (ABM) vuông góc với mặt phẳng (SCD) và đường thẳng AM vuông góc với đường thẳng BD. Tính thể tích khối chóp $S.BCM$ và khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SBC).

Câu 6 (1 *điểm*). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=(xy+yz+2xz)^2-\frac{8}{(x+y+z)^2-xy-yz+2},$$

trong đó x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=1$.

PHẦN RIÊNG

(*Thí sinh chỉ được chọn một trong hai phần A hoặc B*)

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu 7a (1 *điểm*). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D có $AB=AD<CD$, điểm $B(1;2)$, đường thẳng BD có phương trình $y=2$. Biết rằng đường thẳng $(d): 7x-y-25=0$ cắt các đoạn thẳng AD, CD lần lượt tại hai điểm M, N sao cho BM vuông góc với BC và tia BN là tia phân giác của góc MBC. Tìm điểm D có hoành độ dương.

Câu 8a (1 *điểm*). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(4;0;0)$ và $M(6;3;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và M sao cho (P) cắt trục Oy, Oz lần lượt tại B, C và thể tích tứ diện $OABC$ bằng 4.

Câu 9a (1 *điểm*). Giải phương trình

$$2\log(x^2-1)=\log(x+1)^4+\log(x-2)^2.$$

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu 7b (1 *điểm*). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, đường tròn nội tiếp của tam giác đều ABC có phương trình $(x-1)^2+(y-2)^2=5$ và đường thẳng BC đi qua điểm $M\left(\frac{7}{2};2\right)$. Xác định tọa độ điểm A.

Câu 8b (1 *điểm*). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;-1), B(1;1;2)$, $C(-1;2;-2)$ và mặt phẳng (P) có phương trình $x-2y+2z+1=0$. Mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (P) đồng thời cắt đường thẳng BC tại I sao cho $IB=2IC$. Viết phương trình mặt phẳng (α).

Câu 9b (1 *điểm*). Tìm số phức z thỏa mãn $(1-3i)z$ là số thực và $|\bar{z}-2+5i|=1$.

HUỲNH NGUYỄN LUÂN LƯU - NGUYỄN THỊ DUY AN (Trung tâm Thăng Long, TP.Hồ Chí Minh)

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 1

Câu 1. 1) Bạn đọc tự giải.

2) Giả sử $M\left(m;\dfrac{m}{1-m}\right)(m \neq 1)$. PT tiếp tuyến Δ tại M là $x-(1-m)^2y-m^2=0$. Khi đó $A(m^2;0)$; $B\left(0;\dfrac{-m^2}{(1-m)^2}\right)$. Để M là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $m \neq 0$, $m^2=2m$, $\dfrac{-m^2}{(1-m)^2}=\dfrac{2m}{1-m}$. Do đó $m=2$.

Vậy PT $\Delta: x-y-4=0$.

Câu 2. ĐK $\sin x \neq 0$. Nhân cả hai vế với $\sin^2 x$, ta được PT

$$\cos x\left(\sin x\cos x+\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}-\sin x\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \cos x(\sin x\cos x+1+\cos x-\sin x)=0.$$

Đáp số. $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Câu 3. ĐK $y\ge 0; 0\le x\le 2$. Viết lại PT thứ hai của hệ dưới dạng $(x^3-2\sqrt{y})(3x-2\sqrt{y})=0$. Với $x^3=2\sqrt{y}$ thì $x=2$. Với $3x=2\sqrt{y}$ ta có $x^3-3x=\sqrt{4-x^2}$. Đặt $x=2\cos t, t\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ ta được PT $2\cos 3t=2\sin t \Rightarrow t=\dfrac{\pi}{8}\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Vậy $(x;y)\in\left\{(2;16);\left(2\cos\dfrac{\pi}{8};9\cos^2\dfrac{\pi}{8}\right)\right\}$.

Câu 4. Ta có $L_1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(2-\cos^2 x)}{\sin^2 x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin^2 x)}{\sin^2 x}=1$ (do $\sin x\to 0$);

$L_2=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}=1$ và

$L_3=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{e^x-1}=1$ đều là các giới hạn hữu hạn. Vậy $L=L_1.L_2.L_3=1$.

Câu 5. Tam giác $C'CA$ cân ($\widehat{BAC}=30^\circ$) nên $B'C=a\sqrt{3}; CC'=2a$. Chú ý $BB'\perp CC'$, từ đó $BC=a\sqrt{3}; BC'=a, AB=3a$. Gọi I là giao điểm của BB' và CC'; J là hình chiếu của I trên $B'C'$; G,G' lần lượt là trọng tâm các tam giác SBC, IBC. Ta tính được $IJ=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Mặt khác $(SIJ)\perp B'C'$ nên $\widehat{SJI}=60^\circ$

$\Rightarrow SI=\dfrac{3a}{4}$. Do vậy $V_{SABC}=\dfrac{1}{3}.SI.S_{ABC}=\dfrac{3\sqrt{3}a^3}{8}$.

Từ định lí Thales có $GG'=\dfrac{a}{4}$. Chú ý $IG'//B'C$ nên ba điểm I,J,G' thẳng hàng.

Do đó $G'J=G'I+IJ=\dfrac{7\sqrt{3}a}{12}$.

Mặt khác $(GG'J)\perp B'C'$ nên

$$d_{(G;B'C')}=GJ=\sqrt{GG'^2+G'J^2}=\frac{\sqrt{39}a}{6}.$$

Câu 6. Với $x^2+y^2+z^2=3$, ta có

$$Q=\frac{32}{\sqrt{2(9-(x^4+y^4+z^4))+4}}+\frac{(x+y+z)^2-1}{2(x+y+z)}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $x^4+x+x\ge 3x^2$. Tương tự đi đến

$$x^4+y^4+z^4\ge 9-2(x+y+z).$$

Suy ra $Q\ge\dfrac{32}{\sqrt{4(x+y+z)+4}}+\dfrac{(x+y+z)^2-1}{2(x+y+z)}$.

Đặt $x+y+z=t\in[\sqrt{3};3]$ thì $Q\ge f(t)$, trong đó $f(t)=\dfrac{16}{\sqrt{t+1}}+\dfrac{t^2-1}{2t}, t\in[\sqrt{3};3]$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{1}{2t^2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{8}{\sqrt{(t+1)^3}}\le\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{8}{\sqrt{4^3}}<0;$

$\forall t\in[\sqrt{3};3]$. Do đó $Q\ge f(t)\ge f(3)=\dfrac{28}{3}$.

(*Xem tiếp trang 30*)

BẠN ĐỌC TÌM TÒI

NÉT ĐẸP CỦA MỘT DÃY BẤT ĐẲNG THỨC ĐỒNG BẬC BẬC BA

CAO MINH QUANG

(GV THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long)

I. DÃY BẤT ĐẲNG THỨC ĐỒNG BẬC BẬC BA

Với hai số thực dương x, y, ta luôn có

$$\frac{xy(x+y)}{2}\le\left(\frac{x+y}{2}\right)^3\le\frac{(x+y)(x^2+xy+y^2)}{6}$$

$$\le\frac{x^3+y^3}{2}\le\frac{(x^2+y^2)^3}{(x+y)^3}\quad(1)$$

Đây là một dãy bất đẳng thức (BĐT) khá đơn giản dành cho học sinh THCS. Tuy nhiên, chúng ta sẽ thấy nó nhiều ứng dụng giá trị trong chứng minh BĐT. Trước hết ta sẽ chứng minh dãy BĐT này.

- $$\left(\frac{x+y}{2}\right)^3=\frac{(x+y)^2(x^2+xy+y^2)}{8}\ge\frac{xy(x+y)}{2}.$$

- $$\frac{x^3+y^3}{2}=\frac{(x+y)(3x^2-3xy+3y^2)}{6}$$

$$=\frac{(x+y)\left(2(x-y)^2+(x^2+xy+y^2)\right)}{6}$$

$$\ge\frac{(x+y)(x^2+xy+y^2)}{6}.$$

- $$\frac{(x+y)(x^2+xy+y^2)}{6}=\frac{(x+y)(4x^2+4xy+4y^2)}{24}$$

$$=\frac{(x+y)\left(3(x+y)^2+(x-y)^2\right)}{24}\ge\left(\frac{x+y}{2}\right)^3.$$

- Sử dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có

$$\frac{x^3+y^3}{2}=\frac{(x+y)^4(4x^2-4xy+4y^2)}{8(x+y)^3}$$

$$\le\frac{\left((x+y)^2+(x+y)^2+(4x^2-4xy+4y^2)\right)^3}{27.8(x+y)^3}=\frac{(x^2+y^2)^3}{(x+y)^3}.$$

Dễ dàng thấy rằng dãy BĐT (1) trở thành đẳng thức khi và chỉ khi $x=y$.

II. MỘT SỐ ỨNG DỤNG

Sau đây ta sẽ nêu một số thí dụ minh họa việc ứng dụng dãy BĐT (1).

✪**Bài toán 1.** *Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\ge\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3\quad(2)$$

Lời giải. Sử dụng BĐT (1), với mọi số thực dương d, ta có

$$\frac{a^3+b^3}{2}\ge\left(\frac{a+b}{2}\right)^3;\ \frac{c^3+d^3}{2}\ge\left(\frac{c+d}{2}\right)^3.$$

Cộng theo vế hai BĐT trên, và tiếp tục áp dụng BĐT (1) ta nhận được

$$\frac{a^3+b^3+c^3+d^3}{2}\ge\left(\frac{a+b}{2}\right)^3+\left(\frac{c+d}{2}\right)^3$$

$$\ge 2.\left(\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}\right)\right)^3=\frac{1}{32}(a+b+c+d)^3.$$

Với $d=\frac{a+b+c}{3}$, từ BĐT trên ta nhận được

$$\frac{a^3+b^3+c^3+\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3}{2}$$

$$\ge\frac{1}{32}\left(a+b+c+\frac{a+b+c}{3}\right)^3=2\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3.$$

Suy ra $\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\ge\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.□

✪Bài toán 2. *Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3abc}+\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq 2.$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức AM – GM và BĐT (2) ta có

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\geq\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3=\left(\frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{6}\right)^3$$

$$\geq\frac{1}{6^3}\cdot\left(3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}\right)^3=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}.$$

Do đó, kết hợp việc sử dụng BĐT $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$, với mọi $x>0,\ y>0$, ta được

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3abc}+\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$\geq\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8abc}+\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq 2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.□

✪Bài toán 3. *Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{b+c}{a+\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}}+\frac{c+a}{b+\sqrt[3]{4(c^3+a^3)}}+\frac{a+b}{c+\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}}\leq 2.$$

Lời giải. Sử dụng BĐT (1), ta có $\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}\geq b+c$.

Do đó $a+\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}\geq a+b+c$. Suy ra $\frac{b+c}{a+\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}}\leq\frac{b+c}{a+b+c}$. Tương tự có

$$\frac{c+a}{b+\sqrt[3]{4(c^3+a^3)}}\leq\frac{c+a}{a+b+c};\frac{a+b}{c+\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}}\leq\frac{a+b}{a+b+c}.$$

Cộng theo vế các BĐT trên, ta thu được

$$\frac{b+c}{a+\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}}+\frac{c+a}{b+\sqrt[3]{4(c^3+a^3)}}+\frac{a+b}{c+\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}}$$

$$\leq\frac{2(a+b+c)}{a+b+c}=2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.□

✪Bài toán 4. *Cho x,y,z là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P=\sqrt[3]{4(x^3+y^3)}+\sqrt[3]{4(y^3+z^3)}+\sqrt[3]{4(z^3+x^3)}+2\left(\frac{x}{y^2}+\frac{y}{z^2}+\frac{z}{x^2}\right).$$

Lời giải. Từ bất đẳng thức $\frac{x^3+y^3}{2}\geq\left(\frac{x+y}{2}\right)^3$ suy ra $\sqrt[3]{4(x^3+y^3)}\geq x+y$. Do đó

$$P\geq 2\left(x+\frac{x}{y^2}\right)+2\left(y+\frac{y}{z^2}\right)+2\left(z+\frac{z}{x^2}\right)$$

$$\geq 4\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)\geq 12.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$. Suy ra giá trị nhỏ nhất của P là 12.□

✪Bài toán 5. *Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\leq\frac{1}{abc}.$$

Lời giải. Sử dụng BĐT (1), ta có $a^3+b^3\geq ab(a+b)$.

Do đó $a^3+b^3+abc\geq ab(a+b+c)$. Suy ra $\frac{1}{a^3+b^3+abc}\leq\frac{1}{ab(a+b+c)}$. Tương tự ta có

$$\frac{1}{b^3+c^3+abc}\leq\frac{1}{bc(a+b+c)},$$

$$\frac{1}{c^3+a^3+abc}\leq\frac{1}{ca(a+b+c)}.$$

Cộng theo vế các BĐT trên, ta được

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}$$

$$\leq\frac{1}{a+b+c}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)=\frac{1}{abc}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.□

✪Bài toán 6. *Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xyz=1$.*

Chứng minh rằng

$$\frac{x^9+y^9}{x^6+x^3y^3+y^6}+\frac{y^9+z^9}{y^6+y^3z^3+z^6}+\frac{z^9+x^9}{z^6+z^3x^3+x^6}\geq 2.$$

Lời giải. Bằng cách đặt $a=x^3,\ b=y^3,\ c=z^3$ thì $abc=1$. BĐT trên trở thành

$$\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3+c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3+a^3}{c^2+ca+a^2}\geq 2.$$

Sử dụng BĐT (1), ta có $\dfrac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2}\geq\dfrac{x+y}{3}$, suy ra

$$\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3+c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3+a^3}{c^2+ca+a^2}$$

$$\geq\frac{a+b}{3}+\frac{b+c}{3}+\frac{c+a}{3}=\frac{2}{3}(a+b+c)\geq\frac{2}{3}.3\sqrt[3]{abc}=2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$ hay $x=y=z=1$.□

✪Bài toán 7. *Cho a,b,c,d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}=4$.*

Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{b^3+c^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{c^3+d^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{d^3+a^3}{2}}$$

$$\leq 2(a+b+c+d)-4 \quad (3)$$

Lời giải. Sử dụng BĐT (1), ta có $\sqrt[3]{\dfrac{x^3+y^3}{2}}\leq\dfrac{x^2+y^2}{x+y}$. Do đó

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{b^3+c^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{c^3+d^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{d^3+a^3}{2}}$$

$$\leq\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+d^2}{c+d}+\frac{d^2+a^2}{d+a}.$$

Vì vậy, để chứng minh BĐT (3), ta cần chứng minh

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+d^2}{c+d}+\frac{d^2+a^2}{d+a}$$

$$\leq 2(a+b+c+d)-4 \quad (4)$$

Ta lưu ý rằng $a+b-\dfrac{a^2+b^2}{a+b}=\dfrac{2ab}{a+b}=\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$.

