NĂM THỨ
MƯỜI CHÍN
ISSN 1859-2740

Toán tuổi thơ 2

1/9
185
+
186
NĂM HỌC 2018 - 2019

TRUNG HỌC CƠ SỞ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

CHÚC THẦY CÔ VÀ CÁC BẠN HỌC SINH MỘT NĂM HỌC THÀNH CÔNG !

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP MỚI CỦA TẠP CHÍ TOÁN TUỔI THƠ 2

(Theo Quyết định số 520/QĐ-NXBGDVN ngày 05/9/2018 của Chủ tịch Hội đồng thành viên Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam)


TS. Trần Quang Vinh


ThS. Nguyễn Ngọc Hân


Nhà giáo Trần Thị Kim Cương


NGND. Vũ Hữu Bình


TS. Nguyễn Minh Đức


ThS. Đặng Hiệp Giang


TS. Nguyễn Minh Hà


PTS. TS. Vũ Đình Hòa


ThS. Trần Quang Hùng


TS. Lê Thống Nhất


PGS. TS. Tạ Duy Phượng


ThS. Phạm Đức Tài


NGND. PGS. TS. Tôn Thân


PGS. TS. Lê Anh Vinh

Toán tuổi thơ 2 TRUNG HỌC CƠ SỞ

Children's Fun Maths Journal

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TÒA SOẠN

Tầng 2, nhà A, số 187B Giảng Võ, phường Cát Linh, quận Đống Đa, Hà Nội
Điện thoại: 024.35682701 - Fax: 024.35682702
Email (Ban biên tập): bbttoantuoitho@gmail.com
Email (Trị sự - Phát hành): tapchitoantuoitho@gmail.com
Website: http://www.toantuoitho.vn

ĐỐI TÁC ĐẠI DIỆN PHÍA NAM

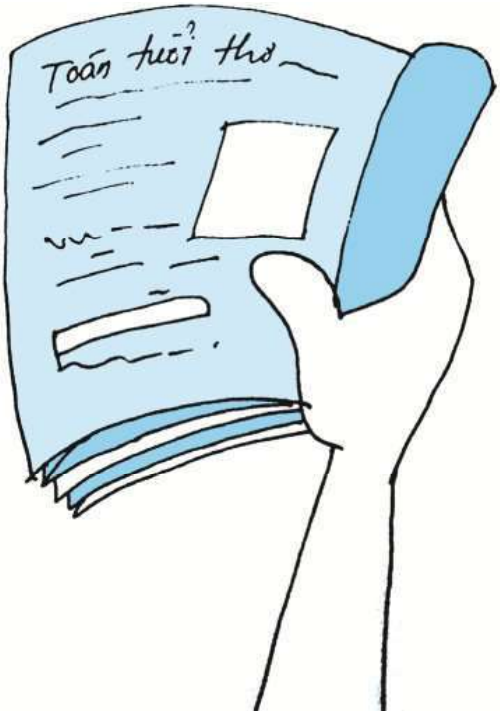
Công ty cổ phần Đầu tư và Phát triển Giáo dục Phương Nam
231 Nguyễn Văn Cừ, Q.5, TP. Hồ Chí Minh
ĐT: 028.38357197, Email: thitruong@phuongnam.edu.vn

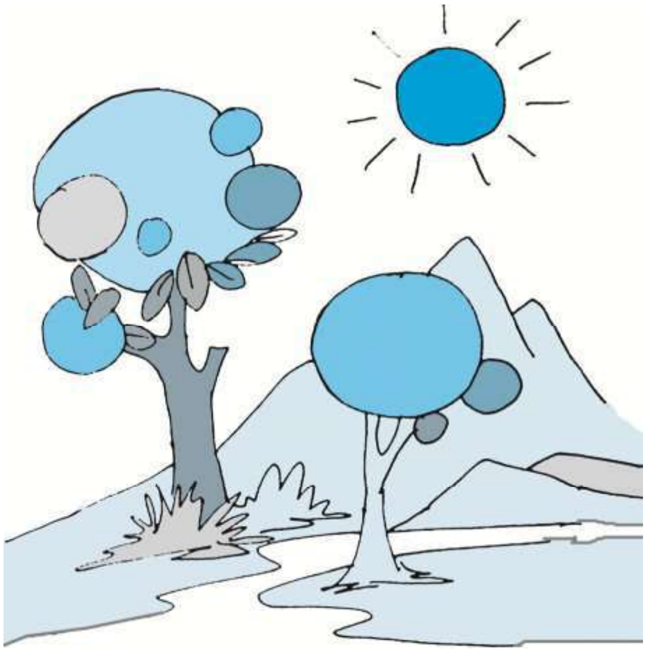
Trị sự - Phát hành:
TRỊNH THỊ TUYẾT TRANG,
NGUYỄN THỊ HUYỀN THANH, NGUYỄN THỊ HẢI ANH
Biên tập - Chế bản: **VŨ THỊ MAI, ĐỖ TRUNG KIÊN**
Mĩ thuật: **TRẦN NGỌC TRƯỜNG**

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Thành viên NXBGD Việt Nam:
NGUYỄN ĐỨC THÁI
Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam:
HOÀNG LÊ BÁCH
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NXBGD Việt Nam:
PHAN XUÂN THÀNH

TRONG SỐ NÀY





Ảnh bìa 1: *Các vị đại biểu chụp ảnh với các thí sinh đoạt Huy chương Vàng cuộc thi Câu lạc bộ Toán Tuổi thơ toàn quốc 2018*

LỄ KHAI MẠC
CUỘC THI CÂU LẠC BỘ TOÁN TUỔI THƠ TOÀN QUỐC 2018

TS. Phan Xuân Thành, Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NXBGD Việt Nam

Ông Lê Quang Minh, Chủ tịch Ủy ban nhân dân thành phố Lào Cai

Ông Nguyễn Ngọc Hân, Trưởng Ban tổ chức cuộc thi Câu lạc bộ Toán Tuổi thơ toàn quốc 2018

Ông Hoàng Mạnh Ánh, Phó Tổng Giám đốc Công ty cổ phần Văn phòng phẩm Hồng Hà

Tiết mục văn nghệ chào mừng các đoàn về dự thi

Các đại biểu dự Lễ khai mạc

LỄ KHAI MẠC CUỘC THI CÂU LẠC BỘ TOÁN TUỔI THƠ TOÀN QUỐC 2018

Các đoàn diễu hành qua sân khấu

Ban tổ chức trao Kỉ niệm chương
cho đơn vị đăng cai

Đại diện nhà tài trợ chính nhận Kỉ niệm chương
của Ban tổ chức

Đơn vị đăng cai tặng quà cho các đoàn về tham dự
cuộc thi

Các đoàn tham dự nhận cờ lưu niệm

Ban tổ chức trao thưởng cuộc thi
Giải toán qua thư năm học 2017 - 2018

PHẦN THI CÁ NHÂN VÀ TIẾP SỨC TOÁN

Các thí sinh tại trường thi - trường tiểu học Bắc Cường

Các vị đại biểu, Trưởng đoàn, Lãnh đội, Giám khảo, Giám thị

Các thí sinh háo hức và hồi hộp chờ đến phần thi cá nhân

Các thí sinh đang làm bài thi cá nhân

Cảm xúc vui buồn sau phần thi cá nhân

Phần thi Tiếp sức Toán đầy căng thẳng

Thi Tiếp sức Toán

PHẦN THI DU LỊCH TOÁN HỌC

Các đội trưởng bốc thăm xem đội mình mang tên nhà toán học nào

Đội trưởng nộp kết quả tại thành phố nhận đề

Cả đội cùng trao đổi để tìm kết quả của bài toán

LỄ BẾ MẠC CUỘC THI CÂU LẠC BỘ TTT TOÀN QUỐC 2018

Văn nghệ mừng thành công cuộc thi
Câu lạc bộ Toán Tuổi thơ toàn quốc 2018

Trao giải phần thi cá nhân

Trao giải phần thi Tiếp sức Toán và Du lịch Toán học

Trao giải cho ba thí sinh
giải đúng liên tiếp nhiều câu nhất tính từ câu 1

Trao giải cho các thí sinh
đạt điểm cao nhất

BÀI PHÁT BIỂU TẠI LỄ KHAI MẠC CỦA TRƯỞNG BAN TỔ CHỨC

CUỘC THI CÂU LẠC BỘ TOÁN TUỔI THƠ TOÀN QUỐC 2018

Kính thưa các vị đại biểu, các vị khách quý, các vị trưởng đoàn, lãnh đội, các em học sinh, các bậc phụ huynh và các phóng viên báo, đài.

Tờ Tạp chí Toán Tuổi thơ đầu tiên ra mắt độc giả năm 2000. Khi đó, mới chỉ là đặc san của Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ. Năm 2002, tạp chí Toán Tuổi thơ chính thức được thành lập. Ngay từ khi mới ra đời, Tạp chí Toán Tuổi thơ đã nhanh chóng được các thầy cô giáo, các em học sinh ở tiểu học và trung học cơ sở yêu mến. Từ năm 2005 đến năm 2014, Tạp chí đã phối hợp với các Sở Giáo dục và Đào tạo tổ chức được 3 lần Giao lưu Toán Tuổi thơ tại Nam Định, Quảng Ninh, Hải Phòng, 7 lần Olympic Toán Tuổi thơ toàn quốc tại Hà Nội, Thừa Thiên - Huế, Long An, Lào Cai, Cà Mau, Vĩnh Phúc và Đắk Lắk với 53 tỉnh, thành tham dự. Rất nhiều tỉnh, thành đã tổ chức các kì thi toán cấp huyện, cấp tỉnh theo mô hình tổ chức của Giao lưu Toán Tuổi thơ và Olympic Toán Tuổi thơ. Chúng tôi tự hào vì đã tạo ra một sân chơi trí tuệ, lành mạnh, bổ ích cho các em học sinh và các thầy cô giáo.

Từ năm học 2015-2016, tạp chí phối hợp với các Sở Giáo dục và Đào tạo tổ chức Câu lạc bộ Toán Tuổi thơ trong các nhà trường để tạo phong trào dạy và học toán bằng tiếng Anh. Nhiều địa phương đã tổ chức Cuộc thi Câu lạc bộ Toán Tuổi thơ cấp huyện và cấp tỉnh. Tháng 6.2016, Tạp chí đã tổ chức thành công cuộc thi Câu lạc bộ Toán Tuổi thơ toàn quốc tại thủ đô Hà Nội với 24 tỉnh thành trong cả nước tham dự. Tháng 6.2017, Cuộc thi Câu lạc bộ Toán Tuổi thơ toàn quốc được tổ chức tại tỉnh Trà Vinh với sự góp mặt của 24 tỉnh thành đến từ ba miền Bắc, Trung, Nam.

Tiếp nối thành công đó, năm nay Cuộc thi Câu lạc bộ Toán Tuổi thơ toàn quốc trở lại tổ chức tại thành phố Lào Cai xinh đẹp và mến khách. Lào Cai là tỉnh có ngành giáo dục phát triển mạnh, đặc biệt rất thành công trong việc tổ chức các Câu lạc bộ toán. Năm nay có 294 thí sinh từ 20 tỉnh thành trong cả nước cùng tham dự. Đó là các tỉnh: Bắc Giang, Đà Nẵng, Hà Nam, Hà Nội, Hải Dương, Hòa Bình, Hưng Yên, Kiên Giang, Lạng Sơn, Lào Cai, Nam Định, Ninh Bình, Phú Thọ, TP. Hồ Chí Minh, Sơn La, Thái Bình, Thanh Hóa, Trà Vinh, Tuyên Quang và Vĩnh Phúc. Tính đến nay đã có 60/63 tỉnh, thành tham dự các cuộc thi toàn quốc do Toán Tuổi thơ tổ chức, điều đó cho thấy sức hấp dẫn và uy tín của cuộc thi.

Cuộc thi năm nay cả ở Tiểu học và Trung học cơ sở đều diễn ra các phần thi: Cá nhân, Tiếp sức Toán và Du lịch Toán học. Đề thi ở tất cả các phần thi là toán bằng tiếng Anh, các thí sinh không sử dụng máy tính bỏ túi khi làm bài.

- Ở phần thi cá nhân: Mỗi thí sinh cần thể hiện được sự nhanh nhẹn và chính xác khi làm bài thi gồm 16 câu trong thời gian 30 phút, trong đó 15 câu đầu chỉ ghi đáp số, câu 16 trình bày lời giải bằng tiếng Anh.

- Trong phần thi Tiếp sức Toán: Các em học sinh trong các đội được tham gia lần lượt giải 6 bài toán trong thời gian không quá 30 phút giống như thi chạy tiếp sức.

- Mỗi cấp học có 8 đội xuất sắc nhất trong phần thi Tiếp sức Toán được tham gia phần thi Du lịch Toán học. Ở phần thi này cả đội cần thể hiện khả năng hợp tác nhóm để cùng giải từng bài toán cho đến khi tìm ra kết quả đúng của bài đó thì mới có tấm vé đến du lịch ở thành phố tiếp theo. Sẽ thật tuyệt vời nếu cả đội được đi du lịch ở cả 6 thành phố.

Hi vọng cùng với việc được gặp gỡ, học hỏi qua cách thi mới lạ, hấp dẫn, các bạn học sinh đến từ 20 tỉnh, thành trong cả nước, được khẳng định mình và học hỏi để cùng tiến bộ. Các bạn nhỏ từ miền Trung, miền Nam sẽ được tham quan, trải nghiệm đầy thú vị các danh lam thắng cảnh của miền núi phía Bắc. Cuộc thi chắc chắn sẽ là kỉ niệm đẹp với tất cả mọi người đặc biệt là các em học sinh. Đó chính là tâm huyết, là thành công chung của tất cả chúng ta.

