https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

5 2007 Số 359

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 44
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (04)5121607, (04)5121606; ĐT-Fax Phát hành, Trị sự: (04)5144272
Email: toanhoctt@yahoo.com Web: http://www.nxbgd.com.vn/toanhoctuoitre

CUỘC THI VIẾT SÁCH BÀI TẬP, SÁCH THAM KHẢO CẤP TIỂU HỌC, THCS VÀ THPT

Thực hiện chỉ đạo của Bộ Giáo dục và Đào tạo, Nhà xuất bản Giáo dục tiếp tục tổ chức cuộc thi Viết sách bài tập, sách tham khảo theo chương trình mới cấp Tiểu học, Trung học cơ sở và Trung học phổ thông. Kính mời các thầy, cô giáo, các chuyên gia giáo dục tham gia viết sách dự thi.

1. Đối với cấp Tiểu học và Trung học cơ sở:

- Viết sách bài tập, sách tham khảo cho học sinh theo cấp (không viết riêng cho từng lớp), đặc biệt lưu ý tới mảng đề tài về bài tập trắc nghiệm theo chủ đề.

- Viết sách tham khảo theo hướng đổi mới phương pháp dạy học dùng cho giáo viên và phụ huynh theo cấp học và từng lớp.

2. Đối với cấp Trung học phổ thông:

- Viết sách tham khảo theo hướng đổi mới phương pháp dạy học các môn học của lớp 10,11, 12 dành cho giáo viên và phụ huynh.

- Viết sách bài tập (đặc biệt là bài tập trắc nghiệm) theo các chủ đề của mỗi môn học trong chương trình cấp Trung học phổ thông.

Mời liên hệ : Ban tổ chức Cuộc thi Viết sách bài tập, sách tham khảo.

Địa chỉ: Số 25 Hàn Thuyên, Hà Nội

Điện thoại: 04.8266361. Fax: 04.9717061.

Email: bantkbt@gmail.com

Sách mới Tiếng Anh dành cho Tiểu học

LET'S LEARN ENGLISH

Hãy học tiếng Anh cùng với các bạn *Nam* và *Mai* trong sách

Let's learn English

Đây là bộ sách giáo khoa Tiếng Anh cho Tiểu học, biên soạn theo chương trình mới được Bộ GD & ĐT ban hành.

NXB Giáo dục hợp tác với NXB Panpac Education–Singapore xuất bản bộ sách này. Sách đã được Hội đồng Anh thẩm định và thu băng.

Sách được thiết kế theo phong cách hiện đại, kết hợp với tranh ảnh minh họa ngộ nghĩnh, tinh tế; đồng thời có bộ thiết bị bổ trợ cho việc dạy - học gồm băng, đĩa CD, VCD, quân bài, con chữ... rất hấp dẫn với học sinh Tiểu học.

Các Sở Giáo dục và Đào tạo, các Công ty cổ phần Sách - Thiết bị có thể đặt mua tại :

Miền Bắc : Phòng phát hành SGK, NXBGD tại Hà Nội : 187 Giảng Võ, Hà Nội

ĐT : (04).8562011. Fax : (04) 8562493

Miền Trung : Phòng phát hành SGK, NXBGD tại TP. Đà Nẵng : 15 Nguyễn Chí Thanh, TP. Đà Nẵng

ĐT : (0511).894504. Fax : (0511).827368

Miền Nam : Phòng phát hành SGK, NXBGD tại TP. Hồ Chí Minh : 231 Nguyễn Văn Cừ, Quận 5, TP. Hồ Chí Minh

ĐT : (08).8358423. Fax : (08).8390727

TRUNG HỌC CƠ SỞ

TỪ LỜI GIẢI MỘT BÀI TOÁN cực trị hình học

LÊ BÁ HOÀNG
(Phòng GD-ĐT TX. Hồng Lĩnh, Hà Tĩnh)

Cực trị hình học là một trong những dạng toán khó. Học sinh khi tiếp cận với dạng toán này thường lúng túng. Trong quá trình học toán và giải toán, việc tìm tòi các cách giải khác nhau nhiều khi giúp ta đến với nhiều điều lí thú. Chúng tôi xin trình bày với bạn đọc một vấn đề nhỏ sau đây.

✪**Bài toán 1.** *Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$, M là một điểm di động trên nửa đường tròn đó. Hãy xác định vị trí của điểm M sao cho $MA+MB$ đạt giá trị lớn nhất.*

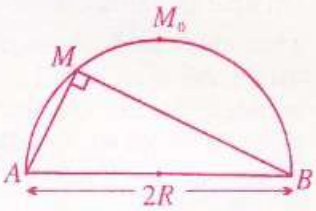
Lời giải.

Cách 1. (h. 1)

Do AB là đường kính nên $\widehat{AMB}=90^\circ$.

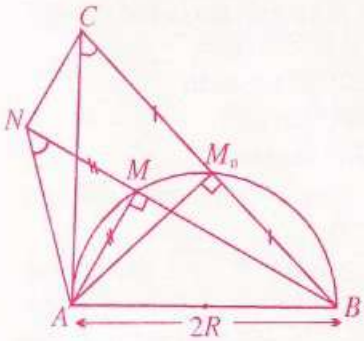
Áp dụng định lí Pythagore vào tam giác MAB:

$MA^2 + MB^2 = AB^2 = 4R^2$.



Hình 1

Ta có $(MA + MB)^2 \le 2(MA^2 + MB^2) = 8R^2 \Rightarrow MA + MB \le 2\sqrt{2}R$. Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv M_0$ (với $\widehat{AM_0} = \widehat{M_0B}$). Vậy $MA + MB$ đạt giá trị lớn nhất là $2\sqrt{2}.R$ khi $M \equiv M_0$. ❐



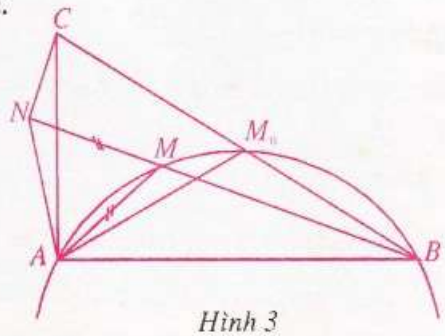
Hình 2

Cách 2. (h. 2). Giả sử M thuộc cung $\widehat{AM_0}$ (với $\widehat{AM_0} = \widehat{M_0B}$). Trên tia đối của các tia M_0B, MB thứ tự lấy các điểm C, N sao cho $M_0C = M_0B$, $MN = AM$. Từ đó dễ dàng suy ra $\widehat{CAB}=90^\circ$ và tứ giác $ANCB$ nội tiếp đường tròn (vì $\widehat{ANB}=\widehat{ACB} = 45^\circ$). Ta có $\widehat{CAB}=\widehat{CNB}= 90^\circ$ nên $MA + MB = MN+MB = BN \le BC = 2\sqrt{2}R$. Do đó $MA + MB$ đạt giá trị lớn nhất là $2\sqrt{2}R$ khi $M \equiv M_0$. ❐

Từ lời giải cách 2 ta có thể mở rộng thành bài toán sau.

✪**Bài toán 2.** *Cho một cung tròn $\overset{\frown}{AB}$, M là một điểm di động trên cung tròn đó. Hãy xác định vị trí của điểm M sao cho $MA + MB$ đạt giá trị lớn nhất.*

Lời giải.



Hình 3

Với chú ý :"*Nếu trong tam giác có đường trung tuyến bằng nửa cạnh đối diện thì tam giác đó là tam giác vuông*" và $\widehat{ANB} = \widehat{ACB}$ (vì cùng bằng $\frac{1}{2}\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\widehat{AM_0B}$).Khi đó NBC luôn là tam giác vuông tại N nên $MA + MB = MB + MN = BN \le BC$. ($BC$ có độ dài không đổi). ❐

Từ bài toán 2 ta có các bài toán sau đây.

✪**Bài toán 3.** *Xét các tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O ; R)$ với cạnh BC cố định. Khi*

đó tam giác có chu vi lớn nhất là tam giác cân tại A.

Việc chứng minh bài toán 3 tương tự như cách 2 của bài toán 1. Để ý rằng nếu BC là đường kính thì có hai vị trí điểm A trên đường tròn. Nếu BC là dây cung (khác đường kính) thì điểm A là điểm chính giữa cung lớn $\overset{\frown}{BC}$.

✪**Bài toán 4.** *Trong tất cả các tam giác nội tiếp đường tròn (O ; R) thì tam giác đều có chu vi lớn nhất.*

Hình 4

Lời giải. Xét tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O\ ;\ R)$. Cố định cạnh BC theo bài toán 3, chu vi tam giác ABC lớn nhất khi tam giác ABC cân tại A và A là điểm chính giữa của cung lớn $\overset{\frown}{BC}$ (h. 4). Giả sử tam giác ABC cân tại A nội tiếp $(O\ ;\ R)$. Kẻ đường cao AH. Tam giác OHB vuông tại H nên

$BH^2 = BO^2 - OH^2 = R^2 - x^2 \Rightarrow BH = \sqrt{R^2 - x^2}$

nên $BC = 2BH = 2\sqrt{R^2 - x^2}$ (1)

Lưu ý rằng O nằm giữa A và H nên

$AB^2 = HA^2 + BH^2 = (R + x)^2 + R^2 - x^2 = 2R(R + x)$

$\Rightarrow AB = \sqrt{2R(R+x)}$ (2)

Từ (1) và (2), áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$AB + BC + AC = 2AB + BC$

$= 2\left(\sqrt{R^2 - x^2} + \sqrt{2R(R+x)}\right)$

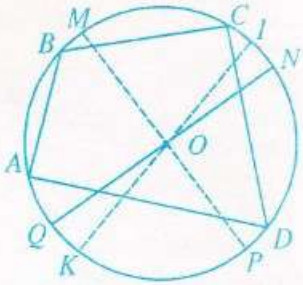
$= \frac{1}{\sqrt{3}}.2\sqrt{(R+x)(3R-3x)} + \frac{2}{3}.2\sqrt{\frac{3R}{2}(R+x)}$

$\le \frac{1}{\sqrt{3}}(R+x+3R-3x) + \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{3R}{2} + R + x\right) = 3\sqrt{3}R.$

Suy ra $AB + BC + BC \le 3\sqrt{3}R$. Đẳng thức xảy ra khi $R + x = 3R - 3x = \frac{3R}{2} \Leftrightarrow x = \frac{R}{2}$.

Vậy chu vi tam giác ABC đạt giá trị lớn nhất là $3\sqrt{3}R$ khi tam giác ABC đều.❐

✪**Bài toán 5.** *Trong tất cả các tứ giác nội tiếp đường tròn (O ; R) thì hình vuông có chu vi lớn nhất.*



Hình 5

Lời giải. (h. 5). Gọi M, P, I, K lần lượt là trung điểm của các cung $\overset{\frown}{ABC}, \overset{\frown}{ADC}, \overset{\frown}{BCD}, \overset{\frown}{BAD}$. Khi đó PM và IK là hai đường kính của đường tròn $(O\ ;\ R)$. Gọi N, Q lần lượt là điểm chính giữa của các cung $\overset{\frown}{MIP}$, $\overset{\frown}{MKP}$. Khi đó tứ giác $MNPQ$ là hình vuông, suy ra

$QM + QP + NM + NP = 4R\sqrt{2}$.

Theo bài toán 1 ta có

$AB + BC + DC + DA \le AM + MC + PC + PA$

$= (AM + AP) + (MC + CP) \le QM + QP + NM + NP$

$= 4R\sqrt{2}$. Vậy chu vi tứ giác $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất là $4R\sqrt{2}$ khi $ABCD$ là hình vuông.❐

Thực chất các bài toán trên là kết quả của bài toán 1 mà cách giải 2 đã mang lại cho chúng ta nhiều bài toán khá thú vị. Mời các bạn cùng giải một số bài tập sau đây.

Bài 1. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn $(O\ ;\ R)$ và M là một điểm di động trên đường tròn đó. Hãy xác định vị trí của M sao cho $MA + MB + MC$:

a) đạt giá trị nhỏ nhất;

b) đạt giá trị lớn nhất.

Bài 2. Cho đường tròn $(O\ ;\ R)$, BC là dây cung cố định khác đường kính. A là điểm chuyển động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC là tam giác nhọn. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Hãy xác định vị trí của A để:

a) diện tích tam giác HBC lớn nhất;

b) chu vi tam giác HBC lớn nhất;

c) tổng $HA + HB + HC$ lớn nhất.

d) tổng các khoảng cách từ O đến các cạnh của tam giác ABC lớn nhất.

Bài 3. Cho lục giác $ABCDEG$ nội tiếp đường tròn $(O\ ;\ R)$. Chứng minh rằng chu vi và diện tích của lục giác $ABCDEG$ lớn nhất khi nó là lục giác đều.

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 9 TP. HỒ CHÍ MINH

NĂM HỌC 2006 - 2007

Thời gian làm bài: 150 phút

Câu 1. (3 *điểm*)

Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \sqrt{6+2\sqrt{5}-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}$;

b) $B = \sqrt{8+\sqrt{8}+\sqrt{20}+\sqrt{40}}$;

c) $C = \left(\dfrac{15}{\sqrt{6}+1}+\dfrac{4}{\sqrt{6}-2}-\dfrac{12}{3-\sqrt{6}}\right)\left(\sqrt{6}+11\right)$.

Câu 2. (3 *điểm*)

a) Chứng minh $(x+y+z)^2 \le 3(x^2+y^2+z^2)$, với mọi số thực x, y, z.

b) Cho $x+y+z=1$, $x \ge -\dfrac{1}{4}, y \ge -\dfrac{1}{4}, z \ge -\dfrac{1}{4}$.

Chứng minh rằng $\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}+\sqrt{4z+1} \le \sqrt{21}$.

Đẳng thức xảy ra khi x, y, z bằng bao nhiêu?

Câu 3. (4 *điểm*)

Giải hệ phương trình và phương trình

a) $\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} = \dfrac{12}{5} \\ \dfrac{yz}{y+z} = \dfrac{18}{5} \\ \dfrac{zx}{z+x} = \dfrac{36}{13} \end{cases}$

b) $\sqrt{\dfrac{x^2}{4}+\sqrt{x^2-4}} = 8 - x^2$.

Câu 4. (2 *điểm*)

Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có các hệ số a, b, c là các số nguyên lẻ. Chứng minh rằng nếu phương trình có nghiệm thì các nghiệm ấy không thể là số hữu tỉ.

Câu 5. (4 *điểm*)

Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB bằng $2R$. Gọi M là một điểm chuyển động trên nửa đường tròn (O) (M khác A và B). Vẽ đường tròn tâm M tiếp xúc với AB tại H. Từ A và B vẽ hai tiếp tuyến, tiếp xúc với đường tròn tâm M lần lượt tại C và D.

a) Chứng minh rằng ba điểm M, C, D cùng nằm trên tiếp tuyến của đường tròn (O) tại M.

b) Chứng minh rằng tổng $AC + BD$ không đổi. Tính tích số $AC.BD$ theo CD.

c) Giả sử CD cắt AB tại K. Chứng minh rằng $OA^2 = OB^2 = OH.OK$.

Câu 6. (4 *điểm*)

Tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) có $\widehat{ACB} = 45^\circ$. Đường tròn đường kính AB cắt AC và BC lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng MN vuông góc với OC và $MN = \dfrac{AB}{\sqrt{2}}$.

NGUYỄN ĐỨC TẤN

(TP. Hồ Chí Minh) *sưu tầm và giới thiệu*

Tòa soạn ĐANG PHÁT HÀNH các cuốn sách toán tham khảo :

- ***Tuyển chọn theo chuyên đề Toán học và Tuổi trẻ (Quyển 1 và Quyển 2)***
- ***Ẩn sau định lí Ptôlêmê***

Tháng 6 SẼ PHÁT HÀNH tiếp cuốn sách :

- ***Các bài thi Olympic toán THPT Việt Nam (1990-2006)***

Mua từ 10 quyển trở lên được trừ phí phát hành. Để biết thêm thông tin chi tiết xin liên hệ:

ĐT/FAX: 04.5144272 ; Email : toanhoctt@yahoo.com

Cảm ơn các bạn.

THTT

Lời giải đề thi tuyển sinh vào lớp 10

THPT CHUYÊN LÊ KHIẾT, QUẢNG NGÃI

NĂM HỌC 2006 -2007

(Đề thi đăng trên THTT số 357, tháng 3 năm 2007)

Bài 1. 1) A có nghĩa khi

$$\begin{cases}1-\sqrt{x}\neq 0\\ x\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow x\geq 0 \text{ và } x\neq 1.$$

$$A = \frac{3x+\sqrt{9x}-3}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)}-\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}-\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}$$

$$= \frac{x+3\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}.$$

2) $A=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=1+\dfrac{2}{\sqrt{x}-1}$. Do $x\in\mathbb{Z}$ nên $A\in\mathbb{Z}$ khi $\sqrt{x}-1$ là ước của 2.

Đáp số: $x\in\{0, 4, 9\}$.

Bài 2. 1) Đặt $t = x^2 - 4x + 10 = (x-2)^2 + 6 \geq 6$.

PT trở thành $t^2 - 4t - 21 = 0 \Leftrightarrow t = -3$ (loại), $t = 7$.

Với $t = 7$ ta có $x^2 - 4x + 10 = 7 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$ $\Leftrightarrow x = 1, x = 3$.

2) ĐK: $x\neq 0, y\neq 0$ và $z\neq 0$.

Đặt $X=\dfrac{1}{x}, Y=\dfrac{1}{y}, Z=\dfrac{1}{z}$.

Hệ viết lại dưới dạng

$$\begin{cases}X+Y+Z=2\\ XY-Z^2=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}X+Y=2-Z\\ XY=\dfrac{4+Z^2}{2}.\end{cases}$$

Suy ra X, Y là nghiệm của phương trình ẩn t

$$t^2-(2-Z)t+\frac{4+Z^2}{2}=0.$$

PT này có nghiệm khi $\Delta = (2-Z)^2 - 2(4+Z)^2 \geq 0$ $\Leftrightarrow (Z+2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow Z = -2$. Khi đó $X = Y = 2$.

Vậy hệ có nghiệm $(x; y; z) = \left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$.

Bài 3. 1) Giả sử tồn tại các số nguyên x, y sao cho $2x^2 + y^2 = 2007$. Do $2x^2$ là số chẵn, 2007 số lẻ nên y lẻ $\Rightarrow y = 2k + 1$ ($k\in\mathbb{Z}$).

Do đó $2x^2 + 4k^2 + 4k = 2006$, suy ra $2x^2$ không chia hết cho 4. Vậy x lẻ nên $x = 2l + 1$ ($l\in\mathbb{Z}$).

Khi đó $2(2l+1)^2 + 4k^2 + 4k = 2006$ hay $8(l+1)l + 4k(k+1) = 2004$ (mâu thuẫn), (vì vế trái chia hết cho 8 mà vế phải không chia hết cho 8).

2) Để ý rằng $1 = (x^2+y^2)^2$ ta có

$$\frac{x^4}{a}+\frac{y^4}{b}=\frac{(x^2+y^2)^2}{a+b}$$

$$\Leftrightarrow b(a+b)x^4+a(a+b)y^4=ab(x^4+2x^2y^2+y^4)$$

$$\Leftrightarrow b^2x^4+a^2y^4-2abx^2y^2=0$$

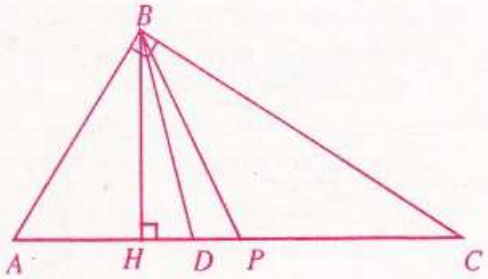
$$\Leftrightarrow (bx^2-ay^2)^2=0 \Leftrightarrow bx^2-ay^2=0.$$

Từ đó $\dfrac{x^2}{a}=\dfrac{y^2}{b}=\dfrac{x^2+y^2}{a+b}=\dfrac{1}{a+b}$

$$\Rightarrow \frac{x^{2006}}{a^{1003}}=\frac{y^{2006}}{b^{1003}}=\frac{1}{(a+b)^{1003}}.$$

Vậy $\dfrac{x^{2006}}{a^{1003}}+\dfrac{y^{2006}}{b^{1003}}=\dfrac{2}{(a+b)^{1003}}$.