Do đó, nếu đặt $x=\dfrac{1}{a},\ y=\dfrac{1}{b},\ z=\dfrac{1}{c},\ t=\dfrac{1}{d}$ thì $x+y+z+t=4$ và khi đó BĐT (4) được viết lại dưới dạng

$\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{y+z}+\dfrac{1}{z+t}+\dfrac{1}{t+x}\geq 2$. Sử dụng BĐT

$$(a_1+a_2+...+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}\right)\geq n^2, a_i>0, i=1,2,...,n,$$

ta được $\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{y+z}+\dfrac{1}{z+t}+\dfrac{1}{t+x}$

$$\geq\frac{4^2}{(x+y)+(y+z)+(z+t)+(t+x)}=2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=t=1$ hay $a=b=c=d=1$.□

BÀI TẬP

1. Cho a,b,c là các số thực dương và $k\geq\dfrac{2}{3}$. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^k+\left(\frac{b}{c+a}\right)^k+\left(\frac{c}{a+b}\right)^k\geq\frac{3}{2^k}.$$

2. Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xyz=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2}{x+y+y^3z}+\frac{y^2}{y+z+z^3x}+\frac{z^2}{z+x+x^3y}\geq 3.$$

3. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

1) $(a^3+b^3+c^3)\left(\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}+\dfrac{1}{c^3}\right)\geq\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}+\dfrac{a+b}{c}\right)$.

2) $\dfrac{a^3}{b^2}+\dfrac{b^3}{c^2}+\dfrac{c^3}{a^2}\geq\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}$.

3) $\sqrt[3]{4a^3+4b^3}+\sqrt[3]{4b^3+4c^3}+\sqrt[3]{4c^3+4a^3}$

$$\leq\frac{4a^2}{a+b}+\frac{4b^2}{b+c}+\frac{4c^2}{c+a}.$$

XÁC SUẤT VÀ VIỆC KHÁM CHỮA BỆNH

ĐẶNG HÙNG THẮNG
(GV ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Vào năm 1651 Nhà Toán học Pháp Pascal (1623-1662) nhận được một bức thư của nhà quý tộc Pháp máu mê cờ bạc, công tước De Mére, nhờ ông giải đáp một số vấn đề rắc rối nảy sinh trong các trò chơi cờ bạc. Pascal đã "toán học hoá" các vấn đề này và viết thư trao đổi với một nhà toán học lớn khác là Fermat (1601-1665). Những cuộc trao đổi đó đã khai sinh ra Lí thuyết xác suất. Nhà Toán học Pháp Laplace (1749-1827) ở thế kỉ XIX đã tiên đoán rằng: " *Môn khoa học này hứa hẹn trở thành một trong những đối tượng quan trọng nhất của trí thức nhân loại. Rất nhiều những vấn đề quan trọng nhất của đời sống thực tế thuộc về những bài toán của Lí thuyết xác suất*".

Ngày nay Lí thuyết xác suất đã trở thành một ngành toán học quan trọng cả về phương diện lí thuyết và ứng dụng. Nó là công cụ không thể thiếu được mỗi khi ta nói đến dự báo, bảo hiểm; mỗi khi cần đánh giá các cơ may, các nguy cơ, rủi ro. Hiện nay ở hầu hết các nước trên thế giới, Xác suất đã được đưa vào giảng dạy ở bậc trung học phổ thông và là môn cơ sở bắt buộc của nhiều ngành ở bậc Đại học.

Một trong những sự thay đổi lớn về chương trình Toán ở THPT trong lần thay sách giáo khoa này là việc đưa vào giảng dạy một số kiến thức cơ bản về Xác suất. Đây là lần đầu tiên ở nước ta Xác suất được chính thức đưa vào dạy ở cấp THPT.

Trong bài viết này chúng tôi giới thiệu một ứng dụng của Xác suất trong vấn đề khám chữa bệnh.

Thực tế cho thấy một triệu chứng xuất hiện thường không tương ứng duy nhất với một bệnh mà có thể có một số bệnh cùng có triệu chứng đó (nếu có tương ứng duy nhất thì việc chẩn đoán bệnh là quá dễ).

Thống kê nhiều năm cho thấy, khi một người có triệu chứng X thì người đó có khả năng mắc một trong các bệnh A, B, C với xác suất tương ứng là 0,7; 0,2 ; 0,1.

Có ba loại thuốc α, β, γ đang lưu hành trên thị trường để chữa triệu chứng X

- **Sử dụng thuốc α :**

Với người mắc bệnh A thì xác suất chữa khỏi là 0,6 ; với người mắc bệnh B thì chắc chắn khỏi và với người mắc bệnh C thì xác suất chữa khỏi là 0,4.

- **Sử dụng thuốc β :**

Với người mắc bệnh A thì xác suất chữa khỏi là 0,65; với người mắc bệnh B thì xác suất chữa khỏi là 0,5 và với người mắc bệnh C thì xác suất chữa khỏi là 0,9.

- **Sử dụng thuốc γ :**

Với người mắc bệnh A thì xác suất chữa khỏi là 0,75; với người mắc bệnh B thì xác suất chữa khỏi là 0,2 và với người mắc bệnh C thì xác suất chữa khỏi là 0,5.

Giả sử ông *An* đi khám bệnh thấy có triệu chứng X. Để cẩn thận ông *An* đến hai phòng khám: phòng khám của bác sĩ *Bình* và phòng khám của bác sĩ *Cường*.

a) Tại phòng khám bác sĩ *Bình*

Bác sĩ *Bình* suy luận như sau: Ông *An* có khả năng mắc một trong ba bệnh A, B, C với các xác suất tương ứng là 0,7; 0,2 và 0,1. Khả năng ông *An* mắc bệnh A là cao nhất. Mặt khác, khi mắc bệnh A thì xác suất chữa khỏi khi dùng thuốc α, β, γ tương ứng là 0,6; 0,65 và 0,75.

Vì ông *An* có xác suất mắc bệnh A lớn nhất và nếu mắc bệnh A thì dùng thuốc γ có xác suất chữa khỏi bệnh cao nhất nên bác sĩ *Bình* kê đơn cho ông A: **Uống thuốc γ.**

b) Tại phòng khám bác sĩ *Cường*

Bác sĩ *Cường* vốn xuất thân từ dân chuyên toán nên tiếp cận vấn đề một cách toán học như sau:

Gọi K là biến cố: " Ông *An* khỏi bệnh ". Kí hiệu $P_\alpha(K)$, $P_\beta(K)$ và $P_\gamma(K)$ tương ứng là xác suất khỏi bệnh của ông *An* khi dùng các thuốc α, β, γ. Bây giờ cần tính các xác suất này và từ đó chỉ định cho ông *An* uống thuốc nào có xác suất chữa khỏi bệnh cao nhất.

1) Tính $P_\alpha(K)$.

Gọi A là biến cố:" Ông *An* mắc bệnh A ", B là biến cố: " Ông *An* mắc bệnh B " và C là biến cố:" Ông *An* mắc bệnh C ".

Ta có $K = KA \cup KB \cup KC$.

Theo công thức cộng xác suất, ta có

$$P_\alpha(K) = P_\alpha(KA) + P_\alpha(KB) + P_\alpha(KC).$$

Để tính các xác suất $P_\alpha(KA)$, $P_\alpha(KB)$, $P_\alpha(KC)$ ta phải sử dụng công thức nhân xác suất. Công thức nhân xác suất trong Sách giáo khoa Đại số và Giải tích 11 nâng cao phát biểu như sau:

Nếu hai biến cố A và B độc lập với nhau thì

$$P(AB)=P(A)P(B).$$

Tuy nhiên ở đây hai biến cố K và A không chắc độc lập. Vì thế ta cần dùng công thức nhân xác suất tổng quát như sau:

Với hai biến cố A và B bất kì thì

$$P(AB)= P(B)P(A|B)$$

trong đó $P(A|B)$ *là xác suất xảy ra biến cố A biết rằng biến cố B đã xảy ra.*

Rõ ràng nếu hai biến cố A và B độc lập thì $P(A) = P(A|B)$, vì việc xảy ra hay không xảy ra biến cố B không có ảnh hưởng gì đến việc xảy ra hay không xảy ra biến cố A. Thành thử công thức nhân xác suất là một trường hợp riêng của công thức nhân xác suất tổng quát.

Áp dụng công thức nhân xác suất tổng quát ta có $P_\alpha(KA) = P_\alpha(A).P_\alpha(K|A)$.

Theo giả thiết $P_\alpha(A)= 0,7$.

$P_\alpha(K|A)$ là xác suất chữa khỏi bệnh khi dùng thuốc α nếu ông *An* mắc bệnh A. Thành thử $P_\alpha(K|A) = 0,6$.

Do đó $P_\alpha(KA)=P_\alpha(A).P_\alpha(K|A)=(0,7).(0,6)=0,42$.

Tương tự $P_\alpha(KB)=P_\alpha(B).P_\alpha(K|B)=(0,2).1=0,2$;

$P_\alpha(KC)=P_\alpha(C).P_\alpha(K|C) = (0,1).(0,4) = 0,04$.

Do đó $P_\alpha(K)=P_\alpha(KA)+P_\alpha(KB)+P_\alpha(KC)$

$$= 0,42 + 0,2 + 0,04 = 0,66.$$

2) Tính $P_\beta(K)$.

Ta có

$P_\beta(KA) = P_\beta(A).P_\beta(K|A)=(0,7).(0,65)=0,455$;

$P_\beta(KB) = P_\beta(B).P_\beta(K|B)=(0,2).(0,5)=0,1$;

$P_\beta(KC)=P_\beta(C).P_\beta(K|C) = (0,1).(0,9) = 0,09$.

Do đó $P_\beta(K)=P_\beta(KA)+P_\beta(KB)+P_\beta(KC)$

$$= 0,455 + 0,1 + 0,09 = 0,645.$$

3) Tính $P_\gamma(K)$.

Ta có $P_\gamma(KA) = P_\gamma(A).P_\gamma(K|A)$

$$=(0,7).(0,75)=0,525.$$

$P_\gamma(KB) = P_\gamma(B).P_\gamma(K|B)=(0,2).(0,2)=0,04$;

$P_\gamma(KC) = P_\gamma(C).P_\gamma(K|C) = (0,1).(0,5) = 0,05$.

Do đó $P_\gamma(K)=P_\gamma(KA)+P_\gamma(KB)+P_\gamma(KC)$

$$= 0,525 + 0,04 + 0,05 = 0,615.$$

Như vậy xác suất chữa khỏi triệu chứng X khi dùng các thuốc α, β, γ tương ứng là 0,66; 0,645 và 0,615. Xác suất cao nhất thuộc về thuốc α.

Từ đó bác sĩ *Cường* kê đơn cho ông A **uống thuốc α.**

Ông *An* rất bối rối, biết theo bác sĩ nào bây giờ? Bạn có thể cho ông *An* một lời khuyên được không?

CÁC LỚP THCS

Bài T1/436 (Lớp 6). Cho số

$$n = 1234567891011...99100$$

(các dấu chấm chỉ tất cả những số từ 12 đến 88 viết tiếp sau số 11 và trước số 99 theo thứ tự từ nhỏ đến lớn). Phải xóa bỏ 100 chữ số nào để các chữ số còn lại (vẫn giữ nguyên thứ tự như trước) tạo thành một số lớn nhất?

TRƯƠNG QUANG AN

(GV THCS Nghĩa Thắng, Tư Nghĩa, Quảng Ngãi)

Bài T2/436 (Lớp 7). Tìm các số nguyên x, y, z sao cho $(x-y)^3 + 3(y-z)^2 + 5|z-x| = 35$.

NGUYỄN KHÁNH TOÀN

(GV THCS Bắc Hải, Tiền Hải, Thái Bình)

Bài T3/436. Với những giá trị nào của a, thì các số $a+\sqrt{15}$ và $\dfrac{1}{a}-\sqrt{15}$ đều là các số nguyên?

NGUYỄN ĐỄ

(Hải Phòng)

Bài T4/436. Giải phương trình

$$\sqrt{6-x} + \sqrt{2x+6} + \sqrt{6x-5} = x^2 - 2x - 5.$$

ĐÀO CHÍ THANH

(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T5/436. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Từ điểm I nằm ngoài đường tròn kẻ IH vuông góc với AB (H nằm giữa O và A). IA, IB cắt (O) lần lượt tại E và F; EF cắt AB tại P. EH cắt (O) tại điểm thứ hai là M, PM cắt (O) tại điểm thứ hai là N. Gọi K là trung điểm EF, O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HMN. Chứng minh rằng $O'H \parallel OK$.

