https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO * HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

# TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ

NĂM THỨ 35 - RA HÀNG THÁNG
Số 8 (254)
1998


INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD 98 IMO TAIWAN

## Kỳ thi Olympic Toán quốc tế (IMO) lần thứ 39

## ĐÔI ĐIỀU NÊN BIẾT VỀ SỐ $\pi$

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
MATHEMATICS AND YOUTH

## MỤC LỤC



• Ảnh bìa 1 : - Vũ Việt Anh - 12 Chuyên Toán ĐHSP-ĐHQG Hà Nội - Huy chương vàng IMO 39 (Ảnh : *Xuân An*)
- Đỗ Quang Yên, Đào Thu Hà, Phạm Huy Tùng, Đoàn Nhật Dương, Vũ Việt Anh, Lê Thái Hoàng - Đội tuyển IMO 39 Việt Nam.

*Tổng biên tập :*
NGUYỄN CẢNH TOÀN

*Phó tổng biên tập:*
NGÔ ĐẠT TỨ
HOÀNG CHÚNG

**HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP**

Nguyễn Cảnh Toàn, Hoàng Chúng, Ngô Đạt Tứ, Lê Khắc Bảo, Nguyễn Huy Đoan, Nguyễn Việt Hải, Đinh Quang Hảo, Nguyễn Xuân Huy, Phan Huy Khải, Vũ Thanh Khiết, Lê Hải Khôi, Nguyễn Văn Mậu, Hoàng Lê Minh, Nguyễn Khắc Minh, Trần Văn Nhung, Nguyễn Đăng Phất, Phan Thanh Quang, Tạ Hồng Quảng, Đặng Hùng Thắng, Vũ Dương Thụy, Trần Thành Trai, Lê Bá Khánh Trình, Ngô Việt Trung, Đặng Quan Viễn.

*Trụ sở tòa soạn :*
**25 Hàn Thuyên, Hà Nội** ĐT : 8.262477 - 9714359
*Đại diện tại miền Nam :*
TRẦN CHÍ HIẾU, ĐT: 8.323044
**231 Nguyễn Văn Cừ, Q.5, TP Hồ Chí Minh**

*Biên tập :* VŨ KIM THỦY
LÊ THỐNG NHẤT
*Trị sự :* VŨ ANH THƯ
*Trình bày :* NGUYỄN THỊ OANH

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

*Dành cho các bạn*

**TRUNG HỌC CƠ SỞ**

*Trong bài viết này, chúng tôi xin nêu thêm một vài cách giải của một bài toán thi chọn học sinh giỏi quốc gia môn toán lớp 9, bảng A năm học 1996-1997, đó là bài số 2b.*

# VỀ MỘT BÀI TOÁN THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THCS

NGUYỄN HỮU BẰNG
(*Nghệ An*)

Giải hệ phương trình với các ẩn $x$, $y$, $z$:

$$\begin{cases} x+y+z=6 & (1) \\ x^2+y^2+z^2=18 & (2) \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=4 & (3) \end{cases}$$

*Nhận xét.* các biểu thức $x + y + z$, $x^2+y^2+z^2$, $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$ là các biểu thức *đối xứng* đối với các biến số thực không âm $x$, $y$, $z$. Còn các biểu thức $x + y + z$, $xy + yz + zx$, $xyz$ chính là các *đa thức đối xứng cơ bản* của ba biến $x$, $y$, $z$. Do đó khi giải hệ phương trình đã cho :

$$\begin{cases} x+y+z=6 & (1) \\ x^2+y^2+z^2=18 & (2) \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=4 & (3) \end{cases}$$

ta có thể và đã đưa về giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x+y+z=6 & (7) \\ xy+yz+zx=9 & (8) \\ xyz=4 & (9) \end{cases}$$

như ở cách giải của đáp án. Chúng tôi thấy sau khi tìm được hệ phương trình mới này, ta có thể giải tiếp như các cách sau :

***Cách 1.*** Từ (9) suy ra $x, y, z \neq 0$ và $yz = \dfrac{4}{x}$. Từ (8) suy ra

$$xy + yz + zx + x^2 = 9 + x^2 \Rightarrow$$
$$x(x + y + z) + yz = 9 + x^2,$$

mà $x + y + z = 6$ và $yz = \dfrac{4}{x}$

nên có $6x + \dfrac{4}{x} = 9 + x^2$

$\Rightarrow x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = 0$ (*)

đa thức $x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = 0$ của biến $x$ có tổng các hệ số là $1 - 6 + 9 - 4 = 0$ nên (*) có $x = 1$ là nghiệm.

Ta có (*) $\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 5x + 4) = 0$
$\Leftrightarrow (x - 1)^2 (x - 4) = 0$
$\Rightarrow x = 1$ hoặc $x = 4$.

Từ đó tìm ra ba nghiệm của hệ phương trình đã cho.

***Cách 2.*** Sau khi tìm ra hệ phương trình (7), (8), (9), dựa vào giá trị 6; 9 và 4 của các biểu thức $x + y + z$; $xy + yz + zx$ và $xyz$ tương ứng ta xét phương trình ẩn $X$ :

$$X^2 - 6X + 9X - 4 = 0 \quad (**)$$

Ta có (**) $\Leftrightarrow (X - 1)^2(X - 4) = 0$ (10)

Mặt khác (**) cũng chính là phương trình :

$X^3 - (x + y + z)X^2 + (xy + yz + zx)X - xyz = 0$
hay cũng là $(X - x)(X - y)(X - z) = 0$ (11)

Như vậy các phương trình tích (10) và (11) tương đương với nhau, suy ra $(x; y; z)$ là một hoán vị của các số 1; 1; 4. Suy ra hệ phương trình đã cho có ba nghiệm.

***Cách 3.*** Vì $x + y + z = 6$ nên trong ba số $x$, $y$, $z$ phải có một số lớn hơn hoặc bằng 2. Không giảm tính tổng quát, giả sử $x \geq 2 \Rightarrow y + z \leq 4$.

Đặt $x = a + 4$, $y = b + 1$, $z = c + 1$
$\Rightarrow b + c \leq 2$ thay vào (7), (8), (9) ta suy ra :

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ (a+4)(b+1)+(b+1)(c+1)+(c+1)(a+4)=9 \\ (a+4)(b+1)(c+1)=4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=-(b+c) \\ (a+4)(b+c+2)+(bc+b+c+1)=9 \quad (8') \\ (a+4)(bc+b+c+1)=4 \quad (9') \end{cases}$$

Lại đặt $b + c = S$, $bc = P$ ta có $S \le 2$, $a = -S$, $(0 \le b^2 + c^2 = S^2 - 2P)$.

Từ (8') và (9') có

$$\begin{cases} (-S+4)(S+2)+(P+S+1)=9 \\ (-S+4)(P+S+1)=4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -S^2+3S+P=0 \quad (*) \\ -S^2+3s+4P-PS=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow -3P + PS = 0 \Rightarrow P(S - 3) = 0 \Rightarrow P = 0$ (do $S - 3 \le 2 - 3 < 0$).

Thay $P = 0$ vào (*) có

$-S^2 + 3S = 0 \Rightarrow -S(S - 3) = 0 \Rightarrow S = 0$ (do $S - 3 < 0$).

Vậy $S = 0$, $P = 0$ hay $b + c = 0$ và $bc = 0 \Rightarrow b = 0$, $c = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow x = 4$, $y = 1$, $z = 1$. Do vai trò của $x$, $y$, $z$ trong hệ phương trình đã cho như nhau nên hệ phương trình đã cho còn có hai nghiệm nữa là :

$x = 1, y = 4, z = 1$

và $x = 1, y = 1, z = 4$.

Vậy hệ phương trình đã cho có ba nghiệm như trên.

***Cách 4.*** Vẫn giả sử $x \ge 2$

Từ (9) suy ra $yz = \dfrac{4}{x}$

Từ (8) suy ra $x(x + y + z) + yz = 9 + x^2$ $\Rightarrow 6x + yz = 9 + x^2 \Rightarrow (x - 3)^2 = yz$ : ta có

* Nếu $x > 4$ thì $x - 3 > 1 \Rightarrow (x - 3)^2 > 1$ $\Rightarrow yz > 1 \Rightarrow \dfrac{4}{x} > 1$, $(x > 0) \Rightarrow 4 > x$ mâu thuẫn với $x > 4$.

* Nếu $x < 4$ thì do $x \ge 2$ ta có $-1 \le x - 3 < 1 \Rightarrow (x - 3)^2 \le 1 \Rightarrow yz \le 1$ $\Rightarrow \dfrac{4}{x} \le 1$, $(x > 0) \Rightarrow 4 \le x$ mâu thuẫn với $x < 4$.

Vậy phải có $x = 4$, từ đó có :

$$\begin{cases} y+z=2 \\ yz=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ z=1 \end{cases}$$

Như vậy với giả sử $x \ge 2$ thì hệ phương trình đã cho có nghiệm là : $x = 4$, $y = 1$, $z = 1$.

Do vai trò của $x$, $y$, $z$ trong hệ phương trình đã cho như nhau nên hệ phương trình đã cho có ba nghiệm $(1, 1, 4)$, $(1, 4, 1)$, $(4, 1, 1)$.

# TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN VÀ LỜI GIẢI

## BÀI SỐ 8

*Problem.* Can a knight move from the left lower corner of a chess board to the right upper corner passing through each of the square of the chess board exactly once ?

*Solution.* Since the chess board has 64 squares, the knight must makes 63 moves. In each move the knight passes from a square to a square with a different colour. Therefore, the knight goes to a square of a different colour after an odd number of moves. So the knight can not move from the square on the left lower corner to the square on the right upper corner since these squares have the same colour.

**Từ mới**

*knight* = con mã

*move* = di chuyển (động từ), bước đi (danh từ)

*lower* = phía dưới

*corner* = góc

*chess board* = bàn cờ

*upper* = phía trên

*pass* = đi qua (động từ)

*through* = qua

*square* = ô vuông

*exactly* = chính xác

*once* = một lần

*different* = khác nhau (tính từ)

*colour* = màu

NGÔ VIỆT TRUNG


**Bài T1/250.** *Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x, y)$ với $x > 1$, $y > 1$ sao cho $3x + 1$ chia hết cho $y$ đồng thời $3y + 1$ chia hết cho $x$.*

**Lời giải.** (của bạn *Đỗ Hải Minh*, 7T3 Giảng Võ, **Hà Nội**)

Dễ thấy $x \neq y$ vì $x > 1$, $y > 1$. Không giảm tổng quát giả sử $x > y$. Đặt $3y + 1 = px$. Vì $x > y \Rightarrow 3x > 3y + 1 = px \Rightarrow p < 3 \Rightarrow p \in \{1, 2\}$

* Nếu $p = 1 \Rightarrow x = 3y + 1 \Rightarrow 3x + 1 = 9y + 4 \vdots y \Rightarrow 4 \vdots y \Rightarrow y \in \{2, 4\}$

Nếu $y = 2 \Rightarrow x = 7$

$y = 4 \Rightarrow x = 13$

* Nếu $p = 2 \Rightarrow 2x = 3y + 1 \Rightarrow 2(3x + 1) = 6x + 2 = 3(3y + 1) + 2 = 9y + 5$.

Vì $3x + 1 \vdots y \Rightarrow 9y + 5 \vdots y \Rightarrow y = 5 \Rightarrow x = 8$

Vậy ta có các nghiệm là (7, 2), (2, 7), 8, 5), (5, 8), (4, 13), (13, 4).

**Nhận xét.** Bài này được đông đảo các bạn tham gia giải và các bạn đều làm đúng. Do sơ suất để bài thiếu chữ "nguyên". Đa số các bạn hiểu rằng khái niệm chia hết chỉ có nghĩa với tập số nguyên nên đã tự động sửa đúng. Nhưng cũng có lác đác vài bạn cho thêm các nghiệm hữu tỉ !! với cách hiểu là $3x + 1 \vdots y \Leftrightarrow 3x + 1 = ky$ với $k \in N$

Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Lương Thế Nhân*, 9A chuyên **Bạc Liêu**. *Trần Ngọc Hải*, 8A Phong Châu, **Phú Thọ**. *Ngô Quốc Anh*, 9C Nguyễn Du, **Buôn Mê Thuột**. *Vũ Lê An*, 8T Trần Hưng Đạo, **Quảng Ngãi**. *Đoàn Quý Hiếu*, 9A Trần Đăng Ninh, **Nam Định**. *Lương Ngọc Quang*, 8A PTCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; *Trương Minh Trung*, 9A Diễn Châu, **Nghệ An**. *La Quang Hổ*, 9B Hậu Lộc, **Thanh Hóa**. *Trần Vĩnh Hưng*, 8/1 Nguyễn Du, Gò Vấp, **TP Hồ Chí Minh**. *Nguyễn Tuấn Tài*, 8B Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**. *Vũ Nam*, 8B Trần Phú, **Hải Phòng**. *Nguyễn Đức Hạnh*, 9A$_1$ Chu Văn An, **Thái Nguyên**. *Thanh Tú*, 7J Ngô Sĩ Liên, Hoàn Kiếm, **Hà Nội**. *Võ Đức Nghĩa*, 9B Đông Cương, TP **Thanh Hóa**. *Nguyễn Văn Thuận*, 9I, Lý Tử Trọng, **Ninh Bình**. *Khúc Ngọc Vinh*, 9/19 Hồng Bàng, quận 5, **TP Hồ Chí Minh**. *Phạm Tuấn Thành*, 6B, Lê Quý Đôn, **Hải Dương**. *Trương Anh Huy*, 9$_3$ Phan Chu Trinh, Diên Khánh, **Khánh Hòa**.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

**Bài T2/250.** *Chứng minh rằng : tồn tại đa thức với các hệ số nguyên sao cho giá trị của đa thức này và giá trị của phân thức*

$$P = \frac{5t^2}{t^6 + t^5 - t^3 - 5t^2 - 4t + 1}$$

*tại các nghiệm của phương trình $t^8 - 4t^4 + 1 = 0$ là bằng nhau.*

**Lời giải.** của *Lê Nguyên Minh*, 8A, Nhữ Bá Sĩ, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa.** Ta có :

$t^8 - 4t^4 + 1 =$

$= (t^6 + t^5 - t^3 - 5t^2 - 4t + 1)(t^2 - t + 1) + 5t.$

Mà $t^2 - t + 1 > 0 \ \forall t$. Vậy có:

$$P = \frac{5t^2(t^2-t+1)}{(t^6+t^5-t^3-5t^2-4t+1)(t^2-t+1)} = \frac{5t^2(t^2-t+1)}{t^8-4t^4+1-5t}$$

Như thế tại các nghiệm của phương trình

$t^8 - 4t^4 + 1 = 0$

thì $P = \dfrac{5t^2(t^2-t+1)}{-5t} = -t^3 + t^2 - t$ (đpcm).

**Nhận xét.** Các bạn sau đây cũng có lời giải tốt: *Nguyễn Cao Sơn, Mai Nguyên Dũng*, 9A$_1$ Chu Văn An, Tp **Thái Nguyên.** *Hàn Thế Anh*, 9A NK Lạng Giang, **Bắc Giang.** *Vũ Hoàng Hiệp*, 8T NK Trần Phú, **Hải Phòng.** *Nguyễn Thị Hạnh*, 9A, Hưng Đạo, Tứ Kỳ; *Nguyễn Xuân Cương*, 9B Chu Văn An, Thanh Hà, **Hải Dương.** *Đinh Quyết Tiến*, 7A Yên Ninh, Yên Khánh, **Ninh Bình.** *Vũ Đức Nghĩa*, 9B Đông Cương, TP. **Thanh Hóa.** *Đinh Thanh Thường*, 9A Nguyễn Trãi, Tân Kỳ; *Trương Minh Trung*, 9A CLC Diễn Châu; *Nguỵ Lê Giang*, Nghĩa Đàn, **Nghệ An.** *Ngô Minh Trí*, 8J Trần Hưng Đạo, **Quảng Ngãi.** *Ngô Trung Hiếu*, 9$_1$ Nguyễn Du, Q1, TP. **Hồ Chí Minh.** *Lương Thế Nhân*, 9A chuyên **Bạc Liêu.**

TỐ NGUYÊN

**Bài T3/250.** *Xét tất cả các tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ sao cho $a < b$ và $f(x) \geq 0$ với mọi x. Hỏi rằng biểu thức $\dfrac{a+b+c}{b-a}$ có thể nhận giá trị bé nhất bằng bao nhiêu ?*

**Lời giải.** * *Cách 1.* (của *Nguyễn Anh Cường*, 8$_1$, trường Nguyễn An Ninh, **Vũng Tàu** và nhiều bạn).

Vì $f(x) \geq 0$ $\forall x$ nên $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta = b^2 - 4ac \leq 0 \end{cases}$

Từ đó $c \geq \dfrac{b^2}{4a}$.