Bài 4. Từ giả thiết ta thấy tam giác ABC vuông tại B. Gọi H, D, P lần lượt là chân các đường cao, phân giác và trung tuyến kẻ từ đỉnh B (h.1).



Hình 1

Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.BC = 6\text{ cm}^2$, $S_{ABP} = S_{BPC} = 3\text{ cm}^2$.

Ta có $\frac{S_{ABD}}{S_{BDC}} = \frac{DA}{DC} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{BDC}} = \frac{7}{4}$

$\Rightarrow S_{BDC} = \frac{24}{7}\text{ cm}^2$; $S_{DBP} = S_{BDC} - S_{BPC} = \frac{3}{7}\text{ cm}^2$.

$\Delta ABH \backsim \Delta ACB \Rightarrow \frac{S_{ABH}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{9}{5}$,

suy ra $S_{ABH} = \frac{54}{25}\text{ cm}^2$.

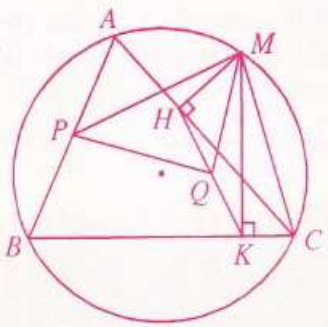
Vậy $S_{BDH} = S_{ABD} - S_{ABH} = \frac{72}{175}\text{cm}^2$.

Bài 5. 1) (h. 2)

Tứ giác $MHKC$ nội tiếp đường tròn nên $\widehat{HKM} = \widehat{HCM}$

mà $\widehat{ABM} = \widehat{ACM}$

suy ra $\widehat{ABM} = \widehat{HKM}$ (1).



Hình 2

Ta có

$\widehat{HMK} = \widehat{HCK}$

$= \widehat{ACB} = \widehat{AMB} \Rightarrow \widehat{HMK} = \widehat{AMB}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\Delta ABM \backsim \Delta HKM$. Do P, Q tương ứng là trung điểm của AB và HK nên

$\Delta AMP \backsim \Delta HMQ \Rightarrow \frac{MP}{MQ} = \frac{MA}{MH}$, $\widehat{AMP} = \widehat{HMQ}$

$\Rightarrow \Delta AMH \backsim \Delta PQM$ mà $\widehat{AHM} = 90^\circ$ nên $\widehat{PQM} = 90^\circ$.

2) Gọi R_1, R_2, R_3 lần lượt là bán kính của ba đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) có tâm nằm trên đường thẳng d trong đó (O_2) nằm giữa (O_1) và (O_3). Gọi AB là đoạn ngắn nhất trong số những đoạn nối hai điểm thuộc hai đường tròn (O_1) và (O_3). Lúc đó AB nằm trên d và chứa đường kính của (O_2) suy ra $AB > 2R_2$. Gọi R_4 là bán kính của (O_4). Gọi M_1, M_2 lần lượt là tiếp điểm của (O_4) với (O_1) và (O_3) Vì M_1M_2 là dây cung của (O_4) nên $M_1M_2 \le 2R_4$. Mặt khác $M_1M_2 \ge AB$ $\Rightarrow 2R_4 \ge M_1M_2 \ge AB > 2R_2 \Rightarrow R_4 > R_2$.

TRẦN VĂN HẠNH
(GV CĐSP Quảng Ngãi)
sưu tầm và giới thiệu

Tin tức

NEXTGEN AWARDS 2007

Cuộc thi Quốc tế về sáng tạo nội dung cho điện thoại di động tại Việt Nam

Chiều ngày 18.4.2007 tại Hội trường D2, trường ĐHBK Hà Nội. Công ti Cổ phần Truyền thông VietNamNet và Cyber Century Forum CCF (tổ chức phi lợi nhuận, có trụ sở tại Hoa Kỳ được thành lập từ năm 1996) chính thức phát động cuộc thi NextGen Awards.

NextGen Awards www.nextgenawards.org là một cuộc thi quốc tế tổ chức hàng năm dành cho các bạn trẻ với mục tiêu khuyến khích, trao thưởng và tạo điều kiện phát triển những ứng dụng thiết thực, mới mẻ và sáng tạo của điện thoại di động trong việc cải thiện chất lượng cuộc sống cho cộng đồng, và đất nước họ.

Việt Nam là quốc gia đầu tiên được lựa chọn để tổ chức cuộc thi NextGen. Chủ đề của cuộc thi năm nay là sáng kiến về sử dụng điện thoại di động thuộc một trong các lĩnh vực : 1) *Nâng cao sức khỏe (bao gồm cả những vấn đề thị lực, thính giác và lão hóa)*; 2) *Phát triển Giáo dục*; 3) *Duy trì Môi trường bền vững*. Tổng giá trị giải thưởng cuộc thi lên tới 150 triệu đồng, 4 giải thưởng lớn nhất mỗi giải 1500 USD, và hàng chục giải thưởng giá trị khác.

Từ ngày 18.4.2007 đến hết ngày 31.7.2007, tất cả những bạn trẻ Việt Nam từ 13-20 tuổi có thể đăng kí tham gia cuộc thi với tư cách cá nhân hoặc nhóm dự thi (tối đa là 5 người) thông qua website www.nextgenawards.vn. Tất cả các thí sinh dự thi đều có thể nhờ thầy cô giáo hay các cơ quan tổ chức trong cộng đồng làm Cố vấn cho mình, và sẽ có phần thưởng cho những Cố vấn xuất sắc nhất.

LÊ BÍCH

Vận dụng MỘT SỐ TÍNH CHẤT ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ ĐỂ GIẢI TOÁN

TRỊNH TUÂN
(GV Khoa CNTT ĐH Thủy Lợi, Hà Nội)

Tính của các chất hàm số được xem như một trong những công cụ rất "lợi hại" để giải các phương trình, bất phương trình và nó cũng đã được nhiều tác giả đề cập trong các tài liệu tham khảo. Ở bài viết này chúng tôi muốn phân tích kĩ hơn về việc vận dụng sáng tạo các tính chất đơn điệu của hàm số để giải quyết lớp các bài toán về phương trình, bất phương trình vô tỉ. Đó là các tính chất sau đây.

Tính chất 1. Giả sử hàm số $f(x)$ đơn điệu trên tập $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ với $x_1, x_2 \in \mathcal{D}$, khi đó ta có $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$.

Tính chất 2. Nếu hàm số $f(x)$ đơn điệu và liên tục trên khoảng $(a\ ;\ b)$ thì tồn tại nhiều nhất một điểm $x_0 \in (a\ ;\ b)$ để $f(x_0) = 0$.

Tính chất 3. (Định lí Bolzano–Cauchy)
Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a\ ;\ b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $x_0 \in (a\ ;\ b)$ để $f(x_0) = 0$.

Tính chất 4. Nếu hàm số $f(x)$ đơn điệu và liên tục trên đoạn $[a\ ;\ b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì tồn tại duy nhất một điểm $x_0 \in (a\ ;\ b)$ để $f(x_0) = 0$.

Rõ ràng các tính chất 2, 3 và 4 đã cho chúng ta thấy số nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ trên $(a\ ;\ b)$.

Các tính chất trên các bạn có thể tìm được ở rất nhiều các tài liệu khác nhau. Việc sử dụng nó vào lớp các bài toán về phương trình, bất phương trình vô tỉ sau đây sẽ cho ta những lời giải "đẹp".

✪**Bài toán 1.** *Giải phương trình*

$$(2x+1)(2+\sqrt{4x^2+4x+4})+3x(2+\sqrt{9x^2+3}) = 0 \quad (1)$$

Lời giải. Chuyển PT (1) về dạng

$$(2x+1)[2+\sqrt{(2x+1)^2+3}] = (-3x)[2+\sqrt{(-3x)^2+3}]$$

và như vậy (1) chính là phương trình $f(2x+1) = f(-3x)$ trong đó $f(t) = t(2+\sqrt{t^2+3})$, $t \in \mathbb{R}$. Ta có $f(t)$ là hàm đồng biến và liên tục trên $\mathbb{R}$, và nhờ tính chất 1 chúng ta có $2x + 1 = -3x$. Lúc đó $x = -\dfrac{1}{5}$ là nghiệm của PT (1). ❐

✪**Bài toán 2.** *Tìm tập giá trị của hàm số*

$$f(x) = \sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}.$$

Lời giải. Ta có

$$f'(x) = \frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}} - \frac{\frac{1}{2}-x}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}-x\right)^2+\frac{3}{4}}}$$

$$= h\left(x+\frac{1}{2}\right) - h\left(\frac{1}{2}-x\right) \qquad (2)$$

Ở đó $h(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}}$, với $t \in \mathbb{R}$.

Ta thấy hàm số $h(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Từ (2) ta có

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow h\left(x+\frac{1}{2}\right) - h\left(\frac{1}{2}-x\right) > 0$$

$$\Leftrightarrow h\left(x+\frac{1}{2}\right) > h\left(\frac{1}{2}-x\right) \Leftrightarrow x+\frac{1}{2} > \frac{1}{2}-x$$

$$\Leftrightarrow x \in (0\ ;\ +\infty).$$

Ngược lại $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty\ ;\ 0)$ và $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Mặt khác $f(0) = 2$ và $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$. Nên tập giá trị của hàm số là $[2\ ;\ +\infty)$. ❐

Bài toán 3. *Giải bất phương trình*

$$\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}+2\sqrt{49x^2+7x-12}<181-14x \quad (3)$$

(Đề thi Học viện An ninh KA2001)

Lời giải. BPT (3) được viết lại dưới dạng

$$\left(\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}\right)^2+\left(\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}\right)-182<0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}-13<0. \quad (4)$$

Nhận thấy hàm số $f(x)=\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}-13$ đồng biến trên $\left[\frac{6}{7};+\infty\right)$. Mặt khác $f(6)=0$.

Nhờ tính chất 2 thấy rằng $x_0=6\in\left[\frac{6}{7};+\infty\right)$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x)=0$ trên $\left[\frac{6}{7};+\infty\right)$. *Đáp số:* $x\in\left[\frac{6}{7};6\right)$.□

Bài toán 4. *Cho các số dương c_1, c_2, c_3 thỏa mãn $c_1>c_2>c_3$. Chứng minh rằng phương trình $\sqrt{x-c_1}-\sqrt{x-c_2}=\sqrt{x-c_3}$ có nghiệm duy nhất.*

Lời giải. Phương trình trên được đưa về dạng

$$\sqrt{\frac{x-c_1}{x-c_3}}+\sqrt{\frac{x-c_2}{x-c_3}}-1=0;\ \text{với ĐK } x\in[c_1;+\infty).$$

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{\frac{x-c_1}{x-c_3}}+\sqrt{\frac{x-c_2}{x-c_3}}-1$

với $x\in[c_1;+\infty)$. Khi đó

$$f'(x)=\frac{c_1-c_3}{2(x-c_3)^2\sqrt{\frac{x-c_1}{x-c_3}}}+\frac{c_2-c_3}{2(x-c_3)^2\sqrt{\frac{x-c_2}{x-c_3}}}>0.$$

Do giả thiết $c_1>c_2>c_3$ nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[c_1;+\infty)$.

Mặt khác $f(c_1)=\sqrt{\frac{c_1-c_2}{c_1-c_3}}-1<0$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$.

Sử dụng tính chất 3 ta thấy phương trình $f(x)=0$ có duy nhất nghiệm $x_0\in(c_1;+\infty)$. □

Bài toán 4 còn giúp các bạn có được kết quả cho bài toán sau.

Bài toán 5. *Cho $c_1>c_2>c_3>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số*

$$f(x)=\sqrt{\frac{x-c_1}{x-c_3}}+\sqrt{\frac{x-c_2}{x-c_3}}-1.$$

Hướng dẫn giải. Ở đây để nhận được kết quả cho bài toán này các bạn cần lưu ý : $f(x)$ đồng biến trên $(-\infty;c_3)\cup[c_1;+\infty)$ và $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=1$; $\lim\limits_{x\to c_3}f(x)=+\infty$.

Khi đó $\min f(x)=f(c_1)=\sqrt{\frac{c_1-c_2}{c_1-c_3}}-1<0$.

Một điều thú vị nữa là khi thay $c_1=\sin A$, $c_2=\sin B$ và $c_3=\sin C$ trong đó A, B, C là các góc của một tam giác nhọn.

Với giả thiết $A>B>C$ thì các bài toán 4 và 5 là đề thi tuyển sinh vào trường ĐH Bách khoa Hà Nội 1998.

Các bạn hãy vận dụng các tính chất trên để giải các bài tập sau đây:

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x}+\sqrt{x-5}+\sqrt{x+7}+\sqrt{x+16}=14$;

b) $\sqrt{x+\sqrt{x^2-x+1}}-\sqrt{x+1+\sqrt{x^2+x+1}}=1$.

Bài 2. Giải các bất phương trình sau:

a) $\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+3}\le 9$;

b) $\sqrt{x^2-2x+3}-\sqrt{x^2-6x+11}>\sqrt{3-x}-\sqrt{x-1}$.

Bài 3. Tìm tập giá trị của hàm số

$y=\sqrt{x^2+2x+4}-\sqrt{x^2-2x+4}$.

(Đề thi Học viện An Ninh Khối A 1997)

Bài 4. Chứng tỏ rằng phương trình

$\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+27}=3\sqrt[3]{16-x}$ có nghiệm trên $[0;8]$.

Bài 5. Cho tam giác ABC nhọn, $A>B>C$.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y=\sqrt{\frac{x-\sin A}{x-\sin C}}+\sqrt{\frac{x-\sin B}{x-\sin C}}-1.$$

b) Chứng minh rằng phương trình

$$\sqrt{x-\sin A}+\sqrt{x-\sin B}=\sqrt{x-\sin C}$$

có nghiệm duy nhất.

(Đề thi ĐH Bách khoa Hà Nội 1999)

Bài 6. Biện luận theo a số nghiệm của phương trình $\sqrt{2-x^2}.\sin x+\sqrt{2+x^2}.\cos x=|a+1|+|a-1|$.

(Đề thi ĐH Bách Khoa Hà Nội 1999)

Chúc các bạn thành công trong kì thi Đại học sắp tới.

Thử sức TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 4

(Thời gian làm bài: 180 phút)

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH

Câu I. *(2 điểm).*

Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-(2m-3)x-6m+1}{x-2}$ (1)

1) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 1$.

2) Tìm m để hàm số (1) có cực đại, cực tiểu đồng thời hai điểm cực đại, cực tiểu đó nằm về hai phía của đường thẳng $y = -x + 7$.

Câu II. *(2 điểm).*

1) Giải phương trình

$$\sin^3 x-\cos^3 x = \cos 2x.\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right).\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3+1=2(x^2-x+y) \\ y^3+1=2(y^2-y+x). \end{cases}$$

Câu III. *(2 điểm).*

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A\ (1\ ;\ -1\ ;\ 2)$, $B\ (3\ ;\ 1\ ;\ 0)$ và mặt phẳng (P) có phương trình $x - 2y - 4z + 8 = 0$.

1) Lập phương trình đường thẳng (d) thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau: (d) nằm trong mặt phẳng (P), (d) vuông góc với AB và (d) đi qua giao điểm của đường thẳng AB với mặt phẳng (P).

2) Tìm tọa độ điểm C trong mặt phẳng (P) sao cho $CA = CB$ và mặt phẳng(ABC) vuông góc với mặt phẳng (P).

Câu IV. *(2 điểm)*

1) Tính tích phân

$$I=\int_0^1\sqrt{-3x^2+6x+1}\,dx.$$

2) Chứng minh rằng

$$-1-2\sqrt{7}\le x^2+xy-2y^2\le -1+2\sqrt{7}$$

trong đó x, y là các số thực thỏa mãn $x^2 - xy + y^2 \le 3$.

PHẦN TỰ CHỌN

(Thí sinh chọn một trong hai câu Va hoặc Vb)

Câu Va. *(2 điểm).*

1) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thoi $ABCD$ có $A\ (0\ ;\ 2)$, $B\ (4\ ;\ 5)$ và giao điểm của hai đường chéo nằm trên đường thẳng (d) có phương trình $x - y - 1 = 0$. Hãy tính tọa độ các đỉnh C, D.

2) Có bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số mà trong đó có đúng hai chữ số 1 và ba chữ số còn lại khác nhau.

Câu Vb. *(2 điểm).*

1) Giải phương trình

$$\log_5(3+\sqrt{3^x+1})=\log_4(3^x+1).$$

2) Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có đường cao $SH = h$, $\widehat{ASB} = \alpha$.

Tính thể tích của hình chóp theo h và α.

NGUYỄN ANH DŨNG
(Hà Nội)

Nhắn tin

Mời các tác giả có bài đăng trong sách ***Tuyển chọn theo chuyên đề Toán học và Tuổi trẻ (Quyển 1)*** sau gửi địa chỉ mới về để Tòa soạn gửi sách biếu: *Trịnh An Ninh, Đào Hải Long, Đỗ Mạnh Môn, Lê Quang Ánh, Hữu Liên, Tạ Văn Tự, Phạm Huyền, Nguyễn Tiến Dũng, Nguyễn Hoa Lư, Nguyễn Thái Hà, Phạm Hữu Hoài, Phạm Tấn Phước, Nguyễn Anh Quân, Ngô Thành Long.*

Cảm ơn các bạn.

THTT

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 3

Câu I. 1) *Bạn đọc tự giải.*

2) PT hoành độ giao điểm của (C_m) với trục hoành có dạng

$x^3-(2m+3)x^2+(2m^2-m+9)x-2m^2+3m-7=0$

hay $(x-1)(x^2-2(m+1)x+2m^2-3m+7)=0$ (1)

(C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ không nhỏ hơn 1 khi PT

$$x^2-2(m+1)x+2m^2-3m+7=0$$

có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1.

Đáp số. $2 < m < 3$.

Câu II. 1) Nhận xét rằng nếu PT có nghiệm x thì $x \geq 3+\sqrt{3}$ (2).

Đặt $u = 3+\sqrt{x}$ $(u \geq 3)$ (3). Ta có

$$\begin{cases}\sqrt{u}=x-3\\ \sqrt{x}=u-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-u)(x+u-5)=0\\ u=x^2-6x+9.\end{cases}$$

Giải hệ trên, kết hợp với các điều kiện (2) và (3), ta thu được nghiệm $x = \dfrac{7+\sqrt{13}}{2}$.

2) PT đã cho tương đương với

$\cos 2x(\cos 4x+\cos 2x)+5=7\cos 2x$

$\Leftrightarrow (\cos 2x-1)^2(2\cos 2x+5)=0$

$\Leftrightarrow \cos 2x = 1 \Leftrightarrow x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Câu III. 1) Ta có $\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right] = (-6\,;-12\,;6)$. Do đó PT mp$(ABC)$ đi qua $C(2\,;2\,;2)$ với vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1\,;2\,;-1)$ có dạng:

$(x-2)+2(y-2)-(z-2)=0$, hay

$x+2y-z-4=0$.

Từ đó $d(O, \text{mp}(ABC)) = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

2) Giả sử I là điểm thỏa mãn

$$\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0} \qquad (4)$$

Khi đó

$\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right| = \left|6\overrightarrow{MI}+\left(\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}\right)\right|$

$= 6\left|\overrightarrow{MI}\right|$.

Ta thấy $\left|\overrightarrow{MI}\right|$ nhỏ nhất khi M là hình chiếu vuông góc của I lên mp (P). Giả sử $I(x\,;y\,;z)$.

Từ (4) tìm được $x = \dfrac{23}{6}$; $y = \dfrac{13}{6}$; $z = \dfrac{25}{6}$.

Nghĩa là $I\left(\dfrac{23}{6};\dfrac{13}{6};\dfrac{25}{6}\right)$. Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{m} = (1\,;1\,;1)$. Giả sử (d) là đường thẳng qua I, vuông góc với mặt phẳng (P). Khi đó (d) nhận $\vec{m}$ làm vectơ chỉ phương. Vì M là giao điểm của (d) và mp(P) nên $M\left(\dfrac{23}{6}+t;\dfrac{13}{6}+t;\dfrac{25}{6}+t\right)$.