NGUYỄN DŨNG

(GV THCS Bắc Bình I, Bình Thuận)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/436. Chứng minh rằng với tam giác ABC bất kì ta luôn có

$$\left(\frac{h_a}{l_a} - \sin\frac{A}{2}\right)\left(\frac{h_b}{l_b} - \sin\frac{B}{2}\right)\left(\frac{h_c}{l_c} - \sin\frac{C}{2}\right) \le \frac{r}{4R},$$

trong đó h_a, h_b, h_c và l_a, l_b, l_c tương ứng là độ dài đường cao và độ dài đường phân giác trong kẻ từ A, B, C; R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC.

NGUYỄN VIỆT HÙNG

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T7/436. Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{BAC} = 90^\circ$, $BC = 2a$, $\widehat{ACB} = \alpha$. Mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính thể tích của hình chóp, biết rằng tam giác SAB cân tại S và tam giác SBC vuông.

PHAN CUNG ĐỨC

(Hà Nội)

Bài T8/436. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^8y^8 + y^4 = 2x \\ 1 + x = x(1+y)\sqrt{xy}. \end{cases}$$

NGUYỄN VĂN NHO

(GV THPT Nguyễn Duy Trinh, Nghi Lộc, Nghệ An)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/436. Cho số $A = 2013^{30n^2+4n+2013}$ với $n \in \mathbb{N}$. Gọi X là tập hợp mà các phần tử là số dư khi chia A cho 21 với mọi số tự nhiên n. Hãy xác định tập hợp X.

BÙI HẢI QUANG

(GV THCS Văn Lang, TP.Việt Trì, Phú Thọ)

Bài T10/436. Cho dãy số tự nhiên (x_n) với $x_1 = 2$, $x_{n+1} = \left[\frac{3}{2}x_n\right]$, $\forall n = 1,2,3,...$, ở đó kí hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x. Chứng minh rằng trong dãy (x_n) có vô hạn số chẵn và vô hạn số lẻ.

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong Số 2, Bắc Ninh)

Bài T11/436. Cho số thực $x \ge 1$. Tìm giới hạn

$$\lim_{n\to+\infty}\left(2\sqrt[n]{x}-1\right)^n.$$

NGUYỄN TUẤN NGỌC

(GV THPT chuyên Tiền Giang)

Bài T12/436. Cho tam giác ABC có diện tích S và P là điểm bất kì. Gọi A', B', C' là trung điểm các cạnh BC, CA, AB; h_a, h_b, h_c là độ dài các đường cao tương ứng. Chứng minh rằng

$$PA^2+PB^2+PC^2$$

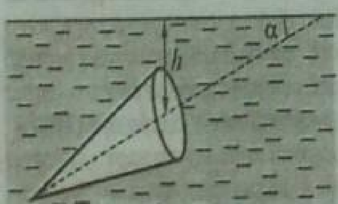
$$\ge\frac{4}{\sqrt{3}}S.\max\left\{\frac{PA+PA'}{h_a},\frac{PB+PB'}{h_b},\frac{PC+PC'}{h_c}\right\}.$$

TRẦN QUANG HÙNG

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

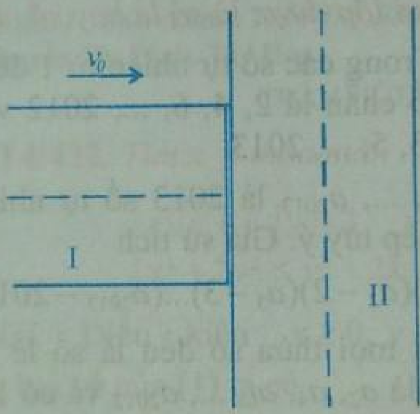
Bài L1/436. Một khối hình nón có đường kính đáy là D và độ cao H được nhúng chìm trong nước. Trục của hình nón lập với mặt chất lỏng một góc α, khoảng cách từ mặt chất lỏng tới tâm của đáy hình nón là h. Tìm lực tác dụng lên mặt bên của khối hình nón, biết khối lượng riêng của nó là ρ.



NGUYỄN NHẬT HUY

(Hà Nội)

Bài L2/436. Các chi tiết máy sau khi sản xuất được chuyển ra ngoài nhờ hai băng tải chuyển động vuông góc với cùng tốc độ v_0. Sau khi các chi tiết máy tới băng tải I, chúng trượt vào chính giữa băng tải II. Nếu tốc độ của băng tải II tăng lên n lần thì tốc độ của băng tải I phải tăng lên bằng bao nhiêu để các chi tiết máy vẫn trượt đến chính giữa băng tải II (kích thước các chi tiết đó có thể bỏ qua)?



TRẦN KHÁNH HẢI

(Thừa Thiên Huế)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/436. (For 6th grade) Let

$$n=1234567891011...99100$$

Delete 100 digits so that the number formed from the remaining digits in the original order, is greatest possible.

T2/436. (For 7th grade) Find all integers x, y, z such that $(x-y)^3+3(y-z)^2+5\,|\,z-x\,|=35.$

T3/436. For what values of a is the numbers $a+\sqrt{15}$ và $\frac{1}{a}-\sqrt{15}$ are both integers?

T4/436. Solve the equation

$$\sqrt{6-x}+\sqrt{2x+6}+\sqrt{6x-5}=x^2-2x-5.$$

T5/436. Let (O) be a circle of diameter AB. Point I is outside the circle, IH is the perpendicular line to AB through I (H lies between O and A). IA, IB meet (O) at points E and F respectively; EF meets AB at P; EH meets (O) at the second point M; PM intersects (O) at the second point N. Let K denote the midpoint of EF, O' is the circumcenter of triangle HMN. Prove that $O'H\,//\,OK$.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/436. Prove that in any triangle ABC, the following inequality holds

$$\left(\frac{h_a}{l_a}-\sin\frac{A}{2}\right)\left(\frac{h_b}{l_b}-\sin\frac{B}{2}\right)\left(\frac{h_c}{l_c}-\sin\frac{C}{2}\right)\le\frac{r}{4R},$$

(Xem tiếp trang 27)

★Bài T1/432. *Cho 2013 số tự nhiên từ 1 đến 2013 xếp theo thứ tự tùy ý. Lấy số thứ nhất trừ 1, lấy số thứ hai trừ 2, lấy số thứ ba trừ 3, ..., lấy số thứ 2013 trừ 2013. Hỏi tích của 2013 số mới lập được là số lẻ hay số chẵn?*

Lời giải. Trong các số tự nhiên từ 1 đến 2013 có 1006 số chẵn là 2, 4, 6, ..., 2012 và 1007 số lẻ là 1, 3, 5, ..., 2013 (*)

Gọi $a_1, a_2, ..., a_{2013}$ là 2013 số tự nhiên trên được sắp xếp tùy ý. Giả sử tích

$$A=(a_1-1)(a_2-2)(a_3-3)...(a_{2013}-2013)$$

là số lẻ thì mọi thừa số đều là số lẻ nên có 1006 số lẻ là $a_2, a_4, a_6, ..., a_{2012}$ và có 1007 số chẵn là $a_1, a_3, ..., a_{2013}$. Điều này trái với giả thiết (*). Vậy trong tích

$$A=(a_1-1)(a_2-2)...(a_{2013}-2013)$$

phải có ít nhất một thừa số chẵn, suy ra tích A là số chẵn.□

➢**Nhận xét.** 1) Cách giải khác: Xét tổng

$$B=(a_1-1)+(a_2-2)+...+(a_{2013}-2013)$$
$$=(a_1+a_2+...+a_{2013})-(1+2+..+2013)=0.$$

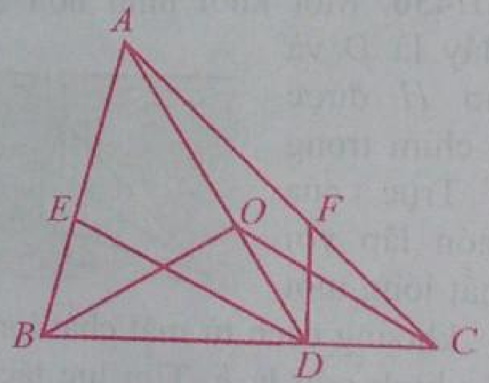
Nếu mọi số $a_1-1, a_2-2,..., a_{2013}-2013$ đều lẻ thì tổng của 2013 số lẻ phải là số lẻ, trái với $B=0$. Vậy có ít nhất một số hạng của B là số chẵn, lúc đó tích A của chúng là số chẵn.

2) Các bạn sau có lời giải đúng, lập luận gọn, chặt chẽ: **Phú Thọ**: *Trần Minh Hiếu, Lê Nguyễn Quỳnh Trang*, 6C, THCS Văn Lang, TP.Việt Trì, *Lê Ngọc Lan*, 6A2, *Nguyễn Hoàng Phi*, 6A3, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc**: *Trần Đức Duy, Nguyễn Thị Hương, Lê Đức Mạnh, Nguyễn Văn Hiếu*, 6A5, THCS Yên Lạc, *Nguyễn Thành Vinh*, 6A1, THCS Hai Bà Trưng, TX Phúc Yên; **Nghệ An**: *Ngô Thị Ngọc Anh*, 6A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, *Nguyễn Văn Mạnh*, 6A, *Nguyễn Thùy Dung*, 6B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Ngãi**: *Nguyễn Cao Bách*, 6A, THCS Nguyễn Nghiêm, TP.Quảng Ngãi, *Lê Thị Nhật Phượng, Phạm Thiên Trang, Đặng Lưu Việt Quý*, 6A, THCS Hành Phước, *Nguyễn Tấn Duy*, 6B, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành.

VIỆT HẢI

★Bài T2/432. *Cho tam giác nhọn ABC có điểm O là giao của ba đường trung trực. Tia AO cắt cạnh BC tại D. Trên các cạnh AB và AC lần lượt lấy các điểm E và F sao cho DE = DB, DF = DC. Chứng minh rằng DA là tia phân giác của góc EDF.*

Lời giải.



Từ giả thiết có $OA = OB = OC$. Tam giác DFC cân tại D nên $\widehat{DFC}=\widehat{DCF}$ (1)

Ta có $\widehat{DFC}=\widehat{DAC}+\widehat{ADF}=\widehat{OAC}+\widehat{ADF}$
$=\widehat{OCA}+\widehat{ADF}$ (2)

$\widehat{DCF}=\widehat{OCA}+\widehat{OCD}=\widehat{OCA}+\widehat{OCB}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{ADF}=\widehat{OCB}$ (4)

Tương tự ta có $\widehat{ADE}=\widehat{OBC}$ (5)

Từ (4) và (5), do tam giác OBC cân tại O suy ra $\widehat{ADE}=\widehat{ADF}$ và tia DA nằm giữa hai tia DE

và DF nên DA là tia phân giác của góc EDF. □

➤**Nhận xét.** 1) Đa số các bạn dựa vào tính chất góc ngoài của tam giác và tính chất của tam giác cân để chứng minh. Một số bạn quên không nêu nhận xét tia DA nằm giữa hai tia DE và DF.

2) Các bạn sau có lời giải đúng và ngắn gọn:

Phú Thọ: *Dương Gia Huy, Nguyễn Tiến Long*, 7A1, *Nguyễn Hoàng Phi*, 7A3, THCS Lâm Thao, *Bùi Đức Trọng*, 7A, THCS Văn Lang; **Thanh Hóa**: *Nguyễn Khải Hưng*, 7D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; **Nghệ An**: *Nguyễn Thị Hằng, Đặng Quang Quân, Dương Xuân Long*, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Ngãi**: *Nguyễn Trung Anh*, 7C, *Nguyễn Đại Dương*, 7B, THCS Nguyễn Kim Vang, *Võ Quang Phú Thời, Nguyễn Lê Hoàng Duyên, Lương Thị Thắm*, 7A, *Đỗ Thị Thanh Huyền*, 7D, THCS Phạm Văn Đồng, *Đặng Lưu Việt Quý, Nguyễn Thị Hạ Vy, Đỗ Thị Mỹ Lan, Phạm Thiên Trang*, 7A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành, *Phạm Thị Vy Vy*, 6A, *Nguyễn Thị Kim Duyên, Phạm Quốc Trung*, 7A, *Võ Công Phát*, 7C, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa, *Nguyễn Vũ Như Ngọc*, 7B, THCS TTr. Sông Vệ, *Nguyễn Cao Bách*, 7B1, THCS Nguyễn Nghiêm; **Tiền Giang**: *Nguyễn Hoàng Anh*, 7/13, THCS Xuân Diệu, TP.Mỹ Tho; **Bình Định**: *Trần Cà Bảo*, 7A1, THCS Phước Lộc, Tuy Phước.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★Bài T3/432. *Tìm tất cả các số nguyên dương a, b $(a \ge 2, b \ge 2)$ và a + b là bội của 4 thỏa mãn* $\dfrac{a(a-1)+b(b-1)}{(a+b)(a+b-1)} = \dfrac{1}{2}$ (1)

Lời giải. Do $a \ge 2, b \ge 2$ nên

$$(1) \Leftrightarrow 2(a^2 - a + b^2 - b) = (a+b)^2 - a - b$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 = a+b \quad (2)$$

Vì $a+b \,\vdots\, 4$ nên $a+b = 4k$, $k \in \mathbb{N}^*$. Từ (2) ta có $(a-b)^2 = 4k$. Vậy k là số chính phương và có dạng $k = t^2, t \in \mathbb{Z}, t \ne 0$. Vậy ta có

$$\begin{cases} a+b = 4t^2 \\ a-b = 2t \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a+b = 4t^2 \\ a-b = -2t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2t^2 + t \\ b = 2t^2 - t \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = 2t^2 - t \\ b = 2t^2 + t. \end{cases}$$

Từ điều kiện $a \ge 2, b \ge 2$, ta có $\begin{cases} 2t^2 + t \ge 2 \\ 2t^2 - t \ge 2 \end{cases}$

suy ra $t \le -2$ hoặc $t \ge 2$, $t \in \mathbb{Z}$.

