https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ❊ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Toán học & Tuổi trẻ

2
2000

SỐ 272 - NĂM THỨ 37 - TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG

Sở GDĐT

BIỂU TƯỢNG
Năm 2000 - năm Toán học thế giới

BÙI MINH MẪN
Trường THPT chuyên Hùng Vương (Phú Thọ)
Giải thưởng Lê Văn Thiêm 1999

Những gương mặt, những tấm lòng dành cho *Toán học và Tuổi trẻ*

PSG.PTS TRẦN THÚC TRÌNH sinh ngày 25.10.1930, quê ở Quỳnh Lưu, Nghệ An, dạy toán ở trường cấp 2 Quỳnh Lưu, ở Đại học Sư phạm Vinh rồi công tác tại Viện Khoa học Giáo dục đến năm 1991, bảo vệ luận án PTS năm 1973 tại Liên Xô, được phong Phó Giáo sư năm 1984, tham gia bồi dưỡng học sinh thi Toán Quốc tế, đào tạo thạc sĩ và nghiên cứu sinh. Trong thập kỉ 90 ông đã có nhiều bài đăng trên tạp chí Toán học và Tuổi trẻ. Ông hằng mong tạp chí có nhiều bài về ứng dụng của toán học, khơi dậy tiềm năng dồi dào của tuổi trẻ nước nhà.

PGS.PTS ĐÀO TAM sinh ngày 06.12.1945 quê tại Song Lộc, Can Lộc, Hà Tĩnh, tốt nghiệp Đại học Sư phạm Hà Nội 1 năm 1967, dạy học tại khoa Toán ĐHSP Vinh, bảo vệ PTS năm 1981 tại trường ĐHSP Lê Nin - Matxcova, LB Nga. Từ 1986 đến 1994 Chủ nhiệm khối Phổ thông chuyên toán ĐHSP Vinh. Hiện nay ông là Chủ nhiệm bộ môn Phương pháp dạy học Toán, Chủ nhiệm chuyên ngành đào tạo nghiên cứu sinh phương pháp dạy học Toán tại ĐHSP Vinh, Phó chủ tịch Hội Giảng dạy Toán học phổ thông.

Nhà giáo NGUYỄN HỮU THẢO sinh ngày 16.06.1942, quê xã Hữu Bằng, Thạch Thất, Hà Tây, tốt nghiệp Đại học Sư phạm Hà Nội năm 1963, tốt nghiệp Đại học Bách khoa năm 1976, là giáo viên toán và sau đó là Hiệu trưởng trường cấp 3 thị xã Nghĩa Lộ, công tác tại Ban Tuyên giáo tỉnh Nghĩa Lộ rồi về làm chuyên viên phụ trách Chuyên Toán THCS và chỉ đạo toán THCS thuộc Vụ Trung học phổ thông, Bộ GD-ĐT, đồng tác giả một số cuốn sách Toán sơ cấp và là cộng tác viên của THTT. Ông coi THTT như người bạn gần gũi, thân thiết của mình, qua đó có thể biết nhiều mẩu chuyện, nhiều bài toán bổ ích, những lời giải thông minh của nhiều bạn trẻ.

Thạc sĩ VŨ QUỐC LƯƠNG sinh ngày 25.02.1953 quê tại Năng An, Bình Giang, Hải Dương, tốt nghiệp Đại học Sư phạm 1973, Đại học Tổng hợp 1979, thạc sĩ chuyên ngành Giải tích năm 1998, đã dạy học tại THCS Nguyễn Công Trứ, giáo vụ Toán tại Phòng GD Ba Đình và từ 1977 đến nay dạy các lớp chuyên, chọn tại trường THCS Chu Văn An, Hà Nội, là đồng tác giả 5 cuốn sách Toán sơ cấp, là cộng tác viên của THTT. Nghĩ về tạp chí ông cho rằng THTT tập hợp được một khối lượng đồ sộ các đề toán hay, các bài viết công phu, có giá trị về mặt suy luận, nghiên cứu toán sơ cấp và lịch sử toán nên luôn là niềm say mê của thầy và trò.

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

Toán học và Tuổi trẻ
Mathematics and Youth

Năm thứ 37
Số 272 (2-2000)
Tòa soạn : 57 Giảng Võ, Hà Nội
ĐT : 04.5142648-04.5142650
FAX: (84).4.5142648

Tổng biên tập :
NGUYỄN CẢNH TOÀN

Phó tổng biên tập :
NGÔ ĐẠT TỨ
HOÀNG CHÚNG

Hội đồng biên tập :

NGUYỄN CẢNH TOÀN, HOÀNG CHÚNG, NGÔ ĐẠT TỨ, LÊ KHẮC BẢO, NGUYỄN HUY ĐOAN, NGUYỄN VIỆT HẢI, ĐINH QUANG HẢO, NGUYỄN XUÂN HUY, PHAN HUY KHẢI, VŨ THANH KHIẾT, LÊ HẢI KHÔI, NGUYỄN VĂN MẬU, HOÀNG LÊ MINH, NGUYỄN KHẮC MINH, TRẦN VĂN NHUNG, NGUYỄN ĐĂNG PHẤT, PHAN THANH QUANG, TẠ HỒNG QUẢNG, ĐẶNG HÙNG THẮNG, VŨ DƯƠNG THỤY, TRẦN THÀNH TRAI, LÊ BÁ KHÁNH TRÌNH, NGÔ VIỆT TRUNG, ĐẶNG QUAN VIỄN

Trưởng Ban biên tập :
NGUYỄN VIỆT HẢI

Thư ký Tòa soạn :
LÊ THỐNG NHẤT

Thực hiện :
VŨ KIM THỦY

Trị sự :
VŨ ANH THƯ

Trình bày :
NGUYỄN THỊ OANH

Đại diện phía Nam :
TRẦN CHÍ HIẾU
231 Nguyễn Văn Cừ,
TP Hồ Chí Minh
ĐT : 08.8323044

TRONG SỐ NÀY

2 **Dành cho Trung học cơ sở - For Lower Secondary Schools**
Nguyễn Ngọc Bình Phương - Một hằng đẳng thức đẹp

3 *Ngô Việt Trung* - Bác sĩ Lê Đình Thám học toán

4 Giải thưởng Lê Văn Thiêm 1999

Tiếng Anh qua các bài toán – English through Math Problems – *Ngô Việt Trung*

5 *Đặng Hùng Thắng* - Hướng dẫn giải đề thi học sinh giỏi toán quốc gia THPT năm 1998-1999

7 *Lê Thống Nhất* - Hướng dẫn giải đề thi tuyển sinh vào đại học Huế năm 1999

9 **Tìm hiểu sâu thêm toán học sơ cấp - Advanced Elementary Mathematics**
Quách Giang - Điểm bất động của hàm số và ứng dụng

10 *Lê Văn Quang* - Họ bài toán

12 **Đề ra kì này – Problems in this Issue**
T1/272, ..., T10/272, L1,L2/272

14 **Giải bài kì trước – Solutions of Previous Problems**
Giải các bài của số 268

23 **Trả lời bạn đọc - Correspondence**

24 **Câu lạc bộ – Math Club**
Kết quả đầu tiên của cuộc chơi "Gặp nhau qua ngày sinh"
Tin nhanh về thi thơ và câu đối
Sai lầm ở đâu ? *KIHIVI* - Thật là dễ sai

Bìa 1 : - Chủ tịch nước Trần Đức Lương thăm trường Quốc học Huế
- Ban Giám hiệu và Đội tuyển học sinh giỏi Toán lớp 12 năm học 1999-2000 của trường Quốc học Huế

Bìa 2 : Những gương mặt, những tấm lòng dành cho Toán học và Tuổi trẻ

Bìa 3 : *L.T.N* - Dùng đổi biến kiểu này nhanh thật
Giải trí toán học - Math Recreation
Bình Phương - Giải đáp bài "Di chuyển như thế nào ?"
Lê Quốc Hán - Dựng tiếp tuyến

Bìa 4 : Trường THPT Quốc học Huế

Dành cho các bạn
TRUNG HỌC CƠ SỞ

MỘT HẰNG ĐẲNG THỨC ĐẸP

NGUYỄN NGỌC BÌNH PHƯƠNG
(Cai Lậy, Tiền Giang)

Hằng đẳng thức sau nhiều bạn đã biết

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc =$

$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

Từ đó suy ra

a) $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b+c=0 \\ a=b=c \end{array}\right.$

b) $x + y + z \geq 3\sqrt{xyz}$ nếu x, y, z là các số không âm.

Sau đây ta xét một số bài toán vận dụng hằng đẳng thức này.

Bài 1. Trục căn thức ở mẫu số của biểu thức

$$A = \frac{1}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}}$$

Hướng dẫn. Áp dụng hằng đẳng thức, chỉ cần nhân cả tử và mẫu của biểu thức với

$\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{c^2} - \sqrt[3]{ab} - \sqrt[3]{bc} - \sqrt[3]{ca}$

ta được mẫu thức là $(a+b+c)^3 - 27abc$.

Bài 2. Chứng minh rằng nếu $x+y+z = 0$ thì

$2(x^5+y^5+z^5) = 5xyz(x^2+y^2+z^2)$

Giải.

$x+y+z = 0 \Rightarrow x^3+y^3+z^3 = 3xyz$

$(x^3+y^3+z^3)(x^2+y^2+z^2) = 3xyz(x^2+y^2+z^2)$

$\Leftrightarrow x^5+y^5+z^5 + x^2y^2(x+y) + y^2z^2(y+z) + z^2y^2(z+x)$

$= 3xyz(x^2+y^2+z^2)$

$\Leftrightarrow x^5+y^5+z^5 - xyz(xy+yz+xz) = 3xyz(x^2+y^2+z^2)$

$\Leftrightarrow x^5+y^5+z^5+xyz \cdot \dfrac{x^2+y^2+z^2}{2} = 3xyz(x^2+y^2+z^2)$

$\Leftrightarrow 2(x^5+y^5+z^5) = 5xyz(x^2+y^2+z^2)$

Bài 3. Giải phương trình

$(x-3)^3 + (x+1)^3 = 8(x-1)^3$ (*)

Giải.

Vì $(a-b) + (b-c) + (c-a) = 0$ nên

$(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 = 3(a-b)(b-c)(c-a)$

(*) $\Leftrightarrow [(3x+3)-(2x+6)]^3 + [(2x+6)-(x+5)]^3 +$
$+ [(x+5)-(3x+3)]^3 = 0$

$\Leftrightarrow 3(x-3)(x+1)(-2x+2) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$

Tập nghiệm $S = \{3, -1, 1\}$.

Bài 4. Giải và biện luận phương trình $ax^3+bx+c = 0$ với điều kiện $\dfrac{c^2}{a^2} + \dfrac{4b^3}{27a^3} \geq 0$ $(a \neq 0)$

Giải. $ax^3 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^3 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a} = 0$

$\Leftrightarrow x^3 + \dfrac{c}{a} - 3x \cdot \dfrac{-b}{3a} = 0.$

$\Leftrightarrow x^3+d^3+e^3-3xde = 0$ (với d^3, e^3 là 2 nghiệm của phương trình $X^2 - \dfrac{c}{a}X - \dfrac{b^3}{27a^3} = 0$).

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+d+e=0 \\ x=d=e \end{array}\right.$

• Nếu $\dfrac{c^2}{a^2} + \dfrac{4b^3}{27a^3} = 0 \Leftrightarrow d = e$ thì tập nghiệm $S = \{-2d, d\}$

• $\dfrac{c^2}{a^2} + \dfrac{4b^3}{27a^2} > 0 \Leftrightarrow d \neq e$ thì tập nghiệm $S = \{-d - e\}$.

Bài 5. Chứng minh rằng nếu $x^n + y^n + z^n = a^n + b^n + c^n$ đúng với $n = 1, 2, 3$ thì nó cũng đúng với mọi số tự nhiên n.

Giải. Với $n = 1, 2$ ta có

$$\begin{cases} x+y+z = a+b+c \\ x^2+y^2+z^2 = a^2+b^2+c^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow (x+y+z)^2 = (a+b+c)^2$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) =$

$= a^2+b^2+c^2 + 2(ab+bc+ca)$

$\Rightarrow xy+yz+zx = ab+bc+ca$

Với $n = 3$ ta có $x^3+y^3+z^3 = a^3+b^3+c^3$

$\Rightarrow (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) + 3xyz =$

$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) + 3abc$

$\Rightarrow xyz = abc$

Do đó x, y, z là nghiệm của phương trình

$X^3 - (a+b+c)X^2 + (ab+bc+ca)X - abc = 0$

$\Leftrightarrow (X-a)(X-b)(X-c) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X=a \\ X=b \\ X=c \end{array}\right.$

BÁC SĨ LÊ ĐÌNH THÁM HỌC TOÁN

Bác sĩ Lê Đình Thám (1897–1969) sinh ra trong một gia đình Nho học tại xã Điện Quang, huyện Điện Bàn, tỉnh Quảng Nam. Ông là người đã có công chấn hưng lại nền Phật giáo Việt Nam (thành lập An Nam Phật học hội và các tỉnh hội Phật giáo, tổ chức các lớp Phật học và lễ Phật Đản đầu tiên). Trong kháng chiến ông đã từng được cử làm Chủ tịch Ủy ban kháng chiến hành chính miền Nam Trung bộ. Hòa bình lập lại ông làm Chủ tịch Ủy ban bảo vệ hòa bình thế giới của Việt Nam. Anh ruột ông là Lê Đình Dương tham gia tổ chức cuộc khởi nghĩa Duy Tân, bị đưa đi đày và chết ở Buôn Ma Thuột. Thành phố Đà Nẵng có hai đường phố mang tên Lê Đình Dương và Lê Đình Thám. THTT giới thiệu mẩu truyện cũ sau đây, trích từ bài "Dưới mái tranh trường Quốc học, 1906–1911" của ông Lê Thanh Cảnh đăng trong tập Đặc san ái hữu Quốc học II. Mẩu truyện này cho thấy những học sinh Việt Nam đầu tiên theo Tây học đã có năng khiếu học toán như thế nào.

Trò Lê Đình Thám có thiên tài đặc biệt về Toán học. Một hôm thầy Henri le Bris, gần đến giờ ra về, lật đật mở sách toán ra cho học trò một phương trình đại số để tuần sau sẽ chấm điểm. Đến ngày chấm cả lớp đều chịu, không ai giải được. Hỏi trò Thám có làm được chăng, trò chỉ cười :"Khó mà anh em đã không làm được thì mình cũng bó tay". Thầy Le Bris trịnh trọng cầm phấn tiến lên bảng đen để diễn giải phương trình giải đáp. Nhưng thầy loay hoay hoài, cứ lính quýnh chẳng tìm ra bí quyết. Trò Thám rúc rích cười nụ là mình đã tìm được mà thày phải "cua tay". Thầy Le Bris bắt đầu đỏ tai, sau thầy xin lỗi học trò cho thầy về suy nghiệm một hôm rồi đến mai xin giải đáp. Đúng khi ấy trò Thám đứng lên đưa tay cao nói : "Tôi xin lên bảng đen tìm ngay giải đáp". "Xin mời lên !". Toàn lớp đồng thanh thúc giục. Trò cầm phấn viết lia lịa trên bảng A và B các phép tính không ngớt tay. Mười phút sau, trò cười nói :"Đây là giải đáp'. Thầy Le Bris bỗng nổi trò Thám lên cao mà nói : "Đây là thầy tôi". Từ khi đó, bất cứ khi nào thầy ra toán gì, khó đến đâu, trò Thám đều tìm ra giải đáp làm cả lớp khiếp hồn vì những bài toán dễ hơn mà chưa tìm ra thì làm sao mà hiểu được sự tiến bộ kì dị của trò Thám.

Sau đó thầy Le Bris cũng như các thầy Pháp khác nồng nhiệt khuyến khích trò Thám về xin gia đình cho đi Pháp chuyên học về môn Toán để trở thành vĩ nhân tương lai. Nhưng trò Thám bảo rằng nhà mình đã quá hy sinh cho hai anh em ra học tại Quốc học (lúc ấy cùng học có trò Lê Đình Dương là anh ruột) nên không thể nào nghĩ đến chuyện đi Pháp.

Ngoài ra trò Thám còn có thiên năng thứ hai là bất cứ bài văn gì bằng Pháp văn hay Việt văn chỉ cần đọc cho trò nghe qua một dạo rồi trao sách cho trò tự cầm đọc nhỏ trong miệng một lần rồi hai lần là gấp sách đọc lại trôi suốt không sót một chữ. Tôi còn nhớ có một lần đã cùng anh em trắc nghiệm trò Thám về bài "Le chêne et le roseau" mà cả lớp chưa ai đọc đến. Tôi đọc to tiếng lên một lần rồi trao sách cho trò, sau đó trò trả sách lại đọc thông suốt ngon lành. Tuy vậy, chúng tôi vẫn còn chưa chịu hoàn toàn thán phục. Chúng tôi tìm tòi sách cũ lấy được bài "Hà Nội chính khí ca" nói chuyện cụ Hoàng Diệu tuẫn tiết sau khi Hà Thành bị thất thủ. Trò Thám cũng đọc lâu lâu hai trang đầu sau khi chúng tôi vừa đọc cho trò nghe. Bắt đầu từ đó chúng tôi phục trò Thám đến sát đất.

NGÔ VIỆT TRUNG
(sưu tầm)

Vậy (x, y, z) là hoán vị của (a, b, c)

$\Leftrightarrow x^n + y^n + z^n = a^n + b^n + c^n \ \forall n \in \mathbf{N}$.

Sau đây là một số bài tập mời các bạn cùng giải

1. Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy, hãy tìm quỹ tích những điểm $A(x, y)$ sao cho $x^3 - y^3 = 3xy + 1$.

2. Cho x, y, z là các số thực đôi một thỏa mãn

$$(x-y)\sqrt[3]{1-x^3} + (z-x)\sqrt[3]{1-y^3} + (x-y)\sqrt[3]{1-z^3} = 0$$

Chứng minh rằng

$$(1-x^3)(1-y^3)(1-z^3) = (1-xyz)^3$$

3. Cho a, b, c là các số thực khác O sao cho $a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 = 3a^2b^2c^2$. Tính giá trị của biểu thức $A = \left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)$.

GIẢI THƯỞNG LÊ VĂN THIÊM 1999

Nhằm góp phần đẩy mạnh sự nghiệp bồi dưỡng nhân tài, Hội đồng xét Giải thưởng Lê Văn Thiêm 1999 đã quyết định nâng số giải thưởng trong đợt này lên 6 giải : 2 giải thưởng dành cho giáo viên, 2 giải thưởng dành cho học sinh có thành tích xuất sắc nhất và 2 giải thưởng dành cho học sinh vượt khó học giỏi toán.