Vậy $a + b + c \geq \dfrac{4a^2 + 4ab + b^2}{4a}$. Vì $a < b$ nên $b - a > 0$. Suy ra :

$$M = \frac{a+b+c}{b-a} \geq$$
$$\geq \frac{4a^2 + 4ab + b^2}{4a(b-a)} = \frac{(4a-b)^2}{4a(b-a)} + 3$$
$$\Rightarrow M \geq 3.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} c = \dfrac{b^2}{4a} \\ 4a = b \end{cases} \Leftrightarrow b = c = 4a.$

Vậy $M$ bé nhất là 3 và lớp các tam thức bậc hai $f(x) = a(x+2)^2$, $a > 0$ thỏa mãn tình huống này.

* *Cách 2.* (của *Nguyễn Thành Chung* và *Mai Nguyên Dũng*, Chu Văn An, **Thái Nguyên.** *Phùng Văn Thủy*, 9A Lê Văn Thịnh, Gia Lương, **Bắc Ninh**. *Nguyễn Sơn Tùng*, 8C, năng khiếu TP **Thanh Hóa.** *Trần Quang Vinh*, $9A_1$, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên, **Nam Định**; ....)

Vì $f(x) \geq 0$ $\forall x$ nên $f(-2) \geq 0 \Rightarrow 4a - 2b + c \geq 0 \Rightarrow a + b + c \geq 3(b - a)$. Mà $b > a$ nên : $\dfrac{a+b+c}{b-a} \geq 3$.

Xét $f(x) = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2 \geq 0$ $\forall x$.

Khi đó $\dfrac{a+b+c}{b-a} = 3$.

Vậy $\dfrac{a+b+c}{b-a}$ bé nhất là 3.

**Nhận xét.** 1) Đa số các bạn giải theo một trong hai cách trên. Ở cách 1, ngoài phương pháp tách số hạng để đánh giá $M$, nhiều bạn còn sử dụng bất đẳng thức Cauchy.

2) Đúng 27 bạn làm sai... như nhau ! Các bạn nhận xét $f(1) \geq 0 \Rightarrow \dfrac{a+b+c}{b-a} \geq 0$ và kết luận ngay $\dfrac{a+b+c}{b-a}$ bé nhất là 0.

Các bạn có tìm nổi tam thức bậc hai $f(x) \geq 0$ $\forall x$, $b > a$ mà $a + b + c = 0$ được không ?

3) Các bạn có lời giải tốt và rõ ràng là : *Nguyễn Thị Ngừng*, 7D, THCS Đình Tổ, Thuận Thành, **Bắc Ninh.** *Bùi Ngọc Hân*, 8C, năng khiếu Thanh Hóa, **Thanh Hóa.** *Trần Hữu Quốc*, 8C và *Ngô Quốc Anh*, 9C, chuyên Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột, **Đắc Lắc**. *Trần Quốc Hưng*, 9B, Đặng Thai Mai, Vinh, **Nghệ An**. *Đào Việt Hùng*, 9B, Trần Phú, Phủ Lý, **Hà Nam.** *Lương Thế Nhân*, 9B, chuyên Bạc Liêu, **Bạc Liêu.** *Vương Nguyên Tấn Lợi*, $8_4$, Tam Phước, Long Thành, **Đồng Nai.** *Phạm Gia Vĩnh Anh*, 8 chuyên Toán, Trần Phú, **Hải Phòng.** *Lê Nguyễn Anh Tuấn*, $7^1$, NK Toán, Hồng Bàng, Q5, **TP Hồ Chí Minh.** *Trần Đăng Khoa*, 8A, Quốc học quy Nhơn, **Bình Định.** *Thái Hoàng Linh*, 8B Phan Đình Phùng, **Hà Tĩnh.** *Thanh Tú*, 7T Ngô Sĩ Liên, **Hà Nội.**

LÊ THỐNG NHẤT

**Bài T4/250.** *Cho hai điểm cố định B và C. Một điểm A thay đổi trên một trong hai nửa mặt phẳng bờ BC sao cho A, B, C không thẳng hàng. Dựng hai tam giác vuông cân ADB và AEC với DA = DB; EA = EC sao cho điểm D nằm khác phía điểm C đối với đường thẳng AB và điểm E nằm khác phía điểm B đối với đường thẳng AC. Gọi M là trung điểm của DE. Chứng minh rằng đường thẳng AM luôn đi qua một điểm cố định.*

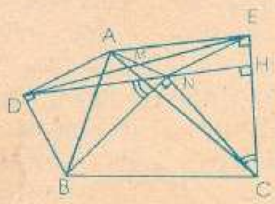
**Lời giải.** (của *Nguyễn Ngọc Hoàng*, - THCS Việt Trì, **Phú Thọ**)

Lấy $N$ đối xứng với $A$ qua $M$. Dễ thấy tứ giác $AEND$ là hình bình hành (có thể suy biến).

Ta có : $\begin{cases} BD = DA = NE \\ DN = AE = EC \end{cases}$ (1)

Lại có : $\angle NDB = 90^\circ - \angle NDA =$
$= 90^\circ - \angle AEN = \angle CEN$ (2)

Từ (1) , (2) suy ra : $\Delta BDN = \Delta NEC$



$$\Rightarrow \begin{cases} BN = NC & (3) \\ \angle DNB = \angle ECN & (4) \end{cases}$$

Mặt khác : $\begin{cases} AE \perp CE \\ DN // AE \end{cases} \Rightarrow DN \perp CE$

Đặt $H = DN \cap CE$.

Ta có : $\angle HNC + \angle HCN = 90^{\circ}$ (5)

Từ (4) ; (5) suy ra : $\angle HNC + \angle DNB = 90^{\circ}$ $\Rightarrow \angle BNC = 90^{\circ}$ (6)

Từ (3), (6) suy ra : $\Delta BNC$ vuông cân tại $N$ $\Rightarrow N$ cố định. Vậy $AM$ luôn đi qua điểm cố định $N$.

*Chú ý.* Trên đây ta vẽ hình và chứng minh bài toán trong trường hợp góc $A < 90^{\circ}$. Khi góc $A > 90^{\circ}$; góc $A = 90^{\circ}$ phép chứng minh vẫn còn hiệu lực với một vài thay đổi nhỏ.

**Nhận xét.** 1) Có gần 200 bạn giải bài này. Đa số các bạn giải đúng. Ngoài cách giải trên nhiều bạn cho lời giải khác thông qua khái niệm tam giác đồng dạng.

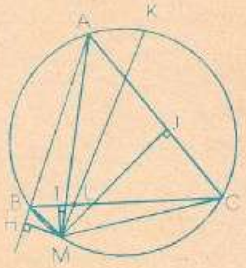
2) Bạn *Hà Quang Đạt*, 8J Trần Hưng Đạo, **Quảng Ngãi** đã nhận xét : Có thể mở rộng bài toán bằng cách thay hai tam giác vuông cân $ADB$ và $AEC$ bằng hai tam giác đồng dạng $\Delta ADB \sim \Delta CEA$.

3) Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Ngô Quốc Anh*, 9C chuyên Nguyễn Du, Buôn Mê Thuột, **Đắc Lắc**. *Vũ Thị Đa Quỳnh*, 7B THCS Đặng Thai Mai, **Hải Dương**. *Hoàng Văn Minh*, Phổ Yên, **Thái Nguyên**. *Bùi Minh Quân*, 8A1, THCS Giảng Võ - Ba Đình, **Hà Nội**.. *Nguyễn Đức Giang*, 8A, THCS Lê Quý Đôn, Cầu Giấy, **Hà Nội**.

NGUYỄN MINH HÀ

**Bài T5/250.** *Cho tam giác ABC với $a > b > c$ nội tiếp đường tròn (O). Đặt $x$, $y$, $z$ là các khoảng cách từ một điểm M thuộc (O) đến các cạnh tương ứng BC, CA, BA. Tìm vị trí của M sao cho biểu thức $S = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}$ đạt giá trị bé nhất có thể được.*

**Lời giải.** (của *Trần Đức Hiệu*, 9I Hàn Thuyên, Nam Định)




Gọi $M$ là điểm thuộc cung $BC$; $H$, $I$, $J$ là chân đường vuông góc từ $M$ xuống $AB$, $BC$, $CA$, $K$ là điểm trên $\overset{\frown}{BAC}$ sao cho $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CK}$, $MK$ cắt $BC$ tại $L$.

Ta có $\Delta BLM \sim \Delta ACM$ (gg) nên $\frac{b}{y} = \frac{BL}{x}$ (1)

$\Delta CLM \sim \Delta ABM$ nên $\frac{c}{z} = \frac{CL}{x}$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra

$$S = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \frac{2a}{x}$$

Do đó $S$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $x$ lớn nhất. Vậy $M$ là điểm chính giữa cung $BC$, khi đó $S = S_a = 4\,\mathrm{cotg}\frac{A}{2}$.

Nếu $M$ thuộc cung $AC$ tương tự ta có $M$ là chính giữa cung $AC$ và $S_b = 4\mathrm{cotg}\frac{B}{2}$.

Nếu $M$ thuộc cung $AB$ thì $M$ là điểm chính giữa cung $AB$ và $S_c = 4\,\mathrm{cotg}\frac{C}{2}$. So sánh 3 giá trị $\mathrm{cotg}\frac{A}{2}$, $\mathrm{cotg}\frac{B}{2}$, $\mathrm{cotg}\frac{C}{2}$ ta có $S_{\min} = \frac{2a}{m}$ ($m$ là khoảng cách từ điểm chính giữa $\overset{\frown}{BC}$ tới cạnh $BC$) khi $M$ là điểm chính giữa cung $BC$.

**Nhận xét.** Giải tốt bài này có các bạn : **Thái Nguyên:** *Phạm Thùy Hương*, 9B THCS Nguyễn Du. **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Cao Thắng*, *Phạm Văn Hùng*, 8B Yên Lạc. **Hải Dương:** *Nguyễn Phương Thảo*, 9A Nguyễn Trãi. **Hà Nội:** *Nguyễn Hoài Anh*, 8A Lê Quý Đôn. **Hải Phòng:** *Triệu Tuấn Đạt*, 8T THCS Chu Văn An. **Nam Định:** *Doãn Quý Hiếu*, 9A6 Trần Đăng Ninh. **Thanh Hóa:** *Đỗ Mạnh Cường*, 8C Lê Quý Đôn, Bỉm Sơn: *Lê Ngọc Khoa*, 8A NK Hoằng Hóa. **Nghệ An:** *Đặng Văn Cường*, 9A Đô Lương. **Quảng Ngãi:** *Phạm Tuấn Anh*, 9A chuyên Lê Khiết. **Bình Định:** *Nguyễn Lương Hoàng*, 9A Quốc học Quy Nhơn. **Khánh Hòa:** *Lưu Đức Trung*, 8[14] THCS Thái Nguyên. **Đắc Lắc:** *Ngô Quốc Anh*, 9C chuyên Nguyễn Du. **Đồng Nai:** *Nguyễn Minh Thuận*, 91 THCS Quang Trung, Tân Phú.

VŨ KIM THỦY

**Bài T6/250.** *Cho số nguyên dương m. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn đồng thời các điều kiện : $|a| \le m$, $|b| \le m$ và $0 < a + b\sqrt{2} \le \frac{1 + \sqrt{2}}{m + 2}$.*

**Lời giải.** (của nhiều bạn) : Đặt $f(x, y)$ $x + y\sqrt{2}$. Xét tập hợp : $S = f(x, y)x, y \in \mathbf{Z}$ và $0 \le x \le m$, $0 \le y \le m\}$.

Dễ thấy : i) Với $x, y, x', y' \in \mathbf{Z}$ thì $f(x, y) = f(x', y') \Leftrightarrow x = x'$ và $y = y'$. Suy ra $|S| = (m+1)^2 = m^2 + 2m + 1$. (1)

ii) Với $f(x, y) \in S$ thì $0 \le f(x, y) \le (\sqrt{2}+1)m$. Vì thế khi chia đoạn $[0, (\sqrt{2}+1)m]$ thành $m^2 + 2m$ đoạn nhỏ bằng nhau thì từ (1), theo nguyên lí Dirichlet, suy ra phải tồn tại $f(a_1, b_1), f(a_2, b_2) \in S$ và $f(a_1, b_1) \neq f(a_2, b_2)$ mà $f(a_1, b_1), f(a_2, b_2)$ thuộc cùng một đoạn nhỏ. Không mất tổng quát, giả sử $f(a_1, b_1) < f(a_2, b_2)$.

Do độ dài của mỗi đoạn nhỏ bằng $\frac{(\sqrt{2}+1)m}{m^2+2m} = \frac{\sqrt{2}+1}{m+2}$

nên : $0 < f(a_2, b_2) - f(a_1, b_1) \le \frac{1+\sqrt{2}}{m+2}$,

hay : $0 < (a_2 - a_1) + (b_2 - b_1)\sqrt{2} \le \frac{1+\sqrt{2}}{m+2}$.

Vì thế : chọn $a = a_2 - a_1$, $b = b_2 - b_1$, thì $a, b \in \mathbf{Z}$ và $0 < a + b\sqrt{2} \le \frac{1+\sqrt{2}}{m+2}$

. Hơn nữa, do $0 \le a_1, a_2, b_1, b_2 \le m$ nên $|a| \le m$, $|b| \le m$. (đpcm).

**Nhận xét.** 1) Trong phần đề bài in bằng tiếng anh tại trang 12 của Tạp chí TH&TT số 4 (250)/1998, điều kiện $0 < a + b\sqrt{2} \le \frac{1+\sqrt{2}}{m+2}$ đã bị in nhầm thành $0 < a + b\sqrt{2} \le \frac{1+\sqrt{2}}{m+\sqrt{2}}$. Vì thế có một số bạn đã giải bài toán với đề bài như đã in bằng tiếng Anh và khẳng định rằng đề bài in bằng tiếng Việt không đúng, chí ít với $m = 1$. Khẳng định của bạn sai, vì với $m = 1$ ta có thể chọn $a = -1$, $b = 1$.

2) Bằng cách dựa vào hai kết quả :

*Kết quả 1:* $\forall m \in \mathbf{N}^*$ luôn $\exists n \in \mathbf{N}^*$ sao cho : $(\sqrt{2}+1)^n - 2 < m < (\sqrt{2}+1)^{n+1} - 2$.

*Kết quả 2:* $\forall n \in \mathbf{N}^*$ luôn $\exists a, b \in \mathbf{Z}$ sao cho $(\sqrt{2}+1)^n = a + b\sqrt{2}$ và $(\sqrt{2}-1)^n = |a| + |b|\sqrt{2}$. Một số bạn đã đề xuất một lời giải khác, với lời giải đã trình bày ở trên, khá ngắn gọn cho bài toán.

3) Một số bạn đã chỉ ra sự tồn tại của $a, b$ bằng cách giải hệ bpt : $|a| \le m$, $|b| \le m$ và $0 < a + b\sqrt{2} \le \frac{1+\sqrt{2}}{m+2}$. Tất cả các bạn này đều cho lời giải sai. Ngoài ra, một số bạn khác cũng cho lời giải sai do hoặc không hiểu đề bài hoặc không chú ý tới điều kiện $a, b \in \mathbf{Z}$ (chẳng hạn, có bạn đã chọn $a = b = \frac{1}{m+2}$ hay có bạn đã chọn $a = 0, 1$; $b = 0, 2, ...$)

4) Các bạn sau đây có lời giải tốt hơn cả : *Nguyễn Hoàng Thạch*, 8C THCS Ngọc Lâm, Gia Lâm, **Hà Nội.** *Nguyễn Mạnh Hà*, 11A PTTH Nguyễn Huệ, **Hà Tây.** *Đinh Khánh Hà*, 11A khối PTCT, ĐHSP - **ĐHQG Hà Nội.** *Trần Tất Đạt* 10B toán khối PTCT - tin, ĐHKHTN - **ĐHQG Hà Nội.** *Phạm Hoàng Hà, Nguyễn Duy Tân*, 11A PTTH chuyên **Vĩnh Phúc.** *Nguyễn Khuyến Lân* và *Lê Xuân Trung*, 11T PTTH Lam Sơn, **Thanh Hóa**).

NGUYỄN KHẮC MINH

**Bài T7/250.** *Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh bất đẳng thức :*

$$\frac{1}{2} + \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \ge \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \ge$$
$$\ge 2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$$

**Lời giải.** *Cách 1* (của nhiều bạn) : (Vì $a, b, c > 0$ nên :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \ge \frac{4}{a+b};\ \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \ge \frac{4}{b+c};\ \frac{1}{c} + \frac{1}{a} \ge \frac{4}{c+a}.$$

Cộng theo vế 3 bđt vừa nêu rồi chia cả 2 vế của bđt nhận được cho 2 ta sẽ có :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \ge 2\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right)$$
$$\Leftrightarrow ab + bc + ca \ge 2abc\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right)$$
$$\Leftrightarrow ab + bc + ca + 2(a^2+b^2+c^2) \ge$$
$$\ge 2\left(a^2 + b^2 + c^2 + \frac{abc}{a+b} + \frac{abc}{b+c} + \frac{abc}{c+a}\right) =$$
$$= 2\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right)(ab + bc + ca)$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \ge \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$$

(đpcm). Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Áp dụng bđt Bunhiacôpxki cho 2 bộ 3 số : $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b+c}}, \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c+a}}, \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a+b}}\right)$ và $(\sqrt{a(b+c)}, \sqrt{b(c+a)}, \sqrt{c(a+b)})$ ta được :

$$(a + b + c)^2 \le$$
$$\le \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right)[a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)]$$
$$\Leftrightarrow \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \ge$$
$$\ge \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} = 1 + \frac{a^2+b^2+c^2}{2(ab+bc+ca)}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\right) - $$
$$- \frac{1}{2}\cdot\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \quad (1)$$

Mà : $\frac{1}{2}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + ab+bc+\frac{ca}{a^2+b^+c^2}\right) \geq 1,$

nên từ (1) ta được :

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq 2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \text{ (đpcm)}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = b$.