Vậy cặp số nguyên dương $(a; b)$ cần tìm là $(2t^2 + t; 2t^2 - t), (2t^2 - t; 2t^2 + t)$ với $t \in \mathbb{Z}$, $t \le -2$ hoặc $t \ge 2$. □

➤**Nhận xét.** 1) Hầu hết các bạn đều làm theo cách trên và ra được kết quả. Một số bạn không chú ý điều kiện đầu bài nên không giới hạn đúng ở kết quả.

2) Các bạn sau có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Nguyễn Khắc Việt Anh*, 8A1, THCS Yên Lạc; **Thanh Hóa**: *Ninh Tiến Linh, Lê Quang Dũng*, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; **Nghệ An**: *Phạm Quang Toàn*, 9C, THCS Đặng Thanh Mai, TP.Vinh; **Quảng Ngãi**: *Đặng Lưu Việt Quý, Phạm Thiên Trang*, 7A, *Vũ Thị Thi*, 8A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành, *Phạm Quốc Trung, Võ Công Phát*, 9C, *Phạm Thị Vy Phạm Vy*, 7A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa, *Nguyễn Cao Bách*, 7B1, THCS Nguyễn Nghiêm; **TP.Hồ Chí Minh**: *Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy*, 9A1, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, Quận 1; **Phú Yên**: *Trần Đỗ Bảo Thuận*, 9B, THCS Nguyễn Thị Định, Tây Hòa.

TRẦN HỮU NAM

★Bài T4/432. *Tìm x, y thỏa mãn*

$$\begin{cases} x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 2 & (1) \\ x^3 + 2y^2 \le y^3 + 2x & (2) \end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện $x \ge 0, y \ge 0$. Bình phương hai vế của (1) ta có

$$(x\sqrt{x} + y\sqrt{y})^2 = 4 \Leftrightarrow x^3 = 4 - 2xy\sqrt{xy} - y^3 \quad (3)$$

Thay (3) vào BPT (2) ta được

$$4 - 2xy\sqrt{xy} - y^3 + 2y^2 \le y^3 + 2x$$

$$\Leftrightarrow y^3 + xy\sqrt{xy} + x \ge 2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow y\sqrt{y}(x\sqrt{x} + y\sqrt{y}) + x \ge 2 + y^2.$$

Do (1) nên suy ra $2y\sqrt{y} + x \ge x\sqrt{x} + y\sqrt{y} + y^2$

$$\Leftrightarrow x + y\sqrt{y} \ge x\sqrt{x} + y^2 \quad (4)$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số không âm có $(\sqrt{x} + x\sqrt{x}) + (y + y^2) \ge 2x + 2y\sqrt{y}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} + y \ge (x + y\sqrt{y}) + (x + y\sqrt{y} - x\sqrt{x} - y^2)$$

$$\ge x + y\sqrt{y} \text{ (do (4))}$$

Do đó $(1+x) + (1+y^2) \ge 2\sqrt{x} + 2y \ge 2x + 2y\sqrt{y}$

$= (x + y\sqrt{y}) + (x + y\sqrt{y}) \ge x + y\sqrt{y} + x\sqrt{x} + y^2$

(do (4)). Suy ra $x\sqrt{x} + y\sqrt{y} \le 2$.

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=2 \\ x=1 \\ y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1. \end{cases}$

Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 1)$. □

➢**Nhận xét.** Đây là bài toán giải hệ gồm 1 phương trình và 1 bất phương trình nên đòi hỏi các bạn phải vận dụng linh hoạt tính chất của bất đẳng thức để đánh giá, từ đó tìm ra x và y. Một số bạn giải bài đã sử dụng BĐT Cauchy cho ba số không âm mà không chứng minh thì coi là vượt quá chương trình cấp THCS.

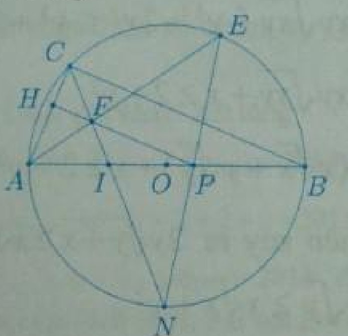
Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt:

Phú Thọ: *Nguyễn Đức Thuận*, 8A3, *Đinh Minh Hà*, 9A1, THCS Lâm Thao; **Nam Định**: *Phạm Thanh Tông*, 9A2, THCS Xuân Trường; **Quảng Ngãi**: *Huỳnh Tiến Phát*, 9C, THCS Phổ Văn, Đức Phổ; **TP.Hồ Chí Minh**: *Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy*, 9A1, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, Quận 1.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★**Bài T5/432.** *Cho đường tròn tâm O, đường kính AB. Trên đường tròn (O) lấy điểm C (C khác A và B). P là điểm thuộc đường kính AB sao cho BP = AC. Kẻ PH vuông góc với AC tại H. Phân giác trong của góc CAB cắt đường tròn (O) tại E và cắt PH tại F. Đường thẳng CF cắt đường tròn (O) ở N. Chứng minh rằng CN đi qua trung điểm của AP.*

Lời giải. (Hình vẽ)



Ta có $PH \parallel BC$ (vì cùng vuông góc với AC). Gọi I là giao điểm của CF và AB. Áp dụng định lí Thales trong tam giác CIB ta có

$$\frac{FI}{FC}=\frac{PI}{PB} \qquad (1)$$

Mặt khác, AF là tia phân giác góc CAI nên

$$\frac{FI}{FC}=\frac{AI}{AC} \qquad (2)$$

Từ (1), (2) và theo giả thiết $BP = AC$, suy ra $IP = IA$, hay CN đi qua trung điểm AP. □

➢**Nhận xét.** 1) Hầu hết các bạn tham gia đều cho lời giải đúng theo cách trên. Bạn *Nguyễn Đức Thuận*, 8A3, THCS Lâm Thao, **Phú Thọ** nhận xét rằng các điểm E và N không sử dụng trong bài toán, tuy nhiên có thể chứng minh được ba điểm E, P, N thẳng hàng (không phụ thuộc vào vị trí điểm P). Việc chứng minh xin dành cho bạn đọc.

2) Ngoài bạn *Thuận*, các bạn sau cũng cho lời giải tốt.

Phú Thọ: *Hà Minh Đăng*, 8C, THCS TTr. Sông Thao; *Vũ Thuỳ Linh*, 9A3, THCS Lâm Thao; **Hà Nội:** *Lê Duy Anh*, 9A, THCS Nguyễn Huy Tưởng, Đông Anh; **Hà Nam:** *Đỗ Đăng Dương*, 9A, THCS Đinh Công Tráng, Thanh Liêm; **Quảng Ngãi:** *Phạm Thị Vy Vy*, 7A, *Võ Công Phát*, 9C THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa; *Nguyễn Thị Hạ Vy*, 7A, *Vũ Thi Thi*, *Phạm Thiên Trang*, 8A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; *Huỳnh Tiến Phát*, 9C, THCS Phổ Văn, Đức Phổ; *Nguyễn Vũ Như Ngọc*, 9B, THCS TTr. Sông Vệ, Tư Nghĩa.

NGUYỄN THANH HỒNG

★**Bài T6/432.** *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b+c}+\frac{3}{a+b+c}\right)^2+\left(\frac{1}{b}+\frac{2}{c+a}+\frac{3}{a+b+c}\right)^2$$
$$+\left(\frac{1}{c}+\frac{2}{a+b}+\frac{3}{a+b+c}\right)^2 \ge \frac{81}{a^2+b^2+c^2}.$$

Lời giải. Với x, y, z bất kì, ta có

$$x^2+y^2+z^2 \ge \frac{1}{3}(x+y+z)^2 \qquad (1)$$

Với x, y, z là các số thực dương, ta có

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \ge \frac{9}{x+y+z} \qquad (2)$$

Đẳng thức trong (1) và (2) xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.

Gọi vế trái của BĐT cần chứng minh là A.

Áp dụng BĐT (1), ta có

$$A \ge \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}+\frac{2}{a+b}+\frac{9}{a+b+c}\right)^2 \quad (3)$$

Áp dụng BĐT (2), ta có

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge \frac{9}{a+b+c};$$

$$\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}+\frac{2}{a+b} \ge \frac{9}{a+b+c}.$$

Do đó $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}+\frac{2}{a+b}+\frac{9}{a+b+c}$

$$\geq \frac{27}{a+b+c} \qquad (4)$$

Từ (3) , (4) và áp dụng BĐT (1) ta được

$$A \geq \frac{1}{3}\left(\frac{27}{a+b+c}\right)^2 = \frac{243}{(a+b+c)^2} \geq \frac{81}{a^2+b^2+c^2}.$$

Vậy $\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b+c}+\frac{3}{a+b+c}\right)^2+\left(\frac{1}{b}+\frac{2}{c+a}+\frac{3}{a+b+c}\right)^2$

$$+\left(\frac{1}{c}+\frac{2}{a+b}+\frac{3}{a+b+c}\right)^2 \geq \frac{81}{a^2+b^2+c^2}.$$

BĐT trong đầu bài được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.□

➤**Nhận xét.** Có rất nhiều bạn tham gia giải bài này và hầu hết làm theo cách trên. Hai BĐT (1) và (2) có thể chứng minh như sau:

Bằng phép biến đổi đơn giản, ta có

$$\text{BĐT (1)} \Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geq 0.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương, ta có $x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$; $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{xyz}}$. Nhân theo vế, ta được BĐT (2). Các bạn sau có bài giải tốt :

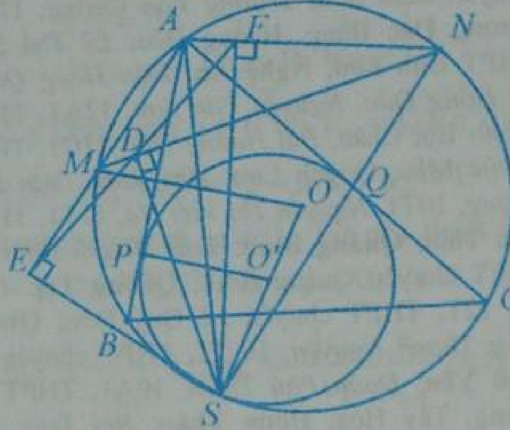
Thanh Hóa: *Lê Hùng Cường*, 10A7, THPT Lương Đắc Bằng, Hoằng Hóa; **Nghệ An**: *Tăng Trung Hiếu*, 10A1, THPT Thái Hòa; **Hà Tĩnh**: *Nguyễn Thị Thùy Linh*, 10A1, THPT Hương Khê; **Bến Tre**: *Nguyễn Duy Linh*, 10 Toán, THPT chuyên Bến Tre; **Bình Định**: *Võ Thế Duy*, 10A1, THPT Số 1, TTr Phù Mỹ; **Quảng Nam**: *Lê Phước Định*, 8/1, THCS Kim Đồng, TP Hội An; **Phú Yên**: *Đoàn Phú Thiện*, 10A1, THPT Lê Hồng Phong, Tây Hòa; **Quảng Bình**: *Mai Trí Hào*, 10 Toán, THPT chuyên Quảng Bình; **Long An**: *Phan Anh Kiệt*, 10T1, THPT chuyên Long An.

NGUYỄN ANH DŨNG

★**Bài T7/432.** *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (O') tiếp xúc với hai cạnh AB, AC theo thứ tự tại P, Q và tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại S. Hai đường thẳng SP, SQ cắt lại đường tròn (O) theo thứ tự tại M, N. Gọi E, D, F theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của S trên các đường thẳng AM, MN, NA. Chứng minh rằng DE = DF.*

Lời giải. (Hình vẽ)

Từ $\widehat{O'PS}=\widehat{O'SP}=\widehat{OSM}=\widehat{OMS}$, suy ra $O'P \parallel OM$. Lại vì $O'P \perp AP$ nên $OM \perp AB$, nghĩa là M là điểm chính giữa của $\overset{\frown}{AB}$ không chứa điểm C. Tương tự, N là điểm chính giữa của $\overset{\frown}{AC}$ không chứa điểm B. Từ đó $\widehat{MAP}=\widehat{MSB}=\widehat{MSA}$, dẫn đến $\Delta MSA \backsim \Delta MAP$ (g.g) $\Rightarrow \frac{SM}{AM}=\frac{SA}{AP}$.



Lập luận tương tự ta có $\frac{SN}{AN}=\frac{SA}{AQ}$, mà $AP=AQ$

nên $\frac{SM}{SN}=\frac{AM}{AN}$ (1)

Bốn điểm M, D, S, E cùng nằm trên đường tròn đường kính SM, suy ra $\widehat{DSE}=\widehat{AMN}$. Từ đây, áp dụng định lí sin cho tam giác SED ta có $DE=SM.\sin\widehat{DSE}=SM.\sin\widehat{AMN}$. Tương tự $DF=SN.\sin\widehat{ANM}$.

Vậy $\frac{DE}{DF}=\frac{SM.\sin\widehat{AMN}}{SN.\sin\widehat{ANM}}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{DE}{DF}=\frac{AM.\sin\widehat{AMN}}{AN.\sin\widehat{ANM}}=1$

(áp dụng định lí sin cho tam giác AMN).

Do đó ta có $DE=DF$ (đpcm).□

➤**Nhận xét.** 1) Việc chứng minh $DE=DF$ thực chất là đi chứng minh tính chất sau của hình tứ giác điều hòa: *Giả sử ABCD là tứ giác nội tiếp. Gọi P, Q, R lần lượt là hình chiếu của D lên các đường thẳng BC, CA, AB. Khi đó ABCD là tứ giác điều hòa khi và chỉ khi Q là trung điểm của đoạn thẳng PR.* Tính chất này chính là nội dung Bài toán 4 trong Kì thi IMO 2003.

