TOÁN HỌC VÀ BÓNG ĐÁ
Trần Nam Dũng

SỐ CHÍNH PHƯƠNG TRONG BIỂU DIỄN CÁC SỐ NGUYÊN
Nguyễn Quang Minh

ĐẲNG THỨC TỔ HỢP QUA CÁC BÀI TOÁN OLYMPIC
Trịnh Đào Chiến

VÀ CÁC CHUYÊN MỤC KHÁC

Epsilon

Tạp chí online của cộng đồng những người yêu toán

NO

16

"Một kỳ thi giản dị, dân chủ và trung thực."
KỲ THI TOÁN BALTIC WAY 2019
Nguyễn Hùng Sơn

"Hãy hình dung một buồng gương, đó là cái phòng với 6 bức tường là gương. Nếu chúng ta vào một phòng như thế với vài ngọn nến thì vì hệ quả phản chiếu trên các tường bằng gương chúng ta có cảm giác lọt vào một không gian vô tận."
TOPO CỦA VŨ TRỤ
Cao Chi

Chủ biên:
TRẦN NAM DŨNG

Biên tập viên:
Lê Viết Ân
Lê Phúc Lữ
Tống Hữu Nhân
Nguyễn Tất Thu
Võ Quốc Bá Cẩn
Trần Quang Hùng
Ngô Quang Dương
Nguyễn Văn Huyện
Đặng Nguyễn Đức Tiến

LỜI NGỎ

Epsilon 16 được lên trang và xuất xưởng trong những ngày người hâm mộ cả nước đang phát cuồng vì hai chức vô địch SEA Games của hai đội tuyển bóng đá U22 nam và nữ. Epsilon, với tinh thần luôn theo sát nhịp thở thời đại, cũng có cách thể hiện niềm hân hoan theo cách riêng của mình.

Và để kỷ niệm chiến thắng 3-0 của đội tuyển nam trước U22 Indonesia ở trận chung kết, BBT Epsilon cam kết sẽ tiếp tục xuất bản Epsilon đến số 30. Thú vị là nếu theo tiến độ hiện nay, số 30 sẽ được phát hành vào năm tổng biên tập tròn 60 tuổi. Quá phù hợp cho sự thay đổi và chuyển giao thế hệ.

Epsilon, hẳn nhiên là một tờ báo đặc biệt. Theo ngôn ngữ thời đại đây là tờ báo 4.0: không toà soạn, không nhân viên, không cơ quan chủ quản, không kinh phí. Báo cũng không bán và người viết bài không nhận nhuận bút.

Vậy mà các số báo vẫn ra đều đặn và luôn đúng giờ. Lần xuất bản thứ hai vào ngày thứ sáu mười ba này cũng không là ngoại lệ[1].

Trân trọng gửi đến độc giả Epsilon 16 với 15 tác giả, 14 bài viết, xuất bản ngày 13 tháng 12!

[1] Lần xuất bản vào ngày thứ sáu mười ba đầu tiên rơi vào Epsilon đầu tiên, Epsilon số 1.

MỤC LỤC

TOPO CỦA VŨ TRỤ

Cao Chi

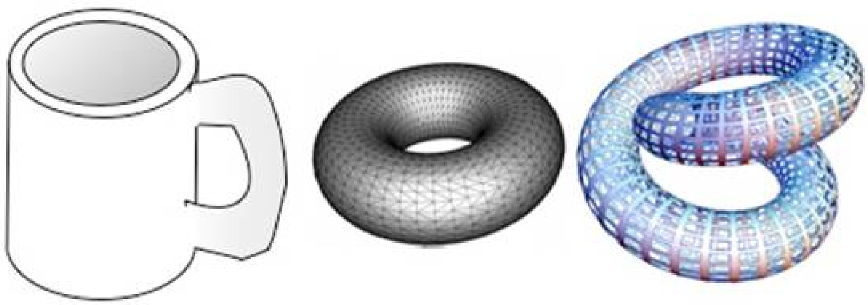
GIỚI THIỆU

Vấn đề nghiên cứu topo của vũ trụ đang gây chú ý của nhiều nhà vũ trụ học. Nhiều vũ trụ xét về mặt hình học là một vũ trụ vô hạn (infinite) song nếu chú ý đến topo (tức đến toàn cục) thì lại là một vũ trụ hữu hạn (finite). Nhiều quan sát CMB (Cosmic Microwave Background - Bức xạ Phông Vũ trụ) cũng được chính xác hoá thêm nhờ những chi tiết phát sinh từ những hệ quả topo. Bài viết này nhằm mục đích giới thiệu trong vài nét tổng quát ảnh hưởng của topo đến vũ trụ học.

1. Topo (topology) là gì?

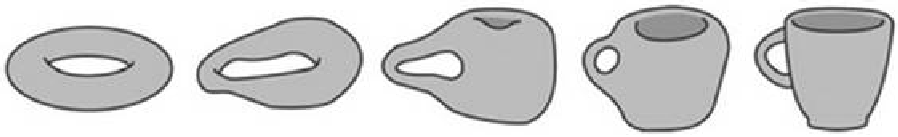
Topo là môn học nghiên cứu hình dạng của một không gian về các mặt cơ bản nhất đó là tính liên thông (connectedness), tính liên tục (continuity) và các biên (boundary). Những tính này bất biến đối với các phép biến đổi liên tục gồm các biến đổi như kéo dài, uốn cong mà không bao gồm các biến đổi như xé rách (tearing) hoặc dán dính (gluing).

Xem hình 1 ta thấy một cái cốc, một hình xuyến và một hình xuyến xoắn là tương đương topo với nhau.



Hình 1: *Cái cốc, hình xuyến và hình xuyến xoắn là tương đương topo với nhau*

Quả thật như vậy chỉ cần các phép kéo dài và uốn cong ta có thể biến một hình xuyến thành một cái cốc (xem hình 2)



Hình 2: *Biến một hình xuyến thành cái cốc nhờ các phép biến đổi liên tục topo*

2. Hình học và topo

Cần phân biệt hình học (độ cong phẳng, dương hay âm?) và topo (dạng như thế nào, liên thông như thế nào?). Xét về mặt hình học có thể tồn tại 3 loại vũ trụ: Vũ trụ phẳng (Euclidean, độ cong bằng không), vũ trụ cầu (đóng, hữu hạn và độ cong dương) và vũ trụ hyperbolic (mở, vô tận và độ cong âm), xem hình số 3.

Khi nói đến độ cong âm người ta thường nghĩ đến một không gian vô hạn. Song có thể có nhiều độ cong trong một topo, ví dụ một hình xuyến (torus) có độ cong âm ở mặt trong (inside edge) mặc dầu nó là một topo hữu hạn (finite).

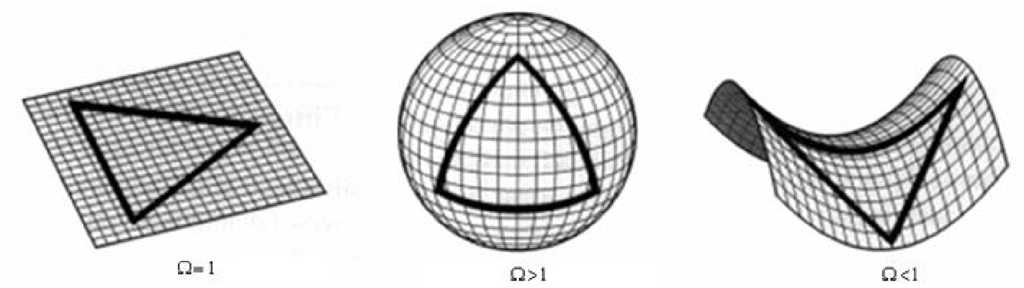
Thuyết tương đối tổng quát (với các phương trình Einstein vốn là những phương trình vi phân) chỉ nói lên được tính định xứ (local) mà không thể xác định được tính toàn cục (global) tức topo của vũ trụ. Thuyết tương đối tổng quát không bất biến đối với các biến đổi đồng phôi (homeomorphism - xem chú thích) mà chỉ bất biến đối với các biến đổi vi phôi (diffeomorphism) tức các biến đổi toạ độ.

Với một vũ trụ đồng nhất và đẳng hướng ta có lời giải là metric Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW)

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a^2(\eta)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\Phi^2\right)\right].$$

trong đó a là thừa số kích thước của vũ trụ, độ cong $k = 0, +1, -1$ tương ứng với độ cong bằng không, độ cong dương và độ cong âm (xem hình vẽ 3).

Giữa bán kính độ cong R và mật độ trung bình của vật chất Ω trong vũ trụ có mối quan hệ $R = a/|k|^{\frac{1}{2}} = 1/H|\Omega - 1|^{\frac{1}{2}}$, trong đó H là số Hubble, $\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}$, còn ρ_c là mật độ ứng với vũ trụ phẳng. Ta có các vũ trụ với độ cong bằng không, độ cong dương và độ cong âm tương ứng với các mật độ $\Omega = 1, > 1$ và < 1.



Hình 3: *Từ trái sang phải: Độ cong phẳng, độ cong dương và độ cong âm*

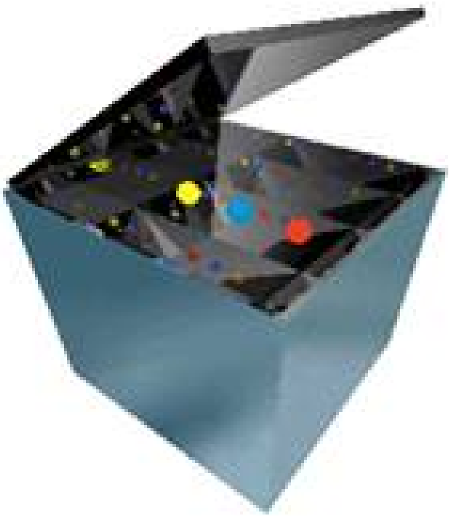
Một yếu tố metric định xứ cho trước có thể tương ứng với một tập lớn mô hình vũ trụ khác nhau về mặt topo.

Tồn tại vô số (đếm được) những dạng không gian với độ cong dương, tất cả đều là những không gian đóng và vô số không gian với độ cong âm trong đó một số là không gian đóng (hữu hạn) một số là không gian mở (vô tận).

Thuyết tương đối mô tả một hình xuyến và một mặt phẳng với cùng những phương trình như nhau mặc dầu hình xuyến là hữu hạn trong khi mặt phẳng là vô hạn. Để xác định topo của vũ trụ cần những hiểu biết vật lý nằm ngoài lý thuyết tương đối (như CMB - *Cosmic Microwave Background - Bức xạ Phông của Vũ trụ*).

Hãy hình dung một buồng gương, đó là cái phòng với 6 bức tường (gồm cả trần và nền) là gương. Nếu chúng ta vào một phòng như thế với vài ngọn nến thì vì hệ quả phản chiếu trên các tường bằng gương chúng ta có cảm giác lọt vào một không gian vô tận.

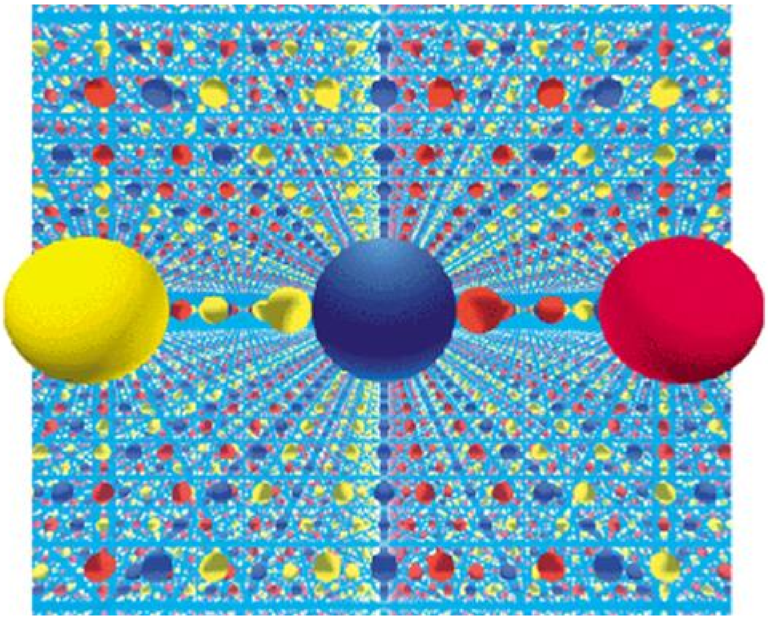
Giống như trong một buồng gương (xem hình 4) sự vô tận của vũ trụ có thể chỉ là một ảo tưởng. Vũ trụ có thể hữu hạn trong thực tế. Ảo tưởng vô tận phát sinh từ hiện tượng tia sáng thực hiện một quỹ đạo chạy quanh không gian nhiều lần (khi vũ trụ là hữu hạn) và như thế tạo nên hình ảnh đa bội của từng thiên hà.



Hình 4: *Buồng gương gây hệ quả vô tận của một đối tượng hữu hạn*

Nếu trong buồng kính ta có 3 quả bóng thì bức tranh tạo nên là hình ảnh của vô số quả bóng như trong hình vẽ số 5.

Buồng gương là hình tượng của một vũ trụ hữu hạn nhưng cho ảo tưởng vô tận. Lẽ dĩ nhiên vũ trụ không có biên để phản xạ ánh sáng song thay vì bị phản xạ như trong buồng gương thì ánh sáng có thể đi vòng quanh vũ trụ nhiều lần. Từ bức tranh các hình ảnh đa bội lặp lại người ta có thể suy ra kích thước và hình dáng thật sự của vũ trụ, tức xác định topo của vũ trụ.



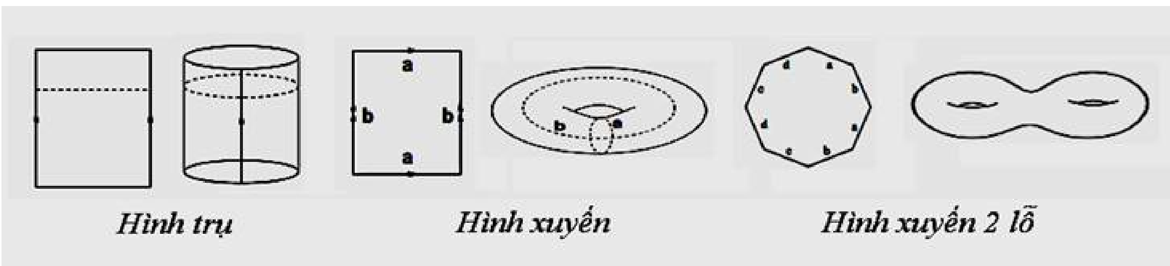
Hình 5: *Ba quả bóng trong buồng kính tạo nên hình ảnh vô số quả bóng*

3. Tạo một hình

Topo có thể giúp ta tạo một hình xuyến (hoặc một dải Moebius) từ một mảnh phẳng của không thời gian bằng cách đồng nhất các đường mép (edge) đối diện của mảnh phẳng này (hình 6).

Nói chung người ta biểu diễn một hình như phần trong của một đa diện (polyhedron) với các mặt đối nhau được đồng nhất từng đôi một.

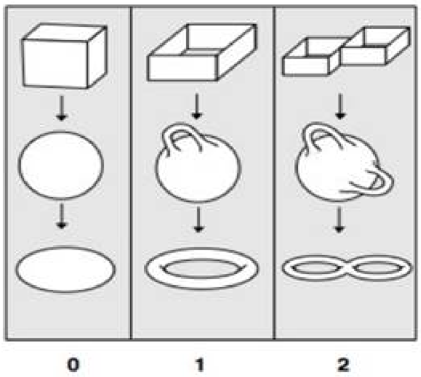
Trên hình 6 ta thấy nếu dán 2 mép của một hình vuông ta có một hình trụ, nếu dán các mép (tức đồng nhất các mép a với a, b với b) của một hình vuông ta có một hình xuyến, nếu dán các mép của hình bát giác (đồng nhất a với a, b với b, c với $c, \ldots$) ta có một hình xuyến với 2 lỗ. Ta gọi số lỗ là genus vậy ví dụ hình xuyến 2 lỗ có genus $= 2$.



Hình 6: *Tạo hình trụ, các hình xuyến 1 lỗ và 2 lỗ bằng cách dán các mép đối nhau (tức đồng nhất các mép)*

Chú ý hình xuyến $S^1 \times S^1$ có được nhờ đồng nhất các mép đối diện của một hình vuông là một không gian phẳng trong khi hình xuyến thông thường là không gian không phẳng. Song về mặt topo 2 hình xuyến này là tương đương.

Hình trụ, hình xuyến một lỗ, hai lỗ là những không gian topo *đa liên thông (multiplyconnected)*. Trong hình 7 ta có một topo *đơn liên thông* (cột một) và hai topo *đa liên thông* (cột 2 và 3).



Hình 7: *Đây là vài ví dụ của những đa tạp đồng phôi (homeomorphic), những con số ở hàng dưới là số lỗ trong topo của chúng*

Phần trong của một đa diện 10 mặt ngũ giác mà từng đôi các mặt ngũ giác được đồng nhất với nhau sẽ là một không gian đóng với độ cong âm (compact hyperbolic space).

Vậy vấn đề nghiên cứu topo vũ trụ là nằm trong những câu hỏi sau đây.

Vũ trụ đóng hay mở? Vũ trụ có lỗ (hay tay quai-handle) không? Vũ trụ là liên thông hay đa liên thông? Những câu hỏi topo này thường bị bỏ quên bởi những nhà vũ trụ học. Trong một mô hình đầy đủ phải kể đến những câu hỏi topo này. Vũ trụ thực sự là sân khấu của những ảo tưởng quang học khổng lồ phát sinh vì những hiệu ứng thấu kính topo (topological lens).

Nghiên cứu vũ trụ ta phải chú ý hai mặt: Hình học và topo. Về mặt hình học ta có: Không gian Euclide (độ cong bằng không), không gian cầu (độ cong dương) và không gian hyperbolic (độ cong âm).

Không gian cầu trong mọi trường hợp là hữu hạn. Đối với hai loại không gian còn lại thì tính hữu hạn hoặc vô tận lại phụ thuộc vào topo. Nếu là topo đơn liên thông (simply-connected) thì chúng vô tận.

Song đối với topo đa liên thông (như hình xuyến với một lỗ hay hai lỗ) thì chúng ta có khả năng xét những mô hình vũ trụ trong đó không gian là hữu hạn bất kể độ cong là như thế nào ngay cả lúc mật độ vật chất và hằng số vũ trụ là rất thấp (mà nếu chỉ xét hình học thì ta phải có không gian phẳng hoặc hyperbolic vô tận).

Như vậy một không gian với độ cong âm có thể là hữu hạn nếu topo là đa liên thông.

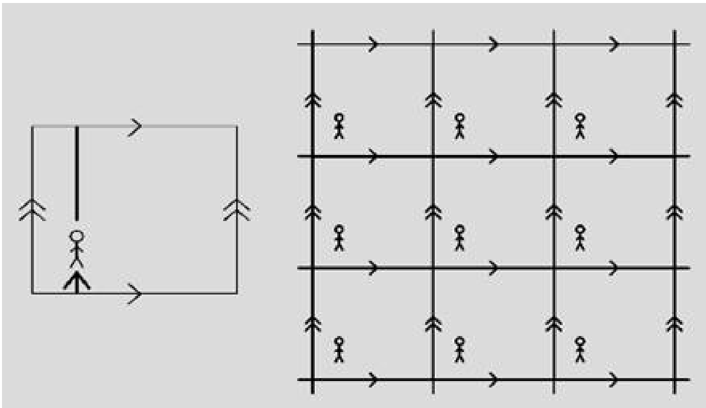
4. Một vài chi tiết toán học

Trong khuôn khổ của vũ trụ học chuẩn thì vũ trụ được mô tả bởi một đa tạp không thời gian $M^4 = R \times M$ cộng với metric FLRW. Trong đó $M = E^3$ (Euclidean), S^3 (cầu) hoặc H^3 (không gian hyperbolic có hình một cái yên ngựa). Điều này thường dẫn đến một sự hiểu nhầm:

Độ cong của M là tất cả điều gì cần thiết để xác định xem không gian 3 chiều là hữu hạn (finite) hay vô hạn (infinite). Bởi vì không gian M có thể chỉ là một trong những đa tạp thương (quotient manifold) khá dĩ $M = \frac{M_c}{G}$. Trong đó $M_c = (E^3, S^3, H^3)$ là không gian gọi là không gian phủ tổng quát (universal covering). Không gian M là không gian đa liên thông. Phép G cho phép phủ M_c bằng những tế bào gọi là đa diện cơ bản (fundamental polyhedron-FP) và thực hiện những phép tịnh tiến gắn liền với việc đồng nhất các mép (xem hình 8).

Ví dụ hình xuyến $T^2 = \frac{E^2}{G}$ trong đó FP là một hình chữ nhật với các mép đồng nhất như trên hình vẽ số 6.

Trong một không gian đa liên thông bất kỳ hai điểm nào cũng có thể được nối liền bởi nhiều hơn một đường trắc địa và hệ quả trong một vũ trụ hữu hạn ánh sáng từ một đối tượng có thể đến với một quan sát viên theo nhiều quỹ đạo khác nhau – và như thế trên bầu trời ta có nhiều hình ảnh của một nguồn bức xạ.



Hình 8: *Cư dân trong FD và trong không gian phủ*

Ta lát không gian phủ tổng quát (universal covering) với nhiều FD bằng cách đồng nhất các mặt mép.

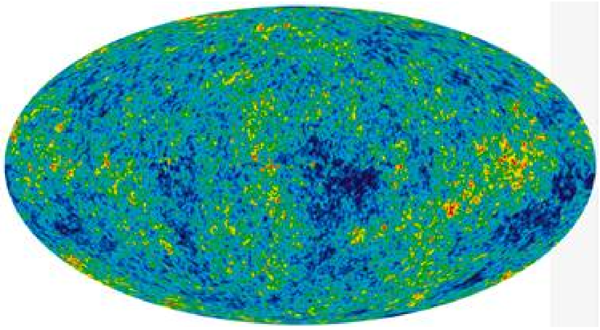
Một cư dân của hình xuyến khi nhìn về phía trước thấy phía sau của mình và nhìn thấy trong không gian phủ tổng quát một mạng các hình ảnh của mình (xem hình 8).

Với những không gian đa liên thông (có một số lỗ) số lượng N các bản copy của FD trong bức tranh quan sát vũ trụ có thể đánh giá bởi công thức: $N = V/V_{FD}$. Trong đó V là thể tích của vùng vũ trụ quan sát được còn V_{FD} là thể tích của FD.

5. Topo và CMB

Trong vũ trụ học CMB là bức xạ nhiệt tàn dư từ lúc Big Bang (xem hình 9)

CMB có thể giúp chúng ta xác định topo. Một phương pháp để làm việc đó là thực hiện mô hình toán học bằng máy tính của CMB đối với một topo nào đó rồi so sánh với quan trắc vũ trụ.



Hình 9: *Bản đồ Bức xạ Phông Vũ trụ CMB trên bầu trời*

Tính đa liên thông được khai thác để tìm ra những bất thường trong phổ năng lượng do hệ quả topo. Một điểm bức xạ theo nhiều hướng khác nhau và ánh sáng sau khi đi vòng quanh vũ trụ nhiều lần sẽ đến người quan sát và cho chúng ta nhiều hình ảnh đa bội của điểm bức xạ.

Nhiều khía cạnh của CMB có thể bị thay đổi khi topo vũ trụ là đa liên thông (hữu hạn):

(1) Topo đa liên thông phá huỷ tính đẳng hướng và tính đồng nhất toàn cục, xuất hiện trên CMB một phân bố bất đẳng hướng và bất đồng nhất ứng với các hình ảnh ảo (ghost) của nhiều điểm.

(2) Phổ các loại thăng giáng là gián đoạn, điều này phản ánh một không gian hữu hạn (tương tự như trong Cơ học lượng tử thể tích hữu hạn cho phổ năng lượng gián đoạn).

(3) Bức tranh các thăng giáng nhiệt độ phản ánh sự xuất hiện lặp lại của những điểm nóng và lạnh do hệ quả thấu kính topo.

6. Kết luận

Topo vũ trụ là một lĩnh vực quan trọng phối hợp các lý thuyết toán học với những định luật vật lý. Chúng ta có khả năng quan sát được topo vũ trụ một cách gián tiếp nhờ quan sát CMB. Hiểu được topo vũ trụ chúng ta có thể nghiên cứu chính xác hơn ảnh hưởng của năng - lượng vật chất lên không thời gian. Trong vũ trụ học hiện đại các nhà khoa học sử dụng toàn diện vật lý, hình học lẫn topo.

Kết hợp lý thuyết và quan trắc các nhà vũ trụ học đối diện với hiện tượng một không gian với độ cong âm (mật độ vật chất thấp) lại có thể là hữu hạn về toàn cục và trong trường hợp đó ta phải có một topo đa liên thông. Thiên nhiên vốn kinh hãi cái vô cùng (*Nature abhor infinity*).

Tài liệu

[1] Mark Baltovic, *The topology of the Universe*.

[2] M.J.Reboucas, G.I.Gomero, *Cosmic topology: A brief Overview*, Brazilian Journal of Physics, vol.34, no.4A, December, 2004.

[3] Jean-Pierre Luminet, *Is the Universe crumpled?*

[4] Janna Levin, *Topology and the Cosmic Microwave Background*, arXiv:gr-qc/0108043v2 20 Aug2001, Physics Reports 365(2002) 251-333.

[5] Biến đổi đồng phôi là một biến đổi liên tục không chứa phép cắt và dán.

SỰ TÍCH "TRÂU VÀNG", "CÁO CHÍN ĐUÔI" VÀ HỒ TÂY

Nguyễn Lê Anh

GIỚI THIỆU

"Để hiểu được lịch sử Việt Nam chúng ta cần phải tìm hiểu tình hình địa chất theo thời gian." Đó là nhận định cơ bản của tác giả "ruột" của Epsilon - Nguyễn Lê Anh. Nếu như năm 2018 là năm "đi tìm máy bay" thì năm 2019 là năm mà ông còn đi xa hơn rất nhiều: đi tìm lại nguồn cội của dân tộc! Vẫn luôn là những góc nhìn mới lạ cùng với chuỗi lập luận logic dựa trên những nghiên cứu rất dày công, từ khảo cứu tài liệu đến đi thực địa ở các địa phương, Nguyễn Lê Anh đã đưa ra hàng loạt kết quả nghiên cứu mới về lịch sử, trong đó không ít kết quả đã đánh đổ những nhận định vốn đã tồn tại hàng trăm năm.

Ở Epsilon số 16 này, chúng tôi trân trọng giới thiệu tới độc giả phần 1 của loạt bài lịch sử này với một góc nhìn rất thú vị và mới lạ về Hồ Tây và sự tích "trâu vàng" và "cáo chín đuôi".

1. Vị trí đặc biệt của hồ Tây?

Cấu tạo của tầng đất từ thềm lục địa, tức từ đáy biển xưa trở lên, gồm đá và cát cùng đất thịt. Các vật liệu này do sông Hồng mang tới, và được xếp lại theo đúng định luật Acximet, "vật chất có khối lượng riêng lớn hơn thì ở dưới, vật chất có khối lượng riêng nhỏ hơn thì ở trên. Các hòn đá hộc bán kính cỡ vài mét nằm ở dưới cùng, rồi tới cuội sỏi và cát, tầng sét ... Nếu quan sát thấy sự xuất hiện của lớp có khối lượng nhỏ hơn ở dưới, ví dụ lớp sét dưới lớp cuội sỏi, thì tức là đã có một sự thay đổi chế độ bồi lắng. Ví dụ lớp ở dưới được hình thành khi biển dâng, và lớp ở trên là khi biển rút.

Dòng nước mang phù sa khi chảy chậm lại thì phù sa lắng đọng. Nơi dòng nước chảy chậm thường là nơi nó bị đẩy cho chảy xoáy vòng ngược trở lại – và vận tốc vì thế mà bị triệt tiêu. Phù sa đọng dần thành gò mô phỏng hình dạng của dòng nước xoáy, độ cao gò về nguyên tắc không cao quá mực nước sông khi cao nhất. Hay nói chính xác là mức cao của dòng nước ở cửa sông. Đối với các gò lớn, gió thổi bụi tấp vào các gốc cây khiến cho gò cao dần nhờ gió. Khi chưa có đê bao nước sông chảy tự do, mùa mưa hàng năm phù sa tráng thêm một lớp lên toàn bộ đồng bằng.

20000 năm về trước mực nước biển bắt đầu dâng dần dần, khoảng 6000 năm trước đây mực nước biển dâng lên được 100m và sau đó thì mực nước biển ổn định. Trong suốt quá trình nước dâng con sông Hồng vẫn mang phù sa ra bồi. Tuy nhiên, do các hạt bùn nhỏ phù sa bị dòng hải lưu biển rửa trôi nên lớp cát lắng khi biển tiến sẽ rất sạch.

Lượng phù sa hàng năm của sông Hồng khoảng 100 triệu tấn, tương đương 70 triệu m^3 đất. Đồng bằng Bắc Bộ là một tam giác cân, đáy 150km và hai cạnh bên 200km. Nó nghiêng từ Phú Thọ, độ cao 30m ra tới biển. Thời gian để có lượng phù sa cần thiết lấp đầy khối tứ diện vuông tại Phú Thọ, cao 30m, đáy tam giác cân nói trên là 2000 năm. Như vậy 6000 năm về trước thì đồng bằng Bắc Bộ là một vịnh sâu khoảng 20m.

Tất cả các gò đất trong vùng đồng bằng Sông Hồng đều cao không quá 30m so với mực nước biển – là độ cao của cửa con sông Hồng tại Phú Thọ. Khu vực Cổ Loa, Ba Đình, Gò Đống Đa, khu vực Xuân La là những gò chỉ cao khoảng 15m so với mực nước biển, cao hơn khoảng 5m so với mặt bằng chung trong khu vực. Những gò đất cao hơn ở khu vực Hương Canh, Phú Thọ.. được tạo ra từ những kỷ băng hà trước, khoảng 200 nghìn năm về trước, khi mực nước biển cao hơn hiện nay vài chục mét.

Đồng bằng sông Hồng do chính phù sa của nó tạo ra dần dần trong nhiều năm. Như thế con sông Hồng luôn đổ phù sa ra biển, và bờ biển thì lùi dần. Nói một cách đơn giản là đoạn cuối của sông là đoạn sông chảy trong nước biển trước khi bị phù sa làm cho nó nâng lên. Dòng chảy của sông ra biển bị dòng Hải Lưu đẩy ngược trở lại, tạo ra xoáy vun phù sa thành gò. Con sông Hồng chảy ngoằn ngoèo rẽ nhánh quanh các gò ấy tạo ra hệ thống sông chảy ở đồng bằng Bắc Bộ. Con sông Hồng có độ sâu trung bình khoảng 20m và chảy trên nền đất cát cũng là chính phù sa của nó từ hàng chục nghìn năm về trước tạo ra. Do độ dày của tầng bồi lắng tới thềm lục địa vào khoảng 100 mét, vì thể hình dáng của sông Hồng chỉ là hệ lụy của các lực tự nhiên, các yếu tố lồi lõm của thềm lục địa ở độ sâu cả trăm mét phía bên dưới tầng đất phù sa không ảnh hưởng gì tới định hình của dòng sông. Tất cả các gò đất chắn thẳng dòng nơi con sông hồng chảy tới cũng sẽ bị bào mòn theo thời gian.

Xét về tổng thể chỉ có 2 lực tự nhiên tác động lên dòng nước con sông Hồng, lực thứ nhất là do sự nghiêng của khối lục địa, và lực thứ hai là lực Coriolis đẩy dòng nước chảy theo hướng từ Tây sang Đông. Lực Coriolis chỉ xuất hiện khi dòng nước chảy ra xa khỏi tâm trái đất, tức là chảy về phía xích đạo. Khi chảy song song với vĩ độ lực này không còn (chảy từ vĩ độ thấp tới vĩ độ cao, như con sông Kỳ Cùng, thì hướng chảy ngược lại, từ Đông sang Tây). Do độ nghiêng của thềm lục địa mà lực chảy nghiêng lúc nào cũng có và mạnh hơn nhiều lần lực Coriolis. Quy luật dòng chảy có phù sa là tại cửa sông biển luôn hình thành xoáy, tại xoáy hình thành gò đất. Lực đẩy dòng nước ở phía bên trên gò đất là lực Coriolis, nó sẽ yếu dần theo thời gian. Tất cả sức mạnh của dòng nước sông Hồng chuyển xuống nhánh dưới gò.

Có hai con sông chính tác động đến hướng chảy của con sông Hồng là sông Đà và sông Lô. Sức chảy của sông Đà mạnh gấp nhiều lần sức chảy của sông Hồng và sông Lô cho nên nó quyết định dòng nước sông Hồng.

Vào khoảng 6000 năm trước đây bờ biển ở vào khoảng Phú Thọ. Khoảng 4000 năm về trước bờ biển xưa chạy dọc theo QL18 tiếp đến là QL2A, theo QL2C, rồi theo QL21A..

Do bị bào mòn phía hữu ngạn mà hướng dòng chảy của con sông Đà thay đổi dần một góc 30 độ về phía Bắc. Do hướng chảy sông Đà thay đổi mà dòng nước sông Hồng thay đổi theo. Dòng nước chảy thẳng về phía Việt Trì tạo ra một vùng xoáy và hình thành gò đất lưỡi trai Tây Sơn. Vì thời điểm mưa giữa vùng Tây Bắc và Đông Bắc không giống nhau nên có lúc dòng chảy con

Hình 1: Sông hồng ngày xưa chảy từ Mê Linh qua khu vực Vân Trì đi về phía Chí Linh. Cái dòng sông ấy bị hiệu ứng gò nổi chia đôi, nhánh bên trên bị chẹn khiến nó nhỏ đi, dịch chuyển song song ra vị trí sông Đáy ngày nay. Nhánh bên dưới chảy mạnh hơn và là sông Hồng ngày nay. Đúng ra con sông Hồng chảy theo hướng Tây Bắc sang Đông Nam, nhưng có lẽ vì bị sự cố hố sụt lún Hồ Tây khiến cho dòng nước bị bẻ quặt đi một góc 45 độ.

sông Lô quyết định, nó đẩy dòng chảy con sông Hồng về phía Nam thành con sông Đáy. Như vậy sông Đà và sông Lô để lại dấu vết là sông Phan và sông Đáy. Các gò đất xuất hiện khiến con sông Phan trở thành nhánh phụ chảy do lực Coriolis dần về phía đầm Vạc. Sự hình thành sông Cà Lồ, sông Đuống, sông Thái Bình cũng theo cùng một nguyên lý dựa vào lực Coriolis.

Như vậy do phù sa bị đưa theo dòng nước, từ Tây Bắc tới Đông Nam, mà lòng con sông Hồng dịch chuyển song song dần theo hướng Đông Bắc xuống Tây Nam. Nhìn trên bản đồ chúng ta có thể thấy bãi Phúc Xá đã lớn dần như vậy. Con sông Đuống bắt đầu từ khu vực Mê Linh chảy về phía Luy Lâu. Gò Cổ Loa đã chia con sông thành hai nhánh, nhánh bên trên là sông Đuống, nhánh dưới là con sông Hồng ngày nay. Nhánh trên bị phù sa làm cho nghẽn nhỏ lại. Nó tịnh tiến song song về phía Nam về vị trí sông Đuống như hiện nay.

Khảo cổ Học di chỉ Đồng Đậu cho thấy vị trí này là nơi con sông Cà Lồ chảy qua có tuổi họ khoảng 3500. Vậy sự kiện chia dòng con sông Đuống xảy ra chỉ trong khoảng 3000 năm trở lại đây. Và vì thế mà tuổi Hồ Tây không thể sớm hơn 3000 năm về trước. Dòng chảy của con sông Hồng đi từ Sơn Tây xuống tới Hà Nội theo đúng quy luật Tây Bắc tới Đông Nam. Tuy nhiên ngay tại hồ Tây chúng ta thấy sự thay đổi hướng dòng chảy tới gần 45 độ. Rõ ràng là sự lệch hướng này là kết quả của việc bị lún cục bộ đã làm thay đổi dòng chảy. Rõ ràng là con sông Hồng luôn chỉ chảy ở phía bên Gia Lâm, và dòng sông có su thế dịch chuyển song song về phía hồ Tây, có lẽ nó chưa bao giờ chảy qua hồ Tây.

Phía bên Gia Lâm đều là các vùng đất ruộng do phù sa đất cát đọng lại mà thành, nó không có cấu trúc cứng để tạo phản lực đẩy dòng nước sông Hồng chảy từ bên Vân Trì sang tới Hồ Tây. Sông hồng ngày xưa chảy từ Mê Linh qua khu vực Vân Trì đi về phía Chí Linh. Cái dòng sông ấy bị hiệu ứng gò nổi chia đôi, nhánh bên trên bị chẹn khiến nó nhỏ đi, dịch chuyển song song ra vị trí sông Đáy ngày nay. Nhánh bên dưới chảy mạnh hơn và là sông Hồng ngày nay. Đúng ra con sông Hồng chảy theo hướng Tây Bắc sang Đông Nam, nhưng có lẽ vì bị sự cố hố sụt lún Hồ Tây khiến cho dòng nước bị bẻ quặt đi một góc 45 độ như chúng ta đã nói ở trên.

2. Trận động đất năm 1016

Để làm rõ hơn chi tiết của trận động đất đã tạo ra hồ Tây, chúng ta cần xét thêm các ghi chép lịch sử.

Vào năm 1016 một trận động đất lớn do thềm lục địa bị bẻ gãy ở độ sâu khoảng 20km ngay phía dưới Hồ Tây. Sụt lún dần trong vòng 1000 năm qua đã tạo ra một vùng trũng là Hồ Tây ngày nay.

Trang 84 Đại Việt Sử Ký (Bản in Nội Các Quan Bản Mộc bản khắc năm Chính Hòa thứ 18 (1697)) chép về sự kiện năm 1016 như sau:

"Thiên hạ khi mờ tối,
trung thần giấu tính danh,
giữa trời nhật nguyệt sáng,
ai chẳng thấy dáng hình".

Nguyên văn: *"Thiên hạ tao mông muội,*
trung thần nặc tính danh,
trung thiên minh nhật nguyệt,
thục bất kiến kỳ hình".

Bài thơ trên còn có các dị bản trong Việt điện u linh, Sơn Tây tỉnh chí. Như vậy đây là một sự kiện tạo ấn tượng rất rất ghê gớm và có thật.

Đại Việt Sử Ký 1697, do Lê Văn Hưu, Phan Phu Tiên, Ngô Sĩ Liên, biên soạn. Sự kiện vào năm 1016 trong Đại Việt Sử Ký có chép sự kiện động đất. Đây chắc chắn là một trận động đất rất mạnh, vì gần 700 năm sau vẫn còn nhớ để đưa vào chính sử.

Lẽ đương nhiên các sự kiện được thần thánh hóa, và sức mạnh của trận động đất được so sánh với cuộc đại chiến đánh thắng quân Nguyên Mông.

Đọc lại chi tết trong Đại Việt Sử Ký:

Bính Thìn, [Thuận Thiên] năm thứ 7 [1016], (Tống Đại Trung Tường Phù năm thứ 9). Mùa xuân, tháng 3, lại lập 3 hoàng hậu: Tá Quốc hoàng hậu, Lập Nguyên hoàng hậu, Lập Giáo hoàng hậu, Độ cho hơn nghìn người ở kinh sư làm tăng đạo. Dựng hai chùa Thiên Quang, Thiên Đức và tô bốn pho tượng Thiên Đế.

Động đất.

Làm lễ tế vong các danh sơn. Vua nhân đi xem núi sông, đến bến đò Cổ Sở (Cổ Sở: bến Cổ Sở - tên nôm là bến Giá, nay ở xã Yên Sở, huyện Hoài Đức, tỉnh Hà Tây), thấy khí tốt của núi sông, tâm thần cảm động, bèn làm lễ rưới rượu xuống đất, khấn rằng: "Trẫm xem địa phương này, núi lạ sông đẹp, nếu có nhân kiệt địa linh thì hưởng lễ".

Đêm ấy, vua chiêm bao thấy có dị nhân đến cúi đầu lạy hai lạy, nói: "Thần là người làng này, họ Lý tên Phục man, làm tướng giúp Nam Đế, có tiếng là người trung liệt, được giao trông coi hai dải sông núi Đỗ Động và Đường Lâm, bọn Di Lão không dám xâm phạm biên giới, một phương yên bình. Đến khi chết, thượng đế khen là trung trực, sắc cho giữ chức như cũ. Cho nên phàm giặc Man Di đến cướp đều chống giữ được cả. Nay may được bệ hạ thương đến, biết cho thần giữ chức này đã lâu rồi".

Rồi đó thung dung nói:

*"Thiên hạ khi mờ tối,
trung thần giấu tính danh,
giữa trời nhật nguyệt sáng,
ai chẳng thấy dáng hình".*

*Nguyên văn "Thiên hạ tao mông muội,
trung thần nặc tính danh,
trung thiên minh nhật nguyệt,
thục bất kiến kỳ hình".*

Vua thức dậy nói việc ấy với Ngự sử đại phu Lương Nhậm Văn rằng: " Đó là ý thần muốn tạc tượng". Vua sai bói xin âm dương, quả nhiên đúng như thế. Bèn sai người trong châu [8a] lập đền đắp tượng đúng như hình dạng người trong chiêm bao, tuế thời cúng tế. Khoảng niên hiệu Nguyên Phong [1251-1258] đời Trần, người Thát Đát (Tartar hay Tatar, bộ tộc Mông Cổ, ở đây chỉ quân Nguyên - Mông) vào cướp, đi đến địa phương này, ngựa khuỵu chân không đi được, người trong thôn dẫn dân chúng ra chống đánh, chém được đầu giặc, giặc chạy tan. Khoảng năm Trùng Hưng [1285-1293], [Thát Đát] lại vào cướp, đến đâu cũng đốt phá, mà ấp ấy vẫn như được che chở, không bị xâm phạm mảy may, quả đúng như lời thần nói.

- Nhà Tống phong vua làm Nam Bình Vương. - Năm ấy được mùa to, 30 bó lúa giá 70 tiền. Cho thiên hạ 3 năm không phải nộp tô thuế.

Đinh Tỵ, [Thuận Thiên] năm thứ 8 [1017], (Tống Thiên Hy năm thứ 1). - Mùa xuân, tháng 3, cho Trần Văn Tú làm Thái phó. Xuống chiếu xá tô ruộng cho thiên hạ. - Điện Càn Nguyên bị sét đánh, vua coi chầu ở điện phía đông.

Như vậy chúng ta có thể hiểu rằng các chi tiết trong Đại Việt Sử Ký được liệt kê tương đối kỹ lưỡng, rõ ràng có phân biệt sét đánh với động đất. Vậy đã có động đất vào năm 1016. Trận động đất rất mạnh đến mức trời đất tối sầm, người chạy táo tác. Sự kiện này được coi là do sức mạnh thần linh mạnh tới mức như sức mạnh hủy diệt được quân Nguyên - Mông. Tuy nhiên trận động đất không làm thay đổi diện mạo Hà Nội.

Điện Càn Nguyên, tức khu vực Hoàng Thành nay bị sét đánh, vậy là nó ở vị trí tương đối cao. Ngày nay chúng ta biết đó là vùng đất cổ có độ cao khoảng 16m, cùng độ cao với đình Quán La (Phía Tây hồ Tây, Hà Nội). Như vậy Gò đất cổ xưa dài 3km cao 16m chạy dài từ dọc Hồ Tây đến Hoàng Thành đã bị sụt. Có lẽ vùng sụt lún là một hình tròn, nhưng phù sa sông Hồng đã bồi dần một nửa.

Hoàn toàn không thấy nói tới Hồ Tây, trong khi Đại Việt Sử Ký ghi nhận Vua đến vùng Yên Sở, huyện Hoài Đức, tỉnh Hà Tây. Như vậy có thể hiểu trận động đất 1016 này phá hủy hoàn toàn vùng giữa Hà Nội và Hà Tây, nhưng hiện tượng sụt lún tạo ra Hồ Tây (hồ Dâm Đàm) xảy ra từ từ. Hồ Tây xưa có thể là một hồ không lớn lắm như ngày nay. Điều này có thể giải thích nguyên nhân vì sao sự tích Trâu Vàng và Hồ Tây mãi tới sau này mới xuất hiện.

Lần đầu tiên Đại Việt Sử Ký Toàn Thư chép về hồ Tây là năm 1044. Đại Việt Sử Ký chép *"Tháng 9 Vua sai đặt cũi lớn ở Dâm Đàm lấy con voi nhà của Chiêm Thành làm mồi dử voi rừng vào trong ấy, Vua thân đến bắt"*.

Sự tích kể rằng: *"Thiền sư Minh Không cho đúc tượng Phật cao 6 trượng, chóp đỉnh tháp Báo Thiên chín tầng, đỉnh đồng có đường kính 10 sải tay và một quả chuông đồng cực lớn. Chuông đúc xong, Vua sai Minh Không đánh một hồi chuông dài. Nghe tiếng chuông con trâu bằng vàng to lớn nằm trước kho đồng bên Tàu tự dưng bừng tỉnh "Đồng đen là mẹ của vàng" ngỡ là tiếng mẹ gọi nó liền vươn mình phóng thẳng xuống phương Nam tìm đến quả chuông khổng lồ, quần mãi xung quanh. Trâu vàng quần quanh mãi mà vẫn không thấy, khiến cho cả một vùng đất lớn quanh quả chuông sụt xuống thành một vùng hố sâu. Quả chuông sau một hồi cũng đổ sụp xuống hố sâu. Trâu vàng cũng theo đó nhảy xuống và nằm bên cạnh, chẳng bao lâu sau vùng đất bị trâu vàng dẫm sụt, nước tràn đầy trải rộng thành một hồ nước mênh mông. Thiền sư Minh Không về sau được thợ đúc đồng vùng Ngũ Xá (nay ở Đông Nam hồ Trúc Bạch) thờ làm tổ sư nghề đúc đồng."*

Như vậy vùng phía nam hồ Trúc Bạch nay, tức gần với Hoàng Thành là làng nghề đúc đồng. Động đất đã gây ra sụt lún nhấn chìm lò đúc đồng và tạo ra một cái hồ nước, chính là hồ Tây ngày nay.

Ngày nay khi nước cạn chúng ta vẫn có thể nhìn thấy một vài ngôi mộ cổ ở phía xa trong lòng hồ Tây. Vậy là ngoài vị trí bị sụt sâu ngay năm 1016, phần lớn hồ Tây bị chìm dần trong suốt cả 1000 năm qua. Qua đây ước tính hồ Tây bị lún khoảng 2m trong vòng 1000 năm qua.

Do từ năm 1016 đến nay không có một trận động đất lớn nào được ghi nhận, như thế có lẽ trận động đất năm 1016 là gắn với sự tích Trâu Vàng Hồ Tây, nói lên sự kiện sụt lún do trận động đất này mà tạo ra Hồ Tây. Xét trên bản đồ 1910 thì một phần lớn Hồ Tây vẫn là ruộng lúa nước lúc nổi lúc chìm, ngày nay thì chìm hẳn. Như thế hồ Tây bị sụt và tới nay vẫn tiếp tục sụt lún. Điều này cho thấy trận động đất sinh ra Hồ Tây chưa phải đã xẩy ra quá lâu. Trong "Tây Hồ bát cảnh" thời Lê cho biết rừng gỗ tầm giữa bán đảo hồ Tây.

Như vậy không phải Hồ Tây là một nhánh của Sông Hồng mà khi, do bị động đất, nó bị sụt lún thì Sông Hồng mới chảy vào. Vậy thì sự tích Cáo Chín Đuôi chắc xuất hiện sau sự tích Trâu Vàng. Khi sụt lún nước tràn vào khiến người dân ghi nhớ sự kiện.

Hình 2: Dựa trên bản đồ 1885 và 1910, chúng ta có thể ước lượng được hai đảo nhỏ chiếm diện tích khoảng 1/50 hồ Tây hồ Tây đã bị biến mất sau khoảng thời gian cỡ 20 năm.

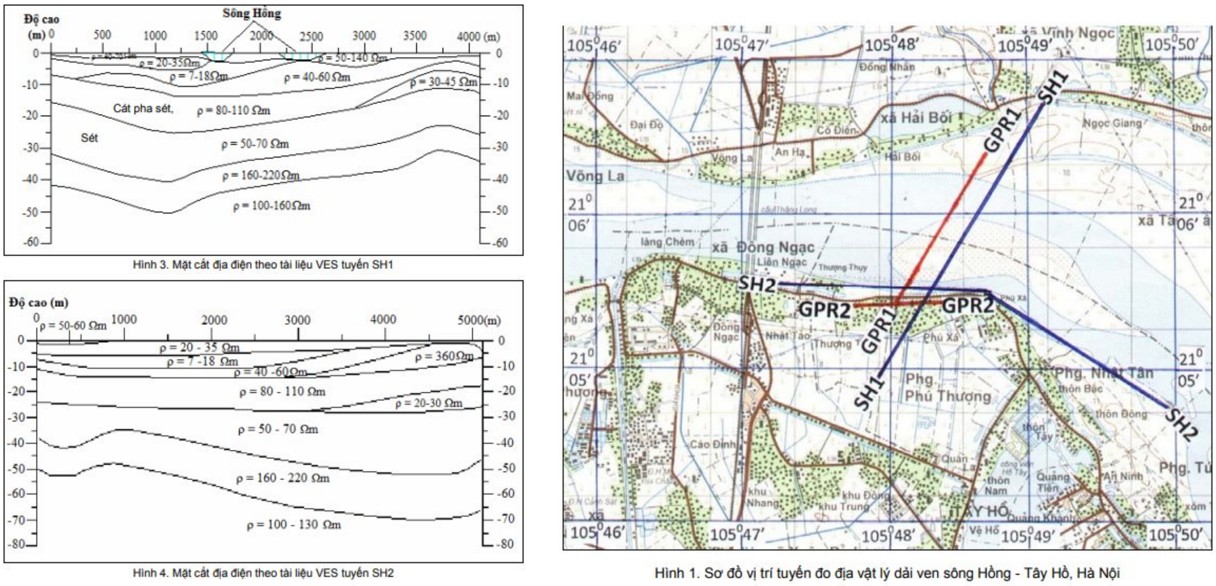
So sánh bản đồ 1885 và 1910 sau 25 năm hai mô đất có diện tích khoảng 1/50 mặt hồ bị biến mất. Như vậy thời gian hồ Tây bị sụt lún là khoảng 25x50 năm, tức ứng với khoảng 1000 năm trước đây. Rất có thể nó là hệ lụy của trận động đất vào năm 1016 được nhắc tới trong Đại Việt Sử Ký Toàn Thư.

3. Tiếp tục khảo sát

Những ngôi mộ cổ cùng với nghĩa địa vẫn chưa chìm hẳn vẫn còn thấy được ở giữa hồ Tây cho thấy quá trình lún rất từ từ. Theo như ước tính các ngôi mộ bằng beton đã lún sâu xuống khoảng 1m. Vật liệu xây dựng bằng beton chỉ có được từ khi Pháp sang Việt Nam, tức là sau khoảng 100 năm thì Hồ Tây bị lún khoảng 1m. Tức là nơi lún sâu nhất của Hồ Tây vào khoảng 10m.

Theo kết quả do điện trở [1] của Nguyễn Văn Giảng, Noboru Hida, Maksim Bano dọc theo hai tuyến, tuyến thứ nhất SH1 cắt ngang sông Hồng, tuyến thứ hai SH2 theo bờ sông Hồng phía Hồ Tây chúng ta có thể nhận thấy sự phân lớp điện trở rất rõ ràng, nhất là theo tuyến SH2 hoàn toàn không có sự xáo trộn các lớp. Như vậy không thể đã có sự đổi dòng chảy của con sông Hồng. Theo tuyến SH2 chúng ta thấy khi di chuyển từ Đông Ngạc sang phía Nhật Tân chúng ta thấy lớp đồng điện trở võng dần xuống khoảng 10m trên chiều dài thẳng 3km. Đó chính là hệ lụy do bị lún cục bộ Hồ Tây gây ra. Như vậy lún cục bộ Hồ Tây diễn ra với mức độ khoảng 2m trên 1km chiều dài. Bán kính Hồ Tây khoảng 2.5km, vùng hố lún phải lớn hơn, ước lượng khoảng 3km như vậy nơi lún sâu nhất là khoảng 10m.

Vậy chúng ta có thể khẳng định được vào khoảng 1000 năm trước đây Hồ Tây là một vùng sụt lún từ từ với bán kính khoảng 3km. Vùng sụt lún này đã sinh ra Hồ Tây và làm cho dòng chảy của con sông Hồng thay đổi một góc khoảng 45 độ. Nước sông Hồng đã chảy trực tiếp vào Hồ Tây tạo thành vệt hồ trong đó có cả hồ Gươm. Có thể tham khảo thêm ở bài viết của GS Trần Quốc Vượng [2].



Hình 3: Sơ đồ vị trí tuyến đo địa vật lý dải ven sông Hồng.

Tài liệu trích dẫn

[1] Van Giang, N., Hida, N. and Bano, M., 2012. The characteristics of shallow geological structure for Red River side-Tay Ho-Hanoi area by geophysical data. VIETNAM JOURNAL OF EARTH SCIENCES, 34(2).

[2] Trần, Q.V., 2009. Vị thế địa văn hóa-địa chính trị của Hà Nội trong bối cảnh vùng châu thổ sông Hồng và Việt Nam. Khoa Lịch sử, ĐHKHXH&NV, ĐHQG Hà Nội.

TOÁN HỌC VÀ BÓNG ĐÁ

Trần Nam Dũng
(Trường Đại học KHTN, ĐHQG thành phố Hồ Chí Minh)

GIỚI THIỆU

Bóng đá là một trong các môn thể thao được nhiều người yêu thích nhất. Các kỳ World Cup, Euro, Asian Cup, AFF Cup hay Seagames luôn nhận được sự ủng hộ cuồng nhiệt của các tín đồ túc cầu giáo. Rất thú vị là bóng đá liên quan rất nhiều đến toán học, từ các vấn đề như thống kê, xác suất, đến bài toán lập lịch, đến quỹ đạo của các quả bóng và chính các quả bóng. Bài viết này sẽ giới thiệu một số bài toán liên quan đến bóng đá, gồm những vấn đề trong sân có và ngoài sân cỏ. Bài viết được lấy cảm hứng từ chức vô địch Seagames 30 của hai đội tuyển U22 nam và nữ của chúng ta.

1. Các bài toán

Các bài toán dưới đây, dù số liệu có thể lấy từ thực tế, nhưng đều là các bài toán giả định. Tất cả các dữ kiện sẽ chỉ được lấy từ đề bài, không được lấy thêm từ các thông tin bên ngoài.

Bài toán 1. *Trước trận chung kết bóng đá nam Seagames* 30 *giữa Việt Nam và Indonesia, nhà cái Smartbets ra kèo cho các kết quả (của* 90 *phút thi đấu chính thức) là* 1.75–3.5–5.1, *tương ứng với Việt Nam thắng – Hòa – Indonesia thắng.*

a) *Hãy cho biết nhà cái đã tính toán xác suất Việt Nam thắng – Hòa – Indonesia thắng trong* 90 *phút chính thức bằng bao nhiêu để đưa ra tỷ lệ trên?*

b) *Do trận chung kết không có kết quả hòa nên nếu hòa trong* 90 *phút thi đấu thì hai đội sẽ đấu tiếp* 2 *hiệp phụ. Nếu hai hiệp phụ cũng hòa thì sẽ đá luân lưu* 11*m. Giả định rằng nếu đá phạt đền thì xác suất thắng của hai đội ngang nhau. Hãy nêu một đề xuất hợp lý cho việc tính xác suất thắng – hòa – thua của hai đội trong hai hiệp phụ (nếu hai đội hòa hai hiệp chính), từ đó tính xác suất Việt Nam đoạt chức vô địch.*

Bài toán 2. *Trước các trận lượt cuối ở bảng B, đội Việt Nam được* 12 *điểm, ghi* 17 *bàn để lọt lưới* 4 *bàn, đội Indonesia được* 9 *điểm, ghi* 13 *bàn để lọt lưới* 2 *bàn, đội Thái Lan được* 9 *điểm, ghi* 12 *bàn để lọt lưới* 2 *bàn. Ở lượt trận cuối, Indonesia sẽ gặp Lào, còn Việt Nam gặp Thái Lan. Đây là* 2 *trận đấu sẽ quyết định chiếc vé vào bán kết. Chỉ có* 3 *đội Việt Nam, Indonesia và Thái Lan còn khả năng tranh chấp. Theo luật Seagames thì khi hai đội bằng điểm nhau, thứ hạng sẽ được phân định bằng (theo thứ tự ưu tiên) hiệu số bàn thắng, số bàn thắng và cuối cùng là kết quả đối đầu.*

Hãy tính xác suất Việt Nam đoạt vé vào bán kết (hai đội xếp đầu bảng sẽ đoạt vé) với giả định sau: Xác suất Indonesia thắng Lào là 90%. Xác suất Thái Lan thắng Việt Nam là 33%, trong đó xác suất Thái Lan thắng Việt Nam với 2 bàn cách biệt là 10%.

Bài toán 3. *Ở giải Champions League mùa bóng 2008 ở tứ kết có 8 đội, trong đó có 4 đội của Anh. Đức, Ý, Tây Ban Nha, Thổ Nhĩ Kỳ mỗi nước có 1 đại diện. 8 đội bóng bốc thăm ngẫu nhiên đấu loại trực tiếp. Nếu giả định rằng 8 đội bóng là ngang ngửa nhau (xác suất thắng ở mỗi trận được chia đều cho hai đội) thì xác suất có trận chung kết toàn Anh là bao nhiêu? (Thực tế thì đã xảy ra như vậy, với trận chung kết giữa MU và Chelsea trên sân Moscow).*

Bài toán 4. *Ở Seagames 30, bảng B có 6 đội Việt Nam, Thái Lan, Indonesia, Singapore, Lào, Brunei và lịch thi đấu là:*

25/11 : *Việt Nam vs Brunei, Indonesia vs Thái Lan, Lào vs Singapore.*

28/11 : *Việt Nam vs Lào, Indonesia vs Singapore, Thái Lan vs Brunei.*

1/12 : *Việt Nam vs Indonesia, Thái Lan vs Singapore, Lào vs Brunei.*

3/12 : *Việt Nam vs Singapore, Thái Lan vs Lào, Indonesia vs Brunei.*

5/12 : *Việt Nam vs Thái Lan, Indonesia vs Lào, Singapore vs Brunei.*

Đây là một hình mẫu cho một lịch thi đấu của một giải đấu vòng tròn gồm 6 đội. Tất cả sẽ có 5 vòng đấu, mỗi vòng có 3 trận.

Hãy xếp lịch thi đấu cho một giải đấu gồm 10 đội thi đấu vòng tròn một lượt, gồm 9 vòng, mỗi vòng 5 trận. Cùng bài toán trên cho giải đấu gồm $2n$ đội thi đấu vòng tròn một lượt.

Bài toán 5. *Ở một giải bóng đá có 6 đội thi đấu vòng tròn 1 lượt. Trong mỗi trận đấu, đội thắng được 3 điểm, đội thua được 0 điểm. Nếu hai đội hòa nhau thì mỗi đội được 1 điểm. Khi kết thúc giải người ta thấy rằng điểm của các đội là 6 số nguyên liên tiếp. Hỏi đội vô địch được mấy điểm?*

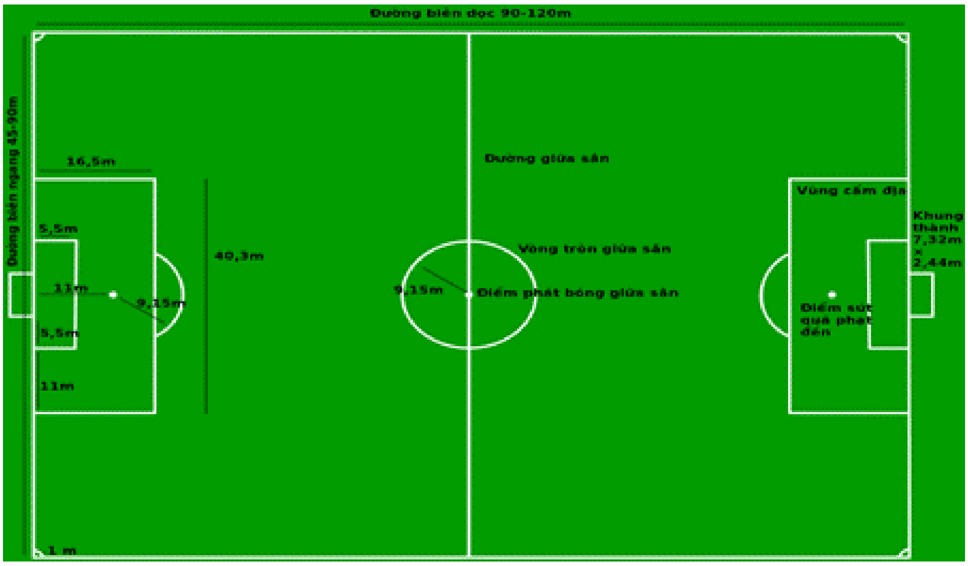
Nếu thay 6 đội bóng bởi n đội bóng, hỏi điều này có thể xảy ra được không? Giải thích rõ câu trả lời.

Bài toán 6. *Kể từ năm 2008, kích thước sân bóng đá chuẩn là dài 105m rộng 68m. Khung thành có chiều ngang 7m32, cao 2m44. Vòng tròn giữa sân có bán kính 9m15. Các khu vực 5m50 và 16m50 được tính theo khoảng cách đến cầu môn.*

a) *Nếu có một quả sút phạt ngay ở góc trên bên phải của vòng 16m50 thì khoảng cách từ đó đến tâm của cầu môn bằng bao nhiêu?*

b) *Một cầu thủ đang di chuyển từ góc trên bên trái của vòng 16m50 về hướng góc dưới bên phải của vòng này. Hỏi ở vị trí nào trên đường thẳng mà anh ta di chuyển thì anh sẽ có góc sút lớn nhất?*

c) *Theo thống kê của các chuyên gia, một cầu thủ trong một trận chạy trung bình khoảng 10km. Với số liệu này, cho biết các cầu thủ lên công về thủ như Cafu, Roberto Carlos, Marcelo, Alexander-Arnold của thế giới hay như Công Minh, Văn Hậu, Trọng Hoàng ở nước ta sẽ phải lên xuống dọc biên bao nhiêu lần?*

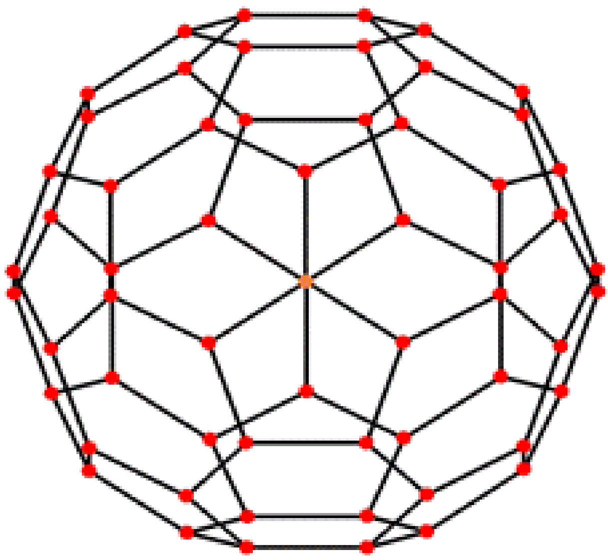


Bài toán 7. *Kể từ World Cup* 1970 *tại Mexico thì các quả bóng đấu chính thức thường được may từ các miếng da hình ngũ giác đều và lục giác đều có cùng cạnh. Ở năm* 1970 *thì ngũ giác sẽ có màu đen, lục giác có màu trắng. Sau này thì có nhiều biến thể với các thiết kế mỹ thuật khác nhau.*

a) *Dựa vào thông tin trên, hãy cho biết có bao nhiêu miếng da hình ngũ giác và có bao nhiêu miếng da hình lục giác?*

b) *Cho biết quả bóng có đường kính* 25cm*, hãy ước lượng tổng chiều dài các đường khâu.*

c) *Nếu các miếng da (ngũ giác đều và lục giác đều) có cạnh bằng* 4.5cm*, hãy ước lượng đường kính quả bóng. Ghi chú: Để giải câu b) và câu c), ta có thể mô hình hóa quả bóng như một nhị thập diện đều cụt (truncated icosahedral)*



2. Hướng dẫn, lời giải, đáp số

1. a) Xác suất sẽ tỷ lệ nghịch với tỷ lệ cược. Xác suất càng cao, tỷ lệ cược sẽ càng thấp. Nếu lấy nghịch đảo các số $1.75,\ 3.5,\ 5.1$ rồi cộng lại thì ta được 1.053221 lớn hơn 1 một chút. Đây bản chất chính là tỷ lệ lời của nhà cái (nếu đúng bằng 1 thì đây sẽ là trò chơi có kỳ vọng 0). Ta lấy số này để điều chỉnh lại các xác suất, từ đó tính được các xác suất tương ứng là 54.3%, 27.1% và 18.6%.

b) Đáp án câu này sẽ hoàn toàn dựa vào giả định của chúng ta. Có thể có lập luận rằng cơ hội của hai đội ở hiệp phụ là ngang nhau, cũng có thể áp dụng tỷ lệ cũ cho hiệp phụ. Cuối cùng, do hiệp phụ chỉ kéo dài 30 phút nên khả năng hòa sẽ cao hơn, ta có thể nâng xác suất hòa lên và giảm các xác suất thắng/thua xuống (vẫn theo tỷ lệ).

