BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ★ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

# TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

6 (240)
1997
NĂM THỨ 34

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG

★ ĐA THỨC ĐỐI XỨNG VÀ ỨNG DỤNG

★ GIẢI THƯỞNG CORA RATTO DÀNH CHO NỮ SINH GIỎI TOÁN

★ ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC ĐẠI CƯƠNG ĐHQG TP HCM

★ ĐỀ THI TUYỂN SINH CHUYÊN TOÁN - TIN ĐHSP

★ TỪ MỘT BÀI TOÁN THI VÔ ĐỊCH QUỐC TẾ

*Các thầy giáo và đội tuyển học sinh giỏi trường Lê Hồng Phong, Nam Định*

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
MATHEMATICS AND YOUTH

# MỤC LỤC

| | Trang |
|---|---|
| • **Dành cho các bạn Trung học cơ sở** | |
| *For Lower Secondary School Level Friends* | |
| *Lê Quang Trung* – Đa thức đối xứng và ứng dụng | 1 |
| • **Giải bài kì trước** | |
| *Sulutions of Problems in Previous Issue* | 3 |
| Các bài của số 236 | |
| • Giải thưởng Cora Ratto dành cho các bạn nữ sinh giỏi toán | 10 |
| • **Đề ra kì này** | |
| Problems in This Issue | |
| T1/240, ..., ..., T10/240, L1/240, L2/240 | 11 |
| • **Thông báo chuyển trụ sở** | 11 |
| • *Nguyễn Văn Minh* – Đề thi tuyển sinh Đại học đại cương, ĐHQG TP HCM | 13 |
| • *Doãn Minh Cường* – Đề thi tuyển sinh chuyên toán - tin ĐHSP | 15 |
| • *Trần Xuân Đáng* – Từ một bài toán thi vô địch quốc tế | Bìa 3 |
| • **Giải trí toán học** | |
| *Fun with Mathematics* | |
| *Bình Phương* – Giải đáp bài Anh đầy tớ và ông chủ | Bìa 4 |
| *Nguyễn Huy Đoan* – Nhận được bao nhiêu quà | Bìa 4 |



*Trụ sở tòa soạn :*
**81 Trần Hưng Đạo, Hà Nội** ĐT : 8220073
**231 Nguyễn Văn Cừ, TP Hồ Chí Minh** ĐT : 8356111

*Biên tập và trị sự :* VŨ KIM THỦY
LÊ THỐNG NHẤT
*Trình bày :* TRỌNG THIỆP

*Dành cho các bạn Trung học cơ sở*

# ĐA THỨC ĐỐI XỨNG VÀ ỨNG DỤNG

LÊ QUANG TRUNG - CĐSP (Minh Hải)

Trong chương trình toán ở THCS, khái niệm đa thức đã được trình bày song còn rất sơ lược, chưa được vận dụng nhiều vào giải quyết các bài toán. Trong bài này tôi xin giới thiệu vài nét về đa thức đối xứng và các ứng dụng của nó, chủ yếu là các đa thức 2 ẩn và 3 ẩn.

## I – Tóm lược lí thuyết

1. *Định nghĩa :* Một đa thức 3 ẩn $x, y, z$ được gọi là *đa thức đối xứng* nếu nó không thay đổi giá trị khi ta thay thế một cách tùy ý các ẩn $x, y, z$ cho nhau.

Ví dụ 1 : – Các đa thức sau là các đa thức đối xứng :

$x + y, x.y, x^2y + xy^2, x^2 + y^2, x^3 + y^3, \ldots, x^2 + y^2 + z^2, x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

– Các đa thức sau không phải là đa thức đối xứng :

$$x - y, x^2 - y^2, x^3 - 3y^2 + 2xy, \ldots$$

2. *Đa thức đối xứng cơ bản*

a) Đa thức 2 ẩn có 2 đa thức đối xứng cơ bản : $\delta_1 = x + y, \delta_2 = xy$

b) Đa thức 3 ẩn có 3 đa thức đối xứng cơ bản :

$$\delta_1 = x + y + z, \delta_2 = xy + xz + yz, \delta_3 = xyz$$

3. *Biểu diễn đa thức đối xứng qua các đa thức đối xứng cơ bản*

a) Đối với đa thức 2 ẩn việc biểu diễn không khó khăn lắm chẳng hạn :

$$x^2y + xy^2 = xy(x + y) = \delta_1\delta_2, x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = \delta_1^2 - 2\delta_2$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = \delta_1^3 - 3\delta_1\delta_2, \ldots$$

b) Đối với đa thức 3 ẩn việc biểu diễn khó khăn hơn, nhưng ta có thể dùng phương pháp hệ số bất định như sau :

– Trước hết ta coi một đa thức 3 ẩn viết dưới dạng đầy đủ là :

$$f(x, y, z) = t_1x^{a_1}y^{b_1}z^{c_1} + t_2x^{a_2}y^{b_2}z^{c_2} + \ldots + t_mx^{a_m}y^{b_m}z^{c_m}$$

Hạng tử $t_ix^{a_i}y^{b_i}z^{c_i}$ có bộ số mũ là $(a_i, b_i, c_i)$

Ví dụ 1 : $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = x^3y^0z^0 + x^0y^3z^0 + x^0y^0z^3 - 3xyz$

– Phương pháp biểu diễn :

+ Chọn hạng tử cao nhất giả sử là $t_ix^{a_i}y^{b_i}z^{c_i}$ có bộ số mũ là $(a_i, b_i, c_i)$

+ Viết tất cả các bộ số mũ $(d_i, m_i, n_i)$ thỏa mãn $d_i + m_i + n_i = a_i + b_i + c_i$ và $d_i \geqslant m_i \geqslant n_i$.

+ Giả sử $f(x, y, t) = k_1\delta_1^{d_1-m_1}.\delta_2^{m_1-n_1}.\delta_3^{n_1} + k_2\delta_1^{d_2-m_2}.\delta_2^{m_2-n_2}.\delta_3^{n_2} + \ldots + k_l\delta_1^{d_l-m_l}\delta_2^{m_l-n_l}\delta_3^{n_l}$

Cho $x, y, z$ những giá trị tùy ý ta tìm được $k_1, k_2, \ldots, k_l$.

Ví dụ 2. Biểu diễn đa thức $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$ qua các đa thức đối xứng cơ bản.

– Hạng tử cao nhất là $x^3$ có bộ số mũ $(3, 0, 0)$.

– Viết tất cả các bộ số mũ : $(3, 0, 0), (2, 1, 0), (1, 1, 1)$.

– Giả sử : $f(x, y, z) = k_1\delta_1^{3-0}\delta_2^{0-0}\delta_3^0 + k_2\delta_1^{2-1}\delta_2^{1-0}\delta_3^0 + k_3\delta_1^{1-1}\delta_2^{1-1}\delta_3^1 =$

$$= k_1\delta_1^3 + k_2\delta_1\delta_2 + k_3\delta_3$$

Cho $x = 1, y = -2, z = 1$ ta được $\delta_1 = 0, \delta_2 = -3, \delta_3 = -2$ suy ra $k_3 = 3$

$x = 1, y = 1, z = 0$ ta được $\delta_1 = 2, \delta_2 = 1, \delta_3 = 0$ suy ra : $8k_1 + 2k_2 = 2$

$x = 1, y = 1, z = 1$ ta được $\delta_1 = 3, \delta_2 = 3, \delta_1 = 1$ suy ra : $27k_1 + 9k_2 + 3 = 3$

từ đó suy ra $k_1 = 1, k_2 = -3$

Vậy : $f(x, y, z) = \delta_1^3 - 3\delta_1\delta_2 + 3\delta_3$.

## II – Ứng dụng

1. *Phân tích đa thức thành nhân tử :*

Ví dụ 3. Phân tích đa thức $f(x, y) = x^3 + 3x^3y + 2x^2y + 3x^2y^2 + 2xy^2 + 3xy^3 + y^3$ thành nhân tử.

Ta có $f(x, y) = (x^3 + y^3) + 3xy(x^2 + y^2) + 2xy(x + y) + 3x^2y^2 =$
$= \delta_1^3 - 3\delta_1\delta_2 + 3\delta_2(\delta_1^2 - 2\delta_2) + 2\delta_1\delta_2 + 3\delta_2^2 = \delta_1^3 - \delta_1\delta_2 + 3\delta_1^2\delta_2 - 3\delta_2^2 =$
$= (\delta_1 + 3\delta_2)(\delta_1^2 - \delta_2) = (x + y + 3xy)(x^2 + y^2 + xy)$

2. *Giải hệ phương trình.*

Ví dụ 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + y^3 + 2xy = 12 \\ x + y = 2 \end{cases}$ (1)

Đặt $\begin{cases} x + y = \delta_1 \\ xy = \delta_2 \end{cases}$ thì (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} \delta_1^3 - 3\delta_1\delta_2 + 2\delta_2 = 12 \\ \delta_1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta_1 = 2 \\ \delta_2 = -1 \end{cases}$

Vậy ta có hệ $\begin{cases}x+y=2\\ xy=-1\end{cases}$ có các nghiệm là $\begin{cases}x_1=1+\sqrt{2}\\ y_1=1-\sqrt{2}\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x_2=1-\sqrt{2}\\ y_2=1+\sqrt{2}\end{cases}$

3. *Giải phương trình căn thức*

Ví dụ 5. Giải phương trình : $\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{3-x}=1$

Đặt $\sqrt[4]{x-2}=u$, $\sqrt[4]{3-x}=v$, ta có $u, v \geq 0$

Khi đó ta có hệ $\begin{cases}u+v=1\\ u^4+v^4=1\end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases}\delta_1=1\\ (\delta_1^2-2\delta_2)^2-2\delta_2^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\delta_1=1\\ \delta_2=0\end{cases}\\ \begin{cases}\delta_1=1\\ \delta_2=2\end{cases} (loại)\end{array}\right.$ từ

$\begin{cases}\delta_1=1\\ \delta_2=0\end{cases}$ ta có $\begin{cases}u=1\\ v=0\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}u=0\\ v=1\end{cases}$

Nếu $\begin{cases}u=1\\ v=0\end{cases}$ thì phương trình có nghiệm $x=3$.

Nếu $\begin{cases}u=0\\ v=1\end{cases}$ thì phương trình có nghiệm $x=2$.

4. *Lập phương trình bậc 2.*

Ví dụ 6. Lập phương trình bậc 2 : $x^2+px+q=0$ có 2 nghiệm : $x_1=y_1^4+2y_2^2$, $x_2=y_2^4+2y_1^2$ trong đó $y_1$, $y_2$ là nghiệm của phương trình : $y^2+3y+1=0$.

Theo Viét : $\begin{cases}\delta_1=y_1+y_2=-3\\ \delta_2=y_1y_2=1\end{cases}$

Ta có : $x_1+x_2=(y_1^4+y_2^4)+2(y_1^2+y_2^2)=$

$=(\delta_1^2-2\delta_2)^2-2\delta_2^2+2(\delta_1^2-\delta_2)=63$

$=x_1.x_2=y_1^4y_2^4+4y_1^2y_2^2+2(y_1^6+y_2^6)=$

$=\delta_2^4+4\delta_2^2+2(\delta_1^6-6\delta_1^4\delta_2+9\delta_1^2\delta_2^2-2\delta_2^2)=649$

Vậy phương trình bậc 2 cần tìm là :

$$x^2-63x+649=0$$

5. *Chứng minh các hằng đẳng thức*

Ví dụ 7. Cho $x+y=1$, $x^3+y^3=a$, $x^5+y^5=b$. Chứng minh rằng : $5a(a+1)=9b+1$.

Ta có $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=$

$=\delta_1^3-3\delta_1\delta_2$ suy ra $\delta_2=\dfrac{1-a}{3}$

Mặt khác $b=x^5+y^5=x^5+y^5+x^2y^3+x^3y^2-x^2y^3-x^3y^2$

$=x^2(x^3+y^3)+y^2(x^3+y^3)-x^2y^2(x+y)=$

$=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^2(x+y)=$

$=(\delta_1^2-2\delta_2)(\delta_1^3-3\delta_1\delta_2)-\delta_1\delta_2^2=$

$(1-2\delta_2)(1-3\delta_2)-\delta_2^2=$

$=1+5\delta_2^2-5\delta_2=\dfrac{5a^2+5a-1}{9}$

Vậy $9b=5a^2+5a-1$ hay $9b+1=5a(a+1)$

6. *Tìm nghiệm nguyên của các phương trình đối xứng.*

Ví dụ 8. Tìm các số nguyên dương thỏa mãn phương trình : $x^3+y^3+1=3xy$ Đặt $\delta_1=x+y$, $\delta_2=xy$ ta có : $\delta_1^3-3\delta_1\delta_2+1=3\delta_2 \Leftrightarrow$ $(\delta_1+1)(\delta_1^2-\delta_1+1-3\delta_2)=0$ Vì $x, y>0$ nên $\delta_1=x+y>0$ do đó $\delta_1+1\neq 0$ vậy $\delta_1^2-\delta_1+1-3\delta_2=0$ suy ra $\delta_2=\dfrac{1}{3}(\delta_1^2-\delta_1+1)$.

Như vậy ta phải tìm $x$, $y$ nguyên dương sao cho $\begin{cases}x+y=\delta_1\\ xy=\dfrac{1}{3}(\delta_1^2-\delta_1+1)\end{cases}$ phương trình bậc 2 :

$z^2-\delta_1z+\dfrac{1}{3}(\delta_1^2-\delta_1+1)=0$

Có $\Delta=-\dfrac{1}{3}(\delta_1-2)^2$. $\Delta<0$ nếu $\delta_1\neq 2$.

Vậy ta phải có $\delta_1=x+y=2$

Khi đó $x=y=\dfrac{\delta_1}{2}=1$.

7. *Chứng minh các bất đẳng thức*

Ta luôn có $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\geq 0$ $\Leftrightarrow 2(x^2+y^2+z^2)-2(xy+xz+yz)\geq 0 \Leftrightarrow$ $2(\delta_1^2-2\delta_2)-2\delta_2\geq 0 \Leftrightarrow \delta_1^2\geq 3\delta_2$ từ bất đẳng thức này ta chứng minh được các bất đẳng thức khác.

Ví dụ 9. Chứng minh các bất đẳng thức :

a) $(ab+ac+bc)^2\geq 3abc(a+b+c)$ $\forall a, b, c\in \mathbf{R}$.

b) $(a+b+c)(ab+ac+bc)\geq 9abc$ $\forall a, b, c\in \mathbf{R}^+$

a) Từ $\delta_1^2\geq 3\delta_2$ hay $(x+y+z)^2\geq 3(xy+xz+yz)$ đặt $x=ab$, $y=ac$, $z=bc$ ta được : $(ab+ac+bc)^2\geq 3(a^2bc+ab^2c+abc^2)=3abc(a+b+c)$

b) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với : $\delta_1.\delta_2\geq 9\delta_3$. Vì $a$, $b$, $c$ dương nên $\delta_1$, $\delta_2$, $\delta_3>0$. Từ các bđt : $\delta_1^2\geq 3\delta_2$ và $\delta_2^2\geq 3\delta_1\delta_3$ ta có $\delta_1^2\delta_2^2\geq 9\delta_1\delta_2\delta_3$ suy ra $\delta_1^2\geq 9\delta_2\delta_3$

**III – Một số bài tập :**

1. Phân tích đa thức $2x^4-x^3y+3x^2y^2-xy^3+2y^4$ thành nhân tử :

2. Giải hệ phương trình :

a) $\begin{cases}x^3+y^3=5\\ xy^2+x^2y=1\end{cases}$ b) $\begin{cases}x^3+y^3+x^2y+xy^2=13\\ x^4y^2+x^2y^4=468\end{cases}$

3. Giải phương trình : $\sqrt[5]{\dfrac{1}{2}+x}+\sqrt[5]{\dfrac{1}{2}-x}=1$; $\sqrt[4]{629-x}+\sqrt[4]{77+x}=8$

4. Lập phương trình bậc 2 : $x^2+px+q=0$ có các nghiệm $x_1=y_1^6-2y_2^2$, $x_2=y_2^6-2y_1^2$ Trong đó $y_1$, $y_2$ là nghiệm của pt : $y^2+2y-4=0$

5. Chứng minh hằng đẳng thức :

$(x+y)^4+x^4+y^4=2(x^2+xy+y^2)^2$

6. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình :

$x+y=x^2-xy+y^2$

7. Chứng minh các bất đẳng thức :

a) $a^2+b^2+1\geq ab+a+b$ $\forall a, b\in \mathbf{R}$

b) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^8\geq 64ab(a+b)^2$ $\forall a\geq 0, b\geq 0$


**Bài T1/236.** *Tìm ước số chung lớn nhất của $2^{1964} - 1$ và $2^{1996} - 1$.*

**Lời giải** (Dựa theo Đoàn Hải Giang, 7^A Năng Khiếu Quỳnh Lưu, Nghệ An). Trước hết, ta xét bài toán sau đây :

"Với $a, m, n \in \mathbf{N}^+$ thì $a^{mn} - 1$ chia hết cho $a^m - 1$ ; $a^n - 1$" (*) (Vì phép chia đa thức $a^{mn} - 1$ cho các đa thức $a^m - 1$ ; $a^n - 1$ là không có dư). Bây giờ ta phát biểu và chứng minh bài toán tổng quát sau đây :

"Với $a, m, n \in \mathbf{N}$ và $a > 1$ thì $(a^m - 1 ; a^n - 1) = a^{(m ; n)} - 1$". Thật vậy, đặt $d_1 = (a^m - 1 ; a^n - 1)$ và $d_2 = (m ; n)$, ta phải chứng minh $d_1 = a^{d2}$. Từ (*), ta có $a^{d2} - 1$ là ước của $a^m - 1$ ; $a^n - 1$, suy ra $a^{d2} - 1$ là ước của $d_1$ (**). Đảo lại, do $d_2 > 0$ và là ước số của $m, n$ nên dễ dàng tìm được hai số nguyên dương $x, y$ thỏa mãn : $mx - ny = d_2$. Mặt khác, do $d_1$ là ước của $a^m - 1$ ; $a^n - 1$ nên từ (*), ta có $d_1$ là ước của $a^{mx} - 1$ ; $a^{ny} - 1$. Do đó $d_1$ là ước của $(a^{mx} - 1) - (a^{ny} - 1) = a^{mx} - a^{ny} = a^{ny}(a^{mx-ny} - 1) = a^{ny}(a^{d2} - 1)$. Mà $(d_1 ; a) = 1$ nên $d_1$ là ước của $a^{d2} - 1$ (***). Kết hợp (***) với (**), ta có $d_1 = a^{d2} - 1$. Và, bài toán tổng quát đã được giải xong. Áp dụng vào bài toán đang giải, ta có số cần tìm là $2^4 - 1$ (= 15), vì (1964 ; 1996) = 4.