2) Các bạn sau có lời giải đúng và gọn hơn cả:

Hà Nội: *Nguyễn Viết Hoàng*, 10 Toán 1, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; **Hòa Bình**: *Lê Đức Việt*, 11CT, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ; **Vĩnh Phúc**: *Vũ Thị Quỳnh*

Anh, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hải Dương**: *Tăng Văn Đạt*, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Hưng Yên**: *Nguyễn Long Duy*, 10 Toán 1, *Nguyễn Trung Hiếu*, *Nguyễn Thị Việt Hà*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Nam**: *Trịnh Ngọc Tú*, 10 Toán, THPT chuyên Biên Hòa; **Nam Định**: *Vũ Tuấn Anh*, 12 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thái Bình**: *Nguyễn Đình An*, 11 Toán 1, THPT chuyên Thái Bình; **Thanh Hóa**: *Trịnh Ngọc Anh*, 10T, *Lê Văn Hùng*, 11T, THPT chuyên Lam Sơn, *Trương Văn Cường*, 11A3, THPT Lương Đắc Bằng, Hoằng Hóa, *Lê Thế Sơn*, 11A8, THPT Bỉm Sơn; **Nghệ An**: *Đậu Hồng Quân*, 11A1, *Lê Hồng Đức*, *Nguyễn Văn Sơn*, 12A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, *Bùi Hoàng Đạt*, 11C1, THPT Nguyễn Đức Mậu, Quỳnh Lưu; **Hà Tĩnh**: *Trần Hậu Mạnh Cường*, 10T1, *Nguyễn Thị Việt Hà*, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Bình**: *Trần Thanh Bình*, 10 Toán, THPT chuyên Quảng Bình; **Quảng Trị**: *Trần Đức Anh*, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Quảng Ngãi**: *Tống Thanh Nguyện*, 10 T1, THPT chuyên Lê Khiết; **Phú Yên**: *Đoàn Phú Thiện*, 10A1, THPT Lê Hồng Phong, Tây Hòa; **Đồng Tháp**: *Bùi Trần Hải Đăng*, 12T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Bà Rịa - Vũng Tàu**: *Huỳnh Văn Y*, 11 Toán 1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Long An**: *Chu Thị Thu Hiền*, 12T, THPT chuyên Long An; **Bến Tre**: *Nguyễn Duy Linh*, *Từ Nhật Quang*, 10 Toán, THPT chuyên Bến Tre; **TP.Hồ Chí Minh**: *Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy*, 9A1, *Lâm Minh Triết*, 11CT, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, Quận 1.

HỒ QUANG VINH

★Bài T8/432. *Giả sử a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện đa thức*

$$P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+1$$

có ít nhất một nghiệm thực. Tìm tất cả các bộ $(a\,;\,b\,;\,c)$ để $a^2+b^2+c^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải. Giả sử x là một nghiệm thực của $P(x)$. Ta có

$$x^4+1=-(ax^3+bx^2+cx)=-x(ax^2+bx+c)$$

Từ đó, ta có

$$(x^4+1)^2=x^2(ax^2+bx+c)$$
$$\le x^2(a^2+b^2+c^2)(x^4+x^2+1).$$

Suy ra $a^2+b^2+c^2\ge\dfrac{(x^4+1)^2}{x^6+x^4+x^2}$.

Khảo sát hàm số $f(x)=\dfrac{(x^4+1)^2}{x^6+x^4+x^2}$, dễ dàng chứng minh được rằng giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là $\dfrac{4}{3}$ đạt được khi $x=1$ hoặc $x=-1$.

Vậy ta luôn có $a^2+b^2+c^2\ge\dfrac{4}{3}$.

- Khi $x=1$, để đẳng thức xảy ra, ta cần có $a=b=c$ và $2=-(a+b+c)$ suy ra $a=b=c=-\dfrac{2}{3}$.
- Khi $x=-1$, để đẳng thức xảy ra, ta cần có $a=-b=c$ và $2=-(-a+b-c)$ suy ra $a=c=\dfrac{2}{3}$, $b=-\dfrac{2}{3}$. Vậy bộ ba $(a;\,b;\,c)$ cần tìm là $\left(-\dfrac{2}{3};-\dfrac{2}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$ và $\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3}\right)$. □

➢**Nhận xét.** Các lời giải phần lớn theo hướng như trên hoặc đưa về phương trình bậc bốn đối xứng rồi lập luận với BĐT Cauchy-Schwarz. Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Bắc Ninh: *Diệp Yên Hà*, 12A, THPT Yên Phong 2; **Nam Định**: *Phạm Thanh Tông*, 9A2, THCS Xuân Trường, *Nguyễn Hằng*, 11B1, THPT A Hải Hậu; **Thanh Hóa**: *Lê Thế Sơn*, 11B8, THPT Bỉm Sơn; **Hà Tĩnh**: *Nguyễn Thị Thùy Linh*, 10A1, THPT Hương Khê; **Bình Định**: *Nguyễn Văn Hải*, 11B, THPT Tây Sơn; **TP. Hồ Chí Minh**: *Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy*, 9A1, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, Quận 1.

TẠ NGỌC TRÍ

★Bài T9/432. *Cho a và b là hai số thực thỏa mãn a^p-b^p là số nguyên dương với mọi số nguyên tố p. Chứng minh rằng a và b đều là số nguyên.*

Lời giải. i) Trước hết ta chứng minh $a,b\in\mathbb{Q}$

- Nếu $ab=0$ thì kết quả là hiển nhiên.
- Nếu $ab\ne 0$ thì ta có

$$(a^5-b^5)^2-(a^7-b^7)(a^3-b^3)=a^3b^3(a^2-b^2)^2.$$

Suy ra $a^3b^3\in\mathbb{Q}$, lại có

$$(a^7-b^7)^2-(a^{11}-b^{11})(a^3-b^3)$$
$$=a^3b^3(a^2-b^2)^2(a^2+b^2)^2\Rightarrow(a^2+b^2)^2\in\mathbb{Q}.$$

Do $(a^2+b^2)^2=(a^2-b^2)^2+4a^2b^2\in\mathbb{Q}\Rightarrow a^2b^2\in\mathbb{Q}$

$$\Rightarrow ab=\frac{a^3b^3}{a^2b^2}\in\mathbb{Q}.$$

Mặt khác $(a^5-b^5)(a^{11}-b^{11})-(a^{13}-b^{13})(a^3-b^3)$
$=a^3b^3(a^2-b^2)^2(a^2+b^2)(a^4+b^4).$

Suy ra $(a^2+b^2)(a^4+b^4)\in\mathbb{Q}$

$\Rightarrow (a^3-b^3)^2+2a^3b^3+a^2b^2(a^2+b^2)\in\mathbb{Q}$

$\Rightarrow a^2+b^2\in\mathbb{Q}$.

Từ đó $a-b=\dfrac{a^3-b^3}{a^2+b^2+ab}\in\mathbb{Q}$, $a+b=\dfrac{a^2-b^2}{a-b}\in\mathbb{Q}$, suy ra $a, b\in\mathbb{Q}$.

ii) Đặt $a=\dfrac{m}{n}, b=\dfrac{k}{n}$ $(m,k\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}^*)$ và $(m,n)=(k,n)=1$. Khi đó

$$a^p-b^p=\frac{m^p-k^p}{n^p}\in\mathbb{N}^*\Rightarrow m^p-k^p \,\vdots\, n^p$$

với mọi số nguyên tố p. Ta chứng minh $n=1$. Thật vậy giả sử $n>1$. Gọi q là ước nguyên tố của n. Ta có $(m^3-k^3)(m^2+k^2)-(m^3+k^3)(m^2-k^2)$ $=2m^2k^2(m-k)$. Do đó $2m^2k^2(m-k)\,\vdots\, q^2$ $\Rightarrow 2(m-k)\,\vdots\, q^2\Rightarrow m-k\,\vdots\, q\Rightarrow m\equiv k(\mathrm{mod}\, q)$. Với mọi số nguyên tố $p>q$ ta có $m^p-k^p=(m-k)(m^{p-1}+...+k^{p-1})\,\vdots\, n^p\,\vdots\, q^p$.

Vì $m\equiv k(\mathrm{mod}\, q)$ nên $m^{p-1}+...+k^{p-1}=pk^{p-1}$ không chia hết cho q (do $(k,q)=(p,q)=1$). Do đó $m-k\,\vdots\, q^p$ và $m\neq k\Rightarrow |m-k|\geq q^p$ với mọi số nguyên tố $p>q$.

Do có vô số số nguyên tố $p>q$ nên ta có điều mâu thuẫn. Vậy $n=1$. Tức là $a, b\in\mathbb{Z}$. ❒

➤**Nhận xét.** Đây là một bài toán hay và khó đòi hỏi cả kĩ năng về biến đổi đại số và kiến thức số học. Chỉ có ba bạn gửi lời giải tuy nhiên các lời giải đều chưa hoàn chỉnh.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★**Bài T10/432.** *Cho dãy số (u_n) được xác định bởi*
$$\begin{cases} u_1=\dfrac{1}{1+a}\\ \dfrac{1}{u_{n+1}}=\dfrac{1}{u_n^2}-\dfrac{1}{u_n}+1,\ \forall n\geq 1\end{cases}$$
trong đó $a\in\mathbb{R}, a\neq -1$.

Đặt $S_n=u_1+u_2+...+u_n$, $P_n=u_1u_2...u_n$. Tính giá trị của biểu thức aS_n+P_n.

Lời giải. (Theo bạn *Đoàn Phú Thiện*, 10A1, THPT Lê Hồng Phong, Tây Hòa, **Phú Yên**).

Đặt $v_n=\dfrac{1}{u_n}-1$ $(n\in\mathbb{N}^*)$. Từ giả thiết ta có
$$\begin{cases}\dfrac{1}{u_1}-1=a\\ \dfrac{1}{u_{n+1}}-1=\dfrac{1}{u_n}\left(\dfrac{1}{u_n}-1\right), \forall n\geq 1.\end{cases}$$

Suy ra $\begin{cases} v_1=a\\ v_{n+1}=v_n(v_n+1), \forall n\geq 1\end{cases}$ (1)

Chú ý rằng nếu $a=0$ thì $u_n=1, \forall n\geq 1$.

Khi đó $aS_n+P_n=P_n=u_1u_2...u_n=1$.

Xét trường hợp $a\neq 0$. Từ giả thiết ta suy ra $u_n\neq 1, \forall n\geq 1$. Do đó $v_n\neq 0, \forall n\geq 1$.

Ta có $v_n=\dfrac{1}{u_n}-1\Rightarrow u_n=\dfrac{1}{v_n+1}=\dfrac{v_n}{v_{n+1}}$ (suy từ (1))

$$=\frac{v_n+1-1}{v_n(v_n+1)}=\frac{1}{v_n}-\frac{1}{v_n(v_n+1)}=\frac{1}{v_n}-\frac{1}{v_{n+1}} \quad (2)$$

Bởi vậy $aS_n+P_n=a(u_1+u_2+...+u_n)+u_1u_2...u_n$

$$=a\left(\left(\frac{1}{v_1}-\frac{1}{v_2}\right)+\left(\frac{1}{v_2}-\frac{1}{v_3}\right)+...+\left(\frac{1}{v_n}-\frac{1}{v_{n+1}}\right)\right)+\frac{v_1}{v_2}.\frac{v_2}{v_3}...\frac{v_n}{v_{n+1}}$$

$$=a\left(\frac{1}{v_1}-\frac{1}{v_{n+1}}\right)+\frac{v_1}{v_{n+1}}=a\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{v_{n+1}}\right)+\frac{a}{v_{n+1}}=1. ❒$$

➤**Nhận xét.** 1) Trong (2) ta có hai công thức tách: $u_n=\dfrac{v_n}{v_{n+1}}$ (dạng tích) và $u_n=\dfrac{1}{v_n}-\dfrac{1}{v_{n+1}}$ (dạng tổng).

2) Đây là bài toán tính tổng dạng cơ bản. Ngoài bạn *Thiện*, các bạn sau cũng có lời giải đúng:

Phú Thọ: *Bùi Tuấn Linh*, 10T, THPT chuyên Hùng Vương; **Hưng Yên**: *Trần Bá Trung*, 10T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Nghệ An**: *Phạm Trung Dũng*, *Lê Hồng Hạnh*, *Nguyễn Thúy Hằng*, *Lê Mỹ Linh*, *Dương Thị Thúy Quỳnh*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Quảng Bình**: *Nguyễn Trần Duy*, 10T, THPT chuyên Quảng Bình; **TP.Hồ Chí Minh**: *Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy*, 9A1, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, Quận 1; **Bình Định**: *Võ Thế Duy*, 10A1, THPT Số 1 TTr Phù Mỹ; **Tiền Giang**: *Nguyễn Minh Thành*, 10T, THPT chuyên Tiền Giang; **Bến Tre**: *Nguyễn Duy Linh*, 10T, THPT chuyên Bến Tre; **Long An**: *Châu Hoa Nhân*, 10T2, *Nguyễn Minh Trí*, 10T1, THPT chuyên Long An.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★**Bài T11/432.** *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thỏa mãn*

a) f là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}^+$;

b) $f(2x) = 2012^{-x} f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^+$; (1)

với $\mathbb{R}^+ = (0; +\infty)$.

Lời giải. (Theo đa số các bạn) Viết (1) dưới dạng $2012^{2x} f(2x) = 2012^x f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^+$ (2)

hay $h(2x) = h(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^+$ (3)

trong đó $h(x) = 2012^x f(x)$.