Giải thưởng tặng giáo viên

1) Nhà giáo ưu tú **Phạm Ngọc Quang**, sinh năm 1950, đã tham gia giảng dạy toán 26 năm, hiện là Hiệu trưởng trường THPT Lam Sơn, Thanh Hóa, đã đào tạo được 50 học sinh đoạt giải học sinh giỏi toán quốc gia THPT và 4 học sinh đoạt giải Olympic toán quốc tế. Ông đã viết nhiều bài báo, nhiều sáng kiến kinh nghiệm giảng dạy toán đăng trên các tập san, tạp chí của tỉnh và của Bộ (Tạp chí THTT số 264 tháng 6/1999 đã giới thiệu ông).

2) Nhà giáo ưu tú **Vũ Hữu Bình**, sinh năm 1943, đã tham gia giảng dạy toán 38 năm, hiện là Tổ trưởng tổ Tự nhiên trường THCS Trưng Vương, Hà Nội, đã đào tạo được 25 học sinh đoạt giải học sinh giỏi toán quốc gia THCS, 12 học sinh do ông dạy về sau học THPT đã đạt giải Olympic quốc tế về Toán, Vật lí, Tin học. Ông đã viết 30 cuốn sách và là đồng tác giả của 45 cuốn sách giáo khoa, sách tham khảo về toán cho học sinh THCS. (Tạp chí THTT số 263 tháng 5/1999 đã giới thiệu ông).

Giải thưởng tặng học sinh :

1) **Lê Thái Hoàng**, sinh năm 1981, học khối chuyên Toán - Tin trường ĐHSP Hà Nội, đã đoạt 2 giải nhì trong các cuộc thi học sinh giỏi toán quốc gia năm 1998 và 1999, đã tham dự 2 cuộc thi Olympic toán quốc tế và giành Huy chương đồng năm 1998, Huy chương vàng năm 1999, đồng thời giành Huy chương vàng cuộc thi Olympic toán châu Á - Thái Bình Dương 1999.

2) **Đỗ Quang Yên**, sinh năm 1981, học trường THPT Lam Sơn, Thanh Hóa, đã đạt 2 giải nhất trong các cuộc thi học sinh giỏi toán quốc gia năm 1998 và 1999, đã tham dự 2 cuộc thi Olympic toán quốc tế và giành Huy chương bạc năm 1998, Huy chương vàng năm 1999.

3) **Trần Văn Nghĩa**, sinh năm 1981, học trường THPT chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi. Sống ở vùng đất nghèo, bố mẹ đều là giáo viên THCS và Tiểu học, em đã cố gắng học tập, liên tục là học sinh giỏi THCS và THPT, đã đoạt giải khuyến khích năm 1998 và giải nhì năm 1999 trong kì thi học sinh giỏi toán quốc gia THPT, đã giành được Huy chương bạc trong cuộc thi Olympic toán quốc tế năm 1999.

4) **Bùi Minh Mẫn**, sinh năm 1980, học trường THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ. Lớn lên trong gia đình khá đông anh em ở huyện Sông Thao, bố mẹ đều là giáo viên về nghỉ hưu từ mấy năm nay, em đã liên tục phấn đấu đạt học sinh giỏi THCS và THPT, đã đạt giải ba năm 1998 và đạt giải nhì năm 1999 trong các kì thi học sinh giỏi toán quốc gia.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 26

Problem. Prove that if p is a prime number then for any positive number n the difference $n^p - n$ is divisible by p.

Solution. We shall prove the problem by induction. If $n = 1$, the problem is trivial because $1-1 = 0$ is divisible by any number. If $n > 1$, we may assume that $(n-1)^p - (n-1)$ is divisible by p. By Newton's binomial formula we have

$$n^p = (n-1)^p + C(p,1)(n-1)^{p-1} + C(p,2)(n-1)^{p-2} + \ldots + C(p,p-1)(n-1) + 1$$

where $p(p, k)$ denotes the binomial

$$\frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{1.2\ldots k}$$

for any integer $k = 1, 2, .., p-1$. Note that $C(k, p)$, is divisible by the prime number p because the numerator of $C(k, p)$ contains p while the denominator is a product of positive numbers less than p. Using the inductive hypothesis we see that

$$n^p - n = (n-1)^p - (n-1) + C(p,1)(n-1)^{p-1} + C(p,2)(n-1)^{p-2} + \ldots + C(p,p-1)(n-1).$$

is divisible by p.

Từ mới :

prime	= nguyên tố
difference	= hiệu
divisible	= chia hết (tính từ)
trivial	= tầm thường
binomial	= nhị thức
formula	= công thức
denote	= kí hiệu
note	= chú ý (động từ)
numerator	= tử số
denominator	= mẫu số
product	= tích
induction	= quy nạp
inductive	= quy nạp (tính từ)
hypothesis	= giả thiết

NGÔ VIỆT TRUNG

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN QUỐC GIA THPT NĂM HỌC 1998-1999

ĐẶNG HÙNG THẮNG
(Hà Nội)

BẢNG A

Bài 1. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases}(1+4^{2x-y}).5^{1-2x+y} = 1+2^{2x-y+1}\\ y^3+4x+1+\ln(y^2+2x)=0\end{cases}$$

Giải. Điều kiện để biểu thức có nghĩa $y^2+2x>0$

Đặt $t = 2x-y$ thì phương trình thứ nhất của hệ trở thành

$$(1+4^t)5^{1-t} = 1+2^{t+1} \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+4^t}{5^t} = \frac{1+2^{t+1}}{5}$$

Vế trái là hàm nghịch biến, vế phải là hàm đồng biến nên $t = 1$ là nghiệm duy nhất của (1).

Vậy $2x - y = 1 \Rightarrow x = \frac{y+1}{2}$. Thế vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$y^3+2y+3+\ln(y^2+y+1)=0 \qquad (2)$$

Vế trái là hàm đồng biến do đó $y = -1$ là nghiệm duy nhất của (2)

Đáp số : $x = 0, y = -1$.

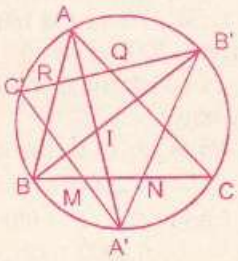
Bài 2. *Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm của các cung BC, CA, AB không chứa các điểm A, B, C của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Các cạnh BC, CA và AB cắt các cặp đoạn thẳng C'A', A'B' ; A'B', B'C' và B'C', C'A' lần lượt ở các cặp điểm M, N; P, Q và R, S. Chứng minh rằng : MN = PQ = RS khi và chỉ khi tam giác ABC là tam giác đều.*

Giải. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Từ giả thiết suy ra AA', BB' và CC' đồng quy ở I.

Dễ thấy tứ giác $IQB'C$ là tứ giác nội tiếp. Suy ra $\angle QIB' = \angle ABB'$ $(= \angle ACB') \Rightarrow IQ//AB$.

Tương tự ta chứng minh được $IM//AB$, $IP//BC$, $IS//BC$, $IN//CA$ và $IR//CA$. Từ các kết quả trên suy ra

$\Delta IMN \backsim \Delta QIP \backsim \Delta RSI \backsim \Delta ABC$. Các tứ giác $IQAR$, $ISBM$ và $INCP$ là các hình thoi. Do đó : $\frac{MN}{BC} = \frac{IM}{AB} = \frac{IN}{AC} = \frac{MN+IM+IN}{2p} = \frac{MN+BM+NC}{2p} = \frac{BC}{2p}$.



Suy ra $MN = \frac{BC^2}{2p}$.

Tương tự $PQ = \frac{CA^2}{2p}$, $RS = \frac{AB^2}{2p}$.

Vậy $MN = PQ = RS \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Bài 3. *Cho hai dãy số* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *và* $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ *được xác định như sau :*

$x_o = 1$, $x_1 = 4$ *và* $x_{n+2} = 3x_{n+1} - x_n$ *với mọi* $n = 0, 1, 2, ...$

$y_o = 1$, $y_1 = 2$ *và* $y_{n+2} = 3y_{n+1} - y_n$ *với mọi* $n = 0, 1, 2, ...$

1) Chứng minh rằng : $x_n^2 - 5y_n^2 + 4 = 0$ *với mọi* $n = 0, 1, 2, ...$

2) Giả sử a, b là các số nguyên dương mà $a^2 - 5b^2 + 4 = 0$. *Chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên k sao cho* $x_k = a$ *và* $y_k = b$.

Giải. a) Từ công thức xác định dãy (x_n) suy ra

$$x_n^2 - 3x_nx_{n-1} + x_{n-1}^2 = x_{n-1}^2 - 3x_{n-1}x_{n-2} + x_{n-2}^2.$$

Từ đó với mọi $n \geq 1$ có

$$x_n^2 - 3x_nx_{n-1} + x_{n-1}^2 = 5$$

Do đó $x_n^2 = 7x_{n-1}^2 - x_{n-2}^2 + 10 \qquad (1)$

Tương tự $y_n^2 = 7y_{n-1}^2 - y_{n-2}^2 - 2 \qquad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra

$$x_n^2 - 5y_n^2 + 4 =$$

$$= 7(x_{n-1}^2 - 5y_{n-1}^2) - (x_{n-2}^2 - 5y_{n-2}^2) + 24 \quad (3)$$

Từ hệ thức (3) bằng phương pháp quy nạp dễ thấy $x_n^2 - 5y_n^2 + 4 = 0$ với mọi $n = 0, 1, 2, ...$

b) Trước hết bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{3x_n+5y_n}{2} & (4)\\ y_{n+1} = \frac{x_n+3y_n}{2} & (5)\end{cases}$$

Nếu $a = 1 \Rightarrow b = 1$. Vậy $x_o = a$, $y_o = b$

Nếu $a > 1 \Rightarrow b > 1$.

Xét $a_1 = \frac{3a-5b}{2}$, $b_1 = \frac{3b-a}{2}$

Vì $a^2 - 5b^2 = -4 \Rightarrow a \equiv b \pmod 2$
$\Rightarrow a_1, b_1 \in \mathbf{Z}$.

Ta có thể kiểm tra được rằng $a_1, b_1 \in \mathbf{N}^*$ và

$$\begin{cases} a_1^2 - 5b_1^2 = a^2 - 5b^2 = -4 \\ a_1 < a \end{cases}$$

Tiếp tục như vậy sau k bước ta sẽ thu được $k+1$ cặp số nguyên dương (a_o, b_o), (a_1, b_1), ..., (a_k, b_k) với

$$\begin{cases} a_o = a,\ b_o = b \\ a_i^2 - 5b_i^2 + 4 = 0,\ a_{i+1} < a_i,\ (i = 0,1,2,...,k-1) \\ a_{i+1} = \dfrac{3a_i - 5b_i}{2},\ b_{i+1} = \dfrac{3b_i - a_i}{2} \end{cases} \quad (6)$$

và $a_k = b_k = 1$.

Vậy $a_k = x_o$, $b_k = y_o$

Từ (6) ta có

$$a_i = \frac{3a_{i+1} + 5b_{i+1}}{2},\ b_i = \frac{a_{i+1} + 3b_{i+1}}{2} \quad (7)$$

Từ (4), (5), (6) và (7) rút ra $a = x_k$, $b = y_k$.

Bài 4. *Xét các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện :*

$$abc + a + c = b$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$P = \frac{2}{a^2+1} - \frac{2}{b^2+1} + \frac{3}{c^2+1}.$$

Giải. Viết lại các điều kiện của đề bài dưới dạng $ac + \dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{b} = 1$.

Vì $a, b, c > 0$ nên suy ra tồn tại $A, B, C \in (0, \pi)$ sao cho $A+B+C = \pi$ và $a = tg\dfrac{A}{2}$, $\dfrac{1}{b} = tg\dfrac{B}{2}$, $\dfrac{1}{c} = tg\dfrac{C}{2}$.

Từ đó tính được

$$P = -3\sin^2\frac{C}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 3$$

Vậy $P \le \dfrac{1}{3}\cos^2\dfrac{A-B}{2} + 3 \le \dfrac{1}{3} + 3 = \dfrac{10}{3}$.

Có thể chỉ ra các giá trị a, b, c thỏa mãn điều kiện đề bài để đạt giá trị $P = \dfrac{10}{3}$. Vậy $\max P = \dfrac{10}{3}$.

Bài 5. *Trong không gian cho bốn tia phân biệt Ox, Oy, Oz, Ot đôi một hợp với nhau những góc bằng nhau.*

1) Xác định độ lớn của góc tạo bởi hai tia bất kì trong bốn tia đó.

2) Giả sử Or là một tia khác bốn tia đã cho. Gọi α, β, γ, ∂ lần lượt là các góc tạo bởi Or và Ox, Oy, Oz, Ot. Đặt :

$$p = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos\partial$$
$$q = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\partial$$

Chứng minh rằng p và q không thay đổi khi Or quay xung quanh O.

Giải. Trên các tia Ox, Oy, Oz và Ot lần lượt lấy các véctơ đơn vị $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{OA_3} = \overrightarrow{e_3}$ và $\overrightarrow{OA_4} = \overrightarrow{e_4}$. Gọi φ là góc tạo bởi hai tia bất kì trong 4 tia đã cho.

1) Dễ dàng chứng minh được $A_1A_2A_3A_4$ là một tứ diện đều. Suy ra $\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_4} = \vec{0}$.
Vậy $0 = (\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_4})^2 = 4 + 12\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = -\dfrac{1}{3}$.

2) Kí hiệu lại α, β, γ, ∂ bởi α_1, α_2, α_3, α_4. Trên Or lấy vectơ đơn vị $\overrightarrow{e}$. Ta có

$$p = \sum_{i=1}^{4}\cos\alpha_i = \sum_{i=1}^{4}\overrightarrow{e}.\overrightarrow{e_i} = \overrightarrow{e}\sum_{i=1}^{4}\overrightarrow{e_i} = 0$$

$$q = \sum_{i=1}^{4}\cos^2\alpha_i = \sum_{i=1}^{4}(\overrightarrow{e}.\overrightarrow{e_i})^2.$$

Biểu diễn $\overrightarrow{e}$ dưới dạng

$$\overrightarrow{e} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + x_3\overrightarrow{e_3} + x_4\overrightarrow{e_4}$$

Ta có : $\overrightarrow{e_i}.\overrightarrow{e} = \dfrac{4}{3}x_i - \dfrac{1}{3}\sum_{i=1}^{4}x_i$

Suy ra $\sum_{i=1}^{4}(\overrightarrow{e_i}.\overrightarrow{e})\overrightarrow{e_i} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{e}$,

nên $\sum_{i=1}^{4}(\overrightarrow{e}.\overrightarrow{e_i})^2 = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{e}^2 = \dfrac{4}{3}$.

Vậy $p = 0$, $q = \dfrac{4}{3}$.

Bài 6. *Cho tập hợp T gồm tất cả các số tự nhiên không vượt quá 1999. Hãy tìm tất cả các hàm số f xác định trên N, lấy giá trị trên T và thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau :*

i) $f(t) = t$ với mọi $t \in T$.

ii) $f(m + n) = f(f(m) + f(n))$ với mọi $m, n \in N$.

(N là tập hợp các số tự nhiên).

Giải. Giả sử f là hàm số cần tìm. Đặt $f(2000) = a$, $b = 2000 - a$ Ta có $1 \le b \le 2000$

Ta có các nhận xét sau (dễ chứng minh bằng quy nạp)

Nhận xét 1: Với mọi r mà $0 \le r < b$ ta có

$$f(2000 + r) = a + r$$

Nhận xét 2: Với mọi $k \in N$, $0 \le r < b$ ta có

$$f(2000 + kb + r) = a + r$$

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO ĐẠI HỌC HUẾ NĂM 1999

Câu I. 1) Với $x_0 \neq 0$ thì

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = x_0.\cos\left(\frac{1}{x_0^2}\right) = f(x_0)$$

• Xét $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left[x.\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]$

Ta có : $\left|x.\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right| = |x|.\left|\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right| \leq |x|$

$\Rightarrow -|x| \leq x.\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq |x|$

Vì $\lim\limits_{x\to 0}(-|x|) = \lim\limits_{x\to 0}|x| = 0$, nên theo nguyên lí kẹp của giới hạn thì $\lim\limits_{x\to 0}\left[x.\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right] = 0 = f(0)$.

Vậy f liên tục trên **R**.

2) Với $x \neq 0$ thì $f'(x) = \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{2}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Với $x = 0$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos\left(\frac{1}{\Delta x^2}\right)$ không tồn tại.

(Chọn dãy $u_n = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}} \to 0$; $v_n = \frac{1}{\sqrt{\pi+2n\pi}}$ $\to 0$ mà $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos\left(\frac{1}{u_n^2}\right) = 1 \neq \lim\limits_{n\to+\infty}\cos\left(\frac{1}{v_n^2}\right) = -1$)

do đó f không có đạo hàm tại $x = 0$.

Câu II. 1) Bạn đọc tự làm.

2) • Khi $m = 0$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = -1$

• $m \neq 0$ thì phương trình tương đương với

$$\frac{x^2+3x+3}{x+1} = -\frac{1}{m}$$

Từ đồ thị, có kết quả :

Phương trình vô nghiệm

$\Leftrightarrow -1 < -\frac{1}{m} < 3$

$\Leftrightarrow m \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$

Phương trình có 1 nghiệm $\Leftrightarrow -\frac{1}{m} = -1$ hoặc $-\frac{1}{m} = 3 \Leftrightarrow m = 1$ hoặc $m = -\frac{1}{m}$.

Phương trình có hai nghiệm $\Leftrightarrow -\frac{1}{m} > 3$ hoặc $-\frac{1}{m} < -1 \Leftrightarrow m \in \left(\frac{1}{3}; 0\right) \cup (0; 1)$.

Chú ý. Câu này có thể không sử dụng đồ thị, với $m \neq 0$ xét Δ_x

Câu III. 1) Ta có $G(1; 2; 2)$ là trọng tâm tam giác ABC. Vì $\overrightarrow{AB} = (0; -1; -1)$ và $\overrightarrow{AC} = (0; -2; 1)$ nên một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là $\vec{n}(1; 0; 0)$.

Phương trình tham số của (Δ) là $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2 \\ z = 2 \end{cases}$

2) (*Phân ban*) $S = \int_1^e \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\,dx = 2\int_1^e \ln(\sqrt{x})\,d(\sqrt{x})$

$= 2\int_1^{\sqrt{e}} \ln u\,du = 2 - \sqrt{e}$ (đ.v.d.t).

(dùng công thức tính tích phân từng phần).

(*Chưa phân ban*) Có hai tam giác cong được tạo thành

$S_1 = \int_0^1 [(x+1)^5 - e^x]\,dx$

$= \left[\frac{(x+1)^6}{6} - e^x\right]\Big|_0^1 = \frac{23}{2} - e$ (đ.v.d.t)

$S_2 = \int_1^a [(x+1)^5 - e^x]\,dx = \left[\frac{(x+1)^6}{6} - e^x\right]\Big|_1^a$

$= \frac{(a+1)^6}{6} - e^a - \frac{32}{3} + e$

với $a>1$ là nghiệm của phương trình $(x+1)^5 = e^x$ (việc xác định a, vượt quá chương trình phổ thông ?)