**Nhận xét.** Có 175 bài giải, tất cả đều giải đúng, trong đó có một số bạn cũng dùng lời giải tổng quát như trên. Ngoài bạn Đoàn Hải Giang ra, còn có các bạn sau đây có lời giải tốt : **Thanh Hóa :** *Lê Kim Phượng* (8C THCS Năng Khiếu Tp Thanh Hóa), *Lê Trọng Sơn* (7A, NK Hoằng Hóa) **Hà Nội :** *Nguyễn Thành Trung* (8M, Marie Curie), *Trần Lưu Vân* (9C THCS Ngọc Lâm), *Trần Minh Quân* (8H PTCS Trưng Vương) **Vĩnh Phúc :** *Kiều Việt Cường* (9B PTCS Chuyên Yên Lạc). **Phú Thọ :** *Nguyễn Kim Sở* (11A PTTH Thanh Ba) **Hải Phòng :** *Lê Minh Anh* (8A1 Hồng Bàng) **Nam Định :** *Phùng Văn Huân* (8 Năng Khiếu, huyện Giao Thủy) **Bạc Liêu :** *Lương Thế Nhân* (8A PTTH Chuyên)

ĐẶNG VIÊN

**Bài T2/236 :** *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} x^4 + y^4 + z^4 = 8(x + y + z) & (1) \\ xyz = 8 & (2) \end{cases}$$

**Lời giải :** (của nhiều bạn)

Ta có $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geqslant 0$ $\forall a, b, c$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$ $\forall a, b, c$.

Bất đẳng thức trở thành đẳng thức $\Leftrightarrow a = b = c$.

Áp dụng vào bài toán này ta có

$$x^4 + y^4 + z^4 \geqslant x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geqslant$$
$$\geqslant (xy)(yz) + (yz)(zx) + (zx)(xy)$$
$$= xyz(x + y + z)$$

Kết hợp với (2) thì $x^4 + y^4 + z^4 \geqslant 8(x + y + z)$

Theo (1) thì bất đẳng thức trở thành đẳng thức. Do đó hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x^2 = y^2 = z^2 \\ xy = yz = zx \\ xyz = 8 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 2.$$

**Nhận xét :**

1) Trong 267 bài giải gửi về có hai bạn giải sai tìm ra 4 nghiệm và một số bạn lí luận sai : "$x^4 + y^4 + z^4 \geqslant 3\sqrt[3]{x^4y^4z^4} = 48$ $\Rightarrow 8(x + y + z) \geqslant 48 \Rightarrow x + y + z \geqslant 6$. Dấu đẳng thức xảy ra (tại sao lại xảy ra ?) $\Leftrightarrow x = y = z = 2$".

2) Nhiều bạn sử dụng bất đẳng thức theo những hướng khác phức tạp hơn (tuy vẫn đúng !).

3) Hai bạn Phan Việt Bắc, 9T Phan Bội Châu, Nghệ An và Lại Thành Nam, 8A Chuyên Quỳnh Phụ, Thái Bình có nhận xét đúng : "thay 8 bởi $a \neq 0$ thì hệ vẫn có nghiệm duy nhất $x = y = z = \sqrt[3]{a}$" (yêu cầu $a \neq 0$ để đỡ tầm thường ?).

4) Các bạn có lời giải tốt hơn là : **Thanh hóa :** *Lê Trọng Sơn*, 7A, NK Hoằng Hóa ; *Mai Văn Hà*, 7 $TN_2$, NK Bỉm Sơn. **Nam Định :** *Nguyễn Trung Quân*, 9T, NK Ý Yên ; *Nguyễn Tiến Dũng*, 7T, Trần Đăng Ninh. **Quảng Ngãi :** *Nguyễn Tiến Khải*, *Hà Quang Đạt*, 7T, Chuyên Lê Khiết ; *Nguyễn Thị Phương Uyên*, 7 Chuyên Nghĩa Hành. **Đà Nẵng :** *Hoàng Thế Long*, 8B, Lê Lợi. **Hà Tĩnh :** *Phan Công Đức*, 9T, Chuyên Hà Tĩnh. **Đắclắc :** *Tạ Quốc Hưng*, *Dương Thành An*, 8T Chuyên Nguyễn Du. **Nghệ An :** *Nguyễn Hoàng Sào*, 8 Toán Tin, NK Vinh ; *Chu Việt Tuấn*, 9T, Phan Bội Châu. **Hà Nội :** *Phạm Mỹ Dung*, 8A, Chu Văn An ; *Trần Minh Quân*, 8H, Trưng Vương ; *Khúc Quang Ngọc*, $8A_1$, Giảng Võ. **Thừa Thiên – Huế :** *Nguyễn Quang Vũ*, *Lê Trung Kiên*, 9/1, Nguyễn Tri Phương. **TP Hồ Chí Minh :** *Khúc Ngọc Vinh*, 8/1, Hồng Bàng. **Bắc Ninh :** *Phạm Viết Khoa*, 9T, Tiên Sơn. **Khánh Hòa :** *Trần Tuấn Anh*, 9T, Lê Quý Đôn. **Phú Thọ :** *Nìn Tuấn*, 9A2, Chuyên Việt Trì, *Hà Quang Chiến*, $9A_1$, trường dân tộc và nội trú. **Hà Tây :** *Chu Thùy Dương*, 9, Thường Tín ; *Nguyễn Hải Hà*, 9B, Chuyên Ứng Hòa. **Bạc Liêu :** *Lương Trí Nhân*, *Trương Yến Nhi* 8A, Chuyên Bạc Liêu. **Hải Dương :** *Đỗ Công Hùng*, *Lê Trung Dũng*, 8T, NK Hải Dương, **Thái Bình :** *Lê Thành Công*, 8T, Đông Hưng. **Cà Mau :** *Trần Ngọc Đức*, 9A, Thới Bình. **Quảng Ninh :** *Hà Tiến Sĩ*, 8A ; Trọng điểm Uông Bí. **Vĩnh Phú :** *Trần Thị Thu Hương*, 9A, Chuyên Vĩnh Tường. **Ninh Bình :** *Lê Hồng Linh*, 9T, Chuyên thị xã. **Hà Nam :** *Lê Thành Nam*, 9T, NK Duy Tiên. **An Giang :** *Hoàng Thanh Lâm*, 9T, Chuyên Thoại Ngọc Hầu, Long Xuyên.

LÊ THỐNG NHẤT

**Bài T3/236 :** *Cho 2n số $a_1, a_2, ..., a_n ; b_1, b_2, ..., b_n$ thỏa mãn :*

1) $a_1 \leqslant a_2 \leqslant ... \leqslant a_n$

2) $b_i \geqslant 0$ $\forall i = \overline{1, n}$

*Đặt* $m = \min\limits_{1 \leqslant 1 < j \leqslant n} (a_j - a_i, a_1)$, $M = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{b_i\}$

*Chứng minh rằng*

$M(a_1b_1) + a_2b_2 + ... + a_nb_n) \geqslant$

$\geqslant \frac{m}{2}(b_1 + b_2 + ... + b_n)^2.$

**Lời giải :** của *Phan Thanh Tùng*, 9TA, Phan Bội Châu, Nghệ An. Điều kiện : $a_1 \geqslant 0$. Vì nếu $a_1 < 0$ thì khi cho $a_2 = a_3 = ... = a_n = 0$ ; $b_1 = 1$, $b_2 = b_3 = ... = b_n = 0$.

Ta có : $M(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n) \geqslant \frac{m}{2}(b_1 + b_2 + ... + b_n)^2$ trở thành $a_1 \geqslant \frac{a_1}{2}$ (vô lí vì $a_1 < 0$)

với $a_1 \geqslant 0$ ta suy ra $m \geqslant 0$.

Ta lại có $a_1 \geqslant m$ ; $a_2 - a_1 \geqslant m \Rightarrow a_2 \geqslant 2m$ và từ đó suy ra $a_3 \geqslant ...$ ; $a_n \geqslant n.m$

Vậy có $M(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n) \geqslant$

$\geqslant M(mb_1 + 2mb_2 + ... + nmb_n)$

$= mM(b_1 + 2b_2 + ... + nb_n)$

$= m[M(b_1 + b_2 + ... + b_n) + M(b_2 + b_3 + + ... + b_n) + ... + M(b_{n-1} + b_n) + Mb_n]$

$\geqslant m[b_1(b_1 + b_2 + ... + b_n) + b_2(b_2 + b_3 + + ... + b_m) + ... + b_{n-1}(b_{n-1} + b_n) + b_n^2]$

$= \frac{m}{2}[(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2) + (b_1 + b_2 + ... + b_n)^2]$

$\geqslant \frac{m}{2}(b_1 + b_2 + ... + b_n)^2$ (đpcm)

Dấu "=" xảy ra khi $b_1 = b_2 = ... = b_n = 0$ hoặc khi $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$.

**Nhận xét.** 1. Đề tiếng Việt của bài này in thiếu. Thành thật xin lỗi bạn đọc và tác giả đề ra.

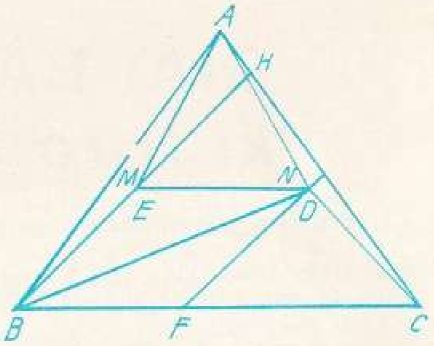
2. Các bạn sau đây có lời giải tốt : **Phú Thọ :** *Hà Quang Chiến*, 9A$_1$, Dân tộc nội trú huyện Sông Thao. **Hòa Bình :** *Đỗ Thu Hà*, 9A, THCS Hữu Nghị. **Hà Tây :** *Lưu Tiến Đức* ; 8B, Chuyên V–T Ứng Hòa. **Nghệ An :** *Phan Việt Bắc*, 9A, Phan Bội Châu. **Khánh Hòa :** *Trần Tuấn Anh* 9T, Lê Quý Đôn, Nha Trang.

TÔ NGUYÊN

**Bài T4/236.** *Cho tam giác ABC với điểm D ở bên trong sao cho : AB = AC ; BAC = 80° ; DBC = 20° ; DCB = 40°. Gọi F là giao điểm của đường vuông góc với AC kẻ qua D và E là điểm đối xứng với F qua BD. Tam giác ADE là tam giác gì, tại sao ?*

**Lời giải.** (Dựa theo *Lê Anh Vinh* 8A$_1$ THCS Giảng Võ Hà Nội)

Lấy các điểm $M$ và $N$ ở bên trong $\Delta ABC$ sao cho các tam giác $MAB$, $NAC$ cân đỉnh $M$, $N$ với các góc đáy đều bằng $10°$. Suy ra $\Delta MAB = \Delta NAC$ (g.c.g.), và ta có $BM = MA = AN = NC$. Hơn nữa, $MAN = 80° - 10° - 10° = 60°$ nên $\Delta AMN$ đều, và ta có $MN = MA = MB$. Kẻ phân giác $Ax$ của góc $BAC$, ta có $Ax$ cũng là phân giác góc MAN (vì $BAM = 10° = CAN$). Mà các tam giác $ABC$, $AMN$ cân đỉnh $A$ nên các đáy $BC$, $MN$ cùng vuông góc với $Ax$ và song song với nhau. Do $MN = MB$ nên $\Delta MBN$ cân đỉnh $M$ và ta có $MBN = MNB$. Hơn nữa, $MNB = NBC$ (so le trong) nên $NBM = NBC = (ABC - ABM) : 2 = (50° - 10°) : 2 = 20°$. Suy ra tia $BN$ trùng với tia BD (1). Ta lại có $BCN = BCA - NCA = 50° - 10° = 40°$ nên tia $CN$ trùng với tia $CD$ (2). Kết hợp (2) với (1), ta có $N$ trùng với $D$ (3).




Kéo dài $BM$ cho tới cắt $AC$ tại $H$, ta có $AHB = 180° - MBA - BAH = 180° - 10° - 80° = 90°$, suy ra $BM // DF$ (vì cùng vuông góc với $AC$), và kết hợp với $MN // BF$, ta có $BMDF$ là hình bình hành. Mà $BM = MN = MD$ nên $BMDF$ là hình thoi, suy ra $M$ đối xứng với $F$ qua $BD$ và trùng với $E$. Kết hợp với (3) ta có $\Delta ADE$ trùng với $\Delta AMN$ và là tam giác đều.

**Nhận xét.** Có 60 bài giải trong đó có 1 bài trả lời là tam giác thường, 3 bài trả lời là tam giác cân, còn lại đều trả lời đúng. Lời giải tốt gồm có :

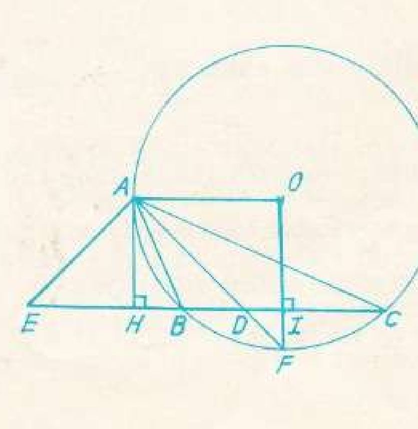
**Hà Nội :** *Lê Anh Vinh* (8A$_1$ PTCS Giảng Võ). **Nam Định :** *Chu Thế Sơn* (Lí 9 Năng khiếu Hải Hậu), *Vũ Tiết Tài* (9 Toán Năng khiếu Hải Hậu), *Trần Đức Hiếu* (8 toán Hàn Thuyên). **Tp Hồ Chí Minh :** *Chung Nhân Phú* (9T1 Nguyễn An Khương Hốc Môn). **Bắc Ninh :** *Hoàng Tùng* (9 Chuyên Toán Năng khiếu Tiên Sơn). **Nghệ An :** *Phan Thanh Trung* (9 Toán A PTTH Phan Bội Châu Tp Vinh), *Hồ Nghĩa Chất* (7A Năng Khiếu Quỳnh Lưu). **Vĩnh Phúc :** *Vũ Văn Phong* (9a THCS Chuyên Vĩnh Tường), *Nguyễn Trung Lập* (9B Chuyên Yên lạc). **Hà Tây :** *Phan Lạc Linh* (8A Chuyên Thạch Thất). **Khánh Hòa :** *Trần Tuấn Anh* (9 Toán Lê Quý Đôn, Nha Trang).