Đặt $x = 2^t$, hay $t = \log_2 x$ thì (2) có dạng

$2012^{2^{t+1}} f(2^{t+1}) = 2012^{2^t} f(2^t),\ \forall t \in \mathbb{R}$

hay $g(t+1) = g(t),\ \forall t \in \mathbb{R}$ (4)

trong đó $g(t) = 2012^{2^t} f(2^t)$.

Vậy $g(t)$ là hàm tuần hoàn (cộng tính) chu kì 1 xác định trên cả trục thực $\mathbb{R}$ nên $g(t)$ bị chặn trên $\mathbb{R}$. Do đó hàm số $h(x) := g(\log_2 x)$ $= 2012^x f(x)$ bị chặn trên $\mathbb{R}^+$ và hàm số $f(x) = 2012^{-x} g(\log_2 x)$ bị chặn trên $\mathbb{R}^+$.

Ta chứng minh $h(x)$ là hàm hằng. Thật vậy, với $x > y > 0$ theo (3) thì $h(x) = h\left(\frac{x}{2^n}\right)$ nên

$$h(x) - h(y) = 2012^{\frac{x}{2^n}} f\left(\frac{x}{2^n}\right) - 2012^{\frac{y}{2^n}} f\left(\frac{y}{2^n}\right).$$

Do đó

$$2(h(x)-h(y)) = \left(2012^{\frac{x}{2^n}} - 2012^{\frac{y}{2^n}}\right)\left(f\left(\frac{x}{2^n}\right) + f\left(\frac{y}{2^n}\right)\right)$$
$$+\left(2012^{\frac{x}{2^n}} + 2012^{\frac{y}{2^n}}\right)\left(f\left(\frac{x}{2^n}\right) - f\left(\frac{y}{2^n}\right)\right),\ \forall k \in \mathbb{N}^*,$$

hay $2(h(x) - h(y)) = u_k + v_k,\ \forall k \in \mathbb{N}^*$, trong đó $u_k = \left(2012^{\frac{x}{2^n}} - 2012^{\frac{y}{2^n}}\right)\left(f\left(\frac{x}{2^n}\right) + f\left(\frac{y}{2^n}\right)\right) > 0$

và do f bị chặn nên $\lim\limits_{k \to +\infty} u_k = 0$,

$$v_k = \left(2012^{\frac{x}{2^n}} + 2012^{\frac{y}{2^n}}\right)\left(f\left(\frac{x}{2^n}\right) - f\left(\frac{y}{2^n}\right)\right) < 0$$

do f là hàm nghịch biến.

Vì $u_1 + v_1 = u_2 + v_2 = \ldots = u_n + v_n = \ldots$ nên $\lim\limits_{n \to +\infty}(u_n + v_n) = a \le 0$, hay $h(x) \le h(y)$.

Từ (3) suy ra $h(2^n x) = h(x),\ \forall x > 0,\ n \in \mathbb{N}^*$.

Chọn $n = \left[\log_2 \frac{x}{y}\right]$ thì $n \le \log_2 \frac{x}{y} < n+1$ và $2^n y \le x < 2^{n+1} y$. Do đó

$$h(2^n y) \ge h(x) \ge h(2^{n+1} y),$$

tức $h(y) \ge h(x) \ge h(y)$. Suy ra $h(x) = h(y)$ hay $h(x) \equiv c > 0$. Suy ra

$$f(x) = 2012^{-x} h(x) = \frac{c}{2012^x}.$$

Thử lại ta thấy hàm số này thỏa mãn điều kiện bài ra. ❐

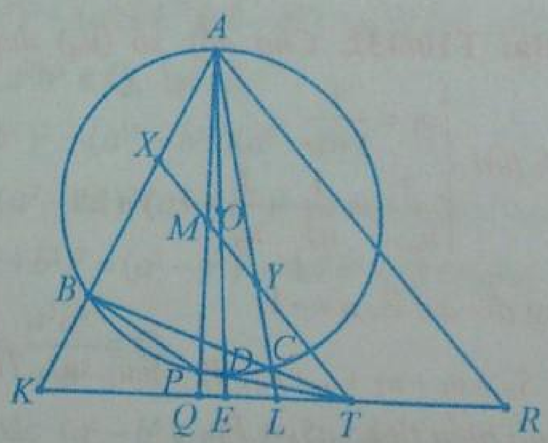
➤**Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải đúng:

Hưng Yên: *Nguyễn Trung Hiếu*, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thái Bình**: *Nguyễn Đình An*, 11T, THPT chuyên Thái Bình; **Thanh Hóa**: *Lê Văn Hùng*, 11T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An**: *Nguyễn Văn Sơn*, 12A1, THPT chuyên Phan Bội Châu.

NGUYỄN VĂN MẬU

★**Bài T12/432.** *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). AD là đường kính của (O). E là điểm thuộc tia đối tia DA. Đường thẳng qua E vuông góc với AD cắt BC tại T. Dựng tiếp tuyến TP của (O) sao cho P và A nằm khác phía đối với BC; AP cắt TE tại Q. Gọi M là trung điểm của AQ; TM cắt AB, AC lần lượt tại X, Y. Chứng minh rằng M là trung điểm của XY.*

Lời giải. Gọi D là giao điểm thứ hai của AE và (O); K, L và R theo thứ tự là giao điểm của FT với AB, AC và đường thẳng qua A song song với XY (hình vẽ).



Dễ thấy $\widehat{DCL} = 90° = \widehat{DEL}$. Do đó tứ giác $DCLE$ nội tiếp. Từ đó, chú ý rằng A, B, C, D

cùng thuộc đường tròn (O), suy ra

$$(LC,LK)\equiv(LC,LE)\equiv(DC,DE)\equiv(DC,DA)$$
$$\equiv(BC,BA)\equiv(BC,BK)(\bmod\pi).$$

Do đó tứ giác $BKCL$ nội tiếp. Mặt khác

$$(QP,QT)\equiv(QP,AB)+(AB,QT)(\bmod\pi)$$
$$\equiv(AP,AB)+(DB,DA)(\bmod\pi)$$
(vì $AB\perp DB; QT\perp DA$)
$$\equiv(PA,BA)+(PB,PA)(\bmod\pi)$$
$$\equiv(BP,BA)(\bmod\pi)$$
$$\equiv(PT,PQ)(\bmod\pi)$$
(vì TP tiếp xúc với (O))

Do đó tam giác TPQ cân tại T.

Kết hợp với TP tiếp xúc với đường tròn (O) và tứ giác $BCKL$ nội tiếp, ta có $TQ^2=TP^2=\overline{TB}.\overline{TC}=\overline{TK}.\overline{TL}$.

Chú ý rằng $MA=MQ; AR\,//\,MT$, ta có $TQ=TR$. Vậy, theo hệ thức Newton

$$A(XYMR)=A(KLQR)=(KLQR)=-1.$$

Kết hợp với $XY\,//\,AR$, từ tính chất của chùm điều hòa, suy ra $MX=MY$ (đpcm).❒

➢**Nhận xét.** 1) Khá nhiều bạn tham gia giải. Tuy nhiên một số giải quá dài, một số bạn chưa biết sử dụng góc định hướng để khắc phục tình trạng phép chứng minh phụ thuộc hình vẽ.

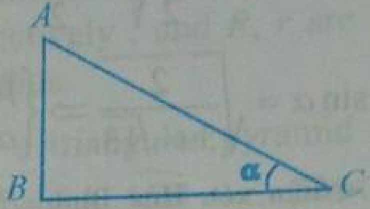
2) Bạn *Vũ Tuấn Anh*, 12T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định** có nhận xét khá hay: *không cần giả thiết A và P nằm khác phía đối với BC.*

3) Xin nêu tên một số bạn có lời giải tốt:

Hoà Bình: *Lê Đức Việt*, 12T, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, TP Hoà Bình; **Hưng Yên**: *Nguyễn Thị Việt Hà*, 11T, THPT chuyên Hưng Yên; **Thanh Hoá**: *Nguyễn Tiến Đạt*, 10T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An**: *Nguyễn Văn Sơn*, 12A1, *Đậu Hồng Quân*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Hà Tĩnh**: *Nguyễn Thị Việt Hà*, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Bình**: *Trần Thanh Bình*, 10T, THPT chuyên Quảng Bình; **Quảng Trị**: *Trần Đức Anh*, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bà Rịa-Vũng Tàu**: *Huỳnh Văn Y*, 11T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **TP. Hồ Chí Minh**: *Lâm Minh Triết*, 11T1, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, Quận 1.

NGUYỄN MINH HÀ

★**Bài L1/432.** *Vật 1 được thả không vận tốc đầu từ đỉnh A của một máng nghiêng AC có góc nghiêng α so với phương ngang. Cùng lúc đó, từ điểm B cùng độ cao với C (BA ⊥ BC) người ta ném vật 2 với vận tốc đầu v_0. Biết rằng hai vật đồng thời gặp nhau tại C và khi ấy chúng có cùng độ lớn vận tốc. Cho $AB = h = 1$m, $g = 10$ m/s², bỏ qua mọi ma sát. Hãy xác định*



a) Góc α và góc ném β của vật 2.

b) Vận tốc ban đầu v_0 của vật 2.

Lời giải. Vận tốc của vật 1 trượt theo máng nghiêng có thể tìm được theo định luật bảo toàn cơ năng ta có

$$m_1gh=\frac{m_1v_0^2}{2}\Rightarrow v_0=\sqrt{2gh}=2\sqrt{5}(\text{m/s}),$$

đây cũng là vận tốc ném của vật 2. Thời gian chuyển động của vật 1 là

$$t_1=\sqrt{\frac{2h}{g\sin^2\alpha}}=\sqrt{\frac{2h}{g}}.\frac{1}{\sin\alpha}.$$

Thời gian chuyển động của vật 2 là

$$t_2=\frac{2v_0\sin\beta}{g}=\sqrt{\frac{2h}{g}}.2\sin\beta.$$

Vì hai vật gặp nhau tại C cùng một lúc nên

$$t_1=t_2\Leftrightarrow\sqrt{\frac{2h}{g}}.\frac{1}{\sin\alpha}=\sqrt{\frac{2h}{g}}2.\sin\beta\quad(1)$$

Quãng đường chuyển động theo phương ngang của vật 2 là

$$s=\frac{v_0^2\sin2\beta}{g}=h\cot\alpha\Leftrightarrow2h\sin2\beta=\frac{h\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$$

Từ (1) suy ra $\sin\alpha=\dfrac{1}{2\sin\beta}$, thay vào (2), ta có $4\sin\beta\cos\beta=\sqrt{1-\dfrac{1}{4\sin^2\beta}}.2\sin\beta$

$$\Leftrightarrow4\sin^2\beta-16\sin^2\beta\cos^2\beta=1$$

$\Leftrightarrow 16\sin^2\beta - 12\sin^2\beta - 1 = 0$

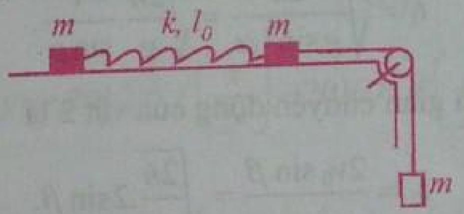
$\Leftrightarrow \sin\beta = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}}$. Từ đó

$\sin\alpha = \sqrt{\dfrac{2}{3+\sqrt{13}}} \Rightarrow \begin{cases}\beta \approx 65{,}32^{o}\\ \alpha \approx 33{,}38^{o}.\end{cases}$ ❑

➤**Nhận xét. Hòa Bình**: *Hoàng Bảo Linh*, 11 Toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ; **Thanh Hóa**: *Nguyễn Thị Oanh*, 11C1, *Nguyễn Thanh Bình*, 12C1, *Lê Thị Quỳnh*, 11C1, THPT Hoằng Hóa IV; **Nghệ An**: *Nguyễn Văn Thực*, 12A5, THPT chuyên ĐH Vinh, *Tăng Trung Hiếu*, 10A1, THPT Thái Hòa, *Phạm Thị Mỹ Duyên*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Quảng Ngãi**: *Nguyễn Nhật Hân*, 11 Lí, THPT chuyên Lê Khiết; **Đăk Lăk**: *Nguyễn Viết Sang*, 10 Lí, THPT chuyên Nguyễn Du.

NGUYỄN XUÂN QUANG

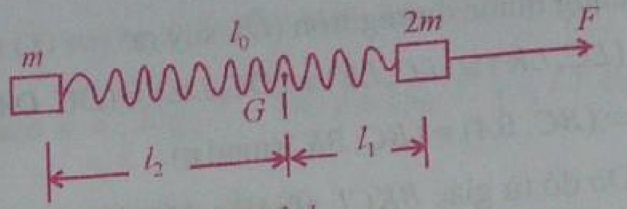
★Bài L2/432. *Trên mặt bàn nhẵn nằm ngang, người ta đặt hai khối hộp nhỏ như nhau, khối lượng m, nối với nhau bằng lò xo nhẹ có độ cứng k, chiều dài lò xo khi không biến dạng là l_0. Khối hộp bên phải nối với một vật nặng cũng có khối lượng m bằng sợi dây nhẹ, không giãn vắt qua ròng rọc nhẹ (hình vẽ).*



Tại thời điểm nào đó, người ta thả vật nặng và hệ bắt đầu chuyển động không vận tốc.

Tìm khoảng cách cực tiểu và cực đại giữa hai khối hộp. Sau bao lâu kể từ khi thả vật nặng thì khoảng cách đó cực tiểu ? cực đại ?

