PGS. TS NGUYỄN VĂN LỘC (Chủ biên)
TRẦN QUANG TÀI - MAI XUÂN ĐÔNG - LÊ NGỌC HẢI - TRỊNH MINH LÂM

GIẢI BÀI TẬP HÌNH HỌC

(Nâng cao)

10

Tóm tắt lý thuyết
Bài tập căn bản
Bài tập tương tự và nâng cao

NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

PGS.TS NGUYỄN VĂN LỘC (Chủ biên)
Trần Quang Tài – Mai Xuân Đông – Lê Ngọc Hải – Trịnh Minh Lâm

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP
HÌNH HỌC 10

- TÓM TẮT LÝ THUYẾT
- BÀI TẬP CĂN BẢN
- BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

Chương trình nâng cao

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI - 2008

LỜI NÓI ĐẦU

Cuốn sách "HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP HÌNH HỌC 10" gồm các chương tương ứng các chương của chương trình "Hình học 10", viết theo chương trình nâng cao xuất bản năm 2006.

Mỗi mục (§) của chương bao gồm 4 phần:

I. Tóm tắt lý thuyết

II. Bài tập căn bản

III. Bài tập tương tự và nâng cao

IV. Đáp số và hướng dẫn giải

Phần I: Trình bày những vấn đề lý thuyết trọng tâm nhất của các chương trình mà các em cần phải hiểu và nắm vững.

Phần II: Trình bày lời giải chi tiết của tất cả các bài tập SGK, mỗi bài tập đều nêu đầy đủ các bước lập luận với căn cứ là các định nghĩa, định lý, các tính chất đã học.

Phần III: Giới thiệu các bài tập cùng dạng với các bài tập SGK và các bài tập nâng cao có đánh dấu (*) dành cho học sinh khá, giỏi.

Phần IV: Trình bày đáp số và hướng dẫn giải các bài tập ở phần III.

Việc sử dụng sách nên thực hiện theo trình tự như sau: Sau khi học lý thuyết, các em hãy tự mình giải các bài tập SGK, nếu gặp khó khăn có thể tham khảo lời giải bài tập trình bày ở phần II, hơn nữa khi giải được bài tập của SGK, các em cũng nên so sánh lời giải của mình với lời giải được trình bày trong sách này để hiểu sâu sắc, đầy đủ kiến thức và phương pháp giải bài toán. Tiếp theo các em nên dành thời gian giải các bài tập ở phần III để rèn luyện kỹ năng giải các dạng toán, nếu gặp khó khăn có thể tham khảo đáp số và hướng dẫn giải ở phần IV.

Hy vọng với cách biên soạn này, cuốn sách sẽ là tài liệu hỗ trợ tích cực giúp các em học tốt hình học 10.

Rất mong các em dùng sách với ý thức tự chủ cao và không dùng sách theo cách chỉ "đọc" các lời giải có sẵn của các bài tập trong SGK.

CÁC TÁC GIẢ.

CHƯƠNG I: VEC TƠ

§1. CÁC ĐỊNH NGHĨA

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Vectơ là một đoạn thẳng có hướng, nghĩa là trong hai điểm mút của đoạn thẳng đã chỉ rõ điểm nào là điểm đầu, điểm nào là điểm cuối.

2. Vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau gọi là vectơ không.

3. Hai vectơ gọi là cùng phương nếu chúng nằm trên hai đường thẳng song song, hoặc cùng nằm trên một đường thẳng.

Nếu hai vectơ cùng phương thì hoặc chúng cùng hướng hoặc chúng ngược hướng.

4. Hai vectơ gọi là bằng nhau, nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài. Nếu hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng nhau thì ta viết $\vec{a} = \vec{b}$.

5. Chú ý : + Vectơ không cùng phương và cùng hướng với mọi vectơ.

+ Mỗi vectơ đều có một độ dài, đó là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó. Độ dài của vectơ ký hiệu $|\vec{a}|$

+ Các vectơ - không được ký hiệu là $\vec{O}$

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 1. Vectơ khác với đoạn thẳng như thế nào ?

Giải

Đoạn thẳng có hai đầu mút, nhưng thứ tự của hai đầu mút đó như thế nào cũng được. Đoạn thẳng AB và đoạn thẳng BA là một.

Vectơ là một đoạn thẳng, nhưng có phân biệt thứ tự của hai điểm mút. Vậy vectơ $\overrightarrow{AB}$ và vectơ $\overrightarrow{BA}$ là khác nhau.

Bài 2. Các khẳng định sau đây có đúng không ?

a) Hai vectơ cùng phương với một vectơ thứ ba thì cùng phương.

b) Hai vectơ cùng phương với một vectơ thứ ba khác $\vec{O}$ thì cùng phương.

c) Hai vectơ cùng hướng với một vectơ thứ ba thì cùng hướng.

d) Hai vectơ cùng hướng với một vectơ thứ ba khác $\vec{O}$ thì cùng hướng.

e) Hai vectơ ngược hướng với một vectơ khác $\vec{O}$ thì cùng hướng.

f) Điều kiện cần và đủ để hai vectơ bằng nhau là chúng có độ dài bằng nhau.

Giải

a) Sai vì vectơ thứ ba có thể là vectơ $\vec{0}$ không.

b) Đúng.

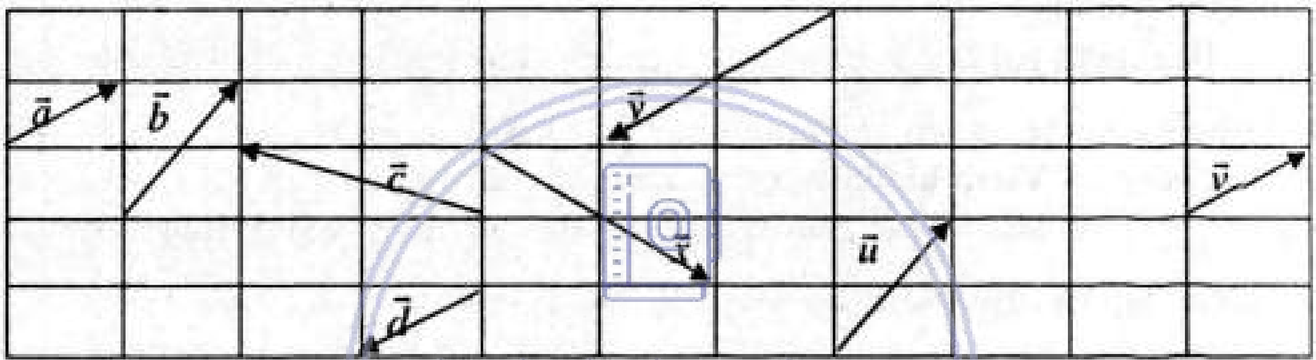
c) Sai vì vectơ thứ ba có thể là vectơ $\vec{0}$ không.

d) Đúng.

e) Đúng.

f) Sai.

Bài 3. Trong hình dưới đây, hãy chỉ ra các vec tơ cùng phương, các vectơ cùng hướng và các vectơ bằng nhau.



Giải

- Các vectơ $\vec{a}$, $\vec{d}$, $\vec{v}$, $\vec{y}$ là các vectơ cùng phương, các vec tơ $\vec{b}$, $\vec{u}$ cùng phương.
- Các cặp vectơ cùng hướng : $\vec{a}$ và $\vec{v}$; $\vec{d}$ và $\vec{y}$; $\vec{b}$ và $\vec{u}$
- Các cặp vectơ bằng nhau : $\vec{a}$ và $\vec{v}$; $\vec{b}$ và $\vec{u}$

Bài 4. Gọi C là trung điểm của đoạn AB. Các khẳng định sau đây là đúng hay sai ?

a) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng ;

b) $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng ;

c) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ ngược hướng ;

d) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$;

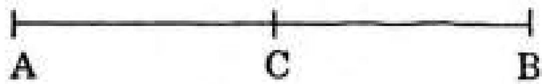
e) $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$;

f) $|\overrightarrow{AB}| = 2|\overrightarrow{BC}|$

Giải

a) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng là sai.

b) $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng là đúng.



c) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ ngược hướng là đúng

d) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$ là sai.

e) $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$ là đúng.

f) $|\overrightarrow{AB}| = 2|\overrightarrow{BC}|$ là đúng.

Bài 5. Cho lục giác đều ABCDEF. Hãy vẽ các vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$ và có :

a) Các điểm đầu là B,F,C ;

b) Các điểm cuối là F,D,C.

Giải

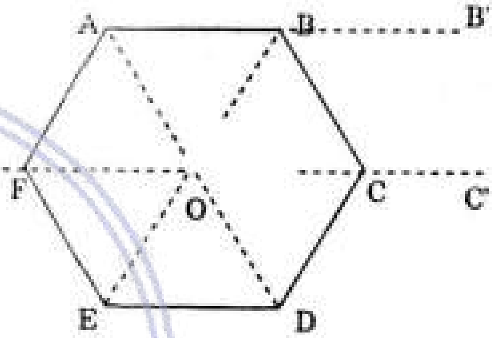
Gọi O là tâm của lục giác đều,

B' là điểm đối xứng với A qua B.

C' là điểm đối xứng với O qua C.

F' là điểm đối xứng với O qua F.

Khi đó



a) Các vectơ bằng $\overrightarrow{AB}$ và các điểm đầu là B,F,C là : $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{FO}$, $\overrightarrow{CC'}$.

b) Các vectơ bằng $\overrightarrow{AB}$ và có các điểm cuối là F, D, C là : $\overrightarrow{F'F}$, $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{OC}$.

III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO.

Bài 6. Cho hai vectơ không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Có hay không một vectơ cùng phương với hai vectơ đó ?

Bài 7. Cho 3 điểm phân biệt thẳng hàng A,B,C. Trong trường hợp nào hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng ? Trong trường hợp nào hai vectơ đó ngược hướng ?

Bài 8. Cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ cùng phương. Chứng tỏ rằng có ít nhất 2 vectơ trong chúng có cùng phương.

Bài 9. Cho $\triangle ABC$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB,BC, CA. Hãy vẽ hình và tìm trên hình vẽ các vectơ bằng , $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{PM}$.

IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI.

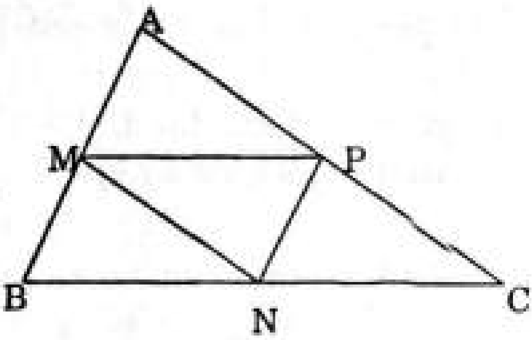
Bài 6. Có duy nhất một vectơ cùng phương với hai vectơ không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Đó là vectơ không.

Bài 7. + Hai vectơ $\vec{AB}$ và $\vec{AC}$ cùng hướng khi A không nằm giữa B và C.

+ Hai vectơ $\vec{AB}$ và $\vec{AC}$ ngược hướng khi A nằm giữa B và C.

Bài 8. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $\vec{a}$ ngược hướng với $\vec{b}$ và $\vec{a}$ ngược hướng với $\vec{c}$. Khi đó thì $\vec{b}$ cùng hướng với $\vec{c}$. Vậy có ít nhất là một cặp vectơ cùng hướng.

Bài 9.



- Vectơ bằng vectơ $\vec{MN}$ là : $\vec{AP}, \vec{PC}$.
- Vectơ bằng vectơ $\vec{NP}$ là : $\vec{BM}, \vec{MA}$.
- Vectơ bằng vectơ $\vec{PM}$ là : $\vec{CN}, \vec{NB}$.

§2. TỔNG CỦA CÁC VECTƠ

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Từ một điểm A nào đó ta vẽ $\vec{AB} = \vec{a}$ từ điểm B vẽ $\vec{BC} = \vec{b}$. Khi đó vectơ $\vec{AC}$ được gọi là tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Ký hiệu $\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$

2. Quy tắc ba điểm :Với A, B, C bất kỳ ta luôn có $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

3. Quy tắc đường chéo hình bình hành : Trong hình bình hành ABCD ta có $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$

4. Tính chất của phép cộng :

a) $\vec{0} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ với mọi vectơ $\vec{a}$.

b) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (Tính chất giao hoán)

c) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (Tính chất kết hợp)

5. Chú ý : + Nếu M là trung điểm đoạn AB thì $\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{0}$

+ Nếu G là trọng tâm tam giác ABC thì $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$

II.BÀI TẬP CƠ BẢN.

Bài 1. Chứng minh rằng nếu $\vec{AB} = \vec{CD}$ thì $\vec{AC} = \vec{BD}$

Giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}$ (quy tắc 3 điểm)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}$ (cộng $\overrightarrow{BC}$ vào 2 vế)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{CC} = \overrightarrow{BB} + \overrightarrow{BD}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ (tính chất của vectơ không)

Bài 2. Tứ giác ABCD là hình gì nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ và $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$?

Giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow AB \,//\, DC$ và $AB = DC \Rightarrow$ tứ giác ABCD là hình bình hành. Mặt khác $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| \Rightarrow$ tứ giác ABCD là hình thoi.

Bài 3. Cho 4 điểm bất kỳ M,N,P,Q. Chứng minh các đẳng thức sau :

a) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MQ}$; b) $\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{MQ}$;

c) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{PN}$.

Giải

a) Ta có $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ}$ (theo tính chất giao hoán)

$= \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PQ}$ (theo quy tắc 3 điểm)

$= \overrightarrow{MQ}$ (đpcm) (theo quy tắc 3 điểm)

b) Ta có $\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP}$ (theo quy tắc giao hoán)

$= \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QP}$ (theo quy tắc 3 điểm)

$= \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{MQ}$ (đpcm) (tính chất giao hoán)

c) Ta có $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QN} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NQ}$

$= \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QN} + \overrightarrow{NQ} + \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QQ} + \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{PN}$ (đpcm)

Bài 4. Các hệ thức sau đúng hay sai (với mọi $\vec{a}$ và $\vec{b}$)?

a) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$; b) $|\vec{a} + \vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$

Giải

Lấy $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. Từ B dựng $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$: Khi đó $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$

Xét 3 điểm A, B, C ta có :

$AC \le AB + BC \Leftrightarrow |\overrightarrow{AC}| \le |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}|$ hay $|\vec{a} + \vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$

Dấu "=" xảy ra khi A, B, C thẳng hàng hay $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng hướng

Do vậy : a) Sai. b) Đúng.

Bài 5. Cho hình bình hành ABCD với tâm O. Hãy điền vào chỗ trống (......) để đẳng thức đúng

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} =$.................. ; b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} =$.................. ;

c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA} =$.................. ; d) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} =$.................. ;

e) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} =$.................. .

Giải

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ (quy tắc hình bình hành)

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$ (quy tắc 3 điểm)

c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ (quy tắc giao hoán, quy tắc 3 điểm)

d) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ (vì O là trung điểm AC)

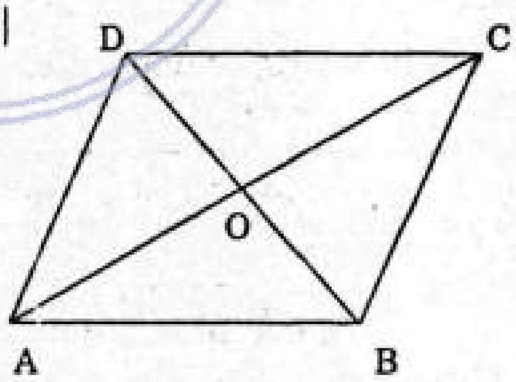
e) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

Bài 6. Cho hình bình hành ABCD với tâm O. Các khẳng định sau đây đúng hay sai ?

a) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BD}|$; b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC}$;

c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$; d) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.

Giải



a) Sai vì : $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}| \neq |\overrightarrow{BD}|$

b) Đúng vì : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

c) Sai

d) Đúng vì :

$$\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$$

$$= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC}$$

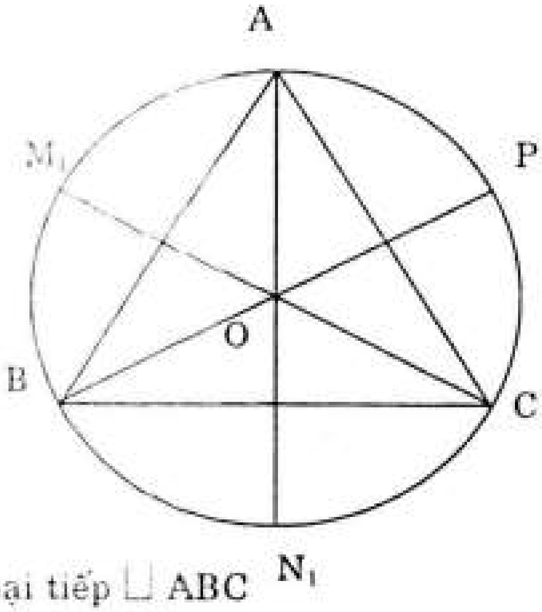
$$= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$$

Bài 7. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O.

a) Hãy xác định các điểm M, N, P sao cho

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}$

b) Chứng minh rằng $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$



Giải

a) Gọi M_1 là giao của OC với đường tròn tâm O

Do $\triangle$ ABC đều, mà O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

$\Rightarrow \widehat{AOM_1} = 60^0 \Rightarrow \triangle AOM_1$ là tam giác đều $\Rightarrow M_1A = OA = OB$ (1)

Tương tự $M_1B = OB$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ tứ giác $AOBM_1$ là hình thoi. Vậy để $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ thì $M = M_1$

Hay MC là đường kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle$ ABC

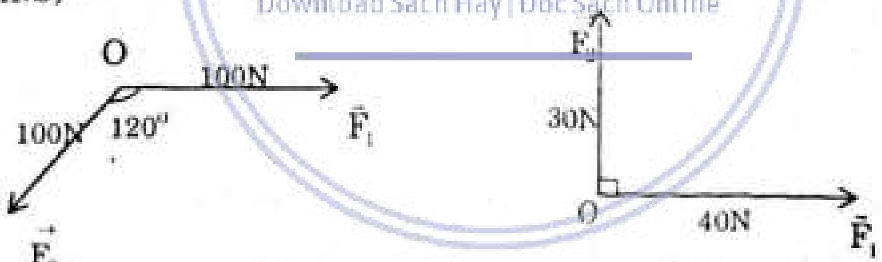
Hoàn toàn tương tự $\Rightarrow N_1P$ là giao của đường thẳng qua AO, BO với đường tròn hay NA, PB là đường kính.

b) Theo câu a : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{O}$ (đpcm)

Bài 8. Cho hai lực $\vec{F_1}$ và $\vec{F_2}$ có điểm đặt tại O. Tìm cường độ lực tổng hợp của chúng trong các trường hợp sau :

a) $\vec{F_1}$ và $\vec{F_2}$ đều có cường độ là 100N, góc hợp bởi $\vec{F_1}$ và $\vec{F_2}$ bằng 120^0 (h.a)

b) Cường độ của $\vec{F_1}$ là 40N, của $\vec{F_2}$ là 30N và góc giữa $\vec{F_1}$ và $\vec{F_2}$ bằng 90^0 (h.b)

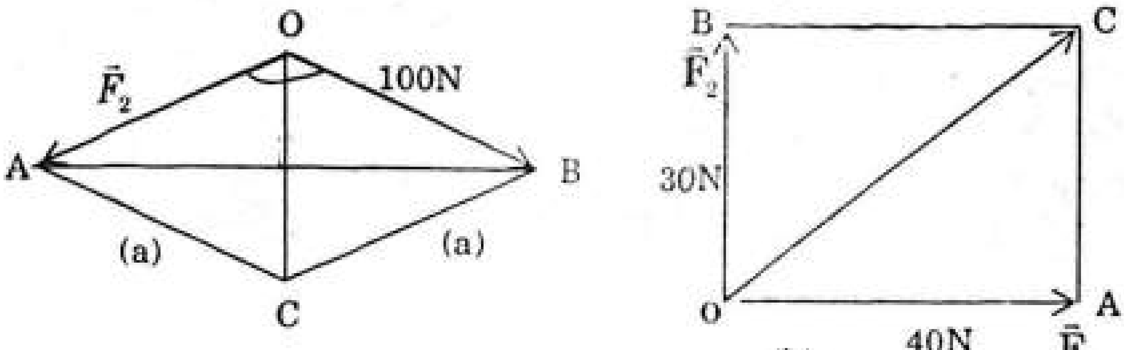


(a) (b)

Giải

a) Đặt $\overrightarrow{OA} = \vec{F_2}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{F_1}$, C là đỉnh thứ tư của hình bình hành OBCA ta có:

Do cường độ của $\vec{F_1}$ bằng cường độ $\vec{F_2}$ bằng 100 N.



(b)

$\Rightarrow OA = OB$

mà $\widehat{AOB} = 120^0$ do đó ΔOAC là tam giác đều. $\Rightarrow OC = OA$

mà $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$

Vậy cường độ lực tổng hợp của $\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$ là 100N

b) Đặt $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{F_2}$, C là đỉnh thứ tư của hình bình hành OACB.

Do góc giữa $\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$ bằng 90^0. Suy ra tứ giác OACB là hình chữ nhật.

$\Rightarrow OC = \sqrt{OA^2 + AC^2} = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50N$

Ta có $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$

Vậy cường độ lực tổng hợp của $\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$ là 50N.

III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO.

Bài 9. Cho bốn điểm A, B, C, D. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

Bài 10. Cho O là tâm hình bình hành ABCD. Chứng minh :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{0}$$

Bài 11*. Cho ngũ giác đều ABCDE tâm O. Chứng minh rằng :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{0}$$

Hãy phát biểu bài toán trong trường hợp n giác đều.

Bài 12*. Cho ΔABC. Gọi A' là điểm đối xứng của B qua A, B' là điểm đối xứng của C qua B, C' là điểm đối xứng của A qua C. Chứng minh rằng với điểm O bất kỳ ta có :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}$$

IV ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI.

Bài 9. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ (đpcm)

Bài 10. Do O là tâm hình bình hành, nên $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$;

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{0}$$

Bài 11. Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$

Ta có : $\vec{a}$ là một vectơ nằm trên OA.

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta có $\vec{a}$ cũng là một vecto nằm trên OB

$\Rightarrow \vec{a}$ phải là vectơ không hay $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \vec{O}$

Nếu A_1A_2..........A_n là n giác đều tâm O thì

$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + ... + \overrightarrow{OA_n} = \vec{O}$

Bài 12. Sử dụng $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BB} = \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CC} = \overrightarrow{CA}$

§3. HIỆU HAI VECTƠ

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Vectơ đối của vectơ $\vec{a}$ là vectơ ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ và có cùng độ dài với vectơ $\vec{a}$. Đặc biệt, vectơ đối của vectơ $\vec{0}$ là vectơ $\vec{0}$.
2. Hiệu của hai vectơ là tổng của vectơ thứ nhất với vectơ đối của vectơ thứ hai.

   Hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được ký hiệu $\vec{a} - \vec{b}$

   $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$
3. Quy tắc về hiệu hai vectơ : Nếu $\overrightarrow{MN}$ là một vectơ đã cho thì với điểm O bất kỳ ta luôn có : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$

II. BÀI TẬP CĂN BẢN.

Bài 1. Trả lời các câu hỏi sau đây :

a) Vectơ đối của vectơ $-\vec{a}$ là vectơ nào ?

b) Vectơ đối của vectơ $\vec{0}$ là vectơ nào?

c) Vectơ đối của vectơ $\vec{a} + \vec{b}$ là vectơ nào ?

Giải

a) Vectơ đối của vectơ $-\vec{a}$ là vectơ $\vec{a}$ vì : $-\vec{a} + \vec{a} = \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

b) Vectơ đối của vectơ $\vec{0}$ là vectơ $\vec{0}$.

c) Vectơ đối của vectơ $\vec{a} + \vec{b}$ là $-\vec{a} - \vec{b}$ vì :

$$\vec{a} + \vec{b} + (-\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} + (-\vec{a}) + \vec{b} + (-\vec{b}) = \vec{o}$$

Bài 2. Chứng minh các mệnh đề sau đây

a) Nếu $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ thì $\vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$, $\vec{b} = \vec{c} - \vec{a}$;

b) $\vec{a} - (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$;

c) $\vec{a} - (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$;

Giải

a) Ta có từ $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ suy ra $\vec{a} + \vec{b} + (-\vec{b}) = \vec{c} + (-\vec{b})$

do đó $\vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$

Hoàn toàn chứng minh tương tự ta có : $\vec{b} = \vec{c} - \vec{a}$

b) Ta có vectơ đối của $\vec{b} + \vec{c}$ là vectơ $-\vec{b} - \vec{c}$

Do đó $\vec{a} - (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} + (-\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} + (-\vec{b}) + (-\vec{c}) = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$

c) Ta có do vectơ đối của vetcơ $\vec{b} - \vec{c}$ là $-\vec{b} + \vec{c}$

Do đó $\vec{a} - (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} + (-\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} + (-\vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

Bài 3. Cho hình bình hành ABCD với tâm O. Mỗi khẳng định sau đây đúng hay sai ?

a) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}$;

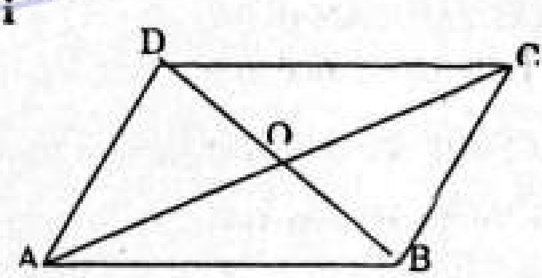
b) $\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$;

c) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$;

d) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$;

e) $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BO}$.

Giải



a) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}$ là sai

b) $\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$ là đúng vì do O là tâm hình bình hành ABCD nên $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}$; $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$.

Do đó $\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CO} + (-\overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$

c) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ là sai.

d) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$ là sai

e) $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BO}$ là đúng vì $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{OD}$; $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}$

(quy tắc hiệu hai vectơ.)

Bài 4. Cho hai điểm A, B phân biệt.

a) Tìm tập hợp các điểm O sao cho $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$;

b) Tìm tập hợp các điểm O sao cho $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OB}$.

Giải

a) Ta có $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} \Rightarrow A \equiv B$ (A trùng với B) mâu thuẫn với A, B phân biệt. Vậy tập hợp các điểm O là tập rỗng.

b) Ta có $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OB} \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} = \vec{0}$

$\Rightarrow$ O là trung điểm của AB

Vậy tập hợp các điểm O chỉ một trung điểm AB.

Bài 5. Cho hình bình hành ABCD, chứng minh rằng :

$$\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$$

Giải

Ta có do ABCD là hình bình hành $\Rightarrow$

$\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$ (đpcm)

Bài 6. Chứng minh rằng : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ khi và chỉ khi trung điểm của hai đoạn thẳng AD và BC trùng nhau.

Giải

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC.

Lúc đó $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{ID}$; $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{JC}$ (*)

Ta có : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JB} = \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{JI} + \overrightarrow{ID}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{JI}$ (do (*))

$\Leftrightarrow I \equiv J$ (đpcm)

Bài 7. Cho sáu điểm A, B, C, D, E, F. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE}.$$

Giải

Với điểm O nào đó ta có :

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OC}$

$= \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD}$ (1)

Hoàn toàn tương tự :

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OC}$$

$$=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CE} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra điều cần chứng minh.

III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO.

Bài 8. Cho hai điểm A và B phân biệt. Có thể tìm điểm M thoả mãn một trong các điều kiện sau đây không ?

a) $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BA}$; b) $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$; c) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

Bài 9. Cho tam giác ABC. Hãy xác định điểm M thoả mãn điều kiện :

$$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$$

Bài 10. Chứng minh rằng với hai vectơ không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$, ta có $|\vec{a}|-|\vec{b}|<|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}|+|\vec{b}|$

Bài 11*. Cho ba điểm O, A, B không thẳng hàng. Khi nào vectơ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ nằm trên đường phân giác trong góc $\widehat{AOB}$? Khi nào vectơ $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$ nằm trên đường phân giác ngoài của góc $\widehat{AOB}$?

IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI.

Bài 8. a) Với mọi điểm M ta có $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BA}$

b) Không có điểm M nào thoả mãn điều kiện trên.

c) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ Khi M là trung điểm của AB.

Bài 9. M được xác định bởi hệ thức $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CM}$ hay M là đỉnh thứ tư của hình bình hành ABCM.

Bài 10. Ta vẽ $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$. Khi đó trong tam giác OAB ta có $OA-AB<OB<OA+AB$ hay $|\vec{a}|-|\vec{b}|<|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}|+|\vec{b}|$.

Bài 11. Khi OA = OB thì vectơ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ nằm trên đường phân giác của góc $\widehat{AOB}$. Khi đó $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$ nằm trên đường phân giác ngoài của góc $\widehat{AOB}$.

§4. TÍCH CỦA VECTƠ VỚI MỘT SỐ

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1.Định nghĩa: tích của vectơ $\vec{a}$ với một số thực k là một vectơ, ký hiệu là $k\vec{a}$ được xác định như sau:

- Nếu $k \geq 0$ thì vectơ $k\vec{a}$ cùng hướng với vectơ $\vec{a}$.
- Nếu $k < 0$ thì vectơ $k\vec{a}$ ngược hướng với vectơ $\vec{a}$.
- Độ dài vectơ $k\vec{a}$ là $|k\vec{a}| = |k||\vec{a}|$,

2. Các tính chất :

Với mọi vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và mọi số thực k, l, ta có :

+ $k(l\vec{a}) = (kl).\vec{a}$

+ $(k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$

+ $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$

+ $k\vec{a} = \vec{0}$ khi và chỉ khi $k = 0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$

3. Vectơ $\vec{b}$ cùng phương với $\vec{a}$ ($\vec{a} \neq \vec{0}$) khi và chỉ khi có số k sao cho $\vec{b} = k\vec{a}$

4. Điều kiện cần và đủ để ba điểm phân biệt A, B ,C thẳng hàng là có số k sao cho $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$

5. Cho hai vectơ không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Khi đó mọi vectơ $\vec{x}$ đều có thể biểu thị một cách duy nhất qua hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Nghĩa là có duy nhất cặp số m và n sao cho $\vec{x} = m\vec{a} = n\vec{b}$.

6. Chú ý:

- Gọi I là trung điểm đoạn thẳng AB. Khi đó với điểm M bất kỳ , ta luôn có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.
- Cho tam giác ABC, G là trọng tâm. Khi đó với mọi điểm M bất kỳ ta có : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

II. BÀI TẬP CĂN BẢN.

Bài 1. cho tam giác vuông cân OAB với OA=OB=a. Hãy dựng các vectơ sau đây và tính độ dài của chúng.

$$\vec{OA}+\vec{OB}\ ;\ \vec{OA}-\vec{OB}\ ;\ 3\vec{OA}+4\vec{OB}\ ;\ \frac{21}{4}\vec{OA}+2,5\vec{OB};\frac{11}{4}\vec{OA}-\frac{3}{7}\vec{OB}$$

Giải

Gọi C là đỉnh thứ tư của hình chữ nhật OACB. Ta có :

$\vec{OA}+\vec{OB}=\vec{OC}=2\vec{OK}$ với K là trung điểm của AB

Ta có $|\vec{OA}+\vec{OB}|=|2\vec{OK}|=2\sqrt{(OA^2-AK^2)}=2\sqrt{a^2-\frac{2a^2}{4}}=a\sqrt{2}$

- Ta có $\vec{OA}-\vec{OB}=\vec{BA}\Rightarrow|\vec{OA}-\vec{OB}|=|\vec{BA}|=BA$

Do Δ OAB vuông cân tại O $\Rightarrow BA=\sqrt{2\,OA^2}=a\sqrt{2}$

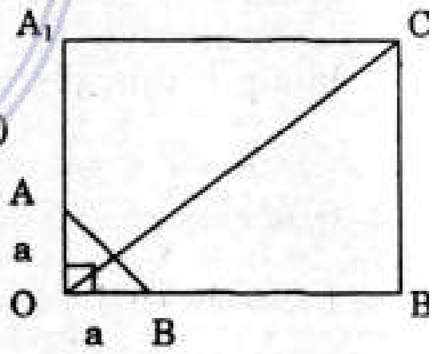
Vậy $|\vec{OA}-\vec{OB}|=a\sqrt{2}$

- Dựng vectơ $\vec{OA_1}=3\vec{OA}$ $\Rightarrow$ $OA_1=3a$

$\vec{OB_1}=4\vec{OB}$ $\quad OB_1=4a$

Gọi C_1 là đỉnh thứ tư của hình chữ nhật $OA_1C_1B_1$ ta có:

$|3\vec{OA}+4\vec{OB}|=|\vec{OA_1}+\vec{OB_1}|=|\vec{OC_1}|$



Ta có : $OC_1=\sqrt{OB_1^2+B_1C_1^2}$ (Định lý pitago)

$=\sqrt{OB_1^2+OA_1^2}=\sqrt{16a^2+9a^2}=5a$

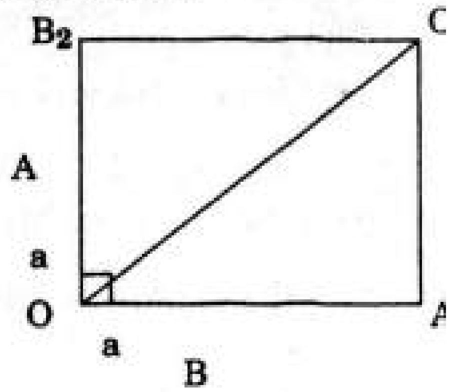
Vậy $|3\vec{OA}+4\vec{OB}|=5a$

- Dựng vectơ $\begin{cases}\vec{OA_2}=\frac{21}{4}\vec{OA}\\ \vec{OB_2}=2,5\vec{OB}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}OA_2=\frac{21}{4}a\\ OB_2=2,5a\end{cases}$

Gọi C_2 là đỉnh thứ tư của hình chữ nhật $OA_2C_2B_2$. Ta có :

$\frac{21}{4}\vec{OA}+2,5\vec{OB}=\vec{OA_2}+\vec{OB_2}=\vec{OC_2}$

$\Rightarrow|\frac{21}{4}\vec{OA}+2,5\vec{OB}|=|\vec{OC_2}|$



Xét tam giác vuông OA_2C_2 ta có

$OC_2^2=OA_2^2+A_2C_2^2$

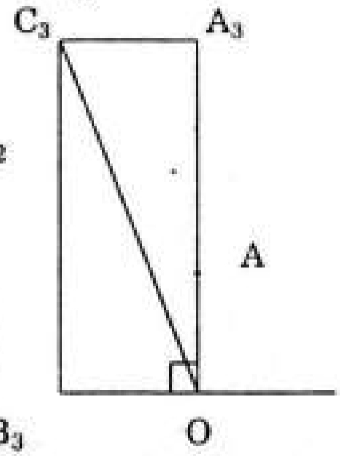
$\Rightarrow OC_2 = \sqrt{6,25a^2 + 27,5625a^2} = \dfrac{\sqrt{541}}{4}a$

Vậy $\left|\dfrac{21}{4}\overrightarrow{OA} + 2,5\overrightarrow{OB}\right| = \dfrac{\sqrt{541}}{4}a$

• Dựng vectơ $\begin{cases}\overrightarrow{OA_3} = \dfrac{11}{4}\overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{OB_3} = -\dfrac{3}{7}\overrightarrow{OB}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}OA_3 = \dfrac{11}{4}a \\ OB_3 = \dfrac{3}{7}a\end{cases}$

Gọi C_3 là đỉnh thứ tư của hình chữ nhật $OA_3C_3B_3$. Ta có :

$$\frac{11}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{3}{7}\overrightarrow{OB} = \frac{11}{4}\overrightarrow{OA} + \left(-\frac{3}{7}\overrightarrow{OB}\right) = \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OB_3} = \overrightarrow{OC_3}$$



$\Rightarrow \left|\dfrac{11}{4}\overrightarrow{OA} - \dfrac{3}{7}\overrightarrow{OB}\right| = |\overrightarrow{OC_3}|$

Xét tam giác vuông OA_3C_3 ta có $OC_3^2 = OA_3^2 + A_3C_3^2$

$\Rightarrow OC_3 = \sqrt{\left(\dfrac{11}{4}a\right)^2 + \left(\dfrac{3}{7}a\right)^2} = \dfrac{\sqrt{6073}}{28}a$

Vậy $\left|\dfrac{11}{4}\overrightarrow{OA} - \dfrac{3}{7}\overrightarrow{OB}\right| = \dfrac{\sqrt{6073}}{28}a$

Bài 2. Cho tam giác OAB. Gọi M, N lần lượt là trung điểm hai cạnh OA và OB. Hãy tìm những số m và n thích hợp trong các đẳng thức sau đây.

$\overrightarrow{OM} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{MN} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{AN} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{MB} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$

Giải

• $\overrightarrow{OM} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$ (Vì M là trung điểm OA)

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{2} - m\right)\overrightarrow{OA} = n\overrightarrow{OB}$ (1)

Mà $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$ không cùng phương

do đó (1) xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}\left(\dfrac{1}{2} - m\right)\overrightarrow{OA} = \vec{0} \\ n\overrightarrow{OB} = \vec{0}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{1}{2} - m = 0 \\ n = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m = \dfrac{1}{2} \\ n = 0\end{cases}$

Vậy $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + 0.\overrightarrow{OB}$

- $\overrightarrow{MN} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$ (do M, N lần lượt là trung điểm OA và OB)

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} - n\right)\overrightarrow{OB} = \left(\frac{1}{2} + m\right)\overrightarrow{OA}$ (2)

Mà $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$ không cùng phương

do đó (2) xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{2} - n\right)\overrightarrow{OB} = \vec{0} \\ \left(\frac{1}{2} + m\right)\overrightarrow{OA} = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} - n = 0 \\ \frac{1}{2} + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = \frac{1}{2} \\ m = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Vậy $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

- $\overrightarrow{AN} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OA} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} - n\right)\overrightarrow{OB} = (m+1)\overrightarrow{OA}$ (3)

Mà $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$ không cùng phương

do đó (3) xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{2} - n\right)\overrightarrow{OB} = \vec{0} \\ (m+1)\overrightarrow{OA} = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} - n = 0 \\ m + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = \frac{1}{2} \\ m = -1 \end{cases}$

Vậy $\overrightarrow{AN} = -1.\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

- $\overrightarrow{MB} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow (1 - n)\overrightarrow{OB} = \left(\frac{1}{2} + m\right)\overrightarrow{OA}$ (4)

Mà $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$ là hai vectơ không cùng phương

do đó (4) xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} (1 - n)\overrightarrow{OB} = \vec{0} \\ \left(\frac{1}{2} + m\right)\overrightarrow{OA} = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - n = 0 \\ \frac{1}{2} + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 1 \\ m = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Vậy $\overrightarrow{MB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + 1.\overrightarrow{OB}$

Bài 3. Gọi M và N lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AB và CD.

Chứng minh rằng : $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$

Giải

Vì N là trung điểm của CD nên ta có :

$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$$

(vì M là trung điểm AB nên $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$)

Ta lại có : $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$

(vì M là trung điểm AB nên $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$)

Vậy $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$

Bài 4. Cho tam giác ABC và điểm G. Chứng minh rằng:

a) Nếu $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$ thì G là trọng tâm tam giác ABC.

b) Nếu có điểm O sao cho $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$ **thì G là trọng tâm** tam giác ABC.

Giải

a) Gọi I là trung điểm của BC. Ta có :

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{O}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GI} = \overrightarrow{O} \Rightarrow$ G, A, I thẳng hàng G nằm giữa A và I

Sao cho GA = 2GI $\Rightarrow$ G là trọng tâm tam giác ABC.

b) Với G bất kỳ

Ta có

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG} \Leftrightarrow \overrightarrow{OG'} + \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{OG'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{OG'} + \overrightarrow{GC'} = 3\overrightarrow{OG'}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{O} \Leftrightarrow$ G là trọng tâm tam giác ABC (theo câu a)

Bài 5. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{GA}$ và $\vec{b} = \overrightarrow{GB}$. Hãy biểu thị mỗi vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{GC}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ qua các vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$

Giải

- Ta có : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA} = \vec{b} - \vec{a} = -\vec{a} + \vec{b}$
- Ta có $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{GC} = -\vec{GA} - \vec{GB} = -\vec{a} - \vec{b}$ Vậy $\vec{GC} = -\vec{a} - \vec{b}$

- Ta có $\vec{BC} = \vec{GC} - \vec{GB} = -\vec{GA} - \vec{GB} - \vec{GB} = -\vec{GA} - 2\vec{GB} = -\vec{a} - 2\vec{b}$

Vậy $\vec{BC} = -\vec{a} - 2\vec{b}$

- Ta có $\vec{CA} = \vec{GA} - \vec{GC} = \vec{GA} + \vec{GA} + \vec{GC}$ (vì $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$)

$= 2\vec{GA} + \vec{GB} = 2\vec{a} + \vec{b}$

Bài 6. Chứng minh rằng nếu G và G' lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và A'B'C' thì $3\vec{GG'} = \vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'}$. Từ đó hãy suy ra điều kiện để hai tam giác ABC và A'B'C' có trọng tâm trùng nhau.

Giải

Vì G' là trọng tâm ΔA'B'C' nên

$$3\vec{GG'} = \vec{GA'} + \vec{GB'} + \vec{GC'}$$

$$= \vec{GA} + \vec{AA'} + \vec{GB} + \vec{BB'} + \vec{GC} + \vec{CC'}$$

$$= \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'} = \vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'}$$

(Vì G là trọng tâm ΔABC $\Rightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$)

Từ đó suy ra điều kiện cần và đủ để hai tam giác ABC và A'B'C' có cùng trọng tâm (có trọng tâm trùng nhau) là :

$$\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'} = \vec{0}$$

Bài 7. Cho lục giác ABCDEF. Gọi P, Q, R, S, T, U lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA. Chứng minh rằng hai tam giác PRT và QSU có trọng tâm trùngnhau.

Giải

Để chứng minh hai tam giác PRT và QSU có trọng tâm trùng nhau ta chứng minh $\vec{PQ} + \vec{RS} + \vec{TU} = \vec{0}$ (theo bài 6)

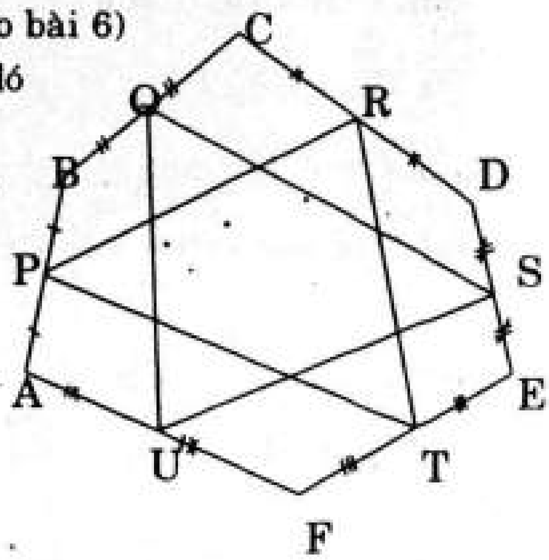
Thật vậy do Q là trung điểm của BC do đó

$$\vec{PQ} = \frac{1}{2}(\vec{PB} + \vec{PC}) = \frac{1}{2}(\vec{PC} - \vec{PA})$$

Vì P là trung điểm của AB

$$\Rightarrow \vec{PQ} = \frac{1}{2}\vec{AC}$$

Hoàn toàn tương tự ta có :



$\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CE}$; $\overrightarrow{TU} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EA}$

Vậy $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{TU} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EA}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$ (đpcm)

Bài 8. Cho tứ giác ABCD. Chứng minh rằng

a) Có một điểm G duy nhất sao cho $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0}$.