ĐẶNG VIÊN

**Bài T5/236.** *Cho ΔABC. Kẻ AD và AE là hai phân giác trong và ngoài tại đỉnh A. Đường tròn ngoại tiếp ΔABC có bán kính bằng 1. Biết rằng AD = AE. Tính AD khi ΔABC có diện tích lớn nhất.*

**Lời giải :** Dễ dàng chứng minh $\Delta ADE$ vuông cân tại $A \Rightarrow ADE = 45°$

Kẻ $AH \perp DE$ (1). Ta có $AD = AH.\sqrt{2}$. (*)



Gọi $F$ là giao của $AD$ với $(O)$. Ta có sđ $\overset{\frown}{BF}$ = sđ $\overset{\frown}{CF}$ và $OF \perp BC$ tại $I$. (2)

Mặt khác sđ $\widehat{ADB} = \frac{1}{2}$(sđ $\overset{\frown}{AB}$ + sđ $\overset{\frown}{FC}$) $= \frac{1}{2}$(sđ $\overset{\frown}{AB}$ + sđ $\overset{\frown}{BF}$) $= \frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{AF}$

$\Rightarrow \overset{\frown}{AF} = 90^o$. Vậy $\widehat{AOF} = 90^o$ (3)

Từ (1), (2), (3) ta có : $AOIH$ là hình chữ nhật.

Từ đó $AH = OI$ (**)

Ta có $S_{\Delta ABC} = \frac{AH.BC}{2} = OI.CI = \sqrt{R^2 - CI^2}.IC = \sqrt{(1 - IC^2)IC^2}$

Mà $1 - IC^2 + IC^2 = 1$ không đổi nên $S_{\Delta ABC}$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $1 - IC^2 = IC^2 \Leftrightarrow IC = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow BC = \sqrt{2} = \sqrt{1+1} \Leftrightarrow \Delta OBC$ vuông cân tại $O \Leftrightarrow OI = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (***)

Từ (*), (**) và (***) ta có $AD = 1$ khi $\Delta ABC$ có diện tích lớn nhất.

**Nhận xét :**

1. Nhiều bạn giải không đúng bài này

2. Các bạn có lời giải tốt :

**Thái Nguyên :** *Vũ Thái Hòa*, 9T THCS năng khiếu, **Phú Thọ :** *Hà Quang Chiến* 9A$_1$, *Lê Trung Đoàn* 9A I THCS chuyên và DTNT Sông Thao ; **Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Thanh Tú*, 9B Chuyên Yên Lạc, *Trần Phương Anh* 8A, Chuyên cấp II Mê Linh, Phúc Yên, *Trần Thị Thu Hương*, 9A Chuyên Vĩnh Tường ; **Bắc Ninh :** *Hoàng Tùng*, *Nguyễn Xuân Cường*, 9NK, Tiên Sơn ; **Hà Tây :** *Nguyễn Hải Hà*, 9B Chuyên Ứng Hòa ; *Tô Ngọc Phan*, 9K Lê Lợi, Hà Đông ; **Hải Phòng :** *Trần Văn Hà*, 9D2 cấp 2 Lạc Viên ; **Hà Nội :** *Đoàn Thanh Tùng* 8A2, Nguyễn Trường Tộ, *Bùi Lê Na*, 8C Hà Nội - Amsterdam, *Trần Minh Quân*, 8H Trưng Vương, **Thái Bình :** *Trần Thế Hoàng* 9T Đông Hưng ; **Nam Định :** *Đỗ Minh Tiến*, 8T, Trần Đăng Ninh, *Hoàng Tiến*, Lí 9, *Vũ Việt Tài* 9 Toán, năng khiếu Hải Hậu, *Vũ Xuân Dũng*, 9 THCS Giao Tiến, Giao Thủy ; **Thanh Hóa :** *Lê Kim Phương*, 8C THCS Năng khiếu Tp, **Nghệ An :** *Phạm Công Phiệt*, Xóm 19 Nghi Trung, Nghi Lộc, *Phan Việt Bắc*, 9TA PTTH Phan Bội Châu, **Hà Tĩnh :** *Trần Nguyên Thọ* 9T1 NK Hà Tĩnh, **Quảng Nam :** *Sử Duy Bin*, 9A Chuyên Nguyễn Hiền, Điện Phương, Điện Bàn ; **Khánh Hòa :** *Trần Tuấn Anh*, 9T Lê Quý Đôn, **Nha Trang ; HCM :** *Chung Nhân Phú*, 9T1, Nguyễn An Khương, Hóc Môn, **Trà Vinh :** *Bùi Minh Khoa*, 9$_4$ Lý Tự Trọng ; **An Giang :** *Hoàng Thanh Lâm*, 9T Chuyên Thoại Ngọc Hầu, Long Xuyên.

VŨ KIM THỦY

**Bài T6/236 :** *Cho dãy* $\{a_n\}$ *thỏa mãn :*

$$a_1 = a \,;\, a_{n+1} = \frac{2a_n^3 - 2a_n^2 - 2}{3a_n^2 - 4a_n - 1} \text{ với mọi } n \in Z^+.$$

*Chứng minh rằng, nếu* $|a| \geq 2$ *thì dãy* $\{a_n\}$ *hội tụ. Tính giới hạn của dãy trong trường hợp đó.*

**Lời giải :** Ta có :

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2a_n^3 - 2a_n^2 - 2}{3a_n^2 - 4a_n - 1} - a_n = \frac{(1 - a_n^2)(a_n - 2)}{3a_n^2 - 4a_n - 1} \ \forall n \in N^*$$

$$a_{n+1} - 2 = \frac{2a_n^3 - 2a_n^2 - 2}{3a_n^2 - 4a_n - 1} - 2 = \frac{2a_n(a_n - 2)^2}{3a_n^2 - 4a_n - 1} \ \forall n \in N^*$$

$$a_{n+1} + 1 = \frac{2a_n^3 - 2a_n^2 - 2}{3a_n^2 - 4a_n - 1} + 1 = \frac{(a_n + 1)^2(2a_n - 3)}{3a_n^2 - 4a_n - 1} \ \forall n \in N^*.$$

Dựa vào các đẳng thức trên, với lưu ý rằng $3a_n^2 - 4a_n - 1 = (a_n - 2)^2 + 2\left(a_n^2 - \frac{3}{2}\right)$, bằng phương pháp quy nạp theo $n$ dễ dàng chứng minh được rằng :

+ Nếu $a_1 = a \geq 2$ thì $a_n \geq 2 \ \forall n \in N^*$ và $a_{n+1} \leq a_n \ \forall n \in N^*$. Nếu $a_1 = a \leq -2$ thì $a_n < -1 \ \forall n \geq 2$ và $a_{n+1} \geq a_n \ \forall n \in N^*$

Từ đó : + Nếu $a \geq 2$ thì dãy $\{a_n\}$ là dãy không tăng và bị chặn dưới bởi 2. (1)

+ Nếu $a \leq -2$ thì dãy $\{a_n\}$ là dãy không giảm và bị chặn trên bởi $-1$. (2) Suy ra : Với $|a| \geq 2$ thì dãy $\{a_n\}$ là dãy hội tụ. Đặt $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Từ công thức xác định dãy $\{a_n\}$ và (1), (2) ta có : $\alpha = \frac{2\alpha^3 - 2\alpha^2 - 2}{3\alpha^2 - 4\alpha - 1}$.

$\alpha \geq 2$ nếu $a \geq 2$

$\alpha \leq -1$ nếu $a \leq -2$

Từ đó suy ra :

+ Nếu $a \geq 2$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

+ Nếu $a \leq -2$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -1$.

**Nhận xét :** 1) Do sơ suất nên công thức xác định dãy $\{a_n\}$ trong đề bài đã bị in nhầm. Tuy nhiên hầu hết các bạn gửi lời giải tới Tòa soạn đã giải *bài toán được in đúng ở phần đề bài bằng tiếng Anh. Các bạn giải đúng bài toán đã được in ở phần đề bài bằng tiếng Việt vẫn được điểm tối đa của bài toán.*

2) Các bạn sau đây có lời giải hoàn chỉnh : **Đaklak :** *Lê Thế Tân* (11 Toán Trường Chuyên Nguyễn Du - Buôn Ma Thuột) ; **Trà Vinh :** *Trần Huỳnh Thế Khanh* (12A$_1$ PTTH Phạm Thái Bường) ; **Quảng Ngãi :** *Nguyễn Xuân Hà* (12H PTTHCB số 1 - Đức Phổ) ; **Thừa Thiên - Huế :** *Đinh Trung Hoàng* (11CT ĐHTH Huế) ; **Quảng Bình :** *Trần Đức Thuận* (11CT PTNK Quảng Bình) ; **Nghệ An :** *Ngô Anh Tuấn*, *Nguyễn Trung Thành*, *Hồ Sỹ Ngọc* (Khối PTCT ĐHSP Vinh) ; *Trần Nam Dũng*, *Đặng Đức Hạnh*, *Nguyễn Thịnh* (PTTH Phan Bội Châu - Vinh) ; **Thanh Hóa :** *Hoàng Trung*

*Tuyến* (12A PTTH Hà Trung), *Lê Duy Diễn* (11T PTTH Lam Sơn) ; **Hà Nội :** *Nguyễn Đức Mạnh* (11A PTTH Cổ Loa - Đông Anh), *Văn Sỹ Thủy* (11A, PTTH Yên Hòa) ; **Bắc Giang :** *Nguyễn Tiến Mạnh* (PTTHNK Ngô Sỹ Liên) ; **ĐHQG Hà Nội :** *Phạm Hải Trung* (khối PTCT - Tin ĐHKHTN).

3) Nhiều bạn cho lời giải sai do đã vội vàng làm phép tương tự khi xét dãy $\{a_n\}$ trong trường hợp $a \leqslant -2$.

NGUYỄN KHẮC MINH

**Bài T7/236.** *a) Giải phương trình* $\cos 3x = \frac{1}{2}$

*b) Áp dụng kết quả của câu trên để tính các tổng sau đây :*

$$S_1 = \cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{7\pi}{9} + \cos\frac{13\pi}{9}$$

$$S_2 = \cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{7\pi}{9} + \cos\frac{7\pi}{9}\cos\frac{13\pi}{9} + \cos\frac{13\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}$$

$$S_3 = \cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{7\pi}{9}\cos\frac{13\pi}{9}.$$

**Lời giải** (của đa số ca cs bạn)

a) Viết phương trình dưới dạng $\cos 3x = \cos\frac{\pi}{3}$ (*)

Từ đó, ta được : $x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$ ; $k \in \mathbf{Z}$.

b) Sử dụng hệ thức

$$\cos 3t = \cos^3 t - 3\cos t\ ,$$

viết phương trình (*) dưới dạng :

$$4\cos^3 x - 3\cos x = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$\cos^3 x - \frac{3}{4}\cos x - \frac{1}{8} = 0$$

Từ đó, theo a) ta được phương trình bậc 3 theo cosx có các nghiệm :

$$\cos\frac{\pi}{9}\ ;\ \cos\left(\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\frac{7\pi}{9}\ ;$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{9} + \frac{4\pi}{3}\right) = \cos\frac{13\pi}{9}.$$

Vậy (*) $\Leftrightarrow$

$$\left(\cos x - \cos\frac{\pi}{9}\right)\left(\cos x - \cos\frac{7\pi}{9}\right)\left(\cos x - \cos\frac{13\pi}{9}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^3 x - S_1\cos^2 x + S_2\cos x - S_3 = 0$$

Hay : $S_1 = 0$ ; $S_2 = -\frac{3}{4}$ ; $S_3 = \frac{1}{8}$.

**Nhận xét :** Tòa soạn nhận được rất nhiều lời giải của các bạn, đa số các lời giải gửi đến đều đúng. Một số bạn còn cho cách tổng quát hóa bài toán bằng cách thay $\frac{1}{2}$ bởi $\cos\alpha$ ($\alpha$ - tùy ý).

Sau đây là danh sách các bạn đã gửi lời giải :

**Lâm Đồng :** *Trương Anh Tuấn, Trần Hải Yến.* **Trà Vinh** : *Phạm Thế Nhật Trường, Trần Huỳnh Thế Khánh.* **Khánh Hòa** : *Nguyễn Hoàng Khâm, Trần Tuấn Anh.* **Lào Cai :** *Nguyễn Đức Thọ, Nguyễn Hồng Quang.* **Phú Yên :** *Nguyễn Long Khánh, Nguyễn Quốc Dân.* **Hà Tây** : *Nguyễn Hà Duy, Nguyễn Trung Phương.* **Quảng Bình :** *Trần Thành Bình, Nguyễn Thành Trung, Trần Mai Sơn Hà, Lê Mạnh Hà, Dương Lê Nam, Trần Đức Thuận, Nguyễn Trung Kiên.* **Quảng Trị** : *Nguyễn Việt Tiến, Phạm Đức Phong.* **Vĩnh Phúc :** *Tạ Nguyễn Hồng Phương, Phan Huy Đông, Trần Thị Bích Phương, Bùi Minh Đức, Lê Hồng Phương, Trần Nhật Tân, Trần Minh Phương.* **Bắc Giang** : *Phạm Văn Thịnh, Phạm Anh Thư, Đặng Hoàng Việt Hà, Phạm Việt Ngọc, Nguyễn Tiến Mạnh, Nguyễn Ngọc Sơn, Nguyễn Minh Hoàng.* **TP HCM** : *Ngyễn Lê Lực, Nguyễn Tuấn Anh, Lê Quang Nắm, Bì Minh Huy.* **Thái Nguyên :** *Lê Quang Huy, Đặng Văn Thành, Đinh Đức Hoàng, Vũ Tuấn Anh* **Yên Bái :** *Trần Quang Sán, Đinh Quang Mạnh, Trần Mạnh Tuấn, Vũ Ngữ Bình* **Hà Nội** : *Đặng Minh Thắng, Lê Cường, Bùi Mạnh Hùng, Lê Tuấn Anh, Trương Thiện Đại, Nguyễn Quang Lộc, Văn Sỹ Thủy, Nguyễn Mạnh Hà, Đào Phương Lân, Dương Việt Hùng, Nguyễn Đức Mạnh, Phạm Công Đính, Phạm Thanh Long.* **Hải Dương** : *Nguyễn Hồng Phong, Hoàng Xuân Quý, Lê Văn Hải, Đinh Phú Minh, Vũ Văn Tâm, Ngô Đức Tuấn.* **Đà Nẵng** : *Hồ Văn Ngọc, Nguyễn Quốc Việt, Lê Thị Duy Phong, vũ Như Phong, Nguyễn Tấn Phong, Huyền Trần Quốc, Nguyễn Ngọc Hải, Ngô Phong, Hoàng Kim Tuyến, Nguyễn Anh Tuấn, Trịnh Huy Long.* **Nghệ An :** *Vũ Xuân Quỳnh, Đậu Thúy Mai, Hoàng Danh Tuấn, Trần Nam Dũng, Đặng Đức Hạnh, Lê Hồng Hà, Nguyễn Thịnh, Nguyễn Văn Tăng, Hồ Sỹ Ngọc, Ngô Anh Tuấn, Phạm Công Phiệt, Hoàng Minh Phúc, Nguyễn Trung Hòa.* **Thái Bình :** *Phạm Văn Minh ; Nguyễn Nam Hà, Hà Đức Trịnh, Phạm Thành Luật, Nguyễn Thị Thoa, Phan Khánh Toán, Nguyễn Ngọc Phú, Nguyễn Ngọc Minh, Vương Anh Tuấn.* **Thanh Hóa :** *Hán Văn Thắng, Lê Quang Tuấn, Nguyễn Văn Minh, Phạm Văn Du, Nguyễn Mạnh Hùng, Nguyễn Đức Khiêm, Trịnh Quang Hòa, lê Thanh Tuyết, Hoàng Trung Tuyến, Nguyễn Văn Quang, Lê Duy Diễn, Phạm Hùng Vương, Trần Văn Tùng, Lê Ngọc Thái, Mai Văn Hùng, Ngô Quang Tuấn, Lê Đức Thịnh, Lê Văn Phương, Lê Tiến Vinh, Lê Cát Vượng.* **Bến Tre :** *Huỳnh Trác Siêu.* **Đắc Lắc :** *Lê Trọng Vinh, Lê Thế Tân.* **Phú Thọ :** *Mai Minh Tuấn, Trần Anh Tuấn, Nguyễn Kim Sở, Nguyễn Minh Phương, Triệu Văn Sơn.* **Quảng Ngãi :** *Phó Quốc Hồ, Huỳnh Trung Nghĩa, Võ Quế Sơn, Phùng Minh Tuấn, Nguyễn Xuân Hà, Phạm Bảo Chiến, Trần Quang Nguyên, Lê Hoàng Đức Khánh.* **Đồng Tháp :** *Nguyễn Đăng Triển, Hồ Lộc Thuận, Võ Thị Hồng Thảo, Lê Công Danh.* **Nam Định** : *PHạm Tuấn Minh, Vũ Việt Tài, Nguyễn Trọng Kiên, Lê Mai, Hoàng Tiến.* **Quảng Ninh :** *Nguyễn Mạnh Hùng.* **Hòa Bình :** *Trần Minh Đức.* **Đồng Nai :** *Lê Khắc Huỳnh.* **Bình Định** : *Lê Hồng Dung.* **Đắc Lắc** : *Mai Thị tuyết Anh.* **Hưng Yên** : *Đào Hoàng Tùng.* **Long An :** *Thi Hồng Hạnh.* **Vĩnh Long** : *Cao Minh Quang.* **Phú Yên :** *Lê Xuân Quyền.* **Tuyên Quang :** *Cao Minh Đức.* **Hải Phòng :** *Đồng Thạch Tùng, Đoàn Mạnh Hà.* **Thừa Thiên - Huế :** *Đặng Nguyễn Nhật Nam, Phạm Tiến Đạt, Đinh Trung Hoàng*

NGUYỄN VĂN MẬU

**Bài T8/236 :** *Cho $a > 0$ và $f$ là hàm số liên tục trên $[a, +\infty)$. Giả sử rằng :*

$$\int_a^t f^2(x)\,dx \le \int_a^t x^2\,dx \text{ với mọi } t \ge a . \qquad (1)$$

*Chứng tỏ rằng :* $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b x\,dx$ *với mọi* $b \ge a$.