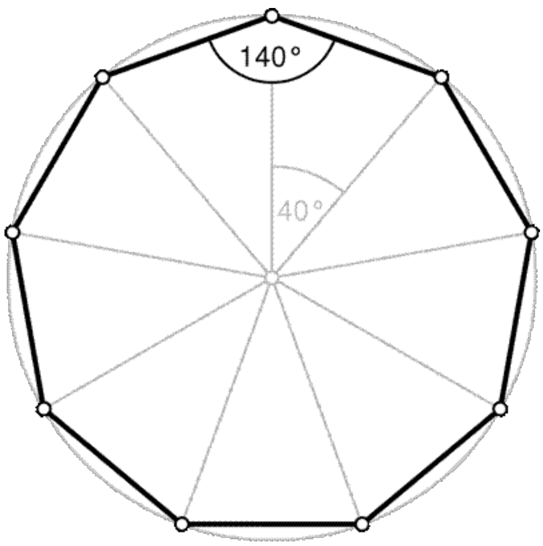
Ví dụ ta có thể cho kết quả hòa là 54.2% (gấp đôi so với ở hai hiệp chính). Số phần trăm còn lại chia cho hai đội theo tỷ lệ ở hiệp chính sẽ là 34.1% và 11.7%.

Nếu theo phương án này xác suất Việt Nam vô địch bằng $54.3\% + 27.1\%(34.1\% + 27.1\%) = 70.9\%$. $\square$

2. Việt Nam sẽ đoạt vé nếu không thua Thái Lan với cách biệt 2 bàn trở lên. Trong trường hợp Việt Nam thua Thái Lan với 2 bàn cách biệt trở lên thì Việt Nam vẫn đoạt vé nếu Indonesia không thắng Lào. Vì thế xác suất Việt Nam đoạt vé bán kết bằng $90\% + 10\%.10\% = 91\%$. $\square$

3. Do các đội ngang ngửa nhau và bắt thăm là ngẫu nhiên nên xác suất lọt vào trận chung kết của hai đội bất kỳ là bằng nhau. Do có $C_8^2 = 28$ cặp đấu có thể xuất hiện ở chung kết, trong đó có $C_4^2 = 6$ cặp đấu toàn Anh nên xác suất để có trận chung kết toàn nước Anh là $\frac{6}{28} = \frac{3}{14}$. $\square$

4. Ta xét một hình 9 cạnh đều



Đánh số tâm là số 10, đỉnh lần lượt là $1,\ 2,\ 3, \ldots,\ 9$. Lần lượt xếp lịch thi đấu như sau: Ở lượt thứ i, đội thứ i sẽ đấu với đội thứ 10, còn các đội đối xứng với nhau qua được thẳng đi qua i và 10 sẽ đấu với nhau.

Ví dụ lượt 1 sẽ là $1-10,\ 2-9,\ 3-8,\ 4-7,\ 5-6$, lượt 2 sẽ là $2-10,\ 3-1,\ 4-9,\ 5-8,\ 6-7$.

Lịch đấu cho giải gồm 2n đội được lập hoàn toàn tương tự. Chú ý ngoài phương pháp xây dựng bằng ý tưởng hình học rất độc đáo ở trên, ta còn có cách xây dựng theo kiểu quy nạp. □

5. Ta có 6 đội bóng thi đấu tất cả 15 trận. Mỗi trận đem lại nhiều nhất là 3 điểm và ít nhất là 2 điểm. Không thể xảy ra trường hợp tất cả các trận đều phân định thắng/thua (lúc đó điểm số mỗi đội là bội của 3, không thể là các số nguyên liên tiếp) hoặc tất cả các trận đều hòa (lúc đó điểm các đội bằng nhau). Vậy tổng điểm các đội < 45 và > 30. Gọi a là điểm đội xếp cuối thì điểm các đội lần lượt là $a,\ a+11, \dots,\ a+5$. Suy ra tổng điểm các đội là $6a+15$. Từ lập luận ở trên, suy ra $a = 3$ hoặc $a = 4$.

Nếu $a = 3$, tổng điểm các đội là 33, suy ra có 12 trận hòa, 3 trận phân định thắng - thua. Ba đội xếp đầu được $6,\ 7,\ 8$ điểm thì mỗi đội phải thắng ít nhất 1 trận, suy ra mỗi đội thắng đúng 1 trận. Nhưng nếu đội vô địch chỉ thắng 1 trận thì cũng không thể được 8 điểm, mâu thuẫn. Vậy a không thể bằng 3.

Nếu $a = 4$, tổng điểm các đội là 39, có 6 trận hòa, 9 trận phân định thắng thua và điểm các đội lần lượt là $4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$. Ta có thể sắp xếp để có một giải đấu như vậy. Xin dành bài tập này cho bạn đọc. Hơn nữa, ta chứng minh được mệnh đề tổng quát sau (bằng quy nạp)

Với mọi $n \geqslant 4$, tồn tại một giải đấu gồm n đội thi đấu bóng đá vòng tròn một lượt sao cho ở cuối giải điểm số của các đội lần lượt là $n-2,\ n-1, \dots,\ 2n-3$. □

6. Bài này là bài toán tính toán đại số đơn giản. Riêng câu góc sút lớn nhất gợi ý là tại điểm có góc sút lớn nhất thì đường tròn đi qua điểm đó và chân hai cầu môn sẽ tiếp xúc với đường thẳng quỹ đạo chạy của cầu thủ. □

7. Gọi P là số ngũ giác, H là số lục giác, V là số đỉnh, S là số cạnh. Ta thấy góc ở mỗi đỉnh của lục giác bằng $120°$, còn góc ở mỗi đỉnh của ngũ giác bằng $108°$, cho nên ở mỗi đỉnh sẽ có 3 đa giác kết nối với nhau, hơn nữa phải là 1 ngũ giác kết nối với 2 lục giác. Mỗi cạnh sẽ là cạnh của hai đa giác. Do đó ta có các phương trình sau:

Tính số lượt đỉnh: $5P + 6H = 3V$.

Tính số lượt cạnh: $5P + 6H = 2S$.

Một đỉnh có 1 ngũ giác kết nối và 2 lục giác: $5P - 2 = 6H$, tức là $5P = 3H$. Ngoài ra, theo công thức Euler thì $V - S + (P + H) = 2$.

Từ đây ta dễ dàng tính được $P = 12,\ H = 20,\ V = 60,\ S = 90$.

Mô hình hóa quả bóng như hình nhị thập diện đều cụt, ta có thể ước lượng được tổng chiều dài các đường khâu (bằng 90 lần cạnh của ngũ giác và lục giác) là 476.1cm.

Nếu cạnh ngũ giác và lục giác là 4.5 thì bằng cách tính theo tỷ lệ thuận, ta ước lượng được đường kính quả bóng là 21.41cm. □

Trong bài viết có sử dụng một số thông tin và tư liệu trên Internet.

TÍNH TOÁN VỚI DẤU CHẤM ĐỘNG TRONG MÁY TÍNH - PHẦN 1

Lý Ngọc Tuệ

GIỚI THIỆU

Khi làm việc với máy tính hay điện thoại, không ít thì nhiều chúng ta cũng phải tính toán với các giá trị không nguyên. Và trong hầu hết các thiết bị, những giá trị này được biểu diễn, lưu trữ và tính toán dưới dạng *dấu chấm động*[a] theo tiêu chuẩn IEEE 754. Trong bài này, chúng ta sẽ tìm câu trả lời cho các câu hỏi sau:

1. Dấu chấm động là gì?
2. Tiêu chuẩn IEEE 754 định nghĩa các dạng dữ liệu dấu chấm động trong máy tính như thế nào?
3. Máy tính thực hiện các phép tính cơ bản như cộng, trừ, nhân, chia với dấu chấm động như thế nào?

[a] floating-point numbers

1. Dấu chấm động là gì?

Trong các tính toán hay ước lượng trong cuộc sống, các giá trị mà chúng ta quan tâm có thể lớn, có thể nhỏ, nhưng độ chính xác mà ta cần dùng thường là cố định, hoặc thay đổi rất ít. Vì thế thay vì ghi ra rất nhiều chữ số $1234567891011120000000000$, hay $0,000000123456$, chúng ta có thể đưa chúng về dạng chuẩn hóa: $10^9 \cdot 1,23456789101112 \approx 10^9 \cdot 1,234568$ và $10^{-7} \cdot 1,23456$. Khi đấy, độ lớn nhỏ của giá trị có thể được ước lượng bởi số mũ của cơ số 10 (9 hay -7) và độ chính xác cần thiết có thể thấy được thông qua số chữ số của phần định trị $1,234568$.

Cho một số thực x và một cơ số $b > 1$ cố định. Chúng ta biểu diễn x dưới dạng chuẩn hóa với cơ số b như sau:

$$x = (-1)^s \cdot b^e \cdot c,$$

trong đấy

- $s = 0, 1$ xác định dấu của x,
- e được gọi là *số mũ* của x với cơ số b,

- c là phần *định trị*[1] của x thỏa mãn điều kiện $1 \leq c < b$.

Mỗi số thực x tương ứng với một và chỉ một bộ ba giá trị (s, e, c) với cơ số b xác định trước chính bởi điều kiện $1 \leq c < b$. Vì vậy, nếu như ta muốn lưu trữ giá trị của x, chúng ta có thể dùng bộ ba (s, e, c) tương ứng với x. Cách lưu trữ giá trị của x này trong máy tính được gọi là *dấu chấm động* (*dấu phẩy động*).

Từ công thức của dạng chuẩn hóa, ta có được $|e - \log_b(x)| < 1$. Vì thế, số lượng chữ số cần thiết để lưu trữ bộ ba (s, e, c) nhỏ hơn lưu trữ các chữ số của x rất nhiều khi x có thể là rất lớn hoặc rất bé, và độ chính xác cần thiết là không quá lớn. Ví dụ như chúng ta cần phải lưu trữ cả hai số 123456789101112000000000 và $0,000000123456$ với độ chính xác là 6-7 chữ số. Nếu như sử dụng dấu chấm tĩnh, sẽ cần đến $24 + 12 = 36$ chữ số cho phần nguyên và phần thập phân. Trong khi đấy, nếu như sử dụng dấu chấm động (với cơ số 10), chúng ta chỉ cần 1-2 chữ số cho số mũ, và 7 chữ số cho phần định trị, ít hơn rất nhiều so với 36. Hay nói một cách khác, với cùng một dung lương lưu trữ, dấu chấm động cho phép chúng ta biểu diễn được các số ở một khoảng rộng hơn rất nhiều với độ chính xác được xác định trước.

Điểm yếu lớn nhất của cách lưu trữ số dưới dạng dấu chấm động là các phép toán trở nên phức tạp hơn khá nhiều so với số nguyên và dấu chấm tĩnh, kể cả những phép tính cơ bản như cộng trừ. Điều này khiến cho việc tính toán với dấu chấm động có thể chậm hơn rất nhiều nếu như không có sự hỗ trợ tăng tốc từ phần cứng.

2. Tiêu chuẩn IEEE 754 cho dấu chấm động

Vào những năm 1960-70, khi việc tính toán trên máy tính bắt đầu trở nên phổ biến, rất nhiều công ty tham gia thiết kế và sản xuất các máy chủ lớn, và kèm theo đó là phần cứng hỗ trợ tính toán dấu chấm động. Tuy nhiên, mỗi công ty lại theo đuổi một định dạng dấu chấm động riêng của mình, đôi khi ngay cả cùng một dòng máy nhưng khác thế hệ cũng dùng định dạng dấu chấm động khác nhau. Điều đấy dẫn đến các mã chương trình tính toán dấu chấm động không thể được dùng lại cho những máy tính khác nhau, và việc chia sẻ dữ liệu dấu chấm động giữa các máy sẽ phải qua các chương trình chuyển đổi bằng phần mềm rất chậm chạp. Hơn thế nữa, các định dạng dấu chấm động khác nhau lại có những khoảng biểu diễn khác nhau, dẫn đến sai số trong dữ liệu với mỗi chuyển đổi.

Vì vậy việc chuẩn hóa định dạng dấu chấm động trong máy tính trở nên rất cần thiết để giảm bớt sự ràng buộc vào phần cứng của phần mềm và dữ liệu, qua đó giúp việc trao đổi dữ liệu và tái sử dụng mã chương trình trở nên hiệu quả hơn. Nhu cầu này đã dẫn đến sự ra đời của tiêu chuẩn IEEE 754 vào năm 1985 (còn được viết là IEEE 754-1985) quy định định dạng và các phép tính toán với dấu chấm động trong máy tính. Tiêu chuẩn này sau đấy đã được mở rộng và cập nhật thêm hai lần vào năm 2008 (IEEE 754-2008) và gần đây nhất là 2019 (IEEE 754-2019).

Tiêu chuẩn IEEE 754 chuẩn hóa định dạng dấu chấm động cho cơ số 2 (binary) và 10 (decimal). Trong bài này chúng ta sẽ chỉ tập trung vào dấu chấm động cơ số 2, dạng được hỗ trợ phổ biến nhất trong hầu hết các máy tính. Định dạng dấu chấm động với xx-bit thường được đặt tên chính thức là *binary*xx sử dụng

[1]coefficient, significand, hay là mantissa

- 1 bit đầu tiên làm bit dấu s,
- l_e bit tiếp theo làm bit số mũ e,
- l_c bit còn lại làm bit cho phần định trị c.

Nếu như chúng ta xem các bit của số mũ e (và c) như là một số nguyên dương, thì chúng ta sẽ không thể biểu diễn được các số nhỏ hơn 1 và gần với 0. Vì vậy để có thể biểu diễn được các số cả nhỏ lẫn lớn, số mũ thật sự của x ở dạng chuẩn hóa được quy định là $e - bias$ với hằng số hiệu dịch $bias$ được xác định trước.

Các giá trị tham số cho các số dấu chấm động $16, 32, 64$, và 128-bit theo tiêu chuẩn IEEE 754 là như sau:

Số bit sử dụng	Tên chính thức	Tên thường gặp	l_e	l_c	bias
16	binary16	half precision, half	5	10	$15 = 2^4 - 1$
32	binary32	single precision, single, float	8	23	$127 = 2^7 - 1$
64	binary64	double precision, double	11	52	$1023 = 2^10 - 1$
128	binary128	quadruple precision, quad	15	112	$16383 = 2^14 - 1$

Khi các bit của e không phải toàn 0 hay toàn 1, bộ ba (s, e, c) là ở dạng chuẩn hóa và giá trị thực là:

$$x = (-1)^s \cdot 2^{e-bias} \cdot \big(1 + 2^{-l_c} \cdot c\big).$$

Lưu ý đến phần $1+$ ở phần định trị. Vì khi viết số nhị phân dưới dạng chuẩn hóa, phần định trị luôn bắt đầu bằng $1.xxxxx$, nên khi lưu trữ số nhị phân dưới dạng chuẩn hóa, bit đầu tiên được ẩn đi để tiết kiệm bộ nhớ, cho phép chúng ta lưu trữ phần định trị chính xác thêm được 1 bit đằng sau.

Ví dụ như bộ ba $(0, 128, 4194304)$ viết dưới dạng nhị phân (32-bit):

$$0|1000\ 0000|100\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000$$

sẽ có giá trị thật là:

$$x = (-1)^0 \cdot 2^{128-127} \cdot \big(1 + 2^{-23} \cdot 4194304\big) = 3.$$

Trường hợp đặc biệt khi các bit của e toàn là 1 được chia ra làm 2 trường hợp con:

- Nếu như $c = 0$, khi đấy bộ ba $(s, e, 0)$ sẽ biểu diễn giá trị âm hoặc dương vô cùng ($\pm\infty$) tùy vào dấu s.
- Nếu như $c \neq 0$, bộ ba (s, e, c) được gọi là NaN (Not-A-Number, không phải là số).

Khi các bit của e toàn là 0 cũng được chia ra làm 2 trường hợp con:

- Nếu như $c = 0$: bộ ba $(0, 0, 0)$ biểu diễn giá trị $+0$, còn bộ ba $(1, 0, 0)$ biểu diễn giá trị -0. Về mặt giá trị thì $+0$ và -0 là như nhau, nghĩa là tiêu chuẩn quy định phép so sánh $+0 = -0$ trả về giá trị là đúng, và $+0 \neq -0$ trả về giá trị là sai. Tuy nhiên khi kết hợp với các phép tính khác, $+0$ và -0 có thể cho kết quả rất khác nhau, chẳng hạn như $1/+0 = +\infty$ còn $1/-0 = -\infty$.

- Nếu như $c \neq 0$: bộ ba $(s, 0, c)$ được gọi là số dưới chuẩn[2] và có giá trị thực được tính theo công thức:
$$x = (-1)^s \cdot 2^{1-bias-l_c} \cdot c.$$

Với các số thực không thể biểu diễn chính xác với định dạng dấu chấm động được lựa chọn, tiêu chuẩn IEEE 754 quy định các phương thức làm tròn như sau:

- Làm tròn về 0 - loại bỏ toàn bộ các chữ số thừa.
- Làm tròn lên (về $+\infty$)
- Làm tròn xuống (về $-\infty$)
- Làm tròn đến số gần nhất - trong trường hợp ở ngay giữa, làm tròn về số định trị chẵn gần nhất.

Trong bốn phương thức làm tròn này, phương thức làm tròn gần nhất, nếu ở ngay giữa thì làm tròn về định trị chẵn gần nhất (RTNE[3]) là phương thức làm tròn mặc định, và hầu hết các tính toán trên máy tính đều dùng phương pháp làm tròn này.

Ví dụ như chúng ta muốn tìm cách biểu diễn số $x = 4098$ dưới dạng binary16.

- Đầu tiên ta chuẩn hóa $x = 2^{12} \cdot \left(1 + 2^{-11}\right)$.
- Phần số mũ $e = 12 + bias = 12 + 15 = 27$, biểu diễn dưới dạng nhị phân với 5 bit là 11011.
- Phần định trị viết dưới dạng nhị phân là $1,000\,000\,000\,01$ sẽ được làm tròn về $1,000\,000\,000\,0$.
- Như vậy, số $x = 4098$ sẽ được lưu trữ dưới dạng binary16 thành

  0|11011|0000000000

  và đổi ngược lại ra thành giá trị 4096.

Tương tự như vậy, số $x = 4100$ sẽ được biểu diễn dưới dạng binary16 thành

0|11011|0000000010

có giá trị là 4102.

[2] subnormal/denormal numbers
[3] round to nearest, tie-to-even, hay là ngắn gọn hơn, round-to-nearest-even

3. Tính toán với dấu chấm động - Cộng và Trừ

Vậy làm thế nào để chúng ta có thể cộng (hay trừ) hai số được biểu diễn dưới dạng dấu chấm động IEEE 754? Với $x = (s_1, e_1, c_1)$ và $y = (s_2, e_2, c_2)$, đầu tiên chúng ta hãy xét đến các trường hợp đặc biệt:

- Nếu như x hoặc y là NaN, kết quả của $x + y$ và $x - y$ được quy định là NaN.
- Các trường hợp $(+\infty) + (-\infty)$, $(+\infty) - (+\infty)$, $(-\infty) - (-\infty)$ cũng được quy định cho ra kết quả là NaN.
- Nếu như $x = y = \pm 0$, $x + y = (-1)^{\min\{s_1, s_2\}} \cdot 0$; hay nói cách khác, $-0 + -0 = -0$, còn lại kết quả là $+0$.

Với cả x và y đều ở dạng chuẩn, đầu tiên chúng ta sẽ biến đổi x và y về cùng một số mũ, rồi cộng hoặc trừ phần định trị sau khi đã biến đổi. Giả sử như $e_1 \geq e_2$, phần định trị $1 + 2^{-l_c} \cdot c_1$ chúng ta sẽ viết gọn lại thành $\overline{1, c_1}$. Khi đấy ta có được:

$$\begin{aligned} x + y &= (-1)^{s_1} \cdot 2^{e_1 - bias} \cdot \overline{1, c_1} + (-1)^{s_2} \cdot 2^{e_2 - bias} \cdot \overline{1, c_2} \\ &= 2^{e_1 - bias} \cdot \left((-1)^{s_1} \cdot \overline{1, c_1} + (-1)^{s_2} \cdot 2^{e_2 - e_1} \cdot \overline{1, c_2}\right). \end{aligned}$$

Hay nói một cách khác, sau khi sắp xếp các bit của x và y thẳng hàng, chúng ta chỉ việc cộng, trừ phần định trị, rồi thực hiện làm tròn và chuẩn hóa lại kết quả.

Về mặt cơ bản, đây chính là cách mà các số dấu chấm động dạng binary32 và binary64 được cộng trừ ngay bên trong CPU của máy tính. Tuy nhiên thuật toán tính cộng này vấp phải một vấn đề là, để sắp xếp các bit của x và y thẳng hàng, chúng ta có thể sẽ phải dùng rất nhiều bit. Như với trường hợp x và y đều là binary64, chúng ta có thể phải cần đến hơn 2000 bits, và trở lại đúng vấn đề ban đầu của việc sử dụng dấu chấm tĩnh.

Để giải quyết vấn đề này, có hai điều đáng chú ý sau có thể giúp chúng ta giảm bớt số bit cần dùng cho phép cộng trừ:

- Nếu như $\frac{1}{2} \leq fracxy \leq 2$, chúng ta chỉ cần nhiều nhất là $l_c + 3$ bit để tính tổng của phần định trị sau khi đã biến đổi số mũ.
- Nếu như $|x| > 2 \cdot |y|$ hay là $|y| > 2 \cdot |x|$, kết quả của $\frac{1}{2} \max\{|x|, |y|\} < |x + y| < \frac{3}{2} \max\{|x|, |y|\}$.

Trong trường hợp thứ 2, kết quả của $x + y$ sẽ chỉ nằm quanh quẩn số có trị tuyệt đối lớn hơn giữa x và y. Giả sử như số có trị tuyệt đối lớn hơn đấy là x. Để làm tròn đúng được kết quả của $x + y$, ngoài 1-2 bit thêm vào sau x, những bit nhỏ hơn theo sau đó chỉ quan trọng là tất cả đều bằng 0, hay là có ít nhất một bit khác 0. Và vì số bit mà y phải dịch chuyển chính là $e_1 - e_2$, chúng ta có thể tính trực tiếp được những bit nào của y sẽ chuyển ra sau x hơn 2 bit mà không cần phải dịch chuyển y. Sau đấy khi dịch chuyển y, chúng ta chỉ cần quan tâm đến tối đa là 2 bit sau x. Vì vậy, tổng số bit mà chúng ta cần để thực hiện phép cộng hoặc trừ các định trị sau khi biến đổi chỉ vào khoảng $l_c + 4$, nhỏ hơn rất nhiều so với toàn bộ khoảng vài nghìn bit như trước.

Bài tập 1. Giả sử như chúng ta muôn làm tròn theo phương pháp mặc định một số x, và chúng ta có được bit cuối cùng ngay vị trí cần làm tròn của x là x_0, bit ngay sau đó là x_{-1}, và $z = 0$ nếu như những bit còn lại theo sau x_{-1} đều là 0, nếu không thì $z = 1$. Xét tất cả các trường hợp của x_0, x_{-1} và z và tìm kết quả làm tròn trong tất cả các trường hợp đấy.

Bài tập 2. Dùng bài tập trên và đoạn thảo luận trước đấy để hoàn thiện thuật toán tính tổng $x + y$ cho 2 số dấu chấm động dương dạng chuẩn x và y.

Bài tập 3. Mở rộng thuật toán ở trên để xét trường hợp x và y trái dấu, hay nói cách khác, tính trừ.

Bài tập 4. Lập trình thuật toán trên bằng ngôn ngữ ưa thích nhất của bạn và kiểm tra thử kết quả lại với kết quả của CPU.

Tài liệu

[1] ttps://en.wikipedia.org/wiki/IEEE_754

[2] ttps://ieeexplore.ieee.org/document/4610935

[3] oldberg, David (March 1991). "What Every Computer Scientist Should Know About Floating-Point Arithmetic". ACM Computing Surveys. 23 (1): 5–48. doi:10.1145/103162.103163

ĐƠN ĐỒ THỊ VÔ HƯỚNG TRONG ĐỀ CHỌN ĐỘI TUYỂN CÁC TỈNH/THÀNH PHỐ 2019 - 2020

Nguyễn Tuấn Anh
(Trường THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu - Đồng Tháp)

GIỚI THIỆU

Những ý tưởng cơ bản ban đầu của lý thuyết đồ thị được nhà Toán học Leonhard Euler trình bày vào thế kỷ XVIII trong một bài báo về bài toán *Bảy chiếc cầu ở Königsberg* vào năm 1973. [a] Đến thời điểm hiện tại, Lý thuyết đồ thị ứng dụng vào rất nhiều lĩnh vực khác nhau [b], trong Toán điều đó càng được thấy rõ ràng hơn. Nhằm góp phần thể hiện vai trò đó trong bài viết này chúng ta sẽ đến với một số bài toán chọn đội dự thi VMO năm học 2019 – 2020 với lời giải dựa vào đồ thị (chính xác là đơn đồ thị vô hướng). Có hai điều sau xin lưu ý cùng bạn đọc

- Trước hết, các khái niệm liên quan đến *Lý thuyết đồ thị* sẽ có đôi chút khác biệt tùy vào mục đích và lĩnh vực áp dụng. Vì vậy, để bạn đọc dễ theo dõi người viết chọn các khái niệm trong tài liệu *Theory and Application of Graphs* [1] và sẽ không trình bày lại. Ban đọc cần thiết có thể tra cứu lại.

- Vì các bài toán được giải trên quan điểm của đồ thị nên sẽ có những lời giải tương đối không gọn và có thể thay thế bằng cách phương pháp giải khác: *Sử dụng song ánh, đếm bằng hai cách*, ... Như vậy bạn đọc nên tìm một lời giải khác, đó cũng là một con đường học rất hiệu quả.

Mọi đóng góp cho bài viết bạn đọc có thể gửi về địa chỉ: anh110004@gmail.com

[a] Nhưng mãi đến giữa thế kỷ XIX người ta mới quay lại với chủ đề này với những nghiên cứu về mạng điện, về các mô hình tinh thể và về các cấu trúc phân tử của các chất. Sự phát triển của logic hình thức đã đẩy đến việc nghiên cứu các quan hệ hai ngôi dưới dạng đồ thị. Sau đó nhiều bài toán khác cũng đã được phát triển trên ngôn ngữ đồ thị.

[b] Chính vì điều đó mà trong chương trình đổi mới giáo dục nội dung *Lý thuyết đồ thị* được đưa vào giảng dạy cấp THPT.

1. Một số bài toán

Ví dụ 1 (Khánh Hòa - 2019, ngày 1). *Một nhóm phượt có n thành viên. Năm 2018 họ thực hiện 6 chuyến du lịch mà mỗi chuyến có đúng 5 thành viên tham dự. Biết rằng hai chuyến du lịch bất kỳ có tối đa hai thành viên chung. Tìm giá trị nhỏ nhất của n.*

Lời giải. Gọi n thành viên tham dự là $X_1, X_2, \dots, X_n$ và $Y_1, Y_2, \dots, Y_6$ là sáu chuyến đi phượt.

Xét đồ thị hai phe với tập đỉnh là $X \cup Y$ trong đó:

$$X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\} \text{ và } Y = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_6\}.$$

Hai đỉnh X_i, Y_j được nối cạnh với nhau nếu người X_i tham gia chuyến phượt Y_j.

Theo giả thiết đồ thị có $6 \times 5 = 30$ cạnh. Gọi S là tập các cặp hai cạnh có cùng một đỉnh thuộc X. Ta sẽ đếm $|S|$.

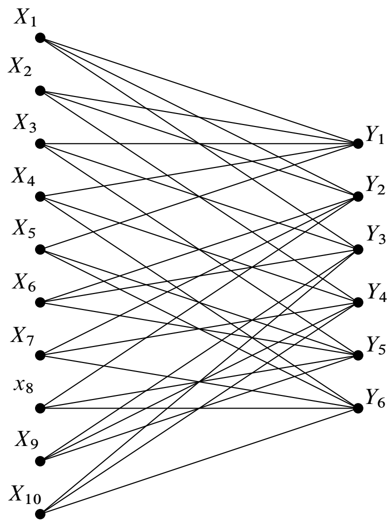
- Đếm theo đỉnh của tập Y. Theo giả thiết với hai đỉnh thuộc Y thì nối cạnh chung tối đa 2 đỉnh thuộc X. Do đó $|S| \leqslant 2C_6^2$.
- Đếm theo đỉnh thuộc tập X. Gọi $d_i = \deg(X_i)$ (khi đó ta có $\sum d_i = 30$). Khi đó với mỗi đỉnh X_i ta có $C_{d_i}^2$ cách chọn ra 2 đỉnh[1] thuộc Y cùng liên thuộc một cạnh nào đó với X_i. Suy ra
$$|S| = \sum C_{d_i}^2 = \sum \frac{d_i^2 - d_i}{2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{\dfrac{(d_1 + d_2 + \cdots + d_n)^2}{n} - (d_1 + d_2 + \cdots + d_n)}{2} \leqslant \sum \frac{d_i^2 - d_i}{2} = 30.$$

Từ đó ta được $n \geqslant 10$. Để khẳng định $n = 10$ là giá trị nhỏ nhất ta cần chỉ ra với 10 người có thể sắp xếp 6 chuyến du lịch thỏa giả thiết. Xem lại cách chứng minh, thấy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $d_i = 3$ với mọi $i = 1, 2, \dots, 10$. Như vậy ta chỉ cần xây dựng một đồ thị hai phe có 30 cạnh, mỗi đỉnh của X có bậc là 3, mỗi đỉnh của Y có bậc là 5 (xem hình vẽ).

[1] Ta quy ước $C_{d_i}^2 = 0$ với $d_i = 0, 1$.



Lời giải hoàn tất. □

Nhận xét 1. Cùng với ý tưởng xây dựng đồ thị hai phe và đếm số cặp hai cạnh chung một đỉnh, ta có bài toán sau (mặc dù về mặt diễn đạt chúng khác nhau).

Ví dụ 2 (Lào Cai - 2019, ngày 1). *Trên mặt phẳng cho tập A gồm n điểm phân biệt (với n là số nguyên dương) và B là tập gồm 14 đường thẳng phân biệt. Biết mỗi đường thẳng của tập B đi qua đúng 14 điểm của tập A.*

a) *Gọi tất cả các điểm của tập A là $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Với mỗi P_i gọi a_i là số đường thẳng của tập B đi qua P_i. Chứng minh rằng $\sum_{i=1}^{n} a_i = 196$.*

b) *Chứng minh rằng $n \geqslant 102$.*

Lời giải. Gọi $l_1, l_2, \ldots, l_{14}$ là 14 đường thẳng thuộc tập B. Xét đồ thị hai phe với tập đỉnh được phân chia thành hai tập là A và B. Một đỉnh P_i được nối cạnh với l_j nếu và chỉ nếu đường thẳng l_j đi qua điểm P_i.

a) Theo giả thiết bài toán đồ thị có $14 \times 14 = 196$ cạnh. Từ đó suy ra

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} \deg(P_i) = \frac{196 \times 2}{2} = 196.$$

vì

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(P_i) = \sum_{i=1}^{14} \deg(l_i), \quad \sum_{i=1}^{n} \deg(P_i) + \sum_{i=1}^{14} \deg(l_i) = 2 \times 196.$$

b) Gọi S là tập các cặp hai cạnh có chung một đỉnh thuộc A. Ta sẽ đếm $|S|$ theo hai cách:

- Đếm theo đỉnh của A. Vì mỗi đỉnh P_i có $C_{a_i}^2$ cách chọn ra 2 đường thẳng nhận nó làm đỉnh.[2] Do đó:
$$|S| = \sum_{i=1}^{n} C_{a_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2 - a_i}{2}.$$

- Đếm theo đỉnh của B. Theo giả thiết ta có hai đỉnh của B có tối đa 1 đỉnh chung (vì nếu có từ hai điểm chung trở lên thì hai đường thẳng sẽ trùng nhau). Do đó $|S| \leqslant C_{14}^2$.

Như vậy ta có được bất đẳng thức
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2 - a_i}{2} \leqslant C_{14}^2.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có
$$\frac{\dfrac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{n} - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)}{2} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2 - a_i}{2} \leqslant C_{14}^2.$$

Theo câu (a) thì $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 196$ nên ta được
$$\frac{\dfrac{196^2}{n} - 196}{2} \leqslant C_{14}^2 = 91,$$

hay $n \geqslant 102$ (vì n nguyên dương). Bài toán được chứng minh. □

Nhận xét 2.

- Khác với bài toán thứ nhất, bài toán này ta có thể nhận ra đẳng thức không thể xảy ra trong đánh giá $n \geqslant 102$. Một vấn đề đặt ra là n nhỏ nhất để tồn tại n điểm thỏa mãn là bao nhiêu? Phần này mời bạn đọc khai khác.

- Một cách đếm đơn giản khác (thu được đánh giá tốt hơn): Đánh ký hiệu 14 đường thẳng là $l_1, l_2, \ldots, l_{14}$. Khi đó xét đường thẳng l_1, trên đường thẳng này cần có 14 điểm.

  Xét đường thẳng l_2 đường này có tối đa một điểm chung với l_1 nên ta cần có thêm 13 điểm mới.

  Xét tiếp đường thẳng l_3, đường thẳng này có điểm chung với 2 đường trước đó tối đa 2 điểm do đó ta cần có thêm $14 - 3 + 1 = 12$ điểm mới nữa.

  Tiếp tục quá trình trên, ta cần ít nhất $14 + 13 + \cdots + 2 + 1 = 105$ điểm để có thể thỏa mãn, tức $n \geqslant 105$.

- Ưu điểm của lời giải một bài toán Tổ hợp bằng cách sử dụng đồ thị (vô hướng hoặc có hướng) không chỉ nằm ở chỗ có nhiều định lý, tính chất có thể áp dụng mà hơn hết là thấy được hình dáng chung của nhiều bài toán dù có cách phát biểu bề ngoài có thể khác nhau. Các bài toán tương tự dưới đây sẽ thể hiện điều đó, mời bạn đọc làm thử.

[2] Ta quy ước $C_{a_i}^2 = 0$ với $a_i = 0, 1$

Bài tập 1 (Chuyên ĐH Vinh - 2019). *Có* 16 *học sinh tham gia làm một bài thi trắc nghiệm. Đề thi chung cho tất cả học sinh và có n câu hỏi, mỗi câu hỏi có* 4 *phương án trả lời. Sau khi thi xong, thầy giáo nhận thấy với mỗi câu hỏi, mỗi học sinh chọn đúng* 1 *phương án trả lời và hai học sinh bất kì có nhiều nhất* 1 *câu hỏi có phương án trả lời giống nhau.*

a) Với $n = 2$ hãy chỉ ra một ví dụ về phương án trả lời các câu hỏi của 16 *học sinh.*

b) Chứng minh rằng $n \leqslant 5$.

Bài tập 2 (Cần Thơ - 2019, IMO Shortlist - 2004). *Trong một trung tâm văn hóa tỉnh có* 501 *học sinh tổ chức các CLB (một học sinh có thể tham gia nhiều CLB). Các CLB phối hợp với nhau để tổ chức các hoạt động xã hội. Biết rằng có k hoạt động xã hội thỏa mãn các điều kiện:*

i) *Mỗi cặp học sinh thuộc đúng* 1 *CLB.*
ii) *Với mỗi học sinh và mỗi hoạt động xã hội, học sinh này thuộc đúng* 1 *CLB trong hoạt động xã hội tương ứng.*
iii) *Mỗi CLB có một số lẻ thành viên và nếu số thành viên là $2m + 1$ thì số hoạt động xã hội là m.*

Tính tất cả các giá trị có thể có của k.

Bài tập 3 (Trung Quốc - 1996, ngày 2). *Có* 8 *ca sĩ tham gia một chương trình văn nghệ với m buổi hòa nhạc. Trong mỗi buổi hòa nhạc, có bốn ca sĩ tham gia và số lần tham gia của mỗi cặp ca sĩ là như nhau và bằng n (n là số nguyên dương). Tính giá trị nhỏ nhất của m.*

Bài tập 4 (VMO - 2005). *Cho bát giác lồi $A_1A_2\cdots A_8$ không có ba đường chéo nào đồng quy. Giao của hai đường chéo tùy ý được gọi là một nút. Xét tất cả các tứ giác lồi được tạo thành từ bốn đỉnh của bát giác đã cho và tứ giác được gọi là tứ giác con. Hãy xác định số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho có thể tô màu n nút để với mọi i, k phân biệt thuộc $\{1, 2, \ldots, 8\}$ thì các số $S(i,k)$ bằng nhau, trong đó $S(i,k)$ ký hiệu tứ giác nhận A_i, A_k làm đỉnh và giao của hai đường chéo là một nút được tô màu.*

Ví dụ 3 (PTNK - 2019). *Một trường phổ thông có n học sinh. Các học sinh tham gia vào nhiều câu lạc bộ khác nhau và có tất cả m câu lạc bộ. Giả sử mỗi câu lạc bộ có đúng* 4 *học sinh và với hai học sinh bất kỳ thì tham gia chung với nhau tối đa một câu lạc bộ. Chứng minh rằng*

$$m \leqslant \frac{n(n-1)}{12}.$$

Lời giải. Gọi A là tập các học sinh, B là tập các câu lạc bộ. Xét đồ thị hai phe có tập đỉnh được phân chia là A và B. Hai đỉnh $A_i \in A$ và $B_j \in B$ được nối cạnh với nhau nếu và chỉ nếu A_i là một học sinh tham gia câu lạc bộ $B_j \in B$.

Để chứng minh bất đẳng thức bài toán, ta sẽ đếm số cạnh của đồ thị.

- Theo giả thiết số cạnh của đồ thị khi đó là $4m$.

- Ta chứng minh kết quả sau:

  Gọi $A_1 \in A$ là đỉnh có nối cạnh sang B với số lượng cạnh nhiều nhất (nếu có nhiều đỉnh như vậy, ta chọn một trong số chúng) thì số cạnh nhận A_1 là đỉnh không vượt quá $\frac{n-1}{3}$.

  Thật vậy nếu số lượng cạnh trên nhiều hơn $\frac{n-1}{3}$. Giả sử tập đỉnh mà A_1 nối cạnh là $B' = \{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$ với $k > \frac{n-1}{3}$ và A_2, A_3, A_4 là ba đỉnh khác cùng nối cạnh với A_1 đến B_1. Khi đó, với các đỉnh $B_2, B_3, \ldots, B_k$ thì

  – Ta chỉ có thể nối cạnh thêm với các đỉnh khác với A_2, A_3, A_4 (vì bản thân mỗi đỉnh $B_2, B_3, \ldots, B_k$ đã nối cạnh với A_1). Ta gọi gọi $A' = A \backslash \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$.
  – Nếu một đỉnh nào đó thuộc A' nối với $B_i \in B'$ thì không được nối với các phần tử còn lại của B'.

  Do vậy số đỉnh phân biệt thuộc A' cần để nối cạnh đến các đỉnh thuộc B' thỏa giả thiết là

  $$3(k-1) > 3\left(\frac{n-1}{3} - 1\right) = n - 4.$$

  Điều này là không thể vì như vậy số đỉnh của tập A sẽ lớn hơn n. Chứng minh hoàn tất.

  Từ kết quả trên, số cạnh của đồ thị không vượt quá $\frac{n(n-1)}{3}$.

Do vậy $m \leqslant \frac{n(n-1)}{12}$. Bài toán được chứng minh. □

Nhận xét 3. Bài toán trên cũng có thể sử dụng đồ thị và đếm cặp cạnh theo hai cách như ví dụ 1, 2. Phần này xin dành cho bạn đọc.

Ví dụ 4 (Phú Thọ - 2019, ngày 2). *Có một nhóm người mà trong đó, mỗi cặp không quen nhau có đúng hai người quen chung, còn mỗi cặp quen nhau thì không có người quen chung. Chứng minh rằng số người quen của mỗi người là như nhau.*

Lời giải. Giả sử nhóm có n người là $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Xét một đồ thị có tập đỉnh là tập n người trong nhóm. Hai đỉnh được nối cạnh với nhau nếu và chỉ nếu hai người tương ứng hai đỉnh đó là quen nhau.

Xét hai đỉnh A_1, A_2 thuộc đồ thị. Gọi $N(A_1), N(A_2)$ là hai tập đỉnh lần lượt liền kề với A_1, A_2. Ta sẽ chứng minh $|N(A_1)| = |N(A_2)|$. Ta có hai trường hợp sau:

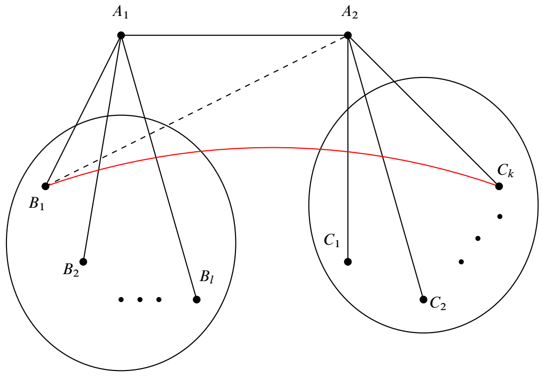
Trường hợp 1: A_1 và A_2 là hai đỉnh liền kề. Khi đó $N(A_1) \backslash \{A_2\}$ và $N(A_2) \backslash \{A_1\}$ là hai tập rời nhau (hai người quen nhau thì không có người quen chung).

- Trường hợp 1.1: Nếu $N(A_1) \backslash \{A_2\} = \emptyset$ thì $N(A_2) \backslash \{A_1\} = \emptyset$ vì nếu ngược lại giả sử $C_1 \in N(A_2) \backslash \{A_1\}$ thì C_1, A_1 là hai người không quen nhau nhưng chỉ có đúng A_2 là người quen chung.

  Điều này mâu thuẫn với giả thiết. Vậy trong trường hợp này ta có $|N(A_1)| = |N(A_2)| = 1$.

- Trường hợp 1.2: Nếu $N(A_1)\backslash\{A_2\} \neq \emptyset$, giả sử $N(A_1)\backslash\{A_2\} = \{B_1, B_2, \ldots, B_l\}$ (với $l \in \mathbb{N}^*$). Khi đó $N(A_2)\backslash\{A_1\}$ cũng khác $\emptyset$ (vì nếu $N(A_2)\backslash\{A_1\} = \emptyset$ thì theo lập luận trên $N(A_1)\backslash\{A_2\} = \emptyset$), giả sử $N(A_2)\backslash\{A_1\} = \{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ với $k \in \mathbb{N}^*$.

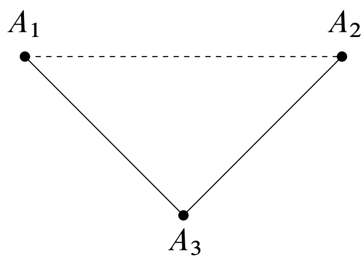
  Xét B_1, vì B_1 và A_2 là không liền kề nhau. Suy ra tồn tại hai đỉnh khác cùng nối cạnh với B_1 và A_2 (trong đó đã có sẵng A_1). Như vậy tồn tại duy nhất $C_i \in N(A_2)\backslash\{A_1\}$ sao cho B_1 nối cạnh với C_i. Thực hiện tương tự với các B_i khác, chú ý rằng không thể có B_i và B_j (với $i \neq j$) cùng nối sang một đỉnh của $N(A_2)\backslash\{A_1\}$. Từ đó ta được $|N(A_1)| \leqslant |N(A_2)|$.

  Áp dụng cách lập luận trên bằng cách đổi vai trò hai tập $N(A_1)$ và $N(A_2)$ ta cũng được $|N(A_2)| \leqslant |N(A_1)|$. Vậy $|N(A_1)| = |N(A_2)|$.

Như vậy, trong trường hợp này ta được $|N(A_1)| = |N(A_2)|$.

Trường hợp 2: A_1 và A_2 không được nối cạnh. Khi đó tồn tại một đỉnh, giả sử là A_3 nối cạnh với hai đỉnh này. Theo trường hợp 1 số đỉnh liền kề với A_1, A_2 bằng với số đỉnh liền kề với A_3.



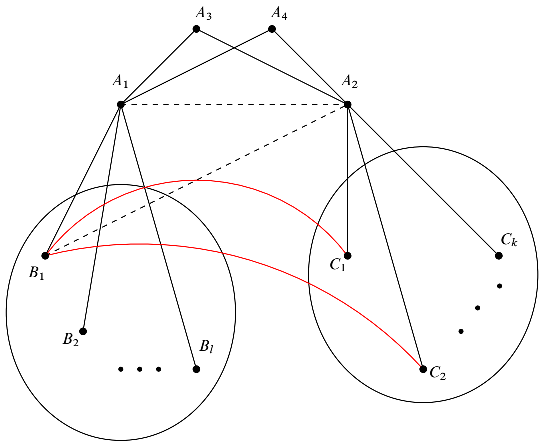
Tóm lại, số đỉnh liền kề của hai đỉnh tùy ý thuộc đồ thị luôn bằng nhau, hay nói cách khác hai người tùy ý trong nhóm có cùng số lượng người quen. □

Nhận xét 4.

- Trường hợp $|N(A_1)| = |N(A_2)| = 1$ thật sự chỉ xảy ra khi nhóm này có đúng hai người và hai người này quen nhau. Và đây là trường hợp nhiều học sinh lập luận bỏ qua, chưa đảm bảo tính chặt chẽ.

- Cách lập luận chứng minh $|N(A_1)| = |N(A_2)|$ bản chất là xây dựng song ánh giữa hai tập hợp $N(A_1) = N(A_2)$.

- Trường hợp 2 có thể lập luận trực tiếp như hình vẽ sau (dành cho bạn đọc).



- Một bài toán tương tự: *(APMO - 1990) Trong một đồ thị không chứa tam giác nào và không có một đỉnh nào nối cạnh với tất các các đỉnh khác. Biết rằng hai đỉnh bất kỳ A, B nếu không liền kề nhau thì có một đỉnh C sao cho C liền kề với cả A và B. Chứng minh rằng tất cả các đỉnh đều có bậc bằng nhau.*

Ví dụ 5 (Hưng Yên - 2019, ngày 1). *Cho một tập X khác rỗng được chia thành các tập con đôi một không giao nhau $A_1, A_2, \ldots, A_n$ và đồng thời cũng được chia thành các tập con đôi một không giao nhau $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Biết rằng hợp của hai tập hợp không giao nhau A_i, B_j (với $1 \leqslant i, j \leqslant n$) có không ít hơn n phần tử. Chứng minh rằng số phần tử của X không ít hơn $\frac{n^2}{2}$. Khi số phần tử của X là $\frac{n^2}{2}$ hãy chỉ ra một cách chia tập hợp thỏa mãn bài toán.*

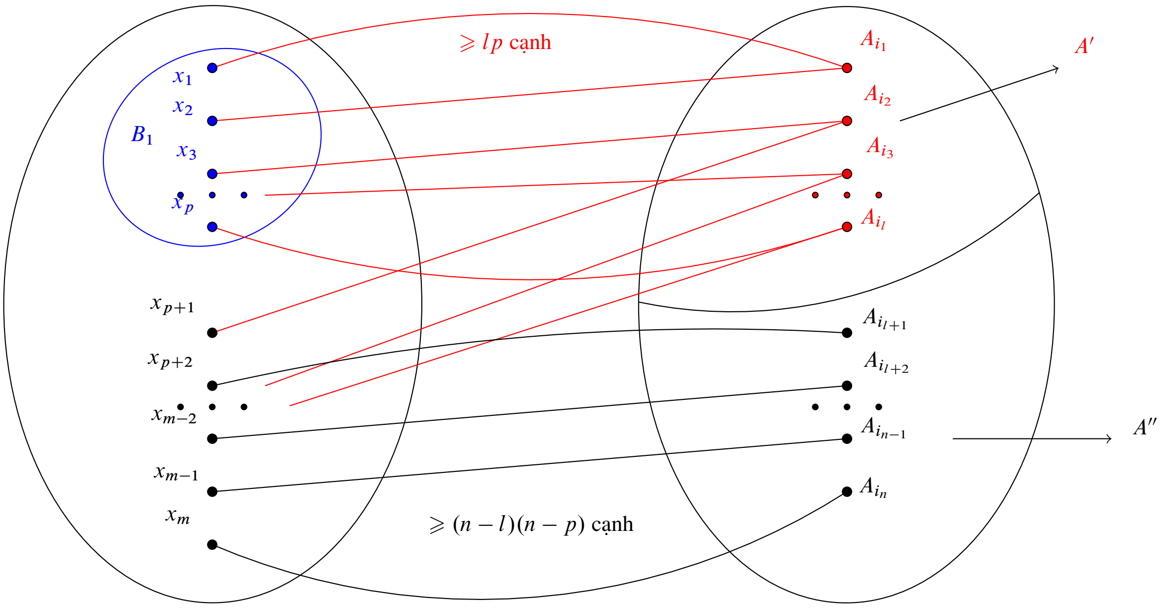
Lời giải. Giả sử $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ và gọi $A = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. Xét một đồ thị hai phe có tập đỉnh được phân chia là X, A. Mỗi đỉnh $x_i \in X$ nối cạnh với đỉnh $A_j \in A$ nếu và chỉ nếu $x_i \in A_j$. Dễ dàng nhận thấy rằng số cạnh đồ thị chính bằng $|X| = m$ (đếm theo đỉnh của X). Ta sẽ đếm số cạnh này theo đỉnh thuộc A. Trước hết ta có thể giả sử hai điều sau:

- $|B_1| = \min\{|A_1|, |A_2|, \ldots, |A_n|, |B_1|, |B_2|, \ldots, |B_n|\}$ (nếu tập thỏa mãn trên là A_i nào đó thì ta gọi lại tập $A = \{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$).
- $|B_1| = p \leqslant \frac{n}{2}$. Vì nếu ngược lại thì bài toán là hiển nhiên.

Khi đó ta sẽ phân chia tập A thành hai tập đỉnh là:

- A' là tập các đỉnh mà bản thân nó là tập có phần tử chung với B_1. Dễ thấy số đỉnh như vậy không vượt quá $p \leqslant \dfrac{n}{2}$.
- A'' là tập các đỉnh mà bản thân nó là tập không có phần tử chung với B_1.

Giả sử
$$A' = \{A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_l}\} \text{ và } A'' = \{A_{i_{l+1}}, A_{l_{l+2}}, \ldots, A_{i_n}\}$$
với $l \leqslant p \leqslant \frac{n}{2}$.



- Số cạnh của đồ thị có đỉnh thuộc A' ít nhất là lp vì

$$\sum_{A_i \in A'} \deg(A_i) \geqslant lp.$$

- Theo giả thiết hai tập A_i, B_j không giao nhau thì có ít nhất n phần tử. Áp dụng điều này cho A_{i_j} (với $j = l+1, l+2, \ldots, n$) và B_1. Suy ra $\deg(A_{i_j}) \geqslant n - p$. Hay nói cách khác số cạnh của đồ thị có đỉnh thuộc A'' ít nhất là $(n-l)(n-p)$.

Vậy số cạnh của đồ thị ít nhất là $(n-l)(n-p) + lp$. Như vậy ta được:

$$\begin{aligned} m = |X| &\geqslant (n-l)(n-p) + lp \\ &\geqslant n^2 - n(l+p) + 2lp \\ &= \frac{n^2}{2} + 2\left(\frac{n}{2} - l\right)\left(\frac{n}{2} - p\right) \\ &\geqslant \frac{n^2}{2} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $p = \frac{n}{2}$ hoặc $l = \frac{n}{2}$ (trường hợp này cũng kéo theo $p = \frac{n}{2}$). Tóm lại đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $p = \frac{n}{2}$. Dựa vào đây ta có thể xây dựng một đồ thị hai phe thỏa yêu cầu còn lại của bài toán. Phần này xin dành cho bạn đọc. □

Ví dụ 6 (Quảng Bình - 2019, ngày 2). *Cho số nguyên dương $n \geqslant 2$, xét $2n$ điểm phân biệt trong mặt phẳng sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng. Trong số các điểm trên ta nối $n^2 + 1$ cặp điểm lại với nhau. Chứng minh rằng:*

a) Có ít nhất 1 tam giác tạo thành với ba đỉnh là ba trong số cách đỉnh trên.

b) Có ít nhất n tam giác tạo thành với ba đỉnh là ba trong số cách đỉnh trên.

Lời giải. Xét một đồ thị có $2n$ đỉnh là $2n$ điểm đã cho. Hai đỉnh được nối cạnh với nhau nếu hai điểm đó được nối đoạn thẳng trong số $n^2 + 1$ đoạn được nối.

a) Theo định lý Mantel, số cạnh tối đa của đồ thị nếu không chứa tam giác là $\left[\frac{(2n)^2}{4}\right] = n^2$. Do đó với $n^2 + 1$ cạnh thì đồ thị luôn chứa một tam giác.

b) Cách 1: Ta chứng minh bằng quy nạp.

Với $n = 2$ dễ dàng kiểm tra được. Giả sử khẳng định đúng với n, ta chứng minh nó đúng với $n + 1$. Xét đồ thị $2(n + 1)$ đỉnh với $(n + 1)^2 + 1$ cạnh. Theo định lý Mantel tồn tại một tam giác, giả sử ba đỉnh của tam giác là A, B, C. Gọi $N(A), N(B), N(C)$ là các tập chứa các đỉnh lần lượt liền kề với A, B, C trong tập $2n - 1$ đỉnh còn lại. Khi đó số tam giác tạo thành ít nhất là

$$T = |N(A) \cap N(B)| + |N(B) \cap N(C)| + |N(A) \cap N(C)|.$$

Theo nguyên lý bù trừ thì:

$$\begin{aligned} T &= |N(A)| + |N(B)| + |N(C)| + |N(A) \cap N(B) \cap N(C)| - |N(A) \cup N(B) \cup N(C)| \\ &\geqslant |N(A)| + |N(B)| + |N(C)| - |N(A) \cup N(B) \cup N(C)| \\ &\geqslant |N(A)| + |N(B)| + |N(C)| - 2n + 1. \end{aligned}$$

Vì $|N(A) \cup N(B) \cup N(C)| \leqslant 2n - 1$. Ta có hai trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Với $|N(A)| + |N(B)| + |N(C)| - 2n + 1 \geqslant n$ thì khẳng định trên đúng với $n + 1$ vì khi đó ta có $T \geqslant n$ kết hợp thêm ABC cũng là một tam giác ta có ít nhất $n + 1$ tam giác.

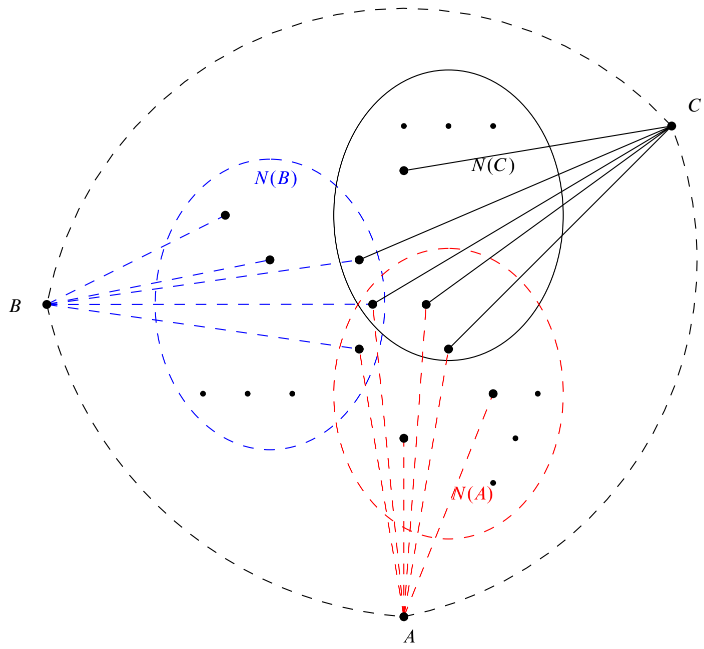
- Trường hợp 2: Với $|N(A)| + |N(B)| + |N(C)| - 2n + 1 < n$, hay

  $$|N(A)| + |N(B)| + |N(C)| < 3n - 1.$$

  Vì vai trò của ba số $|N(A)|, |N(B)|, |N(C)|$ là bình đẳng. Do vậy ta có thể giả sử $|N(A)| + |N(B)| < 2n - 1$. Suy ra $|N(A)| + |N(B)| \leqslant 2n - 2$.

  Xét đồ thị con thu được từ đồ thị ban đầu bằng cách bỏ đi hai đỉnh A, B và các cạnh nhận A, B là đỉnh (tính cả AB, BC, CA). Khi đó đồ thị mới thu được có $2n$ đỉnh với số cạnh ít nhất là

  $$(n + 1)^2 + 1 - 3 - (2n - 2) = n^2 + 1.$$



Theo giả thiết quy nạp thì đồ thị con này chứa ít nhất n tam giác. Suy ra đồ thị ban đầu có ít nhất $n+1$ tam giác.

Theo nguyên lý quy nạp ta được điều phải chứng minh.

Cách 2: Ta chứng minh bằng quy nạp kết quả tổng quát hơn như sau:

Với một đồ thị có $|V| = 2n + x$ với $n \geqslant 2$ nguyên và $x \in \{0, 1\}$ và có $|E| = n(n+x)+1$ thì đồ thị có ít nhất n tam giác.

Trước tiên ta thấy rằng trong đồ thị lúc bấy giờ luôn có một đỉnh có bậc không vượt quá n. Thật vậy, nếu mọi đỉnh có bậc từ $n+1$ trở lên thì ta có:

$$(n+1)(2n+x) = (n+1)|V| \leqslant \sum_{X \in V} \deg(X) = 2|E| = 2n(n+x)+2.$$

Điều này kéo theo

$$(n+1)(2n+x) \leqslant 2n(n+x)+2 \Leftrightarrow (n-1)(x-2) \geqslant 0.$$

Bất đẳng thức trên là không đúng vì $n \geqslant 2, x \leqslant 1$.

Với mỗi $n \geqslant 2$ là số nguyên dương và $x \in \{0, 1\}$ ta gọi $P(n, x)$ là mệnh đề có dạng:

"*Với mọi đồ thị $G(V, E)$ có $|V| = 2n + x$ với $n \geqslant 2$ nguyên và có $|E| = n(n+x)+1$ thì đồ thị có ít nhất n tam giác.*"

- Trường hợp 1: Với $x = 1$, ta giả sử $P(n, 0)$ là đúng. Đặt X là đỉnh có bậc không vượt quá n (theo nhận xét trên X là tồn tại). Xét đồ thị G' thu được từ G bằng cách bỏ đi X và các cạnh liên thuộc với X. Khi đó đồ thị G' có $2n$ đỉnh và có số cạnh ít nhất là

$$n(n+1)+1-\deg_G(X) \geqslant n(n+1)+1-n = n(n+0)+1.$$

Vì $P(n, 0)$ đúng nên G' chứa ít nhất n tam giác. Suy ra $P(n, 1)$ đúng.

- Trường hợp 2: Với $x = 0$, ta giả sử $P(n-1, 1)$ đúng. Đặt X là đỉnh có bậc không vượt quá n (theo nhận xét trên X là tồn tại). Xét đồ thị G' thu được từ G bằng cách bỏ đi X và các cạnh liên thuộc với X. Khi đó đồ thị G' có $2n-1 = 2(n-1)+1$ đỉnh và có số cạnh ít nhất là:

$$n \times n + 1 - \deg_G(X) \geqslant n \times n + 1 - n = (n-1)(n-1+1) + 1.$$

  Vì $P(n-1, 1)$ đúng nên đồ thị G' chứa ít nhất $n-1$ tam giác.

  Ta lại có:

  – Trường hợp 2.1: Nếu $\deg_G(X) < n$ thì số cạnh của G' là lớn hẳn hơn

$$(n-1)(n-1+1) + 1 \text{ cạnh.}$$

    Vì $P(n-1, 1)$ đúng nên G' chứa ít nhất $n-1 \geqslant 1$ tam giác. Gọi ABC là một tam giác như vậy.
    Xét đồ thị mới G'' con của G' thu được bằng cách xóa bớt đi cạnh AB. Khi đó G'' vẫn có $2(n-1)+1$ đỉnh và có ít nhất $(n-1)(n-1+1)+1$ cạnh. Do đó G'' có ít nhất $n-1$ tam giác. Hiển nhiên các tam giác này cũng là tam giác thuộc đồ thị G'. Kết hợp thêm tam giác ABC ta được G' thật sự có ít nhất là n tam giác. Suy ra G có ít nhất n tam giác.

  – Trường hợp 2.2: Nếu $\deg_G(X) = n$, ta gọi $N(X)$ là tập các đỉnh liền kề với X trong G và $\overline{N(X)}$ là tập $n-1$ đỉnh còn lại.

    * Nếu có hai đỉnh nào đó trong $N(X)$ là liền kề nhau thì hai đỉnh đó kết hợp với X tạo thành một tam giác (đương nhiên tam giác này không trùng với bất kỳ tam giác nào trong $n-1$ tam giác của G'). Do đó G có ít nhất n tam giác.
    * Ngược lại, $N(X)$ không có hai đỉnh nào liền kề nhau. Khi đó mọi đỉnh $Y \in N(X)$ thì $\deg_{G'}(Y) \leqslant n-1$.
      Nếu có một đỉnh $Z \in N(X)$ sao cho $\deg_{G'}(Z) \leqslant n-2$ thì $\deg_G(Z) \leqslant n-1$. Khi đó ta thay thế X cho Z. Áp dụng trường hợp 2.1 ta được G chứa ít nhất n tam giác.
      Ngược lại, mọi đỉnh $Y \in N(X)$ thì $\deg_{G'}(Y) = n-1$. Như vậy số cạnh của đồ thị G' có đỉnh thuộc $N(X)$ và đỉnh còn lại thuộc $\overline{N(X)}$ chỉ là

$$n(n-1) < n(n-1) + 1.$$

      (ta chú ý thêm là hai đỉnh thuộc $N(X)$ không nối cạnh nhau trong trường hợp này). Khi đó tồn tại một cạnh nào đó nối hai đỉnh của $\overline{N(X)}$. Cạnh này kết hợp tất cả các cạnh nối từ các đỉnh thuộc $N(X)$ ta được n tam giác.[3]

  Tóm lại $P(n, 0)$ đúng.

Để hoàn tất bài chứng minh, ta sẽ kết nối lại các bước chứng minh như sau (một kiểu quy nạp theo hai biến):

[3] Đồ thị con thu được từ G' bằng cách bỏ đi tất cả các cạnh có hai đỉnh thuộc $\overline{N(X)}$ là đồ thị hai phe $K_{n-1,n}$ đầy đủ.

$$\begin{tikzcd}
P(2,0)\text{ đúng} \arrow[d] & P(3,0)\text{ đúng} \arrow[d] & P(k,0)\text{ đúng} \arrow[d] & P(k+1,0)\text{ đúng} \arrow[d] & \cdots \\
P(2,1)\text{ đúng} \arrow[ur] & P(3,1)\text{ đúng} \arrow[ur] & P(k,1)\text{ đúng} \arrow[ur] & P(k+1,1)\text{ đúng} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Bước cơ sở ban đầu tức $P(2,0)$ có đúng hay không là quan trọng. Kiểm tra trực tiếp một đồ thị 4 đỉnh và có ít nhất 5 cạnh, ta thấy $P(2,0)$ đúng. Chứng minh hoàn tất. $\square$

Nhận xét 5.

- Một bài toán với giả thiết tương tự (ta cũng có thể sử dụng đồ thị kết hợp với quy nạp).

  Bài tập 5 (China TST - 1987). *Cho một đồ thị có $2n$ đỉnh và có đúng n^2+1 cạnh. Chứng minh rằng đồ thị chứa ít nhất hai tam giác có chung một cạnh.*

- Một đánh giá khác về số tam giác có trong một đồ có n đỉnh và k cạnh (bạn đọc hãy chuyển đổi bài toán về ngôn ngữ đồ thị để thấy điều đó)

  Bài tập 6 (APMO - 1989). *Cho S là tập gồm m cặp (a,b) với a,b là các số nguyên dương thỏa $1 \leqslant a < b \leqslant n$. Chứng minh rằng có ít nhất $4m \cdot \frac{\left(m-\frac{n^2}{4}\right)}{3n}$ bộ ba (a,b,c) sao cho (a,b), (a,c) và (b,c) thuộc S.*

Thay vì sử dụng đồ thị và cách định lý liên quan để giải một bài toán Tổ hợp, ta còn có thể sử dụng các kết quả định lý (không nên quá khó) của đồ thị, sau đó diễn đạt theo một cách nào đó bài toán Tổ hợp thu được sẽ rất hấp dẫn. Vấn đề khó là định lý được chọn tương đối vừa phải, chuyển đổi bài toán phải tự nhiên, thực tiễn và đặc biệt phải ẩn định lý được chọn càng khéo léo càng tốt. Để kết lại bài viết, ta sẽ đến với một bài toán mang ý tưởng như vậy.