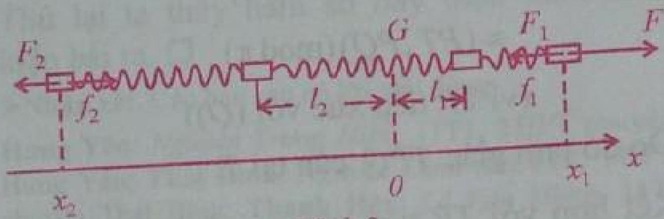
Lời giải. Vì dây không giãn nên toàn hệ trong bài xem như hệ gồm hai vật nhỏ khối lượng m và $2m$ gắn với nhau bằng lò xo nhẹ, độ cứng k dài l_0 đặt trên bàn nhẵn nằm ngang. Vật $2m$ bắt đầu chịu tác dụng của lực không đổi $F = mg$ dọc trục lò xo, hướng ra xa vật kia. Khối tâm G của hệ, khi lò xo không biến dạng cách vật $m_1 = 2m$ khoảng $l_1 = \dfrac{l_0}{3}$, cách vật $m_2 = m$ khoảng $l_2 = \dfrac{2l_0}{3}$ (h.1).



Hình 1

Gia tốc khối tâm $a = \dfrac{mg}{3m} = \dfrac{g}{3}$.

Trong hệ quy chiếu gắn với khối tâm, tại thời điểm nào đó, tác dụng lên vật còn có lực quán tính $\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$ (h.2).



Hình 2

$\overrightarrow{f_1}$ và $\overrightarrow{f_2}$ là các lực đàn hồi của lò xo. Chọn trục tọa độ Ox dọc trục lò xo, gốc O gắn với khối tâm G. Các vật xem như gắn với G cố định bằng các lò xo có độ cứng $k_1 = 3k$ và $k_2 = \dfrac{3k}{2}$. PT chuyển động của vật m_1 là

$$\overrightarrow{f_1} + \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F} = 2m\overrightarrow{a_1}$$

Dọc trục Ox: $-k_1\Delta l_1 - 2ma + mg = 2m.x_1''$.

Với $\Delta l_1 = x_1 - l_1$; $a = \dfrac{g}{3}$; $l_1 = \dfrac{l_0}{3}$. Ta có phương trình $-\dfrac{3k}{2m}x_1 + \dfrac{g}{6} + \dfrac{kl_0}{2m} = x_1''$.

Đặt $x_1 = X_1 + \dfrac{mg}{9k} + \dfrac{l_0}{3}$ thì $x_1'' = X_1''$. Và phương trình trên trở thành $-\dfrac{3k}{2m}X_1 = X_1''$.

Nghiệm PT có dạng $X_1 = A_1\sin(\omega_1 t + \varphi_1)$, với $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{3k}{2m}}$.

Do đó $x_1 = A_1\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \dfrac{mg}{9k} + \dfrac{l_0}{3}$.

Khi $t=0$ thì $x_1 = A_1\sin\varphi_1 + \frac{mg}{9k} + \frac{l_0}{3} = \frac{l_0}{3}$ và

$x_1' = A_1\omega_1\cos\varphi_1 = 0 \Rightarrow \varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$; $A_1 = \frac{mg}{9k}$.

Do đó $x_1 = \frac{mg}{9k}\sin\left(\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{mg}{9k} + \frac{l_0}{3}$.

Phương trình chuyển động của vật m_2 là

$$\overrightarrow{f_2} + \overrightarrow{F_2} = m\overrightarrow{a_2}$$

Dọc trục Ox: $k_2\Delta l_2 - ma = m.x_2''$.

Với $\Delta l_2 = -x_2 - l_2 = -x_2 - \frac{2l_0}{3}$; $k_2 = \frac{3k}{2}$.

Ta có phương trình $-\frac{3k}{2m}x_2 - \left(\frac{kl_0}{m} + \frac{g}{3}\right) = x_2''$.

Đặt $x_2 = X_2 - \frac{2l_0}{3} - \frac{2mg}{9k}$ thì $x_2'' = X_2''$ và PT trên

trở thành $-\frac{3k}{2m}X_2 = X_2''$, với $\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{2m}} = \omega_1 = \omega$.

Nghiệm phương trình này có dạng

$$X_2 = A_2\sin(\omega_2 t + \varphi_2).$$

Nên $x_2 = A_2\sin(\omega_2 t + \varphi_2) - \frac{2l_0}{3} - \frac{2mg}{9k}$.

Khi $t=0$ thì $x_2 = A_2\sin\varphi_2 - \frac{2l_0}{3} - \frac{2mg}{9k} = -\frac{2l_0}{3}$

và $x_2' = A_2\omega_2\cos\varphi_2 = 0 \Rightarrow \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$; $A_2 = \frac{2mg}{9k}$.

Do đó $x_2 = \frac{2mg}{9k}\sin\left(\omega_2 t + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{2l_0}{3} - \frac{2mg}{9k}$

Khoảng cách giữa hai vật m_1 và m_2 là

$$S = x_1 - x_2 = \frac{mg}{3k}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + l_0 + \frac{mg}{3k}$$

$$S_{\min} = l_0 \Leftrightarrow \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow t = \frac{2\pi}{\omega}k$$

$$S_{\max} = l_0 + \frac{2mg}{3k} \Leftrightarrow \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow t = (2k+1)\frac{\pi}{\omega}. \square$$

➤**Nhận xét.** Bài này tương đối khó, rất tiếc không có bạn nào có lời giải hoàn chỉnh cả.

TRẦN KHÁNH HẢI

PROBLEMS IN THIS ISSUE...

(Tiếp trang 17)

where h_a, h_b, h_c and l_a, l_b, l_c are the length of the altitudes and the internal angle bisector from A, B, and C respectively ; and R, r are its cirumradius and inradius.

T7/436. Let $S.ABC$ be a triangular pyramid where $\widehat{BAC} = 90^\circ$, $BC = 2a$, $\widehat{ACB} = \alpha$. The plane (SAB) is perpendicular to (ABC). Find the volume of this pyramid, given that SAB is an isosceles triangle at vertex S and SBC is a right triangle.

T8/436. Solve the system of equations

$$\begin{cases} x^8y^8 + y^4 = 2x \\ 1 + x = x(1+y)\sqrt{xy}. \end{cases}$$

TOWARD MATHEMATICAL OLYMPIAD

T9/436. Let $A = 2013^{30n^2+4n+2013}$ where $n \in \mathbb{N}$. Let X be the set of remainders when dividing A by 21 for some natural number n. Determine the set X.

T10/436. Let (x_n) be a sequence of natural numbers with $x_1 = 2, x_{n+1} = \left[\frac{3}{2}x_n\right], \forall n = 1, 2, 3, ...,$ where $[x]$ denotes the greatest integer not exceeding x. Prove that in the sequence (x_n), there are infinitely many odd numbers and infinitely many even numbers.

T11/436. Given a real number $x \geq 1$. Find the limit

$$\lim_{n\to+\infty}\left(2\sqrt[n]{x} - 1\right)^n.$$

T12/436. Let S denote the area of a given triangle, and let P be an arbitrary point. A', B', C' are the midpoints of BC, CA and AB respectively; h_a, h_b, h_c denote the corresponding altitudes. Prove that

$$PA^2 + PB^2 + PC^2$$

$$\geq \frac{4}{\sqrt{3}}S.\max\left\{\frac{PA+PA'}{h_a}, \frac{PB+PB'}{h_b}, \frac{PC+PC'}{h_c}\right\}.$$

Giải đáp: NHỮNG BÃI BIỂN ĐẸP CỦA Việt Nam

(*Đề đăng trên TH&TT số 433 tháng 7 năm 2013*)

1) Bãi An Bàng – T. Quảng Nam
2) Bãi Ba Động – T. Trà Vinh
3) Bãi Bắc Mỹ An – TP Đà Nẵng
4) Bãi biển Côn Đảo – T. Bà Rịa - Vũng Tàu
5) Bãi biển Đồ Sơn – TP. Hải Phòng
6) Bãi biển Hạ Long – T. Quảng Ninh
7) Bãi biển Hòn Tre – T. Khánh Hòa
8) Bãi biển Phạm Văn Đồng – TP. Đà Nẵng
9) Bãi Bình Sơn – T. Ninh Thuận
10) Bãi Bình Tiên – T. Ninh Thuận
11) Bãi Cà Ná – T. Ninh Thuận
12) Bãi Cam Bình – T. Bình Thuận
13) Bãi Cảnh Dương – T. Thừa Thiên Huế
14) Bãi Cát Cò – TP. Hải Phòng
15) Bãi Cần Thạnh – TP. Hồ Chí Minh
16) Bãi Cửa Đại – T. Quảng Nam
17) Bãi Cửa Lò – T. Nghệ An
18) Bãi Cửa Tùng – T. Quảng Trị
19) Bãi Cửa Việt – T. Quảng Trị
20) Bãi Dài, H. Cam Lâm – T. Khánh Hòa
21) Bãi Dài, H. Phú Quốc – T. Kiên Giang
22) Bãi Dài, H. Vân Đồn – T. Quảng Ninh
23) Bãi Dài, TP. Quy Nhơn – T. Bình Định
24) Bãi Dốc Lết – T. Khánh Hòa
25) Bãi Dứa – T. Bà Rịa - Vũng Tàu
26) Bãi Dương – T. Kiên Giang
27) Bãi Đá Trứng – T. Bình Định
28) Bãi Đại Lãnh – T. Khánh Hòa
29) Bãi Đồi Dương – T. Bình Thuận
30) Bãi Đồng Châu – T. Thái Bình
31) Bãi Hà My – T. Quảng Nam
32) Bãi Hải Hòa – T. Thanh Hóa
33) và 58) Bãi Thịnh Long– T. Nam Định
34) Bãi Hải Tiến – T. Thanh Hóa
35) Bãi Khai Long – T. Cà Mau
36) Bãi Lăng Cô – T. Thừa Thiên Huế
37) Bãi Long Hải – T. Bà Rịa - Vũng Tàu
38) Bãi Long Thủy – T. Phú Yên
39) Bãi Lữ – T. Nghệ An
40) Bãi Mũi Nai – T. Kiên Giang
41) Bãi Mũi Né – T. Bình Thuận
42) Bãi Mỹ Khê, H. Sơn Tịnh – T. Quảng Ngãi
43) Bãi Mỹ Khê, Q. Sơn Trà – TP. Đà Nẵng
44) Bãi Mỹ Thủy – T. Quảng Trị
45) Bãi Nam – TP. Đà Nẵng
46) Bãi Nam Phố – T. Kiên Giang
47) Bãi Nha Trang – T. Khánh Hòa
48) Bãi Nhật Lệ – T. Quảng Bình
49) Bãi Ninh Chữ – T. Ninh Thuận
50) Bãi Non Nước – TP. Đà Nẵng
51) Bãi Quất Lâm – T. Nam Định
52) Bãi Sa Huỳnh – T. Quảng Ngãi
53) Bãi Sao – T. Kiên Giang
54) Bãi Sầm Sơn – T. Thanh Hóa
55) Bãi Tầm Dương – T. Bà Rịa - Vũng Tàu
56) Bãi Thanh Bình – TP. Đà Nẵng
57) Bãi Thiên Cầm – T. Hà Tĩnh
59) Bãi Thuận An – T. Thừa Thiên Huế
60) Bãi Thùy Vân – T. Bà Rịa - Vũng Tàu
61) Bãi Tiên Sa – TP. Đà Nẵng
62) Bãi Trà Cổ – T. Quảng Ninh
63) Bãi Tuần Châu – T. Quảng Ninh
64) Bãi Xuân Thành – T. Hà Tĩnh
65) Bãi Xuân Thiều – TP. Đà Nẵng

➤***Nhận xét.*** Xã Hải Thịnh đã nhập vào thị trấn Thịnh Long, huyện Hải Hậu, tỉnh Nam Định, do đó bãi biển Thịnh Long kéo dài khoảng 3km.

Các bạn sau có lời giải tốt, được nhận tặng phẩm: *Vũ Văn Quý*, 11A1, THPT Nguyễn Chí Thanh, TP.Pleiku, **Gia Lai**; *Trần Nguyên Try*, 12C3A, THPT chuyên Hùng Vương, TP.Pleiku, **Gia Lai**; *Lê Minh Phương*, 12T1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển, TP.Cà Mau, **Cà Mau**; *Mạc Phương Anh*, 10A1 Tin, THPT chuyên KHTN, ĐHQG **Hà Nội**.

VÂN KHANH

GIẢI ĐÁP CUỘC THI
ĐỐ VUI NGÀY HÈ 2013
Đợt 2

Bài 4. XẾP SÁCH

Kí hiệu chồng sách thứ nhất, thứ hai và vị trí để thêm một chồng sách thứ ba là **1**, **2**, **3**; quyển sách *A* chuyển từ chồng *a* sang chồng *b* kí hiệu là $A(a \to b)\,(a \neq b,\ a,\ b \in \{1,2,3\})$.

Một trong các cách chuyển sách có số lần chuyển ít nhất là 10 thỏa mãn yêu cầu, theo chúng tôi như sau:

Lần 1: *Toán* **(1 → 3)**
Lần 2: *Lí* **(1 → 3)**
Lần 3: *Văn* **(2 → 3)**
Lần 4: *Sử* **(2 → 3)**
Lần 5: *Hóa* **(1 → 2)**
Lần 6: *Sử* **(3 → 1)**
Lần 7: *Văn* **(3 → 2)**
Lần 8: *Lí* **(3 → 2)**
Lần 9: *Sử* **(1 → 2)**
Lần 10: *Toán* **(3 → 2)**

Sau lần thứ 10 thì chồng thứ nhất không có cuốn sách nào, chồng thứ hai xếp từ trên xuống dưới là *Toán, Sử, Lí, Văn, Hoá, Địa.*

ĐAN QUỲNH

Bài 5. LÁT GẠCH

Quy tắc lát gạch: Mỗi viên gạch **A** nằm kề (theo cạnh) chỉ với các viên gạch **B** và ngược lại

a) Hai trong nhiều cách lát sân kích thước 22 dm × 36 dm với các viên gạch nằm ngang như sau:

ABABAB	BABABA
BABABA	ABABAB
ABABAB	BABABA
BABABA	ABABAB
ABABAB	BABABA
BABABA	ABABAB
ABABAB	BABABA
BABABA	ABABAB
ABABAB	BABABA
BABABA	ABABAB
ABABAB	BABABA

Trong cách lát gạch này có **33** viên gạch **A** và **33** viên gạch **B**.

b) Xét việc lát gạch trên sân kích thước 22 dm × 30 dm.