*Cách 2.* (của *Đinh Thanh Thường*, 9A THCS Nguyễn Trãi, Tân Kì - Nghệ An).

Ta có :

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} =$$
$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{a+b} - 2\right) +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{c+a} + \frac{c+a}{a+b} - 2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{c+b}{a+c} + \frac{a+c}{c+b} - 2\right) =$$
$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{(a-c)^2}{(b+c)(a+b)} + \frac{(b-c)^2}{(c+a)(a+b)} + \frac{(b-a)^2}{a+c)(c+b)}\right]$$
$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}.T \quad (2)$$

Dễ thấy : $2(a^2+b^2+c^2 > ab+bc+ca+c^2 = (a+c)(b+c) > ab+bc+ca$.

Suy ra :

$$\frac{(a-b)^2}{ab+bc+ca} \geq \frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)} \geq \frac{(a-b)^2}{2(a^2+b^2+c^2)} \quad (3)$$

Một cách tương tự, ta cũng có :

$$\frac{(b-c)^2}{ab+bc+ca} \geq \frac{(b-c)^2}{(a+b)(b+c)} \geq \frac{(b-c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)} \quad (4)$$

$$\frac{(c-a)^2}{ab+bc+ca} \geq \frac{(c-a)^2}{(a+b)(b+c)} \geq \frac{(c-a)^2}{2(a^2+b^2+c^2)} \quad (5)$$

Cộng theo vế các bđt kép (3), (4), (5) ta được :

$$2\frac{(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca} - 2 \geq T \geq 1 - \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq$$

$$\geq 2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \text{ (do (2))}$$

Dấu "=" ở mỗi bđt xảy ra $\Leftrightarrow (a-b)^2 = (b-c)^2 = (c-a)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c$.

**Nhận xét.** 1) Trong số 210 lời giải gửi đến của các bạn, có 9 bạn cho lời giải sai và 14 bạn chứng minh sai bất đẳng thức :

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq 2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$$

Phần lớn trong số 23 bạn vừa nêu đã mắc phải ít nhất một trong các sai lầm sau :

- *Sai lầm 1:* Nếu $A \geq B$ thì : $A \geq C \Leftrightarrow C \geq B$.
- *Sai lầm 2:* Nếu $A \geq C$ và $B \geq C$ suy ra $A \geq B$.
- *Sai lầm 3:* Từ $A \geq B > 0$ và $C \geq D$ suy ra $A - C \geq B - D$
- *Sai lầm 4:* Từ $A \geq B > 0$ và $C \geq D > 0$ suy ra $\frac{A}{C} \geq \frac{B}{D}$
- *Sai lầm 5:* Từ $A \geq B$ suy ra $A.C \geq B.C\ \forall C$.

2) Một số bạn đã đề xuất và chứng minh một số bài toán khái quát của bài đã ra. Tất cả các bài toán đó có thể phát biểu dưới dạng :

*Bài toán khái quát :* Cho $n \in \mathbf{N}^*$, $n \geq 3$ và cho $n$ số thực dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Chứng minh rằng :

$$1) \frac{n-2}{n-1} + \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}{\sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_i a_j} \geq \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{S-a_i} \geq$$
$$\geq \frac{2}{n-1} + 1 - \frac{2}{(n-1)^2}\cdot\frac{\sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_i a_j}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

$$2) \frac{n-2}{n-1} + \frac{2\sum_{i=1}^{n} a_i^2}{\sum_{i=1}^{n} a_i(S-a_i)} \geq \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{S-a_i} \geq$$
$$\geq 2 - \frac{1}{4}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i(S-a_i)}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

NGUYỄN KHẮC MINH

**Bài T8/250.** *Tìm tất cả các đa thức với hệ số thực $f(x)$ mà $\cos f(x)$, $x \in \mathbf{R}$ là hàm số tuần hoàn.*

**Lời giải.** *Cách 1.* Giả sử $f(x)$ là đa thức sao cho $\cos x$ là hàm tuần hoàn. Kí hiệu $T$ là chu kì của $\cos f(x)$. Ta có :

$$\cos f(x) = \cos f(x+T).$$

Do đó, với mỗi $x \in \mathbf{R}$ ta có :

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{f(x)+f(x+T)}{\pi} \in \mathbf{Z} \\ \dfrac{f(x)-f(x+T)}{\pi} \in \mathbf{Z}\end{array}\right.$$

Xét các đa thức $\varphi_1(x) = \dfrac{f(x)+f(x+T)}{\pi}$

$$\varphi_2(x) = \frac{f(x)-f(x+T)}{\pi}$$

Chọn $x_o \in \mathbf{R}$. Có hai khả năng

1) $\varphi_1(x_o) \notin \mathbf{Z}$. Khi đó tồn tại lân cận $(x_o - \varepsilon, x_o + \varepsilon)$ sao cho $\varphi_1(x) \notin \mathbf{Z}$ với mọi $x \neq x_o, x \in (x_o - \varepsilon, x_o + \varepsilon)$. Do đó ta phải có j với mọi $x \in (x_o - \varepsilon, x_o + \varepsilon)$. Từ đó suy ra $\varphi_2(x) \equiv C$. Vậy $f(x)$ là thức bậc nhất hoặc bậc không.

2) $\varphi_2(x_o) \in \mathbf{Z}$. Cũng lập luận như trên ta đi đến $\varphi_1(x) \equiv C$. Vậy $f(x) \equiv C$.

Dễ nhận thấy rằng nếu $f(x) = ax + b$ hoặc $f(x) = C$ thì $\cos f(x)$ là hàm tuần hoàn.

*Cách 2.* Rõ ràng nếu $\deg f \leq 1$ thì $\cos f(x)$ là hàm tuần hoàn. Xét trường hợp def $f \geq 2$. Nếu $\cos f(x)$ là hàm tuần hoàn thì $g(x) = (\cos f(x))' = -f'(x).\sin f(x)$ cũng là hàm liên tục và tuần hoàn trên $\mathbf{R}$.

Do $\lim\limits_{x\to\infty} |f(x)| = +\infty$ và $f(x)$ là đa thức nên $\exists$ dãy tăng $\{x_n\}$, $x_n \to \infty$ sao cho :

$$|f(x_n)| = \frac{\pi}{2} + 2k_n\pi;\ k_n \in \mathbf{Z}.$$

Khi đó : $\lim\limits_{x\to\infty} |g(x_n)| = \lim\limits_{x\to\infty} |f'(x_n)| = +\infty$, trái với giả thiết $g(x)$ là hàm liên tục và tuần hoàn trên $\mathbf{R}$.

**Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt: *Vũ Văn Tâm*, 12 Toán - Tin, PTTH Nguyễn Trãi, **Hải Dương.** *Đỗ Quang Dương*, 11T Hoàng Văn Thụ, **Hòa Bình.** *Đinh Khánh Hà*, 11A PTCT ĐHSPI **Hà Nội.** *Nguyễn Minh Công*, 11T-PTTH Amsterdam ; *Nguyễn Đức Mạnh*, 12A PTTH Cổ Loa, Đông Anh, **Hà Nội.**

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T9/250. *Giả sử tam giác ABC thỏa mãn điều kiện : cotgA, cotgB, cotgC lập thành một cấp số cộng. Chứng minh rằng : $\angle GAC = \angle GBA$, trong đó G là trọng tâm tam giác ABC.*

**Lời giải.** (của *Vũ Thái Hòa*, 10A, ĐHSP Hà Nội)

Theo giả thiết :

$\text{cotg}A + \text{cotg}C = 2\text{cotg}B$

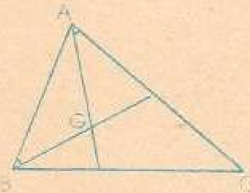
$\Rightarrow \dfrac{b^2+c^2-a^2}{4S(ABC)} + \dfrac{a^2+b^2-c^2}{4S(ABC)} = 2\dfrac{c^2+a^2-b^2}{4S(ABC)}$

$\Rightarrow 2b^2 = 2(c^2+a^2-b^2$

$\Rightarrow 3b^2 = 2(c^2+a^2)-b^2$

$\Rightarrow 3b^2 = 4m_b^2$

$\Rightarrow \left(\dfrac{b}{2}\right)^2 = \dfrac{m_b}{3}\cdot m_b$ (1)




Đặt $N = BG \cap AC$. Từ (1) ta có :

$NA^2 = NG.NB$

$\Rightarrow \dfrac{NA}{NG} = \dfrac{NB}{NA} \Rightarrow \Delta NAG \sim \Delta NBA$

$\Rightarrow \angle GAC = \angle GBA$

**Nhận xét.** 1) Có trên 200 bạn giải bài này, tất cả đều giải đúng. Tuy nhiên, một số bạn giải quá dài

2) Ngoài cách giải trên một số bạn cho những lời giải thuần túy lượng giác. Thông qua các biến đổi sau :

* $\text{cotg}A + \text{cotg}C = 2\text{cotg}B \Leftrightarrow a^2 + c^2 = 2b^2$

* $\angle GBA = \angle GAC \Leftrightarrow \text{cotg}GDA = \text{cotg}GAC$

* $\angle GBA = \angle GAC \Leftrightarrow \cos GBA = \cos GAC$ * $GBA = \angle GAC \Leftrightarrow \sin \angle GBA = \sin \angle GAC$.

3) Bạn *Kim Đình Thái*, 8B PTCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc** đã cho một lời giải chỉ dùng các kiến thức hình học của học sinh PTCS. Tuy nhiên, chứng minh của bạn chỉ đúng trong trường hợp tam giác $ABC$ nhọn.

4) Bạn *Cao Thế Thu*, 11A PTTH chuyên **Vĩnh Phúc** đã đưa ra nhận xét : $\text{cotg}A + \text{cotg}C = 2\text{cotg}B \Leftrightarrow \angle GAC = \angle GBA$.

Nhận xét của bạn đúng. Xin nêu tiếp một loạt các điều kiện tương đương để bạn tham khảo :

$\text{cotg}A + \text{cotg}C = 2\text{cotg}B$

$\Leftrightarrow \angle GAC = \angle GBA$

$\Leftrightarrow a^2 + c^2 = 2b^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m_a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}c \\ m_b = \dfrac{\sqrt{3}}{2}b \\ m_c = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_a + m_b + m_c = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c) \\ \min\{a,\ b,\ c\} \leq b \leq \max\{a,\ b,\ c\} \end{cases}$$

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

5) Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Lê Anh Dũng*, 12T chuyên Nguyễn Du, **Đắc Lắc.** *Hoàng Tùng*, 10A PTCT - tin, ĐHKHTN, **ĐHQG Hà Nội.** *Trịnh Ngọc Nhật Huy*, THCB Cẩm Phả, **Quảng Ninh.** *Đặng Hoàng Minh Hiếu*, 12A PTTH chuyên **thái Bình.** *Lê Đại Dương*, $10A_1$ Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng.** *Phạm Hoàng Hiệp*, $10A_1$ PTTHCB Hồng Quang, **Hải Dương.** *Nguyễn Minh Công*, 11T, PTTH Amsterdam, **Hà Nội.**

NGUYỄN MINH HÀ

**Bài T10/250.** *Hai tứ diện ABCD và A'B'C'D' sắp đặt ở trong không gian sao cho* $AB'^2 + BC'^2 + CD'^2 + DA'^2 = A'B^2 + B'C^2 + C'D^2 + D'A^2$. *Chứng minh rằng nếu các mặt phẳng* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *lần lượt đi qua A, B, C, D và vuông góc với các đường thẳng A'B', B'C', C'D', D'A' mà đồng quy thì các mặt phẳng* $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ *lần lượt đi qua A', B', C', D' và vuông góc với các đường thẳng AB, BC, CD, DA cũng đồng quy.*

**Lời giải.** (vắn tắt)

Ta đã biết một quỹ tích cơ bản : Mặt phẳng $\pi$ vuông góc với đoạn thẳng $PQ$ ở điểm $H$ là quỹ tích những điểm $M$ sao cho $MP^2 - MQ^2 = HP^2 - HQ^2 = k$ (const).

Nếu $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ đồng quy tại $O$ thì :

$$AA'^2 - AB'^2 = OA'^2 - OB'^2$$

$$BB'^2 - BC'^2 = OB'^2 - OC'^2$$

$$CC'^2 - CD'^2 = OC'^2 - OD'^2$$

$$DD'^2 - DA'^2 = OD'^2 - OA'^2$$

Suy ra $AB'^2 + BC'^2 + CD'^2 + DA'^2 = AA'^2 + BB'^2 + CC'^2 + DD'^2$ (*)

Ta chứng minh được rằng đảo lại nếu có (*) thì $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ đồng quy.

Từ (*) và giả thiết

$$AB'^2 + BC'^2 + CD'^2 + DA'^2 =$$

$= A'B^2 + B'C^2 + C'D^2 + D'A^2$ ta được :

$$A'B^2 + B'C^2 + C'D^2 + D'A^2 =$$

$$= A'A^2 + B'B^2 + C'C^2 + D'D^2 \ (**)$$

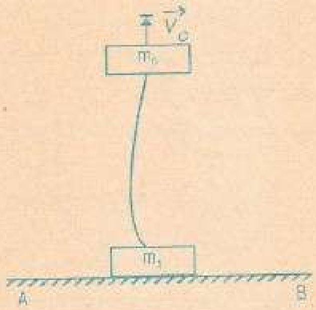
Theo chứng minh trên thì (**) chứng tỏ rằng $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ cũng đồng quy.

**Nhận xét.** Giải tốt bài này có các bạn : **Yên Bái:** *Lê Minh Đức*, 12A1 PTTH chuyen. **Hòa Bình:** *Đỗ Quang Dương*, 11T Hoàng Văn Thụ. **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Trung Hiếu*, 11A chuyên. **Hà Tây:** *Lưu Tiến Đức*, 9B THCS Nguyễn Thượng Hiền. **Hải Dương:** *Phạm Hoàng Hiệp*, 10A1, Hồng Quang. **Hà Nội:** *Trần Tất Đạt*, 10B, ĐHKHTN; *Nguyễn Bùi Đạt*, 11A ĐHSP; *Hoàng Tùng*, 10A, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội. **Hải Phòng:** *Đoàn Thái Sơn*, 11T PTNK Trần Phú. **Thanh Hóa:** *Nguyễn Phi Lê*, 10T Lam Sơn. **Nghệ An:** *Trần Nam Dũng*, 12T Phan Bội Châu. **Quảng Bình:** *Trần Chí Hòa*, 11T NKTX Đồng Hới. **Quảng Trị:** *Đào Thị Mỹ Châu*, 10T, chuyên Lê Quý Đôn. **Thừa Thiên - Huế:** *Trần Bá Đôn*, 11CT, ĐHKH. **Khánh Hòa:** *Trần Tuấn Anh*, 10T Lê Quý Đôn. **Đắc Lắc:** *Lê Anh Dũng*, 12CT, Nguyễn Du. **Lâm Đồng:** *Tô Thu Hiền*, 10A2 Bảo Lộc. **Vĩnh Long:** *Ninh Hồng Phúc*, 12T chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

VKT

**Bài L1/250.** *Hai trọng vật nối với nhau bằng một dây cáp không dãn, dài l. Tại thời điểm ban đầu trọng vật* $m_o$ *được ném từ mặt phẳng AB với vận tốc đầu* $\vec{v_o}$ *hướng thẳng đứng lên trên (hình vẽ). Hỏi độ cao cực đại h mà* $m_o$ *có thể đạt tới ? Giả sử rằng cáp có khối lượng không đáng kể và không bị đứt.*

**Hướng dẫn giải.**




***Trường hợp 1.*** Nếu $v_o^2 \le 2gl$ thì dây cáp không bị căng và độ cao đạt được là $H = \dfrac{v_o^2}{2g} \le l$

***Trường hợp 2.*** Nếu $v^2 > 2gl$ thì ngay trước lúc dây cáp bị căng, khối lượng $m_o$ đã có một vận tốc $v_1 = \sqrt{v_o^2 - 2gl}$. Dây cáp căng đột ngột nên lực căng T >> $(m_1 + m_o)$g, khối lượng $m_1$ có vận tốc $v$, khối lượng $m0_o$ bất thình linh cũng có vận tốc $v$.