Ví dụ 7 (Trường đông BTB - 2019, ngày 1). *Trong một kỳ thi vấn đáp, có 64 thí sinh và 6 vị giám khảo. Mỗi thí sinh sẽ phải trả lời với từng giám khảo và sẽ nhận được một trong hai kết quả: "đạt – trượt". Biết rằng với hai thí sinh bất kỳ, luôn có một vị giám khảo đánh giá thí sinh này đạt, còn thí sinh kia trượt. Sau kỳ thi, hai thí sinh có kết quả khác nhau ở đúng một giám khảo nào đó thì sẽ kết bạn với nhau (giả sử trước kỳ thi, chưa có ai là bạn bè của nhau cả).*

a) Hỏi có tất cả bao nhiêu cặp là bạn bè của nhau?

b) Chứng minh rằng có thể xếp tất cả các thí sinh ngồi lên bàn tròn mà hai thí sinh ngồi cạnh nhau là bạn bè của nhau.

Lời giải. Ta gọi 6 vị giám khảo là $X_1, X_2, \ldots, X_6$ và được xếp trên một hàng ngang cố định. Với mỗi thí sinh Y_i (với $i = 1, 2, \ldots, 64$) ta sẽ ghi kết mà 6 vị giám chấm cho thí sinh Y_i theo quy ước như sau:

- Nếu giám khảo X_j chấm thí sinh Y_i kết quả là đạt, ta ghi số 1.

- Ngược lại ta ghi số 0.

Dễ dàng thấy rằng các kết quả của 64 thí sinh chính là đầy đủ 64 xâu nhị phân có 6 ký tự.

Gọi tập các xâu nhị phân đó là $A = \{A_1, A_2, \ldots, A_{64}\}$. Khi đó ta xét đồ thị có tập đỉnh là A, hai đỉnh A_i, A_j được nối cạnh với nhau nếu và chỉ nếu hai xâu A_i và A_j sai khác nhau đúng một vị trí. Rõ ràng đây là định nghĩa của đồ thị lập phương Q_6. Một cách tổng quát, đồ thị Q_n[4] có các tính chất sau (bạn đọc tự chứng minh)

- Số đỉnh là 2^n.
- Số cạnh là $2^{n-1} \times n$.
- Đồ thị Q_n có chu trình Hamilton.

Áp dụng các kết quả trên ta được lời giải cho bài toán. □

2. Bài tập tự luyện

Trong mục này sẽ là một số bài toán có thể sử dụng đơn đồ thị vô hướng để tìm lời giải (hiển nhiên đó không là hướng tiếp cận duy nhất). Một số bài không ghi nguồn là những bài toán được diễn đạt lại của một số bài toán cũ người viết xin không trích nguồn, cốt yếu để bạn đọc (đặc biệt là học sinh) có thể luyện tập.

Bài tập 7. *Cho 6 đường thẳng trong không gian sao cho không gian sao cho không có ba đường nào là đồng thẳng. Chứng minh rằng tồn tại ba đường thẳng sao cho một trong các điều kiện sau xảy ra:*

- *Hai đường bất kỳ trong ba đường trên là hai đường thẳng chéo nhau.*
- *Ba đường thẳng đôi một song song.*
- *Ba đường thẳng đồng quy.*

Bài tập 8. *Tìm số nguyên dương nhỏ nhất n sao cho với một tập bất kỳ gồm n số vô tỉ thì có ba số vô tỉ nào đó mà tổng của hai số bất kỳ trong ba số này cũng là số vô tỉ.*

Bài tập 9. *Chứng minh rằng trong một nhóm có 9 người (mỗi người trong nhóm hoặc là quen nhau hoặc là không quen nhau) luôn tồn tại ba người quen nhau hoặc tồn tại 4 người đôi một không quen nhau.*

Bài tập 10. *Trong một buổi khiêu vũ, một người có thể khiêu vũ với một người khác (chỉ một lượt) hoặc không khiêu vũ (vì lý do sức khỏe chẳng hạn), và có thể khiêu vũ nhiều lượt với những người khác nhau. Chứng minh rằng với mọi nhóm gồm n người ($n \in \mathbb{Z}^+$) ta luôn có thể sắp xếp một buổi khiêu vũ cho nhóm sao cho không có ba người nào có cùng số lượt khiêu vũ.*

[4]Mỗi đỉnh là một xâu nhị phân có n ký tự, hai đỉnh được nối cạnh với nhau nếu hai xâu nhị phân sai khác nhau đúng một vị trí.

Bài tập 11 (Trường Đông TP.HCM - 2018). *Sau giờ học của một trường mẫu giáo, 20 em nhỏ chờ ông nội hoặc ông ngoại của mình đến đón. Biết rằng 2 em bất kỳ thì có chung một người ông. Chứng minh rằng có 1 ông là ông của ít nhất 14 em nhỏ.*

Bài tập 12 (Vũ Thế Khôi, Trường đông BTB - 2019). *Một tập S gồm các xâu nhị phân có độ dài n. Hai xâu nhị phân được gọi là gần nhau nếu và chỉ nếu hai xâu chỉ sai khác nhau đúng một vị trí nào đó. Giả sử mỗi xâu thuộc S gần nhau với đúng k xâu thuộc S.*

a) *Chứng minh rằng $|S|$ là một số chẵn.*

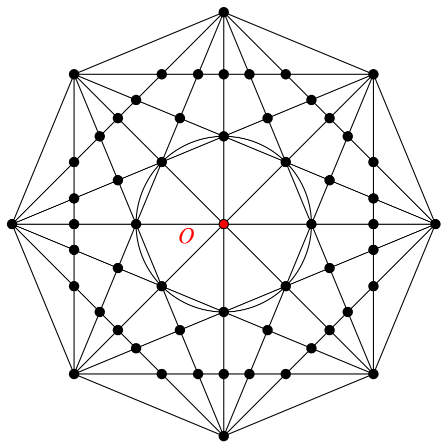
b) *Chứng minh rằng $|S| \geqslant 2^k$.*

Bài tập 13 (Mock Test - 2019). *Với các số nguyên dương m, n, xét bảng ô vuông $m \times n$ được phân chia thành các ô vuông con. Giả sử có thể tô màu trắng - đen bảng này sao cho với mỗi ô vuông đơn vị thì số ô vuông cùng màu và có điểm chung với nó (không tính ô vuông đó) là số lẻ.*

a) *Chứng minh rằng mn là số chẵn.*

b) *Giả sử mn là số chẵn, chứng minh rằng có thể tô màu bảng thỏa điều kiện đề bài.*

Bài tập 14 (Hải Phòng - 2019). *Cho X là một bát giác đều tâm O. Gọi A là tập tất cả các đỉnh của X và các giao điểm của hai đường chéo bất kì của X. Gọi Y là tập 8 điểm thuộc A không trùng O và gần O nhất (hình vẽ). Gọi Y là tập tất cả các cạnh của X và các đoạn thẳng nối hai điểm thuộc A kề nhau trên một đường chéo bất kì của X. Mỗi điểm thuộc A được tô bởi một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Có tất cả 26 điểm đỏ. Biết rằng O được tô đỏ, hai trong số những điểm đỏ là đỉnh của X, ba trong số những điểm đỏ thuộc B.*



Các đoạn thẳng thuộc Y được tô màu theo quy tắc: nếu đoạn thẳng có hai đầu mút đỏ thì nó được tô màu đỏ, nếu hai đầu mút xanh thì nó được tô màu xanh, nếu một đầu mút đỏ và một đầu mút xanh thì nó được tô màu vàng. Biết rằng có 20 đoạn thẳng trong Y màu vàng. Hỏi có bao nhiêu đoạn thẳng trong Y màu xanh?

Bài tập 15. *Trong một buổi họp lớp chuyên Toán có 25 người về tham dự. Một số người làm công tác hậu cần chuẩn bị tiệc họp mặt nên đã không bắt tay đầy đủ với bạn bè của mình (giả sử rằng mọi người nếu bắt tay nhau thì chỉ bắt tay một lần). Cuối buổi lớp trưởng nhận thấy rằng cứ mỗi ba bạn tùy ý thì có hai bạn nào đó đã bắt tay với nhau. Hỏi buổi họp mặt đó có ít nhất bao nhiêu cái bắt tay?*

Bài tập 16. *Có 9 giáo viên dẫn đoàn tham dự Olympic. Trong thời gian chờ các học sinh tham gia kỳ thi họ bắt đầu trò chuyện làm quen với nhau. Tuy nhiên, thời gian chờ học sinh tương đối ngắn nên mọi người không thể làm quen hết với nhau. Nếu hai người nào đó làm quen với nhau và họ cùng thích một chủ đề nào đó của Toán thì cuối buổi trò chuyện họ sẽ trao đổi email cho nhau (để sau này có thể trao đổi tài liệu chẳng hạn). Ngược lại cuộc trò chuyện làm quen sẽ kết thúc mà không có trao đổi email. Hỏi cần có ít nhất bao nhiêu cuộc làm quen thì mới chắc chắn rằng luôn có* 3 *người nào đó đã làm quen với nhau và cuối buổi trò chuyện hoặc là cả ba người không ai trao đổi email cho ai hoặc cả ba đôi một trao đổi email cho nhau.*

Tài liệu

[1] Junming Xu, *Theory and Application of Graphs*. Springer US, 2003.

[2] https://artofproblemsolving.com/community

[3] https://www.facebook.com/groups/vmo.tst

ĐẲNG THỨC TỔ HỢP QUA CÁC BÀI TOÁN OLYMPIC

Trịnh Đào Chiến

GIỚI THIỆU

Trong một số bài toán Olympic, đôi khi việc biểu diễn và tính toán liên quan đến các số tổ hợp đóng một vai trò quan trọng để tiếp tục hoàn thiện lời giải, sau khi đã có một định hướng đúng. Nhân việc trả lời thắc mắc của một số bạn học sinh về vài đoạn biến đổi của các đẳng thức tổ hợp trong tài liệu [1] do tôi giới thiệu, bài viết này cũng rất tự nhiên được hình thành. Nội dung chủ yếu đề cập đến vai trò của những đẳng thức tổ hợp qua một số bài toán Olympic, như là sự tiếp nối để chi tiết hóa nội dung của tài liệu nêu trên mà tôi rất thích bởi hệ thống bài toán khá phong phú về Công thức nội suy Lagrange.

1. Các biểu diễn và tính toán liên quan đến số tổ hợp

1.1. Biểu diễn một tích qua số tổ hợp

Bài toán 1. *Giả sử n là số nguyên dương, $n \geq 2$, xác định trước. Với mỗi $k \in \{1, 2, ..., n\}$, hãy biểu diễn tích sau qua số tổ hợp*

$$\prod_{i=1, i\neq k}^{n} \frac{1}{k-i}.$$

Giải. Với mỗi $k \in \{1, 2, ..., n\}$, ta có

$$\prod_{i=1, i\neq k}^{n} \frac{1}{k-i} = \frac{1}{(k-1)(k-2)...2.1.(-1)(-2)...(-(n-k-1)).(-(n-k))}$$

$$= \frac{1}{(k-1)!(-1)^{n-k}(n-k)!} = (-1)^{n-k}.\frac{1}{(k-1)!(n-k)!} = (-1)^{n-k}.\frac{k.n!}{k.n!(k-1)!(n-k)!}$$

$$= \frac{1}{n!}.(-1)^{n-k}.k.\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n!}.(-1)^{n-k}.k.C_n^k.$$

Ta có biểu diễn sau

Đẳng thức 1.

$$\prod_{i=1, i\neq k}^{n} \frac{1}{k-i} = \frac{1}{n!}.(-1)^{n-k}.k.C_n^k.$$

Bài toán 2. *Giả sử n là số nguyên dương, $n \geq 1$, xác định trước. Với mỗi $k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$, hãy biểu diễn tích sau qua số tổ hợp*

$$\prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{1}{k-i}.$$

Giải. Với mỗi $k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$, ta có

$$\prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{1}{k-i} = \frac{1}{k\left(k-1\right)\left(k-2\right)...2.1.\left(-1\right)\left(-2\right)...\left(-\left(n-k-1\right)\right).\left(-\left(n-k\right)\right)}$$

$$= \frac{1}{k!(-1)^{n-k}\left(n-k\right)!} = (-1)^{n-k}.\frac{1}{k!\left(n-k\right)!}$$

$$= \frac{1}{n!}.(-1)^{n-k}.\frac{n!}{k!\left(n-k\right)!} = \frac{1}{n!}.(-1)^{n-k}.C_n^k.$$

Ta có biểu diễn sau

Đẳng thức 2.

$$\prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{1}{k-i} = \frac{1}{n!}.(-1)^{n-k}.C_n^k.$$

Bài toán 3. *Giả sử n là số nguyên dương, $n \geq 2$, xác định trước. Với mỗi $k \in \{1, 2, ..., n\}$, hãy biểu diễn tích sau qua số tổ hợp*

$$\prod_{i=1, i\neq k}^{n} \frac{(n+1)-i}{k-i}.$$

Giải. Với mỗi $k \in \{1, 2, ..., n\}$, ta có

$$\prod_{i=1, i\neq k}^{n} \frac{(n+1)-i}{k-i} = \frac{n\left(n-1\right)...\left(n-k+2\right).\left(n-k\right)...2.1}{\left(k-1\right)\left(k-2\right)...2.1.\left(-1\right)\left(-2\right)...\left(-\left(n-k-1\right)\right).\left(-\left(n-k\right)\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{n!}{n-k+1}\right)}{(k-1)!(-1)^{n-k}\left(n-k\right)!} = (-1)^{n-k}\frac{n!}{(k-1)!\left(n-k\right)!\left(n-k+1\right)}$$

$$= (-1)^{n-k}\frac{n!}{(k-1)!\left(n-k+1\right)!} = (-1)^{n-k}C_n^{k-1}.$$

Ta có biểu diễn sau

Đẳng thức 3.

$$\prod_{i=1, i\neq k}^{n} \frac{(n+1)-i}{k-i} = (-1)^{n-k}C_n^{k-1}.$$

Bài toán 4. *Giả sử n là số nguyên dương xác định trước. Với mỗi $k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$, hãy biểu diễn tích sau qua số tổ hợp*

$$\prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{(n+1)-i}{k-i}.$$

Giải. Với mỗi $k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$, ta có

$$\prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{(n+1)-i}{k-i} = \frac{(n+1)\, n ... (n-k+2)\,.\,(n-k)\, ...2.1}{k\,(k-1)\, ...1.\,(-1)\,(-2) ... (-(n-k))}$$

$$= \frac{\left(\frac{(n+1)!}{n-k+1}\right)}{k!(-1)^{n-k}\,(n-k)!} = (-1)^{n-k} \frac{(n+1)!}{k!\,(n-k)!\,(n-k+1)}$$

$$= (-1)^{n-k} \frac{(n+1)!}{k!\,(n-k+1)!} = (-1)^{n-k} C_{n+1}^{k}.$$

Ta có biểu diễn sau

Đẳng thức 4.

$$\prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{(n+1)-i}{k-i} = (-1)^{n-k} C_{n+1}^{k}.$$

1.2. Khai triển nhị thức Newton và các hệ quả

Ta đã biết đẳng thức khai triển nhị thức Newton sau

Đẳng thức 5.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.a^{n-k}.b^k.$$

Với $a = 1$, ta có hệ quả sau

Đẳng thức 6.

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k.b^k = (1+b)^n.$$

Đẳng thức trên là cơ sở để giải một số bài toán tính tổng sau

Bài toán 5. *Tính*

$$\sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^k.b^k.$$

Giải.

$$\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k.b^k = \sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^k.b^k + C_{n+1}^{n+1}.b^{n+1}$$

$$\Rightarrow (1+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^k.b^k + 1.b^{n+1}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^{k}.b^{k} = (1+b)^{n+1} - b^{n+1}.$$

Ta có kết quả sau

Đẳng thức 7.

$$\sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^{k}.b^{k} = (1+b)^{n+1} - b^{n+1}.$$

Bài toán 6. *Tính*

$$\sum_{k=0}^{n} C_{n+2}^{k}.b^{k}.$$

Giải.

$$\sum_{k=0}^{n+2} C_{n+2}^{k}.b^{k} = \sum_{k=0}^{n} C_{n+2}^{k}.b^{k} + C_{n+2}^{n+1}.b^{n+1} + C_{n+2}^{n+2}.b^{n+2}$$

$$\Rightarrow (1+b)^{n+2} = \sum_{k=0}^{n} C_{n+2}^{k}.b^{k} + (n+2).b^{n+1} + 1.b^{n+2}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} C_{n+2}^{k}.b^{k} = (1+b)^{n+2} - b^{n+2} - (n+2)\, b^{n+1}.$$

Ta có kết quả sau

Đẳng thức 8.

$$\sum_{k=0}^{n} C_{n+2}^{k}.b^{k} = (1+b)^{n+2} - b^{n+2} - (n+2)\, b^{n+1}.$$

Bài toán 7. *Tính*

$$\sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^{k+1}.b^{k}.$$

Giải. Với $b \neq 0$, ta có

$$\sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^{k+1}.b^{k} = \frac{1}{b}.\sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^{k+1}.b^{k+1}$$

$$= \frac{1}{b}\left(C_{n+1}^{1}.b^{1} + C_{n+1}^{2}.b^{2} + ... + C_{n+1}^{n}.b^{n} + C_{n+1}^{n+1}.b^{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{b}\left(C_{n+1}^{0}.b^{0} + C_{n+1}^{1}.b^{1} + C_{n+1}^{2}.b^{2} + ... + C_{n+1}^{n}.b^{n} + C_{n+1}^{n+1}.b^{n+1} - C_{n+1}^{0}.b^{0}\right)$$

$$= \frac{1}{b}\left(\left(C_{n+1}^{0}.b^{0} + C_{n+1}^{1}.b^{1} + C_{n+1}^{2}.b^{2} + ... + C_{n+1}^{n}.b^{n}\right) + \left(C_{n+1}^{n+1}.b^{n+1} - C_{n+1}^{0}.b^{0}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{b}\left(\sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^{k}.b^{k} + \left(1.b^{n+1} - 1.1\right)\right) = \frac{1}{b}\left((1+b)^{n+1} - b^{n+1} + b^{n+1} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{b}\left((1+b)^{n+1}-1\right).$$

Ta có kết quả sau

Đẳng thức 9.

$$\sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^{k+1}.b^k = \frac{1}{b}\left((1+b)^{n+1}-1\right).$$

Bài toán 8. *Tính*

$$\sum_{k=1}^{n+1} C_{n+1}^{k-1}.b^k.$$

Giải.

$$\sum_{k=1}^{n+1} C_{n+1}^{k-1}.b^k = C_{n+1}^0.b + C_{n+1}^1.b^2 + ... + C_{n+1}^{n-1}.b^n + C_{n+1}^n.b^{n+1}$$

$$= b\left(C_{n+1}^0.b^0 + C_{n+1}^1.b^1 + ... + C_{n+1}^{n-1}.b^{n-1} + C_{n+1}^n.b^n\right)$$

$$= b\left(\left(C_{n+1}^0.b^0 + C_{n+1}^1.b^1 + ... + C_{n+1}^{n-1}.b^{n-1} + C_{n+1}^n.b^n + C_{n+1}^{n+1}.b^{n+1}\right) - C_{n+1}^{n+1}.b^{n+1}\right)$$

$$= b\left(\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k.b^k - 1.b^{n+1}\right) = b\left((1+b)^{n+1} - b^{n+1}\right).$$

Ta có kết quả sau

Đẳng thức 10.

$$\sum_{k=1}^{n+1} C_{n+1}^{k-1}.b^k = b\left((1+b)^{n+1} - b^{n+1}\right).$$

Bài toán 9. *Tính*

$$\sum_{k=1}^{n+1} C_{n+2}^{k}.b^k.$$

Giải.

$$\sum_{k=1}^{n+1} C_{n+2}^k.b^k = C_{n+2}^1.b^1 + C_{n+2}^2.b^2 + ... + C_{n+2}^n.b^n + C_{n+2}^{n+1}.b^{n+1}$$

$$= \left(C_{n+2}^0.b^0 + C_{n+2}^1.b^1 + C_{n+2}^2.b^2 + ... + C_{n+2}^n.b^n + C_{n+2}^{n+1}.b^{n+1} + C_{n+2}^{n+2}.b^{n+2}\right)$$

$$-C_{n+2}^{n+2}.b^{n+2} - C_{n+2}^0.b^0 = (1+b)^{n+2} - b^{n+2} - 1.$$

Ta có kết quả sau

Đẳng thức 11.

$$\sum_{k=1}^{n+1} C_{n+2}^k.b^k = (1+b)^{n+2} - b^{n+2} - 1.$$

Bài toán 10. *Tính*

$$\sum_{k=1}^{n} C_{n+2}^{k}.b^{k}.$$

Giải. Bởi Đẳng thức 11, ta có

$$(1+b)^{n+2} - b^{n+2} - 1 = \sum_{k=1}^{n+1} C_{n+2}^{k}.b^{k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} C_{n+2}^{k}.b^{k} + C_{n+2}^{n+1}.b^{n+1} = \sum_{k=1}^{n} C_{n+2}^{k}.b^{k} + (n+2)\,.b^{n+1}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} C_{n+2}^{k}.b^{k} = (1+b)^{n+2} - b^{n+2} - (n+2)\,.b^{n+1} - 1.$$

Ta có kết quả sau

Đẳng thức 12.

$$\sum_{k=1}^{n} C_{n+2}^{k}.b^{k} = (1+b)^{n+2} - b^{n+2} - (n+2)\,.b^{n+1} - 1.$$

Bài toán 11. *Tính*

$$\sum_{k=0}^{n} \left((-1)^{n-k}.C_{n}^{k}.k^{n+1}\right).$$

Giải. Sử dụng Công thức nội suy Lagrange cho đa thức

$$P(x) = x^{n+1} - x(x-1)(x-2)\ldots(x-n)$$

có bậc không vượt quá n, với các mốc nội suy $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, ... , $x_n = n$, ta được

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n}\left(P(x_k)\,.\prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x-i}{k-i}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(P(k)\,.\prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x-i}{k-i}\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(k^{n+1}.\prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x-i}{k-i}\right).$$

Hệ số của x^n ở vế trái là

$$\frac{n(n+1)}{2}.$$

Hệ số của x^n ở vế phải là

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k^{n+1}}{\prod\limits_{i=0, i\neq k}^{n}(k-i)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^{n+1}}{k(k-1)\ldots 2.1.(-1)(-2)\ldots(-(n-k))}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{k^{n+1}}{k!.(-1)^{n-k}.(n-k)!} = \frac{1}{n!}.\sum_{k=0}^{n}\left((-1)^{n-k}.\frac{n!}{k!(n-k)!}.k^{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{n!}.\sum_{k=0}^{n}\left((-1)^{n-k}.C_n^k.k^{n+1}\right).$$

Đồng nhất hệ số của x^n ở hai vế, ta có kết quả sau

Đẳng thức 13.

$$\sum_{k=0}^{n}\left((-1)^{n-k}.C_n^k.k^{n+1}\right) = \frac{n.\left(n+1\right)!}{2}.$$

Bài toán 12. *Cho số nguyên dương* n *và số thực* a*. Tính*

$$\sum_{k=0}^{n}\left((-1)^{k}.C_n^k.(a-k)^{n}\right).$$

Giải. Áp dụng Công thức nội suy Lagrange cho đa thức $P\left(x\right) = x^n$ với $n+1$ mốc nội suy

$$x_k = a-k, k = 0, 1, 2, ..., n,$$

ta có

$$x^n = \sum_{k=0}^{n}\left(P\left(x_k\right).\prod_{i=0,i\neq k}^{n}\frac{x-x_i}{x_k-x_i}\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(\left(x_k\right)^n.\prod_{i=0,i\neq k}^{n}\frac{x-x_i}{x_k-x_i}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(a-k\right)^n.\prod_{i=0,i\neq k}^{n}\frac{x-(a-i)}{a-k-(a-i)} = \sum_{k=0}^{n}\left(\left(a-k\right)^n.\prod_{i=0,i\neq k}^{n}\frac{x-a+i}{-\left(k-i\right)}\right).$$

Đồng nhất hệ số của x^n ở hai vế, ta được

$$1 = \sum_{k=0}^{n}\left(\left(a-k\right)^n.\prod_{i=0,i\neq k}^{n}\frac{1}{-\left(k-i\right)}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(\left(a-k\right)^n.\frac{1}{\left(-k\right)\left(-\left(k-1\right)\right)...\left(-2\right)\left(-1\right).1.2...\left(n-k-1\right)\left(n-k\right)}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(\left(a-k\right)^n.\frac{1}{\left(-1\right)^k k!\left(n-k\right)!}\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(\left(-1\right)^k.\frac{1}{k!\left(n-k\right)!}.\left(a-k\right)^n\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(\left(-1\right)^k.\frac{1}{n!}.\frac{n!}{k!\left(n-k\right)!}.\left(a-k\right)^n\right) = \frac{1}{n!}.\sum_{k=0}^{n}\left(\left(-1\right)^k.C_n^k.\left(a-k\right)^n\right).$$

Suy ra

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\left(-1\right)^k.C_n^k.\left(a-k\right)^n\right) = n!.$$

Vậy, ta có kết quả sau

Đẳng thức 14.

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\left(-1\right)^k.C_n^k.\left(a-k\right)^n\right) = n!.$$

Chẳng hạn:

- Với $n = 2$, ta có đồng nhất thức sau

$$\sum_{k=0}^{2}\left((-1)^k.C_2^k.(a-k)^2\right) = 2!$$

hay

$$C_2^0.a^2 - C_2^1.(a-1)^2 + C_2^2.(a-2)^2 = 2.$$

Vậy

$$a^2 - 2(a-1)^2 + (a-2)^2 = 2.$$

- Với $n = 3$, ta có đồng nhất thức sau

$$\sum_{k=0}^{3}\left((-1)^k.C_3^k.(a-k)^3\right) = 3!$$

hay

$$C_3^0.a^3 - C_3^1.(a-1)^3 + C_3^2.(a-2)^3 - C_3^3.(a-3)^3 = 6.$$

Vậy

$$a^3 - 3(a-1)^3 + 3(a-2)^3 - (a-3)^3 = 6.$$

Bài toán 13. *Giả sử n là số nguyên dương xác định trước và m là số nguyên tùy ý thỏa mãn $1 \le m \le n$. Đặt*

$$R_n^m := \sum_{k=0}^{m}(m-k)^n.(-1)^k.C_{n+1}^k.$$

Chứng minh rằng

$$R_n^{n-m+1} = R_n^m.$$

Giải. Vì các biểu diễn R_n^m và R_n^{n-m+1} khá phức tạp, nên để dễ hiểu nội dung bài toán, ta thử minh họa nó. Chẳng hạn với $m = 3$, $n = 4$, ta có

$$R_n^m = R_4^3 = \sum_{k=0}^{3}(3-k)^4.(-1)^k.C_5^k = 3^4.C_5^0 - 2^4.C_5^1 + 1^4.C_5^2 = 81.1 - 16.5 + 1.10 = 11$$

.

$$R_n^{n-m+1} = R_4^2 = \sum_{k=0}^{2}(2-k)^4.(-1)^k.C_5^k = 2^4.C_5^0 - 1^4.C_5^1 = 16.1 - 1.5 = 11.$$

Vậy

$$R_n^{n-m+1} = R_n^m.$$

Bây giờ, ta trở lại bài toán.

$$R_n^{n-m+1} = \sum_{k=0}^{n-m+1}((n+1-k)-m)^n.(-1)^k.C_{n+1}^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n-m+1} ((n+1-k)-m)^n.(-1)^k.C_{n+1}^{n+1-k}.$$

Đặt $i = n+1-k$. Với $k = 0$, thì $i = n+1$. Với $k = n-m+1$ thì $i = m < n+1$. Khi đó

$$R_n^{n-m+1} = -\sum_{i=m}^{n+1} (i-m)^n.(-1)^{n+1-i}.C_{n+1}^i$$

$$= -\sum_{i=m}^{n+1} (-(m-i))^n.(-1)^{n+1-i}.C_{n+1}^i = -\sum_{i=m}^{n+1} (-1)^n.(m-i)^n.(-1)^{n+1-i}.C_{n+1}^i$$

$$= -\sum_{i=m}^{n+1} (m-i)^n.(-1)^{2n+1-i}.C_{n+1}^i = -\sum_{i=m}^{n+1} (m-i)^n.(-1)^{2n+1}.(-1)^{-i}.C_{n+1}^i$$

$$= \sum_{i=m}^{n+1} (m-i)^n.(-1)^{-i}.C_{n+1}^i = \sum_{i=m}^{n+1} (m-i)^n.(-1)^i.C_{n+1}^i.$$

Thay chỉ số i bởi chỉ số k, ta có

$$R_n^{n-m+1} = \sum_{k=m}^{n+1} (m-k)^n.(-1)^k.C_{n+1}^k.$$

Do đó

$$R_n^{n-m+1} = R_n^m \Leftrightarrow \sum_{k=m}^{n+1} (m-k)^n.(-1)^k.C_{n+1}^k = \sum_{k=0}^{m} (m-k)^n.(-1)^k.C_{n+1}^k$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{m} (m-k)^n.(-1)^k.C_{n+1}^k - \sum_{k=m}^{n+1} (m-k)^n.(-1)^k.C_{n+1}^k = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{m} (m-k)^n.(-1)^k.C_{n+1}^k - \sum_{k=m}^{n+1} (m-k)^n.(-1)^k.C_{n+1}^k = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{m} (m-k)^n.(-1)^k.C_{n+1}^k + \sum_{k=m}^{n+1} (m-k)^n.(-1)^{k+1}.C_{n+1}^k = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n+1} \left((m-k)^n.(-1)^{k+1}.C_{n+1}^k\right) = 0.$$

Ta cần chứng minh đẳng thức trên.

Thật vậy, với m tùy ý, $1 \leq m \leq n$, áp dụng Công thức nội suy Lagrange cho đa thức $P(x) = (m-x)^n$, với các mốc nội suy $x_j = j, 1 \leq j \leq n+1$, ta có

$$(m-x)^n = \sum_{k=1}^{n+1} \left((m-k)^n.\prod_{j=1, j\neq k}^{n+1} \frac{x-j}{k-j}\right).$$

Bởi đồng nhất thức trên, cho $x = 0$, ta có

$$m^n = \sum_{k=1}^{n+1} \left((m-k)^n . \prod_{j=1, j\neq k}^{n+1} \frac{-j}{k-j} \right).$$

Với mỗi $1 \leq j \leq n+1$, $j \neq k$, ta có

$$\prod_{j=1, j\neq k}^{n+1} (-j) = (-1)(-2)\ldots(-(k-1)).(-(k+1))\ldots(-n)(-(n+1))$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}.(n+1)!}{-k} = (-1)^n . \frac{(n+1)!}{k}$$

và, bởi Đẳng thức 1, ta có

$$\prod_{j=1, j\neq k}^{n+1} \frac{1}{k-j} = \frac{1}{(n+1)!}.(-1)^{n+1-k}.k.C_{n+1}^k.$$

Vậy

$$m^n = \sum_{k=1}^{n+1} \left((m-k)^n.(-1)^n . \frac{(n+1)!}{k} . \frac{1}{(n+1)!}.(-1)^{n+1-k}.k.C_{n+1}^k \right)$$

hay

$$m^n = \sum_{k=1}^{n+1} \left((m-k)^n (-1)^n.(-1)^{n+1-k}.C_{n+1}^k \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \left((m-k)^n.(-1)^{2n+1-k}.C_{n+1}^k \right) = \sum_{k=1}^{n+1} \left((m-k)^n.(-1)^{k+1}.C_{n+1}^k \right).$$

Suy ra

$$-m^n + \sum_{k=1}^{n+1} \left((m-k)^n.(-1)^{k+1}.C_{n+1}^k \right) = 0$$

hay

$$\sum_{k=0}^{n+1} \left((m-k)^n.(-1)^{k+1}.C_{n+1}^k \right) = 0.$$

Ta có điều phải chứng minh.

Vậy, với cách xác định R_n^m trong bài toán trên, ta có kết quả sau

Đẳng thức 15.

$$R_n^{n-m+1} = R_n^m.$$

2. Đẳng thức tổ hợp "ẩn" trong các bài toán Olympic

Bài toán 14. (USA - 1975) *Cho đa thức $P(x)$ bậc $n \geq 1$, thỏa mãn*

$$P(k) = \frac{1}{C_{n+1}^k}, \forall k = 1, 2, ..., n.$$

Tính $P(n+1)$.

Giải. Áp dụng Công thức nội suy Lagrange cho đa thức $P(x)$, với bậc n, tại $n+1$ điểm khác nhau từng đôi một $x_0 = 0, x_1 = 1, ..., x_k = k, ..., x_n = n$, ta có

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(P(x_k) \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(P(k) \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x - i}{k - i} \right) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{C_{n+1}^k} \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x - i}{k - i} \right).$$

Do đó, bởi Đẳng thức 4, ta có

$$P(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{C_{n+1}^k} \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{(n+1) - i}{k - i} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{C_{n+1}^k} . (-1)^{n-k} . C_{n+1}^k \right) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}.$$

Vậy $P(n+1) = 1$ khi n chẵn và $P(n+1) = 0$ khi n lẻ.

Bài toán 15. *Cho đa thức $P(x)$ có bậc n, thỏa mãn*

$$P(k) = \frac{1}{k},$$

với mỗi $k \in \{1, 2, ..., n, n+1\}$. Tính giá trị của $P(n+2)$.

Giải. Sử dụng Công thức nội suy Lagrange với các mốc nội suy $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, ... , $x_n = n$, $x_{n+1} = n+1$, ta được

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \left(P(x_k) . \prod_{i=1, i\neq k}^{n+1} \frac{x - i}{k - i} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \left(P(k) . \prod_{i=1, i\neq k}^{n+1} \frac{x - i}{k - i} \right) = \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1}{k} . \prod_{i=1, i\neq k}^{n+1} \frac{x - i}{k - i} \right).$$

Do đó

$$P(n+2) = \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1}{k} . \prod_{i=1, i\neq k}^{n+1} \frac{n - i + 2}{k - i} \right) = \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1}{k} . \prod_{i=1, i\neq k}^{n+1} \frac{(n+1) + 1 - i}{k - i} \right).$$

Đặt $N = n + 1$, bởi Đẳng thức 3 và Đẳng thức 11, ta có

$$P(n+2) = \sum_{k=1}^{n+1}\left(\frac{1}{k}.\prod_{i=1,i\neq k}^{n+1}\frac{(n+1)+1-i}{k-i}\right) = \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{k}.\prod_{i=1,i\neq k}^{N}\frac{(N+1)-i}{k-i}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{k}.(-1)^{N-k}.C_N^{k-1}\right) = \sum_{k=1}^{n+1}\left(\frac{1}{k}.(-1)^{n+1-k}.C_{n+1}^{k-1}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1}\left(\frac{1}{k}.(-1)^{n-k+1}.\frac{(n+1)!}{(k-1)!\,(n-k+2)!}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1}\left((-1)^{n-k+1}.\frac{(n+1)!}{k\,(k-1)!\,(n-k+2)!}\right) = \sum_{k=1}^{n+1}\left((-1)^{n-k+1}.\frac{(n+1)!}{k!\,(n-k+2)!}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1}\left((-1)^{n-k+1}.\frac{1}{n+2}.\frac{(n+2)!}{k!\,(n-k+2)!}\right) = \frac{1}{n+2}\sum_{k=1}^{n+1}\left((-1)^{n-k+1}.C_{n+2}^{k}\right)$$

$$= \frac{1}{n+2}.(-1)^{n+1}.\sum_{k=1}^{n+1}\left(C_{n+2}^{k}.(-1)^{-k}\right) = \frac{1}{n+2}.(-1)^{n+1}.\sum_{k=1}^{n+1}\left(C_{n+2}^{k}.(-1)^{k}\right)$$

$$= \frac{1}{n+2}.(-1)^{n+1}.\left((1-1)^{n+2} - (-1)^{n+2} - 1\right) = \frac{1}{n+2}.(-1)^{n+1}.\left(-(-1)^{n+2} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{n+2}.\left(-(-1)^{2n+3} - (-1)^{n+1}\right) = \frac{1}{n+2}.\left(1 - (-1)^{n+1}\right) = \frac{1-(-1)^{n+1}}{n+2}.$$

Vậy

$$P(n+2) = \frac{2}{n+2},$$

khi n chẵn và $P(n+2) = 0$, khi n lẻ.

Bài toán 16. (USAMO 1975) *Cho đa thức $P(x)$ có bậc n, thỏa mãn*

$$P(k) = \frac{k}{k+1},$$

với mỗi $k \in \{0, 1, 2,...,n\}$. Tính giá trị của $P(n+1)$.

Giải. Sử dụng Công thức nội suy Lagrange với các mốc nội suy $x_1 = 0$, $x_1 = 1$, ... , $x_n = n$, ta được

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n}\left(P(x_k).\prod_{i=0,i\neq k}^{n}\frac{x-i}{k-i}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(P(k).\prod_{i=0,i\neq k}^{n}\frac{x-i}{k-i}\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{k+1}.\prod_{i=1,i\neq k}^{n+1}\frac{x-i}{k-i}\right).$$

Do đó, bởi Đẳng thức 4, ta có

$$P(n+1) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{k+1}.\prod_{i=0,i\neq k}^{n}\frac{n-i+1}{k-i}\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{k+1}.\prod_{i=0,i\neq k}^{n}\frac{(n+1)-i}{k-i}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{k+1}.(-1)^{n-k}.C_{n+1}^{k} \right) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{k+1}.(-1)^{n-k}.\frac{(n+1)!}{k!\,(n-k+1)!} \right)$$

$$= \frac{1}{n+2}.\sum_{k=0}^{n} \left(k.(-1)^{n-k}.\frac{(n+2)!}{(k+1)!\,(n-k+1)!} \right) = \frac{1}{n+2}.\sum_{k=0}^{n} \left(k.(-1)^{n-k}.C_{n+2}^{k+1} \right)$$

$$= \frac{1}{n+2}.\sum_{k=0}^{n} \left((k+1-1)\,.(-1)^{n-k}.C_{n+2}^{k+1} \right)$$

$$= \frac{1}{n+2} \left(\sum_{k=0}^{n} \left((k+1)\,(-1)^{n-k}.C_{n+2}^{k+1} \right) + \sum_{k=0}^{n} \left((-1)^{n-k+1}.C_{n+2}^{k+1} \right) \right).$$

Hơn nữa, bởi Đẳng thức 7, ta có

$$\sum_{k=0}^{n} \left((k+1)\,.(-1)^{n-k}.C_{n+2}^{k+1} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left((k+1)\,.(-1)^{n-k}.\frac{(n+2)!}{(k+1)!\,(n-k+1)} \right) = (n+2)\,.\sum_{k=0}^{n} \left((-1)^{n-k}.\frac{(n+1)!}{k!\,(n-k+1)} \right)$$

$$= (n+2)\,.\sum_{k=0}^{n} \left((-1)^{n-k}.C_{n+1}^{k} \right) = (-1)^{n}.\,(n+2)\,.\sum_{k=0}^{n} \left((-1)^{-k}.C_{n+1}^{k} \right)$$

$$= (-1)^{n}.\,(n+2)\,.\sum_{k=0}^{n} \left((-1)^{k}.C_{n+1}^{k} \right) = (-1)^{n}.\,(n+2)\,.\left((1-1)^{n+1} - (-1)^{n+1} \right)$$

$$= (-1)^{n}.\,(n+2)\,.(-1)^{n+2} = (-1)^{2n+2}.\,(n+2) = n+2.$$

Ngoài ra, đặt $K = k+1$, bởi Đẳng thức 11, ta có

$$\sum_{k=0}^{n+1} \left((-1)^{n-k+1}.C_{n+2}^{k+1} \right) = \sum_{K=1}^{n+1} \left((-1)^{n-K+2}.C_{n+2}^{K} \right)$$

$$= (-1)^{n+2}.\sum_{K=1}^{n+1} \left((-1)^{-K}.C_{n+2}^{K} \right) = (-1)^{n+2}.\sum_{K=1}^{n+1} \left((-1)^{K}.C_{n+2}^{K} \right)$$

$$= (-1)^{n+2}.\left((1-1)^{n+2} - (-1)^{n+2} - 1 \right) = (-1)^{n+2}.\left(-(-1)^{n+2} - 1 \right) = -1 + (-1)^{n+1}.$$

Do đó

$$P\,(n+1) = \frac{1}{n+2} \left(n+2-1+(-1)^{n+1} \right) = \frac{n+1+(-1)^{n+1}}{n+2}.$$

Vậy

$$P\,(n+1) = \frac{n+1-1}{n+2} = \frac{n}{n+2},$$

khi n chẵn và

$$P\,(n+1) = \frac{n+1+1}{n+2} = 1,$$

khi n lẻ.

Bài toán 17. *Cho đa thức $P(x)$ có bậc n, thỏa mãn*

$$P(k) = 2^k,$$

với mỗi $k \in \{1, 2, ..., n, n+1\}$. Tính giá trị của $P(n+2)$.

Giải. Sử dụng Công thức nội suy Lagrange với các mốc nội suy $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, ... , $x_n = n$, $x_{n+1} = n+1$, ta được

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{k=1}^{n+1}\left(P(x_k)\,.\prod_{i=1, i\neq k}^{n+1}\frac{x-i}{k-i}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1}\left(P(k)\,.\prod_{i=1, i\neq k}^{n+1}\frac{x-i}{k-i}\right) = \sum_{k=1}^{n+1}\left(2^k.\prod_{i=1, i\neq k}^{n+1}\frac{x-i}{k-i}\right). \end{aligned}$$

Do đó, bởi Đẳng thức 10, ta có

$$\begin{aligned} P(n+2) &= \sum_{k=1}^{n+1}\left(2^k.\prod_{i=1, i\neq k}^{n+1}\frac{n-i+2}{k-i}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1}\left(2^k.\frac{(n+1)\,n...(n-k+3)\,.\,(n-k+1)\,...2.1}{(k-1)(k-2)\,...1.\,(-1)\,...\,(-(n-k))\,.\,(-(n-k+1))}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1}\left(2^k.\frac{\left(\frac{(n+1)!}{n-k+2}\right)}{(k-1)(k-2)\,...1.\,(-1)\,...\,(-(n-k))\,.\,(-(n-k+1))}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1}\left(2^k.\frac{\left(\frac{(n+1)!}{n-k+2}\right)}{(k-1)(k-2)\,...1.(-1)^{n-k+1}.1...(n-k)\,.\,(n-k+1)}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1}\left((-1)^{n-k+1}.2^k.\frac{(n+1)!}{(k-1)(k-2)\,...1.1...(n-k)(n-k+1)(n-k+2)}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1}\left((-1)^{n-k+1}.2^k.\frac{(n+1)!}{(k-1)!\,(n-k+2)!}\right) = \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{n-k+1}.C_{n+1}^{k-1}.2^k \\ &= (-1)^{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{-k}.C_{n+1}^{k-1}.2^k = (-1)^{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k}.C_{n+1}^{k-1}.2^k = (-1)^{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}C_{n+1}^{k-1}.(-2)^k \\ &= (-1)^{n+1}.\,(-2)\,.\left((1-2)^{n+1}-(-2)^{n+1}\right) = (-1)^{n+1}.\,(-2)\,.\left((-1)^{n+1}-(-2)^{n+1}\right) \\ &= (-1)^{n+1}.(-1)^{n+1}.\,(-2) - (-1)^{n+1}.(-2)^{n+1}.\,(-2) = 1.\,(-2) - 2^{n+1}.\,(-2) \\ &= 2\left(2^{n+1}-1\right). \end{aligned}$$

Vậy

$$P(n+2) = 2\left(2^{n+1}-1\right).$$

Nhận xét. Các bài toán nêu trên, từ Bài toán 14 đến Bài toán 17, có cùng một dạng và vì thế có cùng chung một thuật toán để giải, chỉ khác nhau về từng giả thiết. Rõ ràng là, các bước biến đổi tiếp theo về các số tổ hợp đóng một vai trò quan trọng trong việc tiếp tục hoàn thiện lời giải.

Bài toán 18. (United Kingdom) *Cho số nguyên dương k và các số nguyên đôi một phân biệt bất kì $a_1, a_2, ..., a_n$. Chứng minh rằng tổng*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^k}{\prod\limits_{j=1, j\neq i}^{n} (a_i - a_j)}$$

luôn nhận giá trị là số nguyên.

Giải. Xét các đa thức $P(x) = x^k$ và $Q(x) = (x - a_1)(x - a_2)...(x - a_n)$. Chia đa thức $P(x)$ cho đa thức $Q(x)$, ta thấy tồn tại các đa thức $S(x)$ và $R(x)$ với hệ số nguyên (trong đó $0 \leq \deg R(x) < \deg Q(x) = n$) sao cho

$$P(x) = Q(x) S(x) + R(x).$$

Từ đây, ta có $R(a_i) = a_i^k$, với $i = 1, 2, ..., n$.

Sử dụng Công thức nội suy Lagrange cho đa thức $R(x)$ với các mốc nội suy $a_1, a_2, ..., a_n$, ta được

$$R(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(R(a_i) \cdot \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{x - a_j}{a_i - a_j} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left({a_i}^k \cdot \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{x - a_j}{a_i - a_j} \right).$$

Hệ số của x^{n-1} của đa thức $R(x)$ ở vế trái là một số nguyên. Hệ số của x^{n-1} của đa thức $R(x)$ ở vế phải là số

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{{a_i}^k}{\prod\limits_{j=1, j\neq i}^{n} (a_i - a_j)}.$$

Đồng nhất hệ số của x^{n-1} ở các vế, ta thu được kết quả cần chứng minh.

Chẳng hạn, với 3 số nguyên đôi một phân biệt bất kì a_1, a_2, a_3, thì số sau đây cũng là số nguyên

$$\frac{{a_1}^5}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)} + \frac{{a_2}^5}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)} + \frac{{a_3}^5}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)}.$$

Bài toán 19. (Việt Nam - 1977) *Cho $n + 1$ số nguyên $x_0 < x_1 < ... < x_n$. Chứng minh rằng trong các giá trị của đa thức*

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + ... + a_n$$

tại các điểm $x_0, x_1, ..., x_n$, luôn tìm được một số mà giá trị tuyệt đối của nó không bé hơn $\frac{n!}{2^n}$.

Giải. Áp dụng Công thức nội suy Lagrange cho đa thức $P(x)$, bậc n, tại $n + 1$ điểm khác nhau từng đôi một $x_0 < x_1 < ... < x_n$, ta có

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n} \left(P(x_j) \cdot \prod_{i=0, i\neq j}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right).$$

Hệ số của x^n ở vế trái bằng 1. Hệ số của x^n ở vế phải bằng

$$\sum_{j=0}^{n} \left(P(x_j) \cdot \prod_{i=0, i\neq j}^{n} \frac{1}{x_j - x_i} \right).$$

Do đó

$$\sum_{j=0}^{n}\left(P\left(x_j\right).\prod_{i=0,i\neq j}^{n}\frac{1}{x_j-x_i}\right)=1.$$

Giả sử rằng

$$\left|P\left(x_j\right)\right|<\frac{n!}{2^n},\forall j=0,1,...,n.$$

Khi đó, ta có

$$1=\left|\sum_{j=0}^{n}\left(P\left(x_j\right).\prod_{i=0,i\neq j}^{n}\frac{1}{x_j-x_i}\right)\right|\leq\sum_{j=0}^{n}\left(\left|P\left(x_j\right)\right|.\prod_{i=0,i\neq j}^{n}\frac{1}{\left|x_j-x_i\right|}\right).$$

Lưu ý rằng, với các số nguyên $x_0<x_1<...<x_n$, ta luôn có

$$\left|x_j-x_i\right|\geq\left|j-i\right|,\forall i,j=0,1,...,n.$$

Khi đó, bởi Đẳng thức 2, ta có

$$1<\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{n!}{2^n}.\prod_{i=0,i\neq j}^{n}\frac{1}{\left|j-i\right|}\right)=\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{n!}{2^n}.\frac{1}{n!}.C_n^j\right)$$

$$=\frac{1}{2^n}.\sum_{j=0}^{n}C_n^j=\frac{1}{2^n}.2^n=1,$$

mâu thuẫn. Ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 20. (Iran - 2011) *Cho số nguyên $n\geq 2$ và đa thức*

$$f\left(x\right)=x^n+a_{n-2}x^{n-2}+a_{n-3}x^{n-3}+...+a_1x+a_0$$

có các hệ số đều là số thực. Chứng minh rằng tồn tại $k\in\{1,2,...,n\}$ sao cho

$$\left|f\left(k\right)\right|\geq\frac{n!}{C_n^k}.$$

Giải. Giả sử rằng với mọi $k\in\{1,2,...,n\}$, ta có

$$\left|f\left(k\right)\right|<\frac{n!}{C_n^k}.$$

Xét đa thức

$$g\left(x\right)=f\left(x\right)-x^n=a_{n-2}x^{n-2}+a_{n-3}x^{n-3}+...+a_1x+a_0.$$

Ta có $\deg g\leq n-2$. Sử dụng Công thức nội suy Lagrange với các mốc nội suy là $x_1=1,x_2=2,...,x_n=n$, ta có

$$g\left(x\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(g\left(x_k\right).\prod_{i=1,i\neq k}^{n}\frac{x-x_i}{x_k-x_i}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(g\left(k\right).\prod_{i=1,i\neq k}^{n}\frac{x-i}{k-i}\right).$$

Trong đẳng thức trên, hệ số của x^{n-1} ở vế trái bằng 0, còn hệ số của x^{n-1} ở vế phải bằng

$$\sum_{k=1}^{n}\left(g(k)\,.\prod_{i=1,i\neq k}^{n}\frac{1}{k-i}\right).$$

Vậy

$$0=\sum_{k=1}^{n}\left(g(k)\,.\prod_{i=1,i\neq k}^{n}\frac{1}{k-i}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left((f(k)-k^n)\,.\prod_{i=1,i\neq k}^{n}\frac{1}{k-i}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left((f(k)-k^n)\,.\prod_{i=1,i\neq k}^{n}\frac{1}{k-i}\right).$$

Do đó, bởi Đẳng thức 1, ta có

$$0=\sum_{k=1}^{n}\left((f(k)-k^n)\,.\frac{1}{n!}.(-1)^{n-k}.k.C_n^k\right)$$
$$=\frac{1}{n!}.\left(\sum_{k=1}^{n}\left(f(k)\,.(-1)^{n-k}.k.C_n^k\right)-\sum_{k=1}^{n}\left(k^n.(-1)^{n-k}.k.C_n^k\right)\right)$$

hay

$$\sum_{k=1}^{n}\left(f(k)\,.(-1)^{n-k}.k.C_n^k\right)=\sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{n-k}.C_n^k.k^{n+1}\right).$$

Bởi Đẳng thức 13, suy ra

$$\sum_{k=1}^{n}\left(f(k)\,.(-1)^{n-k}.k.C_n^k\right)=\frac{n.\,(n+1)!}{2}.$$

Do đó

$$\frac{n.\,(n+1)!}{2}=\left|\frac{n.\,(n+1)!}{2}\right|\leq\sum_{k=1}^{n}\left(|f(k)|\,.k.C_n^k\right)<\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n!}{C_n^k}.k.C_n^k\right)$$
$$=n!\sum_{k=1}^{n}k=n!\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n.\,(n+1)!}{2},$$

mâu thuẫn. Ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 21. *Giả sử n là số nguyên dương cho trước và $P(x)$ là đa thức với bậc không lớn hơn $2n$, thỏa mãn điều kiện*

$$|P(k)|\leq 1,\forall k\in\{-n,\,-(n-1)\,,...,0,...,n-1,n\}\,.$$

Chứng minh rằng

$$|P(x)|\leq 4^n.$$

Giải. Áp dụng Công thức nội suy Lagrange cho đa thức $P(x)$, với bậc không lớn hơn $2n$, tại $2n+1$ điểm nguyên khác nhau từng đôi một

$$x_{-n}=-n,x_{-(n-1)}=-(n-1)\,,...,x_k=k,...,x_n=n,$$

ta có

$$P(x) = \sum_{k=-n}^{n} \left(P(x_k) \,.\prod_{i=-n, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \right) = \sum_{k=-n}^{n} \left(P(k) \,.\prod_{i=-n, i\neq k}^{n} \frac{x - i}{k - i} \right).$$

Do đó

$$|P(x)| \leq \sum_{k=-n}^{n} \left(|P(k)| \,.\prod_{i=-n, i\neq k}^{n} \frac{|x - i|}{|k - i|} \right).$$

Với mỗi $k \in \{-n, -(n-1), ..., 0, ..., n-1, n\}$, ta có

$$\begin{aligned}\prod_{i=-n, i\neq k}^{n} |x - i| &= |x - (-n)| \,.\, |x - (-(n-1))| \ldots |x - n| \\ &\leq |n - (-n)| \,.\, |n - (-(n-1))| \ldots |n - (n-1)| \\ &= 2n.\,(2n-1)\ldots 1 = (2n)!,\ \forall x \in [-n; n]\,.\end{aligned}$$

Ngoài ra, với mỗi $k \in \{-n, -(n-1), ..., 0, ..., n-1, n\}$, ta có

$$\begin{aligned}\prod_{i=-n, i\neq k}^{n} (k - i) &= (k+n)(k+n-1)\ldots 1.\,(-1)(-2)\ldots(-(n-k)) \\ &= (-1)^{n-k}.\,(n+k)!\,(n-k)!.\end{aligned}$$

Vậy, với mọi $x \in [-n, n]$, ta có

$$|P(x)| \leq \sum_{k=-n}^{n} \frac{(2n)!}{(n+k)!\,(n-k)!} = \sum_{l=0}^{2n} \frac{(2n)!}{l!\,(2n-l)!} = \sum_{l=0}^{2n} C_{2n}^{l} = 2^{2n} = 4^n.$$

Bài toán 22. *Giả sử n là số nguyên dương cho trước. Xác định tất cả các đa thức $P(x)$ có bậc nhỏ hơn n và thỏa mãn điều kiện*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k+1}.P(k)\,.C_n^k = 0.$$

Giải. Áp dụng Công thức nội suy Lagrange cho đa thức $P(x)$, với bậc nhỏ hơn n, tại n điểm nguyên khác nhau từng đôi một $x_0 = 0, x_1 = 1, ..., x_k = k, ..., x_{n-1} = n-1$, ta có

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(P(x_k) \,.\prod_{i=0, i\neq k}^{n-1} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(P(k) \,.\prod_{i=0, i\neq k}^{n-1} \frac{x - i}{k - i} \right).$$

Suy ra

$$P(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(P(k) \,.\prod_{i=0, i\neq k}^{n-1} \frac{n - i}{k - i} \right).$$

Hơn nữa, với mỗi $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$, bởi Đẳng thức 4, ta có

$$\prod_{i=0, i\neq k}^{n-1} \frac{n-i}{k-i} = (-1)^{n-k-1} C_n^k = (-1)^{n-k+1} C_n^k.$$

Do đó

$$P(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(P(k) . (-1)^{n-k+1} C_n^k \right)$$

hay

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(P(k) . (-1)^{n-k+1} C_n^k \right) - P(n) = 0.$$

Đẳng thức trên có thể được viết lại như sau

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left((-1)^{n-k+1} P(k) C_n^k \right) + (-1)^{n-n+1} P(n) C_n^n = 0$$

hay

$$\sum_{k=0}^{n} \left((-1)^{n-k+1} P(k) C_n^k \right) = 0.$$

Do đó, điều kiện của bài toán được thỏa mãn.

Tóm lại, các đa thức cần tìm có dạng

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(P(k) . \prod_{i=0, i\neq k}^{n-1} \frac{x-i}{k-i} \right).$$

trong đó $P(0), P(1), ..., P(n-1)$ là các giá trị tùy ý.

Bài toán 23. (IMO Shortlist - 1983) *Giả sử $(F_n)_{n\geq 1}$ là dãy Fibonacci*

$$F_1 = F_2 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \, (n \geq 1)$$

và $P(x)$ là đa thức có bậc 990, thỏa mãn

$$P(k) = F_k, k \in \{992, 993, ..., 1982\}.$$

Chứng minh rằng $P(1983) = F_{1983} - 1$.

Giải. Chú ý rằng F_n có công thức tổng quát là

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^n - \beta^n)$$

với mọi n nguyên dương, trong đó

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Dễ thấy rằng $\alpha + \beta = 1,\ \alpha - \beta = \sqrt{5},\ \alpha\beta = -1.$

Áp dụng Công thức nội suy Lagrange với 991 mốc nội suy

$$x_k = k,\ k \in \{992, 993, \dots, 1982\},$$

ta có

$$P(x) = \sum_{k=992}^{1982} \left(P(x_k) . \prod_{i=992, i\neq k}^{1982} \frac{x-i}{k-i} \right)$$

$$= \sum_{k=992}^{1982} \left(P(k) . \prod_{i=992, i\neq k}^{1982} \frac{x-i}{k-i} \right) = \sum_{k=992}^{1982} \left(F_k . \prod_{i=992, i\neq k}^{1982} \frac{x-i}{k-i} \right)$$

$$= \sum_{k=992}^{1982} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\alpha^k - \beta^k \right) . \prod_{i=992, i\neq k}^{1982} \frac{x-i}{k-i} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} . \sum_{k=992}^{1982} \left(\left(\alpha^k - \beta^k \right) . \prod_{i=992, i\neq k}^{1982} \frac{x-i}{k-i} \right).$$

Do đó, bởi Đẳng thức 4 và Đẳng thức 7, ta có

$$P(1983) = \frac{1}{\sqrt{5}} . \sum_{k=992}^{1982} \left(\left(\alpha^k - \beta^k \right) . \prod_{i=992, i\neq k}^{1982} \frac{1983-i}{k-i} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} . \sum_{k=0}^{990} \left(\left(\alpha^{k+992} - \beta^{k+992} \right) . \prod_{i=0, i\neq k}^{990} \frac{991-i}{k-i} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} . \sum_{k=0}^{990} \left(\left(\alpha^{k+992} - \beta^{k+992} \right) . (-1)^{990-k} . C_{991}^k \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} . \sum_{k=0}^{990} \left(\left(\alpha^{k+992} - \beta^{k+992} \right) . (-1)^{990} . (-1)^{-k} . C_{991}^k \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} . \sum_{k=0}^{990} \left(\left(\alpha^{k+992} - \beta^{k+992} \right) . (-1)^{-k} . C_{991}^k \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} . \sum_{k=0}^{990} \left(\left(\alpha^{k+992} - \beta^{k+992} \right) . (-1)^{k} . C_{991}^k \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sum_{k=0}^{990} \left(\alpha^{k+992} . (-1)^k . C_{991}^k \right) - \sum_{k=0}^{990} \left(\beta^{k+992} . (-1)^k . C_{991}^k \right) \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\alpha^{992} . \sum_{k=0}^{990} \left(\alpha^k . (-1)^k . C_{991}^k \right) - \beta^{992} . \sum_{k=0}^{990} \left(\beta^k . (-1)^k . C_{991}^k \right) \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\alpha^{992} . \sum_{k=0}^{990} \left((-\alpha)^k . C_{991}^k \right) - \beta^{992} . \sum_{k=0}^{990} \left((-\beta)^k . C_{991}^k \right) \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{992}.\left((1-\alpha)^{991} - (-\alpha)^{991}\right) - \beta^{992}.\left((1-\beta)^{991} - (-\beta)^{991}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{992}.\left((1-\alpha)^{991} + \alpha^{991}\right) - \beta^{992}.\left((1-\beta)^{991} + \beta^{991}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{992}.\left(\beta^{991} + \alpha^{991}\right) - \beta^{992}.\left(\alpha^{991} + \beta^{991}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{991} - \beta^{991}\right)\left(\alpha^{992} - \beta^{992}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{1983} - \alpha^{991}\beta^{992} + \alpha^{992}\beta^{991} - \beta^{1983}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{1983} - \beta^{1983} - (\alpha\beta)^{991}.(\beta-\alpha)\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{1983} - \beta^{1983} - (-1)^{991}.\left(-\sqrt{5}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{1983} - \beta^{1983} - \sqrt{5}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sqrt{5}.F_{1983} - \sqrt{5}\right) = F_{1983} - 1.$$

Nhận xét. Bài toán trên có thể tổng quát hóa như sau:

Bài toán tổng quát. *Giả sử $(F_n)_{n\geq 1}$ là dãy Fibonacci*

$$F_1 = F_2 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \, (n \geq 1)$$

và $P(x)$ là đa thức có bậc n_0 $(n_0 \geq 1)$ thỏa mãn

$$P(n_0 + k) = F_{n_0+k}, k \in \{2; 3; ...; n_0 + 2\}.$$

Chứng minh rằng $P(2n_0 + 3) = F_{2n_0+3} - 1$.

Giải. Áp dụng Công thức nội suy Lagrange với $n_0 + 1$ mốc nội suy

$$x_{n_0+k} = n_0 + k, \; k \in \{2, 3, ..., n_0 + 2\},$$

ta có

$$P(x) = \sum_{k=n_0+2}^{2n_0+2}\left(P(x_k).\prod_{i=n_0+2, i\neq k}^{2n_0+2}\frac{x-i}{k-i}\right)$$

$$= \sum_{k=n_0+2}^{2n_0+2}\left(P(k).\prod_{i=n_0+2, i\neq k}^{2n_0+2}\frac{x-i}{k-i}\right) = \sum_{k=n_0+2}^{2n_0+2}\left(F_k.\prod_{i=n_0+2, i\neq k}^{2n_0+2}\frac{x-i}{k-i}\right)$$

$$= \sum_{k=n_0+2}^{2n_0+2}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^k - \beta^k\right).\prod_{i=n_0+2, i\neq k}^{2n_0+2}\frac{x-i}{k-i}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}.\sum_{k=n_0+2}^{2n_0+2}\left(\left(\alpha^k - \beta^k\right).\prod_{i=n_0+2, i\neq k}^{2n_0+2}\frac{x-i}{k-i}\right).$$

Do đó, bởi Đẳng thức 4 và Đẳng thức 7, ta có

$$P(2n_0+3) = \frac{1}{\sqrt{5}}.\sum_{k=n_0+2}^{2n_0+2}\left(\left(\alpha^k - \beta^k\right).\prod_{i=n_0+2, i\neq k}^{2n_0+2}\frac{(2n_0+3)-i}{k-i}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}.\sum_{k=0}^{n_0}\left(\left(\alpha^{k+n_0+2} - \beta^{k+n_0+2}\right).\prod_{i=0, i\neq k}^{n_0}\frac{(n_0+1)-i}{k-i}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}.\sum_{k=0}^{n_0}\left(\left(\alpha^{k+n_0+2}-\beta^{k+n_0+2}\right).(-1)^{n_0-k}.C_{n_0+1}^k\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}.\sum_{k=0}^{n_0}\left(\left(\alpha^{k+n_0+2}-\beta^{k+n_0+2}\right).(-1)^{n_0}.(-1)^{-k}.C_{n_0+1}^k\right)$$

$$=\frac{(-1)^{n_0}}{\sqrt{5}}.\sum_{k=0}^{n_0}\left(\left(\alpha^{k+n_0+2}-\beta^{k+n_0+2}\right).(-1)^{-k}.C_{n_0+1}^k\right)$$

$$=\frac{(-1)^{n_0}}{\sqrt{5}}.\sum_{k=0}^{n_0}\left(\left(\alpha^{k+n_0+2}-\beta^{k+n_0+2}\right).(-1)^{k}.C_{n_0+1}^k\right)$$

$$=\frac{(-1)^{n_0}}{\sqrt{5}}.\left(\sum_{k=0}^{n_0}\left(\alpha^{k+n_0+2}.(-1)^{k}.C_{n_0+1}^k\right)-\sum_{k=0}^{n_0}\left(\beta^{k+n_0+2}.(-1)^{k}.C_{n_0+1}^k\right)\right)$$

$$=\frac{(-1)^{n_0}}{\sqrt{5}}.\left(\alpha^{n_0+2}\sum_{k=0}^{n_0}\left(\alpha^{k}.(-1)^{k}.C_{n_0+1}^k\right)-\beta^{n_0+2}\sum_{k=0}^{n_0}\left(\beta^{k}.(-1)^{k}.C_{n_0+1}^k\right)\right)$$

$$=\frac{(-1)^{n_0}}{\sqrt{5}}.\left(\alpha^{n_0+2}\sum_{k=0}^{n_0}\left((-\alpha)^{k}.C_{n_0+1}^k\right)-\beta^{n_0+2}\sum_{k=0}^{n_0}\left((-\beta)^{k}.C_{n_0+1}^k\right)\right)$$

$$=\frac{(-1)^{n_0}}{\sqrt{5}}.\left(\alpha^{n_0+2}.\left((1-\alpha)^{n_0+1}-(-\alpha)^{n_0+1}\right)-\beta^{n_0+2}.\left((1-\beta)^{n_0+1}-(-\beta)^{n_0+1}\right)\right)$$

$$=\frac{(-1)^{n_0}}{\sqrt{5}}.\left(\alpha^{n_0+2}.\left(\beta^{n_0+1}-(-\alpha)^{n_0+1}\right)-\beta^{n_0+2}.\left(\alpha^{n_0+1}-(-\beta)^{n_0+1}\right)\right).$$

- Nếu n_0 là số chẵn, thì

$$P\left(2n_0+3\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}.\left(\alpha^{n_0+2}.\left(\beta^{n_0+1}+\alpha^{n_0+1}\right)-\beta^{n_0+2}.\left(\alpha^{n_0+1}+\beta^{n_0+1}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{n_0+1}+\beta^{n_0+1}\right)\left(\alpha^{n_0+2}-\beta^{n_0+2}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{2n_0+3}-\alpha^{n_0+1}\beta^{n_0+2}+\alpha^{n_0+2}\beta^{n_0+1}-\beta^{2n_0+3}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{2n_0+3}-\alpha^{n_0+1}\beta^{n_0+2}+\alpha^{n_0+2}\beta^{n_0+1}-\beta^{2n_0+3}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{2n_0+3}-\beta^{2n_0+3}-(\alpha\beta)^{n_0+1}.(\beta-\alpha)\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{2n_0+3}-\beta^{2n_0+3}-(-1)^{n_0+1}.\left(-\sqrt{5}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{2n_0+3}-\beta^{2n_0+3}-\sqrt{5}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sqrt{5}.F_{2n_0+3}-\sqrt{5}\right)=F_{2n_0+3}-1.$$

- Nếu n_0 là số lẻ, thì

$$P\left(2n_0+3\right)=-\frac{1}{\sqrt{5}}.\left(\alpha^{n_0+2}.\left(\beta^{n_0+1}-\alpha^{n_0+1}\right)-\beta^{n_0+2}.\left(\alpha^{n_0+1}-\beta^{n_0+1}\right)\right)$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{5}}.\left(-\alpha^{n_0+2}.\left(\alpha^{n_0+1}-\beta^{n_0+1}\right)-\beta^{n_0+2}.\left(\alpha^{n_0+1}-\beta^{n_0+1}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}. \left(\alpha^{n_0+2}. \left(\alpha^{n_0+1} - \beta^{n_0+1}\right) + \beta^{n_0+2}. \left(\alpha^{n_0+1} - \beta^{n_0+1}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\alpha^{n_0+1} - \beta^{n_0+1}\right) \left(\alpha^{n_0+2} + \beta^{n_0+2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\alpha^{2n_0+3} + \alpha^{n_0+1}\beta^{n_0+2} - \alpha^{n_0+2}\beta^{n_0+1} - \beta^{2n_0+3}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\alpha^{2n_0+3} + \alpha^{n_0+1}\beta^{n_0+2} - \alpha^{n_0+2}\beta^{n_0+1} - \beta^{2n_0+3}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\alpha^{2n_0+3} - \beta^{2n_0+3} + (\alpha\beta)^{n_0+1}. (\beta - \alpha)\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\alpha^{2n_0+3} - \beta^{2n_0+3} + (-1)^{n_0+1}. \left(-\sqrt{5}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\alpha^{2n_0+3} - \beta^{2n_0+3} - \sqrt{5}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sqrt{5}.F_{2n_0+3} - \sqrt{5}\right) = F_{2n_0+3} - 1.$$

Vậy, trong cả hai trường hợp, ta luôn có $P\left(2n_0 + 3\right) = F_{2n_0+3} - 1$.