Thay mặt ban lãnh đạo tạp chí Toán Tuổi thơ, tôi xin cảm ơn lãnh đạo Bộ Giáo dục và Đào tạo, NXBGD Việt Nam, UBND tỉnh Lào Cai, UBND TP. Lào Cai, Sở GD - ĐT Lào Cai và Phòng GD - ĐT thành phố Lào Cai đã ủng hộ giúp đỡ cho Cuộc thi Câu lạc bộ Toán Tuổi thơ toàn quốc 2018; xin cảm ơn Công ty cổ phần Văn phòng phẩm Hồng Hà - nhà tài trợ chính đã liên tục tài trợ cho Câu lạc bộ Toán Tuổi thơ toàn quốc trong nhiều năm qua; cảm ơn các nhà tài trợ; cảm ơn các cơ quan thông tấn báo chí đã đến dự và đưa tin...

Xin chúc sức khỏe các vị đại biểu, chúc các bạn học sinh đạt được thành tích cao.

BÀI PHÁT BIỂU TẠI LỄ BẾ MẠC CỦA TRƯỞNG BAN TỔ CHỨC

CUỘC THI CÂU LẠC BỘ TOÁN TUỔI THƠ TOÀN QUỐC 2018

Kính thưa các vị đại biểu, các vị khách quý, các vị trưởng đoàn, lãnh đội, các em học sinh, các bậc phụ huynh và các phóng viên báo, đài.

Những ngày qua, tại thành phố Lào Cai xinh đẹp và mến khách, 294 em học sinh đến từ 20 tỉnh, thành trong cả nước đã tụ hội về đây để tham dự một hoạt động thường niên, Cuộc thi Câu lạc bộ Toán Tuổi thơ toàn quốc mà các em đã mong chờ. Tham gia cuộc thi, các em học sinh được khẳng định mình, được giao lưu, học hỏi và tham gia các phần thi mới lạ, đề thi toán bằng tiếng Anh tiệm cận với đề thi của các nước và khu vực, giúp các em dần làm quen và từng bước tập dượt hội nhập quốc tế.

Sự thành công của cuộc thi là kết quả của công tác chuẩn bị hết sức nghiêm túc, tỉ mỉ và sự tham gia nhiệt tình, chăm lo chu đáo cho các em học sinh của các vị trưởng đoàn, lãnh đội, các vị phụ huynh. Sự nhiệt tình chu đáo và mến khách của đơn vị đăng cai, sự đồng hành của nhà tài trợ chính - Công ty cổ phần Văn phòng phẩm Hồng Hà.

Thành công lớn nhất của cuộc thi là khơi dậy phong trào dạy và học toán, đặc biệt là dạy toán bằng tiếng Anh ở các Câu lạc bộ toán trong các nhà trường. Thay mặt Ban tổ chức tôi xin cảm ơn Bộ Giáo dục và Đào tạo, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, UBND thành phố Lào Cai, Sở Giáo dục và Đào tạo Lào Cai, Phòng Giáo dục và Đào tạo thành phố, Ban lãnh đạo và cán bộ công nhân viên trường tiểu học Bắc Cường, cảm ơn 50 bạn tình nguyện viên đã nhiệt tình giúp đỡ Ban tổ chức. Đặc biệt xin cảm ơn Công ty cổ phần VPP Hồng Hà, nhà tài trợ chính của cuộc thi trong nhiều năm qua, cảm ơn các nhà tài trợ. Cảm ơn các phóng viên VTV, các cơ quan báo chí truyền thông đã đến dự và đưa tin. Cảm ơn các Sở Giáo dục và Đào tạo của 20 tỉnh thành đã cử đoàn tham dự, cảm ơn các trưởng đoàn, lãnh đội, các em học sinh và các bậc phụ huynh. Tất cả đã chung tay làm nên cuộc thi Câu lạc bộ Toán Tuổi thơ toàn quốc có nhiều ý nghĩa và trở thành cuộc thi uy tín được tổ chức thường niên.

Dù kết quả cuộc thi như thế nào, Ban tổ chức Cuộc thi Câu lạc bộ Toán Tuổi thơ toàn quốc 2018 tin rằng các quý vị đại biểu và các em học sinh luôn nhớ về những ngày đầu tháng 6 tại thành phố Lào Cai với phong cảnh hùng vĩ và thơ mộng này. Thời gian diễn ra cuộc thi tuy ngắn ngủi nhưng có đủ mọi cung bậc cảm xúc, hồi hộp có, hạnh phúc có, có lúc lại vui buồn đan xen.

Câu lạc bộ Toán Tuổi thơ toàn quốc năm nay có nhiều nét ấn tượng: Đề thi cá nhân ở cấp Tiểu học được đánh giá là khó hơn năm trước, một số bài toán trong các đề thi được đánh giá là khá hay và đòi hỏi các thí sinh cần có kiến thức tốt và khả năng hợp tác nhóm để giải quyết vấn đề. Chúng ta được chứng kiến chiến thuật làm bài của các đội khá khác nhau trong phần thi Tiếp sức Toán. Một số đội làm bài rất nhanh để mong được cộng 1 điểm, một số đội do không kiểm tra kĩ nên đã làm sai nhiều bài. Có đội lại chia thời gian để sử dụng hết 30 phút cho 6 bài toán. Đặc biệt trong phần thi Du lịch Toán học, các thí sinh được tham gia một phần thi tuyệt vời, vừa làm bài vừa di chuyển đến các thành phố trong sân có mái che giữa lúc cơn mưa chưa tạnh. Đến với Cuộc thi, các em đã có một kỉ niệm đẹp của tuổi học trò.

Sau đây là giờ phút mong đợi nhất của các thí sinh. Xin mời MC tiếp tục chương trình.

Xin cảm ơn các vị đại biểu, các vị khách quý, các thầy cô giáo và các em học sinh. Hẹn gặp lại ở cuộc thi Câu lạc bộ Toán Tuổi thơ toàn quốc năm 2019.

THƯ CẢM ƠN

Cuộc thi Câu lạc bộ Toán Tuổi thơ toàn quốc 2018 đã diễn ra trong ba ngày từ 8/6/2018 đến 10/6/2018 tại thành phố Lào Cai, tỉnh Lào Cai với sự tham dự của 28 đoàn gồm 27 đội Tiểu học, 22 đội THCS đến từ 20 tỉnh thành trong cả nước.

Cảm ơn đơn vị đăng cai - UBND thành phố Lào Cai, Sở Giáo dục và Đào tạo Lào Cai, Phòng Giáo dục và Đào tạo thành phố Lào Cai, trường tiểu học Bắc Cường đã tạo điều kiện giúp đỡ để cuộc thi thành công tốt đẹp.

Cảm ơn lãnh đạo nhiều Sở Giáo dục và Đào tạo, lãnh đạo Thành ủy, UBND thành phố Lào Cai, lãnh đạo NXBGDVN và nhiều nhà tài trợ đã dự Lễ Khai mạc và Bế mạc.

Cảm ơn TS. Tạ Ngọc Trí, Phó Vụ Trưởng Vụ Giáo dục Tiểu học, Bộ Giáo dục và Đào tạo đã gửi lẵng hoa chúc mừng Cuộc thi.

Cảm ơn các đồng chí lãnh đạo, chuyên viên các phòng Giáo dục và Đào tạo có đoàn dự thi, các trưởng đoàn, lãnh đội, các thầy cô giáo, các bậc phụ huynh và 294 học sinh đại diện cho các Câu lạc bộ Toán Tuổi thơ ở các tỉnh, thành phố: Bắc Giang; Đà Nẵng; Hà Nam; Hà Nội; Hải Dương; Hòa Bình; Hưng Yên; Kiên Giang; Lạng Sơn; Lào Cai; Nam Định; Ninh Bình; Phú Thọ; TP. Hồ Chí Minh; Sơn La; Thái Bình; Thanh Hóa; Trà Vinh; Tuyên Quang; Vĩnh Phúc đã tham dự Cuộc thi.

Cảm ơn nhà tài trợ chính - Công ty Cổ phần Văn phòng phẩm Hồng Hà và các nhà tài trợ: Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, Nhà xuất bản Giáo dục tại TP. Đà Nẵng; Công ty Cổ phần Đầu tư và phát triển Giáo dục tại TP. Đà Nẵng; Công ty Cổ phần Sách Giáo dục tại TP. Hà Nội; Xí nghiệp Bản đồ 1 - Bộ Quốc phòng, Trung tâm Khoa học tính toán trường Đại học Sư phạm Hà Nội đã góp phần vào thành công của Cuộc thi.

Cảm ơn phóng viên VTV2 Đài truyền hình Việt Nam, báo Giáo dục và Thời đại, các báo đài ở địa phương đã đến dự và đưa tin về Cuộc thi.

Xin cảm ơn tất cả và hẹn gặp lại tại Cuộc thi năm 2019.

TOÁN TUỔI THƠ

CUỘC THI CÂU LẠC BỘ TOÁN TUỔI THƠ TOÀN QUỐC 2018

CHILDREN'S FUN MATHS JOURNAL NATIONAL COMPETITION 2018

ĐỀ THI CÁ NHÂN BẬC TRUNG HỌC CƠ SỞ

SECONDARY SCHOOL INDIVIDUAL PAPER

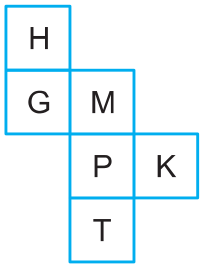
Thời gian làm bài: 30 phút (Duration: 30 minutes)

Đề thi gồm 2 trang

Từ câu 1 đến câu 15 chỉ ghi đáp số, câu 16 viết lời giải đầy đủ vào mặt sau Tờ trả lời.

Question 1. Given x, y, z such that $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{5}$ and $x+3y+6z=82$. Find $M=x+y+z$.

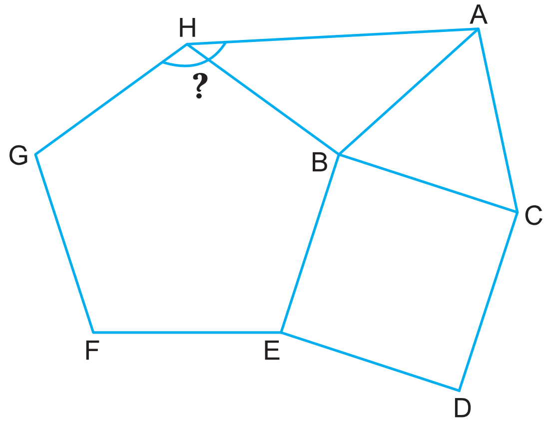
Question 2. The figure is a net of a cube. Which letter is opposite to H ?



Question 3. Find n such that $A=n^3-2n^2+2n-4$ is a prime number.

Question 4. How many integers x that satisfy both inequalities $|x|+5<7$ and $|x-3|>2$?

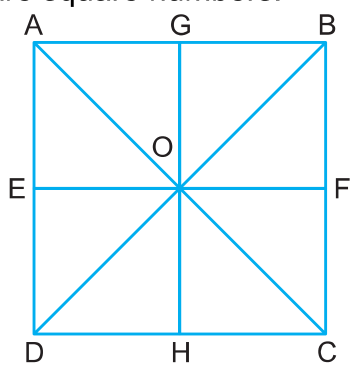
Question 5. Given the figure. ABC is a equilateral triangle, BCDE is a square and BEFGH is a regular pentagon. Find the measure of angle AHG.



Question 6. An bought a book with price of 50 000 VND. He gave the cashier 3 types of bank notes: 2000 VND, 5000 VND and 10 000 VND. The value of these notes is 50 000 VND and there are no more than 10 notes. How many bank notes of 2000 VND are there ?

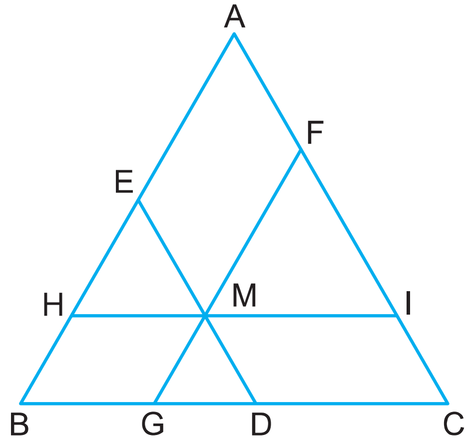
Question 7. Find the positive integer n such that n + 1 and 4n + 29 are square numbers.

Question 8. How many line segments are there in the figure ?

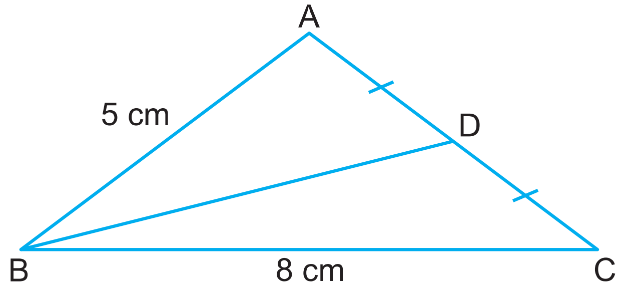


Question 9. Denote: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$. Find n such that in the prime factorisation of n!, the exponent of 2 is 11 and the exponent of 3 is 6.

Question 10. In the figure, ABC is equilateral triangle with side 3 cm. M is a point inside the triangle. Draw DE, FG, HI passing through M such that DE // AC; FG // AB; HI // BC (H, E $\in$ AB; G, D $\in$ BC; I, F $\in$ AC). Find DE + FG + HI.