Áp dụng định luật bảo toàn động lượng: $m_o v_1 = (m_o + m_1)v$ suy ra $v = \dfrac{m_o v_1}{m_o + m_1}$. Hệ vật sau đó lên được độ cao $\Delta h = \dfrac{v^2}{2g}$. Cuối cùng

$$h_{max} = l + \Delta h = 1 + \frac{v^2}{2g} =$$

$$= l + \left(\frac{m_o}{m_o + m_1}\right)^2 \left(\frac{v_o^2 - 2gl}{2g}\right)$$

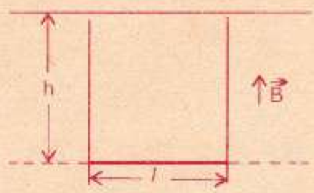
**Nhận xét.** Các em có lời giải đầy đủ và đúng : *Thái Nguyễn Phương*, 11A PTTH Quỳnh Lưu B, **Nghệ An.** *Ninh Hồng Phúc*, 12T PTTH chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Vĩnh Long.** *Nguyễn Văn Ánh*, 10A1 PTTH Xuân Mai, Chương Mĩ, **Hà Tây** *Nguyễn Trường Sơn*, A1 K77 PTTH Huỳnh Thúc Kháng, Vinh, **Nghệ An.** *Lê Đức Kính*, 10A5 PTTH Đào Duy Từ, **TP Thanh Hóa.** *Phạm Văn Tập*, 11B1 PTTH Vĩnh Bảo, **Hải Phòng.** *Đàm Xuân Thái*, 10Bo, ĐHKHTN, **ĐHQG Hà Nội.** *Nguyễn Thành Tuyên*, 10CL PTTH chuyên Lương Thế Vinh, Biên Hòa, **Đồng Nai.** *Nguyễn Trung Dũng*, 10 Lí PTTH Lê Hồng Phong, **Nam Định.** *Hoàng Minh Tuấn*, 10C chuyên lí, PTTH chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc.** *Phạm Chí Bình*, 10A3 PTTH Phan Bội Châu, **Nghệ An.**

MAI ANH

**Bài L2/250.** *Thanh dẫn (có chiều dài $l$ và khối lượng $m$) được treo bằng hai thanh cứng (có chiều dài $h$ và khối lượng không đáng kể) có thể quay tự do xung quanh một trục nằm ngang (hình vẽ). Khung nói trên nằm trong từ trường đều có véctơ cảm ứng từ hướng thẳng đứng lên trên. Người ta cho một dòng điện $I_o$ chạy qua khung dây trong một thời gian rất ngắn $t$. Hãy xác định độ lệch cực đại của khung khỏi mặt phẳng thẳng đứng.*

**Hướng dẫn giải.** Lực tác dụng lên khung trong thời gian $t$ : $F = IBl$. Sau thời gian đó khung có động lượng $p = \Delta p = mv = Ft = I_oBlt$ và, do đó nó có động năng $W_đ = \dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{I_o^2B^2l^2t^2}{2m}$.

Góc lệch cực đại $\alpha_{max}$ của khung tính trở định luật bảo toàn cơ năng :




$W_đ = W_t =$
$= mgh(1 - \cos\alpha_{max})$.

Suy ra $\sin\left(\dfrac{\alpha_{max}}{2}\right) = \dfrac{I_oBlt}{2m\sqrt{gh}}$

**Nhận xét.** Các em có lời giải đúng : *Nguyễn Đức Hà*, K31G PTTH Nguyễn Du, Nghi Xuân, **Hà Tĩnh.** *Nguyễn Văn Đồng*, 12A$_1$ THCB Đào Duy Từ, **Quảng Bình.** *Trương Quang Tri*, 12A$_1$ THCB Sơn Tịnh I, **Quảng Ngãi.** *Lê Tiến Dũng*, 11LT, trường chuyên Lê Quý Đôn, **Quảng Trị.** *Nguyễn Quang Tùng*, 12 Hóa, ĐHKHTN, **ĐHQG Hà Nội.** *Đinh Văn Trung*, 10 Lí I, chuyên Nguyễn Du, **Đắc Lắc.** *Lê Thanh Bình*, 11 Lí, PTTH Lương Văn Tụy, **Ninh Bình.** *Nguyễn Anh Tuấn*, 11A$_1$, PTTH Lê Quý Đôn, **Long An.** *Trần Hoài Nam*, 11A, PTTH chuyên Vĩnh Phúc; *Nguyễn Ngọc Tuấn*, 11F chuyên lí, PTTH chuyên Hùng Vương, Việt Trì, **Phú Thọ.** *Nguyễn Hữu Quân*, 11 toán 1, PTTH chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định.** *Đỗ Nguyên Nam Quân*, 11A$_2$, Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng.** *Phạm Văn Tập*, 11B$_1$, PTTH Vĩnh Bảo, **Hải Phòng.** *Trương Văn Nam*, 11C1 , PTTH Hùng Vương, **TP Hồ Chí Minh.**

*Chu Mạnh Hoàng*, 12A, PTTH Nghĩa Đàn, **Nghệ An.** *Phạm Hồng Phúc*, 11A, PTTH Chí Linh, **Hải Dương.**

MAI ANH

## ĐÔI ĐIỀU NÊN BIẾT ... *(Tiếp trang 22)*

Đến giữa thế kỉ trước, kết quả tìm kiếm số chữ số chính xác của $\pi$ như sau :

1844 : 200 chữ số (Dazé)
1847 : 248 chữ số (Klausen)
1853 : 330 chữ số (Richter)
1853 : 440 chữ số (Dazé)
1853 : 519 chữ số (Schenks)

Gần 100 năm sau, với sự xuất hiện của máy tính, cuộc đua tranh lại tiếp tục.

1949 : 2.037 chữ số (ENIAC)
1958 : 10.000 chữ số (IBM-704)
1961 : 100.000 chữ số (IBM-7090)
1973 : 1.000.000 chữ số (CDC-7600)
1986 : 29.360.000 chữ số (Cray02)
1987 : 134.217.00 chữ số (NEC SX-2)
1989 : 1.011.196.691 chữ số (Cray-2 + IBM - 3040)

(kết quả này đã được đưa vào sách kỉ lục Ghinet).

Tuy nhiên, tất cả các kết quả đó *gần với thể thao hơn là toán học*. Các nhà toán học đã qua đó nghiên cứu sự phân bố của các chữ số của $\pi$ và nhận thấy rằng tất cả các chữ số đều được lặp lại với tần số như nhau.

Cũng cần biết rằng năm 1767, nhà toán học Pháp *Lambert* đã chứng minh được rằng $\pi$ là một *số vô tỉ* (không biểu diễn được dưới dạng số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn). Sau đó, năm 1882, nhà toán học Đức *Lindemann* đã chứng minh được rằng $\pi$ là một *số siêu việt* (không là nghiệm của bất kì đa thức bậc $n > 0$, với các hệ số là số hữu tỉ).

*Dựa theo tạp chí Kvant, số 6-1996*

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

# ĐỀ RA KÌ NÀY

## CÁC LỚP THCS

**Bài T1/254.** Tìm nghiệm tự nhiên của phương trình

$$x^3y^3 - 4xy^3 + y^2 + x^2 - 2y - 3 = 0$$

TRẦN VĂN HẠNH
*(Quảng Ngãi)*

**Bài T2/254.** Giải phương trình :

$$\frac{1998x^4 + x^4\sqrt{x^2+1998} + x^2}{1997} = 1998$$

NGUYỄN ĐỨC TẤN
*(TP Hồ Chí Minh)*

**Bài T3/254.** Có 6 bức tranh giống hệt nhau và 8 pho tượng cũng giống hệt nhau được xếp thành một hàng ngang. Hỏi có bao nhiêu cách xếp khác nhau sao cho không có 2 bức tranh nào ở cạnh nhau ?

TRẦN TUẤN ĐIỆP
*(Hà Nội)*

**Bài T4/254.** Cho tam giác đều $ABC$ cạnh $a$. Điểm $Q$ di động trên cạnh $AC$; và điểm $P$ di động trên tia đối của tia $CB$ sao cho $AQ.BP = a^2.AP$ cắt $BQ$ tại $M$. Chứng minh $MA + MC = MB$.

PHẠM HÙNG
*(Hà Nội)*

**Bài T5/254.** Cho tam giác $ABC$ có $\hat{A} = 60^\circ$. Tìm điểm $M$ sao cho $\sqrt{3}MA + MB + MC$ nhỏ nhất.

NGUYỄN MINH HÀ
*(Hà Nội)*

## CÁC LỚP THPT

**Bài T6/254.** Xét các số thực $x, y, z, t$ thỏa mãn điều kiện :

$$(x+y)(z+t) + xy + 88 = 0$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$A = x^2 + 9y^2 + 6z^2 + 24t^2$$

NGUYỄN QUANG HẢI
*(Vĩnh Phúc)*

**Bài T7/254.** Một hòm đựng 100 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 100. Chọn ngẫu nhiên 3 tấm thẻ rồi cộng 3 số ghi trên 3 tấm thẻ ấy lại. Tính xác suất để ta thu được một số chia hết cho 3.

ĐẶNG HÙNG THẮNG
*(Hà Nội)*

**Bài T8/254.** Tính các góc của tam giác $ABC$ biết rằng :

$$\begin{cases} \hat{A} > \hat{B} > \hat{C} \\ \cos 3A + \cos 3B + \cos 3C = 1 \\ \sin 5A + \sin 5B + \sin 5C = 0 \end{cases}$$

TRẦN DUY HINH
*(Bình Định)*

**Bài T9/254.** Cho tam giác có diện tích $S$, độ dài các cạnh $a$, $b$, $c$ và $n$ là số nguyên dương. Chứng minh :

$$a^{2n} + b^{2n} + c^{2n} \geq$$
$$\geq 3\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^n . S^n + (a-b)^{2n} + (b-c)^{2n} + (c-a)^{2n}$$

NGUYỄN ĐỨC HUY
*(Long An)*

**Bài T10/254.** Cho tứ diện $OABC$ vuông ở $O$ ($OA$, $OB$, $OC$ vuông góc với nhau từng đôi một), $OA = a$; $OB = b$, $OC = c$. Gọi $r$ là bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện đó. Chứng minh bất đẳng thức sau :

$$\frac{1}{r} \geq \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + \left(\frac{3\sqrt{3}}{a+b+c}\right)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

HỒ QUANG VINH
*(Nghệ An)*

## CÁC ĐỀ VẬT LÍ

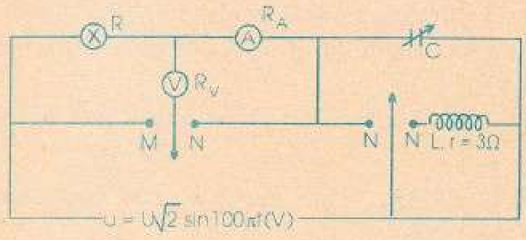
**Bài L1/254.** Đoàn tàu dài 50m chuyển động đều với vận tốc $4m/s$. Ôtô chuyển động nhanh dần đều với gia tốc $1m/s^2$. Khi ôtô còn cách đoàn tàu $40m$ thì nó đạt vận tốc $3m/s$. Tìm vận tốc của ôtô khi ôtô :

- vừa kịp đoàn tàu
- vừa vượt qua đoàn tàu

PHẠM HÙNG QUYẾT
*(Hà Nội)*

**Bài L2/254.** Cho mạch điện hình dưới, vôn kế nhiệt thuần điện trở $R_V \neq \infty$, ampe kế nhiệt thuần điện trở $R_A \neq 0$, bỏ qua điện trở các dây nối và các ngắt $K$, $K'$.

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath




1) Lúc đầu nối $K$ và $K'$ với $N$, thấy đèn sáng đúng mức và ampe kết chỉ 4 ($A$). Sau đó chuyển $K$ sang nối với $M$, thấy đèn chỉ tiêu thụ 64% công suất định mức, vôn kế chỉ 24($V$), công suất nguồn điện tăng 20% so với lúc đầu. Tính các giá trị định mức $P_{đm}$, $U_{đm}$ của đèn, các điện trở $R$, $R_A$, $R_V$ và hiệu điện thế hiệu dụng $U$ của nguồn điện.

2) Tính $L$ và $C$, biết rằng nếu sau đó chuyển $K'$ sang nối với $N'$ thì cường độ dòng điện qua tụ điện sớm pha $60^\circ$ so với $u$, và dù tăng hay giảm $C$ cũng làm cho hiệu điện thế $U_C$ ở tụ điện giảm.

TRẦN VĂN MINH
(*Hà Nội*)

# PROBLEMS IN THIS ISSUE

### FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

**T1/254.** Find whole number-solutions of the equation

$$x^3y^3 - 4xy^3 + y^2 + x^2 - 2y - 3 = 0$$

**T2/254.** Solve the equation

$$\frac{1998x^4 + x^4\sqrt{x^2 + 1998} + x^2}{1997} = 1998.$$

**T3/254.** One arranges 6 completely alike pictures and 8 completely alike statues on a line. How many arrangements there are so that no two pictures are adjacent ?

**T4/254.** Let be given an equilateral triangle $ABC$ with side $a$, an arbitrary point $Q$ on the side $AC$ and a point $P$ on the opposite ray of $CB$ so that $AQ.\ BP = a^2$. The line $AP$ cuts $QB$ at $M$. Prove that $MA + MC = MB$.

**T5/254.** Let be given a triangle $ABC$ with $\hat{A} = 60^\circ$. Determine the point $M$ so that $\sqrt{3}MA + MB + MC$ attains its least value.

### FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS.

**T6/254.** Consider the real numbers $x, y, z, t$ satisfying the condition :

$$(x + y)(z + t) + xy + 88 = 0.$$

Find the least value of the expression

$$A = x^2 + 9y^2 + 6z^2 + 24t^2.$$

**T7/254.** A box contains 100 cards labelled by the numbers from 1 to 100. Choose at random 3 cards and take the sum of the numbers written on these 3 cards. Calculate the probability that this sum is divisible by 3.

**T8/254.** Calculate the angles of a triangle $ABC$ knowing that :

$$\begin{cases} \hat{A} > \hat{B} > \hat{C}, \\ \cos 3A + \cos 3B + \cos 3C = 1 \\ \sin 5A + \sin 5B + \sin 5C = 0 \end{cases}$$

**T9/254.** Let be given a triangle with area $S$, with sides $a$, $b$, $c$ and let $n$ be a positive integer. Prove that

$$a^{2n} + b^{2n} + c^{2n} \geq$$
$$\geq 3\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^n S^n + (a-b)^{2n} + (b-c)^{2n} + (c-a)^{2n}.$$

**T10/254.** Let be given a tetrahedron $OABC$, right at $O$ (i.e. $OA$, $OB$, $OC$ are orthogonal each to the others), $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Let $r$ be the radius of its inscribed sphere. Prove the inequality

$$\frac{1}{r} \geq \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + \left(\frac{3\sqrt{3}}{a+b+c}\right)$$

when does equality occur ?

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

Diễn đàn DẠY VÀ HỌC TOÁN

# CÓ SỐ ĐO GÓC Ở TÂM LỚN HƠN 180° KHÔNG ?

PHAN THANH QUANG
*(TP Hồ Chí Minh)*

Trong Đại số 9, chương "Mở đầu về thống kê mô tả", phần nói về "Biểu diễn số liệu bằng bảng và biểu đồ" có nói đến biểu đồ hình quạt.

Với ví dụ trong sách giáo khoa (trang 106), số học sinh trung bình chiếm 45% số học sinh của trường, thì góc ở tâm của hình quạt là $\alpha_2 = \frac{360^0}{100}.45 = 162^0 < 180^0$, không có gì đáng nói.

Nếu số học sinh trung bình "chẳng may" chiếm 80% số học sinh của trường thì góc ở tâm của hình quạt tương ứng là $\alpha = \frac{360^0}{100} \times 80 = 288^0$.

Ở đây có một trục trặc kĩ thuật :

Trong hình học 9 không có khái niệm góc ở tâm lớn hơn $180^0$.

Thật vậy, theo sách giáo khoa, số đo của cung nhỏ $AB$ bằng số đo góc ở tâm chắn cung đó, còn số đo cung lớn $AB$ bằng ($360^0$ - sđ cung nhỏ $AB$). Rõ ràng với cách xác định số đo cung lớn như vậy, khái niệm góc ở tâm lớn hơn $180^0$ không có, hoặc ít nhất là không được dùng đến, được cố tình lờ đi. Giữa Đại số 9 và Hình học 9 như vậy có một cái gì đó không ăn khớp. Các nhà soạn sách giáo khoa nên xem lại.

Với hiện trạng SGK thì có thể thay "số đo góc ở tâm hình quạt" bằng "số đo cung hình quạt tương ứng". Như vậy không có trục trặc giữa Đại số 9 và Hình học 9.

Đáng tiếc là việc làm này "không giống ai", sai thì không sai, nhưng vẫn thấy gượng ép. Nên giải quyết thế nào ? Mong được các bạn trao đổi về vấn đề này.

## TRẢ LỜI Ý KIẾN CỦA THÀY GIÁO NGUYỄN DOANH HÒA

Trước hết, tôi xin hoan nghênh và cám ơn thày giáo Nguyễn Doanh Hòa đã quan tâm và cho ý kiến rất lôgic nói trên. Tôi xin được trao đổi thêm như sau: Sau khi gửi bài báo, tôi đã gặp và trao đổi trực tiếp với tác giả cuốn sách Hình học 11 (ban A). Giáo sư cho biết: phép chứng minh tính chất (d) trong sách đúng là có dùng tính chất phân phối của tích vô hướng đối với phép cộng véctơ đó; Nhưng đó là các véctơ cùng nằm trong một mặt phẳng. Theo tiên đề 5 : "Trên mỗi mặt phẳng, các định lí đã biết trong hình học phẳng đều đúng", tính chất đó hiển nhiên được thừa nhận. Vấn đề là ở chỗ: tác giả đã dùng trực tiếp tính chất phân phối ấy (trong mặt phẳng) trước khi phát biểu tính chất ấy trong không gian, hơn nữa, trước khi khẳng định lại rằng tính chất này đã được chứng minh trong mặt phẳng.