Tài liệu tham khảo

[1] Võ Quốc Bá Cẩn, *Một số bài toán ứng dụng công thức nội suy Lagrange*, Kỷ yếu "Gặp gỡ Toán học" lần thứ 10, TP. Hồ Chí Minh, 2018.

[2] Một số bài toán Olympic của các nước.

ĐỊNH HƯỚNG GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN CỰC TRỊ TỔ HỢP DÀNH CHO THCS

Nguyễn Tất Thu - Đồng Nai

GIỚI THIỆU

Trong bài viết này, chúng tôi trình bày một số phân tích để tìm hướng giải bài toán cực trị tổ hợp dành cho THCS.

0.1. Lý thuyết

Bài toán cực trị thường xuyên xuất hiện trong các bài toán tổ hợp. Để giải quyết bài toán cực trị ta cần vận dụng nhiều nội dung kiến thức liên quan của đại số, tổ hợp. Thông thường ta gặp các bài toán sau:

Bài toán 1. Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất (lớn nhất) sao cho mọi tập A mà $|A| = k$ đều có tính chất T nào đó.

Hướng giải: Xét một tập A có tính chất đặc biệt nào đó mà $|A| = m$ và A không thỏa tính chất T, suy ra $k_{\min} \geq m + 1$. Tiếp theo ta chứng minh mọi tập A mà $|A| = m + 1$ đều có tính chất T. Vậy $k_{\min} = m + 1$.

Để chứng minh mọi tập A mà $|A| = m + 1$ đều có tính chất T thì ta có thể sử dụng nguyên lí Dirichlet hoặc kĩ thuật xây dựng tập hợp (xây dựng phần tử xuất phát).

Bài toán 2. Tìm số phần tử lớn nhất (nhỏ nhất) của tập A gồm các phần tử có tính chất T.

Hướng giải: Đặt $|A| = k$, ta chứng minh $k \leq m$ ($k \geq m$), sau đó xây dựng một tập A' thỏa tính chất T và $|A'| = m$.

0.2. Các ví dụ

Ví dụ 1. *Xét 20 số nguyên dương đầu tiên $1, 2, 3, \ldots, 20$. Hãy tìm số nguyên dương k nhỏ nhất có tính chất: Với mỗi cách lấy ra k số phân biệt từ 20 số trên, đều lấy được hai số phân biệt a và b sao cho $a + b$ là số nguyên tố.*

Phân tích. Để giải bài toán này ta thực hiên theo hai bước sau:

1. Chỉ ra một các lấy ra một số phần tử lớn nhất có thể không thỏa bài toán.
   Để chọn ra các phần tử không thỏa bài toán, có nghĩa là ta cần chọn các phần tử, sao cho trong các phần tử lấy ra với hai số bất kì $a,\ b$ thì $a+b$ là hợp số. Điều đầu tiên ta nghĩ đến là ta chọn các số chẵn (vì khi đó tổng hai số lấy ra luôn là số chẵn lớn hơn 2, nên nó là hợp số). Ta chọn được 10 số chẵn, do đó $k \geq 11$.

2. Ta chứng minh rằng với mọi cách lấy 11 số ta luôn chọn ra được hai số có tổng là số nguyên tố. Để chứng minh tồn tại ta có thể dùng nguyên lí Dirichlet. Để thực hiện điều này, ta chia các số $1,\ 2, \ldots,\ 20$ thành 10 cặp sao cho tổng mỗi cặp là một số nguyên tố. Ta có lời giải như sau.

Chứng minh. Xét tập hợp $X = \{2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10;\ 12;\ 14;\ 16;\ 18;\ 20\}$ ta thấy tổng của hai phần tử bất kì của tập hợp này đều không phải là số nguyên tố. Do đó $k \geq 11$, ta sẽ chứng minh $k = 11$ là số nhỏ nhất thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Thật vậy, ta chia tập hợp
$$A = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 20\}$$
thành 10 cặp số sau:
$$(1,2)\,;\ (3,16)\,;\ (4,19)\,;\ (5,6)\,;\ (7,10)\,;\ (8,9)\,;\ (11,20)\,;\ (12,17)\,;\ (13,18)\,;\ (14,15)\,.$$
Tổng của hai số trong mỗi cặp số trên là số nguyên tố. Khi đó mỗi tập con của A có 11 phần tử thì tồn tại ít nhất hai phần tử thuộc cùng vào một trong 10 cặp số trên. Suy ra trong A luôn có hai phần tử phân biệt có tổng là một số nguyên tố. □

Ví dụ 2. *Gọi A là tập tất cả các số tự nhiên lẻ không chia hết cho 5 và nhỏ hơn 30. Tìm số k nhỏ nhất sao cho mỗi tập con của A gồm k phần tử đều tồn tại hai số chia hết cho nhau?*

Chứng minh. Ta có $A = \{1; 3; 7; 9; 11; 13; 17; 19; 21; 23; 27; 29\}$ nên số phần tử của là $|A| = 12$. Xét tập
$$A_0 = \{9; 11; 13; 17; 19; 21; 23; 29\}\,.$$
Dễ thấy hai phần tử bất kì thuộc A_0 thì không chia hết cho nhau. Từ đó ta suy ra được $k \geq 9$.
Ta chứng minh $k = 9$ thỏa đề bài.

Xét S là một tập con bất kì của A và $|S| = 9$. Xét ba cặp $\{21; 7\}\,, \{27; 9\}\,, \{1; 11\}$, ta thấy mỗi cặp là bội của nhau. Nếu trong 3 cặp trên có ít nhất một cặp thuộc S thì bài toán được giải quyết. Giả sử trong ba cặp trên không có cặp nào cùng thuộc S, do $|S| = 9$ nên S phải chứa một số trong mỗi cặp và chứa 6 số còn lại. Từ đó suy ra trong S phải có cặp $\{3; 9\}$ hoặc $\{3; 27\}$ và mỗi cặp này là bội của nhau. Hay nói cách khác trong S luôn tồn tại hai số chia hết cho nhau.
Vậy $k_{\min} = 9$.

Lưu ý. Mấu chốt trong bài toán trên là chúng ta phát hiện ra tập A_0 để từ đó ta khẳng định được $k \geq 9$ và dự đoán $k_{\min} = 9$. Để tìm tập A_0, ta liệt kê hết các số trong A mà không có hai số nào là bội của nhau. Với bài toán này, việc tìm ra tập A_0 khá đơn giản. □

Ví dụ 3. *Cho tập hợp $X = \{1;\ 2;\ 3; \ldots;\ 2018\}$ gồm 2018 số nguyên dương đầu tiên. A là một tập con của tập X thỏa mãn: với $x,\ y,\ z \in A$; $x < y < z$ thì $x,\ y,\ z$ là độ dài ba cạnh của một tam giác. Hỏi tập hợp A có nhiều nhất bao nhiêu phần tử?*

Phân tích. Ta biết với điều kiện $0 < x < y < z$ thì $x,\ y,\ z$ là độ dài ba cạnh của tam giác khi và chỉ khi $x + y > z$. Vì $z \in X$ nên $z \leq 2018$. Do đó ta chỉ cần chọn $x,\ y$ sao cho $x + y > 2018$ thì hiển nhiên ta có $x + y > z$. Do đó ta xét tập $A_0 = \{1009,\ 1010, \ldots,\ 2018\}$ thì với mọi $x,\ y,\ z \in A_0$ ta luôn có $x + y > z$. Ta dự đoán tập A có nhiều nhất 1010 phần tử. Để chứng minh khẳng định này ta có hai hướng để đi.

Hướng 1: Ta chứng minh nếu tập A thỏa yêu cầu bài toán thì $|A| \leq 1010$.

Hướng 2: Với mọi tập con B của X mà $|B| \geq 1011$ thì trong B tồn tại ba số $x,\ y,\ z$ không là độ dài ba cạnh của tam giác.

Chứng minh. Xét tập hợp $A_0 = \{1009;\ 1010; \ldots;\ 2018\}$, ta có $|a_0| = 1010$ và với $x,\ y,\ z \in A_0$ mà $x < y < z$ thì ta có

$$x + y \geq 1009 + 1010 = 2019 > 2018 \geq z,$$

hay x, y, z là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Cách 1: Giả sử $A = \{a_1;\ a_2; \ldots;\ a_k\}$ với $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$. Nếu $a_k < 2018$, đặt $t = 2018 - a_k$ và $b_i = a_i + t$ với $i = 1,\ 2, \ldots,\ k$ và tập $\{b_1;\ b_2; \ldots;\ b_k\}$ cũng thỏa mãn bài toán và $b_k = 2018$. Do đó ta có thể giả sử $a_k = 2018$.
Ta có $a_1 + a_2 > a_k$ và $a_1 < a_2$ nên

$$2a_2 > a_k = 2018 \Rightarrow a_2 > 1009 \Rightarrow a_2 \geq 1010.$$

Từ đây ta có $A \backslash \{a_1\} \subset \{1010;\ 1011;\ \ldots;\ 2018\}$, do đó

$$|A| - 1 \leq 2018 - 1010 + 1 = 1009 \Rightarrow |A| \leq 1010.$$

Vậy $\max|a| = 1010$.

Cách 2: Tương tự như trên ta xét tập $A = \{a_1,\ a_2, \ldots,\ a_k = 2018\}$ với $k \geq 1011$ và ba phần tử phân biệt thuộc A luôn là độ dài ba cạnh của tam giác.
Xét các cặp $(i; 2018 - i)$ với $i = \overline{1, 1008}$. Vì 2018 thuộc A nên trong mỗi cặp trên có nhiều nhất một số thuộc A, khi đó $|A| \leq 1008 + 1 + 1 = 1010$ (vô lí).
Vậy tập A có nhiều nhất 1010 phần tử. $\square$

Ví dụ 4. *Từ* 625 *số tự nhiên* $1,\ 2, \ldots,\ 624,\ 625$ *ta chọn ra* k *số sao cho không có hai số nào có tổng bằng* 625. *Tìm* k *nhỏ nhất sao cho trong* k *số chọn ra có ít nhất một số chính phương.*

Phân tích. Để tìm $\min k$, trước hết ta chỉ ra cách chọn k số (nhiều nhất có thể) sao trong không có hai số nào có tổng bằng 625 và không có số nào là số chính phương.

Vì cần chọn ra k số mà hai số có tổng khác 625 nên trong các cặp $(i; 625 - i),\ i = \overline{1, 312}$ ta chỉ chọn được nhiều nhất một số (do đó ta chọn nhiều nhất 312 số), đồng thời trong k được chọn không có số nào là số chính phương, nên ta phải loại đi các số $i \in \{1^2;\ 2^2;\ 3^2; \ldots;\ 17^2\}$. Hơn nữa, chỉ có $i \in 15^2,\ 7^2$ thì i và $625 - i$ đều là số chính phương, do đó ta có thể chọn tiếp các số $625 - i^2$ với $i \in \{1; 2; \ldots; 17\}$ và $i \neq 7,\ 15$. Khi đó ta chọn được 310 số. Chính vì vậy, ta dự đoán $k = 311$.

Chứng minh. Xét cách chọn ra 310 số gồm $2, 3, 5, \dots, 312$ (gồm các số nguyên dương từ 1 đến 312 trừ các số chính phương) và các số có dạng $625 - i^2$ với i thuộc các số nguyên dương từ 1 đến 17 và bỏ đi hai số 7 và 15. Ta có tất cả 310 số và rõ ràng trong 310 số này không có số nào là số chính phương và hai số bất kì có tổng luôn khác 625. Suy ra $k \geq 311$.

Ta xét cách chọn ra 311 số bất kì sao cho không có hai số nào có tổng bằng 625.

Ta chia 625 số tự nhiên thành 311 nhóm như sau: 310 nhóm đầu, mỗi nhóm gồm hai số có tổng bằng 625 tức là có dạng $\{a,\ 625 - a\}$ với $a \neq 49, a \neq 225$. Nhóm 311 gồm 5 số chính phương $\{49, 225, 400, 576, 625\}$. Vì 311 số được chọn không có hai số nào có tổng bằng 625 nên trong 310 nhóm đầu ta chọn mỗi nhóm nhiều nhất 1 số. Do đó, luôn có ít nhất một số thuộc nhóm 311 được chọn. Số được chọn đó là một số chính phương. Vậy bài toán được chứng minh. □

Ví dụ 5. *Cho các số nguyên $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_n = 100$ thỏa mãn: Với mọi $i \geq 2$, luôn tồn tại $1 \leq p \leq q \leq r \leq i - 1$ sao cho*

$$a_i = a_p + a_q + a_r.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của n?

Phân tích. Dễ thấy với $n = 1, n = 2$ thì bài toán không thỏa mãn.
Xét $n = 3$ ta có $a_2 = a_1 + a_1 + a_1 = 3a_1$ và a_3 ta có thể chọn các khả năng

$$a_3 = 3a_2,\ a_3 = a_2 + 2a_1,\ a_3 = 2a_2 + a_1.$$

Do đó ta có thể chọn $a_1 = 20,\ a_2 = 60$ và $a_3 = 100$.

Để tìm $\max n$ ta xét thử các giá trị của a_1. Đầu tiên, dĩ nhiên ta xét $a_1 = 1$, khi đó $a_2 = 3a_1 = 3$. Tuy nhiên a_3 có nhiều khả năng, nhưng a_3 luôn là số lẻ, từ đó suy ra a_i luôn là số lẻ, điều này trái với $a_n = 100$. Tương tự ta cũng thấy được a_1 không thể số lẻ, do đó a_1 phải là số chẵn. Tiếp theo ta xét $a_1 = 2$, ta có $a_3 = 6$ khi đó $a_i \equiv 2 \pmod 4$ hay $a_n = 100 \equiv 2 \pmod 4$ (vô lí), do đó a_1 là bội của 4. Tiếp theo ta xét $a_1 = 4, a_2 = 12$, khi đó a_3 có thể nhận các giá trị 36, 20, 30. Do ta cần tìm giá trị lớn nhất của n nên ta chọn $a_3 = 20$, từ đây ta có dự đoán $a_{i+1} - a_i = 8$. Khi đó

$$100 = a_n = (a_n - a_{n-1}) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1 = 8(n-1) + 4 \Rightarrow n = 13.$$

Do đó ta dự đoán $\max n = 13$.

Chứng minh. Ta thấy $n \neq 1,\ 2$ nên $n \geq 3$. Xét ba số $a_1 = 20,\ a_2 = 60,\ a_3 = 100$, ta có $a_2 = a_1 + a_1 + a_1$ và $a_3 = a_2 + a_1 + a_1$. Do đó $\min n = 3$.

Ta thấy nếu $a_1 \equiv 1 \pmod 2$ thì $a_2 = 3a_1 \equiv 1 \pmod 2$. Bằng quy nạp ta có $a_i \equiv 1 \pmod 2\ \forall i = 1, 2, \dots, n$. Dẫn đến $a_n = 100 \equiv 1 \pmod 2$ (vô lí). Do đó $a_1 \equiv 0 \pmod 2 \Rightarrow a_1 \equiv 0,\ 2 \pmod 4$.

Nếu $a_1 \equiv 2 \pmod 4$ thì chứng minh tương tự ta có $a_n = 100 \equiv 2 \pmod 4$ (vô lí). Suy ra $a_1 \equiv 0 \pmod 4$ hay $a_1 \equiv 0,\ 4 \pmod 8$.

Chứng minh tương tự ta suy ra $a_1 \equiv 4 \pmod 8$ và $a_i \equiv 4 \pmod 8\ \forall i = 1, 2, \dots, n$.

Suy ra
$$a_{i+1} - a_i \,\vdots\, 8 \Rightarrow a_{i+1} - a_i \geq 8 \Rightarrow a_{i+1} \geq a_i + 8.$$
Do đó
$$100 = a_n \geq a_1 + 8(n-1) \geq 4 + 8(n-1) = 8n - 4 \Rightarrow n \leq 13.$$
Xét các số $a_i = 8i - 4\ \forall i = 1, 2, ..., 13$ ta có
$$a_{i+1} = a_i + 8 = a_i + a_1 + a_1.$$
Vậy $\max n = 13$. □

Ví dụ 6 (HSG Hà Nội năm 2017). *Trên bàn có 100 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 100. Hai người A và B lần lượt mỗi người lấy một tấm thẻ trên bàn sao cho nếu người A lấy tấm thẻ đánh số n thì đảm bảo người B chọn được tấm thẻ đánh số $2n+2$. Hỏi người A có thể lấy được nhiều nhất bao nhiêu tấm thẻ trên bàn thỏa mãn yêu cầu trên?*

Phân tích. Vì B viết số $2n+2$, nên $2n+2$ không vượt quá 100, hay
$$2n + 2 \leq 100 \Leftrightarrow n \leq 49,$$
nghĩa là A chỉ được viết các số không vượt quá 49. Tuy nhiên A không thể viết tất cả các số từ 1 đến 49, chẳng hạn A viết số 1 thì không thể viết số $4 = 2 \cdot 1 + 2$. Do đó, ta chia các số từ 1 đến 49, mỗi cặp có dạng n và $2n+2$. Khi đó trong mỗi cặp A chỉ chọn được nhiều nhất 1 số. Ta xét các cặp $(1;4)$, $(2;6)$, $(3;8)$, $(5;12)$, $(7;16)$, $(9;20)$, $(10;22)$, $(11;24)$, $(13;28)$, $(14;30)$, $(15;32)$, $(17;36)$, $(18;38)$, $(19;40)$, $(21;44)$, $(23;46)$ (có tất cả 16 cặp). Còn lại các số chưa được chọn là 25, 26, 27, 29, 31, 33, 34, 35, 37, 39, 41, 42, 43, 45, 47, 48, 49 (có tất cả 17 số). Do đó, A chọn được nhiều nhất $16 + 17 = 33$ số.

Chứng minh. Vì B bốc thẻ $2n+2$ nên $2n+2 \leq 100$. Suy ra $n \leq 49$. Do đó, A chỉ được bốc các thẻ đánh từ 1 đến 49.
Bây giờ, ta chia tập $\{1;\ 2;\ \cdots;\ 49\}$ thành 33 tập con như sau:
$$\begin{array}{ll} \{1;\ 4\},\ \{3;\ 8\},\ \{5;\ 12\}; \cdots,\ \{23;\ 49\} & \\ \{2;\ 6\},\ \{10;\ 22\}, \{14;\ 30\},\ \{18;\ 38\} & \text{(16 nhóm)} \\ \{25\},\ \{27\}, \{29\}, \cdots, \{49\} & \\ \{26\},\ \{34\},\ \{42\},\ \{46\} & \text{(17 nhóm)} \end{array}$$
Ở mỗi nhóm, A được chọn tối đa một số. Nếu A chọn nhiều hơn 34 số trong các số từ 1 đến 49 thì theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại hai số thuộc cùng một nhóm (vô lý). Do đó, A được chọn không quá 33 số.

Mặt khác, A có thể chọn 33 số gồm 25 số lẻ không vượt quá 49 và 7 số chẵn $2;\ 10;\ 14;\ 18;\ 34;\ 42;\ 48$ thì thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Vậy người A có thể lấy nhiều nhất 33 tấm thẻ trên bàn thỏa mãn yêu cầu trên. □

Ví dụ 7 (HSG Hà Tĩnh 2019). *Cho bảng ô vuông $(2n+1) \times (2n+1)$ $(n \geq 3)$, ta điền vào các ô vuông đơn vị của bảng các số 0, 1 xen kẻ nhau. Biết bốn ô vuông ở bốn góc của bảng đều được điền số 1. Tìm số k nhỏ nhất các hình chữ L (hình vuông 2×2 bỏ đi một ô vuông bất kỳ) sao cho có thể phủ tất cả các ô vuông chứa số 1 bởi k hình chữ L không chồng lên nhau.*

Phân tích. Trước hết ta thử với $n = 3$, khi đó ta có bảng 7×7 như hình dưới.

1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1

Ta thấy số 1 chỉ nằm ở các ô $(i;j)$ với $i,\ j$ cùng lẻ hoặc cùng chẵn. Số các số 1 nằm ở ô $i,\ j$ cùng lẻ là 16 và các ô $i,\ j$ cũng chẵn là 9. Hơn nữa mỗi hình chữ L phủ nhiều nhất 1 số 1 ở ô $i,\ j$ chẵn. Do đó, ta thấy cần ít nhất 16 hình chữ L để phủ bảng. Ta có thể chỉ ra một cách phủ hình vuông bởi 16 hình chữ L như sau

1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1

Phần còn lại ta lấy đối xứng. Vậy $n = 3$ thì ta có dáp số là 16.

Xét trường hợp tổng quát, tương tự như trên ta thấy có $(n+1)^2$ số 1 nằm ở các ô $(i;j)$ với $i,\ j$ lẻ. Do đó, số hình chữ L cần dùng ít nhất là $(n+1)^2$. Phần còn lại là chỉ ra cách phủ bởi $(n+1)^2$ số hình chữ L.

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp là số hình chữ L ít nhất cần dùng là $(n+1)^2$. Thật vậy, với bảng $(2n+1) \times (2n+1)$ ô vuông ta xét các ô vuông vị trí (i,j) với $i,\ j$ lẻ. Rõ ràng các ô đó chứa số 1 và mỗi hình chữ L chỉ chứa được một ô.

Mặt khác số các ô vuông vị trí (i, j) với $i,\ j$ lẻ là $(n+1)^2$. Vì vậy số hình chữ L cần dùng tối thiểu là $(n+1)^2$.

Ta sẽ chứng minh có thể dùng $(n+1)^2$ để phủ được theo yêu cầu của bài toán. Khi $n = 3$ ta dễ thấy phủ được bảng ô vuông 7×7 bằng 16 hình chữ L.

Cách vẽ như ở bảng bên dưới (thể hiện 8 hình chữ L ở phần trên, phần còn dưới làm tương tự bằng cách lấy đối xứng qua ô ở vị trí $(4; 4)$).

1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1

Giả sử với bảng $(2n+1)(2n+1)$ có thể phủ được bởi $(n+1)^2$ hình chữ L thỏa mãn. Xét bảng $(2n+3)(2n+3)$, chia bảng này thành 4 bảng con đó là

$$(2n+1) \times (2n+1); 2 \times 2; 2 \times (2n+1); (2n+1) \times 2.$$

Ta thấy mỗi bảng $(2n+1) \times 2$ và $2 \times (2n+1)$ có thể phủ được bằng $n+1$ hình chữ L, cụ thể như sau:

Đối với hình $2 \times (2n+1)$ chia làm 2 phần gồm 1 hình 2×3 và $(n-1)$ hình 2×2. Hình 2×3 phủ bởi 2 hình chữ L; mỗi hình 2×2 phủ bởi 1 hình chữ L, như vậy có $n+1$ hình chữ L phủ hết các chữ số 1 của hình $2 \times (2n+1)$.

Tương tự cho hình $(2n+1) \times 2$.

Bảng 2×2 có thể phủ được bằng một hình chữ L. Do đó theo giả thiết quy nạp thì số hình chữ L có thể dùng để phủ là

$$(n+1)^2 + 2(n+1) + 1 = (n+2)^2.$$

Do đó ta có điều phải chứng minh. Kết luận $k = (n+1)^2$. □

0.3. Bài tập

Bài tập 1. Cho tập hợp A gồm 100 số nguyên dương từ số 1 đến số 100. Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất sao cho mọi cách chọn ra k phần tử tập hợp A thì trong đó luôn có ba số là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Bài tập 2. Cho tập A gồm 16 số nguyên dương đầu tiên. Hãy tìm số nguyên dương k nhỏ nhất có tính chất: Trong mỗi tập con có k phần tử của A đều tồn tại hai số phân biệt $a,\ b$ sao cho $a^2 + b^2$ là số nguyên tố.

Bài tập 3. Cho tập hợp và M là tập hợp con của tập X có tính chất T nếu: tích của 3 phần tử phân biệt bất kì trong M đều không là số chính phương. Tìm số phần tử lớn nhất của M.

Bài tập 4. Cho tập hợp $X = \{1, 2, 3, ..., 16\}$ và M là tập hợp con của tập X có tính chất T nếu: M không chứa ba phần tử nào đôi một nguyên tố cùng nhau. Tìm số phần tử lớn nhất của M.

Bài tập 5. Cho tập hợp $M = \{1, 2, ..., n\}, n \geq 2$. Hãy tìm số m nhỏ nhất sao cho trong mỗi tập con chứa m phần tử của M đều tồn tại ít nhất hai số $a,\ b$ mà số này là bội của số kia.

Bài tập 6 (Ninh Bình). Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho nếu $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n$ là n số phân biệt tùy ý được chọn từ tập $X = \{1;\ 2; \ldots;\ 17\}$ ta luôn tìm được số nguyên dương k sao cho phương trình $a_i - a_j = k$ có ít nhất k nghiệm.

Bài tập 7. Cho tập hợp $X = \{2,\ 3,\ 4, \ldots,\ 2014\}$. Tìm số nguyên dương nhỏ nhất n sao cho với mọi cách chọn n số nguyên tố cùng nhau từ tập X thì ta luôn chọn được ít nhất một số nguyên tố.

Bài tập 8 (SP Hà Nội 2014-2015). Một bộ ba số nguyên dương $(x;\ y;\ z)$ được gọi là một bộ ba ***Pythagore*** nếu $x^2 + y^2 = z^2$. Tìm số k nhỏ nhất sao cho mỗi tập con gồm k phần tử của tập $S = \{1, 2, 3, \ldots, 25\}$ luôn có ba phần tử tạo thành một bộ ba ***Pythagore***.

Bài tập 9 (Brasil 2015). Cho tập $S = \{1, 2, ..., 6n\}, n \geq 2$. Tìm số nguyên dương k lớn nhất sao cho khẳng định sau đúng: mỗi tập con A của S , $|A| = 4n$, có ít nhất k cặp (a, b) , $a < b$ và $a \mid b$.

Bài tập 10. Cho X là một tập con của tập $\{1, 2, 3, ..., 10000\}$, sao cho nếu a, b nằm trong X thì ab không nằm trong X. Tìm số phần tử lớn nhất của tập X.

Bài tập 11. Cho A là một tập con của tập hợp $\{1; 2; 3; ...; 100\}$, A có phần tử nhỏ nhất là 1 và phần tử lớn nhất là 100. Giả sử A có tính chất: Với mỗi phần tử x của A, $x \neq 1$ thì x hoặc bằng tổng của hai phần tử thuộc A hoặc bằng hai lần một phần tử thuộc A. Tìm số phần tử nhỏ nhất có thể của tập hợp A.

Bài tập 12. Cho A là tập con của tập $X = \{1;\ 2;\ 3; \ldots;\ 2018\}$ sao cho với hai số $a_i,\ a_j \in A$ mà $a_i \neq a_j$ thì tồn tại đúng một tam giác cân có độ dài các cạnh là $a_i,\ a_j$. Hỏi tập A có nhiều nhất bao nhiêu phần tử ?

Bài tập 13. Cho A là tập con của tập các số nguyên dương thỏa mãn: với mọi $x,\ y \in A$ mà $x \neq y$ thì ta có $|x - y| \geq \dfrac{xy}{25}$. Tìm số phần tử lớn nhất của tập A?

Bài tập 14 (Hà Tĩnh Ngày 1-2015). Cho tập S là tập hợp tất cả các bộ số, mỗi bộ gồm 2014×2014 số thực bất kỳ thuộc đoạn $[-1;\ 1]$ và có tổng bằng 0. Xét một bảng ô vuông kích thước 2014×2014. Tìm số dương k nhỏ nhất sao cho nếu điền bất kỳ một bộ số thuộc tập S vào bảng, mỗi ô một số thì tồn tại ít nhất một hàng hoặc một cột có giá trị tuyệt đối của tổng các số trên hàng đó hoặc trên cột đó không vượt quá k.

Bài tập 15. Giả sử S là tập con của tập $A = \{1;\ 2;\ 3; \ldots;\ 14;\ 15\}$ thỏa mãn: tích 3 phần tử bất kỳ thuộc S không là số chính phương. Tìm số phần tử lớn nhất của S.

Bài tập 16. Trong mặt phẳng cho 100 điểm được tô bởi hai màu đỏ và trắng sao cho, mỗi điểm tô màu đỏ là tâm của một đường tròn đi qua ít nhất ba điểm màu trắng. Hỏi số điểm trắng ít nhất là bao nhiêu?

Bài tập 17. Một tập A gồm các số nguyên dương được gọi là "đều", nếu sau khi bỏ đi một phần tử bất kì thì ta có thể chia các phần tử còn lại thành hai tập có tổng các phần tử bằng nhau. Tìm số phần tử nhỏ nhất của một tập "đều".

Bài tập 18. Cho $X = \{1;\ 2; \ldots;\ 2013\}$ và $A \subset X,\ |A| = n$. Tìm n nhỏ nhất sao cho với mọi cách chọn tập A ta luôn tìm được $a,\ b \in A : \dfrac{a}{b} = 3$.

Bài tập 19 (China 2001). Tìm số nguyên dương m nhỏ nhất sao cho với mọi tập con A của tập $X = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 2001\}$ đều có hai phần tử $a,\ b$ (không nhất thiết phân biệt) thỏa $a + b = 2^n$ với n là số nguyên dương nào đó.

Bài tập 20 (P33). Hỏi trên mặt phẳng, có thể vẽ được nhiều nhất bao nhiêu tam giác mà hai tam giác bất kì (trong số đó) đều có đúng một đỉnh chung và không có điểm nào là đỉnh chung của tất cả các tam giác.

Bài tập 21 (PTNK 2017-2018). Gọi S là tập con của tập $X = \{1,\ 2, \cdots,\ 2017\}$ sao cho S không chứa hai phần tử mà phần tử này chia hết cho phần tử kia và cũng không chứa hai phần tử nguyên tố cùng nhau. Tìm số phần tử lớn nhất của S.

Bài tập 22. Cho một bảng ô vuông 2017×2019. Ta tô màu các ô vuông đơn vị của bảng bởi màu đỏ. Hỏi ta có thể tô nhiều nhất bao nhiêu ô vuông sao cho mội hình vuông 2×2 cả bảng chứa nhiều nhất 2 ô được tô màu?

SỐ CHÍNH PHƯƠNG TRONG BIỂU DIỄN CÁC SỐ NGUYÊN

Nguyễn Quang Minh
(Saint Joseph's Institution, Singapore)

GIỚI THIỆU

Không ít các nhà toán học kể từ thời của Diophantus đã băn khoăn với câu hỏi: những số nào có thể biểu diễn được dưới dạng tổng của hai số chính phương. Thế nhưng sau khi bài toán được giải quyết, mọi người lại đề ra một loạt câu hỏi liên quan đến biểu diễn số qua tổng các bình phương và bên cạnh các kết quả sâu sắc đã được khai phá, nhiều giả thuyết vẫn còn bỏ ngõ cho đến ngày nay. Trong bài viết này, xin được cùng bạn đọc lược lại một số kết quả căn bản liên quan đến chủ đề này.

1. Tổng hai số chính phương

Qua lá thư gửi ngày 9/12/1632, nhà toán học người Hà Lan A. Girard (1595 – 1632) tuyên bố rằng, mọi số nguyên tố có dạng $4n + 1$, số chính phương, tích của những số nguyên tố như vậy và các số chính phương, cũng như hai lần những số như vậy đều biểu diễn được dưới dạng tổng hai số chính phương. Ít lâu sau, trong một lá thư khác gửi cho Mersenne vào ngày 25/12/1640, Fermat nhìn lại kết quả trên và bổ sung thêm nhiều nhận xét liên quan. Ông cũng tuyên bố rằng đã chứng minh chặt chẽ kết quả ấy nhưng lại không ghi ra. Sau nhiều nỗ lực đáng kể, chứng minh đầu tiên thuộc về Euler và được công bố vào năm 1754. Trong phần này, sau khi làm quen với một số bài toán và bổ đề, ta sẽ khai phá nhận xét trên của Girard.

Ví dụ 1 (Putnam Mathematical Competition 2000). *Chứng minh rằng tồn tại vô số số nguyên n sao cho mỗi số $n, n+1$ và $n+2$ đều là tổng của hai số chính phương.*

Lời giải. Ta sẽ chứng minh rằng: với mọi số nguyên dương m không phải là số chính phương, tồn tại vô số bộ $m + 1$ số nguyên liên tiếp mà mỗi số trong đó là tổng của m số chính phương. Thật vậy, do phương trình Pell

$$x^2 - my^2 = 1$$

có nghiệm (x_n, y_n) (với $n \geqslant 0$) nên bộ số $(x_n^2 - 1, x_n^2, x_n^2 + 1, \dots, x_n^2 + m - 1)$ có tính chất như đề bài với mọi $n \geqslant 0$ (lưu ý rằng 0 được tính là một số chính phương). □

Ví dụ 2 (IMO Shortlist 1978). *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương* x, y, z *thoả mãn* $xy - z^2 = 1$, *luôn tồn tại các số nguyên không âm* a, b, c, d *sao cho*

$$x = a^2 + b^2, y = c^2 + d^2, z = ac + bd.$$

Từ đó chứng minh rằng mọi số nguyên tố $p = 4q + 1$ *luôn có thể biểu diễn dưới dạng tổng hai số chính phương.*

Lời giải. Xét số nguyên dương z_0. Giả sử mệnh đề đúng với mọi bộ ba số (x, y, z) (với $z < z_0$), ta sẽ chứng minh rằng nó cũng đúng với $z = z_0$.

Dễ thấy ta chỉ cần xét bộ số (x_0, y_0, z_0) với $z_0 > 1$ và $x_0 < y_0$. Đặt

$$x = x_0,\ y = x_0 + y_0 - 2z_0,\ z = z_0 - x_0.$$

Khi đó (x, y, z) là các số nguyên dương thoả mãn $xy - z^2 = 1$ và $z < z_0$. Theo giả thiết, tồn tại các số nguyên a,b,c,d sao cho

$$x = a^2 + b^2,\ y = c^2 + d^2,\ z = ac + bd.$$

Từ đó ta tính được

$$x_0 = a^2 + b^2,\ y_0 = (a + c)^2 + (b + d)^2,\ z_0 = a(a + c) + b(b + d).$$

Tiếp theo, nếu đặt $z = (2q)!$ và áp dụng định lý Wilson, ta có

$$\begin{aligned} z^2 = (2q)!(2q)(2q-1)\dots 1 &\equiv (2q)![-(2q+1)][-(2q+2)]\dots(-4q) \\ &\equiv (-1)^{2q}(4q)! \equiv -1 \pmod{p}. \end{aligned}$$

Vậy p là ước của $z^2 + 1$, do đó theo kết quả trên thì p có thể được biểu diễn dưới dạng tổng hai số chính phương. □

Nhận xét. Sử dụng các kiến thức liên quan đến vành số nguyên Gauss, ta chứng minh được kết quả tổng quát hơn như sau : Nếu a, b, c, d là các số nguyên dương sao cho $a^2 + b^2 = cd$, khi đó tồn tại các số nguyên x, y, z, w, t thoả mãn

$$a = t(xz - yw),\ b = t(xw + yz),\ c = t(x^2 + y^2),\ d = t(z^2 + w^2).$$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh bổ đề quan trọng sau của nhà toán học người Na Uy, Axel Thue (1863 – 1922).

Bổ đề 1 (Thue). *Nếu* p *là số nguyên tố và* a *là số nguyên không chia hết cho* p *thì phương trình đồng dư*

$$ax \equiv y \pmod{p}$$

có nghiệm $x_0,\ y_0$, *với* $0 < |x_0|,\ |y_0| < \sqrt{p}$.

Lời giải. Đặt $b = \lfloor\sqrt{p}\rfloor$ thì ta thấy rằng tồn tại $(b+1)^2 > p$ số nguyên có dạng $ax - y$, trong đó $x, y \in 0, 1, \ldots, b$. Vậy tồn tại hai cặp $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ sao cho

$$ax_1 - y_1 = ax_2 - y_2 \pmod{p}.$$

Đặt $x_0 = x_1 - x_2,\ y_0 = y_1 - y_2$. Khi đó

$$ax_0 \equiv y_0 \pmod{p},$$

và $0 < |x_0|, |y_0| < \sqrt{p}$. □

Bổ đề sau tổng quát hoá một trường hợp riêng có lẽ đã quen thuộc với nhiều bạn đọc.

Bổ đề 2. *Giả sử $p = (2k+1)2^t + 1$ là một số nguyên tố, với t là số nguyên dương và k là số tự nhiên. Nếu x, y là các số tự nhiên mà $x^{2^t} + y^{2^t} \vdots\, p$ thì x và y đều chia hết cho p.*

Lời giải. Giả sử x và y đều không chia hết cho p. Theo định lý Fermat nhỏ, ta có

$$x^{p-1} + y^{p-1} \equiv 2 \pmod{p}.$$

Mặt khác,

$$x^{p-1} + y^{p-1} = (x^{2^t})^{2k+1} + (x^{2^t})^{2k+1} \vdots\, x^{2^t} + y^{2^t} \vdots\, p,$$

dẫn đến mâu thuẫn. Ta hoàn tất chứng minh. □

Định lý 1 (Fermat). *Số nguyên tố p có thể biểu diễn được dưới dạng tổng của hai số chính phương khi và chỉ khi $p = 2$ hoặc $p \equiv 1 \pmod{4}$.*

Lời giải. Nếu $p = 2$ thì $p = 1^2 + 1^2$.

Ta thấy rằng, từ Bổ đề 2 cho trường hợp $t = 1$, số nguyên tố p không thể biểu diễn dưới dạng tổng của hai số chính phương nếu $p \equiv 3 \pmod{4}$.

Nếu $p = 4k + 1$ thì theo tiêu chuẩn Euler:

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} = 1,$$

hay tồn tại số nguyên a thoả mãn $a^2 \equiv -1 \pmod{p}$. Mặt khác, theo Bổ đề Thue thì tồn tại các số nguyên x, y, với $0 < |x_0|, |y_0| < \sqrt{p}$ và

$$ax \equiv y \pmod{p} \Rightarrow a^2x^2 \equiv -x^2 \equiv y^2 \pmod{p}.$$

Vậy $2p > (x^2 + y^2) \vdots\, p$, suy ra $p = x^2 + y^2$. Hoàn tất chứng minh. □

Có nhiều cách phân tích số nguyên tố dạng $4k + 1$ thành tổng hai bình phương, trong đó nhà toán học Gauss chỉ ra một cách xây dựng đơn giản vào năm 1825, dựa trên định lý sau.

Định lý 2. *Nếu $p = 4k + 1$ là số nguyên tố thì $p = x^2 + y^2$, với $0 < |x_0|, |y_0| < \sqrt{p}$ và*

$$x \equiv \frac{1}{2}\binom{2k}{k} \pmod{p}, \ y \equiv (2k)!x \pmod{p}.$$

Gauss đã không chứng minh điều này, và các chứng minh của Cauchy và Jacobsthal sau đó đều không đơn giản.

Tiếp theo, ta quan tâm đến số cách biểu diễn một số nguyên dương dưới dạng tổng hai số chính phương, và bắt đầu với đồng nhất thức mang nhiều ứng dụng sau.

Đồng nhất thức 1. Với x_1, x_2, y_1, y_2, d là các số thực thì

$$(x_1^2 + dy_1^2)(x_2^2 + dy_2^2) = (x_1x_2 \pm dy_1y_2)^2 + d(x_1y_2 \mp x_2y_1)^2.$$

Định lý 3. *Giả sử a, b là các số tự nhiên cho trước, khi đó không có quá một cách biểu diễn số nguyên tố p thành dạng $ax^2 + by^2$, với x, y là các số tự nhiên. Trường hợp $a = b = 1$ thì ta bỏ qua tính thứ tự của các thành phần.*

Lời giải. Giả sử số nguyên tố p có hai cách phân tích

$$p = ax^2 + by^2 = am^2 + bn^2,$$

trong đó x, y, m, n là các số tự nhiên. Ta nhận được

$$p^2 = (axm + byn)^2 + ab(xn - ym)^2 = (axm - byn)^2 + ab(xn + ym)^2.$$

Ngoài ra,

$$(axm + byn)(xn + ym) = mn(ax^2 + by^2) + xy(am^2 + bn^2) = p(mn + xy).$$

Vì vậy có ít nhất một thừa số ở vế trái của đẳng thức trên chia hết cho p.

Nếu $p \mid (axm + byn)$ thì ta suy ra $xn - ym = 0$ nên $p = axm + byn$, dẫn đến

$$px = ax^2m + byxn = m(ax^2 + by^2) = pm \Rightarrow x = m, \ y = n.$$

Nếu $p \mid (xn + ym)$ thì ta suy ra $axm - byn = 0$ và $p^2 = ab(xn + ym)^2$. Dễ thấy $a = b = 1$ nên $p = xn + ym$ và $xm - yn = 0$. Suy ra

$$px = x^2n + xym = n(x^2 + y^2) = pn \Rightarrow x = n, \ y = m.$$

Hoàn tất chứng minh. □

Bổ đề 3. *Số tự nhiên có dạng $4k + 1 > 1$ là số nguyên tố khi và chỉ khi nó có đúng một cách biểu diễn (không tính các hoán vị) dưới dạng tổng của hai số chính phương nguyên tố cùng nhau.*

Lời giải. Theo Định lý 1 và 3, điều kiện cần dễ dàng được chứng minh. Để chứng minh điều kiện đủ, ta chứng minh bổ đề sau.

Bổ đề 4. *Nếu hai số tự nhiên có dạng $4k + 1 > 1$ là tổng của hai số chính phương thì tích của chúng không thoả mãn các điều kiện của Bổ đề 3.*

Lời giải. Giả sử $m = a^2 + b^2$, $n = c^2 + d^2$, với a, b, c, d nguyên. Ta có

$$mn = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2.$$

Giả sử hai biểu diễn này chỉ sai khác thứ tự hạng tử thì $ac + bd = ad + bc$ hoặc $ac + bd = |ac - bd|$.

Trong trường hợp đầu, ta suy ra $a = b$ hoặc $c = d$, vô lý do m, n lẻ. Trong trường hợp sau, $ac + bd = ac - bd$ hoặc $ac + bd = bd - ac$. Cả hai đều chỉ ra hai số chính phương có tổng là mn không nguyên tố cùng nhau, trái với điều kiện trong Bổ đề 3. Bổ đề được chứng minh. □

Trở lại Bổ đề 3. Giả sử $s = 4k + 1 > 1$ thoả mãn các điều kiện trong Bổ đề 3 và là hợp số.

Gọi p là ước nguyên tố của s. Nếu p có dạng $4t + 3$, theo Định lý 1, hai số chính phương có tổng bằng s đều chia hết cho p nên không nguyên tố cùng nhau, trái với giả thiết. Vậy p có dạng $4t + 1$ và là tổng của hai số chính phương. Kết hợp với Bổ đề 4, ta suy ra điều mâu thuẫn với giả thiết. Bổ đề được chứng minh. □

Bổ đề 5. *Nếu p là số nguyên tố có dạng $4t + 1$ thì với $k = 1, 2, \ldots$ thì số p^k có đúng một cách biểu diễn thành tổng hai bình phương các số tự nhiên nguyên tố cùng nhau.*

Lời giải. Theo Bổ đề 3 thì bài toán đúng với $k = 1$.

Giả sử bổ đề đúng đến giá trị k nào đó. Khi đó tồn tại các số tự nhiên c, d nguyên tố cùng nhau thoả $p^k = c^2 + d^2$. Cũng tồn tại các số tự nhiên a, b nguyên tố cùng nhau mà $p = a^2 + b^2$. Vì vậy

$$p^{k+1} = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = (ad + bc)^2 + (ac - bd)^2.$$

Nếu mỗi số $ad - bc$ và $ac - bd$ đều chia hết cho p thì $cd(a^2 - b^2) \vdots p$. Do $p^k = c^2 + d^2$ và $(c, d) = 1$ nên $(c, p) = (d, p) = 1$ và $(a^2 - b^2) \vdots p$, cùng với $p = a^2 + b^2$, ta suy ra a, b cùng chia hết cho p, trái giả thiết.

Vậy ít nhất một trong hai số $ad - bc$ và $ac - bd$ không chia hết cho p. Giả sử số đó là $ad - bc$ thì $ac + bd$ cũng không chia hết cho p và chúng nguyên tố cùng nhau, cho ta cách biểu diễn cần tìm. Theo nguyên lý quy nạp thì bài toán đúng với mọi k nguyên dương.

Bây giờ giả sử số p^k nào đó có hai cách biểu diễn phân biệt. Đặt

$$p^k = a^2 + b^2 = c^2 + d^2,$$

với $(a, b) = (c, d) = 1$ và $a \geqslant b$, $c \geqslant d$, $a > c$. Ta có

$$p^{2k} = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = (ad + bc)^2 + (ac - bd)^2,$$

và

$$(ac + bd)(ad + bc) = (ab + cd)p^k.$$

Do đó có ít nhất một trong hai số $ac + bd$ và $ad + bc$ chia hết cho p. Nếu cả hai số đều chia hết cho p thì tương tự như trên, ta suy ra điều mâu thuẫn. Vậy có đúng một trong hai số chia hết cho p^k.

Nếu $(ac + bd) \vdots p^k$ thì $ad - bc = 0$, mà $(a, b) = (c, d) = 1$ nên $a = c$, vô lý. Tương tự với trường hợp còn lại. Bổ đề được chứng minh hoàn toàn. $\square$

Bổ đề 6. *Nếu m, n là các số tự nhiên lẻ nguyên tố cùng nhau và mỗi số là tổng của hai số chính phương nguyên tố cùng nhau thì tích của chúng có ít nhất hai cách biểu diễn thành tổng hai số chính phương nguyên tố cùng nhau (không tính các hoán vị).*

Lời giải. Giả sử m, n là các số tự nhiên lẻ nguyên tố cùng nhau và a, b, c, d là các số tự nhiên thoả mãn $(a, b) = (c, d) = 1$ và $m = a^2 + b^2$, $n = c^2 + d^2$, với $a \geqslant b$, $c \geqslant d$. Khi đó

$$mn = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = (ad + bc)^2 + (ac - bd)^2.$$

Dễ thấy các biểu diễn mn trên là phân biệt. Ta cần chứng minh $(ac + bd, ad - bc) = 1$ và $(ad + bc, ac - bd) = 1$.

Giả sử $ac + bd$ và $ad - bc$ có ước nguyên tố chung p. Vậy m hoặc n chia hết cho p. Giả sử m chia hết cho p thì từ đẳng thức

$$(ac + bd)(ad + bc) = cdm + abn,$$

ta thấy a hoặc b chia hết cho p. Lại có $m = a^2 + b^2$ nên a và b cùng chia hết cho p, vô lý. Tương tự cho các trường hợp còn lại. Bổ đề được chứng minh. $\square$

Từ các bổ đề trên, ta thu được định lý sau.

Định lý 4. *Số nguyên dương n có thể biểu diễn dưới dạng q hoặc $2q$, với q là tích các số nguyên tố có dạng $4m + 1$ khi và chỉ khi n là tổng của hai số chính phương nguyên tố cùng nhau.*

Các kết quả trên có dạng tổng quát như sau, nhưng do khuôn khổ bài viết, cách chứng minh có thể được tham khảo tại [2].

Định lý 5. *Đặt $r(n)$ là số cách biểu diễn số tự nhiên $n > 1$ thành tổng của hai số chính phương nguyên tố cùng nhau (không tính thứ tự thành phần). Khi đó*

$$r(n) = 0$$

nếu $n \vdots 4$ hoặc tồn tại số nguyên tố $p \equiv 3 \pmod 4$ là ước của n; nếu không thì

$$r(n) = 2^{d-1},$$

trong đó d là số ước nguyên tố lẻ phân biệt của n.

Định lý 6. *Đặt $n = 2^r \prod p_i^{s_i} \prod q_i^{t_i}$, với $p_i \equiv 1 \pmod 4$ và $q_i \equiv 3 \pmod 4$. Số n có thể biểu diễn được dưới dạng tổng hai số chính phương khi và chỉ khi t_i chẵn với mọi i.*

Lời giải. Giả sử n có thể biểu diễn dưới dạng tổng hai số chính phương và tồn tại t_i lẻ sao cho

$$n = x^2 + y^2 = q_i^{t_i} b,$$

với $(b, q_i) = 1$. Theo Bổ đề 2 thì $x = q_i x_1,\ y = q_i x_2$, dẫn đến $x_1^2 + y_1^2 = q_i^{t_i - 2} b$. Sau một số hữu hạn bước lặp lại, ta thu được

$$x_k^2 + y_k^2 = q_i b,$$

Dẫn đến điều vô lý.

Đặt $\mathbb{D} = \{n \mid n \in \mathbb{N}, n = x^2 + y^2\}$. Giả sử t_i chẵn với mọi i. Do $2 \in \mathbb{D},\ p_i \in \mathbb{D}$ nên theo Đồng nhất thức 1 thì tồn tại số nguyên x, y thoả mãn $x^2 + y^2 = 2^r \prod p_i^{s_i}$. Do t_i chẵn với mọi i nên $\prod q_i^{t_i} = h^2$ và $n = (xh)^2 + (yh)^2$, hoàn tất chứng minh. □

Ví dụ 3 (American Mathamatical Monthly). *Chứng minh rằng tồn tại dãy các số nguyên liên tiếp có độ dài lớn bất kì sao cho không có số nào là tổng của hai số chính phương.*

Lời giải. Do có vô hạn số nguyên tố có dạng $4k + 3$ nên với n lớn bất kì, tồn tại n số nguyên tố có dạng $4k + 3$, đặt là $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Theo Định lý Thặng dư Trung Hoa thì tồn tại x sao cho

$$\begin{cases} x \equiv p_1 - 1 \pmod{p_1^2} \\ x \equiv p_2 - 2 \pmod{p_2^2} \\ \ldots \\ x \equiv p_n - n \pmod{p_n^2} \end{cases}$$

Kết hợp với Định lý 6, ta thu được mỗi số $x + 1, x + 2, \ldots, x + n$ không thể biểu diễn dưới dạng tổng của hai số chính phương do $x + i$ chia hết cho p_i nhưng không chia hết cho p_i^2. □

Ví dụ 4 (Korean MO 2017). *Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho tồn tại số nguyên n và số nguyên dương k, m sao cho*

$$\frac{(mk^2 + 2)p - (m^2 + 2k^2)}{mp + 2} = n^2.$$

Lời giải. Sau một vài biến đổi đại số cơ bản, bài toán tương đương với việc tìm các số nguyên tố p sao cho tồn tại các số nguyên a,b,c với ít nhất hai trong ba số này không âm sao cho

$$p = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2 + abc}.$$

Ta sẽ chứng minh p không có dạng $4k + 3$. Cố định số nguyên tố p, ta giả sử (a, b, c) là một nghiệm của của phương trình trên với tổng $a + b + c$ nhỏ nhất. Viết lại dưới dạng phương trình bậc hai:

$$a^2 - (bcp)a + (b^2 + c^2 - 2p) = 0.$$

Nếu $abc = 0$, không mất tính tổng quát, cho $c = 0$ thì $p = \frac{a^2+b^2}{2}$, suy ra $p = 2$ (loại do không tồn tại m, k, n tương ứng) hoặc $p \equiv 1 \pmod 4$.

Nếu không, giả sử $a \geqslant b \geqslant c$. Trường hợp $c < 0$, dễ thấy $2 + abc > 0$, suy ra $(a,b,c) = (1,1,-1)$ và $p = 3$. Trường hợp $c > 0$ thì

$$a = \frac{pbc - \sqrt{(pbc)^2 - 4b^2 - 4c^2 + 8p}}{2}.$$

Do $a \geqslant b$ nên

$$pbc - \sqrt{(pbc)^2 - 4b^2 - 4c^2 + 8p} \geqslant 2b,$$
$$2b^2 + c^2 \geqslant 2p + pb^2c.$$

Do $b \geqslant c > 0$ nên

$$3b^2 \geqslant 2b^2 + c^2 > pb^2c,$$

suy ra $p = 2$ (loại do không tồn tại m, k, n tương ứng). Vậy $p = 3$ hoặc $p \equiv 1 \pmod 4$.

Với $(m,k,n) = (4,1,0)$ thì $p = 3$. Với $p \equiv 1 \pmod 4$ thì tồn tại các số nguyên dương x, y sao cho $x^2 + y^2 = p$. Ta chọn $(m,k,n) = (p(x^2 - y^2), x, y)$. Kết thúc bài toán. □

2. Các số nguyên tố có dạng $x^2 \pm ny^2$

Xác định các số nguyên tố có dạng $x^2 \pm ny^2$ là một vấn đề thú vị và không hề đơn giản, bạn đọc có thể đọc các nghiên cứu một cách chi tiết tại [5]. Trong phần này, xin chỉ đi qua các kết quả kinh điển với lời giải sơ cấp, và mở đầu là giả thuyết của Fermat trong một lá thư gửi cho Pascal vào năm 1654.

Định lý 7. *Số nguyên tố lẻ p có thể biểu diễn được dưới dạng $a^2 + 2b^2$ với duy nhất một cặp số tự nhiên (a,b) khi và chỉ khi $p \equiv 1, 3 \pmod 8$.*

Lời giải. Nếu $p = a^2 + 2b^2$ thì đặt b' là nghịch đảo modulo p của b, ta có

$$(ab')^2 \equiv -2(bb')^2 \equiv -2 \pmod p,$$

hay -2 là số chính phương modulo p. Áp dụng các tính chất của thặng dư bình phương:

$$1 = \left(\frac{-2}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \cdot (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} = (-1)^{\frac{(p-1)(p+5)}{8}}.$$

Từ đó ta suy ra được $p \equiv 1 \pmod 8$ hoặc $p \equiv 3 \pmod 8$.

Ngược lại, giả sử $p \equiv 1, 3 \pmod 8$. Khi đó tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho $n^2 \equiv -2 \pmod p$. Theo Bổ đề Thue thì tồn tại a, b nguyên với $0 < a, b < \sqrt{p}$ sao cho $(nb - a) \vdots p$, suy ra

$$(n^2b^2 - a^2) \vdots p \Rightarrow 3p > a^2 + 2b^2 = pk,\ k \in \{1, 2\}.$$

Nếu $k = 1$ thì ta có điều cần chứng minh. Nếu $k = 2$ thì b chẵn và $p = a^2 + 2\left(\frac{b}{2}\right)^2$.

Để chứng minh tính duy nhất của cặp số (a, b), giả sử tồn tại $a, b, a_0, b_0 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$p = a^2 + 2b^2 = a_0^2 + 2b_0^2,$$

và $nb - a = pw$, $nb_0 - a_0 = pz$, với $w, z \in \mathbb{Z}$. Theo Đồng nhất thức 1,

$$p^2 = (aa_0 + 2bb_0)^2 + 2(a_0b - ab_0)^2.$$

Vậy $0 < aa_0 + 2bb_0 \leqslant p$. Mặt khác,

$$aa_0 + 2bb_0 = (nb - pw)(nb_0 - pz) + 2bb_0 = bb_0(n^2 + 2) + p(pwz - nbz - wnb_0),$$

nên $(aa_0 + 2bb_0) \vdots p$, có nghĩa là $aa_0 + 2bb_0 = p$ và $a_0b - ab_0 = 0$. Từ đây dễ dàng thu được $a = a_0$ và $b = b_0$. Hoàn tất chứng minh. □

Nhận xét. Nếu p là số nguyên tố có dạng $8k - 1$ hoặc $8k - 3$ và $(a^2 + 2b^2) \vdots p$, thì a và b cùng chia hết cho p.

Từ đó ta đi đến định lý sau.

Định lý 8. *Số nguyên dương n có thể biểu diễn được dưới dạng $a^2 + 2b^2$ với a, b là các số nguyên khi và chỉ khi với mọi ước nguyên tố p của n mà $p \equiv 5, 7 \pmod 8$, số mũ của p trong phân tích n ra thừa số nguyên tố là số chẵn.*

Lời giải. Đặt $n = s^2m$ với m không có ước chính phương. Giả sử với mọi ước nguyên tố $p \equiv 5, 7 \pmod 8$ của n, số mũ của p trong phân tích n ra thừa số nguyên tố là số chẵn. Theo Định lý 7, mọi ước nguyên tố của m đều có dạng $x^2 + 2y^2$, nên theo Đồng nhất thức 1 thì ta có điều cần chứng minh.

Giả sử $n = x^2 + 2y^2$ với $(x, y) = d$. Xét ước nguyên tố p của n thoả $p \equiv 5, 7 \pmod 8$. Đặt $v_p(n) = c$ và $v_p(d) = r$. Ta sẽ chứng minh $c = 2r$ là số chẵn.

Đặt $x = da,\ y = db$. Khi đó $n = d^2(a^2 + 2b^2) = d^2t$, ta suy ra $v_p(t) = c - 2r$. Giả sử rằng $c > 2r$. Nếu p là ước của ab thì từ $(a^2 + 2b^2) \vdots p$, ta suy ra $(a, b) \geqslant p$, mâu thuẫn. Vậy p không là ước của ab.

Đặt $u = ab^{p-2}$ thì

$$b^2(u^2 + 2) \equiv (ab^{p-1})^2 + 2b^2 \equiv a^2 + 2b^2 \equiv 0 \pmod p.$$

Vậy $(u^2 + 2) \vdots p$ hay -2 là số chính phương modulo p, vô lý do $p \equiv 5, 7 \pmod 8$. Ta hoàn tất chứng minh. □

Định lý 9. *Số nguyên tố lẻ p có thể biểu diễn được dưới dạng $\pm p = a^2 - 2b^2$ với vô số cặp số nguyên (a, b) khi và chỉ khi $p \equiv 1, 7 \pmod 8$.*

Lời giải. Nếu $\pm p = a^2 - 2b^2$ và $p \equiv 3, 5 \pmod 8$ thì do a lẻ nên $b^2 \equiv 2, 3 \pmod 4$, vô lý. Tiếp tục, để ý rằng $p \equiv 1, 7 \pmod 8$ tương đương với 2 là số chính phương modulo p, tương tự như cách chứng minh Định lý 7, ta suy ra được $p = 2b^2 - a^2$. Mặt khác,

$$p = 2b^2 - a^2 = (a + 2b)^2 - 2(a + b)^2.$$

Tiếp theo, ta sử dụng hai dãy số của Theon Thành Smyrna (thế kỉ I-II), được biết đến là hai dãy số cạnh và đường chéo

$$s_1 = d_1 = 1, \quad s_{n+1} = s_n + d_n,\ d_{n+1} = 2s_n + d_n,\ \forall n \in N.$$

Bằng quy nạp, ta có $d_n^2 - 2s_n^2 = (-1)^n$. Do đó

$$p = (d_{2n}^2 - 2s_{2n}^2)(x^2 - 2y^2) = (d_{2n}x - 2s_2ny)^2 - 2(d_{2n}y + s_{2n}x)^2.$$

Vậy có vô số cách biểu diễn số nguyên tố p dưới mỗi dạng trên. □

Nhận xét. Nếu p là số nguyên tố có dạng $8k - 3$ hoặc $8k + 3$ và $(a^2 - 2b^2) \vdots p$, thì a và b cùng chia hết cho p.

Định lý 10. *Chứng minh rằng số nguyên tố p có thể biểu diễn dưới dạng $p = x^2 + 3y^2$, với x, y là các số nguyên khi và chỉ khi $p = 3$ hoặc $p \equiv 1 \pmod 3$.*

Lời giải. Dễ thấy rằng nếu $p = x^2 + 3y^2$ thì $p = 3$ hoặc $p \equiv 1 \pmod 3$.

Ngược lại, giả sử $p = 3$ hoặc là số nguyên tố có dạng $3k + 1$. Để ý rằng $3 = 0^2 + 3 \cdot 1^2$. Mặt khác, khi p là số nguyên tố có dạng $3k + 1$, tồn tại số nguyên a sao cho $a^2 \equiv -3 \pmod p$. Mặt khác, áp dụng Bổ đề Thue thì tồn tại x, y nguyên thoả mãn $0 < x, y < \sqrt{p}$ và $p \mid (a^2y^2 - x^2)$. Từ đó suy ra $4p > x^2 + 3y^2 = hp$, với $h \in \{1, 2, 3\}$.

Nếu $h = 1$ thì ta suy ra điều phải chứng minh. Nếu $h = 2$ thì $x^2 + 3y^2 = 2p \equiv 2 \pmod 3$, vô lý. Nếu $h = 3$ thì x chia hết cho 3 và $p = y^2 + 3\left(\frac{x}{3}\right)^2$. □

Bằng kiến thức toán cao cấp, các nhà toán học đã chứng minh được đinh lý sau.

Định lý 11. *Số nguyên dương n có thể biểu diễn dưới dạng $n = x^2 + 3y^2$, với x, y nguyên khi và chỉ khi mọi ước nguyên tố dạng $3k - 1$ của n đều có số mũ chẵn.*

Áp dụng Định lý 6, ta suy ra được định lý sau.

Định lý 12. *Số nguyên tố p có thể biểu diễn được dưới dạng $x^2 + 4y^2$, với x, y là các số tự nhiên khi và chỉ khi $p \equiv 1 \pmod 4$.*

Một số kết quả liên quan : Với x, y là các số nguyên dương và p, q là số nguyên tố thì:

$$\begin{aligned}
p = x^2 - 3y^2 &\quad\Leftrightarrow\quad p \equiv 1 \pmod{12}\\
p = 3x^2 - y^2 &\quad\Leftrightarrow\quad p \equiv 11 \pmod{12}\\
p = x^2 + 5y^2 &\quad\Leftrightarrow\quad p \equiv 1, 9 \pmod{20}\\
p = x^2 - 5y^2 &\quad\Leftrightarrow\quad p \equiv 1, 4 \pmod{5}\\
p = x^2 + 6y^2 &\quad\Leftrightarrow\quad p \equiv 1, 7 \pmod{24}\\
p = x^2 + 7y^2 &\quad\Leftrightarrow\quad p \equiv 1, 2, 4 \pmod{7}\\
p = x^2 + 15y^2 &\quad\Leftrightarrow\quad p \equiv 1, 4 \pmod{15}
\end{aligned}$$

và $p, q \equiv 3, 7 \pmod{20} \Rightarrow pq = x^2 + 5y^2$.

Ví dụ 5 (Korea TST 2014). *Cho $p > 5$ là số nguyên tố. Giả sử tồn tại số nguyên k sao cho $k^2 + 5$ chia hết cho p. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên m, n sao cho $p^2 = m^2 + 5n^2$.*

Lời giải. Ta sẽ chứng minh rằng tồn tại số nguyên h thoả mãn $(h^2 + 5) \vdots p^2$. Theo giả thiết, tồn tại số nguyên a sao cho $k^2 = ap - 5$. Đặt $h = k + pt$, với $t \in \mathbb{Z}$. Do

$$h^2 = ap - 5 + 2kpt + p^2t^2,$$

để $(h^2 + 5) \vdots p^2$, ta xác định t sao cho $(a + 2kt) \vdots p$. Dễ thấy t tồn tại do $(2k, p) = 1$.

Xét tập hợp

$$S = \{x + yh \mid 0 \leqslant x \leqslant \lfloor \sqrt[4]{5}p \rfloor, 0 \leqslant y \leqslant \lfloor \sqrt[4]{5}p \rfloor, x, y \in \mathbb{Z}\}.$$

Do $|S| > p^2$ nên tương tự cách chứng minh Bổ đề Thue, tồn tại các số nguyên m, n sao cho $m \equiv nh \pmod{p^2}$, kết hợp với $(h^2 + 5) \vdots p^2$, ta thu được $5p^2 > m^2 + 5n^2 \vdots p^2$.