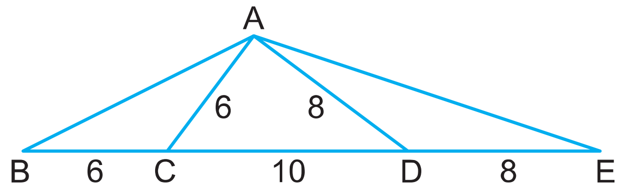


Question 11. In the figure, triangle ABC has AB = AC = 5 cm; BC = 8 cm. Find the length of the median BD of triangle ABC.



Question 12. Find the sum of all roots of the equation: $(3x-2)|x+4| = x^2 + 8x + 16$.

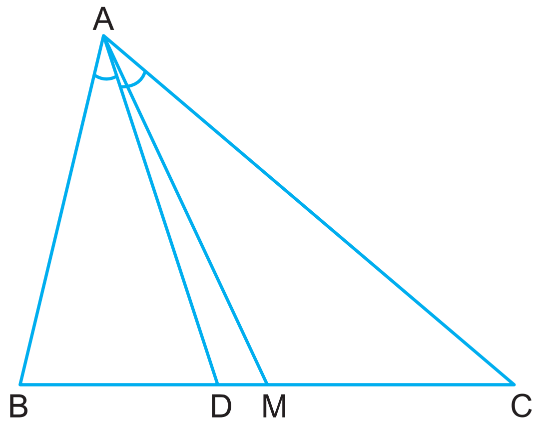
Question 13. Given the figure such that CA = CB = 6 cm; CD = 10 cm; DA = DE = 8 cm. B, C, D and E are collinear. Find the measure of angle BAE.



Question 14. How many square divisors of $8^6 \times 9^{20} \times 10^{18}$ are there ?

Question 15. How many whole number less than 70 with 9 as the units digit is the sum of power of 2 and power of 3 ?

Question 16. ***(Written paper/Tự luận)*** Given triangle ABC with median AM and bisector AD. Let AC = 9 cm, AB = 6 cm. The area of triangle ABC is 24 cm^2. Find the area of triangle ADM.



The diagrams are not drawn to scale

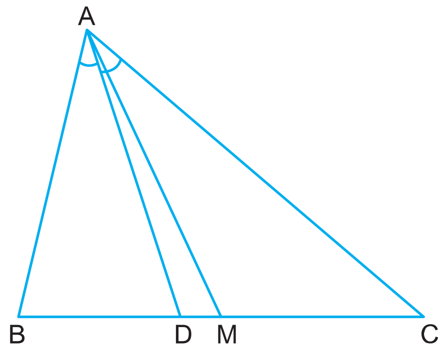
CUỘC THI CÂU LẠC BỘ TOÁN TUỔI THƠ TOÀN QUỐC 2018

CHILDREN'S FUN MATHS JOURNAL NATIONAL COMPETITION 2018

ĐÁP ÁN ĐỀ THI CÁ NHÂN BẬC THCS

ANSWERS FOR SECONDARY SCHOOL INDIVIDUAL PAPER

Câu	Điểm	Câu	Điểm
Question 1. 20.	*5 điểm*	**Question 9.** $n = 15$.	*5 điểm*
Question 2. P.	*5 điểm*	**Question 10.** 6 cm.	*5 điểm*
Question 3. $n = 3$.	*5 điểm*	**Question 11.** $BD = \frac{3}{2}\sqrt{17}$ cm.	*5 điểm*
Question 4. 2.	*5 điểm*	**Question 12.** -1.	*5 điểm*
Question 5. 147^o.	*5 điểm*	**Question 13.** 135^o.	*5 điểm*
Question 6. 5 notes.	*5 điểm*	**Question 14.** 3990.	*5 điểm*
Question 7. $n = 35$.	*5 điểm*	**Question 15.** 4 numbers.	*5 điểm*
Question 8. 24.	*5 điểm*	**Question 16.** $2.4\ cm^2$.	*5 điểm*

Đáp án câu 16	Điểm
	
Using the property of bisector in triangle, we have $\frac{DB}{AB} = \frac{DC}{AC} \Rightarrow \frac{DB}{6} = \frac{DC}{9}$. Let $\frac{DB}{6} = \frac{DC}{9} = k$ (with $k > 0$). We get $DB = 6k$, $DC = 9k$.	*5 điểm*
We have $BC = DB + DC = 6k + 9k = 15k$. We get $BM = \frac{1}{2}BC = \frac{15k}{2}$.	*5 điểm*
So $DM = BM - BD = \frac{15k}{2} - 6k = \frac{3k}{2}$.	*5 điểm*
We get $\frac{S_{ADM}}{S_{ABC}} = \frac{DM}{BC} = \frac{3k}{2} : 15k = \frac{1}{10}$.	*5 điểm*
Therefore $S_{ADM} = \frac{1}{10}S_{ABC} = \frac{1}{10}.24 = 2.4\ (cm^2)$.	*5 điểm*

Học sinh làm cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa.

CUỘC THI CÂU LẠC BỘ TOÁN TUỔI THƠ TOÀN QUỐC 2018

CHILDREN'S FUN MATHS JOURNAL NATIONAL COMPETITION 2018

ĐỀ THI BẬC TRUNG HỌC CƠ SỞ (SECONDARY SCHOOL PAPER)
VÒNG 1: TIẾP SỨC TOÁN (ROUND 1: RELAY RACE)

Thời gian: 30 phút cho cả 6 câu hỏi (Duration: 30 minutes for 6 problems)

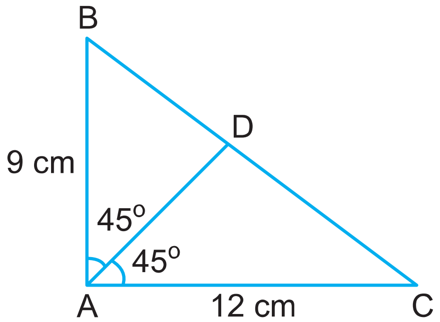
Problem 1. Given the non-zero real numbers a, b such that $4a^2 - 5ab + b^2 = 0$. Find the value of $C = \dfrac{ab + 8a^2}{4a^2 - b^2}$.

Problem 2. Given that $B = 4x^2 + 18x + 25$ with $-3 \le x \le 1$.

a) Find the minimum value of B.

b) Find the maximum value of B.

Problem 3.



In the figure, triangle ABC has AB = 9 cm; AC = 12 cm. Point D is on BC such that $\angle BAD = \angle DAC = 45^o$.

a) Find the length of BC in cm.

b) Find the length of DC in cm.

Problem 4. The operation $*$ is defined as $a * b = a^3 - b^2$. Given that $x * 6 = 28$ and $5 * y = 25$. Find the value of $B = 96x + 2018y$.

Problem 5. Given 5 digits: 0, 1, 2, 3, 5.

a) How many 5-distinct-digit multiples of 5 that are made from these digits ?

b) Among these multiples, what is the sum of the largest multiple and smallest multiple ?

Problem 6. In the coordinate system Oxy, there are three points A(–1; 1); B(0; 3); C(3; 1).

a) Find the coordinate of D such that ABCD is a parallelogram.

b) Find the perimeter of triangle ABD.

ĐÁP ÁN ĐỀ THI BẬC THCS (ANSWERS FOR SECONDARY SCHOOL PAPER)
VÒNG 1: TIẾP SỨC TOÁN (ROUND 1: RELAY RACE)

Mỗi bài giải đúng được 2 điểm. Mỗi phần giải đúng được 1 điểm (bài 1 và bài 4, mỗi kết quả đúng được 1 điểm).

Problem 1. $C = 3$ hoặc $C = -1$.

Problem 2. a) $\dfrac{19}{4}$; b) 47.

Problem 3. a) BC = 15; b) DC = $\dfrac{60}{7}$

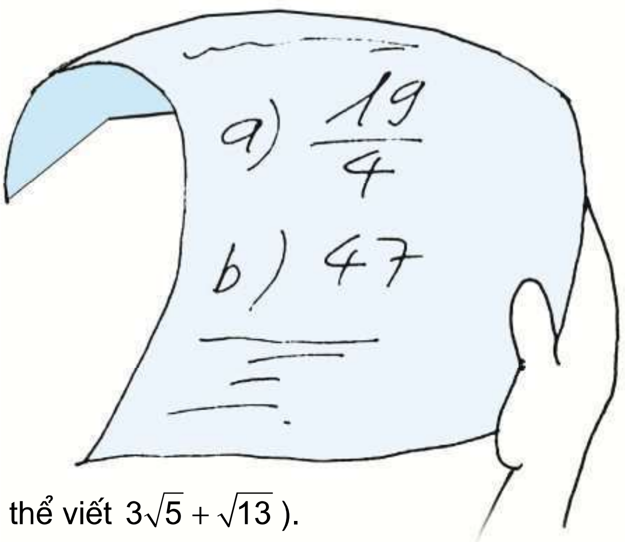
hoặc viết là a) BC = 15 cm; b) DC = $\dfrac{60}{7}$ cm.

Problem 4. $B = 20564$ hoặc $B = -19796$.

Problem 5. a) 42 hoặc 42 numbers.

b) 63445.

Problem 6. a) D(2; -1); b) $\sqrt{5} + \sqrt{20} + \sqrt{13}$ (có thể viết $3\sqrt{5} + \sqrt{13}$).



CUỘC THI CÂU LẠC BỘ TOÁN TUỔI THƠ TOÀN QUỐC 2018

CHILDREN'S FUN MATHS JOURNAL NATIONAL COMPETITION 2018

ĐỀ THI BẬC TRUNG HỌC CƠ SỞ (SECONDARY SCHOOL PAPER)

VÒNG 2: DU LỊCH TOÁN HỌC (ROUND 2: MATHEMATICS TOUR)

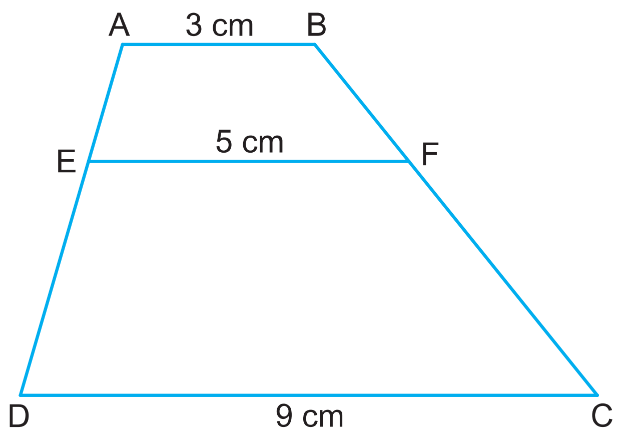
***Thời gian: 30 phút cho cả 6 câu hỏi** (Duration: 30 minutes for 6 problems)*

Problem 1. Find the smallest positive integer k such that the last 2-digit number of 11^k is 71.

Problem 2. Given real numbers x, y such that $\frac{x-2y}{9} = \frac{3y-2z}{6} = \frac{4z-3x}{2018}$ and $x - y - z = 2018$. Find x.

Problem 3. Given two similar triangles. The first triangle has three sides of 4.5 cm; 6 cm and 7.5 cm. The area of second triangle is 54 cm^2. Find the length of the longest side of the second triangle.

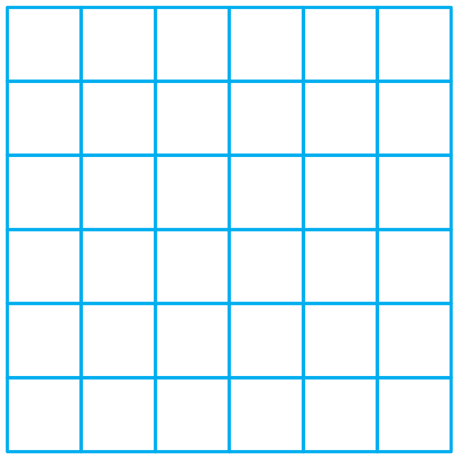
Problem 4.



In the figure, ABCD is trapezium with AB // CD. E and F are on AD, BC respectively such that EF // AB // CD. Given that AB = 3 cm; EF = 5 cm; CD = 9 cm. Find the ratio of area of trapezium ABFE to trapezium EFCD (write the ratio in the simplest form).

Problem 5. $\overline{2x9y1}$ is a square 5-digit number. Find the value of $A = 2017x + 2018y$.

Problem 6. Given the figure of the square grid of 6×6 unit squares. How many rectangles are there (including squares) ?



The diagrams are not drawn to scale

ĐÁP ÁN ĐỀ THI BẬC THCS (ANSWERS FOR SECONDARY SCHOOL PAPER)

VÒNG 2: DU LỊCH TOÁN HỌC (ROUND 2: MATHEMATICS TOUR)

Problem 1. $k = 7$.

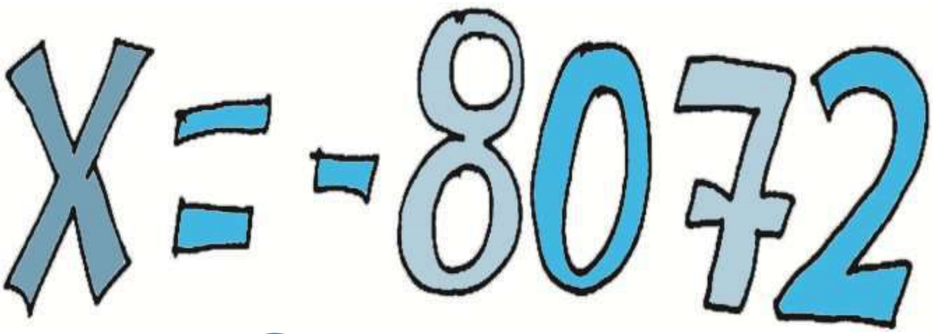
Problem 2. $x = -8072$.

Problem 3. 15 cm.

Problem 4. $\frac{2}{7}$.

Problem 5. 14121.

Problem 6. 441.