Thay tọa độ M vào PT mp(P) tìm được $t = -\dfrac{79}{18}$. Do đó $M\left(-\dfrac{5}{9};-\dfrac{20}{9};-\dfrac{2}{9}\right)$.

Câu IV. 1) Đặt $x = \tan\varphi \Rightarrow dx = (1+\tan^2\varphi)d\varphi$.

$x = 0 \Rightarrow \varphi = 0$; $x = 1 \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{4}$. Khi đó

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^3\varphi.d\varphi}{(1+\tan^2\varphi)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\tan\varphi}{1+\tan^2\varphi}-\frac{\tan\varphi}{(1+\tan^2\varphi)^2}\right)d\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}(-\cos\varphi+\cos^3\varphi)\,d(\cos\varphi) = \frac{1}{16}.$$

2) $\begin{cases}3x^2+3xy+y^2=75\\ y^2+3z^2 \quad\;\; =27 \quad (5)\\ z^2+xy+x^2 \quad =16 \quad (6)\end{cases}$

Từ các điều kiện trên ta suy ra

$3(z^2+xz+x^2)+(y^2+3z^2)-(3x^2+3xy+y^2)=0$.

Dẫn đến $2z^2+xz=xy$. Đặt $x = kz$ $(k > 0)$ thì

$y=\dfrac{2z^2+kz^2}{kz}=\left(\dfrac{2}{k}+1\right)z$. Từ (5) và (6) suy ra

$$\begin{cases}z^2\left(\left(\dfrac{2}{k}+1\right)^2+3\right)=27\\ z^2(1+k+k^2) \quad =16\end{cases} \Rightarrow k=\frac{8\sqrt{3}}{9}.$$

Vậy $P = z^2\left(k\left(\dfrac{2}{k}+1\right)+2\left(\dfrac{2}{k}+1\right)+3k\right)$

$$= \frac{4z^2(k^2+k+1)}{k} = 24.\sqrt{3}.$$

Câu Va. 1) Giả sử PT (d) có dạng $ax+by+c = 0$ $(a^2+b^2 > 0)$.

Nhận thấy $AB = \sqrt{5} < d(A\,;(d)) + d(B\,;(d))$ ($d(M, \Delta)$ - kí hiệu khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ)

nên A, B nằm về cùng một phía với (d). Suy ra $(a + b + c)(2a + 3b + c) > 0$ (7)

Từ giả thiết $d(A\,;(d)) = 2$ và $d(B\,;(d)) = 4$ ta có

$$\begin{cases} |2a+3b+c| = 2|a+b+c| & (8) \\ \dfrac{|a+b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 2 & (9) \end{cases}$$

Từ (7) và (8) suy ra $2a + 3b + c = 2a + 2b + 2c$ $\Leftrightarrow b = c$. Thế $b = c$ vào (9) tìm được $a = 0$ hoặc $a = \frac{3}{4}b$.

Do đó có hai đường thẳng thỏa mãn đề bài là (d_1): $y + 1 =$; (d_2): $4x + 3y + 3 = 0$.

2) Ta có $u_n > 0 \Leftrightarrow 4u^2 + 36u - 115 < 0$

$\Leftrightarrow -\frac{23}{2} < n < \frac{5}{2}$. Vậy $n \in \{1\,;2\}$. Từ đó tìm được $u_1 = \frac{75}{8}$, $u_2 = \frac{45}{8}$.

Câu Vb. 1) Đặt $z = x + y.i$ ($x, y \in \mathbb{R}$), khi đó $z^2 + |z| = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 + \sqrt{x^2+y^2} + 2xy.i = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + \sqrt{x^2+y^2} = 0 \\ xy = 0. \end{cases}$$

Giải hệ được các cặp $(x\,;y)$ là $(0\,;1)$, $(0\,;-1)$. Do đó PT đã cho có ba nghiệm là $z_1 = 0$, $z_2 = i$; $z_3 = -i$.

2) (*Bạn đọc tự vẽ hình*). Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$, I là trung điểm của AB. Xét tam giác vuông BSI có $SI = \dfrac{BI}{\tan\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{a}{2\tan\frac{\alpha}{2}}$.

Trong tam giác vuông SOI thì $SO^2 = SI^2 - IO^2$

$$\Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Khi đó $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{\cos\alpha}}{6\sin\frac{\alpha}{2}}$.

NGUYỄN THANH GIANG
(GV THPT chuyên Hưng Yên)

PROBLEMS... *(Tiếp trang 17)*

T9/359. Solve the system of equations:

$$\begin{cases} 20\left(x+\frac{1}{x}\right) = 11\left(y+\frac{1}{y}\right) = 2007\left(z+\frac{1}{z}\right) \\ xy + yz + zx = 1. \end{cases}$$

T10/359. Find the limit at $x=0$ of the following function:

$$\frac{\sqrt{\dfrac{\cos 2x + \sqrt[3]{1+3x}}{2}} - \sqrt[3]{\dfrac{\cos 3x + 3\cos x - \ln(1+x)^4}{4}}}{x}$$

T11/359. Let (O_1) be a circle inside a triangle ABC and touches both sides AB and AC. Construct a second circle (O_2) through B, C and touches outside of (O_1) at T. Prove that the angle bisector of $\widehat{BTC}$ passes through the incenter of the triangle ABC.

T12/359. Let $A_1A_2A_3A_4$ be a tetrahedron with perpendicular opposite edges. Denote by S_i the area of the opposing faces of the vertices A_i ($i = 1, 2, 3, 4$). Find all possible points M where the sum $S_1.MA_1 + S_2.MA_2 + S_3.MA_3 + S_4.MA_4$ is smallest possible.

Người dịch
LÊ MINH HÀ
(ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

GIẢI BÀI... *(Tiếp trang 28)*

– Tô màu vàng (hoặc đỏ) tất cả các số $n = kq + r$, $0 < r < q$ mà r là số chẵn khác 0;

trong đó, q là một số lẻ bất kì lớn hơn 1.

Dễ dàng kiểm tra được rằng cách tô màu nêu trên thỏa mãn tất cả các điều kiện của đề bài.

• Vậy, tóm lại, tất cả các cách tô màu thỏa mãn điều kiện của bài ra là tất cả các cách tô màu vừa được mô tả ở trên.

Nhận xét. Do sơ xuất, trong đề bài ra còn thiếu điều kiện 3). Ban tổ chức cuộc thi "Hello IMO 2007" thành thật xin lỗi bạn đọc.

NGUYỄN KHẮC MINH

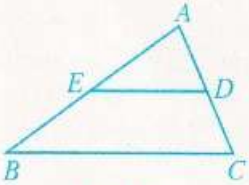
TOÁN & PHI TOÁN

NGUYỄN CẢNH TOÀN

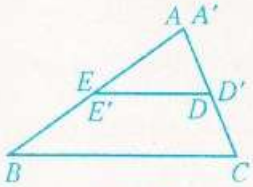
Những lĩnh vực hoạt động của con người không dùng đến bất cứ khái niệm, định lí, công thức toán học nào sẽ gọi là những lĩnh vực phi toán. Nhưng giữa "toán" và "phi toán" vẫn có những mối quan hệ về cách tư duy, về ý chí và cảm xúc nảy sinh trong quá trình hoạt động. Sự tác động qua lại giữa "toán" và "phi toán" giúp cho đôi bên đều được nâng lên. Xin nêu ra đây vài ví dụ.

Có hàng tỉ học sinh từ xưa đến nay biết định lí về đường trung bình trong một tam giác và họ biết dùng định lí đó để chứng minh nhiều định lí khác. Nhưng rất hiếm học sinh biết mở rộng định lí đó vì ở họ thiếu tư duy biện chứng. Họ không biết dùng luật phủ định của phủ định để mở rộng định lí đó.

Phủ định lần thứ nhất. Phủ định tam giác ABC (h. 1) bằng cách coi nó là một tứ giác $ABCA'$ (h. 2), trong đó đỉnh thứ tư A' trùng với A. Tuy vẫn như cũ nhưng đã có mầm mống của cái mới: Ở hình 1 chỉ có một đoạn DE ; còn ở hình 2 có đến bốn đoạn DE, $D'E'$, DE', $D'E$. Cái mới đó như một cái bào thai, chưa rõ hình hài.

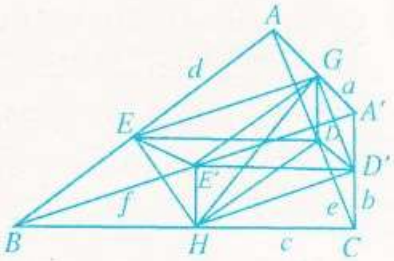


Hình 1



Hình 2

Phủ định lần thứ hai. Để cái bào thai bộc lộ rõ hình hài, ta phủ định tính chất "có hai đỉnh trùng nhau" của tứ giác $ABCA'$ bằng cách cho A' rời khỏi A (h. 3).



Hình 3

Bây giờ thì cái thai đã rõ hình hài. Đó là hai cạnh DE, $D'E'$ và hai đường chéo DE' và $D'E$ của hình bình hành $DD'E'E$. Và ta liên tưởng ngay đến định lí quen biết: *Trong một hình bình hành, tổng bình phương của bốn cạnh bằng tổng bình phương của hai đường chéo*:

$$DE'^2 + D'E^2 = DE^2 + DD'^2 + D'E'^2 + EE'^2 \quad (*)$$

Đến đây, ta thấy ra một sự bất công: Tại sao không xét đến trung điểm G, H của hai cạnh đối diện AA' và BC? Thế là ta lại có thêm hai hình bình hành nữa $EGD'H$ và $DGE'H$ với hai đẳng thức tương tự như (1). Để viết cho gọn, ta đặt $DE' = x$, $D'E = y$, $GH = z$, $AA' = a$, $A'C = b$, $CB = c$, $BA = d$, $AC = e$, $A'B = f$. Thế thì đẳng thức (*) là

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2+c^2}{2} \quad (1)$$

Tương tự
$$y^2 + z^2 = \frac{e^2+f^2}{2} \quad (2)$$

$$z^2 + x^2 = \frac{b^2+d^2}{2} \quad (3)$$

Cộng theo vế (1), (2), (3) ta có

$$4(x^2+y^2+z^2) = a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2 \quad (4)$$

Từ (4), ta có định lí sau đây

Định lí 1. *Trong một tứ diện (hình tạo bởi bốn điểm và sáu đường thẳng nối chúng đôi một), tổng bình phương sáu cạnh bằng bốn lần tổng bình phương của ba đường trung bình (đường nối trung điểm của hai cạnh đối diện).*

Giải hệ phương trình (1), (2), (3) thì được

$$x^2 = \frac{a^2+b^2+c^2+d^2-e^2-f^2}{4} \quad (5)$$

$$y^2 = \frac{a^2+c^2+e^2+f^2-b^2-d^2}{4} \quad (6)$$

$$z^2 = \frac{b^2+d^2+e^2+f^2-a^2-c^2}{4} \quad (7)$$

Cả (5), (6), (7) đều có thể phát biểu như sau:

Định lí 2. *Trong một tứ điểm, tổng bình phương của bốn cạnh (gồm hai đôi đối diện) bằng tổng bình phương hai cạnh còn lại cộng thêm 4 lần bình phương đường trung bình tương ứng.*

Như vậy, nhờ luật phủ định trong triết học duy vật biện chứng (DVBC), từ định lí về đường trung bình trong tam giác, tự mình có thể đi đến hai định lí 1 và 2 mở rộng định lí đó ra cho một tứ điểm bất kì.

Nếu cho một cạnh bằng không, ví dụ cho $a = 0$ (kéo theo $d - e = 0$, $b - f = 0$) thì (5) cho ta $x^2 = \frac{c^2}{4}$ hay $x = \frac{c}{2}$ và ta được lại định lí về đường trung bình trong tam giác. Còn (7) lúc đó cho ta $z^2 = \frac{2(b^2+d^2)-c^2}{4}$ và ta được công thức về đường trung tuyến trong một tam giác. Đường trung bình và trung tuyến tưởng là khác nhau, chả có bà con gì, hóa ra lại là hai anh em ruột có cùng một mẹ là định lí 2. Thật là biện chứng.

Ta còn gặp quy luật phủ định của phủ định ở ngoài toán học. Chẳng hạn muốn học một cách sáng tạo thì cũng phải tuân theo luật đó. Bước đầu, có thầy dạy cho mà học biến thành "tự học". Càng tự học, tư duy độc lập càng phát triển rồi đến một lúc nào đó sẽ có tư duy phê phán, rồi tư duy sáng tạo. Đến lúc này thì "tự học" bị phủ định và đột biến thành "nghiên cứu khoa học".

Như vậy, tư duy biện chứng thuộc lĩnh vực phi toán lại là một sợi dây nối "toán" và "phi toán".

Tư duy hình tượng lại là một sợi dây khác nối toán và phi toán. Đọc "Tây du kí" ta rất phục tác giả đã giàu trí tưởng tượng mà bịa ra 81 nạn và 72 phép biến hóa của Tề thiên đại thánh. Người làm toán có thể học ở đó không chỉ một trí tưởng tượng dồi dào, mà còn là một trí tưởng tượng hướng đích. Tại sao Tôn hành giả lúc này thì biến thành cô gái, lúc khác lại biến thành cụ già? Đó đều là tùy cơ ứng biến sao cho đạt được mục đích. Nhà toán học cũng vậy, phải có một trí tưởng tượng dồi dào lắm mới tưởng tượng ra đủ thứ phép biến đổi, mỗi lần như vậy không thể vu vơ mà đều có hướng đích. Tôn hành giả khi không hàng được yêu quái thì ông ta lại phóc lên trời để cầu cứu. Nhà toán học cũng vậy, bị bí trong không gian này lại chạy đến không gian mở rộng, ví dụ như bí không giải được phương trình bậc ba với số thực thì đã giải được nhờ có số phức. Một lí thuyết toán học có quá trình ra đời đại khái như sau: Nó hình thành đầu tiên trong trí tưởng tượng của tác giả. Ông ta có thể sơ bộ kiến thiết ra một mô hình của lí thuyết đó rồi đem thử. Nếu thử mà thấy vấp ở đâu thì tập trung vào đó mà sửa. Cứ sửa như vậy, dần dần sẽ hình thành một lí thuyết phi mâu thuẫn.

Trong việc dạy Toán hiện nay ở nước ta, kể cả ở các lớp chuyên Toán, ta mới dạy cho học sinh một toán học đã hình thành xong, chứ không phải một toán học đương phát triển. Ngay thi Toán Quốc tế, các bài ra cũng là những vấn đề toán học đã có lời giải (nằm trong đáp án của tác giả) nhưng đem giấu đi và yêu cầu học sinh tìm. Việc tìm tòi này có thể ví với việc một con chim có thể nhảy nhót, múa may, hót líu lo trong một cái lồng. Lồng đó chính là vấn đề khoa học đã được người ra bài chọn rồi giấu lời giải.

Chúng ta phải đổi mới cách dạy, cách học toán để đào tạo ra được những con chim phá lồng mà ra rồi còn biết định hướng mà bay đến những chân trời mới.

Ngày nay, đã có một khoa học gọi là sáng tạo học (creatology) dạy cho người ta sáng tạo trong mọi lĩnh vực khoa học. Cơ sở triết học của sáng tạo học là triết học DVBC. Sáng tạo thực chất là cách vận dụng triết học DVBC vào từng lĩnh vực cụ thể. Chẳng hạn, vận dụng vào kĩ thuật thì ba quy luật cơ bản của triết học DVBC (trong đó có quy luật phủ định của phủ định) đã được cụ thể hóa thành 40 nguyên tắc cần theo để có được một sáng tạo kĩ thuật, ví dụ như nguyên tắc phân nhỏ (để làm cho đối tượng trở thành tháo lắp được và tiết kiệm không gian) hay nguyên tắc phản đối xứng (như trong việc sáng tạo ra cái cam để đóng mở xilanh của một máy nổ). Từ hàng triệu sáng tạo kĩ thuật mà rút ra được 40 nguyên tắc thì 40 nguyên tắc đó thực sự là một cái la bàn để dùng trên đại dương mênh mông các sáng tạo kĩ thuật.

BÀI TOÁN VỀ VÉ HẠNH PHÚC

Thượng đế có một cuốn sách chứa tất cả những lời giải ngắn nhất và hay nhất của mọi bài toán
(P. Erdös)

Trong bài viết nhỏ này, chúng ta sẽ làm quen với bài toán về những chiếc vé hạnh phúc và những lời giải rất khác nhau của nó. Qua đó, chúng ta sẽ thấy con đường đi để tìm được một lời giải đẹp chông gai thế nào và để hiểu hơn một chân lí khác: *Bài toán hay nào cũng có lời giải đẹp.*

1. Bài toán

Sinh viên thời học ở Liên Xô ai cũng biết thế nào là một chiếc vé hạnh phúc và ai cũng từng đếm thử xem chiếc vé xe buýt (hoặc xe điện, xe buýt điện ...) mình mới mua có phải là vé hạnh phúc hay không. Một chiếc vé được đánh số từ 000000 đến 999999 và vé được gọi là *hạnh phúc* nếu tổng ba chữ số đầu bằng tổng ba chữ số cuối. Ai mua được vé hạnh phúc thì ngày hôm đó sẽ gặp nhiều may mắn (như thi đạt điểm cao, có bạn đến thăm ...). Ngay cả những người không tin cũng không dưới một lần cộng thử. Một hệ quả cũng rõ ràng là nếu có vé hạnh phúc thì chắc chắn sẽ không bị phạt (vì có vé thì không bị phạt!). Đó chẳng phải là hạnh phúc sao!

Sinh viên khoa Toán còn quan tâm đến một vấn đề tổng quát hơn: *Xác suất để gặp một chiếc vé hạnh phúc là bao nhiêu*? Nếu ai có biết đến xác suất cổ điển thì có thể hiểu ngay rằng bài toán này tương đương với bài toán đếm số các số hạnh phúc từ 000000 đến 999999. Xác suất cần tìm sẽ là kết quả của số tìm được chia cho 10^6.

2. Cách giải quyết thứ nhất

Như vậy vé hạnh phúc là vé mang số $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ với $a_1 + a_2 + a_3 = a_4 + a_5 + a_6$. Vì a_i, $i = 1, 2, ..., 6$ là các chữ số trong hệ đếm thập phân nên ta có điều kiện $0 \le a_i \le 9$. Như vậy, ta cần

Tìm số nghiệm nguyên của phương trình

$$a_1+a_2+a_3 = a_4+a_5+a_6$$
$$0 \le a_i \le 9,\ i = 1, 2, ..., 6.$$

Ta nhận thấy rằng do $0 \le a_i \le 9$ nên $0 \le a_1+a_2+a_3 \le 27$. Với mỗi số nguyên k $(0 \le k \le 27)$, gọi c_k là số nghiệm của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = k$ thì rõ ràng số nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3 = a_4+a_5+a_6 = k \\ 0 \le a_i \le 9, i = 1, 2, ..., 6. \end{cases}$$

sẽ bằng c_k^2 và số vé hạnh phúc sẽ bằng

$$C = c_1^2 + c_2^2 + ... + c_{27}^2.$$

Đây là hướng giải quyết mà hầu như ai cũng nghĩ đến đầu tiên. Vấn đề tiếp theo là tính các c_k $(0 \le k \le 27)$. Việc giải quyết bài toán phụ này dẫn chúng ta đến bài toán chia kẹo của Euler.

3. Phương trình $x_1 + x_2 ... + x_n = k$ hay bài toán chia kẹo Euler

Có bao nhiêu cách chia k viên kẹo cho n người? Đó chính là cách phát biểu thực tế của bài toán chia kẹo Euler. Ở đây điều kiện duy nhất đối với số kẹo x_i mà người thứ i nhận được là x_i là số nguyên không âm (ta không có ý định bẻ cây kẹo làm đôi, cũng như chia cho ột người nào đó một số âm cây kẹo!). Hai cách chia kẹo khác nhau là hai bộ $(x_1, x_2, ..., x_k)$ và $(x_1', x_2', ..., x_k')$ với $x_1 + x_2 + ... + x_n = k$, $x_1' + x_2' + ... + x_n' = k$, trong đó hai bộ này khác nhau ở ít nhất một vị trí.