Bằng cách xét modulo 5, ta có $m^2 + 5n^2 \neq 2p^2, 3p^2$. Nếu $m^2 + 5n^2 = p^2$ hoặc $4p^2$ thì lần lượt các cặp số (m, n) và $(\frac{m}{2}, \frac{n}{2})$ thoả mãn. □

3. Tổng ba số chính phương

Diophantus nêu lên giả thuyết rằng, mọi số nguyên có dạng $8m + 7$ đều không là tổng của ba số chính phương, và điều này được chứng minh bởi Descartes vào năm 1638. Fermat là người đầu tiên nêu lên rằng một số nguyên dương có thể biểu diễn được dưới dạng tổng của ba số chính phương khi và chỉ khi nó không có dạng $4^n(8m + 7)$. Legendre chứng minh điều này vào năm 1798, và Gauss làm gọn lại vào năm 1801. Ngoài ra, trong quyển Disquisitiones của mình, Gauss đi xa hơn bằng cách đếm số cách biểu diễn như vậy của một số nguyên bất kì. Cũng đáng chú ý rằng, vào năm 1957, sử dụng định lý Minkowski, Ankerny chứng minh lại định lý sau theo cách đơn giản hơn.

Định lý 13 (Gauss). *Một số nguyên dương có thể biểu diễn được dưới dạng tổng của ba số chính phương khi và chỉ khi nó không có dạng $4^n(8m + 7)$.*

Ví dụ 6. *Chứng minh rằng số tự nhiên là tổng ba bình phương các số hữu tỉ khi và chỉ khi nó là tổng ba bình phương các số nguyên.*

Lời giải. Giả sử số tự nhiên n là tổng ba bình phương các số hữu tỉ thì quy đồng các số hữu tỉ đó, ta có thể viết $m^2n = a^2 + b^2 + c^2$, với a, b, c, m là các số nguyên. Nếu $n = 4^l(8k + 7)$. với k, l là các số nguyên không âm thì $m^2n = 4^r(8t + 7)$ với r, t là các số nguyên không âm. Nhưng theo Định lý 13 thì điều này vô lý. Vậy n không có dạng $4^l(8k + 7)$ và là tổng của ba số chính phương. Điều kiện trong bài cũng là điều kiện đủ. □

Định lý 14. *Một số nguyên dương có dạng $a^2 + b^2 + 2c^2$ với a, b, c nguyên khi và chỉ khi nó không có dạng $4^k(16n + 14)$, với k, n là các số tự nhiên.*

Lời giải. Giả sử t là số nguyên không âm tuỳ ý thì theo Định lý 13, tồn tại x, y, z nguyên sao cho $4t + 2 = x^2 + y^2 + z^2$. Dễ thấy trong các số x, y, z, có đúng hai số lẻ và một số chẵn, giả sử x, y lẻ và z chẵn. Khi đó

$$2t + 1 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{z}{2}\right)^2.$$

Vậy mọi số lẻ đều có dạng $a^2 + b^2 + 2c^2$. Nếu $m \neq 4^k(8m + 7)$ thì $m = x^2 + y^2 + z^2$ theo Định lý 13. Vì vậy

$$2m = (x + y)^2 + (x - y)^2 + 2z^2.$$

Còn nếu $m = 4^k(16n + 14) = x^2 + y^2 + 2z^2$ thì x, y cùng tính chẵn lẻ và

$$4^k(8n + 7) = (x + y)^2 + (x - y)^2 + z^2,$$

điều này vô lý. □

Ta cũng có hai định lý tương tự sau.

Định lý 15. *Một số nguyên dương có dạng $a^2 + 2b^2 + 2c^2$, với a, b, c nguyên khi và chỉ khi nó không có dạng $4^k(8n + 7)$, với k, n là các số tự nhiên.*

Định lý 16. *Một số nguyên dương có dạng $a^2 + 2b^2 + 4c^2$, với a, b, c nguyên khi và chỉ khi nó không có dạng $4^k(16n + 14)$, với k, n là các số tự nhiên.*

Tất cả các bộ số nguyên dương (a, b, c), với $a \leqslant b \leqslant c$ sao cho mọi số lẻ đều có thể biểu diễn dưới dạng $ax^2 + by^2 + cz^2$ là $(1, 1, 2)$, $(1, 2, 3)$ và $(1, 2, 4)$. Hơn nữa,

Định lý 17. *Không tồn tại các số nguyên dương (a, b, c), với $a \leqslant b \leqslant c$ sao cho mọi số nguyên dương đều có thể biểu diễn dưới dạng $ax^2 + by^2 + cz^2$, trong đó x, y, z là các số nguyên.*

Lời giải. Thật vậy, để biểu diễn được số 1 như yêu cầu thì $a = 1$, để biểu diễn số 2 thì phải có $b = 1$ hoặc $b = 2$. Lại thấy, $x^2 + y^2 + cz^2$ khác 7 nếu $c = 1$, khác 14 nếu $c = 2$, khác 6 nếu $c = 3$ và khác 3 nếu $c > 3$. Hơn nữa, $x^2 + 2y^2 + cz^2$ khác 7 nếu $c = 2$, khác 10 nếu $c = 3$ hoặc 5, khác 14 nếu $c = 4$ và khác 5 nếu $c > 5$. Hoàn tất chứng minh. □

Trong phần còn lại của chuyên mục, xin được giới thiệu tới bạn đọc hai phương pháp vô cùng hữu dụng để biết xem một bộ số (a, b, c) có thể biểu diễn những số nguyên nào.

Bổ đề 7. *Cho k là số nguyên dương. Đặt $a_1, \ldots, a_k$ là các số nguyên dương với $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_k$. Xét*

$$q := a_1x_1^2 + \ldots + a_kx_k^2, \quad q_1 = 0,$$

và với $i = 2, \ldots, k$ thì

$$q_i := a_1x_1^2 + \ldots + a_{i-1}x_{i-1}^2.$$

Nếu dạng q biểu diễn số nguyên dương n nhưng tồn tại $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ sao cho q_i không biểu diễn được số n thì $a_i \leqslant n$.

Lời giải. Tồn tại các số nguyên $y_1, \ldots, y_k$ sao cho

$$n = a_1 y_1^2 + \ldots + a_k y_k^2.$$

Xét chỉ số i và số nguyên dương n sao cho dạng q biểu diễn số n nhưng q_i thì không. Theo giả thiết bài toán thì $(y_i, \ldots, y_k) \neq (0, \ldots, 0)$, do đó

$$n = a_1 y_1^2 + \ldots + a_k y_k^2 \geqslant a_i y_i^2 + \ldots + a_k y_k^2 \geqslant a_i(y_i^2 + \ldots + y_k^2) \geqslant a_i.$$

Bổ đề được chứng minh. □

Định lý 18. *Nếu với một bộ ba số nguyên dương (a, b, c), các số $1, 3, 5$ và 15 có thể biểu diễn dưới dạng $ax^2 + by^2 + cz^2$, trong đó x, y, z là các số nguyên thì mọi số lẻ cũng có thể biểu diễn dưới dạng này.*

Lời giải. Xét các số nguyên dương a, b, c, với $a \leqslant b \leqslant c$ sao cho dạng $ax^2 + by^2 + cz^2$ biểu diễn các số $1, 3, 5$ và 15. Do 1 có dạng trên nên theo Bổ đề 7, $a = 1$.

Lại do 3 có dạng $x^2 + by^2 + cz^2$ nên theo Bổ đề 7, $1 \leqslant b \leqslant 3$. Khi $b = 1$, do 3 có dạng $x^2 + y^2 + cz^2$ nên theo Bổ đề 7, $1 \leqslant c \leqslant 3$. Khi $b = 2$, do 5 có dạng $x^2 + 2y^2 + cz^2$ nên theo Bổ đề 7, $2 \leqslant c \leqslant 5$. Khi $b = 3$ thì 5 có dạng có dạng $x^2 + 3y^2 + cz^2$ nên theo Bổ đề 7, $3 \leqslant c \leqslant 5$. Vậy ta thu được 10 bộ số (a, b, c), loại bỏ các không biểu diễn đủ cả bốn số $1, 3, 5$ và 15, ta còn lại ba dạng

$$x^2 + y^2 + 2z^2,\ x^2 + 2y^2 + 3z^2,\ x^2 + 2y^2 + 4z^2.$$

Nhưng theo nhận xét trên thì ta suy ra điều phải chứng minh. □

Bằng phương pháp tương tự, ta cũng có định lý sau.

Định lý 19. *Nếu với một bộ ba số nguyên dương (a, b, c), các số $2, 6, 10, 14$ và 30 có thể biểu diễn dưới dạng $ax^2 + by^2 + cz^2$, trong đó x, y, z là các số nguyên thì mọi số tự nhiên chia 4 dư 2 cũng có thể biểu diễn dưới dạng này.*

4. Biểu diễn số dạng $a^2 + b^2 - dc^2$

Sau đây, ta quan tâm đến một trường hợp đặc biệt của biểu diễn số qua các bình phương. Ta gọi một số nguyên dương d là đặc biệt nếu mọi số nguyên đều có thể biểu diễn dưới dạng $m = a^2 + b^2 - dc^2$, trong đó a, b, c là các số nguyên dương.

Bổ đề 8. *Mọi số đặc biệt đều không chia hết cho 4.*

Lời giải. Giả sử d là một số đặc biệt chia hết cho 4. Khi đó tồn tại các số nguyên dương a, b, c sao cho $a^2 + b^2 - dc^2 = 3$, suy ra $a^2 + b^2 \equiv 3 \pmod 4$, trái với Định lý 6. □

Bổ đề 9. *Mọi số đặc biệt đều là tổng của hai số chính phương.*

Lời giải. Xét số đặc biệt d. Tồn tại các số nguyên dương a, b, c sao cho

$$a^2 + b^2 = d(c^2 + 1).$$

Để ý rằng $d(c^2 + 1)$ và $c^2 + 1$ đều là tổng của hai số chính phương, nên suy ra từ Định lý 6, d cũng là tổng của hai số chính phương. □

Bổ đề 10. *Mọi số đặc biệt đều không có ước nguyên tố dạng $4k + 3$.*

Lời giải. Giả sử $p = 4k + 3$ là ước nguyên tố của số đặc biệt d. Do d là tổng của hai số chính phương theo Bổ đề 9, $d \vdots p^2$. Lại tồn tại các số nguyên dương a, b, c sao cho

$$a^2 + b^2 - dc^2 = p,$$

nên suy ra $(a^2 + b^2) \vdots p^2$. Do đó $p \vdots p^2$, vô lý. Vậy điều giả sử là sai, d không có ước nguyên tố dạng $4k + 3$. □

Dựa vào các bổ đề trên, ta đã chứng minh rằng : nếu một số nguyên là đặc biệt thì nó là 1, hoặc tích của các số nguyên tố dạng $4m + 1$, hoặc là hai lần những số như vậy. Ta sẽ chứng minh chiều ngược lại cũng đúng, tức là : nếu d có dạng q hoặc $2q$, trong đó $q = 1$ hoặc q là tích của các số nguyên tố dạng $4m + 1$ thì d là số đặc biệt.

Thật vậy, ta có $d = 1$ là số đặc biệt dựa vào hai đồng nhất thức sau:

$$2k - 1 = (2t)^2 + (2t^2 - k)^2 - (2t^2 - k + 1)^2,$$

$$2k = (2t^2 - 2t - k)^2 + (2t - 1)^2 - (2t^2 - 2t - k + 1)^2.$$

Xét $d > 1$ lẻ. Theo Định lý 4 thì $d = x^2 + y^2$, với $(x, y) = 1$. Đặt $a = xk + \alpha$, $b = yk + \beta$, $c = k$, trong đó α, β là các số nguyên. Ta có

$$a^2 + b^2 - dc^2 = 2(x\alpha + y\beta)k + \alpha^2 + \beta^2.$$

Xét cặp nghiệm (α, β) của phương trình

$$x\alpha + y\beta = 1.$$

Phương trình trên có một nghiệm nguyên (α_0, β_0). Ta đặt $\alpha_1 = \alpha_0 + y$ và $\beta_1 = \beta_0 - x$, thì (α_1, β_1) là một nghiệm khác. Ta lại chứng minh được $\alpha_0^2 + \beta_0^2 \not\equiv \alpha_1^2 + \beta_1^2 \pmod 2$. Xét hai đồng nhất thức

$$(xk + \alpha_i)^2 + (yk + \beta_i)^2 - (x^2 + y^2)k^2 = 2k + \alpha_i^2 + \beta_i^2,$$

trong đó $i = 0, 1$, biểu diễn mọi số nguyên chẵn lẫn lẻ, nên mọi số nguyên đều có dạng $a^2 + b^2 - dc^2$, với a, b, c nguyên. Để tránh trường hợp a, b hoặc c bằng 0, ta đặt $\alpha_n = \alpha_0 + ny$ và $\beta_n = \beta_0 - nx$ để tạo ra nhiều đồng nhất thức. Với n đủ lớn thì những giá trị m không thoả mãn có thể được biểu diễn với các đồng nhất thức mới này.

Bây giờ xét d chẵn. Lại theo Định lý 4 thì $d = x^2 + y^2$, với $(x, y) = 1$ và x, y lẻ. Tương tự trường hợp trước, nếu $x\alpha + y\beta = 1$ thì $\alpha^2 + \beta^2$ lẻ và mọi số lẻ đều có thể biểu diễn được. Xét phương trình tuyến tính

$$x\alpha + y\beta = 2.$$

Chọn một cặp nghiệm (α_0, β_0) và xây dựng cặp nghiệm (α_1, β_1) theo cách tương tự, ta chứng minh được

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 = \alpha_0^2 + \beta_0^2 + 2 \pmod 4.$$

Ta có hai đồng nhất thức

$$(xk + \alpha_i)^2 + (yk + \beta_i)^2 - (x^2 + y^2)k^2 = 2k + \alpha_i^2 + \beta_i^2,$$

trong đó $i = 0, 1$, biểu diễn mọi số nguyên có dạng $4m$ và $4m + 2$, nên mọi số nguyên đều có dạng $a^2 + b^2 - dc^2$, với a, b, c nguyên. Các trường hợp ngoại lệ có thể được giải quyết tương tự như khi $d = q$.

Kết hợp các kết quả trên, ta đi đến kết luận sau.

Định lý 20. *Một số nguyên là đặc biệt khi và chỉ khi nó có dạng q hoặc $2q$, trong đó $q = 1$ hoặc q là tích của các số nguyên tố dạng $4m + 1$.*

5. Tổng bốn số chính phương

Bachet vào năm 1621 lần đầu tiên nêu giả thuyết rằng mọi số tự nhiên đều là tổng của bốn số chính phương, và kiểm tra điều này đến số 325. Mười lăm năm sau, Fermat tuyên bố rằng ông đã tìm ra cách chứng minh, nhưng như thường lệ, không đưa ra bất kì chi tiết nào. Phải đến năm 1772, Lagrange chứng minh một cách đầy đủ giả thuyết trên, đồng thời thừa nhận ông có được ý tưởng từ Euler, người đã dành 40 năm vật lộn với bài toán. Một năm sau đó, Euler công bố cách chứng minh đơn giản hơn. Trước hết, ta hãy cùng đến với một số kết quả cần thiết sau.

Đồng nhất thức 2. Với x, y, z, u, a, b, c, d là các số thực thì

$$(x^2 + y^2 + z^2 + w^2)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = r^2 + s^2 + t^2 + u^2,$$

trong đó

$$\begin{aligned} r &= xa + yb + zc + ud, \\ s &= xb - ya + zd - uc, \\ t &= xc - yd - za + ub, \\ u &= xd + yc - zb - ua. \end{aligned}$$

Thực ra, trong một bài viết vào ngày 4/5/1748, Euler chỉ ra nhiều đồng nhất thức như vậy, với Đồng nhất thức 2 chỉ là một trường hợp đặc biệt. Vào năm 1751, Euler tiếp tục với chứng minh bổ đề sau.

Bổ đề 11. *Với p là số nguyên tố, luôn tồn tại $x, y \in \mathbb{Z}$ sao cho p là ước của $x^2 + y^2 + 1$.*

Lời giải. Xét hai tập hợp $A = \{x^2 \mid x = 0, 1, \ldots, \frac{p-1}{2}\}$ và $B = \{-y^2-1 \mid x = 0, 1, \ldots, \frac{p-1}{2}\}$. Dễ thấy mỗi phần tử trong cùng một tập hợp đều phân biệt theo modulo p, mà $|A|+|B| = p+1$ nên tồn tại $x, y \in \{0, 1, \ldots, \frac{p-1}{2}\}$ sao cho $x^2 + y^2 + 1 \equiv 0 \pmod p$. □

Định lý 21. *Mọi số nguyên tố p đều có thể biểu diễn dưới dạng tổng của 4 số chính phương.*

Lời giải. Với nhận xét rằng $2 = 0^2 + 0^2 + 1^2 + 1^2$, ta chỉ cần xét khi p lẻ. Đặt k là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho kp là tổng của bốn số chính phương, giả sử

$$kp = x^2 + y^2 + z^2 + w^2.$$

Theo cách chứng minh Bổ đề 11, ta suy ra được $k < p$. Ta sẽ chỉ ra $k = 1$.

Nếu k là số chẵn thì ra có thể sắp xếp lại các số x, y, z, w sao cho

$$x \equiv y \pmod 2, \quad z \equiv w \pmod 2.$$

Ta thấy

$$\frac{k}{2} \cdot p = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{z-w}{2}\right)^2 + \left(\frac{z+w}{2}\right)^2,$$

mâu thuẫn với cách chọn k.

Giả sử k là số lẻ lớn hơn 1. Khi đó ta chọn các số nguyên a, b, c, d sao cho

$$a \equiv x \pmod k,\ b \equiv y \pmod k,\ c \equiv z \pmod k,\ d \equiv w \pmod k,$$

và $|a|, |b|, |c|, |d| < \frac{k}{2}$. Khi đó

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = nk,$$

với n là số nguyên không âm. Ta có

$$0 \leqslant nk = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 < 4\left(\frac{k}{2}\right)^2 = k^2.$$

Ta không thể có $n = 0$ vì nếu $n = 0$ thì x, y, z, w là bội số của k, suy ra p chia hết cho k, vô lý. Từ đó suy ra $0 < n < k$. Kết hợp hai đẳng thức

$$k^2np = (x^2 + y^2 + z^2 + w^2)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = r^2 + s^2 + t^2 + u^2,$$

với

$$\begin{aligned} r &= xa + yb + zc + wd, \\ s &= xb - ya + zd - wc, \\ t &= xc - yd - za + wb, \\ u &= xd + yc - zb - wa. \end{aligned}$$

Ta thấy rằng r, s, t, u đều chia hết cho k và

$$np = \left(\frac{r}{k}\right)^2 + \left(\frac{s}{k}\right)^2 + \left(\frac{t}{k}\right)^2 + \left(\frac{u}{k}\right)^2,$$

mâu thuẫn với cách chọn k. Từ đó suy ra $k = 1$, hoàn tất chứng minh. □

Từ Định lý 21 và Đồng nhất thức 2, ta thu được kết quả số học kinh điển sau.

Định lý 22 (Legendre). *Mọi số nguyên dương đều có thể biểu diễn dưới dạng tổng của 4 số chính phương.*

Định lý 23. *Mọi số tự nhiên đều có dạng $x^2 + y^2 + z^2 + 4t^2$, với x, y, z, t nguyên.*

Lời giải. Ta chỉ cần chứng minh định lý với các số nguyên dương n không chia hết cho 4. Theo Định lý 22 thì tồn tại x, y, z, w sao cho $n = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$. Dễ thấy tồn tại một số chẵn trong các số x, y, z, w và suy ra điều cần chứng minh. □

Định lý 24. *Mọi số tự nhiên đều có dạng $x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4t^2$, với x, y, z, t nguyên.*

Lời giải. Dễ thấy Định lý đúng với các số $0, 1, 2$. Ta chỉ cần chứng minh định lý với các số nguyên tố $p > 2$. Lần lượt xét $z = t = 0$ và $y = z = 0$, ta thấy rằng mọi số nguyên tố chia 8 dư $1, 3, 5$ đều có dạng trên theo Định lý 7 và Định lý 12. Xét $p \equiv 7 \pmod 8$. Theo Định lý 22 thì tồn tại x, y, z, t nguyên sao cho

$$p = x^2 + y^2 + z^2 + t^2.$$

Ta có thể giả sử y, z lẻ và t chẵn, khi đó

$$p = x^2 + 2\left(\frac{y-z}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{y+z}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{t}{2}\right)^2.$$

Hoàn tất chứng minh. □

Định lý 25. *Mọi số tự nhiên đều có dạng $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2$, với x, y, z, t nguyên.*

Lời giải. Giả sử n là số tự nhiên thì theo Định lý 22, tồn tại các số nguyên a, b, c, d mà

$$n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Bằng phép đổi dấu thích hợp, ta có thể giả sử $a + b + c = 3z$ chia hết cho 3. Lại giả sử trong ba số a, b, c thì $a + b = 2k$ là số chẵn. Ta có

$$3(a^2 + b^2 + c^2) = (a + b + c)^2 + 2\left(\frac{a+b}{2} - c\right)^2 + 6\left(\frac{a-b}{2}\right)^2,$$

Ta lại có $k - c = 3t$ chia hết cho 3 và đặt $a - b = 2y$. Viết lại ta được

$$a^2 + b^2 + c^2 = 3z^2 + 6t^2 + 2y^2,$$

nên $n = d^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2$. □

Hai nhà toán học Ramanujan và Dickson xác định được có tất cả 54 bộ số nguyên dương (a, b, c, d) sao cho mọi số tự nhiên đều có dạng $ax^2+by^2+cz^2+dt^2$. Ngoài các bộ số được giới thiệu ở trên, một vài bộ số khác là $(1, 1, 2, 2)$, $(1, 1, 3, 3)$, $(1, 2, 4, 8)$, $(1, 2, 5, 10)$, $(1, 1, 2, 8), \ldots$

6. Tổng các bình phương dương

Ta nói một số có tính chất S_m nếu nó là tổng bình phương của m số nguyên dương. Sử dụng Định lý 13, ta chứng minh được định lý sau.

Định lý 26. *Số nguyên dương n có tính chất S_4 khi và chỉ khi n không thuộc dãy các số*

$$1, 3, 5, 9, 11, 17, 29, 41, 2 \cdot 4^h, 6 \cdot 4^h, 14 \cdot 4^h,$$

với $h = 0, 1, 2, \ldots$

Do khuôn khổ bài viết nên bạn đọc có thể tham khảo lời giải tại [6]. Tiếp theo, chú ý rằng $3, 9, 11, 17, 29, 41, , 6 \cdot 4^h, 14 \cdot 4^h$ đều có có tính chất S_3 còn $1, 5$ và các số 2^n, với $n = 1, 2, \ldots$ thì không.

Định lý 27. *Số nguyên dương n có tính chất S_3 hay S_4 khi và chỉ khi nó không phải là số $1, 5$ và $2 \cdot 4^h$, với $h = 0, 1, 2, \ldots$*

Định lý 28. *Tất cả các số tự nhiên không có tính chất S_5 là*

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 33.$$

Lời giải. Từ Định lý 26 thì mọi số lẻ lớn hơn 41 đều có tính chất S_4. Vậy mọi số chẵn lớn hơn 42 và mọi số lẻ lớn hơn 45 đều có tính chất S_5. Ta cũng có các số $4, 7, 10, 12, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 30, 31, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 42, 43, 44$ đều có tính chất S_4. Do đó cộng thêm 1 hoặc 4 vào các số đó ta nhận được các số S_5. Ta kiểm tra các số còn lại, $1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12, 15, 18, 33$ không có tính chất S_5. □

Ta kết thúc phần lý thuyết của bài viết bằng kết quả sau.

Định lý 29. *Nếu $m \geqslant 6$ là số tự nhiên thì tất cả các số nguyên dương không có tính chất S_m là* $1, 2, 3, \ldots, m-1, m+1, m+2, m+4, m+5, m+7, m+10, m+13$.

Lời giải. Xét số nguyên dương $n \leqslant m + 13$. Giả sử tồn tại các số nguyên dương $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_m$ và

$$n = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_m^2.$$

Do $a_1^2 + (m-1) \leqslant n \leqslant m + 13$ nên $a_1 \leqslant 3$. Nếu $a_1 = 1$ thì $m = n$. Giả sử $a_1 = 2$ thì chỉ có nhiều nhất ba trong các số $a_2, a_3, \ldots, a_m$ bằng 2 vì $n \leqslant m + 13$. Từ đó tìm được tương ứng $n = m+3,\ m+6,\ m+9,\ m+12$. Bây giờ xét $a_1 = 3$ thì $a_2 \leqslant 2$. Nếu $a_2 = 1$ thì $n = m + 8$. Nếu $a_2 = 2$ thì $a_3 = a_4 = \ldots = a_m = 1$ và $m = n + 11$.

Xét số nguyên dương $n > m + 13$. Nếu $n = m + 28$ thì $n = 2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 2^2 + (m-6) \cdot 1^2$ nên có tính chất S_m. Nếu không thì $n - (m-5) > 18$ và khác 33. Theo Định lý 28 thì số này có tính chất S_5 nên $n = [n - (m-5)] + (m-5) \cdot 1^2$ có tính chất S_m. Ta hoàn tất chứng minh. □

7. Bài tập tự luyện

Bài tập 1. Với n là số nguyên dương bất kì, chứng minh rằng nếu đồ thị của phương trình đường tròn $x^2 + y^2 = n$ đi qua một điểm hữu tỉ thì nó đi qua một điểm nguyên và vô số điểm hữu tỉ khác.

Bài tập 2. Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố p và số nguyên k, tồn tại số nguyên $n \equiv k \pmod{p}$ sao cho n là tổng của hai số chính phương.

Bài tập 3. Cho $p > 5$ là một số nguyên tố và a là số nguyên dương không chia hết cho p. Chứng minh rằng một trong các số sau có thể biểu diễn dưới dạng tổng hai số chính phương

$$p + a,\ 2p + a,\ 3p + a, \ldots, \frac{p-3}{2} \cdot p + a.$$

Bài tập 4 (Iran MO 2013, vòng 3). Cho $p > 3$ là số nguyên tố. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên x,y sao cho

$$p = 2x^2 + 3y^2$$

khi và chỉ khi $p \equiv 5, 11 \pmod{24}$.

Bài tập 5 (Iran TST 2019). Cho số nguyên dương n, định nghĩa tập hợp S_n gồm các số nguyên như sau

$$S_n = \{x^2 + ny^2 \mid x, y \in \mathbb{Z}\}.$$

Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho tồn tại một phần tử của S_n không thuộc bất kì tập hợp nào trong các tập hợp $S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}$.

Bài tập 6. Hỏi có thể có nhiều nhất bao nhiêu số tự nhiên liên tiếp mà mỗi số đều biểu diễn được dưới dạng tổng của ba số chính phương?

Bài tập 7. Chứng minh rằng một số nguyên dương có dạng $x^2 + 2y^2 + 9z^2$, với x, y, z nguyên, nếu nó chia 8 dư 4.

Tài liệu

[1] Hardy, Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford, 1954.

[2] Richard A. Mollin, *Fundamental Number Theory with Applications*, Chapman and Hall/CRC, 2008

[3] Dorin Andrica, Ion Cucurezeanu, Titu Andreescu, *An Introduction to Diophantine Equations: A Problem-Based Approach*, Springer, 2010.

[4] Peter D. Schumer, *Introduction to Number Theory*, Brooks - Cole Publishing Co., 1995.

[5] David A. Cox, *Primes of the Form $x^2 + ny^2$*, Wiley – Interscience, 1997.

[6] W. Sierpinski, *Elementary theory of numbers*, Polish Scientific Publishers, 1988.

[7] Peter Cho-Ho Lam, *Representation of Integers Using* $a^2 + b^2 - dc^2$, Journal of Integer Sequences, Vol. 18, 2015.

[8] Kenneth S. Williams, *A "Four Integers" Theorem and a "Five Integers" Theorem*, American Mathematical Monthly, 2015.

[9] L. E. Dickson, *Integers represented by positive ternary quadratic forms*, Bulletin of the American Mathematical Society, 1927.

[10] Trang web Art of Problem Solving: https://artofproblemsolving.com/community

NHỮNG BÀI TOÁN SƠ CẤP TRONG KÌ THI IMC

Ngô Hoàng Anh
(Sinh viên École Polytechnique, Pháp)

GIỚI THIỆU

Nhắc đến những kì thi Olympic Toán học dành cho Sinh viên trên toàn thế giới, chúng ta không thể không kể đến kì thi IMC (Intcernational Mathematics Competition for University Students), một kì thi lớn quy tụ học sinh đến từ nhiều quốc gia và vùng lãnh thổ, trải rộng trên khắp các châu lục. Mặc dù là một kì thi Olympic toán dành cho Sinh viên, có rất nhiều bài toán của IMC được phát biểu đơn giản, nhẹ nhàng, nhưng ý tưởng ẩn chứa đằng sau lại rất sâu sắc và không cần dùng quá nhiều các công cụ toán học cao cấp. Trong khuôn khổ bài viết này, chúng ta cùng nghiên cứu, đào sâu và mở rộng một số bài toán, sử dụng thuần tuý những kiến thức Toán học sơ cấp. Đồng thời, trong quá trình này, tác giả sẽ giới thiệu một số khái niệm, định lý hoặc hướng đi mới, có ích trong việc tiếp cận những bài toán sơ cấp khác.

Do giới hạn của khuôn khổ bài viết không cho phép, tác giả không thể nào cung cấp hết những kiến thức liên quan, chứng minh hay ứng dụng của một vài phương pháp được sử dụng trong các bài toán. Chính vì vậy, những bạn đọc có hứng thú có thể tham khảo phần Tài liệu để nắm rõ hơn về phương pháp và ứng dụng của nó.

Mặc dù đã trải qua quá trình biên tập rất kĩ lưỡng, tuy nhiên, sai sót là không thể tránh khỏi. Tác giả rất mong nhận được những đóng góp của bạn đọc để bài viết thêm phần hoàn thiện.

Nếu bạn đọc có bất kì câu hỏi hay ý kiến đóng góp liên quan đến bài viết, xin vui lòng liên hệ với tác giả thông qua email: hoang-anh.ngo@polytechnique.edu.

1. Giới thiệu về kì thi

Kì thi Olympic Toán Sinh viên Quốc tế (International Mathematics Competition for University Students - IMC) là một kì thi Toán học thường niên dành cho tất cả các Sinh viên Đại học. Các thí sinh khi tham gia Kì thi sẽ không được quá 23 tuổi. IMC là một kì thi dành cho cá nhân, và các trường Đại học thường sẽ cử một đến hai đội, cùng với Trưởng đoàn (Team leader). Thông thường, Trưởng đoàn sẽ giữ một vai trò nhất định trong Khoa của trường cử đại diện. Tuy nhiên, các học sinh tham gia độc lập và không có Trưởng đoàn đi cùng cũng được chào đón nồng nhiệt.

Kì thi IMC được tổ chức lần đầu tiên vào năm 1994 tại Plovdiv, Bulgaria với 49 thí sinh, chủ yếu là các thí sinh Bulgaria, và diễn ra tại Đại học Plovdiv "Paisii Hilendarski". Từ năm 1996 đến năm 1999, IMC là một trong các hoạt động của Dự án Structural Joint European Union TEMPUS với tiêu đề là "Modular Education in Mathematics and Informatics". Đây là đầu tàu của dự án TEMPUS tại Bulgaria vào thời điểm đó, với mong muốn đưa chương trình Đại học môn Toán và Tin học của Bulgaria sánh vai với các trường Đại học trong khối Liên minh Châu Âu, nhằm chuẩn bị cho sự gia nhập của Bulgaria vào tổ chức này. Trường University College London là "nhà thầu" của dự án này, và Giáo Sư John E. Jayne, Giáo sư Khoa Toán của trường, chính là người đứng đầu của dự án, đồng thời cũng là Chủ tịch của kì thi từ năm 1994.

Đến năm 1998, kì thi IMC lần thứ năm được chuyển đến Blagoevgrad, Bulgaria và được đồng tổ chức bởi Trường Đại học Tây Nam "Neofit Rilski" ở Blagoevgrad và Trường Đại học Mỹ tại Bulgaria (American University in Bulgaria), với sự tham dự của 80 thí sinh đến từ 9 quốc gia.

Từ năm 1999 đến 2009, kì thi IMC được tổ chức tại nhiều trường Đại học và nhiều Quốc gia khác nhau, chẳng hạn như Hungary, Anh, Cộng hoà Sec, Ba Lan, Romania, Macedonia, Ukraine, Budapest. Đến năm 2010, Kì thi được cố định sẽ tổ chức tại American University in Bulgaria, với sự hỗ trợ của Trường Đại học Tây Nam "Neofit Rilski". Tính đến thời điểm hiện tại, đã có hơn 200 trường Đại học đến từ 50 Quốc gia đã tham gia vào Kì thi IMC, kể từ lần đầu tiên. Kì IMC gần nhất (lần thứ 25, 2018), đã có 351 thí sinh tham gia đến từ 70 đội tuyển khác nhau. Trong kì thi này, có nhiều giải thưởng khác nhau đã được trao, bao gồm Giải cá nhân, Giải đồng đọi, Giải Fairplay và Giải Trưởng đoàn hiệu quả nhất (dành cho trường đoàn của các đoàn có điểm tăng cao nhất sau khiếu nại).

Kì thi IMC sẽ được diễn ra trong vòng 5 hoặc 6 ngày, trong đó các thí sinh sẽ tham gia tranh tài vào hai ngày, mỗi ngày bao gồm một bài thi 5 tiếng với 5 câu hỏi khác nhau. Những câu hỏi sẽ được chọn bởi các đại diện đến từ những trường Đại học tham gia tranh tài. Các bài toán sẽ nằm trong các lĩnh vực Đại số, Giải tích (Thực và Ảo), Tổ hợp và Lý thuyết số.

Các học sinh khi tham gia Kì thi đều sẽ được cung cấp chỗ ở trong khu sinh hoạt chung, và được yêu cầu ở tại chỗ ở trong suốt quá trình diễn ra kì thi. Mục đích của việc này là nhằm tạo ra một môi trường thân thiện, thoải mái và an toàn cho các sinh viên Toán trên toàn thế giới cùng thưởng thức Toán học bên cạnh những người bạn trên toàn thế giới, cùng mở rộng tầm nhìn và được truyền cảm hứng để đặt ra những mục tiêu cho bản thân mà trước giờ có thể họ chưa từng nghĩ đến. Đáng chú ý, vào năm 2018, một nhà Toán học đã từng tham gia kì thi IMC năm 2000 được tổ chức tại University College London đã được trao giải thưởng danh giá nhất trong làng Toán học thế giới, Giải thưởng Fields.

2. Những bài toán sơ cấp điển hình

2.1. Tổ hợp

Bài toán 1 (IMC 2016, Day 1, Problem 4). *Cho $n \geqslant k$ là các số nguyên dương, và cho $\mathcal{F}$ là họ các tập hữu hạn với những tính chất sau:*

1. *$\mathcal{F}$ có chứa ít nhất $\binom{n}{k} + 1$ tập phân biệt với đúng k phần tử.*

2. *với hai tập A, B bất kì thuộc $\mathcal{F}$, hợp $A \bigcup B$ của chúng cũng thuộc $\mathcal{F}$*

Chứng minh rằng $\mathcal{F}$ có chứa ít nhất 3 tập có ít nhất n phần tử.

***Lời giải 1**.* Nếu $n = k$, chúng ta có ít nhất hai tập phân biệt trong họ với ít nhất n phần tử và hợp của hai tập đó, chúng ta có điều phải chứng minh. Kể từ bây giờ, chúng ta sẽ giả sử rằng $n > k$.

Cố định $\binom{n}{k} + 1$ tập có số phần tử là k trong $\mathcal{F}$ và gọi chúng là các "tập nguồn". Gọi $\mathcal{V} \in \mathbb{F}$ là hợp của các "tập nguồn". Bởi vì $\mathcal{V}$ có ít nhất $\binom{n}{k} + 1$ tập con có k phần tử, chúng ta có $|\mathcal{V}| > n$.

Gọi một phần tử $v \in \mathcal{V}$ là "chuẩn" nếu v thuộc ít nhất $\binom{n-1}{k-1}$ tập nguồn. Khi đó, tồn tại ít nhất $\binom{n}{k} + 1 - \binom{k-1}{n-1} = \binom{n-1}{k} + 1$ "tập nguồn" không chứa phần tử v. Hợp của chúng có ít nhất n phần tử, và hợp này không chứa phần tử v.

Bây giờ, chúng ta chứng minh rằng, trong bất kì n phần tử $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nào của $\mathcal{V}$, tồn tại một phần tử "chuẩn". Xét tất cả các cặp (G, x_i) sao cho G là một "tập nguồn" và $x_i \in G$.Mỗi "tập nguồn" có đúng k phần tử, nên số cặp tối đa sẽ là $\left(\binom{n}{k} + 1\right) \times k$. Nếu một phần tử x_i nào đó không "chuẩn", x_i sẽ nằm trong ít nhất $n \times \left(\binom{n-1}{k-1} + 1\right)$ tập nguồn. Tuy nhiên, $n \times \left(\binom{n-1}{k-1} + 1\right) > \left(\binom{n-1}{k-1} + 1\right) \times k$, nên điều này không thể xảy ra; chính vì vậy, ít nhất một trong các phần tử $x_1, x_2, \ldots, x_n$ phải là một phần tử "chuẩn".

Vì $|\mathcal{V}| > n$, tập $\mathcal{V}$ chứa một phần tử chuẩn v_1 nào đó. Gọi $\mathcal{U}_1 \in \mathcal{F}$ là giao của tất cả các tập nguồn" không chứa phần tử v_1. Khi đó, $|\mathcal{U}_1| \geqslant n$ và $v_1 \notin \mathcal{U}_1$. Bây giờ, chúng ta lấy một phần tử "chuẩn" v_2 từ $\mathcal{U}_1$ và gọi $\mathcal{U}_2 \in \mathcal{F}$ là giao của tất cả các "tập nguồn" không chứa phần tử v_2. Khi đó, $\mathcal{U}_2 \geqslant n$, và bây giờ, chúng ta sẽ có ba tập $\mathcal{V}, \mathcal{U}_1$ và $\mathcal{U}_2$ thuộc $\mathcal{F}$ với ít nhất n phần tử: $\mathcal{V} \neq \mathcal{U}_1$ bởi vì $v_1 \in \mathcal{V}$ và $v_1 \notin \mathcal{U}_1$, và $\mathcal{U}_2$ khác $\mathcal{V}$ và $\mathcal{U}_1$ bởi vì $v_2 \in \mathcal{V}, \mathcal{U}_1$ nhưng $v_2 \notin \mathcal{U}_2$. □

***Lời giải 2**.* Chúng ta sẽ giải bài toán này bằng quy nạp theo k, nên chúng ta có thể giả sử rằng phát biểu của đề bài là đúng với những giá trị k nhỏ. Chúng ta sẽ chứng minh bằng phản chứng, bằng cách giả sử rằng $\mathcal{F}$ có ít hơn 3 tập với ít nhất n phần tử, tức là số các tập có tính chất như vậy sẽ chỉ có thể là 0, 1 hoặc 2. Không mất tính tổng quát, chúng ta có thể giả sử rằng $\mathcal{F}$ chứa đúng $N = \binom{n}{k} + 1$ tập phân biệt với k phần tử và tất cả các hợp giữa các tập hợp đó. Đặt các tập có k phần tử là $S_1, S_2, \ldots$.

Xét một tập tối đa $I \in \{1, \ldots, N\}$ sao cho $A = \bigcup_{i \in I} S_i$ có số phần tử nhỏ hơn n, hay $|A| < n$. Điều này có nghĩa rằng, nếu thêm một tập S_j bất kì ($j \in I$) sẽ làm cho số phần tử của nó lớn hơn hoặc bằng n, hay $|S_j \bigcup A| \geqslant n$. Đầu tiên, chúng ta sẽ chứng minh rằng tồn tại một số j như vậy. Giả sử ngược lại; khi đó, tất cả các tập S_i sẽ đều được chứa trong A. Tuy nhiên, chỉ có $\binom{|A|}{k} \leqslant \binom{n-1}{k} < N$ tập con có k phần tử phân biệt của A, điều này trái với giả thiết ban đầu. Chính vì vậy, sẽ tồn tại ít nhất một số j sao cho $|S_j \bigcup A| \geqslant n$.

Xét tất cả các tập có dạng $S_j \bigcup A$ với $j \notin I$. Mỗi tập sẽ có ít nhất n phần tử, nên số tập dạng này sẽ chỉ có thể là 1 hoặc 2. Nếu có hai tập dạng này, chúng ta tạm gọi chúng là B và C, khi đó $B \subset C$ hoặc $C \subset B$, bởi vì nếu không, hợp cũa hai tập B và C sẽ khác cả B và C, khi đó chúng ta sẽ có ba tập B, C và $B \bigcup C$ có ít nhất n phần tử. Chúng ta thấy rằng, trong bất kì trường hợp nào, cũng phải tồn tại một phần tử $x \notin A$ sao cho $x \in S_j$ với mọi $j \notin I$. Xét các tập $S'_j = S_j \, X$ với $j \notin I$. Trong các tập này, mỗi tập sẽ có $k-1$ phần tử. Số các tập như vậy ít nhất sẽ là

$$N - \binom{n-1}{k} = \binom{n-1}{k-1} + 1$$

Theo giả thiết quy nạp, chúng ta có thể lập 3 tập, mỗi tập có ít nhất $n-1$ phần tử bằng cách lấy hợp của các tập S'_j với $j \notin I$. Thêm x vào các tập này, chúng ta sẽ thấy các hợp tương ứng của các tập S'_j sẽ có ít nhất n phần tử. Đến đây, chúng ta đã hoàn thành bước quy nạp.

Các bước lý luận ở trên cho phép chúng ta có thể giảm k xuống đến $k = 0$, nên công việc còn lại của chúng ta sẽ là kiểm tra phát biểu của đề bài với trường hợp $k = 0$. Đề bài giả sử rằng chúng ta có ít nhất $\binom{n}{0} + 1 = 2$ tập có 0 phần tử. Điều này không thể xảy ra, bởi vì chỉ có duy nhất một tập rỗng. Chính vì vậy, phát biểu của đề bài vẫn đúng với trường hợp $k = 0$. $\square$

Bài toán 2 (IMC 2018, Day 2, Problem 8). *Cho* $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 : y + 1 \geqslant x \geqslant y \geqslant z \geqslant 0\}$. *Một con cóc di chuyển giữa các điểm trong* Ω *bằng những bước nhảy với độ dài* 1. *Với mỗi số nguyên dương* n*, hãy tính số đường đi mà con cóc có thể đi để đến điểm* (n, n, n) *từ điểm* $(0, 0, 0)$ *với đúng* $3n$ *bước nhảy.*

(Đề xuất bởi Fedor Petrov và Anatoly Vershik, Đại học Bang St. Petersburg)

Lời giải. Đặt $\Psi = \{(u, v) \in \mathbb{Z}^2 : v > 0, u \geqslant 2v\}$. Chúng ta chú ý rằng ánh xạ: $\pi : \Omega \to \Psi, \pi(x, y, z) = (x + y, z)$ là một song ánh giữa hai tập hợp; ngoài ra, π chiếu tất cả những đường đi mà con cóc có thể đi thành những đường đi giữa các điểm trong tập Ψ, sử dụng bước nhảy là bước nhảy đơn vị. Chính vì thế, bây giờ, chúng ta sẽ quan tâm đến số đường đi từ điểm $\pi(0, 0, 0) = (0, 0)$ đến điểm $\pi(n, n, n) = (2n, n)$, sử dụng bước nhảy là những bước nhảy $(1, 0)$ và $(0, 1)$.

Với mỗi điểm (u, v) bất kì trong tập Ψ, đặt $f(u, v)$ là số đường đi có thể đi từ điểm $(0, 0)$ đến điểm (u, v) trong Ψ với đúng $u + v$ bước nhảy. Rõ ràng, chúng ta có $f(0, 0) = 1$. Mở rộng định nghĩa này với các điểm với những trường hợp $v = 1$ và $2v = u + 1$, chúng ta có:

$$f(u, -1) = 0, \, f(2v - 1, v) = 0 \tag{1}$$

Để đi đến một điểm bất kì (u, v) trong Ψ ngoại trừ điểm gốc $(0, 0)$, chúng ta có thể di chuyển từ điểm $(u - 1, v)$ hoặc điểm $(u, v - 1)$, hay

$$f(u, v) = f(u - 1, v) + f(u, v - 1) \text{ với } (u, v) \in \mathbb{P}\,\{(0, 0)\} \tag{2}$$

Nếu chúng ta không xét đến điều kiện tại biên như $(S1)$, sẽ có một lớp rất nhiều hàm số thoả mãn phương trình hàm $(S2)$. Chẳng hạn như, với mỗi số nguyên c, $(u, v) \mapsto \binom{u+v}{v+c}$ sẽ là một hàm số thoả mãn điều kiện trên, nếu như chúng ta chú thích thêm rằng hàm số này sẽ bằng 0 nếu $v + c$ âm hoặc lớn hơn $u + v$.

Với điều kiện $2v = u + 1$, chúng ta có $\binom{u+v}{v} = \binom{3v-1}{v} = 2\binom{3v-1}{v-1} = 2\binom{u+v}{v-1}$. Chính vì thế, hàm số:

$$f^*(u, v) = \binom{u+v}{v} - 2\binom{u+v}{v-1}$$

sẽ thoả mãn các điều kiện (3), (4) và đồng thời $f(0,0) = 1$. Những điều kiện này đặc trưng cho hàm số f, chính vì vậy, $f = f^*$.

Đến đây, chúng ta đã có thể tính số đường đi mà con cóc có thể đi từ điểm $(0,0,0)$ đến (n,n,n) là:

$$f(\pi(n,n,n)) = f(2n,n) = \binom{3n}{n} - 2\binom{3n}{n-1} = \frac{\binom{3n}{n}}{2n+1}$$

□

Bài toán 3 (IMC 2014, Day 2, Problem 5). *Với mỗi số nguyên dương n, gọi D_n là số hoán vị $(x_1,\ldots,x_n)$ của $(1,2,\ldots,n)$ sao cho $x_j \neq j$ với mọi $1 \geqslant j \geqslant n$. Với $1 \geqslant k \geqslant \frac{n}{2}$, đặt $\Delta(n,k)$ là số hoán vị $(x_1,\ldots,x_n)$ của $(1,2,\ldots,n)$ sao cho $x_i = k+i$ với mọi $1 \leqslant i \leqslant k$ và $x_j \neq j$ với mọi $1 \leqslant j \leqslant n$. Chứng minh rằng:*

$$\Delta(n,k) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \frac{D_{(n+1)-(k+i)}}{n-(k+i)}$$

(Đề xuất bởi Combinatorics; Ferdowski University of Mashhad, Iran; Mirzavaziri)

Lời giải. Đặt $a_r \in \{i_1,\ldots,i_k\} \cap \{a_1,\ldots,a_k\}$. Khi đó, $a_r = i_s$ với một số $s \neq r$ nào đó. Lúc này, sẽ có hai trường hợp xảy ra:

- Trường hợp 1: $a_s \in \{i_1,\ldots,i_k\}$. Đặt $a_s = i_t$. Trong trường hợp này, một phép dời chỗ $x = (x_1,\ldots,x_n)$ thoả mãn điều kiện $x_{i_j} = a_j$ khi và chỉ khi phép dời chỗ $x' = (x'_1,\ldots,x'_{i_t-1},x'_{i_t+1},x'_n)$ của tập $[n] \setminus \{i_t\}$ thoả mãn điều kiện $x'_{i_j} = a'_j$ với mọi $j \neq t$. Bây giờ, chúng ta có một mối quan hệ một - một giữa các phép dời chỗ $x = (x_1,\ldots,x_n)$ của $[n]$ với $x_{i_j} = a_j$ với hai tập cho sẵn $\{i_1,\ldots,i_k\}$ và $\{a_1,\ldots,a_k\}$ có l phần tử trong giao của hai tập hợp đó, với các phép dời chỗ $x' = (x'_1,\ldots,x'_{i_t-1},x'_{i_t+1},x'_n)$ của $[n] \setminus \{i_t\}$ với $x_{i_j} = a'_j$ với hai tập cho sẵn $\{i_1,\ldots,i_k\} \setminus \{i_t\}$ và $\{a'_1,\ldots,a'_k\} \setminus \{a'_t\}$ có $l-1$ phần tử trong giao của hai tập hợp đó.
- Trường hợp 2: $a_s \notin \{i_1,\ldots,i_k\}$. Trong trường hợp này, một phép dời chỗ $x = (x_1,\ldots,x_n)$ thoả mãn điều kiện $x_{i_j} = a_j$ khi và chỉ khi phép dời chỗ $x' = (x'_1,\ldots,x_{a_s-1},x'_{a_s+1},x_n)$ của tập $[n] \setminus \{a_s\}$ thoả mãn điều kiện $x'_{i_j} = a_j$ với mọi $j \neq s$. Bây giờ, chúng ta có một mối quan hệ một - một giữa các phép dời chỗ $x = (x_1,\ldots,x_n)$ của $[n]$ với $x_{i_j} = a_j$ với hai tập cho sẵn $\{i_1,\ldots,i_k\}$ và $\{a_1,\ldots,a_k\}$ có l phần tử trong giao của hai tập hợp đó, với các phép dời chỗ $x' = (x'_1,\ldots,x'_{i_t-1},x'_{i_t+1},x'_n)$ của $[n] \setminus \{a_s\}$ với $x_{i_j} = a_j$ với hai tập cho sẵn $\{i_1,\ldots,i_k\} \setminus \{i_t\}$ và $\{a_1,\ldots,a_k\} \setminus \{a_s\}$ có $l-1$ phần tử trong giao của hai tập hợp đó.

Những lý luận trên cho chúng ta thấy rằng $\Delta(n,k,l) = \Delta(n-1,k-1,l-1)$. Lặp đi lặp lại quá trình này, chúng ta được:

$$\Delta(n,k,l) = \Delta(n-l,k-l,0)$$

Đến đây, chúng ta có thể giả sử rằng $l = 0$. Chúng ta sẽ xác định $\Delta(n,k,0)$, với $2k \neq n$. Với $k = 0$, chúng ta rõ ràng có được $\Delta(n,0,0) = D_n$. Với $k \geqslant 1$, chúng ta có:

$$\Delta(n,k,0) = \Delta(n-1,k-1,0) + \Delta(n-2,k-1,0)$$

Với mỗi phép dời chỗ $x = (x_1,\dots,x_n)$ thoả mãn $x_{i_j} = a_j$, có hai trường hợp xảy ra: $x_{a_1} = i_1$ hoặc $x_{a_1} \neq i_1$.

Nếu trường hợp đầu tiên xảy ra, chúng ta phải xác định số phép dời chỗ của tập $[n]\ \{i_1,a_1\}$ với hai tập cho sẵn $\{i_2,\dots,i_k\}$ và $\{a_2,\dots,a_k\}$ với 0 phần tử trong giao của hai tập hợp. Số phép dời chỗ là $\Delta(n-2,k-1,0)$.

Nếu trường hợp thứ hai xảy ra, chúng ta phải xác định số phép dời chỗ của tập $[n]\ \{a_1\}$ với hai tập cho sẵn $\{i_2,\dots,i_k\}$ và $\{a_2,\dots,a_k\}$ với 0 phần tử trong giao của hai tập hợp. Số phép dời chỗ là $\Delta(n-1,k-1,0)$.

Chúng ta dùng quy tạp theo k để chứng minh rằng:

$$\Delta(n,k,0) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \frac{D_{(n+1)-(k-i)}}{n-(k+i)}, 2 \leqslant 2k \leqslant n$$

Với $k = 1$, chúng ta có:

$$\Delta(n,1,0) = \Delta(n-1,0,0) + \Delta(n-2,0,0) = D_{n-1} + D_{n-2} = \frac{D_n}{n-1}$$

Chúng ta giả sử rằng kết quả ở trên đúng với $k-1$. Chúng ta có thể viết:

$$\begin{aligned}
\Delta(n,k,0) &= \Delta(n-1,k-1,0) + \Delta(n-2,k-1,0) \\
&= \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k-2}{i} \frac{D_{n-(k-1+i)}}{(n-1)-(k-1+i)} + \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k-2}{i} \frac{D_{(n-1)-(k-1+i)}}{(n-2)-(k-1+i)} \\
&= \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k-2}{i} \frac{D_{(n+1)-(k+i)}}{n-(k+i)} + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-2}{i-1} \frac{D_{n-(k+i-1)}}{(n-1)-(k+i-1)} \\
&= \frac{D_{(n+1)-k}}{n-k} + \sum_{i=1}^{k-2} \binom{k-2}{i} \frac{D_{(n+1)-(k+i)}}{n-(k+i)} \\
&+ \frac{D_{(n+1)-(2k-1)}}{n-(2k-1)} + \sum_{i=1}^{k-2} \binom{k-2}{i-1} \frac{D_{(n+1)-(k+i)}}{n-(k+i)} \\
&= \frac{D_{(n+1)-k}}{n-k} + \sum_{i=1}^{k-2} \left[\binom{k-2}{i} + \binom{k-2}{i-1} \right] \frac{D_{(n+1)-(k+i)}}{n-(k+i)} + \frac{D_{(n+1)-(2k-1)}}{n-(2k-1)} \\
&= \frac{D_{(n+1)-k}}{n-k} + \sum_{i=1}^{k-2} \binom{k-1}{i} \frac{D_{(n+1)-(k+i)}}{n-(k+i)} + \frac{D_{(n+1)-(2k-1)}}{n-(2k-1)} \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \frac{D_{(n+1)-(k+i)}}{n-(k+1)}
\end{aligned}$$

□

Nhận xét. Như là một hệ quả tất yếu của bài toán trên, đặt $n = 2k, i_j = j$ và $a_j = k + j$ với $j = 1, .., k$. Khi đó, một phép dời chỗ $x = (x_1, \ldots, x_n)$ thoả mãn điều kiện $x_{i_j} = a_j$ khi và chỉ khi $x' = (x_{k+1}, \ldots, x_n)$ là một phép chuyển vị của $[k]$. Số phép chuyển vị x' như vậy chính là $k!$. Như vậy, chúng ta có:

$$\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \frac{D_{k+1-i}}{k-i} = k!$$

Đây là một kết qủa trực tiếp được sử dụng để giải bài toán đầu tiên trong ngày thi thứ hai của kì thi cùng năm.

Ngoài lời giải chính thức, tác giả muốn giới thiệu một lời giải mới, dù có đôi chút cồng kềnh về mặt tính toán nhưng là một lời giải có phần tự nhiên, trực quan mà không phải xét quá nhiều trường hợp xảy ra.

Lời giải phụ. Đặt $\Delta(n, k, j)$ là số phép chuyển vị trong S_n sao cho $x_i = k + i$ với $1 \leqslant i \leqslant k$ và có chính xác j điểm cố định (tức là $x_j = j$). Khi đó, $\Delta(n, k) = \Delta(n, k, 0)$ và rõ ràng rằng,

$$\sum_j \Delta(n, k, j) = (n-k)!$$

Mặt khác, chúng ta cũng có

$$\Delta(n, k, j) = \binom{n-2k}{j} \times \Delta(n-j, k)$$

Từ đó, chúng ta có được đẳng thức sau:

$$\sum_j \binom{n-2k}{j} \Delta(n-j, k) = (n-k)! \tag{3}$$

Để ý rằng nếu chọn $n = 2k$, sau đó $n = 2k + 1$, v.v, chúng ta có thể tính được $\Delta(n, k)$ một cách đệ quy chỉ bằng phương trình này, nên phương trình ở trên (đúng với mọi phép chọn n, k) cho chúng ta một cách xác định $\Delta(n, k)$ một cách duy nhất. Đến đây, chúng ta chỉ cần chứng minh rằng:

$$\sum_j \binom{n-2k}{j} \sum_i \binom{k-1}{i} \frac{D_{n-k-i-j-1}}{n-k-i-j} = (n-k)!$$

Tuy nhiên, sử dụng công thức Vandermonde như sau:

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k} \binom{n}{r-k},$$

chúng ta có thể viết lại vế trái như sau:

$$\sum_s \frac{D_{n-k-s-1}}{n-k-s} \sum_{i+j=s} \binom{n-2k}{j} \binom{k-1}{i} = \sum_s \frac{D_{n-k-s-1}}{n-k-s} \binom{n-k-1}{s} = \sum_j \frac{D_{j+2}}{j+1} \binom{n-k-1}{j}$$

và đến đây, công việc của chúng ta chỉ còn là phải chứng minh

$$\sum_j \frac{D_{j+2}}{j+1}\binom{m}{j} = (m+1)!$$

hay tương đương với

$$\sum_j D_{j+1}\binom{m}{j} = m \times m!$$

Ngoài ra,

$$\binom{m}{j} = \binom{m+1}{j+1} - \binom{m}{j+1},$$

nên chúng ta chỉ cần chứng minh

$$\sum_j D_j\binom{m}{j} = m!$$

Điều này hiển nhiên đúng nếu chúng ta để ý rằng $\binom{m}{j}D_{n-j}$ là số phép chuyển vị trong S_n với đúng j điểm cố định, hoặc đơn giản hơn bằng cách cho $k = 0$ vào phương trình $(S3)$ và để ý rằng $\Delta(n,0) = D_n$. Đến đây, bài toán được giải quyết hoàn toàn. $\square$

Bài toán 4 (IMC 2009, Day 1, Problem 3). *Trong một thị trấn, nếu hai cư dân không là bạn của nhau, họ sẽ có một bạn chung, và không có ai là bạn với tất cả những người còn lại. Chúng ta đánh số dân cư của thị trấn này từ 1 đến n va đặt a_i là số bạn của dân cư thứ i. Giả sử rằng $\sum_{i=1}^n a_i^2 = n^2 - n$. Đặt k là số dân cư nhỏ nhất (ít nhất là 3) có thể ngồi vào một bàn tròn sao cho hai người ngồi cạnh nhau là bạn của nhau. Xác định tất cả các giá trị có thể có của k.*

Lời giải. Chúng ta định nghĩa một đồ thị đơn giản, không định hướng G sao cho tất cả các đỉnh của G là các cư dân của thị trấn và các cạnh của G thể hiện tình bạn giữa các cư dân. Đặt $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ là các đỉnh của G, a_i là bậc của v_i với mọi i. Đặt $E(G)$ là các cạnh của G. Với các thuật ngữ như trên, đề bài đang yêu cầu chúng ta miêu tả độ dài k của chu trình ngắn nhất của G.

Chúng ta đếm các bước đi với độ dài 2 trên G, tức là tìm các bộ ba các đỉnh có thứ tự (v_i, v_j, v_l) với $v_iv_j, v_jv_l \in E(G)$ (trường hợp $i = l$ có thể xảy ra). Với mỗi j cho trước, số bộ ba như vậy hiển nhiên là a_j^2, nên tổng các bộ ba như vậy sẽ là $\sum_{i=1}^n a_i^2 = n^2 - n$.

Bây giờ, chúng ta chứng minh rằng tồn tại một ánh xạ f từ tập các cặp đỉnh riêng biệt đến tập các bước đi. Với $v_iv_j \notin E(G)$, đặt $f(v_i, v_j) = (v_i, v_l, v_j)$ với l tuỳ ý sao cho $v_iv_l, v_lv_j \in E(G)$. Với $v_iv_j \in E(G)$, đặt $f(v_i, v_j) = (v_i, v_j, v_i)$. f là một ánh xạ bởi vì với $i \neq l$, (v_i, v_j, v_l) chỉ có thể là ảnh của (v_i, v_l) và với $i = l$, nó không thể là ảnh của (v_i, v_j).

Vì số các cặp đỉnh có thứ tự là $n^2 - n$, $\sum_{i=1}^n a_i^2 \geqslant n^2 - n$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi f toàn ánh, tức là, khi và chỉ khi chỉ có duy nhất một l với $v_iv_l, v_lv_j \in E(G)$ với mỗi i, j sao cho $v_iv_j \notin E(G)$ và không tồn tại l với bất kì i, j nào sao cho $v_iv_j \in E(G)$. Nói một cách khác, khi và chỉ khi G không chứa C_3 hoặc C_4 (các chu trình với độ dài 3 hoặc 4), tức là, G chỉ có thể là một rừng (forest) (một đồ thị không có chu trình), hoặc là độ dài ngắn nhất của chu trình sẽ là 5.

Dễ dàng kiểm tra rằng nếu mỗi hai đỉnh của một "rừng" được liên kết bởi một đường đi có độ dài lớn nhất là 2, thì "rừng" lúc này sẽ là một "sao" (tức là một đồ thị có một đỉnh liên kết với tất cả các đỉnh còn lại bằng một cạnh). Nhưng, G có n đỉnh, và không có đỉnh nào có bậc $n-1$. Chính vì vậy, G không thể là một "rừng", tức là nó có chu trình. Mặt khác, nếu độ dài tối thiểu của một chu trình C của G là 6, sẽ có hai đỉnh sao cho cả hai cung của C nối giữa hai đỉnh đó sẽ không dài hơn 2. Chính vì vậy, sẽ có một đường đi giữa chúng và ngắn hơn độ dài của cả hai cung. Thay thế một trong hai cung bằng đường đi đó, chúng ta có một đường đi khép kín ngắn hơn c. Chính vì vậy, độ dài của chu trình ngắn nhất phải là 5.

Cuối cùng, chúng ta chú ý rằng sẽ có ít nhất một G với những tính chất đã cho, tức là bản thân chu trình C_5 thoả mãn các điều kiện của đề bài. Khi đó, 5 sẽ là giá trị duy nhất có thể của k. □

Nhận xét. Đây là một trong những bài sử dụng những định nghĩa và ứng dụng đơn giản nhất của lý thuyết đồ thị. Tiếp theo, chúng ta sẽ đến với một bài toán có nhiều ứng dụng hơn, độ phức tạp trong tính toán cao hơn.

Bài toán 5 (IMC 2011, Day 2, Problem 2). *Một tộc người ngoài hành tinh có ba giới tính: male, female và emale. Một "bộ ba cưới nhau" bao gồm ba người, mỗi người có một giới tính khác nhau, và họ đều thích nhau. Một người chỉ được cho phép nằm trong tối đa một "bộ ba cưới nhau". Một đặc điểm đặc biệt của tộc người này là cảm xúc luôn luôn xuất phát từ cả hai - tức là nếu x thích y, y sẽ thích x.*

Tộc người này đang gửi một đoàn thám hiểm đến xâm lược một hành tinh nọ. Đoàn thám hiểm này gồm có n male, n female và n emale. Biết rằng mỗi thành viên trong đoàn thám hiểm thích ít nhất k người của mỗi giới tính còn lại. Vấn đề hiện tại là tạo ra càng nhiều "bộ ba cưới nhau" càng tốt để tạo ra những con cháu khoẻ mạnh để thuộc địa có thể phát triển và trở nên thịnh vượng.

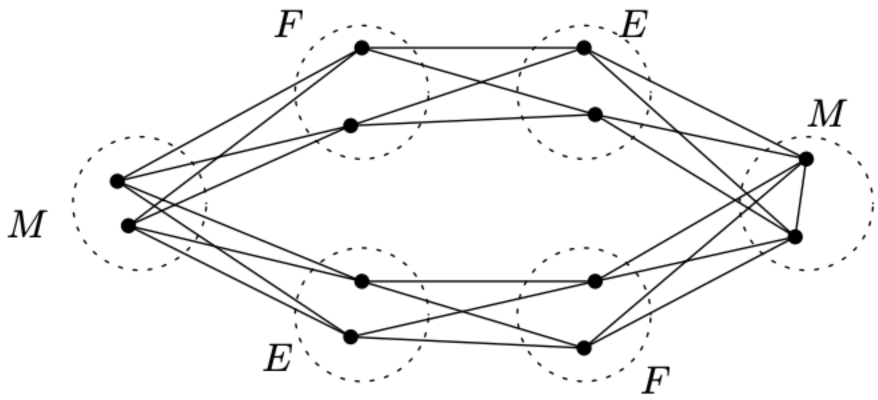
- *Chứng minh rằng nếu n lẻ và $k = \frac{n}{2}$, chúng ta không thể nào tạo ra dù chỉ một "bộ ba cưới nhau".*
- *Chứng minh rằng nếu $k \geqslant \frac{3n}{4}$, luôn luôn có cách để tạo ra n "bộ ba cưới nhau" phân biệt, tức là tất cả mọi người trong đoàn thám hiểm đều được "tác hợp".*

(Đề xuất bởi Fedor Duzhin và Nick Gravin, Singapore)

Lời giải.

- Đặt M là tập những người có giới tính male, F là tập những người có giới tính female, và E là tập những người có giới tính emale. Xét một đồ thị tripartite G với các đỉnh $M \cup F \cup E$ và các cạnh thể hiện những mối quan hệ thích nhau. Một chu trình độ dài 3, lúc này, sẽ là một "bộ ba cưới nhau". Chúng ta sẽ gọi G là đồ thị của mối quan hệ thích nhau.
  Đầu tiên, đặt $k = \frac{n}{2}$. Khi đó, n phải là một số chẵn, và chúng ta cần xây dựng một đồ thị

của mối quan hệ thích nhau mà không có chu trình có độ dài 3 nào. Chúng ta sẽ thực hiện như sau: chia mỗi tập M, F và E ra thành hai phần bằng nhau và vẽ tất cả các cạnh giữa hai phần như sau:



Rõ ràng, đồ thị này không có chu trình có độ dài 3 nào cả.