KẾT QUẢ CUỘC THI CÂU LẠC BỘ TOÁN TUỔI THƠ TOÀN QUỐC 2018 - THCS
PHẦN THI CÁ NHÂN

STT	Số báo danh	Họ tên	Tỉnh, Thành phố	Giải
1	HN08A	Nguyễn Đức Duy	Hà Nội A	Vàng
2	HN07A	Nguyễn Đức Anh	Hà Nội A	Vàng
3	HN11A	Nguyễn Bảo Sơn	Hà Nội A	Vàng
4	HN10B	Trần Vương Hưng	Hà Nội B	Vàng
5	PT08	Nguyễn Việt Anh	Phú Thọ	Vàng
6	PT07	Lương Tùng Lâm	Phú Thọ	Vàng
7	TB07A	Ngô Duy Anh	Thái Bình A	Vàng
8	TB11A	Phạm Bảo Ngọc	Thái Bình A	Vàng
9	TH07A	Hà Minh Hiếu	Thanh Hóa A	Vàng
10	TH08A	Trịnh Duy Minh	Thanh Hóa A	Vàng
11	VP12A	Nguyễn Trung Hiếu	Vĩnh Phúc A	Vàng
12	VP10B	Phùng Nguyễn Ngọc Anh	Vĩnh Phúc B	Vàng
13	VP07B	Trần Vũ Đức Huy	Vĩnh Phúc B	Vàng
14	ĐN11	Ông Gia Phước	Đà Nẵng	Bạc
15	ĐN12	Lê Tăng Phú Quý	Đà Nẵng	Bạc
16	BG09	Nguyễn Tùng Dương	Bắc Giang	Bạc
17	BG10	Lê Nhật Minh	Bắc Giang	Bạc
18	HN10A	Đỗ Nga Linh	Hà Nội A	Bạc
19	HN09A	Phạm Tùng Lâm	Hà Nội A	Bạc
20	HN12A	Đỗ Huy Trung	Hà Nội A	Bạc
21	HN09B	Vũ Minh Châu	Hà Nội B	Bạc
22	HN08B	Lê Đức Anh Vũ	Hà Nội B	Bạc
23	HN07C	Chu Hữu Đăng Trường	Hà Nội C	Bạc
24	HN10C	Ngô Thái Sơn	Hà Nội C	Bạc
25	KG10	Cao Nam Phương	Kiên Giang	Bạc
26	LCa10A	Nguyễn Minh Tùng	Lào Cai A	Bạc
27	LCa12A	Kiều Minh Quang	Lào Cai A	Bạc
28	LCa09A	Nguyễn Anh Quân	Lào Cai A	Bạc
29	LS11	Dương Văn Kiên	Lạng Sơn	Bạc
30	NĐ09	Vũ Đức Mạnh	Nam Định A	Bạc
31	NB12	Nguyễn Hữu Quang	Ninh Bình	Bạc
32	PT10	Nguyễn Đại Dương	Phú Thọ	Bạc
33	TH10A	Lê Đình Hùng Anh	Thanh Hóa A	Bạc
34	TH11A	Nguyễn Hà Thân Lâm	Thanh Hóa A	Bạc
35	TH09A	Nguyễn Đại Dương	Thanh Hóa A	Bạc
36	VP08A	Kim Ngọc Yến Nhi	Vĩnh Phúc A	Bạc
37	VP11A	Bùi Quốc Huy	Vĩnh Phúc A	Bạc
38	VP10A	Nguyễn Văn Trường	Vĩnh Phúc A	Bạc
39	VP11B	Phùng Thị Thu Trang	Vĩnh Phúc B	Bạc
40	VP08B	Phạm Hoàng Hiệp	Vĩnh Phúc B	Bạc

STT	Số báo danh	Họ tên	Tỉnh, Thành phố	Giải
41	ĐN07	Nguyễn Xuân Bách	Đà Nẵng	Đồng
42	ĐN09	Bùi Anh Khoa	Đà Nẵng	Đồng
43	BG07	Giáp Nguyễn Hải Dương	Bắc Giang	Đồng
44	BG12	Vũ Thị Thu Trang	Bắc Giang	Đồng
45	BG08	Giáp Mạnh Hiếu	Bắc Giang	Đồng
46	BG11	Ngô Duy Hiếu	Bắc Giang	Đồng
47	HNa09	Lương Hữu Thành	Hà Nam	Đồng
48	HNa11	Hà Đức Tâm	Hà Nam	Đồng
49	HN07B	Phạm Hoàng Hiệp	Hà Nội B	Đồng
50	HN12C	Nguyễn Minh Hiếu	Hà Nội C	Đồng
51	HN09C	Đặng Minh Ngọc	Hà Nội C	Đồng
52	HN11C	Nguyễn Lê Sơn	Hà Nội C	Đồng
53	HN08C	Nguyễn Võ Ngọc Khuê	Hà Nội C	Đồng
54	KG07	Huỳnh Trung Hiếu	Kiên Giang	Đồng
55	KG08	Lê Quang Kiệt	Kiên Giang	Đồng
56	LCa07A	Vũ Trung Kiên	Lào Cai A	Đồng
57	LCa11A	Vũ Huyền Diệu	Lào Cai A	Đồng
58	LCa08A	Hà Kim Minh	Lào Cai A	Đồng
59	LCa09B	Phạm Hoàng Tiến	Lào Cai B	Đồng
60	LCa12B	Nguyễn Đình Hiếu	Lào Cai B	Đồng
61	LCa08B	Nguyễn Thu Hà	Lào Cai B	Đồng
62	LCa08C	Đinh Huyền Trang	Lào Cai C	Đồng
63	LS07	Phạm Anh Minh	Lạng Sơn	Đồng
64	NĐ07	Phạm Việt Hòa	Nam Định A	Đồng
65	NĐ08	Trần Sinh Trung Hiếu	Nam Định A	Đồng
66	NĐ12	Phạm Minh Công	Nam Định A	Đồng
67	NĐ10	Cao Tuấn Anh	Nam Định A	Đồng
68	NB07	Nguyễn Minh Đức	Ninh Bình	Đồng
69	NB08	Nguyễn Đức Thắng	Ninh Bình	Đồng
70	NB10	Bùi Thanh Lâm	Ninh Bình	Đồng
71	NB11	Quách Thị Trang Nhung	Ninh Bình	Đồng
72	TB09A	Tô Đức Dương	Thái Bình A	Đồng
73	TB08A	Vũ Đức Anh	Thái Bình A	Đồng
74	TH12A	Nguyễn Vinh Quang	Thanh Hóa A	Đồng
75	TV11	Thái Khánh Linh	Trà Vinh	Đồng
76	TQ11	Lại Ngọc Sơn	Tuyên Quang	Đồng
77	TQ07	Nguyễn Trí Hiếu	Tuyên Quang	Đồng
78	VP09A	Nguyễn Vũ Ngọc Linh	Vĩnh Phúc A	Đồng
79	VP09B	Vũ Ngọc Bình	Vĩnh Phúc B	Đồng
80	ĐN10	Ngô Thành Nhân	Đà Nẵng	Giải Triển vọng

STT	Số báo danh	Họ tên	Tỉnh, Thành phố	Giải
81	HNa10	Phạm Nam Trường	Hà Nam	Giải Triển vọng
82	HNa07	Nguyễn Văn Dương	Hà Nam	Giải Triển vọng
83	HN12B	Trần Thị Yến Nhi	Hà Nội B	Giải Triển vọng
84	HN11B	Vũ Xuân Hoàn	Hà Nội B	Giải Triển vọng
85	HB08	Đào Bảo Ngọc	Hòa Bình	Giải Triển vọng
86	HB12	Lê Hoàng Trang	Hòa Bình	Giải Triển vọng
87	HB09	Nguyễn Phúc Bình	Hòa Bình	Giải Triển vọng
88	KG12	Phạm Thế Sơn	Kiên Giang	Giải Triển vọng
89	LCa11B	Phạm Quang Khánh	Lào Cai B	Giải Triển vọng
90	LCa10B	Nguyễn Tấn Đạt	Lào Cai B	Giải Triển vọng
91	LCa07B	Ngô Công Đức	Lào Cai B	Giải Triển vọng
92	LCa10C	Nguyễn Thu Huyền	Lào Cai C	Giải Triển vọng
93	LCa09C	Bùi Quang Hưng	Lào Cai C	Giải Triển vọng
94	LCa11C	Nguyễn Công Thành	Lào Cai C	Giải Triển vọng
95	LCa12C	Trần Anh Tú	Lào Cai C	Giải Triển vọng
96	LS10	Lăng Hồng Nguyệt Anh	Lạng Sơn	Giải Triển vọng
97	LS12	Vũ Minh Anh	Lạng Sơn	Giải Triển vọng
98	NĐ11	Nguyễn Minh Dương	Nam Định A	Giải Triển vọng
99	NB09	Bùi Diệu Thúy	Ninh Bình	Giải Triển vọng
100	PT09	Vũ Đức Mạnh	Phú Thọ	Giải Triển vọng
101	PT11	Trần Hoàng Ngọc Minh	Phú Thọ	Giải Triển vọng
102	PT12	Nguyễn Thái Dương	Phú Thọ	Giải Triển vọng
103	TB10A	Nguyễn Như Giáp	Thái Bình A	Giải Triển vọng
104	TB12A	Phạm Như Ngọc	Thái Bình A	Giải Triển vọng
105	SG12	Cao Tiến Trung	TP. Hồ Chí Minh	Giải Triển vọng
106	SG07	Nguyễn Trung Anh	TP. Hồ Chí Minh	Giải Triển vọng
107	SG11	Đinh Hoàng Thảo Nhi	TP. Hồ Chí Minh	Giải Triển vọng
108	TV08	Thái Bình Dương	Trà Vinh	Giải Triển vọng
109	TQ09	Hồ Nhật Thành	Tuyên Quang	Giải Triển vọng
110	VP07A	Hoàng Mạnh Thắng	Vĩnh Phúc A	Giải Triển vọng
111	VP12B	Đặng Nguyễn Duy Trúc	Vĩnh Phúc B	Giải Triển vọng

KẾT QUẢ CUỘC THI CÂU LẠC BỘ TOÁN TUỔI THƠ TOÀN QUỐC 2018 - THCS
PHẦN THI TIẾP SỨC TOÁN VÀ DU LỊCH TOÁN HỌC

Đội	Giải
Hà Nội A, Hà Nội C	Vàng
Bắc Giang, Phú Thọ, Hà Nội B	Bạc
Tuyên Quang, Thái Bình A, Vĩnh Phúc B	Đồng

CUỘC THI CÂU LẠC BỘ TOÁN TUỔI THƠ TOÀN QUỐC 2018

CHILDREN'S FUN MATHS JOURNAL NATIONAL COMPETITION 2018

LỜI GIẢI CHI TIẾT ĐỀ THI CÁ NHÂN THCS

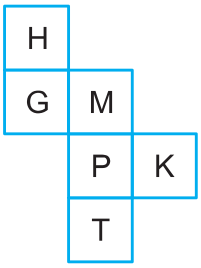
Bài 1. Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{5}=\frac{x}{2}=\frac{3y}{9}=\frac{6z}{30}$

$=\frac{x+3y+6z}{2+9+30}=\frac{82}{41}=2$

$\Rightarrow \frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{5}=\frac{x+y+z}{10}=2$

$\Rightarrow M=x+y+z=20.$

Bài 2. Ta thấy mặt chứa chữ P kề với mặt chứa các chữ M, K, T, G. Do đó mặt chứa chữ H đối diện với mặt chứa chữ P.



Bài 3. Ta có

$A = n^3 - 2n^2 + 2n - 4 = (n - 2)(n^2 + 2).$

Vì A là số nguyên tố nên $n - 2 > 0$.

Suy ra $n - 2 = 1$ và $n^2 + 2$ là số nguyên tố.

Vậy $n = 3$.

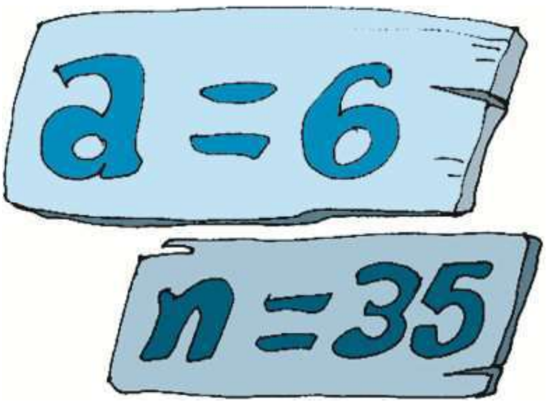
Bài 4. Ta có

$|x|+5<7 \Leftrightarrow |x|<2 \Rightarrow -2<x<2.$

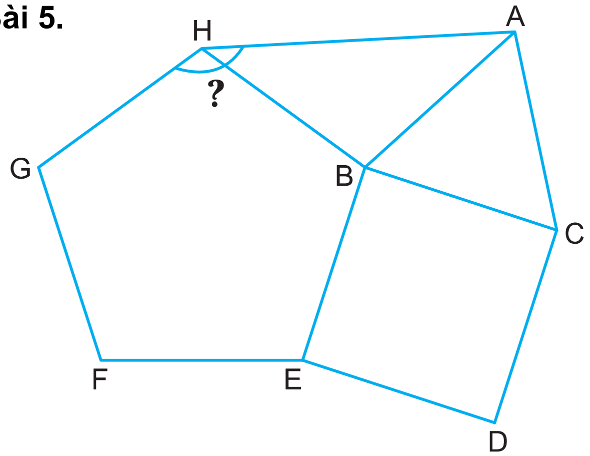
$|x-3|>2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3>2 \\ x-3<-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>5 \\ x<1. \end{array}\right.$

Các số nguyên x thỏa mãn cả hai bất đẳng thức là -1, 0.