Điểm G như thế gọi là trọng tâm của 4 điểm A, B, C, D. Tuy nhiên, người ta quen ngọi G là trọng tâm của tứ giác ABCD.

b) Trọng tâm G là trung điểm của các đoạn thẳng nối trung điểm các cạnh đối của tứ giác, nó cũng là trung điểm của đoạn thẳng nối trung điểm hai đường chéo của tứ giác.

c) Trọng tâm G nằm trên các đoạn thẳng nối một đỉnh của tứ giác và trọng tâm của tam giác tạo thành bởi ba đỉnh còn lại.

Giải

a) Lấy một điểm O xác định nào đó ta có :

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OG}$

$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} - 4\overrightarrow{OG}$

Bởi vậy nếu $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0}$

Thì $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} - 4\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{0}$

Hay $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$ mà O, A, B, D xác định.

Vậy điểm G được xác định.

- Giả sử còn có điểm G' sao cho $\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{GD'} = \overrightarrow{0}$

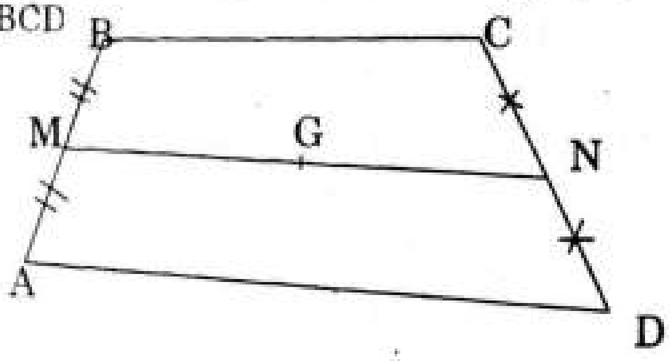
Suy ra $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{GD'}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{OG'} = 4\overrightarrow{OG} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow G \equiv G'$

Vậy điểm G được xác định duy nhất.

Điểm G như vậy gọi là trọng tâm của tứ giác ABCD

b) Gọi M, N là trung điểm hai cạnh đối nào đó (AB và CD chẳng hạn) và G là trọng tâm của tứ giác ABCD



Ta có : $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}$

$= 2\overrightarrow{GM} + 2\overrightarrow{GN}$

(vì M là trung điểm của AB)

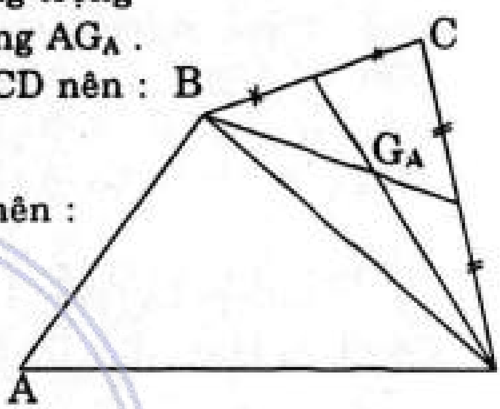
$\Rightarrow 2\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}$, N là trung điểm của CD $\Rightarrow 2\overrightarrow{GN} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}$)

$\Rightarrow \overrightarrow{0} = 2(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN})$

Suy ra G là trung điểm của MN

Hoàn toàn tương tự ta có được G là trung điểm đoạn thẳng nối trung điểm của hai cạnh BC và AD và G cũng là trung điểm đoạn thẳng nối trung điểm hai đường chéo AC và BD.

c) Ta chọn một đỉnh nào đó của tứ giác ABCD. Chẳng hạn đỉnh A và gọi G_A là trọng tâm của tam giác BCD tạo thành bởi ba đỉnh còn lại của tứ giác ABCD. Ta phải chứng minh rằng trọng tâm G của tứ giác phải nằm trên đoạn thẳng AG_A.



Thật vậy vì G là trọng tâm của tứ giác ABCD nên :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0} \quad (*)$$

Lại có G_A là trọng tâm của tam giác BCD nên :

$$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 3\overrightarrow{GG_A}$$

Như vậy từ (*) ta suy ra: $\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GG_A} = \overrightarrow{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{GA}$ và $\overrightarrow{GG_A}$ ngược hướng nhau , suy ra G nằm trên đoạn thẳng AG_A (đpcm)

III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO.

Bài 9. Cho tam giác ABC và một điểm M tuỳ ý. Chứng minh rằng vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M. Dựng điểm D sao cho $\overrightarrow{CD} = \vec{v}$

Bài 10. Cho 3 điểm O, M, N và số k. Lấy các điểm M' và N' sao cho

$$\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM} \;,\; \overrightarrow{ON'} = k\overrightarrow{ON}$$

Chứng minh rằng : $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$

Bài 11. Cho hai hình bình hành ABCD và AA'C'D' có chung đỉnh A.

Chứng minh rằng :

a) $\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{0}$

b) Hai tam giác BC'D và B'CD' có cùng trọng tâm.

Bài 12. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , H là trực tâm tam giác và D là trung điểm cạnh BC. Chứng minh rằng :

a) $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OD}$; b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$; c) $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$

d) Đường thẳng HO đi qua trọng tâm G của tam giác ABC (đường thẳng đó gọi là đường thẳng Ơ-le của tam giác ABC)

IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNGDẪN GIẢI.

Bài 9. $\vec{v} = \vec{CA} + \vec{CB} = 2\vec{CO}$ (với O là trung điểm của AB)

Vậy vectơ $\vec{v}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M. Vì $\vec{CD} = \vec{v} = 2\vec{CO}$ nên D là đỉnh thứ tư của hình bình hành CADB.

Bài 10. Ta có : $\vec{M'N'} = \vec{ON'} - \vec{OM'} = k\vec{ON} - k\vec{OM}$

$= k(\vec{ON} + \vec{OM}) = k\vec{MN}$

Bài 11. a) $\vec{BB'} + \vec{C'C} + \vec{DD'}$

$= \vec{AB'} - \vec{AB} + \vec{AC} - \vec{AC'} + \vec{AD'} - \vec{AD}$

$= \vec{AC'} - \vec{AC'} - \vec{AC} + \vec{AC} = \vec{O}$

b) Để chứng minh hai tam giác BC'D và B'CD' có cùng trọng tâm ta chỉ cần chứng minh : $\vec{BB'} + \vec{C'C} + \vec{DD'} = \vec{O}$

Bài 12. a) Gọi B' là điểm đối xứng với B qua O. Suy ra $\vec{AH} = \vec{B'C}$

Do $\vec{B'C} = 2\vec{OD}$. Vậy $\vec{AH} = 2\vec{OD}$

b) Ta có $\vec{OA} = \vec{OH} + \vec{HA} = \vec{OH} - \vec{AH}$

$= \vec{OH} - 2\vec{OD} = \vec{OH} - (\vec{OB} + \vec{OC})$

Suy ra $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OH}$

c) $\vec{HA} + \vec{HB} + \vec{HC} = 3\vec{HO} + \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$

$= 3\vec{HO} + \vec{OH} = 2\vec{HO}$. Vậy $\vec{HA} + \vec{HB} + \vec{HC} = 2\vec{HO}$

d) Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên từ kết quả câu b ta suy ra

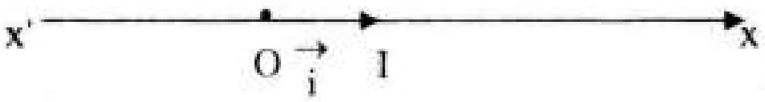
$3\vec{OG} = \vec{OH}$, do đó H, O, G thẳng hàng.

§5. TRỤC TỌA ĐỘ VÀ HỆ TRỤC TỌA ĐỘ

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Trục tọa độ :

- Trục tọa độ (còn gọi là trục, hay trục số) là một đường thẳng trên đó đã xác định một điểm O và một vectơ $\vec{i}$ có độ dài bằng 1.



Điểm O gọi là gốc tọa độ, vectơ $\vec{i}$ gọi là vectơ đơn vị của trục tọa độ.

Trục tọa độ như vậy được ký hiệu $(O ; \vec{i})$.

- Tọa độ của vectơ và các điểm trên trục :

Cho vectơ $\vec{u}$ nằm trên trục $(O ; \vec{i})$, thì số a xác định để $\vec{u} = a\vec{i}$ gọi là tọa độ của vectơ $\vec{u}$ đối với trục $(O ; \vec{i})$.

Cho điểm M nằm trên trục $(O ; \vec{i})$. Khi đó tọa độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$ là tọa độ của điểm M.

- Độ dài đại số trên trục :

Cho hai điểm A, B nằm trên trục Ox thì tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ được ký hiệu là $\overline{AB}$ và gọi là độ dài đại số của vectơ $\overrightarrow{AB}$. Như vậy :

1. Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ bằng nhau khi và chỉ khi $\overline{AB} = \overline{CD}$
2. Hệ thức $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ tương đương với $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$

2. Hệ trục tọa độ :

- Đối với hệ trục tọa độ $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ nếu $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$ thì cặp số (x; y) được gọi là tọa độ của vectơ $\vec{a}$ và ký hiệu $\vec{a} = (x ; y)$ hay $\vec{a}$ (x; y). Số thứ nhất x gọi là hoành độ, số thứ hai y gọi là tung độ của vectơ $\vec{a}$.

Suy ra : $\vec{a}(x; y) = \vec{b}(x'; y') \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$

3. Biểu thức tọa độ của các phép toán vectơ

Cho $\vec{a} = (x; y)$ và $\vec{b} = (x'; y')$. Khi đó :

- $\vec{a} + \vec{b} = (x + x'; y + y')$; $\vec{a} - \vec{b} = (x - x'; y - y')$
- $k\vec{a} = (kx; ky)$ với $k \in \mathbb{R}$.
- $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{b}$ khi và chỉ khi $\dfrac{x}{x'} = \dfrac{y}{y'}$ (với $x' \neq 0; y' \neq 0$)

4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tọa độ của vectơ được gọi là tọa độ của điểm M.

Với hai điểm M $(x_M; y_M)$ và N $(x_N; y_N)$ ta có : $\overrightarrow{MN} = (x_N - x_M; y_N - y_M)$

5. Cho M $(x_M; y_M)$ và N $(x_N; y_N)$. Gọi P $(x_P; y_P)$ là trung điểm của đoạn thẳng MN ta có :

$$\begin{cases} x_P = \dfrac{x_M + x_N}{2} \\ y_P = \dfrac{y_M + y_N}{2} \end{cases}$$

6. Cho tam giác ABC có A $(x_A; y_A)$, B $(x_B; y_B)$, C $(x_C; y_C)$. G là trọng tâm tam giác, G $(x_G; y_G)$. Khi đó : $x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}$;

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

II. BÀI TẬP CĂN BẢN.

Bài 1. Trong hệ trục tọa độ, các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Hai vectơ $\vec{a}$ (26; 9) và $\vec{b}$ (9; 26) bằng nhau.

b) Hai vectơ bằng nhau khi và chỉ khi chúng có hoành độ bằng nhau, và tung độ bằng nhau.

c) Hai vectơ đối nhau thì chúng có hoành độ đối nhau.

d) Vectơ $\vec{a}$ cùng phương với vectơ $\vec{i}$ nếu $\vec{a}$ có hoành độ bằng 0.

e) Vectơ $\vec{a}$ có hoành độ bằng 0 thì nó cùng phương với vectơ $\vec{j}$.

Giải

- Các mệnh đề đúng là : b, c, e ;
- Các mệnh đề sai là : a, d .

Bài 2. Tìm tọa độ của các vectơ sau trong mặt phẳng tọa độ

$\vec{a} = -\vec{i}$; $\vec{b} = 5\vec{j}$; $\vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$;

$\vec{d} = -(\vec{j} - \vec{i})$; $\vec{e} = 0,15\vec{i} + 1,3\vec{j}$; $\vec{f} = \pi\vec{i} - \vec{j}.\cos 24^\circ$.

Giải

- $\vec{a} = -\vec{i} \Leftrightarrow \vec{a} = (-1 ; 0)$
- $\vec{b} = 5\vec{j} \Leftrightarrow \vec{b} = (0 ; 5)$
- $\vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j} \Leftrightarrow \vec{c} = (3 ; -4)$
- $\vec{d} = \frac{1}{2}(\vec{j} - \vec{i}) \Leftrightarrow \vec{d} = \left(-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$
- $\vec{e} = 0,15\vec{i} + 1,3\vec{j} \Leftrightarrow \vec{e} = (0,15 ; 1,3)$
- $\vec{f} = \pi\vec{i} - \vec{j}.\cos 24^\circ \Leftrightarrow \vec{f} = (\pi ; -\cos 24^\circ)$

Bài 3. Cho $\vec{a}(2; 1)$, $\vec{b}(3; 4)$, $\vec{c}(7; 2)$.

a) Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$;

b) Tìm tọa độ của vectơ $\vec{x}$ sao cho $\vec{x} + \vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$;

c) Tìm các số k, l để $\vec{c} = k\vec{a} + l\vec{b}$.

Giải

a) $\vec{u} = 2(2\vec{i} + \vec{j}) - 3(3\vec{i} + 4\vec{j}) + 7\vec{i} + 2\vec{j} = 2\vec{i} - 8\vec{j}$

$\Rightarrow \vec{u} = (2 ; -8)$.

b) Ta có : $\vec{b} - \vec{c} = (3 - 7 ; 4 - 2) = (-4 ; 2)$

Gọi $\vec{x}(x ; y) \Rightarrow \vec{x} + \vec{a} = (x + 2 ; y + 1)$.

Để $\vec{x} + \vec{a} = \vec{b} - \vec{c} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = -4 \\ y + 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = 1 \end{cases}$ hay $\vec{x}(-6 ; 1)$

c) Ta có : $k\vec{a} + l\vec{b} = k(2\vec{i} + \vec{j}) + l(3\vec{i} + 4\vec{j})$

$= (2k + 3l)\vec{i} + (k + 4l)\vec{j}$

$\Rightarrow k\vec{a} + l\vec{b} = (2k + 3l; k + 4l)$.

Do đó $\vec{c} = k\vec{a} + l\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k + 3l = 7 \\ k + 4l = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 4,4 \\ l = -0,6 \end{cases}$

Vậy với $k = 4,4$ và $l = -0,6$ thì $\vec{c} = k\vec{a} + l\vec{b}$

Bài 4. Cho $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} - 5\vec{j}$, $\vec{v} = k\vec{i} - 4\vec{j}$.

Tìm các giá trị của k để hai vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng phương.

Giải

Theo bài ra : $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}; -5\right)$, $\vec{v} = (k; -4)$.

Để $\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng phương $\Leftrightarrow \dfrac{\frac{1}{2}}{k} = \dfrac{5}{4} \Leftrightarrow 10k = 4 \Leftrightarrow k = \dfrac{2}{5}$

Vậy $k = \dfrac{2}{5}$ là giá trị cần tìm.

Bài 5. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

a) Tọa độ của điểm A bằng tọa độ của vectơ $\vec{OA}$, với O là gốc tọa độ;

b) Hoành độ của một điểm bằng 0 thì điểm đó nằm trên trục hoành;

c) Điểm A nằm trên trục tung thì A có hoành độ bằng 0;

d) P là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi hoành độ điểm P bằng trung bình cộng của các hoành độ hai điểm A, B;

e) Tứ giác ABCD là hình bình hành khi và chỉ khi trung bình cộng các tọa độ của A và C bằng trung bình cộng của tọa độ tương ứng của B và D.

Giải

- Các mệnh đề đúng là : a, c, e .
- Các mệnh đề sai là : b, d .

Bài 6. Trong mặt phẳng tọa độ cho ba điểm A (–3 ; 4) , B (1 ; 1) , C (9 ;–5)

a) Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.

b) Tìm tọa độ điểm D sao cho A là trung điểm BD.

c) Tìm tọa độ điểm E trên trục Ox sao cho A, B, E thẳng hàng.

Giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (1 + 3 ; 1 - 4)$ hay $\overrightarrow{AB}\ (4 ; -3)$

$\overrightarrow{AC} = (9 + 3 ; -5 - 4)$ hay $\overrightarrow{AC}\ (12 ; -9)$

suy ra $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$ hay A, B, C thẳng hàng.

b) Gọi D $(x_D; y_D)$ là điểm sao cho A là trung điểm của BD

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1 + x_D}{2} = -3 \\ \dfrac{1 + y_D}{2} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -7 \\ y_D = 7 \end{cases} \quad \text{Vậy } D = (-7; 7).$$

c) Gọi tọa độ E $(x_E ; 0)$ $(E \in Ox)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AE}\ (x_E + 3 ; -4)$ mà $\overrightarrow{AB} = (4 ; -3)$

Do vậy để A, B, E thẳng hàng thì $\overrightarrow{AE}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng phương hay

$$\frac{x_E + 3}{4} = \frac{-4}{-3} \Leftrightarrow x_E = \frac{7}{3}. \quad \text{Vậy } E\left(\frac{7}{3}; 0\right).$$

Bài 7. Cho điểm M (x; y). Tìm tọa độ của các điểm

a) M_1 đối xứng với M qua trục Ox.

b) M_2 đối xứng với M qua trục Oy.

c) M_3 đối xứng với M qua tâm O.

Giải

a) Gọi tọa độ của $M_1 (x_1; y_1)$ là điểm đối xứng với M (x; y) qua trục Ox.

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x \\ y_1 + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = -y \end{cases} \text{ hay } M_1 (x; -y)$$

b) Gọi $M_2 (x_2; y_2)$ là điểm đối xứng với M (x; y) qua trục Oy. Khi đó.

$$\begin{cases} x_2 + x = 0 \\ y_2 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -x \\ y_2 = y \end{cases} \text{ hay } M_2 (-x; y).$$

c) Gọi $M_3 (x_3; y_3)$ là điểm đối xứng với M qua tâm O. Khi đó

$$\begin{cases} x_3 + x = 0 \\ y_3 + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = -x \\ y_3 = -y \end{cases} \text{ hay } M_3 (-x; -y).$$

Bài 8. Trong mặt phẳng tọa độ cho 3 điểm A (–4; 1), B (2; 4), C (2; –2).

a) Tìm tọa độ trọng tâm của tam giác ABC.

b) Tìm tọa độ điểm D sao cho C là trọng tâm tam giác ABD.

c) Tìm tọa độ điểm E sao cho ABCE là hình bình hành.

Giải

a) Gọi G (x_G; y_G) là trọng tâm tam giác ABC. Khi đó

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$ mà $\overrightarrow{GA} = (-4 - x_G; 1 - y_G)$;

$\overrightarrow{GB} = (2 - x_G; 4 - y_G)$; $\overrightarrow{GC} = (2 - x_G; -2 - y_G)$.

suy ra $\begin{cases} -4 - x_G + 2 - x_G + 2 - x_G = 0 \\ 1 - y_G + 4 - y_G + (-2) - y_G = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = 1 \end{cases}$ Vậy G (0; 1).

b) Gọi D (x_D; y_D). Khi đó, để C là trọng tâm tam giác ABD.

thì $\begin{cases} x_C = \dfrac{x_A + x_B + x_D}{3} \\ y_C = \dfrac{y_A + y_B + y_D}{3} \end{cases}$ hay $\begin{cases} 2 = \dfrac{-4 + 2 + x_D}{3} \\ -2 = \dfrac{1 + 4 + y_D}{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6 = -2 + x_D \\ -6 = 5 + y_D \end{cases}$ hay $\begin{cases} x_D = 8 \\ y_D = -11 \end{cases}$ Vậy D (8; –11).

c) Gọi E (x_E; y_E) là đỉnh thứ tư của hình bình hành ABCE.

Suy ra $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EC}$ (*)

Mà $\overrightarrow{AB} = (6; 3)$, $\overrightarrow{EC} = (2 - x_E; -2 - y_E)$

Do đó từ (*) $\Rightarrow \begin{cases} 6 = 2 - x_E \\ 3 = -2 - y_E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = -4 \\ y_E = -5 \end{cases}$ Vậy E (–4; –5).

III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO.

Bài 9. Cho ba điểm A (2; 5) , B (1; 1) , C (3; 3)

a) Tìm tọa độ điểm D sao cho $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$;

b) Tìm tọa độ điểm E sao cho ABCE là hình bình hành. Tìm tọa độ tâm hình bình hành đó.

Bài 10. Cho tam giác ABC có A (–1; 1) , B (5; –3) , đỉnh C nằm trên trục Oy và trọng tâm G nằm trên trục Ox. Tìm tọa độ đỉnh C.

Bài 11*. Biết M (x_1; y_1) , N (x_2; y_2) , P (x_3; y_3) là trung điểm ba cạnh của một tam giác. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác.

Bài 12 *. Cho tam giác ABC với A (1; 5) , B (–4; –5) , C (4; –1).

a) Tìm tọa độ chân đường phân giác trong và ngoài của góc A;

b) Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI.

Bài 9. **a)** D (–3 ; –3). **b)** E (4 ; 7) .

Khi đó tâm I hình bình hành ABCE có tọa độ là I $\left(\frac{5}{2}; 4\right)$.

Bài 10. C (0; 2)

Bài 11*. Ký hiệu M, N, P là trung điểm các cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC.

A $(x_1 + x_3 - x_2; y_1 + y_3 - y_2)$

B $(x_1 + x_3 - x_2 ;\ y_1 + y_3 - y_2)$

C $(x_2 + x_3 - x_1 ;\ y_2 + y_3 - y_1)$.

Bài 12*. **a)** Vẽ phân giác trong AM và phân giác ngoài AN thì M $\left(1; -\frac{5}{2}\right)$; N (16 ; 5) .

b) Vẽ phân giác góc B cắt AM tại I. Khi đó I là tâm đường tròn nội tiếp trong tam giác ABM ta có I (1 ; 0) .

ÔN TẬP CHƯƠNG I

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Vectơ:

- Vectơ là một đoạn thẳng có hướng.
- Hai vectơ bằng nhau nếu chúng cùng hướng và có độ dài bằng nhau.

2. Cộng và trừ các vectơ:

- Quy tắc ba điểm: với bất kỳ ba điểm A, B, C ta đều có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
- Quy tắc hình bình hành: nếu ABCD là hình bình hành thì

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$$

- Quy tắc hiệu vectơ: cho vectơ $\overrightarrow{AB}$ với điểm O bất kỳ ta luôn có

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

3. Phép nhân vectơ với một số

- Nếu $b = k\vec{a}$ $(\vec{a} \neq \vec{0})$ thì: $\vec{b}$ cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$, $\vec{b}$ ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$ và $|\vec{b}| = |k|.|\vec{a}|$.

- Các tính chất:

1) $k(l.\vec{a}) = (k.l)\vec{a}$

2) $(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$

3) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$

4) $k\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow k = 0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$

- Một số công thức để làm bài tập

1) Nếu I là trung điểm đoạn thẳng AB thì với điểm O bất kỳ, ta có

$$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$$

2) Nếu G là trọng tâm tam giác ABC thì với điểm O bất kỳ, ta có

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right).$$

3) Điểm M gọi là chia đoạn thẳng AB theo tỉ số $k \neq 1$ nếu

$$\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}.$$

Khi đó với điểm O bất kỳ, M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số $k \neq 1$ thì

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB}}{1 - k}$$

4) Tọa độ của vectơ và của điểm.

- Đối với hệ trục $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (hay Oxy) trong mặt phẳng tọa độ:

1) $\vec{u} = (a; b) \Leftrightarrow \vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$

2) Điểm $M(x; y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (x; y)$.

- Nếu $\vec{u}(x_1; y_1)$ và $\vec{v}(x_2; y_2)$

1) $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$; $\vec{u} - \vec{v} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2)$.

2) $k\vec{u} = (kx_1; ky_1)$

- Nếu $A(x_A; y_A)$; $B(x_B; y_B)$ thì $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$

⇒ 1) Nếu I là trung điểm của AB thì $I = \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$.

2) Nếu G là trọng tâm tam giác ABC có $A(x_A; y_A)$; $B(x_B; y_B)$ và $C(x_C; y_C)$ thì $G = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$.

II. BÀI TẬP CĂN BẢN.

Bài 1. Hãy nói rõ vectơ khác đoạn thẳng như thế nào ?

Giải

- Vectơ là một đoạn thẳng nhưng có phân biệt thứ tự của hai điểm mút. Vậy vectơ $\overrightarrow{AB}$ và vectơ $\overrightarrow{BA}$ là khác nhau.
- Đoạn thẳng có hai điểm mút, nhưng thứ tự của hai điểm mút đó như thế nào cũng được. Đoạn thẳng AB và đoạn thẳng BA là một.

Bài 2. Nếu hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ bằng nhau và có giá không trùng nhau thì bốn đỉnh A, B, C, D có là bốn đỉnh hình bình hành không ?

Giải

Nếu hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ bằng nhau và không nằm trên một đường thẳng thì bốn đỉnh A, B, C, D có là bốn đỉnh hình bình hành ABCD.

Bài 3. Nếu có nhiều vectơ thì xác định tổng của chúng như thế nào?

Giải

Để xác định tổng của nhiều vectơ ta làm như sau:
Lấy vectơ bằng vectơ thứ nhất, khi đó điểm đầu của vectơ thứ hai là điểm cuối của vectơ thứ nhất, điểm đầu của vectơ thứ ba là điểm cuối của vectơ thứ hai, quá trình cứ như vậy cho đến điểm đầu của vectơ thứ n là điểm cuối của vectơ thứ n−1. Khi đó tổng của n vectơ được xác định là vectơ có điểm đầu là điểm đầu của vectơ thứ nhất, điểm cuối là điểm cuối của vectơ thứ n.

Bài 4. Hiệu hai vectơ được định nghĩa qua khái niệm tổng hai vectơ như thế nào ?

Giải

Hiệu của hai vectơ được định nghĩa là tổng của vectơ thứ nhất và vectơ đối của vectơ thứ hai. $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

Bài 5. Các đẳng thức sau đây đúng hay sai ?

a) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}$; b) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$;

c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{BA}$; d) $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{QO} = -\overrightarrow{PQ}$.

Giải

a) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}$ là sai vì $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{NM} \neq \overrightarrow{MN}$

b) Đúng; c) Sai; d) Đúng.

Bài 6. có thể dùng phép nhân vectơ với một số để định nghĩa vectơ đối của một vectơ hay không ?

Giải

Theo định nghĩa đối của vectơ $\vec{a}$ là vectơ $-\vec{a}$.

Theo định nghĩa phép nhân vectơ với một số ta có : $-\vec{a} = (-1).\vec{a}$

Suy ra vectơ đối của vectơ $\vec{a}$ là vectơ $(-1).\vec{a}$. Vậy có thể dùng phép

nhân vectơ với một số để định nghĩa vectơ đối của một vectơ.

Bài 7. Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương. Trong các vectơ $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{u}, \vec{v}$, $\vec{x}$, $\vec{y}$ sau đây hãy chỉ ra các vectơ cùng hướng và các vectơ ngược hướng:

$\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$; $\vec{d} = -\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$; $\vec{u} = 3\vec{a} + 4\vec{b}$;

$\vec{v} = 3\vec{a} - \vec{b}$; $\vec{x} = -\frac{1}{4}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$; $\vec{y} = -9\vec{a} + 3\vec{b}$.

Hai vectơ $\vec{c}$ và $\vec{d}$ có cùng phương hay không ? Tại sao ?

Giải

- Những vectơ cùng hướng: $\vec{d}$ và $\vec{y}$
- Những vectơ ngược hướng: $\vec{u}$ và $\vec{d}$; $\vec{u}$ và $\vec{y}$; $\vec{c}$ và $\vec{x}$

• Hai vectơ $\vec{c}$ và $\vec{d}$ không cùng phương vì không tồn tại số thực k nào đó: $\vec{c} = k\vec{d}$.

Bài 8. Cho tam giác ABC với trung tuyến AM và trọng tâm G. Các khẳng định sau đây đúng hay sai ?

a) $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AG}$; b) $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$; c) $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$;

d) $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$; e) $\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG}$.

Giải

a) Sai ; b) Đúng ; c) Đúng ;

d) Sai ; e)Sai;

Bài 9. Cho biết tọa độ hai điểm A và B. Làm thế nào để:

a) Tìm tọa độ vectơ $\overrightarrow{AB}$

b) Tìm tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB.

Giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, mà tọa độ vectơ $\overrightarrow{OB}$ là tọa độ điểm B, tọa độ vectơ $\overrightarrow{OA}$ là tọa độ điểm A. Từ đó ta chứng minh được tọa độ vectơ $\overrightarrow{AB}$ bằng tọa độ điểm cuối B trừ đi tọa độ điểm đầu A.

b) Giả sử $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$. I là trung điểm của AB thì

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right).$$

Bài 10. Cho biết tọa độ 3 đỉnh của một tam giác. Làm thế nào để tìm tọa độ trọng tâm của tam giác đó.

Giải

Giả sử tam giác ABC có $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$, $C(x_C;y_C)$. G là trọng tâm tam giác $\Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Từ đó suy ra được $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$

Bài 11. Cho tam giác ABC. Hãy xác định các vectơ

$\vec{AB} + \vec{BC}$; $\vec{CB} + \vec{BA}$; $\vec{AB} + \vec{CA}$; $\vec{BA} + \vec{CB}$;

$\vec{BA} + \vec{CA}$; $\vec{CB} - \vec{CA}$; $\vec{AB} - \vec{CB}$; $\vec{BC} - \vec{AB}$.

Giải

- $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$
- $\vec{CB} + \vec{BA} = \vec{CA}$
- $\vec{AB} + \vec{CA} = \vec{CA} + \vec{AB} = \vec{CB}$
- $\vec{BA} + \vec{CB} = \vec{CB} + \vec{BA} = \vec{CA}$
- $\vec{BA} + \vec{CA} = \vec{DA}$

(D chính là điểm thứ tư của hình bình hành ABDC)

- $\vec{CB} - \vec{CA} = \vec{AB}$
- $\vec{AB} - \vec{CB} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$
- $\vec{BC} - \vec{AB} = \vec{BC} + \vec{BA} = \vec{BE}$ (E chính là điểm thứ tư của hình bình hành ABCE)

Bài 12. Cho ba điểm O, A, B không thẳng hàng. Tìm điều kiện cần và đủ để vectơ $\vec{OA} + \vec{OB}$ có giá là đường phân giác của góc AOB.

Giải

Gọi C là điểm sao cho OACB là hình bình hành thì $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC}$.

Vectơ $\vec{OC}$ nằm trên đường phân giác của góc AOB khi hình bình hành OACB là hình thoi; tức là OA = OB.

Bài 13. Gọi O là tâm của hình bình hành ABCD. Chứng minh rằng với điểm M bất kỳ, ta có $\vec{MO} = \frac{1}{4}\left(\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD}\right)$.

Giải

Ta có: Do O là trung điểm của AC và BD nên ta có

$\vec{MA} + \vec{MC} = 2\vec{MO}$ và $\vec{MB} + \vec{MD} = 2\vec{MO}$.

Vậy $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = 4\vec{MO}$ hay suy ra điều phải chứng minh.

Bài 14. Cho tam giác ABC.

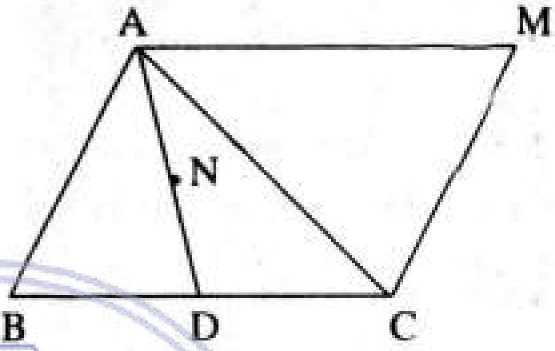
a) Tìm các điểm M và N sao cho

$\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$ và $2\vec{NA} + \vec{NB} + \vec{NC} = \vec{0}$.

b) Với các điểm M, N ở câu a, tìm các số p và q sao cho

$\vec{MN} = p\vec{AB} + q\vec{AC}$.

Giải



a) • $\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \vec{BA} + \vec{MC} = \vec{0}$

Vậy M là đỉnh thứ tư của hình bình hành ABCM.

• $2\vec{NA} + \vec{NB} + \vec{NC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\vec{NA} + 2\vec{ND} = \vec{0}$ (D là trung điểm của BC). $\Leftrightarrow \vec{NA} + \vec{ND} = \vec{0}$

Vậy N là trung điểm của AD.

b) Ta có $\vec{MN} = \vec{AN} - \vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AD} - \vec{BC} = \frac{1}{4}\left(\vec{AB} + \vec{AC}\right) - \left(\vec{AC} - \vec{AB}\right)$

$$= \frac{5}{4}\vec{AB} - \frac{3}{4}\vec{AC}.$$

Vậy với M, N ở câu a, thì $p = \frac{5}{4}$; $q = -\frac{3}{4}$ để $\vec{MN} = p\vec{AB} + q\vec{AC}$.

Bài 15. Cho đoạn thẳng AB và điểm I sao cho $2\vec{IA} + 3\vec{IB} = \vec{0}$

a) Tìm số k sao cho $\vec{IA} = k\vec{AB}$.

b) Chứng minh rằng với mọi điểm M ta có $\vec{MI} = \frac{2}{5}\vec{MA} + \frac{3}{5}\vec{MB}$

Giải

a) Ta có do $2\vec{IA} + 3\vec{IB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow -2\vec{AI} + 3\left(\vec{AB} - \vec{AI}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow -5\vec{AI} + 3\vec{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AI} = \frac{3}{5}\vec{AB}$.

Vậy $k = \frac{3}{5}$ là giá trị cần tìm.

b) Với M bất kỳ ta có

$$2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MI}\right) + 3\left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MI}\right) = \overrightarrow{0}$$

$$\Leftrightarrow -5\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} = \frac{2}{5}\overrightarrow{MA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{MB} \text{ (đpcm)}.$$

Bài 16. Trong mặt phẳng tọa độ cho ba điểm $A(-1;3)$; $B(4;2)$; $C(3;5)$.

a) Chứng minh rằng ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b) Tìm tọa độ điểm D sao cho $\overrightarrow{AD} = -3\overrightarrow{BC}$.

c) Tìm tọa độ điểm E sao cho O là trọng tâm tam giác ABE.

Giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (5;-1)$; $\overrightarrow{AC} = (4;1)$

$\Rightarrow$ không tồn tại số k nào để $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ hay A, B, C không thẳng hàng.

b) Gọi D có tọa độ là (x;y).

$\Rightarrow \overrightarrow{AD} = (x+1;y-3)$ mà $\overrightarrow{BC} = (-1;3)$

Do đó $\overrightarrow{AD} = -3\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = -3.(-1) \\ y-3 = -3.3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -6 \end{cases}$

Vậy D(2;−6).

c) Gọi $E(x_E;y_E)$.

Do O là trọng tâm tam giác ABE.

Ta có

$$\begin{cases} \dfrac{x_A + x_B + x_E}{3} = 0 \\ \dfrac{y_A + y_B + y_E}{3} = 0 \end{cases} \text{ Hay } \begin{cases} \dfrac{-1+4+x_E}{3} = 0 \\ \dfrac{3+2+y_E}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = -3 \\ y_E = -5 \end{cases}.$$

Vậy E(−3 ; −5).

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

1. Cho tam giác ABC, gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Vectơ $\overrightarrow{A'B'}$ cùng hướng với vectơ nào trong các vectơ sau:

I) $\overrightarrow{AB}$; II) $\overrightarrow{AC'}$;

III) $\overrightarrow{BA}$; IV) $\overrightarrow{C'B}$.

2. Cho ba điểm M, N, P thẳng hàng, trong đó điểm N ở giữa hai điểm M và P. Khi đó các cặp vectơ nào sau đây cùng hướng ?

I) $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{PN}$; II) $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$;

III) $\overrightarrow{MP}$ và $\overrightarrow{PN}$; IV) $\overrightarrow{NM}$ và $\overrightarrow{NP}$.

3. Cho hình chữ nhật ABCD. Trong các đẳng thức dưới đây, đẳng thức nào đúng ?

I) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$; III) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA}$;

II) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$; IV) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

4. Cho tam giác đều ABC với đường cao AH. Các đẳng thức nào dưới đây đúng ?

I) $\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HC}$; II) $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{HC}$;

III) $|\overrightarrow{AH}| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}|\overrightarrow{BC}|$; IV) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

5. Cho điểm B ở giữa hai điểm A và C, với AB = 2a, CB = 5a. Độ dài vectơ $\overrightarrow{AC}$ bằng bao nhiêu ?

I) 7a; II) 3a;

III) $\dfrac{5a}{2}$; IV) $10a^2$.

6. Cho bốn điểm A, B, C, D. Khi đó đẳng thức nào dưới đây đúng ?

I) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$; II) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$;

III) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$; IV) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC}$.

7. Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F. Khi đó đẳng thức nào dưới đây đúng ?

I) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{DE}=\vec{0}$;

II) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AF}$;

III) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}$;

IV) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AD}$.

8. Cho hình thang ABCD với hai cạnh đáy là AB = 3a và CD = 6a. Khi đó $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}|$ bằng bao nhiêu ?

I) 9a; II) 3a;

III) –3a; IV) 0.

9. Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a. Khi đó giá trị $|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}|$ bằng bao nhiêu ?

I) $2a\sqrt{2}$; II) 2a;

III) a; IV) 0.

10. Cho ba điểm bất kỳ A, B, C. Đẳng thức nào dưới đây đúng ?

I) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$; II) $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$;

III) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BA}$; IV) $\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$.

11. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Giá trị $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}|$ bằng bao nhiêu ?

I) 2a ; II) a ;

III) $a\sqrt{3}$; IV) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

12. Cho hai tam giác ABC và A'B'C' lần lượt có trọng tâm là G và G'. Đẳng thức nào dưới đây là sai ?

I) $3\overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}$; II) $3\overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{BC'}+\overrightarrow{CA'}$;

III) $3\overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{CB'}$; IV) $3\overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}$.

13. Cho điểm B ở giữa hai điểm A và C, với AB = 2a, AC = 6a. Đẳng thức nào dưới đây đúng ?

I) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$; II) $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{AB}$;

III) $\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{AB}$; IV) $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{BA}$.

14. Cho ba điểm phân biệt A, B, C. Nếu $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC}$ thì đẳng thức nào dưới đây đúng ?

I) $\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{AC}$; II) $\overrightarrow{BC} = -4\overrightarrow{AC}$;

III) $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AC}$; IV) $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{AC}$.

15. Điều kiện nào dưới đây là cần và đủ để điểm O là trung điểm của đoạn thẳng AB ?

I) OA = OB; II) $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$;

III) $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{BO}$; IV) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{0}$.

16. Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì đẳng thức nào dưới đây đúng?

I) $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$; II) $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3}$;

III) $\overrightarrow{AG} = \dfrac{3\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)}{2}$; IV) $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)}{3}$.

17. Gọi AM là trung tuyến của tam giác ABC và I là trung điểm của AM. Đẳng thức nào sau đây là đúng ?

I) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$; II) $-\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$;

III) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$; IV) $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$.

18. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm A(–1 ; 4) và B(3 ; –5). Khi đó tọa độ vectơ $\overrightarrow{BA}$ là bao nhiêu ?

I) (2 ; –1); II) (–4 ; 9);

III) (4 ; –9); IV) (4 ; 9).

19. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm A(0;5) và B(2;–7). Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB là bao nhiêu ?

I) (2 ; –2); II) (–2 ; 12);

III) (–1 ; 6); IV) (1 ; –1).

20. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm M(8;–1) và N(3;2). Nếu P là điểm đối xứng với điểm M qua điểm N thì tọa độ của P là bao nhiêu ?

I) (–2 ; 5); II) $\left(\frac{11}{2};\frac{1}{2}\right)$;

III) (13 ; –3); IV) (11 ; –1).

21. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho ba điểm A(5;–2); B(0;3) và C(–5;–1). Khi đó trọng tâm tam giác ABC có tọa độ bao nhiêu ?

I) (1 ; –1) ; II) (0 ; 0) ;

III) (0 ; 11); IV) (10 ; 0).

22. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC với trọng tâm G. Biết rằng A = (–1;4); B = (2;5); G = (0;7). Hỏi tọa độ đỉnh C là bao nhiêu ?

I) (2 ; 12); II) (–1 ; 12);

III) (3 ; 1); IV) (1 ; 12).

23. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho bốn điểm A(3;1); B(2 ; 2) và C(1 ; 6) ; D(1 ; –6). Hỏi điểm G(2 ; –1) là trọng tâm của tam giác nào sau đây ?

I) Tam giác ABC; II) Tam giác ABD;

III) Tam giác ACD; IV) Tam giác BCD.

ĐÁP ÁN

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Đáp án	III	II	IV	III	I	III	I	II	II	I	II	III

Câu	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
Đáp án	IV	I	IV	II	IV	II	IV	I	II	II	II	

III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO.

Bài 17. Tứ giác ABCD là hình gì nếu thoả mãn một trong các điều kiện sau đây ?

a) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DC}$; b) $\overrightarrow{DB}=m\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}$.

Bài 18. Cho G là trọng tâm tam giác ABC. Trên cạnh AB lấy hai điểm M và N sao cho AM = MN = NB.

a) Chứng minh rằng G cũng là trọng tâm tam giác MNC.

b) Đặt $\overrightarrow{GA}=\vec{a}$; $\overrightarrow{GB}=\vec{b}$. Hãy biểu thị các vectơ $\overrightarrow{GC}$; $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{GM}$; $\overrightarrow{GN}$ qua $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Bài 19. Cho tam giác ABC. Hãy xác định các điểm M, N, P sao cho:

a) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ b) $\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+2\overrightarrow{NC}=\vec{0}$

c) $\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{PC}=\vec{0}$

Bài 20*. Cho tam giác ABC với BC = a; CA = b; AB = c và I là tâm đường tròn nội tiếp. Chứng minh rằng : $a.\overrightarrow{IA}+b.\overrightarrow{IB}+c.\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI.

Bài 17.a) ABCD là hình bình hành.

b) ABCD là hình thang.