- Đầu tiên, chúng ta chia đoàn thám hiểm ra thành những bộ ba male - female - emale tuỳ ý. Gọi độ "không hạnh phúc" của một phép chia như vậy là số cặp người ngoài hành tinh thuộc cùng một bộ ba, nhưng không thích nhau. Chúng ta sẽ chứng minh rằng, nếu độ không hạnh phúc là một số dương thì độ không hạnh phúc đó có thể được giảm đi bằng một phép biến đổi đơn giản. Từ đó, sau nhiều bước biến đổi, độ "không hạnh phúc" sẽ giảm về 0, tức là tất cả các bộ ba lúc này sẽ là những "bộ ba cưới nhau", tạo ra một đám cưới hạnh phúc cho tất cả mọi người!

  Giả sử rằng chúng ta có một emale không thích ít nhất một thành viên trong bộ ba của nó (những trường hợp khác, chúng ta sẽ thao tác tương tự). Chúng ta thực hiện phép biến đổi sau: chúng ta đổi emale này với một emale khác, sao cho mỗi emale trong số hai người này sẽ thích những thành viên của bộ ba mới. Khi đó, độ "không hạnh phúc" liên quan đến những emale này sẽ giảm xuống, và những cặp khác liên quan đến độ "không hạnh phúc" của cách sắp xếp đó sẽ không thay đổi, nên nhìn chung, độ "không hạnh phúc" sẽ giảm xuống.

  Vì vậy, việc còn lại của chúng ta là chứng minh rằng một phép biến đổi như vậy luôn luôn có thể xảy ra. Đánh số những bộ ba từ $1, 2, \dots, n$ và gọi E_i, F_i, M_i tương ứng là emale, female và emale của bộ ba thứ i. Không mất tính tổng quát, chúng ta có thể giả sử rằng E_1 không thích hoặc F_1, hoặc M_1, hoặc cả hai. Chúng ta phải tìm một số $i > 1$ sao cho E_i thích cặp đôi F_1, M_1 và E_1 thích cặp đôi F_i, M_i; khi đó, chúng ta có thể hoán đổi vị trí E_1 và E_i.

  Có tối đa $\frac{n}{4}$ chỉ số i sao cho E_1 không thích F_i và tối đa $\frac{n}{4}$ chỉ số i sao cho E_1 không thích M_i, nên sẽ không quá $\frac{n}{2}$ chỉ số i sao cho E_1 không thích một ai đó trong cặp M_i, F_i, và tập các chỉ số không phù hợp đó đã bao gồm 1. Tương tự, có tối đa $\frac{n}{2}$ chỉ số i sao cho hoặc M_1 hoặc F_1 sẽ không thích E_i. Vì cả hai tập các chỉ số i không thoả mãn đều chỉ chứa tối đa $\frac{n}{2}$ phần tử và đều có chứa 1, chúng ta có một chỉ số i nào đó thoả mãn tất cả các điều kiện đã đề ra. Chính vì thế, chúng ta luôn có cách để thực hiện một phép biến đổi để làm giảm độ "không hạnh phúc".

□

Lời giải 2. Giả sử rằng $k \geqslant \frac{3n}{4}$ và chứng minh rằng chúng ta có thể "tác hợp" cho tất cả các thành viên của đoàn thám hiểm. Đầu tiên, chúng ta chứng minh rằng tồn tại một cách "tác hợp" hoàn hảo giữa M và F. Chúng ta cần kiểm tra điều kiện của Định lý đám cưới (hay còn được biết đến với tên gọi Định lý Hall). Nói cách khác, với $A \subset M$, đặt $B \subset F$ là tập tất cả các đỉnh của F kề với ít nhất một đỉnh của A. Khi đó, chúng ta cần chứng minh rằng $|A| \leqslant |B|$. Chúng ta giả sử ngược lại, tức là $|A| > |B|$. Rõ ràng, $|B| \geqslant k$ nếu A không phải là một tập rỗng. Chúng ta xét $f \in F \setminus B$ bất kì. Khi đó, f sẽ không kề với bất kì đỉnh nào của A, tức là f có bậc trong M không lớn hơn $n - |A| < n - |B| < n - k \leqslant \frac{n}{4}$, mâu thuẫn.

Bây giờ, chúng ta sẽ xây dựng một đồ thị bipartile, gọi là H. Tập các đỉnh của nó sẽ là $P \cup E$, với P là tập các cặp male - female từ các cặp "tác hợp" hoàn hảo chúng ta vừa tìm được. Chúng ta sẽ có một cạnh từ $(m, f) = p \in P$ đến $e \in E$ với mỗi chu trình độ dài 3 (m, f, e) của đồ thị G, với $(m, f) \in P$ và $e \in E$. Chú ý rằng, bậc của mỗi đỉnh của P trong H tối thiểu sẽ là $2k - n$.

Phần còn lại, chúng ta chứng minh H thoả mãn điều kiện của Định lý đám cưới (hay Định lý Hall) và khi đó, có một phép "tác hợp" hoàn hảo. Giả sử ngược lại, điều sau đây xảy ra: Tồn tại $A \in P$ và $B \in E$ sao cho $|A| = l$, $|B| < p$, và B là tập tất cả các đỉnh của E kề với ít nhất một đỉnh của A. Vì bậc của mỗi đỉnh của B tối thiểu sẽ là $2k - n$, chúng ta có $2k - n \leqslant |B| < l$. Mặt khác, đặt $e \in E \setminus B$. Khi đó, với mỗi cặp $(m, f) = p \in P$, tối đa một trong các cặp (e, m) và (m, f) sẽ được nối bằng một cạnh và khi đó, bậc của e trong G tối đa sẽ là $|M \setminus A| + |F \setminus A| + |A| = 2(n - 1) + l = 2n - l$. Tuy nhiên, bậc của bất kì đỉnh nào trong G cũng là $2k$ và chúng ta có $2k \leqslant 2n - l$, hay $l \leqslant 2k - 2n$.

Cuối cùng, $2k - n < l \leqslant 2n - 2k$, tức là $k < \frac{3n}{4}$ (mâu thuẫn). Điều mâu thuẫn này đưa chúng ta đến điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Trong lời giải trên, chúng ta đã sử dụng các thuật ngữ về đồ thị bipartile và tripartile. Nhằm giúp bạn đọc dễ dàng theo dõi hơn, chúng ta tiến hành định nghĩa một đồ thị k-partile như sau:

Định nghĩa 1 (Đồ thị k-partile). *Đồ thị k-partile là đồ thị có các đỉnh đang hoặc có thể phân hoạc ra thành k tập độc lập riêng biệt. Hay nói cách khác, đồ thị này có thể được tô bằng k màu, sao cho không có hai đầu nào của một đỉnh của chung một màu. Khi $k = 2$, chúng ta gọi đồ thị này là đồ thị bipartile, và khi $k = 3$, chúng ta gọi đồ thị này là đồ thị tripartile.*

Chúng ta còn có một định nghĩa khác về đồ thị k-partile hoàn chỉnh như sau:

Định nghĩa 2 (Đồ thị k-partile hoàn chỉnh). *Một đồ thị k-partile hoàn chỉnh là một đồ thị k-partile sao cho luôn luôn có một cạnh nối hai đỉnh thuộc các tập độc lập khác nhau. Những đồ thị này được kí hiệu bằng một chữ cái K và một dãy các kích thước của các tập trong cách chia. Ví dụ, $K_{2,2,2}$ là một đồ thị tripartile hoàn chỉnh có dạng một lục giác đều, có thể chia thành ba tập độc lập, mỗi tập gồm hai đỉnh đối nhau.*

Sau khi đã đề cập đến định nghĩa của đồ thị k-partile, chúng ta phát biểu một định lý nổi tiếng về đồ thị bipartile, Định lý Hall (hay còn được biết đến với tên gọi Định lý đám cưới). Trong khuôn khổ bài viết, tác giả không thể đề cập hết chứng minh cũng như ứng dụng của định lý này. Bạn đọc có thể tham khảo thêm về Định lý này ở phần Tài liệu ở cuối bài viết.

Định lý 1 (Định lý Hall). *Cho đồ thị bipartile gồm hai tập độc lập phân biệt X, Y. Với mỗi tập con A thuộc X, gọi G(A) là tập các đỉnh thuộc Y kề với một đỉnh nào đó thuộc A. Khi đó, điều kiện cần và đủ để tồn tại một đơn ánh $f : X \to Y$ sao cho x kề $f(x)$ là*

$$|G(A)| \geqslant |A| \forall A \neq \emptyset, A \subset X$$

2.2. Giải tích

Bài toán 6 (IMC 2018, Day 2, Problem 7). *Cho $(a_n)^{+\infty}$ là một dãy các số thực với $a_0 = 0$ và*

$$a_{n+1}^3 = a_n^2 - 8.$$

Chứng minh rằng dãy số sau hội tụ:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|.$$

(Đề xuất bởi Orif Ibrogimov, Đại học Quốc gia Uzbekistan)

Lời giải chính thức. Chúng ta sẽ dự đoán tỉ số giữa các số hạng $|a_{n+2} - a_{n+1}|$ và $|a_{n+1} - a_n|$.

Trước đó, chúng ta giới hạn số hạng a_n bằng cách chứng minh rằng:

$$-2 \leqslant a_n \leqslant -\sqrt[3]{4}, \quad \forall n \geqslant 1$$

Chặn dưới có thể được suy ra thẳng từ quy luật của dãy số:

$$a_n = \sqrt[3]{a_{n-1}^2 - 8} \geqslant \sqrt[3]{-8} = -2.$$

Chúng ta cũng có thể chứng minh chặn trên bằng cách sử dụng quy nạp: Chúng ta có $a_1 = -2 < \sqrt[3]{4}$, và bất cứ khi nào $-2 \leqslant a_n < 0$, chúng ta đều có

$$a_{n+1} = \sqrt[3]{a_n^2 - 8} \leqslant \sqrt[3]{2^2 - 8} = -\sqrt[3]{4}.$$

Bây giờ, chúng ta sẽ so sánh $|a_{n+2} - a_{n+1}|$ và $|a_{n+1} - a_n|$. Bằng cách áp dụng những hằng đẳng thức như $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$, $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ và quy luật của dãy số, chúng ta có:

$$\begin{aligned}
(a_{n+2}^2 + a_{n+2}a_{n+1} + a_{n+1}^2) \times |a_{n+2} - a_{n+1}| &= |a_{n+2}^3 - a_{n+1}^3| \\
&= |(a_{n+1}^2 - 8) - (a_n^2 - 8)| \\
&= |a_{n+1} + a_n| \times |a_{n+1} - a_n|.
\end{aligned}$$

Ở vế trái, chúng ta có:

$$a_{n+2}^2 + a_{n+2}a_{n+1} + a_{n+1}^2 \geqslant 3 \times 4^{2/3};$$

và ở vế phải:

$$|a_{n+1} + a_n| \leqslant 4.$$

Chính vì vậy,

$$|a_{n+1} - a_n| \leqslant \frac{4}{3 \times 4^{2/3}} |a_{n+1} - a_n| = \frac{\sqrt[3]{4}}{3} |a_{n+1} - a_n|.$$

Bằng quy nạp, chúng ta hiển nhiên có:

$$|a_{n+1} - a_n| < \left(\frac{\sqrt[3]{4}}{3} \right)^{n-1} |a_2 - a_1|.$$

Đến đây, chúng ta có thể kết luận được rằng $\sum_{n=0}^{\infty}$ có thể được làm trội bởi một dãy cấp số nhân với công bội $\frac{\sqrt[3]{4}}{3} < 1$, điều này chứng minh rằng dãy này hội tụ. □

Lời giải của tác giả. Đầu tiên, thông qua phương pháp tương tự như ở **Lời giải chính thức**, chúng ta suy ra được

$$-2 \leqslant a_n \leqslant -\sqrt[3]{4}, \quad \forall n \geqslant 1$$

Chúng ta xét hàm số sau đây: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 8}$. Dễ dàng nhận thấy, đây chính là hàm số đặc trưng của dãy số $(a_n)^{\infty}$ trong đề bài. Đạo hàm của hàm số này sẽ là:

$$f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 - 8)^2}}.$$

Tiếp theo, chúng ta thừa nhận không chứng minh định lý sau:

Định lý 2 (Mean Value Theorem). *Cho a và b là hai số thực sao cho $a < b$. Biết rằng hàm số $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ là một hàm liên tục. Giả sử rằng f có đạo hàm trên đoạn $[a, b]$. Khi đó, tồn tại một số thực $c \in (a, b)$ sao cho:*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Định lý này có thể dễ dàng chứng minh bằng cách xét hàm số $h(x) = f(x) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) x$.

Sử dụng định lý này với x, y bất kì thuộc khoảng $[-2, 0)$, tồn tại một số thực $c \in (x, y)$ sao cho:

$$f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \frac{2c}{3\sqrt[3]{(x^2 - 8)^2}} = \frac{2}{3\left(\sqrt[3]{\frac{1}{c} - \frac{8}{c^3}}\right)^2}$$

Do $f'(c) > 0 \forall c \in (-2, 0)$, chúng ta có thể kết luận rằng, với mọi $x, y \in [-2, 0)$, $x < y$, luôn tồn tại một số thực c sao cho:

$$f'(c) = \left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| = \frac{2}{3\left(\sqrt[3]{\frac{1}{c} - \frac{8}{c^3}}\right)^2}$$

Bây giờ, chúng ta sẽ xét hàm số $g(x) = 1 - 8x^3$ để dự đoán giá trị của $f'(c)$. Đạo hàm của hàm số này sẽ là $g'(x) = -24x^2 < 0 \forall x \in \mathbb{R}$, tức là hàm số $g(x)$ sẽ lớn nhất khi x đạt giá trị nhỏ nhất. Trong trường hợp này, vì $c \in (-2, 0)$, chúng ta có $\frac{1}{c} \geqslant -\frac{1}{2}$, hay $\frac{1}{c} - \frac{8}{c^3}$ sẽ đạt giá trị cực đại tại $\frac{1}{c} = -\frac{1}{2}$, hay $c = -2$. Khi đó,

$$f'(c) \leqslant \frac{2}{3\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{2} - \frac{8}{(-2)^3}}\right)^2} < 1$$

Thay a_{n+1} và a_n vào x và y tuỳ ý, chúng ta có:

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| = f'(c)|a_{n+1} - a_n| < |a_{n+1} - a_n| \text{ vì } f'(c) < 1 \forall c \in [-2, 0)$$

Đến đây, chúng ta đã có thể kết luận dãy $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$ hội tụ. □

Bài toán 7 (IMC 2012, Day 1, Problem 4). *Cho hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm số liên tục và có đạo hàm thoả mãn điều kiện $f'(t) > f(f(t))$ với mọi $t \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng $f(f(f(t))) \leqslant 0$ với mọi $t \geqslant 0$.*

(Đề xuất bởi Tomas Bárta, Đại học Charles, Prague)

Lời giải. Chúng ta phát biểu và chứng minh những bổ đề sau:

Bổ đề 1. *Hoặc $\lim_{t\to+\infty} f(t)$ không tồn tại, hoặc $\lim_{t\to+\infty} f(t) \neq +\infty$.*

Giả sử rằng giới hạn của nó là $+\infty$. Khi đó, tồn tại $T_1 > 0$ sao cho với mọi $t > T_1$, chúng ta có $f(t) > 2$. Sau đó, tồn tại $T_2 > 0$ sao cho $f(t) > T_1$ với mọi $t > T_2$. Vì vậy, $f'(tt) > f(f(t)) > 2 \forall t > T_2$.
Lúc này, sẽ tồn tại một số T_3 sao cho $f(t) > t \forall t > T_3$. Vậy nên, $f'(t) > f(f(t)) > f(t)$, $\frac{f'(t)}{f(t)} > 1$. Lấy tích phân hai vế, chúng ta có $\ln(f(t)) - \ln(T_3) > t - t_3$, hay $f(t) > T_3 e^{t-T_3} \forall t > T_3$. Lấy tích phân một lần nữa từ T_3 đến t, chúng ta sẽ có $e^{-f(T_3)} - e^{-f(t)} > (t - T_3)T_3 e^{-T_3}$. Vế phải tiến đến vô cùng, nhưng vế trái bị chặn trên, vô lý. Chúng ta thu được kết quả như Bổ đề 1.

Bổ đề 2. *Với mọi $t > 0$, chúng ta có $f(t) < t$.*

Theo Bổ đề 1, sẽ có một số số thực t sao cho $f(t) < t$. Chính vì vậy, nếu điều chúng ta giả sử là sai, sẽ tồn tại một số $t_0 > 0$ nào đó sao cho $f(t_0) = t_0$.

- Trường hợp 1: Tồn tại một số số $t \geqslant t_0$ sao cho $f(t) < t_0$. Đặt $T = \inf\{t \geqslant t_0 : f(t) < t_0\}$. Vì tính liên tục của f, chúng ta có $f(T) = t_0$. Khi đó, $f'(T) > f(f(T)) = f(t_0) = t_0 > 0$. Điều này có nghĩa rằng $f > f(T) = t_0$ ở lân cận bên phải, trái ngược với định nghĩa của T.

- Trường hợp 2: $f(t) \geqslant 0 \forall t \geqslant t_0$. Khi đó, chúng ta có $f'(t) > f(f(t)) \geqslant t_0 > 0$. Vì vậy, f' sẽ có một chặn dưới dương trên khoảng $(t_0, +\infty)$, điều này trái ngược với Bổ đề 1 chúng ta đã chứng minh phía trên.

Bổ đề 3. *Bổ đề này gồm hai phát biểu như sau:*

(a) Nếu $f(s_1) > 0$ *và* $f(s_2) \geqslant s_1$*, khi đó* $f(s) > s_1 \forall s > s_2$.

(b) Trong trường hợp cụ thể hơn, nếu $s_1 \leqslant 0$ *và* $f(s_1) > 0$*, khi đó* $f(s) > s_1 \forall s > s_1$.

Giả sử rằng có một số giá trị $s > s_2$ sao cho $f(s) \leqslant s_1$ và đặt $S = \inf\{s > s_2 : f(s) \leqslant s_1\}$. Vì tính liên tục của hàm số , chúng ta có $f(S) = s_1$. Tương tự với Bổ đề 2, chúng ta có $f'(S) > f(f(S)) = f(s_1) > 0$. Nếu $S > s_2$, khi đó, ở lân cận bên trái của S chúng ta sẽ có $f < s_1$, trái ngược với định nghĩa của S. Nếu không, trong trường hợp $S = s_2$, chúng ta có $f > s_1$ trong lân cận bên phải của s_2, lại là một điều trái ngược nữa.

Phần (b) là một hệ quả tất yếu, nếu như chúng ta đặt $s_2 = s_1$.

Trở lại bài toán, với sự hỗ trợ của những Bổ đề trên, chúng ta sẽ chứng minh phát biểu của đề bài như sau.

Giả sử ngược lại, tồn tại một số $t_0 > 0$ sao cho $f(f(f(t_0))) > 0$. Đặt $t_1 = f(t_0), t_2 = f(t_1)$ và $t_3 = f(t_2) > 0$. Chúng ta chứng minh rằng $0 < t_3 < t_2 < t_1 < t_0$. Theo bổ đề hai, chúng ta có t_1 và t_2 dương. Nếu $t_1 < 0$, $f(t_1) \leqslant 0$ (nếu $f(t_1) > 0$, chọn $s = t_1$ ở Bổ đề 3(b) chúng ta sẽ được $f(t_0) > t_1$, mâu thuẫn). Nếu $t_1 = 0$, chúng ta có $f(t_1) \leqslant 0$ theo bổ đề 2 và tính liên tục của hàm f. Chính vì vậy, nếu $t_1 \leqslant 0$, $t_2 \leqslant 0$. Nếu $t_2 = 0$, $f(t_2) \leqslant 0$ theo Bổ đề 2 và tính liên tục của hàm số f (mâu thuẫn, vì $f(t_2) = t_3 > 0$). Nếu $t_2 < 0$, theo Bổ đề 3(b), $f(t_0) > t_2$, nên $t_1 > t_2$. Áp dụng Bổ đề 3(a), chúng ta có $f(t_1) > t_2$ (mâu thuẫn). Đến đây, chúng ta đã chứng minh được $0 < t_3 < t_2 < t_1 < t_0$.

Theo Bổ đề 3(a), $(f(t_1) > 0, f(t_0) \geqslant t_1)$, chúng ta có $f(t) > t_1$ với mọi $t > t_0$, và tương tự, $f(t) > t_2$ với mọi $t > t_1$. Từ đây, chúng ta cũng có với $t > t_0$, $f'(t) > f(f(t) > t_2 > 0$. Vì vậy, $\lim_{t\to+\infty} = +\infty$, mâu thuẫn. Điều mâu thuẫn này cho chúng ta kết quả $f(f(f(t))) \leqslant 0 \forall t > 0$. Với $t = 0$, kết quả này vẫn đúng nhờ vào tính liên tục của hàm f. ☐

Bài toán 8 (IMC 2014, Day 1, Problem 3). *Cho n là một số nguyên dương. Chứng minh rằng tồn tại những số thực dương* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *sao cho với mỗi cách chọn dấu của đa thức*

$$\pm a_n x^n + \pm a_{n-1} x^{n-1} \pm \ldots \pm a_1 x + a_0$$

có n nghiệm thực phân biệt.

(Đề xuất bởi Stephan Neupert, TUM, Munchen)

Lời giải. Chúng ta chứng minh bằng quy nạp theo n. Phát biểu của đề bài sẽ hiển nhiên đúng với trường hợp $n = 1$. Khi đó, giả sử rằng chúng ta có một số số $a_n, \ldots, a_0$ thoả mãn điều kiện đề bài với một số n nào đó. Bây giờ, chúng ta xét đa thức:

$$\tilde{P}(x) = \pm a_n x^{n+1} \pm a_{n-1} x^n \pm \ldots \pm a_1 x^2 \pm a_0 x$$

Theo giả thiết quy nạp và điều kiện $a_0 \neq 0$, mỗi đa thức trong số này sẽ có $n + 1$ nghiệm phân biệt, bao gồm n nghiệm khác 0 của $\pm a_n x^n \pm a_{n-1} x^{n-1} \pm \ldots \pm a_1 x \pm a_0$. Đặc biệt, không có đa thức nào có nghiệm là một "cực tiểu địa phương" (local extremum). Vì thế, chúng ta có thể chọn một số $\epsilon > 0$ nào đó sao cho với mỗi đa thức $\tilde{P}(x)$ và mỗi cực trị địa phương x của chúng, chúng ta có $|\tilde{P}(x)| > \epsilon$. Chúng ta có, mỗi đa thức trong số những đa thức:

$$P(x) = \pm a_n x^{n+1} \pm a_{n-1}x^n \pm \ldots \pm a_1 x^2 \pm a_0 x \pm \epsilon$$

cũng có đúng $n+1$ nghiệm phân biệt. Vì $\tilde{P}$ có $n+1$ nghiệm phân biệt, nó nhận n điểm cực trị địa phương. Gọi các điểm cực trị địa phương này là $-\infty = s_0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_n < s_{n+1} = \infty$. Vì vậy, với mỗi giá trị $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, các giá trị $\tilde{P}(s_i)$ và $\tilde{P}(s_{i+1})$ ngược dấu (với quy ước rõ ràng tại vô cực). Bằng cách chọn ϵ, điều này vẫn đúng cho $P(s_i)$ và $P(s_{i+1})$. Chính vì vậy, tồn tại ít nhất một nghiệm thực của $P(x)$ trong khoảng (s_i, s_{i+1}), hay $P(x)$ có ít nhất (đồng nghĩa với việc sẽ có chính xác) $n + 1$ nghiệm thực. Điều này cho thấy rằng chúng ta đã tìm thấy tập các số thực dương $a'_{n+1} = a_n, a'_n = a_{n-1}, \ldots, a'_1 = a_0, a'_0 = \epsilon$ thoả mãn các tính chất của đề bài. □

Bài toán 9 (IMC 2006, Day 1, Problem 4). *Biết rằng f là một hàm hữu tỉ (tức là thương của hai đa thức hệ số thực), và giả sử rằng $f(n)$ là một số nguyên với vô hạn các số nguyên n. Chứng minh rằng f là một đa thức.*

Lời giải. Đặt S là một tập vô hạn các số nguyên sao cho hàm hữu tỉ $f(x)$ có thể lấy tích phân với mọi $x \in S$.

Giả sử rằng

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

với p là đa thức bậc k và q là đa thức bậc n. Khi đó, p, q sẽ là nghiệm của hệ phương trình

$$p(x) = q(x)f(x)$$

với mọi $x \in S$ không là nghiệm của q. Đây là hệ phương trình tuyến tính với hệ số của p, q là các đa thức với hệ số hữu tỉ. Bởi vì chúng có nghiệm, chúng sẽ có nghiệm hữu tỉ.

Khi đó, sẽ có các đa thức p', q' với hệ số hữu tỉ sao cho

$$p'(x) = q'(x)f(x)$$

với mọi $x \in S$ không là nghiệm của q. Nhân phương trỉnh này với phương trình ở trên, chúng ta được

$$p'(x)q(x)f(x) = p(x)q'(x)f(x)$$

với mọi $x \in S$ không là nghiệm cũa q. Nếu x không phải là nghiệm của p hoặc q, $f(x) \neq 0$, và khi đó,

$$p'(x)q(x) = p(x)q'(x)$$

với mọi $x \in S$, trừ hữu hạn các nghiệm của p và q. Vì vậy, hai đa thức $p'q$ và pq' bằng nhau với vô hạn cách chọn các giá trị của x. Chính vì vậy,

$$p'(x)q(x) = p(x)q'(x).$$

Chia hai vế cho $q(x)q'(x)$, chúng ta thấy rằng

$$\frac{p'(x)}{q'(x)} = \frac{p(x)}{q(x)} = f(x).$$

Chúng ta kết luận rằng $f(x)$ có thể viết được dưới dạng thương của hai đa thức với hệ số hữu tỉ. Nhân cả hai đa thức với một vài số nguyên, chúng ta kết luận $f(x)$ có thể viết được dưới dại thương của hai đa thức với hệ số nguyên.

Giả sử

$$f(x) = \frac{p"(x)}{q"(x)}$$

với $p"(x)$ và $q"(x)$ đều có các hệ số nguyên. Khi đó, bằng thuật toán chia đa thức của Euler, tồn tại các đa thức s và r, cả hai đều có các hệ số hữu tỉ sao cho

$$p"(x) = q"(x)s(x) + r(x)$$

với bậc của r nhỏ hơn bậc của $q"$. Chia hai vế với $q"(x)$, chúng ta được

$$f(x) = s(x) + \frac{r(x)}{q"(x)}$$

Lúc này, tồn tại một số nguyên N sao cho $Ns(x)$ có hệ số dương. Khi đó, $Nf(x) - Ns(x)$ là một số nguyên với mọi $x \in S$. Tuy nhiên, hàm số này lại bằng hàm hữu tỉ $\frac{Nr(x)}{q"(x)}$, hàm số có bậc của mẫu cao hơn bậc của tử, nên hàm này sẽ tiến đến 0 khi x tiến đến $+\infty$. Vì vậy, với $x \in S$ đủ lớn, chúng ta có

$$Nf(x) - Ns(x) = 0,$$

hay $r(x) = 0$. Như vậy, r có vô hạn nghiệm, tức là đa thức này sẽ trùng với đa thức 0. Lúc này $f(x) = s(x)$, hay chúng ta kết luận được f là đa thức. □

Bài toán 10 (IMC 2015, Day 2, Question 8). *Cho n là một số nguyên dương, và gọi $p(n)$ là một đa thức bậc n với hệ số nguyên. Chứng minh rằng:*

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |p(x)| > \frac{1}{e^n}$$

(Đề xuất bởi Géza Kós, Đại học Eotvos, Budapest)

Lời giải. Đặt

$$M = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |p(x)|$$

Với mỗi số nguyên dương k, đặt

$$k = \int_0^1 (p(x))^{2k} dx$$

Rõ ràng, $0 < J_k < M^{2k}$ là một số hữu tỉ. Nếu $(p(x)) = \sum_{i=0}^{2kn} a_{k,i} x^i$, $J_k = \sum_{i=0}^{2kn} \frac{a_{k,i}}{i+1}$. Lấy mẫu chung nhỏ nhất, chúng ta có thể thấy rằng $J_k \geqslant \frac{1}{lcm(1,2,...,2kn+1)}$..

Một biến thể của Bổ đề về số nguyên tố cho chúng ta biết rằng $\log lcm(1, 2, \ldots, N) \sim N$ nếu $N \to \infty$. Khi đấy, với mỗi $\epsilon > 0$ và k đủ lớn, chúng ta có:

$$lcm(1, 2, .., 2kn + 1) < e^{(1+\epsilon)(2kn+1)}$$

và khi đó

$$M^{2k} > J_k \geqslant \frac{1}{lcm(1,2,..,2nk+1)} > \frac{1}{e^{(1+\epsilon)(2kn+1)}}$$

$$M > \frac{1}{e^{(1+\epsilon)\left(n+\frac{1}{2k}\right)}}$$

Đưa $k \to +\infty$ và lấy $\epsilon \to +0$, chúng ta có:

$$M \geqslant \frac{1}{e^n}$$

Vì e là một số siêu việt, dấu bằng hoàn toàn có thể xảy ra. □

Nhận xét. Hằng số $\frac{1}{e} \approx$ không phải là một ước lượng chặt. Hằng số ước lượng chặt nhất cho biểu thức này từng được biết đến nằm trong khoảng từ 0.4213 đến 0.4232. (I. E. Prisker, The Gelfond-Schnirelman method in prime number theory, Canad. J. Math, 57 (2005), 1080-1101.)

Ngoài ra, trong chứng minh trên, chúng ta đã sử dụng một kết quả nổi tiếng trong Lý thuyết số, đó chính là Bổ đề về số nguyên tố (Prime number theory - PNT). Bổ đề này cụ thể hoá ý tưởng rằng các số nguyên tố xuất hiện thưa dần khi chúng tiến đến vô cùng bằng cách ước lượng tốc độ của sự chậm đi này. Đã có hai phép chứng minh được công bố độc lập bởi hai nhà toán học, Jacques Hadamard và Charles Jean de la Vallée Poussin vào năm 198, sử dụng ý tưởng của Barnhard Riemann, cụ thể là hàm Riemann Zeta. Bổ đề đó được phát biểu cụ thể như sau:

Định lý 3 (Prime number theory - PNT). *Gọi $\pi(x)$ là hàm đếm các số nguyên tố, cho kết quả là số các số nguyên tố nhỏ hơn hoặc bằng x với mọi số thực x. Ví dụ, $\pi(10) = 4$, vì có 4 số nguyên tố $(2,3,5,7)$ nhỏ hơn hoặc bằng 10. Định lý về số nguyên tố phát biểu rằng $\frac{x}{\log(x)}$ là một ước lượng tốt của $\pi(x)$, với ý nghĩa rằng thương số của hai hàm số $\pi(x)$ và $\frac{x}{\log(x)}$ khi x tăng vô hạn là 1:*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi(x)}{\left[\frac{x}{\log(x)}\right]} = 1,$$

biểu thức này được xem như một uóc lượng của hàm phân phối các số nguyên tố.

Sử dụng dấu xấp xỉ, chúng ta có thể viết lại biểu thức trên như sau:

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)}$$

Bổ đề về số nguyên tố tương đương với phát biểu rằng số nguyên tố thứ n, p_n thoả mãn:

$$p_n \sim n\log(n)$$

Dấu xấp xỉ, một lần nữa, cho chúng ta biết rằng sai số tương đối của ước lượng này tiến về 0 khi n tăng vô hạn.

Bổ đề về số nguyên tố tương đương với biểu thức sau:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\vartheta(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1,$$

trong đó ϑ và ψ tương ứng là các hàm Chebyshev thứ nhất và thứ hai.

Hàm Chebyshev thứ nhất $\vartheta(x)$ hay $\theta(x)$, được cho bởi công thức:

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leqslant x} \log(p)$$

với tổng phủ trên tất cả những số nguyên tố p nhỏ hơn hoặc bằng x.

Hàm Chebyshev thứ hai, $\psi(x)$ được định nghĩa tương tự, với tổng trải dài trên luỹ thừa của số nguyên tố không vượt quá x:

$$\psi(x) = \sum_{p^k \leqslant x} \log(p) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) = \sum_{p \leqslant x} \lfloor \log_p x \rfloor \log p$$

với Λ là hàm von Mangoldt. Các hàm Chebyshev, đặc biệt là hàm Chebyshev thứ hai, thường được dùng trong các chứng minh liên quan đến số nguyên tố.

Bây giờ, chúng ta sẽ xét về quan hệ giữa hai hàm số Chebyshev, và giữa hàm Chebyshev với các hàm cơ bản. Hàm số Chebyshev thứ hai có thể được liên hệ đến hàm số thứ nhất thông qua việc viết nó dưới dạng

$$\psi(x) = \sum_{p \leqslant x} k \log(p)$$

với k là số nguyên duy nhất sao cho $p^k \leqslant x \leqslant p^{k+1}$. Một mối tương quan trực tiếp hơn nữa giữa hai hàm có thể thấy được thông qua cách biểu diễn sau:

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \vartheta\left(x^{\frac{1}{n}}\right)$$

Chú ý rằng tổng này chỉ có một số hữu hạng các hạng tử không bị tiêu biến, bởi vì

$$\vartheta\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = 0 \text{ với } n > log_2 x = \frac{\log(x)}{\log(2)}$$

Hàm Chebyshev thứ hai là log của bội chung nhỏ nhất của các số nguyên từ 1 đến n:

$$lcm(1, 2, \ldots, n) = e^{\psi(n)}$$

Đến đây, chúng ta đã có thể suy ra được quan hệ sử dụng trong lời giải ở trên.

Bài toán 11 (IMC 2015, Day 2, Problem 7). *Tính:*

$$\lim_{A \to +\infty} \frac{1}{A} \int_1^A A^{\frac{1}{x}} dx.$$

(Đề xuất bởi Jan Sustek, Đại học Ostrava)

Lời giải 1.. Chúng ta chứng minh rằng:

$$\lim_{A\to+\infty} \frac{1}{A}\int_1^A A^{\frac{1}{x}}dx = 1.$$

Với $A = 1$, hàm lấy tích phân của chúng ta sẽ lớn hơn 1. Khi đó,

$$\frac{1}{a}\int_1^A A^{\frac{1}{x}} > \frac{1}{A}\int_1^A 1dx = \frac{1}{A}(A-1) = 1 - \frac{1}{A}.$$

Để có thể tìm được một chặn trên chặt, chúng ta cố định hai số thực, $\delta > 0$ và $K > 0$, và chia khoảng thành 3 phần tại các điểm $1+\delta$ và $K\log A$. Để ý rằng với A đủ lớn (ví dụ, $A > A_0(\delta, K)$ với một số $A_0(\delta, K) > 1$ nào đó), chúng ta có $1 + \delta < K\log A < A$. Với $A > 1$, hàm lấy tích phân của chúng ta đang giảm, nên chúng ta có thể ước lượng nó bằng những giá trị của nó tại những điểm biên của khoảng:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{A}\int_1^A A^{\frac{1}{x}}dx &= \frac{1}{A}\left(\int_1^{1+\delta} + \int_{1+\delta}^{K\log A} + \int_{K\log A}^{A}\right) < \\
&= \frac{1}{A}\left(\delta\times A + (K\log A - 1 - \delta)A^{\frac{1}{1+\delta}} + (A - K\log A)A^{\frac{1}{K\log A}}\right)\\
&< \frac{1}{A}\left(\delta A + KA^{\frac{1}{1+\delta}}\log A + A\times A^{\frac{1}{K\log A}}\right) = \\
&= \delta + KA^{-\frac{\delta}{1+\delta}}\log A + e^{\frac{1}{K}}
\end{aligned}$$

Vì vậy, với $A > A_0(\delta, K)$, chúng ta có:

$$1 - \frac{1}{A} < \frac{1}{A}\int_1^A A^{\frac{1}{x}}dx < \delta + KA^{-\frac{\delta}{1+\delta}}\log A + e^{\frac{1}{K}}$$

Lấy giới hạn $A \to +\infty$, chúng ta có:

$$1 \leqslant \lim_{A\to+\infty}\inf\frac{1}{A}\int_1^A A^{\frac{1}{x}}dx \leqslant \lim_{A\to+\infty}\sup\frac{1}{A}\int_1^A A^{\frac{1}{x}} \leqslant \delta + e^{\frac{1}{K}}.$$

Bây giờ, từ $\delta \to +0$ và $K \to \infty$, chúng ta có:

$$1 \leqslant \lim_{A\to+\infty}\inf\frac{1}{A}\int_1^A A^{\frac{1}{x}}dx \leqslant \lim_{A\to+\infty}\sup\frac{1}{A}\int_1^A A^{\frac{1}{x}} \leqslant 1,$$

Khi đó,

$$\lim_{A\to+\infty}\inf\frac{1}{A}\int_1^A A^{\frac{1}{x}}dx = \lim_{A\to+\infty}\sup\frac{1}{A}\int_1^A A^{\frac{1}{x}} = 1$$

và chúng ta kết luận được

$$\lim_{A\to+\infty} \frac{1}{A}\int_1^A A^{\frac{1}{x}}dx = 1.$$

□

Lời giải 2.. Một phương án tiếp cận khác khá hữu ích cho bài toán này chính là nguyên tắc L'Hospital. Có nhiều cách giải sử dụng nguyên tắc này, tác giả sẽ giới thiệu cách sử dụng đơn giản và trực quan nhất, bao gồm các phép biến đổi thuần tuý.

Chúng ta có:

$$\begin{aligned}
\lim_{A\to\infty} \frac{1}{A}\int_1^A A^{\frac{1}{x}}dx &= \lim_{A\to\infty} A^{\frac{1}{A}} + \int_1^A \frac{A^{\frac{1}{x}-1}}{x}dx = \\
&= 1 + \lim_{A\to\infty} \frac{1}{A}\int_1^A \frac{A^{\frac{1}{x}}}{x}dx = \\
&= 1 + \lim_{A\to\infty} \frac{A^{\frac{1}{A}}}{A} + \int_1^A \frac{A^{\frac{1}{x}-1}}{x^2}dx = \\
&= 1 + \lim_{A\to\infty} \frac{1}{A}\int_1^A \frac{A^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx = \\
&= 1 + \lim_{A\to\infty} \frac{1}{A}\cdot\frac{A - A^{\frac{1}{A}}}{\ln A} = \\
&= 1
\end{aligned}$$

□

Lời giải 3. Đặt $f(x) = A^{\frac{1}{x}}$, chúng ta có, với mỗi số nguyên dương n:

$$f(n+1) < \int_n^{n+1} f(x)dx < f(n)$$

Khi đó,

$$\frac{\sum_{i=2}^{[A]} f(i)}{[A]+1} < \frac{1}{[A]+1}\int_1^{[A]} A^{\frac{1}{x}}\,dx < \frac{1}{A}\int_1^A A^{\frac{1}{x}}\,dx < \frac{1}{[A]}\int_1^{[A]+1} A^{\frac{1}{x}}\,dx < \frac{\sum_{i=1}^{[A]} f(i)}{[A]}$$

Áp dụng Định lý kẹp Shtolz - Chezaro, chúng ta có:

$$\lim_{A\to+\infty} \frac{\sum_{i=1}^{[A]} f(i)}{[A]} = \lim_{A\to+\infty} \frac{f([A]+1)}{[A+1]-[A]} = 1$$

và

$$\lim_{A\ to+\infty} \frac{\sum_{i=1}^{[A]} f(i)}{[A]} = \lim_{A\to+\infty} \frac{f([A]+1)}{[A+1]-[A]} = 1$$

Theo nguyên lý kẹp, chúng ta có:

$$\lim_{A\to+\infty} \frac{1}{A}\int_1^A A^{\frac{1}{x}}\,dx = 1.$$

□

2.3. Số học

Bài toán 12 (IMC 2012, Day 2, Problem 3). *Số các số nguyên dương n sao cho $n! + 1$ chia hết $(2012n)!$ là hữu hạn hay vô hạn ?*

(Đề xuất bởi Fedor Petrov, Đại học bang St. Petersburg)

Lời giải 1. Xét một số thực dương n sao cho $n! + 1|(2012n)!$.

Chúng ta biết một điều hiển nhiên rằng với các số nguyên không âm tuỳ ý $a_1, \dots, a_k$, $(a_1 + \dots + a_k)!$ chia hết cho $a_1! \dots a_k!$. (Số các dãy số có chứa a_1 số 1, …, a_k số k là $\frac{(a_1+\dots+a_k)!}{a_1!\dots a_k!}$.

Cụ thể hơn, đến đây, chúng ta có $(n!)^2012$ chia hết $(2012n)!$.

Bởi vì $n! + 1$ nguyên tố cùng nhau với $(n!)^{2012}$, tích của chúng $(n! + 1)(n!)^{2012}$ cũng sẽ chia hết $(2012n)!$, và khi đó:

$$(n! + 1) \times (n!)^{2012} \leqslant (2012n)!$$

Sử dụng bất đẳng thức nổi tiếng sau:

$$\left(\frac{n+1}{e}\right)^n < n! \leqslant n^n,$$

chúng ta có

$$\left(\frac{n}{e}\right)^{2013n} < (n!)^{2013} < (n! + 1)(n!)^{2012} \leqslant (2012n)! < (2012n)^{2012n}$$

$$n < 2012^{2012} e^{2013}$$

Như vậy, chúng ta chỉ có hữu hạn số tự nhiên n thoả mãn điều kiện đề bài. □

Nhận xét. Thay vì sử dụng ước lượng $\left(\frac{n+1}{e}\right)^n < n!$, chúng ta sử dụng hệ số của hoán vị có lặp:

$$(x_1 + \dots + x_l)^N = \sum_{k_1+\dots+k_l=N} \frac{N!}{k_1! \dots k_l!} x_1^{k_1} \dots x_l^{k_1}$$

Áp dụng công thức trên với $N = 2012n, l = 2012$ và $x_1 = \dots = x_l = 1$, chúng ta có:

$$\frac{(2012n)!}{(n!)^{2012}} < (1 + 1 + \dots + 1)^{2012n} = 2012^{2012n},$$

$$n! < n! + 1 \frac{(2012n)!}{(n!)^{2012}} < 2012^{2012n}.$$

Ở vế phải, chúng ta có một cấp số nhân, và dĩ nhiên cấp số nhân này sẽ tăng chậm hơn so với hàm giai thừa ở vế trái. Chính vì thế, bất đẳng thức này chỉ đúng với một số giá trị n nhất định.

Lời giải 2. Giả sử rằng $n > 2012$ là một số nguyên sao cho $n! + 1|(2012n)!$. Để ý rằng tất cả các ước nguyên tố của $n! + 1$ đều lớn hơn n, và tất cả các ước nguyên tố của $(2012n)!$ đều nhỏ hơn $2012n$.

Xét một số nguyên tố p sao cho $n < p < 2012n$. Trong các số $1, 2, \dots, 2012n$, có $\left[\frac{2012n}{p}\right] < 2012$ số chia hết cho p; vì $p^2 > n^2 > 2012n$, sẽ không có số nào chia hết cho p^2. Chính vì vậy, luỹ thừa của p trong khai triển ra thừa số nguyên tố của $(2012n)!$ cao nhất sẽ là 2011. Khi đó,

$$n! + 1 = \gcd(n! + 1, (2012n)!) < \prod_{n<p<2012p} p^{2011}$$

Áp dụng bất đẳng thức $\prod_{p\leqslant X} p < 4^X$, chúng ta có:

$$n! < \prod_{n<p<2012p} p^{2011} < \left(\prod_{p<2012n} p\right)^{2011} < (4^{2012n})^{2011} = (4^{2012\times 2011})^n$$

Một lần nữa, chúng ta lại có một hàm luỹ thừa ở vế trái và một cấp số nhân ở vế phải. □

Lời giải 3. Vì $(n!)^{2012}|(2012n)!$, và vì $\gcd(n!, n!+1) = 1$, chúng ta có $(n!)^{2013}+(n!)^{2012}|(2012n)!$. Ngoài ra:

$$(n+1)^{2012}\frac{(n+1)!+1}{n!+1} > (2012n+2012)(2012n+2011)\dots(2012n+1)$$

$$\Leftrightarrow f(n) = \frac{(2012n)!}{(n!)^{2013}+(n!)^{2012}} > \frac{(2012n+2012)!}{((n+1)!)^{2013}+((n+1)!)^{2012}} = f(n+1)$$

Chúng ta thấy $\frac{(n+1)!+1}{n!+1} > n$, trong khi

$$(2012n+2012)(2012n+2011)\dots(2012n+1) < (2012n+2012)^{2012} = 2012^{2012}(n+1)^{2012}.$$

Chính vì thế, bất đẳng thức ở trên sẽ đúng với một giá trị n đủ lớn. Chính vì thế, đến một giá trị n đủ lớn, hàm số $f(n)$ sẽ là một hàm giảm ngặt. Giả sử rằng tồn tại vô hạn số nguyên n sao cho $f(n)$ là một số nguyên, chúng ta gọi chúng là $a_1 < a_2 < \dots$, khi đó, đến một lúc nào đó, dãy số nguyên này sẽ trở thành dãy hằng, tức là $\exists k, f(a_k) = f(a_{k+1}) = \dots$. Vì f là một hàm giảm, chúng ta có $f(a_k) = f(a_{k+1}) = f_{a_{k+2}} = \dots$. Chính vì vậy, với mọi $t > a_k$, chúng ta đều có:

$$\frac{(2012t)!}{(t!)^{2013}+(t!)^{2012}} = \frac{(2012t+2012)!}{((t+1)!)^{2013}+((t+1)!)^{2012}}$$

hay

$$(t+1)^{2012}\frac{(t+1)!+1}{t!+1} = (2012t+2012)(2012t+2011)\dots(2012t+1)$$

Áp dụng lý luận tương tự bên trên, chúng ta sẽ thấy rằng, đẳng thức này sẽ không còn đúng với một số t đủ lớn (vì khi đó, vế trái sẽ tăng nhanh và lớn hơn vế phải). Chúng ta có điều phải chứng minh. □

Bài toán 13 (IMC 2013, Day 2, Problem 4). *Có tồn tại hay không một tập vô hạn M gồm những số nguyên dương sao cho với hai số $a, b \in M$ bất kì, $a < b$, chúng ta có tổng $a + b$ là một số phi-bình-phương ?*

(Định nghĩa: Một số nguyên dương được xem là phi-bình-phương khi không có bất kì một số chính phương nào lớn hơn 1 chia hết nó.)

(Đề xuất bởi Fedor Petrov, Đại học Bang St. Petersburg)

Lời giải. Câu trả lời là có. Chúng ta xây dựng một dãy vô hạn $1 = n_1 < 2 = n_2 < n_3 < \ldots$ sao cho $n_i + n_j$ là một số phi-bình-phương với mọi $i < j$. Giả sử rằng chúng ta đã có một số số $n_k > \ldots < n_k (k \geqslant 2)$ thoả mãn điều kiện đó, và chúng ta đi tìm một số hạng n_{k+1} thích hợp để làm số hạng tiếp theo của dãy đó.

Chúng ta sẽ chọn n_{k+1} dưới dạng $n_{k+1} = 1 + Mx$, với $M = ((n_1 + \ldots + n_k + 2k)!)^2$ và một số nguyên dương x nào đó. Với $i = 1, 2, \ldots, k$, chúng ta có $n_i + n_{k+1} = 1 + Mx + n_i = (1 + n_i)m_i$, với m_i và M nguyên tố cùng nhau, nên bất cứ số chính phương nào chia hết $1 + Mx + n_i$ cũng sẽ nguyên tố cùng nhau với M.

Để có thể tìm được một số x thích hợp, chọn một số N đủ lớn và xét các giá trị $x = 1, 2, \ldots, N$. Nếu một giá trị $1 \geqslant x < N$ không phù hợp, điều này có nghĩa rằng sẽ tồn tại một chỉ số $1 \geqslant i \geqslant k$ và một số nguyên tố p nào đó sao cho $p^2 | 1 + Mx + n_i$. Với $p \leqslant 2k$, điều này là không thể xảy ra bởi vì $p | M$. Hơn nữa, chúng ta còn có $p^2 \leqslant 1 + Mx + n_i < M(N + 1)$, nên $2k < p < \sqrt{M(N + 1)}$.

Với i và p cố định, các giá trị của x sao cho $p^2 | 1 + Mx + n_i$ là một cấp số cộng với công sai p^2. Chính vì vậy, sẽ có tối đa $\frac{N}{p^2} + 1$ các giá trị như vậy. Tổng kết lại, số những số x không phù hợp sẽ là

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{2k < p < \sqrt{M(N+1)}} \left(\frac{N}{p^2} + 1 \right) < k \times \left(N \sum_{p > 2k} \frac{1}{p^2} + \sum_{p < \sqrt{M(N+1}} 1 \right)$$

$$< kN \sum_{p > 2k} \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} \right) + k\sqrt{M(N+1)} < \frac{N}{2} + k\sqrt{M(N+1)}$$

Nếu N đủ lớn, số này sẽ nhỏ hơn N; và khi đó, chắc chắn tồn tại một số x thích hợp. □

Nhận xét. Đây là một trong những bài toán về số học đẹp nhất trong những kì thi Toán học những năm gần đấy, tính cả những kì thi quốc tế cho học sinh và sinh viên. Điểm mấu chốt ở đây là nếu $a_1, \ldots, a_k$ là những số nguyên dương sao cho $a_1, \ldots, a_k$ không thể bao phủ hết các số dư trong phép chia cho p^2, với p là một số nguyên tố, chúng ta có thể tìm vô hạn số $n > 1$ sao cho $n + a_i$ phi-bình-phương với mọi i.

Nhận xét này cho phép chúng ta xây dựng một dãy $a_1, a_2, \ldots$ bằng cách xây dựng cách thêm một phần tử mới từ một dãy các phần tử có sẵn. Chú ý thêm nữa rằng, nếu $a_1, a_2, \ldots, a_k$ không thể bao phủ hết các số dư trong phép chia cho p^2 với mọi p, thì nếu chúng ta thêm một phần tử a_{k+1} sao cho $a_{k+1} + a_1, \ldots, a_{k+1} + a_k$ là các số phi-bình-phương, thì $a_1, \ldots, a_{k+1}$ cũng không thể bao phủ hết các số dư trong phép chia cho p^2 với mọi p.

Bài toán 14 (IMC 2016, Day 2, Problem 3). *Cho n là một số nguyên dương, và gọi $\mathbb{Z}_n$ là vành các nhóm số nguyên modulo n. Giả sử rằng tồn tại một hàm số $f : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ thoả mãn ba tính chất sau:*

(i) $f(x) \neq x$

(ii) $f(f(x)) = x$

(iii) $f(f(f(x+1)+1)+1) = x$ *với mọi* $x \in \mathbb{Z}_n$

Chứng minh rằng $n \equiv 2 (\text{mod} 4)$.

Lời giải. Từ giả thiết (ii), chúng ta có thể thấy rằng f toàn ánh, vì vậy f sẽ là một phép hoán vị của các phần tử trong $\mathbb{Z}_n$, và bậc của hoán vị này cao nhất sẽ là 2. Chính vì vậy, phép hoán vị f sẽ là tích của các phép chuyển vị có dạng $(x, f(x))$.

Từ giả thiết (i), chúng ta có phép hoán vị này sẽ không có một điểm cố định nào cả, tức là sẽ không tồn tại một phần tử x nào sao cho $f(x) = x$, nên n phải chẵn, và số phép chuyển vị sẽ đúng bằng $\frac{n}{2}$.

Xét phép hoán vị $g(x) = f(x+1)$. Nếu g là hoán vị lẻ, $g \circ g \circ g$ cũng sẽ là một hoán vị lẻ. Tuy nhiên, giả thiết (iii.) đã xác nhận rằng $g \circ g \circ g$ là một hoán vị chẵn, vì nó là một hoán vị biến x thành chính nó. Vì vậy, g không thể là một hoán vị lẻ; g phải là một hoán vị chẵn. Phép hoán vị vòng quanh $h(x) = x - 1$ có bậc n, với n là một số chẵn, nên h là một hoán vị lẻ. Khi đó, $f(x) = g \circ h$ sẽ là một hoán vị chẵn. Vì f là tích của $\frac{n}{2}$ phép chuyển vị, điều này cho chúng ta biết rằng $\frac{n}{2}$ lẻ, hay $n \equiv 2 (\text{mod} 4)$ □

Nhận xét. Ở trên, chúng ta đã sử dụng các khái niệm hoán vị chẵn và hoán vị lẻ. Để làm rõ hai thuật ngữ này, đầu tiên, chúng ta định nghĩa lại nghịch thế.

Bổ đề 4 (Nghịch thế). *Với mỗi phép hoán vị σ, ta gọi (x_i, x_j) là một nghịch thế của σ nếu $x_i < x_j$ nhưng $\sigma(x_i) > \sigma(x_j)$*

Đến đây, chúng ta đã có thể định nghĩa các hoán vị chẵn và lẻ, dựa vào số lượng của phép nghịch thế trong phép hoán vị đó.

Bổ đề 5 (Tính chẵn lẻ của hoán vị). *Tính chẵn lẻ của một hoán vị σ là tính chẵn lẻ của số nghịch thế của σ.*

- *Nếu số cặp nghịch thế của một phép hoán vị σ là một số chẵn thì σ được gọi là một phép hoán vị chẵn*
- *Nếu số cặp nghịch thế của một phép hoán vị σ là một số lẻ thì σ được gọi là một phép hoán vị lẻ*

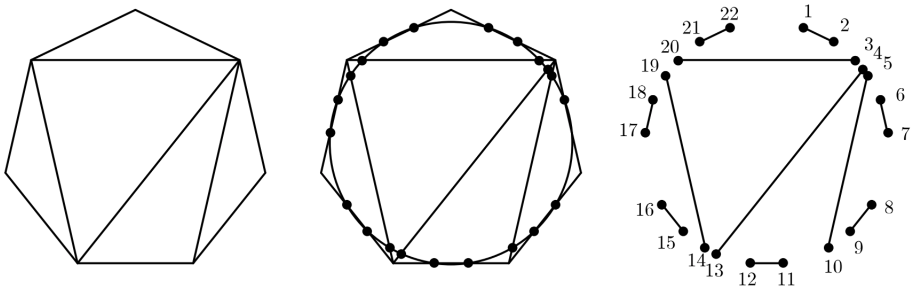
Với mỗi $n \equiv 2(\bmod 4)$, chúng ta đều có thể xây dựng một hàm số với các tính chất thoả mãn cả 3 tính chất của đề bài.

Với $n = 2$, chúng ta chọn f với $f(1) = 2$, $f(2) = 1$. Ở đây, chúng ta sẽ xây dựng một cách xây dựng hàm f với $n \geqslant 6$.

Đặt $n = 4k + 2$, xét một đa giác đều với $k + 2$ cạnh, và chia nó thành k tam giác với $k - 1$ đường chéo. Vẽ một hình tròn sao cho nó cắt mỗi cạnh và mội đường chéo hai lần; tổng cộng chúng ta sẽ có $4k + 2$ giao điểm. Đánh số các giao điểm theo chiều kim đồng hồ xung quanh hình tròn. Với mỗi cạnh hoặc đường chéo, chúng ta có 2 giao điểm; chúng ta sẽ xây dựng f biến điểm này thành điểm kia, và ngược lại.

Hàm f chúng ta vừa xây dựng rõ ràng sẽ thoả mãn những tính chất (i) và (ii). Với mỗi x chúng ta sẽ có, hoặc $f(x + 1) = x$, hoặc cộng 1 vào và lấy hàm f 3 lần dọc theo 3 cạnh của tam giác, nên hàm số này sẽ thoả mãn tính chất (iii) của đề bài.

Sau đây là biểu diễn hình học của hàm f chúng ta vừa xây dựng.



Bài toán 15. *Cho k là một số nguyên dương. Với mỗi số nguyên không âm n, gọi $f(n)$ là số bộ $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^k$ thoả mãn bất đẳng thức $|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_k| \leqslant n$. Chứng minh rằng với mỗi $n \neq 1$, chúng ta có $f(n-1)f(n+1) \leqslant ((f(n))^2$.*

(Đề xuất bởi Esteban Arreaga, renan Finder và José Madrid, IMPA, Rio de Janeiro)

Lời giải 1. Chúng ta chứng minh bằng quy nạp theo k. Nếu $k = 1$, chúng ta có $f(n) = 2n + 1$ và phát biểu của đề bài đúng, theo bất đẳng thức AM - GM.

Giả sử rằng $k \geqslant 2$ và phát biểu của đề bài đúng với $k - 1$. Gọi $g(m)$ là số bộ $(x_1, \ldots, x_{k-1})$ thoả mãn bất đẳng thức $|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_{k-1}| \leqslant m$; theo giả thiết quy nạp, $g(m-1)g(m+1) \leqslant (g(m))^2$; chúng ta có thể viết giả thiết này dưới dạng

$$\frac{g(0)}{g(1)} \leqslant \frac{g(1)}{g(2)} \leqslant \frac{g(2)}{g(3)} \leqslant \ldots$$

Với mỗi hằng số nguyên c, bất đẳng thức $|x_1| + \ldots + |X_{k-1}| \leqslant |n|$ có $g(n - |c|)$ bộ nghiệm nguyên. Chính vì vậy, chúng ta có quan hệ sau:

$$f(n) = \sum_{c=-n}^{n} g(n - |c|) = g(n) + 2g(n-1) + \ldots + 2g(0).$$

Điều này dẫn đến

$$\frac{f(n-1)}{f(n)} = \frac{g(n-1) + 2g(n-2) + \ldots + 2g(0)}{g(n) + 2g(n-1) + \ldots + 2g(1) + 2g(0)}$$
$$\leqslant \frac{g(n) + g(n-1) + (g(n-1) + \ldots + 2g(0) + 2.0)}{g(n+1) + 2g(n) + (g(n) + \ldots + 2g(1) + 2g(0))} = \frac{f(n)}{f(n+1)}$$

Bất đẳng thức trên tương đương với điều phải chứng minh. □

Lời giải 2. Đầu tiên, chúng ta tính hàm sinh của hàm số $f(n)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} = \sum_{(x_1,x_2,\ldots,x_k)\in\mathbb{Z}^k} \sum_{c=0}^{\infty} q^{|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_k|+c} = \left(\sum_{x\in\mathbb{Z}} q^{|x|}\right)^k \frac{1}{1-q} = \frac{(1+q)^k}{(1-q)^{k+1}}$$

Với mỗi $a = 0, 1, \ldots$ gọi $g_a(n)(n = 0, 1, 2, \ldots)$ là các hệ số trong khai triển sau:

$$\frac{(1+q)^a}{(1-q)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} g_a(n) q^n$$

Rõ ràng rằng, $g_{a+1}(n) = g_a(n) + g_a(n-1)(n \geqslant 1), g_a(0) = 1$. Chúng ta gọi một dãy các số nguyên dương $g(0), g(1), g(2), \ldots$ là "tốt" nếu $\frac{g(n-1)}{g(n)}(n = 1, 2, \ldots)$ là một dãy tăng. Chúng ta kiểm tra rằng dãy g_0 là một dãy "tốt":

$$g_0(n) = \binom{k+n}{k}, \frac{g_0(n-1)}{g_0(n)} = \frac{n}{k+n}$$

Nếu g là một dãy tốt, một dãy mới g' được định nghĩa bằng $g'(0) = g(0), g'(n) = g(n) + g(n-1)(n \geqslant 1)$ cũng là một dãy tốt:

$$\frac{g'(n-1)}{g'(n)} = \frac{g(n-1) + g(n-2)}{g(n) + g(n-1)} = \frac{1 + \frac{g(n-2)}{g(n-1)}}{1 + \frac{g(n)}{g(n-1)}}$$

nếu quy định $g(-1) = 0$. Như vậy, chúng ta thấy rằng mỗi dãy $g_1, g_2, \ldots, g_k = f$ đều là một dãy tốt. Chúng ta có bất đẳng thức cần phải chứng minh. □

Nhận xét. Ở Lời giải 2, chúng ta có sử dụng một khái niệm mới, đó chính là hàm sinh, hay cụ thể hơn là hàm sinh thường. Hàm sinh là một trong những sáng tạo mang nhiều ứng dụng về toán rời rạc. Sử dụng hàm sinh, chúng ta có thể chuyển những bài toán về dãy số thành những bài toán về hàm số, và xét bài toán đấy trên quan điểm thuần tuý về hàm số. Khi áp dụng hàm sinh, chúng ta có thể làm cho bài toán gọn gàng và dễ giải quyết hơn.

Vì giới hạn của bài viết, tác giả sẽ không bàn sâu về những ứng dụng của hàm sinh, mà chỉ giới thiệu qua định nghĩa và một vài ứng dụng cơ bản của hàm. Các bạn có thể tìm đọc thêm về hàm số thú vị này ở phần trích dẫn.

Định nghĩa 3. *Hàm sinh thường (Ordinary Generating Function) của dãy số vô hạn* $(a_n)_{n\geqslant 0}$ *là chuỗi luỹ thừa hình thức:*

$$G(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

Ta gọi hàm sinh là chuỗi luỹ thừa hình thức bởi vì thông thường, ta sẽ chỉ coi x là một kí hiệu thay thế thay vì một số. Chỉ trong vài trường hợp, ta sẽ cho x nhận các giá trị thực; vì vậy, chúng ta gần như không bao giờ để ý đến sự hội tụ của chuỗi. Có nhiều dạng hàm sinh khác nhau, nhưng ở đây, chúng ta chỉ nêu định nghĩa và sử dụng hàm sinh thường.

Ý tưởng sử dụng hàm sinh thường khá đơn giản như sau: Giả sử ta phải tính một dãy các số $S(n)$ phụ thuộc vào n, với n chạy từ 0 đến vô cùng, được cho bởi một quy tắc truy hồi hoặc tổ hợp. Khi đó, ta viết

$$F(x) = \sum_{n} S(n)x^n$$

Thay vì tính $S(n)$ với từng giá trị của n, ta tính xem hàm $F(x)$ là hàm gì. Nếu tính được $F(x)$, ta chỉ cần lấy các đạo hàm của nó tại điểm 0, từ đó suy ra được các số $S(n)$.

Trong phương pháp này, $F(x)$ chính là hàm sinh thường.

Ngay sau đây là một ví dụ áp dụng của hàm sinh thường.

Bài toán 16 (IMC 2016, Day 1, Problem 5). *Gọi S_n là tập các phép hoán vị của dãy $(1, 2, \dots, n)$. Với mỗi phép hoán vị $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n) \in S_n$, chúng ta gọi inv$(\pi)$ là số cặp $1 \leqslant i < j \leqslant n$ với $\pi_i > \pi_j$; tức là, số nghịch thế trong π. Gọi $f(n)$ là số phép hoán vị $\pi \in S_n$ sao cho inv(π) chia hết cho $n + 1$.*

Chứng minh rằng có vô hạn số nguyên tố p sao cho $f(p-1) > \frac{(p-1)!}{p}$, và có vô hạn số số nguyên tố p sao cho $f(p-1) < \frac{(p-1)!}{p}$.

(Đề xuất bởi Fedor Petrov, Đại học Bang St. Petersburg)

Lời giải. Chúng ta sử dụng công thức hàm sinh như sau:

$$\sum_{\pi \in S_n} x^{\operatorname{inv}(\pi)} = 1 \times (1+x) \times (1+x+x^2) \times \dots \times (1+x+\dots+x^{n-1})$$

Công thức hàm sinh này có thể được chứng minh bằng quy nạp theo n. Trường hợp $n = 1, 2$ khá rõ ràng. Từ mỗi hoán vị của $(1, 2, \dots, n-1)$, chúng ta có một hoán vị của $(1, 2, \dots, n)$ bằng cách thêm phần tử n vào n vị trí trước, giữa, hoặc sau các số $1, 2, \dots, n-1$; số nghịch thế sẽ tăng tương ứng là $n-1, n-2, \dots, 1, 0$.

Bây giờ, chúng ta đặt

$$G_n(x) = \sum_{\pi \in S_n} x^{\operatorname{inv}(\pi)}$$

và đặt $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n+1}}$. Tổng các hệ số của những số hạng có số mũ chia hết cho $n+1$ có thể viết thành một tổng lượng giác như sau:

$$f(n) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} G_n(\varepsilon^k) = \frac{n!}{n+1} + \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n-1} G_n(\varepsilon^k)$$

Ở đây, chúng ta chú ý đến dấu của

$$f(n) - \frac{n!}{n+1} = \frac{k=1}{n-1} G_n(\varepsilon^k)$$

với $n = p - 1$, trong đó p là một số nguyên lẻ, đủ lớn.