Vậy có 2 số nguyên thỏa mãn cả hai bất đẳng thức trên.



Bài 5.



Vì ABC là tam giác đều, BCDE là hình vuông, BEFGH là ngũ giác đều nên

$\widehat{ABC}=60^o;\ \widehat{EBC}=90^o;\ \widehat{HBE}=\widehat{BHG}=108^o.$

Suy ra

$\widehat{ABH}=360^o-60^o-90^o-108^o=102^o.$

Do đó $\widehat{AHB}=39^o.$

Vậy $\widehat{AHG}=39^o+108^o=147^o.$

Bài 6. Gọi số tờ tiền 2000 đồng, 5000 đồng và 10000 đồng thứ tự là a, b, c ($a, b, c \in \mathbb{N}^*$, $a, b, c < 10$).

Ta có $2000a + 5000b + 10000c = 50000$

Suy ra $2a + 5b + 10c = 50$.

Do đó $2a \vdots 5$.

Mà $(2, 5) = 1$ nên $a \vdots 5$, tức là $a = 5$.

Vậy có 5 tờ tiền 2000 đồng.

Bài 7. Đặt $n + 1 = a^2$, $4n + 29 = b^2$ ($a, b \in \mathbb{N}$).

Ta có $b^2 - 4a^2 = 25$.

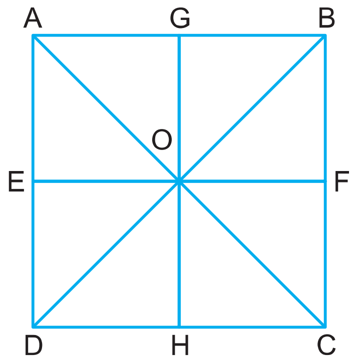
Suy ra $(b - 2a)(b + 2a) = 25$.

Mà $b + 2a > 0$ nên $b - 2a > 0$ và $b + 2a > b - 2a$ nên suy ra $b - 2a = 1$, $b + 2a = 25$.

Do đó $a = 6$.

Vậy $n = 35$.

Bài 8.



Xét 8 đường thẳng AB, BC, CD, DA, AC, BD, EF và GH. Trên mỗi đường thẳng đó có 3 đoạn thẳng. Vậy số đoạn thẳng trên hình vẽ là 8.3 = 24 (đoạn thẳng).

Bài 9. Có 5 bội nhỏ nhất khác 0 của 3 là 3, 6, 9, 12 và 15 (trong đó $9 = 3^2$).

Do đó $n \geq 15$.

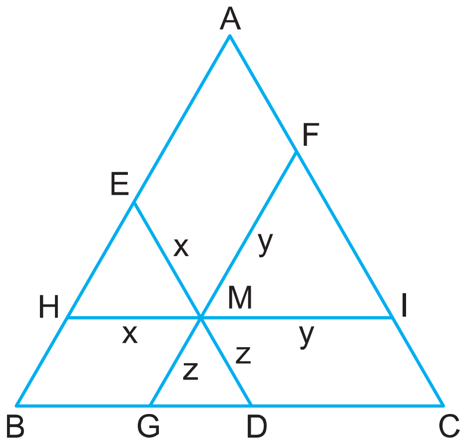
Ta thấy 16! có các thừa số chẵn là 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16.

Suy ra 16! khi phân tích ra thừa số nguyên tố thì số mũ của 2 là 14.

Do đó $n < 16$.

Vậy $n = 15$.

Bài 10.



Dễ dàng chứng minh được các tam giác EHM, FMI và MGD là các tam giác đều.

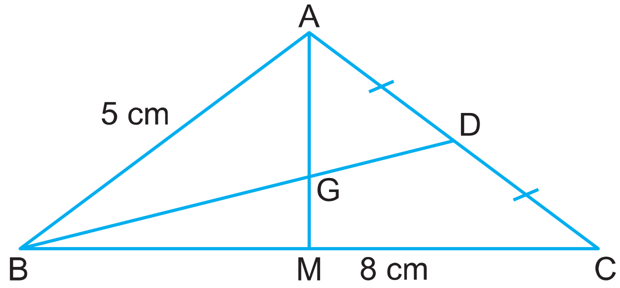
Đặt HM = EM = EH = x, FM = MI = FI = y, MG = MD = GD = z.

Ta có $3(x + y + z) = 9$, từ đó $x + y + z = 3$.

Suy ra

$DE + FG + HI = 2(x + y + z) = 2.3 = 6$ cm.

Bài 11.



Vẽ đường trung tuyến AM của tam giác ABC, gọi G là giao điểm của AM và BD.

Ta có G là trọng tâm tam giác ABC và BM = 8 : 2 = 4 cm.

Áp dụng định lí Pythagoras ta có

$AM^2 = AB^2 - BM^2 = 5^2 - 4^2 = 3^2$.

Suy ra AM = 3 cm, từ đó GM = AM : 3 = 3 : 3 = 1 cm.

Do đó $BG^2 = BM^2 + GM^2 = 4^2 + 1^2 = 17$, từ đó $BG = \sqrt{17}$ cm.

Vậy $BD = \frac{3}{2}BG = \frac{3}{2}\sqrt{17}$ cm.

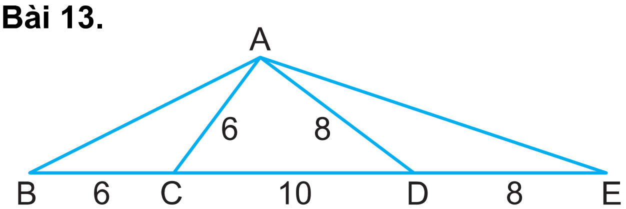
Bài 12. Phương trình tương đương với

$(3x - 2)|x + 4| = (x + 4)^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 4 = 0 \\ 3x - 2 = |x + 4| \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4 \\ x = 3 \end{array}\right.$

Vậy tổng hai nghiệm của phương trình là $(-4) + 3 = (-1)$.

Bài 13.



Vì $AC^2 + AD^2 = 6^2 + 8^2 = 10^2 = CD^2$ nên theo định lí Pytagoras đảo thì tam giác ACD vuông tại A.
Vì các tam giác ABC và ADE thứ tự cân tại C và D nên $\widehat{ACD} = 2\widehat{BAC}$; $\widehat{ADC} = 2\widehat{DAC}$.

Suy ra $\widehat{BAC} + \widehat{DAE} = \frac{1}{2}(\widehat{ACD} + \widehat{ADC})$

$= \frac{1}{2}.90^o = 45^o$.

Vậy $\widehat{BAE} = 90^o + 45^o = 135^o$.

Bài 14. Ta có

$8^6 \times 9^{20} \times 10^{18} = (2^3)^6 \times (3^2)^{20} \times (2.5)^{18}$
$= 2^{36} \times 3^{40} \times 5^{18}$.

Các ước chính phương của số $8^6 \times 9^{20} \times 10^{18}$ là bình phương ước của số $2^{18} \times 3^{20} \times 5^9$.

Vậy số các ước chính phương của số $8^6 \times 9^{20} \times 10^{18}$ là
(18 + 1)(20 + 1)(9 + 1) = 3990.

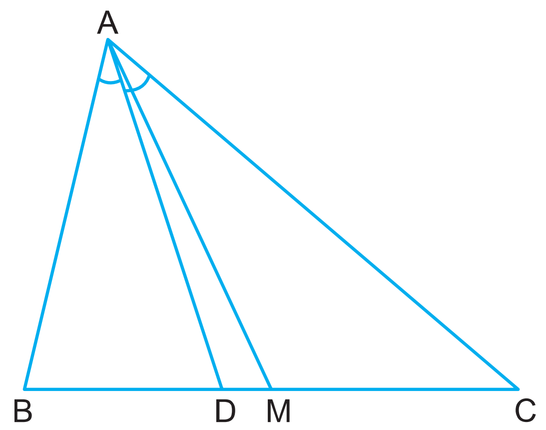
Bài 15. Các lũy thừa của 2 nhỏ hơn 70 là 1, 2, 4, 8, 16, 32 và 64.
Các lũy thừa của 9 nhỏ hơn 70 là 1, 3, 9 và 27.
Lập bảng

Lũy thừa của 2	*Lũy thừa của 3*	*Các tổng có tận cùng bằng 9*
1		
2, 32	*27*	*29, 59*
4, 64		
16	*3*	*19*
8	*1*	*9*
	9	

Vậy tất cả có 4 số.

Bài 16. Theo tính chất đường phân giác trong tam giác ta có

$\frac{DB}{AB} = \frac{DC}{AC} \Rightarrow \frac{DB}{6} = \frac{DC}{9}$.



Đặt $\frac{DB}{6} = \frac{DC}{9} = k$ (với k > 0).

Suy ra DB = 6k, DC = 9k.

Ta có BC = DB + DC = 6k + 9k = 15k.

Do đó $BM = \frac{1}{2}BC = \frac{15k}{2}$.

Suy ra $DM = BM - BD = \frac{15k}{2} - 6k = \frac{3k}{2}$.

Từ đó suy ra $\frac{S_{ADM}}{S_{ABC}} = \frac{DM}{BC} = \frac{3k}{2} : 15k = \frac{1}{10}$.

Vậy $S_{ADM} = \frac{1}{10}S_{ABC} = \frac{1}{10}.24 = 2.4$ (cm^2).

ĐỀ THI CÂU LẠC BỘ TTT

NGUYỄN ĐỨC TẤN
DƯƠNG THU TRANG *(dịch)*

Kì 18

CLB1. Given *a*, *b*, *c* such that $a^3 + b^3 + c^3 = a + b + c = 0$. Find the value of $M = abc$.

CLB2. Let *a*, *b*, *c*, *d* be the integers such that $|a-b| + |b-c| + |c-d| + |d-a| = a^{2018} + 2019$. Find the remainder when a^{12} divided by 16.

CLB3. The total ages of father and son is 49. In 3 years' time, son's age is 37.5% of father's age. How many years ago such that father's age is 3.5 times son's age?

CLB4. Let *ABCD* be a square with side of 12 cm. *E* is on *AD* such that *DE* = 7 cm. Find the position of *M* on diagonal *AC* such that the sum of *MD* + *ME* is smallest. Find this smallest value.

CLB5. *ABC* is a equilateral triangle with *D* on *AC* such that $CD = \frac{1}{3}AC$. The perpendicular bisector of *BD* intersects *AB*, *BC* at *E*, *F* respectively. Find the ratio $\frac{S_{ADE}}{S_{CDF}}$.

Kết quả Kì 16 (TTT2 số 183)

CLB1. Ta có $pq = (2r^2 + 4) \vdots 2$

Suy ra p = 2 hoặc q = 2.

• Xét p = 2, ta có $q - r^2 = 2 \Leftrightarrow q = r^2 + 2$.

* Nếu r = 3 thì q = 11 là số nguyên tố.

* Nếu $r \neq 3$ thì r^2 chia cho 3 dư 1.

Suy ra $q = (r^2 + 2) \vdots 3$. Mà $r^2 + 2 > 3$ nên q là hợp số.

• Xét q = 2, làm tương tự ta cũng có p = 11.

Vậy p = 2; q = 11; r = 3 hoặc p = 11; q = 2; r = 3.

CLB2. Ta có (a + b + c)(ab + bc + ca) = abc.

$\Leftrightarrow (a + b)(ab + bc + ca) + c^2(a + b) = 0.$

$\Leftrightarrow (a + b)(ab + bc + ca + c^2) = 0.$

$\Leftrightarrow (a + b)(b + c)(c + a) = 0.$

$\Leftrightarrow a + b = 0$ hoặc $b + c = 0$ hoặc $c + a = 0$.

• Nếu a + b = 0, từ đó a = –b.

Suy ra $(a + b + c)^{2017} = a^{2017} + b^{2017} + c^{2017}$.

Do đó M = 1.

• Nếu b + c = 0 hoặc c + a = 0, làm tương tự ta được M = 1.

CLB3. Ta có

$$\left(1-\frac{2}{2\cdot 3}\right)\left(1-\frac{2}{3\cdot 4}\right)\cdots\left(1-\frac{2}{n\cdot(n+1)}\right)=\frac{2017}{6045}.$$

$$\Rightarrow \frac{1.4}{2.3}\cdot\frac{2.5}{3.4}\cdot\frac{3.6}{4.5}\cdots\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}=\frac{2017}{6045}.$$

$$\Rightarrow \frac{1.2.3...(n-1)}{2.3...n}\cdot\frac{4.5...(n+2)}{3.4...(n+1)}=\frac{2017}{6045}.$$

$$\Rightarrow \frac{n+2}{3n}=\frac{2017}{6045} \Rightarrow n = 2015.$$

CLB4. Ta có

$$\frac{ab+1}{b}=\frac{bc+1}{c}=\frac{ca+1}{a} \Rightarrow a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}.$$

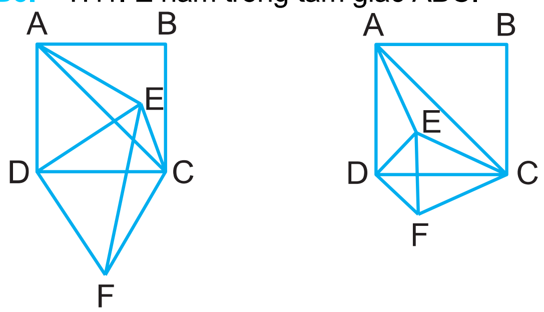
Do đó $a-b=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}=\frac{b-c}{bc}$;

$b-c=\frac{1}{a}-\frac{1}{c}=\frac{c-a}{ac}$; $c-a=\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{a-b}{ab}$.

$$\Rightarrow (a-b)(b-c)(c-a)=\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{a^2b^2c^2}.$$

Mà $abc \neq 1$. Suy ra a = b hoặc b = c hoặc c = a. Do đó a = b = c.