**Lời giải :** Với t bất kì $> a$ ta có :

$$\int_a^t (mx - f(x))^2\,dx = m^2 \int_a^t x^2\,dx - 2m \int_a^t x\,f(x)\,dx + \int_a^t f^2(x)\,dx \ge 0 \ \forall m \in R$$

Do $\int_a^t x^2 dx > 0 \ \forall t > a$ nên, khi coi vế trái của bất đẳng thức trên là tam thức bậc hai đối với $m$, ta được :

$$\left(\int_a^t x\,f(x)\,dx\right)^2 \le \int_a^t x^2 fx \,.\int_a^t f^2(x)dx \ \forall t > a.$$

Kết hợp với (1) suy ra :

$$\left(\int_a^t xf(x)\,dx\right)^2 \le \left(\int_a^t x^2\,dx\right)^2 \ \forall t > a.$$

Dẫn tới :

$$\int_a^t xf(x)\,dx \le \int_a^t x^2\,dx \ \forall t > a.$$

hay : $\int_a^t x[x - f(x)]\,dx \ge 0 \ \forall\, t > a$. Với mỗi $t > a$, đặt $F(t)=\int_a^t x[x- f(x)]dx$. Ta có $F(t) \ge 0$ $\forall\, t > a$ và $F'(t) = t[t - f(t)]$ Do đó, với $b > a$ ta có : $\int_a^b (x - f(x))\,dx =$

$$= \int_a^b \frac{1}{x}\,[x(x - f(x))]\,dx = \frac{1}{x}F(x)\,\Big|_a^b + \int_a^b \frac{1}{x^2}F(x)\,dx = \frac{F(b)}{b} + \int_a^b \frac{F(x)}{x^2}\,dx \ge 0 .$$

Với $b = a$ thì $\int_a^b (x - f(x))\,dx = 0$ . Vậy :

$$\int_a^b (x - f(x))\,dx \ge 0 \ \forall\, b \ge a,$$

hay

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b x\,dx \ \forall\, b \ge a.$$

**Nhận xét :** 1- Có rất ít bạn gửi lời giải cho bài toán và hầu hết các bạn cho lời giải sai vì đã mắc phải những sai lầm. Chẳng hạn một số bạn đã cho rằng :

"*từ* $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$ *suy ra* $f(x) \le g(x)\ \forall x \in [a,b]$" ( ? !), hay có bạn lại cho rằng : " $\int_a^b 1dx = 1$ $\forall\, b \ge a$" ( ? !) và "*nếu* $f(x) \ge 0\ \forall x \in [a,b]$ *thì* $\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)^{1/2} = \int_a^b \sqrt{f(x)}\,dx$ " ( ? !), v. v...

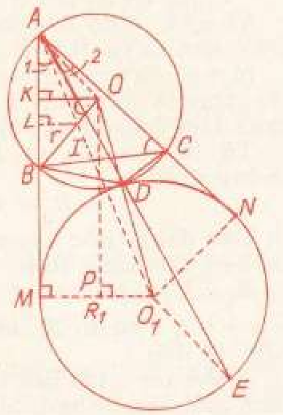
2. Có duy nhất bạn *Nguyễn Đức Mạnh* (11A PTTH Cổ Loa - Đông Anh - Hà Nội) giải đúng bài toán, tuy nhiên cách giải của bạn hơi dài.

NGUYỄN KHẮC MINH

**Bài T9/236.** *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi $(O_1, R_1)$, $(O_2, R_2)$, $(O_3, R_3)$ lần lượt là tâm và bán kính các đường tròn tiếp xúc ngoài với (O), đồng thời tiếp xúc với các cặp tia AB, AC ; BC, BA ; Ca, CB và r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác. Chứng minh rằng :*

$$R_1 + R_2 + R_3 \ge 12r .$$

*Lời giải 1.* (Dựa theo *Nguyễn Thịnh* và *Trần Nam Dũng*, 11CT, PTTH Phan Bội Châu, **Nghệ An**).




Giả sử đường tròn $(O_1, R_1)$ tiếp xúc ngoài với đường tròn $(O,R)$ ở $D$ và tiếp xúc với hai tia $AB$, $AC$ ở $M$ và $N$. Kéo dài $AD$, cắt $(O_1)$ ở $E$, thế thì ta có : $OO_1 = OD + DO_1 = R + R_1$ , $OA // O_1E$ và :

$AM^2 = AN^2 = AD \,.\, AE$ . Do đó ta được :

$$\frac{AD^2}{AM^2} = \frac{AD}{AE} = \frac{OD}{OO_1} \text{ , hay là :}$$

$$\frac{AD^2}{AM^2} = \frac{R}{R + R_1}$$

Chứng minh tương tự, ta được :

$$\frac{BD^2}{BM^2} = \frac{CD^2}{CN^2} = \frac{R}{R + R_1} \left( = \frac{AD^2}{AM^2}\right)$$

Từ đó suy ra :

$$\frac{AD}{AM} = \frac{BD}{BM} = \frac{CD}{CN} ; \qquad (1)$$

Mặt khác, tứ giác lồi ABDC nội tiếp $(O,R)$ nên ta có (định lý Ptolémé) :

$$AB \,.\, CD + CA \,.\, BD = BC \,.\, AD \qquad (2)$$

Từ (2) và (1) ta thu được hệ thức :

$$AB \,.\, CN + CA \,.\, BM = BC \,.\, AM \qquad (3)$$

Ký hiệu độ dài các cạnh của tam giác $ABC$ là : $BC = a$ , $CA = b$ , $AB = c$ , rồi thay $BM = AM - c$ và $CN = AN - b = AM - b$ vào (3), ta được :

$$AM = AN = \frac{2bc}{b + c - a} \qquad (4)$$

Gọi $L$, là tiếp điểm của $AB$ với đường tròn $(I, r)$ nội tiếp tam giác $ABC$, ta được

$$\frac{O_1M}{IL} = \frac{AM}{AL} \text{ , hay là : } \frac{R_1}{r} = \frac{AM}{AL}$$

Thay $AL = p - a = \frac{1}{2}(b + c - a)$ và $AM$ bởi (4), ta được :

$$\frac{R_1}{r} = \frac{4bc}{(b + c - a)^2}$$

Chứng minh tương tự, ta được :

$$\frac{R_2}{r} = \frac{4ca}{(c + a - b)^2} \text{ và } \frac{R_3}{r} = \frac{4ab}{(a + b - c)^2} \quad (5)$$

Từ các hệ thức (5) này, và theo B.Đ.T.Côsi, ta được :

$$\frac{R_1 + R_2 + R_3}{4r} = \frac{bc}{(b + c - a)^2} + \frac{ca}{(c + a - b)^2} + \frac{ab}{(a + b - c)^2}$$

$$\geq \sqrt[3]{\frac{a^2b^2c^2}{(b + c - a)^2(c + a - b)^2(a + b - c)^2}} \quad (6)$$

Vì $a$, $b$, $c$ độ dài các cạnh của một tam giác, nên ta có B.Đ.T

$(b + c - a)(c + a - b)(c + a - b) \leq abc$ (7) (Đây là một B.Đ.T quen thuộc, bạn nào chưa biết hãy tự chứng minh)

Từ (6) và (7) ta thu được B.Đ.T cần chứng minh :

$$R_1 + R_2 + R_3 \geq 12r$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi đồng thời có các đẳng thức.

$R_1 = R_2 = R_3$ và $b + c - a = = c + a - b = = a + b - c$ và do đó, khi và chỉ khi tam giác $ABC$ là đều.

*Nhận xét* : 1°) Bài toán này có rất nhiều cách giải khác nhau, nhưng tựu trung lại, là cần biểu thị $R_i$ theo $a$, $b$, $c$ và $r$ hoặc theo $r$ và các góc $A$, $B$, $C$ của tam giác. Sau đây là hai lời giải khác của bài toán.

2°) *Lời giải 2* (của *Đoàn Mạnh Hà*, 11CT, PTTH Trần Phú, **Hải Phòng**)

Hạ $OK \perp AM$ và $OP \perp O_1M$ , rồi đặt $AM = t$, ta được : $OP = KM = t - \frac{c}{2}$ ,

$O_1P = O_1M - OK = R_1 - R\cos C$

và $tg\frac{A}{2} = \frac{O_1M}{AM} = \frac{IL}{AL}$ , hay là :

$tg\frac{A}{2} = \frac{R_1}{t} = \frac{r}{p - a}$ (trong đó $2p = a + b + c$ ) ;(i)

Lại từ tam giác $OO_1P$ vuông ở $P$, ta được :

$$(R + R_{R_1})^2 = \left(t - \frac{c}{2}\right)^2 + (R_1 - R\cos C)^2 ,$$

hay là :

$$2RR_1(1 + \cos C) = t(t - c)\ 1 \quad \text{(ii)}$$

Từ (ii) và (i), ta được :

$2R\frac{r}{p - a}(1 + \cos C) = (t - c)$, hay là :

$$\frac{2Rr}{p - a} \cdot \frac{2p \cdot 2(p - c)}{2ab} = t - c \ ; \quad \text{(iii)}$$

Mặt khác, lại có $S = pr = \frac{abc}{4R}$ , nên từ (iii) suy ra : $t = c + \left(\frac{p - c}{p - a}\right)c = \frac{bc}{p - a}$ (iv)

Do đó, từ (i) và (iv) ta được :

$\frac{R_1}{r} = \frac{t}{p - a} = \frac{bc}{(p - a)^2}$ , hay là :

$\frac{R_1}{4r} = \frac{bc}{(b + c - a)^2}$ và hai hệ thức nữa tương tự.(v)

Ta được kết quả như lời giải 1.

3°) *Lời giải 3.* Đại đa số các bạn cho lời giải lượng giác của bài toán, nhưng cách giải này thường dài và tính toán cồng kềnh hơn hai lời giải hình học như đã trình bày ở trên. Bỏ qua các phép toán trung gian, sau đây chỉ nêu kết quả cuối cùng, biểu thị được $R_i$ theo $p$ và các góc của tam giác :

$R_1 = p\, tg\frac{A}{2}\left(1 + tg\frac{A}{2}\right)$ và hai hệ thức tương tự.

Phần cuối, có sử dụng B.Đ.T.Côsi và các B.Đ.T sau đây :

$tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2} + tg\frac{C}{2} \geq \sqrt{3}$ , $p \geq 3\sqrt{3}\,r$ thì được B.Đ.T cần tìm

4°) Cần lưu ý thêm rằng hầu hết lời giải đều bỏ qua việc chứng minh chặt chẽ khi nào và chỉ khi nào xảy ra đẳng thức, hoặc không kiểm tra đầy đủ tất cả các điều kiện để xảy ra đẳng thức, kể cả các bạn *Nguyễn Thịnh*, *Trần Nam Dũng* và *Đoàn Mạnh Hà* đã cho hai lời giải hình học như đã trình bày ở trên. Vì khuôn khổ có hạn, bài viết này không chứng minh đầy đủ phần cuối của lời giải 1 và 2 ; đề nghị các bạn hãy tự chứng minh : $R_1 = R_2 = R_3 \Leftrightarrow a = b = c$ .

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

**Bài T10/236.** *Giả sử O là một điểm nằm trong tứ diện ABCD sao cho : BOC = DOA , COA = DOB và AOB = DOC . Chứng minh rằng, với mọi điểm M trong không gian ta có :*

$MA + MB + MC + MD \geq OA + OB + OC + OD$ .

**Lời giải** : (Dựa theo *Trần Huỳnh Thế Khanh*, 12A$_1$ PTTH Phạm Thái Bường **Trà Vinh**, *Đặng Đức Hạnh*, 11 Toán, PTTH Phan Bội Châu, **Nghệ An** và một số bạn khác) – Trên các tia $OA$, $OB$, $OC$ và $OD$ ta lấy lần lượt các vectơ đơn vị : $OA'$, $OB'$, $OC'$ và $OD'$ . Khi đó với giả thiết đã cho ta được : $B'C' = D'A'$, $C'A' = D'B'$, $A'B' = D'C'$ và do đó, $A'B'C'D'$ là một tứ diện gần đều nhận $O$ làm tâm mặt cầu ngoại tiếp, đồng thời $O$ cũng là trọng tâm của tứ diện gần đều $A'B'C'D'$ này

$$\vec{OA'} + \vec{OB'} + \vec{OC'} + \vec{OD'} = \vec{O}$$

Suy ra :

$$\vec{p} = \frac{\vec{OA}}{OA} + \frac{\vec{OB}}{OB} + \frac{\vec{OC}}{OC} + \frac{\vec{OD}}{OD} = \vec{O}$$

– Với mọi điểm $M$ trong không gian, ta có :

$$MA = \frac{MA \cdot OA}{OA} \geq \frac{\vec{MA}\,\vec{OA}}{OA} = \frac{(\vec{MO} + \vec{OA}) \cdot \vec{OA}}{OA} = OA + \vec{MO}\left(\frac{\vec{OA}}{OA}\right)$$

Dấu đẳng thức đạt được khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA} \,//\, \overrightarrow{OA}$ , cũng tức là :

$$MA = OA + \overrightarrow{MO}\left(\frac{\overrightarrow{OA}}{OA}\right) \Leftrightarrow M \in \text{tia } [AO)$$

Chứng minh tương tự, ta được :

$$MA + MB + MC + MD \geqslant$$
$$\geqslant OA + OB + OC + OD + \overrightarrow{MO}\,.\,\overrightarrow{P} =$$
$$= OA + OB + OC + OD\,.$$

Dấu đẳng thức đạt được khi và chỉ khi, đồng thời $M \in$ cả bốn tia $[AO)$, $[BO)$, $[CO)$ và $[DO)$ , nghĩa là $M$ trùng $O$.

**Nhận xét :** 1°) Hầu hết các bạn không chỉ rõ khi nào và chỉ khi nào thì xảy ra $MA = \dfrac{\overrightarrow{MA}\,\overrightarrow{OA}}{OA} = OA + \overrightarrow{MO}\dfrac{\overrightarrow{OA}}{OA}$ (như trên đã chỉ ra).

Và do đó, không có chứng minh chặt chẽ khi kết luận $MA + MB + MC + MD$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $OA + OB + OC + OD$ khi và chỉ khi $M = 0$ .

2°) Các bạn sau đây có lời giải tốt hơn cả : *Đặng Đức Hạnh* (Nghệ An), *Nguyễn Trung Thành*, 11A, CT, ĐHSP Vinh, *Hoàng Trung Tuyến*, 12A PTTH Hà Trung, **Thanh Hóa**, *Nguyễn Kim Sở*, 11A, PTTH Thanh Ba **Phú Thọ**.

3°) Tuy nhiên, không có bạn nào chỉ rõ (một cách chính xác) $MA.OA = \overrightarrow{MA}\,\overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \,//\, \overrightarrow{OA} \Leftrightarrow M \in \text{tia}\,[AO)$ mà thường chỉ nói chung chung : $M$ thuộc $OA$ hay $M, O, A$ thẳng hàng, đành rằng kết quả cuối cùng vẫn đúng (do $M$ thuộc $OA$, $OB$, $OC$ và $OD$ nên $M = O$).

4°) Điểm $O$ thỏa mãn điều kiện của bài toán (nhìn hai cạnh đối diện của tứ diện $ABCD$ dưới cùng một góc) cũng là điểm nhìn các mặt của tứ diện $ABCD$ dưới những góc tam diện bằng nhau và cùng hướng :

$$O(BCD) = O(ADC) = = O(DAB) = O(CBA)\,.$$

5°) Bài toán trên đây chỉ ra *điều kiện đủ* để một điểm $O$ nằm trong một tứ diện $ABCD$ là "*điểm cực tiểu*" (điểm mà tổng khoảng cách từ đó đến các đỉnh của tứ diện $ABCD$ là nhỏ nhất). Điểm này còn được gọi là "*điểm To−ri−xe−li*" hay "*điểm Phécma*" (của hệ 4 điểm không đồng phẳng).