Cách khắc phục của tôi là "trốn", không dùng trực tiếp tính chất phân phối ; thay vào đó là dùng một công thức của hình học phẳng, dễ chấp nhận hơn.

Cũng có thể khắc phục theo cách thày giáo Nguyễn Doanh Hòa đã nêu là: nhắc lại công thức $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$ của hình học phẳng trước khi chứng minh tính chất (d).

Một lần nữa, xin chân thành cám ơn.

NGUYỄN HUY ĐOAN.

# KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT CÔNIC ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG

TRẦN VĂN MINH
(TP. Hồ Chí Minh)

Bài toán khoảng cách giữa một đường cônic và một đường thẳng là một bài toán thông thường của lớp 12 mà học sinh thường gặp trong các kì thi. Để các bạn học sinh có thể giải các bài toán một cách đầy đủ và chính xác, tôi xin nêu cách đặt vấn đề một cách tổng quát và cách giải chính xác.

**Bài toán 1.** (Khoảng cách từ một Elip đến đường thẳng)

*Trong mặt phẳng Oxy, cho elip (E) :* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ *và một đường thẳng*

*$(\Delta) : Ax + By + C = 0$ ($A^2 + B^2 = 1$ và $C > 0$)*

*1) Tìm điều kiện để $(\Delta)$ và (E) không có điểm chung.*

*2) Giả sử $M \in (E)$; MH là khoảng cách từ M đến $(\Delta)$. Tìm tọa độ của điểm M sao cho: MH ngắn nhất ? MH dài nhất?*

*(trong điều kiện $(\Delta) \cap (E) = \phi$)*

**Giải.** 1. Bạn đọc tự chứng minh được kết quả sau đây bằng phương pháp thông thường :

$$(\Delta) \cap (E) = \phi \Rightarrow a^2A^2 + b^2B^2 < C^2$$

2) Giả sử $M(x, y) \in (E)$. Suy ra khoảng cách từ M đến $(\Delta)$ :

$$d = MH = |Ax + By + C|$$

Áp dụng bất đẳng thức tam giác, suy ra :

$$|C-|Ax+By|| \le d \le |Ax+By| + C \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Schwars đối với : $\frac{x}{a}, \frac{y}{b}$ và $aA$, $bB$ ta có :

$$|Ax+By| \le \sqrt{a^2A^2+b^2B^2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$0 \le C - \sqrt{a^2A^2+b^2B^2} \le d \le$$
$$\le \sqrt{a^2A^2+b^2B^2} + C \quad (3)$$

Dấu = ở (3) xảy ra khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} \frac{b}{a}Bx = \frac{a}{b}Ay \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$$

Giải hệ này ta có 2 nghiệm :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{a^2A}{\sqrt{a^2A^2+b^2B^2}} \\ y_1 = \frac{b^2B}{\sqrt{a^2A^2+b^2B^2}} \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x_2 = -\frac{a^2A}{\sqrt{a^2A^2+b^2B^2}} \\ y_2 = -\frac{b^2B}{\sqrt{a^2A^2+b^2B^2}} \end{cases}$$

Thử lại với $M_1(x_1, y_1)$ ta có :

$$d = \sqrt{a^2A^2+b^2B^2} + C$$

Từ (3) suy ra : Max $d = \sqrt{a^2A^2+b^2B^2} + C$

Tương tự với $M_2(x_2, y_2)$ ta có :

$d = C - \sqrt{a^2A^2+b^2B^2}$

$\Rightarrow$ Min $d = C - \sqrt{a^2A^2+b^2B^2}$

Vậy $MH$ ngắn nhất khi $M \equiv M_2(x_2, y_2)$

$MH$ dài nhất khi $M \equiv M_1(x_1, y_1)$

**Bài toán 2.** (Khoảng cách từ một Parabol đến một đường thẳng)

*Trong mặt phẳng Oxy, cho Parabol (P) : $y^2 = 2px$ và đường thẳng $(\Delta)$ :*

*$Ax + By + C = 0$ ($A^2 + B^2 = 1$)*

*1) Tìm điều kiện để $(P) \cap (\Delta) = \phi$*

*2) Tìm điểm $M \in (P)$ sao cho khoảng cách từ M đến $(\Delta)$ ngắn nhất (trong điều kiện $(\Delta) \cap (P) = \phi$)*

1) Bạn đọc có thể chứng minh kết quả sau đây bằng phương pháp thông thường :

$$(\Delta) \cap (P) = \phi \Leftrightarrow \begin{cases} pB^2 - 2AC < 0 \\ A \ne 0 \end{cases}$$

2) $MH = |Ax + By + C|$

$$= \frac{|A|}{2p}\left|\left(y+\frac{B}{A}p\right)^2 + \frac{2pAC - B^2p^2}{A^2}\right|$$

$$\Rightarrow MH \ge \frac{|A|}{2p}\frac{|2pAC - B^2p^2|}{A^2} = \frac{2AC - pB^2}{2|A|} \quad (1)$$

Dấu = ở (1) xảy ra khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} y = -\frac{Bp}{A} \\ y^2 = 2px \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{pB^2}{2A^2} \\ y = -\frac{B}{A}p \end{cases}$$

(Xem tiếp trang 16)

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

DÀNH CHO CÁC BẠN CHUẨN BỊ THI ĐẠI HỌC

# TỨ DIỆN GẦN ĐỀU

NGUYỄN ANH DŨNG
(*Trường PTTH Lam Sơn*)

TRONG chương trình hình học phổ thông, tứ diện gần đều có nhiều tính chất phong phú và lí thú. Vì vậy đã có nhiều bài tập hay khai thác cho các kì thi học sinh giỏi trong nước và quốc tế. Ta nhắc lại định nghĩa :

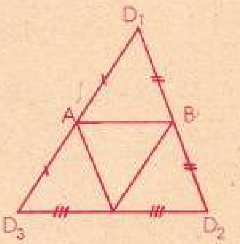
*Một tứ diện có các mặt là tam giác bằng nhau gọi là tứ diện gần đều.* Hiển nhiên tứ diện gần đều đồng nhất với tứ diện có các cặp cạnh đối diện bằng nhau từng đôi một.

Sau đây là một số tính chất đặc trưng của tứ diện gần đều hay các điều kiện cần và đủ để một tứ diện gần đều là :

1. Tổng các mặt ở mỗi đỉnh tam diện bằng $180^o$.
2. Bốn mặt là các tam giác có diện tích bằng nhau.
3. Bốn đường cao của tứ diện bằng nhau.
4. Mỗi đường nối các trung điểm của các cặp cạnh đối diện là đường vuông góc chung của cặp cạnh đó.
5. Có hai trục đối xứng (thực chất có 3 trục đối xứng).
6. Tâm mặt cầu nội tiếp và ngoại tiếp trùng nhau.
7. Tâm mặt cầu ngoại tiếp và trọng tâm tứ diện trùng nhau.
8. Tâm mặt cầu nội tiếp và trọng tâm tứ diện trùng nhau.
9. Tổng các côsin của các góc phẳng nhị diện chứa cùng một mặt bất kì bằng 1.
10. Các góc phẳng nhị diện ứng với các cặp cạnh đối diện bằng nhau.

Việc chứng minh một tứ diện gần đều có các tính chất trên không có gì khó khăn. Ta chứng minh tóm tắt điều ngược lại, một tứ diện có một trong các điều kiện trên là tứ diện gần đều.

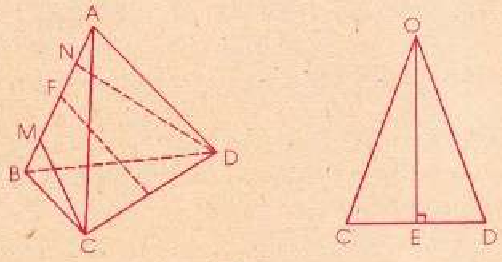
**1.** Giả sử tứ diện $ABCD$ có tổng các mặt ở mỗi đỉnh tam diện bằng $180^o$. Trải các mặt $DAB$, $DBC$, $DCA$ lên mặt phẳng $ABC$ (xem hình 1) thành các tam giác $D_1AB$, $D_2BC$, $D_3CA$.



*H.1*

Vì tổng các mặt ở mỗi đỉnh tam diện bằng $180^o$ nên các điểm $A$, $B$, $C$ thuộc các cạnh của tam giác $D_1D_2D_3$ và là trung điểm của các cạnh này. Từ đó có $AB = \frac{1}{2}.D_2D_3 = DC$, $BC = \frac{1}{2}.D_1D_2 = DA$, $CA = \frac{1}{2}.D_1D_3 = DB$. Vậy $ABCD$ là tứ diện gần đều.

**2.** Giả sử $ABCD$ có diện tích 4 mặt bằng nhau. Gọi $E$ là trung điểm $CD$, kẻ $CM$, $DN$, $EF$ cùng vuông góc với $AB$, thế thì $CM = DN$ (hình 2). Chiếu toàn bộ tứ diện lên một mặt phẳng $P$ vuông góc với $AB$. Gọi $O$ là ảnh chung của các điểm $AN$, $N$, $F$, $M$, $B$ và $C'$, $D'$, $E'$ là ảnh của $C$, $D$, $E$. Ta có $CM$, $DN$, $EF$ cùng song song với $P$ nên tam giác $OC'D'$ cân do đó $OE'C'$ vuông, vì cạnh $EF$ của góc $FEC$ song song với $(P)$ nên $EF \perp CD$. Nghĩa là đường vuông góc chung của $CD$ và $AB$ qua trung điểm $CD$. Nhưng do vai trò các cạnh như nhau nên $F$ cũng là trung điểm của $AB$. Vậy $EF$ là trục đối xứng của tứ diện. Từ đó có $AC = BD$, $A = BC$. Cũng tương tự có $AB = CD$.



*H.2*

**3.** Tứ diện có 4 đường cao bằng nhau thì diện tích các mặt bằng nhau.

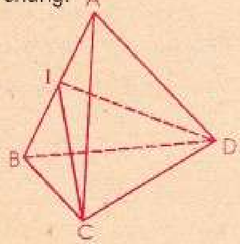
**4.** Nếu mỗi đường nối trung điểm hai cạnh đối diện là đường vuông góc chung của chúng thì nó là một trục đối xứng nên ta có các cặp cạnh đối của tứ diện bằng nhau.

**5.** Lưu ý một trục đối xứng của tứ diện phải là đường nối trung điểm hai cạnh đối diện, đưa về trường hợp 4.

**6.** Tứ diện có tâm mặt cầu ngoại tiếp và nội tiếp trùng nhau thì các mặt cách đều tâm mặt cầu ngoại tiếp nên có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng nhau. Từ đó suy ra các góc của hai mặt cùng chắn một cạnh chung thì bằng nhau, do vậy tổng các mặt ở mỗi đỉnh tam diện bằng $180^o$.

**7.** Tứ diện có tâm mặt cầu ngoại tiếp và trọng tâm trùng nhau thì đường nối trung điểm của mỗi cặp cạnh này là đường vông góc chung của chúng.

**8.** Tứ diện có tâm mặt cầu nội tiếp và trọng tâm trùng nhau thì mỗi mặt phẳng qua một cạnh và trung điểm cạnh đối diện là mặt phẳng phân giác góc nhị diện tương ứng. Theo kí hiệu của hình 3 ta có $I$



*H.3*

cách đều hai mặt $BCD$ và $ACD$. Nhưng hai tứ diện $IACD$ và $IBCD$ có thể tích bằng nhau nên hai mặt $BCD$ và $ACD$ có diện tích bằng nhau. Tương tự ta được 4 mặt của tứ diện có diện tích bằng nhau.

Các phần 9 và 10 đề nghị bạn đọc tự thực hiện. Lưu ý có thể sử dụng công thức diện tích của hình chiếu một hình phẳng lên một mặt phẳng.

Để kết thúc bài viết mời các bạn giải hai bài tập sau có ứng dụng tứ diện gần đều :

1. Cho tứ diện trong đó các cặp cạnh đối diện bằng nhau từng đôi một và theo thứ tự bằng $a, b, c$ ($a < b < c$).

Một mặt phẳng cắt tứ diện đã cho theo một tứ giác. Hãy tìm vị trí của mặt phẳng sao cho tứ giác thiết diện có chu vi bé nhất. Trong điều kiện trên hãy tìm quỹ tích trọng tâm của các tứ giác thiết diện. (Đề thi HS giỏi năm 1983)

2. Cho góc tam diện $Oxyz$ gọi $a, b, c$ là các góc phẳng nhị diện cạnh $Ox, Oy, Oz$. Chứng minh điều kiện cần và đủ để tổng các mặt của góc tam diện bằng $180^\circ$ là :

$$\cos a + \cos b + \cos c = 1.$$

## KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT CÔNIC... *(Tiếp trang 14)*

Vậy $MH$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $M\left(\frac{pB^2}{2A^2}, -\frac{B}{A}p\right)$

**Nhận xét.** Bài toán này chỉ có ý nghĩa khi $(\Delta) \cap (P) = \phi$ và không đặt ra vấn đề tìm max $MH$ vì $M$ có thể ra xa vô tận trên $(P)$.

**Bài toán 3.** (Bài toán khoảng cách từ hypebol đến một đường thẳng và bất đẳng thức giả - Schwarz (*)

1) Cho bốn số thực $a, b, c, d$ sao cho $(a^2 - b^2)(x^2 - y^2) \geq 0$ Ta có bất đẳng thức :

$$|ax + by| \geq \sqrt{(a^2 - b^2)(x^2 - y^2)} \quad (1)$$

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi $ay = -bx$.

Ta gọi (1) là bất đẳng thức giả - Schwarz.

2) Tìm điều kiện để hypebol $(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ và đường thẳng

$(\Delta)$: $Ax + By + C = 0$ không có điểm chung ($A^2 + B^2 = 1$ và $C > 0$)

3) Tìm điểm M trên H sao cho khoảng cách từ M đến $(\Delta)$ ngắn nhất (trong điều kiện $(\Delta) \cap (H) = \phi$)

**Giải :**

1) Bạn đọc chứng minh dễ dàng bằng phép biến đổi thông thường.

2) Tương tự bài toán 1 : $(\Delta) \cap (H) = \phi \Leftrightarrow a^2A^2 - b^2B^2 > C^2$

3) Giả sử $M(x, y) \in (H)$ Khoảng cách từ $M$ đến $(\Delta)$ là :

$$d = MH = |Ax + By + C|.$$

Theo bất đẳng thức tam giác ta có :

$$d \geq ||Ax + By| - |C|| = ||Ax + By| - C|.$$

Áp dụng bất đẳng thức giả - Schwarz với : $Aa, Bb$ và $\frac{x}{a}, \frac{y}{b}$ ta có :

$$|Ax + By| \geq \sqrt{(a^2A^2 - b^2B^2)\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)} =$$

$$= \sqrt{a^2A^2 - b^2B^2} \geq C$$

$$\Rightarrow d \geq \sqrt{a^2A^2 - b^2B^2} - C \quad (2)$$

Dấu = xảy ra ở (2) khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} A\frac{a}{b}y = -\frac{Bb}{a}x \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

Giải hệ này ta được 2 nghiệm :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-Aa^2}{\sqrt{a^2A^2 - b^2B^2}} \\ y_1 = \frac{Bb^2}{\sqrt{a^2A^2 - b^2B^2}} \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x_2 = \frac{Aa^2}{\sqrt{a^2A^2 - b^2B^2}} \\ y_2 = \frac{-Bb^2}{\sqrt{a^2A^2 - b^2B^2}} \end{cases}$$

Thử lại 2 nghiệm này ta thấy dấu = chỉ xảy ra ở (2) khi $M \equiv M_2(x_2, y_2)$. Vậy $MH$ ngắn nhất khi $M \equiv M_2(x_2, y_2)$.

**Nhận xét.** Bài toán này chỉ có ý nghĩa khi $(\Delta) \cap (H) = \phi$ và tương tự bài toán (2), chỉ đặt vấn đề tìm Min $MH$ vì điểm $M$ có thể ra xa vô tận trên $(H)$.

(*) Do tác giả đặt tên.