CLB5. • TH1. E nằm trong tam giác ABC.



Ta có $\widehat{ADC} = \widehat{EDF}\ (= 90^o) \Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{CDF}$.

Vì $\Delta DAE = \Delta DCF$ (c.g.c) nên $\widehat{AED} = \widehat{CFD}$.

Ta có

$\widehat{AED} + \widehat{FEC} = \widehat{AEC} - \widehat{DFE} = 140^o - 45^o = 95^o$

$\Rightarrow \widehat{CFD} + \widehat{FEC} = \widehat{DFE} + \widehat{EFC} + \widehat{FEC} = 95^o$

$\Rightarrow \widehat{EFC} + \widehat{FEC} = 95^o - \widehat{DFE} = 50^o$

$\Rightarrow \widehat{ECF} = 180^o - 50^o = 130^o$.

• TH2. E nằm trong tam giác ADC. Làm tương tự như trên ta được $\widehat{ECF} = 50^o$.

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải tốt được thưởng kì này: *Hoàng Vũ Nghị*, 8E, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Thị Diệu Linh*, 8I, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, **Phú Thọ**; *Trần Trọng Quang Huy*, 8A, THCS Trần Huy Liệu, Vụ Bản, **Nam Định**; *Nguyễn Thu Hiền*, 8A3, THCS Thị trấn Kỳ Sơn, Kỳ Sơn, **Hòa Bình**.

NGUYỄN NGỌC HÂN

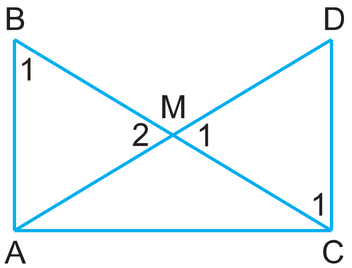
SỬ DỤNG TÍNH CHẤT ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN ỨNG VỚI CẠNH HUYỀN CỦA TAM GIÁC VUÔNG

THÁI NHẬT PHƯỢNG
(GV. THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa)

Khi giải các bài toán hình học liên quan đến tam giác vuông với các bạn học sinh lớp 7. Nếu sử dụng bổ đề về mối quan hệ giữa đường trung tuyến ứng với cạnh huyền và cạnh huyền của tam giác vuông đó thì các bạn sẽ tìm được lời giải khá ngắn gọn cho các bài toán.

• **Bổ đề.** Đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của một tam giác vuông bằng nửa cạnh huyền.

Chứng minh. Xét ΔABC vuông tại A với đường trung tuyến AM, ta sẽ chứng minh $AM = \frac{BC}{2}$.



Thật vậy, trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho MD = MA.

Vì MC = MB, $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$ nên $\Delta MDC = \Delta MAB$ (c.g.c).

Từ đó suy ra DC = AB và $\widehat{C}_1 = \widehat{B}_1$.

Do đó CD // AB.

Ta lại có $AC \perp AB$ nên $AC \perp CD$.

Xét tam giác vuông ACD và tam giác vuông CAB có:

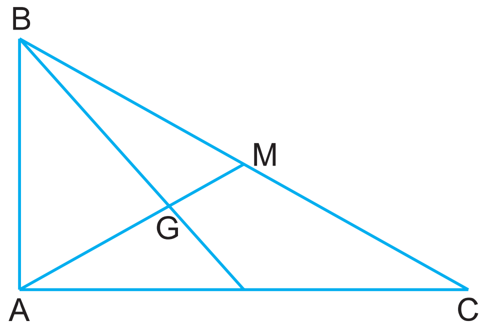
CD = AB, AC chung nên $\Delta ACD = \Delta CAB$.

Suy ra AD = BC.

Kết hợp với $AM = \frac{AD}{2}$ ta được $AM = \frac{BC}{2}$.

Bài toán 1. Cho tam giác ABC vuông tại A với AB = 9 cm, AC = 12 cm. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Tính độ dài đoạn thẳng AG.

Lời giải.



Áp dụng định lí Pythagoras ta có

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 9^2 + 12^2 = 225$.

Suy ra BC = 15 (cm).

Gọi M là trung điểm của BC.

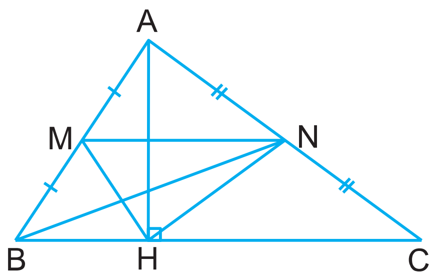
Áp dụng bổ đề trên ta có

$AM = \frac{1}{2}BC = 7{,}5$ (cm).

Do đó $AG = \frac{2}{3}AM = 5$ (cm).

Bài toán 2. Cho tam giác ABC với M, N thứ tự là trung điểm của AB, AC. Chứng minh rằng MN // BC.

Lời giải.



Kẻ AH ⊥ BC tại H.

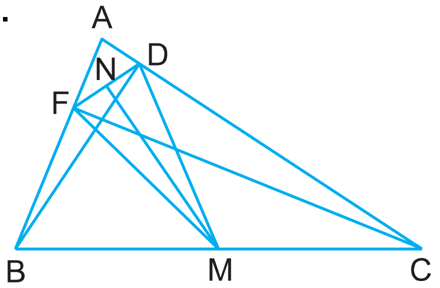
Ta có HM, HN thứ tự là các đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của các tam giác vuông AHB và AHC nên theo bổ đề trên ta có $MH = \frac{AB}{2} = AM$; $NH = \frac{AC}{2} = NA$.

Do đó MN là đường trung trực của AH.

Suy ra MN ⊥ AH, kết hợp với BC ⊥ AH ta có MN // BC.

Bài toán 3. Cho tam giác ABC không vuông với hai đường cao BD và CF. Gọi M, N thứ tự là trung điểm của BC và DF. Chứng minh rằng MN vuông góc với DF.

Lời giải.



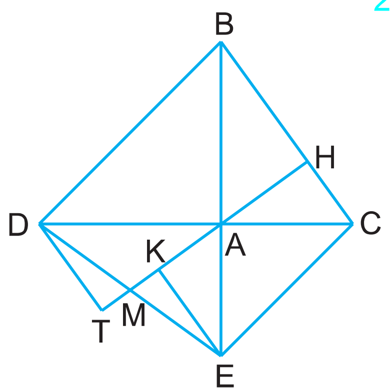
Ta có FM, DM thứ tự là các đường trung tuyến ứng với cạnh huyền BC của các tam giác vuông BFC và BDC.

Theo bổ đề trên ta có $DM = \frac{BC}{2} = FM$.

Từ đó ΔDMF cân tại M, kết hợp với ND = NF, suy ra MN ⊥ DF.

Bài toán 4. Cho tam giác ABC vuông tại A. Bên ngoài tam giác ABC dựng các tam giác BAD, CAE là các tam giác vuông cân tại A. Đường thẳng qua A và vuông góc với BC cắt DE tại M. Chứng minh rằng $AM = \frac{BC}{2}$.

Lời giải.



Ta có AC ⊥ AB và AD ⊥ AB.

Suy ra C, A, D thẳng hàng.

Từ đó ΔDEA = ΔBCA (c.g.c)

Do đó DE = BC. (1)

Gọi chân đường vuông góc từ A đến BC là H.

Vẽ DT ⊥ MA, EK ⊥ MA.

Ta có AD = AB và $\widehat{DAT} = \widehat{CAH} = \widehat{ABH}$.

Suy ra ΔATD = ΔBHA (cạnh huyền - góc nhọn).

Do đó DT = AH.

Chứng minh tương tự ta có ΔAEK = ΔCAH nên EK = AH.

Ta có DT = EK (vì cùng bằng AH); $\widehat{TDM} = \widehat{KEM}$

Suy ra ΔDTM = ΔEKM (g.c.g).

Từ đó MD = ME.

Theo bổ đề ta có $AM = \frac{DE}{2}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AM = \frac{BC}{2}$.

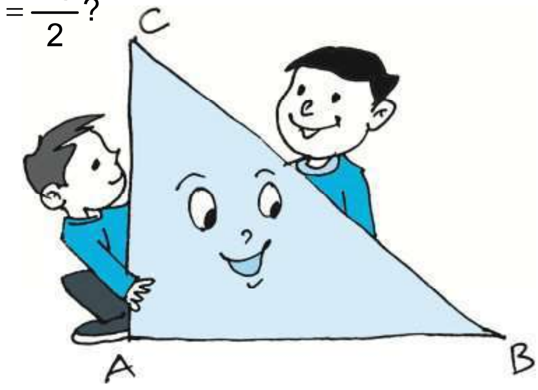
Bài tập vận dụng

Bài 1. Cho ΔABC vuông tại A và $\widehat{C} = 30^o$. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng ΔABM là tam giác đều.

Bài 2. Cho ΔABC vuông tại A với BC = 10 cm. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích ΔABC.

Bài 3. Cho ΔABC và hai đường cao BH, CK. Chứng minh rằng B, K, H, C cùng thuộc một đường tròn.

Bài 4. Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Chứng minh rằng $AH \le \frac{BC}{2}$. Khi nào $AH = \frac{BC}{2}$?



Kì này VẼ THẾ NÀO NHỈ?

Bài toán. Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau ngoài tờ giấy và điểm M nằm trong tờ giấy. Chỉ dùng thước thẳng (không có vạch chia), hãy vẽ qua M một đường thẳng đi qua giao điểm của a và b.

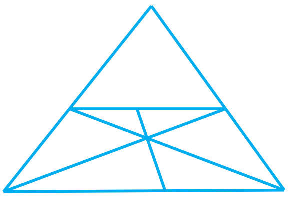
NGUYỄN XUÂN BÌNH *(Hà Nội)*

Kết quả **(TTT2 số 183)**

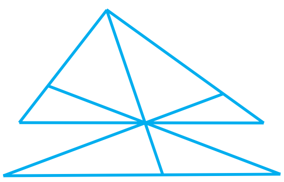
CÓ VẼ ĐƯỢC KHÔNG?

a) Giả sử có m đoạn thẳng và mỗi đoạn thẳng cắt đúng n đoạn thẳng khác với điều kiện mỗi giao điểm chỉ thuộc hai đoạn thẳng thì số giao điểm là $\frac{mn}{2}$ (do đếm số giao điểm thuộc mỗi đoạn thẳng n lần và mỗi giao điểm được đếm hai lần). Do số giao điểm là số nguyên nên tích mn phải là số chẵn. Như vậy không thể sắp xếp 7 đoạn thẳng sao cho mỗi đoạn thẳng cắt đúng 3 đoạn thẳng khác với điều kiện mỗi giao điểm chỉ thuộc hai đoạn thẳng.

b) Nếu mỗi giao điểm là điểm chung của hai hay nhiều đoạn thẳng thì có thể sắp xếp được như ở *Hình 1* và *Hình 2*.



Hình 1



Hình 2

Nhận xét. Rất tiếc kì này không có bạn nào giải đúng. Quà tặng đành... để lại kì sau. Các bạn cố gắng lên nhé!

ANH COMPA

ĐƯỢC THƯỞNG KÌ NÀY

Thi giải toán qua thư

Vũ Minh Nguyệt, 6E, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc**; *Hoàng Tuấn Dũng*, 7A1, THCS Minh Khai, TP. Hà Giang, **Hà Giang**; *Nguyễn Thu Hiền*, 8A3, THCS Thị trấn Kỳ Sơn, Kỳ Sơn, **Hòa Bình**; *Ngô Bảo An*, *Nguyễn Lê Tùng Dương*, 9A0, THCS Nguyễn Trường Tộ, Đống Đa, **Hà Nội**; *Trần Cao Bảo Châu*, 7A, THCS Trần Hưng Đạo, Buôn Ma Thuật, **Đắk Lắk**; *Huỳnh Nguyên Phúc*, 9A1, THCS Mỹ Lộc, Phù Mỹ, **Bình Định**; *Nguyễn Thị Quỳnh Chi,* 8A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Trần Phương Mai,* 7B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, **Nghệ An**; *Trương Ngọc Tâm*, 8D, THCS Nhữ Bá Sỹ, thị trấn Bút Sơn, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa**; *Phùng Đăng Dương*, 7C, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, **Phú Thọ**.

Kì này ĐIỀN SỐ THÍCH HỢP

Bài 1. Điền số thích hợp vào ô trống

5×4	6	$2 + 6$	3×7	8	$4 + 1$
2×3	2	$1 + 1$	8×2		$4 + 2$

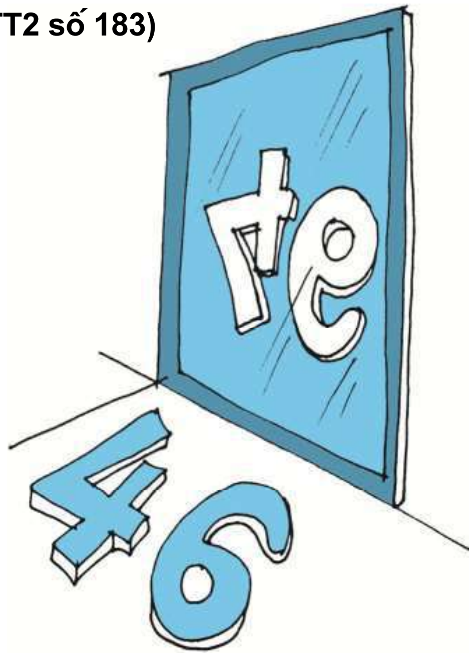
NGUYỄN ĐỨC TẤN *(TP. Hồ Chí Minh)*

Kết quả TÌM SỐ CÒN THIẾU (TTT2 số 183)

Bài 1. Trong mỗi hình, số ở dưới bằng bình phương của số ở bên trái trừ đi tổng các chữ số của số ở bên phải. Vậy số thích hợp điền vào chỗ (?) là $3^2 - (9 + 0) = \mathbf{0}$.