6°) Có thể chứng minh rằng : Điểm Phécma (Fermat) P của một hệ bốn điểm $A, B, C, D$ không đồng phẳng là tồn tại và duy nhất. Điểm này không thuộc một cạnh nào, cũng như một mặt nào của tứ diện, nhưng có thể trùng với một trong các đỉnh của tứ diện $ABCD$. Nếu $P \neq A$ , $\neq B$ , $\neq C \neq D$ thì $P$ là một điểm nằm trong tứ diện $ABCD$ và đặc trưng bởi : tổng các véctơ đơn vị hướng từ $P$ đến các đỉnh của tứ diện bằng vectơ không $\Leftrightarrow P$ nhìn các mặt của tứ diện $ABCD$ dưới những góc tam diện bằng nhau và cùng hướng $\Leftrightarrow P$ nhìn các cặp cạnh đối diện của tứ diện $ABCD$ dưới những cặp góc (tương ứng) bằng nhau.

Đó cũng chính là những *tính chất đặc trưng (có ý nghĩa định tính) (điều kiện cần và đủ) của "điểm Phécma"* $P$ của một hệ 4 điểm không đồng phẳng.

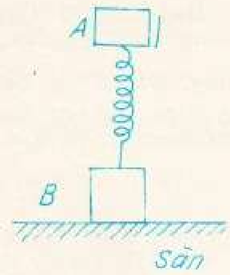
7°) Bạn *Nguyễn Văn Tăng*, 11ACT, ĐHSP Vinh đề xuất bài toán tổng quát hơn : Tìm "điểm Phécma" P của hệ bốn điểm $\{A,B,C,D\}$ không đồng phẳng sao cho :

$$\alpha PA + \beta OB + \gamma PC + \delta PD \leqslant$$
$$\leqslant \alpha MA + \beta MB + \gamma MC + \delta MD;\ (\forall M)$$ trong đó $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ và $\delta$ là 4 số dương cho trước.

Mong bạn Tăng và các bạn hãy quan tâm tìm lời giải cho bài toán khái quát này, cũng như hoàn chỉnh lời giải của bài toán trên (chứng minh điều kiện cần).

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

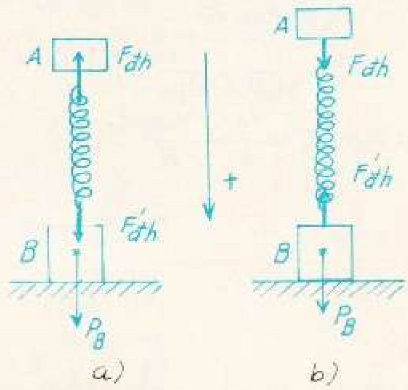
**Bài L1/236.** *Một vật A có khối lượng $m_1 = 1{,}00\,kg$ và một vật B có khối lượng $m_2 = 4{,}10\,kg$ được nối với nhau bằng lò xo có khối lượng không đáng kể. Vật A thực hiện dao động điều hòa theo phương thẳng đứng với biên độ $a = 1{,}6m$ và với tần số góc $\omega = 25rad/s$. Hãy tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của áp lực của hệ này lên mặt sàn (hình vẽ). Lấy $g = 9{,}8m/s^2$.*




**Hướng dẫn giải.** Chọn trục tọa độ hướng thẳng đứng xuống dưới ; chọn gốc tọa độ tại vị trí cân bằng của vật $A$.

Khi vật A dao động điều hòa ta có

$$F_{hl} = P_A + F_{dh} = -\,hx = -\,m_2\omega^2 A\sin(\omega t + \varphi)$$




trong đó $F_{dh}$ là lực của lò xo tác dụng lên vật $A$, lực này thay đổi cả về độ lớn lẫn chiều

$$F_{dh} = -\,m_1 g - m_1\,\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi) \qquad (1)$$

Áp lực N của hệ lên sàn được thực hiện bởi vật B, ta có $\qquad N = P_B + F'_{dh} \qquad (2)$

trong đó $F'_{dh}$ là lực của lò xo tác dụng lên vật B, cũng tức là tác dụng lên sàn theo (1) ta có

$$F'_{dh} = -\,F_{dh} = m_1 g + m_1\,\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi) \qquad (3)$$

Thay vào (2) ta được

$$N = (m_1 + m_2)g + m_1\,\omega^2 a\sin(\omega t + \varphi) \qquad (4)$$

Từ đó, ta thấy

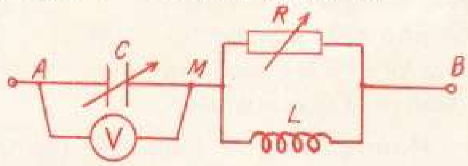
$$N_{max} = (m_1 + m_2)\,g + m_1\,\omega^2 a = 60N$$

và $$N_{min} = (m_1 + m_2)g - m_1\,\omega^2 a = 40N.$$

**Nhận xét.** Các em có lời giải gọn và đúng : *Lê Thanh Minh*, 12CL, Quốc học Huế **Thừa Thiên − Huế** ; *Hoàng Trường Sơn* 11A2 PTTH Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng** ; *Nguyễn Văn Đoan* 11A3, THCB Nguyễn Duy Hiệu, Điện Bàn, **Quảng Nam** ; *Nguyễn Việt Tiến* 11A1, PTTH Vĩnh Linh, **Quảng Trị** ; *Nguyễn Quang Tường* 12CL, chuyên Phan Bội Châu, Vinh, **Nghệ An** ; *Nguyễn Văn Thuấn* 12B, PTTH Năng khiếu, Ngô Sĩ Liên, **Bắc Giang** ; *Nguyễn Thị Kim Phượng* 11 Lí, PTTH Nguyễn Du, Buôn Mê Thuột **Đắc Lắc** ; *Hoàng Văn Ấp*, 12A PTTH Nguyễn Du, Nghi Xuân, **Hà Tĩnh** ; *Nguyễn Phương Nam*, 11A3, PTTH Huỳnh Thúc Kháng, Vinh, **Nghệ An** ; *Nguyễn Trung Thành*, 11A, KPTCT, Đại học Vinh ; *Cao Tấn Thiết*, 11A3, THCB số 1, Đức Phổ, **Quảng Ngãi** ; *Trịnh Ngọc Thành*, 11CL, chuyên Lê Khiết, **Quảng Ngãi** ; *Trần Huỳnh Thế Khanh*, 12a, PTTH Phạm Thái Bường, **Trà Vinh** ; *Lê Duy Diễn*, 11T, PTTH Lam Sơn, **Thanh Hóa** ; *Hoàng Nữ Hiền Ninh*, 11C PTNK **Quảng Bình** ; *Trần Ngọc Quang*, 11A, PTTH Long Châu Sa, **Phú Thọ** ; *Nguyễn Đình Sang*, 11H, chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ** ; *Đoàn Hữu Thu*, 11 Lí, chuyên Lương Văn Chánh, Tuy Hòa, **Phú Yên**.

MAI ANH

**Bài L2/236**. *Cho mạch điện như hình vẽ, trong đó điện dung C và điện trở R có thể thay đổi ; độ tự cảm $L = \frac{1}{\pi}H$ ; vôn kế nhiệt có điện trở rất lớn. Đặt vào AB hiệu điện thế xoay chiều $u = 220\sqrt{2}\sin 100\pi t$ (v)*



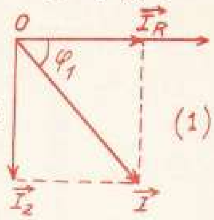

*1) Với $R = 100\sqrt{3}\Omega$, chọn C bằng bao nhiêu để vôn kế có số chỉ lớn nhất. Tìm số chỉ này.*

*2) Với giá trị nào của C thì số chỉ của vôn kế không đổi khi R biến đổi.*

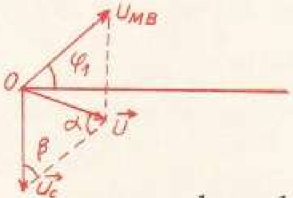
**Hướng dẫn giải.** 1) Vẽ hai giản đồ véc tơ cho đoạn mạch $MB$ và $AB$. Áp dụng định lí hàm số sin ở giản đồ

$$2 : \frac{U}{\sin\beta} = \frac{U_c}{\sin\alpha}$$

với $\sin\beta = \cos\varphi_1 = \frac{I_R}{I} = \frac{Z_{MB}}{R}$




(1)




(2)

Biết (vì $R \,//\, L$) $\frac{1}{Z_{MB}^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{Z_L^2}$,

$Z_L = \omega L = 100\Omega$. Từ đó suy ra $\sin\beta = \cos\varphi_1 = \frac{1}{2} \to \varphi_1 = \frac{\pi}{3}$

và, từ (1) $U_c = 2U\sin\alpha$

Suy ra $U_{c\max} = 2U = 440V$, ứng với $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (2), khi đó

$$U_c^2 = U^2 + U_{MB}^2 \quad \to \quad Z_c^2 = Z^2 + Z_{MB}^2 \quad (3),$$

trong đó

$Z^2 = Z_c^2 + Z_{MB}^2 - 2Z_cZ_{MB}\sin\varphi_1$ (4). Từ (2), (3) và (4) rút ra

$$Z_c = Z_{MB}\frac{2}{\sqrt{3}} = 100\Omega \quad \text{và} \quad C = \frac{10^{-4}}{\pi}F \simeq$$

$\simeq 31{,}8\,\mu F$

a) Áp dụng định lí cosin ở giản đồ (2)

$U^2 = U_c^2 + U_{MB}^2\left(1 - 2\frac{Z_c}{Z_L}\right)$ (5). Vì $U$ cố định, nên muốn cho $U_c$ không đổi khi R biến tải thì trong (5) không được chứa $U_{MB}$, muốn vậy $1 - 2\frac{Z_c}{Z_L} = 0$, rút ra $Z_c = \frac{Z_L}{2}$ hay

$$C = \frac{2}{\omega^2 L} = \frac{2 \,.\, 10^{-4}}{\pi}F \simeq 63{,}7\,\mu F.$$

**Nhận xét.** Các em có lời giải đúng và gọn : *Lê Hoài Ân*, 11L Trường Lương Văn Chánh, **Phú Yên** ; *Trần Hoàng Quân*, 11A$_2$, Trường Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng** ; *Phạm Văn Thành*, 11T, PTTH Lam Sơn, **Thanh Hóa** ; *Nguyễn Hiệp Đồng*, 11A, PTTH Quỳnh Thọ, Quỳnh Phụ, **Thái Bình** ; *Nguyễn Thị Kim Phương* 11L, Trường Nguyễn Du, Buôn Mê Thuật, **Đắc Lắc** ; *Nguyễn Trung Phương* 12A$_1$, PTTH Hoài Đức A, **Hà Tây** ; *Nguyễn Mậu Phú Liêm* 12T, chuyên Lê Khiết, **Quảng Ngãi** ; *Nguyễn Văn Thuấn*, 12B, PTTH Năng khiếu Ngô Sĩ Liên, **Bắc Giang** ; *Nguyễn Xuân Hà*, 12H, THCB số 1, Đức Phổ, **Quảng Ngãi** ; *Trần Thái Bình*, 11A PTTH Quảng Xương 2, **Thanh Hóa** ; *Nguyễn Quang Tường*, 12C2 chuyên Phan Bội Châu, Vinh, **Nghệ An** ; *Lê Duy Diễn* 11T, PTTH Lam Sơn, **Thanh Hóa** ; *Phạm Anh Tuấn*, 12A6, PTTH Huỳnh Thúc Kháng, Vinh, **Nghệ An** ; *Nguyễn Thị Thủy*, 12E, PTTH chuyên ban Sơn Tây, **Hà Tây** ; *Trần Mai Sơn Hà*, 11CL Năng khiếu, **Quảng Bình** ; *Phạm Ngọc Trường*, số 6 Ngõ 7 đường Thống Nhất, Thị xã **Hải Dương** ; *Hoàng Trường Sơn* 11A$_2$, trường Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng** ; *Lê Anh Long*, 12A$_1$ PTTH Dương Minh Châu, **Tây Ninh**.

MAI ANH

## GIẢI THƯỞNG CORA RATTO DÀNH CHO CÁC BẠN NỮ SINH GIỎI TOÁN

Bà Cora Ratto (1912 – 1981) là Phó giáo sư khoa Toán Trường ĐHTH Buenos Aires Achentina. Bà là người tích cực tham gia các hoạt động xã hội : sáng lập "Hội Chiến thắng" của phụ nữ Châu Mỹ La tinh chống chủ nghĩa phát xít, "Quỹ Albert Einstein" giúp đỡ tài chính cho các sinh viên có tài năng về Toán và khoa học tự nhiên, tạp chí "Columbia 10", qua tạp chí này làm cho công luận Achentina hiểu rõ hơn sự thật cuộc chiến tranh ở Việt Nam trước đây.

Nguyện vọng từ lâu của bà là : trao giải thưởng hàng năm cho các nữ sinh giỏi toán của Việt Nam. Đến nay nguyện vọng ấy của bà đã được thực hiện.

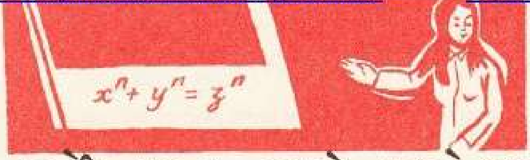
Chiều 17 – 5 – 1997, Bộ Giáo dục và Đào tạo đã tổ chức lễ trao giải thưởng CORA RATTO cho 4 học sinh nữ đạt giải cao trong kì thi học sinh giỏi toán Quốc gia năm nay. Mỗi giải gồm một giấy chứng nhận, một huy chương và tiền mặt từ 100 đến 150 USD.

Bốn bạn nữ được nhận giải thưởng vinh dự này là :

1. *Trịnh Thị Kim Chi*, học sinh lớp 11 trường Năng khiếu Hà Tĩnh, giải Nhì Quốc gia (33,5 điểm).
2. *Hà Minh Lam*, học sinh lớp 12, khối phổ thông chuyên toán trường ĐHSPHN thuộc Đại học Quốc gia Hà nội, giải Ba Quốc gia (26 điểm).
3. *Đào Thị Thu Hà*, học sinh lớp 11, khối phổ thông chuyên toán – tin trường ĐHKHTNHN thuộc Đại học Quốc gia Hà Nội, giải Ba Quốc gia (24,5 điểm).
4. *Võ Thị Như Quỳnh*, học sinh lớp 12, trường chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An, giải Ba Quốc gia (24,0 điểm).

Giải thưởng CORA RATTO sẽ trao thưởng hàng năm và chỉ dành cho các bạn nữ. Toán học và Tuổi trẻ xin chúc mừng bốn bạn đầu tiên được nhận phần thưởng và mong nhiều bạn nữ sinh có ước mơ, phấn đấu học giỏi toán để sẽ nhận được giải thưởng Cora Ratto.