# KỲ THI OLYMPIC TOÁN QUỐC TẾ (IMO) LẦN THỨ 39

ĐẶNG HÙNG THẮNG
(*Hà Nội*)

**IMO** lần thứ 39 được tổ chức từ ngày 10/7 đến 21/7 năm 1998 tại Đài Bắc (Đài Loan). Dự kì thi này có 419 học sinh của 76 nước và khu vực. Thành phần đoàn Việt Nam gồm 6 học sinh : Phạm Huy Tùng, Đào Thị Thu Hà (ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội), Vũ Việt Anh, Lê Thái Hoàng (ĐHSP, ĐHQG Hà Nội), Đỗ Quang Yên (PTTH Lam Sơn, Thanh Hóa) và Đoàn Nhật Dương (PTTH chuyên Thái Bình). Lãnh đạo đoàn là các thầy giáo PGS. TS Đặng Hùng Thắng (ĐHKH Tự nhiên) trưởng đoàn, PTS Nguyễn Việt Hải (Bộ Giáo dục và Đào tạo) phó trưởng đoàn. Thầy giáo Lê Xuân Tình (PTTH Lam Sơn, Thanh Hóa) và thầy giáo Bùi Công Huấn (PTTH chuyên Thái Bình) quan sát viên.

Ủy ban đề thi của nước chủ nhà đã sơ bộ chọn trước ra 28 bài toán trong số 122 bài toán của các nước tham gia dự gửi đến. Từ ngày 10/7 đến 14/7 là thời gian Hội đồng thi (gồm trưởng đoàn của các nước tham dự) chọn đề. Từ 28 bài toán dự tuyển, Hội đồng chọn 6 bài toán để làm đề thi chính thức trong hai ngày. Mỗi ngày có ba bài toán và điểm tối đa cho mỗi bài là 7. Thời gian làm bài mỗi ngày thi là 4 giờ 30 phút.

**Ngày thứ nhất** (15/7/1998)

**1.** (Lucxambua) Trong tứ giác lồi *ABCD*, các đường chéo *AC* và *BD* vuông góc với nhau, hai cạnh đối diện *AB* và *DC* không song song với nhau. Đường trung trực của *AB* và *DC* cắt nhau tại điểm *P*. Giả sử *P* nằm bên trong tứ giác *ABCD*. Chứng minh rằng *ABCD* là tứ giác nội tiếp nếu và chỉ nếu các tam giác *ABP* và *CDP* có diện tích bằng nhau.

**2.** (Ấn Độ) Trong một cuộc thi có $a$ thí sinh và $b$ giám khảo, ở đó $b \geq 3$ là một số lẻ. Mỗi giám khảo đánh giá từng thí sinh và cho kết luận thí sinh đó "đỗ" hay "trượt". Giả sử $k$ là một số thỏa mãn điều kiện. Với hai giám khảo bất kì, số thí sinh mà họ cho kết luận giống nhau nhiều nhất là $k$. Chứng minh rằng

$$\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}.$$

**3.** (Belarus) Với mỗi số nguyên dương $n$, kí hiệu $d(n)$ là số các ước dương của $n$ (kể cả 1 và chính $n$). Tìm tất cả các số nguyên dương $k$ sao cho có tồn tại số nguyên dương $n$ thỏa mãn

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = k$$

**Ngày thứ hai** (16/7/1998)

**4.** (Anh) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(a, b)$ sao cho $ab^2 + b + 7$

**5.** (Ukraina) Giả sử $I$ là tâm vòng tròn nội tiếp tam giác *ABC*. Vòng tròn này tiếp xúc với các cạnh *BC*, *CA* và *AB* lần lượt tại *K*, *L* và *M*. Một đường thẳng đi qua *B* song song với *MK* cắt các đường thẳng *LM* và *LK* tương ứng tại *R* và *S*. Chứng minh rằng góc $\angle RIS$ là góc nhọn.

**6.** (Bungari) Kí hiệu $N$ là tập hợp tất cả các số nguyên dương. Xét tất cả các hàm $f$ từ $N$ và $N$ thỏa mãn điều kiện

$$f(t^2(f(s)) = s(f(t))^2$$

với mọi $s$ và $t$ thuộc $N$. Xác định giá trị nhỏ nhất của $f(1998)$.

Căn cứ vào kết quả thi và Điều lệ của IMO, Ban tổ chức đã quyết định trao :

- 37 huy chương (HCV) cho các thí sinh đạt từ 31 đến 42 điểm. Chỉ có duy nhất 1 học sinh của Iran đạt điểm tuyệt đối 42/42.

- 66 huy chương bạc (HCB) cho các thí sinh đạt từ 24 đến 30 điểm.

- 102 Huy chương đồng (HCĐ) cho các thí sinh đạt từ 14 đến 23 điểm.

Ngoài ra có 56 bằng danh dự được trao cho các thí sinh giải được trọn vẹn 1 bài toán.

Kết quả cụ thể của đội tuyển Việt Nam như sau :

| Họ và tên | Bài 1 | Bài 2 | Bài 3 | Bài 4 | Bài 5 | Bài 6 | Tổng số điểm | Giải |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Vũ Việt Anh | 3 | 7 | 2 | 7 | 7 | 7 | 33 | HCV |
| Đỗ Quang Yên | 7 | 0 | 7 | 7 | 7 | 1 | 29 | HCB |
| Phạm Huy Tùng | 7 | 3 | 7 | 7 | 7 | 1 | 26 | HCB |
| Đoàn Nhật Dương | 7 | 0 | 2 | 7 | 7 | 1 | 24 | HCB |
| Đào Thị Thu Hà | 7 | 7 | 2 | 7 | 0 | 0 | 23 | HCĐ |
| Lê Thái Hoàng | 7 | 1 | 2 | 6 | 7 | 0 | 23 | HCĐ |

Trong bảng xếp hạng không chính thức của các đội, đội tuyển Việt Nam đứng ở vị trí thứ 9 với tổng số điểm là 158. Các đội đứng trên Việt Nam là : Iran (211 điểm), Bungari (195 điểm), Mỹ (186 điểm), Hungari (186 điểm), Đài Loan (184 điểm), Nga (175 điểm), Ấn Độ (175 điểm) và Ukraina (166 điểm). Đội Nam Tư (156 điểm) xếp thứ 10.

Lễ bế mạc IMO lần thứ 39 đã được tổ chức trọng thể vào chiều 20/7/1998. Kì thi IMO lần thứ 40 sẽ được tổ chức tại Bucaret (Rumani) từ 10/7 đến 22/7/1999.

## TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT... *(Tiếp trang 24)*

Vì $\Delta = 12^2 - 4(-4)(-9) = 0$ và $a = -4$, $2ae = bd = -48$ nên

$$\max f(x, y) = f\left(x_1, \frac{2x_1 + 1}{3}\right) = 9$$

**Bài toán 4.** Chứng minh rằng với mọi $a$, $b$ thì

$$3a^2 + 4ab + 2b^2 + 2a + 3b + \frac{11}{8} \ge 0.$$

Đặt $f(a, b) = 3a^2 + 4ab + 2b^2 + 2a + 3b$ thì vì $\Delta = 4^2 - 4.3.2 < 0$ mà hệ số của $a^2$ là 3 nên

$$\min f(a, b) = f\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}\right) = -\frac{11}{8}$$

và do đó $3a^2 + 4ab + 2b^2 + a29 + 3b + \dfrac{11}{8} \ge 0.$

**Bài toán 5.** Giải phương trình

$$5x^2 + 7xy + 3y^2 = 24x + 19y - 31$$

Đặt $f(x, y) = 5x^2 + 7xy + 3y^2 - 24x - 19y + 31$ thì $\Delta = 72 - 4.5.3 < 0$, $a = 5$ nên $\min f(x, y) = f(1, 2) = 0$ và chỉ có cặp số duy nhất $(1, 2)$ để $f(1, 2) = \min f(x, y)$. Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 1$, $y = 2$.

**Bài toán 6.** Chứng minh rằng với mọi cặp số $a$, $b$ cho trước luôn luôn tìm được số $c$ sao cho với mọi cặp số $x$, $y$ ta đều có

$$x^2 + 2y^2 + c \ge xy + ax + by.$$

Đặt $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy - ax - by$ thì $\Delta = (-1)^2 - 4.1.2 < 0$ và hệ số của $x^2$ là 1 nên

$$\min f(x, y) = -\frac{2a^2 + ab + b^2}{7}$$

Chọn $c = \dfrac{2a^2 + ab + b^2}{7}$ thì $\min f(x, y) = -c$

nên $x^2 + 2y^2 - xy - ax - by \ge -c$

và do đó $x^2 + 2y^2 + c \ge xy + ax + by.$

**Bài toán 7.** Chứng minh rằng với mọi bộ ba số $a$, $b$, $c$ cho trước luôn luôn tìm được cặp số $x$, $y$ sao cho

$$x^2 + y^2 + a \le 3xy + bx + cy$$

Đặt $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3xy - bx - cy + a$ thì $\Delta = (-3)^2 - 4.1.1 = 5 > 0$ nên không có max $f(x, y)$, không có min $f(x, y)$ và do đó có cặp số $x$, $y$ sao cho $f(x, y) \le 0$. Với cặp số $x$, $y$ đó ta có $x^2 + y^2 + a \le 3xy + bx + cy.$

**Chú ý:** Vì trong chương trình phổ thông các bạn không được học các mệnh đề nêu trên cho nên việc vận dụng nội dung các mệnh đề đó vào giải các bài toán đã nêu chỉ giúp các bạn "đoán nhận nhanh" các kết quả cần tìm mà thôi.

# ANDREW WILES - NGƯỜI CHỨNG MINH ĐỊNH LÝ CUỐI CÙNG CỦA FERMAT

NGUYỄN QUỐC THẮNG
*(Viện Toán học)*

LTS. *Bài báo này đã đăng trong tờ Thông tin toán học tập 2 số 1, xuất bản tháng 3/98. Chúng tôi xin cám ơn ban biên tập tờ Thông tin toán học cho phép chúng tôi đăng lại.*

Như nhiều người trong chúng ta đã biết, "cuối cùng" định lí cuối cùng của Fermat khẳng định rằng phương trình

$$(1)\quad x^n + y^n = z^n,\ xyz \neq 0,\ n \geq 3,$$

không có nghiệm nguyên $(x,y,z)$ đã được chứng minh một cách chặt chẽ sau hơn 350 năm tồn tại. Do cách phát biểu đơn giản và do trên con đường tìm tòi giải quyết nó đã sinh ra nhiều hướng mới nên Định lý Fermat đã trở thành bài toán nổi tiếng nhất trong toán học.

Đã có nhiều bài báo tổng quan, cả chuyên lẫn không chuyên, đề cập đến lịch sử, cách chứng minh của định lí này, phương hướng và triển vọng phát triển của những vấn đề liên quan. Gần đây đã có hàng loạt sách chuyên khảo trong lĩnh vực lí thuyết số và hình học đại số trình bày chi tiết những lí thuyết hiện đại của toán học liên quan đến bài toán Fermat và lời giải của Andrew Wiles (với sự cộng tác của một học trò của anh là Richard Taylor). Tuy nhiên có một vài tư liệu hay liên quan đến Wiles và lời giải của anh chưa được biết đến rộng rãi mà người viết bài này muốn chia sẻ với bạn đọc.

Andrew Wiles sinh ra tại thành phố Cambridge, Vương quốc Anh, ngày 11 tháng 4 năm 1953. Lúc học phổ thông, một hôm anh hoàn toàn tình cờ vớ được một cuốn sách về số học nói về định lí cuối cùng của Fermat. Thế là từ đó định lí Fermat đeo đuổi anh suốt quãng đời niên thiếu và trưởng thành. Cũng như mọi thanh thiếu niên say mê toán trên trái đất, anh đã thử tìm lời giải của bài toán tưởng chừng đơn giản nhưng lại cực kỳ hóc búa này. Song lời giải luôn tuột khỏi tay anh và điều đó càng làm cho anh say mê nó. Anh cũng sớm nhận ra rằng để giải được bài toán cần phải có một *kiến thức sâu rộng* về lí thuyết số và những ngành liên quan. Năm 1971 anh vào học tại trường Merton College thuộc ĐHTH Oxford (Anh) và tốt nghiệp năm 1974. Cùng năm đó anh vào học tại Clare College thuộc ĐHTH Cambridge (Anh) và nhận bằng Tiến sĩ Ph.D. tại đó năm 1977. Trong thời gian làm nghiên cứu sinh dưới sự hướng dẫn của giáo sư John Coates, anh đã nhận được những kết quả rất độc đáo và sâu sắc về số học của đường cong elliptic trong khuôn khổ một chương trình rộng lớn liên quan đến giả thuyết của Birch và Swinnerton-Dayer. Những kết quả đó đã được đăng năm 1977 trong một bài báo viết chung với J. Coates ở *Inventiones Mathematicae*, một trong những tạp chí có uy tín nhất trong giới toán học.

Từ năm 1977 đến 1980 anh là nghiên cứu viên (Junior Research Fellow) tại Clare College và sau đó nhận chức Trợ lí giáo sư mang tên Benjamin Peirce tại trường ĐHTH Harvard nổi tiếng của Mỹ. Năm 1981 anh là giáo sư thỉnh giảng tại Phòng nghiên cứu đặc biệt về toán lí thuyết của ĐHTH Bonn (CHLB Đức) và sau đó là thành viên của Học viện nghiên cứu cấp cao tại Princeton (Mỹ), một trong những viện nghiên cứu có uy tín lớn nhất trên thế giới. Năm 1982 anh trở thành giáo sư chính thức tại ĐHTH Princeton và mùa xuân năm đó anh là giáo sư thỉnh giảng tại ĐHTH Paris 11, Orsay (Pháp). Với học bổng Guggenheim anh đã đến nghiên cứu tại Institut des Hautes Etudes Scientifiques và Ecole Normale Superieure (1985 - 1986) (Pháp). Từ 1988 đến 1990 anh mang hàm giáo sư nghiên cứu của Hội Khoa học Hoàng gia Anh và năm 1989 được bầu làm viện sĩ của Hội khoa học nổi tiếng này. Năm 1994 A. Wiles được bầu làm viện sĩ của Viện Hàn lâm khoa học và nghệ thuật của Mỹ và giữ chức giáo sư mang tên Higgins tại ĐHTH Princeton.

Sau khi giải quyết bài toán Fermat, tài năng của anh được thế giới biết đến và công nhận một cách rộng rãi. Anh được trao hàng loạt giải thưởng khoa học danh tiếng như Schock Prize (1995), Wolf Prize (1995), Ostrowski Prize (1996), Commonwealth Award (1996), National Academy of Sciences Award (1996), Cole Prize in Number Theory (1997), Wolfskehl Prize (1997), King Faisal International Prize in Science (1998) ...

Điểm lại những công trình của A. Wiles (tính đến ngày 9/3/1998 là 18 bài báo) ta thấy anh viết không nhiều song có thể nói hầu như mỗi công trình của anh (hoặc viết chung với các nhà toán học khác) đều mang tính chất nền tảng và là lời giải có tính triệt để cho những giả thuyết hay những bài toán quan trọng nhất của lý thuyết số hiện đại.

Nhiều người làm toán chúng ta đều biết rằng rất nhiều bài toán, giả thuyết mà chúng ta đang quan tâm giải quyết là những trường hợp riêng của những bài toán, giả thuyết tổng quát hơn, bao trùm hơn ... Suy nghĩ của Wiles luôn hướng về những lời giải những vấn đề như vậy. Vì thế mỗi công trình đã ra của Wiles đều được đăng trong những tạp chí có uy tín nhất. Ví dụ như anh đã đăng 6 bài báo trong tờ *Annals of Mathematics*, 4 bài báo trong tờ *Inventiones Mathematicae* là những tạp chí mà mọi nhà toán học đều có thể tự hào nếu đăng được một bài báo trong đó. Điều quan trọng hơn cả là Wiles luôn tìm ra lời giải của những bài toán, giả thuyết *then chốt nhất, sâu sắc nhất* trong lý thuyết số hiện đại. Vì vậy trước ngưỡng cửa của lời giải cho bài toán Fermat, A. Wiles đã được trang bị những kỹ thuật tinh tế nhất của lý thuyết Iwasawa (anh đã chứng minh giả thuyết Iwasawa năm 1990), lý thuyết số học các trường cyclotomic (chia đường tròn), lý thuyết các dạng modular, lý thuyết biểu diễn nhóm Galois và lý thuyết biểu diễn p-adic. Có thể nói A. Wiles đã *kết hợp được nhuần nhuyễn và cực kì sáng tạo tất cả những tinh hoa của toán học thế kỉ 20 để giải quyết bài toán Fermat.*

Bây giờ chúng ta sẽ điểm lại vài nét chính trong lịch sử chứng minh định lí Fermat. Như chúng ta đã biết, Fermat viết vào lề một quyển sách số học rằng ông đã tìm ra lời giải cho bài toán (1) song không còn chỗ để viết lại. *Lịch* sử toán học cho thấy Fermat đã chứng minh định lí cuối cùng của mình cho trường hợp $n = 4$ bằng cách xây dựng lí thuyết đường cong elliptic. Song do không có một mối liên hệ rõ ràng giữa đường cong elliptic và phương trình Fermat (1) có bậc cao hơn 4 nên đường cong elliptic đã không đóng một vai trò nào trong việc chứng minh định lí Fermat 350 năm sau đó.