Câu IV. (*Phân ban*) Giả sử hệ có nghiệm $(x_0; y_0)$ thì

$y_0 \geq x_0^2 + 2a > 0$ (do $a > 0$) $\Rightarrow y_0^2 \geq (x_0^2 + 2a)^2$

$\Rightarrow x_0^2 + (x_0^2 + 2a)^2 \leq x_0^2 + y_0^2 \leq 4ax_0$

$\Rightarrow x_0^4 + 4ax_0^2 + (x_0 - 2a)^2 \leq 0 \Rightarrow x_0 = 0 = 2a$

mâu thuẫn với $a > 0$.

Vậy hệ vô nghiệm.

Chú ý: Có thể viết hệ về dạng

$$\begin{cases} (x-2a)^2 - y^2 \leq 4a^2 & (1) \\ y \geq x^2 + 2a & (2) \end{cases}$$

và xác định các điểm $(x; y)$ thỏa mãn (1); (2) trên mặt phẳng tọa độ.

(*Chưa phân ban*) Giả sử hệ có nghiệm $(x_0; y_0)$ thì $x_0 \geq m^3 + my_0^2 > m^3 \Rightarrow x_0^2 \geq m^6$.

Mặt khác : $m^2 \geq m^2(1 - y_0^2) \geq x_0^2$. Do đó :

$m^2 \geq x_0^2 \geq m^6 \Rightarrow |m| \leq 1$,

mâu thuẫn với $m > 1$. Vậy hệ vô nghiệm.

Chú ý. Có thể giải nhờ mặt phẳng tọa độ.

2) (*Phân ban*) Ta có $\ln(\sin^2 x) = 1 - \sin^3 x$ với $x \neq k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) thì $\ln(\sin^2 x) \leq \ln 1 = 0$

Mặt khác $1 - \sin^3 x \geq 0$ với mọi x. Vậy phương trình thỏa mãn

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln(\sin^2 x) = 0 \\ 1 - \sin^3 x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ (k \in \mathbf{Z})$$

(*Chưa phân ban*) Với $\sin 5x \neq 0$ và $\cos 9x \neq 0$, đưa phương trình về dạng $\sin x.\cos 5x = \sin 5x \cos 9x$

$\Leftrightarrow \sin 6x - \sin 4x = \sin 14x - \sin 4x$

$\Leftrightarrow \sin 6x = \sin 14x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 14x = 6x + 2k\pi \\ 14x = \pi - 6x + 2k\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{k\pi}{4} \\ x = \dfrac{(2l+1)\pi}{20} \end{cases} \quad (k, l \in \mathbf{Z})$$

• Xét $x = \dfrac{k\pi}{4}$ thì $\sin\left[5\left(\dfrac{k\pi}{4}\right)\right] = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{k\pi}{4} = \dfrac{t\pi}{5}$

$\Leftrightarrow 5k - 4t = 0$ với $k, t \in \mathbf{Z}$.

Từ đó ta có $k = 1 + 4s$ với $s \in \mathbf{Z}$. Vậy để $\sin 5x \neq 0$ thì $k \neq 1 + 4s$ với $s \in \mathbf{Z}$. Tương tự để $\cos 9x \neq 0$ thì $k \neq 2 + 4s$ với $s \in \mathbf{Z}$.

Do đó chỉ có $x = \dfrac{4s\pi}{4} = s\pi$;

$x = \dfrac{(4s+3)\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4} + s\pi$ ($s \in \mathbf{Z}$) là nghiệm.

• Xét $x = \dfrac{(2l+1)\pi}{20}$, dễ thấy họ nghiệm này thỏa mãn $\sin 5x \neq 0$ và $\cos 9x \neq 0$.

Kết luận : Nghiệm của phương trình là

$$\left[\begin{array}{l} x = s\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + s\pi \\ x = \dfrac{(2l+1)\pi}{20} \end{array}\right. \quad \text{với } s, l \in \mathbf{Z}$$

Câu V. (*Phân ban*) Số cách chọn 4 viên bi trong 15 viên bi là $C_{15}^4 = 1365$.

Nếu 4 viên bi có đủ cả ba màu thì chỉ có các khả năng :

• 2 viên đỏ, 1 viên trắng, 1 viên vàng : có $C_4^2 . C_5^1 . C_6^1$ cách chọn.

• 1 viên đỏ, 2 viên trắng, 1 viên vàng : có $C_4^1 C_5^2 C_6^1$ cách chọn

• 1 viên đỏ, 1 viên trắng, 2 viên vàng : có $C_4^1 C_5^1 C_6^2$ cách chọn.

Vậy số cách chọn để 4 viên bi có đủ 3 màu là $C_4^2 C_5^1 C_6^1 + C_4^1 C_5^2 C_6^1 + C_4^1 C_5^1 C_6^2 = 720$. Suy ra số cách chọn 4 viên bi không có đủ 3 màu là

$$1365 - 72 = 645.$$

(*Chưa phân ban*) Gọi h là độ dài đường cao của tứ diện kẻ từ A thì dễ dàng chứng minh được :

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{9a^2}$$

$$\Rightarrow h = \frac{6}{7}a.$$

Thể tích hình tứ diện :

$$V = \frac{1}{6} AB.AC.AD = a^3$$

Do đó : diện tích tam giác BCD là

$$S = \frac{3V}{h} = \frac{7a^2}{2}.$$

Người hướng dẫn giải : LÊ THỐNG NHẤT

HƯỚNG DẪN GIẢI... *(Tiếp trang 6)*

Từ hai nhận xét trên ta suy ra nếu f là hàm cần tìm thì

$$(*) \begin{cases} f(t) = t & \forall t \in T \\ f(2000) = a \\ f(2000 + m) = a + r \end{cases}$$

ở đó $r \equiv m \pmod{2000-a}$

$0 \leq r < 2000 - a$

Ngược lại cho $a \in T$. Xét hàm số f xác định trên N thỏa mãn (*). Dễ thấy $f(n) \in T \ \forall n \in N$. Ta cần kiểm tra

$f(m+n) = f(f(m) + f(n)) \ \forall m, n \in N$ (1)

Việc kiểm tra này dựa trên các nhận xét sau (dễ chứng minh)

Nhận xét 3: $f(n + b) = f(n) \ \forall n \geq a, b = 2000-a$

Nhận xét 4: $n \equiv f(n) \pmod{b} \ \forall n \in N$.

Bây giờ, chỉ cần chứng minh (1) cho trường hợp có ít nhất một trong hai số m, n không thuộc T. Giả sử $m \geq 2000$. Khi đó $m + n \geq 2000 > a$ và $f(m) + f(n) \geq a$ (do $f(m) \geq a$). Mà $m + n \equiv f(n) + f(m) \pmod{b}$ (theo nhận xét 4). Thành thử do nhận xét 3 $\Rightarrow f(m+n) = f(f(m) + f(n))$

Kết luận: Tất cả các hàm thỏa mãn đầu bài được xác định theo công thức (*) với mỗi $a \in T$ cho trước. Thành thử có 2000 hàm như vậy./.

TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC SƠ CẤP

ĐIỂM BẤT ĐỘNG CỦA HÀM SỐ VÀ ỨNG DỤNG

QUÁCH GIANG
(GV Trường PTTH Lương Văn Tụy, Ninh Bình)

Ta đã biết rằng : $x = x_o$ được gọi là điểm bất động của hàm số $y = f(x)$ nếu $f(x_o) = x_o$. Như vậy việc tìm điểm bất động của hàm số $f(x)$ thực chất là việc giải phương trình $f(x) = x$ (*).

Trong trường hợp (*) có nghiệm duy nhất $x = x_o$ và nghiệm $x = x_o$ của (*) tìm được chính xác từ biểu thức của hàm số hoặc từ tính chất của hàm số thì đôi khi điểm bất động này giúp chúng ta rất nhiều cho việc giải một số bài toán về hàm số.

Bài toán 1. Cho hàm số $f(x) = x^2 - 5|x| + 9$. Tìm tất cả các tập hữu hạn các số thực A có tính chất sau : nếu $x \in A$ thì $f(x) \in A$.

Bài giải.

Nhận thấy rằng : $f(x) \geq x\ \forall x \in R$ và $f(x) = x \Leftrightarrow x = 3$ (1.1)

Thật vậy $f(x) - x = x^2 - 5|x| + 9 - x \geq x^2 - 6|x| + 9 = (|x| - 3)^2 \geq 0\ \forall x$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} |x| = x \\ (|x| - 3)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$.

Mặt khác $f(x) = \left(|x| - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}$

$\Rightarrow f(x) \geq \frac{11}{4}\ \forall x \in R$ (1.2)

Với mỗi $x \in R$ và $n \in N, n \geq 1$: Ta đặt : $f_o(x) = f(x), f_n(x) = f(f_{n-1}(x))$.

Từ (1.1) ta có :

$f_n(x) \geq f_{n-1}(x)\ \forall x \in R, n \geq 1$ (1.3)

Xét $x_o \in R : f_n(x_o) = f_{n-1}(x_o)$

$\Leftrightarrow f(f_{n-1}(x_o)) = f_{n-1}(x_o)$ (1.4)

Từ (1.1) và (1.4) ta có : $f_{n-1}(x_o) = 3$ (1.5)

Nếu $n-1 = 0 \Rightarrow f_o(x_o) = 3$

Nếu $n \geq 1$ đặt $t = f_{n-2}(x_o) \Rightarrow$ từ (1.5) ta có :

$t^2 - 5|t| + 9 = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \pm 2 \\ t = \pm 3 \end{array}\right.$

Từ (1.2) và (1.3) ta có : $t = f_{n-2}(x_o) \geq f_o(x_o) = f(x_o) \geq \frac{11}{4}$ do đó $t = 3$ hay $f_{n-2}(x_o) = 3$.

Bằng cách lùi dần cuối cùng ta có $f_o(x_o) = 3$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_o = \pm 2 \\ x_o = \pm 3 \end{array}\right.$

Vậy ta có $f_n(x_o) = f_{n-1}(x_o) \Leftrightarrow$

$x_o \in \{-3, -2, 2, 3\} = B$ (1.6)

Giả sử A là tập hợp hữu hạn các số thực có tính chất : Nếu $x \in A$ thì $f(x) \in A$. Ta chứng minh $A \subseteq B$.

Thật vậy : Nếu $\exists x \in A$ và $x \notin B$ thì do (1.6) ta có : $f_n(x) > f_{n-1}(x)\ \forall n \geq 1$ (1.7)

Vì $x \in A \Rightarrow f_o(x) = f(x) \in A$

$\Rightarrow f_n(x) \in A\ \forall n \geq 1$ (1.8)

Từ (1.7) và (1.8) $\Rightarrow A$ là tập vô hạn, điều này vô lí.

Mà ta lại có $f(\pm 2) = f(\pm 3) = 3 \Rightarrow 3 \in A$. Do đó tất cả các tập A cần tìm là 8 tập sau :

$A_1 = \{3\}, A_2 = \{-3,3\}, A_3 = \{-2,3\}, A_4 = \{2,3\}$

$A_5 = \{-3,-2,3\}, A_6 = \{-3,2,3\}, A_7 = \{-2,2,3\}$,

$A_8 = B$.

Nhận xét: Bài toán 1 có thể mở rộng cho lớp hàm $f(x)$ có tính chất :

i) $f(x) \geq x\ \forall x$ và $f(x) = x \Leftrightarrow x = x_o$

ii) $\{y \in R; x_o = f(y)\} = \{y_1, y_2, ..., y_k\} = B$.

iii) $f_n(y) = f_{n-1}(y) \Leftrightarrow y \in B$.

Với $f_n(x)$ được xác định như ở lời giải trên.

Vấn đề đặt ra là các bạn hãy xây dựng lớp các hàm $f(x)$ thỏa mãn i, ii, và iii, thì ta sẽ xây dựng được lớp các đề toán mới về hàm số.

Bài toán 2. Tìm hàm $f : R^+ \Rightarrow R^+$ thỏa mãn đồng thời 2 điều kiện sau :

i) $f(x.f(y)) = y.f(x)\ \forall x, y \in R^+$.

ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Bài giải :

Từ i, cho $x = y$ ta có $f(x.f(x)) = x.f(x)$ (1.1)

Giả sử $a \in R^+$ mà $f(a) = a$, ta chứng minh

$f(a^n) = a^n\ \forall n \geq 1, n \in N$ (1.2)

$n = 2 \Rightarrow f(a^2) = f(a.f(a)) = a.f(a) = a^2 \Rightarrow$ (1.2) đúng với $n = 2$.

Giả sử (1.2) đúng với n, ta có :

$f(a^{n+1}) = f(a.a^n) = f\left(a.f(a^n)\right) = a^n.f(a) = a^{n+1}$.

Nếu $a > 1$ ta có $a^n \Rightarrow +\infty$ khi $n \Rightarrow +\infty$. Do vậy $f(a^n) \Rightarrow +\infty$ khi $n \to +\infty$, điều này vô lí do ii) vậy

$0 < a \leq 1$ (1.3)

Mặt khác từ $a = f(a) = f(1.f(a)) = a.f(1) \Rightarrow f(1) = 1$. Vậy ta có $1 = f(1) = f(a.a^{-1}) = f(a^{-1}.f(a)) = a.f(a^{-1}). \Rightarrow f(a^{-1}) = a^{-1}$ (1.4)

Từ (1.4) bằng quy nạp dễ dàng suy ra : $f(a^{-n}) = a^{-n}, \forall n \geq 1, n \in N$ (1.5)

Do ii, nên từ (1.5) ta lại có $a \geq 1$ (1.6)

từ (1.3) và (1.6) ta nhận được $a = 1$.

vậy $f(a) = a \Leftrightarrow a = 1$ (1.7)

Từ (1.1) và (1.7) ta có $x.f(x) = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x}$. Thử lại : Dễ thấy $f(x) = \frac{1}{x}$ thỏa mãn i, ii.

Kết luận : Hàm số cần tìm là $f(x) = \frac{1}{x}$.

Nhận xét. Từ bài toán 2 ta có thể xây dựng được lớp các phương trình hàm với cặp biến tự do. Lớp phương trình này có đặc điểm từ phương trình

(Xem tiếp trang 13)

HỌ BÀI TOÁN

LÊ VĂN QUANG
(GV Quốc học Huế)

Xuất phát từ một phương pháp nào đó, ta có thể minh họa nó nhờ vào một hệ thống bài toán làm ví dụ. Ngược lại, cũng có trường hợp từ một bài toán cụ thể, lại có thể minh họa cùng lúc nhiều cách giải rất đặc sắc, góp phần rất lớn cho việc luyện tập toán. Việc kết hợp được cả hai hướng trên tôi nghĩ là một điều thú vị. Muốn vậy, ta có thể xuất phát từ một bài toán có chứa biến. Ta thử chọn bài toán sau :

Bài toán. *(*) Cho n là số nguyên lớn hơn hoặc bằng 3; k là số nguyên thỏa : $2 \le k < n$. Xét n số thực không âm $x_1, x_2, ..., x_n$ có tổng bằng 1.*

Đặt

$T(n, k) = x_1x_2...x_k + x_2x_3...x_{k+1} + ... + x_nx_1 ... x_{k-1}$.

Tìm giá trị lớn nhất của T(n, k).

Ta bắt đầu từ các bài toán đơn giản sau :

Bài toán 1.1. *Xét $x_1, x_2, x_3 \ge 0$ và $x_1+x_2+x_3 = 1$. Tìm maxT(3,2).*

Giải. Ta có : $(x_1+x_2+x_3)^2 =$

$= \frac{1}{2}[(x_1-x_2)^2 + (x_2-x_3)^2] + 3(x_1x_2+x_2x+x_3x_1)$

$T(3,2) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$

Do đó $T(3,2) \le 1/3$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{3}$.

Vậy : $\text{Max}T(3, 2) = \frac{1}{3}$.

Bài toán 1.2. *Xét $x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$ và $x_1+x_2+x_3+x_4 = 1$. Tìm MaxT(4, 2)*

Giải. Ta có :

$T(4, 2) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1 = (x_1+x_3)(x_2+x_4) \le$

$\left\{\frac{[(x_1+x_3) + (x_2+x_4)]}{2}\right\}^2$

Do đó : $T(4, 2) \le \frac{1}{4}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x_1+x_3 = \frac{1}{2}$ và $x_2 + x_4 = \frac{1}{2}$.

Vậy : $\text{Max}T(4, 2) = \frac{1}{4}$.

Bài toán 1.3. *Xét $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0$ và $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 1$. Tìm MaxT(5, 2)*

$T(5, 2) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1$

Giải. Không mất tính tổng quát có thể xem $x_1 = \text{Min}(x_1)$.

Nếu cần ta có thể đánh chỉ số lại.

Lúc đó :

$T(5, 2) \le x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_2 \le$

$(x_1+x_3+x_5)(x_2+x_4) \le \left[\frac{(x_1+x_3+x_5+x_2+x_4)}{2}\right]^2$

Do đó $T(5,2) \le 1/4$.

Khi $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = x_5 = 1/2$ thì đẳng thức xảy ra. Vậy : $\text{Max}T(5, 2) = \frac{1}{4}$.

Bài toán 1.4. *Tìm MaxT(2m, 2) với $m \ge 3$.*

Cùng cách giải như bài toán 1.2 ta có

$\text{Max}T(2m, 2) = \frac{1}{4}$.

Bài toán 1.5. *Tìm MaxT(2m+1, 2) với $m \ge 3$.*

Cùng cách giải như bài toán 1.3 ta cũng có $\text{Max}T(2m+1,2) = \frac{1}{4}$. Từ việc giải các bài toán trên ta có thể đưa ra lời giải cho bài toán sau :

Bài toán (I) Xét $x_1, x_2, ..., x_n$ là các số thực không âm, có tổng bằng 1.

Đặt $T(n, 2) = x_1x_2 + x_2x_3 + ... + x_nx_1$ $n \ge 3$. Chứng minh rằng : $\text{Max}T(n, 2) = (n + 4 + |n-4|)/8n$.

Ta lại tiếp tục bài toán như sau "

Bài toán 2.1. *Xét $x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$ và $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$. Tìm MaxT(4, 3)*

Giải : Ta có :

$T(4, 3) = x_1x_2(x_3+x_4) + x_3x_4(x_1+x_2) \le$

$\le \left[\frac{(x_1+x_2)}{2}\right]^2 (x_3 + x_4) + \left[\frac{(x_3+x_4)}{2}\right]^2 (x_1 + x_2)$

$\le \frac{(x_1+x_2)(x_3+x_4)(x_1+x_2+x_3+x_4)}{4}$

$\le \frac{(x_1+x_2+x_3+x_4)^2}{16} = \frac{1}{16}$.

Khi $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{1}{4}$ thì $T(4, 3) = \frac{1}{16}$.