Bài 18. a) $\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

b) $\overrightarrow{GC}=-\vec{a}-\vec{b}$; $\overrightarrow{GM}=\dfrac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$; $\overrightarrow{GN}=\dfrac{4\vec{a}+5\vec{b}}{3}$

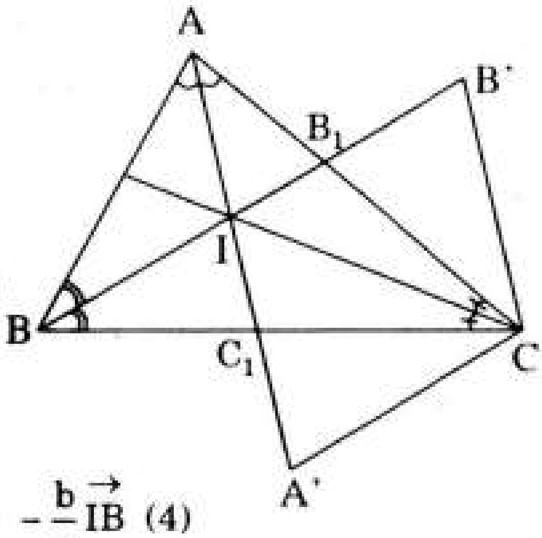
Bài 19.

a) Không có điểm M nào thoả mãn điều kiện bài ra.

b) N là trung điểm IC (với I là trung điểm AB).

c) Gọi D là đỉnh thứ tư của hình bình hành ABCD thì P là trung điểm CD.

Bài 20. Vẽ hình bình hành IB'CA' ta có



$\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IA'} + \overrightarrow{IB'}$ (1) Mặt khác ta có :

$\dfrac{A'C}{IB} = \dfrac{CC_1}{BC_1}$ hay $\dfrac{IB'}{IB} = \dfrac{CC_1}{BC_1}$ (2)

Lại có $\dfrac{CC_1}{BC_1} = \dfrac{AC}{AB}$ (tính chất phân giác)

Thay vào (2) có $IB' = \dfrac{b}{c} IB$ (3)

Mà IB' và IB là 2 tia đối nhau. $\Rightarrow \overrightarrow{IB'} = -\dfrac{b}{c}\overrightarrow{IB}$ (4)

Hoàn toàn tương tự, ta có $\overrightarrow{IA'} = -\dfrac{a}{c}\overrightarrow{IA}$ (5)

thay (4), (5) vào (1) ta được $\overrightarrow{IC} = -\dfrac{a}{c}\overrightarrow{IA} - \dfrac{b}{c}\overrightarrow{IB}$ hay $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = 0$

CHƯƠNG II
TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ VÀ ỨNG DỤNG

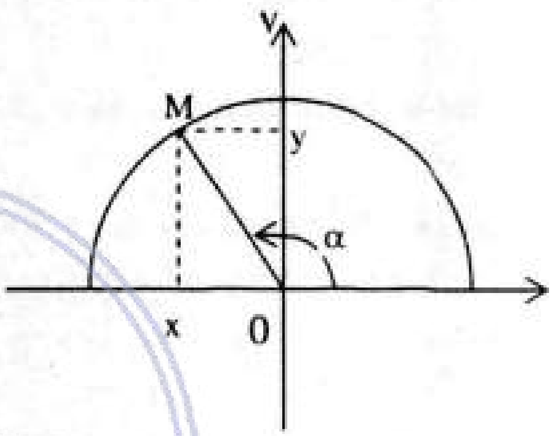
§1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC BẤT KỲ

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Định nghĩa :

Với mỗi góc α ($0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$), ta xác định một điểm M trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$.

Giả sử điểm M có toạ độ $(x; y)$.



Khi đó :

- Tung độ y của điểm M gọi là sin của góc α, và viết $\sin\alpha = y$.
- Hoành độ x của điểm M gọi là cosin của góc α, và viết $\cos\alpha = x$.
- Tỉ số $\frac{y}{x}$ (với $x \neq 0$) gọi là tan của góc α, và viết $\tan\alpha = \frac{y}{x}$.
- Tỉ số $\frac{x}{y}$ (với $y \neq 0$) gọi là cotang của góc α, và viết $\cot\alpha = \frac{x}{y}$.

Khi đó $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ gọi là các tỉ số lượng giác của góc α.

2. Tính chất :

Nếu hai góc bù nhau thì sin của chúng bằng nhau, còn cosin, tang v. cotang của chúng đối nhau. Có nghĩa là :

$$\sin\alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$$
$$\cos\alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$$
$$\tan\alpha = -\tan(180^\circ - \alpha) \qquad (\alpha \neq 90^\circ)$$
$$\cot\alpha = -\cot(180^\circ - \alpha) \qquad (0^\circ < \alpha < 180^\circ)$$

3. Bảng giá trị lượng giác của một số góc lượng giác đặc biệt.

Góc	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	kxđ	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
cot	kxđ	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	kxđ

4. Chú ý :

- Với mọi $\alpha \in [0°; 180°]$ thì $\sin\alpha \ge 0$.
- $\cos\alpha \ge 0$ khi $\alpha \in [0°; 90°]$
- $\cos\alpha \le 0$ khi $\alpha \in [90°; 180°]$.
- Với $0° \le \alpha, \beta \le 90°$, $\alpha < \beta$ thì $\begin{cases} \sin\alpha < \sin\beta \\ \cos\alpha > \cos\beta \ge 0 \end{cases}$
- Với $90° \le \alpha, \beta \le 180°$, $\alpha < \beta$ thì $\begin{cases} \sin\alpha > \sin\beta \\ 0 \ge \cos\alpha > \cos\beta \end{cases}$

II. BÀI TẬP CĂN BẢN.

Bài 1. Tính giá trị đúng của các biểu thức sau (không dùng máy tính bỏ túi hoặc bảng số).

a) $(2\sin30° + \cos135° - 3\tan150°)(\cos180° - \cot60°)$;

b) $\sin^2 90° + \cos^2 120° + \cos^2 0° - \tan^2 60° + \cot^2 135°$.

Giải

a) Ta có : $(2\sin30° + \cos135° - 3\tan150°)(\cos180° - \cot60°)$

$$= \left(2.\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - 3.(\frac{-1}{\sqrt{3}})\right)\left(-1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{3}\right)\left(-1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3} - 1\right)\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

b) $\sin^2 90° + \cos^2 120° + \cos^2 0° - \tan^2 60° + \cot^2 135°$

$$= 1^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 - (\sqrt{3})^2 + (-1)^2 = \frac{1}{4}.$$

Bài 2. Đơn giản các biểu thức

a) $\sin 100^\circ + \sin 80^\circ + \cos 16^\circ + \cos 164^\circ$

b) $2\sin(180^\circ - x)\cot x - \cos(180^\circ - x).\tan x.\cot(180^\circ - x)$ với $0^\circ < x < 90^\circ$

Giải

a) Ta có $\sin 100^\circ + \sin 80^\circ + \cos 16^\circ + \cos 164^\circ$

$= \sin(180^\circ - 80^\circ) + \sin 80^\circ + \cos 16^\circ + \cos(180^\circ - 16^\circ)$

$= \sin 80^\circ + \sin 80^\circ + \cos 16^\circ - \cos 16^\circ = 2\sin 80^\circ$

b) $2\sin(180^\circ - x).\cot x - \cos(180^\circ - x)\tan x.\ \cot(180^\circ - x)$

$= 2\sin x.\cot x + \cos x.\tan x(-\cot x)$

$= 2\sin x.\dfrac{\cos x}{\sin x} - \cos x.\tan x.\dfrac{1}{\tan x} = 2\cos x - \cos x = \cos x$.

Bài 3. Chứng minh các công thức

a) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$;

b) $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; $1 + \cot^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Giải

a) Nếu $x < 90^\circ$ thì công thức đã được chứng minh ở lớp 9.

Nếu $x = 0^\circ$ hoặc $x = 90^\circ$ thì theo định nghĩa

$\sin^2 0^\circ + \cos^2 0^\circ = 0 + 1 = 1$

$\sin^2 90^\circ + \cos^2 90^\circ = 1 + 0 = 1$.

Nếu $x > 90^\circ$ và nhỏ hơn hoặc bằng 180° thì đặt $y = 180^\circ - x$,

Ta có $\sin^2 x + \cos^2 x = \sin^2 y + (-\cos y)^2 = \sin^2 y + \cos^2 y = 1$.

b) Ta có

- $1 + \tan^2 x = 1 + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.
- $1 + \cot^2 x = 1 + \dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = \dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Lưu ý : Ba đẳng thức ở bài 3, gọi là các đẳng thức lượng giác cơ bản và ta sẽ được áp dụng mà không cần chứng minh.

III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO.

Bài 4. Cho góc α, với $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$ và $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Tính giá trị của biểu thứ

$P = 3\sin^2\alpha + 4\cos^2\alpha + \cos\alpha$

Bài 5. Tính giá trị các biểu thức

a) $3 - \sin^2 90^\circ + 2\cos^2 60^\circ - 3\tan^2 45^\circ$.

b) $4a^2\sin^2 45^\circ + (2a\cos 45^\circ)^2 - 3(a\tan 45^\circ)^2$.

Bài 6. Biết rằng $\cos 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. Tính các tỉ số lượng giác của góc α.

Bài 7. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng nếu :

$(1 - \sin A)(1 - \sin B) = \cos A\cos B$ thì : $(1 + \sin A)(1 + \sin B) = \cos A\cos B$.

IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI.

Bài 4. $P = \dfrac{35 - 6\sqrt{2}}{9}$

Bài 5. a) $3 - \sin^2 90^\circ + 2\cos^2 60^\circ - 3\tan^2 45^\circ = -\dfrac{1}{2}$.

b) $4a^2\sin^2 45^\circ + (2a\cos 45^\circ)^2 - 3(a\tan 45^\circ)^2 = a^2$.

Bài 6. $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; $\tan\alpha = 2 - \sqrt{3}$; $\cot\alpha = 2 + \sqrt{3}$.

Bài 7. $(1 - \sin A)(1 - \sin B) = \cos A\cos B$.

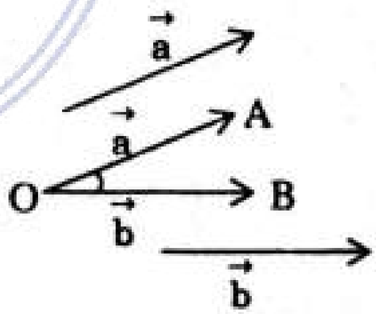
$\Leftrightarrow (1 - \sin^2 A)(1 - \sin^2 B) = \cos A.\cos B.(1 + \sin A)(1 + \sin B)$

$\Rightarrow (1 + \sin A)(1 + \sin B) = \cos A.\cos B$.

§2. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Góc giữa hai vectơ : Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Từ điểm O bất kỳ ta vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Khi đó : số đo của góc AOB được gọi là số đo góc hợp bởi hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ hoặc đơn giản là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Ký hiệu $(\vec{a}, \vec{b})$.



2. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, ký hiệu là $\vec{a}.\vec{b}$, và được xác định bởi công thức $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a}, \vec{b})$

Khi $\vec{a} = \vec{b}$ thì $\vec{a}.\vec{b} = \vec{a}.\vec{a}$ được kí hiệu $(\vec{a})^2$ gọi là bình phương vô hướng của vectơ $\vec{a}$. Vậy $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$. (tức là bình phương vô hướng của một vectơ bằng bình phương độ dài của vectơ đó).

3. Với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bất kỳ ta có $\vec{a}.\vec{b} = \vec{a}.\vec{b'}$, trong đó $\vec{b'}$ là hình

chiếu của $\vec{b}$ trên đường thẳng chứa vectơ $\vec{a}$.

4. <u>Các tính chất</u> : Với mọi vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ và mọi số thực k, ta có :

1) $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$ (tính chất giao hoán)

2) $(k\vec{a})\vec{b} = k(\vec{a}.\vec{b})$

3) $\vec{a}.(\vec{b} \pm \vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} \pm \vec{a}.\vec{c}$ (tính chất phân phối)

4) $\vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

5. <u>Biểu thức toạ độ của tích vô hướng</u> :

Trong hệ toạ độ $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Cho hai vectơ $\vec{a} = (x; y)$, $\vec{b} = (x'; y')$.

Khi đó :

1) $\vec{a}.\vec{b} = xx' + yy'$;

2) $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$;

3) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}.\sqrt{x'^2 + y'^2}}$ $(\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0})$.

đặc biệt $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$.

II. BÀI TẬP CĂN BẢN.

Bài 1. Trong trường hợp nào tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b}$ có giá trị dương? Có giá trị âm, có giá trị bằng 0?

Giải

Ta có : $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a}, \vec{b})$. Mà $|\vec{a}| \geq 0$; $|\vec{b}| \geq 0$

Do đó $\vec{a}.\vec{b}$ có giá trị dương $\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0 \\ (\vec{a}, \vec{b}) < 90^\circ \end{cases}$

$\vec{a}.\vec{b}$ có giá trị âm $\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0 \\ (\vec{a}, \vec{b}) > 90^\circ \end{cases}$

$\vec{a}.\vec{b}$ có giá trị bằng 0 $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \vec{a} = \vec{0} \text{ hoặc } \vec{b} = \vec{0} \\ (\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ \end{array}\right. \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

Bài 2. Cho tam giác ABC. Tổng $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB})$ có thể chấp nhận giá trị nào trong các giá trị sau : 90°; 180°; 270°; 360° ?

Giải

Ta có $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = 180^\circ$; $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = 180^\circ$

$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = 180^\circ$

mà $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$

Do vậy tổng $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}) = 360^\circ$

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A và $\hat{B} = 30^\circ$. Tính các giá trị của biểu thức sau :

a) $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + \sin(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + \tan\dfrac{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB})}{2}$;

b) $\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BA})$.

Giải

Do tam giác ABC vuông tại A và $\hat{B} = 30^\circ \Rightarrow \hat{C} = 60^\circ$.

$\Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 150^\circ$; $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = 30^\circ$; $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 120^\circ$

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 90^\circ$; $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = 30^\circ$. Do vậy :

a) $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + \sin(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + \tan\dfrac{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB})}{2}$

$= \cos150^\circ + \sin30^\circ + \tan60^\circ = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2} + \sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

b) $\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BA})$

$= \sin90^\circ + \cos30^\circ + \cos0^\circ = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$.

Bài 4. Cho bốn điểm A, B, C, D bất kỳ. Chứng minh rằng :

$\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB} = 0$

Từ đó suy ra một cách chứng minh định lý : "Ba đường cao trong một tam giác đồng quy" .

Giải

Cách 1. Với điểm O bất kỳ ta có :

$$\vec{DA}.\vec{BC}+\vec{DB}.\vec{CA}+\vec{DC}.\vec{AB}$$

$$=(\vec{OA}-\vec{OD})(\vec{OC}-\vec{OB})+(\vec{OB}-\vec{OD})(\vec{OA}-\vec{OC})+(\vec{OC}-\vec{OD})(\vec{OB}-\vec{OA})$$

$$=\vec{OA}.\vec{OC}-\vec{OA}.\vec{OB}-\vec{OD}.\vec{OC}+\vec{OD}.\vec{OB}+\vec{OB}.\vec{OA}-\vec{OB}.\vec{OC}-\vec{OD}.\vec{OA}$$

$$+\vec{OD}.\vec{OC}+\vec{OC}.\vec{OB}-\vec{OC}.\vec{OA}-\vec{OD}.\vec{OB}+\vec{OD}.\vec{OA}=0.$$

Cách 2. Ta có $\vec{DA}.\vec{BC}+\vec{DB}.\vec{CA}+\vec{DC}.\vec{AB}$

$$=\vec{DA}(\vec{DC}-\vec{DB})+\vec{DB}(\vec{DA}-\vec{DC})+\vec{DC}(\vec{DB}-\vec{DA})$$

$$=\vec{DA}.\vec{DC}-\vec{DA}.\vec{DB}+\vec{DB}.\vec{DA}-\vec{DB}.\vec{DC}+\vec{DC}.\vec{DB}-\vec{DC}.\vec{DA}=0.$$

- "Ba đường cao trong một tam giác đồng quy" .

Thật vậy, từ đẳng thức trên ta suy ra : Nếu $\vec{DA}.\vec{BC}=0$ và $\vec{DB}.\vec{CA}=0$ thì $\vec{DC}.\vec{AB}=0$, hay nói cách khác : Nếu AD ⊥ BC và BD ⊥ AC thì CD ⊥ AB. Điều đó chứng tỏ rằng nếu hai đường cao vẽ từ A và B của tam giác ABC cắt nhau tại D thì CD cũng là đường cao của tam giác đó.

Bài 5. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tam giác ABC vuông tại A là : $\vec{BA}.\vec{BC}=AB^2$

Giải

Trong tam giác ABC ta có : $\vec{BA}.\vec{BC}=\vec{BA}(\vec{BA}+\vec{AC})=\vec{BA}^2+\vec{BA}.\vec{AC}$

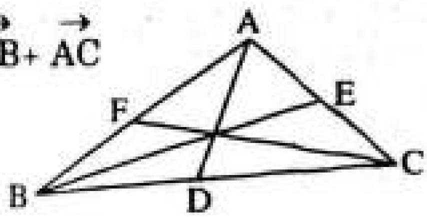
Bởi vậy tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi $\vec{BA}.\vec{AC}=0$ hay khi $\vec{BA}.\vec{BC}=\vec{BA}^2+0=AB^2$ (đpcm) .

Bài 6. Cho tam giác ABC và ba trung tuyến AD, BE, CF. Chứng minh rằng $\vec{BC}.\vec{AD}+\vec{CA}.\vec{BE}+\vec{AB}.\vec{CF}=0$

Giải

Ta có D là trung điểm của BC $\Rightarrow 2\vec{AD}=\vec{AB}+\vec{AC}$

$\Rightarrow \vec{BC}.\vec{AD}=\dfrac{1}{2}\vec{BC}(\vec{AB}+\vec{AC})$



Hoàn toàn tương tự ta có $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CF}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}.0 = 0$.

Vậy $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CF} = 0$ (đpcm).

Bài 7. Cho hai điểm M, N nằm trên đường tròn đường kính AB = 2R. Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng AM và BN.

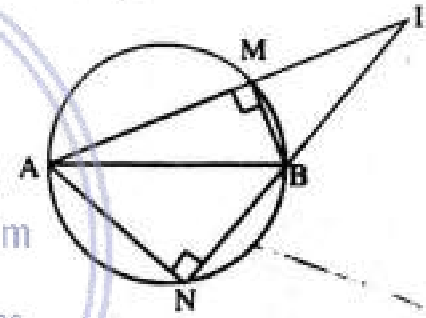
a) Chứng minh rằng : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI}$; $\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BI}$

b) Tính $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BI}$ theo R

Giải

a) Ta có do $\overrightarrow{AM}$ là hình chiếu của $\overrightarrow{AB}$ trên AI do vậy

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI}$



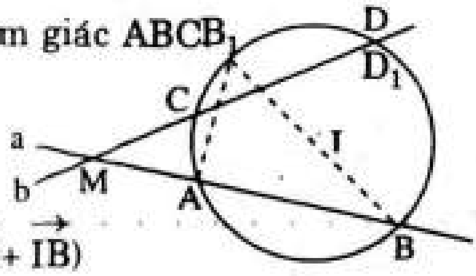
Tương tự $\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BI}$

b) Ta có : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BI}$

$= \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}) = \overrightarrow{AB}^2 = 4R^2$.

Bài 8. Trên hai đường thẳng a, b cắt nhau tại M có hai điểm A, B thuộc a và hai điểm C, D thuộc b thoả mãn : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$. Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D nằm trên một đường tròn.

Giải



- Gọi I là tâm đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác $ABCB_1$. Nối B với I cắt (C) tại B_1. Khi đó $B_1A \perp MB$, nên $\overrightarrow{MA}$ là hình chiếu của $\overrightarrow{MB_1}$ lên MB.

Bởi vậy $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MB_1}.\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB_1})(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})$

$= (\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IB})(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}) = MI^2 - IB^2 = d^2 - R^2$.

(trong đó MI = d, R là bán kính đường tròn (C)).

- Gọi D_1 là giao điểm thứ 2 của b với (C). Khi đó ta cũng dễ dàng chứng minh được $\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD_1} = d^2 - R^2$.

Vậy $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD_1} = d^2 - R^2$.

Mặt khác theo giả thiết

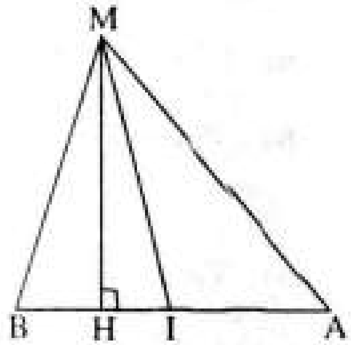
$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$, do đó $\overrightarrow{MD_1} = \overrightarrow{MD}$ (vì hai vectơ này cùng nằm trên đường thẳng b).

$\Rightarrow D \equiv D_1$ hay D thuộc đường tròn (C).

Tóm lại 4 điểm A, B, C, D nằm trên một đường tròn.

Bài 9. Cho đoạn thẳng AB cố định, AB = 2a và một số k^2. Tìm tập hợp các điểm M sao cho $MA^2 - MB^2 = k^2$.

Giải



Gọi I là trung điểm của AB, với M tuỳ ý.

Gọi H là hình chiếu của M lên AB, ta có :

$$MA^2 - MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})$$

$$= \overrightarrow{BA}.2\overrightarrow{MI} = 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IM} = 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IH}$$

Như vậy điểm M thuộc quỹ tích khi và chỉ khi $2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IH} = k^2$.

Hay $\overline{IH} = \dfrac{k^2}{2\overline{AB}} \Rightarrow IH = \dfrac{k^2}{4a}$

Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng vuông góc với AB tại H trên AB sao cho $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IH}$ cùng hướng và $IH = \dfrac{k^2}{4a}$.

Bài 10. Trong mặt phẳng toạ độ cho $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} - 5\vec{j}$ và $\vec{v} = k\vec{i} - 4\vec{j}$.

a) Tìm những giá trị của k để $\vec{u} \perp \vec{v}$.

b) Tìm những giá trị của k để $|\vec{u}| = |\vec{v}|$

Giải

Ta có : $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}; -5\right)$, $\vec{v} = (k; -4)$.

a) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{k}{2} + 20 = 0 \Leftrightarrow k = -40$.

Vậy với k = −40 thì $\vec{u} \perp \vec{v}$.

b) $|\vec{u}| = \sqrt{\dfrac{1}{4} + 25} = \dfrac{\sqrt{101}}{2}$; $|\vec{v}| = \sqrt{k^2 + 16}$

Để $|\vec{u}| = |\vec{v}| \Leftrightarrow \dfrac{101}{4} = k^2 + 16 \Leftrightarrow k^2 = \dfrac{37}{4} \Leftrightarrow k = \pm\dfrac{\sqrt{37}}{2}$.

Vậy với $k = \pm\dfrac{\sqrt{37}}{2}$ thì $|\vec{u}| = |\vec{v}|$

Bài 11. Trong mặt phẳng toạ độ cho tam giác ABC có các đỉnh A (–4 ; 1), B (2 ; 4), C (2 ; –2).

a) Tính chu vi và diện tích tam giác.

b) Tìm toạ độ của trọng tâm G, trực tâm H và tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Từ đó hãy kiểm tra tính chất thẳng hàng của ba điểm I, G, H.

Giải

Ta có : $\overrightarrow{AB} = (6\ ;\ 3)$, $\overrightarrow{AC} = (6\ ;\ -3)$, $\overrightarrow{BC} = (0\ ;\ -6)$.

$\Rightarrow AB = \sqrt{36+9} = \sqrt{45}$; $AC = \sqrt{36+9} = \sqrt{45}$; $BC = \sqrt{0+36} = 6$.

a) Chu vi của tam giác ABC là AB + AC + BC = $6 + 2\sqrt{45}$

Ta có AB = AC $\Rightarrow$ ΔABC cân tại A. Gọi D là trung điểm BC.

$\Rightarrow AD \perp BC$ và D (2 ; 1) $\Rightarrow \overrightarrow{AD} = (6\ ;\ 0) \Rightarrow AD = 6$.

Vậy $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}.BC.AD = \dfrac{1}{2}.6.6 = 18$ (đvdt)

b) Gọi G là trọng tâm tam giác $\Rightarrow$ G (0 ; 1)

- Gọi H $(x_H\ ;\ y_H)$ là trực tâm ΔABC. $\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases}$

Mà $\overrightarrow{AH} = (x_H + 4\ ;\ y_H - 1)$, $\overrightarrow{BH} = (x_H - 2\ ;\ y_H - 4)$

- Do đó $\begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0(x_H + 4) - 6(y_H - 1) = 0 \\ 6(x_H - 2) - 3(y_H - 4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = \dfrac{1}{2} \\ y_H = 1 \end{cases}$

Vậy H $\left(\dfrac{1}{2}; 1\right)$

- Gọi I $(x_I; y_I)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

$\Rightarrow \begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |\overrightarrow{IA}| = |\overrightarrow{IB}| \\ |\overrightarrow{IA}| = |\overrightarrow{IC}| \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_I + 4)^2 + (y_I - 1)^2 = (x_I - 2)^2 + (y_I - 4)^2 \\ (x_I + 4)^2 + (y_I - 1)^2 = (x_I - 2)^2 + (y_I + 2)^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y - 1 = 0 \\ 4x - 2y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{4} \\ y = 1 \end{cases} \qquad \text{Vậy } I\left(-\frac{1}{4}; 0\right)$$

Do đó $\overrightarrow{GH} = \left(\frac{1}{2}; 0\right)$, $\overrightarrow{GI} = \left(-\frac{1}{4}; 0\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GI} \Rightarrow$ I, G, H thẳng hàng.

III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO.

Bài 12. Cho tam giác ABC vuông tại A, AB = a, BC = 2a. Dựa vào định nghĩa tích vô hướng hãy tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.

Bài 13. Tứ giác ABCD có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau và cắt nhau tại M, P là trung điểm đoạn thẳng AD. Chứng minh $MP \perp BC$: khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}$

Bài 14. Cho AA' là một dây cung của đường tròn (O) và M là một điểm nằm trên dây cung đó. Chứng minh rằng : $2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MO} = MA(MA - MA')$

Bài 15. Cho điểm M nằm trong đường tròn (O). Tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) sao cho các góc AMB, BMC, CMA đều bằng 120°. Các đường thẳng AM, BM, CM, cắt đường tròn lần lượt tại A', B' và C'. Chứng minh rằng : MA + MB + MC = MA' + MB' + MC'.

Bài 16. Tìm dạng của tam giác ABC nếu :

$$(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC})\overrightarrow{CA} + (\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA})\overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB})\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{0}.$$

V. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI.

Bài 12. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} = -3a^2$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = -a^2$.

Bài 13. Sử dụng : $2\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD})(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MB}$.

Bài 14. Gọi N là trung điểm của AA' ta có :

$$2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MO} = 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA'}) = MA^2 - MA.MA'$$

Bài 15. Đặt $\vec{a} = \dfrac{\overrightarrow{MA}}{MA}$; $\vec{b} = \dfrac{\overrightarrow{MB}}{MB}$; $\vec{c} = \dfrac{\overrightarrow{MC}}{MC}$. Và sử dụng bài 14 ta có :

$$MA + MB + MC - (MA' + MB' + MC') = \overrightarrow{MO}(2\vec{a} + 2\vec{b} + 2\vec{c}) = 0$$

Bài 16. ΔABC là tam giác đều.

§3. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định lý côsin trong tam giác

Trong tam giác ABC, với AB = c, BC = a, AC = b là luôn có :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Hệ quả:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};\ \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2bc};\ \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

2. Định lý sin trong tam giác

Trong tam giác ABC, với AB = c, BC = a, AC = b. Ta có:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$ (R là bán kính đường tròn ngoại tiếp)

Hệ quả: Với mọi tam giác ABC, ta có:

$$a = 2R\sin A,\ b = 2R\sin B,\ c = 2R\sin C.$$

3. Công thức độ dài trung tuyến của tam giác

Cho tam giác ABC, BC = a, AC = b, AB = c. Gọi m_a, m_b, m_c lần lượt là độ dài các trung tuyến tương ứng với BC, AC, AB. Ta có:

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4};\ m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4};\ m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$

4. Diện tích tam giác

Với tam giác ABC ta ký hiệu h_a, h_b, h_c lần lượt là các đường cao ứng với các cạnh a, b, c; R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ABC, $p = \frac{a+b+c}{2}$, S là diện tích.

Khi đó:

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c;$$
$$S = \frac{1}{2}ab.\sin C = \frac{1}{2}bc.\sin A = \frac{1}{2}ac.\sin B;\ S = \frac{abc}{4R};\ S = pr$$
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

II. BÀI TẬP CĂN BẢN.

Bài 1. Tam giác ABC có $a = 12$, $b = 13$, $c = 15$. Tính cosA và góc A.

Giải

Áp dụng định lý cosin, ta có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{13^2 + 15^2 - 12^2}{2.13.15} \approx 0{,}6410$$

Vậy $\cos A = 0{,}6410 \Rightarrow \hat{A} \approx 50^0$

Bài 2. Cho tam giác ABC có $AB = 5$, $AC = 8$, $\hat{A} = 60^0$. Kết quả nào trong các kết quả sau là độ dài cạnh BC ?

a) $\sqrt{129}$; b) 7 ; c) 49 ; d) $\sqrt{69}$.

Giải

Ta có $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A$

$\Rightarrow BC^2 = 5^2 + 8^2 - 2.5.8.\cos 60^0 = 49$

Vậy BC = 7. Kết quả (b) đúng.

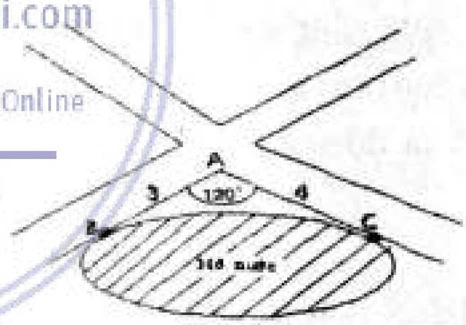
Bài 3 .Hình vẽ 30 vẽ một hồ nước nằm ở góc tạo bởi hai con đường. Bốn bạn An, Cường, Trí, Đức dự đoán khoảng cách từ B đến C như sau:

An : 5 km.

Cường : 6 km.

Trí : 7 km.

Đức : 5,5 km.



Hình 30

Biết rằng đoạn đường từ A đến B là 3 km, đoạn đường từ A đến C là 4 km, góc $B\hat{A}C$ là 120^0. Dự đoán của bạn nào về khoảng cách BC sát thực tế nhất ?

Giải

Ta có : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos B\hat{A}C = 3^2 + 4^2 - 2.3.4.\cos 120^0 \approx 37$

$\Rightarrow BC \approx 6{,}1$ km.

Vậy Cường dự đoán đúng hơn.

Bài 4. Cho tam giác ABC. Chứng minh các khẳng định sau

a) Góc A nhọn khi và chỉ khi $a^2 < b^2 + c^2$

b) Góc A tù khi và chỉ khi $a^2 > b^2 + c^2$

c) Góc A vuông khi và chỉ khi $a^2 = b^2 + c^2$

Giải

Ta có: $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

a) Góc A nhọn $\Leftrightarrow \cos A > 0 \Leftrightarrow \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} > 0 \Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2$

b) Góc A tù khi và chỉ khi $\cos A < 0$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} < 0 \Leftrightarrow a^2 > b^2 + c^2$$

c) Góc $A = 90^0 \Leftrightarrow \cos A = 0 \Leftrightarrow \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = 0 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$.

ài 5 .Cho tam giác ABC có $A = 60^0$, $B = 45^0$. Tính hai cạnh **a** và **c**

Giải

Từ công thức định lý sin trong tam giác

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\Rightarrow a = \frac{b.\sin A}{\sin B} = \frac{4.\sin 60^0}{\sin 45^0} = \frac{4.\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{4\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{6}.$$

$$c = \frac{b.\sin C}{\sin B} = \frac{4.\sin 75^0}{\sin 45^0} \approx 5,5$$

ài 6 . Cho tam giác ABC có $A = 60^0$, $a = 6$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác.

Giải

Từ định lý sin trong tam giác ta có:

$$\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow 2R = \frac{6}{\sin 60^0} = \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{12}{\sqrt{3}} \Rightarrow R = 2\sqrt{3}.$$

ài 7. Chứng minh rằng nếu ba góc của tam giác ABC thỏa mãn hệ thức $\sin A = 2\sin B.\cos C$ thì tam giác ABC là tam giác cân.

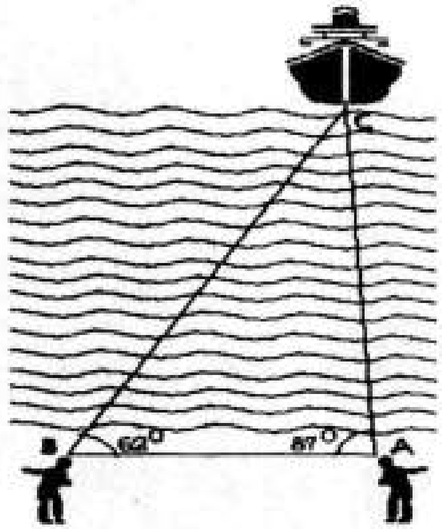
Giải

Ta có $\sin A = 2\sin B.\cos C$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{2R} = \frac{2b}{2R}.\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \Leftrightarrow a = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a}$$

$\Leftrightarrow b^2 - c^2 = 0 \Leftrightarrow b = c$. Vậy tam giác ABC cân tại A.

Bài 8. Hình bên vẽ một chiếc tàu thủy đang neo đậu ở vị trí C trên biển và hai người ở vị trí quan sát A và B cách nhau 500m. Họ đo được góc $\widehat{CAB} = 87^0$; $\widehat{CBA} = 62^0$. Tính các khoảng cách AC và BC.



Giải

Ta có:

$\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 180^0 - 149° = 31°$.

Áp dụng định lý sin ta có:

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{BA}{\sin C} \Rightarrow AC = \frac{\sin B.AB}{\sin C}$$

$$\text{Hay } AC = \frac{\sin 62^0.500}{\sin 31^0} \approx 857 \text{ (m)}$$

$$BC = \frac{AB.\sin A}{\sin C} = \frac{500.\sin 87^0}{\sin 31^0} \approx 926 \text{ (m)}$$

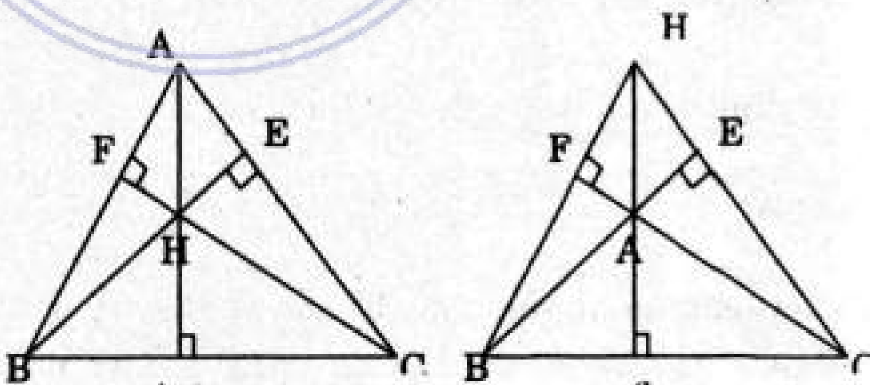
Vậy: AC ≈ 867 (m) ; BC ≈ 969 (m)

Bài 9 .Gọi H là trực tâm của tam giác không vuông ABC. Chứng minh rằng bán kính các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, HBC, HCA, HAB đều bằng nhau.

Giải

Gọi R; R_1; R_2; R_3 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, HBC, HCA, HAB. Theo hệ quả của định lý sin, trong tam giác ABC ta có:

$$R = \frac{a}{2\sin A}$$



(a (b

Trong cả hai trường hợp: Góc A nhọn (h.a), là góc tù (h.b) ta đều có:

$$E\hat{H}F + B\hat{A}C = 180° \Rightarrow \sin E\hat{H}F = \sin B\hat{A}C$$

Do đó theo hệ quả của định lý sin ta có:

$$R_1 = \frac{BC}{\sin\widehat{BHC}} = \frac{a}{2\sin\widehat{BHC}} = \frac{a}{2\sin A} = R$$

Hoàn toàn chứng minh tương tự ta cũng có $R_2 = R_3 = R$

Vậy $R = R_1 = R_2 = R_3$ (Điều phải chứng minh)

Bài 10 . Tam giác ABC có a = 7, b = 8, c = 6. Tính m_a.

Giải

Áp dụng công thức trung tuyến ta có:

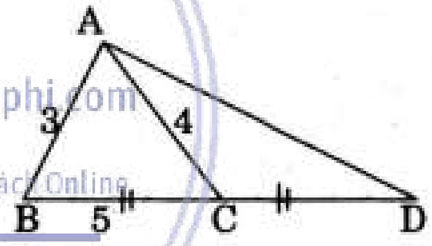
$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \Rightarrow m_a^2 = \frac{64+36}{2} - \frac{49}{4} = \frac{151}{4} \Rightarrow m_a = \frac{\sqrt{151}}{2}$$

Bài 11 . Tam giác ABC có a = 5, b = 4, c = 3. Lấy điểm D đối xứng với B qua C. Tính độ dài AD.

Giải

Ta có tam giác ABC có AC là trung tuyến, nên ta có:

$$AC^2 = \frac{AB^2 + AD^2}{2} - \frac{BD^2}{4}$$



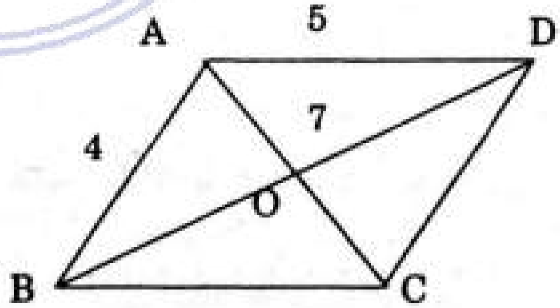
Suy ra

$$AD^2 = \frac{1}{2}\left[4.AC^2 + BD^2 - 2AB^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[4.4^2 + 5^2 - 2.3^2\right] = 73$$

Vậy $AD = \sqrt{73} \approx 8,5$

Bài 12 . Cho hình bình hành ABCD có AB = 4, BC = 5, BD = 7. Tính AC.



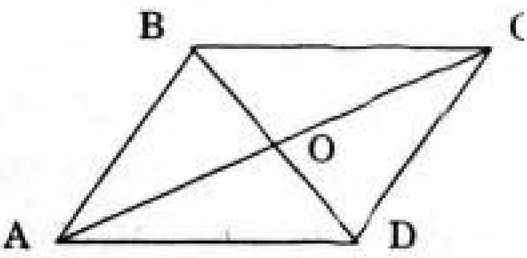
Giải

Gọi O là giao điểm của AC và BD thì AO là trung tuyến của tam giác ABD. Ta có : $AO^2 = \frac{AB^2 + AD^2}{2} - \frac{BD^2}{4} = \frac{5^2 + 4^2}{2} - \frac{7^2}{4} = 8,25$

Suy ra $AO \approx 2,9 \Rightarrow AC = 2AO \approx 5,8$.

Bài 13. Chứng minh rằng trong một hình bình hành, tổng bình phương các cạnh bằng tổng bình phương hai đường chéo.

Giải



Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD của hình bình hành ABCD.

Ta có: $AO^2 = \dfrac{AB^2 + AD^2}{2} - \dfrac{BD^2}{4}$

Hay $\dfrac{AC^2}{4} = \dfrac{AB^2 + AD^2}{2} - \dfrac{BD^2}{4}$

Suy ra $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$, mà $AB = CD$; $AD = BC$.

Vậy $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$ (đpcm)

Bài 14. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông ở A khi và chỉ khi

$$5m_a^2 = m_b^2 + m_c^2$$

Giải

Ta có : $5m_a^2 = m_b^2 + m_c^2$

$$\Leftrightarrow 5.\left(\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right) = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} + \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow 10\left(b^2 + c^2\right) - 5a^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2 + 2a^2 + 2b^2 - c^2 \Leftrightarrow 9a^2 = 9(b^2 + c^2)$$

hay $a^2 = b^2 + c^2$ Suy ra tam giác ABC vuông tại A.

Bài 15 . Tam giác ABC có $b = 6{,}12$; $c = 5{,}35$; $\hat{A} = 84^0$. Tính diện tích tam giác đó.

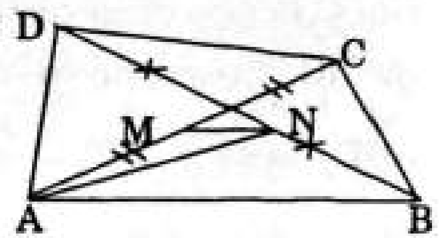
Giải

Áp dụng công thức $S = \dfrac{1}{2}bc.\sin A \Rightarrow S = \dfrac{1}{2}6{,}12.5{,}35.\sin 84^0 \approx 16{,}3$.

Vậy $S \approx 16{,}3$

Bài 16. Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BD. Chứng minh rằng $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4MN^2$.

Giải



Trong tam giác ABD ta có:

$$AB^2 + AD^2 = 2AN^2 + \frac{BD^2}{2} \quad (1)$$

Trong tam giác CBD ta có:

$$CD^2 + CB^2 = 2CN^2 + \frac{BD^2}{2} \quad (2)$$

Cộng vế với vế của (1) và (2) ta có:

$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2\left(AN^2+CN^2\right) + BD^2$ (3)

Xét tam giác CAN ta có:

$AN^2 + CN^2 = 2MN^2 + \dfrac{AC^2}{2}$ (4) (Vì M là trung điểm AC)

Thay (4) vào (3) ta được:

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2\left[2MN^2 + \frac{AC^2}{2}\right] + BD^2 = AC^2 + BD^2 + 4MN^2$$

Bài 17. Gọi S là diện tích tam giác ABC và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng $S = 2R^2.\sin A.\sin B.\sin C$.

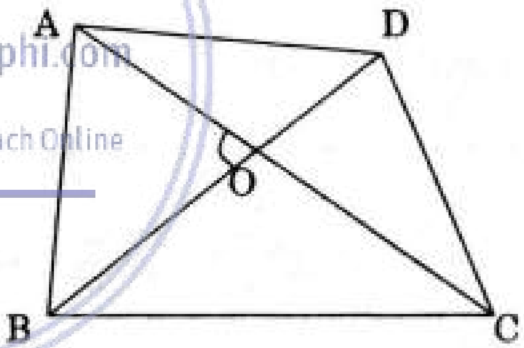
Giải

Ta có: $S = \dfrac{abc}{4R}$. Áp dụng định lý sin ta có

$$S = \frac{2R\sin A.2R\sin B.2R\sin C}{4R} = 2R^2\sin A.\sin B.\sin C.$$

Bài 18. Chứng minh rằng diện tích của một tứ giác bằng nửa tích hai đường chéo và sin của góc hợp bởi hai đường chéo đó.

Giải



Giả sử 2 đường chéo AC và BD cắt nhau tại O và góc AOB là góc nhỏ nhất trong bốn góc tạo bởi hai đường chéo của tứ giác. Gọi S_1, S_2, S_3, S_4 lần lượt là diện tích tam giác OAB, OBC, OCD, ODA.

Khi đó diện tích tứ giác ABCD bằng $S_1 + S_2 + S_3 + S_4$.