Tổng số ô vuông cỡ (2dm×2dm) trên sân là 11×15 = 165 ô, do đó số gạch cần lát là 55 viên. Như vậy không thể lát sân mà số viên gạch **A** bằng số viên gạch **B**.

PHI PHI

Bài 6. QUAY THẺ THẾ NÀO?

Ban đầu có 19 tấm thẻ ở phần trên màu đỏ và 2013 − 19 = 1994 tấm thẻ có phần trên màu xanh. Giả sử trong lần quay đầu tiên, ta quay ngược *m* ($m \leq 19$) tấm thẻ có phần trên màu đỏ và $100 - m$ tấm thẻ có phần trên màu xanh. Như vậy, sau lần quay đầu tiên sẽ có $(100 - m) + (19 - m) = 119 - 2m$ tấm thẻ có phần trên màu đỏ và $1894 + 2m$ tấm thẻ có phần trên màu xanh. Nhận thấy số thẻ có phần trên xanh luôn là một số chẵn sau mỗi

THÔNG BÁO

Các bạn nhớ đặt mua

ĐẶC SAN Số 9 (Phát hành vào tháng 11 năm 2013 theo **Mã số C.168.1**) và **CÁC ẤN PHẨM CỦA TOÀ SOẠN** tại các Cơ sở Bưu điện trên cả nước.

TH&TT

Danh sách các bạn đoạt giải

CUỘC THI ĐỐ VUI NGÀY HÈ 2013

Giải Nhất (2 giải)

1) *Nguyễn Sỹ An*, 11CT, Trường THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, TP. Hòa Bình, **Hòa Bình**.

2) *Trần Nguyên Try*, 11C3A, Trường THPT chuyên Hùng Vương, TP.Pleiku, **Gia Lai**.

Giải Nhì (2 giải)

1) *Phan Xuân Đức*, 11C4, Trường THPT Nam Đàn 2, Nam Đàn, **Nghệ An**.

2) *Đỗ Nguyễn Hoàng Anh*, 12 Toán 1, Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Bà Rịa - Vũng Tàu**.

Giải Ba (3 giải)

1) *Phạm Thanh Bình*, 11A1, Trường THPT Lương Phú, Phú Bình, **Thái Nguyên**.

2) *Trần Ngọc Thắng*, 9A1, Trường THCS Hải Hòa, TX.Cửa Lò, **Nghệ An**.

3) *Nguyễn Thị Như Quỳnh*, 11T1, Trường THPT Anh Sơn I, Anh Sơn, **Nghệ An**.

Các bạn nhớ gửi nhanh địa chỉ mới của mình về Tòa soạn để nhận Giấy chứng nhận và tặng phẩm của Tạp chí.

TH&TT

lần quay. Vì vậy không thể quay tất cả các thẻ có phần trên đều là màu xanh được (vì khi đó số thẻ có phần trên màu xanh là 2013- một số lẻ)

Có thể xảy ra khả năng sau một số lần quay tất cả các phần trên của thẻ đều màu đỏ. Cách quay như sau:

19 lần đầu, mỗi lần quay ngược 100 tấm thẻ có phần trên màu xanh. Như vậy sau 19 lần này sẽ có 94 tấm thẻ phần trên màu xanh và 1919 tấm thẻ có phần trên màu đỏ.

Lần thứ 20, quay ngược 53 tấm thẻ có phần trên màu đỏ và 47 tấm thẻ phần trên màu xanh. Sau lần này sẽ có 53 + 94 − 47 = 100 tấm thẻ phần trên có màu xanh.

Lần thứ 21, quay ngược 100 tấm thẻ phần trên màu xanh này, ta sẽ được tất cả các thẻ có phần trên màu đỏ.

Số lần quay ít nhất là 21 lần.

THANH LOAN

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 1 (*Tiếp trang 10*)

Khi $x=y=z=1$ thì $Q=\dfrac{28}{3}$.

Vậy GTNN của Q là $\dfrac{28}{3}$.

Câu 7a. *Đáp số*. Bài toán có hai nghiệm hình $B(5;\ 25)$; $C(17;\ 41)$; $D(5;\ 5)$ hoặc $B(5;\ 25)$; $C(5;5)$; $D(17;41)$.

Câu 8a. *Đáp số*. $C(-4;-3;0)$ hoặc $C(-7;-3;-3)$.

Câu 9a. Gọi A_i là biến cố: "*Bắn trúng ở lần thứ i*". Ta có xác suất cần tìm là

$$P=P(A_1\overline{A_2A_3})+P(\overline{A_1}A_2\overline{A_3})+P(\overline{A_1A_2}A_3)$$

$$=3.\,0{,}2.\,0{,}8^2=\frac{48}{125}.$$

Câu 7b. Ta thấy $A\in(C)$ và $AB=AC$. Kẻ đường kính AA' của (C), gọi $H=AA'\cap BC$ thì $AH=\dfrac{R'^2}{4}$, với $R'\in(0;4)$ là bán kính của (C'). Do đó $HC=\sqrt{R'^2-\dfrac{R'^4}{16}}$ nên $S_{ABC}=\dfrac{R'^2}{4}\sqrt{R'^2-\dfrac{R'^4}{16}}$. Đặt $x=\dfrac{R'^2}{4}\in(0;4)$ thì $S_{ABC}=3\sqrt{3}\sqrt{\dfrac{x}{3}\dfrac{x}{3}\dfrac{x}{3}(4-x)}\le 3\sqrt{3}$ (theo BĐT Cauchy cho 4 số dương). $\max S=3\sqrt{3}$ khi $R'=2\sqrt{3}$. Vậy PT đường tròn (C') là

$$(x-1)^2+(y-2)^2=12.$$

Câu 8b. *Đáp số*. $C\left(\dfrac{1}{2};0;-3\right);C\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{7}{6};\dfrac{-11}{6}\right)$.

Câu 9b. Đặt $n^2=t\,(t>0)$ theo bài ra ta có $\dfrac{120}{(t-4)(t-1)}-\dfrac{8}{t-1}=2\Rightarrow t=9$, nên $n=3$. Khi đó

$$P(x)=\left(x^{\frac{2}{3}}+(-1)x^{-1}\right)^6=\sum_{i=0}^{6}C_6^i(-1)^i x^{\frac{2(6-i)}{3}-i}.$$

Số hạng chứa x^4 là $C_6^0(-1)^0x^4=x^4$.

TRẦN QUỐC LUẬT

(*GV THPT chuyên Hà Tĩnh*)

Giải đáp bài:

BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÔ NGHIỆM?

(Đề đăng trên TH&TT số 433, tháng 7 năm 2013)

Lời giải của bạn học sinh đó đã mắc phải một số sai lầm sau:

Thứ nhất. Chưa tìm điều kiện để bất phương trình (BPT) (1) có nghĩa.

Thứ hai. Biến đổi $\sqrt{(x-1)(x-2)}=\sqrt{x-1}.\sqrt{x-2}$; $\sqrt{(x-1)(x-3)}=\sqrt{x-1}.\sqrt{x-3}$; $\sqrt{(x-1)(x-4)}=\sqrt{x-1}.\sqrt{x-4}$ mà không để ý đến điều kiện $\sqrt{AB}=\sqrt{A}.\sqrt{B}$ chỉ xảy ra khi $A\geq 0$ và $B\geq 0$. Chính vì các nguyên nhân trên mà bạn đó đã làm mất nghiệm của BPT đã cho. Có thể giải lại bài toán như sau:

Điều kiện $x\geq 4$ hoặc $x\leq 1$.

- Với $x\geq 4$, làm tương tự như bạn học sinh nọ, ta thấy trong trường hợp này BPT (1) vô nghiệm.
- Với $x\leq 1$: Dễ thấy $x=1$ là một nghiệm của BPT (1). Với $x<1$ thì BPT (1) tương đương với

$$\sqrt{1-x}.\sqrt{2-x}+\sqrt{1-x}.\sqrt{3-x}\leq 2\sqrt{1-x}.\sqrt{4-x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2-x}+\sqrt{3-x}\leq 2\sqrt{4-x}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(2-x)(3-x)}\leq 11-2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\leq \dfrac{11}{2} \\ 4(x^2-5x+6)\leq (11-2x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq \dfrac{11}{2} \\ x\leq \dfrac{97}{24} \end{cases} \Leftrightarrow x\leq \dfrac{97}{24}.$$

Từ đó tập nghiệm của BPT (1) là $(-\infty;1]$.

Các bạn sau có lời bình tốt, tìm đúng nghiệm của BPT (1), gửi bài sớm về Toà soạn:

Mạc Phương Anh, 10A1 Tin, THPT chuyên KHTN, ĐHQG **Hà Nội**; *Nguyễn Đình Toàn*, 10T1, THPT Đô Lương 1, *Võ Thị Khánh Như*, 11T1, THPT Hà Huy Tập, TP.Vinh, **Nghệ An**; *Nguyễn Ngọc Bảo*, 11A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng**; *Đoàn Phú Thiện*, 10A1, THPT Lê Hồng Phong, Tây Hòa, **Phú Yên**.

NGỌC HIỀN

ĐỀ BÀI VÀ LỜI GIẢI MỘT BÀI TOÁN

Trong một cuốn STK có bài toán: *Cho tam giác ABC biết B(0; 1), C(1; 0) và trực tâm H(2; 1). Lập phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.* Với lời giải như sau:

Nhận xét rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC đối xứng với đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC qua BC. Gọi (C_1) là đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC, nó có PT (C_1): $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$, với $a^2+b^2-c>0$.

Từ B, C, H thuộc (C_1) ta nhận được hệ

$$\begin{cases} 1-2b+c=0 \\ 1-2a+c=0 \\ 4+1-4a-2b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=1. \end{cases}$$

Vậy đường tròn (C_1): $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ có tâm $I_1(1; 1)$ và bán kính $R_1=1$. Ta có (BC): $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{1}=1\Leftrightarrow x+y-1=0$. Gọi $I(x; y)$ là tâm đường tròn (C) thì trung điểm E của II_1 thuộc BC và $II_1\perp BC$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+1}{2}+\dfrac{y+1}{2}-1=0 \\ 1.(x-1)-1(y-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=0.$$

Vậy phương trình đường tròn (C) cần lập là (C): $x^2+y^2=1$. Bạn đọc có thể cho lời bình về đề bài và lời giải bài toán trên không?

TRẦN QUỐC TUẤN

(GV THPT Nguyễn Đức Mậu, Quỳnh Lưu, Nghệ An)

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 436 (10.2013)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.35121607
ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

TRONG SỐ NÀY

Ảnh Bìa 1: Phan Ngọc Quang (NXBGD Việt Nam)

Biên tập: NGUYỄN PHÚC
Trị sự, phát hành: NGUYỄN KHOA ĐIỀM, VŨ ANH THƯ
Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Chế bản: NGUYỄN THỊ TRANG

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM
KHU VỰC PHÍA BẮC Với công tác xã hội

NGƯT *Ngô Trần Ái* - Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam trao tặng quà cho các em học sinh ấp Thiềng Liềng, xã Thạch An, huyện Cần Giờ, TP. Hồ Chí Minh, ngày 6/9/2013.

Đại diện BGĐ NXBGD Hà Nội và Công ty CP Dịch vụ và Xuất bản GD Hà Nội tặng quà cho Trung tâm Dạy nghề nhân đạo việc làm cho trẻ em khuyết tật, ngày 30/5/2013.

Với truyền thống "lá lành đùm lá rách" trong năm 2013 các đơn vị thành viên NXBGD Việt Nam tham gia tích cực công tác xã hội. Trước thềm năm học mới 2013-2014, với phương châm không để học sinh thiếu sách giáo khoa, NXBGD Việt Nam đã thực hiện hai tháng phát hành giảm giá 10 - 15%. và trao tặng hàng ngàn bản sách giáo khoa, sách tham khảo cho thư viện trường học vùng khó khăn, vùng sâu, vùng xa trong cả nước với tổng trị giá gần 3 tỉ đồng. NXBGD Việt Nam đã trao tặng 50 suất học bổng với tổng trị giá 100 triệu đồng cho các em học sinh huyện Cần Giờ, TP. Hồ Chí Minh; trao tặng quà (máy tính, sách, đồ dùng học tập) cho các trường THPT Hoà Vang (Đà Nẵng), THPT Huỳnh Thúc Kháng, Phổ thông dân tộc Nội trú Nước Oa, THPT Huỳnh Ngọc Huệ, THCS Kim Đồng, Trường Tiểu học Mạc Đĩnh Chi (Quảng Nam) tổng trị giá 150 triệu đồng.

Các đơn vị thành viên Khu vực phía Bắc đã trao tặng 100 bộ sách giáo khoa cho các em học sinh có hoàn cảnh khó khăn tỉnh Thái Nguyên, NXBGD Hà Nội và Công ty CP Dịch vụ và Xuất bản Giáo dục Hà Nội đã tặng quà cho Trung tâm dạy nghề Nhân đạo việc làm cho trẻ em khuyết tật nhân ngày Quốc tế thiếu nhi 1/6.

NXBGD Việt Nam tặng sách giáo khoa cho các em học sinh vượt khó học giỏi tỉnh Thái Nguyên, ngày 9/8/2013.

ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT10M3

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 10 năm 2013

Giá: 9000 đồng
Tám nghìn đồng