Nhà toán học Pháp Y. Hellegouarch trong một bài báo đăng ở tạp chí Acta Arithmetica (1974) là người đầu tiên sau đó tìm ra một số liên hệ giữa định lí Fermat và đường cong elliptic. Tuy nhiên mãi đến năm 1987 G. Frey đã giả định và cho rằng nếu $(a,b,c)$ với $abc \neq 0$, $n \geq 3$ là nghiệm của $a^n + b^n = c^n$, thì đường cong elliptic $y^2 = x(x - a^n)(x + b^n)$ là không modular. Điều đó trái với giả thuyết Shimura-Taniyama (một trong những giả thuyết sâu sắc và quan trọng nhất của lí thuyết số hiện đại, nói rằng mọi đường cong elliptic đều là modular). Sau đó Serre (1985-1986) đã đưa ra một giả thuyết về dạng modular và biểu diễn Galois modulo p đóng một vai trò quan trọng trong việc chứng minh định lí Fermat. J.-P. Serre đã cùng với J. F. Mestre kiểm tra trên một số ví dụ cụ thể giả thuyết này. Nói riêng, Serre đã chứng minh một trường hợp riêng của giả thuyết đó được gọi là giả thuyết Epsilon cùng với việc giả thuyết Shimura-Taniyama sẽ kéo theo Định lí Fermat.

Ngay năm đó (1986), K. Ribet, một nhà toán học Mỹ nổi tiếng, dựa trên ý tưởng của Mazur đã chứng minh được giả thuyết Epsilon của Serre. Thực ra, K. Ribet còn gặp khó khăn trong một chỗ mấu chốt. Tuy nhiên, trong một buổi trao đổi giữa ông với Mazur trong một tiệm cà phê sinh viên tại ĐHTH Berkeley, Mazur đã chỉ ra rằng lí thuyết của Ribet đủ để giải quyết điểm mấu chốt này.

A. Wiles, sau khi nghe tin giả thuyết Epsilon đã được chứng minh, hiểu ngay rằng "cán cân lực lượng" đã nghiêng hẳn về những phương pháp có liên quan đến giả thuyết Shimura-Taniyama. Về sau anh tâm sự rằng từ thời điểm này trở đi cả cuộc đời anh đã thay đổi hẳn. "Tôi không muốn nó tuột khỏi tay tôi lần nữa". Anh đã vạch ra một chương trình để chứng minh giả thuyết Shimura-Taniyama cho các đường cong elliptic nửa ổn định - và ``chỉ cần" thế là có thể chứng minh định lí Fermat.

Cũng trong thời gian đó, Kolyvagin và Rubin đã độc lập phát triển một lí thuyết được gọi là hệ Ơle. Nhiều nhà toán học đã đánh giá phát kiến này có tính chất cách mạng trong lí thuyết số học hiện đại nói chung và số học đường cong elliptic nói riêng. Thoạt đầu, A. Wiles đã thử áp dụng kỹ thuật của lí thuyết Iwasawa để chứng minh định lí Fermat. Tuy nhiên có một vài cản trở trong nghiên cứu các biểu diễn $l$-adic với $l = 2$. Đồng thời lại nảy sinh một số vấn đề liên quan đến giao đầy đủ trong chuyên ngành Đại số giao hoán. Vì vậy, khi nghiên cứu mở rộng phương pháp của M. Flach - một trong những bước then chốt tiếp theo trong chương trình của mình - anh quyết định áp dụng lí thuyết hệ

Ơle. Đến mùa hè 1993, mọi việc dường như đã trở nên đâu vào đấy. Ngày 23/6/1993, trong phút cuối cùng của bài giảng thứ 3 của mình tại Viện Toán học mang tên Newton tại Cambridge, A. Wiles chậm rãi viết trên bảng: *Định lí Fermat đã được chứng minh.*

Ngay sau đó cả giới toán học và truyền thông đại chúng hân hoan chào đón tin mừng này. Phần lớn tin tưởng vào sự đúng đắn của chứng minh, nhưng một số do thận trọng vẫn tỏ ý hoài nghi. A. Wiles đã gửi bài báo với các chứng minh chi tiết đến tạp chí Inventiones Mathematicae đã nêu ở trên. Đồng thời anh gửi cho người bạn thân của mình là Nicolas Katz, một nhà toán học Mỹ có uy tín tại Princeton, một bản thảo dày cộp để lấy ý kiến. Trong suốt hai tháng hè 7-8/1993, Katz ngồi đọc bản thảo của Wiles, kiểm tra lại từng câu, từng chữ. Thỉnh thoảng ông ta gửi thư điện tử (e-mail) cho Wiles yêu cầu giải thích rõ những chi tiết chưa được viết ra hoặc những luận điểm chưa được sáng tỏ. Sau khi Wiles trả lời, mọi việc xem ra suôn sẻ, .... Song đến một hôm, Katz yêu cầu giải thích những kết quả liên quan đến hệ Ơle mà Wiles xây dựng mà ông cho là chưa chặt chẽ, thậm chí ... không tồn tại! Wiles trả lời rằng như thế,..., như thế. Song sau mỗi lần trả lời Katz lại viết: ``Tôi vẫn không hiểu!" Đến lần thứ ba thì Wiles thấy quả thực có vấn đề. Và thế là đến mùa thu năm 1993, Wiles thấy rằng việc sử dụng hệ Ơle (để mở rộng phương pháp Flach) là chưa đầy đủ và có thể sai. Một số nhà toán học khác như Luc Illusie cũng thấy được điều này. Tin đồn, tiếng bàn tán xì xào lại loang ra, và không ít người đã nghĩ là phải bắt đầu làm lại từ đầu. Nhiều người muốn chất vấn Wiles về sự thực của vấn đề nhưng Wiles hoàn toàn im lặng. Hơn thế nữa, do hầu như không có ai có bản thảo công trình của Wiles (trừ các phản biện và rất ít bạn thân mà Wiles nhờ đọc hộ) nên đã có bài báo viết rằng như thế là không trung thực...

Đầu năm 1994, trước đòi hỏi của dư luận, A. Wiles có gửi một e-mail ngắn trên INTERNET thông báo một cách rộng rãi rằng chứng minh của mình có một lỗ hổng mà anh hy vọng sẽ khắc phục được và anh sẽ nêu ra những bước khắc phục trong một khoá cao học tại ĐHTH Princeton.

Tuy nhiên, cho đến khi kết thúc khoá cao học, mặc dầu có một số tiến bộ trong việc cải tiến phép chứng minh, Wiles vẫn chưa tìm ra lối thoát. Anh viết: ``... tôi vẫn chưa suy nghĩ về cách tiếp cận ban đầu mà tôi đã gác lại sang một bên từ hè 1991 vì tôi vẫn cứ nghĩ rằng cách tiếp cận dùng hệ Ơle là đúng."

Tháng giêng 1994, một học trò cũ của Wiles tại Cambridge tên là R. Taylor đã đến hợp sức với Wiles chữa lại chỗ sai trong việc dùng hệ Ơle. Đến xuân-hè 1994, sau khi thấy việc sửa chữa không có kết quả, Wiles cùng Taylor bắt đầu quay lại cách tiếp cận cũ và cố nghĩ ra lmột suy luận mới cho trường hợp $l = 2$. Đến tháng 8/1994 họ gặp phải những trở ngại tưởng chừng không vượt qua nổi....

Cuối tháng 8/94, không hoàn toàn tin tưởng rằng phương pháp hệ Ơle là không sửa được, Taylor đã quay trở về Cambridge. Tháng 9/1994, Wiles quyết định xem lại lần cuối cách tiếp cận cũ để tìm ra điều gì là cản trở chủ yếu. Qua đó, ngày 19/9/1994, "tôi - Wiles viết - đã thấy loé lên tia sáng là nếu mở rộng lí thuyết của de Shalit thì có thể dùng nó cùng với đối ngẫu ..." cho các vành Hecke. Và thế là Wiles đã tìm ra cách giải quyết điểm mấu chốt cho cách giải mà anh đã gác lại mấy năm trước. Sau khi thông báo điều đó cho Taylor, hai người lại hợp sức tiến hành nghiên cứu chi tiết phát kiến này và đã hoàn thành bước quyết định còn thiếu được công bố trong một bài báo viết chung về một số tính chất của vành Hecke [TW]. Và thế là Định lí Fermat đã được chứng minh hoàn toàn chặt chẽ và lời giải được công bố trong bài báo [W].

Nếu ai đó đã xem buổi phỏng vấn [B] trên đài truyền hình BBC tháng 11/1997 hẳn cũng phải cảm động khi thấy A. Wiles thoạt đầu, do quá xúc động, đã rơm rớm nước mắt không nói nên lời khi được yêu cầu kể lại quá trình giải quyết bài toán cuối cùng của Fermat.

Các bạn thấy đấy, nhà toán học đâu phải hoàn toàn khô khan, và làm toán đâu phải không đem lại những cảm xúc mãnh liệt.

***Tài liệu tham khảo***

[B] BBC: *The Last Theorem of Fermat*, November 1997.

[TW] R. Taylor and A. Wiles, *Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras*, Annals of Mathematics 141(1995), 553-572

[W] A. Wiles, *Modular elliptic curves and Fermat□s last Theorem*, Annals of Mathematics 141(1995), 443-551.

[W1] A. Wiles, C. V., http:// www. math.princeton.edu

[W2] A. Wiles, Bibliography, http:// www. math.princeton.edu

BẠN CÓ BIẾT

# Đôi điều nên biết về số π

NGUYỄN QUANG TRUNG
(*Matxcova -Nga*)

Hằng số π (tỉ số giữa chu vi và đường kính của đường tròn) được các nhà toán học quan tâm nghiên cứu từ hàng ngàn năm nay.

Thời Ai Cập cổ đại, người ta lấy π = 3, tức là coi chu vi đường tròn bằng 3 lần đường kính của nó. Nhưng để tính diện tích hình tròn, người Ai Cập lại dùng công thức $S = (8d/9)^2$ tức là coi $\pi = (16/9)^2 = 3,16049$... Những giá trị gần đúng của π được tìm thấy trong các di tích của nhiều nền văn minh khác nhau. Ở Ấn Độ, trong các cuốn sách Thánh của đạo cổ Đai-nít-smo có ghi giá trị của π là $\sqrt{10} = 3,1622777$... còn trong các cuốn sách cổ của Trung Quốc, ta gặp π = 355/113 (=3,1415929...) - một độ chính xác lí tưởng ! Nhưng chỉ có chúng ta mới biết được điều đó khi đã biết hàng trăm chữ số thập phân của π ; còn ở thời đó, người ta không biết được số nào chính xác hơn : 355/113 hay đơn giản hơn là 22/7 (=3,1428571...) mà người Hi Lạp cổ đã dùng.

Vào khoảng thế kỉ IV-V trước công nguyên, các nhà bác học cổ Hi Lạp Antiphon và Brizon đã đề nghị sử dụng các đa giác nội tiếp và ngoại tiếp đường tròn để xác định trị số gần đúng của π, vì chu vi của đa giác nội tiếp thì nhỏ hơn, còn chu vi của đa giác ngoại tiếp thì lớn hơn chu vi của đường tròn. *Acsimet* (thế kỉ III trước CN) đã sử dụng ý tưởng đó. Ông lần lượt xác định chu vi của các đa giác đều nội ngoại tiếp có 6,12,24,48,96 cạnh, sử dụng công thức nhân đôi số cạnh. Chúng ta chỉ có thể thán phục và kinh ngạc trước nghệ thuật tính toán của Acsimet thời đó, đã nhiều lần tính căn bậc hai với độ chính xác tuyệt vời. Kết quả là Acsimet đã thấy rằng số π nằm giữa hai số 3 + 1137/8069 và 3+2669/18693, tức là $3,140995 < \pi < 3,142826$.

Nhà bác học *Ptôlêmê* (thế kỉ II), người đã sáng lập ra thuyết về các hành tinh quay quanh mặt trời, đã tính chu vi đa giác đều nội tiếp có 720 cạnh và nhận được π = 377/120 = 3,14166...

Gần 1500 năm sau, nhà toán học Pháp *F. Viet* (1540-1603) đã tính chu vi đa giác đều nội tiếp và ngoại tiếp có 393.216 cạnh và được kết quả $3,1415926535 < \pi < 3,1415926537$ tức là cho giá trị của π chính xác đến 10 chữ số.

Sau đó, một người Hà Lan là Roomen đã tính với đa giác $2^{30}$ = 1.073.741.824 cạnh. Người cuối cùng đi theo con đường này là nhà toán học Hà Lan *Ludolph van Ceulen* (1540-1610). Ông bỏ ra 10 năm để tính chu vi đa giác đều đến 32.512.254.720 cạnh và có được giá trị của π chính xác đến 20 chữ số. Sau khi có kết quả này, ông nói : "Ai có hứng thú đi săn thì xin đi tiếp...". Chính ông đã đi tiếp và thu được đến 33 chữ số chính xác của π (công bố năm 1615, được gọi là số *Ludolph*)!

Đến đây, lịch sử tính toán số π chưa kết thúc. Cuối thế kỉ XVII và đầu thế kỉ XVIII đánh dấu sự phát triển của toán học giải tích, sử dụng khái niệm giới hạn, cho phép xem xét các chuỗi vô hạn, tức là tổng có vô số số hạng: $u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$

Vào năm 1671, *Iakop Gregori* đã xác định rằng hàm arctg$x$ có thể biểu diễn dưới dạng chuỗi vô hạn :

$$\text{arctg}x = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + ...$$

Khi $x = 1$, ta có :

$$\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + ...$$

(chuỗi này được gọi là *chuỗi Lepnitx*)

Nhóm các số hạng của chuỗi Lepnitx theo hai cách, ta có

$$\pi/4 = (1-1/3) + (1/5-1/7) + (1/9-1/11) + ... (1)$$

$$\pi/4 = 1-(1/3-1/5) - (1/7-1/9) - (1/11-1/13)... (2)$$

Các số hạng trong dấu ngoặc của (1) và (2) đều dương, vì vậy nếu lấy một *số chẵn* số hạng của chuỗi Lepnitx theo 91) ta có *giá trị gần đúng thiếu* của π, còn nếu lấy một *số lẻ* số hạng của chuỗi Lepnitx thì theo (2), ta có *giá trị gần đúng thừa* của π. Việc tính toán trở nên dễ dàng hơn rất nhiều , mặc dù để có được 3 chữ số chính xác của π thì phải tính tổng ít nhất 50 số hạng đầu của chuỗi, còn để có 4 chữ số chính xác của π thì phải cộng khoảng 300 số hạng đầu của chuỗi !

Avram Sharp nhận thấy rằng nếu lấy $x = \sqrt{3}/3$ thì có $\pi/6 = \sqrt{3}/3\,(1 - 1/9 + 1/45 - 1/289 + 1/729 - 1/2673 + ...)$ và tổng sáu số hạng đầu tiên của chuỗi đã cho giá trị của π với sai số nhỏ hơn 0,0005.

Nhà toán học vĩ đại *Euler* (1701-1783) cũng quan tâm đến việc tính số π. Ông sử dụng hệ thức và vạch ra rằng kết quả trước đó của *Lanhi*, cho 128 chữ số của π, đã sai ở chữ số thứ 113.

$$\pi/4 = \text{arctg}1 = \text{arctg}1/2 + \text{arctg}1/3$$

*(Xem tiếp trang 10)*

# TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT CỦA ĐA THỨC HAI BIẾN BẬC HAI

TRẦN VĂN VUÔNG
(*Hà Nội*)

**Định nghĩa 1.** Biểu thức

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + g \quad (1)$$

trong đó $a, b, c, d, e, g$ là những hằng số mà $a, b, c$ không đồng thời bằng 0, còn $x, y$ là những biến số, được gọi là *đa thức hai biến bậc hai*. Tam thức bậc hai của một biến là trường hợp riêng của *đa thức hai biến bậc hai*.

Dưới đây ta quy ước gọi tắt đa thức hai biến bậc hai là đa thức.

**Định nghĩa 2.** Số $M$ được gọi là *giá trị lớn nhất* của đa thức $f(x, y)$ nếu có cặp giá trị $x_1, y_1$ sao cho với mọi cặp giá trị $x, y$ ta đều có

$$f(x, y) \le f(x_1, y_1) = M$$

Khi đó ta kí hiệu $M = \max f(x, y)$

Số $m$ được gọi là *giá trị nhỏ nhất* của đa thức $f(x, y)$ nếu có cặp giá trị $x_2, y_2$ sao cho với mọi cặp giá trị $x, y$ ta đều có $f(x, y) \ge f(x_2, y_2) = m$

Khi đó ta kí hiệu $m = \min f(x, y)$

**Mệnh đề 1.** *Nếu $f(x, y)$ là đa thức dạng (1) thì với mọi cặp giá trị $x_o, y_o$ ta đều có*

$$f(x, y) - f(x_o, y_o = a(x-x_o)^2 + b(x-x_o)(y-y_o) +$$
$$+ c(y-y_o)^2 + (2ax_o+by_o+d)x + (bx_o + 2cy_o+e)y.$$

Xin dành cho bạn đọc tự chứng minh mệnh đề này.

Đặt $\Delta = b^2-4ac$. Ba trường hợp có thể xảy ra.

*Trường hợp 1:* $\Delta > 0$.