Ta có: $S_1 = \dfrac{1}{2}OA.OB.\sin A\hat{O}B$; $S_2 = \dfrac{1}{2}OB.OC.\sin B\hat{O}C$

Vì $A\hat{O}B + B\hat{O}C = 180^0$ Nên $\sin A\hat{O}B = \sin B\hat{O}C$

Vậy $S_1 + S_1 = \dfrac{1}{2}OB(OA + OC)\sin A\hat{O}B = \dfrac{1}{2}OB.AC.\sin A\hat{O}B$

Hoàn toàn tương tự ta có : $S_3 + S_4 = \dfrac{1}{2}OD.AC.\sin A\hat{O}B$

Nên $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \dfrac{1}{2}AC(OB + OD).\sin \widehat{AOB} = \dfrac{1}{2}AC.BD.\sin \widehat{AOB}$

Bài 19. Giải tam giác ABC biết

a) $c = 14$; $\hat{A} = 60^0$; $\hat{B} = 40^0$

b) $b = 4,5$; $\hat{A} = 30^0$; $\hat{B} = 75^0$

c) $c = 35$; $\hat{A} = 40^0$; $\hat{C} = 120^0$

d) $a = 137,5$; $\hat{B} = 83^0$; $\hat{C} = 57^0$

Giải

a) $\hat{A} = 60^0$; $\hat{B} = 40^0$. Ta có $\hat{C} = 180^0 - (\hat{B} + \hat{C}) = 180^0 - 100^0 = 80^0$

Từ định lý sin trong tam giác

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow b = \frac{c.\sin B}{\sin C} = \frac{14.\sin 40^0}{\sin 80^0} \approx 9,1$$

$$\text{và } a = \frac{c.\sin A}{\sin C} = \frac{14.\sin 60^0}{\sin 80^0} \approx 12,3.$$

b) $\hat{A} = 30^0$; $\hat{C} = 75^0 \Rightarrow \hat{B} = 180^0 - (\hat{A} + \hat{C}) = 75^0$

Áp dụng định lý sin trong trong tam giác ta có

$$a = \frac{b.\sin A}{\sin B} = \frac{4,5.\sin 30^0}{\sin 75^0} \approx 2,3.$$

Do $\hat{B} = \hat{C} = 75^0 \Rightarrow \Delta ABC$ cân tại A $\Rightarrow c = b = 4,5$.

Vậy : $B = 75^0$; $c = 4,5$; $a \approx 2,3$.

c) $\hat{B} = 180^0 - (\hat{A} + \hat{C}) = 180^0 - 40^0 - 120^0 = 20^0$

$$a = \frac{c.\sin A}{\sin C} = \frac{35.\sin 40^0}{\sin 120^0} \approx 26,0$$

$$b = \frac{c.\sin B}{\sin C} = \frac{35.\sin 20^0}{\sin 120^0} \approx 13,8$$

d) $\hat{A} = 180^0 - (\hat{B} + \hat{C}) = 180^0 - 83^0 - 57^0 = 40^0$

$$b = \frac{a.\sin B}{\sin A} = \frac{137,5.\sin 83^0}{\sin 40^0} \approx 212,3$$

$$c = \frac{a.\sin C}{\sin A} = \frac{137,5.\sin 57^0}{\sin 40^0} \approx 179,4$$

Bài 20. Giải tam giác ABC biết

a) $a = 6,3$; $b=6,3$; $\hat{C} = 54^0$

b) $b = 32$; $c = 45$; $\hat{A} = 87^0$

c) $a = 7$; $b = 23$; $\hat{C} = 130^0$

Giải

a) Do $a = b \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} = \dfrac{\left(180^0 - \hat{C}\right)}{2} = \dfrac{\left(180^0 - 54^0\right)}{2} = 63^0$

Áp dụng định lý sin ta có : $c = \dfrac{a.\sin C}{\sin A} = \dfrac{6,3.\sin 54^0}{\sin 63^0} \approx 5,7.$

b) Ta có $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$= 32^2+45^2-2.32.45.\cos 87^0 \approx 2898,27$

Suy ra $a \approx 53,8$

Áp dụng định lý sin ta có

$\sin B = \dfrac{b.\sin A}{a} \approx \dfrac{32.\sin 87^0}{53,8} \approx 0,5940$

Suy ra $\hat{B} \approx 36^0$, $\hat{C} = 180^0 - \left(\hat{A}+\hat{B}\right) \approx 57^0$

c) Ta có $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

$= 7^2+23^2-2.7.23.\cos 130^0 \approx 784,98$

Suy ra $c \approx 28,0$

Áp dụng định lý sin ta có $\sin A = \dfrac{a.\sin C}{c} \approx \dfrac{7\sin 130^0}{28} \approx 0,1915$

Suy ra $\hat{A} \approx 11^0$, $\hat{B} = 180^0 - \left(\hat{A}+\hat{C}\right) \approx 39^0$

Bài 21. Giải tam giác ABC biết

a) $a = 14$; $b = 18$; $c = 20$;

b) $a = 6$; $b = 7,3$; $c = 4,8$;

c) $a = 4$; $b = 5$; $c = 7$.

Giải

a) Áp dụng định lí cosin ta suy ra

$\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{18^2+20^2-14^2}{2.18.20} \approx 0,7333 \Rightarrow \hat{A} \approx 43^0.$

Lại có $\sin B = \dfrac{b.\sin A}{a} \approx \dfrac{18.\sin 43^0}{14} \approx 0{,}8769$

$\Rightarrow \hat{B} \approx 61^0 \Rightarrow \hat{C} = 180^0 - \left(\hat{A} + \hat{B}\right) \approx 76^0$

b) Áp dụng định lí cosin, và định lý sin ta suy ra

$\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{(7{,}3)^2 + (4{,}8)^2 - 6^2}{2.7{,}3.4{,}8} \approx 0{,}5755 \Rightarrow \hat{A} \approx 55^0$

Lại có $\sin B = \dfrac{b.\sin A}{a} \approx \dfrac{7{,}3.\sin 55^0}{6} \approx 0{,}9966$

$\Rightarrow \hat{B} \approx 85^0 \Rightarrow \hat{C} = 180^0 - \left(\hat{A} + \hat{B}\right) \approx 40^0$.

c) Áp dụng định lý cosin, sin ta suy ra

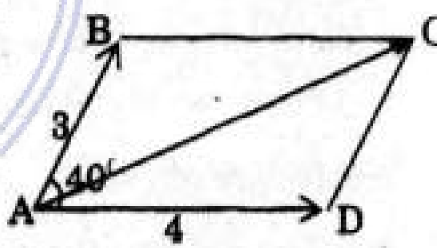
$\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{5^2 + 7^2 - 4^2}{2.5.7} \approx 0{,}8286 \Rightarrow \hat{A} \approx 34^0$

Lại có $\sin B = \dfrac{b.\sin A}{a} \approx \dfrac{5.\sin 34^0}{4} \approx 0{,}6990$

$\Rightarrow \hat{B} \approx 44^0 \Rightarrow \hat{C} = 180^0 - \left(\hat{A} + \hat{B}\right) \approx 102^0$.

Bài 22. Biết hai lực cùng tác động vào một vật tạo với nhau góc 40^0. Cường độ của hai lực đó là 3N và 4N. Tính cường độ của lực tổng hợp.

Giải



Do $\widehat{BAD} = 40^0 \Rightarrow \widehat{ABC} = 140^0$

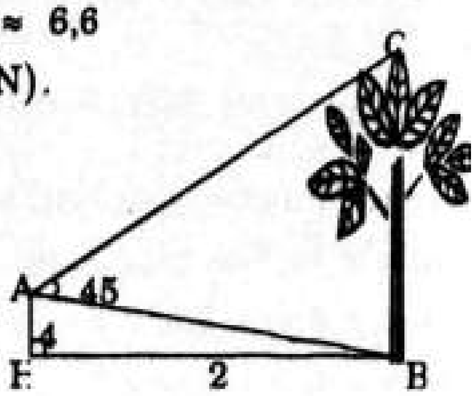
. Áp dụng định lý cosin ta có

$AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA.BC.\cos\widehat{ABC}$

$= 3^2 + 4^2 - 2.3.4.\cos 140^0 \approx 43{,}39 \Rightarrow AC \approx 6{,}6$

Vậy cường độ của lực tổng hợp $AC \approx 6{,}6$ (N).

Bài 23. Từ vị trí A người ta quan sát một cây cao như hình bên. Biết AH = 4m, HB = 20m, $\widehat{BAC} = 45^0$. Tính chiều cao của cây.



Giải

Do tam giác AHB vuông tại H

$\Rightarrow AB^2 = AH^2 + HB^2 = 4^2 + 20^2 = 416$. Nên $AB \approx 20{,}4$. Lại có :

$\sin\widehat{HAB} = \dfrac{HB}{AB} \approx \dfrac{20}{20{,}4} \approx 0{,}9804. \Rightarrow \widehat{HAB} \approx 79^0$.

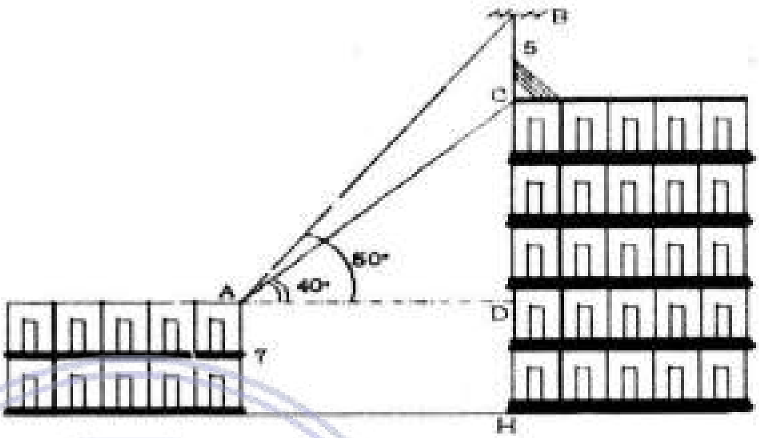
Mà $\widehat{HAB} = \widehat{ABC} \Rightarrow \widehat{ABC} \approx 79^0$. Suy ra $\widehat{ACB} \approx 56^0$

Xét tam giác ABC ta có

$$\frac{CB}{\sin 45^0} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow CB = \frac{AB.\sin 45^0}{\sin 56^0} \approx \frac{20{,}4.\sin 45^0}{\sin 56^0} \approx 17{,}4.$$

Vậy chiều cao của cây $CB \approx 17{,}4\,(m)$.

Bài 24. Trên nóc một toà nhà có một cột ăng-ten. Từ vị trí quan sát A cao 7m so với mặt đất, có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng-ten dưới góc 50^0 và 40^0 so với phương nằm ngang. Tính chiều cao của toà nhà đó.



Giải

Xét tam giác ABC có $\hat{A} = 50^0 - 40^0 = 10^0$.

$\hat{B} = 90^0 - 50^0 = 40^0$ (Vì tam giác ADB vuông tại D)

Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC ta có

$$AC = b = \frac{a.\sin B}{\sin A} = \frac{5\sin 40^0}{\sin 10^0} \approx 18{,}5$$

Lại có $CD = AC.\sin \widehat{CAD} \approx 18{,}5.\sin 40^0 \approx 11{,}9 \Rightarrow CH \approx 7 + 11{,}9 = 18{,}9$

Vậy chiều cao toà nhà $CH \approx 18{,}9\,(m)$.

III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO.

Bài 25. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

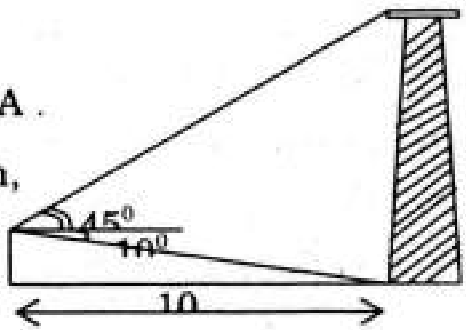
$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right).$$

Bài 26. Tam giác ABC có cạnh AB = 3, CA = 7, BC = 8.

a) Tính diện tích tam giác;

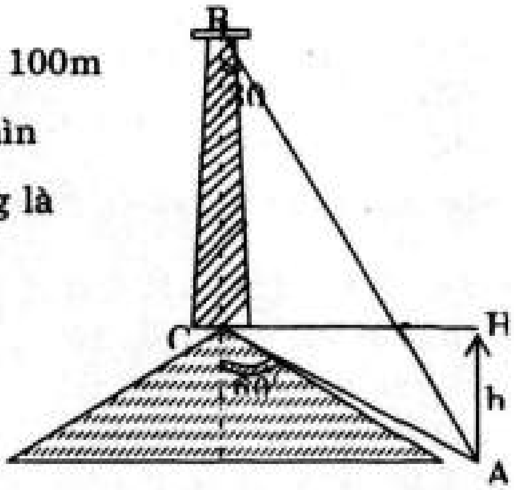
b) Tính độ dài phân giác trong AD của góc A.

Bài 27. Một người đứng cách một cái tháp 10m, nhìn thấy cái tháp dưới góc 55^0 và được



phân tích như hình vẽ. Tính chiều cao của tháp.

Bài 28. Trên ngọn đồi có một cái tháp cao 100m (Hình bên). Từ đỉnh B và chân tháp C nhìn chấm A ở chân đồi dưới các góc tương ứng là 30^0 và 60^0 so với phương thẳng đứng. Xác định chiều cao HA của ngọn đồi.



IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI.

Bài 25. Từ công thức tính độ dài trung tuyến ta được

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4} + \frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2}{4} + \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$$

$$= \frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right) \text{ (đpcm)}$$

Bài 26. a) $\Rightarrow S = 6\sqrt{3}$; b) $AD = \dfrac{\sqrt{309}}{5}$

Bài 27. Chiều cao tháp BC ≈ 12 (m).

Bài 28. Chiều cao ngọn đồi là AH = 50 m.

ÔN TẬP CHƯƠNG II

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. <u>Định nghĩa giá trị lượng giác của một góc</u>

Với mỗi góc α $\left(0^0 \le \alpha \le 180^0\right)$ ta xác định điểm M trên nửa đường tròn đơn vị sao cho

$\hat{A} = \alpha$

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{(7,3)^2+(4,8)^2-6^2}{2.7,3.4,8} \approx 0,5755 \Rightarrow \hat{A} \approx 55^0$$

Giả sử điểm M có tọa độ (x;y). Khi đó

- Tung độ y của điểm M gọi là sin của góc α, và viết: $\sin\alpha$.
- Hoành độ x của điểm M gọi là cosin của góc α, và viết: $\cos\alpha$.

- Tỷ số $\frac{x}{y}$ $(x \neq 0)$ gọi là tan của góc α, viết $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.
- Tỷ số $\frac{x}{y}$ $(y \neq 0)$ gọi là Cotang của góc α, viết $\cot\alpha = \frac{\text{Cos}\alpha}{\text{Sin}\alpha}$.

2. <u>Tích vô hướng của hai vectơ</u>

- Tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b}$ của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được tính theo công thức:

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b}).$$

- Các tính chất:

  1) $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$;

  2) $(k\vec{a}).\vec{b} = k(\vec{a}.\vec{b})$;

  3) $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{c}$;

  4) $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$;

  5) Bình phương vô hướng của một vectơ bằng bình phương độ dài của vectơ đó. $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$

- Biểu thức toạ độ của tích vô hướng của hai vectơ và khoảng cách giữa 2 điểm

  1) Nếu $\vec{a}(x;y)$, $\vec{b}(x';y')$ thì $\vec{a}.\vec{b} = xx' + yy'$

  2) Nếu $M(x_M;y_M)$, $N(x_N;y_N)$ thì $MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}$

3. <u>Định lý cosin trong tam giác</u>

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$

4. <u>Định lý sin trong tam giác</u>

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (R là bán kính đường tròn ngoại tiếp Δ ABC)

5. <u>Công thức trung tuyến</u>

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4};\ m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4};\ m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$

6. <u>Công thức tính diện tích tam giác</u>

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$$

$$= \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B.$$

$$= \frac{abc}{4R} = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Trong đó AB = c; BC = a; CA = b; h_a, h_b, h_c là các đường cao tương ứng với các đỉnh A, B, C của tam giác ABC. R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ABC. p là nửa chu vi.

II. BÀI TẬP CƠ BẢN.

A. CÂU HỎI TỰ KIỂM TRA

Bài 1. Phát biểu định nghĩa tích vô hướng của hai vectơ. Khi nào thì tích vô hướng của hai vectơ là số dương ? là số âm ? bằng không ?

Giải

Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số được xác định:

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b})$$

- $\vec{a}.\vec{b} > 0 \Leftrightarrow \cos(\vec{a},\vec{b}) > 0 \Leftrightarrow 0° < (\vec{a},\vec{b}) < 90°$
- $\vec{a}.\vec{b} < 0 \Leftrightarrow \cos(\vec{a},\vec{b}) < 0 \Leftrightarrow 90° < (\vec{a},\vec{b}) < 180°$
- $\vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \cos(\vec{a},\vec{b}) = 0 \Leftrightarrow (\vec{a},\vec{b}) = 90°$

Bài 2. Để giải tam giác ta thường dùng định lý cosin trong những trường hợp nào ? Dùng định lí sin trong những trường hợp nào ?

Giải

- Để giải tam giác ta thường dùng định lý cosin trong trường hợp:
  + Giải tam giác khi biết ba yếu tố là cạnh.
  + Giải tam giác khi biết hai cạnh và một góc xen giữa.
- Để giải tam giác ta thường dùng định lý sin trong trường hợp:
  + Giải tam giác khi biết hai góc và một cạnh xen giữa.
  + Giải tam giác khi biết hai cạnh và một góc xen giữa.

Bài 3. Cho biết độ dài ba cạnh của tam giác. Làm thế nào để tính

a) Các góc của tam giác đó ?

b) Các đường cao của tam giác đó ?

c) Bán kính đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác ?

d) Diện tích tam giác ?

Giải

a) Để tính ba góc của tam giác thì:

Bước 1: Sử dụng định lý cosin để tính 1 góc,

Bước 2: Sử dụng định lý cosin hoặc định lý sin để tính góc thứ hai,

Bước 3: Sử dụng tổng ba góc bằng 180^0 để tính góc thứ ba.

b) Để tính các đường cao ta nên:

Bước 1: Tính diện tích tam giác theo công thức Hê-rông.

Bước 2: Tính $h_a = \dfrac{2S}{a}$; $h_b = \dfrac{2S}{b}$; $h_c = \dfrac{2S}{c}$.

c) Để tính bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác thì:

Bước 1: Tính diện tích tam giác theo công thức Hê-rông.

Bước 2: $R = \dfrac{abc}{4S}$; $r = \dfrac{S}{p}$.

d) Tính diện tích tam giác theo công thức Hê-rông.

Bài 4. Trong mặt phẳng toạ độ, biết toạ độ ba đỉnh của tam giác, làm thế nào để tính chu vi, diện tích, toạ độ trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác?

Giải

- Tính chu vi: Tính khoảng cách giữa các đỉnh . Khi đó chu vi của tam giác là tổng ba khoảng cách đó.
- Tính diện tích:

  + Nếu đã tính chu vi thì ta chỉ cần Áp dụng công thức Hê-rông.

  + Áp dụng $S = \dfrac{1}{2}ab\sin C$ bằng cách tính BC, AC, cosC rồi từ đó

tính sinC qua công thức $\sin^2 C + \cos^2 C = 1$.

- Tìm toạ độ trực tâm:

Gọi trực tâm $H(x_H, y_H)$ tam giác ABC, khi đó:

$$\begin{cases} \overline{AH} \perp \overline{BC} \\ \overline{BH} \perp \overline{AC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{AH}.\overline{BC} = 0 \\ \overline{BH}.\overline{AC} = 0 \end{cases}$$ (*) (Sử dụng công thức biểu thức toạ độ)

Giải(*) $\Rightarrow$ toạ độ H .

- Tâm đường tròn ngoại tiếp: Gọi $I(x_I; y_I)$ là tâm đường tròn ngoại

tiếp thì $\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |\overline{IA}| = |\overline{IB}| \\ |\overline{IA}| = |\overline{IC}| \end{cases}$ (**)

- Giải hệ (**) $\Rightarrow$ toạ độ I .

B. BÀI TẬP

Bài 1 .Chứng minh các công thức sau:

a) $\vec{a}.\vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$;

b) $\vec{a}.\vec{b} = \frac{1}{4}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2$.

Giải

a) Ta có : $\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2) = \frac{1}{2}(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 - (\vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a}.\vec{b}))$

$= \frac{1}{2}2\vec{a}.\vec{b} = \vec{a}.\vec{b}$. Vậy $\vec{a}.\vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$

b) Ta có : $\frac{1}{4}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 = \frac{1}{4}(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a}.\vec{b} - (\vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a}.\vec{b}))$

$= \frac{1}{4}4\vec{a}.\vec{b} = \vec{a}.\vec{b}$. Vậy $\vec{a}.\vec{b} = \frac{1}{4}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2$.

Bài 2 . Gọi G là trọng tâm tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng với mọi điểm M ta luôn có
$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$.

b) Tìm tập các điểm M sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2 = k^2$, trong đó k là một số không đổi.

Giải

a) Ta có $MA^2 + MB^2 + MC^2 = (\overline{MG} + \overline{GA})^2 + (\overline{MG} + \overline{GB})^2 + (\overline{MG} + \overline{GC})^2$

$= 3\overline{MG}^2 + \overline{GA}^2 + \overline{GB}^2 + \overline{GC}^2 + 2\overline{MG}(\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC})$

$= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$

b) $MA^2 + MB^2 + MC^2 = k^2 \Leftrightarrow MG^2 = \frac{1}{3}[k^2 - (GA^2 + GB^2 + GC^2)]$

Vậy :

- Nếu $k^2 - GA^2 - GB^2 - GC^2 > 0$ thì tập các điểm M là đường tròn tâm G, bán kính $R = \sqrt{\frac{1}{3}(k^2 - GA^2 - GB^2 - GC^2)}$
- Nếu $k^2 - GA^2 - GB^2 - GC^2 = 0$ thì tập các điểm M là điểm G.
- Nếu $k^2 - GA^2 - GB^2 - GC^2 < 0$ thì tập các điểm M là tập rỗng.

Bài 3 .Cho hình bình hành ABCD. Tìm tập các điểm M sao cho
$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = k^2$, trong đó k là một số không đổi .

Giải

Gọi O là tâm hình bình hành ABCD, ta có:

$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = k^2$

$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD}\right)^2 = k^2$$

$$\Leftrightarrow 4MO^2 + OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 + 2\overrightarrow{MO}.\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right) = k^2$$

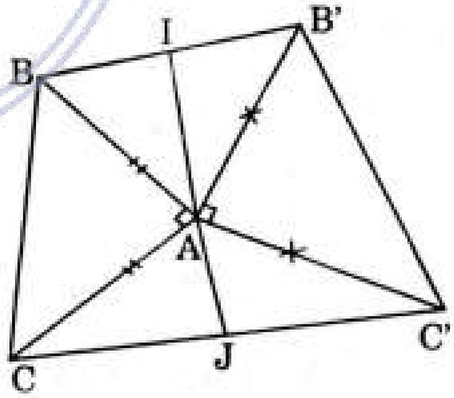
$$\Leftrightarrow MO^2 = \frac{1}{4}\left[k^2 - OA^2 - OB^2 - OC^2 - OD^2\right]$$

$$\Leftrightarrow MO^2 = \frac{1}{4}\left[k^2 - 2OA^2 - 2OB^2\right] \text{ (Vì O là tâm hình bình hành)}$$

Vậy:

- Nếu $k^2 - 2OA^2 - 2OB^2 > 0$ thì tập các điểm M là đường tròn tâm O bán kính $R = \sqrt{\frac{1}{4}\left[k^2 - 2OA^2 - 2OB^2\right]}$,
- Nếu $k^2 - 2OA^2 - 2OB^2 = 0$ thì tập các điểm M là điểm O,
- Nếu $k^2 - 2OA^2 - 2OB^2 < 0$ thì tập các điểm M là tập rỗng.

Bài 4 .Trên hình bên cho vẽ hai tam giác vuông cân ABC và AB'C' có chung đỉnh A. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của hai đoạn thẳng BB' và CC'. Chứng minh rằng.



a) $AI \perp CC'$, $AJ \perp BB'$;

b) $BC' \perp B'C$

Giải

a) Ta có

$$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CC'} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB'}\right)\left(\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AC}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{AC}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{AC}\right) \text{ (Vì các góc } B\hat{A}C \text{ và } B'\hat{A}C' \text{ là các góc vuông)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(AB.AC'.\text{Cos}\,B\hat{A}C' - AB'.AC.\cos B'\hat{A}C\right) = 0$$

(Vì AB = AC; AB' = AC' và hai góc $\widehat{BAC'}$ bằng góc $\widehat{B'AC}$)

Vậy $AI \perp CC'$. Chứng minh tương tự ta có $BB' \perp AJ$.

b) Ta có

$$\overline{BC'}.\overline{B'C} = \left(\overline{AC'} - \overline{AB}\right)\left(\overline{AC} - \overline{AB'}\right)$$

$$= \overline{AC'}.\overline{AC} - \overline{AC'}.\overline{AB'} - \overline{AB}.\overline{AC} + \overline{AB}.\overline{AB'}$$

$$= \overline{AC'}.\overline{AC} + \overline{AB}.\overline{AB'}$$ (Vì các góc $\widehat{BAC}$ và $\widehat{B'AC'}$ là các góc vuông)

$$\Rightarrow \overline{BC'}.\overline{B'C} = AC'.AC.\cos\widehat{C'AC} + AB.AB'.\cos\widehat{BAB'} = 0$$

(Vì AB = AC; AC' = AB' và $\widehat{C'AC} + \widehat{BAB'} = 180^0$ nên

$\cos\widehat{C'AC} = -\cos\widehat{BAB'}$). Vậy $BC' \perp B'C$.

Bài 5. Cho hình vuông ABCD cạnh a. Gọi N là trung điểm CD, M là điểm trên AC sao cho $AM = \frac{1}{4}AC$.

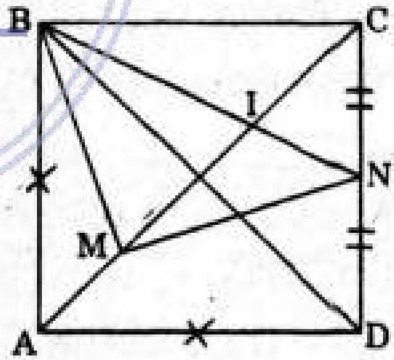
a) Tính các cạnh của tam giác BMN.

b) Có nhận xét gì về tam giác BMN. Tính diện tích tam giác đó.

c) Gọi I là giao điểm của BN và AC. Tính CI.

d) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác BDN.

Giải



a) Ta có $AC = a\sqrt{2}$; mà $AM = \frac{1}{4}AC$.

$$\Rightarrow MC = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$$

Xét tam giác CMN ta có :

$$MN^2 = CM^2 + CN^2 - 2CM.CN.\cos\widehat{NCM}$$

$$= \frac{9a^2}{8} + \frac{a^2}{4} - 2.\frac{3a\sqrt{2}}{4}.\frac{a}{2}.\cos45^0 = \frac{9a^2}{8} + \frac{a^2}{4} - \frac{3a^2}{4} = \frac{5a^2}{8}$$

Vậy $MN = \frac{a\sqrt{10}}{4}$

Xét tam giác BNC ta có

$$BN^2 = BC^2 + CN^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}.$$ Vậy $BN = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

Xét tam giác BMC ta có

$BM^2 = BC^2 + CM^2 - 2.BC.CM.\cos\widehat{BCM}$

$$= a^2 + \frac{9a^2}{8} - 2a\frac{3a\sqrt{2}}{4}.\cos45^0 = \frac{5a^2}{8}$$

Vậy $BM = \frac{a\sqrt{10}}{4}$

b) Nhận thấy BM = MN, mặt khác $MN^2 + BM^2 = BN^2$

Do vậy tam giác BMN vuông cân tại M

$\Rightarrow S_{BMN} = \frac{1}{2}BM.MN = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{10}}{4}.\frac{a\sqrt{10}}{4} = \frac{5a^2}{16}$ (đơn vị diện tích)

c) Xét tam giác BCN, ta có CI là phân giác trong của tam giác

$\Rightarrow \frac{BI}{IN} = \frac{BC}{CN} = \frac{a}{\frac{1}{2}a} = 2 \Rightarrow BI = 2IN$

Mà $BI + IN = BN = \frac{a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow IN = \frac{a\sqrt{5}}{6}$

Xét tam giác BCN ta có : $\cos\widehat{BNC} = \frac{CN}{BN} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\Rightarrow IC^2 = IN^2 + CN^2 - 2IN.CN.\cos\widehat{BNC}$

$$= \frac{5a^2}{36} + \frac{a^2}{4} - 2.\frac{a\sqrt{5}}{6}.\frac{a}{2}.\frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{14a^2}{36} - \frac{a^2}{6} = \frac{8a^2}{36}$$

Vậy $IC = \frac{2\sqrt{2}a}{6} = \frac{a\sqrt{2}}{3}$

d) Ta có $S_{\Delta BDN} = \frac{1}{2}BD.DN.\sin\widehat{BDN} = \frac{1}{2}a\sqrt{2}.\frac{a}{2}.\sin45^0 = \frac{a^2}{4}$

Lại có, gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác BDN:

$$R = \frac{BD.DN.BN}{4.S_{\Delta BDN}} = \frac{a\sqrt{2}.\frac{a}{2}.\frac{a\sqrt{5}}{2}}{a^2} = \frac{\sqrt{10}a}{4}$$

Bài 6 .Cho $\vec{e} = (4;1)$ và $\vec{f} = (1;4)$

a) Tìm góc giữa các vectơ $\vec{e}$ và $\vec{f}$

b) Tìm m để vectơ $\vec{a} = \vec{e} + m\vec{f}$ vuông góc với trục hoành

c) Tìm n để vectơ $\vec{b} = n\vec{e} + \vec{f}$ tạo với vectơ $\vec{i} + \vec{j}$ một góc 45^0.

Giải

a) Ta có

$$\text{Cos}(\vec{e};\vec{f}) = \frac{\vec{e}.\vec{f}}{|\vec{e}||\vec{f}|} = \frac{4.1+1.4}{\sqrt{1^2+4^2}.\sqrt{4^2+1^2}} = \frac{8}{17} \Rightarrow (\vec{e};\vec{f}) \approx 61^0 55'40''$$

b) Tại $\vec{a} = \vec{e} + m\vec{f}$ có toạ độ $(4 + m; 1 + 4m)$.

Trục hoành nhận $\vec{i} = (1 ; 0)$ làm vectơ đơn vị

Như vậy $\vec{a}$ vuông góc với trục hoành khi :

$(4 + m).1 + (1 + 4m).0 = 0 \Leftrightarrow m = -4$

Vậy $m = -4$ là giá trị cần tìm .

c) Ta có $\vec{b} = (4n + 1 ; n + 4)$; $\vec{i} + \vec{j} = (1 ; 1)$.

$$\Rightarrow \cos(\vec{b};\vec{i}+\vec{j}) = \frac{\vec{b}.\left(\vec{i}+\vec{j}\right)}{\left|\vec{b}\right|\left|\vec{i}+\vec{j}\right|} = \frac{4n+1+n+4}{\sqrt{(4n+1)^2+(n+4)^2}.\sqrt{2}}$$

$$= \frac{5n+5}{\sqrt{17n^2+16n+17}.\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow (\vec{b};\vec{i}+\vec{j}) = 45^0 \Leftrightarrow \frac{5n+5}{\sqrt{17n^2+16n+17}.\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 17n^2 + 16n + 17 = (5n+5)^2 \Leftrightarrow 8n^2 + 34n + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 4 \\ n = \frac{1}{4} \end{array}\right.$$

Vậy $n = 4$; $n = \frac{1}{4}$ là giá trị cần tìm.

Bài 7 .Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

a) $\cot A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$; b) $\cot A + \cot B + \cot C = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}$

Giải

a) Ta có $\sin A = \dfrac{a}{2R}$; $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$$\Rightarrow \cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.\frac{2R}{a} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{abc}.R = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$$

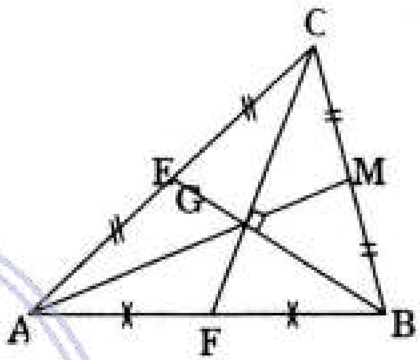
Vậy $\cot A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$

b) Từ câu a, ta suy ra

$$\cot A + \cot B + \cot C = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{4S} + \frac{b^2 + a^2 - c^2}{4S} = \frac{b^2 + c^2 + a^2}{4S}$$

Bài 8 .Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để hai trung tuyến kẻ từ B và C vuông góc với nhau là $b^2 + c^2 = 5a^2$

Giải



Giả sử BE và CF là hai trung tuyến của tam giác ABC. Gọi G là trọng tâm của tam giác.

Ta có $BE \perp CF \Leftrightarrow$ tam giác GBC vuông tại G

$\Leftrightarrow GM = \dfrac{1}{2}BC$ (M là trung điểm BC)

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}m_a\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right) = \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow b^2 + c^2 = 5a^2.$$

Bài 9 .Trong số tam giác có hai cạnh là a và b, tìm tam giác có diện tích lớn nhất

Giải

Gọi hai cạnh của tam giác ABC là AC = b, BC = a.

Ta có $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}BC.AC.\sin C = \dfrac{1}{2}ab\sin C.$

Do a, b không đổi, do đó S_{ABC} lớn nhất $\Leftrightarrow$ sinC lớn nhất

$\Leftrightarrow \sin C = 1$ hay $C = 90°$

Bài 10 .Cho tam giác ABC có a = 12, b = 16, c = 20. Tính diện tích tam giác, chiều cao h_a, các bán kính R, r của đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp tam giác.

Giải

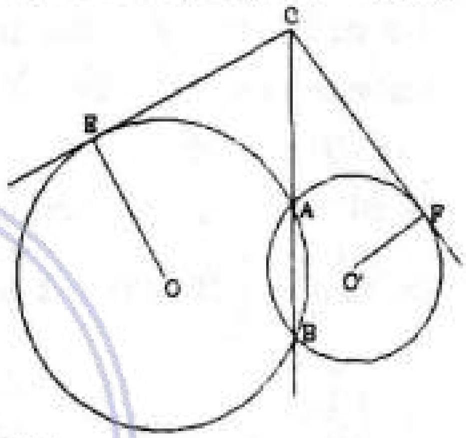
Ta có $p = \dfrac{a + b + c}{2} = \dfrac{12 + 16 + 20}{2} = 24.$

- Diện tích tam giác ABC

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{24(24-12)(24-16)(24-20)} = 96$$

- $h_a = \dfrac{2S}{a} = \dfrac{192}{12} = 16$
- $R = \dfrac{abc}{4S} = \dfrac{12.16.20}{4.96} = 10$
- $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{96}{24} = 4$

Bài 11 .Cho hai đường tròn (O;R) và (O';R') cắt nhau tại hai điểm A và B. Trên đường thẳng AB lấy điểm C ở ngoài hai đường tròn và kẻ hai tiếp tuyến CE; CF đến hai đường tròn (E; F là các tiếp tuyến). Chứng minh rằng CE = CF.



Giải

Ta có $\mathscr{P}_{C/(O)} = \overline{CA}.\overline{CB} = \overline{CE}^2 = CE^2$

$\mathscr{P}_{C/(O')} = \overline{CA}.\overline{CB} = \overline{CF}^2 = CF^2$

$\Rightarrow \mathscr{P}_{C/(O)} = \mathscr{P}_{C/(O')}$ hay CE = CF

<u>Lưu ý:</u> Bài 11 trên được sử dụng nhờ định lý sau (được viết ở cuốn phân loại hình học 10 của cùng tác giả).

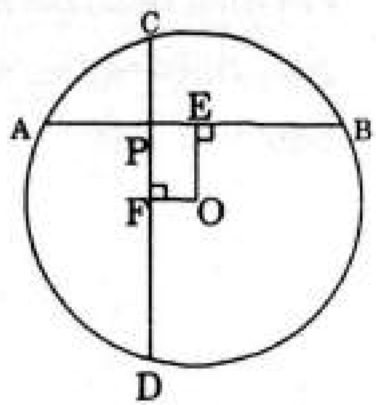
<u>Định lý:</u> Cho đường tròn (O;R) và điểm M cố định. Một đường thẳng thay đổi đi qua M và cắt đường tròn tại hai điểm A và B thì tích vô hướng $\overline{MA}.\overline{MB}$ là một số không đổi. (Giá trị $\overline{MA}.\overline{MB}$ không đổi nói trong định lý trên gọi là phương tích của điểm M đối với đường tròn (O). Kí hiệu $\mathscr{P}_{M/(O)}$.

$$\mathscr{P}_{M/(O)} = d^2 - R^2 \quad (d = OM)$$

Bài 12 .Cho đường tròn (O;R) và một điểm P cố định trong đường tròn. Hai dây cung thay đổi AB và CD luôn đi qua P và vuông góc với nhau

a) Chứng minh rằng $AB^2 + CD^2$ không đổi;

b) Chứng minh rằng $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2$ không phụ thuộc vào vị trí của P.



Giải

a) Gọi E; F theo thứ tự lần lượt là trung điểm của AB và CD. Ta

$AB^2 + CD^2 = (2AE)^2 + 2(CF)^2$

$= 4\left(AO^2 - OE^2 + CO^2 - OF^2\right) = 4\left(2R^2 - \left(OE^2 + OF^2\right)\right)$

$= 4\left(2R^2 - OP^2\right) = 8R^2 - 4OP^2$ không đổi.

b) Ta có:

$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = (PA + PB)^2 + (PC + PD)^2 - 2PA.PB - 2PC.PD$

$= (PA + PB)^2 + (PC + PD)^2 + 2\overline{PA}.\overline{PB} + 2\overline{PC}.\overline{PD}$

$= AB^2 + CD^2 + 4\mathscr{P}_{P/(O)}$

$= 8R^2 - 4PO^2 + 4(PO^2 - R^2) = 4R^2$ không đổi.

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. Giá trị $\cos 45^0 + \sin 45^0$ bằng bao nhiêu ?

I) 1; II) $\sqrt{2}$; III) $\sqrt{3}$; IV) 0.

2. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng ?

I) $\sin(180^o - \alpha) = -\cos\alpha$; II) $\sin(180^o - \alpha) = -\sin\alpha$;

III) $\sin(180^o - \alpha) = \sin\alpha$; IV) $\sin(180^o - \alpha) = \cos\alpha$;

3. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào sai?

I) $\sin 0^o + \cos 0^o = 0$; II) $\sin 90^o + \cos 90^o = 1$;

II) $\sin 180^o + \cos 180^o = -1$; IV) $\sin 60^o + \cos 60^o = \dfrac{\sqrt{3} + 1}{2}$

4. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào **không đúng** với $\forall x \in \left[0^0; 180^0\right]$

I) $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x.\cos x$; II) $(\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2\sin x.\cos x$;

III) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x$; IV) $\cos^4 x + \sin^4 x = 1$.

5. Cho O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều MNP. Trong các cặp vectơ sau, cặp nào gồm hai vectơ mà góc giữa chúng bằng 120^0 ?

I) $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{NP}$; II) $\overrightarrow{MO}$ và $\overrightarrow{ON}$; III) $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{OP}$; IV) $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$

6. Cho M, N, P, Q là 4 điểm tuỳ ý. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào sai?

I) $\overline{MN}\left(\overline{NP} + \overline{PQ}\right) = \overline{MN}.\overline{NP} + \overline{MN}.\overline{PQ}$;

II) $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP}$;

III) $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{MN}$;

IV) $\left(\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PQ}\right)\left(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ}\right) = MN^2 - PQ^2$.

7. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào đúng ?

I) $|\vec{a}.\vec{b}| = |\vec{a}|.|\vec{b}|$; II) $\sqrt{\vec{a}^2} = |\vec{a}|$;

III) $\sqrt{\vec{a}^2} = \vec{a}$; IV) $\vec{a} = \pm|\vec{a}|$.

8. Cho $\vec{a} = (3;4)$, $\vec{b} = (4;-3)$. Kết luận nào sau đây là sai ?

I) $\vec{a}.\vec{b} = 0$; II) $\vec{a} \perp \vec{b}$;

III) $|\vec{a}.\vec{b}| = 0$; IV) $|\vec{a}|.|\vec{b}| = 0$.

9. Cho $\vec{a} = (9;3)$. Vectơ nào sau đây không vuông góc với vectơ $\vec{a}$?

I) $\vec{v}(1;-3)$; II) $\vec{v}(2;-6)$; III) $\vec{v}(1;3)$; IV) $\vec{v}(-1;3)$

10. Cho Δ ABC có $a = 14$; $b = 18$; $c = 20$. Kết quả nào sau đây là gần đúng nhất ?

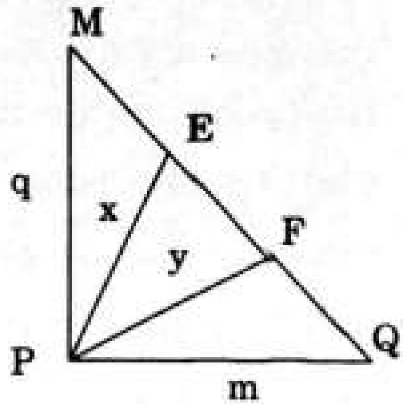
I) $B \approx 42^0 50'$; II) $B \approx 60^0 56'$

III) $B \approx 119^0 04'$; IV) $B \approx 90^0$.

11. Nếu tam giác MNP có $MP = 5$; $PN = 8$ và $\widehat{MPN} = 120^0$ thì độ dài cạnh MN (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất) là

I) 11,4 ; II) 12,4 ; III) 7,0 ; IV) 12,0 .

12. Cho Δ MPQ tại P. Trên cạnh MQ lấy hai điểm E, F sao cho các góc MPE, EPF, FPQ bằng nhau. Đặt $MP = q$, $PQ = m$, $PE = x$, $PF = y$ (hình bên). Trong các hệ thức sau, hệ thức nào đúng ?



I) $ME = EF = FQ$;

II) $ME^2 = q^2 + x^2 - xq$;

III) $MF^2 = q^2 + y^2 - yq$;

IV) $MQ^2 = q^2 + m^2 - 2qm$.

13. Tam giác ABC có BC = 10; $\hat{A} = 30^0$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng bao nhiêu ?

I) 5;   II) 10;   III) $\frac{10}{\sqrt{3}}$; IV) $10\sqrt{3}$

14. Tam giác với ba cạnh là 5, 12 và 13 có diện tích bằng bao nhiêu ?

I) 30;   II) $20\sqrt{2}$;

III) $10\sqrt{3}$;   IV) 20.

15. Tam giác ABC có ba cạnh là 6, 10, 8. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đó bằng bao nhiêu ?

I) $\sqrt{3}$;   II) 4;

III) 2;   IV) 1.

16. Tam ABC có $\hat{B} = 60^0$, $\hat{C} = 45^0$, AB = 5. Hỏi cạnh AC bằng bao nhiêu?

I) $5\sqrt{3}$;   II) $5\sqrt{2}$;

III) $\frac{5\sqrt{6}}{2}$;   IV) 10.