Như thế, bài toán chia kẹo Euler có thể phát biểu thành:

Cho n là một số nguyên dương và k là một số nguyên không âm. Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = k \qquad (*)$$

Cách giải thứ nhất (dựa trên phương pháp quan hệ đệ quy). Gọi số nghiệm nguyên không âm của phương trình (*) là $S(n, k)$. Dễ dàng thấy rằng $S(1, k) = 1$. Để tính $S(n, k)$, ta chú ý rằng (*) tương đương với

$$x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} = k - x_n \qquad (**)$$

Suy ra với x_n cố định thì số nghiệm của (**) là $S(n-1, k-x_n)$. Từ đó ta được công thức

$$S(n, k) = S(n-1, k) + S(n-1, k-1) + ... + S(n-1, 0).$$

Đây có thể coi là công thức truy hồi tính $S(n, k)$. Tuy nhiên, công thức này chưa thật tiện lợi. Viết công thức trên cho $(n, k-1)$ ta được

$S(n, k-1) = S(n-1, k-1) + S(n-1, k-2) + ... + S(n-1, 0)$.

Từ đây, trừ các đẳng thức trên theo vế, ta được

$$S(n, k) - S(n, k-1) = S(n-1, k).$$

Hay $S(n, k) = S(n, k-1) + S(n-1, k)$.

Từ công thức này, bằng quy nạp ta có thể chứng minh được rằng $S(n, k) = C_{n+k-1}^{k}$.

Cách giải thứ hai (dựa trên một phương pháp hiện đại của giải tích tổ hợp là phương pháp hàm sinh. Phương pháp này sử dụng các kiến thức về chuỗi, chuỗi hàm (đặc biệt là công thức Taylor). Đây là phương pháp mạnh nhất để giải bài toán giải tích tổ hợp).

Định nghĩa. Cho dãy số $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$ Chuỗi hình thức

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + ...$$

được gọi là *hàm sinh* của dãy (a_n).

Ý tưởng phương pháp hàm sinh như sau: Giả sử ta cần tìm công thức tổng quát của một dãy số (a_n) nào đó. Từ công thức truy hồi hoặc những lí luận tổ hợp trực tiếp, ta tìm được hàm sinh

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + ...$$

Khai triển $A(x)$ thành chuỗi và tìm hệ số của x^n trong khai triển đó ta tìm được a_n.

Công thức khai triển thường sử dụng là Công thức nhị thức Newton.

Ta minh hoạ cách sử dụng phương pháp hàm sinh cho bài toán chia kẹo Euler: Gọi $c_n(k)$ là số nghiệm của PT (*). Xét tích của n tổng vô hạn

$$(1+x+x^2+...)(1+x+x^2+...)....(1+x+x^2+...)$$
$$= (1+x+x^2+...)^n$$

Ta nhận xét rằng nếu khai triển tích trên thành chuỗi lũy thừa của x

$$(1+x+x^2+...)^n = c_0 + c_1x + ... + c_kx^k + ...$$

thì $c_k = c_n(k)$ (Vì sao? Hãy thử giải thích). Nhưng

$$(1+x+x^2+...)^n = (1-x)^{-n}$$
$$= 1 + nx + ... + n(n+1)...(n+k-1)\frac{x^k}{k!} + ...$$

Suy ra $c_n(k) = \dfrac{n(n+1)...(n+k-1)}{k!} = C_{n+k-1}^{k}$.

4. C = 55252. Kết thúc lời giải thứ nhất

Quay trở lại bài toán. Nhắc lại, ta cần tìm c_k là số nghiệm của bài toán sau:

Tìm số nghiệm nguyên của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = k$ *thoả mãn điều kiện* $0 \le x_1, x_2, x_3 \le 9$.

Rõ ràng, với $k \le 9$ thì điều kiện $x_i \le 9$ hiển nhiên được thoả mãn, do đó $c_k = S(3, k) = C_{k+2}^{2} = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$. Khi $k > 9$, $c_k < S(3, k)$ vì có một số nghiệm của bài toán chia kẹo không thỏa mãn điều kiện $x_i \le 9$. Để tính c_k, ta cần tìm số các nghiệm "không hợp lệ" này.

Với $k = 10$, nghiệm không hợp lệ là nghiệm có $x_i = 10$ với i nào đó. Rõ ràng chỉ có ba nghiệm như thế là (10, 0, 0), (0, 10, 0) và (0, 0, 10). Vậy $c_{10} = S(3, 10) - 3$.

Với $k = 11$, có 9 nghiệm không hợp lệ gồm (11, 0, 0), (10, 1, 0), (10, 0, 1), (0, 11, 0), (0, 10, 1), (1, 10, 0), (0, 0, 11), (0, 1, 10), (1, 0, 10).

Phương pháp liệt kê tất nhiên vẫn còn có thể tiếp tục. Nhưng nếu chỉ làm như thế thì chúng ta đã không phải là những nhà toán học tương lai. Nhận xét rằng với $k < 20$ thì sự không hợp

lệ chỉ có thể xảy ra ở một x_i. Ta chỉ cần xét số nghiệm với $x_1 > 9$, sau đó nhân 3 thì được số nghiệm không hợp lệ.

Nhưng số nghiệm nguyên của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = k$ với $x_1 > 9$, $x_2, x_3 \geq 0$ lại chính là số nghiệm nguyên của phương trình $y_1 + x_2 + x_3 = k - 10$ với $y_1, x_2, x_3 \geq 0$ (đặt $y_1 = x_1 - 10$) và như thế, dựa vào kết quả của bài toán chia kẹo và các lí luận trên đây, số nghiệm không hợp lệ bằng

$$3S(3, k-10) = 3C_{k-8}^2 = \frac{3(k-8)(k-9)}{2}.$$

Và như thế $c_k = S(3, k) - 3.S(3, k-10)$.

Khi $k \geq 20$ thì sự không hợp lệ có thể xảy ra đồng thời ở hai vị trí và vì vậy khi ta trừ đi các nghiệm không hợp lệ, có một số nghiệm sẽ bị trừ đi hai lần (ví dụ, khi $k = 20$ thì nghiệm (10, 10, 0) bị trừ đi hai lần!). Ta cần đếm số các nghiệm bị trừ "nhầm" như thế để bù lại.

Với $k = 20$, có 3 nghiệm "nhầm" là (10, 10, 0), (0, 10, 10) và (10, 0, 10). Vậy $c_{20} = S(3, 20) - 3.S(3, 10) + 3$.

Để tính số các nghiệm "nhầm", ta xét trường hợp $x_1 > 9$, $x_2 > 9$, còn các trường hợp $x_1 > 9$, $x_3 > 9$ và $x_2 > 9$, $x_3 > 9$ được xét tương tự. Số nghiệm nguyên của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = k$ với $x_1 > 9$, $x_2 > 9$, $x_3 \geq 0$ chính là số nghiệm nguyên của phương trình $y_1 + y_2 + x_3 = k - 20$ với $y_1, y_2, x_3 \geq 0$ và như vậy bằng $S(3, k-20) = C_{k-18}^2$.

Vậy với $k \geq 20$ ta có

$c_k = S(3, k) - 3.S(3, k-10) + 3S(3, k-20)$.

Sử dụng các công thức trên ta lần lượt tìm được: $c_0 = 1$, $c_1 = 3$, $c_2 = 6$, $c_3 = 10$, $c_4 = 15$, $c_5 = 21$, $c_6 = 28$, $c_7 = 36$, $c_8 = 45$, $c_9 = 55$, $c_{10} = 63$, $c_{11} = 69$, $c_{12} = 73$, $c_{13} = 75$, $c_{14} = 75$, $c_{15} = 73$, $c_{16} = 69$, $c_{17} = 63$, $c_{18} = 55$, $c_{19} = 45$, $c_{20} = 36$, $c_{21} = 28$, $c_{22} = 21$, $c_{23} = 15$, $c_{24} = 10$, $c_{25} = 6$, $c_{26} = 3$, $c_{27} = 1$. Từ đó tính được $C = 55252$ và xác suất mua được vé hạnh phúc là $\approx 0{,}055$, tức là khoảng $\frac{1}{18}$.

Bài toán đặt ra ban đầu đã được giải quyết. Tuy nhiên, chúng ta sẽ không dừng lại ở đây, mà tiếp tục phân tích lời giải trên để đi đến những cách giải tốt hơn.

5. Những nhận xét tiếp theo

Nhìn vào giá trị của các c_i, bằng mắt thường chúng ta cũng có thể nhận thấy là $c_0 = c_{27}$, $c_1 = c_{26}$, $c_2 = c_{25}$, ... Điều này thật đáng ngạc nhiên vì c_i được tính theo các công thức rất khác nhau. Đây không thể là ngẫu nhiên vì xác suất của sự ngẫu nhiên là quá nhỏ. Vì vậy, đây phải là quy luật. Với suy nghĩ đó, ta dự đoán $c_k = c_{27-k}$ và tìm được một chứng minh tổ hợp đẹp mắt cho kết quả này.

Mệnh đề 1. *Với mọi $0 \leq k \leq 27$ ta có $c_k = c_{27-k}$.*

Chứng minh. Giả sử x_1, x_2, x_3 với $0 \leq x \leq 9$ là nghiệm của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = x_4 + x_5 + x_6$ thì $y_i = 9 - x_i$ cũng thoả mãn điều kiện $0 \leq y_i \leq 9$ ($i = 1, 2, 3$) và là nghiệm của phương trình $y_1 + y_2 + y_3 = 27 - k$. Dễ thấy tương ứng này là tương ứng 1–1, từ đó suy ra đpcm.

Với nhận xét này, chúng ta giảm được một nửa số lượng tính toán.

Tuy nhiên, điều quan trọng hơn cả là từ ý tưởng chứng minh mệnh đề 1, ta tìm ra một lời giải tuyệt đẹp cho bài toán về những chiếc vé hạnh phúc.

Mệnh đề 2. *Số nghiệm nguyên của phương trình*

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_4 + a_5 + a_6$$
$$0 \leq a_i \leq 9,\ i = 1, 2, ..., 6 \qquad (1)$$

bằng số nghiệm nguyên của phương trình

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 27,$$
$$0 \leq a_i \leq 9,\ i = 1, 2, ..., 6. \qquad (2)$$

Chứng minh. Song ánh $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) \Rightarrow (a_1, a_2, a_3, 9 - a_4, 9 - a_5, 9 - a_6)$ từ tập nghiệm của (1) vào tập nghiệm của (2) chứng minh mệnh đề của chúng ta.

Từ mệnh đề này, suy ra số vé hạnh phúc bằng số nghiệm của (2) và lí luận tương tự như trong phần tìm c_k, ta tìm được

$$C = S(6, 27) - 6S(6, 17) + 15S(6, 7)$$
$$= C_{32}^5 - 6.C_{22}^5 + 15C_{12}^5 = 55252.$$

Như vậy bài toán đã được giải quyết hoàn toàn, một cách ngắn gọn và đẹp. Phương pháp trên vẫn có thể tiếp tục áp dụng cho các trường hợp vé là một số có $2n$ chữ số viết trong một hệ đếm cơ số q bất kì.

TRẦN NAM DŨNG
(ĐHKHTN TP Hồ Chí Minh)

CÁC LỚP THCS

Bài T1/359. (Lớp 6) Tính tổng gồm 2005 số hạng

$$S=\frac{2^2}{1.3}+\frac{3^2}{2.4}+\frac{4^2}{3.5}+...+\frac{2006^2}{2005.2007}.$$

TRẦN VĂN HẠNH
(GV CĐSP Quảng Ngãi)

Bài T2/359. (Lớp 7) Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Trên đường thẳng AC lấy điểm M tùy ý. Đường vuông góc với BC qua M cắt đường thẳng BC tại H. Gọi I là trung điểm của BM. Tính số đo của góc HAI.

CAO NGỌC TOẢN
(GV THPT Tam Giang, Thừa Thiên - Huế)

Bài T3/359. Chứng minh rằng tồn tại vô số các số nguyên dương n sao cho $n!$ chia hết cho $n^2 + 1$. (Kí hiệu $n!$ là tích n số tự nhiên từ 1 đến n).

PHẠM VĂN HOÀNG
(SV K49, lớp CNNL-01, ĐHBK Hà Nội)

Bài T4/359. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $a + b + c = abc$. Chứng minh rằng $\frac{a}{b^3}+\frac{b}{c^3}+\frac{c}{a^3}\geq 1$.

ĐỖ THANH HÂN
(GV THPT chuyên Bạc Liêu)

Bài T5/359. Giải phương trình

$$\frac{4}{x}+\sqrt{x-\frac{1}{x}}=x+\sqrt{2x-\frac{5}{x}}.$$

NGUYỄN HỮU TÂM
(K50A Hóa, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T6/359. Cho tam giác ABC vuông tại A với $AB < AC$, $BC = 2+2\sqrt{3}$ và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác bằng 1. Tính số đo các góc B và C của tam giác ABC.

VŨ HỮU BÌNH
(Hà Nội)

Bài T7/359. Cho tam giác nhọn ABC. AG là đường cao và H là trực tâm của tam giác đó. Gọi D là trung điểm của BC. Các đường tròn đường kính là BC và AD cắt nhau tại E và F. Chứng minh rằng:

1) Đường tròn đi qua ba điểm H, E, G và đường tròn đi qua ba điểm H, F, G đều tiếp xúc với đường tròn đường kính BC.

2) Ba điểm H, E, F thẳng hàng.

VŨ ĐÌNH PHƯỢNG
(GV khoa Toán - Tin, ĐHSP Hà Nội)

CÁC LỚP THPT

Bài T8/359. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$x_1^3x_2^2+x_2^3x_3^2+...+x_n^3x_1^2+n^{2(n-1)}x_1^3x_2^3...x_n^3$$

trong đó x_1, x_2, ..., x_n là các số không âm có tổng bằng 1 và n là số tự nhiên lớn hơn 2.

VÕ QUỐC BÁ CẨN
(SV K32, lớp YY0647A1, ĐH Y Dược Cần Thơ)

Bài T9/359. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}20\left(x+\frac{1}{x}\right)=11\left(y+\frac{1}{y}\right)=2007\left(z+\frac{1}{z}\right)\\ xy+yz+zx=1\end{cases}$$

LÝ CHÍ HƯỚNG
(GV THPT Dương Quảng Hàm, Hưng Yên)

Bài T10/359. Tìm giới hạn tại $x = 0$ của hàm số sau

$$\frac{\sqrt{\frac{\cos 2x+\sqrt[3]{1+3x}}{2}}-\sqrt[3]{\frac{\cos 3x+3\cos x-\ln(1+x)^4}{4}}}{x}$$

PHẠM QUỐC PHONG
(GV THPT Hồng Lĩnh, Hà Tĩnh)

Bài T11/359. Cho tam giác ABC. Đường tròn (O_1) nằm trong tam giác và tiếp xúc với các cạnh AB, AC. Đường tròn (O_2) đi qua B, C và tiếp xúc ngoài với đường tròn (O_1) tại T. Chứng minh rằng phân giác của góc BTC

đi qua tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC.

LƯU XUÂN TÌNH
(GV ĐHSP Hà Nội)

Bài T12/359. Cho tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ có các cặp cạnh đối diện vuông góc với nhau. Xác định vị trí điểm M trong không gian sao cho tổng $S_1.MA_1+S_2.MA_2+S_3.MA_3+S_4.MA_4$ đạt giá trị bé nhất, trong đó S_i là diện tích mặt đối diện với đỉnh A_i (i = 1, 2, 3, 4) của tứ diện.

TRẦN QUANG HÙNG
(SV K49, A1T, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

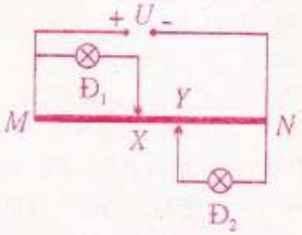
CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/359. Hai xe lăn A và B có khối lượng tương ứng là m_1 = 1kg và $m_2 = 2m_1$. Hai xe này có thể chuyển động không ma sát trên mặt nằm ngang. Một lò xo có độ cứng k, chiều dài tự nhiên l_0 = 10cm được nối vào giữa hai xe (hình vẽ).

Đưa hai xe lại gần nhau cho lò xo bị nén còn một nửa rồi buông ra. Xe thứ nhất chuyển động với vận tốc 1m/s. Hãy xác định độ cứng k của lò lo.

NGUYỄN ĐỨC HIỆP
(GV THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, TP. Hồ Chí Minh)

Bài L2/359. Cho mạch điện như hình vẽ. Nguồn điện có hiệu điện thế không đổi U = 12V. Hai bóng đèn giống nhau ghi 6V-3W. Thanh dẫn MN dài, đồng chất, tiết diện đều. Vị trí nối các bóng đèn với thanh là X và Y có thể di chuyển được dọc theo thanh sao cho $MX = NY$. Khi thay đổi vị trí X và Y trên thanh thì thấy xảy ra hai trường hợp các đèn đều sáng bình thường nhưng công suất tiêu thụ trên toàn mạch ngoài trong hai trường hợp đó sai khác nhau 1,2 lần. Tìm điện trở toàn phần của thanh MN.



NGUYỄN MINH TUẤN
(GV THPT Yên Thành II, Yên Thành, Nghệ An)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/359. (for 6th grade) Determine the sum of 2005 terms:

$$S=\frac{2^2}{1.3}+\frac{3^2}{2.4}+\frac{4^2}{3.5}+...+\frac{2006^2}{2005.2007}.$$

T2/359. (for 7th grade) Let ABC be an isosceles right triangle with right angle at A. Pick an arbitrary point M on AC. The foot of the altitude with BC through M is H. Let I be the midpoint of BM. Find the value of the angle $\angle HAI$.

T3/359. Prove that there exist infinitely many positive integers n such that $n!$ is a multiple of n^2+1.

T4/359. Let a, b, c be positive numbers such that $a+b+c=abc$. Prove that $\frac{a}{b^3}+\frac{b}{c^3}+\frac{c}{a^3}\geq 1$.

T5/359. Solve the equation

$$\frac{4}{x}+\sqrt{x-\frac{1}{x}}=x+\sqrt{2x-\frac{5}{x}}.$$

T6/359. Let ABC be a right triangle at A with $AB < AC$, $BC = 2+2\sqrt{3}$ and its incircle has radius is 1. Determine the value of the angles $\angle B$ and $\angle C$.

T7/359. Let ABC be an acute triangle with orthocenter H. Let AG be the altitude through A and let D be the midpoint of BC. The circles, whose diameters are BC and AD respectively, meet at E and F. Prove that:

1) The circumcircles of H, E and G and of H, F and G are both tangent to the circle whose diameter is the side BC.

2) H, E, and F lie on the same line.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T8/359. Find the maximum value of the following expression:

$$x_1^3x_2^2+x_2^3x_3^2+...+x_n^3x_1^2+n^{2(n-1)}x_1^3x_2^3...x_n^3$$

where x_1, x_2, ..., x_n are non-negative numbers whose sum is 1 ($n\geq 2$).

(Xem tiếp trang 10)

★**Bài T1/355.** *Cho a, b là các số tự nhiên thỏa mãn* $2006a^2 + a = 2007b^2 + b$ (1)
Chứng minh rằng a – b là một số chính phương.

Lời giải.

• Nếu $a < b$ thì vế trái của (1) nhỏ hơn vế phải nên chỉ xét $a \geq b$.

• Với $a = b$ thì từ (1) suy ra $a = b = 0$, lúc đó $a - b = 0$ là số chính phương (*)

• Với $a > b$, biến đổi (1) về dạng

$$b^2 = 2006(a^2 - b^2) + (a - b)$$

$$\Leftrightarrow b^2 = (a - b)(2006a + 2006b + 1) \quad (2)$$

Đặt $d = (a, b)$ thì có $a = md$, $b = nd$ với $(m, n) = 1$, $m - n = t > 0$.

Giả sử $(t, n) = u$ thì $n \vdots u$, $t \vdots u$ nên $m \vdots u$ suy ra $u = 1$, nghĩa là $(t, n) = 1$.

Thay $b = nd$, $a - b = td$ vào (2) được

$$n^2d = t(2006dt + 4012dn + 1)$$

$$\Leftrightarrow n^2d = 2006dt^2 + 4012dtn + t \quad (3)$$

Từ (3) có $n^2d \vdots t$ mà $(t, n) = 1$ nên $d \vdots t$.

Mặt khác từ (3) thì $t \vdots d$, do đó $d = t$. Lúc đó $a - b = td = d^2$ là số chính phương (**).