Bài 2. Các số trong bảng là các số *được viết theo thứ tự ngược lại* của các số chính phương gồm hai chữ số. Như vậy số điền vào ô (?) là số viết ngược lại của số 64, tức là số **46**.

Nhận xét. Các bạn cần phân biệt *số được viết theo thứ tự ngược lại* của số $\overline{ab}$ (là số $\overline{ba}$) với *số nghịch đảo* của số này.



Xin trao thưởng cho các bạn: *Nguyễn Đức Bảo Châu*, *Đào Xuân Thao*, 7A2, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh.**

NGUYỄN XUÂN BÌNH

NEW

THÔNG BÁO CHUYỂN TRỤ SỞ

Từ tháng 7 năm 2018, tòa soạn tạp chí Toán Tuổi thơ chuyển trụ sở về địa điểm mới.

Địa chỉ liên hệ và gửi bài:

TẠP CHÍ TOÁN TUỔI THƠ

Tầng 2, nhà A, số 187B Giảng Võ, P. Cát Linh, Q. Đống Đa, Hà Nội

Điện thoại: 024.3568 2701; *Fax:* 024.3568 2702.

Email: bbttoantuoitho@gmail.com; tapchitoantuoitho@gmail.com

Website: www.toantuoitho.vn

Trân trọng thông báo để các độc giả được biết và tiện giao dịch.

TOÁN TUỔI THƠ

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 TP. HÀ NỘI

Năm học 2018 - 2019

Môn thi: Toán (chuyên Toán)

Thời gian làm bài: 150 phút

Bài 1. *(2 điểm)*

1. Giải phương trình $x^3 + 3x + 8 = (x+5)\sqrt{x^2+x+2}$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2 - 2xy = 8x^2 - 6x + 1 \\ y^2 = x^3 + 8x^2 - x + 1. \end{cases}$

Bài 2. *(2,5 điểm)*

1) Cho p, q là hai số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh $p^4 + 2019q^4$ chia hết cho 20.

2) Cho các số nguyên dương a, b, c, d thỏa mãn $a < b \le c < d$; $ad = bc$ và $\sqrt{d} - \sqrt{a} \le 1$.

a) Chứng minh $a + d > b + c$.

b) Chứng minh a là một số chính phương.

Bài 3. *(1,5 điểm)*

1) Với x, y, z là các số thực thỏa mãn $xyz = 1$, chứng minh

$$\frac{1}{xy+x+1} + \frac{1}{yz+y+1} + \frac{1}{zx+z+1} = 1.$$

2) Với x, y, z là các số thực dương thay đổi và thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{\sqrt{2x^2+y^2+3}} + \frac{1}{\sqrt{2y^2+z^2+3}} + \frac{1}{\sqrt{2z^2+x^2+3}}$.

Bài 4. *(3 điểm)*

Cho tứ giác ABCD (không có hai cạnh nào song song) nội tiếp đường tròn (O). Các tia BA và CD cắt nhau tại điểm F. Gọi E là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Vẽ hình bình hành AEDK.

1) Chứng minh tam giác FKD đồng dạng với tam giác FEB.

2) Gọi M, N tương ứng là trung điểm của các cạnh AD, BC. Chứng minh đường thẳng MN đi qua trung điểm của đoạn thẳng EF.

3) Chứng minh đường thẳng EF tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp của tam giác EMN.

Bài 5. *(1 điểm)*

Cho tập hợp $S = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \le x \le 50\}$. Xét A là một tập hợp con bất kì của tập hợp S và có tính chất: Không có ba phần tử nào của tập hợp A là số đo độ dài ba cạnh của một tam giác vuông.

1) Tìm một tập hợp A có đúng 40 phần tử và thỏa mãn điều kiện đề bài.

2) Có hay không có một tập hợp A có đúng 41 phần tử và thỏa mãn điều kiện đề bài? Hãy giải thích câu trả lời.

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 TP. HÀ NỘI

Năm học 2018 - 2019

Môn thi: Toán (chuyên Tin)

Thời gian làm bài: 150 phút

Bài 1. *(2,0 điểm)*

a) Giải phương trình $x^2 + 2x + 7 = (x+3)\sqrt{x^2+5}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x-y)(x^2-y^2)=1\\(x+y)(x^2+y^2)=1.\end{cases}$

Bài 2. *(2,5 điểm)*

a) Tìm tất cả cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn $4x^2 + 8xy + 3y^2 + 2x + y + 2 = 0$.

b) Cho hai số nguyên dương a, b thỏa mãn $3a^2 + a = 4b^2 - b$. Chứng minh a + b là một số chính phương.

Bài 3. *(1,5 điểm)*

a) Với x, y, z là các số thực thay đổi và thỏa mãn xyz = 1, chứng minh

$$\frac{1}{xy+x+1} + \frac{1}{yz+y+1} + \frac{1}{zx+z+1} = 1.$$

b) Với x, y, z là các số thực dương thay đổi và thỏa mãn $xyz \geq 1$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{\sqrt{xy+x+1}} + \frac{1}{\sqrt{yz+y+1}} + \frac{1}{\sqrt{zx+z+1}}$.

Bài 4. *(3,0 điểm)*

Cho tam giác nhọn ABC cân tại A, đường cao BE và nội tiếp đường tròn (O; R). Kẻ đường kính BD của đường tròn (O). Đường thẳng BE cắt các đường thẳng AD và AO lần lượt tại các điểm I và H.

a) Chứng minh $BH.BI = 2R^2$.

b) Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Lấy điểm N thuộc tia đối của tia OA sao cho $ON = \frac{R}{2}$. Chứng minh tứ giác AMNC là tứ giác nội tiếp.

c) Gọi K là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh đường thẳng KE đi qua trung điểm của đoạn thẳng OI.

Bài 5. *(1,0 điểm)*

Trên một đường tròn cho 2018 điểm phân biệt. An và Bình cùng chơi trò chơi như sau: Mỗi lượt chơi, một bạn sẽ nối 2 điểm trong 2018 điểm đã cho để được một dây cung sao cho dây cung vừa được vẽ không có điểm chung với bất kì dây cung nào đã vẽ trước đó. Hai bạn luân phiên thực hiện lượt chơi của mình. Bạn đầu tiên không thể thực hiện được lượt chơi của mình là người thua cuộc. Nếu An là người đi trước, hãy chỉ ra chiến thuật chơi để An luôn là người thắng cuộc.

MỘT GÓC NHÌN HAI BÀI HÌNH TRONG ĐỀ THI IMO 2018

ThS. NGUYỄN BÁ ĐANG *(Hà Nội)*

Kì thi Olympic Toán học Quốc tế (International Mathematical Olympiad viết tắt là IMO) được tổ chức lần thứ nhất tại Romania có 7 nước tham gia (các nước Đông Âu), từ năm 1970 mở rộng thành kì thi toán quốc tế dành cho học sinh Trung học. Năm 2018 Romania là nước đăng cai tổ chức kì thi IMO lần thứ 59, có trên 100 nước tham dự, mỗi nước không quá 6 học sinh, đoàn Việt Nam đoạt một Huy chương Vàng, hai Huy chương Bạc, ba Huy chương Đồng.

Tôi muốn giới thiệu hai bài hình phẳng mà học sinh lớp 9 với học lực khá làm được, bài 1 có gần 400 thí sinh giải được đầy đủ; bài 6 được coi là khó nên chỉ có 18 thí sinh làm trọn vẹn. Để giải bài 6 cần bổ sung thêm kiến thức về đường tròn Apollonius.

Bài 1. Cho tam giác nhọn ABC. Các điểm D và E lần lượt nằm trên các đoạn thẳng AB và AC thỏa mãn AD = AE. Đường trung trực của BD cắt cung nhỏ AB tại F, đường trung trực của CE cắt cung nhỏ AC tại G. Chứng minh rằng các đường thẳng DE và FG song song (hoặc cùng nằm trên một đường thẳng).

Lời giải. Các đường thẳng FD, GE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thứ tự tại các điểm P và Q *(Hình 1).*

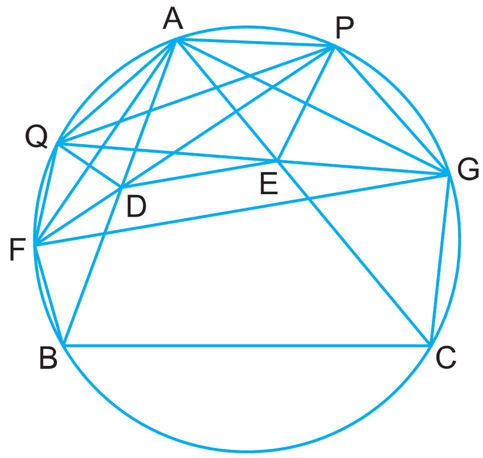
Vì F nằm trên đường trung trực của BD nên

$\widehat{FBD} = \widehat{FDB} = \widehat{ADP}$.

Mà $\widehat{ABF} = \widehat{APF}$ (cùng chắn cung AF).

Suy ra $\widehat{ADP} = \widehat{APF} = \widehat{APD}$.

Do đó tam giác ADP cân tại A, từ đó $AP = AD$.



Hình 1

Theo giả thiết thì $AD = AE$ nên P thuộc đường tròn tâm A bán kính AD. Chứng minh tương tự Q thuộc đường tròn tâm A bán kính AD.

Suy ra P, E, D, Q cùng thuộc một đường tròn.

1) Nếu 3 điểm P, D, E thẳng hàng thì E trùng với P (do $\widehat{APD} = \widehat{ADP} = \widehat{AED}$). Do đó E trùng với C và G trùng với C, suy ra DE và FG cùng nằm trên một đường thẳng.

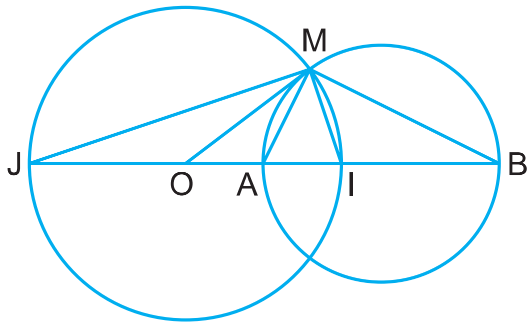
2) Tương tự, nếu ba điểm Q, D, E thẳng hàng thì D, Q trùng với B nên DE và FG cùng nằm trên một đường thẳng.

3) Giả sử D, E, P, Q không thẳng hàng thì $\widehat{PDE} = \widehat{PQE} = \widehat{PQG} = \widehat{PFG}$.

Suy ra $\widehat{PDE} = \widehat{PFG}$, từ đó DE // FG.

Bài 2. Cho tứ giác ABCD thỏa mãn $AB.CD = BC.DA$. Điểm X nằm trong tứ giác ABCD sao cho $\widehat{XAB} = \widehat{XCD}$ và $\widehat{XBC} = \widehat{XDA}$. Chứng minh rằng $\widehat{BXA} + \widehat{DXC} = 180^o$.

Để giải bài này ta cần kiến thức bổ sung về *đường tròn Apollonius. (Hình 2)*



Hình 2

Cho đoạn thẳng $AB = a$ và k là số thực cho trước ($0 < k < 1$).

Tập hợp những điểm M thỏa mãn $\frac{MA}{MB} = k$ là đường tròn đường kính IJ, trong đó I, J thứ tự là giao điểm của AB với các đường phân giác trong và ngoài xuất phát từ M của tam giác MAB, thỏa mãn $\frac{IA}{IB} = \frac{JA}{JB} = \frac{MA}{MB} = k$. Đường tròn này có tên là đường tròn Apollonius.

Tính chất của đường tròn Apollonius: Gọi O là trung điểm của IJ thì ta có OM là tiếp tuyến của đường tròn (MAB).

Chứng minh. Ta thấy điểm O nằm ngoài đường tròn (MAB) và có

$$\frac{MA}{MB} = \frac{IA}{IB} = \frac{JA}{JB} = \frac{IA + JA}{IB + JB} = \frac{IJ}{IJ + 2IB} = \frac{2OI}{2OB} = \frac{OM}{OB}.$$

Suy ra $\Delta OMA \backsim \Delta OBM$.

Do đó $\widehat{OMA} = \widehat{MBA}$.

Suy ra OM là tiếp tuyến của đường tròn (MAB).

Áp dụng đường tròn Apollonius ta vẽ được tứ giác ABCD thỏa mãn các điều kiện của đề bài.

Lời giải. Giả sử X là điểm nằm trong tứ giác ABCD thỏa mãn $\widehat{XAB} = \widehat{XCD}$, $\widehat{XBC} = \widehat{XDA}$.

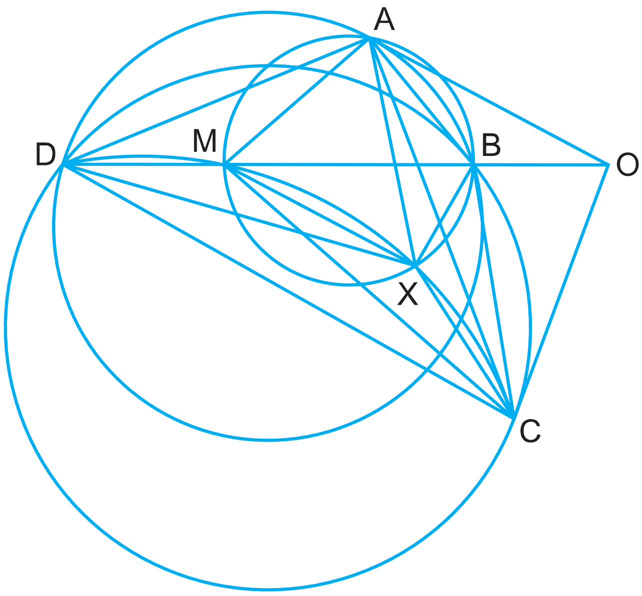
Gọi M là giao điểm của các đường tròn (XAB) và (XCD). Ta có ABXM và DMXC là các tứ giác nội tiếp *(Hình 3).*

Suy ra $\widehat{XMB} = \widehat{XAB} = \widehat{XCD} = 180^o - \widehat{XMD}$.