Vậy : $\text{Max}T(4, 3) = \frac{1}{16}$

Bài toán 2.2 *Xét $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0$ và $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1$. Tìm MaxT(5, 3).*

Giải. Có thể giả sử $x_1 = \text{Min}(x_1)$

Ta có :

$T(5, 3) = x_1(x_2+x_4)(x_3+x_5) + x_3x_4(x_2+ x_5+x_1) \le$

$x_1\left[\frac{(x_1+x_4+x_3+x_5)}{2}\right]^2 + \left[\frac{(x_3+x_4+x_2+x_5+x_1)}{3}\right]^3$

$T(5, 3) \le \frac{x_1(1-x_1)^2}{4} + \frac{(1-2x_1)^3}{27} \le$

$\le \frac{(-5x_1^3 - 6x_1^2 + 3x_1 + 4)}{108}$

Xét $f(x) = -5x^3-6x^2+3x+4$ với $0 \le x \le 1/5$

(Chú ý : $\text{Min}(x_1) \le 1/5$.

$f'(x) = -15(x+1)(x-1/5) \ge 0 \ \forall x \in [0; 1/5]$

Do đó : $\text{Max } f(x) = f(1/5) = 108/25$ với $x \in [0; 1/5]$.

Từ đó : $T(5, 3) \le 1/25$.

Khi $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 1/5$ thì $T(5, 3) = \frac{1}{25}$

Vậy : $\text{Max}T(5,3) = \frac{1}{25}$.

Bài toán 2.3. *Xét 3m ($m \geq 2$) số thực không âm $x_1, x_2, ..., x_{3m}$ có tổng bằng 1.*

Tìm MaxT(3m, 3).

Giải. Ta có :

$T(3m, 3) \leq (x_1+x_4 + ... + x_{3m-2})(x_2 + x_5 + ... + x_{3m-1})(x_3 + x_6 + ... + x_{3m}) \leq$

$$\left[\frac{(x_1 + x_2 + ... + x_{3m})}{3}\right]^3 \Rightarrow T(3m, 3) \leq \frac{1}{27}.$$

Khi $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{3}$, $x_4 = x_5 = ... = x_{3m} = 0$ thì

$T = (3m, 3) = \frac{1}{27}$.

Vậy : $\text{Max}T(3m, 3) = \frac{1}{27}$ $(m \geq 2)$

Bài toán 2.4. *Xét 3m+1 ($m \geq 2$) số thực không âm $x_1, x_2, ..., x_{3m+1}$ có tổng bằng 1.*

Tìm MaxT(3m+1, 3).

Giải. Có thể giả sử $x_1 = \text{Min}(x_1)$

Ta có : $T(3m+1, 3) = (x_1x_2x_3 + ... + x_{3m-1}x_{3m}x_1) + x_{3m}x_{3m+1}x_1 + x_{3m+1}x_1x_2$.

$\leq x_1x_2x_3 + ... + x_{3m-1}x_{3m}x_1 + x_{3m}x_{3m+1}x_2 + x_{3m+1}x_3x_2$.

$\leq (x_1+x_4+...+x_{3m+1})(x_2+x_5+...+x_{3m-1})(x_3+x_6+...+x_{3m})$

$$\leq \left[\frac{(x_1+x_2+...+x_{3m+1})}{3}\right]^3 = \frac{1}{27}.$$

Khi $x_1 = x_2 = x_3 = 1/3$, $x_4=x_5=...= x_{3m+1} = 0$ thì $T(3m+1,3) = 1/27$.

Vậy : $\text{Max}T(3m+1,3) = 1/27$.

Bài toán 2.5. *Xét 3m+2 ($m \geq 2$) số thực không âm $x_1, x_2, ..., x_{3m+2}$ có tổng bằng 1.*

Tìm MaxT(3m+2,3).

Giải. Có thể giả sử $x_3 = \text{Max}(x_1)$. Nếu cần ta có thể đánh chỉ số lại. Ta có :

$T(3m+1,3) \leq (x_1x_2x_3 + ... + x_{3m}x_{3m+1}x_{3m+2}) + x_{3m+1}x_{3m+2}x_1 + x_{3m+2}x_1x_2$

$\leq x_1x_2x_3 + ... + x_{3m}x_{3m+1}x_{3m+2} + x_{3m+1}x_{3m+2}x_3 + x_{3m+2}x_1x_3$

$\leq (x_1+x_4+...+ x_{3m+1})(x_2+x_5+... + x_{3m+2}) \times (x_3+x_6+... + x_{3m})$

$$\leq \left[\frac{(x_1+x_2+...+x_{3m+2})}{3}\right]^3 = \frac{1}{27}$$

Khi $x_1=x_2=x_3=1/3$, $x_4=x_5=...=x_{3m+2} = 0$ thì $T(3m+1,3) = 1/27$. Vậy : $\text{Max}T(3m+1,3) = 1/27$.

Từ đây ta có thể đưa ra lời giải cho bài toán sau :

Bài toán (II). Xét $x_1, x_2, ..., x_n$ là n các số thực không âm, có tổng bằng 1.

Đặt $T(n, 3) = x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + ... + x_nx_1x_2$ $(n \geq 4)$. Chứng minh rằng :

$$\text{Max}T(n, 3) = \frac{(n^2+27+|n^2-27|)}{54n^2}.$$

Cùng một lược đồ tương tự như trên ta cũng đi tới các bài toán sau :

Bài toán 3.1. Tìm $\text{Max}T(5, 4)$. ĐS : 1/125.

Bài toán 3.2 Tìm MaxT(6, 4). ĐS : 1/216.

Bài toán 3.3. Tìm $\text{Max}T(7,4)$. ĐS : 1/256.

Bài toán 3.4. Tìm $\text{Max}T(4m, 4)$ $(m \geq 2)$

Bài toán 3.5. Tìm $\text{Max}T(4m+1,4$ $(m \geq 2)$

Bài toán 3.6. Tìm $\text{Max}T(4m+2,4)$ $(m \geq 2)$

Bài toán 3.7. Tìm $\text{Max}T(4m+3,4)$ $(m \geq 2)$

Các bài toán 3.4; 3.5; 3.6; 3.7 cùng có đáp số 1/256.

Từ đó các bạn thử phát biểu bài toán cho $T(n, 4)$

Tới đây, nếu chúng ta còn thời gian và đặc biệt là hứng thú thì ta có thể hình thành các bài toán tiếp theo. Xin được phép dừng lại và có mấy nhận xét sau :

1) Việc giải được bài toán tổng quát thì thật tuyệt vời, nhưng nếu chưa giải được nó mà ta giải được các bài toán đặc biệt thì cũng rất thú vị, và cũng có ích cho việc tiếp cận đến bài toán tổng quát.

2) Trong bài toán (*) thì với các trường hợp như $k = n-1$ hoặc n là bội số của k, ta có thể tìm ra ngay kết quả của $\text{Max}T(n, k)$. Từ các kết quả đã biết, phải chăng :

$$\max T(n, k) = \frac{(n^{k-1}+k^j+|n^{k-1}-k^k|)}{2k^kn^{k-1}} \text{ với } 2 \leq k < n \text{ ?}$$

3) Chúng ta có thể giải hoặc đọc hằng hà sa số bài toán riêng lẻ nhưng rồi chắc cũng phải quên. Cái còn lại, theo tôi, đáng nhớ nhất là những phương pháp giải toán nào đó. Nhưng để minh họa phương pháp thì lại cần những bài toán cụ thể, rõ ràng.

Tôi ước ao có được nhiều "Họ bài toán" kiểu trên, phủ đều khắp tất cả các phân môn của toán phổ thông.

THÔNG BÁO

Từ tháng 2 năm 2000 trụ sở Tòa soạn Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ chuyển về địa điểm mới. Mọi liên lạc và thư từ xin theo địa chỉ

Tạp chí TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Số 57 (cũ) Giảng Võ, Hà Nội

Số điện thoại : 04.5142648 - 04.5142650

Số fax : (84).4.5142648

ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/272. Giải phương trình nghiệm nguyên :

$$x^3 + 8 = 7\sqrt{8x+1}$$

NGUYỄN DUY LIÊN
(Vĩnh Phúc)

Bài T2/272. Chứng minh bất đẳng thức :

$$\left(\frac{4a}{b+c}+1\right)\left(\frac{4b}{c+a}+1\right)\left(\frac{4c}{a+b}+1\right) > 25$$

trong đó a, b, c là các số dương.

TRẦN TUẤN ĐIỆP
(Hà Nội)

Bài T3/272. Giải bất phương trình :

$$\sqrt[4]{(x-2)(4-x)} + \sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x} + 6x\sqrt{3x} \le x^3 + 30$$

TRẦN HỒNG SƠN
(Thái Bình)

Bài T4/272. Cho ba đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) tiếp xúc ngoài với nhau từng đôi một. Gọi A, B, C lần lượt là tiếp điểm của các cặp đường tròn (O_1) và (O_3), (O_2) và (O_3), (O_1) và (O_2). Tiếp tuyến chung của (O_1) và (O_2) qua C cắt đường tròn (O_3) tại M và N. Gọi D là trung điểm của MN. Chứng minh rằng C là tâm đường tròn bàng tiếp của ΔABD.

NGUYỄN XUÂN HÙNG
(Thanh Hóa)

Bài T5/272. Cho tứ giác lồi $ABCD$ với $AB+CD = BC+DA$. Tìm tập hợp các điểm M nằm bên trong tứ giác $ABCD$ sao cho tổng các khoảng cách từ M đến AB và CD bằng tổng các khoảng cách từ M đến BC và DA.

TRỊNH BẰNG GIANG
(Tp Hồ Chí Minh)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/272. Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho

$$f(p) = (2+3) - (2^2+3^2) + (2^3+3^3) - \ldots - (2^{p-1}+3^{p-1}) + (2^p+3^p)$$

chia hết cho 5.

NGUYỄN HỮU DỰ
(Nghệ An)

Bài T7/272. Tìm số các nghiệm của phương trình sau theo tham số k:

$$(1-x)\ln\frac{2k+1-2kx}{2kx-2k+1} = 1$$

TRẦN XUÂN BANG
(Quảng Bình)

Bài T8/272. Gọi m và M lần lượt là số nhỏ nhất và số lớn nhất trong tập hợp các số dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \ge 2)$. Chứng minh bất đẳng thức :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right) \le n^2 + \frac{n(n-1)}{2}\left(\sqrt{\frac{M}{m}} - \sqrt{\frac{m}{M}}\right)^2$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

HỒ QUANG VINH
(Nghệ An)

Bài T9/272. Gọi r, r_b, r_c lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp, đường tròn bàng tiếp tương ứng với góc B và góc C của tam giác ABC. Chứng minh rằng nếu $r + r_b + r_c = p$ (nửa chu vi của ΔABC) thì tam giác ABC vuông ở A.

LÊ CÔNG LỢI
(Vĩnh Phúc)

Bài T10/272. Xét các tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ cùng ngoại tiếp một mặt cầu cho trước. Mỗi tiếp diện của mặt cầu, song song với một mặt của mỗi tứ diện này, cắt ra khỏi tứ diện đó một tứ diện nhỏ. Gọi v_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ là thể tích của tứ diện nhỏ có đỉnh A_i. Gọi V là thể tích của tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. Tính giá trị nhỏ nhất của $\frac{v_1+v_2+v_3+v_4}{V}$ và xác định dạng của những tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ như thế.

ĐỖ THANH HÂN
(Bạc Liêu)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/272. Một vật M lăn từ chân A của một mặt phẳng nghiêng lên phía trên với vận tốc ban đầu v_o. Điểm B ở trên mặt phẳng nghiêng cách A là 30cm. Điểm C ở chính giữa của điểm B và điểm cao nhất mà vật M sẽ đạt được nếu không có va chạm. Tại điểm C người ta giữ một vật M_1 cùng khối lượng với vật M. Khi lăn đến C vật M va chạm xuyên tâm, đàn hồi với vật M_1 (khi bắt đầu va chạm vật M_1 coi là hoàn toàn tự do). Sau đó vật M đi xuống qua điểm B trước vật M_1 là $2s$ và qua điểm A trước

vật M_1 là 1,9s. Tìm v_o và gia tốc của vật M. Bỏ qua ma sát.

TRẦN MẠNH HÙNG
(Nghệ An)

Bài L2/272. Một dây dẫn bằng đồng, tiết diện tròn được uốn thành một vòng tròn đường kính d=40cm. Thả vòng rơi vào một từ trường. Mặt phẳng của vòng dây luôn luôn nằm ngang. Biết rằng độ lớn của vectơ cảm ứng từ biến thiên với độ cao theo quy luật :

$|\vec{B}| = B_o(1 + \alpha.H)T$, với $B_o = 0,2T$, $\alpha = 0,8$.

Tìm vận tốc rơi đều của vòng. Bỏ qua sức cản của không khí.

NGUYỄN XUÂN QUANG
(Vĩnh Phúc)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/272. Find integer-solutions of the equation

$$x^3 + 8 = 7\sqrt{8x+1}.$$

T2/272. Prove the inequality

$$\left(\frac{4a}{b+c}+1\right)\left(\frac{4b}{c+a}+1\right)\left(\frac{4c}{a+b}+1\right) > 25$$

for arbitrary positive numbers a, b, c.

T3/272. Solve the inequation

$$\sqrt[4]{(x-2)(4-x)} + \sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x} + 6x\sqrt{3x} \le x^3 + 30$$

T4/272. Let be given three circles (O_1), (O_2), (O_3), each of which touches externally the two others. Let A, B, C be respectively the touching points of (O_1) and (O_3), (O_2) and (O_3), (O_1) and (O_2). The common tangent of (O_1) and (O_2) at C cuts the circle (O_3) at M and N. Denote by D the midpoint of MN. Prove that C is the center of an escribed circle of ΔABD.

T5/272. Let be given a convex quadrilateral $ABCD$ such that $AB + CD = BC + DA$. Find the locus of points M inside the quadrilateral $ABCD$ such that the sum of distances from M to the lines AB and CD equals the sum of distances from M to the lines BC and DA.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/272. Find all prime numbers p such that

$$f(p) = (2+3) - (2^2+3^2) + (2^3+3^3) - \ldots - (2^{p-1} + 3^{p-1}) + (2^p + 3^p) \text{ is divisible by 5.}$$

T7/272. Find the number of solutions of the following equation in terms of the parameter k :

$$(1 - x)\ln\frac{2k+1-2kx}{2kx-2k+1} = 1.$$

T8/272. Let m and M be respectively the minimum and the maximum of given positive numbers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \ge 2)$. Prove the inequality :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right) \le n^2 + \frac{n(n-1)}{2}\left(\sqrt{\frac{M}{m}} - \sqrt{\frac{m}{M}}\right)^2.$$

When does equality occur ?

T9/272. Let r, r_b, r_c be the radii respectively of the incircle and the escribed circles in the angles B and C of a triangle ABC. Prove that if $r + r_b + r_c = p$ (the semi-perimeter of ΔABC) then the triangle ABC is right at A.

T10/272. Consider the tetrahedra $A_1A_2A_3A_4$ circumscribing a given sphere. Each tangent plane of the sphere, parallel to a face of a such tetrahedron $A_1A_2A_3A_4$, by cutting $A_1A_2A_3A_4$, deletes a small tetrahedron. Denote by v_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ the volume of the small tetrahedron at vertex A_i and by V the volume of $A_1A_2A_3A_4$. Find the least value of $\frac{v_1+v_2+v_3+v_4}{V}$ and determine the shape of the corresponding tetrahedra.

ĐIỂM BẤT ĐỘNG... *(Tiếp trang 9)*

hàm và điều kiện của biến cho phép ta tìm được điểm bất động $x = a$ của hàm số. Vấn đề còn lại là chọn các giá trị đặc biệt của cặp biến tự do để từ phương trình hàm đã cho ta có $p(f(x))$ là bất biến qua hàm $f(x)$. Cuối cùng là giải phương trình $p(f(x)) = a$ để xác định biểu thức hàm $f(x)$.

Bằng cách tương tự, có thể xây dựng khái niệm điểm bất động của các phép biến đổi hình học và ứng dụng để giải các bài toán hình học, dưới đây là một trong các bài toán đó (bạn đọc tự giải) :

Bài toán 3. Giả sử $l_1, l_2, \ldots, l_n$ là các đường thẳng nằm trên một mặt phẳng trong đó có ít nhất hai đường thẳng cắt nhau. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một bộ các điểm $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nằm tương ứng trên các đường thẳng $l_1, l_2, \ldots, l_n$ có tính chất đường vuông góc dựng tại x, với đường thẳng l_i đi qua điểm x_{i+1} (trong đó $x_{n+1} = x_i$)./.

Bài T1/268. *Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện : với mỗi số nguyên dương m < 1999 đều tồn tại số nguyên k sao cho* $\frac{m}{1999} < \frac{k}{n} < \frac{m+1}{2000}$

Lời giải. Dựa theo lời giải của *Bùi Văn Tuấn*, 9A, THCS Tự Cường, Tiên Lãng, **Hải Phòng**.

Ta để ý : Với các số dương a, b, c, d nếu ta có $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ thì ta có thể suy ra

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d} \qquad (1)$$

Với $a=m<1999$, $b=1999$, $c = m+1$, $d=2000$.

Theo (1), ta có :

$$\frac{m}{1999} < \frac{2m+1}{3999} < \frac{m+1}{2000} \qquad (2)$$

Như vậy với $n = 3999$ thì với mỗi số nguyên dương $m < 1999$ luôn tồn tại số nguyên $k = 2m+1$ để có

$$\frac{m}{1999} < \frac{k}{n} < \frac{m+1}{2000} \qquad (3)$$

Nếu $n < 3999$ hay $n \le 3998$ thì với $m=1998$ ta có :

$$\frac{1998}{1999} < \frac{k}{n} < \frac{1999}{2000} \Leftrightarrow \frac{1}{1999} > \frac{n-k}{n} > \frac{1}{2000} \quad (4)$$

Đặt $k' = n - k$ ta có

(4) $\Leftrightarrow 1999k' < n < 2000k'$ (5)

Nếu $k' = 1$ không tồn tại n để có (5)

$k' = 2$ có $3998 < n < 2000 \Rightarrow n = 3999$.

Vậy số nguyên dương n nhỏ nhất thỏa mãn (3) với mỗi số nguyên dương $m < 1999$ luôn tồn tại số $k = 2m+1$ là 3999.