Từ (*), (**) có điều phải chứng minh.□

Nhận xét. 1) Có thể khai thác thêm bài toán này. Thay $t = d$ vào (3) được $n^2 - 4012dn - 1 - 2006d^2 = 0$ hay $(n - 2006d)^2 - 1 = 2006.2007d^2$.

Đặt $v = n - 2006d$ ta được $v^2 - 1 = 2006.2007d^2$ hay $(v-1)(v+1) = 2006.2007d^2$.

Suy ra $v - 1$ phải là số chẵn, đặt $v - 1 = 2k$ thay vào được $2k(k+1) = 103.2007d^2$.

Từ đó d phải là số chẵn, đặt $d = 2e$, thay vào được $k(k+1) = 2006.2007e^2$ (4)

Nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của (4) là $e = 1$, $k = 2006$, nên $d = 2$, $v = 2k + 1 = 4013$, $n = v + 2006d = 8025$, $b = nd = 16050$ và $a = b + d^2 = 16054$. Ta tìm được cặp nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của (1) là $(a ; b) = (16054 ; 16050)$.

2) Các bạn *Lê Đức Lương*, 6A, THCS Lập Thạch, **Vĩnh Phúc** và *Nguyễn Văn Tiến*, 6A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, **Nghệ An** đã giải bài toán tổng quát hơn:

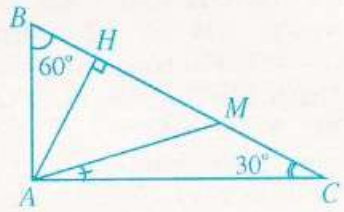
Cho a, b, n là các số tự nhiên thỏa mãn
$$na^2 + a = (n + 1)b^2 + b.$$
Chứng minh rằng a – b là số chính phương.

3) Phần lớn các bạn biến đổi (1) được (2), sau đó chứng minh rằng $(a - b, 2006a + 2006b + 1) = 1$, rồi sử dụng tính chất: "Nếu hai số (nguyên dương) nguyên tố cùng nhau mà tích của chúng là số chính phương thì mỗi thừa số cũng là số chính phương" để suy ra $a - b$ là số chính phương. Tuy nhiên nhiều bạn không chứng minh tính chất này. Một số bạn chứng minh tính chất này lại dùng mệnh đề sau: "Nếu số c không là số chính phương mà p là ước số nguyên tố của số c thì số c không chia hết cho p^2". Mệnh đề này là sai, chẳng hạn xét $c = p^3$.

VIỆT HẢI

★**Bài T2/355.** *Cho tam giác ABC vuông tại A và* $\widehat{ABC} = 60^\circ$. *Lấy điểm M thuộc cạnh BC sao cho AB + BM = AC + CM. Tính độ lớn góc* $\widehat{CAM}$.

Lời giải.



• Kẻ $AH \perp BC$ $(H \in BC)$.

Theo tính chất của tam giác vuông có một góc 30°, ta có

$BC = 2AB$, $AB = 2HB$, $AC = 2AH$ (1)

Theo giả thiết $AB + BM = AC + CM$

$\Rightarrow AB + 2BM = AC + (CM + BM)$

$\Rightarrow AB + 2BM = AC + BC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$AB + 2BM = 2AH + 2AB \Rightarrow 2BM = 2AH + 2BH$

$\Rightarrow 2(BM - BH) = 2AH \Rightarrow HM = HA$. Vậy tam giác HAM vuông cân tại H nên $\widehat{HAM} = 45^\circ$.

Từ đó $\widehat{CAM} = 90^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 15^\circ$.□

Nhận xét. 1) Ngoài lời giải trên đây, nhiều bạn áp dụng định lí Pythagore trong tam giác vuông để tính AH và MH (chẳng hạn, theo $AB = x$) rồi suy ra $AH = MH$.

2) Xin giới thiệu một hướng giải nữa để các bạn tham khảo, dựa vào nhận xét: " Điểm M trên đoạn BC thỏa mãn $AB + BM = AC + CM$, nếu có, là duy nhất"

Lấy điểm M' trên BC sao cho $\widehat{CAM'} = 15°$. Sau đó chứng minh $AB + BM' = AC + CM'$.

3) Các bạn sau đây có lời giải đúng và ngắn gọn:

Phú Thọ: *Nguyễn Mỹ Linh, Nguyễn Quang Huy, Kim Huyền Trang, Đào Quốc Hiếu*, 7A1, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Mạc Thị Thu Huệ*, 7A, THCS Đồng Quế, Lập Thạch, *Bùi Văn Toàn*, 7A1, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Hải Dương:** *Trần Thị Mận*, 4A, TH Nghĩa An, Ninh Giang; **Nghệ An:** *Lê Công Thắng*, 7C, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Quảng Bình:** *Nguyễn Phương Thảo*, 6D, THCS Quách Xuân Kỳ, Bố Trạch; **Bình Định:** *Trương Thị Minh Tâm*, 6A2, THCS Nhơn Lộc, An Nhơn; **Khánh Hòa:** *Nguyễn Bảo Nhi*, 6^5, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★Bài T3/355. *Tìm tất cả các số x, y nguyên dương lớn hơn 1 sao cho $2xy - 1$ chia hết cho $(x - 1)(y - 1)$.*

Lời giải. Đặt $a = x - 1$, $b = y - 1$ với a, b là các số nguyên dương. Ta được

$$2xy - 1 = 2(a + 1)(b + 1) - 1$$
$$= (2a + 2b + 2ab + 1)$$

$(2xy - 1) \vdots ab \Leftrightarrow (2a + 2b + 1) \vdots ab$ suy ra $(2a + 1) \vdots b$ và $(2b + 1) \vdots a$.

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả thiết $a \geq b$.

Nếu $a = b$ thì $(2a + 1) \vdots a \Rightarrow 1 \vdots a \Rightarrow a = b = 1$ $\Rightarrow x = 2; y = 2$.

Nếu $a > b$ thì vì $(2b + 1)$ là số lẻ nhỏ hơn $3a$ nên khi chia $2b + 1$ cho a, ta có thương là một số lẻ, nhỏ hơn 3.

Do đó $2b + 1 = a \Rightarrow 2a + 1 = (4b + 3) \vdots b$ $\Rightarrow 3 \vdots b$. Ta được $b = 1$ hoặc $b = 3$.

Nếu $b = 1$ thì $a = 3 \Rightarrow x = 4; y = 2$.

Nếu $b = 3$ thì $a = 7 \Rightarrow x = 8; y = 4$.

Vì vai trò của x, y như nhau nên ta được các nghiệm $(x ; y)$ là $(2 ; 2)$, $(4 ; 2)$, $(2 ; 4)$, $(8 ; 4)$, $(4 ; 8)$.

Thử lại, ta thấy 5 nghiệm trên đều thỏa mãn .□

Nhận xét. 1. Nhiều bạn đã mắc sai lầm khi viết $\frac{2a+2b+1}{ab} = \frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{ab}$ là một số nguyên đã suy ra a, b là ước của 2 và ab là ước của 1 !

Lưu ý rằng mỗi số $\frac{2}{a}, \frac{2}{b}, \frac{1}{ab}$ có thể không phải là số nguyên nhưng tổng của chúng lại là một số nguyên.

2. Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Thái Nguyên : *Đào Hoàng Tùng*, 8A3, THCS Chu Văn An, TP Thái Nguyên; **Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Mạnh Quân*, 8C, *Nguyễn Hải Quân*, 9A, THCS Vĩnh Tường ; *Lê Thị Tuyết Mai*, 8A1, *Lê Văn Tú, Nguyễn Thành Hưng*, 7A1, THCS Yên Lạc; **Hà Tây:** *Nguyễn thế Anh, Đỗ Quang Tân*, 9C , THCS Ngô Sĩ Liên, Chương Mĩ; **Hải Dương:** *Phạm Ngọc Dương*, 9B, THCS Phú Thái, Kim Thành ; *Trần Thị Mận*, 4A, TH Nghĩa An, Ninh Giang; **Thái Bình :** *Nguyễn Thành Công*, 9A1, PHHSG Kiến Xương;**Thanh Hoá :** *Nguyễn Huy Linh*, 9B, THCS Yên Bái, Yên Định ; *Hoàng Kiên An*, 9^E, THCS Bắc Sơn, Sầm Sơn ; *Trần Xuân Quang*, 9B, THCS Trần Mai Ninh, TP Thanh Hoá; **Nghệ An :** *Vũ Thị Thu Hà, Đậu Thế Vũ*, 8B, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu ; *Trần Viết Thành*, 9A2, THCS Trà Lân, Con Cuông ; *Đinh Viết Trí*, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương ; *Bùi Bắc Nam*, 8B, *Hồ Hữu Quân, Phạm Việt Hùng*, 9C, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Khánh Hòa:** *Trần Thị Ánh Nguyên*, 8^7, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh; **Bình Định:** *Nguyễn Đồng Tiến*, 8A3, THCS Lương Thế Vinh, TP Quy Nhơn; **Vĩnh Long:** *Võ Hoàng Vân Hải*, 7/1, THCS Trung Hiếu, Vũng Liêm; **Kiên Giang :** *Trần Minh Hảo*, 8A6, THCS Bàn Tân Định, Giồng Riềng.

NGUYỄN ANH DŨNG

★Bài T4/355. *Chứng minh rằng*

$$\frac{a^4b}{2a+b} + \frac{b^4c}{2b+c} + \frac{c^4a}{2c+a} \geq 1,$$

trong đó a, b, c là ba số dương thỏa mãn

$$ab + bc + ca \leq 3abc.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. (Theo bạn *Nguyễn Ngọc Trung*, 9A1, THCS Lâm Thao, **Phú Thọ**). Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$P = \frac{a^4}{2a+b} + \frac{b^4c}{2b+c} + \frac{c^4a}{2c+a}$$
$$\geq 3\sqrt[3]{\frac{a^5b^5c^5}{(2a+b)(2b+c)(2c+a)}}$$
$$= \frac{3a^2b^2c^2}{\sqrt[3]{(2ac+bc)(2ab+ca)(2bc+ab)}}$$

$$\geq \frac{9a^2b^2c^2}{3(ab+bc+ca)} \geq abc \qquad (1)$$

Từ giả thiết và cũng theo bất đẳng thức Cauchy, ta có $3abc \geq ab+bc+ca \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$.

Suy ra $abc \geq 1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $P \geq 1$. Dễ thấy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.❐

Nhận xét. Bài toán không khó, nhưng nếu biến đổi và vận dụng không khéo lời giải sẽ dài. Ngoài lời giải trên của bạn *Trung*, các bạn có lời giải ngắn gọn là:

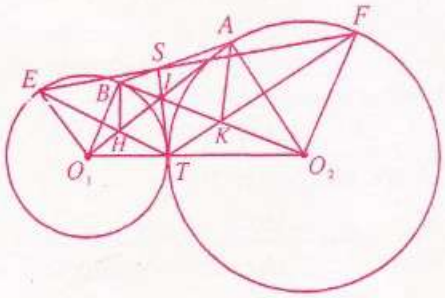
Vĩnh Phúc: *Nguyễn Xuân Tú*, 9A, THCS Vĩnh Tường, *Nguyễn Thanh Hằng*, 8A, THCS Thạch Đà, Mê Linh, *Phùng Ngọc Quý*, 8A1, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Nam Định:** *Trần Vũ Trung*, 9A9, THCS Phùng Chí Kiên, TP. Nam Định; **Nghệ An:** *Bùi Bắc Nam*, 8B, *Phạm Viết Hùng*, 9C, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Tiền Giang:** *Võ Chí Sang*, 8/2, THCS Thanh Hưng, Cái Bè; **Khánh Hòa:** *Trần Thị Ánh Nguyên*, 8^7, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh.

TRẦN HỮU NAM

★Bài T5/355. *Cho hai đường tròn (O_1), (O_2) không bằng nhau và tiếp xúc ngoài với nhau tại T. Kẻ O_1A tiếp xúc với (O_2) tại A; O_2B tiếp xúc với (O_1) tại B sao cho các điểm A, B cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ O_1O_2. Lấy điểm H thuộc O_1A và điểm K thuộc O_2B sao cho BH, AK cùng vuông góc với O_1O_2. TH cắt (O_1) lần nữa tại E, TK cắt (O_2) lần nữa tại F. EF cắt AB tại S. Chứng minh rằng ba đường thẳng O_1A, O_2B và TS đồng quy.*

Lời giải. Gọi I là giao điểm của O_1A và O_2B. Ta có tứ giác O_1O_2AB nội tiếp được, suy ra $\Delta AIO_2 \backsim \Delta BIO_1$. Từ đó $\frac{O_1T}{O_2T} = \frac{O_1B}{O_2A} = \frac{IO_1}{IO_2}$.

Do đó IT là phân giác trong của góc O_1IO_2 (1)



Mặt khác $\widehat{O_1BH} = \widehat{O_1O_2B}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc) đồng thời $\widehat{O_1O_2B} = \widehat{O_1AB}$ (do tứ giác O_1O_2AB nội tiếp được) nên $\Delta O_1BH \backsim \Delta O_1AB$.

Suy ra $\frac{O_1B}{O_1H} = \frac{O_1A}{O_1B}$ hay $\frac{O_1T}{O_1H} = \frac{O_1A}{O_1T}$.

Do đó $\Delta O_1TH \backsim \Delta O_1AT$.

Suy ra $\widehat{O_1AT} = \widehat{O_1TH} = \widehat{O_1ET}$ hay tứ giác O_1TAE nội tiếp được. Từ đó

$\widehat{EO_1A} = \widehat{ETA} = 180^\circ - \widehat{O_1TH} - \widehat{O_2TA}$

$= 180^\circ - \widehat{O_1AT} - \widehat{O_2AT} = 90^\circ$. Nên $EO_1 // AO_2$. Tương tự $BO_1 // FO_2$. Suy ra $\Delta O_1BE \backsim \Delta O_2FA$. Cùng với $\Delta AIO_2 \backsim \Delta BIO_1$ nên

$\frac{EB}{AF} = \frac{O_1E}{O_2A} = \frac{O_1T}{O_2T} = \frac{IB}{IA}$ và $\widehat{O_1BE} = \widehat{O_2FA}$.

Mà $O_1B // O_2F$ dẫn đến $EB // FA$. Áp dụng định lí Thalès $\frac{SB}{SA} = \frac{EB}{FA} = \frac{IB}{IA}$ hay IS là phân giác trong của góc AIB (2)

Từ (1) và (2) mà $\widehat{AIB}$ và $\widehat{O_1IO_2}$ đối đỉnh nên T, I, S thẳng hàng. Nói cách khác ba đường thẳng O_1A, O_2B, TS đồng quy. ❐

Nhận xét. 1) Không nhiều bạn giải được bài này. Có lẽ các bạn vẫn ngại giải các bài về quỹ tích, đồng quy và thẳng hàng.

2) Các bạn có lời giải tốt: **Phú Thọ:** *Nguyễn Ngọc Trung*, 9A1, *Tạ Đức Thành*, 9A3, THCS Lâm Thao; **Hà Tĩnh:** *Võ Quốc Phòng*, 9B, THCS Xuân Diệu, TTr. Nghèn, Can Lộc; **Bình Định:** *Nguyễn Đồng Tiến*, 8A3, THCS Lương Thế Vinh, TP. Quy Nhơn.

VŨ KIM THỦY

★Bài T6/355. *Cho S là tập hợp gồm 43 phần tử là các số nguyên dương không vượt quá 100. Với mỗi tập con X của S, đặt t_X là tích các phần tử của X. Chứng minh rằng tồn tại hai tập con A, B không giao nhau của S sao cho $t_A t_B^2$ là lập phương của một số tự nhiên.*

Lời giải. (Theo bạn *Vũ Việt Dũng*, 12 Toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, **Hòa Bình**).

Với mỗi tập con X của S ta viết t_X duy nhất dưới dạng $t_X = x^3.m_X$ trong đó $m_X = p_1^{\alpha_1} \dots p_{25}^{\alpha_{25}}$, p_i $(1 \leq i \leq 25)$ là tất cả các số nguyên tố bé hơn 100 và $\alpha_i \in \{0 ; 1 ; 2\}$.

Như vậy có nhiều nhất là 3^{25} giá trị có thể của m_X.

Mặt khác số các tập con khác rỗng của S là $2^{43} - 1$. Vì $2^{43} - 1 > 2^{42} = 4.32^8 > 3^{25}$ nên tồn tại hai tập con khác rỗng A, B của S sao cho $m_A = m_B = k$. Giả sử $t_A = a^3k$; $t_B = b^3k$. Khi đó $t_A t_B^2 = (ab^2k)^3$.

• Nếu $A \cap B = \varnothing$ thì bài toán được giải.

• Nếu $A \cap B \neq \varnothing$ thì đặt $A_1 = A \setminus B$; $B_1 = B \setminus A$ ta có $A_1 \cap B_1 = \varnothing$.

Chú ý rằng mỗi phần tử của $A \cap B$ xuất hiện 3 lần trong tích $t_A t_B^2$ nên $t_A t_B^2 = t_{A_1} t_{B_1}^2 t_{A\cap B}^3$.

Do $t_A t_B^2$ là lập phương của một số tự nhiên nên $t_{A_1} t_{B_1}^2 = \dfrac{t_A t_B^2}{t_{A\cap B}^3}$ cũng phải là lập phương của một số tự nhiên.

(Dễ chứng minh nếu $\sqrt[3]{n}$ là số hữu tỉ thì $n = m^3$).□

Nhận xét. Có ít bạn tham gia giải bài toán này. Các bạn có lời giải tốt là: **Thái Nguyên:** *Nguyễn Hoàng Tùng*, 10 Toán, THPT chuyên Thái Nguyên; **Thanh Hóa:** *Hoàng Đức Ý*, 11A1, THPT Lam Sơn; **Đà Nẵng:** *Nguyễn Như Đức Trung, Nguyễn Như Quốc Trung*, 11A2,THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đà Nẵng; **Đắk Lắk:** *Nguyễn Trọng Nghĩa*, 11CT, THPT chuyên Nguyễn Du.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★Bài T7/355. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{d}+\frac{c}{a}+\frac{d}{b}-\frac{abcd}{(ab+cd)^2},$$

trong đó a, b, c, d là các số thực phân biệt thỏa mãn các điều kiện $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}=4$ *và* $ac = bd$.

Lời giải. Đặt $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{b}{c}$. Ta có x, y là các số khác 1 và từ giả thiết $ac = bd$ ta suy ra $\frac{c}{d}=\frac{b}{a}=\frac{1}{x}$, $\frac{d}{a}=\frac{c}{b}=\frac{1}{y}$. Chú ý nếu $x > 0$ thì $u=x+\frac{1}{x} > 2$, đẳng thức không xảy ra vì $x \neq 1$; nếu $x < 0$ thì $x+\frac{1}{x} \leq -2$ (suy từ bất đẳng thức Cauchy cho hai số: $x^2 + 1 \geq 2|x|$). Tương tự với $v = y + \frac{1}{y}$. Mặt khác, từ giả thiết

$$4 = \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a} = x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$$
$$= \left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(y+\frac{1}{y}\right) = u + v$$

ta suy ra trong hai số x, y có một số dương, một số âm.

Kí hiệu $P = \frac{a}{c}+\frac{b}{d}+\frac{c}{a}+\frac{d}{b}-\frac{abcd}{(ab+cd)^2}$.

Chú ý $\frac{a}{c}=\frac{a}{b}.\frac{b}{c}=xy$, $\frac{b}{d}=\frac{b}{c}.\frac{c}{d}=\frac{y}{x}$,

$\frac{c}{a}=\frac{c}{d}.\frac{d}{a}=\frac{1}{xy}$, $\frac{d}{b}=\frac{a}{b}.\frac{d}{a}=\frac{x}{y}$,

$$\frac{abcd}{(ab+cd)^2}=\frac{abcd}{a^2b^2+2abcd+c^2d^2}=\frac{1}{\frac{ab}{cd}+2+\frac{cd}{ab}}$$
$$=\frac{1}{\left(\frac{b}{c}\right)^2+2+\left(\frac{c}{b}\right)^2}=\frac{1}{\left(y+\frac{1}{y}\right)^2}.$$

Do đó $P = xy + \frac{y}{x} + \frac{1}{xy} + \frac{x}{y} - \frac{1}{\left(y+\frac{1}{y}\right)^2}$

$$= \left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)-\frac{1}{\left(y+\frac{1}{y}\right)^2}$$
$$= uv-\frac{1}{v^2}=(4-v)v-\frac{1}{v^2}.$$

• Nếu $x > 0$, $y < 0$ thì $v \leq -2$, và ta có

$$(4 - v)v - \frac{1}{v^2}-\left((4+2)(-2)-\frac{1}{2^2}\right)$$
$$= (4v+8)-(v^2-4)-\left(\frac{1}{v^2}-\frac{1}{2^2}\right)$$
$$= (v+2)\left(4-(v-2)+\frac{v-2}{4v^2}\right) = (v+2)\left(6-v+\frac{v-2}{4v^2}\right) \leq 0$$

(do $v \leq -2$ nên $v + 2 \leq 0$,

$6 - v + \frac{v-2}{4v^2} > 6 - v + v - 2 = 4 > 0$).