THVTT




# ĐỀ RA KÌ NÀY

## CÁC LỚP THCS

**Bài T1/240 :** *Cho ba số a, b, c thuộc đoạn $[n-1 ; n+1]$ sao cho $a+b+c=3n$. Chứng minh rằng : $a^2+b^2+c^2 \leq 3n^2+2$. Khi nào thì xảy ra dấu bằng ?*

PHẠM VĂN HÙNG
*(Nam Định)*

**Bài T2/240 :** *Giải phương trình nghiệm nguyên : $x^2y^2 - x^2 - 8y^2 = 2xy$*

NGUYỄN ĐỨC TẤN
*(TP. Hồ Chí Minh)*

**Bài T3/240 :** *Chứng minh bất đẳng thức :*

$$(1+2^{2^1})(1+2^{2^2})(1+2^{2^3})...(1+2^{2^n}) < \frac{1}{3}.2^{2^{n+1}}$$

*Với mọi n là số nguyên dương.*

TRẦN VĂN HẠNH
*(Quảng Ngãi)*

**Bài T4/240 :** *Cho tam giác ABC vuông góc tại A, có $\widehat{B} = 20^o$. Kẻ phân giác trong BI và vẽ góc ACH = $30^o$ về phía trong tam giác (I thuộc AC, H thuộc AB). Tính CHI.*

ĐOÀN VĂN TRÚC
*(Quảng Ngãi)*

**Bài T5/240 :** *Cho tam giác ABC có BC là cạnh lớn nhất. Một đường tròn (O) tiếp xúc với AB, AC tại các điểm tương ứng M, N và tâm O nằm giữa B, C. Hạ đường cao AH. Chứng minh rằng : trong các tam giác có hai đỉnh là M, N và đỉnh thứ 3 thuộc BC thì tam giác HMN có chu vi bé nhất.*

VŨ NHẬT KIỀU
*(Thái Bình)*

## CÁC LỚP THPT

**Bài T6/240 :** *Cho số nguyên n. Chứng minh rằng :*

$$\frac{1}{C^1_{1997}} + \frac{1}{C^2_{1998}} + ... + \frac{1}{C^{n+1}_{1997+n}} < \frac{1}{1995}$$

ĐÀM VĂN NHỈ
*(Thái Bình)*

**Bài T7/240 :** *Dãy số thực $\{a_n\}$ thỏa mãn*

$$a_{n+1} = 3a_n^2 - 2 \ \forall n \geq 1.$$

*Tìm tất cả các số hữu tỉ $a_1$ mà tồn tại $m \neq n$ sao cho $a_m = a_n$*

NGUYỄN MINH ĐỨC
*(Hà Nội)*

**Bài T8/240 :** *Cho hàm số*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{với } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{với } x = 0 \end{cases}$$

*Chứng minh bất đẳng thức :*

$$\frac{17}{18} < \int_0^1 f(x)\,dx < \frac{1703}{1800}$$

NGUYỄN LÊ DŨNG
*(TP. Hồ Chí Minh)*

**Bài T9/240 :** *Gọi r, R lần lượt là bán kính các vòng tròn nội tiếp, ngoại tiếp tam giác ABC với BC = a, CA = b, AB = c.*

*Chứng minh rằng :*

$$a^2+b^2+c^2 \leq 8R^2+4r^2.$$

PHẠM HIẾN BẰNG
*(Thái Nguyên)*

**Bài T10/240 :** *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho elip có phương trình :*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > b > 0)$$

*Một dây cung MN của elip thay đổi sao cho $\widehat{MON} = 90^o$.*

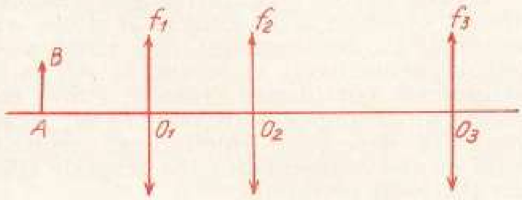
*1) Tìm các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của diện tích tam giác OMN.*

*2) Tìm quỹ tích hình chiếu vuông góc H của điểm O trên dây cung MN.*

LÊ QUỐC HÁN
*(Nghệ An)*

## CÁC ĐỀ VẬT LÍ

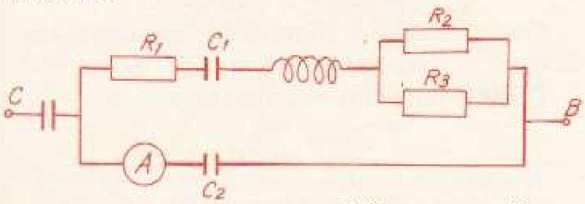
**Bài L1/240 :** *Vật AB đặt trước một hệ ba thấu kính mỏng $O_1$, $O_2$, $O_3$ đồng trục (xem hình vẽ). Số phóng đại K của ảnh của AB qua hệ không phụ thuộc vị trí AB ở trước kính $O_1$.*




*Cho biết tiêu cự của các kính $O_1$, $O_2$ và $O_3$ lần lượt là $f_1 = 30cm$ ; $f_2 = 20cm$ và $f_3 = 40\,cm$, khoảng cách $O_1O_3 = 60\,cm$. Hãy xác định khoảng cách $O_1O_2$ và giá trị của K.*

PHAN TUẤN KHANH
*(Hà Nội)*

**Bài L2/240 :** *Xét một mạch điện như hình vẽ.*




*Trong đó $C = C_1 = 2C_2 = \frac{100}{\pi}(\mu F)$, $L = \frac{2}{\pi}(H)$, $R_1 = R_2 = 2R_3$. Bỏ qua điện trở của ampe kế, dây nối và cuộn dây. Đặt vào hai đầu AB một hiệu điện thế $U = U_o \sin 100\pi t$ (V) thì ampe kế chỉ 0,5 (A) và độ lệch pha giữa U và dòng điện qua tụ C là $\frac{\pi}{3}$. Viết biểu thức của cường độ dòng điện qua tụ C và hiệu điện thế hai đầu AB theo thời gian.*

NGUYỄN ĐỨC PHI
*(Quảng Ngãi)*

**THÔNG BÁO**

Từ tháng 6 – 1997 trụ sở tòa soạn tạp chí TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ chuyển địa điểm. Từ nay thư từ và bài vở xin gửi về : Tòa soạn TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ 81 Trần Hưng Đạo – Hà Nội.

# Problems in this issue

## FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

**T1/240.** Let be given three numbers $a$, $b$, $c$ in the segment $[n-1, n+1]$ so that $a+b+c = 3n$. Prove that $a^2+b^2+c^2 \leqslant 3n^2+2$. When does equality occur ?

**T2/240** Find all integer solutions of the equation

$$x^2y^2 - x^2 - 8y^2 = 2xy.$$

**T3/240** Prove that for every postitive integer $n$,

$$(1+2^{2^1})(1+2^{2^2})(1+2^{2^3})\ldots(1+2^{2^n}) < \frac{1}{3}2^{2^{n+1}}.$$

**T4/240** Let be given a triangle $ABC$ with $\widehat{A} = 90^\circ$, $\widehat{B} = 20^\circ$. Consider the angled-bisector $BI$ ($I$ on the segment $AC$) of $ABC$ and the point $H$ on the segment $AB$ such that $\widehat{ACH} = 30^\circ$. Calculate $\widehat{CHI}$.

**T5/240** Let be given a triangle $ABC$, the side $BC$ of which is the longest. A circle, with center $O$ on the segment $BC$, touches $AB$ and $AC$ respectively at $M$ and $N$. $AH$ is the altitude of $ABC$ issued from $A$. Prove that among all triangles with vertices $M$, $N$ and the third vertex of which is an arbitrary point on the segment $BC$, the triangle $HMN$ has the least perimeter.

## FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

**T6/240** Let be given a positive integer $n$. Prove that :

$$\frac{1}{C^1_{1997}} + \frac{1}{C^2_{1998}} + \ldots + \frac{1}{C^{n+1}_{1997+n}} < \frac{1}{1995}.$$

**T7/240** The sequence of real numbers $\{a_n\}$ satisfies the relation

$$a_{n+1} = 3a_n^2 - 2, \ \forall n \geqslant 1.$$

Find all rational numbers $a_1$ so that there exist $m \neq n$ such that $a_m = a_n$.

**T8/240** Consider the function :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{if } 0 < x \leqslant 1 \\ 1 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

Prove the inequalities

$$\frac{17}{18} < \int_0^1 f(x)\,dx < \frac{1703}{1800}.$$

**T9/240** Let $r$ and $R$ be respectively the radii of the incircle and circumcircle of a triangle $ABC$ with $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.

Prove that : $a^2+b^2+c^2 \leqslant 8R^2 + 4r^2$.

**T10/240** Consider the ellipse with equation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > b > 0)$$

in the coordinate plane $Oxy$. A chord $MN$ of the ellipse varies so that $\widehat{MON} = 90^\circ$.

1) Find the greatest value and the least value of the areas of triangles $OMN$.

2) Find the locus of the orthogonal projections $H$ of $O$ on the chords $MN$.

## TỪ MỘT BÀI TOÁN...

(tiếp theo bìa 3)

*và $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \ldots \geqslant y_n$. Chứng minh rằng nếu $z_1, z_2, \ldots, z_n$ là một hoán vị bất kì của các số $y_1, y_2, \ldots, y_n$ thì*

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2$$

(Đề thi Toán Quốc tế lần thứ 17)

**Giải** : Theo bất đẳng thức (5) ta có $\sum_{i=1}^{n} x_iy_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} x_iz_i$

Mặt khác $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} z_i^2$

Suy ra $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_iy_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leqslant$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_iz_i + \sum_{i=1}^{n} z_i^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2$$

**Định nghĩa 2** : Cho hai dãy số : $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. 1) Hai dãy số trên được gọi là có cùng thứ tự nếu điều kiện sau được thỏa mãn :

$$x_i \geqslant x_j \Leftrightarrow y_i \geqslant y_j \ \forall i,j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

2) Hai dãy số trên được gọi là có thứ tự ngược nhau nếu điều kiện sau được thỏa mãn :

$$x_i \geqslant x_j \Leftrightarrow y_i \leqslant y_j \ \forall i,j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

Từ bổ đề 2 suy ra rằng :

1) Nếu $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ là hai dãy có cùng thứ tự thì $\sum_{k=1}^{n} x_ky_k \geqslant \sum_{k=1}^{n} x_ky_{i_k}$ (7)

trong đó $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ là một hoán vị bất kì của $(1, 2, \ldots, n)$ 2) Nếu $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ là hai dãy có thứ tự ngược nhau thì

$$\sum_{k=1}^{n} x_ky_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} x_ky_{i_k} \qquad (8)$$

trong đó $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ là một hoán vị bất kì của $(1, 2, \ldots, n)$

**Bài toán 4** : *Cho $(a_k)$ là một dãy số nguyên dương phân biệt ($k = 1, 2, 3, \ldots$). Chứng minh rằng với mọi $n \geqslant 1$ :*

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2} \geqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

(Đề thi Toán Quốc tế lần thứ 20)

**Giải** : Giả sử $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ là một hoán vị của $(1, 2, \ldots, n)$ sao cho $a_{i_1} < a_{i_2} < \ldots < a_{i_n}$

Vì $\frac{1}{1^2} > \frac{1}{2^2} > \ldots > \frac{1}{n^2}$

nên theo (8) ta có : $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2} \geqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{a_{i_k}}{k^2}$ ($(1, 2, \ldots, n)$ là một hoán vị của $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$)

Mặt khác, bằng phương pháp quy nạp toán học, dễ dàng chứng minh được $a_{i_k} \geqslant k \ \forall k = \overline{1, n}$.

Vậy $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{i_k}}{k^2} \geqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

Từ đó suy ra $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2} \geqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$a_k = k \ \forall k = \overline{1, n}$$

Sau đây là một lời giải khác của bài toán 1 : Các dãy số $(bc, ac, ab)$ và $(a^2+bc, b^2+ac, c^2+ab)$ có thứ tự ngược nhau (bạn đọc tự chứng minh).

Khi đó $bc(a^2+bc) + ac(b^2+ac) + ab(c^2+ab) \leqslant$
$\leqslant bc(b^2+ac) + ac(c^2+ab) + ab(a^2+bc)$

Từ đó suy ra bất đẳng thức (1').

Cuối cùng là một số bài tập dành cho bạn đọc

**Bài 1** : *Cho $a$, $b$, $c$ là độ dài các cạnh của một tam giác bất kì. Chứng minh rằng*

$$2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \geqslant \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} + 3$$

**Bài 2** : *Giả sử $a$, $b$, $c$ là các số dương. Chứng minh bất đẳng thức :*

$$\frac{a^3}{b^2-bc+c^2} + \frac{b^3}{c^2-ca+a^2} + \frac{c^3}{a^2-ab+b^2} \geqslant 3\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}$$

**Bài 3** : *Giả sử $a$, $b$, $c$, là ba số dương. Chứng minh rằng*

$$a^3b + b^3c + c^3a \geqslant a^2bc + b^2ca + c^2ab.$$

# ĐỀ THI TUYỂN SINH MÔN TOÁN KHỐI A NĂM 1996

## TRƯỜNG ĐẠI HỌC ĐẠI CƯƠNG - ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HỒ CHÍ MINH

**(Thời gian : 180 phút)**

### A. PHẦN BẮT BUỘC

**Câu I**

*1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số : $y = x^3 - 6x^2 + 9x$.*

*2. Tìm tất cả các đường thẳng đi qua điểm A(4,4) và cắt (C) tại ba điểm phân biệt.*

**Câu II**

*Cho phương trình*

$$\sqrt{x^2 - 2x + m^2} = |x - 1| - m \quad (1)$$

*1. Giải phương trình (1) với $m = 2$.*

*2. Giải và biện luận phương trình (1) theo m.*

**Câu III**

Cho hàm số $y_k = \dfrac{2k\cos x + k + 1}{\cos x + \sin x + 2}$

*1. Tìm các giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $y_1$ ứng với $k = 1$.*

*2. Xác định tham số k sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y_k$ là nhỏ nhất.*

**Câu IV**

*1. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}dx$.*

*2. Đặt $J(t) = \displaystyle\int_1^t \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$ với $t > 1$.*

*Tính J(t) theo t, từ đó suy ra rằng :*
$$J(t) < 2, \forall t > 1.$$

### B. PHẦN TỰ CHỌN

***(Thí sinh chọn một trong hai câu V.A hoặc V.B)***

**Câu V.A.**

*Cho Parabol (P) : $y = x^2 - 2x + 3$ và (D) là đường thẳng cùng phương với đường thẳng $y = 2x$ sao cho (D) cắt (P) tại điểm A và B.*

*1. Viết phương trình của (D) khi hai tiếp tuyến với (P) tại A và B vuông góc với nhau.*

*1. Viết phương trình của (D) khi độ dài của đoạn $AB = 10$.*

**Câu V.B.**

*Cho tứ diện ABCD có $AB = CD = 2x$ và 4 cạnh còn lại đều có độ dài bằng 1.*

*1. Tính diện tích toàn phần (tổng diện tích của 4 mặt) của tứ diện theo x.*

*2. Xác định x để diện tích toàn phần đạt giá trị lớn nhất.*

### ĐÁP ÁN

(Đáp án này tòa soạn đã sắp xếp và trình bày lại trên cơ sở lời giải của bạn Nguyễn Văn Minh, Khối 4 - Thị trấn Đức Phổ - Quảng Ngãi gửi tới Tòa soạn)

**Câu I :**

1. Tập xác định : R

$y' = 3x^2 - 12x + 9$ nên $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$

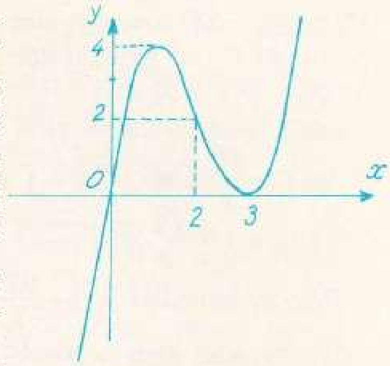
Ta có bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | 1 | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | − | 0 | + | |
| y | $-\infty$ | ↗ | 4 | ↘ | 0 | ↗ | $+\infty$ |

Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ và đạt cực tiểu tại $x = 3$.

Vì $y'' = 6x - 12$ nên đồ thị có điểm uốn (2 ; 2).

Đồ thị tiếp xúc với Ox tại (3 ; 0) và cắt Ox tại O.




2. Đường thẳng $x = 4$ đi qua A (4 ; 4) chỉ cắt đồ thị tại 1 điểm chính là A nên không thỏa mãn. Xét các đường thẳng còn lại đi qua A là các đường thẳng có phương trình $y = k(x - 4) + 4$.

Đường thẳng này cắt (C) tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $x^3 - 6x^2 + 9x = k(x - 4) + 4$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (x - 4)(x^2 - 2x + 1 - k) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow t(x) = x^2 - 2x + 1 - k$ có 2 nghiệm phân biệt khác 4 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ t(4) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > 0 \\ 9 - k \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < k \neq 9$.

Các đường thẳng thỏa mãn bài toán có phương trình :

$$y = k(x - 4) + 4 \text{ với } 0 < k \neq 9.$$

**Câu II :**

1. Với $m = 2$ thì (1) trở thành : $\sqrt{x^2 - 2x + 4} = |x - 1| - 2$ Ta thấy với mọi x thì : $\sqrt{x^2 - 2x + 4} = \sqrt{(x - 1)^2 + 3} > \sqrt{(x - 1)^2} = |x - 1| > |x - 1| - 2$ nên phương trình vô nghiệm

2. Đặt $t = |x - 1| \geq 0$ thì phương trình trở thành (2) $\sqrt{t^2 + m^2 - 1} = t - m \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq m \\ t^2 + m^2 - 1 = (t - m)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq m \\ 2mt = 1 \quad (3) \end{cases}$

* Nếu $m = 0$ thì (3) vô nghiệm $\Rightarrow$ (2) vô nghiệm $\Rightarrow$ (1) vô nghiệm

* Nếu $m \neq 0$ thì (3) $\Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2m}$

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2m} \geq m \\ \dfrac{1}{2m} \geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 0 < m \le \frac{\sqrt{2}}{2}$. Khi đó : $(|x-1|) = \frac{1}{2m}$

$\Leftrightarrow x = 1 \pm \frac{1}{2m} = \frac{2m \pm 1}{2m}$.

*Tóm lại* : Với $m \le 0$ hoặc $m > \frac{\sqrt{2}}{2}$ thì (1) vô nghiệm. Với $0 < m \le \frac{\sqrt{2}}{2}$ thì (1) có 2 nghiệm $x = \frac{2m \pm 1}{2m}$.

**Câu III :** Trước hết ta tìm tập giá trị của $y_k$ tức là tìm $y_k$ để phương trình

$$y_k = \frac{2k\cos x + k + 1}{\cos x + \sin x + 2} \qquad (*)$$

có nghiệm đối với ẩn $x$.