Nhận xét. Các bạn sau đây cũng có lời giải đúng :

Phú Thọ: *Hoàng Ngọc Minh*, 9C, THCS Việt Trì, *Đinh Ngọc Thắng*, 9A, Dân Lập Châu Phong, Xuân Hòa, Mê Linh; *Nguyễn Thành Trung*, 9A, THCS Tam Đảo, Tam Dương; **Hà Tây:** *Phan Anh Dũng*, 9B, THCS Kiều Phú, Quốc Oai; **Hà Nam:** *Vũ Quang Thanh*, 8B, Nguyễn Hữu Tiến, Duy Tiên; **Hà Nội:** *Lê Đức Phương*, 9H, THCS Trưng Vương, Hoàn Kiếm; **Hải Dương:** *Vũ Đình Thế*, 9A, THCS Phả Lại, Chí Linh, *Phạm Thành Trung*, 9A, PTCS Nguyễn Trãi, Thị xã; **Hưng Yên:** *Đoàn Kim Huế*, 6C, THCS Phạm Huy Thông, Ân Thi; **Nam Định:** *Phùng Đại Diện*, 9CT, Nguyễn Du, Tp Nam Định; **Ninh Bình:** *Phạm Quang Huy*, 9T, *Đinh Quyết Tiến*, 9D, THCS TT Yên Ninh, Yên Khánh; **Nghệ An:** *Đậu Quốc Chung*, *Ngô Quốc Hưng*, *Võ Văn Thành*, *Trần Nhật Thu*, 9B, PTCS Đặng Thai Mai, TP Vinh; *Đặng Song Toàn*, 8A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, *Dương Thị Hiền*, 9A, THCS TT Quán Hành, Nghi Lộc, *Hồ Quốc Huy*, 9B, THCS Sông Hiếu, Thái Hòa, Nghĩa Đàn, *Phan Thị Ngọc Mai*, 7A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** *Chu Lê Song*, 9G, THCS Kỳ Anh; **Tây Ninh:** *Đào Duy Bình*, 9A, THCS TT Dương Minh Châu; **Vũng Tàu:** *Lê Xuân Nam*, E1/9, TT Chí Linh, Phường 9; **TP Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Lâm Hưng*, 9^{18}, Q.5; **Đồng Nai:** *Lê Phương*, 9/31, THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, TP Biên Hòa; **Bến Tre:** *Nguyễn Tiến Dũng*, 8^2, PTCS Mỹ Hóa.

TỐ NGUYÊN

Bài T2/268. *Giải phương trình*

$$x^5 - 15x^3 + 45x - 27 = 0 \qquad (1)$$

Lời giải. Nếu phương trình (1) có nghiệm nguyên x_0 thì 27 chia hết cho x_0. Thử thấy $x = -3$ là nghiệm của (1). Ta có :

(1) $\Leftrightarrow (x+3)(x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 18x - 9) = 0$.

Ta giải phương trình

$$x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 18x - 9 = 0 \qquad (2)$$

Biến đổi

(1) $\Leftrightarrow \quad x^4 - 3x^2(x-1) - 9(x-1)^2 = 0 \qquad (3)$

Đặt $x-1 = y$ ta được $x^4-3x^2y-9y^2 = 0$ dẫn đến $2x^2 = 3y \pm 3y\sqrt{5}$. Giải các phương trình này theo x :

a) $2x^2 - 3(\sqrt{5} + 1)x + 3(\sqrt{5} + 1) = 0$ có các nghiệm : $x_1 = \frac{1}{4}(3 + 3\sqrt{5} + \sqrt{30-6\sqrt{5}})$

$x_2 = \frac{1}{4}(3 + 3\sqrt{5} - \sqrt{30-6\sqrt{5}})$

b) $2x^2 + 3(\sqrt{5} - 1)x - 3(\sqrt{5} - 1) = 0$ có các nghiệm : $x_3 = \frac{1}{4}(3 - 3\sqrt{5} + \sqrt{30+6\sqrt{5}})$

$x_4 = \frac{1}{4}(3 - 3\sqrt{5} - \sqrt{30+6\sqrt{5}})$

Bốn nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4 đều thỏa mãn (2)

Vậy phương trình (1) có 5 nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4 và $x_5 = -3$ như đã nêu trên.

Nhận xét. 1) Trong 92 bài giải gửi đến Tòa soạn có 40 bài cho rằng PT (1) chỉ có 1 nghiệm $x = -3$! Nhiều bạn cho đáp số chưa rút gọn.

2) Có nhiều cách giải phương trình (2), (3). Chẳng hạn :

(2) $\Leftrightarrow 5x^4 = (x^2 + 6x - 6)^2$, hoặc

(2) $\Leftrightarrow (2x^2 - 3x + 3)^2 = 45(x-1)^2$ hoặc

Chia (3) cho x-1 và đặt ẩn phụ $t = \frac{x}{x-1}$ với $x \neq 1$, hoặc đặt ẩn phụ $x = y + 1$ thì (2) $\Leftrightarrow y^4 + y^3 - 9y^2 + y + 1 = 0$ rồi đặt ẩn phụ $t = y + \frac{1}{y}$ với $y \neq 0$.

3) Các bạn sau đây có lời giải đúng và gọn ;

Hà Giang: *Nguyễn Bằng Giang*, 9T, TH chuyên; **Phú Thọ:** *Trần Đình Quang, Hoàng Ngọc Minh, Hoàng Vũ Cảnh*, 9C, THCS Việt Trì, *Vũ Hà*, 9A1, THCS Phong Châu, Phù Ninh; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Thành Trung, Nguyễn Trung Tâm*, 9A, THCS Tam Đảo, Tam Dương, *Quách Anh Dũng, Nguyễn Tuấn Học*, 9B, THCS Yên Lạc, *Đinh Ngọc Thắng*, 9A, Dân Lập, Châu Phong, Xuân Hòa, Mê Linh; **Hưng Yên:** *Đoàn Kim Huế*, 6C, THCS Phạm Huy Thông, Ân Thi; **Hà Tây:** *Phạm Tuấn*, 9A, THCS Thạch Thất, *Phan Anh Dũng*, 9B, THCS Kiều Phú, Quốc Oai; *Nguyễn Văn Tú*, 7A, THCS Xuân Mai, Chương Mỹ; **Hà Nội:** *Lê Hùng Việt Bảo*, 8A, THCS Nguyễn Trường Tộ, Đống Đa; *Nguyễn Mạnh Tuấn*, 9C, Hà Nội - Amsterdam, *Trần Anh Tuấn*, 9A1, PTDL Lương Thế Vinh; **Bắc Ninh:** *Hoàng Chí Thực*, 9A, THCS Nguyễn Đăng Đạo, Thị xã Bắc Ninh; **Nam Định:** *Phùng Đại Diện*, 9CT, THCS Nguyễn Du, Nguyễn Đăng Hợp, 8A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên; **Hải Dương:** *Vũ Xuân Hiệu*, 9B, THCS Lai Cách, Cẩm Giàng, *Vũ Đình Thế*, 9A, THCS Phả Lại, Chí Linh; **Hải Phòng:** *Nguyễn Hải Tùng*, 9T, THCS Chu Văn An, Ngô Quyền; **Nghệ An:** *Bùi Đăng Tài*, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Quang Minh Vương*, 9B, THCS Sông Hiếu, Thái Hòa, Nghĩa Đàn, *Trần Nhật Thu, Võ Văn Thành*, 9B, THCS Đặng Thai Mai, Vinh; **Thừa Thiên - Huế** : *Đặng Đình Chính*, 9A, THCS Phú Bài, Hương Thủy; **Khánh Hòa:** *Võ Xuân Minh*, 9/1, THCS Cam Nghĩa, Cam Ranh; **Đồng Nai:** *Trần Võ Huy*, 9/3, THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, Biên Hòa; **Bến Tre:** *Nguyễn Tiến Dũng*, 8/2 THCS Mỹ Hóa; **Đồng Tháp:** *Lê Thanh Nhàn*, 9A1, THCB Cao Lãnh; **Tiền Giang:** *Phan Tuấn Anh*, 9/1, THCS Tân Hương, Châu Thành

VIỆT HẢI

Bài T3/268. *Chứng minh bất đẳng thức với n nguyên dương*

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \ldots + \frac{n}{3^n} < \frac{3}{4}.$$

Lời giải. Với k nguyên dương thì

$\frac{k+0,5}{2.3^{k-1}} - \frac{k+1,5}{2.3^k} = \frac{k}{3^k}$ Lần lượt thay $k = 1; 2; \ldots; n$ ta có :

$$\frac{1}{3} = \frac{1,5}{2} - \frac{2,5}{2.3}$$

$$\frac{2}{3^2} = \frac{2,5}{2.3} - \frac{3,5}{2.3^2}$$

. . . . . .

$$\frac{n}{3^n} = \frac{n+0,5}{2.3^{n-1}} - \frac{n+1,5}{2.3^n}$$

Cộng từng vế của n đẳng thức trên thì được

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \ldots + \frac{n}{3^n} = \frac{1,5}{2} - \frac{n+1,5}{2.3^n} < \frac{1,5}{2} = \frac{3}{4}.$$

Nhận xét. 1) Nhiều bạn sử dụng phương pháp quy nạp toán học và cho lời giải đúng.

2) Với cách làm trên, một số bạn đã chứng minh bất đẳng thức tổng quát hơn : "Với n nguyên dương và $a > 1$ thì : $\frac{1}{a} + \frac{2}{a^2} + \frac{3}{a^3} + \ldots + \frac{n}{a^n} < \frac{a}{(a-1)^2}$

3) Nhiều bạn đã sử dụng phương pháp tính tổng các số hạng của một cấp số nhân để tìm cách tính tổng của vế trái của bất đẳng thức.

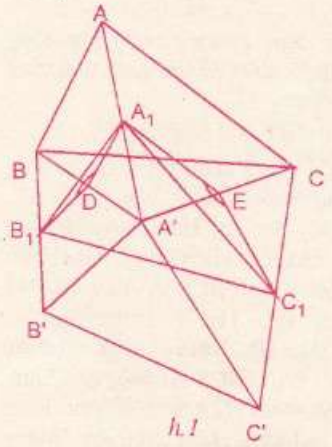
Tuy nhiên, lời giải như thế khá phức tạp.

4) Các bạn có lời giải tốt và nhận xét đúng để tổng quát bài toán là : **Quảng Nam:** *Đặng Quang Hải*, 8/2, THCS Chu Văn An, Duy Xuyên; **Hà Giang:** *Hoàng Nghĩa*, lớp 9, trường chuyên Hà Giang; **Gia Lai:** *Nguyễn Minh Thùy Linh*, 9a, THCS A Yun Pa; **Hà Nội:** *Lê Đức Phương*, 9H, THCS Trưng Vương; *Nguyễn Trung Hải*, 8D, Hà Nội - Amsterdamm, *Nguyễn Hữu Việt Khuê*, 9A, THCS Ái Mộ, Gia Lâm; **Cà Mau:** *Thái Hằng Ni*, 9A1, THCS A, Khánh Bình Tây, Trần Văn Thời; **Khánh Hòa:** *Nguyễn Hoàng Duy*, 8^{13}, *Trần Minh Bình*, 9^{15}, *Lê Nữ Huyền Trang*, 7^{16}, trường Thái Nguyên, Nha Trang; **Đắc Lắc:** *Phan Duy Hân*, 6A1, THCS Trần Hưng Đạo, Buôn Ma Thuột; **Đồng Nai:** *Đặng Đình Trung*, 8^2, THCS Hòa Bình, Tam Phước, Long Thành; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Thị Phương Dung*, 7A, THCS Vĩnh Yên; *Nguyễn Tiến Đua*, 9B, THCS Yên Lạc; **Nghệ An:** *Trần Nhật Thu* và *Ngô Quốc Hưng*, 9B, THCS Đặng Thai Mai, Tp Vinh; **Ninh Thuận:** *Nguyễn Hưng Nguyên Quốc*, 9^1, THCS Nguyễn Văn Tuấn, Phan Rang; **Bến Tre:** *Nguyễn Tiến Dũng*, 8^2, THCS Hòa Bình, Tam Phước, Long Thành; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Thị Phương Dung*, 7A, THCS Vĩnh Yên, *Nguyễn Tiến Đua*, 9B, THCS Yên Lạc; **Nghệ An:** *Trần Nhật Thu*, và *Ngô Quốc Huy*, 9B, THCS Đặng Thai Mai, TP Vinh; **Ninh Thuận:** *Nguyễn Hưng Nguyên Quốc*, 9^1, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Phan Rang; **Bến Tre:** *Nguyễn Tiến Dũng*, 8^2, THCS Mỹ Hòa; **Phú Thọ:** *Hoàng Ngọc Minh, Trần Minh Ngọc*, 9C, THCS Việt Trì; **Hải Phòng:** *Bùi Hải Ham*, 9B, NK Trần Phú; *Phan Thu Hương*, 8T, THCS Chu Văn An; **TP Hồ Chí Minh:** *Võ Công Danh*, 9A2, THCS Đống Đa, Bình Thạnh; *Võ Vương Phương Trí*, 8^1, THCS Hồng Bàng, Quận 5; **Vĩnh Long:** *Vũ Tấn Phúc*, 8, THCS chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Hải Dương:** *Vũ Xuân Hiệu*, 9B, THCS Lai Cách, Cẩm Giàng; **Thái Bình:** *Đỗ Xuân Diễn*, 9C, THCS Phú

Thọ, Thái Thụy; **Nam Định:** *Nguyễn Đăng Hợp*, 8A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Văn Phúc*, 9B, THCS Bình Hải, Bình Sơn; **Hà Tây:** *Nguyễn Văn Bằng*, 9A2, THCS Mĩ Đức.

LÊ THỐNG NHẤT

Bài T4/268. *Cho hai tam giác đồng dạng ABC và A'B'C' (các đỉnh mỗi tam giác đều viết ngược chiều kim đồng hồ). Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AA', BB', CC'. Chứng minh rằng $\Delta A_1B_1C_1$ đồng dạng với ΔABC.*



h.1

Lời giải.

Bổ đề : Cho hai tam giác đồng dạng ABC và $A'B'C'$ (các đỉnh mỗi tam giác đều viết ngược chiều kim đồng hồ). Khi đó :

$(BC, B'C') = (CA, C'A') = (AB, A'B')$

Góc $(AB, A'B')$ giữa hai tia AB và $A'B'$ xem là góc BAD, trong đó tia AD song song cùng chiều với tia $A'B'$.

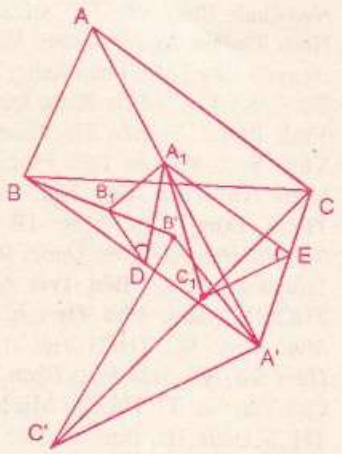
Chứng minh bổ đề dành cho bạn đọc. Trở lại bài toán của ta : Gọi D, E lần lượt là trung điểm của $A'B$, $A'C$ (h.1, h.2). Ta thấy :

$A_1D \parallel AB$ và $A_1D = \frac{1}{2}AB$,

$B_1D \parallel B'A'$ và $B_1D = \frac{1}{2}B'A'$,

$A_1E \parallel AC$ và $A_1E = \frac{1}{2}AC$,

$C_1E \parallel C'A'$ và $C_1E = \frac{1}{2}C'A'$ (*).



h.2

Từ (*) với chú ý các tam giác ABC, $A'B'C'$ đồng dạng ta có :

$$\frac{A_1D}{B_1D} = \frac{AB}{B'A'} = \frac{AC}{C'A'} = \frac{A_1E}{C_1E} \qquad (1)$$

Mặt khác, từ (*) với chú ý các tam giác ABC, $A'B'C'$ đồng dạng cùng chiều ta có :

$$\begin{cases} \angle A_1DB_1 = 180^o - (AB, A'B') \\ \angle A_1EC_1 = 180^o - (AC, A'C') \text{ (h.1)} \end{cases}$$

hoặc

$$\begin{cases} \angle A_1DB_1 = (AB, A'B') \\ \angle A_1EC_1 = (AC, A'C') \end{cases} \qquad \text{(h.2).}$$

Theo bổ đề trên ta có :

$$\angle A_1DB_1 = \angle A_1EC_1 \qquad (2)$$

Từ (1); (2) suy ra : $\Delta A_1DB_1 \sim \Delta A_1EC_1$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{A_1B_1}{A_1C_1} = \dfrac{A_1D}{A_1E} \\ \angle B_1A_1D = \angle C_1A_1E \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{A_1B_1}{A_1C_1} = \dfrac{A_1D}{A_1E} \\ \angle B_1A_1C_1 = \angle DA_1E \end{cases}$$

Mặt khác theo (*)

$$\text{Suy ra} \begin{cases} \dfrac{A_1B_1}{A_1C_1} = \dfrac{AB}{AC} \\ \angle B_1A_1C_1 = \angle BAC \end{cases}$$

$\Rightarrow \Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta ABC$

Nhận xét. 1) Không có bạn nào cho lời giải hoàn chỉnh. Nguyên nhân là bài toán đang xét liên quan đến vấn đề định hướng góc.

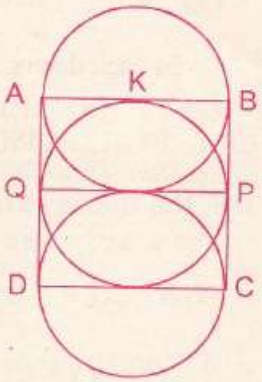
2) Các bạn sau đây có lời giải tương đối tốt : **Hà Nội:** *Nguyễn Thị Hải Yến*, $8I_2$ - Marie-Curie, *Nguyễn Anh Tôn*, 9T, THCS Ngô Sĩ Liên; **Quảng Bình:** *Hoàng Minh Anh*, 8T, THCS Đồng Mĩ, Đồng Hới; **Nghệ An:** *Trần Nhật Thu*, 9B, THCS Đặng Thai Mai, Vinh; **Phú Thọ:** *Hoàng Ngọc Minh*, 9C, THCS Việt Trì, *Nguyễn Thái Bình*, $9A_1$, THCS Phong Châu; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Văn*, Đức Thịnh, Đức Thọ, Hà Tĩnh; **Khánh Hòa:** *Trần Minh Bình*, 9T, THCS Thái Nguyên, Nha Trang; **Yên Bái:** *Trần Bình Minh*, 9K, THCS Lê Hồng Phong, Thị xã Yên Bái; **Hải Dương:** *Vũ Xuân Hiệu*, THCS Lai Cách, Cẩm Giàng

NGUYỄN MINH HÀ

Bài T5/268. *Dùng 3 hình tròn đường kính d có thể phủ kín hình vuông có cạnh bằng 1 được không, khi:*

a) $d = 1$? ; b) $d = 1,04$?

Lời giải : a) Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử có thể phủ được hình vuông đơn vị $ABCD$ bởi ba đường tròn (O_1), (O_2) và (O_3) đường kính $d=1$. Theo nguyên lý Đirichlê thì có 2 trong số 4 đỉnh A, B, C, D thuộc một đường tròn kể trên, và do đường chéo của $ABCD$ là $\sqrt{2}$ cho nên hai đỉnh này chỉ có thể là hai đỉnh kề nhau, giả sử A và B thuộc (O_1). Do $AB = 1$, nên (O_1) phải là đường tròn đường kính AB.