Đáp án:

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8
Đáp án	II	III	I	IV	I	II	II	IV

Câu	9	10	11	12	13	14	15	16
Đáp án	III	II	I	III	II	I	III	III

III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO.

Bài 13. Cho tam giác ABC có AB = 10, AC = 4 và $\hat{A} = 60^0$.

a) Tính chu vi tam giác.

b) Tính tan $\hat{C}$

c) Cho điểm D trên tia đối của tia AB sao cho AD = 6, hãy tìm điểm E trên tia AC sao cho BE là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔADE.

Bài 14. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 60^0$, a = 10, r = $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

a) Tính R   ;   b) Tính b, c .

Bài 15. Cho tam giác ABC có AB = 13, BC = 14, CA = 15, đường cao AH.

a) Tính diện tích tam giác ;

b) Tính đường cao AH của tam giác ;

c) Tính $\overline{HB}.\overline{HC}$.

Bài 16. Chứng minh rằng tam giác ABC thoả mãn $\begin{cases} \sin B.\sin C = \dfrac{3}{4} \\ a^2 = \dfrac{a^3 - b^3 - c^3}{a - b - c} \end{cases}$

là tam giác đều.

IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI.

Bài 13: a) Chu vi tam giác ABC là : 2p = AB + BC + CD ≈ 10 + 4 + 8,72 ≈ 22,72

a) $\tan \hat{C} = -5\sqrt{3}$

b) Điểm E cần tìm là điểm trên tia AC và cách A một đoạn = $5 + \sqrt{85}$

Bài 14. a) $R = \dfrac{10}{\sqrt{3}}$; **b)** b = c = 10

Bài 15. a) S = 84 ; **b)** AH = 12 ; **c)** $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{AC}$.

Bài 16. Ta có $a^2 = \dfrac{a^3 - b^3 - c^3}{a - b - c} \Leftrightarrow a^2 = b^2 - bc + c^2$

Mặt khác : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A \Rightarrow \cos A = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \hat{A} = 60^o$ (1)

Lại có : $\sin B \sin C = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow 4\sin B \sin C = 3$

$\Leftrightarrow 2(\cos(B - C) - \cos(B + C)) = 3 \Leftrightarrow 2\cos(B - C) + 2\cos A = 3$

$\Leftrightarrow 2\cos(B - C) = 2$ (vì $\hat{A} = 60^o$) $\Leftrightarrow \cos(B - C) = 1 \Rightarrow B = C$ (2)

Từ (1), (2) ⇒ tam giác ABC đều.

CHƯƠNG III
PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

§1. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA ĐƯỜNG THẲNG

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Vectơ $\vec{n}$ khác $\vec{0}$, có giá vuông góc với đường thẳng Δ gọi là vectơ pháp tuyến của đường thẳng Δ.

• Cho đường thẳng Δ đi qua $M_o(x_o\,;\,y_o)$ và nhận $\vec{n}(A\,;\,B)$ làm vectơ pháp tuyến khi đi qua Δ có phương trình tổng quát :

$$Ax + By + C = 0 \ (A^2 + B^2 \neq 0\ ;\ C = -Ax_o - By_0)$$

• Khi B = 0 thì (Δ) có phương trình: $Ax + C = 0$ là đường thẳng vuông góc trục Ox

A = 0 thì Δ có phương trình: $By + C = 0$ là đường thẳng vuông góc trục Oy

C = 0 thì Δ đi qua gốc tọa độ.

Lưu ý : Đường thẳng

$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ $(a \neq 0\ ;\ b \neq 0)$ đi qua $A(a\,;\,0)$ và $B(0\,;\,b)$ gọi là phương trình đường thẳng theo đoạn chắn.

2. Trong hệ Oxy cho 2 đường thẳng

$$\Delta_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$$
$$\Delta_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

• Δ_1, Δ_2 cắt nhau $\Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$

• $\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$

• $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$

II. BÀI TẬP CĂN BẢN.

Bài 1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

a) Đường thẳng song song với trục Ox có phương trình $y = m\ (m \neq 0)$

b) Đường thẳng song song với trục Oy có phương trình $x = m^2+1$

c) Phương trình $y = kx + b$ là phương trình của đường thẳng:

d) Các đường thẳng đều có phương trình dạng $y = kx + b$.

e) Đường thẳng đi qua 2 điểm $A(a;0)$ và $B(0;b)$ có phương trình
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Giải

- Các mệnh đề đúng: b ; c; a.
- Các mệnh đề sai: d ; e

Bài 2. Viết phương trình tổng quát của:

a) Đường thẳng Ox

b) Đường thẳng Oy

c) Đường thẳng đi qua $M(x_0 ; y_0)$ và song song với Ox;

d) Đường thẳng đi qua $M(x_0 ; y_0)$ và vuông góc với Ox;

e) Đường thẳng OM, với $M(x_0 ; y_0)$ khác điểm O.

Giải

a) Do đường thẳng Ox đi qua $O(0 ; 0)$ và vuông góc với $\vec{j}\ (0; 1)$

$\Rightarrow$ Ox có phương trình tổng quát $y = 0$

b) Do đường thẳng Oy đi qua $O(0 ; 0)$ và vuông góc với $\vec{i}\ (1 ; 0)$

$\Rightarrow$ Đường thẳng Oy có phương trình $x = 0$

c) Do đường thẳng qua $M(x_0; y_0)$ và vuông góc với $\vec{j}\ (0 ; 1)$

$\Rightarrow$ Đường thẳng có phương trình $0 (x - x_0) + 1(y - y_0) = 0$

hay $y - y_0 = 0\ (y_0 \neq 0)$

d) Do đường thẳng qua $M(x_0; y_0)$ và vuông góc với $\vec{i}\ (1; 0)$

$\Rightarrow$ Đường thẳng có phương trình $1(x - x_0) + 0(y - y_0) = 0$

hay $x - x_0 = 0\ (x_0 \neq 0)$

e) Do đường thẳng đi qua O (0; 0) nên nó có phương trình:

$Ax + By = 0$

Mặt khác : đường thẳng đi qua $M(x_0; y_0)$

$\Rightarrow Ax_0 + By_0 = 0$

Lấy $A=y_0 \Rightarrow B=x_0$

Do đó đường thẳng có phương trình: $y_0x - x_0y = 0$

Bài 3. Cho tam giác ABC có phương trình các đường thẳng AB, BC, CA là

AB: $2x - 3y - 1 = 0$

BC: $x + 3y + 7 = 0$

CA: $5x - 2y + 1 = 0$

Viết phương trình đường cao của tam giác kẻ từ đỉnh B.

Giải

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x - 3y - 1 = 0 \\ x + 3y + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -\dfrac{5}{3} \end{cases} \text{ suy ra } B\left(-2; -\dfrac{5}{3}\right)$$

Dễ thấy AC đi qua $M\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$; $N\left(-\dfrac{1}{5}; 0\right)$

$\Rightarrow$ Đường cao BB' nhận $\overrightarrow{MN}\left(-\dfrac{1}{5}; -\dfrac{1}{2}\right)$ làm vectơ pháp tuyến.

$\Rightarrow$ Đường cao BB' có phương trình:

$$-\frac{1}{5}(x+2) - \frac{1}{2}\left(y + \frac{5}{3}\right) = 0$$

Hay $2x + 5y + \dfrac{37}{3} = 0$

Bài 4. Cho 2 điểm P(4; 0) ; Q(0; -2)

a) Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm A(3; 2) và song song với đường thẳng PQ;

b) Viết phương trình đường trung trực của đoạn PQ.

Giải

a) Ta có: Đường thẳng PQ có phương trình:

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{-2} = 1 \Leftrightarrow x - 2y - 4 = 0$$

Đường thẳng Δ song song với PQ có phương trình là:

$x - 2y + c = 0 \quad (c \neq 4)$

Do Δ đi qua A(3; 2) suy ra $3 - 2.2 + c = 0 \Leftrightarrow c = 1$

Vậy đường thẳng Δ cần tìm có phương trình:

$x - 2y + 1 = 0$

b) Gọi J là trung điểm của PQ $\Rightarrow$ J (2; -1)

Đường trung trực của PQ nhận $\overrightarrow{PQ}(-4; -2)$ làm vectơ pháp tuyến

$\Rightarrow$ Đường trung trực của PQ có phương trình:

$-4(x - 2) - 2(y + 1) = 0$

hay $2x + y - 3 = 0$

Bài 5. Cho đường thẳng d: $x - y = 0$ và điểm M(2; 1)

a) Viết phương trình tổng quát của đường thẳng đối xứng của d qua điểm M;

b) Tìm hình chiếu của điểm M trên đường thẳng d.

Giải

a) Xét tập hợp những điểm A' đối xứng với A qua M khi A chạy trên

d. Đặt $A(x_0; y_0)$ chạy trên d và $A'(x ; y)$ là điểm đối xứng với A qua M.

Ta có: $\begin{cases} x + x_0 = 4 \\ y + y_0 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 4 - x \\ y_0 = 2 - y \end{cases}$

Do $A \in$ d nên $x_0 - y_0 = 4 \Rightarrow (4-x) - (2-y) = 0 \Leftrightarrow x - y - 2 = 0$

Do đó đường thẳngđối xứng với d qua M có phương trình:

$$x - y - 2 = 0$$

b) Xét đường thẳng Δ có phương trình: $x + y + m = 0$

Dễ thấy $\Delta \perp d$

$M \in \Delta \Leftrightarrow 2 + 1 + m = 0 \Leftrightarrow m = -3$

Vậy đường thẳng Δ đi qua M và vuông góc với d có phương trình : $x + y - 3 = 0$

Gọi M' là hình chiếu của M lên d. Suy ra tọa độ M' là nghiệm của

hệ phương trình: $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ y = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

Vậy $M'\left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{3}{2}\right)$

Bài 6 . Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau và tìm giao điểm của chúng (nếu có)

a) $2x - 5y + 3 = 0$ và $5x + 2y - 3 = 0$

b) $x - 3y + 4 = 0$ và $0,5x - 1,5y + 4 = 0$

c) $10x + 2y - 3 = 0$ và $5x + y - 1,5 = 0$

Giải

a) Ta có: $\dfrac{2}{5} \neq \dfrac{-5}{2} \Rightarrow$ đường thẳng $2x - 5y + 3 = 0$ cắt đường thẳng $5x + 2y - 3 = 0$

Toạ độ giao điểm I là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x - 5y + 3 = 0 \\ 5x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{9}{29} \\ y = \dfrac{21}{29} \end{cases} \Rightarrow I\left(\dfrac{9}{29}; \dfrac{21}{29}\right)$$

b) Ta có: $\dfrac{1}{0,5} = \dfrac{-3}{-1,5} \neq \dfrac{4}{4} \Rightarrow$ hai đường thẳng song song với nhau

c) Ta có: $\dfrac{10}{5} = \dfrac{2}{1} = \dfrac{-3}{-1,5} \Rightarrow$ Hai đường thẳng trùng nhau

III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

Bài 7. Viết phương trình các đường cao của tam giác ABC biết A (-1; 2); B (2; -4); C (1;0)

Bài 8. Viết phương trình các đường trung trực của tam giác ABC biết M (-1; 1); N (1; 9); P (9; 1) là các trung điểm của ba cạnh

Bài 9. Cho điểm A (-1; 3) và đường thẳng Δ có phương trình $x - 2y + 2 = 0$. Dựng hình vuông ABCD sao cho 2 đỉnh B, C nằm trên Δ và các toạ độ của đỉnh C đều dương.

a) Tìm toạ độ các đỉnh B, C, D

b) Tính chu vi và diện tích của hình vuông ABCD

Bài 10. Cho 2 đường thẳng:

d_1: $2x - y - 2 = 0$ $\quad$ d_2: $x + y + 3 = 0$ $\quad$ và điểm M (3 ; 0)

a) Tìm toạ độ giao điểm của d_1 và d_2

b) Viết phương trình đường thẳng đi qua M cắt d_1 và d_2 lần lượt tại các điểm A và B sao cho MA = MB

IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 7.

Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Ta có:

- Đường cao AH có phương trình : $x - 4y + 9 = 0$
- Đường cao BH có phương trình : $x - y - 6 = 0$
- Đường cao CH có phương trình : $x - 2y - 1 = 0$

Bài 8.

Giả sử M, N, P theo thứ tự là trung điểm của AB, AC, BC của tam giác ABC

Đường trung trực của BC có phương trình : $x + 4y - 13 = 0$

Đường trung trực của AB, AC lần lượt là: $x - y + 2 = 0$ và $x - 1 = 0$

Bài 9.

a) B (0 ; 1) ; C (2 ; 2) ; D (1; 4)

b) Ta có chu vi hình vuông ABCD là: $4 \times AB = 4\sqrt{5}$

Diện tích của ABCD là : $AB \times AD = \sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5$

Bài 10.

a) Toạ độ giao điểm I của d_1 và d_2 là $I\left(-\frac{1}{3}; -\frac{8}{3}\right)$

b) MA có phương trình $y = 8(x - 3)$

§2. PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ CỦA ĐƯỜNG THẲNG

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1.Vectơ $\vec{u}$ khác $\vec{0}$ có giá song song hoặc trùng với Δ được gọi là véctơ chỉ phương của đường thẳng Δ.

2. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng Δ đi qua M_0 $(x_0; y_0)$ và có véctơ chỉ phương $\vec{u}$ (a; b). Điểm M (x; y) ∈ Δ thì:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \quad (t \in R) \qquad (1)$$

(1) gọi là phương trình tham số của đường thẳng Δ.

3. Từ (1) với a ≠ 0; b ≠0 thì:

$\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b}$ gọi là phương trình chính tắc của Δ

<u>Lưu ý</u>: Nếu a = 0 thì Δ có phương trình tổng quát $x - x_0 = 0$ và không có phương trình chính tắc.

Nếu b = 0 thì Δ có phương trình tổng quát $y - y_0 = 0$ và không có phương trình chính tắc.

Nếu $\vec{u}$ (a ; b) là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ thì $\vec{n}$ (-b ; a) sẽ là vectơ pháp tuyến của Δ.

II. BÀI TẬP CĂN BẢN.

Bài 1. Cho đường thẳng Δ : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2t \end{cases}$ (t ∈ R). Hỏi trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai:

a) Điểm A (-1; -4) thuộc Δ;

b) Điểm B (8; 14) không thuộc Δ, điểm C (8; -14) thuộc Δ;

c) Δ có vectơ pháp tuyến $\vec{u}$ (1; 2);

d) Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ (1; -2);

e) Phương trình $\dfrac{x - 8}{3} = \dfrac{y - 14}{-6}$ là phương trình chính tắc của Δ;

f) Phương trình $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2}$ là phương trình chính tắc của Δ.

Giải

- Các mệnh đề đúng: b, d, e, f
- Các mệnh đề sai: a, c

Bài 2. Cho đường thẳng Δ : Ax + By + C =0. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

a) Vectơ $\vec{n}$ (A; B) là vectơ pháp tuyến của Δ;

b) Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ =(-B; A);

c) Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ =(kB; kA) với k ≠0;

d) Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ =(5B; -5A);

e) Đường thẳng vuông góc với Δ có các vectơ chỉ phương $\vec{u}$ =(A; B).

Giải

- Các mệnh đề đúng: a, b, d, e
- Các mệnh đề sai: c

Bài 3. Hãy viết phương trình tham số, phương trình chính tắc (nếu có) và phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua hai điểm A và B trong mỗi trường hợp sau:

a) A = (-3 ; 0) ; B (0 ; 5).
b) A (4 ; 1) ; B (4 ; 2).
c) A (-4 ; 1) ; B (1 ; 4).

Giải

a) Ta có: $\overrightarrow{AB}$ = (3; 5)

Suy ra:

- Đường thẳng AB có phương trình tham số là: $\begin{cases} x = -3 + 3t \\ y = 5t \end{cases}$
- Đường thẳng AB có phương trình chính tắc: $\frac{x+3}{3} = \frac{y}{5}$
- Đường thẳng AB có phương trình tổng quát: 5(x + 3) – 3y =0
  Hay: 5x – 3y +15 =0

b) $\overrightarrow{AB}$ =(0 ; 1) Suy ra:

- Đường thẳng AB có phương trình tham số: $\begin{cases} x=4 \\ y=1+t \end{cases}$
- Đường thẳng AB không có phương trình chính tắc
- Đường thẳng AB có phương trình tổng quát: x – 4 =0

c) $\overrightarrow{AB}=(5; 3)$ Suy ra:

- Đường thẳng AB có phương trình tham số: $\begin{cases} x=-4+5t \\ y=1+3t \end{cases}$
- Đường thẳng AB có phương trình chính tắc: $\dfrac{x+4}{5}=\dfrac{y-1}{3}$
- Đường thẳng AB có phương trình tổng quát:
  $3(x+4)-5(y-1)=0$ Hay: $3x-5y+17=0$

Bài 4. Cho điểm A (-5; 2) và đường thẳng $\Delta : \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+3}{-2}$. Hãy viết phương trình đường thẳng.

a) Đi qua A và song song với Δ;

b) Đi qua A và vuông góc với Δ.

Giải

a) Do Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}(1; -2)$. Do vậy đường thẳng (d_1) cần tìm có phương trình:

$$\frac{x+5}{1}=\frac{y-2}{-2}$$

b) Do đường thẳng (d_2) cần tìm vuông góc với Δ nên nó nhận $\vec{u}(1; -2)$ làm vectơ pháp, mà nó đi qua A

Do vậy d_2 có phương trình: $1(x+5)-2(y-2)=0$ hay $x-2y+9=0$

Bài 5. Xét vị trí tương đối của mỗi cặp đường thẳng sau đây và tìm toạ độ giao điểm (nếu có) của chúng:

a) $\begin{cases} x=4-2t \\ y=5+t \end{cases}$ $(t \in R)$ và $\begin{cases} x=8+6t' \\ y=4-3t' \end{cases}$ $(t' \in R)$

b) $\begin{cases} x=5+t \\ y=-3+2t \end{cases}$ $(t \in R)$ và $\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y+7}{3}$

c) $\begin{cases} x=5+t \\ y=-1-t \end{cases}$ $(t \in R)$ và $x+y-4=0$

Giải

a) Ta có đường thẳng (d_1): $\begin{cases} x=4-2t \\ y=5+t \end{cases}$ đi qua M_1 (4 ; 5) và có vectơ chỉ phương: $\vec{u_1}(-2; 1)$

Đường thẳng (d_2) $\begin{cases} x=8+6t' \\ y=4-3t' \end{cases}$ $(t' \in R)$: đi qua M_2 (8 ; 4) và có vectơ chỉ phương $\vec{u_2}$ (-2 ; 1)

$\Rightarrow$ (d_1) và (d_2) có vectơ chỉ phương cùng phương

Mặt khác : $M_1 \notin d_2$

Do vậy d_1 song song với d_2

b) d_3 $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = -3 + 2t \end{cases}$ $(t \in R)$ có vectơ chỉ phương $\vec{u_3}(1\ ;\ 2)$ và đi qua $M_3\ (5\ ;\ -3)$

d_4: $\dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y+7}{3}$ có vectơ chỉ phương $\vec{u_4}$ $(2\ ;\ 3)$ và đi qua $M_4\ (4\ ;\ -7)$

Do $\vec{u_3}$ và $\vec{u_4}$ không cùng phương, suy ra d_3 cắt d_4

Toạ độ giao điểm là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x = 5 + t \\ y = -3 + 2t \\ \dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y+7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -5 \\ x = 0 \\ y = -13 \end{cases}$$ Vậy toạ độ giao điểm là $(0\ ;\ -13)$

c) d_5 : $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = -1 - t \end{cases}$ nhận $\vec{n_2}$ $(1\ ;\ 1)$ làm vectơ pháp tuyến và đi qua $M_5\ (5;\ 1)$

d_6: $x + y - 4 = 0$ nhận $\vec{n_2}$ $(1;\ 1)$ làm vectơ pháp tuyến

Do $\vec{n_1}, \vec{n_2}$ cùng phương, mặt khác : $5 - 1 - 4 = 0 \Rightarrow M_5 \in (d_6)$

Vậy d_5 và d_6 trùng nhau.

Bài 6. Tìm hình chiếu vuông góc của điểm P (3; -2) xuống đường thẳng Δ trong mỗi trường hợp sau:

a) Δ: $\begin{cases} x = t \\ y = 1 \end{cases}$ $(t \in R)$

b) Δ: $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{-4}$

c) Δ: $5x - 12y + 10 = 0$

Giải

a) Gọi H là điểm nằm trên $\Delta \Rightarrow H\ (t\ ;\ 1)$, suy ra $\overrightarrow{PH}\ (t - 3\ ;\ 3)$

Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{i}\ (1;\ 0)$

H là hình chiếu của P lên $\Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{PH} \perp \vec{i} \Leftrightarrow \overrightarrow{PH} . \vec{i} = 0$

$$\Leftrightarrow t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 3$$

Vậy H (3 ; 1)

b) Ta có Δ có phương trình tham số $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -4t \end{cases}$ $(t \in R)$ (1)

Đường thẳng d đi qua P và vuông góc với Δ nhận $\vec{u}(3 ; -4)$ làm vectơ pháp tuyến. Suy ra d có phương trình:

$$3(x - 3) - 4(y + 2) = 0 \text{ hay } 3x - 4y - 17 = 0 \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) $\Rightarrow 3(1 + 3t) - 4(-4t) - 17 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{14}{25}$

Thay vào (1) : $\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{67}{25} \\ y = -\dfrac{56}{25} \end{cases}$

Vậy hình chiếu vuông góc của P lên Δ có toạ độ $\left(\dfrac{67}{25}; -\dfrac{56}{25}\right)$

c) Gọi Δ' là đường thẳng qua P và vuông góc với Δ. Do Δ' vuông góc với Δ nên Δ' nhận $\vec{u}(5; -12)$ làm vectơ chỉ phương. Suy ra Δ' có phương trình tham số: $\begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = -2 - 12t \end{cases}$ $(t \in R)$ (3)

Thay (3) vào phương trình Δ ta có: $t = -\dfrac{49}{169}$

Suy ra toạ độ hình chiếu của P lên Δ là:

$$\begin{cases} x = 3 + 5.\left(-\dfrac{49}{169}\right) \\ y = -2 - 12.\left(\dfrac{49}{169}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{262}{169} \\ y = \dfrac{250}{169} \end{cases}$$

Vậy hình chiếu của P lên Δ có toạ độ : $\left(\dfrac{262}{169}; \dfrac{250}{169}\right)$

Bài 7. Tìm điểm M trên đường thẳng Δ: $x - y + 2 = 0$ cách đều hai điểm E (0 ; 4) và F (4 ; -9)

Giải

Ta có Δ có phương trình tham số: $\begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \end{cases}$ $(t \in R)$

Do M ∈ (Δ) suy ra: M (t; 2 +t) $\Rightarrow \overrightarrow{EM} = (t; t - 2)$; $\overrightarrow{FM}\ (t - 4 ; t + 11)$

Do M cách đều E và F thì EM = FM

$\Leftrightarrow t^2 + (t-2)^2 = (t-4)^2 + (t+11)^2 \Leftrightarrow 18t + 133 = 0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{133}{18}$

Vậy $M\left(-\dfrac{133}{18}; -\dfrac{97}{18}\right)$

Bài 8. Cho hình bình hành có toạ độ một đỉnh là (4; -1), biết phương trình hai cạnh là $x - 3y = 0$ và $2x + 5y + 6 = 0$. Tìm toạ độ ba đỉnh còn lại của hình bình hành đó.

Giải

Giả sử hình bình hành đó là ABCD có A (4 ; -1)

Do A không thuộc hai cạnh đã cho. Giả sử BC: $x - 3y = 0$
CD: $2x + 5y + 6 = 0$

• Toạ độ điểm C là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ 2x + 5y + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{6}{11} \\ x = -\dfrac{18}{11} \end{cases}$

Vậy $C\left(-\dfrac{18}{11}; -\dfrac{6}{11}\right)$

• Do AB song song với CD nên AB có phương trình:

$2(x - 4) + 5(y + 1) = 0$ hay $2x + 5y - 3 = 0$

⇒ Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ:

$\begin{cases} 2x + 5y - 3 = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{9}{11} \\ y = \dfrac{3}{11} \end{cases}$ Vậy $B\left(\dfrac{9}{11}; \dfrac{3}{11}\right)$

• AD song song với BC nên AD có phương trình

$1(x - 4) - 3(y + 1) = 0$ hay $x - 3y - 7 = 0$

⇒ Toạ độ điểm D là nghiệm của hệ:

$\begin{cases} x - 3y - 7 = 0 \\ 2x + 5y + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{17}{11} \\ y = -\dfrac{20}{11} \end{cases}$ Vậy $D\left(\dfrac{17}{11}; -\dfrac{20}{11}\right)$

III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO.

Bài 9. Lập phương trình tham số, chính tắc (nếu có) của đường thẳng d trong mỗi trường hợp sau:

a) d đi qua A (-1 ; 2) và song song với đường thẳng $5x + 1 = 0$

b) d đi qua B (7 ; -5) và vuông góc với đường thẳng $x + 3y - 6 = 0$

c) d đi qua C (-2 ; 3) và có hệ số góc $k = -3$

d) d đi qua hai điểm M (3 ; 6) và N (5 ; -3)

Bài 10. Tìm hình chiếu vuông góc của điểm M (3; 1) trên đường thẳng Δ có phương trình $\begin{cases} x = -2 - 2t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$

Bài 11. Lập phương trình các đường thẳng chứa bốn cạnh của hình vuông ABCD biết đỉnh A (-1; 2) và phương trình của một đường chéo là:

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -2t \end{cases} \quad (t \in R)$$

Bài 12. Cho hai đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = -2t \\ y = 1 + t \end{cases} t \in$ □ và $\Delta' \begin{cases} x = -2 - t \\ y = t \end{cases} t \in R.$

Viết phương trình đường thẳng đối xứng của Δ' qua Δ

IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI.

Bài 9.

a) d có phương trình tham số: $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 + 5t \end{cases} \quad (t \in R)$

d không có phương trình chính tắc

b) d có phương trình tham số: $\begin{cases} x = 7 + t \\ y = -5 + 3t \end{cases} \quad (t \in R)$

d có phương trình chính tắc: $\dfrac{x - 7}{1} = \dfrac{y + 5}{3}$

c) d có phương trình tham số: $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 - 3t \end{cases} \quad (t \in R)$

d có phương trình chính tắc: $\dfrac{x + 2}{1} = \dfrac{y - 3}{-3}$

d) d đi qua hai điểm M (3 ; 6) và N (5 ; -3) ⇒ d nhận $\overrightarrow{MN}(2 ; -9)$ làm vectơ chỉ phương, do đó:

- d có phương trình tham số: $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 6 - 9t \end{cases}$
- d có phương trình chính tắc: $\dfrac{x - 3}{2} = \dfrac{y - 6}{-9}$

Bài 10. Toạ độ hình chiếu vuông góc M' của M lên Δ là $M'\left(\frac{1}{2};\frac{-3}{2}\right)$

Bài 11. Phương trình bốn cạnh của hình vuông là : $x + 1 = 0$; $y = 0$; $x + 3 = 0$; $y - 2 = 0$

Bài 12. Đường thẳng cần tìm là: $x + 7y - 22 = 0$

§3. KHOẢNG CÁCH VÀ GÓC

I .TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Khoảng cách từ điểm M $(x_0; y_0)$ đến đường thẳng

Δ: $Ax + By + C = 0$ là: $d(M;\Delta) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

2. Hai đường thẳng a và b cắt nhau tạo thành bốn góc, số đo của góc nhỏ nhất được gọi là góc giữa hai đường thẳng a và b. Khi a song song hoặc trùng với b, ta quy ước góc giữa chúng bằng 0^0

Cho 2 đường thẳng Δ_1: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ và Δ_2: $A_2x + B_2y + C_2 = 0$.
Gọi φ là góc hợp bởi Δ_1 và Δ_2 khi đó:

1) $\cos\varphi = \cos(\Delta_1;\Delta_2) = \dfrac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}.\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$

2) $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$

II. BÀI TẬP CĂN BẢN.

Bài 1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

a) Côsin của góc giữa hai đường thẳng a, b bằng côsin của góc giữa hai vectơ chỉ phương của chúng;

b) Nếu hai đường thẳng Δ và Δ' lần lượt có phương trình $px + y + m = 0$ và $x + py + n = 0$ thì: $\cos(\Delta;\Delta') = \dfrac{2|p|}{p^2 + 1}$;

c) Trong tam giác ABC ta có: $\cos A = \cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$;

d) Nếu φ là góc giữa hai đường thẳng chứa hai cạnh AB, AC của tam giác ABC thì: $\cos\varphi = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.BC}$;

e) Hai điểm (7; 6) và (-1; 2) nằm về hai phía của đường thẳng $y = x$.

Giải

- Các mệnh đề đúng: b, c, e

- Các mệnh đề sai: a, d

Bài 2. Cho ba điểm A (4; -1); B (-3; 2); C (1; 6). Tính góc BAC và góc giữa đường hai đường thẳng AB, AC.

Giải

Ta có: $\overrightarrow{AB}(-7\,;\,3)$; $\overrightarrow{AC}(-3\,;\,7)$

$$\cos \widehat{BAC} = \cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{-7(-3)+3.7}{\sqrt{(-7)^2+3^2}.\sqrt{(-3)^2+7^2}} = \frac{21}{29}$$

$\Rightarrow \widehat{BAC} \approx 43^0 36'$

Do các đường thẳng AB, AC lần lượt có các vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ mà $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) < 90^0$ nên $(AB, AC) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \approx 43^0 36'$

Bài 3. Viết phương trình đường thẳng song song và cách đường thẳng $Ax + By + C = 0$ một khoảng bằng h cho trước.

Giải

Gọi M (x;y) là điểm cách đường thẳng Δ: $Ax + By + C = 0$ một khoảng là h

$$\Rightarrow d(M;\Delta) = \frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \Leftrightarrow \frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = h$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} Ax+By+C+h\sqrt{A^2+B^2} = 0 & (1)\\ Ax+By+C-h\sqrt{A^2+B^2} = 0 & (2)\end{array}\right.$$

Vậy tập hợp các điểm M là hai đường thẳng song song với đường thẳng đã cho có phương trình (1) và (2)

Bài 4. Cho 3 điểm A (3 ; 0); B (-5 ; 4) và P (10 ; 2). Viết phương trình đường thẳng đi qua P đồng thời cách đều A và B

Giải

Gọi Δ là đường thẳng qua P và có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}(a;\,b)$

$\Rightarrow \Delta$ có phương trình: $a(x-10) + b(y-2) = 0$

hay $ax + by - 10a - 2b = 0$

Để Δ cách đều A và B thì:

$d(A;\Delta) = d(B;\Delta)$

$$\Leftrightarrow \frac{|-7a-2b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|-15a+2b|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow |-7a-2b| = |-15a+2b|$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2a - b = 0 & (1)\\ a = 0 & (2)\end{array}\right.$$

Với $a = 0$, lấy $b = 1 \Rightarrow (\Delta)$ có phương trình $y - 2 = 0$

Với $2a - b = 0$, lấy $a = 1 \Rightarrow b = 2$, do đó đường thẳng Δ là $x + 2y - 14 = 0$

Vậy đường thẳng cần tìm là: $x + 2y - 14 = 0$ hoặc $y - 2 = 0$

Bài 5. Cho điểm M (2; 3). Viết phương trình đường thẳng cắt hai trục toạ độ ở A và B sao cho tam giác ABM là tam giác vuông cân tại đỉnh M.

Giải

Giả sử đường thẳng cắt Ox tại A; cắt Oy tại B. Như vậy bài toán đưa về tìm A (a; 0) và B (0; b) sao cho $\begin{cases} MA = MB \\ \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = 90^0 \end{cases}$

Ta có: $\overrightarrow{MA} = (a - 2; -3)$; $\overrightarrow{MB}(-2; b - 3)$

- $MA = MB \Leftrightarrow (a-2)^2 + 9 = 4 + (b-3)^2$

  $\Leftrightarrow a^2 - 4a = b^2 - 6b \quad (1)$

- $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = 90^0 \Leftrightarrow -2(a-2) - 3(b-3) = 0$

  $\Leftrightarrow 2a + 3b - 13 = 0 \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có hệ : $\begin{cases} a^2 - 4a = b^2 - 6b \\ 2a + 3b - 13 = 0 \end{cases}$ vô nghiệm

Vậy không có đường thẳng nào thoả mãn điều kiện bài toán

Bài 6. Cho hai đường thẳng Δ_1: $x + 2y - 3 = 0$ và Δ_2: $3x - y + 2 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua P (3; 1) cắt Δ_1, Δ_2 ở A, B sao cho Δ tạo với Δ_1 và Δ_2 một tam giác cân có cạnh đáy là AB

Giải

Gọi $\vec{n}(A; B)$ là vectơ pháp tuyến của đường thẳng Δ cần tìm:

Do Δ cắt Δ_1, Δ_2 ở A, B tạo thành một tam giác cân có đáy là AB

$\Rightarrow (\Delta, \Delta_1) = (\Delta, \Delta_2)$

$$\Leftrightarrow \frac{|A + 2B|}{\sqrt{5(A^2 + B^2)}} = \frac{|3A - B|}{\sqrt{10(A^2 + B^2)}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}|A + 2B| = |3A - B| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = (1 + \sqrt{2})B \\ A = (1 - \sqrt{2})B \end{array}\right.$$

Cho $B = 1$ thì $A = 1 \pm \sqrt{2}$

Vậy đường thẳng Δ cần tìm có phương trình là:

$(1 + \sqrt{2})(x - 3) + (y - 1) = 0$ và $(1 - \sqrt{2})(x - 3) + (y - 1) = 0$

III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO.

Bài 7. Cho ba điểm A (2; 0); B (4; 1); C (1; 2)

a) Chứng minh rằng A, B, C là ba đỉnh của một tam giác

b) Viết phương trình đường phân giác trong của góc A

c) Tìm toạ độ tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác ABC

Bài 8. Biết các cạnh của tam giác ABC có phương trình:

AB : $x - y + = 0$, BC : $3x + 5y + 4 = 0$, AC : $7x + y - 12 = 0$

a) Viết phương trình đường phân giác trong góc A .

b) Không dùng hình vẽ hãy cho biết gốc toạ độ O nằm trong hay ngoài tam giác ABC

Bài 9. Xác định các giá trị của a để góc tạo bởi hai đường thẳng

$\begin{cases} x = 2 + at \\ y = 1 - 2t \end{cases}$ $(t \in R)$ và $3x + 4y + 12 = 0$ bằng 45^0

Bài 10. Cho tam giác ABC có đỉnh A $\left(\frac{4}{5};\frac{1}{5}\right)$. Hai đường phân giác trong tại đỉnh B và C lần lượt có phương trình $x - 2y - 1 = 0$ và $x + 3y - 1 = 0$. Viết phương trình cạnh BC của tam giác.

IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI.

Bài 7.

a) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2; 1)$, $\overrightarrow{AC}(-1; 2)$. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương. Do đó A, B, C không thẳng hàng và là ba đỉnh của một tam giác

b) Phương trình đường phân giác góc A là: $3x - y - 6 = 0$

c) $I\left(\frac{5 + 2\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}};\frac{3}{2 + \sqrt{2}}\right)$

Bài 8.

a) Phương trình đường phân giác trong góc A là: $3x - y + 2 = 0$

b) O nằm trong tam giác ABC

Bài 9. Với $a = \frac{2}{7}$ và $a = -14$ thì Δ_1 và Δ_2 tạo với nhau một góc 45^0

Bài 10. Phương trình cạnh BC là: $y + 1 = 0$

§4. ĐƯỜNG TRÒN

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Phương trình đường tròn (C) tâm I (a; b), bán kính R là:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

2. Phương trình $x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$, với điều kiện $A^2 + B^2 > C$, là phương trình của đường tròn có tâm I (-A; -B) và bán kính $R = \sqrt{A^2 + B^2 - C}$

3. Đường thẳng tiếp xúc với đường tròn khi và chỉ khi khoảng cách từ tâm đường tròn đến đường thẳng bằng bán kính của đường tròn.

Bài 1. Cho phương trình $x^2 + y^2 + px + (p - 1)y = 0$ (1). Hỏi trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

a) (1) là phương trình của một đường tròn

b) (1) là phương trình của một đường tròn đi qua gốc toạ độ

c) (1) là phương trình của một đường tròn có tâm J (p; p – 1)

d) (1) là phương trình của một đường tròn có tâm J $\left(-\frac{p}{2}; -\frac{p-1}{2}\right)$ và có bán kính $R = \frac{1}{2}\sqrt{2p^2 - 2p + 1}$

Giải

- Các mệnh đề đúng: a, b, d
- Các mệnh đề sai: c

Bài 2. Viết phương trình đường tròn (C) trong mỗi trường hợp sau:

a) (C) có tâm I (1 ; 3) và đi qua điểm A (3; 1)

b) (C) có tâm I (-2 ; 0) và tiếp xúc với đường thẳng Δ: $2x + y - 1 = 0$

Giải

a) Do (C) có tâm I (1; 3) nên (C) có dạng:

$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = R^2$$

Mặt khác: (C) đi qua A (3; 1) $\Rightarrow (3 - 1)^2 + (1 - 3)^2 = R^2 \Leftrightarrow R^2 = 8$

Vậy (C) có phương trình $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 8$

b) Ta có khoảng cách từ I đến Δ là:

$$d_{(I,\Delta)} = \frac{|2.(-2) + 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + 1}} = \sqrt{5} \Rightarrow \text{bán kính của đường tròn } R = d_{(I,\Delta)}$$

Vậy đường tròn (C) có phương trình: $(x + 2)^2 + y^2 = 5$

Bài 3. Tìm tâm và bán kính của các đường tròn (nếu có) cho bởi các phương trình sau:

a) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$;

b) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 2 = 0$

c) $2x^2 + 2y^2 - 5x - 4y + 1 + m^2 = 0$

Giải

a) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$

Do $A^2 + B^2 - C = 1^2 + 1^2 + 2 = 4$

$\Rightarrow$ Đường tròn có tâm I (1; 1) bán kính R =2

b) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 2 = 0$

Ta có: $A^2 + B^2 - C = 2^2 + 3^2 - 2 = 11$

$\Rightarrow$ Đường tròn có tâm I (2; 3) bán kính $R = \sqrt{11}$

c) $2x^2 + 2y^2 - 5x - 4y + 1 + m^2 = 0$, Ta có:

$$A^2 + B^2 - C = \left(\frac{5}{4}\right)^2 + 1 - \frac{1+m^2}{2} = \frac{25 + 16 - 8 - 8m^2}{16} = \frac{-8m^2 + 33}{16} > 0$$

$\Rightarrow$ Đường tròn có tâm $I\left(\frac{5}{4};1\right)$ bán kính $R = \frac{1}{4}\sqrt{-8m^2 + 33}$ với $|m| < \sqrt{\frac{33}{8}}$

Bài 4. Viết phương trình của đường tròn đi qua ba điểm M (1; - 2), N (1 ; 2), P (5 ; 2)

Giải

Gọi (C) có phương trình $x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$ là phương trình đường tròn đi qua M, N ,P

Do M, N, P nằm trên (C) nên:

$$\begin{cases} 2A - 4B + C + 5 = 0 \\ 2A + 4B + C + 5 = 0 \\ 10A + 4B + C + 29 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2A + C + 5 = 0 \\ B = 0 \\ 10A + C + 29 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -3 \\ B = 0 \\ C = 1 \end{cases}$$

Vậy đường tròn (C) đi qua 3 điểm N, M, P có phương trình

$x^2 + y^2 - 6x + 1 = 0$ hay $(x - 3)^2 + y^2 = 8$

Bài 5. a) Viết phương trình đường tròn tiếp xúc với hai trục toạ độ và đi qua điểm (2; 1)

b) Viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm (-1; 1) ; (1; 4) và tiếp xúc với trục Ox

Giải

a) Do điểm (2 ; 1) nằm ở góc phần tư thứ nhất, do vậy đường tròn đi qua (2 ; 1) và tiếp xúc với hai trục toạ độ chỉ tiếp xúc ở các điểm thuộc nửa trục Ox, Oy

Gọi I (a, b) là tâm và R là bán kính của đường tròn cần tìm thì phương trình của đường tròn là: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ $(a > 0 ; b > 0)$

Do đường tròn tiếp xúc với Ox và Oy

$\Rightarrow |a| = |b| = R$ hay $a = b = R$

Mặt khác đường tròn đi qua điểm (2; 1) nên:

$$(2-a)^2 + (1-b)^2 = a^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = 5 \end{array}\right.$$

- Với a=1: đường tròn có phương trình

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$$

- Với a =5 đường tròn có phương trình

$$(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$$

b) Gọi (C) là đường tròn cần tìm có tâm I (a; b), bán kính R

$\Rightarrow$ (C) có phương trình $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

Do (C) tiếp xúc với trục Ox $\Rightarrow$ R = b

$\Rightarrow$ (C) có phương trình $(x-a)^2 + (y-b)^2 = b^2$

Do (C) đi qua hai điểm (-1; 1) và (1; 4) nên ta có:

$$\begin{cases} (1-a)^2 + (1-b)^2 = b^2 \\ (1-a)^2 + (4-b)^2 = b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 2a - 2b + 2 = 0 \\ a^2 - 2a - 8b + 17 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6b - 15 = 0 \\ a^2 - 2a - 2b + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{5}{2} \\ a^2 - 2a - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{5}{2} \\ \left[\begin{array}{l} a = -1 \\ a = 3 \end{array}\right. \end{cases}$$

- Với a = -1; b = $\dfrac{5}{2}$

$\Rightarrow$ Đường tròn cần tìm là:

$$(x+1)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

- Với a = 3, b = $\dfrac{5}{2}$.

$\Rightarrow$ Đường tròn cần tìm là:

$$(x-3)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

Bài 6. Tìm tọa độ các giao điểm của đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \end{cases}$

và đường tròn (C): $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 6$

Giải

Gọi M(x; y) là giao điểm của Δ và (C).

Tọa độ giao đểm M của Δ và (C) là nghiệm hệ

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \\ 4t^2 + (t-4)^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \\ 5t^2 - 8t = 0 \quad (1) \end{cases}$$

Từ (1) $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = \dfrac{8}{5} \end{array}\right.$

• Với $t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow M(1; -2)$

• Với $t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{21}{5} \\ y = -\dfrac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow M\left(\dfrac{21}{5}; -\dfrac{2}{5}\right)$

Vậy tọa độ giao điểm của Δ và (C) là (1; –2) và $\left(\dfrac{21}{5}; -\dfrac{2}{5}\right)$.