Nhận xét : $\cos x + \sin x + 2 = 2 + \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 0$ với mọi $x$ nên :

$(*) \Leftrightarrow (y_k - 2k)\cos x + y_k \sin x = k + 1 - 2y_k$

Do đó (*) có nghiệm đối với ẩn $x \Leftrightarrow$

$(y_k - 2k)^2 + y_k^2 \ge (k + 1 - 2y_k)^2$

$\Leftrightarrow 2y_k^2 - 4y_k - 3k^2 + 2k + 1 \le 0$

$\Leftrightarrow 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{3k^2 - 2k + 1} \le$

$\le y_k \le 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{3k^2 - 2k + 1}$

Vậy $y_k$ lớn nhất $= 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{3k^2 - 2k + 1}$

$y_k$ nhỏ nhất $= 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{3k^2 - 2k + 1}$

1. Với $k = 1$ thì $y_1$ lớn nhất $= 2$ và $y_1$ nhỏ nhất $= 0$

2. Gọi $y_k$ lớn nhất là $F(k)$ thì

$$F(k) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{3\left(k - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}} \ge 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \ \forall k$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow k = \frac{1}{3}$, vậy $F(k)$ nhỏ nhất $= 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$ khi và chỉ khi $k = \frac{1}{3}$.

**Câu IV :**

1. Đặt $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$ ; $dv = \frac{dx}{x^2} \Leftarrow v = -\frac{1}{x}$.

Do đó : $I = \int_1^2 u\,dv = u.v\Big|_1^2 - \int_1^2 v\,du =$

$= \frac{-\ln x}{x}\Big|_1^2 + \int_1^2 x^{-2}dx = \frac{-\ln 2}{2} - \frac{1}{x}\Big|_1^2 = \frac{1 - \ln 2}{2}$.

2. Đặt $u = \ln^2 x \Rightarrow du = \frac{2\ln x\,dx}{x}$ ; $dv = \frac{dx}{x^2}$ $\Leftarrow v = -\frac{1}{x}$. Ta có : với $t > 1$ thì

$J(t) = \int_1^t u\,dv = uv\Big|_1^t - \int_1^t v\,du =$

$= \frac{-\ln^2 x}{x}\Big|_1^t + 2\int_1^t \frac{\ln x\,dx}{x^2} = \frac{-\ln^2 t}{t} + 2 \,.\, I(t)$.

Xét $I(t) = \int_1^t \frac{\ln x\,dx}{x^2}$, làm tương tự 1, ta có $I(t) = \frac{t - 1 - \ln t}{t}$.

Suy ra : $J(t) = \frac{-\ln^2 t}{t} + 2\frac{t - 1 - \ln t}{t}$

$= 2 - \frac{\ln^2 t + 2\ln t + 2}{t} = 2 - \frac{(\ln t + 1)^2 + 1}{t} < 2$

với $t > 1$.

**Câu V.A :**

1. Phương trình của $(D)$ là $y = 2x + k$. $(D)$ cắt $(P)$ tại hai điểm phân biệt $A, B \Leftrightarrow$ phương trình $x^2 - 2x + 3 = 2x + k$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình

$$x^2 - 4x + 3 - k = 0 \qquad (*)$$

có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow k > -1$.

Ta có các hoành độ $x_A, x_B$ của $A, B$ là các nghiệm của (**). Theo định lí Viet thì $x_A + x_B = 4$ và $x_A \,.\, x_B = 3 - k$.

Xét $y = x^2 - 2x + 3$ có $y' = 2x - 2$, nên các tiếp tuyến của $(P)$ tại $A, B$ có hệ số góc lần lượt là $2x_A - 2, 2x_B - 2$.

Hai tiếp tuyến này vuông góc với nhau

$\Leftrightarrow (2x_A - 2)(2x_B - 2) = -1$

$\Leftrightarrow 4x_Ax_B - 4(x_A + x_B) + 4 = -1$

$\Leftrightarrow 4(3 - k) - 16 + 4 = -1 \Leftrightarrow -4k = -1$

$\Leftrightarrow k = \frac{1}{4} > -1$

Khi đó phương trình của $(D)$ là $y = 2x + \frac{1}{4}$.

2. $AB = 10 \Leftrightarrow \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = 10$

Vì $y_A = 2x_A + k$ ; $y_B = 2x_B + k$ nên điều kiện trên trở thành : $\sqrt{5(x_A - x_B)^2} = 10$

$\Leftrightarrow \sqrt{5[(x_A + x_B)^2 - 4x_Ax_B]} = 10$

$\Leftrightarrow \overline{5[16 - 4(3 - k)]} = 10$

$\Leftrightarrow \sqrt{(4k + 4)5} = 10$

$\Leftrightarrow (k + 1) \,.\, 20 = 100 \Leftrightarrow k + 1 = 5$

$\Leftrightarrow k = 4 > -1$

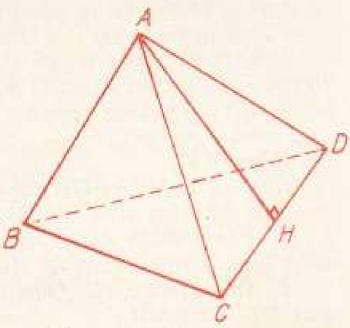
Khi đó, phương trình của $(D)$ là $y = 2x + 4$.

**Câu V.B**

1. Gọi $H$ là trung điểm của $DC$ thì $AH \perp CD$.

$\Rightarrow S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2}CD \,.\, AH = x\sqrt{1 - x^2}$

Nhưng các mặt của tứ diện là các tam giác bằng nhau nên : $S_{tp} = 4x\sqrt{1 - x^2}$.




2. Vì $x > 0$ nên : $S_{tp} = 4\sqrt{x^2(1 - x^2)}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có :

$$\sqrt{x^2(1 - x^2)} \le \frac{x^2 + 1 - x^2}{2} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow S_{tp} \le 2$ (đơn vị diện tích).

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x^2 = 1 - x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (vì $x > 0$). Giá trị này của x đảm bảo tồn tại tứ diện $(0 < x < 1)$.

Vậy $S_{tp}$ đạt giá trị lớn nhất là $2 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

NGUYỄN VĂN MINH

# ĐỀ THI TUYỂN SINH CHUYÊN TOÁN - TIN ĐHSP

## (ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI)

### NGÀY THỨ NHẤT

**Câu 1** : *Xét phương trình $x^3 + ax^2 + bx + 1 = 0$ trong đó a và b là hai số hữu tỉ*

1. *Chứng minh rằng $a = -5$, $b = 3$ là cặp số hữu tỉ duy nhất làm cho phương trình đã cho có ba nghiệm trong đó có một nghiệp là $x = 2+\sqrt{5}$. Kí hiệu $x_1, x_2, x_3$ là ba nghiệm đó.*

2. *Với mỗi số tự nhiên n đặt $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$. Tính $S_1$, $S_2$, $S_3$. Chứng minh rằng $S_n$ luôn luôn là số nguyên.*

3. *Tìm số dư trong phép chia $S_{1996}$ cho 4.*

**Câu 2** : *Cho ba số nguyên x, y, z thỏa mãn điều kiện x + y + z chia hết cho 6. Chứng minh rằng biểu thức $M = (x + y)(y + z)(z + x) - 2xyz$ cũng chia hết cho 6.*

**Câu 3** : *Tìm giá trị của tham số a để hệ sau có nghiệm duy nhất*

$$\begin{cases} x^2 + |a+1|x \leq x^5 - 7x^2 + x + 2 \\ x^4 + x^3 + (a^2 - 3)x^2 - 4x - 4 - 4a^2 = 0 \end{cases}$$

**Câu 4** : *Cho tam giác vuông cân ABC (vuông ở A). AD là trung tuyến thuộc cạnh huyền. M là một điểm thay đổi trên đoạn AD. Gọi N và P theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M xuống AB và AC. H là hình chiếu vuông góc của N xuống đường thẳng PD.*

1) *Xác định vị trí của M để tam giác AHB có diện tích lớn nhất*

2) *Chứng minh rằng khi M thay đổi, đường thẳng HN luôn đi qua một điểm cố định.*

**Câu 5** : 1/ *Trên một mảnh giấy có ghi 1996 câu khẳng định như sau :*

\+ *Câu thứ 1 : "Trên mảnh giấy này có đúng 1 câu khẳng định sai".*

\+ *Câu thứ 2 : "Trên mảnh giấy này có đúng 2 câu khẳng định sai".*

\+ *Câu thứ 3 : "Trên mảnh giấy này có đúng 3 câu khẳng định sai".*

......

\+ *Câu thứ 1996 : "Trên mảnh giấy này có đúng 1996 câu khẳng định sai".*

*Hỏi trong số 1996 câu khẳng định đó có câu nào đúng hay không. Hãy trình bày rõ lập luận và chỉ ra tất cả các câu đúng nếu có.*

2/ *Cũng câu hỏi trên nhưng trong các câu khẳng định đã cho chữ "đúng" được thay bằng "không quá". Ví dụ : Câu thứ 1 : "Trên mảnh giấy này có không quá 1 câu khẳng định sai".*

### NGÀY THỨ HAI

**Câu 6** : *Cho biểu thức*

$$P(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + (x^2 - 4)\sqrt{x^2 - 1} - 4}{x^3 - 3x^2 + (x^2 - 4)\sqrt{x^2 - 1} + 4}$$

*với $x \geq 1$.*

1) *Rút gọn P(x).*

2) *Giải phương trình P(x) = 1)*

**Câu 7** : 1/ *Phân tích đa thức ra thừa số $(a - b)^3 + (b - c)^2 + (c - a)^3$*

2/ *Với n là một số tự nhiên đã cho, xét xem khẳng định sau đúng hay sai : đa thức $(a - b)^n + (b - c)^n + (c - a)^n$ chia hết cho đa thức $n(a - b)(b - c)(c - a)$*

**Câu 8** : *Cho ba số nguyên dương x, y, z thỏa mãn điều kiện*

$$\begin{cases} 2^x - 1 = y^z \\ x > 1 \end{cases}$$

*Chứng minh rằng z = 1.*

**Câu 9** : *Gọi M và N lần lượt là trung điểm các cạnh BC và CD của tứ giác lồi ABCD. Chứng minh rằng $S_{ABCD} \leq \frac{1}{2}(AM + AN)^2$, (Kí hiệu $S_{ABCD}$ chỉ diện tích miền tứ giác ABCD).*

**Câu 10** : *Trên bờ một biển hồ hình tròn có 2n thành phố ($n \geq 2$). Giữa hai thành phố tùy ý có thể có hoặc không có đường thủy nối trực tiếp với nhau. Người ta nhận thấy rằng đối với hai thành phố A và B bất kì thì giữa chúng có đường thủy nối trực tiếp với nhau khi và chỉ khi giữa các thành phố A' và B' không có đường thủy nối trực tiếp với nhau, trong đó A' và B' theo thứ tự là hai thành phố gần với A và B nhất nếu đi từ A đến A' và B đến B' trên bờ hồ dọc theo cùng một chiều (cùng chiều kim đồng hồ hoặc ngược chiều kim đồng hồ). Chứng tỏ rằng từ mỗi thành phố đều có thể đi bằng đường thủy đến một thành phố tùy ý khác theo một lộ trình qua không quá hai thành phố trung gian.*

## ĐÁP ÁN

**Câu 1.** 1/ $x = 2 + \sqrt{5}$ là nghiệm của phương trình đã cho khi và chỉ khi.

$(2 + \sqrt{5})^3 + a(2 + \sqrt{5})^2 + b(2 + \sqrt{5}) + 1 = 0$
$\Leftrightarrow (4a + b + 17)\sqrt{5} + (9a + 2b + 39) = 0$
$\Leftrightarrow 4a + b + 17 = 9a + 2b + 39 = 0 \Leftrightarrow a = -5$ và $b = 3$. 2) Với $a = -5$, $b = 3$, phương trình trở thành $x^3 - 5x^2 + 3x + 1 = 0$, hay $(x^2 - 4x - 1)(x - 1) = 0$, có 3 nghiệm là

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{5} \text{ và } x_3 = 1.$$

Vậy $S_n = x_1^n + x_2^n + 1$. Ta dễ tính được

$$S_1 = 5,\ S_2 = 19,\ S_3 = 77$$

Đặt $S_n' = S_n - 1 = x_1^n + x_2^n$, ta dễ chứng minh được $S_{n+2}' - 4S_{n+1}' - S_n' = 0$ (1) với mọi $n \geq 1$. Từ đó, bằng phép quy nạp, suy ra $S_n' \in Z$, $\forall n \in \mathbf{N}$, do đó $S_n \in \mathbf{Z}$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

3/ Cũng từ (1) suy ra $S'_{n+2} \equiv S'_n \pmod 4$ $\Rightarrow S'_{1996} \equiv S'_{1994} \equiv \ldots \equiv S'_2 \pmod 4$

Mặt khác $S'_2 = 18 \equiv 2 \pmod 4$. Vậy $S_{1996} = 1 + S'_{1996} \equiv 3 \pmod 4$

**Câu 2**. Để chứng minh rằng $(x + y)(y + z)(z + x) + xyz = (x + y + z)(xy + yz + zx)$

Từ đó có $M = (x + y + z)(xy + yz + zx) - 3xyz$ (2)

Từ điều kiện $x + y + z \vdots 6$, ta suy ra trong 3 số $x, y, z$ có ít nhất một số chẵn. Vậy $3xyz \vdots 6$. Sử dụng kết quả này và giả thiết $x + y + z \vdots 6$ vào (2), ta có $M \vdots 6$.

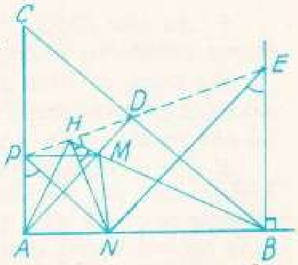
**Câu 3**. Phương trình thứ hai trong hệ có thể phân tích thành $(x^2 - 4)(x^2 + x + 1 + a^2) = 0$, có đúng 2 nghiệm là $x_1 = -2$, $x_2 = +2$.

Bằng phép thử trực tiếp vào bất phương trình thứ nhất, ta thấy $x_1 = -2$ luôn thỏa mãn $\forall a$. Vậy hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $x_2 = 2$ không thỏa mãn bất phương trình, nghĩa là:

$4 + 2|a + 1| > 6 + 2 \Leftrightarrow |a + 1| > 2 \Leftrightarrow a < -3$ hoặc $a > 1$.

**Câu 4**. 1) Dựng $BE \perp AB$, cắt $PD$ tại $E$. Dễ thấy $BE = PC = BN$ $\Rightarrow \widehat{NEB} = \widehat{NHB} = 45^\circ$.

Mặt khác $\widehat{AHN} = \widehat{APN} = 45^\circ$. Vậy $\widehat{AHB} = 90^\circ$ và $HN$ là đường phân giác của $\widehat{AHB}$. Suy ra




$$S^2_{AHB} = \frac{1}{4}AH^2 \cdot BH^2 \leq \frac{1}{4}\left(\frac{AH^2 + BH^2}{2}\right)^2 = \frac{AB^4}{16} \Rightarrow S_{AHB} \leq \frac{AB^2}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $AH = BH$, tức là khi $H \equiv D \equiv M$. Vậy khi $M \equiv D$ thì $S_{AHB}$ lớn nhất.

2) Vì $HN$ là phân giác $\widehat{AHB}$ nên $HM$ luôn đi qua điểm giữa của nửa đường tròn đường kính $AB$. Hiển nhiên điểm này cố định.

**Câu 5**. 1) Nếu 1 câu là đúng thì các câu khác đều sai. Vậy có không quá 1 câu đúng. Mặt khác, nếu tất cả đều sai thì câu thứ 1996 đúng, vô lí. Vậy phải có câu đúng và chỉ 1 câu đúng. Điều đó cũng có nghĩa là câu thứ 1995 là câu duy nhất đúng.

2) Nếu có $k$ câu là sai $(0 < k < 1996)$ thì các câu $k, k + 1, \ldots, 1996$ đều đúng. Suy ra chỉ có các câu $1, 2, \ldots, k - 1$ là sai trái giả thiết có $k$ câu sai. Vậy không có câu nào sai, nghĩa là cả 1996 câu đều đúng.

**Câu 6**. 1) Phân tích tử và mẫu thành nhân tử được:

$$P(x) = \frac{(x+2)\sqrt{x-1}\,[\sqrt{x-1}(x+2) + (x-2)\sqrt{x+1}]}{(x-2)\sqrt{x+1}\,[\sqrt{x+1}(x-2) + (x+2)\sqrt{x-1}]}$$

Suy ra điều kiện xác định của $P(x)$ là

$$x \geq 1,\ x \neq 2 \text{ và } x \neq \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Với các điều kiện ấy:

$$P(x) = \frac{(x+2)\sqrt{x-1}}{(x-2)\sqrt{x+1}}$$

2) Giải $P(x) = 1$ ta được $x = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Cả hai đều không thỏa mãn điều kiện. Vậy phương trình vô nghiệm.