Khi đó hệ phương trình

$$\begin{cases} 2ax + by + d = 0 \\ bx + 2cy + e = 0 \end{cases} \quad (2)$$

có nghiệm duy nhất

$$x_o = \frac{2cd - bc}{\Delta}, \quad y_o = \frac{2ae - bd}{\Delta} \quad (3)$$

Với cặp giá trị $x_o, y_o$ ta có

$$f(x_o, y_o) = g + \frac{ae^2 - bde + cd^2}{\Delta}$$

và $f(x, y) - f(x_o, y_o) =$

$$= a(x-x_o)^2 + b(x-x_o)(y-y_o) + c(y-y_o)^2 \quad (4)$$

Nếu $a \ne 0$ thì vì $\Delta > 0$ nên phương trình

$$at^2 + bt + c = 0$$

có hai nghiệm phân biệt. Gọi hai nghiệm đó là $t_1, t_2$ thì $at^2 + bt + c = a(t - t_1)(t - t_2)$ nên

$f(x, y) - f(x_o, y_o) =$

$= a[x - x_o - t_1(y-y_o)][x - x_o - t_2(y-y_o)]$.

Nếu $A$ là số bất kì cho trước thì khi chọn

$$x = x_o + \frac{Aat_1 - t_2}{a(t_1-t_2)}; \qquad y = y_o + \frac{Aa - 1}{a(t_1 - t_2)}$$

ta có ngay $f(x, y) - f(x_o, y_o) = A$.

Nếu $a$=0 thì vì $\Delta = b^2-4ac=b^2 > 0$ nên $b\ne0$ và $f(x, y) - f(x_o, y_o) = (y - y_o)[b(x - x_o) + c(y - y_o)]$.

Nếu $A$ là số bất kì cho trước thì khi chọn

$$x = x_o + \frac{A - c}{b}$$
$$y = y_o + 1,$$

ta có ngay $f(x, y) - f(x_o, y_o) = A$.

Như vậy, ta đã chứng minh được :

**Mệnh đề 2.** *Nếu $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ thì đa thức $f(xm, y)$ dạng (1) không có $\max f(x, y)$ và cũng không có $\min f(x, y)$.*

*Trường hợp 2 :* $\Delta < 0$.

Khi đó hệ phương trình (2) vẫn có nghiệm duy nhất (3) và với cặp giá trị $x_o, y_o$ đó ta vẫn có (4).

Vì $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ nên $4ac > b^2 \ge 0$ và do đó, $a, c$ cùng dấu.

- Nếu $a, c$ cùng dương thì

$f(x, y) - f(x_o, y_o) =$

$$= \left[\sqrt{a}(x - x_o) + \frac{b}{2\sqrt{a}}(y - y_o)\right]^2 - \frac{\Delta}{4a}(y - y_o)^2 \ge 0$$

với mọi cặp giá trị $x, y$; dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = x_o$ và $y = y_o$. Do đó $\min f(x, y) = f(x_o, y_o)$.

- Nếu $a, c$ cùng âm thì

$f(x, y) - f(x_o, y_o) =$

$$= -\left[\sqrt{-a}(x-x_o) - \frac{b}{2\sqrt{-a}}(y-y_o)\right]^2 - \frac{\Delta}{4a}(y-y_o)^2 \le 0$$

với mọi cặp giá trị $x, y$; dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = x_o$ và $y = y_o$. Do đó $\max f(x, y) = f(x_o, y_o)$

Như vậy, ta đã chứng minh được :

**Mệnh đề 3.** *Nếu $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ thì đa thức $f(x, y)$ dạng (1) có* $\min f(x, y) = g + \dfrac{ae^2 - bde + dd^2}{\Delta}$ *khi $a$, $c$ cùng dương,* $\max f(x, y) = g + \dfrac{ae^2 - bde + cd^2}{\Delta}$ *khi $a$, $c$ cùng âm.*

Chú ý rằng $\min f(x, y)$ và $\max f(x, y)$ là giá trị $f(x_0, y_0)$, trong đó $x_0$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình (2).

*Trường hợp 3 : $\Delta = 0$.*

- Nếu $b \neq 0$ thì $4ac = b^2 > 0$ nên $a$, $c$ cùng dấu và

$$f(x, y) = a\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2 + d\left(x + \frac{b}{2a}y\right) + \frac{2ae - bd}{2a}y + g.$$

+ Nếu $2ac = bd$ thì $f(x, y)$ là tam thức bậc hai của một biến $t = x + \dfrac{b}{2a}y$ và

$$\min f(x, y) = f\left(x_1, -\frac{2ax_1 + d}{b}\right) = g - \frac{d^2}{4a} \text{ khi } a > 0,$$

$$\max f(x, y) = f\left(x_1, -\frac{2ax_1 + d}{b}\right) = g - \frac{d^2}{4a} \text{ khi } a < 0,$$

trong đó $x_1$ là giá trị tùy ý.

Chú ý rằng vì $4ac = b^2 > 0$ nên điều kiện $2ae = bd$ tương đương với điều kiện $2cd = be$ và ta có $g - \dfrac{d^2}{4a} = g - \dfrac{e^2}{4c}$.

+ Nếu $2ac \neq bd$ (tương đương với $2cd \neq be$) thì $f(x, y)$ là tổng của một tam thức bậc hai của một biến $t = x + \dfrac{b}{2a}y$ và một đơn thức bậc nhất của biến $y$ nên không có $\max f(x, y)$ và không có $\min f(x, y)$.

- nếu $b = 0$ thì $a = 0 \neq c$ hoặc $a \neq 0 = c$ (do giả thiết $b^2 = 4ac$ mà $a$, $b$, $c$ không đồng thời bằng 0).

+ Nếu $a = 0 \neq c$ thì

$$f(x, y) = cy^2 + dx + ey + g = c\left(y + \frac{e}{2c}\right)^2 + g - \frac{e^2}{4c} + dx$$

nên $\min f(x, y) = f\left(x_1, -\dfrac{e}{2c}\right) = g - \dfrac{e^2}{4c}$ khi $c > 0$, $d = 0$,

$\max f(x, y) = f\left(x_1, -\dfrac{e}{2c}\right) = g - \dfrac{e^2}{4c}$ khi $c < 0$, $d = 0$,

trong đó $x_1$ là giá trị tùy ý; không có $\max f(x, y)$, không có $\min f(x, y)$ khi $cd \neq 0$.

+ Nếu $a \neq 0 = c$ thì

$$f(x, y) = ax^2 + dx + ey + g = a\left(x + \frac{d}{2a}\right)^2 + g - \frac{d^2}{4a} + ey$$

nên $\min f(x, y) = f\left(-\dfrac{d}{2a}, y_1\right) = g - \dfrac{d^2}{4a}$ khi $a > 0$, $e = 0$.

$\max f(x, y) = f\left(-\dfrac{d}{2a}, y_1\right) = g - \dfrac{d^2}{4a}$ khi $a < 0$, $e = 0$,

trong đó $y_1$ là giá trị tùy ý; không có $\max f(x, y)$, không có $\min f(x, y)$ khi $ae \neq 0$.

Như vậy, ta đã chứng minh được :

**Mệnh đề 4.** *Nếu $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ thì đa thức $f(x, y)$ dạng (1) có*

*$\min f(x, y) = g - \dfrac{d^2}{4a}$ khi $a > 0$, $2ae = bd$,*

*$\max f(x, y) = g - \dfrac{d^2}{4a}$ khi $a < 0$, $2ae = bd$*

*$\min f(x, y) = g - \dfrac{e^2}{4c}$ khi $c > 0$, $2cd = be$,*

*$\max f(x, y) = g - \dfrac{e^2}{4c}$ khi $c < 0$, $2cd = be$,*

*không có $\max f(x, y)$, không có $\min f(x, y)$ khi $2ae \neq bd$ hoặc khi $2cd \neq be$.*

Ta hãy sử dụng các mệnh đề trên vào việc giải các bài toán sau đây.

**Bài toán 1.** Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của đa thức

$$f(x, y) = 2x^2 - 3xy + y^2 + 5x - 7y + 1$$

Vì $\Delta = (-3)^2 - 4.2.1 = 1 > 0$ nên không có $\max f(x, y)$, không có $\min f(x, y)$.

**Bài toán 2.** Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của đa thức

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x + 8y - 7.$$

Vì $\Delta = (-2)^2 - 4.1.3 = -8$ và $a = 1 > 0$ nên

$$\min f(x, y) = f(1, -1) = -13.$$

**Bài toán 3.** Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của đa thức

$$f(x, y) = -4x^2 + 12xy - 9y^2 - 4x + 6y + 8.$$

*(Xem tiếp trang 18)*


## BÀN TRÒN ĐỌC THƠ

*Bàn tròn đọc thơ xin giới thiệu một sáng tác của bạn Thái Doãn Ân, 11A chuyên Toán - Tin, ĐHSP Vinh.*

### ĐỒ THỊ HÌNH SIN

*Kính tặng các thầy cô dạy toán*

*Em hiểu ra rồi*
*Đồ thị hình sin*
*Những đợt sóng đẩy vào trí nhớ.*
*Những đợt sóng dâng vào lòng thế hệ*

*Em mãi mê nhìn*
*Những con sóng nhỏ*
*Xô đẩy vào bờ nỗi nhớ*
*Của những cánh buồm chông chênh*
*Xô vào tuổi bé nhỏ*
*Những giọt chiều về buồn tênh*

*Biển có bao giờ cam chịu lặng yên*
*Cũng như cuộc đời*
*Có bao giờ đường thẳng*
*Những đồ thị hình sin đưa cuộc sống*
*Dâng trào hi vọng*
*Rồi vội trả về với bình lặng tuổi thơ.*

*Vẫn biết cuộc sống này là đồ thị hình sin*
*Nhưng sao biết chu kì của nó.*
*Bước lên đường đời*
*Em sẽ chẳng thấy mình bỡ ngỡ.*
*Vì cuộc đời ...*
*hình sin.*

*****

## TỪ ĐIỂN VUI

Xin hoan nghênh sự tham gia tích cực của các "nhà từ điển học". Câu lạc bộ xin ghi nhận định nghĩa **phân số** của các bạn dưới đây :

**1.** Phân số là tình cảm thắm thiết : MẸ cõng CON.

BÌNH THỊ UYÊN UYÊN
*(Gia An Đông - Hoài Châu Bắc, Hoài Nhơn, Bình Định)*

**2.** Phân số là chàng hoàng tử không nguyên kết hôn cùng công chúa số nguyên và tạo nên vương quốc hữu tỉ giàu mạnh.

TẠ NGỌC BÍCH
*(10A9, Diễn Châu, Nghệ An)*

**3.** Phân số là tình mẫu tử. Người mẹ bao giờ cũng đặt đứa con của mình lên trên hết.

NGUYỄN KHÁNH HÒA
*(9A1, THCS Chu Văn An, Thái Nguyên)*

**4.** Phân số là loại số có tài biến hóa che mắt mọi người.

NGUYỄN THÀNH TRUNG
*(171, Lí Tự Trọng, Hà Tĩnh)*

**5.** Phân số là gia đình nề nếp, gia giáo luôn biết phân biệt trên dưới rõ ràng.

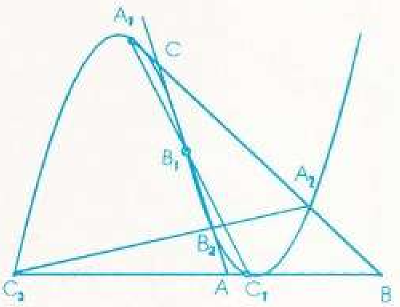
NGÔ VĂN ĐANG
*(HT: 3NB-14, Phú Thọ)*

Còn bây giờ... xin các bạn "xắn tay" cho các định nghĩa về ... **đường tròn** ! **LTN**

### ĐÍNH CHÍNH

• Trong số 7(253)/1998, trang 23, cột trái: Địa chỉ của tác giả xin sửa lại là (*PTTH Lê Quý Đôn, Đà Nẵng*).

- Trang 24. Cột trái, hình vẽ trên xin sửa lại như sau




• Trong số 6(252)/1998, Bìa 4, cột trái, dòng 15, 16 (trên xuống) xin sửa lại là :

- Vẽ đường tròn ($F$; $FA$): đường tròn này cắt đường tròn ($A$; $AB$) tại điểm $H$. - Vẽ đường tròn ($H$; $HA$), đường tròn này cắt đường thẳng $AB$ tại điểm thứ hai là $I$.

Thành thật xin lỗi tác giả và bạn đọc.

**TH & TT**


## Giải đáp bài

## CÂN HAI LẦN

Ta kí hiệu quả bóng xác định là thật là ⊗ , còn 4 quả bóng còn lại là $O_1$, $O_2$, $O_3$, $O_4$.

*Lần cân thứ nhất* : Ta cho lên đĩa cân *A* quả ⊗ và quả $O_1$. Đĩa cân ở bên B quả $O_2$ và $O_3$. Có 3 khả năng xảy ra :


- Cân thăng bằng thì $O_4$ là quả giả. Lần cân thứ hai ta chỉ cần cân $O_4$ với ⊗ sẽ xác định được nó nặng hay nhẹ hơn quả thật.

- Bên đĩa *A* nặng hơn đĩa *B* thì hoặc là $O_1$ nặng hơn hoặc là một trong 2 quả $O_2$ và $O_3$ nhẹ hơn quả thật. Khi đó lần cân thứ hai ta cân $O_2$ với $O_3$ quả nào nhẹ hơn thì quả đó là giả. Nếu cân thăng bằng thì quả $O_1$ sẽ là quả giả và nặng hơn quả thật.


- Bên đĩa *B* nặng hơn bên đĩa *A* thì hoặc là $O_1$ nhẹ hơn hoặc $O_2$ hay $O_3$ nặng hơn quả thật. Khi đó lần cân thứ hai ta cân $O_2$ với $O_3$ quả nào nặng hơn thì là quả giả. Nếu cân thăng bằng thì quả $O_1$ là quả giả và nhẹ hơn các quả thật (theo *Lê Đức Phương*, 7H, THCS Trưng Vương, Hà Nội)


**Nhận xét.** Có rất nhiều đáp án gửi tới tòa soạn. Hầu hết là đáp án đúng.

BÌNH PHƯƠNG

## CHỈ MỘT LẦN CÂN

Có 5 hòm chứa các đồng tiền, trong đó có thể có một số hòm chứa toàn các đồng tiền giả. Trọng lượng của các đồng tiền thật là 10 gam và giả là 11 gam. Bằng cách nào để với một chiếc cân bàn chính xác mà chỉ cần cân một lần có thể phát hiện những hòm nào chứa các đồng tiền giả.

NGUYỄN CÔNG SỨ


**? Hỏi:** *Trong số 251 (5/1998) có đăng đề thi tuyển sinh vào lớp 10 của trường chuyên Lê Hồng Phong (TP Hồ Chí Minh), chúng em có cảm nhận câu 2b và câu 5 phải chăng còn thiếu sót điều gì.*

*(Tập thể học sinh đội tuyển 9 THCS Kim Long, Huế)*

**Trả lời:** Câu 5 còn in thiếu câu 5a :"Chứng minh hai tam giác *BIC* và *AOH* đồng dạng với nhau". Riêng câu 2b... chẳng hiểu các em băn khoăn về điều gì ? Nhớ nói rõ hơn để Tòa soạn nghiên cứu nhé !

**? Hỏi:** *Khi giải câu $III_2$ Đề thi tuyển sinh môn Toán năm 1997 của Học viện QHQT (số 252) đáp án có đặt $x = cotg\frac{A}{2}$ ; $y = cotg\frac{B}{2}$; $cotg\frac{C}{2}$ thì $x, y, z > 0$. Tại sao lại có $x, y, z > 0$ ? Nếu lời giải sai thì Tòa soạn nên cho lời giải khác !*

TỐNG MẠNH TOÀN

*($11B_1$, PTTH Bỉm Sơn, Thanh Hóa)*

**Trả lời:** Vì *A, B, C* là ba góc của một tam giác nên $A, B, C \in (0; \pi) \Rightarrow \frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$ $cotg\frac{A}{2}, cotg\frac{B}{2}, cotg\frac{C}{2} > 0 \Rightarrow x, y, z > 0$. Chính nhờ điều kiện này mà đoạn cuối của lời giải mới thực hiện được.

**? Hỏi:** *Em thấy $(-2)^3 = -8$, vậy $log_{-2}(-8) = 3$. Theo Tòa soạn thì như thế có được không ?*

NGUYỄN QUANG NGỌC

PTTH Nguyễn Công Trứ, Nam Định

**Trả lời:** Trong chương trình toán lớp 11, sau khi khẳng định phương trình $a^x = N$ với $0 < a \neq 1$ và $N > 0$ luôn có duy nhất một nghiệm thì người ta gọi nghiệm đó là logarit cơ số *a* của *N* (kí hiệu là $\log_a N$). Bởi vậy **không có** khái niệm logarit với cơ số $a < 0$ và của số $N < 0$. Do đó, em không thể viết $\log_{-2}(-8) = 3$ được.

L.T.N

**ISSN : 0866-0853**
**Chỉ số : 12884**
**Mã số : 8BT56M8**

Chế bản tại Tòa soạn.
In tại Nhà máy in Diên Hồng, 57 Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 8 năm 1998

**Giá : 3.000đ**
**Ba nghìn đồng**