Vậy trong trường hợp này

$$P \le (4+2).(-2) - \frac{1}{2^2} = -\frac{49}{4} \qquad (1)$$

• Nếu $x < 0, y > 0$ thì $u = x + \frac{1}{x} \le -2$ và $v = 4 - u \ge 6$.

Khi đó ta có

$$(4-v)v - \frac{1}{v^2} - \left((4-6)6 - \frac{1}{6^2}\right)$$

$$= (4v-24) - (v^2-6^2) - \left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{6^2}\right)$$

$$= (v-6)\left(4-(v+6)+\frac{v+6}{36v^2}\right) \le 0,$$

(do $v - 6 \ge 0$ và $4-(v+6)+\frac{v+6}{36v^2} = -2-v+\frac{v+6}{36v^2}$

$\le -2-v+\frac{v+6}{36^2} < -2-v+\frac{v+6}{2} = 1-\frac{v}{2}$

$\le 1 - 3 = -2 < 0$). Trong trường hợp này

$$P \le (4-6)6 - \frac{1}{6^2} = -12\frac{1}{36} = -\frac{433}{36} \qquad (2)$$

Từ (1)và (2) ta suy ra giá trị lớn nhất của P bằng $-\frac{433}{36}$ đạt được khi và chỉ khi

$u = x + \frac{1}{x} = -2$ và $v = y + \frac{1}{y} = 6$

$\Leftrightarrow x = -1, y = 3+2\sqrt{2}$ hoặc $y = 3-2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow a = -b, b = (3+2\sqrt{2})c$ hoặc $b = (3-2\sqrt{2})c$,

thí dụ $a = -(3+2\sqrt{2})$, $b = 3+2\sqrt{2}$, $c = 1$, $d = -1$. ❐

Nhận xét. 1) Đây là bài toán tính toán dạng cơ bản và hay. Một số bạn đã phải dùng đạo hàm để khảo sát hàm số $(4-v)v - \frac{1}{v^2}$ trên miền xác định $(-\infty, -2) \cup (6, +\infty)$. Cách giải trên của chúng ta là theo phương pháp "Phân tích thành nhân tử".

2) Các bạn sau có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Đỗ Thị Tuyết*, 10A6, *Nguyễn Hải Hà, Nguyễn Hoàng Hải, Nguyễn Huy Hoàng, Khổng Hoàng Thao, Văn Mạnh Tuấn, Mạc Thế Trường, Trần Quang Sự*, 10A1, *Nguyễn Tiến Dũng*, 11A10, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hải Dương:** *Nguyễn Thanh Tú*, 10A1, THPT Kẻ Sặt, Bình Giang; **Thái Bình:** *Nguyễn Tiến Hưởng*, 10A1, THPT Quỳnh Côi, Quỳnh Phụ; **Nghệ An :** *Nguyễn Đức Công*, 10A1, THPT Đô Lương I; **Quảng Bình:** *Đinh Thanh Hà*, 10A1, THPT số 1 Quảng Trạch; **Đắk Lắk:** *Nguyễn Đình Quốc Bảo*, 11CT, THPT Nguyễn Du; **Bình Định:** *Trần Quốc Thuận*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Phú Yên:** *Trần Minh Hoàng*, 11A3, THPT Duy Tân, Tuy Hòa; **Kiên Giang:** *Vũ Đại Nghĩa*, 10T, THPT Huỳnh Mẫn Đạt, TP. Rạch Giá.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★**Bài T8/355.** *1) Cho đa thức $f(x)$ có bậc n với các hệ số thực và hệ số bậc cao nhất bằng a. Giả sử $f(x)$ có n nghiệm phân biệt $x_1, x_2, ..., x_n$ khác 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{(-1)^{n-1}}{ax_1x_2...x_n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k^2 f'(x_k)}.$$

2) Có tồn tại hay không một đa thức $f(x)$ bậc n lẻ với hệ số bậc cao nhất $a = 1$ mà $f(x)$ có n nghiệm phân biệt $x_1, x_2, ..., x_n$ khác 0 thỏa mãn

$$\frac{1}{x_1f'(x_1)} + \frac{1}{x_2f'(x_2)} + ... + \frac{1}{x_nf'(x_n)} + \frac{1}{x_1x_2...x_n} = 0?$$

Lời giải. (Theo đa số các bạn).

1) Ta viết $f(x)$ dưới dạng $f(x) = a\prod_{k=1}^{n}(x-x_k)$.

Đặt $f(x) = (x-x_k)f_k(x)$ thì

$$f_k(x) = a\prod_{i=1, i\ne k}^{n}(x-x_i),\ k = 1, 2, ..., n$$

và $f_k(x) = ax^{n-1} - a\left(\sum_{i=1, i\ne k}^{n} x_i\right)x^{n-2} + ...$

$+ (-1)^{n-1}a\frac{x_1x_2...x_n}{x_k}$.

Ta có $f'(x) = f_k(x) + (x-x_k)f_k'(x)$, $f'(x_k) = f_k(x_k)$, $f_k(x_j) = 0$ khi $k \ne j$.

Xét đa thức $P(x) := \sum_{k=1}^{n}\frac{f_k(x)}{f_k(x_k)} - 1$.

Ta thấy bậc của đa thức $P(x)$ nhỏ hơn n và $P(x_1) = P(x_2) = ... = P(x_n) = 0$ nên $P(x) \equiv 0$. Hệ số tự do trong khai triển $P(x)$ là

$$0 = a_0 = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-1}a\frac{x_1x_2...x_n}{x_kf'(x_k)} - 1.$$

Do đó $\frac{(-1)^{n-1}}{ax_1x_2...x_n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_kf'(x_k)}$ (1)

Xét hệ số bậc nhất của $P(x)$, ta có

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k^2 f'(x_k)}\left(\sum_{i=1,\, j=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)=0$$

hay $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k^2 f'(x_k)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k f'(x_k)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có ngay đpcm.

2) Giả sử tồn tại đa thức $f(x)$ bậc n lẻ với hệ số bậc cao nhất $a = 1$ mà $f(x)$ có n nghiệm thực phân biệt $x_1, x_2, ..., x_n$ khác 0 và thỏa mãn

$$\frac{1}{x_1 f'(x_1)}+\frac{1}{x_2 f'(x_2)}+...+\frac{1}{x_n f'(x_n)}+\frac{1}{x_1 x_2 ... x_n}=0$$

Theo (1) thì $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k f'(x_k)}=\frac{1}{x_1 x_2 ... x_n}$.

Dẫn đến $\frac{2}{x_1 x_2 ... x_n} = 0$ (vô lí).

Kết luận: Không tồn tại đa thức thỏa mãn điều kiện bài ra. ❐

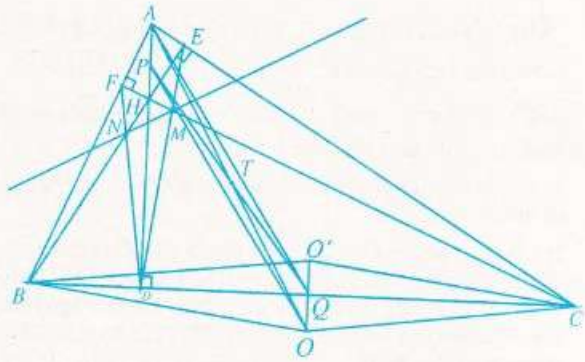
Nhận xét. Đây là một bài toán ứng dụng công thức nội suy Lagrange thuộc dạng không quen thuộc ở bậc phổ thông nên có rất ít bạn tham gia giải. Các bạn đều giải tương tự như cách đã trình bày ở trên. Một số bạn còn mở rộng bài toán theo các hướng khác nhau. Những bạn sau đây có lời giải đúng:

Hòa Bình: *Nguyễn Việt Dũng*, 12T, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ; **Hà Tây:** *Nguyễn Văn Trung*, 11A2, THPT Bình Minh, Đan Phượng, *Nguyễn Bao Sách*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Hải Phòng:** *Lê Trung Hiếu*, *Trần Hoàng Bá*, 11T, THPT NK Trần Phú, TP Hải Phòng; **Thanh Hóa:** *Trịnh Quang Thanh*, 10T, THPT Lam Sơn; **Hà Tĩnh:** *Trần Thế Dũng*, 11/1, THPT Nghèn, Can Lộc; **Bình Định:** *Huỳnh Chí Hiếu*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, *Võ Xuân Thanh*, 12A6, THPT số 2 Tuy Phước; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** *Dương Văn An*, 11A1, THPT Châu Thành, Bà Rịa; **Bến Tre:** *Lê Văn Chánh*, 12T, THPT chuyên Bến Tre.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T9/355. *Giả sử AD, BE, CF là các đường cao và H là trực tâm của tam giác nhọn ABC. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng (DE, CF) và (DF, BE). Chứng minh rằng đường thẳng qua A, vuông góc với đường thẳng MN đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC.*

Lời giải. (Theo bạn *Đinh Ngọc Thái*, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Bà Rịa - Vũng Tàu**).



Giả sử O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC; P, Q lần lượt là trung điểm của AH và BC; T là tâm đường tròn Euler; O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Để giải bài toán ta sử dụng hai kết quả quen thuộc sau (bạn đọc tự chứng minh).

i) $O'Q = \frac{1}{2}AH = AP$;

ii) T là trung điểm của PQ.

Vì O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC nên $\widehat{BOC} = 2(180^o - \widehat{BHC}) = 2\widehat{BAC}$.

Lại vì O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên $\widehat{BO'C} = 2\widehat{BAC}$. Dẫn đến $\widehat{BOC} = \widehat{BO'C}$. Từ đó chứng minh được $\Delta BO'C = \Delta BOC$ (do các tam giác BOC và $BO'C$ đều là các tam giác cân). Suy ra $OQ = O'Q$, mà $O'Q = AP$ (theo i) nên $OQ = AP$. Do đó tứ giác $APOQ$ là hình bình hành. Vì T là trung điểm của đoạn PQ (theo ii), nên T cũng là trung điểm của đoạn OA (1).

Do tứ giác $BFHD$ nội tiếp, nên

$$\mathcal{P}_{N/(BHC)} = \overline{NH}.\overline{NB} = \mathcal{P}_{N/(BFHD)} = \overline{NF}.\overline{ND} = \mathcal{P}_{N/(DEF)}.$$

Đẳng thức này chứng tỏ rằng N thuộc trục đẳng phương của *đường tròn Euler* (đường tròn đi qua ba điểm D, E, F) và *đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC*).

Tương tự ta cũng chứng minh được điểm M thuộc trục đẳng phương của *đường tròn Euler của tam giác ABC* và *đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC*. Nói cách khác, MN là trục đẳng phương của hai đường tròn đó. Suy ra $MN \perp OT$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $OA \perp MN$ (đpcm). ❐

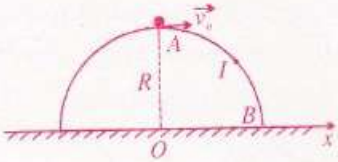
Nhận xét. 1) Có thể giải bài trên nhờ nhận xét rằng A là trực tâm tam giác BHC, từ đó có $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{OC}$. Sau đó chứng minh $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{OA}(\overrightarrow{HN}-\overrightarrow{HM})=0$. Nhiều bạn đã giải bài toán theo hướng này.

2) Ngoài bạn *Thái*, các bạn sau cũng có lời giải tương tự như trên:

Hà Nội: *Nguyễn Tiến Sáng, Nguyễn Chí Công*, 11A2, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; **Hải Phòng:** *Lê Trung Hiếu*, 11 Toán, PTNK Trần Phú; **Thái Nguyên:** *Nguyễn Duy Tùng*, 10 Toán, THPT chuyên Thái Nguyên; **Hòa Bình:** *Vũ Việt Dũng*, 12 Toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, TP. Hòa Bình; **Nghệ An:** *Nguyễn Hữu Hồng Quân*, 10A1, THPT chuyên ĐH Vinh, TP. Vinh; **Đồng Tháp:** *Võ Hoàng Nam*, 11T, THPT TX. Cao Lãnh, TP. Cao Lãnh; **Bình Định:** *Huỳnh Chí Hiếu*, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Quy Nhơn.

HỒ QUANG VINH

Bài L2/355. *Một bán cầu bán kính R trượt đều theo phương ngang với vận tốc $\vec{v}$. Quả cầu nhỏ đặt cách mặt phẳng ngang đoạn bằng R và ngay khi đỉnh bán cầu A đi ngang qua thì nó được ném đi theo phương ngang với vận tốc ban đầu $\vec{v_0}$. Hãy tìm v để quả cầu rơi chạm vào bán cầu trên cung IB (với I là điểm chính giữa của cung AB như hình vẽ).*



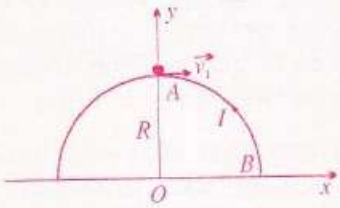
Bỏ qua lực cản của không khí đối với quả cầu. Áp dụng số: R = 80cm; v_0 = 150cm/s; g = 10m/s^2. Xét hai trường hợp:

a) $\vec{v_0}$ cùng phương, ngược chiều với $\vec{v}$.

b) $\vec{v_0}$ cùng phương, cùng chiều với $\vec{v}$.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy gắn với bán cầu như hình bên. Trong hệ quy chiếu gắn với bán cầu vật có vận tốc $\vec{v_1}=\vec{v_0}-\vec{v}$. Phương trình quỹ đạo của vật là $y=R-\dfrac{g}{2v_1^2}x^2$ (1)



Khi vật chạm vào bán cầu thì $x^2+y^2=R^2$ (2)

Để vật chạm vào bán cầu tại một điểm trên cung IB thì x và y phải thỏa mãn hệ điều kiện

$$\begin{cases} \dfrac{R}{\sqrt{2}} \le x \le R \\ 0 \le y \le \dfrac{R}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad (3)$$

Từ hai phương trình (1) và (2) đồng thời để ý đến điều kiện (3) ta có

$$\sqrt{\frac{gR}{2}} \le v_1 \le \sqrt{\frac{gR(1+\sqrt{2})}{2\sqrt{2}}} \quad (4)$$

a) Nếu $\vec{v_0}$ cùng phương ngược chiều với $\vec{v}$ thì $v_1=v_0+v$. Do đó

$$\sqrt{\frac{gR}{2}}-v_0 \le v \le \sqrt{\frac{gR(1+\sqrt{2})}{2\sqrt{2}}}-v_0.$$

Thay số ta được $0,5 \le v \le 1,11$ (m/s).

b) Nếu $\vec{v_0}$ cùng phương cùng chiều với $\vec{v}$ thì $v_1=v_0-v$. Do đó

$$v_0-\sqrt{\frac{gR(1+\sqrt{2})}{2\sqrt{2}}} \le v \le v_0-\sqrt{\frac{gR}{2}}.$$

Thay số ta được $v \le -0,5$ (không thỏa mãn vì v phải có giá trị dương). Trong trường hợp này vật chỉ có thể chạm bán cầu tại một điểm trên cung AI. Như vậy vật sẽ chạm bán cầu tại một điểm trên cung IB nếu $\vec{v_0}$ cùng phương, cùng chiều với $\vec{v}$ và vận tốc v của bán cầu phải thỏa mãn điều kiện $0,5 \le v \le 1,11$(m/s). □

Nhận xét. Các bạn có lời giải tốt:

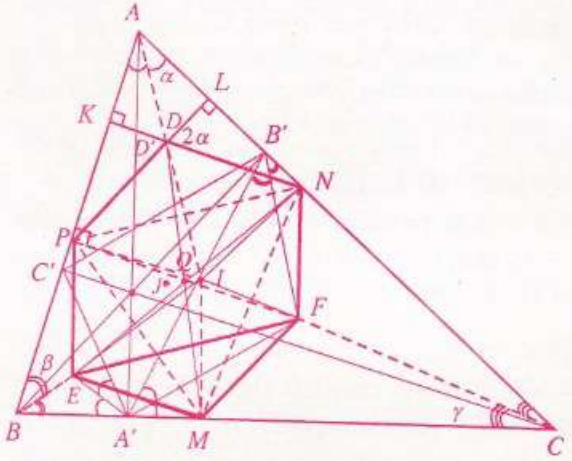
Bắc Ninh: *Nguyễn Hải Đăng*, 11A1, THPT Quế Võ I; **Hà Nội:** *Nguyễn Thế Năng*, 12A1, THPT Nguyễn Tất Thành; **Hải Dương:** *Bùi Tiến Mạnh*, 12A1, THPT Nguyễn Trãi; **Hải Phòng:** *Trần Hoàng Bá*, 11 Toán, THPT NK Trần Phú; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Duy Hùng*, 11F1, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** *Nguyễn Lâm Hoàng*, 10A3, *Nguyễn Tất Nghĩa*, 11A3, THPT chuyên Phan Bội Châu, *Nguyễn Đức Công*, 10A1, THPT Đô Lương I, *Phan Đình Thái*, lớp G, K43, THPT Nghĩa Đàn; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Thanh Long*, 12A10, THPT Nguyễn Huệ, Kì Anh.

NGUYỄN XUÂN QUANG

Giải bài CHÀO IMO 2007 - Đợt 3

★**Bài I–11.** *Gọi A', B' và C' tương ứng là chân các đường cao hạ từ các đỉnh A, B và C của tam giác ABC không vuông. Gọi D, E và F theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác AB'C', BC'A' và CA'B'. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF theo BC = a, CA = b và AB = c.*

Lời giải 1. (Theo *Nguyễn Ngọc Trung*, 9A1, THCS Lâm Thao, **Phú Thọ**).



Đặt $\widehat{BAC} = 2\alpha$, $\widehat{CBA} = 2\beta$ và $\widehat{ACB} = 2\gamma$. Thế thì $0 < \alpha, \beta, \gamma < 90^\circ$ và ta có

$\widehat{C'A'B} = \widehat{CA'B'} = 2\alpha$; $\widehat{A'B'C} = \widehat{AB'C'} = 2\beta$;

$\widehat{B'C'A} = \widehat{BC'A'} = 2\gamma$.

Từ đó $\widehat{EA'B} = \widehat{FA'B'} = \widehat{BAI} = \alpha$, (trong đó I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC) và

$\widehat{A'BE} = \widehat{A'B'F} = \widehat{IBA} = \beta$.

Suy ra $\Delta A'EB \backsim \Delta A'FB' \backsim \Delta AIB$.

Từ đó $\dfrac{A'E}{A'B} = \dfrac{A'F}{A'B'} = \dfrac{AI}{AB}$ (1)

Suy ra $\Delta A'EF \backsim \Delta A'BB'$ (c.g.c) (2)

Từ (1) và (2) ta được $\dfrac{EF}{BB'} = \dfrac{A'E}{A'B} = \dfrac{AI}{AB}$ và từ đó suy ra $EF = \dfrac{BB'}{AB}AI = IA\sin 2\alpha$ (3)

Cũng từ (2) ta thấy

$\widehat{EFA'} = \widehat{BB'A'} = 90^\circ - \widehat{CBA}$ $(= 90^\circ - 2\beta)$.

Từ đó $\widehat{IFE} = \widehat{IFA'} - \widehat{EFA'}$

$= (\gamma + \alpha) - (90^\circ - 2\beta) = \beta = \widehat{CBE}$.

Tương tự ta được $\widehat{IDE} = \widehat{IFE} = \beta$ và $\widehat{IDF} = \widehat{IEF} = \gamma$.