Bài 7. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $x^2 + y^2 = 4$ trong mỗi trường hợp sau:

a) Tiếp tuyến song song với đường thẳng $3x - y + 17 = 0$

b) Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x + 2y - 5 = 0$

c) Tiếp tuyến đi qua điểm (2; -2)

Giải

Ta có đường tròn (C) có tâm I (0; 0), bán kính R =2

a) Do tiếp tuyến (d) song song với đường thẳng $3x - y + 17 = 0$

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến d có dạng: $3x - y + c = 0$ $(c \neq 17)$

Theo bài ta có: $d(I, d) = R \Leftrightarrow \dfrac{|c|}{\sqrt{10}} = 2 \Rightarrow c = \pm 2\sqrt{10}$

Vậy tiếp tuyến cần tìm là: $3x - y \pm 2\sqrt{10} = 0$

b) Do tiếp tuyến Δ vuông góc với đường thẳng $x + 2y - 5 = 0$

$\Rightarrow$ Phương trình Δ có dạng: $2x - y + D = 0$

Theo bài ta có:

$d(I; \Delta) = R \Leftrightarrow \dfrac{|D|}{\sqrt{5}} = 2 \Rightarrow D = \pm 2\sqrt{5}$

Vậy tiếp tuyến cần tìm là: $2x - y \pm 2\sqrt{5} = 0$

c) Gọi Δ_1 là đường thẳng đi qua (2 ; -2)

$\Rightarrow \Delta_1$ có dạng $A(x - 2) + B(y + 2) = 0$ $(A^2 + B^2 \neq 0)$

Δ_1 là tiếp tuyến của (C) $\Leftrightarrow d(I, A) = R$

$$\Leftrightarrow \frac{|-2A + 2B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 2 \Leftrightarrow (A - B)^2 = A^2 + B^2 \Leftrightarrow AB = 0$$

Nếu $A = 0 \Rightarrow B \neq 0$, ta có tiếp tuyến cần tìm là $y + 2 = 0$

Nếu $B = 0 \Rightarrow A \neq 0$, ta có tiếp tuyến cần tìm là $x - 2 = 0$

Bài 8. Xét vị trí tương đối của đường thẳng Δ và đường tròn (C) sau đây:

(Δ) $3x + y + m = 0$

(C) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$

Giải

Ta có: (C) là đường tròn tâm I (2; −1), bán kính R = 2

Khoảng cách từ tâm I đến Δ là:

$$d(I, \Delta) = \frac{|3.2 + 1.(-1) + m|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{|5 + m|}{\sqrt{10}}$$

- Nếu $d(I; \Delta) > R \Leftrightarrow |5 + m| > 2\sqrt{10} \Rightarrow \Delta$ không cắt (C)
- Nếu $d(I; \Delta) = R \Leftrightarrow |5 + m| > 2\sqrt{10} \Rightarrow \Delta$ tiếp xúc với (C)
- Nếu $d(I; \Delta) < R \Leftrightarrow |5 + m| > 2\sqrt{10} \Rightarrow \Delta$ cắt (C).

Bài 9. Cho hai đường tròn

(C) : $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 1 = 0$ và (C'): $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0$

Tìm toạ độ các giao điểm của hai đường tròn đó.

Giải

Toạ độ giao điểm của hai đường tròn (nếu có) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 2y - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 6 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\dfrac{3}{2} \\ y^2 + 2y - \dfrac{7}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{3}{2} \\ y = \dfrac{-2 \pm \sqrt{11}}{2} \end{cases}$$

Vậy tọa độ giao điểm là : $\left(-\frac{3}{2}; \frac{-2 + \sqrt{11}}{2}\right)$; $\left(-\frac{3}{2}; \frac{-2 - \sqrt{11}}{2}\right)$

III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO.

Bài 10. Viết phương trình đường tròn đường kính AB trong các trường hợp sau :

a) A (7 ; -3) ; B (1 ; 7)

b) A (-3 ; 2) ; B (7 ; -4)

Bài 11. Viết phương trình đường tròn tiếp xúc với các trục toạ độ và

a) đi qua A (2 ; -1)

b) có tâm thuộc đường thẳng $3x - 5y - 8 = 0$

Bài 12. Viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm A (-1 ; 0), B (1 ; 2) và tiếp xúc với đường thẳng $x - y - 1 = 0$

Bài 13. Cho đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$ và điểm A (1 ; 3)

a) Chứng minh rằng A ở ngoài đường tròn

b) Viết phương trình tiếp tuyến với (C) kẻ từ A.

IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI.

Bài 10. a) $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 34$

b) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 34$

Bài 11. a) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$; $(x - 5)^2 + (y + 5)^2 = 25$

b) $(x + 4)^2 + (y + 4)^2 = 16$; $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$

Bài 12. Phương trình của (C) là : $x^2 + (y - 1)^2 = 2$.

Bài 13. a) A nằm ngoài (C)

b) Có hai tiếp tuyến $\Delta_1 : x - 1 = 0$ và $\Delta_2 : 3x + 4y - 15 = 0$

§5. ĐƯỜNG ELÍP

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Trong mặt phẳng Oxy cho hai điểm cố định F_1 và F_2 với $F_1F_2 = 2c$ $(c > 0)$.

- Đường elip (còn gọi là elip) là tập hợp các điểm M sao cho $MF_1 + MF_2 = 2a$ trong đó a là số không đổi lớn hơn c.
- Hai điểm F_1 và F_2 gọi là các tiêu điểm của elip. Khoảng cách 2c được gọi là tiêu cự của elip. Các đoạn thẳng MF_1 và MF_2 được gọi là các bán kính qua tiêu của điểm M.

2. Phương trình chính tắc của elip là:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (a > b > 0 ;\ b^2 = a^2 - c^2).$$

3. Hình dạng của elip: Từ elip có phương trình chính tắc (1) ta có :

- Elip nhận các trục tọa độ làm các trục đối xứng và gốc tọa độ làm tâm đối xứng
- Elip cắt Ox tại hai điểm A_1 (-a , 0); A_2 (a , 0), cắt Oy tại hai điểm B_1 (0 , -b); B_2 (0 , b) . Bốn điểm đó gọi là các đỉnh của elip. Các đoạn thẳng A_1A_2 gọi là trục lớn, đoạn thẳng B_1B_2 gọi là trục bé của elip.

- Tỉ số giữa tiêu cự và độ dài trục lớn của elip gọi là tâm sai, được kí hiệu là e : $e = \frac{c}{a}$

Lưu ý: $e < 1$.

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 1. Cho elip (E) có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Hỏi trong các mệnh đề sau , mệnh đề nào đúng ?

a) Tiêu cự của (E) là 2c, trong đó $c^2 = a^2 - b^2$;

b) (E) có độ dài trục lớn bằng 2a, độ dài trục bé bằng 2b ;

c) (E) có tâm sai $e = -\frac{c}{a}$;

d) Tọa độ các tiêu điểm của (E) là: $F_1(-c\ ,\ 0)$; $F_2(c\ ,\ 0)$;

e) Điểm (b , 0) là một đỉnh của elip (E).

Giải

- Các mệnh đề đúng : a, b, d
- Các mệnh đề sai : c, e.

Bài 2. Tìm tọa độ các tiêu điểm, các đỉnh; độ dài các trục lớn, độ dài các trục bé của mỗi elip có phương trình sau:

a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$; **b)** $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$; **c)** $x^2 + 4y^2 = 4$

Giải

a) Ta có: $a^2 = 25$; $b^2 = 4 \Rightarrow c^2 = 25 - 4 = 21 \Rightarrow c = \sqrt{21}$

Suy ra: Elip có các tiêu điểm $F_1(-\sqrt{21}\ ;\ 0)$; $F_2(\sqrt{21}\ ;\ 0)$

- Elip có các đỉnh : $A_1(-5\ ;\ 0)$; $A_2(5\ ;\ 0)$; $B_1(0\ ;\ -2)$; $B_2(0\ ;\ 2)$
- Elip có các độ dài trục lớn 2a = 10 ; độ dài trục bé 2b = 4

b) Ta có : $a^2 = 9$; $b^2 = 4 \Rightarrow a = 3$; $b = 2$; $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5}$

Suy ra:

- Elip có các tiêu điểm: $F_1(-\sqrt{5}\ ;\ 0)$; $F_2(\sqrt{5}\ ;\ 0)$
- Elip có các đỉnh: $A_1(-3\ ;\ 0)$; $A_2(3\ ;\ 0)$; $B_1(0\ ;\ -2)$; $B_2(0\ ;\ 2)$
- Elip có các độ dài trục lớn 2a = 6 ; độ dài trục bé 2b = 4

c) $x^2 + 4y^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

Suy ra: $a^2 = 4$; $b^2 = 1 \Rightarrow a = 2$; $b = 1$ và $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3}$. Vậy:

- Elip có các tiêu điểm: $F_1(-\sqrt{3};0)$, $F_2(\sqrt{3};0)$
- Elip có các đỉnh: $A_1(-2\ ;\ 0)$; $A_2(2\ ;\ 0)$; $B_1(0\ ;\ -1)$; $B_2(0\ ;\ 1)$
- Elip có các độ dài trục lớn 2a = 4 ; độ dài trục bé 2b = 2

Bài 3. Viết phương trình chính tắc của elip (E) trong mỗi trường hợp sau:

a) (E) có độ dài trục lớn bằng 8 và tâm sai $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

b) (E) có độ dài trục bé bằng 8 và tiêu cự bằng 4;

c) (E) có một tiêu điểm là $F(\sqrt{3};0)$ và đi qua $M(1;\frac{\sqrt{3}}{2})$

Giải

Gọi phương trình chính tắc elip (E) là:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$$

a) Theo bài ra ta có:

$$\begin{cases} 2a = 8 \\ \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ c = 2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 12 = 4$$

Vậy (E) có phương trình : $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

b) Theo bài ra ta có:

$$\begin{cases} 2b = 8 \\ 2c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 = 16 + 4 = 20$$

Vậy elip (E) có phương trình chính tắc: $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{16} = 1$

c) Theo bài ra elip có tiêu điểm $F(\sqrt{3};0) \Rightarrow c = \sqrt{3} \Leftrightarrow c^2 = 3$.

Mặt khác elip đi qua $M\left(1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ nên

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1 \\ a^2 - b^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4b^2 + 3a^2 = 4a^2b^2 \\ a^2 = 3 + b^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4b^2 + 9 + 3b^2 = 4b^2(3 + b^2) \\ a^2 = 3 + b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = 1 \\ a^2 = 4 \end{cases}$$

Vậy elip có phương trình $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$

Bài 4. Cho elip (E) : $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$

a) Tính độ dài dây cung của (E) đi qua một tiêu điểm và vuông góc với trục tiêu (đoạn thẳng nối hai điểm của elip gọi là dây cung của elip;

trục chứa các tiêu điểm gọi là trục tiêu của elip).

b) Tìm trên (E) điểm M sao cho $MF_1 = 2MF_2$ trong đó F_1, F_2 lần lượt là các tiêu điểm của (E) nằm bên trái và bên phải trục tung.

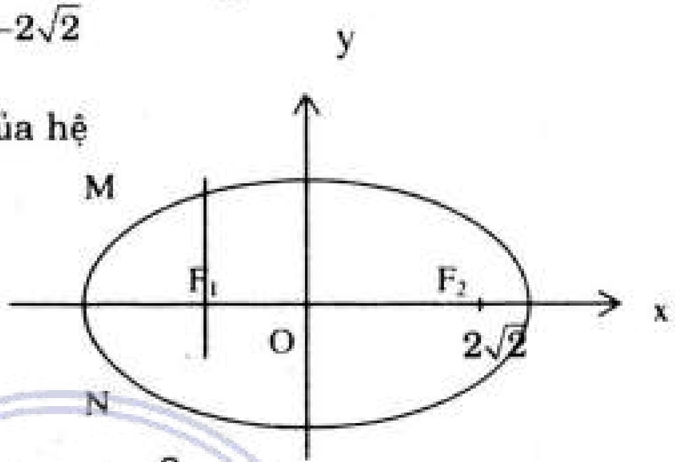
Giải

Ta có (E) có tiêu điểm $F_1(-2\sqrt{2};0)$; $F_2(2\sqrt{2};0)$

a) Đường thẳng (Δ) qua tiêu điểm F_1 và vuông góc với Ox có phương trình $x = -2\sqrt{2}$

Gọi M, N là giao của (Δ) và (E)

⇒ Tọa độ của M, N là nghiệm của hệ



$$\begin{cases} x = -2\sqrt{2} \\ \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2\sqrt{2} \\ y = \pm\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad N(-2\sqrt{2};-\frac{1}{3}); M(-2\sqrt{2};\frac{1}{3})$$

Vậy độ dài dây MN là $MN = |y_M - y_N| = \dfrac{2}{3}$

b) Gọi M (x ; y), từ công thức tính bán kính qua tiêu điểm, ta có:

$MF_1 = 2MF_2 \Leftrightarrow a + ex = 2(a - ex) \Leftrightarrow 3ex = a$

$\Rightarrow x = \dfrac{a}{3e} = \dfrac{a^2}{3c}$ mà $a^2 = 9$; $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow x = \dfrac{9}{3.2\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

Thay $x = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$ vào phương trình (E) ta có :

$$y^2 = 1 - \frac{x^2}{9} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{14}}{4}$$

Vậy có hai điểm thỏa mãn đề bài là :

$M_1\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{4};\dfrac{\sqrt{14}}{4}\right)$ và $M_2\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{4};\dfrac{-\sqrt{14}}{4}\right)$

Bài 5. Vệ tinh nhân tạo đầu tiên được Liên Xô (cũ) phóng từ Trái Đất năm 1957. Quỹ đạo của vệ tinh đó là một đường elip nhận tâm của Trái Đất là một tiêu điểm. Người ta đo được vệ tinh cách bề mặt Trái Đất gần nhất là 583 dặm và xa nhất là 1342 dặm (1 dặm ≈ 1,609 km). Tìm tâm sai của quỹ đạo đó biết bán kính của Trái Đất xấp xỉ 4000 dặm.

Giải

Gọi tâm của Trái Đất là F_2 và giả sử quỹ đạo chuyển động của vệ tinh có phương trình $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Khi đó khoảng cách từ vệ tinh đến tâm

Trái Đất là $d = a - \frac{c}{a}x$

Do $-a \le x \le a$ mà $a - c \le d \le a + c$

Gọi R là bán kính của Trái Đất thì : $\begin{cases} a - c = 583 + R \\ a + c = 1342 + R \end{cases}$

$\Rightarrow 2c = 759$; $2a = 1925 + 2R$

$\Rightarrow$ tâm sai : $e = \frac{2c}{2a} = \frac{759}{1925 + 8000} \approx 0,07647$

Bài 6. Trong mặt phẳng tọa độ cho điểm A chạy trên trục Ox, điểm B chạy trên trục Oy nhưng độ lớn đoạn AB bằng a không đổi. Tìm tập hợp các điểm M của đoạn thẳng AB sao cho MB = 2MA.

Giải

Giả sử A (b ; 0); B (0 ; c). Do AB = a không đổi $\Rightarrow b^2 + c^2 = a^2$ (*)

Gọi M (x ; y) là điểm : MB = 2MA; M thuộc đoạn AB $\Rightarrow \overline{MB} = -2\overline{MA}$

Mà $\overline{MB} = (-x ; c - y)$, $\overline{MA} = (b - x ; -y)$

Do đó : $\begin{cases} -x = -2(b - x) \\ c - y = -2(-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{3}{2}x \\ c = 3y \end{cases}$ (**)

Từ (*) và (**) ta được:

$(\frac{3}{2}x)^2 + (3y)^2 = a^2 \Leftrightarrow \frac{9}{4}x^2 + 9y^2 = a^2$ hay $\frac{x^2}{\frac{4a^2}{9}} + \frac{y^2}{\frac{a^2}{9}} = 1$

Vậy tập hợp các điểm M của đoạn thẳng AB = a sao cho MB = 2MA là một elip (E) có phương trình : $\frac{x^2}{\frac{4a^2}{9}} + \frac{y^2}{\frac{a^2}{9}} = 1$

III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO.

Bài 7. Lập phương trình chính tắc của elip (E) biết :

a) A(0 ; - 2) là một đỉnh và F (1 ; 0) là một tiêu cự của (E)

b) Tiêu cự bằng 6, tâm sai bằng $\frac{3}{5}$

c) Phương trình các cạnh của hình chữ nhật cơ sở là: $x = \pm 4$; $y = \pm 3$

Bài 8. Tìm những điểm trên elip (E): $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$

a) Có bán kính qua tiêu điểm trái bằng 2 lần bán kính qua tiêu điểm phải

b) Nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông

c) Nhìn hai tiêu điểm dưới góc 60^0.

Bài 9. Cho elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

a) Xác định m để đường thẳng (D) : y = x + m và (E) có điểm chung

b) Viết phương trình đường thẳng (Δ) đi qua M (1 ; 1) và cắt (E) tại hai điểm A và B sao cho M là trung điểm của đoạn thẳng AB

V. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 7. a) Phương trình chính tắc của elip: $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$

b) phương trình chính tắc là: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

c) Phương trình của elip là: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

Bài 8. a) Có hai điểm cần tìm: $\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}; \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}\right)$; $\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}; \frac{-\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}\right)$

b) Có 4 điểm cần tìm:

$\left(\frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}; \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$; $\left(\frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}; -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$; $\left(\frac{-3\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}; \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$; $\left(\frac{-3\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}; \frac{-1}{2\sqrt{2}}\right)$

c) Có bốn điểm cần tìm:

$\left(\frac{\sqrt{69}}{2\sqrt{2}}; \frac{1}{2\sqrt{6}}\right)$; $\left(\frac{\sqrt{69}}{2\sqrt{2}}; \frac{-1}{2\sqrt{6}}\right)$ $\left(\frac{-\sqrt{69}}{2\sqrt{2}}; \frac{1}{2\sqrt{6}}\right)$ $\left(\frac{-\sqrt{69}}{2\sqrt{2}}; \frac{-1}{2\sqrt{6}}\right)$

Bài 9.

a) Với $-\sqrt{13} \le m \le \sqrt{13}$ thì (D) và (E) có điểm chung.

b) Đường thẳng (Δ) : 4x + 9y – 13 = 0

§6. ĐƯỜNG HYPEBOL

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

. Trong mặt phẳng, cho hai điểm cố định F_1F_2 có khoảng cách $F_1F_2 = 2c$ (c > 0). Đường Hypebol (còn gọi là Hypebol) là tập các điểm M sao cho $|MF_1 - MF_2| = 2a$ trong đó a là số dương không đổi nhỏ hơn c.

- Hai điểm F_1, F_2 gọi là các tiêu điểm của Hypebol. Khoảng cách $F_1F_2 = 2c$ gọi là tiêu cự của hypebol. Các đoạn thẳng MF_1 và MF_2 gọi là các bán kính qua tiêu của điểm M.

. Phương trình chính tắc của hypebol :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ trong đó } b^2 = c^2 - a^2 \quad (1)$$

3. Hình dạng của hypebol :

Với hypebol có phương trình (1) ta có :

- Hypebol nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng và hai trục Ox, Oy làm hai trục đối xứng.

Hypebol cắt Ox tại hai điểm và không cắt Oy. Khi đó trục Ox (trục chứa tiêu điểm) gọi là trục thực, trục Oy gọi là trục ảo. Hai giao điểm với trục Ox gọi là hai đỉnh của hypebol. Khoảng cách giữa hai đỉnh (bằng 2a) gọi là độ dài trục thực, 2b gọi là độ dài trục ảo.

- Tỉ số giữa tiêu cự và độ dài trục thực gọi là tâm sai của hypebol. Ký hiệu: $e = \dfrac{c}{a}$

<u>Lưu ý</u> : Tâm sai $e > 1$

- Hình chữ nhật tạo bởi các đường thẳng $x = \pm a$, $y = \pm b$ gọi là hình chữ nhật cơ sở của hypebol. Hai đường chéo của hình chữ nhật cơ sở gọi là hai đường tiệm cận của hypebol. Phương trình hai tiệm cận là : $y = \pm\dfrac{b}{a}x$

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 1. Cho hypebol (H) có phương trình chính tắc $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Hỏi trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

a) Tiêu cự của (H) là 2c, trong đó $c^2 = a^2 + b^2$.

b) (H) có độ dài trục thực bằng 2a, độ dài trục ảo bằng 2b.

c) Phương trình hai tiệm cận (H) là $y = \pm\dfrac{a}{b}x$

d) Tâm sai của (H) là $e = \dfrac{c}{a} > 1$

Giải

- Các mệnh đề đúng là : a, b, d
- Các mệnh đề sai là : c

Bài 2. Tìm tọa độ các tiêu điểm; các đỉnh; độ dài trục thực, trục ảo và phương trình các tiệm cận của hypebol có phương trình sau:

a) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ b) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$ c) $x^2 - 9y^2 = 9$

Giải

a) Ta có: $a^2 = 9$, $b^2 = 4 \Rightarrow a = 3$, $b = 2$, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{13}$.

Vậy hypebol có:

- Tọa độ các tiêu điểm: $F_1(-\sqrt{13};0)$; $F_2(\sqrt{13};0)$

- Các đỉnh: $A_1(-3;0)$; $A_2(3;0)$
- Độ dài trục thực: $2a = 6$; độ dài trục ảo: $2b = 4$
- Phương trình các tiệm cận: $y = \pm\frac{2}{3}x$

b) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow a^2 = 9$; $b^2 = 16 \Rightarrow a = 3$; $b = 4$ và $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$.

Vậy hypebol có:

- Tọa độ các tiêu điểm: $F_1(-5;0)$; $F_2(5;0)$
- Các đỉnh: $A_1(-3;0)$; $A_2(3;0)$
- Độ dài trục thực: $2a = 6$; độ dài trục ảo: $2b = 8$
- Phương trình các tiệm cận: $y = \pm\frac{4}{3}x$

c) $x^2 - 9y^2 = 9 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{1} = 1$

$\Rightarrow a^2 = 9$, $b^2 = 1$ suy ra $a = 3$, $b = 1$ và $c = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$.

Vậy hypebol có:

- Tọa độ các tiêu điểm: $F_1(-3;0)$; $F_2(3;0)$
- Các đỉnh: $A_1(-3;0)$; $A_2(3;0)$
- Độ dài trục thực: $2a = 6$; độ dài trục ảo: $2b = 2$
- Phương trình các tiệm cận: $y = \pm\frac{1}{3}x$

Bài 3. Cho đường tròn (C) tâm F_1, bán kính R và một điểm F_2 ở ngoài (C). Chứng minh rằng tập hợp tâm các đường tròn qua F_2, tiếp xúc với (C) là một đường Hypebol. Viết phương trình chính tắc của Hypebol đó.

Giải

• Gọi (C') là đường tròn tâm I đi qua F_2 và tiếp xúc với (C)

+ Nếu (C) và (C') tiếp xúc ngoài với nhau thì:

$IF_1 = R + IF_2 \Rightarrow IF_1 - IF_2 = R$

+ Nếu (C) và (C') tiếp xúc trong với nhau thì:

$IF_1 = IF_2 - R \Rightarrow IF_2 - IF_1 = R$

Như vậy I là tâm đường tròn qua F_2 và tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi

$|IF_1 - IF_2| = R$ không đổi

Vậy tập các điểm I là hypebol nhận F_1, F_2 làm tiêu điểm, độ dài trục thực bằng R có phương trình: $\frac{x^2}{\left(\frac{R}{2}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{F_1F_2^2 - R^2}}{2}\right)^2} = 1$

Bài 4. Viết phương trình chính tắc của hypebol (H) trong mỗi trường hợp sau:

a) (H) có một tiêu điểm là (5 ; 0) và độ dài trục thực bằng 8

b) (H) có tiêu cự bằng $2\sqrt{3}$, một đường tiệm cận là $y = \frac{2}{3}x$

c) (H) có tâm sai $e = \sqrt{5}$, đi qua điểm $(\sqrt{10}\,;6)$

Giải

Phương trình chính tắc của hypebol (H) có dạng : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

a) Do (H) có một tiêu điểm là: (5 ; 0) và độ dài trục thực bằng 8 nên

$$\begin{cases} c = 5 \\ 2a = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 5 \\ a = 4 \end{cases} \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 16 = 9$$

$\Rightarrow$ (H) có phương trình chính tắc: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

b) Do (H) có tiêu cự bằng $2\sqrt{3}$, một đường tiệm cận là $y = \frac{2}{3}x$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2c = 2\sqrt{3} \\ \frac{b}{a} = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \sqrt{3} \\ 3b = 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 3 \\ 9b^2 = 4a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{27}{13} \\ b^2 = \frac{12}{13} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ (H) có phương trình chính tắc: $\frac{x^2}{\frac{27}{13}} - \frac{y^2}{\frac{12}{13}} = 1$

c) Do (H) có tâm sai $e = \sqrt{5}$, đi qua điểm $(\sqrt{10};6)$ nên suy ra:

$$\begin{cases} \frac{c}{a} = \sqrt{5} \\ \frac{10}{a^2} - \frac{36}{b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c^2 = 5a^2 \\ \frac{10}{a^2} - \frac{36}{b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = 4a^2 \\ \frac{10}{a^2} - \frac{36}{4a^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 4 \end{cases}$$

Vậy phương trình chính tắc của (H) là : $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1$

Bài 5. Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ một điểm tùy ý trên hypebol đến hai đường tiệm cận của hypebol là một số không đổi.

Giải

Xét hypebol (H) : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Hai tiệm cận của (H) là :

(Δ_1): $y = \frac{b}{a}x$ hay $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$; (Δ_2): $y = -\frac{b}{a}x$ hay $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$

Điểm $M(x_0 ; y_0) \in (H) \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$. Khi đó:

$$d(M,\Delta_1).d(M,\Delta_2) = \frac{\left|\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} . \frac{\left|\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} = \frac{\left|\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}\right|}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} = \frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$$

không đổi.

Bài 6. Trong mặt phẳng tọa độ cho hai điểm $F_1(-\sqrt{2};-\sqrt{2})$ và $F_2(\sqrt{2};\sqrt{2})$. Chứng minh rằng với mọi điểm M(x ; y) nằm trên đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x}$ ta đều có: $MF_1^2 = (x + \frac{1}{x} + \sqrt{2})^2$; $MF_2^2 = (x + \frac{1}{x} - \sqrt{2})^2$

Từ đó suy ra $|MF_1 - MF_2| = 2\sqrt{2}$

Giải

Gọi M(x ; y) là điểm thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x} \Rightarrow M(x; \frac{1}{x})$ (với $x \neq 0$)

Ta có: $\overrightarrow{MF_1} = (-\sqrt{2} - x; -\sqrt{2} - \frac{1}{x})$, $\overrightarrow{MF_2} = (\sqrt{2} - x; \sqrt{2} - \frac{1}{x})$

$$\Rightarrow \quad MF_1^2 = (-\sqrt{2} - x)^2 + \left(-\sqrt{2} - \frac{1}{x}\right)^2$$

$$= 2 + 2\sqrt{2}x + x^2 + 2 + \frac{2\sqrt{2}}{x} + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x} + \sqrt{2}\right)^2$$

$$MF_2^2 = (\sqrt{2} - x)^2 + \left(\sqrt{2} - \frac{1}{x}\right)^2$$

$$= 2 - 2\sqrt{2}x + x^2 + 2 - \frac{2\sqrt{2}}{x} + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}\right)^2$$

Do đó $MF_1 = \left|x + \frac{1}{x} + \sqrt{2}\right|$; $MF_2 = \left|x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}\right|$

- Nếu $x > 0 \Rightarrow MF_1 - MF_2 = x + \frac{1}{x} + \sqrt{2} - \left(x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}$
- Nếu $x < 0 \Rightarrow MF_1 - MF_2 = -x - \frac{1}{x} - \sqrt{2} - \left(-x - \frac{1}{x} + \sqrt{2}\right) = -2\sqrt{2}$

Vậy với $\forall x \neq 0$ ta có : $|MF_1 - MF_2| = 2\sqrt{2}$ (đpcm).

II. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO.

Bài 7. Lập phương trình chính tắc của hypebol (H) biết:

a) Phương trình các cạnh của hình chữ nhật cơ sở là $x = \pm\frac{1}{2}$; $y = \pm 1$

b) Một tiêu điểm là (- 10 ; 0) và phương trình của đường tiệm cận là

$y = \pm \frac{4}{3}$

c) (H) đi qua N(6 ; 3) và góc giữa hai đường tiệm cận bằng 60^0.

Bài 8. Cho hypebol (H) : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Gọi F_1, F_2 là các tiêu điểm và A_1, A_2 là các đỉnh của (H) . M là điểm tùy ý trên (H) có hình chiếu trên Ox là N. Chứng minh rằng:

a) $OM^2 - MF_1.MF_2 = a^2 - b^2$

b) $(MF_1 + MF_2)^2 = 4(OM^2 + b^2)$

c) $MN^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot \overline{NA_1} \cdot \overline{NA_2}$

Bài 9. Tìm trên hypebol (H): $4x^2 - y^2 - 4 = 0$

a) Nhìn hai tiêu điểm dưới góc vuông

b) Có tọa độ nguyên.

IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI.

Bài 7. (H) có phương trình chính tắc : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

a) $a = \frac{1}{2}$; $b = 1 \Rightarrow$ (H) có phương trình $\frac{x^2}{\frac{1}{4}} - \frac{y^2}{1} = 1$

b) (H) có phương trình $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$

c) Phương trình (H) : $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1$

Bài 8. Gọi $M(x;y) \in (H)$

a) $OM^2 - MF_1 . MF_2 = x^2 + y^2 - \left(a^2 - \frac{c^2}{a^2}x^2\right) = a^2 - b^2$

b) $(MF_1 + MF_2)^2 = 4(OM^2 + b^2) = 4a^2 + 4b^2 + \frac{4c^2}{b^2}y^2$

c) $MN^2 = y^2 = \frac{b^2}{a^2}.\overline{NA_1}.\overline{NA_2}$.

Bài 9. a) Có bốn điểm thỏa mãn:

$\left(\frac{3}{\sqrt{5}}; \frac{4}{\sqrt{5}}\right); \left(\frac{3}{\sqrt{5}}; \frac{4}{\sqrt{5}}\right); \left(\frac{3}{\sqrt{5}}; \frac{-4}{\sqrt{5}}\right); \left(\frac{-3}{\sqrt{5}}; \frac{-4}{\sqrt{5}}\right)$

b) Có hai điểm cần tìm : (1 ; 0) và (- 1 ; 0)

§7 . ĐƯỜNG PARABOL.

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Trong mặt phẳng cho điểm F cố định và một đường thẳng Δ cố định không đi qua F. Tập các điểm M có khoảng cách đến F bằng khoảng cách từ nó đến Δ được gọi là đường parabol (hay parabol).
- Điểm F được gọi là tiêu điểm của parabol.
- Đường thẳng Δ được gọi là đường chuẩn của parabol
- Khoảng cách từ F đến Δ : $d(F ; \Delta) = p$ được gọi là tham số tiêu của parabol.

2. Phương trình chính tắc của parabol: $y^2 = 2px$ trong đó $p > 0$. Khi đó parabol có đường chuẩn: $x = -\dfrac{p}{2}$

II. BÀI TẬP CĂN BẢN.

Bài 1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

a) $y^2 = -2x$ là phương trình chính tắc của parabol.

b) $y = x^2$ là phương trình chính tắc của parabol.

c) Parabol (P): $y^2 = 2x$ có tiêu điểm $F(0,5 ; 0)$ và có đường chuẩn $\Delta : x + 0,5 = 0$

d) Parabol: $y^2 = 2px$ $(p > 0)$ có tiêu điểm $F(p ; 0)$ và có đường chuẩn là $\Delta : x + p = 0$

Giải

- Các mệnh đề đúng: c
- Các mệnh đề sai: a, b, d

Bài 2. Viết phương trình chính tắc của parapol (P) trong mỗi trường hợp sau:

a) (P) có tiêu điểm $F(3 ; 0)$

b) (P) đi qua điểm $M(1 ; -1)$

c) (P) có tham số tiêu là $p = \dfrac{1}{3}$

Giải

Phương trình chính tắc của parabol (P) là : $y^2 = 2px$.

a) (P) có tiêu điểm $F(3 ; 0) \Rightarrow \dfrac{p}{2} = 3 \Rightarrow p = 6$

Vậy parabol có phương trình: $y^2 = 12x$

b) (P) đi qua điểm $M(1 ; -1) \Rightarrow 1 = 2p \Rightarrow p = \dfrac{1}{2}$

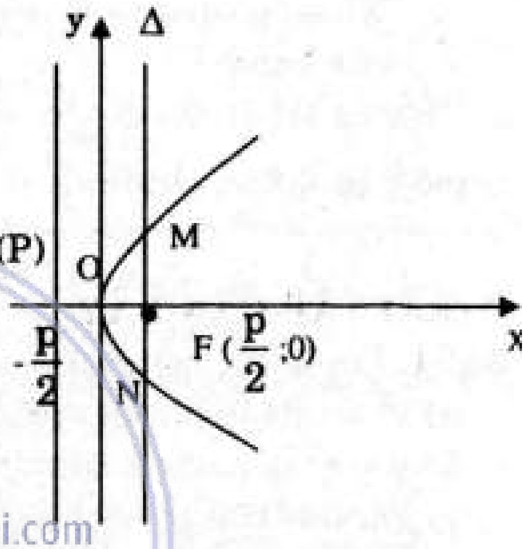
Vậy parabol có phương trình: $y^2 = x$.

c) (P) có tham số tiêu là $p = \frac{1}{3}$.

$\Rightarrow$ Parabol (P) có phương trình $y^2 = \frac{2}{3}x$

Bài 3. Cho parabol $y^2 = 2px$. Tìm độ dài dây cung của parabol vuông góc với trục đối xứng tại tiêu điểm của parabol (dây cung của parabol là đoạn thẳng nối hai điểm của parabol).

Giải



Gọi Δ là đường thẳng qua tiêu điểm $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ và vuông góc với trục Ox

$\Rightarrow \Delta$ có phương trình $x = \frac{p}{2}$

Gọi M, N là giao điểm của Δ với Parabol (P)

$\Rightarrow$ Tọa độ M, N là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = \frac{p}{2} \\ y^2 = 2px \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{p}{2} \\ y = \pm p \end{cases}$$

$\Rightarrow M\left(\frac{p}{2};p\right)$; $N\left(\frac{p}{2};-p\right)$

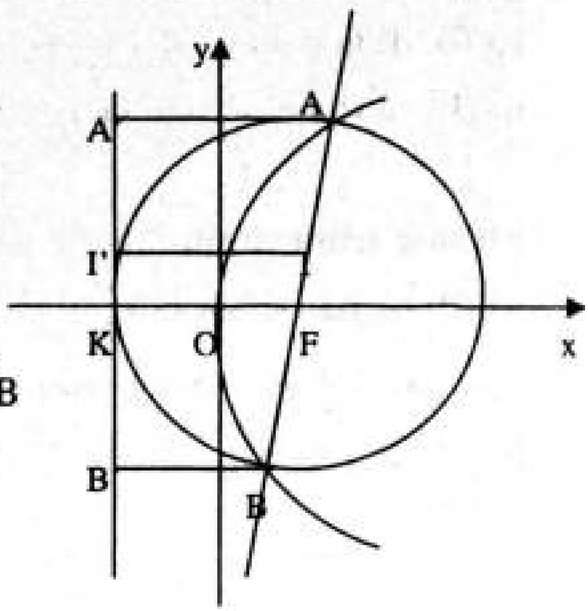
Vậy độ dài dây cung MN là $|y_M - y_N| = |p-(-p)| = 2p$

Bài 4. Cho dây cung AB đi qua tiêu điểm F của parabol (P). Chứng minh rằng khoảng cách từ trung điểm I của dây AB đến đường chuẩn của (P) bằng $\frac{1}{2}$AB. Từ đó nhận xét gì về đường tròn đương kính AB.

Giải

Gọi A', B', I' là hình chiếu của A, B, I lên đường chuẩn Δ

K là giao của đường chuẩn và Ox



Xét hình thang ABB'A'

Do I là trung điểm của AB,

nên II' là đường trung bình, nên:

$d(I;\Delta) = II' = \frac{1}{2}(AA' + BB')$

Mặt khác A, B thuộc parabol (P)

và AB đi qua tiêu điểm F của parabol,

nên: $AA' + BB' = AF + BF = AB$

Vậy $d(I,\Delta) = \frac{1}{2}AB$

Suy ra đường tròn đường kính AB tiếp xúc với đường chuẩn Δ

Bài 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm F (1 ; - 2). Tìm hệ thức giữa x và y để điểm M(x ; y) cách đều điểm F và trục hoành.

Giải

- Ta có: $\overrightarrow{MF} = (1-x; -2-y) \Rightarrow MF_1 = \sqrt{(1-x)^2 + (-2-y)^2}$
- Khoảng cách từ điểm M đến trục Ox là $d(M, Ox) = |y|$

Theo bài ra ta có : $\sqrt{(1-x)^2 + (-2-y)^2} = |y|$

$\Leftrightarrow \quad 1 + x^2 - 2x + 4 + 4y + y^2 = y^2 \quad \Leftrightarrow \quad 4y = -x^2 + 2x - 5$

hay $y = -\left(\dfrac{x-1}{2}\right)^2 - 1$

III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

Bài 6. Xác định tham số tiêu, tọa độ đỉnh, tiêu điểm và phương trình đường chuẩn của các parabol có phương trình sau:

a) $y^2 = 4x$; b) $2y^2 - x = 0$

Bài 7. Lập phương trình chính tắc của parabol (P) biết:

a) Tiêu điểm F(1 ; 0)

b) (P) nhận đường thẳng D: x = - 2 là đường chuẩn .

c) Một dây cung của (P) vuông góc với trục Ox có độ dài bằng 8 và khoảng cách từ đỉnh O của (P) đến dây cung này bằng 1.

Bài 8. Cho parabol (P) có phương trình: $y^2 = 2px$ ($p > 0$) và đường thẳng Δ đi qua tiêu điểm F của (P) và cắt (P) tại hai điểm M và N. Gọi $\alpha = (\vec{i}; \overrightarrow{FM})$ $(0 < \alpha < \pi)$

a) Tính FM, FN theo p và α

b) Chứng minh rằng khi Δ quay quanh F thì $\dfrac{1}{FM} + \dfrac{1}{FN}$ không đổi.

Bài 9. Cho parabol (P): $y^2 = x$ và hai điểm A(1 ; - 1) , B(9 ; 3). Gọi M là điểm thuộc cung AB của (P) (phần của (P) bị chắn bởi dây AB). Xác định vị trí của M trên cung AB sao cho tam giác MAB có diện tích lớn nhất.

IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI.

Bài 6. a) Ta có: $2p = 4 \Rightarrow p = 2$. Vậy parabol có:

- Tham số tiêu: p = 2
- Tọa độ đỉnh: O(0 ; 0)
- Tiêu điểm F(1 ; 0)
- Đường chuẩn: x + 1 =0

b) Ta có: $2y^2 - x = 0 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{2}x \Rightarrow 2p = \frac{1}{2} \Rightarrow p = \frac{1}{4}$. Vậy parabol có:

- Tham số tiêu: $p = \frac{1}{4}$; Tọa độ đỉnh: O(0 ; 0)
- Tiêu điểm $F(\frac{1}{8}; 0)$; Đường chuẩn: $x + \frac{1}{8} = 0$

Bài 7. Phương trình chính tắc của parabol (P): $y^2 = 2px$

a) $F(1 ; 0) \Rightarrow \frac{p}{2} = 1 \Leftrightarrow p = 2 \Rightarrow$ phương trình (D) là $y^2 = 4x$

b) $y^2 = 8x$

c) Từ giả thiết và do (P) nhận Ox là trục đối xứng nên (P) đi qua điểm (1 ; 4) suy ra p = 8. Phương trình của (P) là: $y^2 = 16x$.

Bài 8.

a) $MF = \frac{p}{1 - \cos\alpha}$; $NF = \frac{p}{1 + \cos\alpha}$

b) $\frac{1}{FM} + \frac{1}{FN} = \frac{2}{p}$ không đổi.

Bài 9. M(1 ; 1) thì diện tích tam giác MAB có giá trị lớn nhất.

§8 . BA ĐƯỜNG CÔ NIC

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Cho elip có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$

Đường thẳng $\Delta_1: x + \frac{a}{e} = 0$ gọi là đường chuẩn của elip, ứng với tiêu điểm $F_1(-c ; 0)$.

- Đường thẳng $\Delta_2: x - \frac{a}{e} = 0$ gọi là đường chuẩn của elip, ứng với tiêu điểm $F_2(c ; 0)$.

Suy ra: Với mọi điểm M nằm trên elip ta có:

$$\frac{MF_1}{d(M,\Delta_1)} = \frac{MF_2}{d(M,\Delta_2)} = e \qquad (e<1)$$

2. Cho hypebol có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Khi đó:

- Đường thẳng $\Delta_1: x + \frac{a}{e} = 0$ gọi là đường chuẩn của hypebol, ứng với tiêu điểm $F_1(-c ; 0)$.

- Đường thẳng Δ_2: $x - \frac{a}{e} = 0$ gọi là đường chuẩn của hypebol, ứng với tiêu điểm $F_2(c\ ;\ 0)$. Suy ra :

Với mọi điểm M nằm trên hypebol ta có: $\frac{MF_1}{d(M,\Delta_1)} = \frac{MF_2}{d(M,\Delta_2)} = e\ (e > 1)$

3. Trong mặt phẳng cho điểm F cố định và một đường thẳng Δ cố định không đi qua F. Tập các điểm M có tỉ số $\frac{MF}{d(M,\Delta)} = e$ (e là số dương không đổi) được gọi là một đường cônic.

Điểm F gọi là tiêu điểm, Δ gọi là đường chuẩn và e gọi là tâm sai của đường cônic. Suy ra:

- Elip là đường cônic có tâm sai $e < 1$
- Hypebol là đường cônic có tâm sai $e > 1$
- Parabol là đường cônic có tâm sai $e = 1$

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 1. Xác định tiêu điểm và đường chuẩn của các cônic sau:

a) $y^2 = 14x$; **b)** $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{7} = 1$; **c)** $\frac{x^2}{14} - \frac{y^2}{1} = 1$

Giải

a) $y^2 = 14x$ là một parabol có $p = 7$

$\Rightarrow$ đường cô nic có tiêu điểm $F(\frac{7}{2};0)$, và đường chuẩn $x + \frac{7}{2} = 0$

b) Đường cônic $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{7} = 1$ là elip có $a^2 = 10$, $b^2 = 7 \Rightarrow a = \sqrt{10}$, $b = \sqrt{7}$ và $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3}$. Vậy đường cônic có hai tiêu điểm là $F_1(-\sqrt{3};0)$, $F_2(\sqrt{3};0)$ và hai đường chuẩn tương ứng là

$x + \frac{10}{\sqrt{3}} = 0$ và $x - \frac{10}{\sqrt{3}} = 0$.

c) $\frac{x^2}{14} - \frac{y^2}{1} = 1$ là hypebol có $a^2 = 14$, $b^2 = 1 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{15}$

Vậy cônic có hai tiêu điểm là $F_1(-\sqrt{15};0)$, $F_2(\sqrt{15};0)$ và hai đường chuẩn tương ứng là $x + \frac{14}{\sqrt{15}} = 0$ và $x - \frac{14}{\sqrt{15}} = 0$.