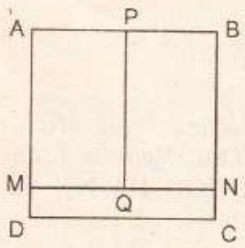


Ta xét hai trường hợp :

a1) Hai đỉnh còn lại C và D cùng thuộc một hình tròn, chẳng hạn hình tròn (O_2). Tương tự, do $CD = 1$ cho nên (O_2) là hình tròn đường kính CD. Khi đó trung điểm P của cạnh BC và trung điểm Q của cạnh DA phải thuộc hình tròn (O_3), do chúng không thuộc (O_1) cũng như (O_2). Do $PQ = 1$ cho nên (O_3) là hình tròn đường kính PQ. Dễ thấy ba hình tròn này không thể phủ kín được hình vuông $ABCD$.

a2) C và D thuộc hai hình tròn khác nhau: C thuộc (O_2) và D thuộc (O_3) chẳng hạn. Khi đó điểm M tùy ý khác A của DA phải thuộc hình tròn (O_3) vì $MC>1$ cho mọi $M \neq A, D$. Dễ thấy như vậy thì (O_3) phải là hình tròn đường kính DA. Tương tự (O_2) là hình tròn đường kính BC. Dễ thấy ba hình tròn này không thể phủ được hình vuông $ABCD$.

b) Ta chia hình vuông $ABCD$ thành 3 hình chữ nhật như trong hình vẽ. Hình chữ nhật cạnh $CDMN$ có cạnh $DM=CN= 0,2$, $AM = PQ = BN = 0,8$, $AP = PB = 0,5$, $MQ = QN = 0,5$. Ta có:



$MC = \sqrt{1+0,2^2}=\sqrt{1,04} < 1,04$ và

$\sqrt{0,8^2+0,5^2}=\sqrt{0,89}<1.$

Như vậy có thể phủ được hình vuông $ABCD$ bởi ba hình tròn đường kính không vượt quá 1,04.

Nhận xét: Có bạn giải sai vì quy việc phủ hình vuông bởi ba hình tròn về việc so sánh diện tích hình vuông với tổng diện tích của ba hình tròn. Bạn Hoàng Ngọc Minh lớp 9C trường THCS Việt Trì đã tìm cách tính bán kính nhỏ nhất của hình tròn có thể phủ hình vuông đơn vị và nhận thấy có thể thay đường kính 1,04 bằng $\sqrt{6}-\sqrt{2}$.

Bằng cách xếp ba hình chữ nhật như trong hình vẽ của ta, các bạn có thể thấy 3 hình tròn đường kính 1,015625 phủ kín được hình vuông đơn vị. Hai bạn Hoàng Ngọc Minh lớp 9C trường THCS **Việt Trì** và Trần Minh Bình THCS Thái Nguyên Nha Trang - **Khánh Hòa** có lời giải ngắn gọn và chính xác.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T6/268. *Dãy số (a_n) $(n = 0, 1, 2, ...)$ được xác định bởi : $a_0 = a$, $a_1 = b$, $a_{n+2} = da_{n+1} - a_n$ với mọi $n = 0, 1, 2$ trong đó a, b là hai số nguyên khác không còn d là số thực. Tìm mọi giá trị của d để a_n là số nguyên với mọi $n = 0, 1, 2,...$*

Lời giải. (của bạn *Phạm Tuấn Anh*, 11 Toán, ĐHKHTN-ĐHQG Tp Hồ Chí Minh) Giả sử d thỏa mãn đề bài. Dễ dàng chứng minh bằng quy nạp rằng

$$a_{n+2}a_n - a_{n+1}^2 = c \ \forall n = 0, 1, 2, ... \ (1)$$

ở đó c là hằng số.

Dễ thấy $d \in Q$. Đặt $d = \frac{p}{q}$, $(p, q) = 1$. Ta chứng minh $a_n \vdots q^k \ \forall n \geq k$. Thật vậy với $k = 1$: $a_{n+1} + a_{n-1} = da_n \Rightarrow q(a_{n+1} + a_{n-1}) = pa_n \Rightarrow a_n \vdots q \ \forall n \geq 1$.

Giả sử khẳng định đã đúng với k. Ta có $q(a_{n+2} + a_n) = pa_{n+1}$. Theo giả thiết quy nạp $\forall n \geq k$ thì $a_{n+2} + a_n = q^k s$. Suy ra $pa_{n+1} = q^{k+1}.s \Rightarrow a_{n+1} \vdots q^{k+1} \ \forall n \geq k$ tức là $a_n \vdots q^{k+1}$ $\forall n \geq k+1$.

Từ hệ thức (1) suy ra $c \vdots q^{2k}$ với mọi k.

Trường hợp 1. Nếu $c \neq 0$ suy ra $q = 1$ tức là $d \in Z$.

Trường hợp 2. Nếu $c = 0 \Leftrightarrow d = \dfrac{r^2+1}{r}$ ở đó $r = \dfrac{b}{a}$.

Từ đẳng thức $a_{n+2}a_n = a_{n+1}^2$ bằng quy nạp suy ra $a_n = r^n a$. Đặt $r = \dfrac{u}{v}$, $(u, v) = 1$ ta suy ra

$a \vdots v^n \Rightarrow v = 1 \Rightarrow r \in Z \Rightarrow b \vdots a$. Thử lại ta thấy nếu $d \in Z$ hoặc $d = r + \dfrac{1}{r} = \dfrac{a^2+b^2}{ab}$ với $b \vdots a$ thì $a_n \in Z$.

Kết luận: 1) Nếu b không chia hết cho a thì $d \in Z$.

2) Nếu $b \vdots a$ thì $d \in Z$ hoặc $d = \dfrac{a^2+b^2}{ab}$.

Nhận xét: Trong số 62 bài gửi đến chỉ có 17 bài có lời giải đúng. Các bài giải không đúng đã bỏ sót trường hợp "thú vị" là $d = \dfrac{a^2+b^2}{ab}$ với $b \vdots a$.

Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Đỗ Thị Thu Hà*, PTTH Hoàng Văn Thụ, **Hòa Bình**; *Phạm Đức Hiệp*, 10T, PTNK Trần Phú, **Hải Phòng**; *Trần Đình Nguyên*, 12T, PTNK ĐHQG **Tp Hồ Chí Minh**; *Vũ Ngọc Minh*, 10A, ĐHSP **Hà Nội**; *Trần Mạnh Hùng*, 11T, PTTH Lam Sơn, **Thanh Hóa**; *Trần Tuấn Anh*, 12 Toán, Lê Quý Đôn, Khánh Hòa, *Nguyễn Trung Lập*, 12A chuyên Vĩnh Phúc, *Tô Minh Hoàng*, 11T, PTNK Hải Dương.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T7/268. *Tìm giới hạn của* $\dfrac{S_n}{n^2}$ *khi* $n \to +\infty$, *trong đó*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \cos\frac{\pi}{k}.$$

Lời giải. Chúng ta sẽ đưa ra đánh giá

$a_n \le S_n \le b_n$ với mọi $n = 1, 2, 3, \ldots$ thỏa mãn $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b_n}{n^2} = \dfrac{1}{2}$, do đó $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{n^2} = \dfrac{1}{2}$.

Thật vậy chúng ta có ngay

$$S_n \le \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

và $b_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ thỏa mãn $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b_n}{n^2} = \dfrac{1}{2}$.

Có ba cách đưa ra a_n :

Cách 1. (của các bạn *Phạm Gia Vĩnh Anh*, $10A_1$, PTCTT-ĐHSPI **Hà Nội**; *Chu Ngọc Hưng*, *Bùi Duy Thịnh*, 10T, PTTH Nguyễn Trãi, **Hải Dương** và một số bạn)

Chú ý ta có $x > \sin x$ với mọi $x > 0$.

Do đó $\cos x = 1 - 2\sin^2\dfrac{x}{2} > 1 - 2.\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 = 1 - \dfrac{x^2}{2}$ với mọi $x \in (0, 2\pi)$.

Áp dụng bất đẳng thức trên ta có

$$S_n > \sum_{k=1}^{n} k\left(1 - \frac{\pi^2}{2k^2}\right) \ge \sum_{k=1}^{n} k\left(1 - \frac{\pi^2}{2k}\right) = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n\pi^2}{2}.$$

Ta có $a_n = \dfrac{n(n+1)}{2} - \dfrac{n\pi^2}{2}$ thỏa mãn $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{n^2} = \dfrac{1}{2}$.

Cách 2. (của các bạn *Trần Đức*, *Trần Đoàn Việt*, 10A1, PTCTT, ĐHSP **Hà Nội** và một số bạn)

Xét hàm số $f(x) = x + \cos x$, $x \ge 0$.

Ta có $f'(x) = 1 - \sin x \ge 0$ với mọi x.

Do đó $f(x)$ là hàm số đồng biến.

Nói riêng với mọi $x \ge 0$ thì $f(x) \ge f(0)$, tức là $\cos x \ge 1 - x$.

Áp dụng bất đẳng thức trên

$$S_n \ge \sum_{k=1}^{n} k\left(1 - \frac{\pi}{k}\right) = \frac{n(n+1)}{2} - n\pi.$$

Trong trường hợp này ta lấy

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2} - n\pi$$

Ta có $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{n^2} = \dfrac{1}{2}$.

Cách 3. (của các bạn *Hoàng Ngọc Minh*, 9C, THCS Việt Trì, **Phú Thọ**; *Nguyễn Tuấn Dương*, 10A, ĐHKHTN- ĐHQG **Hà Nội** và một số bạn.

Chú ý với mọi $m \in N$, $m \ge 2$

$$(m+1)\cos\frac{\pi}{m+1} - m\cos\frac{\pi}{m} > 1$$

(Bài T6/74 Tạp chí THTT).

Do đó với mọi $m \in N$, $m \geq 3$

$$m\cos\frac{\pi}{m} = \sum_{k=2}^{m-1}\left((k+1)\cos\frac{\pi}{k+1} - k\cos\frac{\pi}{k}\right) > m-2.$$

Áp dụng bất đẳng thức trên

$$S_n > \sum_{k=3}^{n}(k-2) - 1 = \frac{n(n+1)}{2} - 2n.$$

Và $a_n = \frac{n(n+1)}{2} - 2n$ thỏa mãn

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n^2} = \frac{1}{2}.$$

Nhận xét. 1. Trong gần 150 bài giải, đa số các bạn dùng đạo hàm để chứng minh bất đẳng thức

$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$ với mọi $x \in (0, 2\pi)$. Tất cả các bạn đều giải đúng.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T8/268. *Hãy tìm tất cả các tập A gồm hữu hạn số thực có tính chất sau : nếu x thuộc A thì $f(x) = x^3 - 3|x| + 4$ cũng thuộc A*

Lời giải.

$$f(x) = x^3 - 3|x| + 4 = \begin{cases} x^3 - 3x + 4 & \text{nếu } x \geq 0 \\ x^3 + 3x + 4 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

Xét phần tử a nào đó thuộc A.

(1) Nếu $a>0$, áp dụng BĐT Côsi ta có $f(a) - a = a^3 - 3a + 4 - a = a^3 + 2 + 2 - 4a \geq (3\sqrt[3]{4} - 4)a > 0$. Bằng quy nạp ta được dãy số dương tăng vô hạn a, $a_1 = f(a)$, $a_2 = f(a_1)$, ... $\Rightarrow$ trái với tính hữu hạn của tập A.

(2) Nếu $a = 0$ thì $f(a) = 4 \in A$. Quy về trường hợp (1).

(3) Nếu $a < 0$. Vì mọi phần tử của A (nếu có) đều phải âm nên chỉ cần xét $f(a) = a_1 < 0$. Gọi $a_2 = f(a_1)$, ta có

$$a_2 - a_1 = f(a_1) - f(a) =$$
$$= a_1^3 + 3a_1 + 4 - (a^3 + 3a + 4) =$$
$$= a_1^3 - a^3 + 3(a_1 - a) =$$
$$= (a_1 - a)(a_1^2 + a_1a + a^2 + 3).$$

Xảy ra 3 trường hợp sau :

(•) $a_2 > a_1 \Leftrightarrow a_1 > a$. Từ đó ta có dãy số tăng vô hạn a, $a_1 = f(a)$, $a_2 = f(a_1)$... (có thể đến lúc nào đó trong dãy này có số dương thì quy về trường hợp (1) $\Rightarrow$ trái với tính hữu hạn của tập A.

(•) $a_2 < a_1 \Leftrightarrow a_1 < a$. Bằng quy nạp ta được dãy số âm giảm vô hạn a, $a_1 = f(a)$, $a_2 = f(a_1)$,... $\Rightarrow$ trái với tính hữu hạn của tập A.

(•) $a_2 = a_1 \Leftrightarrow a_1 = a \Leftrightarrow f(a) = a$. Lúc đó tập A chỉ có 1 phần tử là nghiệm âm của phương trình $x^3 + 3x + 4 = x \Leftrightarrow x^3 + 2x + 4 = 0$ (xem cách giải phương trình này ở bài *Một hằng đẳng thức đẹp*). Phương trình này chỉ có 1 nghiệm thực âm là

$$a = \sqrt[3]{-2 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{29}{3}}} + \sqrt[3]{-2 - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{29}{3}}}$$

Kết luận : Tập A chỉ có 1 phần tử a được xác định như trên.

Nhận xét. 1) Khá nhiều bạn đi đến khẳng định tập A chỉ chứa một phần tử là nghiệm của phương trình bậc 3 nhưng không chỉ ra công thức của nghiệm.

2) Đa số các bạn xét chiều biến thiên của hàm số $f(x)-x$ bằng công cụ đạo hàm đối với hàm số liên tục. Ở bài này về thực chất chỉ xét dãy số nên có thể dùng kiến thức toán lớp 10 như lời giải nêu trên.

3) Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Hà Giang: *Mai Văn Hải*, 10B, PTTH Lê Hồng Phong; **Vĩnh Phúc:** *Vũ Văn Phong, Nguyễn Trung Lập, Vũ Dũng*, 12A1, PTTH chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Nội:** *Nguyễn Tuấn Dương*, 10 Toán, *Trần Tất Đạt*, 12B Toán, ĐHKHTN-ĐHQG, *Phạm Gia Vĩnh Anh*, 10A1, *Nguyễn Như Thắng*, 11A1, PTCT-ĐHSP Hà Nội; *Trần Thùy Dương*, 10A1, PTTH Trần Hưng Đạo, Thanh Xuân, *Bùi Đức Hiệp*, 10P, PTTH Marie Curie, *Nguyễn Bá Trung*, 10 Tin, PTTH Hà Nội-Amsterdam; **Hải Dương:** *Phạm Quốc Hoàng, Phạm Hồng Quân*, 12 Toán, PTTH NK Nguyễn Trãi, *Đoàn Văn Tuyến*, 11A5, PTTH Hồng Quang; **Thanh Hóa:** *Lê Như Văn*, 12A5, PTTH Nguyễn Trãi, *Trần Mạnh Hùng*, 11T, PTTH Lam Sơn; **Quảng Trị:** *Trần Văn Cường*, 12A4, PTTH Đông Hà, *Trần Việt Anh, Lê Anh Tuấn*, 11 Toán, PTTH chuyên Lê Quý Đôn; **Thừa Thiên - Huế:** *Nguyễn Dư Thái*, 11 Toán, PTCT-ĐHKH, *Giang Hán Phú*, 11TT1, *Huỳnh Công Phước, Phạm Nguyên Quý*, 12CT, PTTH Quốc học; **Quảng Ngãi:** *Trương Quang Thành*, 12T, PTTH Lê Khiết; **Khánh Hòa:** *Trần Tuấn Anh, Võ Duy*, 12T, PTTH Lê Quý Đôn, Nha Trang; **Bình Thuận:** *Phạm Lê Phương Duy*, 11A6, PTTH Trần Hưng Đạo, Phan Thiết; **Tp Hồ Chí Minh:** *Phạm Tuấn Anh, Lương Thế Nhân*, 11T, *Trần Đình Nguyên*, 12T, PTNK-ĐHKHTN; **Đồng Tháp:** *Ngụy Đức Thuận*, 11T, THCB Cao Lãnh

PHI PHI

Bài T9/268. *Gọi a, b, c, r, R lần lượt là ba cạnh, bán kính đường tròn nội tiếp, bán kính đường tròn ngoại tiếp của một tam giác. Chứng minh rằng :*
$a(b+c-a)^2 + b(c+a-b)^2 + c(a+b-c)^2 \le 6\sqrt{3}\,R^2(2R-r)$. *Đẳng thức xảy ra khi nào ?*

Lời giải. $a(b+c-a)^2 + b(c+a-b)^2 + c(a+b-c)^2$
$= 4abc - (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$

$$= 16RS - \frac{8S^2}{p} = 8S(2R-r) = 8pr(2R-r) \quad (1)$$

(Áp dụng các công thức $abc = 4prR$

$pr^2 = \dfrac{S^2}{p} = (p-a)(p-b)(p-c)$ ở đó $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

và S là diện tích tam giác)

Mặt khác ta có $\sin A + \sin B + \sin C \le \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

nên $\sin A\sin B\sin C \le \left(\dfrac{3\sqrt{3}}{6}\right)^3 = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$

$\Leftrightarrow 8R^2\sin A\sin B\sin C \le 3\sqrt{3}\,R^2$

$\Leftrightarrow 4S \le 3\sqrt{3}\,R^2$

$\Leftrightarrow 8pr(2R-r) \le 6\sqrt{3}\,R^2(2R-r)$ (2)

(Vì $2R > r$)

Từ (1) và (2) suy ra điều cần chứng minh.

Đẳng thức đạt được khi $\sin A + \sin B + \sin C = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ và $r = \dfrac{R}{2}$ tức ΔABC đều.

Nhận xét. Giải tốt bài này có các bạn

Hòa Bình: *Đỗ Thị Thu Hà*, 12 Toán, PTTH Hoàng Văn Thụ; **Vĩnh Phúc:** *Trần Mạnh Cường*, 11A2, *Nguyễn Thanh Hải*, 10A1, PTTH chuyên Vĩnh Phúc, *Trần Vũ Sơn Hà*, 10A4, PTTH Bình Xuyên; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Anh Tuấn*, 11 Toán, PTTH Năng khiếu Hàn Thuyên, **Hà Tây:** *Nguyễn Văn Thắng*, 12A, PTTH Nguyễn Huệ; **Hải Phòng:** *Phạm Đức Hiệp*, 10 Toán, PTNK Trần Phú; **Hải Dương:** *Đinh Phú Hùng*, 11A7, PTTH Hồng Quang; **Hà Nội:** *Vũ Thành Long*, 10A1, PTCT ĐHSP, Ngô Quốc Anh, 11A Toán, ĐHKHTN, *Trần Tất Đạt*, 12B Toán, ĐHKHTN; **Nam Định:** *Vũ Trường Giang*, 12A3, PTTH Trần Hưng Đạo, *Nguyễn Minh Đức*, 10A3, THPT A Hải Hậu; **Quảng Trị:** *Lê Hoàng Nam*, 11 Toán, Lê Quý Đôn, Đông Hà; **Quảng Ngãi:** *Võ Trung Thu, Trần Phú Khánh*, 11 Toán, chuyên Lê Khiết; **Khánh Hòa:** *Trần Tuấn Anh, Võ Duy*, 12 Toán, PTTH Lê Quý Đôn, Nha Trang; **Ninh Thuận:** *Nguyễn Hưng Nguyên Quốc*, 9_2, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Phan Rang; **Đồng Nai:** *Dương Trọng Nghĩa*, 11A3, PTTH Ngô Quyền, Biên Hòa; **Tp Hồ Chí Minh:** *Trần Quang*,10T, PTNK, ĐHQG; **Đồng Tháp:** *Bùi Hiếu Nghĩa*, 11T, TH chuyên ban Cao Lãnh; **Tiền Giang:** *Hồ Thanh Sơn*, 11 Toán, PTTH chuyên.