Do đó $\widehat{EDF} = \beta + \gamma$ (4)

(Cũng vậy $\widehat{FED} = \gamma + \alpha$ và $\widehat{DFE} = \alpha + \beta$).

Kí hiệu ρ là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF. Áp dụng định lí sin vào tam giác DEF, từ (3) và (4) ta được

$\rho = \dfrac{EF}{2\sin\widehat{EDF}} = \dfrac{EF}{2\sin(\beta+\gamma)} = \dfrac{IA\sin 2\alpha}{2\cos\alpha}$, hay

$\rho = IA\sin\alpha = r$, trong đó r là bán kính đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC.

Mặt khác $r = \dfrac{S}{p}$, trong đó p và S tương ứng là nửa chu vi và diện tích ΔABC. Từ đó ta được kết quả $\rho = r = \dfrac{S}{p} = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$ (5)

CÔNG TY CỔ PHẦN XNK BÌNH TÂY (BITEX)
Tp.HCM: 110 -112 Hậu Giang P6 Q6; Hà Nội: 128 Bạch Mai Q.Hai Bà Trưng
Nhà phân phối chính thức máy tính CASIO. tại Việt Nam
BITEX
HÂN HẠNH TÀI TRỢ CUỘC THI NÀY

Lưu ý. Lập luận trên vẫn còn đúng cho trường hợp ABC là một tam giác tù (vì định lí sin đúng cho mọi tam giác).

Lời giải 2. Gọi M, N, P lần lượt là tiếp điểm của đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC trên các cạnh BC, CA, AB. Gọi D' là đỉnh thứ tư của hình thoi $NIPD'$ có cạnh bằng $IN = IP = r$ và vuông góc với hai cạnh AB, AC của góc $\widehat{BAC}$. Gọi $K = ND \perp AB$ và $L = PD \perp AC$, ta có $\widehat{ND'L} = \widehat{PD'K} = \widehat{BAC}$ hoặc $\widehat{ND'L} = 180^\circ - \widehat{BAC}$ tùy theo góc $\widehat{BAC}$ nhọn hay tù. Trong cả hai trường hợp ta đều được

$$D'K = D'L = r\left|\cos\widehat{BAC}\right| \qquad (6)$$

Mặt khác $\Delta AB'C' \backsim \Delta ABC$ theo tỉ số $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = k_1 = r\left|\cos\widehat{BAC}\right|$ (vì $0 < k_1 = \pm\cos\widehat{BAC}$ dấu + hay – tùy theo góc $\widehat{BAC}$ là nhọn hay tù). Do đó, nếu gọi r_1 là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác $AB'C'$ thì ta có hệ thức $r_1 = k_1 r$ (7)

Đối chiếu (6) và (7) đồng thời để ý rằng D' nằm trên tia phân giác AI của góc $\widehat{B'AC'}$ ta suy ra D' là tâm đường tròn nội tiếp $\Delta AB'C'$. Nói khác đi là $D' \equiv D$, hay $NIPD$ là một hình thoi. Chứng minh tương tự, $PIME$ và $MINF$ cũng là những hình thoi. Từ đó suy ra $DPEMFN$ là một lục giác (lồi) có tất cả các cạnh bằng nhau (và bằng r) và bất cứ hai cạnh đối diện nào của nó đều bằng nhau và song song với nhau. Và do đó, các đường chéo chính MD, NE và PF của nó đồng quy ở trung điểm chung Q của chúng. Vì vậy lục giác $DPEMFN$ nhận Q làm *tâm đối xứng* nghĩa là: Hai tam giác DEF và MNP là ảnh của nhau trong phép đối xứng – tâm Q, do đó các cạnh tương ứng của chúng song song và bằng nhau. Vì $\Delta DEF = \Delta MNP$ nên bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF bằng bán kính đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC. Vậy $\rho = r = \frac{S}{p}$.

Cuối cùng ta thu được biểu thức (5) tính ρ theo a, b, c như lời giải 1 đã chỉ ra ở trên. □

Nhận xét. 1) Với lời giải 2 chúng ta còn dễ dàng phát hiện thêm tính chất sau đây của tam giác DEF: Tâm Q đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF là trực tâm của tam giác MNP. Chứng minh tính chất này dành cho bạn đọc (xem là một bài tập tiếp theo).

2) Có ít bạn tham gia giải bài toán này, tất cả đều giải đúng và theo hướng tính toán (gần với hướng lời giải 1), trong đó có sử dụng công thức lượng giác về góc chia đôi (hay nhân đôi). Tuy nhiên, một số bạn không để ý đến trường hợp ABC là một tam giác tù. Ngoài bạn *Trung*, các bạn sau đây đều đáng được biểu dương: *Trịnh Ngọc Dương*, 11A1 Toán, ĐHKHTN – ĐHQG **Hà Nội**; *Hoàng Đức Hải*, *Lưu Văn Trung*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, **Nghệ An** và *Từ Đức Phong*, 11C3, THPT Hùng Vương, **Gia Lai**.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

★Bài I–12. *Cho số tự nhiên $n > 6$. Xét tất cả các số tự nhiên nằm trong khoảng $(n(n-1); n^2)$ và nguyên tố cùng nhau với $n(n-1)$. Chứng minh rằng ước chung lớn nhất của tất cả các số tự nhiên đó bằng 1.*

Lời giải. • Trước hết ta chứng minh bổ đề: Với n là số tự nhiên ($n > 6$) luôn tồn tại số tự nhiên nằm trong khoảng $(1; n-1)$ và nguyên tố cùng nhau với n.

Thật vậy

– Nếu n không chia hết cho 5 thì ta chọn số 5 thỏa mãn điều kiện $1 < 5 < n - 1$ và $(n, 5) = 1$.

– Nếu $n \vdots 5$ thì $n = 5^l.k$ với k là số nguyên dương và $(k, 5) = 1$.

Khi $k = 1$ thì ta chọn số 2 thỏa mãn điều kiện $1 < 2 < n - 1$ và $(n, 2) = 1$.

Khi $k > 1$, xét số $m = 5^l + k$ ta có $1 < m < n - 1$ và $(m, n) = 1$.

• Trở lại bài toán. Theo bổ đề, luôn tồn tại số tự nhiên p nhỏ nhất mà $1 < p < n - 1$ và $(p, n) = 1$. Khi đó

$(n^2 - p, n) = (p, m) = 1$;

$(n^2 - p, n - 1) = (p - 1, n - 1)$

và n chia hết cho tất cả các ước nguyên tố của $p - 1$. Từ đó, do $(n, n - 1) = 1$ nên $(n - 1, p - 1) = 1$. Suy ra $(n^2 - p, n(n - 1)) = 1$.

Điều này chứng tỏ luôn tìm được số tự nhiên thuộc khoảng $(n(n - 1) + 1; n^2)$ mà nguyên tố với $n(n - 1)$.

Gọi q là số tự nhiên nhỏ nhất mà $1 < q < n$ sao cho

$$(n(n-1)+q, n(n-1)) = 1.$$

Xét hai số $n(n-1)+1$ và $n(n-1)+q$ có tính chất đều thuộc $(n(n-1); n^2)$ và nguyên tố cùng nhau với $n(n-1)$. Để chứng minh bài toán ta chỉ cần chứng minh

$$(n(n-1)+q, n(n-1)+1 = 1.$$

Gọi $(n(n-1)+q, n(n-1)+1) = d$ thì

$(q-1, n(n-1)+1) = d < q$.

Nếu $d > 1$ thì $(n(n-1)+d, n(n-1))$

$= (d, n(n-1)) = 1$ trái với cách chọn q.

Vậy $d = 1$, tức là

$(n(n-1)+q, n(n-1)+1) = 1$.□

Nhận xét. 1) Giải bài toán số học này một số bạn đã đưa ra những nhận xét thiếu chính xác. Có bạn nhận xét:

"Gọi m là tích của các số nguyên tố nhỏ hơn n và p là số nguyên tố nhỏ nhất không nhỏ hơn n thì $m > p^2$ (!)" Các bạn quên rằng kết luận này chỉ đúng khi số các số nguyên tố nhỏ hơn m không nhỏ hơn 4 (xem bài T8/353).

Có bạn suy luận: Với n chẵn thì $n - 2 = 2^k$ (!)

Có bạn đưa ra khẳng định: Với $n > 6$ thì

$$(n^2 - n + 3, n(n-1)) = 1 \text{ (!)}$$

2) Tuyên dương hai bạn có lời giải tốt:

Đặng Tuấn Anh, Hoàng Đức Hải, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, Vinh, **Nghệ An**.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★Bài I–13. *Hãy tìm tất cả các hàm số f xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$, lấy giá trị trong $\mathbb{R}$, và thỏa mãn hệ thức*

$$f(x-y) + f(xy) = f(x) - f(y) + f(x).f(y) \quad (1)$$

với mọi số thực x, y.

Lời giải. Trong (1) thay $x = y = 0$ ta thấy $2f(0) = f^2(0)$. Suy ra $f(0) = 0$ hoặc $f(0) = 2$. Ta xét hai trường hợp sau.

Trường hợp 1. $f(0) = 0$. Thay $x = 0$ vào (1), thu được $f(-y) = -f(y)$, với mọi $y \in \mathbb{R}$ (2)

Trong (1) thay y bởi $-y$ và để ý đến (2) ta được

$$f(x+y) - f(xy) = f(x) + f(y) - f(x).f(y) \quad (3)$$

Cộng (1) và (3) theo vế, ta đi đến

$$f(x-y) + f(x+y) = 2f(x), \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R} \quad (4)$$

Từ (4) thay $x = y$ và lưu ý đến $f(0) = 0$, ta thu được $f(2x) = 2f(x)$. Vậy (4) trở thành

$$f(x-y) + f(x+y) = f(2x).$$

Từ đây suy ra $f(x+y) = f(x) + f(y)$ (5)

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$

Nghĩa là f là hàm cộng tính trên $\mathbb{R}$. Kết hợp với (3) ta thấy $f(xy) = f(x).f(y)$, với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ (6)

Vậy f là hàm nhân tính trên $\mathbb{R}$. Từ đó các hàm $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện (5) và (6), với $f(0) = 0$ là $f(x) = 0$ và $f(x) = x$.

Trường hợp 2. $f(0) = 2$. Thay $x = 0$ vào (1), ta được $f(-y) + 2 = 2 - f(y) + 2f(y)$,

hay $f(-y) = f(y)$.

Trong (1), thay y bởi $-y$, và lưu ý đến $f(-y) = f(y)$, ta có $f(x+y) + f(xy) = f(x) - f(y) + f(x).f(y)$ (7)

Từ (1) và (7) suy ra $f(x-y) = f(x+y)$, với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Từ đó suy ra f là hàm hằng. Trong trường hợp này ta có nghiệm $f(x) = 2$.

Thử lại, dễ thấy ba hàm số $f(x) = 0$, $f(x) = 2$, $f(x) = x$ là tất cả các hàm cần tìm thỏa mãn đề bài. □

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải tốt:

Hà Nội: *Thiều Quang Quân*, 10A2, khối THPT chuyên, ĐHSP Hà Nội, *Trịnh Ngọc Dương*, 11A1 Toán, khối THPT chuyên ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội; **Hưng Yên:** *Cao Đức Anh*, 11A1, THPT Khoái Châu; **Nam Định:** *Nguyễn Quốc Đại*, 11CT, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Nghệ An:** *Lê Đình Khuê*, 10A1, *Hoàng Đức Hải, Đặng Tuấn Anh*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, Vinh.

HỒ QUANG VINH

★Bài I–14. *Một lớp học có 15 học sinh nam và 15 học sinh nữ. Vào ngày 8 tháng 3, một số học sinh nam đã gọi điện thoại chúc mừng một số học sinh nữ. Biết rằng ta có thể phân chia tất cả các học sinh của lớp một cách duy nhất thành 15 cặp sao cho mỗi cặp đều gồm một học sinh nam và một học sinh nữ mà học sinh nam đó đã gọi điện chúc mừng. Hỏi có tối đa bao nhiêu cuộc điện thoại đã được gọi ?*

Lời giải. Giả sử 15 bạn nam là $a_1, a_2, ..., a_{15}$ và 15 bạn nữ là $b_1, b_2, ..., b_{15}$ cách ghép cặp duy nhất là (a_i, b_i) $(1 \le i \le 15)$. Với mỗi cuộc gọi (a_i, b_j) $(i \ne j)$ $(1 \le i, j \le 15)$ ta cho ứng với tập gồm con hai phần tử $\{i, j\}$. Dễ thấy ứng với mỗi tập con hai phần tử $\{i, j\}$ $(i \ne j)$ này chỉ có không quá 1 cuộc gọi, vì giả sử ứng với $\{i, j\}$ có 2 cuộc gọi (a_i, b_j) và (a_j, b_i) thì ta có cách ghép cặp thứ hai $\{(a_k, b_k) | k \ne i, k \ne j\} \cup \{(a_i, b_j)(a_j, b_i)\}$, đây là điều vô lí.

Như vậy số cuộc gọi không vượt quá

$$15 + C_{15}^2 = 120.$$

Mặt khác, một cách gọi sau đây thỏa mãn các điều kiện đầu bài và nếu như người a_i chỉ gọi cho đúng i người $b_1, b_2, ..., b_i$ $(1 \le i \le 15)$. Cách gọi này cho ta đúng một cách ghép (a_i, b_i) mà thôi, và tổng số các cuộc gọi là $1 + 2 + ... + 15 = \frac{15.16}{2} = 120$. Tóm lại số các cuộc gọi nhiều nhất là 120. ❐

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải chính xác và rõ ràng: **Phú Thọ:** *Nguyễn Ngọc Trung*, 9A1, THCS Lâm Thao; **Nghệ An:** *Hoàng Đức Hải*, 11A1, THPT Phan Bội Châu, Vinh; **Đăk Lăk:** *Trần Như Ngọc*, 10A4, THPT Nguyễn Bỉnh Khiêm, Krông Păk.

VŨ ĐÌNH HÒA

★ **Bài I–15.** *Hãy chỉ ra tất cả các cách tô tất cả các số tự nhiên bởi ba màu xanh, đỏ, vàng sao cho trong mỗi cách tô, các điều kiện sau được đồng thời thỏa mãn:*

1) Mỗi số tự nhiên được tô một màu và mỗi màu được dùng để tô vô số số tự nhiên;

2) Số 2 không được tô màu xanh;

3) Nếu số a được tô màu xanh thì số a+1 được tô màu đỏ hoặc màu vàng.

4) Nếu số a được tô màu đỏ và số b được tô màu vàng thì số a + b được tô màu xanh.

Lời giải: Trong phần trình bày dưới đây, khi nói tới số ta hiểu đó là số tự nhiên.

• Xét một cách tô màu thỏa mãn các điều kiện của đề bài.

Trước hết, từ 3) và 4), bằng phản chứng dễ dàng suy ra hai số liên tiếp không được tô cùng một màu.

Từ 4) và 1), cũng bằng phản chứng, dễ dàng chứng minh được 0 được tô màu xanh. Từ đó suy ra 1 được tô màu đỏ hoặc màu vàng. Không mất tổng quát, giả sử 1 được tô màu đỏ. Khi đó, vì 2 không được tô màu xanh (theo 2)) nên 2 phải được tô màu vàng. Suy ra 3 được tô màu xanh (do 3 = 1 + 2). (*)

Tiếp theo, gọi a là số nhỏ thứ hai được tô màu đỏ (1 là số nhỏ nhất có tính chất vừa nêu). Ta sẽ chứng minh a là số chẵn.

Thật vậy, giả sử ngược lại $a = 2b + 1$, với b là số lớn hơn 1. Khi đó, tất cả các số từ 3 đến $2b - 1$ (kể cả $2b - 1$) không được tô màu đỏ và $2b$ được tô màu xanh. Suy ra $2b - 1$ được tô màu vàng. Dẫn tới $2b - 2$ được tô màu xanh, và do đó $2b - 3$ được tô màu vàng. Tiếp tục quá trình suy luận đó, ta được 4 phải được tô màu xanh, và do đó 3 sẽ không được tô màu xanh (do 3)), mâu thuẫn với (*). Mâu thuẫn nhận được cho ta điều muốn chứng minh.

Đặt $q = a - 1$. Hiển nhiên, mỗi số n được biểu diễn duy nhất dưới dạng $n = kq + r$, với $0 \le r < q$. Bằng quy nạp theo k, dễ dàng chứng minh được rằng:

– Tất cả các số $n = kq + r$, mà $r = 0$ hoặc r là số lẻ khác 1, đều được tô màu xanh;

– Tất cả các số $n = kq + 1$ đều được tô màu đỏ;

– Tất cả các số $n = kq + r$, mà r là số chẵn khác 0, đều được tô màu vàng.

• Ngược lại, tô tất cả các số tự nhiên theo cách sau:

– Tô màu xanh tất cả các số $n = kq + r$, $0 \le r < q$, mà $r = 0$ hoặc r là số lẻ khác 1;

– Tô màu đỏ (hoặc vàng) tất cả các số $n = kq + 1$;

(Xem tiếp trang 10)

Đây là đợt cuối cùng của cuộc thi *Chào IMO 2007*. Mời các bạn đón xem kết quả cuộc thi trong số 360 (6.2007)

Kết quả kì thi chọn học sinh giỏi Quốc gia MÔN TOÁN THPT năm học 2006-2007

Kì thi chọn học sinh giỏi Quốc gia môn Toán THPT năm học 2006–2007 được tiến hành vào ngày 8/2/2007. Tham dự kì thi này có 399 học sinh. Năm nay quy chế thi học sinh giỏi có thay đổi, trong ngày thi mỗi thí sinh phải làm 7 bài toán trong thời gian là 180 phút. Điểm tối đa cho bài thi là 20 điểm.

Căn cứ vào Quy chế thi chọn học sinh giỏi Quốc gia và căn cứ điểm thi của các thí sinh, Hội đồng thi chọn học sinh giỏi Quốc gia THPT năm học 2006–2007 đã quyết định trao giải cho 41 thí sinh. Tỉ lệ thí sinh đoạt giải là 10,28%. Cụ thể như sau:

GIẢI NHẤT. (2 giải)

Nguyễn Xuân Thọ (THPT chuyên Vĩnh Phúc); *Đỗ Phương Đông* (PTNK – ĐHQG TP. Hồ Chí Minh).

GIẢI NHÌ. (7 giải)

Nguyễn Xuân Chương (THPT chuyên Vĩnh Phúc); *Trương Xuân Nhã* (THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị); *Phạm Duy Tùng, Đỗ Xuân Bách* (Khối THPT chuyên ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội); *Hoàng Phúc Hưng* (PTNK – ĐHQG TP. Hồ Chí Minh); *Võ Hoàng Hải* (THPT chuyên Bến Tre); *Đỗ Đình Thọ* (THPT chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương).

GIẢI BA. (7 giải)

Vũ Hữu Tiệp (THPT chuyên Thái Bình); *Đỗ Đức Hòa* (THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định); *Nguyễn Tiến Cường, Phạm Thanh Huyền* (PTNK Trần Phú, Hải Phòng); *Lê Ngọc Sơn* (THPT chuyên Bắc Giang); *Vũ Văn Tân* (THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa); *Nguyễn Hữu Kiên* (Khối THPT chuyên ĐHSP Hà Nội).