Bài 2. Cho đường thẳng Δ: $x + y - 1 = 0$ và điểm $F(1\ ;\ 1)$. Viết phương trình của đường cônic nhận F là tiêu điểm và Δ là đường chuẩn trong mỗi trường hợp sau:

a) Tâm sai e = 1 b) Tâm sai e = $\sqrt{2}$ c) Tâm sai e = $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Giải

a) Gọi M(x ; y) là điểm thuộc đường cônic. Khi đó: $\dfrac{MF}{d(M;\Delta)} = e$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}{\dfrac{|x+y-1|}{\sqrt{2}}} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} = \frac{|x+y-1|}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow (x^2+1-2x+y^2+1-2y).2 = x^2+y^2+1+2xy-2y-2x$$

$$\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2-2x-2y+3=0$$

b) Ta có: $\dfrac{MF}{d(M,\Delta)} = e \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}{\dfrac{|x+y-1|}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} = |x+y-1|$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2-2y+1 = x^2+y^2+2xy-2x-2y+1$$

$$\Leftrightarrow 2xy-1=0$$

c) $\dfrac{MF}{d(M,\Delta)} = e \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}{\dfrac{|x+y-1|}{\sqrt{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} = \frac{|x+y-1|}{2} \Leftrightarrow 4\left[(x-1)^2+(y-1)^2\right] = (x+y-1)^2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2+3y^2-2xy-6x-6y+7=0$$

III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO.

Bài 3. Viết phương trình của các đường cô nic trong mỗi trường hợp sau:

a) Tiêu điểm F(3 ; 1), đường chuẩn Δ: x = 0 và tâm sai e = 1.

b) Tiêu điểm F(2 ; - 5), đường chuẩn ứng với tiêu điểm F là Δ: y = x và tâm sai e = 2.

c) Tiêu điểm F(- 3 ; - 2), đường chuẩn ứng với tiêu điểm F là Δ: x - 2y + 1 = 0 và tâm sai e = $\sqrt{3}$.

Bài 4. Cho elip (E) có phương trình $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (a > b > 0) và một đường thẳng đi qua tiêu điểm F(c ; 0) cắt (E) tại hai điểm A, B. Chứng minh rằng đường tròn đường kính AB không có điểm chung với đường chuẩn: $x = \dfrac{a}{e}$ của (E).

Bài 5. Cho hypebol (H): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ và F(c ; 0) là một tiêu điểm của (H).

Một đường thẳng qua F và cắt (H) tại hai điểm A, B. Chứng minh rằng đường tròn đường kính AB cắt đường chuẩn: $x = \frac{a}{e}$ của (H).

Bài 6. Cho A, B là hai điểm trên parabol (P): $y^2 = 2px$ sao cho tổng các khoảng cách từ A và B tới đường chuẩn của (P) bằng độ dài AB. Chứng minh rằng AB luôn đi qua tiêu điểm của (P).

IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI.

Bài 3. a) $y^2 - 6x - 2y + 10 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 4xy + 4x - 10y - 29 = 0$

c) $2x^2 - 7y^2 + 12xy + 29x + 32y + 62 = 0$

Bài 4. Gọi I là trung điểm của AB; A', B', I' là hình chiếu của A, B, I trên đường chuẩn (D_2): $x = \frac{a^2}{c}$

Ta có: $AB = AF + BF = e \cdot AA' + e \cdot BB'$

$= e(AA' + BB') < AA' + BB' = 2\,II'$ (do $e < 1$)

Suy ra điều phải chứng minh.

Bài 5. Làm tương tự như bài 4 ta cũng được

$$AB = e(AA' + BB') > AA' + BB' = 2II'.$$

Vậy đường tròn đường kính AB luôn cắt đường chuẩn (D_2): $x = \frac{a^2}{c}$ ứng với tiêu điểm F(c ; 0).

Bài 6. Ta có : A, B $\in$ (P) $\Rightarrow AF = d(A,(D)) = AA'$;

$BF = (B,(D)) = BB'$. Suy ra $AF + BF = AA' + BB' = AB$

Vậy A, B, F thẳng hàng hay AB đi qua F.

ÔN TẬP CHƯƠNG III

I.TÓM TẮT LÝ THUYẾT .

1. Các định nghĩa:

a) Vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ của đường thẳng Δ : $\vec{n} \neq \vec{0}$, giá của $\vec{n}$ vuông góc với Δ.

Vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng Δ : $\vec{u} \neq \vec{0}$, giá của $\vec{u}$ song song hoặc trùng với Δ.

b) Elip : là tập hợp các điểm M thỏa mãn $MF_1 + MF_2 = 2a$ $(F_1F_2 = 2c,\ 0 < c < a)$

Hypebol : là tập các điểm M thỏa mãn $|MF_1 - MF_2| = 2a$ $(F_1F_2 = 2c,\ c > a > 0)$

Parabol : là tập các điểm M thoả mãn $MF = d(M ; \Delta)$ $(d(F ; \Delta) = p > 0)$

Đường cônic : là tập các điểm M thỏa mãn $\dfrac{MF}{d(M;\Delta)} = e > 0$. Nếu e<1 thì đường cônic là elip, e = 1 thì cônic là parabol, e > 1 thì cônic là hypebol.

2. Phương trình các đường:

a) Phương trình đường thẳng :

- Dạng tổng quát : $Ax + By + C = 0$ ($A^2 + B^2 \neq 0$), $\vec{n}(A ; B)$ là véctơ pháp tuyến.

- Dạng tham số : $\begin{cases} x = x_o + at \\ y = y_o + bt \end{cases}$ $(t \in R,\ a^2 + b^2 \neq 0)$, $\vec{u}(a ; b)$ là véctơ chỉ phương

- Dạng chính tắc : $\dfrac{x - x_o}{a} = \dfrac{y - y_o}{b}$ $(a \neq 0, b \neq 0)$, $\vec{u}(a ; b)$ là véctơ chỉ phương.

b) Đường tròn :

- Đường tròn tâm I(a ; b) bán kính R là : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.
- Phương trình $x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$ với $A^2 + B^2 - C > 0$ là phương trình đường tròn có tâm $I(-A ; -B)$ và có bán kính

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 - C}$$

c) Phương trình ba đường conic : phương trình chính tắc của :

- Elip : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$; $a^2 - b^2 = c^2$

- Hypebol : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a^2 + b^2 = c^2$)
- Parabol : $y^2 = 2px$ ($p > 0$)

3. Khoảng cách và góc :

a) Khoảng cách giữa 2 điểm $M(x_1 ; y_1)$, $N(x_2 ; y_2)$ là

$MN = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

b) Khoảng cách từ điểm $M(x_o , y_o)$ đến đường thẳng Δ : $Ax + By + C = 0$ là $d(M, \Delta) = \frac{|Ax_o + By_o + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

c) Đường thẳng Δ : $Ax + By + C = 0$ tiếp xúc với đường tròn (I ; R) khi và chỉ khi $d(I, \Delta) = R$.

d) Cosin của góc giữa hai đường thẳng :

Δ_1: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$; Δ_2 : $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ là

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}.\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

II. BÀI TẬP CĂN BẢN .

A. CÂU HỎI TỰ KIỂM TRA

Câu 1. Cho biết tọa độ hai điểm A và B . Làm thế nào để :

a) Viết phương trình đường thẳng qua A, B ?

b) Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $C(x_0; y_0)$ và vuông góc với AB ?

c) Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, biết tiếp tuyến đó song song với AB ?

Giải

Giả sử $A(x_A ; y_A)$, $B(x_B ; y_B)$ khi đó :

a) Đường thẳng qua A, B nhận $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A ; y_B - y_A)$ làm vectơ chỉ phương ⇒ AB có phương trình $\begin{cases} x = x_A + (x_B - x_A)t \\ y = y_A + (y_B - y_A)t \end{cases}$

b) Đường thẳng cần tìm vuông góc với AB ⇒ đường thẳng nhận $\overrightarrow{AB}$ làm vectơ pháp tuyến ⇒ đường thẳng có phương trình

$(x_B - x_A)(x - x_0) + (y_B - y_A)(y - y_0) = 0$

c) Do tiếp tuyến (Δ) song song với AB

⇒ tiếp tuyến (Δ) có phương trình

$(y_B - y_A)x - (x_B - x_A)y + d = 0$

(Δ) tiếp xúc với đường tròn có bán kính R, tâm $I(x_0; y_0) \Rightarrow d(I; \Delta) = R$, từ đó tìm được d $\Rightarrow$ phương trình cần tìm.

Câu 2. Cho tọa độ ba đỉnh của một tam giác. Làm thế nào để:

a) Tìm tọa độ tâm và tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác?

b) Tìm tọa độ trọng tâm tam giác ?

c) Tìm tọa độ trực tâm tam giác ?

d) Tìm chu vi và diện tích tam giác ?

e) Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ?

Giải

Giả sử $A(x_A ; y_A)$, $B(x_B ; y_B)$, $C(x_C ; y_C)$

a) • Để tìm tọa độ tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác :

Bước 1 : Viết phương trình hai đường thẳng (d_1) , (d_2) lần lượt đi qua trung điểm của hai cạnh và vuông góc với hai cạnh đó .

Bước 2 : tọa độ tâm O là giao của (d_1) và (d_2)

• Bán kính R = OA

b) Gọi E là trọng tâm tam giác ABC thì

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3} ; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

c) Để tìm tọa độ trực tâm tam giác :

Bước 1 : Viết phương trình hai đường cao của tam giác (phương trình đường thẳng đi qua bốn đỉnh và nhận vectơ xác định bởi hai điểm còn lại của vectơ pháp tuyến.).

Bước 2 : Tọa độ trực tâm là giao của hai đường cao.

d) • Để tính chu vi ta tính độ dài AB , AC , BC .

• Để tính diện tích , ta có thể :

1) Sử dụng công thức Hê rông $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

2) Sử dụng công thức $S = \frac{1}{2}a.h_a$, $= \frac{1}{2}b.h_b$, $= \frac{1}{2}c.h_c$

e) Tính bán kính đường tròn nội tiếp :

Bước 1 : tính diện tích tam giác , tính độ dài các cạnh

Bước 2 : sử dụng $S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p}$

Câu 3. Hãy chỉ ra một véctơ pháp tuyến và một véctơ chỉ phương của đường thẳng Δ nếu Δ có phương trình sau:

a) $Ax + By + C = 0$ $(A^2 + B^2 \neq 0)$

b) $\begin{cases} x = x_o + at \\ y = y_o + bt \end{cases}$ $(t \in R)$ $(a^2 + b^2 \neq 0)$

c) $\dfrac{x-a}{m} = \dfrac{y-b}{n}$ ($m \neq 0$; $n \neq 0$)

Giải

a) Vectơ pháp tuyến : $\vec{n}(A ; B)$. Vectơ chỉ phương $\vec{u}(B ; -A)$

b) Vectơ chỉ phương : $\vec{u}(a ; b)$. Vectơ pháp tuyến : $\vec{n}(b ; -a)$

c) Vectơ chỉ phương : $\vec{u} = (m ; n)$. Vectơ pháp tuyến : $\vec{n} = (n ; -m)$

Câu 4. Làm thế nào để chứng minh hai đường thẳng là vuông góc với nhau hoặc song song với nhau, nếu biết phương trình của chúng ?

Giải

Bước 1 : Tìm các vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ (hoặc chỉ phương $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$) của d_1 và d_2

Bước 2: • Nếu $\left[\begin{array}{l} \overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 0 \\ \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = 0 \end{array}\right.$ thì $d_1 \perp d_2$

• Nếu $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \overrightarrow{n_1} = k.\overrightarrow{n_2} \\ \overrightarrow{u_1} = k.\overrightarrow{u_2} \end{array}\right. \\ \text{điểm } A \in d_1, A \notin d_2 \end{array}\right.$ thì $d_1 // d_2$

Câu 5. Có thể viết phương trình của đường tròn khi biết những điều kiện nào (nêu một số trường hợp thường gặp)?

Giải

• Viết phương trình đường tròn khi biết tâm và bán kính.

• Viết phương trình đường tròn đi qua 3 điểm không thẳng hàng.

• Viết phương trình đường tròn biết tâm và đi qua 1 điểm.

• Viết phương trình đường tròn khi biết tâm và tiếp xúc với một đường thẳng.

• ...vv

Câu 6. Có thể viết phương trình chính tắc của elip, hypebol, parabol khi biết những điều kiện nào (nêu một số trường hợp thường gặp)?

Giải

Có thể viết phương trình chính tắc của elip, hypebol, parabol khi:

• Biết nó đi qua 1 điểm và biết tiêu điểm.

• Khi biết độ dài trục lớn, trục bé (elip), trục thực, trục ảo (hypebol).

• Độ dài 1 trục và tiêu cự.

• Đi qua 2 điểm... vv

Câu 7. Cho phương trình $Ax^2 + By^2 = 1$ (1)

a) Với điều kiện nào của A và B thì (1) là phương trình của một đường tròn.

b) Với điều kiện nào của A và B thì có thể biến đổi (1) về dạng chính tắc của elip ? của hypebol ?

Giải

a) (1) là phương trình của đường tròn $\Leftrightarrow A = B > 0$

b) Ta có $Ax^2 + By^2 = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{\frac{1}{A}} + \dfrac{y^2}{\frac{1}{B}} = 1$ (vì $A, B \neq 0$)

Do vậy :

✱ (1) là phương trình chính tắc của lip khi: $\dfrac{1}{A} > \dfrac{1}{B} > 0 \Leftrightarrow 0<A<B$

✱ (1) là phương trình chính tắc của hypebol khi: $\begin{cases} \dfrac{1}{A} > 0 \\ \dfrac{1}{B} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A > 0 \\ B < 0 \end{cases}$

B. BÀI TẬP.

Bài 1. Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 trong mỗi trường hợp sau:

a) Δ_1: $3x - 2y + 1 = 0$ và Δ_2: $2x + 3y + 5 = 0$

b) Δ_1: $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -1 + t \end{cases}$ $(t \in R)$ và Δ_2: $\begin{cases} x = 7 - 4t' \\ y = 5 - 2t' \end{cases}$ $(t' \in R)$

c) Δ_1: $\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = -2 - 5t \end{cases}$ $(t \in R)$ và Δ_2: $5x + 4y - 7 = 0$

Giải

a) Ta có: Δ_1 nhận $\overrightarrow{n_1}(3 ; -2)$ làm vectơ pháp tuyến.

Δ_2 nhận $\overrightarrow{n_2}(2 ; 3)$ làm vectơ pháp tuyến.

Mà Δ_1 và Δ_2 không cùng phương. Vậy Δ_1, Δ_2 cắt nhau

b) (Δ_1) đi qua M(4 ; –1) và nhận $\overrightarrow{u_1}(2 ; 1)$ làm vectơ chỉ phương

(Δ_2) nhận $\overrightarrow{u_1}(-4 ; -2)$ làm vectơ chỉ phương

Do $\overrightarrow{u_1} = -2\overrightarrow{u_2} \Rightarrow \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ cùng phương.

Mặt khác điểm $M \notin \Delta_2 \Rightarrow \Delta_1 // \Delta_2$

c) Δ_1 đi qua N (3 ; –2) và nhận $\overrightarrow{u_1} = (4 ; -5)$ làm vectơ chỉ phương

$\Rightarrow \overrightarrow{u_1} = -\overrightarrow{u_2} \Rightarrow \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ cùng phương. Mặt khác $N \in \Delta_2 \Rightarrow \Delta_1 \equiv \Delta_2$

Bài 2. Cho đường thẳng $\Delta: 3x - 4y + 2 = 0$

a) Viết phương trình của Δ dưới dạng tham số.

b) Viết phương trình của Δ dưới dạng phương trình theo đoạn chắn.

c) Tính khoảng cách từ mỗi điểm M (3 ; 5), N (–4 ; 0), P (2 ; 1) tới Δ và xét xem đường thẳng Δ cắt cạnh nào của tam giác MNP.

d) Tính góc hợp bởi Δ và các trục tọa độ.

Giải

$\Delta: 3x - 4y + 2 = 0 \Rightarrow \Delta$ nhận $\vec{u}(4\ ;\ 3)$ làm vectơ chỉ phương.

Mặt khác Δ đi qua $M_0(0\ ;\ \frac{1}{2})$.

a) Đường thẳng Δ có phương trình tham số : $\begin{cases} x = 4t \\ y = \frac{1}{2} + 3t \end{cases}$ $(t \in R)$

b) Cho $y = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$; $x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$

Vậy Δ có phương trình đường thẳng theo đoạn chắn :

$$\frac{x}{-\frac{2}{3}} + \frac{y}{\frac{1}{2}} = 1$$

c) Ta có: $d(M, \Delta) = \frac{|3.3 - 4.5 + 2|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{9}{5}$

$$d(N, \Delta) = \frac{|3.(-4) - 4.0 + 2|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

$$d(P, \Delta) = \frac{|3.2 - 4.1 + 2|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{4}{5}$$

Do $3.3 - 4.5 + 2 = -9 < 0$; $3.(-4) - 4.0 + 2 = -10 < 0$; $3.2 - 4.1 + 2 = 4 > 0$

$\Rightarrow$ Các điểm M, N nằm về một phía của Δ, còn điểm P nằm về phía còn lại

$\Rightarrow \Delta$ cắt hai cạnh MP và NP

d) Gọi α, β lần lượt là góc tạo bởi Δ và hai trục Ox, Oy

Ta có : $\cos\alpha = |\cos(\vec{n}, \vec{i})|$ ($\vec{n}$ là véctơ pháp của Δ; $\vec{i}(1\ ;\ 0)$)

$$= \frac{|3.1 - 4.0|}{\sqrt{3^2 + 4^2}.\sqrt{1^2 + 0}} = \frac{3}{5} \Rightarrow \alpha \approx 36^\circ 52'$$

$$\Rightarrow \beta \approx 90^\circ - 36^\circ 52' \approx 53^\circ 8'$$

(vì α, β là 2 góc có cạnh tương ứng vuông góc).

Bài 3. Cho đường thẳng d: $x - y + 2 = 0$ và điểm A(2 ; 0)

a) Với điều kiện nào của x và y thì điểm M(x ; y) thuộc nửa mặt phẳng bờ là d và chứa gốc tọa độ O. Chứng minh điểm A nằm trong nửa mặt phẳng đó.

b) Tìm điểm đối xứng với điểm O qua đường thẳng d.

c) Tìm điểm M trên d sao cho chu vi tam giác OMA nhỏ nhất.

Giải

a) Thay tọa độ của M và O vào vế trái của d. Ta có:

$d_o = 0 - 0 + 2 = 2 > 0$; $d_M = x - y + 2$.

Do đó điểm M thuộc nửa mặt phẳng bờ là d và chứa gốc tọa độ O khi $x - y + 2 > 0$

Ta lại có $d_A = 2 - 0 + 2 = 4 > 0$ $\Rightarrow$ A thuộc nửa mặt phẳng bờ d và chứa gốc tọa độ O.

b) Gọi d_1 là đường thẳng đi qua O và vuông góc với d $\Rightarrow d_1$ nhận véctơ $\vec{u}(1 ; 1)$ làm vectơ pháp tuyến $\Rightarrow d_1$ có phương trình $x + y = 0$

$\Rightarrow$ tọa độ giao điểm I của d_1 và d là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \text{ vậy } I(-1 ; 1)$$

Gọi O' (x ; y) là điểm đối xứng với O qua d

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2x_I - x_O \\ y = 2y_I - y_O \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{Vậy } O'(-2 ; 2)$$

c) Vì OA = 2 không đổi nên chu vi tam giác OMA nhỏ nhất khi MO + MA nhỏ nhất. Với mọi điểm M trên d ta có MO = MO' nên MO + MA = MO' + MA $\geq$ O'A.

Dấu bằng xảy ra khi M là giao của d và O'A:

Ta có: $\overrightarrow{O'A} = (4 ; -2) \Rightarrow$ O'A có phương trình $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y}{-2} \Leftrightarrow x + 2y - 2 = 0$

$$\Rightarrow \text{tọa độ M là nghiệm hệ: } \begin{cases} x + 2y - 2 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{2}{3} \\ y = \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

Vậy $M(-\dfrac{2}{3};\dfrac{4}{3})$

Bài 4. Cho đường thẳng Δ: $Ax + By + C = 0$ và điểm $I(x_o ; y_o)$. Viết phương trình đường thẳng Δ' đối xứng với Δ qua I.

Giải

Δ' đối xứng với Δ qua I khi và chỉ khi $\Delta' \equiv \Delta$ nếu $I \in \Delta$ hoặc $\Delta' // \Delta$

nếu $I \notin \Delta$ khi đó Δ' và Δ cách đều I. Như vậy Δ' có phương trình dạng $Ax + By + C' = 0$.

Do $d(I, \Delta) = d(I, \Delta')$ nên $C' = -2(Ax_0 + By_0) - C$.

Vậy Δ' có phương trình: $Ax + By - 2(Ax_0 + By_0) - C = 0$.

Bài 5. Một hình bình hành có hai cạnh nằm trên đường thẳng $x+3y-6=0$ và $2x-5y-1=0$. Biết hình bình hành đó có tâm đối xứng là $I(3 ; 5)$, hãy viết phương trình các cạnh còn lại của hình bình hành đó.

Giải

Gọi hình bình hành là ABCD và giả sử AB: $x + 3y - 6 = 0$

AD: $2x - 5y - 1 = 0$

Do hình bình hành ABCD nhận $I(3 ; 5)$ làm tâm đối xứng nên BC đối xứng với AD qua I; CD đối xứng với AB qua I.

Do BC//AD $\Rightarrow$ BC có phương trình dạng $2x - 5y + m = 0$ ($m \neq -1$).

Mặt khác BC và AD đối xứng nhau qua I $\Rightarrow d(I ; BC) = d(I ; AD)$

$$\Leftrightarrow \frac{|2.3 - 5.5 + m|}{\sqrt{2^2 + 5^2}} = \frac{|2.3 - 5.5 - 1|}{\sqrt{2^2 + 5^2}} \Leftrightarrow |m - 19| = 20 \Leftrightarrow m = 39 \text{ (vì } m \neq -1)$$

Vậy BC có phương trình $2x - 5y + 39 = 0$.

Hoàn toàn tương tự ta có CD có phương trình $x + 3y - 30 = 0$

Bài 6. Cho phương trình $x^2 + y^2 + mx - 2(m + 1)y + 1 = 0$ (1)

a) Với giá trị nào của m thì (1) là phương trình của đường tròn.

b) Tìm tập hợp tâm của các đường tròn nói ở câu a.

Giải

$$x^2 + y^2 + mx - 2(m + 1)y + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{m}{2}\right)^2 + (y - (m + 1))^2 = \frac{m^2}{4} + (m + 1)^2 - 1$$

a) Để (1) là phương trình của đường tròn $\Leftrightarrow$

$$\frac{m^2}{4} + (m + 1)^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 0 \\ m < -\dfrac{8}{5} \end{array}\right.$$

b) Với $\left[\begin{array}{l} m > 0 \\ m < -\dfrac{8}{5} \end{array}\right.$ thì (1) là đường tròn tâm $I(x , y)$ trong đó $\begin{cases} x = -\dfrac{m}{2} \\ y = m + 1 \end{cases}$

khử m từ hệ phương trình trên $\Rightarrow 2x + y - 1 = 0$.

Do $m < -\dfrac{8}{5} \Rightarrow -2x < -\dfrac{8}{5} \Leftrightarrow x > \dfrac{4}{5}$

$m > 0 \Rightarrow -2x > 0 \Leftrightarrow x < 0$

Vậy tập hợp tâm I là hai nửa đường thẳng $2x + y - 1 = 0$ với $\left[\begin{array}{l} x > \frac{4}{5} \\ x < 0 \end{array}\right.$

Bài 7. a) Biết đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$. Chứng minh rằng phương tích của điểm $M(x_o ; y_o)$ đối với đường tròn (C) bằng $x_o^2 + y_o^2 + 2Ax_o + 2Ay_o + C$

b) Chứng minh rằng nếu hai đường tròn không đồng tâm thì tập hợp các điểm có cùng phương tích đối với hai đường tròn là đường thẳng (gọi là trục đẳng phương của hai đường tròn).

Giải

a) Ta có: (C) là đường tròn tâm $I(-A , -B)$, bán kính $R = \sqrt{A^2 + B^2 - C}$.

$$\mathscr{P}_{M/(C)} = d^2 - R^2 = IM^2 - R^2 = (x_o + A)^2 + (y_o + B)^2 - (A^2 + B^2 - C)$$
$$= x_o^2 + y_o^2 + 2Ax_o + 2Ay_o + C$$

Vậy: $\mathscr{P}_{M/(C)} = x_o^2 + y_o^2 + 2Ax_o + 2Ay_o + C$

b) Giả sử (x; y) là điểm có cùng phương tích với hai đường tròn không đồng tâm $(O_1; R_1)$, $(O_2; R_2)$.

(O_1): $x^2 + y^2 + 2A_1x + 2B_1y + C_1 = 0$

(O_2): $x^2 + y^2 + 2A_2x + 2B_2y + C_2 = 0$

$\Rightarrow \mathscr{P}_{M/(O_1)} = \mathscr{P}_{M/(O_2)}$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2A_1x + 2B_1y + C_1 = x^2 + y^2 + 2A_2x + 2B_2y + C_2$

$\Leftrightarrow 2(A_1 - A_2)x + 2(B_1 - B_2)y + C_1 - C_2 = 0 \qquad (*)$

Do (O_1) và (O_2) không đồng tâm

$\Rightarrow (A_1 - A_2)^2 + (B_1 - B_2)^2 \neq 0$

$\Rightarrow$ (*) là phương trình của một đường thẳng. Đường thẳng đó gọi là trục đẳng phương của hai đường tròn.

Bài 8. Cho hai đường tròn $x^2 + y^2 + 2A_1x + 2B_1y + C_1 = 0$

$x^2 + y^2 + 2A_2x + 2B_2y + C_2 = 0$. Giả sử chúng cắt nhau tại hai điểm M, N. Phương trình $2(A_1 - A_2)x + 2(B_1 - B_2)y + C_1 - C_2 = 0$ có phải là phương trình của đường thẳng không? Nếu nó là phương trình của đường thẳng thì đường thẳng này có đi qua M và N không?

Giải

Do hai đường tròn (C_1): $x^2 + y^2 + 2A_1x + 2B_1y + C_1 = 0$

(C_2): $x^2 + y^2 + 2A_2x + 2B_2y + C_2 = 0$ cắt nhau tại hai điểm M,N

$\Rightarrow (C_1)$ và (C_2) không đồng tâm,

$\Rightarrow A_1 - A_2$ và $B_1 - B_2$ không đồng thời bằng không.

$\Rightarrow$ Tọa độ giao điểm M,N của hai đường tròn là nghiệm của phương trình $x^2 + y^2 + 2A_1x + 2B_1y + C_1 = x^2 + y^2 + 2A_2x + 2B_2y + C_2$

$\Leftrightarrow 2(A_1 - A_2)x + 2(B_1 - B_2)y + C_1 - C_2 = 0$ (*) là phương trình đường thẳng.

Vậy nếu (C_1), (C_2) cắt nhau tại M,N thì tọa độ M, N thỏa mãn phương trình (*) hay (*) là phương trình đường thẳng M,N.

Bài 9. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 4$ và điểm $A(-2\ ;\ 3)$

a) Viết phương trình các tiếp tuyến của (C) kẻ từ A.

b) Tính độ dài các đoạn tiếp tuyến và khoảng cách giữa hai tiếp điểm của hai tiếp tuyến ở câu a.

Giải

a) Gọi Δ là đường thẳng qua A và nhận $\vec{n}(a\ ;\ b)$ làm vectơ pháp tuyến

$\Rightarrow \Delta$ có phương trình: $a(x + 2) + b(y - 3) = 0$. $(a^2 + b^2 \neq 0)$.

Ta có (C) là đường tròn tâm $O(0\ ;\ 0)$ bán kính $R = 2$. (Δ) là tiếp tuyến của (C)

$$\Leftrightarrow d(O,\ \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|2a - 3b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2 \Leftrightarrow |2a - 3b| = 2\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\Leftrightarrow b(12a - 5b) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ 12a - 5b = 0 \end{array}\right.$$

- Với $b = 0$ lấy $a = 1 \Rightarrow$ ta có tiếp tuyến Δ_1: $x + 2 = 0$
- Với $12a - 5b = 0$ lấy $a = 5 \Rightarrow b = 12$

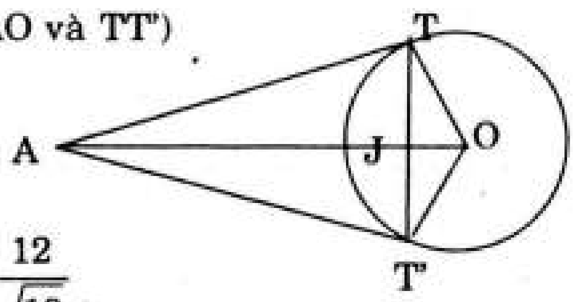
$\Rightarrow$ ta có tiếp tuyến Δ_2: $5x + 12y - 26 = 0$.

b) Gọi T và T' là tiếp điểm của Δ_1 và Δ_2 với (C)

Ta có: $AT^2 = AT'^2 = \mathscr{P}_{A/(C)} = 9 \Rightarrow AT = AT' = 3$

Ta có: $TT' = 2TJ$ (J là giao điểm của AO và TT')

mà $TJ.AO = AT.TO$



$$\Rightarrow TJ = \frac{AT.TO}{AO} = \frac{AT.TO}{\sqrt{AT^2 + TO^2}}$$

$$\text{Vậy } TT' = 2\frac{AT.TO}{\sqrt{AT^2 + TO^2}} = 2\frac{3.2}{\sqrt{9 + 4}} = \frac{12}{\sqrt{13}}$$

Bài 10. Cho elip (E) : $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ và hypebol (H) : $\dfrac{x^2}{5} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

a) Tìm tọa độ các tiêu điểm của (E) và (H).

b) Vẽ elip (E) và hypebol (H) trong cùng một hệ trục tọa độ.

c) Tìm tọa độ các giao điểm của hai đường đó.

Giải

a) (E): $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow a^2 = 5$, $b^2 = 4 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 1 \Rightarrow c = 1$

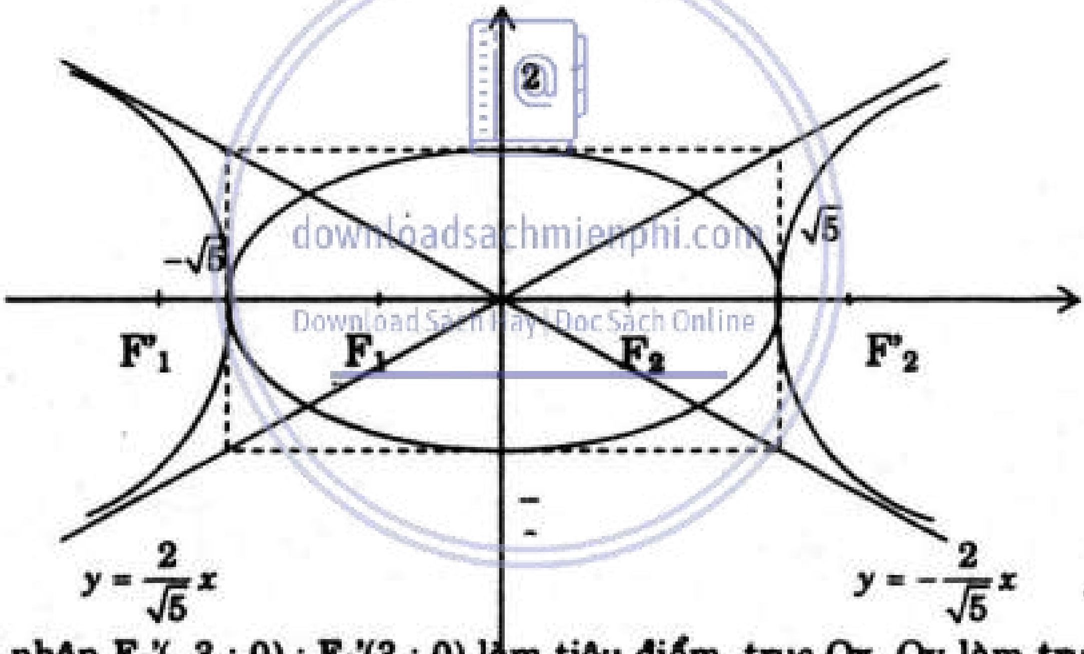
Vậy (E) có tiêu điểm $F_1(-1;0)$; $F_2(1;0)$

(H): $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow a^2 = 5$, $b^2 = 4 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 9 \Rightarrow c = 3$

Vậy (H) cắt tiêu điểm $F_1(-3 ; 0)$; $F_2(3 ; 0)$.

b) Vẽ (E) , (H). (Hình dưới đây).

(E) nhận Ox, Oy làm hai trục đối xứng, nhận $F_1(-1 ; 0)$ và $F_2(1 ; 0)$ làm tiêu điểm, cắt Ox tại $(-\sqrt{5} ; 0)$;$(\sqrt{5} ; 0)$ và cắt Oy tại $(0 ; -2)$; $(0 ; 2)$



(H) nhận $F_1'(-3 ; 0)$; $F_2'(3 ; 0)$ làm tiêu điểm, trục Ox, Oy làm trục đối xứng và đường thẳng $y = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$ làm tiệm cận.

c) Tọa độ giao điểm của (E) và (H) là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 5 \\ y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{5} \\ y = 0 \end{cases}$$

Vậy tọa độ giao điểm là $(\sqrt{5};0)$;$(-\sqrt{5};0)$

Bài 11. Cho đường thẳng $\Delta: 2x - y - m = 0$ và elip (E): $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

a) Với giá trị nào của m thì Δ cắt (E) tại hai điểm phân biệt ?

b) Với giá trị nào của m thì Δ cắt (E) tại một điểm duy nhất ?

Giải

Ta có tọa độ giao điểm của Δ và (E) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{4} = 1 \\ 2x - y - m = 0 \end{cases} \quad (I)$$

a) Δ cắt (E) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ hệ (I) có đúng 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{4} = 1 \\ y = 2x - m \end{cases}$ có đúng 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{5} + \dfrac{(2x - m)^2}{4} = 1$ có đúng 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow 4x^2 + 5(4x^2 - 4mx + m^2) = 20$ có đúng 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow 24x^2 - 20mx + 5m^2 - 20 = 0$ có đúng 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow 100m^2 - 24(5m^2 - 20) > 0 \Leftrightarrow -2\sqrt{6} < m < 2\sqrt{6}$

b) Δ cắt (E) tại một điểm duy nhất $\Leftrightarrow$ hệ (I) có đúng 1 nghiệm

$\Leftrightarrow$ phương trình $24x^2 - 20mx + 5m^2 - 20 = 0$ có đúng 1 nghiệm

$\Leftrightarrow 100m^2 - 24(5m^2 - 20) = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2\sqrt{6}$

Bài 12. Cho elip (E): $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

a) Xác định tọa độ hai tiêu điểm và các đỉnh của (E).

b) Viết phương trình chính tắc của hypebol (H) nhận các tiêu điểm của (E) làm đỉnh và có hai tiêu điểm là hai đỉnh của (E).

c) Vẽ elip (E) và hypebol (H) vừa tìm được trên cùng một hệ trục tọa độ.

d) Viết phương trình của đường tròn đi qua các giao điểm của hai đường conic đó.

Giải

Ta có: $a^2 = 25$, $b^2 = 9 \Rightarrow a = 5$, $b = 3$ và $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$

a) • Tọa độ hai tiêu điểm: $F_1(-4 ; 0)$; $F_2(4 ; 0)$

• Tọa độ các đỉnh $A_1(-5 ; 0)$, $A_2(5 ; 0)$, $B_1(0 ; -3)$, $B_2(0 ; 3)$

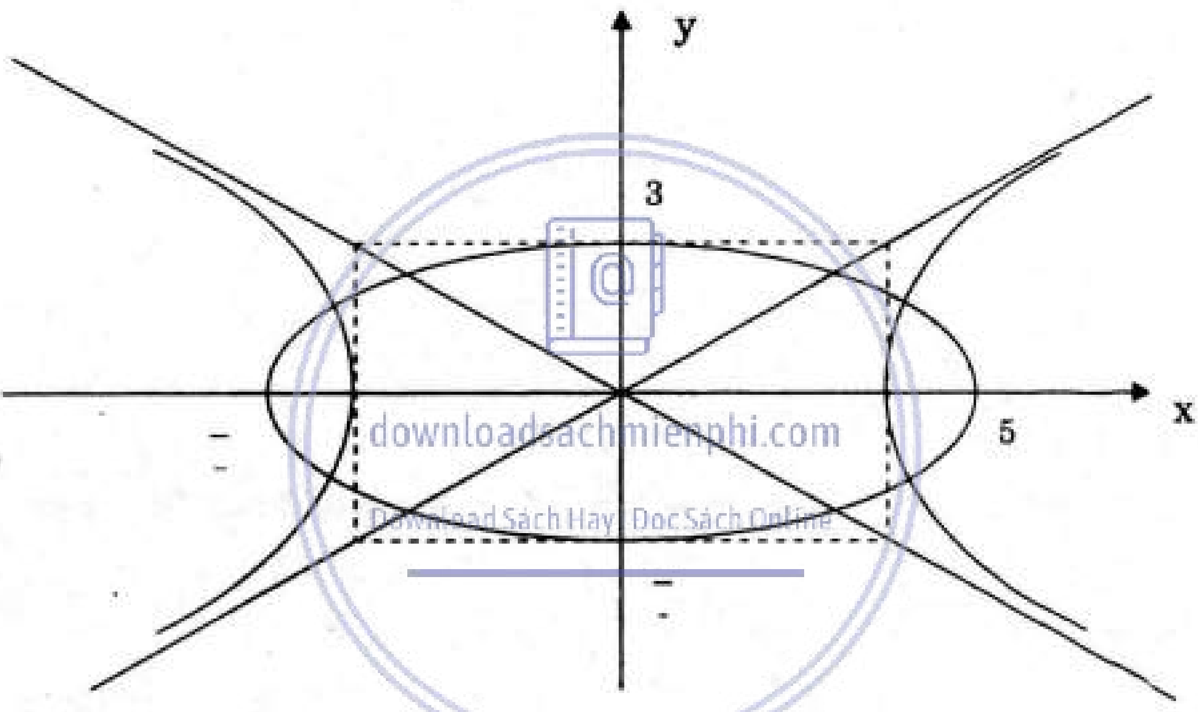
b) Phương trình chính tắc của hypebol (H) có dạng: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

do (H) có hai đỉnh $(-4\ ;\ 0)$; $(4\ ;\ 0)$ và hai tiêu điểm $(-5\ ;\ 0)$; $(5\ ;\ 0)$

nên $\begin{cases} a = 4 \\ a^2 + b^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 16 \\ b^2 = 9 \end{cases}$.

Vậy phương trình của (H) là: $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

c) (Hình dưới đây)



d) Tọa độ giao điểm của (E) và (H) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \\ \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{x^2}{16} = 2 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{2}{\dfrac{1}{25} + \dfrac{1}{16}} \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{2.25.16}{41}$$

$$\Rightarrow \dfrac{y^2}{9} = \dfrac{x^2}{16} - 1 \Rightarrow y^2 = 9.\left(\dfrac{x^2}{16} - 1\right) = 9.\left(\dfrac{2.25.16}{16.41} - 1\right)$$

$$\Rightarrow y^2 = 9.\left(\dfrac{2.25}{41} - 1\right) = \dfrac{81}{41}.$$ Từ đó suy ra $x^2 + y^2 = \dfrac{881}{41}$

Vậy tọa độ giao điểm của (E) và (H) nằm trên đường tròn $x^2 + y^2 = \dfrac{881}{41}$

Bài 13. Cho parabol: $y^2 = 2px$. Với mỗi điểm M nằm trên parabol ($M \neq O$). Gọi M' là hình chiếu của M trên Oy và I là trung điểm đoạn OM'. Chứng minh rằng đường thẳng IM cắt parabol tại một điểm duy nhất.

Giải

Gọi $M(x_o ; y_o) \in (P) \Rightarrow y_o^2 = 2px_o$. Suy ra $M'(0 ; y_o)$.

Do I là trung điểm OM' $\Rightarrow I\left(0 ; \frac{y_o}{2}\right)$

Do $M \neq O$ nên đường thẳng IM có phương trình: $\frac{x}{x_o} - \frac{2y}{y_o} + 1 = 0$

Xét hệ phương trình $\begin{cases} y^2 = 2px & (1) \\ \frac{x}{x_o} - \frac{2y}{y_o} + 1 = 0 & (2) \end{cases}$ (I)

Từ (2) $\Rightarrow x = \frac{2x_o}{y_o}y - x_o$ thay vào (1) suy ra $y^2 = 2p\left(\frac{2x_o}{y_o}y - x_o\right)$

Mặt khác $y_o^2 = 2px_o \Rightarrow x_o = \frac{y_o^2}{2p}$

Do vậy $y^2 = 2p.\left(\frac{y_o y}{p} - \frac{y_o^2}{2p}\right)$ hay $y^2 - 2y_o y + y_o^2 = 0 \Leftrightarrow y = y_o$

Suy ra hệ (I) có 1 nghiệm, do đó IM chỉ cắt (P) tại một điểm M.

Bài 14. Cho parabol (P): $y^2 = \frac{1}{2}x$. Gọi M,N là hai điểm di động trên (P) sao cho $OM \perp ON$, (M,N không trùng với O). Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Giải

Đặt $M(x_1 ; y_1)$, $N(x_2 ; y_2)$. Do $MN \in (P)$: $y^2 = \frac{1}{2}x$ nên

$x_1 = 2y_1^2$; $x_2 = 2y_2^2$. (với x_1, x_2, y_1, y_2 khác 0).

Do $OM \perp ON \Rightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0 \Rightarrow y_1y_2(1+4y_1y_2) = 0 \Leftrightarrow y_1y_2 = -\frac{1}{4}$ (*)

Ta có đường thẳng MN nhận $\overrightarrow{MN}$ làm véctơ chỉ phương

$\Rightarrow$ MN có phương trình $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$

$\Leftrightarrow (y_2 - y_1)x - (x_2 - x_1)y - y_1x_2 - x_1y_2 = 0$ (**)

hay $(y_2 - y_1)[x - 2(y_1 + y_2)y + 2y_1y_2] = 0$

(thay $x_1 = 2y_1^2, x_2 = 2y_2^2$ vào (**))

Do $M \neq N \Rightarrow y_1 \neq y_2$ (vì nếu $y_1 = y_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow M \equiv N$)

Vậy phương trình của MN là: $x - 2(y_1 + y_2)y + 2y_1y_2 = 0$

Hay $x - 2(y_1 + y_2)y - \dfrac{1}{2} = 0$ (do (*))

Lại có $\dfrac{1}{2} - 2(y_1 + y_2).0 - \dfrac{1}{2} = 0 \Rightarrow$ đường thẳng MN đi qua điểm cố định

là $\left(\dfrac{1}{2};0\right)$.

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

1) Đường thẳng $2x + y - 1 = 0$ có véctơ pháp tuyến là vectơ nào ?

I) $\vec{n}=(2\,;-1)$; II) $\vec{n}=(1\,;-1)$;

III) $\vec{n}=(2\,;1)$; IV) $\vec{n}=(-1\,;2)$.

2) Đường trung trực của đoạn thẳng AB với $A=(-3\,;2)$, $B(-3;3)$ có vectơ pháp tuyến là véctơ nào ?

I) $\vec{n}=(6\,;5)$; II) $\vec{n}=(0\,;1)$;

III) $\vec{n}=(-3\,;5)$; IV) $\vec{n}=(-1\,;0)$.