Với mỗi k cố định, $1 \leqslant k \leqslant p - 1$, chúng ta có:

$$G_{p-1}(\varepsilon^k) = \prod_{j=1}^{p-1} (1+\varepsilon^k+\varepsilon^{2k}+\cdots+\varepsilon^{(j-1)k}) = \prod_{j=1}^{p-1} \frac{1-\varepsilon^{jk}}{1-\varepsilon^k} = \frac{(1-\varepsilon^k)(1-\varepsilon^{2k})\cdots(1-\varepsilon^{(p-1)k})}{(1-\varepsilon^k)^{p-1}}$$

Chú ý rằng, các hạng tử trong tử số là $(1-\varepsilon), (1-\varepsilon^2), \ldots, (1-\varepsilon^{p-1})$, chỉ có bậc của chúng là thay đổi. Vì thế, sử dụng đẳng thức $(z-\varepsilon)(z-\varepsilon^k)\ldots(z-\varepsilon^{p-1}) = 1+z+\ldots+z^{p-1}$,

$$G_{p-1}(\varepsilon^k) = \frac{p}{(1-\varepsilon^k)^{p-1}} = \frac{p}{\left(1-e^{\frac{2k\pi i}{p}}\right)^{p-1}}$$

Khi đó, $f(p-1) - \frac{(p-1)!}{p}$ sẽ có cùng dấu với:

$$\sum_{k=1}^{p-1} \left(1-e^{\frac{2k\pi i}{p}}\right)^{1-p} = \sum_{k-1}^{p-1} e^{\frac{k(1-p)\pi i}{p}} \left(-2i \sin \frac{\pi k}{p}\right)^{1-p}$$

$$= 2 \cdot 2^{1-p}(-1)^{\frac{p-1}{2}} \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \cos \frac{\pi k(p-1)}{p} \left(\sin \frac{\pi k}{p}\right)^{1-p}$$

Với những số nguyên tố p lớn, các hạng tử với $k = 1$ tăng theo luỹ thừa nhanh hơn tất cả những hạng tử khác, nên các hạng tử này sẽ quyết định dấu của cả tổng. Để ý rằng $\frac{\pi(p-1)}{p}$ hội tụ về -1. Chính vì thế, tổng này sẽ dương nếu $p-1$ lẻ và âm nếu $p-1$ chẵn. Chính vì vậy, Với những số nguyên đủ lớn, $f(p-1) - \dfrac{(n-1)!}{p}$ sẽ dương nếu $p \equiv 3(\bmod 4)$ và âm nếu $p \equiv 1(\bmod 4)$. □

2.4. Đại số

Bài toán 17 (IMC 2017, Problem 6, Day 2). *Cho $p(x)$ là một đa thức với hệ số thực khác đa thức hằng. Với mỗi số nguyên dương n, đặt*

$$q_n(x) = (x+1)^n p(x) + x^n p(x+1)$$

Chứng minh rằng chỉ có hữu hạn các số n sao cho tất cả các nghiệm của $q_n(x)$ là thực.

(Đề xuất bởi Alexandr Bolbot, Đại học Bang Novosibirsk)

Lời giải chính thức. Đầu tiên, chúng ta phát biểu và chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề 6. *Nếu $f(x) = a_m x^m + \ldots + a_1 x + a_0$ là đa thức với $a_m \neq 0$, và tất cả các nghiệm của f đều là số thực, thì*

$$a_{m-1}^2 - 2a_m a_{m-2} \geqslant 0$$

Đặt các nghiệm của f là $w_1, w_2, \ldots, w_n$. Theo công thức Viète, chúng ta có:

$$\sum_{i=1}^{m} w_i = -\frac{a_{m-1}}{a_m}, \sum_{i<j} w_i w_j = \frac{a_{m-2}}{a_m}$$

$$0 \leqslant \sum_{i=0}^{m} w_i^2 = \left(\sum_{i=0}^{m} w_i\right)^2 - 2\sum_{i<j} w_i w_j = \left(\frac{a_{m-1}}{a_m}\right)^2 - 2\frac{a_{m-2}}{a_m} = \frac{a_{m-1}^2 - 2a_m a_{m-2}}{a_m^2}$$

Khi áp dụng bổ đề, chúng ta chỉ quan tâm đến tính chất của ba hệ số đầu tiên của những hạng tử trong $q(x)$ có bậc cao nhất, mà không cần phải quan tâm đến các hạng tử còn lại. Đặt $p(x) = ax^k + bx^{k-1} + cx^{k-2} + \ldots$ và $q_n(x) = A_n^{x+k} + B_n x^{n+k-1} + C_n x^{n+k-2} + \ldots$; khi đó:

$$\begin{aligned}
q_n(x) &= (x+1)^n p(x) + x^n p(x+1) = \\
&= \left(x^n + nx^{n-1} + \frac{n(n+1)}{2}x^{n-2} + \ldots\right)(ax^k + bx^{k-1} + cx^{k-2} + \ldots) \\
&+ x^n \left(a\left(x^k + kx^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2}x^{k-2}\right) + b\left(x^{k-1} + (k-1)x^{k-2} + \ldots\right) + c\left(x^{k-2}\right)\right) \\
&= 2a \times x^{n+k} + ((n+k)a + 2b)x^{n+k-1} \\
&+ \left(\frac{n(n-1) + k(k-1)}{2}a + (n+k-1)b + 2c\right)x^{n+k-2} + \ldots,
\end{aligned}$$

Khi đó,

$$A_n = 2a, B_n = (n+k)a + 2b, C_n = \frac{n(n-1) + k(k-1)}{2}a + (n+k-1)b + 2c$$

Khi $n \to +\infty$,

$$B_n^2 - 2A_n C_n = (na + O(1))^2 - 2 \times 2a\left(\frac{n^2 a}{2} + O(n)\right) = -an^2 + O(n) \to -\infty$$

Lúc này, $B_n^2 - 2A_n C_n$ sẽ âm, tức là q_n sẽ không thể chỉ có các nghiệm thực. □

Chúng ta cũng có thể giải bài toán này chỉ bằng cách xét hai hệ số đầu tiên của hai hạng tử có bậc cao nhất, đồng thời áp dụng Bất đẳng thức AM - GM như sau:

Lời giải phụ. Đặt $p(x) = x^k + ax^{k-1} + \ldots$ và đặt $M > 0$ sao cho $p(x) > 0 \forall x \geqslant M$. Khi đó,

$$q_n(x) = 2x^{n+k} + (2a + n + k)x^{n+k-1} + \ldots$$

Nếu tất cả các nghiệm của $q_n(x)$ đều là các số thực, ta đặt chúng là $x_1, x_2, \ldots, x_{n+k}$. Khi đó, theo Định lý Viète, chúng ta có:

$$a_1 + \ldots + a_{n+k} = -\frac{2a+n+k}{2} = -\left(a + \frac{n+k}{2}\right)$$

Theo bất đẳng thức AM - GM, chúng ta lại có:

$$\begin{aligned}(M+1)^n p(M) < q_n(M) &= 2(M-a_1)(M-a_2)\ldots(M-a_{n+k}) \\ &\leqslant 2\left(\frac{(n+k)M - (a_1+a_2+\ldots+a_{n+k})}{n+k}\right)^{n+k} \\ &= 2\left(M + \frac{1}{2} + \frac{a}{n+k}\right)^{n+k}\end{aligned}$$

Chính vì vậy,

$$|P(M)| \leqslant 2\frac{\left(M + \frac{1}{2} + \frac{a}{n+k}\right)^{n+k}}{(M+1)^n}$$

Điều này vô lý, vì khi n tiến đến $+\infty$, vế phải sẽ tiến về 0.

Chúng ta kết luận rằng $q_n(x)$ không thể có tất cả các nghiệm thực với vô hạn các số nguyên dương n. $\square$

Bài toán 18 (IMC 2015, Day 1, Problem 2). *Với mỗi số nguyên dương n, đặt $f(n)$ là số sau khi viết n thành hệ nhị phân và thay mỗi số 0 bằng số 1 và ngược lại. Ví dụ, $n = 23$ sẽ trở thành* 10111 *trong hệ nhị phân, vì thế $f(n)$ sẽ là* 1000 *trong hệ nhị phần, khi đó $f(23) = 8$. Chứng minh rằng:*

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \frac{n^2}{4}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

(Đề xuất bởi Stephan Wagner, Đại học Stellenbosch)

Lời giải. Nếu r và k là những số nguyên dương sao cho $2^{r-1} \leqslant k \leqslant 2^r$, k sẽ có r chữ số trong hệ nhị phân, nên $k + f(k) = \overline{11\ldots1} = 2^r - 1$ (Biểu diễn nhị phân có r chữ số 1.)

Giả sử rằng $2^{s-1} \leqslant n \leqslant 2^s - 1$. Khi đó:

$$\begin{aligned}
\frac{n(n+1)}{2} + \sum_{k=1}^{n} f(k) &= \sum_{k=1}^{n}(k + f(k)) \\
&= \sum_{r=1}^{s-1} \sum_{2^{r-1} \leqslant k < 2^r} (k + f(k)) + \sum_{2^{s-1} \leqslant k \leqslant n} (k + f(k)) = \\
&= \sum_{r=1}^{s-1} s^{r-1} \times (2^r - 1) + (n - 2^{s-1} +) \times (2^s - 1) = \\
&= \sum_{r=1}^{s-1} 2^{2r-1} - \sum_{r=1}^{s-1} 2^{r-1} + (n - 2^{s-1} + 1)(2^s - 1) = \\
&= \frac{2}{3}(4^{s-1} - 1) - (2^{s-1} - 1) + (2^s - 1)n - 2^{2s-1} + 3 \times 2^{s-1} - 1 = \\
&= (2^s - 1)n - \frac{1}{3}4^s + 2^s - \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

và khi đó

$$\begin{aligned}
\frac{n^2}{4} - \sum_{k=1}^{n} f(k) &= \frac{n^2}{4} - \left((2^s - 1)n - \frac{1}{3}4^s + 2^s - \frac{2}{3} - \frac{n(n+1)}{2}\right) = \\
&= \frac{3}{4}n^2 - \left(2^s - \frac{3}{2}\right)n + \frac{1}{3}4^s - 2^s + \frac{2}{3} = \\
&= \frac{3}{4}\left(n - \frac{2^{s-1} - 2}{3}\right)\left(n - \frac{2^{s+1} - 4}{3}\right).
\end{aligned}$$

Để ý rằng hiệu của hai nhân tử cuối cùng nhỏ hơn 1, và một trong số chúng sẽ là số nguyên: $\frac{2^{s+1}-2}{3}$ là số nguyên nếu s chẵn, và $\frac{2^{s+1}-4}{3}$ là số nguyên nếu s lẻ. Chính vì thế, một trong số chúng phải bằng 0, dẫn đến tích bằng 0, hoặc cả hai nhân tử đểu phải cùng dấu, dẫn đến tích luôn luôn dương. Điều này giải quyết bài toán và cho thấy rằng đẳng thức xảy ra khi $n = \frac{2^{s+1}-2}{3}$ (nếu s lẻ) hoặc $n = \frac{2^{s+1}-4}{3}$ (nếu s chẵn). $\square$

3. Các bài tập tự luyện

3.1. Giải tích

Bài tập 1 (IMC 2016, Day 1, Problem 1). Cho $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ là một hàm liên tục và có đạo hàm trên $[a, b]$. Giả sử rằng f có vô hạn nghiệm, nhưng không tồn tại số thực $x \in (a, b)$ nào sao cho $f(x) = f'(x) = 0$.

1. Chứng minh rằng $f(a)f(b) = 0$.

2. Hãy cho ví dụ một hàm như vậy trên $[0, 1]$.

(Đề xuất bởi Alexandr Bolbot, Đại học Bang Novosibirsk)

Bài tập 2 (IMC 2012, Day 2, Problem 2). Định nghĩa dãy số (a_n) tổng quát như sau, với $a_0 = 1, a_1 = \frac{1}{2}$, và

$$a_{n+1} = \frac{na_n^2}{1 + (n+1)a_n}$$

Chứng minh rằng dãy $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$ hội tụ và tìm giới hạn đó.

(Đề xuất bởi Christophe Debry, KU Leuven, Bỉ)

Bài tập 3 (IMC 2016, Day 2, Problem 2). Hôm nay, Giáo sư Ivan lại thích những hàm số liên tục $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện $f(x) + f(y) \geqslant |x - y|$ với mọi cặp $x, y \in [0,1]$. Hãy tìm Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^1 f$ của những hàm thoả mãn.

(Đề xuất bởi Fedor Petrov, Đại học Bang St. Petersburg)

Bài tập 4 (IMC 2017, Problem 2, Day 1). Cho $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ là một hàm có đạo hàm, và giả sử rằng tồn tại một hằng số $L > 0$ sao cho

$$|f'(x) - f'(y)| \leqslant L|x - y|$$

với mọi x, y. Chứng minh rằng:

$$(f'(x))^2 < 2Lf(x)$$

đúng với mọi x.

(Đề xuất bởi Jan Sustek, Đại học Ostrava)

Bài tập 5 (IMC 2017, Day 2, Problem 6). Cho $f : [0; +\infty) \to \mathbb{R}$ là một hàm liên tục sao cho $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ tồn tại (nó có thể vô hạn hoặc hữu hạn). Chứng minh rằng:

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f(nx)dx = L$$

(Đề xuất bởi Alexandr Bolbot, Đại học bang Novosibirsk)

Bài tập 6 (IMC 2017, Day 2, Problem 9). Định nghĩa dãy $f_1, f_2, \ldots : [0,1) \to \mathbb{R}$ những hàm liên tục và có đạo hàm bằng công thức truy hồi sau:

$$f(1) = 1;\ f'_{n+1} = f_n f_{n+1} \text{ trên } (0,1),\ \text{ và } f_{n+1}(0) = 1$$

Chứng minh rằng $\lim_{n \to \infty} f_n(x)$ tồn tại với mỗi $x \in [0,1)$ và xác định hàm giới hạn với mỗi giá trị x đó.

(Đề xuất bởi Tomas Barta, Đại học Charles, Prague)

Bài tập 7. Xét dãy số sau:

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} = (1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, 1, \ldots)$$

Tìm tất cả các cặp số thực dương (α, β) sao cho $\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n^{\alpha}} = \beta$.

(Đề xuất bởi Tomas Barta, Đại học Charles, Prague)

3.2. Số học

Bài tập 8 (IMC 2015, Problem 3, Day 1). Cho $F(0) = 0$, $F(1) = \frac{3}{2}$, và $F(n) = \frac{5}{2}F(n-1) - F(n-2)$ với $n \geqslant 2$. Xác định xem tổng $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F(2^n)}$ có phải là một số hữu tỉ hay không.

(Đề xuất bởi Gerhard Woeginger, Học viện Công nghệ Eindhoven)

Bài tập 9 (IMC 2017, Problem 3, Day 1). Với mỗi số nguyên dương m, đặt $P(n)$ là tích của các ước dương của m (ví dụ, $P(6) = 36$). Với mỗi số nguyên dương n, chúng ta định nghĩa một dãy số như sau:

$$a_1(n) = n, a_{k+1}(n) = P(a_k(n))(k = 1, 2, \ldots, 2016)$$

Hãy xét xem phát biểu sau đúng hay sai: Với mỗi tập $S \subset \{1, 2, \ldots, 2017\}$, tồn tại một số nguyên dương n sao cho điều kiện sau được thoả mãn:

Với mỗi k sao cho $1 \geqslant k \geqslant 2017$, số $a_k(n)$ là một số chính phương khi và chỉ khi $k \in S$.

(Đề xuất bởi Matko Ljulj, Đại học Zagreb)

Bài tập 10 (IMC 2014, day 1, Problem 4). Cho $n > 6$ là một số hoàn hảo, và đặt $n = p_1^{e_1} \ldots p_k^{e_k}$ là phép phân tích ra thừa số nguyên tố với $1 < p_1 < \ldots < p_k$. Chứng minh rằng e_1 là một số chẵn. Biết rằng, một số n được gọi là hoàn hảo nếu $s(n) = 2n$, với $s(n)$ là tổng các ước của n.

(Đề xuất bởi Javier Rodrigo, Universidad Pontificia Comillas)

3.3. Đại số

Bài tập 11 (IMC 2017, Day 1, Problem 4). Có n cư dân trong một thành phố, và mỗi người trong số họ có đúng 1000 người bạn (biết rằng tình bạn luôn luôn đối xứng). Chứng minh rằng có thể chọn ra một nhóm người S sao cho ít nhất $\frac{n}{2017}$ người trong S có đúng hai người bạn trong S.

(Đề xuất bởi Rooholah Majdodin và Fedor Petrov, Đại học Bang St. Petersburg)

Bài tập 12 (IMC 2012, Day 2, Problem 1). Xét đa thức

$$f(x) = x^{2012} + a_{2011}x^{2011} + \ldots + a_1x + a_0$$

Albert Einstein và Homer Simpson đang chơi trò chơi như sau. Mỗi lượt, họ chọn một trong các hệ số $a_0, \ldots, a_{2011}$ và cho nó một giá trị thực. Albert đi nước đầu tiên. Một khi một giá trị đã được gán cho một hệ số nào đó, nó không thể thay đổi được nữa. Trò chơi kết thúc sau khi tất cả các hệ số đều đã có giá trị của nó.

Mục tiêu của Homer là làm cho $f(x)$ chia hết cho một đa thức cố định $m(x)$ nào đó và mục tiêu của Albert là ngăn điều này xảy ra.

- Ai là người có chiến thuật thắng nếu $m(x) = x - 2012$?
- Ai là người có chiến thuật thắng nếu $m(X) = x^2 + 1$?

3.4. Bất đẳng thức

Bài tập 13 (IMC 2016, Day 2, Problem 1). Cho $(x_1, x_2, \ldots)$ là một dãy các số thực dương thoả mãn điều kiện sau:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2n-1} = 1$$

Chứng minh rằng:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{x_n}{k} \leqslant 2$$

(Đề xuất bởi Gerhard J. Woeginger, Hà Lan)

Bài tập 14 (IMC 2016, Day 1, Problem 3). Cho n là một số thực dương. Ngoài ra, chúng ta đặt $a_1, a_2, \ldots, a_n$ và $b_1, b_2, \ldots, b_n$ là những số thực sao cho $a_i + b_i > 0$ với $i = 1, 2, \ldots, n$. Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i b_i - b_i^2}{a_i + b_i} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \times \sum_{i=1}^{n} b_i - \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)}$$

(Đề xuất bởi Daniel Strzelecki, Đại học Nicolas Copernicus ở Torun, Ba Lan)

4. Gợi ý cho các bài tập

4.1. Giải tích

Bài tập 1.

1. Chọn một dãy các nghiệm hội tụ (z_n) và đặt $c = \lim(z_n) \in [a, b]$. Theo tính liên tục của f, chúng ta có $f(c) = 0$. Chúng ta muốn chứng mih rằng hoặc $c = a$ hoặc $c = b$, vì thế $f(a) = 0$ hoặc $f(b) = 0$, từ đó chúng ta có được điều phải chứng minh.

2. Một ví dụ của hàm số thoả mãn yêu cầu đề bài sẽ là:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ nếu } 0 < x \leqslant 1 \\ 0 \text{ nếu } x = 0 \end{cases}$$

Bài tập 2. Chứng minh đẳng thức sau:

$$ka_k = \frac{a_{k+1}}{a_k} + (k+1)a_{k+1} \forall k \geqslant 1$$

Đồng thời, chúng ta có thể chứng minh, bằng quy nạp, rằng $a_n < \frac{C}{2^n}$ với một hằng số dương C nào đó. Khi đó, chúng ta sẽ kết luận được rằng

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1$$

Bài tập 3. Áp dụng điều kiện của đề bài với $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$, $y = x + \frac{1}{2}$, chúng ta có:

$$f(x) + f\left(x + \frac{1}{2}\right) \geqslant \frac{1}{2}$$

Bằng cách lấy tích phân,

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(f(x) + f\left(\frac{1}{2}\right)\right) dx \geqslant \int_0^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{4}$$

Đến đây, chúng ta chứng minh thêm rằng tồn tại một hàm số $f(x)$ sao cho $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{4}$. Chúng ta tiến hành xét hàm số sau đây:

$$f(x) = \left|x - \frac{1}{2}\right|$$

Bài tập 4. Đầu tiên, chúng ta biết rằng f sẽ lấy được tích phân cục bộ (tức là lấy tích phân được trên bất kì tập compact nào thuộc miền xác định).

Với mỗi x bất kì, đặt $d = f'(x)$, chúng ta sẽ cần chứng minh $f(x) > \dfrac{d^2}{2L}$. Xét các trường hợp như sau:

- $d = 0$, phát biểu của đề bài hiển nhiên đúng.
- $d > 0$, điều kiện của đề cho chúng ta biết $f'(x-t) \geqslant d - Lt$, đồng thời ước lượng này dương với mọi t sao cho $o \leqslant t < \frac{d}{L}$.
- $d > 0$, điều kiện của đề cho chúng ta biết $f'(x+t) \geqslant d + Lt = -|d| + Lt$, và lặp lại tương tự với trường hợp $d > 0$.

Bài tập 5. Cách đơn giản nhất để giải quyết bài toán này chính là đặt $F(x) = \int_0^x f$ và sử dụng nguyên lý L'Hospital.

Bài tập 6. Giải phương trình vi phân trong công thức truy hồi của đề bài, chúng ta được:

$$f_{n+1}(x) = e^{\int_0^x f_n(t)dt}$$

Khi đó, dùng quy nạp, chúng ta chứng minh được rằng với mỗi số x cố định trong khoảng $[0, 1)$, $f_n(x)$ là một dãy tăng và:

$$f_n(x) \leqslant \frac{1}{x-1}$$

Hơn nữa, sử dụng bổ đề sau:

$$e^{x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n}} \geqslant 1 + x + x^2 + \ldots + x^n \tag{4}$$

với mỗi x cố định trong khoảng $[0, 1)$, chúng ta có:

$$\frac{1}{1-x} \geqslant f_n(x) \geqslant \frac{1-x^n}{1-x}$$

bằng cách sử dụng quy nạp. Cuối cùng, chúng ta kết luận được rằng

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Nhận xét. Lời giải ở phía trên không phải là lời giải chính thức của kì thi, nhưng đây là cách với ý tưởng dơn giản và sơ cấp nhất để tiếp cận bài toán này, với những kiến thức Giải tích thuần tuý trong chương trình THPT. Đồng thời, trong lời giải trên, chúng ta đã sử dụng bổ đề $(S3)$, và chúng ta tiến hành chứng minh bổ đề đó như sau:

$$\begin{aligned} e^{x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n}} &= e^{x+\frac{x^2}{2}+\cdots} + O(x^{n+1}) \\ &= e^{-\log(1-x)} + O(x^{n+1}) \\ &= \frac{1}{1-x} + O(x^{n+1}) \\ &= 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + O(x^{n+1}) \end{aligned}$$

Như vậy, hiệu của vế trái và vế phải là một dãy các luỹ thừa với số mũ lớn hơn hoặc bằng $n+1$, nhưng tất cả các hệ số ở vế trái (dãy luỹ thừa của x) đều dương. Chúng ta có điều cần phải chứng minh.

Bài tập 7. Đặt $N = \binom{n+1}{2}$ (khi đó, a_{N_n} sẽ là lần xuất hiện đầu tiên của số tự nhiên n trong dãy) và xét giới hạn của dãy sau:

$$b_{N_n} = \frac{\sum_{k=1}^{N_n} a_k}{N_n^\alpha} = \frac{\sum_{k=1}^{n} 1 + \ldots + k}{\binom{n+1}{2}^\alpha} = \frac{\frac{1}{6}n^3\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^\alpha n^{2\alpha}\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha}$$

Chúng ta có thể thấy rằng $\lim_{n\to\infty} b_{N_n}$ dương và hữu hạn khi và chỉ khi $\alpha = \frac{3}{2}$. Trong trường hợp đó, giới hạn của dãy này sẽ bằng $\beta = \frac{\sqrt{2}}{3}$. Vì vậy, chỉ có duy nhất một cặp $(\alpha, \beta) = \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$ có khả năng là đáp số cho bài toán này.
Giả sử N nằm trong khoảng $[N_n + 1, N_{n+1}]$, hay $N = N_n + m$ với $1 \leqslant m \leqslant n+1$, cùng với việc áp dụng Định lý kẹp, chúng ta có thể suy ra được giới hạn của dãy b_N, đồng thời suy ra được giá trị của β.

4.2. Số học

Bài tập 8. Đầu tiên, chúng ta sẽ cần phải chứng minh rằng $F(n) = 2^n - 2^{-n}$. Sau đó, chúng ta sẽ có hai cách tiếp cận khác nhau với bài toán như sau:

1. Chứng minh đẳng thức sau:

$$\frac{1}{F(2^n)} = \frac{1}{2^{2^n}-1} - \frac{1}{2^{2^{n+1}}-1}$$

2. Đầu tiên, chúng ta chứng minh được $F(n) = 2^n - 2^{-n}$. Khi đó,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F(2^n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2^n} - 2^{-2^n}} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n(2k+1)} = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^m = 1$$

Ở đây, chúng ta thừa nhận rằng mỗi số nguyên dương m có một cách biểu diễn duy nhất $m = 2^n(2k+1)$ với các số nguyên không âm n và k).

Đến đây, chúng ta kết luận rằng dãy số này hội tụ về 1.

Bài tập 9. Chúng ta sẽ đi chứng minh rằng phát biểu trên là đúng, rằng với mỗi tập $S \subset \{1, 2, \dots, 2017\}$, tồn tại một số n thoả mãn. Cụ thể hơn, n có thể là một luỹ thừa của 2, $n = 2^{w_1}$ với một số nguyên không âm w_1 nào đó. Chúng ta sẽ sử dụng bổ đề sau để chứng minh:

Bổ đề 7. *Giả sử rằng các dãy số $(b_1, b_2, \dots)$ và $(c_1, c_2, \dots)$ thoả mãn các điều kiện sau: $b_{k+1} = \dfrac{b_k(b_k+1)}{2}$, $c_{k+1} = \dfrac{c_k(c_k+1)}{2}$ với $k \geqslant 1$, và $c_1 = b_1 + 2^m$. Khi đó, với mỗi $k = 1, 2, .., m$, chúng ta có $c_k \equiv b_k + 2^{m-k+1} (\mathrm{mod} 2^{m-k+2})$.*

Một hệ quả theo ngay sau bổ đề này chính là $b_k \equiv c_k (\mathrm{mod} 2)$ với $1 \leqslant k \leqslant m$ và $b_{m+1} \equiv c_{m+1} + 1 (\mathrm{mod} 2)$

Bài tập 10. Chúng ta chứng minh bằng phản chứng, bắt đầu bằng việc giả sử e_1 lẻ.

Sử dụng công thức sau:

$$s_n = \prod_{i=1}^{k} (1 + p_i + p_i^2 + \dots + p_i^{e_i}) = 2n = 2p_1^{e_1} \dots p_k^{e_k}$$

chúng ta chứng minh được rằng $6|n$.

Khi đó, $n, \frac{n}{2}, \frac{n}{3}, \frac{n}{6}$ và 1 là các ước phân biệt của n, vì vậy:

$$s(n) \geqslant n + \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \frac{n}{6} + 1 = 2n + 1 > 2n$$

mâu thuẫn với điều kiện của đề bài.

Nhận xét. Chúng ta có một bổ đề nổi tiếng như sau: Tất cả các số hoàn hảo đều có dạng $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ sao cho p và $2^p - 1$ đều là các số nguyên tố. vì vậy, nếu e_1 lẻ thì $k = 2$, $p_1 = 2$, $p_2 = 2^p - 1$, $e_1 = p - 1$ và $e_2 = 1$. Nếu $n > 6$ thì $p > 2$, khi đó p lẻ và $e_1 = p - 1$ phải là số chẵn.

4.3. Đại số

Bài tập 11. Đặt $d = 1000$ và $0 < p < 1$. Chọn ngẫu nhiên tập hợp S sao cho mỗi người đều được chọn với xác suất p, và độc lập với những người còn lại.

Khi đó, xác suất để một người nào đó được chọn vào tập S và biết chính xác hai thành viên trong tập S đó là:

$$q = \binom{d}{2} p^3 (1-p)^{d-2}$$

Chọn $p = \dfrac{3}{d+1}$ (bởi vì đây là giá trị của p sao cho q đạt giá trị lớn nhất, từ đó chúng ta sẽ chứng minh được phát biểu của đề bài là đúng.

Bài tập 12.

Để ý rằng Homer là người đi cuối, và chỉ nước đi cuối mới là nước đi quyết định. Homer thắng khi và chỉ khi $f(2012) = 0$.

Định nghĩa các đa thức như sau:

$$g(y) = a_0 + a_2 y + a_4 y^2 + \ldots + a_{2010} y^{1005} + y^{1006}$$

$$h(y) = a_1 + a_3 y + a_5 y^2 + \ldots + a_{2011} y^{1005}$$

Khi đó, $f(x) = g(x^2) + h(x^2) \times x$.

Lúc này, Homer thắng khi và chỉ khi $g(y)$ và $h(y)$ đều chia hết cho $y+1$, hay $g(-1) = h(-1) = 0$.

4.4. Bất đẳng thức

Bài tập 13. Bằng cách thay đổi tổng

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{x_n}{k} = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{x_n}{k^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(x_n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right).$$

Đồng thời, chúng ta đi tìm chặn trên của tổng:

$$\sum_{k=n} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{n - \frac{1}{2}}$$

và chúng ta còn có:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{x_n}{k^2} < 2$$

Tài liệu

[1] Trang web chính thức của Kì thi: https://www.imc-math.org.uk/

[2] Diễn đàn toán học Art of Problem Solving: https://www.artofproblemsolving.com

[3] Lê Nhật Hoàng, Trần Phan Quốc Bảo, *Định lý Hall và ứng dụng*, https://www.diendantoanhoc.net

[4] Trương Thị Nhung, Lăng Thuý Nga, Phạm Thị Lan Phương, Mai Thị Ngoan, *Chuyên đề Đại số sơ cấp - Phương pháp sử dụng hàm sinh*, Trường ĐH Sư phạm Hà Nội, 2010

[5] Ivan Martel, *MAA102 - Analysis I*, Bachelor 2018 - 2019, École Polytechnique.

[6] Nguyễn Tiến Dũng, *Phương pháp hàm sinh*, https://www.zung.zetamu.net/2014/12/generating-function/

[7] Weisstein, Eric W., *Prime Number Theorem*, from MathWorld–A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/PrimeNumberTheorem.html

MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC DIỆN TÍCH TRONG TAM GIÁC

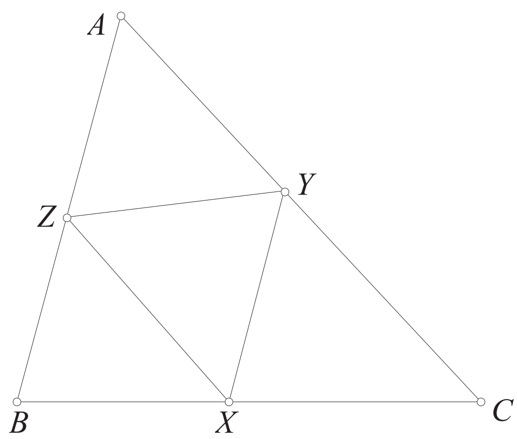
Trần Quang Hùng, Hà Nội

TÓM TẮT

Trong bài viết này chúng tôi sẽ thiết lập những bất đẳng thức về diện tích trong tam giác. Các bài toán này chủ yếu thuộc về phần các hệ thức lượng trong tam giác. Tuy nhiên chúng tôi lại giải quyết các bài toán này dựa trên một số kiến thức bất đẳng thức đại số đơn giản hoặc các kiến thức về hình học thuần túy, phù hợp với chương trình hình học cấp THCS ở Việt Nam.

Bài toán 1. Cho tam giác ABC và X, Y, Z là các điểm bât kỳ trên đoan BC, CA, AB. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{S_{AYZ}} + \frac{1}{S_{BZX}} + \frac{1}{S_{CXY}} \geq \frac{3}{S_{XYZ}}.$$



Hình 1.

Lời giải. Đặt $\frac{BX}{BC} = x$, $\frac{CY}{CA} = y$, $\frac{AZ}{AB} = z$, $S_{ABC} = S$ thì $0 < x, y, z < 1$. Ta có

$$\frac{S_{AYZ}}{S} = z(1-y), \frac{S_{BZX}}{S} = x(1-z), \frac{S_{CXY}}{S} = y(1-x).$$

Do đó $S_{XYZ} = S - S_{AYZ} - S_{BZX} - S_{CXY} = S - S(z(1-y) + x(1-z) + y(1-x)) = S(xyz - (x-1)(y-1)(x-1))$. Ta cần chứng minh

$\frac{1}{S_{AYZ}} + \frac{1}{S_{BZX}} + \frac{1}{S_{CXY}} \geq \frac{3}{S_{XYZ}}$

$\Leftrightarrow \frac{S}{z(1-y)} + \frac{S}{x(1-z)} + \frac{S}{y(1-x)} \geq \frac{3S}{xyz+(1-x)(1-y)(1-z)}$

$\Leftrightarrow \frac{xy}{(1-y)} + \frac{yz}{(1-z)} + \frac{zx}{(1-x)} \geq \frac{3}{1+\frac{(1-x)(1-y)(1-z)}{xyz}}$

Đặt $\frac{1-x}{x} = a > 0, \frac{1-y}{y} = b > 0, \frac{1-z}{z} = c > 0$ ta đưa về chứng minh bất đẳng thức đại số

$$\frac{1}{(a+1)b} + \frac{1}{(b+1)c} + \frac{1}{(c+1)a} \geq \frac{3}{1+abc}$$

Thật vậy ta có

$(1+abc)\left(\frac{1}{b(1+a)} + \frac{1}{c(1+b)} + \frac{1}{a(1+c)}\right) + 3$

$= \frac{1+abc+b+ab}{b+ab} + \frac{1+abc+c+bc}{c+bc} + \frac{1+abc+a+ca}{a+ca}$

$= \frac{1+b}{ab+b} + \frac{1+c}{bc+c} + \frac{1+a}{ca+a} + \frac{a(c+1)}{a+1} + \frac{b(a+1)}{b+1} + \frac{c(b+1)}{c+1}$

$\geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc}} + 3\sqrt[3]{abc} \geq 6.$

Do đó $\frac{1}{(a+1)b} + \frac{1}{(b+1)c} + \frac{1}{(c+1)a} \geq \frac{3}{1+abc}$. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bất đẳng thức đại số

$$\frac{1}{(a+1)b} + \frac{1}{(b+1)c} + \frac{1}{(c+1)a} \geq \frac{3}{1+abc}$$

sử dụng trong bài toán trên cũng là một bất đẳng thức đại số kinh điển ở trong thập niên trước. Nó đã xuất hiện trong cuộc thi Balkan 2006 và tạp chí Crux, xem [1]. Bất đẳng thức hình học trong bài toán trên là một thể hiện hình học đặc sắc của bất đẳng thức đại số này.

Bài toán tiếp theo dưới đây là một bài toán cực trị hình học đẹp mắt, ứng dụng bất đẳng thức diện tích trên.

Bài toán 2. Cho tam giác ABC, giả sử có các điểm X, Y, Z thuộc đoạn BC, CA, AB sao cho các tam giác AYZ, BZX, CXY có diện tích bằng nhau. Tìm vị trí X, Y, Z sao cho diện tích tam giác XYZ bé nhất.

Lời giải. Đặt $S_{AYZ} = S_{BZX} = S_{CXY} = S_x$ thì $S_{XYZ} = S_{ABC} - 3S_x$. Mặt khác theo bài trước thì

$$\frac{1}{S_{AYZ}} + \frac{1}{S_{BZX}} + \frac{1}{S_{CXY}} \geq \frac{3}{S_{XYZ}}.$$

Nên $\frac{3}{S_x} \geq \frac{3}{S_{XYZ}}$ suy ra $S_{XYZ} \geq S_x = \frac{S_{ABC} - S_{XYZ}}{3}$ do đó $S_{XYZ} \geq \frac{3}{4}S_{ABC}$. Dấu bằng xảy ra khi X, Y, Z là trung điểm BC, CA, AB. □

Nhận xét. Mặc dù bài toán này lời giải đơn giản vì sử dụng bài toán 1, nhưng rõ ràng đây là một bài toán cực trị hay nói cách khác là tối ưu trong hình học rất thú vị. Tác giả bài viết rất quan tâm tới lời giải nào cho bài toán này mà không sử dụng bài toán 1.

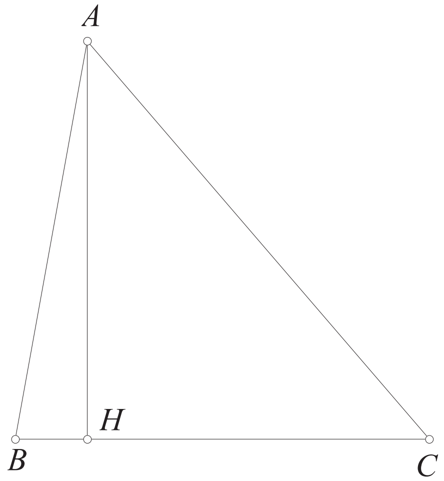
Một hệ quả cũng rất quan trọng khác của bài toán 1 là bài toán đã xuất hiện trong kỳ thi IMO năm 1966 ở dưới đây, các bạn hãy làm nó như một bài luyện tập.

Bài toán 3 (IMO 1966, P6 [5]). Cho ABC là một tam giác. Lấy P, Q, R là ba điểm lần lượt nằm trong các cạnh BC, CA, AB của tam giác này. Chứng minh rằng ít nhất một trong các tam giác AQR, BRP, CPQ có diện tích bé hơn hoặc bằng một phần tư diện tích của tam giác ABC.

Bài toán 4. Cho tam giác ABC có diện tích S và các số thực dương x, y, z. Đặt $BC = a, CA = b, AB = c$.

a) Chứng minh rằng $xa^2 + yb^2 + zc^2 \geq 4\sqrt{xy + yz + zx}S$.

b) Chứng minh rằng $\sqrt{\frac{yz}{x}}a^2 + \sqrt{\frac{zx}{y}}b^2 + \sqrt{\frac{xy}{z}}c^2 \geq 4\sqrt{x + y + z}S$.



Hình 2.

Lời giải. a) Tam giác ABC phải có ít nhất hai góc nhọn. Giả sử đó là B, C, vẽ đường cao AH thì H nằm giữa B, C. Ta có

$xa^2 + yb^2 + zc^2$

$= xa^2 + y(HA^2 + HB^2) + z(HA^2 + HC^2)$

$= xa^2 + (y + z)HA^2 + \frac{HB^2}{1/y} + \frac{HC^2}{1/z}$

$\geq xa^2 + (y + z)HA^2 + \frac{(HB+HC)^2}{(y+z)/(yz)}$

$= a^2(x + \frac{yz}{y+z}) + (y + z)HA^2$

$\geq 2\sqrt{\frac{xy+yz+zx}{y+z}a^2.(y+z)HA^2}$

$= 4\sqrt{yz+zx+xy}S.$

b) Ta sử dụng phép thế biến $x \to \sqrt{\frac{yz}{x}}, y \to \sqrt{\frac{zx}{y}}, z \to \sqrt{\frac{xy}{z}}$ thì $xy+yz+zx \to x+y+z$ do đó áp dụng câu a) thì $\sqrt{\frac{yz}{x}}a^2 + \sqrt{\frac{zx}{y}}b^2 + \sqrt{\frac{xy}{z}}c^2 \geq 4\sqrt{x+y+z}S.$ □

Nhận xét. Bài toán 4 phần a) là một bất đẳng thức hình học kết hợp với đại số rất kinh điển của hệ thức lượng trong tam giác. Chúng ta đã giải quyết được nó bằng pháp hình học, lời giải này rất có ý nghĩa trong thực hành giảng dạy.

Bài toán 5. Cho tam giác ABC có các điểm X, Y, Z thuộc đoạn BC, CA, AB sao cho $S_{XYZ} = \frac{1}{4}S_{ABC}$. Đặt $S_a = S_{AYZ}, S_b = S_{BZX}, S_c = S_{CXY}, BC = a, CA = b, AB = c$. Tìm vị trí X, Y, Z để biểu thức

$$\frac{S_a a^2 + S_b b^2 + S_c c^2}{\sqrt{S_a S_b S_c}}$$

đạt giá trị bé nhất.

Lời giải. Theo bài toán 1 thì $\frac{1}{S_a} + \frac{1}{S_b} + \frac{1}{S_c} \geq \frac{3}{S_{XYZ}} = \frac{12}{S_{ABC}}$. Áp dụng câu b) bài toán 4 ta có $\frac{S_a a^2+S_b b^2+S_c c^2}{\sqrt{S_a S_b S_c}} = \sqrt{\frac{S_a}{S_b S_c}}a^2 + \sqrt{\frac{S_b}{S_c S_a}}b^2 + \sqrt{\frac{S_c}{S_a S_b}}c^2 \geq 4\sqrt{\frac{1}{S_a} + \frac{1}{S_b} + \frac{1}{S_c}}S_{ABC} \geq 4\sqrt{\frac{12}{S_{ABC}}}S_{ABC} = 8\sqrt{3S_{ABC}}$.

Dấu bằng xảy ra khi X, Y, Z là trung điểm BC, CA, AB. □

Nhận xét. Bài toán trên là một sáng tạo nhỏ khi ghép nối các kết quả của bài toán 1 và bài toán 4. Rõ ràng khi cùng là các bất đẳng thức về diện tích thì các bài toán 1 và bài toán 4 khi ghép nối lại với nhau sẽ tạo ra một ứng dụng thú vị.

Bài toán 6. Cho tam giác ABC có diện tích S và các số thực dương x, y, z. Đặt $BC = a, CA = b, AB = c$. Chứng minh rằng

$$\frac{yz}{x}a^4 + \frac{zx}{y}b^4 + \frac{xy}{z}c^4 \geq \frac{x+y+z}{3}16S^2.$$

Lời giải. Áp dụng bài toán 4 câu b) ta có $3(\frac{yz}{x}a^4 + \frac{zx}{y}b^4 + \frac{xy}{z}c^4) \geq (\sqrt{\frac{yz}{x}}a^2 + \sqrt{\frac{zx}{y}}b^2 + \sqrt{\frac{xy}{z}}c^2)^2 \geq 16(x+y+z)S^2$. Từ đó $\frac{yz}{x}a^4 + \frac{zx}{y}b^4 + \frac{xy}{z}c^4 \geq \frac{x+y+z}{3}16S^2$. □

Bài toán 7. Cho tam giác ABC có diện tích S và $BC = a, CA = b, AB = c$.

a) Chứng minh rằng $a^4 + b^4 + c^4 \geq 16S^2$.

b) Chứng minh rằng $b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 \geq 16S^2$.

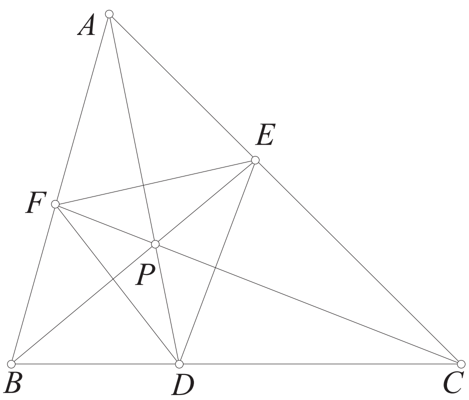
c) Chứng minh rằng $abc \geq \frac{8}{\sqrt[4]{27}}\sqrt{S^3}$.

Lời giải. a) Áp dụng bài toán 6 cho $x = y = z$ suy ra $a^4 + b^4 + c^4 \geq 16S^2$.

b) Áp dụng bài toán 4 câu b) cho $x = a^4, y = b^4, c = z^4$ ta có $b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 \geq 4\sqrt{a^4 + b^4 + c^4}S \geq 16S^2$.

c) Áp dụng bài toán 4 câu a) khi $x = y = z$ thì $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$. Từ đó áp dụng bài toán 6 cho $x = a^2, y = b^2, z = c^2$ thì $3a^2b^2c^2 \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{3}16S^2 \geq \frac{64S^3}{\sqrt{3}}$. Từ đó $abc \geq \frac{8}{\sqrt[4]{27}}\sqrt{S^3}$. □

Bài toán 8. Cho tam giác ABC và điểm P nằm trong tam giác. PA, PB, PC lần lượt cắt BC, CA, AB tại D, E, F. Hãy tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác DEF.



Hình 3.

Lời giải. Đặt $S_{PBC} = S_a, S_{PCA} = S_b, S_{PAB} = S_c, S_{ABC} = S$. Ta dễ thấy

$\frac{AE}{AC} = \frac{S_c}{S_c+S_a}, \frac{AF}{AB} = \frac{S_b}{S_a+S_b}$. Từ đó $\frac{S_{AEF}}{S} = \frac{AE}{AC}.\frac{AF}{AB} = \frac{S_c.S_b}{(S_a+S_c)(S_a+S_b)}$.

Tương tự $\frac{S_{BFD}}{S} = \frac{S_a.S_c}{(S_b+S_a)(S_b+S_c)}, \frac{S_{CDE}}{S} = \frac{S_b.S_a}{(S_c+S_b)(S_c+S_a)}$.

Từ đó ta có $\frac{S_{AEF}+S_{BFD}+S_{CDE}}{S} = \frac{S_c.S_b}{(S_a+S_c)(S_a+S_b)} + \frac{S_a.S_c}{(S_b+S_a)(S_b+S_c)} + \frac{S_b.S_a}{(S_c+S_b)(S_c+S_a)} \geq \frac{3}{4}$.

Mà $S_{AEF} + S_{BFD} + S_{CDE} = S - S_{DEF}$ suy ra $S_{DEF} \leq \frac{1}{4}S$, dấu bằng xảy ra khi P là trọng tâm tam giác ABC. □

Bài toán 9. Cho tam giác ABC có diện tích S và các số thực dương x, y, z. Đặt $BC = a, CA = b, AB = c$.

a) Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S + \frac{2}{x+y+z}(\frac{x^2-yz}{x} + \frac{y^2-zx}{y}b^2 + \frac{z^2-xy}{z}c^2).$$

b) Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S + (b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2$. (Bất đẳng thức Hadwiger-Finsler)

Lời giải. a) Từ bài toán 4 câu a), ta thế biến $x \to xyz(x+y+z) - 2yz(x^2 - yz), y \to xyz(x+y+z) - 2zx(y^2 - zx), z \to xyz(x+y+z) - 2xy(z^2 - xy)$. Ta thấy $xy + yz + zx \to 3(x^2y^2z^2)(x+y+z)^2$. Từ đó ta có

$(xyz(x+y+z) - 2yz(x^2-yz))a^2 + (xyz(x+y+z) - 2zx(y^2-zx))b^2 + (xyz(x+y+z) - 2xy(z^2-xy))c^2 \geq 4\sqrt{3}xyz(x+y+z)S.$

Rút gọn bất đẳng thức tương đương

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S + \frac{2}{x+y+z}(\frac{x^2-yz}{x}a^2 + \frac{y^2-zx}{y}b^2 + \frac{z^2-xy}{z}c^2).$$

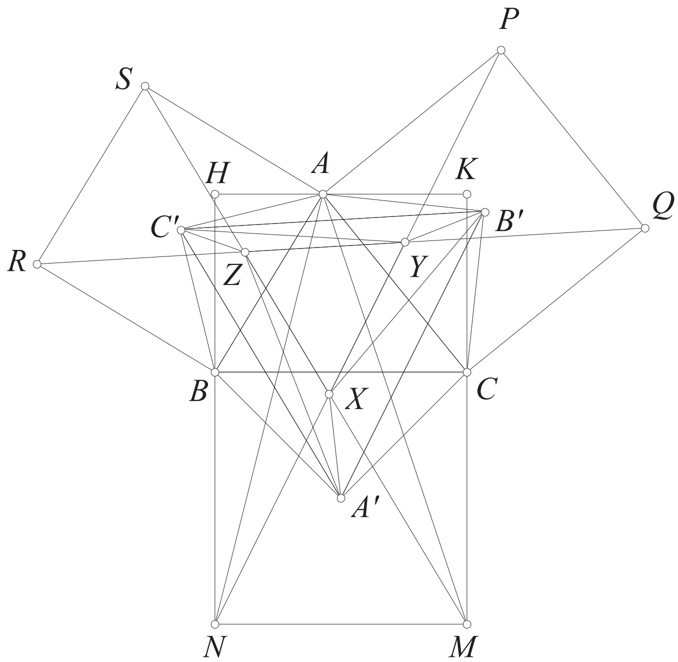
b) Cho $x = a, y = b, z = c$, chú ý $a^3+b^3+c^3-3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)((b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2)$. Ta thu được $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S + (b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2$. □

Nhận xét. Bài toán 9 câu a) là một mở rộng cho bài toán 9 câu b). Bài toán 9 câu b) có tên gọi là bất đẳng thức Hadwiger-Finsler, đây là một bất đẳng thức vô cùng quan trọng và nổi tiếng trong hệ thống các bất đẳng thức hình học. Bất đẳng thức này đã có quá nhiều mở rộng, tuy nhiên mở rộng theo cách câu a) là một mở rộng thú vị vì đó là một bất đẳng thức có tới sáu biến, xem [2, 3].

Cuối cùng ta đi tới một ứng dụng hình học đẹp cho một bất đẳng thức hình học đã xây dựng.

Bài toán 10. Cho tam giác ABC, dựng ra ngoài các hình vuông $BCMN, CAPQ, ABRS$. Gọi SM cắt PN tại X, PN cắt RQ tại Y, RQ cắt SM tại Z. Chứng minh rằng

$$S_{XYZ} \leq (2 - \sqrt{3})S_{ABC}.$$



Hình 4.

Lời giải. Đặt $BC = a, CA = b, AB = c$. Gọi H, K là hình chiếu của A lên BN, CM. Ta dễ thấy các tam giác $BC'A'$ và BAN đồng dạng, tam giác $CA'B'$ và CMA đồng dạng tỷ số $\frac{1}{\sqrt{2}}$ do đó

$S_{BC'A'} + S_{CA'B'} = \frac{1}{2}(S_{BAN} + S_{CAM}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}AH.BN + \frac{1}{2}AK.CM) = \frac{1}{4}BC^2.$

Chứng minh tương tự $S_{CA'B'} + S_{AB'C'} = \frac{CA^2}{4}, S_{AB'C'} + S_{BC'A'} = \frac{AB^2}{4}$. Do đó ta thu được

$$S_{AB'C'} + S_{BC'A'} + S_{CA'B'} = \frac{AB^2 + BC^2 + CA^2}{8}.$$

Theo bài toán 4 câu a) khi $x = y = z$ thì $AB^2 + BC^2 + CA^2 \geq 4\sqrt{3}S_{ABC}$ do đó $S_{AB'C'} + S_{BC'A'} + S_{CA'B'} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}S_{ABC}$.

Lại có $S_{A'B'C'} = S_{ABC} + S_{AB'C'} + S_{BC'A'} + S_{CA'B'} \geq (1 + \frac{\sqrt{3}}{2})S_{ABC}$ hay $\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} \leq \frac{1}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4 - 2\sqrt{3}$.

Dễ thấy tam giác XYZ và $A'B'C'$ có các cạnh tương ứng song song nên đồng dạng. Ta đặt $\frac{YZ}{B'C'} = \frac{ZX}{C'A'} = \frac{XY}{A'B'} = k$ thì $\frac{S_{XYZ}}{S_{A'B'C'}} = k^2$. Ta có

$(1-k^2)(S_{A'B'C'}) = S_{A'B'C'} - S_{XYZ} = (S_{A'B'X} + S_{XB'Y}) + (S_{B'C'Y} + S_{YC'Z}) + (S_{C'A'Z} + S_{ZA'X})$

Chú ý rằng $S_{YC'Z} + S_{B'C'Y} = \frac{1}{2}d(C', YZ).YZ + \frac{1}{2}d(Y, B'C').B'C' = \frac{1}{2}d(A, B'C').kB'C' + \frac{1}{2}d(A, B'C').B'C' = (1 + k)S_{AB'C'}$. Tương tự

$S_{A'B'X} + S_{XB'Y} = (1 + k)S_{CA'B'}, S_{C'A'Z} + S_{ZA'X} = (1 + k)S_{AB'C'}$. Từ đó

$(1 - k^2)S_{A'B'C'} = (1 + k)(S_{AB'C'} + S_{BC'A'} + S_{CA'B'}) = (1 + k)(S_{A'B'C'} - S_{ABC})$

Hay $(1 - k)S_{A'B'C} = S_{A'B'C'} - S_{ABC}$ suy ra $S_{ABC} = kS_{A'B'C'} = \sqrt{\frac{S_{XYZ}}{S_{A'B'C'}}}S_{A'B'C'}$ do đó $S^2_{ABC} = S_{XYZ}.S^2_{A'B'C'}$.

Từ đó $S_{XYZ} = S_{ABC}.\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} \leq (4 - 2\sqrt{3})S_{ABC}$. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bất đẳng thức trên là một ứng dụng hình học đẹp mắt của bất đẳng thức

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S.$$

Bất đẳng thức này có tên gọi quốc tế là bất đẳng thức Weitzenböck [3]. Trong các kỳ thi Olympic, bất đẳng thức Weitzenböck đã xuất hiện rất sớm, đó là bài toán 2 trong kỳ thi IMO năm 1961 (kỳ thi toán quốc tế thứ 3 trên thế giới), xem [4]. Bất đẳng thức Weitzenböck có thể được coi là hệ quả của bài toán 4 câu a) và cũng có thể được coi là hệ quả trực tiếp của bất đẳng thức Hadwiger-Finsler trong bài toán 9. Đây là một đánh giá tương quan giữa diện tích và tổng bình phương các cạnh tam giác. Ta chú ý rằng diện tích tam giác có thứ nguyên là 2 nên việc đánh giá nó với tổng bình phương cách cạnh là đánh giá quan trọng thay vì đánh giá nó với các đại lượng khác. Các bài toán 4, bài toán 9 mới là hai mở rộng trong số rất nhiều các bài toán xoay quanh bất đẳng thức hình học kinh điển này. Xung quanh nó là vô vàn các khám phá thú vị khác đang chờ các bạn.

Lời cảm ơn. Tác giả bài viết chân thành cảm ơn bạn **Lê Bích Ngọc**, người học trò nữ xuất sắc của tác giả ở khóa chuyên toán K46 THPT chuyên KHTN. Thời gian qua đi, đứng trên bục giảng, tôi được chứng kiến nhiều biến chuyển trong hình học sơ cấp. Nếu tôi thấy được rằng có những bạn học sinh dùng toán với những mục đích khác nhau thì riêng **Bích Ngọc** đã gợi nhắc cho tôi rằng, tôi vẫn còn nhiều học trò thực sự có niềm say mê toán và hình học. Nếu toán không thể cùng chúng ta đi mãi, nhưng trong một thời điểm, có những lúc chúng ta đã cháy hết mình với toán, thì đó là những giây phút vô cùng đáng trân trọng.

Tài liệu

[1] Balkan MO 2006, Problem 1; Crux 1998,
`https://artofproblemsolving.com/community/c6h161059p1205`.

[2] Hojoo Lee, Tom Lovering, and Cosmin Pohoata, *Infinity*, The first edition (Oct. 2008) on internet.

[3] Claudi Alsina and Roger B. Nelsen, *Geometric Proofs of the Weitzenböck and Hadwiger-Finsler Inequalities*, Mathematics Magazine, Vol. 81, No. 3 (Jun., 2008), pp. 216-219.

[4] IMO 1961, Problem 2,
`https://artofproblemsolving.com/community/c6h14388p101840`.

[5] IMO 1966, Problem 6,
`https://artofproblemsolving.com/community/c6h5179p16477`.

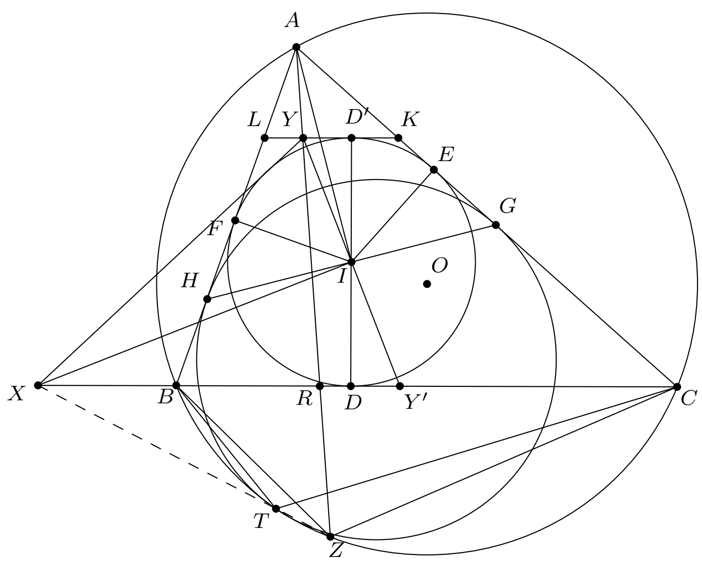
Một số vấn đề về các đường tròn Mixtillinear và Thébault

Lê Xuân Hoàng

Tóm tắt

Sau đây là một số vấn đề phát triển trên cấu hình các đường tròn Mixtillinear và Thébault. Đây là một cấu hình thú vị và có nhiều ứng dụng trong giải toán.

Bài toán 1 (Lê Xuân Hoàng)**.** Cho $\triangle ABC$ nội tiếp (O), ngoại tiếp (I).
X là một điểm bất kỳ trên đường thẳng BC. Đường thẳng qua I vuông góc IX cắt tiếp tuyến song song BC của (I) tại Y.
AY cắt (O) tại Z khác A. Chứng minh rằng XZ đi qua tiếp điểm của đường tròn $A-$Mixtilinear nội tiếp của $\triangle ABC$ với (O)



Chứng minh. Gọi R là giao điểm của AY, BC.
D, E, F lần lượt là tiếp điểm của (I) với BC, CA, AB. D' đối xứng D qua I.
T là tiếp điểm của $A-$Mixtilinear nội tiếp của $\triangle ABC$ với (O).
Tiếp tuyến tại D' của (I) giao CA, AB lần lượt tại K, L.

Theo tính chất của đường tròn mixtilinear, TA, TD đẳng giác trong góc $\angle BTC$. Sử dụng các cặp tam giác đồng dạng ($\triangle ILD' \sim \triangle BID$, $\triangle IKD' \sim \triangle CID$, $\triangle IYD' \sim \triangle XID$) và hệ thức $\dfrac{TB}{TC} = \dfrac{AB}{CD} \cdot \dfrac{BD}{AC}$, ta có thể chứng minh X, T, Z thẳng hàng bằng cách chỉ ra $\dfrac{XB}{XC} = \dfrac{TB}{TC} \cdot \dfrac{ZB}{ZC}$.
với việc thực hiện biến đổi tương đương:

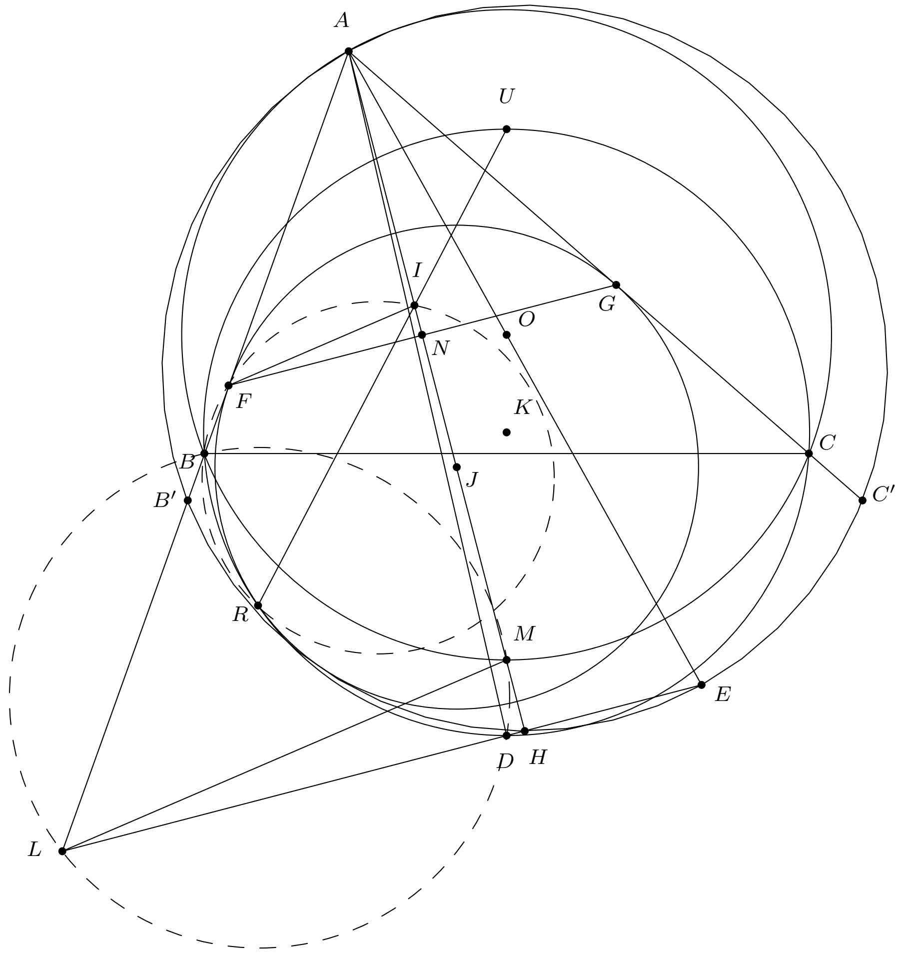
$$\begin{aligned}
\frac{ZB}{ZC} &= \frac{RB}{RC} \cdot \frac{AC}{AB} \\
&= \frac{YL}{YK} \cdot \frac{AC}{AB} = \frac{LD' - YD'}{YD' + KD'} \cdot \frac{AC}{AB} \\
&= \frac{\dfrac{r^2}{BD} - \dfrac{r^2}{XD}}{\dfrac{r^2}{XD} + \dfrac{r^2}{CD}} \cdot \frac{AC}{AB} = \frac{\dfrac{XB}{XD \cdot BD}}{\dfrac{XC}{XD \cdot CD}} \cdot \frac{AC}{AB} \\
&= \frac{XB}{XC} \cdot \frac{CD}{BD} \cdot \frac{AC}{AB} = \frac{XB}{XC} \cdot \frac{TC}{TB}
\end{aligned}$$

Như vậy ta có được điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán 1 ở trên là một bài toán đặc trưng cho phương pháp biến đổi tỉ số trong giải toán hình học phẳng. Bải toán tuy phát biểu khá đơn giản nhưng có một số hệ quả thú vị.

Ta sẽ cùng đến với một kết quả khá hay trên mô hình của đường tròn Thébault - dạng tổng quát của đường tròn Mixtillinear.

Bài toán 2 (Trần Quân)**.** Cho $\triangle ABC$ có tâm ngoại tiếp O. (K) là một đường tròn đi qua B, C. (J) là đường tròn tiếp xúc AB, AC và tiếp xúc trong với (K). D là điểm chính giữa cung BC. của K sao cho A, D khác phía so với BC. Lấy điểm E trên AO sao cho DE vuông góc với AJ. Chứng minh rằng (AE) tiếp xúc (J).



Chứng minh. Gọi tiếp điểm của (J) và (K) là R. I là tâm nội tiếp $\triangle ABC$. (J) tiếp xúc với CA, AB lần lượt tại G, F.
GF cắt AJ tại N, DE cắt AJ tại H, DE cắt AB tại L.
M là điểm chính giữa cung BC không chứa A của (O). U đối xứng với D qua K.
Ta có:

$$\begin{aligned}\angle BLD &= 90^\circ - \angle BAH\\ &= 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC\\ &= \angle BMO = 180^\circ - \angle BMD\end{aligned}$$

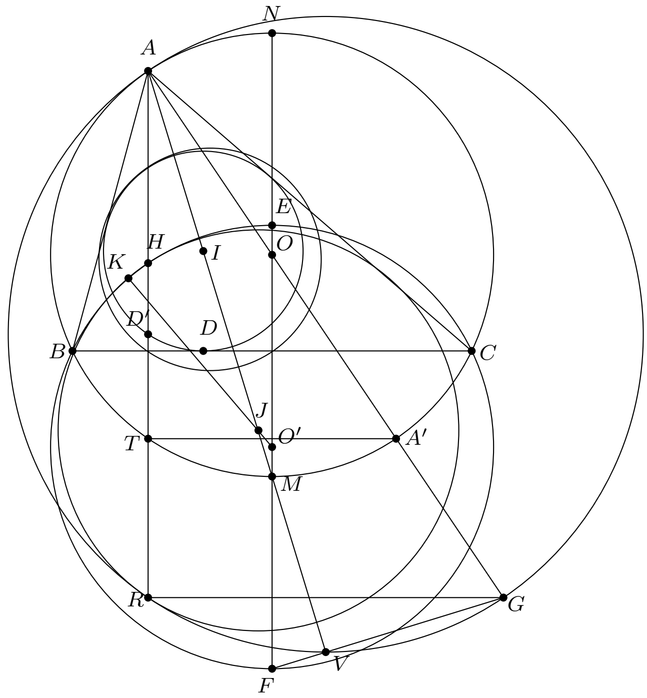
Điều này dẫn đến các điểm B, L, D, M đồng viên và $\angle BLM = \angle BDM$. Mà theo định lý Protasov và chứng minh, ta có R, I, U thẳng hàng và B, R, I, F đồng viên. Do đó $\angle BLM = \angle BDM = \angle BRI = \angle AFI$ nên LM song song với FI. Theo định lý Thales:

$$\frac{AN}{AH} = \frac{AF}{AL} = \frac{AI}{AM} \Leftrightarrow \frac{AI}{AN} = \frac{AM}{AH}$$

Như vậy phép vị tự tâm A biến (O) thành AE sẽ biến M thành H, biến I thành N – tức là đường tròn (J) là ảnh của đường tròn $A-$Mixtillinear nội tiếp qua phép vị tự này, do vậy (AE) tiếp xúc (J). □

Từ bài toán 2 ta sẽ chứng minh một định lý nổi tiếng của hình học phẳng.