**Câu 7**. 1) $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3 = 3(a - b)(b - c)(c - a)$

2) Sử dụng nhị thức Newton, có thể chứng minh khẳng định đúng và mọi $n$ là số nguyên tố lẻ. Chẳng hạn với $n = 5$. Ta có:

$(x + y)^5 = x^5 + 5(x^4y + xy^4) + 10(x^3y^2 + x^2y^3) + y^5 = (x^5 + y^5) + 5xy(x + y)(x^2 + y^2 + xy)$

$\Rightarrow x^5 + y^5 - (x + y)^5 = -5xy(x + y)(x^2 + y^2 + xy)$

Thế $x = a - b$, $y = b - c$ ta được:

$(a - b)^5 + (b - c)^5 + (c - a)^5 = 5(a - b)(b - c)(c - a)(x^2 + y^2 + xy) \vdots 5(a - b)(b - c)(c - a)$.

Dễ thấy khẳng định sai khi $n$ chẵn.

**Câu 8**. Do $x > 1$ nên $2^x \vdots 4$. Từ đẳng thức đầu suy ra $y^z + 1 = 2^x \vdots 4$. Vậy $y$ lẻ. Xét 2 trường hợp:

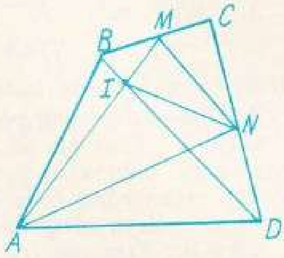
a) $z$ chẵn. Đặt $z = 2t$ $(t \geq 1)$. Khi đó $y^z = (y^2)^t \equiv 1 \pmod 4$. Suy ra $y^z + 1 \not\vdots\ 4$, vô lí.

b) $z$ lẻ: Đặt $z = 2t + 1$ $(t \geq 0)$. Khi đó $y^z + 1 = (y + 1)\underbrace{(y^{z-1} - y^{z-2} + \ldots - y + 1)}_{M}$

$M$ là tổng đại số của $2t + 1$ số lẻ $\Rightarrow M$ lẻ $\Rightarrow M$ là ước lẻ của $2^x \Rightarrow M = 1$.

Vậy $y^z + 1 = y + 1 \Rightarrow z = 1$ (đpcm).

**Câu 9**. Giả sử $MA$ cắt $BD$ tại $I$. Từ giả thiết $M$, $N$ là trung điểm của $BC$ và $CD$, ta có:




$S_{ABCD} = 2S_{AMCN} = 2(S_{AMN} + S_{CMN}) = 2(S_{AMN} + S_{IMN}) \leq 2(S_{AMN} + S_{AMN}) = 4S_{AMN}$

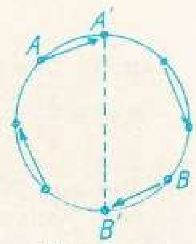
$$\leq 4 \cdot \frac{1}{2}AM \cdot AN \leq 2\left(\frac{AM + AN}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}(AM + AN)^2 \Rightarrow \text{đpcm}.$$

**Câu 10**. Với 3 thành phố liên tiếp $X$, $Y$, $Z$, kể theo 1 chiều nào đó ta có $Y = X'$ và $Z = Y'$. Do đó theo giả thiết:

$(X, Y) = 1 \Rightarrow (X', Y') = (Y, Z) = 0$

$(X, Y) = 0 \Rightarrow (X', Y') = (Y, Z) = 1$

trong đó kí hiệu $(X, Y) = 1$ (hay 0) chỉ rằng giữa 2 thành phố $X$ và $Y$ có (không có) đường thủy nối trực tiếp. Từ đó suy ra rằng có thể biểu diễn $2n$ thành phố đã cho bởi sơ đồ sau (hình 1): trong đó mũi tên chỉ rõ cặp thành phố kề nhau có đường thủy nối trực tiếp. (hình vẽ với $n = 4$).




*Hình 1*

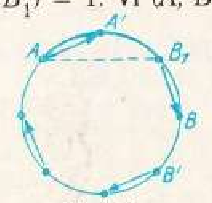
Xét 2 thành phố $A$, $B$ tùy ý. Nếu $(A, B) = 1$ thì ta có đpcm. Nếu $(A, B) = 0$, ta có 3 trường hợp:

1) $(A, A') = (B, B') = 1$ (hình 1). Lúc này vì $(A, B) = 0$ nên $(A', B') = 1$. Ta có đường đi: $A \to A' \to B' \to B$.

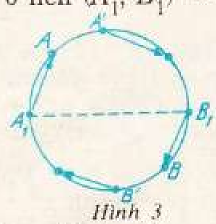
2) $(A, A') = 1$, $(B, B') = 0$ (hình 2). Nếu $B = B_1$ thì 3 thành phố $B_1$, $B$, $B'$ liên tiếp, mà $(B, B') = 0$ nên $(B_1, B) = 1$. Nên $(A, B_1) = 1$ thì đường đi là $A \to B_1 \to B$.

Nên $(A, B_1) = 0$ thì $(A', B) = 1$ và đường đi là $A \to A' \to B$

3) $(A, A') = (B, B') = 0$ (hình 3). Giả sử $A = A_1$ và $B = B_1$. Tương tự trên ta phải có $(A, A_1) = (B, B_1) = 1$. Vì $(A, B) = 0$ nên $(A_1, B_1) = 1$.




*Hình 2*




*Hình 3*

Ta có đường đi là $A \to A_1 \to B_1 \to B$.

Tóm lại trong mọi trường hợp đều có đường đi từ $A$ đến $B$ và qua không quá 2 thành phố khác.

DOÃN MINH CƯỜNG

# TỪ MỘT BÀI TOÁN THI VÔ ĐỊCH QUỐC TẾ

TRẦN XUÂN ĐÁNG
*(Nam Định)*

Trong kì thi Olympic toán Quốc tế lần thứ 24 (năm 1983) được tổ chức tại Pháp có bài toán sau do Mỹ đề nghị :

**Bài toán 1** : *Giả sử a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác bất kì. Chứng minh rằng :*
$a^2b(a - b) + b^2c(b - c) + c^2a(c - a) \geqslant 0$ (1)
*Đẳng thức xẩy ra khi nào ?*

Để giải bài toán 1, trước hết ta xét

**Bổ đề 1** : *Giả sử $x_1 \geqslant x_2$ và $y_1 \geqslant y_2$. Khi đó*
$$x_1y_1 + x_2y_2 \geqslant x_1y_2 + x_2y_1 \quad (2)$$
*Đẳng thức ở (2) xẩy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2$ hoặc $y_1 = y_2$.* Bổ đề này được chứng minh một cách dễ dàng.

**Định nghĩa 1** : Các cặp số $(x_1, x_2)$ và $(y_1, y_2)$ được gọi là có cùng thứ tự nếu điều kiện sau được thỏa mãn $x_1 \geqslant x_2$ khi và chỉ khi $y_1 \geqslant y_2$. Từ bổ đề 1 suy ra :

**Bổ đề 2** : *Cho các cặp số $(x_1, x_2)$ và $(y_1, y_2)$ có cùng thứ tự. Khi đó $x_1y_1 + x_2y_2 \geqslant x_1y_2 + x_2y_1$ (3) Đẳng thức ở (3) xẩy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2$ hoặc $y_1 = y_2$.*

Sử dụng bổ đề 1 ta có thể giải được bài toán sau :

**Bài toán 2** : *Giả sử a, b, c, là ba số dương. Chứng minh rằng*
$a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c) \leqslant 3abc$ *(4)* (Thi vô địch Áo)

**Giải** : Vai trò của *a, b, c* như nhau nên không mất tính tổng quát có thể giả sử $a \geqslant b \geqslant c$.

(4) $\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geqslant a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2$ (4')

Ta có
$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc = a(a^2 + bc) + b(b^2 + ca) + c(c^2 + ab)$ Sử dụng bổ đề 1 (để ý rằng $a^2 + bc \geqslant b^2 + ca$) ta có
$a(a^2 + bc) + b(b^2 + ca) \geqslant a(b^2 + ca) + b(a^2 + bc)$ và $c^2 + ab = ab + cc \geqslant ac + bc$

Từ đó suy ra bất đẳng thức (4').

Dấu "=" ở (4) xẩy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bây giờ ta chuyển sang giải bài toán 1.

Bất đẳng thức (1) $\Leftrightarrow a^3b + b^3c + c^3a \geqslant a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$ (1')

Vì bất đẳng thức (1') không thay đổi qua phép hoán vị vòng quanh *(a, b, c)* nên không mất tính tổng quát có thể giả sử $a = \max\{a, b, c\}$.

Xét biểu thức $E = bc(bc + a^2) + ca(ca + b^2) + ab(ab + c^2)$ Vì các cặp số $(ac, ab)$ và $(ab + c^2, ac + b^2)$ có cùng thứ tự (bạn đọc hãy thử lại !) nên theo bổ đề (2) ta có
$E \leqslant bc(bc + a^2) + ab(ca + b^2) + ac(ab + c^2)$

Lại vì các cặp số $(bc, ab)$ và $(ac + b^2, bc + a^2)$ có cùng thứ tự nên $E \leqslant ab(bc + a^2) + bc(ca + b^2) + ac(ab + c^2)$

Từ đó suy ra bất đẳng thức (1').

Vậy bất đẳng thức (1) đã được chứng minh.

Đẳng thức ở (1) xẩy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ (tam giác đã cho là đều).

**Bổ đề 3** : *Cho $n \in N$ $(n \geqslant 2)$. Xét các dãy hữu hạn gồm n số hạng $(x_1, x_2,..., x_n)$ và $(y_1, y_2,..., y_n)$ thỏa mãn $x_1 \geqslant x_2 \geqslant ... \geqslant x_{n-1}\ x_\nu$ và $y_1 \geqslant y_2 \geqslant ... \geqslant y_{n-1} \geqslant y_n$. Khi đó*
$$\sum_{k=1}^{n} x_ky_k \geqslant \sum_{k=1}^{n} x_ky_{i_k} \geqslant \sum_{k=1}^{n} x_ky_{n-k+1}$$
*trong đó $(i_1, i_2,..., i_n)$ là một hoán vị của $(1, 2,..., n)$* Trước hết ta chứng minh
$$\sum_{k=1}^{n} x_ky_k \geqslant \sum_{k=1}^{n} x_ky_{i_k} \quad (5)$$

Thật vậy với mỗi $k = 1, 2,..., n$ đặt $y_{i_k} = z_k$ (5) $\Leftrightarrow x_1(y_1 - z_1) + x_2(y_2 - z_2) + ... + x_n(y_n - z_n) \geqslant 0$ (5')

Vì $x_1 \geqslant x_2$ và $y_1 \geqslant z_1$ nên $x_1(y_1 - z_1) \geqslant x_2(y_1 - z_1) \Rightarrow x_1(y_1 - z_1) + x_2(y_2 - z_2) \geqslant x_2[(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)]$

Vậy $x_1(y_1 - z_1) + x_2(y_2 - z_2) + ... + x_n(y_n - z_n) \geqslant$
$\geqslant x_2[(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)] + x_3(y_3 - z_3) + ... + x_n(y_n - z_n) \geqslant$
$\geqslant x_3[(y_1 + y_2 + y_3) - (z_1 + z_2 + z_3) + x_4(y_4 - z_4) + ... + x_n(y_n - z_n) \geqslant$
$\geqslant ... \geqslant$
$\geqslant x_{n-1}[(y_1 + y_2 + ...+ y_{n-1}) - (z_1 + z_2 + ... + z_{n-1})] + x_n(y_n - z_n) \geqslant$
$\geqslant x_n[(y_1 + y_2 + ...+ y_n) - (z_1 + z_2 + ... + z_n)] = 0$ (vì $x_i \geqslant x_j$ $(i < j)$ và $y_1 + y_2 + ... + y_k \geqslant z_1 + z_2 + ... + z_k$ $\forall k = \overline{1, n - 1}$)

Vậy bất đẳng thức (5') đúng. Nếu $x_i \neq x_j$ $\forall i,j \in \{1, 2,..., n\}$ thì đẳng thứ ở (5) xẩy ra khi và chỉ khi
$$y_{i_k} = y_k \ \forall k = \overline{1, n}$$

Tiếp theo ta chứng minh $\sum_{k=1}^{n} x_ky_{i_k} \geqslant \sum_{k=1}^{n} x_ky_{n+1-k}$ (6) Thật vậy, đặt $y'_k = -y_{n+1-k}$ $\forall k = \overline{1, n}$ thì $y'_1 \geqslant y'_2 \geqslant ... \geqslant y'_n$

Theo (5) ta có
$$\sum_{k=1}^{n} x_ky_{n+1-k} = -\sum_{k=1}^{n} x_ky'_k \leqslant -\sum_{k=1}^{n} x_ky'_{n+1-i_k} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} x_ky_{i_k} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} x_ky_{i_k} \geqslant \sum_{k=1}^{n} x_ky_{n+1-k}$$

Nếu $x_i \neq x_j$ $\forall i,j \in \{1, 2,..., n\}$ $(i \neq j)$ thì đẳng thức ở (6) xẩy ra khi và chỉ khi $y_{i_k} = y_{n+1-k}$ $\forall k = \overline{1, n}$

**Bài toán 3** : *Giả sử $x_i, y_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$ là các số thực sao cho $x_1 \geqslant x_2 \geqslant ... \geqslant x_n$*

*(Xem tiếp trang 12)*

## *Giải đáp bài*
## ANH ĐẦY TỚ VÀ ÔNG CHỦ

Sau 3 lần lấy, mỗi lần 4 chai, anh đầy tớ đã sắp xếp lại các chai rượu trong thùng như sau

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 7 | 1 |
| 7 | | 7 |
| 1 | 7 | 1 |

Ban đầu 32 chai

⇒

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 5 | 2 |
| 5 | | 5 |
| 2 | 5 | 2 |

Lấy lần đầu còn 28 chai

⇒

| | | |
|---|---|---|
| 3 | 3 | 3 |
| 3 | | 3 |
| 3 | 3 | 3 |

Lấy lần hai còn 24 chai

⇒

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 1 | 4 |
| 1 | | 1 |
| 4 | 1 | 4 |

Lấy lần ba còn 20 chai

| | | |
|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $c$ |
| $d$ | | $e$ |
| $f$ | $g$ | $h$ |

Ta thấy anh đầy tớ không thể lấy lần bốn một chai nào nữa mà ông chủ kiểm tra vẫn thấy đảm bảo yêu cầu. Thật vậy. Giả sử anh đầy tớ sắp xếp các chai rượu như bảng trên :

Thế thì ta phải có : $a + b + c = f + g + h = 9$, $d = e = 1$. Như vậy tổng số chai có trong thùng ít nhất phải bằng $9 + 9 + 2 = 20$.

Vì vậy ta dự đoán câu nói của ông chủ có thể như sau : *"Ta khen ngươi rất thông minh và xứng đáng được thưởng 12 chai rượu quý, nhưng ngươi không thể lấy thêm của ta được chai nào nữa !"*

**Nhận xét** 1. Có 55 bạn đã đưa ra cách sắp xếp các chai rượu như trên.

2. Bạn *Lý Quốc Vinh*, 6, trường Chuyên Hồng Bàng đã đưa ra 7 cách sắp xếp cho 28 chai rượu, 15 cách cho 24 chai và 4 cách cho 20 chai. Bạn *Phan Thanh Minh*, 8T, NK Vinh, Nghệ An đưa ra 8 cách sắp xếp cho 28 chai rượu, 17 cách cho 24 chai và 4 cách cho 20 chai. Bạn *Lê Hồng Việt*, 7T2, NK Vinh, Nghệ An đưa ra 11 cách sắp xếp cho 28 chai rượu, 8 cách cho 24 chai và 4 cách cho 20 chai.

3. Tất cả các giải đáp gửi đến đều đúng.

BÌNH PHƯƠNG

## NHẬN ĐƯỢC BAO NHIÊU QUÀ ?

Trường Lan có 12 lớp. Trong một buổi liên hoan, mỗi lớp cử hai đại biểu. Lớp Lan đã cử Lan và Mai đi dự. Sau buổi liên hoan, một số đại biểu đã trao đổi quà kỉ niệm cho nhau (nếu A tặng quà cho B thì B cũng tặng quà cho A), nhưng không có hai bạn nào cùng lớp tặng quà cho nhau. Lan tò mò hỏi tất cả các đại biểu về số quà mà họ nhận được. Tất cả các câu trả lời đều khác nhau. Bạn có thể biết bạn Mai lớp Lan nhận được bao nhiêu quà không ? À quên ! Bạn hãy gọi lớp Lan là lớp chuyên toán nhé !

NGUYỄN HUY ĐOAN



**ISSN : 0866 – 8035**
**Chỉ số : 12884**
**Mã số : 8BT34M7**

Sắp chữ tại TTVT Nhà xuất bản Giáo dục
In tại nhà máy in Diên Hồng, 57 Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 6/1997

**Giá : 2.000đ**
**Hai nghìn đồng**