VŨ KIM THỦY

Bài T10/268. *Cho tứ diện ABCD với $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $DA = a'$, $DB' = b'$, $DC = c'$. Gọi h_a, h_b, h_c, h_d lần lượt là các đường cao của tứ diện xuất phát từ các đỉnh A, B, C, D. Gọi r và R tương ứng là bán kính mặt cầu nội và ngoại tiếp tứ diện. Chứng minh rằng :*

$$\frac{R}{r} \ge \frac{a+b+c+a'+b'+c'}{\sqrt{h_ah_b+h_bh_c+h_ch_a+h_dh_a+h_dh_b+h_dh_c}} \quad (*)$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải. (của *Vũ Thành Long*, 10A1, PTCT ĐHSP **Hà Nội**; *Nguyễn Trọng Dũng*, 11T, Trần Phú, **Hải Phòng**; *Đỗ Thị Thu Hà*, 12T, *Hoàng Văn Thụ*, **Hòa Bình**; *Hoàng Ngọc Minh*, 9C, THCS Việt Trì, **Phú Thọ:** *Nguyễn Đình Ngân*, 12A9, PTTH Bỉm Sơn, **Thanh Hóa**; *Trần Tuấn Anh*, 12T, Lê Quý Đôn, Khánh Hòa và nhiều bạn khác).

Gọi G và O lần lượt là trọng tâm và tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Ta có :
$BC^2 = (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})^2 = 2R^2 - 2\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}$, suy ra
$2\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} = 2R^2 - a^2$.

Mặt khác, lại có :

$$4\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}.$$

Từ đó ta được :

$10OG^2 = 4R^2 + (2R^2-a^2) + (2R^2-b^2) + (2R^2-c^2) + (2R^2-a'^2) + (2R^2-b'^2) + (2R-c'^2)$
$= 16R^2 - (a^2+b^2+c^2+a'^2+b'^2+c'^2) \ge 0$ (1)

Từ (1) và theo B.Đ.T Bunhiacốpski :

$$6(a^2+b^2+c^2+a'^2+b'^2+c^2) \ge$$
$$\ge (a+b+c+a'+b'+c')^2; \quad (2)$$

ta được : $a+b+c+a+b+c \le 4R\sqrt{6}$ (3)

Ngoài ra, trong một tứ diện bất kì ta có hệ thức quen thuộc sau :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_d} \quad (4)$$

(chứng minh bằng phương pháp thể tích không có gì khó khăn).

Từ (4) rồi sử dụng B.Đ.T Côsi, ta được :

$$\frac{1}{r} \ge \frac{4}{\sqrt[4]{h_ah_bh_ch_d}} = \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{6\sqrt[6]{(h_ah_bh_ch_d)^3}}}$$

$$\geq \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a + h_d h_a + h_d h_b + h_d h_c}} \quad (5)$$

Cuối cùng, từ (3) và (5) ta thu được B.Đ.T (*) cần tìm.

Đẳng thức xảy ra ở (1) khi và chỉ khi $O \equiv G$ và $ABCD$ là tứ diện gần đều, còn xảy ra ở (3) khi và chỉ khi : $a = b = c = a' = b' = c'$ và tứ diện $ABCD$ là đều. Còn đẳng thức xảy ra ở (5) khi và chỉ khi $\frac{1}{h_a} = \frac{1}{h_b} = \frac{1}{h_c} = \frac{1}{h_d}$ hay $h_a = h_b = h_c = h_d$, và do đó $S_a = S_b = S_c = S_d$, tứ diện $ABCD$ là gần đều. Vì vậy, muốn có đẳng thức xảy ra đồng thời ở (1), (3) và (5), và do đó xảy ra ở B.Đ.T (*), cần và đủ là $ABCD$ là một tứ diện đều.

Nhận xét. 1) Một số bạn có nhận xét rằng B.Đ.T (3) trong lời giải của bài toán đã được nêu ra trong bài toán T10/244 (tháng 10/1997).

2) Nhiều bạn không biết hoặc không sử dụng hệ thức quen thuộc (4) mà lại sử dụng những hệ thức liên quan đến diện tích các mặt của tứ diện nên lời giải dài dòng, không gọn.

3) Một số bạn không chỉ rõ khi nào B.Đ.T (*) cần tìm trở thành đẳng thức. Nhiều bạn kết luận đúng nhưng không lập luận đầy đủ hoặc không chú ý đầy đủ đến tất cả các B.Đ.T đã chứng minh trong lời giải của bài toán.

4) Ngoài các bạn đã nêu tên ở trên, các bạn sau đây có lời giải tốt :

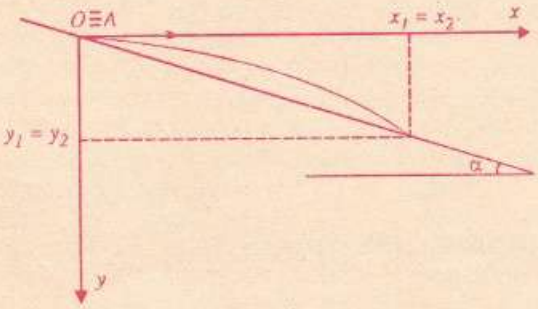
Bắc Ninh: *Nguyễn Thành Chương*, 11A1, THPT Gia Bình số 1; **Hải Dương:** *Vũ Vĩnh Trường*, 12T, PTTH Nguyễn Trãi; **Hải Phòng:** *Trịnh Quang Hiếu*, 11A9, PTTH Ngô Quyền; **Hà Giang:** *Nguyễn Kim Cương*, 11CT, trường chuyên tỉnh Hà Giang; **Tuyên Quang:** *Nguyễn Văn Ngọc*, 12C1, PTTH chuyên tỉnh Tuyên Quang; **Vĩnh Phúc:** *Vũ Thanh Tùng, Vũ Văn Phong*, 12A1, *Đỗ Duy Cương, Dương Hà Phú*, 11A1, *Đỗ Mạnh Tùng*, 11A3, *Nguyễn Đắc Tùng*, 11A3, trường PTTH chuyên Vĩnh Phúc; *Nguyễn Hoàng Trung*, 11A10, chuyên Vĩnh Phúc; *Nguyễn Hoàng Trung*, 11A10, PTTH Ngô Gia Tự, Lập Thạch; **Thanh Hóa:** *Lưu Văn Hiệu*, 12A, PTTH Ba Đình, Nga Sơn; **Hà Tĩnh:** *Lê Tất Thắng*, 11CT, ĐHSP Vinh; **Quảng Ngãi:** *Đặng Đình Thuấn*, 11T, PTTH chuyên Lê Khiết; **Ninh Thuận:** *Lê Tiến Trung*, 12A2, PTTH Chu Văn An, Ninh Thuận.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài L1/268. *Trên dốc nghiêng 30°, từ A thả cho viên bi thứ nhất lăn xuống dốc. Hệ số ma sát giữa viên bi thứ nhất và mặt dốc là k = 0,02. Sau đó 1 giây, từ A bắn viên bi thứ hai bay theo phương nằm ngang với vận tốc v(m/s). Xác định vị trí điểm va chạm của hai viên bi*

Hướng dẫn giải. Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ, gốc O trùng với A. Trên đường lăn xuống dốc viên bi 1 chịu tác dụng của trọng lực, phản lực vuông góc và lực ma sát. Áp dụng định luật II Niutơn dễ dàng suy ra gia tốc của viên bi 1 :

$$a = g(\sin\alpha - k\cos\alpha) \quad (1)$$



Phương trình đường đi của viên bi thứ nhất : $s = \frac{at^2}{2}$. Phương trình tọa độ thời gian của viên bi thứ nhất : $x_1 = \frac{1}{2}a\cos\alpha.t^2$;

$y_1 = \frac{1}{2}a\sin\alpha.t^2$.

Phương trình tọa độ thời gian của viên bi thứ hai :

$$x_2 = v(t-1) ; \quad y_2 = \frac{1}{2}g(t-1)^2.$$

Viên bi thứ hai rơi trúng viên bi thứ nhất khi $x_1 = x_2$; $y_1 = y_2$ hay : $v(t-1) = \frac{1}{2}a\cos\alpha t^2$;

$$\frac{1}{2}g(t-1)^2 = \frac{1}{2}a\sin\alpha.t^2.$$

Giải hệ phương trình này ta được :

$$t = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g} - \sqrt{a\sin\alpha}} ; v = \frac{ag\cos\alpha}{2(\sqrt{ag\sin\alpha} - a\sin\alpha)}$$

Từ đó

$$s = \frac{at^2}{2} = \frac{ag}{2(\sqrt{ag\sin\alpha} - a\sin\alpha)^2}.$$

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

Thay số ta được: $v \approx 8{,}36$m/s, và $s \approx 9{,}32$m. Điểm va chạm cách A khoảng 9,32m.

Nhận xét. Các bạn có lời giải đúng :

Yên Bái: *Vũ Hải Đăng*, 12A1, PTTH chuyên Yên Bái;**Nghệ An:** *Nguyễn Đình Quang*, 10 Lí, *Trần Ngọc Thắng*, 12A3, PTTH chuyên Phan Bội Châu; *Lê Ngọc Tân*, 11A2, khối chuyên toán ĐHSP Vinh; **Phú Thọ:** *Đặng Mạnh Cường*, 10A1, PTTH Hạ Hòa; *Vũ Tuấn Anh*, 11A, PTTH Hùng Vương; **Thái Nguyên:** *Vũ Quốc Việt*, 10 Lí, PTTH chuyên Thái Nguyên; **Đà Nẵng:** *Thái Nguyên*, 11A2, *Thanh Bảo*, 12A2, PTTH chuyên Lê Quý Đôn; **Vĩnh Long:** *Lâm Hữu Khánh Phương*, 11T, PTTH Nguyễn Bỉnh Khiêm, Tx Vĩnh Long; **Đồng Nai:** *Nguyễn Kim Huy*, 10 Lí 1, PTTH chuyên Lương Thế Vinh; **Hà Tây:** *Nguyễn Minh Chính*, 11 Toán I, PTTH chuyên Nguyễn Huệ; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Kim Thắng*, 11A3, PTTH chuyên Vĩnh Phúc;**Hà Tĩnh:** *Trương Hữu Cảt*, 12 Lí, PTTH NK Hà Tĩnh; **Tp Hồ Chí Minh:** *Lương Thế Nhân*, 11 Toán, PTNK, ĐHQG Tp Hồ Chí Minh; **Phú Yên:** *Nguyễn Cao Huynh*, 10 Lí, PTTH Lương Văn Chánh; **Tiền Giang:** *Trần Tất Lộc*, 11 Lí, PTTH chuyên Tiền Giang.

MAI ANH

Bài L2/268. *Dùng một ăcquy lần lượt thắp sáng hai bóng đèn $Đ_1$, $Đ_2$ có cùng công suất định mức. Nếu dùng đèn $Đ_1$ công suất của nguồn là $P_1 = 60W$. Nếu dùng đèn $Đ_2$ công suất của nguồn là $P_2 = 90W$. Biết rằng trong cả 2 trường hợp đèn sáng bình thường.*

1) Tìm công suất định mức của mỗi bóng đèn.

2) Xác định công suất lớn nhất mà acquy có thể cung cấp cho mạch ngoài.

Hướng dẫn giải. 1) Kí hiệu P là công suất định mức cần tìm; E, r là suất điện động và điện trở trong của ăcquy; I_1, I_2 là cường độ định mức mỗi đèn, ta có các phương trình :

$$P = P_1 - I_1^2 r = P_2 - I_2^2 r \qquad (1);$$

$$E = \frac{P}{I_1} + I_1 r = \frac{P}{I_2} + I_2 r \qquad (2);$$

$$E = \frac{P_1}{I_1} = \frac{P_2}{I_2} \qquad (3).$$

Từ (1), (2), (3) suy ra :

$$r = \frac{P_1 - P_2}{I_1^2 - I_2^2} \ (4); \qquad P = I_1 I_2 r \ (5);$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{P_1}{P_2} \qquad (6).$$

Thế (4), (6) vào (5) ta được :

$$P = \frac{P_1 P_2}{P_1 + P_2} = 36W \qquad (7).$$

2) Dễ dàng chứng minh công suất lớn nhất của P_n mà ăcquy có thể cung cấp cho mạch ngoài là :

$$\max P_n = \frac{E^2}{4r}.$$

Từ (3), (5) và (7) rút ra :

$$\max P_n = \frac{P_1 P_2}{4P} = \frac{P_1 + P_2}{4} = 37{,}5W.$$

Nhận xét. Các bạn có lời giải đúng và gọn :

Ninh Thuận: *Nguyễn Khuất Nguyên*, 9/2 Nguyễn Trãi, Phan Rang; **Quảng Trị:** *Lê Vũ Hải*, 12A5, PTTH Vĩnh Linh; **Đồng Nai:** *Hoàng Vũ Anh Tuấn*, 11A1, PTTH Thống Nhất, huyện Thống Nhất; **Khánh Hòa:** *Nguyễn Xuân Hưng*, 11 Lí, PTTH Lê Quý Đôn, Nha Trang; **Tp Hồ Chí Minh:** *Vũ Ngọc Anh*, 12 Lí, PTNK, ĐHQG TP Hồ Chí Minh; **Hà Tây:** PTTH chuyên Nguyễn Huệ; *Nguyễn Minh Chính*, 11 Toán 1, Nguyễn Thu Hằng 11; **Hà Nội:** ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội: *Phan Quốc Hưng*, 11Bo chuyên Lí; *Lê Sơn Tùng*, 11A Lí; **Vĩnh Phúc:** *Đỗ Thành Trang*, 10 Lí, *Nguyễn Minh Kiên*, 10A1, *Cao Thu Uyên*, 10A7, *Phan Bá Hưng*, 10A3, *Lê Thị Thu Hường*, 11A3, *Đỗ Ngọc ánh*, 12A1, *Nguyễn Ngọc Hạnh*, 12A3, *Đỗ Thanh Hà*, 12A3, PTTH chuyên Vĩnh Phúc; *Lê Anh Thành*, 12B1, PTTH Trần Phú, Vĩnh Yên, Vĩnh Phúc; **Nghệ An:** *Lương Minh Đức*, 12 Lí, *Lưu Anh Tú*, 10A3, *Nguyễn Việt Quang*, 10A6, PTTH Phan Bội Châu, Vinh; **Yên Bái:** *Hoàng Trọng Huy*, 11A2, *Vũ Hải Đăng*, 12A1, *Hoàng Anh Tài*; 11A1; PTTH chuyên Yên Bái; *Nguyễn Thành Công*, 12A3, PTTH Lí Thường Kiệt; **Tây Ninh:** *Châu Quốc Phong*, 12A6, PTTH Lí Thường Kiệt, Hòa Thành; **Nam Định:** *Nguyễn Thế Kha*, 11 Toán 1, PTTH chuyên Lê Hồng Phong; **Thanh Hóa:** *Trần Trọng*, 11B, PTTH Bỉm Sơn; **Đà Nẵng:** *Hồ Ngọc Phước*, 11A2, PTTH Lê Quý Đôn; **Hải Phòng:** *Phạm Anh Đức*, 12 Lí, PTTH NK Trần Phú, *Đỗ Hải Nam*, 11B1, PTTH Vĩnh Bảo; **Bắc Giang:** *Đặng Ngọc Sâm*, 11A1, PTTH Lạng Giang; **Ninh Bình:** *Phạm Mỹ Hạnh*, 10 Lí, PTTH Lương Văn Tụy; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Huy Việt*, 12A1, PTTH số 1 Gia Bình; **Quảng Ngãi:** *Bạch Ngọc Mạch Tường*, 12A1, PTTH UB Sơn Tịnh; **Quảng Bình:** *Dương Đức Anh*, 10 Lí, PTTH NK Quảng Bình; **Hà Tĩnh:** *Bùi Việt Hoàng Sơn*, 12 Lí, PTTH NK Hà Tĩnh; **Hải Dương:** *Đoàn Văn Tuyến*, PTTH Hồng Quang, Hải Dương

MAI ANH

Hỏi: *Em đọc sách và có gặp một chú ý nhỏ : "Nếu a+b+c+d = 0 thì phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có một nghiệm x = 1". Tại sao phương trình $3x^3-4x^2-x+2=0$ lại có hai nghiệm x=1; $x=-\frac{2}{4}$?*

TRẦN QUỐC LẬP
(12C7, PTTH Đông Triều, Quảng Ninh)

Đáp: Nói phương trình có một nghiệm $x = 1$ không có nghĩa là phương trình chỉ có một nghiệm. Bởi vậy phương trình mà em nêu ra có hai nghiệm là chuyện... bình thường ! Chúc em có **một** niềm vui !

Hỏi: *Tại sao giữa các thành phần tọa độ của điểm lại có dấu ";" thay vì dấu "," ?*

VŨ NGỌC HÒA
(GV trường PTTH D.C, Đồng Nai)

Đáp: Đây là điều mà rất nhiều người không có ý thức để... viết đúng. Bạn thử xác định điểm M (2, 5, 3) trên mặt phẳng xem có băn khoăn gì không ? Nếu bạn có băn khoăn thì tức là bạn đã tự trả lời được câu hỏi của mình. Xin cám ơn.

Hỏi: *Khi tìm các đường tiệm cận của đồ thị, ta có nên dùng "lim" không ? Đôi khi đáp án không thấy có ... "lim".*

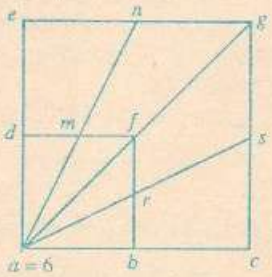
TẠ QUANG DUNG
(12B3, PTTH, Đông Hà, Quảng trị)

Đáp: Vấn đề tiệm cận của đồ thị liên quan chặt chẽ đến phép toán giới hạn. Nếu không dùng "lim" thì có nghĩa là làm tắt mà thôi ! Khi làm bài thi, có nên làm tắt không em ?