Bài toán 3 (Feuerbach)**.** Trong một tam giác, đường tròn chín điểm tiếp xúc trong với đường tròn nội tiếp.



Chứng minh. Chứng minh dưới đây phụ thuộc vào hình vẽ.
Gọi H là trực tâm $\triangle ABC$. (J) tiếp xúc CA, AB và tiếp xúc (BHC). M, N lần lượt là điểm chính giữa các cung BC không chứa A và cung BC không chứa A của (O).
E, F lần lượt là đối xứng của M, N qua BC.
I là tâm nội tiếp của $\triangle ABC$. NI cắt lại (O) tại T khác N. Đường thẳng qua F vuông góc AI cắt AI, AO lần lượt tại K, G. L là hình chiếu của G lên AT, đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC tại D và gọi D' đối xứng D qua NI. Khi đó ta sẽ chỉ ra những điều sau:

- $\dfrac{TL}{TA} = \cos(\angle A)$
- D' thuộc AT và $\dfrac{TD}{TA} = (\cos(\angle \dfrac{A}{2})^2) \Rightarrow D'L = D'A$.
- Theo bài toán 2, ta có (ALG) tiếp xúc (J) suy ra (J) là ảnh của (I) qua phép vị tự tâm A tỉ số 2.

Từ đó ta thu được điều phải chứng minh. □

Sau đây sẽ là một số kết quả hay trên cấu hình về các đường tròn Thébault và mixtillinear mà tác giả sáng tác và sưu tầm. Hy vọng các bạn sẽ tìm ra thêm những kết quả đẹp hơn nữa trên cấu hình mới mẻ và thú vị này.

Bài toán 4. Cho $\triangle ABC$ cố định nội tiếp (O), ngoại tiếp (I). P bất kì trên (O). Hai tiếp tuyến từ P tới (I) cắt tiếp tuyến song song BC của (I) lần lượt tại X, Y.Chứng minh rằng (PXY) tiếp xúc với một đường tròn cố định khi P di chuyển trên (O).
(Bạn hãy tìm mở rộng cho bài toán này!)

Bài toán 5. (Yetti): Cho $\triangle ABC$ Cố định nội tiếp (O),ngoại tiếp (I) và P bất kì trên mặt phẳng sao cho P không nằm trong (I). AP cắt (O) tại K khác A. Tiếp tuyến tại P của (I) cắt BC lần lượt tại X, Y.Chứng minh rằng (KXY) đi qua một điểm cố định khi P di chuyển.

Bài toán 6 (Lê Xuân Hoàng)**.** Cho $\triangle ABC$. E bất kì trên CA. Gọi (J) là đường tròn tiếp xúc với hai cạnh CA, AB và tiếp xúc trong với (BEC) tại T. Một đường tròn (K) bất kì đi qua B, C và (L) là đường tròn tiếp xúc với hai cạnh CA, AB và tiếp xúc trong với (K) tại R. Tiếp tuyến tại R của (K) cắt BC tại S. ST cắt (BEC) tại X khác T. Chứng minh rằng BT, AR, XE đồng quy.

Bài toán 7 (Tổng quát hoá bổ đề Sawayama)**.** Cho $\triangle ABC$, (K) bất kỳ đi qua B, C và A nằm ngoài (K). (K) cắt AB ở F khác B. (O_a) tiếp xúc ngoài (K) và tiếp xúc các cạnh CA, AB lần lượt ở X, Y. d là một đường thẳng bất kỳ qua B. (O) tiếp xúc CA và d (như hình vẽ) và tiếp xúc trong (K) ở T. Phân giác ngoài của $\angle BTF$ cắt XY ở J.
Chứng minh rằng J nằm trên phân giác của góc giữa AB và d.
(Khi (d) trùng BC ta sẽ có một trong các trường hợp của bổ đề Sawayama).

MỘT MỞ RỘNG CỦA ĐƯỜNG THẲNG SIMSON

Nguyễn Minh Hà và Lê Viết Ân

GIỚI THIỆU

Trong bài viết này, chúng tôi sẽ giới thiệu đến bạn đọc một mở rộng mới về đường thẳng Simson và một tính chất liên quan đến đường thẳng Simson mở rộng này

1. Giới thiệu

Trong hình học, định lý về đường thẳng Simson được phát biểu như sau.

Định lý 1. *Cho tam giác ABC và một điểm P nằm trên đường tròn ngoại tiếp của tam giác. Khi đó, các hình chiếu của điểm P trên các cạnh của tam giác thẳng hàng.*

Đường thẳng đi qua các hình chiếu đó được gọi là **Đường thẳng Simson** của điểm P đối với tam giác ABC. Đường thẳng này được đặt theo tên của nhà toán học Robert Simson, [1]. Tuy nhiên, khái niệm này được xuất bản lần đầu bởi William Wallace, [2].

Điều ngược lại của định lý 1 cũng đúng, cụ thể là:

Định lý 2. *Nếu hình chiếu của một điểm P trên các cạnh của một tam giác thẳng hàng thì điểm P nằm trên đường tròn ngoại tiếp của tam giác đó.*

Đã có rất nhiều mở rộng cho định lý 1. Tuy nhiên, ở đây chúng tôi sẽ đưa ra một mở rộng mới cho định lý 1 như sau

Định lý 3. *Cho tam giác ABC có trực tâm H. Xét điểm P thuộc mặt phẳng tam giác. Một đường tròn (I) đi qua H và P cắt AH, BH, CH theo thứ tự tại A', B', C'. Điểm Q bất kì thuộc (I). Các đường thẳng đi qua P song song với QA', QB', QC' và cắt BC, CA, AB theo thứ tự tại A_0, B_0, C_0. Khi đó:*

a/ Các điểm A_0, B_0, C_0 thẳng hàng khi và chỉ khi P thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

b/ Trong trường hợp A_0, B_0, C_0 thẳng hàng thì giao điểm của hai đường thẳng $\overline{A_0B_0C_0}$ và PQ (nếu có) thì thuộc trung trực của PH.

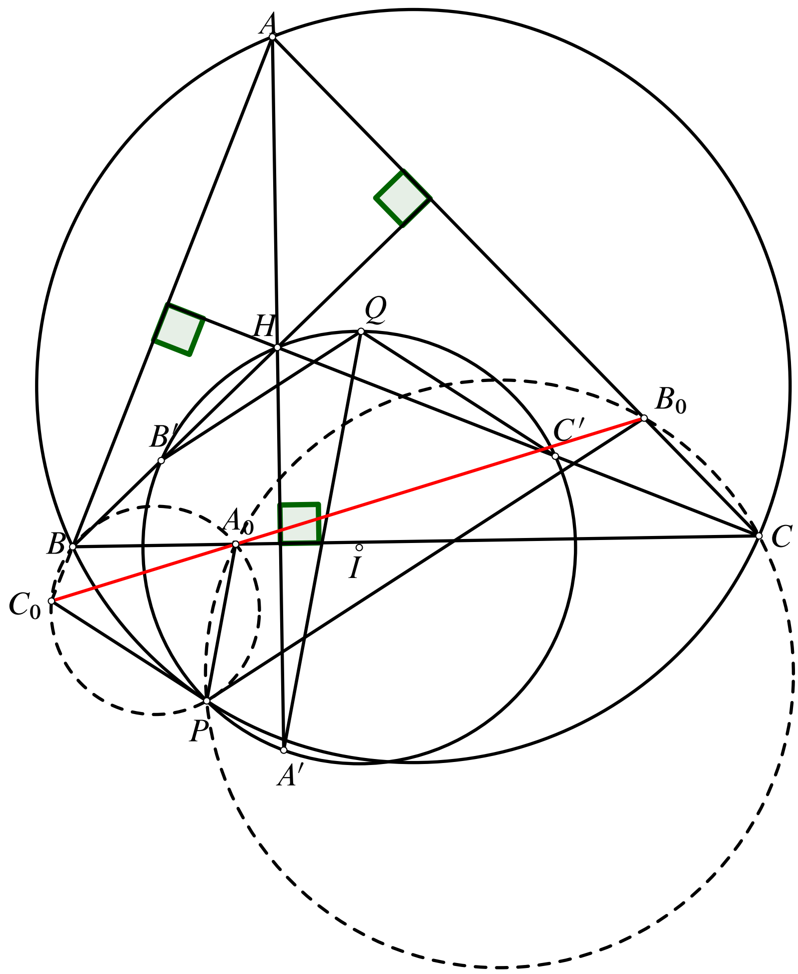
Rõ ràng khi Q trùng với H thì ta được đường thẳng Simson-Wallace.

2. Phép chứng minh Định lý 3

a/ (Xem hình vẽ 1). Ta có

$$(PA_0, PB_0) \equiv (QA', QB') \equiv (HA', HB') \equiv (CB, CA) \equiv (CA_0, CB_0)(mod\,\pi)$$

Suy ra P, C, A_0, B_0 đồng viên.



Hình 1

Tương tự các điểm P, B, C_0, A_0 đồng viên và các điểm P, A, B_0, C_0 cũng đồng viên. Vậy

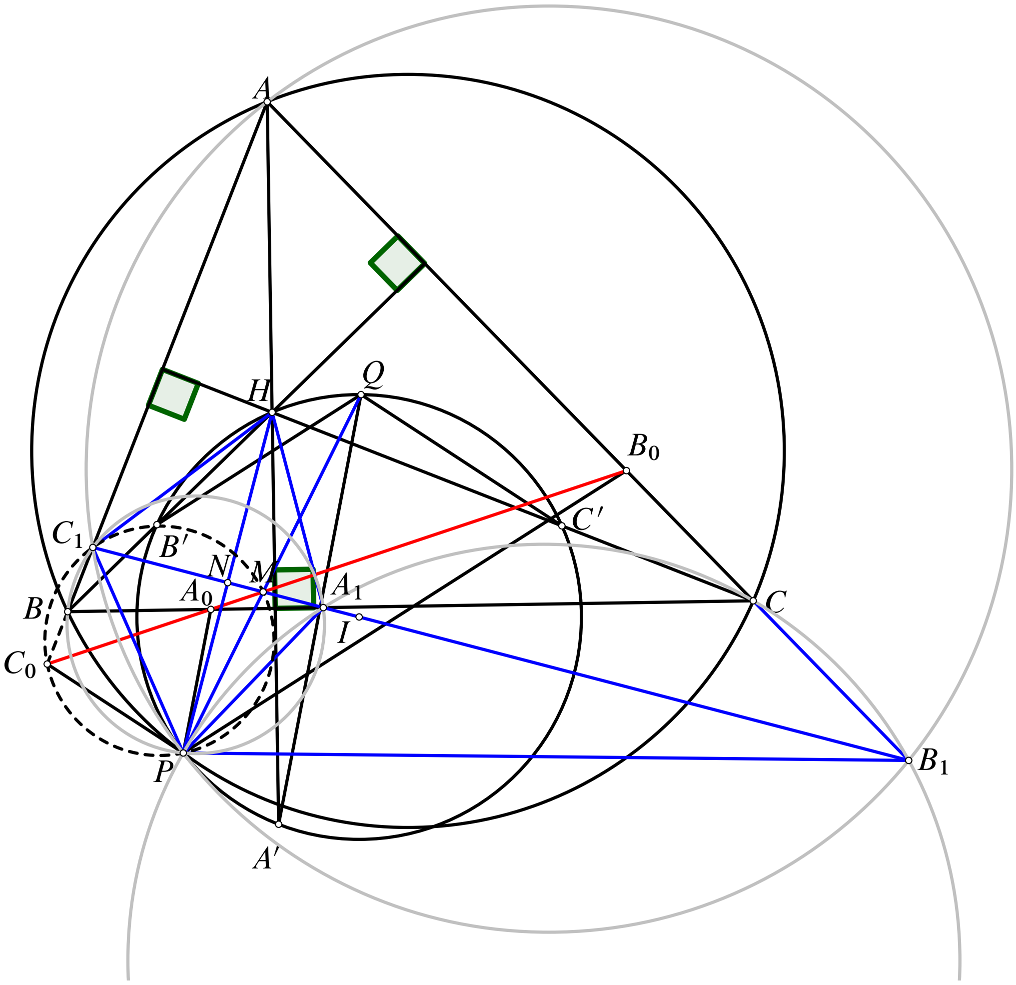
$$\begin{aligned}
(A_0C_0, A_0B_0) &\equiv (A_0C_0, A_0P) - (A_0B_0, A_0P) && (mod\,\pi)\\
&\equiv (BC_0, BP) - (CB_0, CP) && (mod\,\pi)\\
&\equiv (BA, BP) - (CA, CP) && (mod\,\pi)\\
&\equiv 0 && (mod\,\pi).
\end{aligned}$$

. Do đó A_0, B_0, C_0 thẳng hàng.

b/ Theo câu a, rõ ràng thì ta có đường thẳng. Ta xét hai trường hợp sau đây:

– *Trường hợp 1 :* P là giao điểm của $\odot(ABC)$ với hoặc AH, hoặc BH hoặc CH. Trường hợp này thì kết quả hiển nhiên.

– *Trường hợp 2:* P không là giao điểm của $\odot(ABC)$ và các đường cao của tam giác ABC. Khi đó, trung trực của HP sẽ cắt các đường thẳngBC, CA, AB (hình vẽ 2).



Hình 2

Gọi AH, BH, CH cắt BC, CA, AB thứ tự tại H_a, H_b, H_c và D_a, D_b, D_c là đối xứng của H thứ tự qua BC, CA, AB thì $D_a, D_b, D_c \in \odot(ABC)$. Đường trung trực của HP thứ tự cắt PQ, PH, BC, CA, AB tại M, N, A_1, B_1, C_1.

Ta có

$$\begin{aligned}
(PA_1, PC_1) &\equiv (HC_1, HA_1) && (mod\,\pi)\\
&\equiv (HC_1, HN) + (HN, HA_1) && (mod\,\pi)\\
&\equiv (H_cC_1, H_cN) + (H_aN, H_aA_1) && (mod\,\pi)\\
&\equiv (AB, D_cP) + (D_aP, BC) && (mod\,\pi)\\
&\equiv (AB, BC) + (D_aP, D_cP) && (mod\,\pi)\\
&\equiv (BA, BC) + (D_aB, D_cB) && (mod\,\pi)\\
&\equiv (BA, BD_c) + (BD_a, BC) && (mod\,\pi)\\
&\equiv (BH, BA) + (BC, BH) && (mod\,\pi)\\
&\equiv (BC, BA) && (mod\,\pi)\\
&\equiv (BC_1, BA_1) && (mod\,\pi).
\end{aligned}$$

Suy ra bốn điểm P, B, C_1, A_1 đồng viên.
Tương tự, các điểm P, C, A_1, B_1 đồng viên và P, A, B_1, C_1 đồng viên.
Lại có

$$\begin{aligned}
(C_0C_1, MC_1) &\equiv (H_cC_1, NC_1) && (mod\,\pi)\\
&\equiv (H_cH, NH) && (mod\,\pi)\\
&\equiv (C'H, PH) && (mod\,\pi)\\
&\equiv (C'Q, PQ) && (mod\,\pi)\\
&\equiv (C_0P, MP) && (mod\,\pi).
\end{aligned}$$

Suy ra các điểm P, M, C_0, C_1 đồng viên.
Tương tự, ta cũng có các điểm P, M, B_0, B_1 đồng viên và P, M, A_0, A_1 đồng viên.
Từ các bộ bốn điểm đồng viên vừa chứng minh trên, ta có

$$\begin{aligned}
(MA_0, MC_0) &\equiv (MP, MC_0) - (MP, MA) && (mod\,\pi)\\
&\equiv (C_1P, C_1C_0) - (A_1P, A_1A_0) && (mod\,\pi)\\
&\equiv (C_1P, C_1B) - (A_1P, A_1B) && (mod\,\pi).
\end{aligned}$$

Suy ra ba điểm M, C_0, A_0 thẳng hàng.
Do đó $M \in \overline{A_0B_0C_0}$. Ta có điều phải chứng minh.

3. Một số tính chất áp dụng của Định lý 3

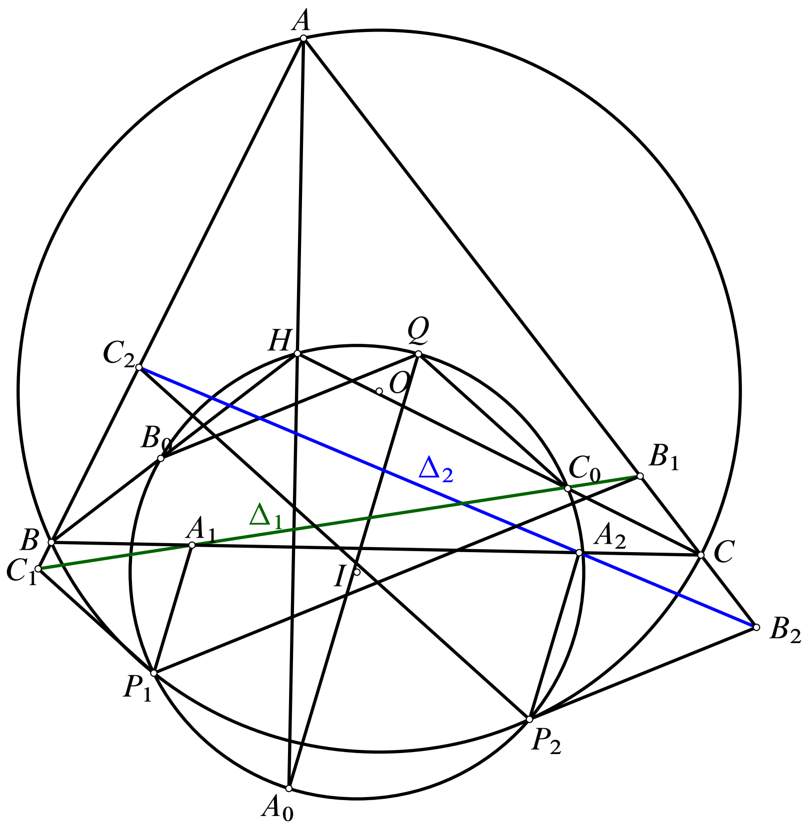
Định lý 4. *Cho tam giác ABC, (O) là đường tròn ngoại tiếp, H là trực tâm. (I) là đường tròn bất kì đi qua H và cắt (O) tại P_1, P_2 và theo thứ tự cắt HA, HB, HC tại A_0, B_0, C_0. Điểm Q thuộc (I). Các bộ hai điểm $\{A_;A_2\}$, $\{B_1; B_2\}$, $\{C_1; C_2\}$ theo thứ tự thuộc BC, CA, AB sao cho $P_1A_1 \parallel P_2A_2 \parallel QA_0$; $P_1B_1 \parallel P_2B_2 \parallel QB_0$; $P_1C_1 \parallel P_2C_2 \parallel QC_0$. Chứng minh rằng*

1) *Các bộ ba điểm $\{A_1, B_1, C_1\}$ và $\{A_2, B_2, C_2\}$ thẳng hàng, kí hiệu $\triangle_1, \triangle_2$ theo thứ tự là các đường thẳng chứa các bộ ba điểm này.*

2) $2(\triangle_1, \triangle_2) \equiv (\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2})(mod\,2\pi)$.

Lời giải. (Xem hình vẽ 3).

1) Các bộ ba điểm $\{A_1, B_1, C_1\}$ và $\{A_2, B_2, C_2\}$ thẳng hàng theo định lý 3.



Hình 3

2) Ta có

$$
\begin{aligned}
(\triangle_1, \triangle_2) &\equiv (A_1C_1, A_2B_2) && (mod\,\pi)\\
&\equiv (A_1C_1, A_1B) + (A_2C, A_2B_2) && (mod\,\pi)\\
&\equiv (P_1C_1, P_1B) + (P_2C, P_2B_2) && (mod\,\pi)\\
&\equiv (HC, P_1B) + (P_2C, P_1B) && (mod\,\pi)\\
&\equiv (AB, AC) + (P_2C, P_1B) && (mod\,\pi)\\
&\equiv (AB, P_1B) + (P_2C, AC) && (mod\,\pi)\\
&\equiv (AB, P_1B) + (P_2B, AB) && (mod\,\pi)\\
&\equiv (P_2B, P_1B) && (mod\,\pi)\\
&\equiv \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}) && (mod\,\pi).
\end{aligned}
$$

□

Tài liệu

[1] *Gibson History 7 - Robert Simson*.
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Extras/Gibson_history_7.html

[2] *Simson line*.
http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/Simpson.shtml

[3] *Đường thẳng Simson*, https://vi.wikipedia.org/wiki/.

MÃ VÀ CÁC KỲ THI OLYMPIC TOÁN (II)

S.B.Gashkov

Tiếp theo kỳ trước, xem phần mở đầu và các mục 1, 2, 3 ở Epsilon số 15

4. Ví dụ đơn giản nhất về mã sửa một lỗi

Cần làm mọi thứ trở nên đơn giản nhất có thể, nhưng không đơn giản hơn
Albert Einstein

Claude Shannon[21)] đưa ra ý tưởng mã sửa sai. Ta xét ví dụ về mã sửa được một lỗi (trường hợp riêng đơn giản nhất của mã Hamming). Giả sử ta phải truyền từ nhị phân $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ ta bổ sung các ký tự kiểm tra $x_5 = x_1 + x_3 + x_4$, $x_6 = x_1 + x_2 + x_4$, $x_7 = x_1 + x_2 + x_3$ (dấu $+$ ở đây là phép cộng theo modulo 2, các ký tự $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ được gọi là ký tự thông tin). Quy trình tính theo các ký tự thông tin ra các ký tự kiểm tra và thiết lập từ mã (bản tin được mã hóa) được gọi là mã hóa (và chính ánh xạ từ bản tin ban đầu thành từ mã cũng được gọi là mã hóa).

Trên ngôn ngữ ma trận trong ví dụ đang xét việc mã hóa quy về việc nhân ma trận M với ma trận chuyển vị $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T$, tức là vector cột

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix}.$$

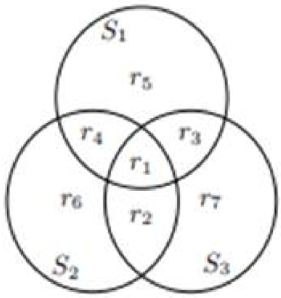
Ta truyền bản tin mã hóa $c = (x_1,\ x_2, \dots,\ x_7)$ và thu được bản tin nhiễu $r = c + e$ với $e = (e_1,\ e_2, \dots,\ e_7)$ là vector lỗi. Trong trường hợp của chúng ta nó có trọng bằng 1, vì theo giả thiết, lỗi chỉ xảy ra (nếu thực sự có lỗi) ở một vị trí. Giả sử, có thể là $e = e_3 = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$.

Khi đó

$$r = c + e = (c_1, c_2, c_3 + 1, c_4, c_5, c_6, c_7) = (c_1, c_2, \overline{c_3}, c_4, c_5, c_6, c_7),$$

trong đó $\overline{0} = 1,\ \overline{1} = 0$. Trong trường hợp đang xét, số 3 được gọi là vị trí lỗi. Để xác định vị trí lỗi, có thể tính các tổng kiểm tra

$$S_1 = r_1 + r_3 + r_4 + r_5,$$
$$S_2 = r_1 + r_2 + r_4 + r_6,$$
$$S_3 = r_1 + r_2 + r_3 + r_7.$$



Một cách trực quan, tất cả các tổng này được minh họa trên hình 1.

Mỗi một tổng được chứa trong vòng tròn của mình. Trên ngôn ngữ ma trận, quá trình này tương đương với việc nhân ma trận cho vector

$$\begin{pmatrix}1&0&1&1&1&0&0\\1&1&0&1&0&1&0\\1&1&1&0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_1\\r_2\\r_3\\r_4\\r_5\\r_6\\r_7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}S_1\\S_2\\S_3\end{pmatrix}.$$

Ma trận H được chỉ ra ở trên được gọi là ma trận kiểm tra của mã. Trong cách viết gọn, phép nhân ma trận H cho vector r^T được viết là $S = Hr^T$, trong đó S là vector cột $(S_1, S_2, S_3)^T$.

Chú ý rằng ma trận H được chọn sao cho $Hc^T = 0$ (trong đó 0 là vector 0 dạng cột) với mọi vector mã c. Điều này có thể kiểm tra trực tiếp (và cũng không cần phải sử dụng ngôn ngữ ma trận, chỉ cần trong các tổng S_i ở trên thay x_5, x_6, x_7 bởi các giá trị của chúng tính qua (x_1, x_2, x_3, x_4)). Trên ngôn ngữ ma trận điều này cũng kiểm chứng dễ dàng. Chú ý rằng ma trận M được viết dưới dạng $\begin{pmatrix}E\\A\end{pmatrix}$, trong đó E là ma trận đơn vị[22)] kích thước 4×4 và A là ma trận kích thước 3×4. Ma trận H cũng được tạo thành từ ma trận con A và ma trận đơn vị kích thước 3×3, vì vậy

$$Hc^T = A\cdot(x_1,x_2,x_3,x_4)^T + E\cdot(x_5,x_6,x_7)^T = A\cdot(x_1,x_2,x_3,x_4)^T + (x_5,x_6,x_7)^T = 0^T,$$

vì từ đẳng thức

$$M\cdot(x_1,x_2,x_3,x_4)^T = (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7)^T,$$

ta có

$$A\cdot(x_1,x_2,x_3,x_4)^T = (x_5,x_6,x_7)^T.$$

Sử dụng các tính chất dễ kiểm tra của phép nhân và cộng ma trận, ta được

$$S = Hr^T = H(c^T + e^T) = He^T = H_i,$$

trong đó e là vector với một số 1 duy nhất ở vị trí thứ i, H_i là cột thứ i của ma trận H (đẳng thức này có thể kiểm tra trực tiếp, thay r_j trong các tổng Si bởi $c_j + e_j = x_j + e_j$). Bây giờ chú ý là tất cả các cột của ma trận H đều khác nhau và khác 0[23)]. Do đó theo cột H_i ta có thể xác định một cách chính xác số thứ tự của nó, và có nghĩa là vị trí lỗi. Nếu như không có lỗi, thì hiển nhiên là $S = Hr^T = Hc^T = 0$, và đẳng thức này có thể kiểm tra bằng cách so sánh S với vector 0 dạng cột (nếu như S khác 0 thì tất nhiên là đã xảy ra lỗi). Để xác định vị trí lỗi theo vector S đã tính được (được gọi là hội chứng) ta có thể lập bảng có chứa vị trí lỗi, ví dụ dưới cách viết nhị phân. Bảng này bao gồm 8 dòng, đánh số bởi các bộ số nhị phân độ dài 3. Nếu như không có lỗi thì số thứ tự của nó có thể cho là bằng 0. Nếu như ma trận kiểm tra có dạng

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

thì bảng này không cần thiết, bởi vì hội chứng S trong trường hợp này trùng với thứ tự nhị phân của vị trí lỗi. Dĩ nhiên, ma trận M cũng phải được thay đổi.

Mã vừa được xây dựng là trường hợp riêng của mã Hamming, sẽ được nói đến ở các phần tiếp theo. Trong trường hợp chiều dài từ mã bằng 31, ý tưởng xây dựng mã rất gần với bài toán 5, được đề xuất bởi nhà toán học Pháp Lucas ngay từ thế kỷ XIX (điều này sẽ trở nên rõ ràng sau khi đọc phần 5). Và 3 bài toán dưới đây cũng rất gần với bài toán đó.

Bài toán 23. *(Từ cơ sở dữ liệu các bài toán của Olympic toán Matxcova). Trong một tập hợp n phần tử ta chọn 5n tập con phân biệt gồm 2 phần tử. Chứng minh rằng bằng cách hợp chúng lại đôi một, ta có thể thu được không ít hơn 45n tập con 3 phần tử.*

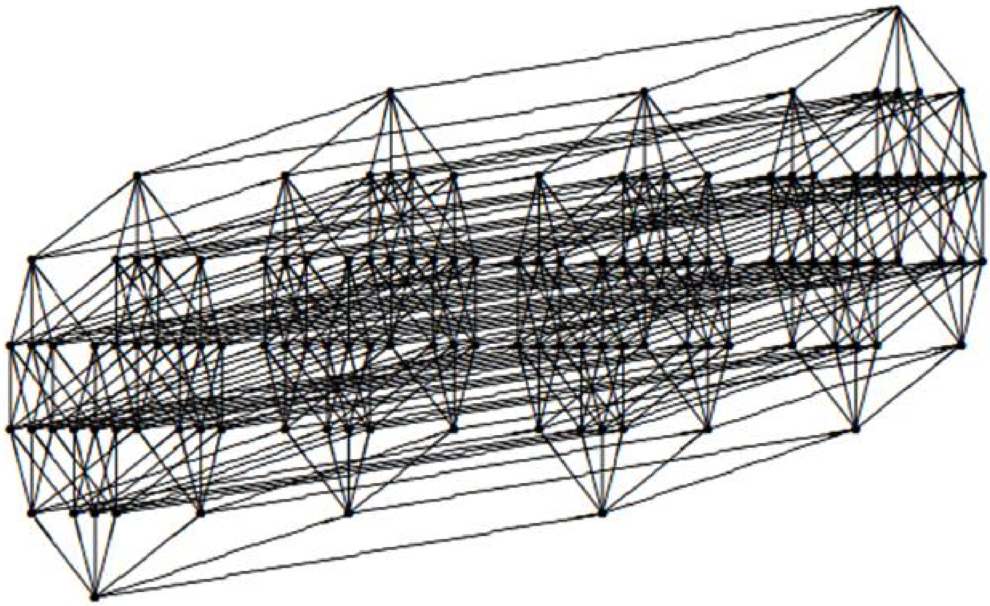
Bài toán 24. *Hãy tìm ra đồng tiền giả từ 63 đồng tiền, sử dụng chỉ 6 lần cân, biết rằng đồng tiền giả nhẹ hơn đồng tiền thật. Mỗi một lần cân có thể cân nhiều đồng tiền một lúc. Kế hoạch cần phải được thiết lập từ trước.*

Bài toán 25 (MMO 1990, 8.5). *Bảng điện bao gồm 64 bóng đèn, được điều khiển bởi 64 chiếc công tắc, mỗi bóng đèn bởi công tắc của mình. Mỗi một lần thực hiện có thể đồng thời nhấn một bộ công tắc bất kỳ và ghi lại những bóng nào sáng. Hỏi cần bao nhiêu lần thực hiện để có thể biết về tất cả các bóng đèn của bảng: Bóng đèn nào được điều khiển bởi công tắc nào?*

Lưu ý một số tính chất của mã được xây dựng ở trên. Nó có $2^4 = 16$ từ mã, tổng hai từ mã bất kỳ theo modulo 2 lại là từ mã (tức là mã này tuyến tính), khoảng cách mã bằng 3. Khoảng cách này không thể nhỏ hơn 3, vì nếu không thì nó không thể sửa lỗi, nhưng ta có thể tính tường minh khoảng cách này với chú ý rằng $d(a, b) = d(a + b, 0)$. Vì mã chứa từ mã có trọng 0 (từ 0) và khoảng cách mã bằng 3 nên trong mã không có từ có trọng 1 hay 2. Với mỗi từ mã ta xét hình cầu bán kính 1 với tâm tại từ này. Hình cầu này chứa, ngoài tâm ra còn 7 bộ nhị phân (đỉnh của lập phương nhị phân 7 chiều), thu được bằng cách thay trong bộ trung tâm đúng một trong 7 ký tự thành ký tự đối.

Các hình cầu này với tâm tại các từ mã không giao nhau[24)] (không có đỉnh chung) và do đó trong tổng thể chứa $2^4 \cdot 8 = 2^7$ đỉnh khác nhau của hình lập phương, tức là tất cả các đỉnh của nó (hình cầu 7 chiều có 27 đỉnh). Những phép phủ đúng hình lập phương nhiều chiều bởi các hình cầu như thế được gọi là hoàn hảo, và mã tương ứng được gọi là mã hoàn hảo.

Trong [4], xuất phát từ tính chất hoàn hảo của mã đã xét đã giải thích cách xác định số đỉnh mã trên lớp thứ ba của hình lập phương 7 chiều, xem hình 2.

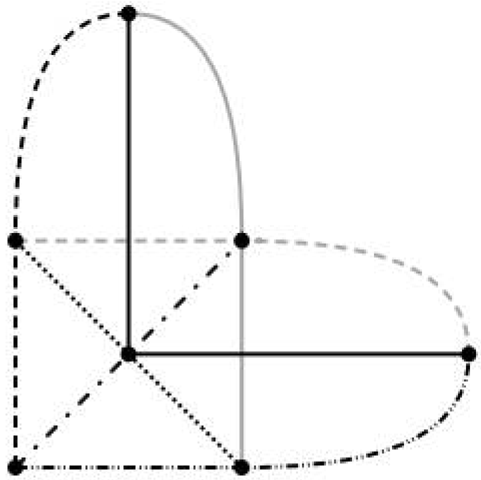


Hình 2: *Hình lập phương 7 chiều*

Ở đó đã tìm được phổ trọng lượng của nó, chính là số lượng từ của mỗi trọng lượng đã cho. Nó có dạng

$$a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 7, a_4 = 7, a_5 = 0, a_6 = 0, a_7 = 1.$$

Ở đó cũng đã giải thích rằng các từ mã trọng lượng 3 xác định một cấu hình tổ hợp thú vị - hệ thống bộ ba Steiner[26)], và chứng tỏ rằng hệ thống bộ ba này đẳng cấu với cấu hình 7 đường thẳng đi qua 3 điểm trong mặt phẳng xạ ảnh trên 7 điểm – gọi là mặt phẳng Fano[27)] (hình 3).



Hình 3: *Mặt phẳng Fano*

Các mã mà đỉnh của chúng nằm trên một lớp của hình lập phương, được gọi là mã đồng trọng. Như vậy, mã cực đại trọng lượng 3 với độ dài khối bằng 7 cũng có lực lượng là 7. Các từ mã trọng lượng 4 cũng tạo thành một cấu hình tổ hợp thú vị. Mỗi một một từ khóa cho ta một tập con 4 phần tử của tập hợp $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ là các số thứ tự vị trí của 1 trong từ này. Hệ thống

7 bộ 4 này tạo thành một ví dụ của sơ đồ khối, mà trong đó mỗi một cặp phần tử thuộc đúng hai bộ 4[28)].

Các cấu hình nói trên (sơ đồ khối) của các lớp thứ ba và thứ tư còn có một tính chất thú vị nữa. Chúng đối ngẫu với nhau, cụ thể là: Bộ 4 của sơ đồ khối thứ hai là phần bù của các bộ ba của sơ đồ khối thứ nhất trong tập hợp $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Ghi chú:

21) Claude Elwood Shannon (1916 – 2001) nhà toán học và kỹ sư người Mỹ, cha đẻ của lý thuyết thông tin.

22) Ma trận vuông được gọi là đơn vị, nếu trên đường chéo chính là các số 1, còn ở những vị trí khác là 0. Đường chéo chính là đường chéo đi từ góc trên bên trái xuống góc dưới bên phải. Khi nhân ma trận đơn vị với một vector thì kết quả thu được là chính vector đó.

23) Điều này xảy ra là vì có 8 cột nhị phân khác nhau có chiều cao 3.

24) Nếu như các mặt cầu với tâm a, b có điểm chung c thì $d(a,b) \leqslant d(a,c) + d(c,b) \leqslant 2$, là điều không thể xảy ra.

25) Lớp k của hình lập phương bao gồm các đỉnh có trọng lượng k và hiển nhiêu bao gồm $\binom{7}{k}$ đỉnh.

26) Jakov Steiner (1796 – 1863) nhà hình học nổi tiếng người Thụy Sĩ.

27) Gino Fano (1871 – 1951) nhà toán học nổi tiếng người Ý.

28) Về các sơ đồ khối xem trong [4, 14, 16].

5. Mã Hamming

Hai ngày nghỉ liền tôi đến phòng máy và nhận ra rằng tất cả các dữ liệu đã được tải lên nhưng không có điều gì được thực hiện. Tôi giận tím người vì tôi cần câu trả lời, và hai ngày nghỉ đã trôi qua một cách vô ích. Khi đó tôi nói với bản thân:"Quỷ thật, nếu như máy tính có thể có thể phát hiện ra lỗi thì điều gì ngăn cản nó xác định lỗi xảy ra ở chỗ nào và sửa nó?"

Richard Hamming theo John MacCormick

"*Chín thuật toán thay đổi thế giới*"

Chúng ta bắt đầu từ mã nhị phân Hamming. Mã này có thể xây dựng như sau. Xét $n = 2^m - 1$, $k = n - m$, và giả sử $x_1, x_2, \ldots, x_k$ là vector thông tin mà chúng ta cần mã hóa. Ta sẽ bổ sung vào vector này các ký tự kiểm tra $x_{k+1}, \ldots, x_n$ mà để tính chúng, ta nhân vector cột $X = (x_1, x_2 \ldots, x_k)^T$ với ma trận bậc (m, k) M_n (với m hàng và k cột) mà các cột của nó là tất cả các bộ độ dài n gồm các số 0 và 1, có chứa ít nhất 2 số 1 (có tất cả $2^m - 1 - m = n - m = k$ bộ như vậy). Ta bổ sung vào ma trận này thêm m cột, mỗi cột chứa đúng một số 1 (có thể coi là chúng tạo thành ma trận vuông với các phần tử trên đường chéo chính bằng 1), và thu được ma trận bậc $(m,\ n)$ H_n, có các cột là tất cả các bộ độ dài n, khác 0 gồm các số 0 và 1. Cũng như ở phần 4, ta có thể kiểm tra được rằng với mọi từ mã $x = (x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n)^T$ đẳng thức ma trận sau đây được thỏa mãn $H_n x^T = 0$.

Ma trận H (tiếp theo ta sẽ bỏ chỉ số n đi) được gọi là ma trận kiểm tra của mã này. Ma trận này cho phép chúng ta không chỉ kiểm tra được từ c đã cho có phải là từ mã không, mà nó còn cho phép tìm được lỗi, nếu chỉ có một lỗi xảy ra.

Thật vậy, cũng như ở 4, ta có $S = Hr^T = H(c^T + e^T) = He^T = H_i$, trong đó e là vector lỗi, có một số 1 ở vị trí thứ i, còn H_i là cột của ma trận H với số thứ tự i. Vì tất cả các cột của H là khác nhau và khác 0 nên theo vector hội chứng S ta có thể tìm được một cách chính xác vị trí lỗi.

Cũng như ở 4, ta xét một số tính chất của mã đã được xây dựng. Mã này có 2^k phần tử, nó tuyến tính, số chiều của nó như một không gian vector trên trường hai phần tử bằng k (bởi vì nếu cơ sở của không gian gồm k vector, thì không gian sẽ bao gồm tất cả các tổng của chúng, tức là 2^k tổng (tính cả tổng rỗng tương ứng với 0 theo định nghĩa)), khoảng cách mã bằng 3 (khoảng cách này không thể nhỏ hơn 3, vì nếu thế thì nó không thể sửa lỗi). Vì mã chứa từ mã có trọng 0 (từ 0) và khoảng cách mã bằng 3 nên trong mã không có từ có trọng 1 hay 2. Với mỗi từ mã ta xét hình cầu bán kính 1 với tâm tại từ này. Hình cầu này chứa, ngoài tâm ra còn n bộ nhị phân (đỉnh của lập phương nhị phân n chiều). Các hình cầu này với tâm tại các từ mã không giao nhau và do đó trong tổng thể chứa $2^k \cdot (n+1) = 2^{k+m} = 2^n$ đỉnh khác nhau của hình lập phương, tức là tất cả các đỉnh của nó. Vì vậy mã Hamming là hoàn hảo (và có thể xếp kín). Cũng hiển nhiên là mọi mã cực đại với khoảng cách 3 sẽ có các tham số giống với mã Hamming.

Thật vậy, nếu như cận của đánh giá $m(n,3) \leqslant \frac{2^n}{n+1}$ đạt được thì $n+1 = 2^m$ (nếu không thì phân số đã cho không phải là số nguyên), từ đó $m(n,3) = 2^{n-m}$. Như vậy bài toán 3 được giải quyết hoàn toàn, và bây giờ thì ta dễ dàng giải được bài toán dưới đây

Bài toán 26. *Hỏi có thể tìm được một số từ 1 đến 2048 với 15 câu hỏi dạng (có/không) hay không, nếu ta có quyền trả lời sai ở một câu hỏi nào đó? Các câu hỏi phải được chọn trước.*

Và một bài toán nữa theo chủ đề này:

Bài toán 27 (19, trang 120). *Ba nhà thông thái có những chiếc mũ màu đen hoặc màu trắng. Người dẫn chương trình sẽ đội cho các nhà thông thái những chiếc mũ, sao cho mỗi người sẽ nhìn thấy mũ của hai người kia nhưng không nhìn thấy mũ của mình và không biết màu mũ của mình. Theo hiệu lệnh, các nhà thông thái sẽ đồng loạt đoán màu mũ. Mỗi một nhà thông thái sẽ dự đoán màu mũ dựa vào các màu mũ mà ông ta nhìn thấy ở hai người còn lại, nhưng họ được quyền bỏ qua, nghĩa là từ chối không đoán. Các nhà thông thái sẽ thắng nếu như ít nhất một người trong họ đoán đúng màu mũ đồng thời không có ai trong họ đoán sai. Trước khi cuộc chơi diễn ra các nhà thông thái đã được thông báo luật chơi và cho phép họ thảo luận trước chiến thuật chơi. Chiến thuật tối ưu là chiến thuật mà với tất cả cách sắp xếp mũ có thể cho nhiều trường hợp chiến thắng nhất.*

a) *Hãy đề xuất chiến thuật của các nhà thông thái sao cho họ chiến thắng trong nhiều hơn một nửa trường hợp.*

b) *Hãy đề xuất chiến thuật tối ưu và chứng minh là chiến thuật đó là tối ưu.*

5.1. Mã Hamming q-phân

Tôi là cô gái tội nghiệp, rất kém về số học!
Lớn hơn 2 đối với tôi đã là toán cao cấp rồi
Dmitry Emetz, "Tanhia Grotter"

Trong một số trường hợp cũng tồn tại cả mã q-phân hoàn hảo. Cận Hamming có thể đạt được chẳng hạn khi $1 + (q - 1)n = q^m$. Khi đó số phần tử của mã sẽ bằng q^{n-m}, trong đó n là độ dài khối. Các mã như vậy có thể xây dựng trong trường hợp tồn tại trường hữu hạn q phần tử[29)].

Trường là mọi tập hợp mà trên đó có thể định nghĩa hai phép toán cộng và nhân sao cho các phép toán này thỏa mãn các tính chất y như phép tính cộng và nhân cáo số hữu tỷ, cụ thể là tính giao hoán: $a+b = b+a$, $a\cdot b = b\cdot a$, tính kết hợp: $(a+b)+c = a+(b+c)$, $(ab)c = a(bc)$, tính phân phối: $a(b + c) = ab + ac$ và thỏa mãn các hằng đẳng thức $a + 0 = a$, $a \cdot 1 = a$, và có thể định nghĩa một cách duy nhất các phép toán ngược là phép trừ $a - b$ và phép chia a/b thỏa mãn tính chất $(a - b) + a = a$, $(a/b)b = a$.

Từ đại số ta biết rằng số phần tử q của mọi trường hữu hạn phải là lũy thừa của một số nguyên tố $p, q = p^n$, hơn nữa với mọi số q như vậy tồn tại duy nhất một trường[30)] bậc q, gọi là trường Galois[31)] và ký hiệu là $GF(q)$. Ví dụ $GF(2) = (\{0, 1\}, \oplus,)$.

Ta xây dựng trên trường $GF(q)$ mã, là mở rộng của mã Hamming. Với mọi vector v khác 0 độ dài m trên trường $GF(q)$ ta xét tập hợp các vector song song với nó λv, trong đó $\lambda \in GF(q) \setminus \{0\}$. Tập hợp này tạo thành một đường thẳng trong không gian $GF(q)^n$, đi qua gốc tọa độ. Ta chọn trên mỗi một đường thẳng như vậy (số đường thẳng bằng $n = (q^m - 1)/(q - 1)$, vì chúng chỉ có một điểm chung là gốc tọa độ) một điểm bất kỳ khác với gốc tọa độ, ví dụ có thể chọn điểm mà tọa độ cuối cùng bằng 1. Điều này luôn có thể thực hiện ngoại trừ trường hợp tất cả các điểm của đường thẳng có tọa độ cuối cùng bằng 0. Trong trường hợp này có thể chọn điểm mà tọa độ gần cuối bằng 1. Nếu lại không có điểm nào như vậy và tọa độ gần cuối bằng 0 thì ta lại chọn điểm có tọa độ thứ ba kể từ cuối bằng $1, \ldots$ Điểm như thế trên đường thẳng (và vector bán kính tương ứng) sẽ được xác định một cách duy nhất. Tất cả các vector khác sẽ thu được bằng cách nhân các vector được chọn cho các phần tử của trường (khi nhân với 0 ta được vector 0). Hiển nhiên là mọi vector khác 0 của không gian $GF(q)^n$ sẽ thu được từ một trong các vector đã cho $v_1, v_2, \ldots, v_n$ bằng cách nhân với một phần tử khác 0 của trường, hơn nữa biểu diễn như vậy là duy nhất.

Xét ma trận (m, n) H_n trên trường $GF(q)$, có cột là các vector $v_1, v_2, \ldots, v_n$ đã cho. Định nghĩa mã là tập hợp các vector c, sao cho $Hc^T = 0$ (tức là không gian 0 của ma trận đã cho). Khi đó H_n là ma trận kiểm tra của mã đã cho. Mã này sửa một lỗi, bởi vì, cũng như ở phần 4, ta có

$$S = Hr^T = H(c^T + e^T) = He^T = e_i H_i,$$

trong đó e là vector lỗi, có đúng một ký tự khác 0, e_i ở vị trí thứ i, còn H_i là cột thứ i của ma trận H. Bởi vì tất cả các cột đều khác nhau và khác cột 0, và tích của chúng với các phần tử khác 0 của trường cũng khác nhau nên theo vector S có thể xác định một cách duy nhất cả vị trí i của lỗi, cả giá trị e_i của nó. Vì ma trận H_n (sau khi đổi chỗ các cột một cách thích hợp) chứa ma trận con đơn vị bậc (m, m), chiều của mã (chiều của không gian con 0) bằng $n - m$, và có nghĩa là số phần tử của mã bằng q^{n-m} (tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính các vector cơ sở trên trường $GF(q)$ có lực lượng q^{n-m}), nghĩa là mã nằm chính xác ở cận của sắp xếp cầu và do đó là mã hoàn hảo. Như vậy phần d) của bài toán 4 đã được giải quyết. Lời giải phần b) độc giả có thể xem ở $[2$, trang $165 - 166]$.

Ghi chú:

29) Có giả thuyết cho rằng với q không phải là lũy thừa của số nguyên tố, các mã hoàn hảo như vậy sẽ không tồn tại.

30) Chính xác đến đẳng cấu trường.

31) Evarist Galois $(1811 - 1832)$ nhà toán học vĩ đại người Pháp.

Tài liệu

[1] Берлекэмп Э. Р. Алгебраическая теория кодирования. М.: Мир, 1971.

[2] Васильев Н. Б., Егоров А. А. Задачи Всесоюзных математических олимпиад. М.: Наука, 1988.

[3] Гальперин Г. А., Толпыго А. К. Московские математические олимпиады. М.: Просвещение, 1986.

[4] Гашков С. Б. Разностные множества, конечные геометрии, матрицы Заранкевича и экстремальные графы // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 21. М.: МЦНМО, 2017. С. 145–185.

[5] Гашков С. Б. Графы-расширители и их применения в теории кодирования // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 13. М.: МЦНМО, 2009. С. 104–126.

[6] Левенштейн В. И. Элементы теории кодирования // Дискретная математика и математическая кибернетика. Т. 1. М.: Наука, 1974.

[7] Мак-Вильямс Ф. Дж., Слоэн Н. Дж. А. Теория кодов, исправляющих ошибки. М.: Связь, 1979.

[8] Прасолов В. В. и др. Московские математические олимпиады 1935–1957 гг. М.: МЦНМО, 2010. Коды и олимпиады 173

[9] Прасолов В. В. и др. Московские математические олимпиады 1958–1967 гг. М.: МЦНМО, 2013. [10] Бегунц А. В. и др. Московские математические олимпиады 1981–1992 гг. М.: МЦНМО, 2017. [11] Фёдоров Р. М. и др. Московские математические олимпиады 1993–2005 гг. / 3-е изд. М.: МЦНМО, 2017.

[12] Садовничий В. А., Григорьян А. А., Конягин С. В. Задачи студенческих математических олимпиад. М.: МГУ, 1987. [13] Сидельников В. М. Теория кодирования. М.: Физматлит, 2008.

[14] Таранников Ю. В. Комбинаторные свойства дискретных структур и приложения к криптологии. М.: МЦНМО, 2011.

[15] Фейеш Тот Л. Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. М.: Физматгиз, 1958. [16] Холл М. Комбинаторика. М.: Мир, 1970.

[17] Чашкин А. В. Дискретная математика. М.: Академия, 2012.

[18] Guruswami V., Sudan M. Improved decoding of Reed — Solomon and algebraicgeometric codes // IEEE Trans. Inform. Theory. 1999. Vol. 45. P. 1757–1767.

[19] Winkler P. Mathematical puzzles: a connoisseur's collection. Natick, USA: Taylor and Francis Inc., 2004.

KỲ THI TOÁN BALTIC WAY 2019

Nguyễn Hùng Sơn

TÓM TẮT

Xin giới thiệu đến bạn đọc kỳ thi toán mang tên Baltic Way. Tác giả bài báo có vinh dự được giao trọng trách làm chủ tịch hội đồng ra đề và chấm thi cuộc thi Baltic Way 2019. Bài báo này cũng chia sẻ các bài thi cùng một số quan sát trong quá trình chọn đề bài và chấm thi.

1. Giới thiệu cuộc thi

Baltic Way là cuộc thi toán đồng đội được tổ chức lần đầu tiên vào năm 1990 với sự tham gia của 3 nước cộng hòa Xô Viết cũ là Litva, Latvia và Estonia.

Tên gọi cuộc thi có xuất xứ từ sự kiện mang tên "Con đường Baltic" (Baltic Way) diễn ra vào ngày 23 tháng 8 năm 1989 khi xấp xỉ hai triệu người cùng nắm tay tạo thành một chuỗi dài hơn sáu trăm cây số trải qua ba nước vùng Baltic là Latvia, Litva và Estonia để đòi độc lập.

Kể từ năm 1992, khi tình hình chính trị ở châu Âu đã thay đổi, cuộc thi được mở rộng đúng theo ý nghĩa tên gọi của nó với sự tham gia của các nước cộng hòa xung quanh biển Baltic như Ba Lan, Đan Mạch, Đức (các tỉnh phía bắc), Na Uy, Phần Lan, Thụy Điển. Ngoài ra còn có sự tham gia của Ai-xơ-len, vì Ai-xơ-len (Iceland) là nước đầu tiên công nhận độc lập của 3 nước Latvia, Litva và Estonia, và đội tuyển của thành phố Saint Petersburg (Liên bang Nga). Để thay đổi không khí, thỉnh thoảng ban tổ chức của nước chủ nhà có thể mời thêm một quốc gia ngoài vùng Baltic tham gia cuộc thi.

Cuộc thi Baltic Way là cuộc thi đồng đội được tổ chức vào giữa tháng 11 hàng năm. Mỗi quốc gia cử một đội tuyển 5 người gồm các thí sinh là học sinh chưa tốt nghiệp phổ thông trung học trong thời điểm diễn ra cuộc thi. Các thành viên của mỗi đội có thời gian là 4 giờ 30 phút để giải 20 bài toán (gồm 5 bài đại số, 5 bài hình, 5 bài tổ hợp và 5 bài lý thuyết số). Điểm số của mỗi bài đều là 5 điểm nên các đội có thể đạt tối đa là 100 điểm. Trong lịch sử cuộc thi, chỉ duy nhất có một lần có đội đạt được kỳ tích tối đa 100/100 điểm là đội tuyển khách Israel, tại cuộc thi Baltic Way tổ chức vào năm 2001 ở Hamburg (Đức).

Vì thời điểm diễn ra cuộc thi là tháng 11 nên đội tuyển Ba lan thường được chọn dựa trên kết quả của kỳ thi Olympic toán học của năm học trước. Thường thì đây là đội tuyển trẻ của Ba lan gồm các học sinh lớp 10 hoặc lớp 11 có thành tích cao nhất nhưng chưa đủ để được chọn vào đội tuyển đi thi IMO và MEMO.

Đội vô địch cuộc thi sẽ được giữ cúp luân lưu và sẽ phải trao lại cho đội vô địch lần thi năm sau. Ban giám khảo cũng có thể trao giải đặc biệt cho những lời giải sáng tạo.

2. Kỳ thi Baltic Way lần thứ 30

Baltic Way lần thứ 30 đã được tổ chức tại thành phố Szczecin, Balan từ 15 đến 19 tháng 11 năm 2019. Tác giả vinh dự được Ủy ban Olympic Toán Ba lan đề cử làm trưởng ban ra đề (chair of jury). Cũng như nhiều kỳ thi quốc tế khác, các nước tham gia đã gửi đề đến cho trưởng ban ra đề để chuẩn bị *shortlist*, tức là danh sách các bài có khả năng được chọn làm đề thi. Khi đến dự thi, trước ngày thi 2 ngày, trưởng và phó các đoàn đã nhận được shortlist để chuẩn bị cho quá trình chọn bài. Ngày 17/11, ban ra đề gồm trưởng ban ra đề và các trưởng đoàn họp để chọn bài bằng cách biểu quyết.

Kỳ thi đồng đội nên ban ra đề phải chọn ra 20 bài thi thuộc 4 lĩnh vực: Đại số, Số học, Hình học và Tổ hợp. Trong quá trình chọn đề, chỉ các trưởng đoàn được quyền biểu quyết. Trưởng ban ra đề chỉ có chức năng điều khiển cuộc họp, phân tích, đánh giá, so sánh các lựa chọn nhưng không có quyền đưa ra lựa chọn. Kỳ thi năm nay có 11 nước tham gia nên chỉ có 11 trưởng đoàn được quyền biểu quyết. Vì 11 là số nguyên tố nên rất may mắn là không xảy ra trường hợp các lựa chọn đều có số phiếu bằng nhau. Cũng cần lưu ý rằng lúc chọn bài, các trưởng đoàn không biết các bài toán trong shortlist là do nước nào đề cử. Trong quá trình chuẩn bị shortlist, trưởng ban ra đề thấy các bài đề nghị ở lĩnh vực số học và tổ hợp hơi yếu nên đã mượn thêm 3 bài trong ngân hàng đề bài của Olympic Toán Ba Lan và rất tình cờ là cả 3 bài đó đều được chọn vào danh sách 20 bài thi chính thức của cuộc thi.

Sau khi đã chọn ra được 20 bài thi, ban ra đề lại tiếp tục họp để đưa ra phương án hoàn chỉnh của phiên bản tiếng Anh. Thời gian này kéo dài khoảng hơn 2 tiếng đồng hồ và thỉnh thoảng cũng có những tranh luận khá quyết liệt. Sau đó, các trưởng đoàn phải dịch bộ đề bài tiếng Anh sang tiếng của nước mình. Năm nay toàn bộ quá trình từ chọn bài đến lúc in ấn đề bài xong kéo dài từ 10:00 sáng đến 22:30. Đây không phải là cuộc họp kéo dài nhất của ban ra đề. Có những năm cuộc họp này kéo dài đến 2 giờ sáng.

Trong thời gian ban ra đề chỉnh sửa đề bài thì ban chấm thi cũng bắt đầu chỉnh sửa lời giải và lên thang điểm (marking schemes). Ban chấm thi hoàn thiện marking schemes trước khi cuộc thi kết thúc 2 tiếng đồng hồ và đưa cho các trưởng đoàn. Cuộc thi chính thức diễn ra hôm 18/11/2019 và các thí sinh làm bài thi từ 9:30 đến 15:00. Sau đó các bài thi được các trưởng đoàn chấm trước, sau đó sẽ cùng ban giám khảo phối hợp cho điểm. Toàn bộ quá trình coordination kết thúc lúc 22:00 cùng ngày.

Kết quả, giải nhất cuộc thi Baltic Way 2019 thuộc về đội Saint Peterburg với kết quả 90 điểm (trên tổng số $20 \times 5 = 100$ điểm), giải nhì là đội Ba Lan (83 điểm) và giải ba thuộc về đội Estonia (70 điểm).

3. Một kỳ thi giản dị, dân chủ và trung thực

Đây là lần đầu tiên tác giả bài viết được thị sát cuộc thi Baltic Way với danh nghĩa là một người trong Ban tổ chức. Phải thú thực rằng tôi thấy có rất nhiều điều ngạc nhiên và tôi muốn chia sẻ những điều tai nghe mắt thấy với các thầy cô giáo cũng như các bạn đọc người Việt.

Công việc tổ chức được giao cho một Sở Giáo dục của thành phố nào đó và Sở sẽ chọn ra một trường cấp 3 làm đơn vị đăng cai. Năm 2019, cuộc thi được tổ chức tại trường phổ thông trung học số XIII tại thành phố Szczecin và phụ trách toàn bộ cuộc thi là 2 thầy cô giáo của trường.

Đây cũng là cuộc thi duy nhất từ trước tới nay mà những người biết đề không bị cách ly khỏi các thí sinh.

Trong quá trình chọn bài, khi được hỏi có ai có ý kiến gì không thì một số trưởng đoàn đứng lên xin phát biểu:

- Thưa quý vị, tôi xin thông báo là cách đây 1 tuần, tôi vừa dạy học sinh của tôi 1 bài có cấu trúc hình học tương đối giống trong lời giải bài G9. Nếu chọn bài này thì lợi cho học sinh của tôi quá.

  Hoặc

- Bài A6 hơi giống 1 bài toán khá quen thuộc đối với học sinh Phần lan.

Sự trung thực của các bạn này thật đáng khâm phục. Tuy nhiên sau khi nghe trình bày cụ thể, các trưởng đoàn khác cho rằng lợi thế là không đáng kể.

Sau khi chọn xong, các trưởng đoàn phải dịch toàn bộ đề bài sang tiếng của nước mình. Sau khi in ấn đề bài xong đã là 22:30, chúng tôi về nghỉ ở khách sạn. Các thí sinh cũng nghỉ ở cùng một khách sạn với các trưởng đoàn của mình. Sáng hôm sau, các trưởng đoàn, các thí sinh cũng như ban giám khảo cùng ăn sáng và cùng lên xe để đến nơi thi. Đến nơi, trưởng đoàn đi vào 1 phòng riêng, ban chấm thi đi vào phòng khác còn các thí sinh thì đi vào phòng thi.

Nếu muốn gian lận thì có rất nhiều cách để các thí sinh biết đề trước khi thi. Tuy vậy tôi quan sát trong 5 năm trở lại đây, chưa bao giờ nước chủ nhà đạt giải nhất cuộc thi.

Đúng là 1 ngày hội của các em học sinh tham gia kỳ thi.

Mời bạn đọc thử sức với đề thi Baltic Way 2019. Xin chia sẻ thêm rằng 3 bài khó nhất cuộc thi là các bài số 4, số 14 và số 18. Hai bài dễ nhất là bài số 6 và bài số 7.

Baltic Way 2019
Szczecin, Poland

November 17th, 2019
Version: English

Time allowed: 4.5 hours.
During the first 30 minutes, questions may be asked.
Tools for writing and drawing are the only ones allowed.

Problem 1. For all non-negative real numbers x, y, z with $x \geq y$, prove the inequality
$$\frac{x^3 - y^3 + z^3 + 1}{6} \geq (x - y)\sqrt{xyz}.$$

Problem 2. Let (F_n) be the sequence defined recursively by $F_1 = F_2 = 1$ and $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ for $n \geq 2$. Find all pairs of positive integers (x, y) such that
$$5F_x - 3F_y = 1.$$

Problem 3. Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that
$$f(xf(y) - y^2) = (y + 1)f(x - y)$$
holds for all $x, y \in \mathbb{R}$.

Problem 4. Determine all integers n for which there exist an integer $k \geq 2$ and positive integers $x_1, x_2, \ldots, x_k$ so that
$$x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{k-1}x_k = n \quad \text{and} \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_k = 2019.$$

Problem 5. The $2m$ numbers
$$1 \cdot 2,\ 2 \cdot 3,\ 3 \cdot 4,\ \ldots,\ 2m(2m + 1)$$
are written on a blackboard, where $m \geq 2$ is an integer. A *move* consists of choosing three numbers a, b, c, erasing them from the board and writing the single number
$$\frac{abc}{ab + bc + ca}.$$
After $m - 1$ such moves, only two numbers will remain on the blackboard. Supposing one of these is $\frac{4}{3}$, show that the other is larger than 4.

Problem 6. Alice and Bob play the following game. They write the expressions $x + y$, $x - y$, $x^2 + xy + y^2$ and $x^2 - xy + y^2$ each on a separate card. The four cards are shuffled and placed face down on a table. One of the cards is turned over, revealing the expression written on it, after which Alice chooses any two of the four cards, and gives the other two to Bob. All cards are then revealed. Now Alice picks one of the variables x and y, assigns a real value to it, and tells Bob what value she assigned and to which variable. Then Bob assigns a real value to the other variable.

Finally, they both evaluate the product of the expressions on their two cards. Whoever gets the larger result, wins. Which player, if any, has a winning strategy?

Problem 7. Find the smallest integer $k \geq 2$ such that for every partition of the set $\{2, 3, \ldots, k\}$ into two parts, at least one of these parts contains (not necessarily distinct) numbers a, b and c with $ab = c$.

Problem 8. There are 2019 cities in the country of Balticwayland. Some pairs of cities are connected by non-intersecting bidirectional roads, each road connecting exactly 2 cities. It is known that for every pair of cities A and B it is possible to drive from A to B using at most 2 roads. There are 62 cops trying to catch a robber. The cops and robber all know each others' locations at all times. Each night, the robber can choose to stay in her current city or move to a neighbouring city via a direct road. Each day, each cop has the same choice of staying or moving, and they coordinate their actions. The robber is caught if she is in the same city as a cop at any time. Prove that the cops can always catch the robber.

Problem 9. For a positive integer n, consider all nonincreasing functions $f\colon \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$. Some of them have a fixed point (i.e. a c such that $f(c) = c$), some do not. Determine the difference between the sizes of the two sets of functions.

Remark. A function f is *nonincreasing* if $f(x) \geq f(y)$ holds for all $x \leq y$.

Problem 10. There are 2019 points given in the plane. A child wants to draw k (closed) discs in such a manner, that for any two distinct points there exists a disc that contains exactly one of these two points. What is the minimal k, such that for any initial configuration of points it is possible to draw k discs with the above property?

Problem 11. Let ABC be a triangle with $AB = AC$. Let M be the midpoint of BC. Let the circles with diameters AC and BM intersect at points M and P. Let MP intersect AB at Q. Let R be a point on AP such that $QR \parallel BP$. Prove that CP bisects $\angle RCB$.

Problem 12. Let ABC be a triangle and H its orthocenter. Let D be a point lying on the segment AC and let E be the point on the line BC such that $BC \perp DE$. Prove that $EH \perp BD$ if and only if BD bisects AE.

Problem 13. Let $ABCDEF$ be a convex hexagon in which $AB = AF$, $BC = CD$, $DE = EF$ and $\angle ABC = \angle EFA = 90°$. Prove that $AD \perp CE$.

Problem 14. Let ABC be a triangle with $\angle ABC = 90°$, and let H be the foot of the altitude from B. The points M and N are the midpoints of the segments AH and CH, respectively. Let P and Q be the second points of intersection of the circumcircle of the triangle ABC with the lines BM and BN, respectively. The segments AQ and CP intersect at the point R. Prove that the line BR passes through the midpoint of the segment MN.

Problem 15. Let $n \geq 4$, and consider a (not necessarily convex) polygon $P_1P_2\dots P_n$ in the plane. Suppose that, for each P_k, there is a unique vertex $Q_k \neq P_k$ among $P_1,\dots,P_n$ that lies closest to it. The polygon is then said to be *hostile* if $Q_k \neq P_{k\pm1}$ for all k (where $P_0 = P_n$, $P_{n+1} = P_1$).

(a) Prove that no hostile polygon is convex.
(b) Find all $n \geq 4$ for which there exists a hostile n-gon.

Problem 16. For a positive integer N, let $f(N)$ be the number of ordered pairs of positive integers (a,b) such that the number

$$\frac{ab}{a+b}$$

is a divisor of N. Prove that $f(N)$ is always a perfect square.

Problem 17. Let p be an odd prime. Show that for every integer c, there exists an integer a such that

$$a^{\frac{p+1}{2}} + (a+c)^{\frac{p+1}{2}} \equiv c \pmod{p}.$$

Problem 18. Let a, b, and c be odd positive integers such that a is not a perfect square and

$$a^2 + a + 1 = 3(b^2 + b + 1)(c^2 + c + 1).$$

Prove that at least one of the numbers $b^2 + b + 1$ and $c^2 + c + 1$ is composite.

Problem 19. Prove that the equation $7^x = 1 + y^2 + z^2$ has no solutions over positive integers.

Problem 20. Let us consider a polynomial $P(x)$ with integer coefficients satisfying

$$P(-1) = -4, \quad P(-3) = -40, \quad \text{and} \quad P(-5) = -156.$$

What is the largest possible number of integers x satisfying

$$P(P(x)) = x^2?$$