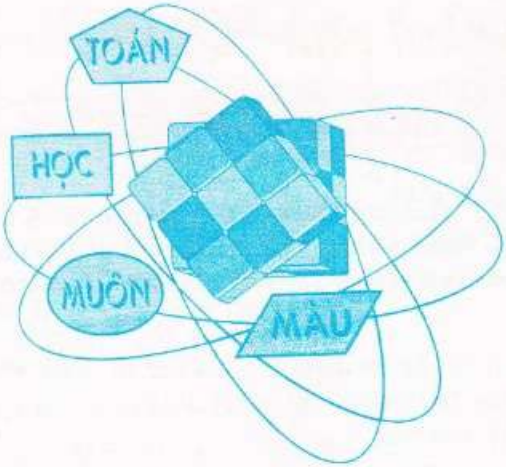
GIẢI KHUYẾN KHÍCH (25 giải)

Đặng Ngọc Thanh (THPT chuyên Quảng Bình); *Đinh Xuân Thực* (THPT chuyên Lương Văn Tụy, Ninh Bình); *Vũ Đình Quyền, Trương Ngọc Sơn, Phạm Thành Thái* (THPT chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương); *Phạm Văn Trường, Lã Vĩnh Hòa* (THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Tây); *Lê Đức Quang, Trần Hoàng Giang* (THPT chuyên Nguyễn Du, Đắk Lắk); *Lê Trung Thành* (THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa); *Đỗ Ngọc Tuấn, Hà Minh Tuấn* (Khối THPT chuyên ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội); *Đỗ Tuấn Hoàng Anh* (PTNK – ĐHQG TP. Hồ Chí Minh); *Nguyễn Trung Kiên* (THPT chuyên Thái Nguyên); *Hoàng Thị Thúy Hồng* (THPT chuyên Vĩnh Phúc); *Lê Hữu Điền Khuê, Huỳnh Đình Tuân* (Trường Quốc học Huế); *Trần Thanh Hải*, (Khối THPT chuyên ĐHSP Hà Nội); *Nguyễn Bá Tiến Thành*, (THPT chuyên Hùng Vương, Gia Lai); *Nguyễn Viết Xuân* (THPT chuyên Hà Nam); *Nguyễn Thành Hải* (THPT chuyên Bắc Giang); *Nguyễn Ngọc Khôi* (THPT chuyên Bắc Ninh); *Đào Đức Chính* (THPT Hà Nội – Amsterdam); *Nguyễn Nhật Linh* (THPT chuyên Hà Tĩnh); *Vũ Ngọc Đào* (THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định).

Năm nay, tất cả các thí sinh đoạt giải đều được dự thi chọn Đội tuyển Olympic Toán Quốc tế 2007. Sáu thí sinh sau đây đã được chọn vào Đội tuyển:

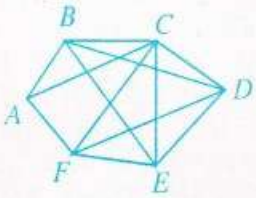
1) *Nguyễn Xuân Chương*, lớp 12, THPT chuyên **Vĩnh Phúc**;
2) *Đỗ Xuân Bách*, lớp 12, Khối THPT chuyên ĐHKHTN - ĐHQG **Hà Nội**);
3) *Phạm Duy Tùng*, lớp 11, Khối THPT chuyên ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội;
4) *Lê Ngọc Sơn*, lớp 11, THPT chuyên **Bắc Giang**;
5) *Phạm Thành Thái*, lớp 12, THPT chuyên Nguyễn Trãi, **Hải Dương**;
6) *Đặng Ngọc Thanh*, lớp 12, THPT chuyên **Quảng Bình**.

(Nguồn: Bộ Giáo dục và Đào tạo)



Phân chia một đa giác theo đường chéo

Trên hình 1 nếu vẽ 6 đường chéo của một lục giác lồi $ABCDEF$ thì phân chia được miền lục giác đó thành 14 miền đa giác rời nhau (không kể biên). Nếu bỏ hai đường chéo BE, CF và vẽ hai đường chéo AE, BF thì chỉ được 13 miền đa giác rời nhau.



Hình 1

Dành cho bạn đọc

1) Hãy vẽ 10 đường chéo của một đa giác đều 24 cạnh để phân chia miền đa giác đó thành 53 miền đa giác rời nhau.

2) Chứng minh rằng nếu vẽ 10 đường chéo của một đa giác lồi 24 cạnh thì không thể phân chia miền đa giác đó thành nhiều hơn 56 miền đa giác rời nhau.

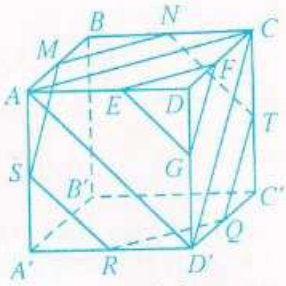
Giải đáp bài: Thiết diện của hình lập phương

(Đề đăng trên THTT số 355 tháng 1.2007).

1) • Tại đỉnh D của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ nếu vẽ mặt phẳng (P) song song (hoặc trùng) với mặt phẳng (ACD') ta được thiết diện EFG là tam giác đều (h. 2) do áp dụng định lí Thalès:

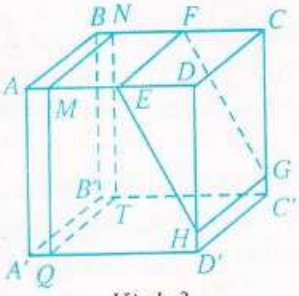
$$\frac{EF}{AC}=\frac{FG}{CD'}=\frac{EG}{AD'}.$$

• Nếu mặt phẳng (P) đi qua trung điểm của các cạnh AB, BC, CC', $C'D'$, $D'A'$, $A'A$ ta được lục giác đều $MNTQRS$ (h. 2), mỗi cạnh bằng $\frac{AC}{2}$.



Hình 2

• Nếu mặt phẳng (P) song song (hoặc trùng) với mặt $ABB'A'$ thì được thiết diện là hình vuông $MNTQ$ (h. 3).

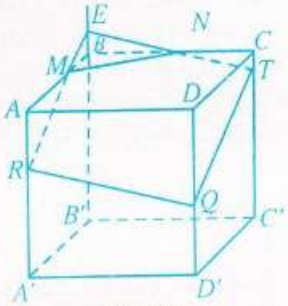


Hình 3

Nếu mặt phẳng (P) song song với cạnh AB và cắt các cạnh AD, BC, CC', DD' theo thứ tự tại E, F, G, H sao cho $EF = EH$ thì được thiết diện $EFGH$ là hình vuông (h.3).

Xét tương tự với các đỉnh hoặc cạnh, mặt khác.

2) Nếu mặt phẳng (P) cắt hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ tạo thành một ngũ giác thì mặt phẳng (P) phải cắt 5 cạnh của hình lập phương, do đó tồn tại hai cạnh của ngũ giác thuộc giao tuyến của mặt phẳng (P) với hai mặt đối của hình lập phương, chẳng hạn TQ và MR trên hình 4. Lúc đó $TQ//MR$ và $TQ = ER > MR$ nên ngũ giác $MNTQ$ không thể là ngũ giác đều.



Hình 4

Nhận xét. Một số bạn không nêu được thiết diện hình vuông $EFGH$ hoặc chứng minh hình ngũ giác không đều phá phức tạp.

Các bạn sau có lời giải tốt:

1) *Lê Minh An*, 11A2, THPT Thái Nguyên, TP. **Thái Nguyên**;

2) *Đào Đức Chính*, $12T_1$, THPT Hà Nội - Amsterdam, TP. **Hà Nội**;

3) *Lê Duy Toàn*, 11A11, THPT Lương Đắc Bằng, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa**;

4) *Phan Xuân Minh*, 11A1, THPT Diễn Châu 5, **Nghệ An**.

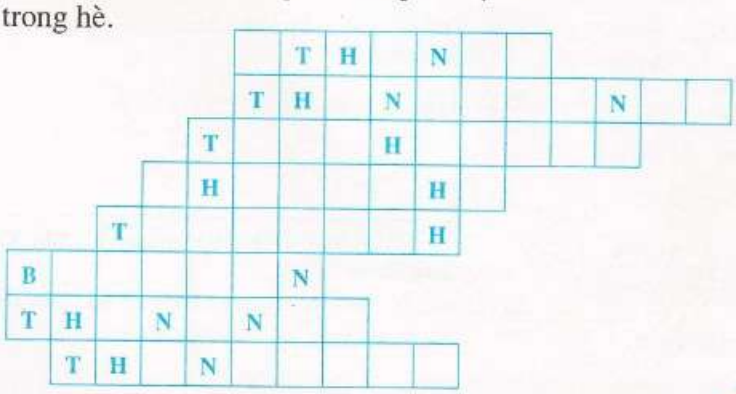
PHI PHI

Câu lạc bộ

Đọc báo trong hè

Trong năm học nhiều bạn bận học đến quên cả đọc báo Toán học và Tuổi trẻ. Còn hè thì sao nhỉ? Chả nhẽ đi học thêm suốt ngày! Chả nhẽ đi chơi suốt tuần, nghỉ xả hơi suốt tháng! Câu lạc bộ kì này đố bạn ô chữ: ĐỌC BÁO TRONG HÈ.

Dòng 1. Ngày Lập hạ năm nay.
Dòng 2. Tháng mà THTT ra đồng thời hai tờ tiếng Việt và tiếng Anh.
Dòng 3. Cuộc thi sẽ có trong hè.
Dòng 4. Đề của cuộc thi trong hè này sẽ...
Dòng 5. Lần đầu tiên hè này THTT sẽ có một số...
Dòng 6. Nơi đặt mua THTT
Dòng 7. Vừa chỉ một tháng, vừa có nghĩa là thời gian nói chung.
Dòng 8. Tháng sẽ công bố kết quả cuộc thi trong hè.



Bạn hãy tìm một cột dọc và giải thích ý nghĩa của nó.

Quà tặng của CLB sẽ dành cho các bạn giải đúng và gửi về sớm (theo dấu bưu điện).

VŨ ĐÔ QUAN

Cuộc thi mới

Toán học vui

Hè này **Toán học và Tuổi trẻ** đem đến cho bạn một cuộc thi mới, vui, bổ ích.

Tên cuộc thi là **Toán học Vui.**

Nội dung: Những bài toán vui ai cũng có thể giải được.

Thời gian: Đề thi sẽ đăng vào tháng 6 tháng 7 này. Đáp án đăng tháng 9 và tháng 10 năm nay.

Mong các bạn nhiệt tình tham gia.

Ngoài phong bì gửi về Tòa soạn các bạn nhớ ghi dòng chữ:

GỬI DỰ THI TOÁN HỌC VUI.

Chỉ gửi về một địa chỉ:

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ
187B Giảng Võ, Hà Nội

BAN TỔ CHỨC

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 359(5.2007)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.5121607, 04.5121606
ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.5144272
Email : toanhoctt@yahoo.com

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN
GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG
TS. NGUYỄN VĂN VỌNG
GS. ĐOÀN QUỲNH
PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Quản trị kiêm
Tổng Giám đốc NXB Giáo dục
NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc kiêm
Tổng biên tập NXB Giáo dục
NGUYỄN QUÝ THAO

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : PGS. TS. PHAN DOÃN THOẠI *Phó Tổng biên tập :* TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC
Thư kí Toà soạn : ThS. VŨ KIM THỦY

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS .TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KHIẾT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. TRẦN HỮU NAM, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHẤT, TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, PGS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG, ThS. HỒ QUANG VINH.

TRONG SỐ NÀY

1 **Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary Schools**
Lê Bá Hoàng – Từ lời giải một bài toán cực trị hình học.

3 Đề thi học sinh giỏi lớp 9 TP. Hồ Chí Minh năm học 2006-2007.

4 Lời giải đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi năm học 2006-2007.

5 **Tin tức – News**
Nextgen Awards 2007 – Cuộc thi Quốc tế về sáng tạo nội dung cho điện thoại di động tại Việt Nam.

6 **Chuẩn bị thi vào đại học – University Entrance Preparation**
Trịnh Tuân – Vận dụng một số tính chất đơn điệu của hàm số để giải toán.

8 **Thử sức trước kì thi** – Đề số 4.

9 Giải đề số 3.

11 **Diễn đàn dạy – học toán – Math Teaching Forum**
Nguyễn Cảnh Toàn - Toán và phi toán.

13 **Toán học và đời sống – Math and Life**
Trần Nam Dũng – Bài toán về vé hạnh phúc.

16 **Đề ra kì này – Problems in This Issue**
T1/359, ..., T12/359, L1/359, L2/359.

18 **Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems**
Giải các bài của số 355.

25 **Giải bài Chào IMO 2007 – Đợt 3**

29 Kết quả kì thi chọn học sinh giỏi Quốc gia môn Toán THPT năm học 2006-2007.

30 **Toán học muôn màu – Multifarious Mathematics**

31 **Câu lạc bộ – Math Club**

Bìa 1: Trường THPT bán công Bùi Thị Xuân, Thừa Thiên - Huế.
Ảnh trên: Thầy hiệu trưởng và thầy trò đội tuyển Toán
Ảnh dưới: Trong hội thi Tiếng hát học sinh.

Biên tập : HỒ QUANG VINH. *Mĩ thuật :* MINH THƠ. *Trị sự, Chế bản :* VŨ ANH THƯ , NGUYỄN THỊ OANH.
Đại diện phía Nam : TRẦN CHÍ HIẾU, 283 Thích Quảng Đức, Thủ Dầu Một, Bình Dương. Tel : 0650.858330

TRÂN TRỌNG GIỚI THIỆU BỘ SÁCH GIÁO KHOA TIN HỌC MỚI

☼ Quyển 1, 2 và 3 dành cho các lớp 3, 4, 5, cấp Tiểu học:

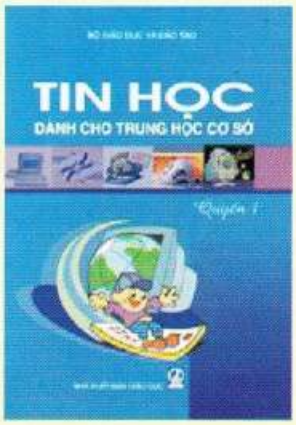
CÙNG HỌC TIN HỌC

Hãy học Tin học để vừa học vừa chơi với máy tính

- Đây là bộ sách Tin học được biên soạn theo chương trình mới nhất do Bộ Giáo dục và Đào tạo ban hành. Ngoài ra, sách còn giới thiệu nhiều phần mềm trò chơi hấp dẫn giúp các em vừa chơi vừa học một cách hiệu quả.
- Bộ sách được thiết kế theo phong cách hiện đại kết hợp với nhiều tranh ảnh minh họa hấp dẫn.
- Nội dung được trình bày phù hợp với lứa tuổi học sinh Tiểu học.

☼ Quyển 1, 2, 3 và 4 dành cho các lớp 6, 7, 8, 9 cấp Trung học cơ sở:

TIN HỌC DÀNH CHO TRUNG HỌC CƠ SỞ



- Đây là bộ sách Tin học được biên soạn theo chương trình mới nhất do Bộ Giáo dục và Đào tạo ban hành, là bộ sách giáo khoa chính thống đầu tiên dành cho lứa tuổi học sinh THCS.
- Bộ sách được thiết kế theo phong cách hiện đại kết hợp với nhiều tranh ảnh minh họa hấp dẫn.
- Nội dung được trình bày phù hợp với lứa tuổi học sinh THCS, trang bị cho các em công cụ để học tốt các môn học khác.

ĐỊA CHỈ LIÊN HỆ:

CÁC ĐƠN VỊ TẬP THỂ ĐẶT MUA SÁCH THEO ĐỊA CHỈ:

❍ Phòng Phát hành Sách giáo khoa, NXB Giáo dục tại TP. Hà Nội, 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT: 04.8562011 Fax: 04.8562493.

❍ Phòng Phát hành Sách giáo khoa, NXB Giáo dục tại TP. Hồ Chí Minh, 231 Nguyễn Văn Cừ, Q.5, TP. HCM.
ĐT: 08.8358423 Fax: 08.8390727.

❍ Phòng Phát hành Sách giáo khoa, NXB Giáo dục tại TP. Đà Nẵng, 15 Nguyễn Chí Thanh, TP. Đà Nẵng.
ĐT: 0511.894504 Fax: 0511.827368.

TRƯỜNG THPT BÁN CÔNG BÙI THỊ XUÂN, THỪA THIÊN - HUẾ

Trường THPT BC Bùi Thị Xuân được thành lập ngày 8/8/1996. Trải qua chặng đường 10 năm, nhà trường đã có những bước phát triển nhanh chóng vững chắc cả về số lượng lẫn chất lượng, đạt được những thành tích đáng phấn khởi trong các hoạt động giáo dục.

Ngày khai giảng năm học đầu tiên, 1996-1997 trường có 12 lớp với hơn 600 học sinh. Đến năm học 2006-2007 trường có 36 lớp với 1650 học sinh.

Năm học 2005-2006, được sự quan tâm của UBND tỉnh Thừa Thiên - Huế, Sở Giáo dục - Đào tạo, trường được tiếp nhận từ Công ti may xuất khẩu Thừa Thiên - Huế, tại 36 Lê Huân khuôn viên với diện tích gần 10000 mét vuông. Nhà trường đang triển khai dự án xây dựng trường với tổng kinh phí 11 tỉ đồng với quy mô nhà trường 48 lớp, khoảng 2400 học sinh. Dự kiến sẽ có đầy đủ phòng học đúng tiêu chuẩn, khu Hiệu bộ, khu học tập của học sinh, nhà đa chức năng phục vụ học TDTT và vui chơi giải trí, hệ thống sân vườn đảm bảo môi trường xanh, sạch, đẹp. Hiện nay đã hoàn thành dự án giai đoạn 1 với tổng kinh phí gần 5 tỉ đồng, đưa vào sử dụng 24 phòng học. Đã xây dựng 2 phòng tin học với 50 máy, nối mạng Internet, 2 phòng công nghệ thông tin với trang thiết bị hiện đại, đưa môn Tin học vào dạy chính khóa cho học sinh toàn trường. Các phòng học bộ môn đang từng bước được đầu tư theo hướng hiện đại và đồng bộ. Thư viện nhà trường là thư viện đạt chuẩn với hàng chục ngàn đầu sách.

Mười năm qua đã có 191 giáo viên tham gia giảng dạy tại trường, nhiều thầy cô giáo đã trở thành những cán bộ quản lí, những giáo viên giỏi của ngành. Từ 60 thầy cô giáo ngày đầu đến nay, đội ngũ giáo viên của trường ngày càng lớn mạnh. Toàn trường có 97 giáo viên, trong đó có 1 tiến sĩ, 7 thạc sĩ, 10 giáo viên đang theo học thạc sĩ và nhiều giáo viên giỏi. Nhờ uy tín về đội ngũ giáo viên, chất lượng toàn diện của trường ngày càng được nâng cao và ổn định.

Cùng với sự quan tâm đầu tư, tuyển chọn xây dựng, giỏi hóa và trẻ hóa đội ngũ giáo viên, nhà trường tập trung xây dựng kỉ cương nền nếp học đường.

Qua mười năm phấn đấu và trưởng thành với mục tiêu "Mở rộng quy mô, nâng cao chất lượng, phát huy hiệu quả". Trường THPT BC Bùi Thị Xuân không ngừng lớn mạnh, trở thành một địa chỉ tin cậy được phụ huynh học sinh đánh giá là "Trường có thầy giỏi, trò ngoan, kỉ luật nghiêm, chất lượng tốt".

Ông Ngô Hòa, Phó Chủ tịch UBND tỉnh Thừa Thiên-Huế trao Bằng khen cho đại diện nhà trường, hiệu trưởng Dư Văn Đức (bên trái)

MỘT SỐ KẾT QUẢ ĐẠT ĐƯỢC CỦA TRƯỜNG:

- 10 năm liên tục (1996-2006) đạt danh hiệu Trường tiên tiến, 3 năm được UBND tỉnh tặng Bằng khen.
- 2 học sinh đoạt giải trong kì thi học sinh giỏi Quốc gia.
- 11 học sinh đoạt giải học sinh giỏi cấp tỉnh.
- Tỉ lệ tốt nghiệp THPT hàng năm trung bình đạt 95%.
- 25-30% học sinh thi đỗ vào các trường Đại học, Cao đẳng và Trung học chuyên nghiệp.
- Đoàn TNCS Hồ Chí Minh nhiều năm liền được Trung ương Đoàn, Tỉnh Đoàn tặng Bằng khen, Thành Đoàn Huế tặng Cờ thi đua xuất sắc.

Phát huy truyền thống mười năm xây dựng và phát triển, với sự nỗ lực phấn đấu của thầy, trò và sự quan tâm của các cấp lãnh đạo, trường THPT BC Bùi Thị Xuân đang nâng cao chất lượng toàn diện, xây dựng nhà trường trở thành trường đạt chuẩn quốc gia.

ISSN : 0866-8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT61M7
Giấy phép XB số 67/GP-BVHTT cấp ngày 15.6.2004
In tại Công ty CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ, Hà Nội
In xong và nộp lưu chiểu tháng 5 năm 2007
Giá : 5000 đồng
Năm nghìn đồng