Hỏi: *Theo em thì lời giải bài "Điền số vào các ô tròn" (đề ở số 266 (8/99), lời giải ở số 268 (10/99)) chưa đúng hoàn toàn. Thực ra chỉ có 3 cặp số lẻ điền vào (f, g) thỏa mãn, còn 2 cặp số chẵn không thỏa mãn, như vậy chỉ có 8×3 = 24 cách điền số thỏa mãn.*

NGUYỄN VIỆT QUANG
(10A6, PTTH Phan Bội Châu, Nghệ An)

Đáp: Cảm ơn sự phát hiện đúng của bạn. Trong lời giải đã tìm được $a = 6$ và tổng số 3 số thẳng hàng là $S = 18$, do đó tổng 2 số thẳng hàng với a phải bằng 12 = 1+11 = 2+10 = 3+9 = 4+8 = 5+7 (*)



Giả sử (f, g) là cặp số chẵn nào đó thỏa mãn (*).

Xét 1 ô bất kì khác a, f, g chẳng hạn là m. Nếu m chẵn ⇒ d chẵn, n chẵn ⇒ e chẵn, nhưng chỉ còn 2 số chẵn trong (*) để điền vào 4 ô m, n, d, e ⇒ mâu thuẫn.

Vậy (f, g) chỉ có thể lấy 1 trong 3 cặp số lẻ ở (*), đồng thời với mỗi cặp (f, g) khi thay đổi vị trí các cặp số trong (*) có 8 cách điền nên tổng cộng có 8×3 = 24 cách điền số thỏa mãn.

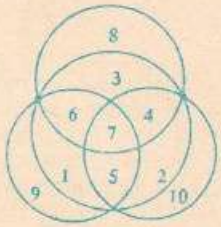
Hỏi : *Về phần giải đáp cuộc thi "Vui hè 99" THTT số 268 (10/99) em có thắc mắc :*

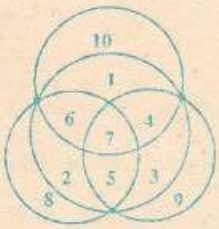
- Ở câu 2 còn có 2 cách điền số nữa (xem hình dưới)

- Ở câu 3 có vẽ các hình chữ ⌋ và ⌈ như vậy có đúng yêu cầu của đề bài không ?

LÊ PHẠM THÁI DUY
(Lớp 12C1, PTTH Lê Trung Kiên, Tuy Hòa, Phú Yên)

Đáp : Ở phần giải đáp câu 2 mới chỉ ra có 2 cách điền số vào các miền được phân chia bởi 4 đường tròn tương ứng với b = 4, c = 5, d = 6.





Nếu lấy b = 4, c = 6, d = 5 ta có 2 nghiệm nữa như hình dưới :

* Thông thường trong các trò chơi ghép hình phẳng (bằng mảnh gỗ hoặc mảnh bìa) được phép đẩy hình trên mặt phẳng và lật hình để sử dụng cả 2 mặt của hình. Tác giả câu 3 đã có sơ suất không giải thích rõ các yêu cầu của sự ghép hình.

Cảm ơn hai bạn Quang và Duy đã phát hiện đúng, tìm được những sai sót của đề và lời giải. Các bạn xứng đáng được nhận tặng phẩm của tòa soạn.

THVTT

ĐÓN ĐỌC TH&TT SỐ 273

Một tháng nữa, các bạn sẽ có số tạp chí 273 với những thông tin bổ ích :

➥ Đề thi Olympic Ba Lan

➥ Đề thi tuyển sinh môn Toán trường Đại học Ngoại thương Hà Nội năm 1999.

➥ Đề thi vào 10 của tỉnh Phú Thọ

Ngoài ra, các bạn còn được trao đổi về việc "Chuyển phương pháp giải toán từ mặt phẳng sang không gian".

Các bạn quan tâm tới Câu lạc bộ còn được biết kết quả ngày sinh may mắn, thi thơ xuân và câu đối.

Còn gì nữa ? Các bạn hãy nhớ đặt mua tạp chí số 273 để biết tất cả ! Cảm ơn mọi sự quan tâm và ủng hộ.

TH&TT

KẾT QUẢ ĐẦU TIÊN CỦA CUỘC CHƠI :

GẶP NHAU QUA NGÀY SINH

Phiếu tham gia gửi về thật là "nhôn nhịp" bởi mỗi một phiếu gửi về là thêm một bạn về với cuộc gặp gỡ đầy kỉ niệm của năm 2000! Ban tổ chức quyết định đăng kết quả liên tiếp trong 12 số tạp chí và ngoài các tặng phẩm đã công bố, sẽ chọn thêm **1 ngày sinh đặc biệt trong năm** để trao giải đặc biệt. Như vậy các bạn vẫn có quyền hi vọng tới tận cuối cuộc chơi.

Kết quả đợt bốc thăm đầu tiên trúng vào các bạn sinh ngày **09 tháng 03** :

1) *Vũ Ngọc Nam*, sinh năm 1984 (197B phố Đà Nẵng, quận Ngô Quyền - học lớp 10A9, THPT chuyên Trần Phú, Hải Phòng).

2) *Lại Việt Thắng*, sinh năm 1985 (đội I, thôn I, Phù Vân, Kim Bảng, Hà Nam).

3) *Phạm Minh Lộc*, sinh năm 1985 (77A, phố Lê Hồng Phong, Nam Định).

4) *Triệu Linh Giang*, sinh năm 1985 (lớp 9B, THCS Đoan Hùng, Phú Thọ).

5. *Dương Nguyễn Khánh Linh*, sinh năm 1985 (10A2, PTTH Chu Văn An, Ninh Thuận)

Hai bạn thích ngày sinh 09 tháng 03 là :

1) *Đồng Phương Thảo*, lớp 10 Toán, THPT chuyên Trần Phú, Hải Phòng

2) Nguyễn Văn Da, lớp 12A1, THCS Mê Linh, Mê Linh, Vĩnh Phúc

Các tặng phẩm sẽ được câu lạc bộ gửi tới 7 bạn may mắn trên.

Lưu ý các bạn ghi rõ *ngày, tháng, năm sinh* để Câu lạc bộ biết được đúng ngày sinh của các bạn. Theo yêu cầu của nhiều bạn, Câu lạc bộ xin in tiếp phiếu hội viên để các bạn có thêm cơ hội tham gia.

Xin chúc mừng 7 bạn may mắn đầu tiên của cuộc chơi ! Nào, các bạn hãy tiếp tục tham gia và tiếp tục hồi hộp chờ kết quả.

C.L.B.

THẺ HỘI VIÊN

Gặp nhau qua ngày sinh

Họ và tên : .....

Ngày sinh : .....

Địa chỉ : .....

.....

Ngày sinh bạn thích : .....

Tin nhanh

THI THƠ XUÂN

Với thể lệ cuộc thi vừa chặt, vừa lỏng làm rạo rực biết bao tâm hồn thơ của bạn đọc. Chặt là vì các chữ đầu của 8 câu thơ đã cố định : *toán học và tuổi trẻ chào xuân mới*. Lỏng là vì tùy theo sở trường mà bạn đọc có thể dùng bất cứ thể loại thơ nào. Cuộc thi tiếp tục nhận bài thi và sẽ tổng kết trong số tạp chí tới. Tuy nhiên, Ban tổ chức cũng xin tiết lộ bài dự thi dưới đây để các bạn tham khảo :

TÌNH XUÂN

Toán đẹp như là dáng em xinh
Học toán, yêu em trọn cuộc tình
Và say toán, thương em hơn đấy !
Tuổi thêm càng thắm mộng ngày xanh.
Trẻ lắm ! Tình em, Toán với anh
Chào hoa khoe sắc rộ lá cành
Xuân đến, tuôn trào bầu nhiệt huyết
Mới một tình yêu, Em – Toán – Anh

NGUYỄN THẠC DŨNG
Lớp A1, K43, Khoa Toán - Cơ - Tin
ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội

ĐỐI ĐÃ ĐỐI ĐÃ CHƯA ?

Hai vế thách đố làm bao "Nho sĩ" trong làng THTT như "sôi máu" lên ! Cái khó của vế thách thứ nhất là dùng toàn phụ âm T hai chữ **tổ**, **toán** có cùng nghĩa và hai chữ "**thi thơ**", bởi **thi** cũng là **thơ**. Cái khó của vế thách thứ hai là chữ "cần" vừa là tên rượu, vừa lại là "cần"... (thiết!) và cuối câu lại là "đủ liên quan tới điều kiện "cần và đủ" trong toán học. Thật buồn chưa giới thiệu được câu đối nào để tạm thỏa lòng người, đành thêm hạn để chờ đợi. Xin kết luận : Đã đối nhưng đối chưa đã ! Cám ơn và hi vọng

BAN "DÁM...KHẢO"

THẬT LÀ DỄ SAI !

Hầu hết các bạn đều cho rằng : Lời giải sai do chưa thử lại nghiệm, nếu thử lại sẽ thấy hệ vô nghiệm. Tuy nhiên rất ít bạn không phân tích : tại sao phải thử nghiệm ?

Phép suy ra dưới đây, không có chiều ngược lại :

$\cos 4x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 8x = 2\cos^2 4x - 1 = -\frac{1}{2}$. Đó là mắt xích đầu tiên làm cho phương trình $\cos 6x = \frac{1}{2}$ chưa đảm bảo là tương đương với hệ.

Mặt khác : phép thế mà lời giải sử dụng là phép thế không hoàn toàn vì chỉ thay $\cos 4x = \frac{1}{2}$, mà thực chất là $x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$ vào một số hạng của phương trình kia, chỉ dẫn đến một phương trình hệ quả. Giống như khi giải hệ $\begin{cases} x^2 + 5x + 7 = 0 & (1) \\ |x| = 1 & (2) \end{cases}$ có học sinh đã từ (2) để có $x^2 = 1$, do đó (1) trở thành $5x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{8}{5}$ (!). Thấy ngay (1) vô nghiệm nên hệ vô nghiệm.

Như vậy có đến hai mắt xích dẫn đến phương trình $\cos 6x = \frac{1}{2}$ chỉ là hệ quả của hệ mà thôi. Khắc phục sai lầm này có nhiều hướng :

* Thử lại nghiệm của phương trình $\cos 6x = \frac{1}{2}$ vào phương trình $\cos 4x = \frac{1}{2}$.

* Giải hệ $\begin{cases} \cos 6x = \frac{1}{2} \\ \cos 4x = \frac{1}{2} \end{cases}$ bằng cách giải từng phương trình rồi kết hợp nghiệm.

Tất cả mọi con đường đều cho kết quả đúng là hệ vô nghiệm.

Các bạn cho lí giải tốt hơn là : *Nguyễn Ngọc Tiến*, 11 Lí, THPT NK Hàn Thuyên, **Bắc Ninh**; *Lê Văn Dũng* và *Võ Thị Thùy Trinh*, K38, *Kiều Mạnh Hùng*, K39, khoa Toán, **ĐHSP Vinh**; *Đào Thị Thu*, Mai Xá, Minh Phượng, Tiên Lữ, **Hưng Yên**; *Phạm Minh Dân*, 12H, THPT Đông Quan, Đông Hưng, **Thái Bình**; *Dương An Pha*, nhà A8, Khối Liên cơ, phường Hưng Bình, TP Vinh, **Nghệ An**, ...

KIHIVI

DÙNG ĐỔI BIẾN KIỂU NÀY... NHANH THẬT !

Bài toán yêu cầu tính $\int_{-2}^{0} (x+1)^2 dx$. Một bạn đã giải :

Đặt $u = (x+1)^2 \Rightarrow du = 2(x+1).dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2(x+1)} = \frac{du}{2\sqrt{u}}$. Với $x = -2$ thì $u = 1$, với $x = 0$ thì $u = 1$, do đó :

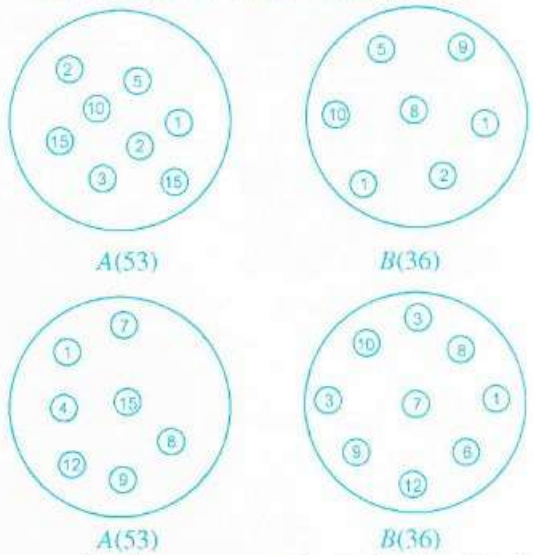
$$\int_{-2}^{0} (x+1)^2 dx = \int_{1}^{1} \frac{u du}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\int_{1}^{1} \sqrt{u}\, d = 0.$$

Lời giải nhanh trên đây có được không ? Bạn có lời giải đúng nào không ?

L.T.N

Giải đáp bài

DI CHUYỂN NHƯ THẾ NÀO ?



Ta thấy tổng các con số trên áo của các vận động viên ở khối A là 53, khối B là 36, khối C là 56, khối D là 59 và tổng các con số trên áo của các vận động viên ở 4 khối bằng nhau và bằng $(53+36+56+59)/4 = 51$. Từ đó ở A phải bớt đi 2, ở B phải thêm 15, ở C phải bớt đi 5, ở D phải bớt đi 8. Vì cả A, C, D đều bớt nên phải chuyển 3 vận động viên đi khỏi 3 khối này.

Ta thấy có 4 cách di chuyển của 3 vận động viên ở các khối như sau :

Cách 1. $A2 \rightarrow C7 \rightarrow B \leftarrow D8$

$D8 \downarrow$

Cách 2. $A2 \rightarrow C15 \rightarrow B$

Cách 3. $D8 \rightarrow A10 \rightarrow C15 \rightarrow B$

Cách 4. $A2 \rightarrow D10 \rightarrow C15 \rightarrow B$

Vì khối A có hai vận động viên mang áo số 2 và mỗi vận động viên này sẽ có mặt trong 3 cách di chuyển. Vậy ta có tất cả 7 cách di chuyển 3 vận động viên để tổng số trên áo của mỗi khối đều bằng 51.

Nhận xét. Các bạn sau đây có đáp án tốt : *Trần Văn Hinh*, 10a, PTTH Nghĩa Hưng A, **Nam Định**; *Nguyễn Mạnh Đoàn*, 11A1 CT, *Vũ Đức Thanh*, 11B2, PTTH chuyên **Vĩnh Phúc**;

BÌNH PHƯƠNG

DỰNG TIẾP TUYẾN

Chỉ dùng thước kẻ (không có vạch chia độ dài) hãy dựng tiếp tuyến tại điểm M trên đường tròn tâm O cho trước.

LÊ QUỐC HÁN
(*ĐHSP Vinh, Nghệ An*)

TRƯỜNG THPT QUỐC HỌC – HUẾ

Hiệu trưởng
Thạc sĩ NGUYỄN CHƠN ĐỨC

Quốc học - Huế là một trong những trường được thành lập sớm nhất của nước ta (23/10/1886). Tính đến nay, trường đã hơn 103 năm xây dựng và trưởng thành.

Nhiều thế hệ thầy và trò Quốc học - Huế đã trở thành những nhà lãnh đạo của Đảng và Nhà nước, những nhà khoa học, văn hóa giáo dục nổi tiếng như : Chủ tịch Hồ Chí Minh, các đồng chí Trần Phú, Phạm Văn Đồng, Võ Nguyên Giáp, Trần Quỳnh, Mai Chí Thọ, Tố Hữu, Đặng Thai Mai, Võ Liêm Sơn, Tôn Thất Tùng, Đặng Văn Ngữ, Nguyễn Khánh Toàn, Nguyễn Cảnh Toàn, Xuân Diệu, Huy Cận, Đào Duy Anh, Hoàng Thiếu Sơn, Nguyễn Lân, Hoàng Ngọc Cảng, Lê Trí Viễn, Nguyễn Văn Thương v.v. ..

Từ ngày thống nhất đất nước (1975) đến nay, các thế hệ thầy và trò Quốc học - Huế tiếp tục phát huy tốt truyền thống Dạy tốt Học tốt, đạt được nhiều thành tích xuất sắc, đóng góp đáng kể vào sự nghiệp GD-ĐT của Thừa Thiên Huế và toàn quốc.

Hàng năm, Quốc học - Huế luôn có tỉ lệ học sinh giỏi cao và ổn định : trên 90% HS xếp loại khá, giỏi; xếp vị trí thứ nhất trong các kì thi HSG của tỉnh; ít nhất là 20 giải quốc gia; đến nay đã có 8 giải quốc tế, trong đó có 1 Huy chương vàng và giải đặc biệt Toán của HS Lê Bá Khánh Trình, về tốt nghiệp THPT luôn đạt 100% (nhiều học sinh đỗ thủ khoa, loại khá, giỏi), tỉ lệ đỗ vào đại học là trên 85% trong đó có nhiều học sinh đỗ thủ khoa , á khoa.

Trường THPT Quốc học - Huế có nhiều lớp năng khiếu. Riêng lớp chuyên Toán đã có từ rất sớm (năm học 1975-1976). Nhiều giáo viên Toán và học sinh giỏi toán của trường đã có những đóng góp xuất sắc vào thành tích chung của nhà trường như : các thầy giáo Trần Thanh Thiên, Trần Văn Khải, Ngô Viết Diễn, Lê Văn Thu, Lê Văn Quang, Trịnh Ngọc Hoàn, Nguyễn Văn Hóa, Nguyễn Đình Lâu...; các học sinh như Lê Bá Khánh Trình, Ngô Phú Thanh, Nguyễn Văn Lượng, Hà Thúc Dương, Nguyễn Minh Tuấn v.v...

Kể từ năm học 1994-1995, Quốc học - Huế được Thủ tướng Chính phủ kí quyết định xây dựng thành một trong 3 trung tâm chất lượng cao của cả nước (cùng với trường Lê Hồng Phong ở Tp Hồ Chí Minh và trường Chu Văn An ở Hà Nội).

Quốc học - Huế đã được Ủy ban tỉnh Thừa Thiên - Huế, Bộ GD-ĐT, Chính phủ tặng nhiều bằng khen, cờ luân lưu và đặc biệt là trong dịp kỉ niệm 100 năm thành lập trường (1996), Nhà nước đã quyết định tặng thưởng huân chương cao quý cho thầy và trò Quốc học - Huế : **Huân chương Độc lập hạng Nhất**.

Hiện nay, thầy và trò Quốc học - Huế đang quyết tâm gìn giữ và phát huy tốt truyền thống của nhà trường, xứng đáng là một trong những nơi đào tạo tài năng trẻ của đất nước.

Tổ giáo viên chuyên Toán năm học 1999-2000

ISSN : 0866-0853
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT74M10

Chế bản tại Tòa soạn
In tại Nhà máy in Diên Hồng, 57 Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 2 năm 2000

Giá : 3.000đ
Ba nghìn đồng