3) Phương trình nào là phương trình tham số của đường thẳng $x-y+3=0$?

I) $\begin{cases} x = t \\ y = 3 + t \end{cases}$; II) $\begin{cases} x = 3 \\ y = t \end{cases}$;

III) $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \end{cases}$; IV) $\begin{cases} x = t \\ y = 3 - t \end{cases}$.

4) Vectơ nào là vectơ pháp tuyến của đường thẳng có phương trình $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 - t \end{cases}$

I) $\vec{n}=(2\,;-1)$; II) $\vec{n}=(-1\,;2)$;

III) $\vec{n}=(1\,;-2)$; IV) $\vec{n}=(1\,;2)$.

5) Đường thẳng nào không cắt đường thẳng $2x + 3y - 1 = 0$?

I) $2x + 3y + 1 = 0$; II) $x - 2y + 5 = 0$;

III) $2x - 3y + 3 = 0$; IV) $4x - 6y - 2 = 0$.

6) Đường thẳng nào song song với đường thẳng $x-3y+4=0$?

I) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$; II) $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$;

III) $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 + t \end{cases}$; IV) $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 - t \end{cases}$.

7) Đường thẳng nào song song với đường thẳng $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$?

I) $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2t \end{cases}$; II) $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = -2t \end{cases}$;

III) $\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = t \end{cases}$; IV) $\begin{cases} x = 5 + 4t \\ y = 2t \end{cases}$.

8) Đường thẳng nào vuông góc với đường thẳng $4x-3y+1=0$?

I) $\begin{cases} x = 4t \\ y = -3 - 3t \end{cases}$; II) $\begin{cases} x = 4t \\ y = -3 + 3t \end{cases}$;

III) $\begin{cases} x = -4t \\ y = -3 - 3t \end{cases}$; IV) $\begin{cases} x = 8t \\ y = -3 + t \end{cases}$.

9) Đường thẳng nào vuông góc với đường thẳng $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$?

I) $2x + y + 1 = 0$; II) $x + 2y + 1 = 0$;

III) $4x - 2y + 1 = 0$; IV) $\frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{2}$.

10) Khoảng cách từ điểm O(0 ; 0) đến đường thẳng $4x-3y-5 = 0$ bằng bao nhiêu ?

I) 0 ; II) 1 ;

III) –5 ; IV) $\frac{1}{5}$.

11) Phương trình nào là phương trình của đường tròn tâm I(–3 ; 4) bán kính R = 2 ?

I) $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 - 4 = 0$; II) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$;

III) $(x + 3)^2 + (y + 4)^2 = 4$; IV) $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 2$.

12) Phương trình $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ là phương trình của đường tròn nào ?

I) Đường tròn có tâm (–1 ; 2) bán kính R = 1;

II) Đường tròn có tâm (1 ; –2) bán kính R = 2 ;

III) Đường tròn có tâm (2 ; –4) bán kính R = 2 ;

IV) Đường tròn có tâm (1 ; –2) bán kính R = 1.

13) Những điểm nào là tiêu điểm của elip (E): $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$?

I) $F_{1,2} = (\pm 1 ; 0)$; II) $F_{1,2} = (\pm 3 ; 0)$;

III) $F_{1,2} = (0 ; \pm 1)$; IV) $F_{1,2} = (1 ; \pm 2)$.

14) Elip (E): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ có tâm sai bằng bao nhiêu ?

I) $e = \frac{3}{2}$; II) $e = -\frac{\sqrt{5}}{3}$;

III) $e = \frac{2}{3}$; IV) $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

15) Cho elip có tiêu điểm $F_1(-3 ; 0)$, $F_2(3 ; 0)$ và đi qua $A(-5 ; 0)$. Khi đó điểm $M(x ; y)$ thuộc elip có các bán kính qua tiêu điểm là bao nhiêu ?

I) $MF_1 = 5 + \frac{3}{5}x, MF_2 = 5 - \frac{3}{5}x$; II) $MF_1 = 5 + \frac{4}{5}x, MF_2 = 5 - \frac{4}{5}x$;

II) $MF_1 = 3 + 5x, MF_2 = -3 - 5x$; IV) $MF_1 = 5 + 4x, MF_2 = 5 - 4x$.

16) Cho elip (E): $\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1$, với $p > q > 0$ có tiêu cự là bao nhiêu ?

I) $p + q$; II) $p^2 - q^2$;

III) $p - q$; IV) $2\sqrt{p^2 - q^2}$.

17) Phương trình $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ là phương trình chính tắc của đường nào?

I) Elip với trục lớn bằng 2a, trục bé bằng 2b ;

II) Hypebol với trục lớn bằng 2a, trục bé bằng 2b ;

III) Hypebol với trục hoành bằng 2a, trục tung bằng 2b ;

IV) Hypebol với trục thực bằng 2a, trục ảo bằng 2b .

18) Những điểm nào là tiêu điểm của hypebol $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{5} = 1$?

I) $(\pm 4 ; 0)$; II) $\left(\pm\sqrt{14} ; 0\right)$;

III) $\left(\pm 2 ; 0\right)$; IV) $\left(0 ; \pm\sqrt{14}\right)$.

19) Những đường nào là đường tiệm cận của hypebol $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$?

I) $y = \pm\frac{5}{4}x$; II) $y = \pm\frac{4}{5}x$;

III) $y = \pm\frac{25}{16}x$; IV) $y = \pm\frac{16}{25}x$.

20) Những đường nào là đường chuẩn của hypebol $\frac{x^2}{q^2} - \frac{y^2}{p^2} = 1$?

I) $x = \pm\frac{p}{q}$; II) $x = \pm\frac{q}{p}$;

III) $x = \pm\frac{q^2}{\sqrt{q^2 + p^2}}$; IV) $x = \pm\frac{p^2}{\sqrt{q^2 + p^2}}$.

21) Đường tròn nào ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở của hypebol $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$?

I) $x^2 + y^2 = 25$; II) $x^2 + y^2 = 7$;

III) $x^2 + y^2 = 16$; IV) $x^2 + y^2 = 9$.

22) Điểm nào là tiêu điểm của parabol $y^2=5x$?

I) $F(5 ; 0)$; II) $F\left(\frac{5}{2} ; 0\right)$;

III) $F\left(\pm\frac{5}{4} ; 0\right)$; IV) $F\left(\frac{5}{4} ; 0\right)$.

23) Đường thẳng có phương trình nào là đường chuẩn của parabol $y^2 = 4x$?

I) $x = 4$; II) $x = -2$;

III) $x = \pm 1$; IV) $x = -1$.

24) Conic có tâm sai $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$ là đường nào ?

I) Hypebol ; II) Parabol ;

III) Elip ; IV) Đường tròn.

Đáp án.

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Đáp án	III	II	I	IV	I	IV	II	I	II	II	I	II
Câu	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Đáp án	I	IV	I	IV	IV	II	I	III	I	IV	IV	III

III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO.

Bài 15. Cho tam giác ABC có $A(-1 ; 1)$, $B(3 ; 2)$, $C\left(-\frac{1}{2};-1\right)$.

a) Tính các cạnh của tam giác ABC. Từ đó suy ra dạng của tam giác.

b) Viết phương trình đường cao, đường trung tuyến và đường phân giác trong của tam giác tại đỉnh A.

c) Xác định tọa độ tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài 16. Cho đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$ và điểm M(4 ; 5)

a) Chứng minh rằng điểm M nằm trên đường tròn (C). Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại M.

b) Viết phương trình đường tròn đối xứng với đường tròn (C) qua đường thẳng y = x.

Bài 17. Cho elip (E): $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1$ và hai điểm M(−2 ; m),N(2 ; n) $(m \neq -n)$

a) Gọi A_1 và A_2 là các đỉnh trên trục lớn của (E). Hãy viết phương trình các đường thẳng A_1N và A_2M. Xác định tọa độ giao điểm I của chúng.

b) Biết đường thẳng MN thay đổi nhưng luôn cắt (E) tại một điểm duy nhất. Tìm tập hợp các giao điểm I.

Bài 18. Hai chiếc microphone đặt cách nhau một dặm, để ghi âm một vụ nổ. Microphone A nhận âm thanh trước microphone B là 2 giây. Biết vận tốc của âm thanh là 1100feet/s. Hãy xác định vụ nổ xảy ra ở đâu? (1 dặm = 5280feet , 3feet = 0,914m).

IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 15.

a) $AB = \sqrt{17}$; $AC = \dfrac{\sqrt{17}}{2}$; $BC = \dfrac{\sqrt{85}}{2}$ (Δ ABC vuông tại A)

b) • Đường cao AH : $7x + 6y + 1 = 0$

• Trung tuyến AD : $2x + 9y - 7 = 0$

• Phân giác AE : $2x + 5y - 3 = 0$

c) Tâm đường tròn trùng với $D\left(\dfrac{5}{4} ; \dfrac{1}{2}\right)$

Bài 16.

a) Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là $y - 5 = 0$.

b) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$.

Bài 17.

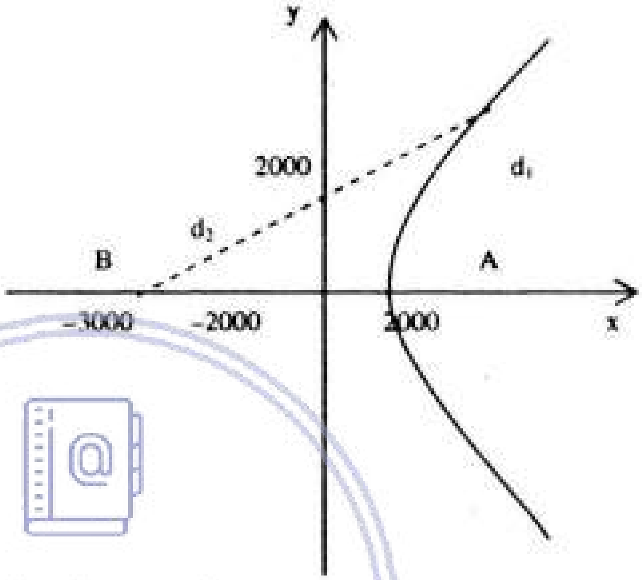
a) Phương trình A_1N: $nx - 4y + 2n = 0$

Phương trình A_2M: $mx + 4y - 2m = 0$

Tọa độ giao điểm I : $I\left(\dfrac{2(m-n)}{m+n} ; \dfrac{m.n}{m+n}\right)$.

b) Tập hợp các giao điểm I là elip (E') có phương trình $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1$

Bài 18. Chọn hệ trục tọa độ Oxy mà Ox đi qua A và B, Oy là trung trực của AB (như hình 104). Ký hiệu d_1 là quãng đường âm thanh đi từ vụ nổ đến microphone A, d_2 là quãng đường âm thanh đi từ vụ nổ đến microphone B.



Khi đó theo giả thiết

$|d_2 - d_1| = 2200 (1)$

Tập các điểm thỏa mãn (1) là hypebol có phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ta có $c = \frac{5.280}{2} = 2640$;

$a = \frac{2200}{2} = 1100$.

$b^2 = c^2 - a^2 = 5759600$.

Vậy vụ nổ nằm trên một nhánh hypebol có phương trình

$$\frac{x^2}{1210000} - \frac{y^2}{5759600} = 1$$

ÔN TẬP CUỐI NĂM

I.KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

1. Véctơ và các phép toán véctơ : tổng của các véctơ , hiệu của hai véctơ, tích của véctơ với một số
2. Tích vô hướng của hai véctơ:
   - + Giá trị lượng giác của một góc.
   - +Tích vô hướng của hai véctơ.
   - + Hệ thức lượng trong tam giác.
3. Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng:
   - + Phương trình tổng quát , phương trình tham số của đường thẳng.
   - + Góc và khoảng cách.
   - + Đường tròn và các tính chất.
   - + Đường conic và các tính chất.

II. BÀI TẬP CƠ BẢN.

Bài 1: Trong hình bên , ta có tam giác ABC và các hình vuông $AA'B_1B$, $BB'C_1C$, $CC'A_1A$.

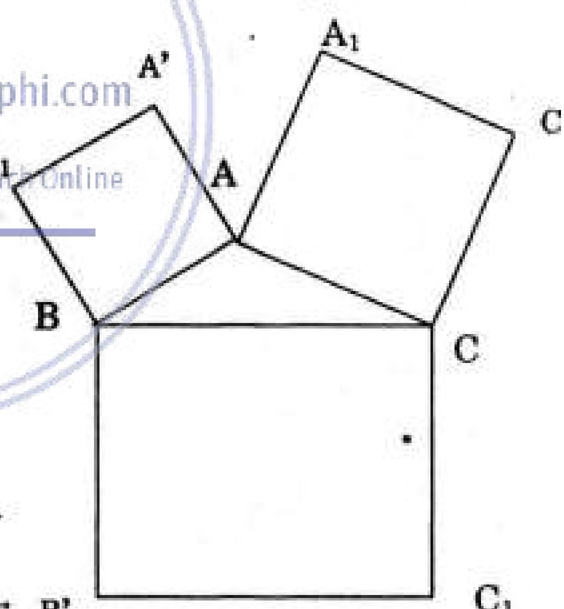
Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\left(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'}\right).\overrightarrow{AC} = 0$;

b) $\left(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}\right).\overrightarrow{AC} = 0$;

c) $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$;

d) $\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{BC_1} + \overrightarrow{CA_1} = \vec{0}$.



Giải

Giả sử AB = c , AC = b , BC = a.

a) Ta có:

$$(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'})\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'})(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}).$$

$$= \overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BC}$$

$$= \overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB_1}.\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BA}$$

$$= \left|\overrightarrow{BB_1}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|.\cos\widehat{B_1BC} - \left|\overrightarrow{BB'}\right|.\left|\overrightarrow{BA}\right|.\cos\widehat{B'BA}$$

$$= c.a.\cos\widehat{B_1BC} - a.c.\cos\widehat{B'BA}$$

Mà $\widehat{B_1BC} = \widehat{B'BA} \Rightarrow \left(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'}\right).\overrightarrow{AC} = 0$

b) Theo câu a: $\left(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'}\right).\overrightarrow{AC} = 0$.

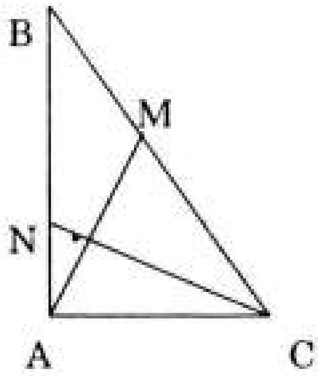
Mặt khác : $\overrightarrow{CC'}.\overrightarrow{AC} = 0$ (vì AC ⊥ CC')

Do đó: $(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}).\overrightarrow{AC} = 0$

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A, AC = b
AB = c.
Gọi M là điểm trên cạnh BC sao cho CM=2BM ,
N là điểm trên cạnh AB sao cho BN=2AN .

a) Biểu thị véctơ $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{CN}$ theo hai véctơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

b) Tìm hệ thức liên hệ giữa b và c sao cho AM ⊥ CN



Giải

a) • Ta có: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ (vì CM = 2BM, CM +BM=CB)

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

• Ta có: $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

b) Ta có: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CN} = \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CN} = \frac{2}{9}\overrightarrow{AB}^2 - \frac{1}{3}AC^2 - \frac{5}{9}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{2}{9}c^2 - \frac{1}{3}b^2$$

Để AM ⊥ CN thì $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CN} = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{9}c^2 - \frac{1}{3}b^2 = 0$ hay $2c^2 = 3b^2$

Bài 3. Cho tam giác ABC với AB = 4 , AC = 5 , BC = 6

a) Tính các góc A; B; C.

b) Tính độ dài các đường trung tuyến và diện tích tam giác.

c) Tính bán kính đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác ABC.

Giải

a) Ta có: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{5^2 + 4^2 - 6^2}{2.5.4} = \frac{1}{8} \Rightarrow \widehat{A} = 82^\circ 49'$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{6^2 + 4^2 - 5^2}{2.6.4} = \frac{9}{16} \Rightarrow \widehat{B} = 55^\circ 46'$$

$$\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) \approx 41^\circ 25'$$

b) • Ta có: $p = \dfrac{a+b+c}{2} = \dfrac{15}{2}$

• $m_a{}^2 = \dfrac{b^2+c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{5^2+4^2}{2} - \dfrac{6^2}{4} = \dfrac{23}{2} \Rightarrow m_a = \dfrac{\sqrt{46}}{2}$

• $m_b{}^2 = \dfrac{a^2+c^2}{2} - \dfrac{b^2}{4} = \dfrac{6^2+4^2}{2} - \dfrac{5^2}{4} = \dfrac{79}{4} \Rightarrow m_b = \dfrac{\sqrt{79}}{2}$

• $m_c{}^2 = \dfrac{a^2+b^2}{2} - \dfrac{c^2}{4} = \dfrac{6^2+5^2}{2} - \dfrac{4^2}{4} = \dfrac{106}{4} \Rightarrow m_c = \dfrac{\sqrt{106}}{2}$

• Ta có:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{15}{2}\left(\frac{15}{2}-4\right)\left(\frac{15}{2}-5\right)\left(\frac{15}{2}-6\right)} = \frac{15\sqrt{7}}{4}$$

c) Ta có: $S = \dfrac{abc}{4R} \Rightarrow R = \dfrac{abc}{4S} = \dfrac{4.5.6}{4.\dfrac{15\sqrt{7}}{4}} = \dfrac{8\sqrt{7}}{7}$

Lại có: $S = pr \Rightarrow r = \dfrac{S}{p} \Rightarrow r = \dfrac{15\sqrt{7}}{4}.\dfrac{2}{15} = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$

Bài 4. Cho hai đường tròn (O ; R) và (O' ; R') không có điểm chung và d là trục đẳng phương của chúng. Gọi I là một điểm thay đổi trên d. Từ I kẻ các tiếp tuyến IM, IN, IM', IN' tới hai đường tròn.

a) Chứng minh rằng 4 điểm M, N, M', N' nằm trên đường tròn có tâm I và ký hiệu đường tròn đó là (I).

b) Với điểm I' nằm trên d ta lại có đường tròn (I'). Chứng minh rằng đường thẳng OO' là trục đẳng phương của hai đường tròn (I) và (I').

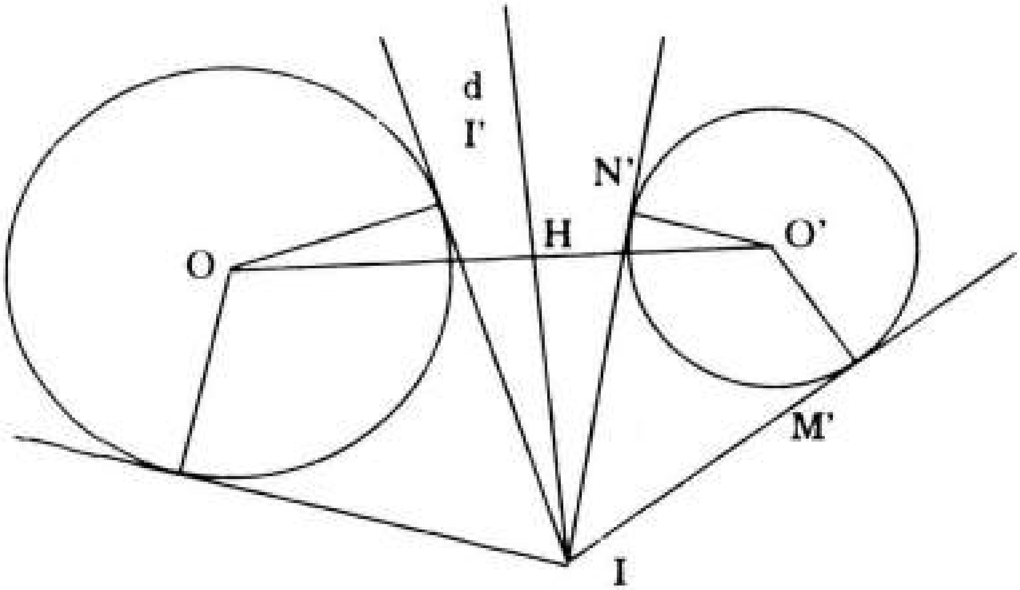
<u>Giải:</u>

a) Ta có: $\mathcal{P}_{I/(O)} = IM^2 = IN^2$. $P_{I/(O')} = IM'^2 = IN'^2$

vì I nằm trên trục đẳng phương d của hai đường tròn (O) và (O')

do đó: $\mathcal{P}_{I/(O)} = \mathcal{P}_{I/(O')} \Rightarrow IM = IN = IM' = IN'$

hay bốn điểm M, N, M', N' nằm trên đường tròn tâm I ,gọi là đường tròn (I)



b) Ta có: $\mathcal{P}_{O/(I)} = OI^2 - IM^2 = OM^2 = R^2$ tương tự: $\mathcal{P}_{O/(I')} = R^2$

$\Rightarrow \mathcal{P}_{O/(I)} = P_{O/(I')}$. Hoàn toàn tương tự: $\mathcal{P}_{O'/(I)} = \mathcal{P}_{O'/(I')}$

Vậy OO' nằm trên trục đẳng phương của (I) và (I')

Bài 5. Cho tam giác ABC.

a) Tam giác ABC có tính chất gì nếu $a^2 = \dfrac{b^3 + c^3 - a^3}{b + c - a}$?

b) Biết $\dfrac{2}{h_a} = \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}$, chứng minh rằng 2sinA = sinB + sinC.

Giải

a) Ta có: $a^2 = \dfrac{b^3 + c^3 - a^3}{b + c - a} \Leftrightarrow b^3 + c^3 = (b + c)a^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - bc$.

Mặt khác: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A \Rightarrow \cos A = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow A = 60^0$

b) Ta có: $\dfrac{2}{h_a} = \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} \Leftrightarrow \dfrac{a}{S} = \dfrac{b}{2S} + \dfrac{c}{2S} \Leftrightarrow 2a = b + c$

$\Leftrightarrow 2.2R\sin A = 2R\sin B + 2R\sin C \Rightarrow 2\sin A = \sin B + \sin C$.

Bài 6. Trên hệ trục tọa độ Oxy, cho hai hình chữ nhật OACB và OA'C'B'. Biết A(a ; 0), A'(a'; 0), B(0 ; b), B'(0 ; b')

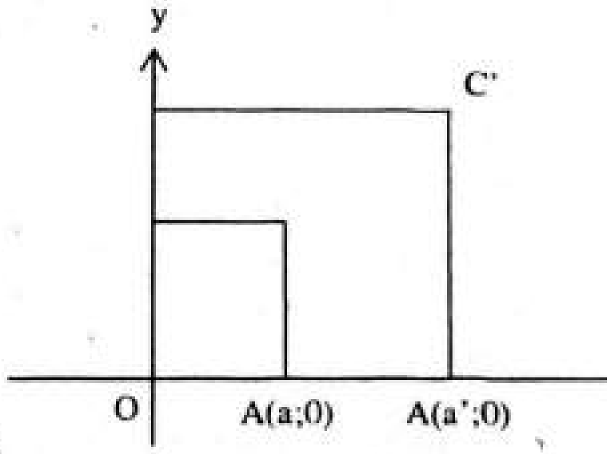
(a,a',b,b'>0 , a ≠ a', b ≠ b').

a) Viết phương trình các đường thẳng AB' và A'B.

b) Tìm hệ thức giữa a, b, a', b' để hai đường thẳng AB' và A'B cắt nhau. Trong trường hợp hai đường thẳng AB' và A'B cắt nhau, hãy tìm tọa độ giao điểm I của hai đường thẳng đó.

c) Chứng minh rằng ba điểm I, C, C' thẳng hàng.

d) Với điều kiện nào của a, b, a', b' thì C là trung điểm của IC'?



Giải

a) Ta có: $\overrightarrow{AB'} = (-a\ ;\ b')$, suy ra AB' nhận $\overrightarrow{n_1}(b'\ ;\ a)$ làm véctơ pháp tuyến.

$\Rightarrow$ AB' có phương trình : $b'(x-a) + a(y-0) = 0$ hay $b'x + ay - ab' = 0$

Hoàn toàn tương tự ta có A'B có phương trình :

$b(x-0) + a'(y-b) = 0$ hay $bx + a'y - a'b = 0$.

b) Ta có: AB' và A'B cắt nhau $\Leftrightarrow \dfrac{b'}{b} \neq \dfrac{a}{a'} \Leftrightarrow a'b' \neq ab$

Khi đó tọa độ giao điểm I của AB' với A'B là nghiệm hệ:

$$\begin{cases} b'x + ay - ab' = 0 \\ bx + a'y - a'b = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Giải (*) có: $D = \begin{vmatrix} b' & a \\ b & a' \end{vmatrix} = a'b' - ab$; $D_x = \begin{vmatrix} ab' & a \\ a'b & a' \end{vmatrix} = aa'(b'-b)$

$$D_y = \begin{vmatrix} b' & ab' \\ b & a'b \end{vmatrix} = bb'(a'-a)$$. Khi đó $a'b' \neq ab \Rightarrow$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{aa'(b'-b)}{a'b'-ab} \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{bb'(a'-a)}{a'b'-ab} \end{cases}$$ Vậy $I\left(\dfrac{aa'(b'-b)}{a'b'-ab}\ ;\ \dfrac{bb'(a'-a)}{a'b'-ab}\right)$

c) Ta có: $C(a\ ;\ b)$, $C'(a'\ ;\ b')$

$$\Rightarrow \overrightarrow{CI} = \left(\dfrac{aa'(b'-b)}{a'b'-ab} - a\ ;\ \dfrac{bb'(a'-a)}{a'b'-ab} - b\right) = \left(\dfrac{ab(a-a')}{a'b'-ab} ; \dfrac{ab(b-b')}{a'b'-ab}\right)$$

Mà $\overrightarrow{CC'} = (a'-a\ ;\ b'-b) \Rightarrow \overrightarrow{CI} = \dfrac{-ab}{a'b'-ab}.\overrightarrow{CC'} \Rightarrow$ C, I, C' thẳng hàng.

d) C là trung điểm IC' $\Leftrightarrow \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{ab(a-a')}{a'b'-ab} + a' - a = 0 \\ \dfrac{ab(b-b')}{a'b'-ab} + b' - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-a').\dfrac{a'b'}{a'b-ab'} = 0 \\ (b-b').\dfrac{a'b'}{a'b-ab'} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a'.b' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a' = 0 \\ b' = 0 \end{array}\right.$$

Vậy để C là trung điểm của IC' thì $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a' = 0 \\ b' = 0 \end{array}\right. \\ a'b' \neq ab \end{cases}$

Bài 7. Trong hệ tọa độ Oxy cho điểm A(3 ; 4) và B(6 ; 0).

a) Nhận xét gì về tam giác OAB? Tính diện tích tam giác đó ?

b) Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB ;

c) Viết phương trình đường phân giác trong tại đỉnh O của tam giác OAB ;

d) Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác OAB.

Giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (3\,;-4)$, $\overrightarrow{OA} = (3\,;4)$, $\overrightarrow{OB} = (6\,;0)$

a) • $AB = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$, $OA = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, $OB = \sqrt{6^2 + 0^2} = 6$

$\Rightarrow AB = OA \Rightarrow \Delta OAB$ cân tại A.

• Gọi H là trung điểm BO $\Rightarrow \begin{cases} H(3;0) \\ AH \perp BO \end{cases}$ (vì ΔOAB cân tại A)

Mà $\overrightarrow{AH} = (0;-4) \Rightarrow AH = 4$

Vậy diện tích tam giác OAB là: $S_{OAB} = \dfrac{1}{2}BO.AH = \dfrac{1}{2}6.4 = 12$ (đvdt).

b) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB, $I(x_o\,;y_o)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} IA = IB \\ IO = IA \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x_o-3)^2 + (y_o-4)^2} = \sqrt{(x_o-6)^2 + y_o^2} \\ \sqrt{(x_o-3)^2 + (y_o-4)^2} = \sqrt{x_o^2 + y_o^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_o^2 - 6x_o + 9 + y_o^2 - 8y_o + 16 = x_o^2 - 12x_o + 36 + y_o^2 \\ x_o^2 - 6x_o + 9 + y_o^2 - 8y_o + 16 = x_o^2 + y_o^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x_o - 8y_o = 11 \\ 6x_o + 8y_o = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x_o = 36 \\ 16y_o = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_o = 3 \\ y_o = \dfrac{7}{8} \end{cases} \Rightarrow I\left(3; \dfrac{7}{8}\right).$$

Lại có bán kính $R = IO = \sqrt{3^2 + \left(\dfrac{7}{8}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{30}}{4}$

Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB có phương trình

$$(x-3)^2 + \left(y - \frac{7}{8}\right)^2 = \frac{15}{8}.$$

c) Ta có: OA có phương trình $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{4}$ hay $4x - 3y = 0$

OB có phương trình $\dfrac{x}{6} = \dfrac{y}{0}$ hay $y = 0$

Gọi M(x ; y) là điểm thuộc đường phân giác góc O.

Ta có: $d(M,OA) = d(M,OB) \Leftrightarrow \dfrac{|4x-3y|}{5} = \dfrac{|y|}{1} \Leftrightarrow |4x - 3y| = 5|y|$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x - 8y = 0 \\ 4x + 2y = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2y = 0 \quad (\Delta_1) \\ 2x + y = 0 \quad (\Delta_2) \end{array}\right.$$

Để M thuộc đường phân giác trong đỉnh O của tam giác OAB thì điểm A và B phải nằm về hai phía của (Δ).

Nhận thấy $(3 - 2.4)(6 - 2.0) < 0$ (thay tọa độ A , B vào (Δ_1))

Vậy phân giác trong cần tìm có phương trình $x - 2y = 0$

d) • Gọi $J(x_J ; y_J)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB ⇒ tọa độ J là giao của hai đường phân giác trong đỉnh O và A của tam giác. Mà ΔOAB cân tại A ⇒ AH là đường phân giác trong đỉnh A mà AH nhận $\overrightarrow{OB} = (6;0)$ làm vectơ pháp tuyến ⇒ AH có phương trình $6(x - 3) + 0(y - 4) = 0$ hay $x - 3 = 0$.

Vậy tọa độ J là nghiệm hệ $\begin{cases} x - 3 = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = \dfrac{3}{2} \end{cases}$ vậy $J\left(3; \dfrac{3}{2}\right)$

• Bán kính $r = JH = \sqrt{(3-3)^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2} = \dfrac{3}{2}$

Vậy đường tròn nội tiếp tam giác OAB có phương trình

$$(x-3)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

Bài 8. Trong mặt phẳng tọa độ, với mỗi số $m \neq 0$, xét hai điểm

$M_1(-4\,;\,m)$ và $M_2\left(4;\dfrac{16}{m}\right)$.

a) Viết phương trình đường thẳng M_1M_2 ;

b) Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O tới đường thẳng M_1M_2 ;

c) Chứng tỏ rằng đường thẳng M_1M_2 luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

d) Lấy điểm $A_1(-4\,;\,0)$, $A_2(4\,;\,0)$. Tìm tọa độ giao điểm I của hai đường thẳng A_1M_2 và A_2M_1.

e) Chứng minh rằng khi m thay đổi, I luôn nằm trên một elip (E) cố định. Xác định tọa độ tiêu điểm của elip đó.

Giải

a) $\overrightarrow{M_1M_2} = \left(8\;;\;\dfrac{16-m^2}{m}\right) \Rightarrow$ đường thẳng M_1M_2 nhận $\overrightarrow{M_1M_2}$ làm

vectơ chỉ phương $\Rightarrow M_1M_2$ có phương trình $\dfrac{x+4}{8} = \dfrac{y-m}{\dfrac{16-m^2}{m}}$

hay $(16-m^2)x - 8my + 4(16+m^2) = 0$

Vậy M_1M_2 có phương trình $(16-m^2)x - 8my + 4(16+m^2) = 0$

b) Khoảng cách từ O đến M_1M_2 là

$$d(O;M_1M_2) = \frac{|4(16+m^2)|}{\sqrt{(16-m^2)+64m^2}} = \frac{|4(16+m^2)|}{\sqrt{(16+m^2)^2}} = 4$$

c) Ta có do $d(O\,;\,M_1M_2) = 4$ không đổi.

$\Rightarrow$ MN luôn tiếp xúc với đường tròn tâm O, bán kính $R = 4$.

d) • $A_1(-4\,;\,0) \Rightarrow \overrightarrow{A_1M_2} = \left(8;\dfrac{16}{m}\right)$

$\Rightarrow A_1M_2$ nhận $\overrightarrow{A_1M_2}$ làm véctơ chỉ phương

$\Rightarrow A_1M_2$ có phương trình $\dfrac{x+4}{8} = \dfrac{y}{\dfrac{16}{m}}$ hay $2x - my + 8 = 0$ (1)

• A_2M_1 nhận $\overrightarrow{A_2M_1}$ làm véctơ chỉ phương

$\Rightarrow A_2M_1$ có phương trình $\dfrac{x-4}{-8} = \dfrac{y}{m}$ hay $mx + 8y - 4m = 0$ (2)

• Tọa độ giao điểm I của A_1M_2 và A_2M_1 là nghiệm hệ

$$\begin{cases} 2x - my + 8 = 0 \\ mx + 8y - 4m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4(m^2 - 16)}{16 + m^2} \\ y = \dfrac{16m}{16 + m^2} \end{cases} \text{Vậy } I\left(\dfrac{4(m^2 - 16}{16 + m^2}; \dfrac{16m}{16 + m^2}\right)$$

e) Khi A_1M_2 và A_2M_1 cắt nhau tại I(x ; y) thì:

$$\begin{cases} x = \dfrac{4(m^2 - 16)}{16 + m^2} \\ y = \dfrac{16m}{16 + m^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{4} = \dfrac{m^2 - 16}{m^2 + 16} \\ \dfrac{y}{2} = \dfrac{8m}{m^2 + 16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{16} = \dfrac{(m^2 - 16)^2}{(m^2 + 16)^2} \\ \dfrac{y^2}{4} = \dfrac{64m^2}{(m^2 + 16)^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = \frac{(m^2 - 16)^2 + 64m^2}{(m^2 + 16)^2} = 1. \text{ Do } m \neq 0 \Rightarrow y \neq 0$$

Vậy tập các điểm I là elip (E) có phương trình

$\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ trừ $A_1(-4 ; 0)$ và $A_2(4 ; 0)$.

Bài 9. Cho hypebol có phương trình $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = 1$.

a) Viết phương trình các đường tiệm cận của hypebol ;

b) Tính diện tích hình chữ nhật cơ sở của hypebol ;

c) Chứng minh rằng các điểm $M\left(5; \dfrac{3}{2}\right)$ và $N\left(8; 2\sqrt{3}\right)$ đều thuộc hypebol

d) Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M , N và tìm giao điểm P, Q của Δ với hai đường tiệm cận của hypebol.

e) Chứng minh rằng trung điểm của hai đoạn thẳng PQ và MN trùng nhau.

Giải

Ta có: $a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$; $b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$.

a) Phương trình các đường tiệm cận của hypebol là $y = \pm\dfrac{b}{a}x = \pm\dfrac{1}{2}x$.

b) Hình chữ nhật cơ sở có cạnh là 2a = 8 và 2b = 4

⇒ diện tích hình chữ nhật cơ sở là S = 2a.2b = 32 (đvdt)

c) Ta có: $\dfrac{5^2}{16} - \dfrac{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}{4} = \dfrac{5^2 - 3^2}{16} = 1 \Rightarrow$ M thuộc hypebol.

Lại có $\frac{8^2}{16} - \frac{\left(2\sqrt{3}\right)^2}{4} = \frac{8^2 - 4.12}{16} = 1 \Rightarrow$ N thuộc hypebol

d) • Ta có $\overrightarrow{MN} = \left(3; 2\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right) = \left(3; \frac{4\sqrt{3} - 3}{2}\right)$

$\Rightarrow$ đường thẳng Δ qua M, N có phương trình

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y - \frac{3}{2}}{\frac{4\sqrt{3} - 3}{2}} \Leftrightarrow \frac{x-5}{3} = \frac{2y-3}{4\sqrt{3}-3}$$

$\Leftrightarrow (4\sqrt{3} - 3)x - 6y - 20\sqrt{3} + 24 = 0 \quad (\Delta)$

• Tọa độ P của (Δ) với $y = \frac{1}{2}x$ là nghiệm hệ

$$\begin{cases} (4\sqrt{3} - 3)x - 6y - 20\sqrt{3} + 24 = 0 \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 + 2\sqrt{3} \\ y = 4 + \sqrt{3} \end{cases}$$

Vậy $P(8 + 2\sqrt{3}\ ;\ 4 + \sqrt{3})$

• Tọa độ Q của (Δ) với $y = -\frac{1}{2}x$ là nghiệm hệ

$$\begin{cases} (4\sqrt{3} - 3)x - 6y - 20\sqrt{3} + 24 = 0 \\ y = -\frac{1}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 2\sqrt{3} \\ y = \frac{-5 + 2\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Vậy $Q\left(5 - 2\sqrt{3}\ ;\ \frac{-5 + 2\sqrt{3}}{2}\right)$

e) Gọi I là trung điểm MN $\Rightarrow I\left(\frac{13}{2}\ ;\ \frac{3 + 4\sqrt{3}}{2}\right)$

Gọi J là trung điểm PQ $\Rightarrow J\left(\frac{13}{2}\ ;\ \frac{3 + 4\sqrt{3}}{2}\right)$

Vậy I ≡ J hay trung điểm của MN và PQ trùng nhau .

Bài 10. Cho parabol (P) có phương trình $y^2 = 4x$.

a) Xác định tọa độ tiêu điểm F và phương trình đường chuẩn d của (P).

b) Đường thẳng Δ có phương trình y = m (m ≠ 0) lần lượt cắt (d), Oy và (P) tại các điểm K, H, M. tìm tọa độ các điểm đó.

c) Gọi I là trung điểm của OH. Viết phương trình đường thẳng IM và chứng tỏ rằng đường thẳng IM cắt (P) tại một điểm duy nhất.

d) Chứng minh rằng $MI \perp KF$. Từ đó suy ra MI là phân giác của góc $\widehat{KMF}$.

Giải

Ta có $2p = 4 \Rightarrow p = 2$.

a) Parabol (P) có tiêu điểm F(1 ; 0), đường chuẩn $x = -1$ (d)

b) • Tọa độ giao điểm K của (d) với (Δ) : $y = m$ ($m \neq 0$) là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x = -1 \\ y = m \end{cases} \Rightarrow K(-1 ; m)$

• Tọa độ giao điểm H của (Δ) với Oy là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = m \end{cases} \Rightarrow H(0 ; m)$$

• Tọa độ giao điểm M của (Δ) với (P) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = m \\ y^2 = 4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{m^2}{4} \\ y = m \end{cases} \Rightarrow M\left(\dfrac{m^2}{4} ; m\right).$$

c) Gọi I là trung điểm $OH \Rightarrow I\left(0 ; \dfrac{m}{2}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{IM}\left(\dfrac{m^2}{4} ; \dfrac{m}{2}\right) \Rightarrow$ đường thẳng IM có phương trình:

$$\frac{x - 0}{\frac{m^2}{4}} = \frac{y - m}{\frac{m}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{m}{2}y - \frac{m^2}{2} \text{ hay } 2x - my + m^2 = 0$$

• Xét hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2x - my + m^2 = 0 \\ y^2 = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{y^2}{4} \\ \dfrac{y^2}{2} - my + m^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{y^2}{4} \\ (y - m)^2 + m^2 = 0 \ (*) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \left(\text{vì } \begin{cases} (y - m) \geq 0 \\ m^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - m = 0 \\ m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 0\right)$$

→ Đường thẳng IM cắt (P) tại một điểm duy nhất O(0 ; 0).

d) Ta có: $\overrightarrow{KF} = (1 + 1 \,;\, -m)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{KF} = -\frac{m^2}{4}.2 + \frac{-m}{2}.(-m) = 0 \Rightarrow IM \perp KF.$$

Ta có $\overrightarrow{KM} = \left(\frac{m^2+4}{4} \,;\, 0\right) \Rightarrow KM = \frac{m^2+4}{4}$

$$\overrightarrow{MF} = \left(1 - \frac{m^2}{4} \,;\, -m\right) \Rightarrow MF = \sqrt{\left(1 - \frac{m^2}{4}\right)^2 + (-m)^2} = \frac{m^2+4}{4}$$

$\Rightarrow MF = KM \Rightarrow \Delta KMF$ cân tại M. Mà I là trung điểm KF $\Rightarrow$ MI là phân giác trong của tam giác KMF.

III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO.

Bài 11. Cho tam giác vuông ABC nội tiếp đường tròn (O), đường kính BC = 2R, AB = R.

a) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Tính phương tích của G đối với đường tròn (O).

b) Kéo dài BG, cắt đường tròn tại D. Tính GD.

Bài 12. Trên đường kính của đường tròn (ε) cho điểm J sao cho JB = 3JA, và cho một dây cung CD của đường tròn (ε) đi qua J. Tìm độ dài dây CD biết AB = 8 và JC – JD = 1.

Bài 13. Trong đường tròn ε (0 ; R) cho hai dây cung AA' và BB' vuông góc với nhau tại điểm S và gọi M là trung điểm của AB. Chứng minh rằng SM $\perp$ A'B'

Bài 14. Cho tam giác ABC có góc B tù, đường cao AH. Gọi E và F lần lượt là hình chiếu của H lên AB và AC.

a) Chứng minh rằng tứ giác BCFE nội tiếp được.

b) EF cắt BC tại I, IA cắt đường tròn đường kính AH tại G. Chứng minh A, B, C, G cùng thuộc một đường tròn.

IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI.

Bài 11. a) $\mathcal{P}_{G/(O)} = -\frac{8R^2}{9}$ b) Ta có $GD = \frac{8R^2}{9}$

Bài 12. Ta có : CD = 7.

Bài 13. Chứng minh $\overrightarrow{SM}.\overrightarrow{A'B'} = \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SA'} - \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SA'}\right] = 0$. Vậy SM $\perp$ A'B'.

Bài 14.

a) Để chứng minh BCEF nội tiếp ta chứng minh $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AF}$.

b) Để chứng minh A, B, C, G cùng thuộc một đường tròn, ta chứng minh $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IG}$.

MỤC LỤC

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội

Điện thoại: (04) 9724852; (04) 9724770; Fax: (04) 9714899

Chịu trách nhiệm xuất bản :

Giám đốc : PHÙNG QUỐC BẢO

Tổng biên tập : NGUYỄN BÁ THÀNH

Biên tập : NGUYỄN THÚY

Sửa bài : TRẦN VĂN THẮNG

Chế bản : TRẦN VĂN THẮNG

Trình bày bìa : QUỐC VIỆT

Đối tác liên kết xuất bản:

NHÀ SÁCH ĐỨC TRÍ

SÁCH LIÊN KẾT

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP HÌNH HỌC 10 NÂNG CAO

Mã số: 1L-265ĐH2008

In 3.000 cuốn, khổ 16x24 cm tại Công ty In Song Nguyên

Số xuất bản: 532-2008/CXB/06-96/ĐHQGHN, ngày 18/06/2008

Quyết định xuất bản số 265 LK/XB

In xong và nộp lưu chiểu quý III năm 2008.