Do đó $\widehat{XMB} + \widehat{XMD} = 180^o$.

Suy ra D, M, B thẳng hàng.

(Xét tương tự khi ABMX và DXMC là các tứ giác nội tiếp. Khi hai đường tròn (XAB) và (XCD) tiếp xúc nhau tại X thì từ $\widehat{XAB} = \widehat{XCD}$, xét hai góc đỉnh X tạo bởi tiếp tuyến và dây cung XB, XD suy ra D, X, B thẳng hàng).



Hình 3

Theo giả thiết $AB.CD = BC.DA \Leftrightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{CB}{CD}$ với AB < AD (nếu AB > AD thì CD < BC, xét tương tự).

Suy ra A và C nằm trên đường tròn Apollonius với tâm O nằm trên BD và OA là tiếp tuyến của đường tròn (ABD), OC là tiếp tuyến của đường tròn (BCD).

Ta có $\widehat{AOC} = \widehat{ABC} - \widehat{BAO} - \widehat{BCO}$

$= \widehat{ABC} - \widehat{ADO} - \widehat{CDO} = \widehat{ABC} - \widehat{ADC}$

$= \widehat{ABX} + \widehat{XBC} - \widehat{ADC}$

$= 180^o - \widehat{AMX} + \widehat{XDA} - \widehat{ADC}$

$= 180^o - \widehat{AMX} - \widehat{XDC}$

$= 180^o - \widehat{AMX} - \widehat{XMC} = 180^o - \widehat{AMC}$.

Từ đó $\widehat{AOC} + \widehat{AMC} = 180^o$.

Suy ra tứ giác AOCM nội tiếp.

Vì $OA = OC$ nên $\widehat{AMO} = \widehat{OMC}$.

Suy ra $\widehat{BXA} = \widehat{AMB} = 180^o - \widehat{AMD}$

$= 180^o - \widehat{CMD} = 180^o - \widehat{DXC}$

$\Rightarrow \widehat{BXA} + \widehat{DXC} = 180^o$.

Ô chữ BIRDS

HOÀNG THỊ PHƯỢNG
(GV. TH Ngô Đức Kế, Can Lộc, Hà Tĩnh)

Các loài chim đang “ẩn trốn” trong ô chữ này. Chúng mình cùng tìm ra tên của các loài chim đó nhé!

T	H	A	R	K	S	W	A	N	U	N	A
A	A	A	P	M	I	N	O	O	N	M	K
W	W	H	M	O	P	A	T	P	A	U	T
S	K	O	O	W	L	F	O	E	A	S	S
T	D	A	E	Q	S	P	M	L	U	D	T
A	S	G	L	S	A	E	O	I	F	M	O
L	A	K	E	H	H	A	U	C	H	E	R
B	A	C	K	E	E	C	L	A	S	N	K
A	C	R	D	R	E	O	R	N	U	E	A
T	O	A	F	O	L	C	E	U	S	P	C
R	F	N	A	N	S	K	S	L	C	A	H
O	H	E	E	P	T	K	A	L	A	R	A
S	U	Y	C	I	E	E	M	E	D	R	L
S	A	X	V	D	R	A	U	T	W	O	O
R	O	V	O	L	L	E	L	B	A	T	T

Kết quả APRIL SHOWERS (TTT2 số 183)

Chủ Vườn đã nhận được khá nhiều bài của các bạn gửi về. Mặc dù một số bạn đặt câu còn chưa thực sự đúng ngữ pháp hoặc viết sai chính tả nhưng Chủ Vườn thấy rất vui mừng vì có nhiều bạn “đam mê” tiếng Anh cũng như đã dành thời gian ghé qua Vườn Anh chơi. Sau đây là đáp án kì trước:

Từ láy ***pitter patter*** nghĩa là tiếng lộp độp, lộp cộp, rộn rã. Cách viết khác của từ này là ***pit-a-pat***.

Còn đây là hai trong số nhiều ví dụ của các bạn có sử dụng từ pitter patter:

Her heart went pitter patter as she opened the letter.

I heard the pitter patter of my mother’s footsteps on the stairs.

Phần thưởng kì này sẽ được gửi tới các bạn sau: *Đỗ Hồng Liên*, 8A3, THCS Trưng Vương, Mê Linh, **Hà Nội**; *Mẫn Mai Phương, Nguyễn Phương Linh*, 6A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Trần Trọng Quang Huy*, 8A, THCS Trần Huy Liệu, Vụ Bản, **Nam Định**; *Vũ Huyền Trang*, 8H, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, **Phú Thọ**; *Cao Thị Khánh Linh*, 8B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**.

Chủ Vườn

Kết quả

Giải toán qua thư

Bài 1(183). Với mỗi số nguyên dương a, kí hiệu S(a) là tổng tất cả các chữ số của số a. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của S(4020n) với n là số nguyên dương.

Lời giải. Ta có $4020 \vdots 3 \Rightarrow 4020n \vdots 3$

$\Rightarrow S(4020n) \vdots 3 \Rightarrow S(4020n) \in \{3;\ 6;\ 9;\ 12;\ ...\}$.

Ta nhận thấy với $n = 5$ thì

$4020.n = 4020.5 = 20100$. Mà $S(20100) = 3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của S(4020n) là 3 tương ứng với $n = 5$.

Nhận xét. Bài toán sử dụng dấu hiệu "một số chia hết cho 3 thì tổng các chữ số của nó cũng chia hết cho 3". Xin được khen bạn đã có lời giải đúng: *Vũ Minh Nguyệt*, 6E, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc.**

PHÙNG KIM DUNG

Bài 2(183). Cho tam giác ABC với AB < AC, đường cao AH, trung tuyến AM. Biết rằng $\widehat{BAH} = \widehat{HAM} = \widehat{MAC}$. Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác vuông.

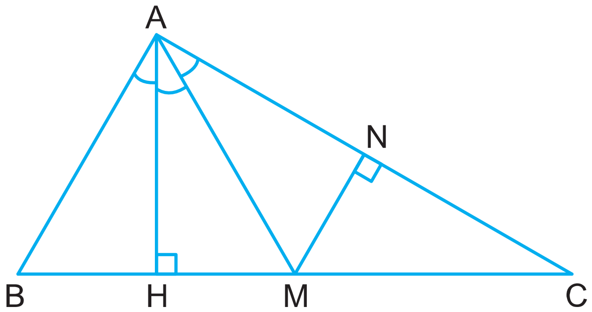
Lời giải. Ta có $\Delta ABH = \Delta AMH$ (g.c.g).

Suy ra $HB = HM = \frac{1}{2}MB$.

Kẻ $MN \perp AC$ ($N \in AC$).

Khi đó ta có $\Delta ANM = \Delta AHM$.

Suy ra $MN = MH = \frac{1}{2}MB = \frac{1}{2}MC$.



Trong tam giác vuông MNC có

$MN = \frac{1}{2}MC \Rightarrow \widehat{NCM} = 30^o$

$\Rightarrow \widehat{HAC} = 90^o - \widehat{ACH} = 90^o - 30^o = 60^o$.

Do đó $\widehat{MAN} = \widehat{MAH} = \widehat{HAB} = \frac{1}{2} \cdot 60^o = 30^o$.

Suy ra $\widehat{BAC} = 90^o \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A.

Nhận xét. Tam giác vuông ABC có $\widehat{ACB} = 30^o$, $\widehat{ABC} = 60^o$ nói trên còn được gọi là nửa tam giác đều. Số bài giải gửi về tòa soạn tương đối nhiều. Các bạn sau có lời giải gọn hơn cả: *Lê Đăng Quang*, 7A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Hán Vũ Long*, *Trần Anh Vũ*, *Phùng Đăng Dương*, 7C, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, **Phú Thọ**; *Nguyễn Thanh Tiến*, *Nguyễn Thị Hiền Diệu*, *Lê Minh Long*, *Nguyễn Quang Đức*, *Trịnh Duy Đạt*, *Lê Đức Chính*, 7B, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa**; *Phạm Ngọc Trinh*, *Trần Phương Mai*, 7B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; *Trần Thiên Ngân*, *Lưu Bảo Phúc*, *Phạm Thị Khánh Huyền*, *Bùi Đoàn Hà Trang*, *Trần Trọng Huy*, 7A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; *Nguyễn Lê Hưng*, *Đinh Thị Việt Hà*, *Trần Tùng Chi*, *Nguyễn Trần Khánh Huyền*, *Võ Văn Hải*, 7D, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; *Phùng Lê Anh Đức*, 7A1, THCS Hải Hòa, thị xã Cửa Lò, **Nghệ An**; *Hồ Xuân Hiệp*, 7A, THCS Lê Bình, Hương Sơn, **Hà Tĩnh**.

HỒ QUANG VINH

Bài 3(183). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 4\sqrt{3x+4y} + \sqrt{8-x+y} = 23 \\ 3\sqrt{8-x+y} - 2\sqrt{38+6x-13y} = 5. \end{cases}$$

Lời giải. ĐKXĐ $3x + 4y \geq 0$; $8 - x + y \geq 0$; $38 + 6x - 13y \geq 0$.

Đặt $a = \sqrt{3x+4y}$; $b = \sqrt{8-x+y}$;

$c = \sqrt{38+6x-13y}$; a, b, $c \geq 0$.

Hệ phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{cases} 4a = 23 - b & (1) \\ 2c = 3b - 5 & (2) \\ a^2 + 9b^2 + c^2 = 110 & (3) \end{cases}$$

Thay (1) và (2) vào (3) ta được

$$\left(\frac{23-b}{4}\right)^2 + 9b^2 + \left(\frac{3b-5}{2}\right)^2 = 110$$

$$\Leftrightarrow 181b^2 - 166b - 1131 = 0$$

$$\Leftrightarrow b = 3 \text{ (thỏa mãn) hoặc } b = \frac{-377}{181} \text{ (loại).}$$

Từ đó giải được $a = 5$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (3; 4)$.

Nhận xét. Sau khi tìm ra mối liên hệ giữa ba căn thức, bài toán được giải bằng phương pháp thế quen thuộc. Hai bạn sau có lời giải tốt: *Nguyễn Thị Quỳnh Chi,* 8A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Nguyễn Thu Hiền,* 8A3, THCS Thị trấn Kỳ Sơn, Kỳ Sơn, **Hòa Bình.**

BÙI MẠNH TÙNG

Bài 4(183). Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2}\right).$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có $\dfrac{a^2+b^2}{b} + 2b \geq 2\sqrt{2(a^2+b^2)}$ hay

$$\frac{a^2}{b} \geq 2\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2} - 3b.$$

Do đó, với chú ý rằng $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x^2+y^2} \geq \dfrac{1}{2}(x+y)$

ta có $\dfrac{a^2}{b} + \dfrac{b^2}{c} + \dfrac{c^2}{a} \geq 2\sqrt{2}(\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2}) - 3(a+b+c)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2}\right)$$

$$+ \frac{3}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2}\right)$$

$$-3(a+b+c)$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2}\right)$$

$$+3(a+b+c) - 3(a+b+c)$$

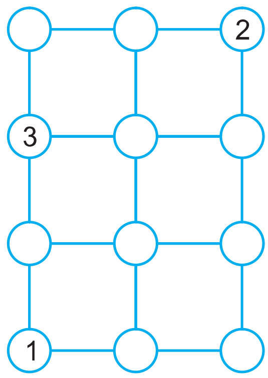
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2}\right).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải đúng cho bài toán: *Nguyễn Thu Hiền*, 8A3, THCS Thị Trấn Kỳ Sơn, Kỳ Sơn, **Hòa Bình**; *Ngô Bảo An*, *Nguyễn Lê Tùng Dương*, 9A0, THCS Nguyễn Trường Tộ, Đống Đa, **Hà Nội**; *Trần Cao Bảo Châu*, 7A, THCS Trần Hưng Đạo, Buôn Ma Thuật, **Đắk Lắk**; *Trương Ngọc Tâm*, 8D, THCS Nhữ Bá Sỹ, thị trấn Bút Sơn, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa**; *Huỳnh Nguyên Phúc*, 9A1, THCS Mỹ Lộc, Phù Mỹ, **Bình Định**; *Phùng Đăng Dương*, 7C, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, **Phú Thọ**; *Trần Phương Mai*, 7B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, **Nghệ An.**

CAO VĂN DŨNG

Bài 5(183). Hai người chơi hai quân cờ S (sói) và T (thỏ) trên một bàn cờ như trong hình vẽ. Người A luôn dùng quân S, người B luôn dùng quân T. Mỗi bước đi được đẩy một quân cờ ở một đỉnh ô vuông của bàn cờ theo cạnh của ô vuông đến đỉnh ô vuông gần nhất. Bắt đầu là người A đẩy quân cờ S đi một bước, sau đó lần lượt đến người B đẩy quân cờ T một bước và cứ lần lượt như thế. Người A thắng nếu sau không quá 20 bước quân cờ S gặp được quân cờ T tại cùng một ô. Hỏi rằng A thắng hay không nếu:



a) S bắt đầu ở ô 1, còn T bắt đầu ở ô 2.

b) S bắt đầu ở ô 1, còn T bắt đầu ở ô 3.

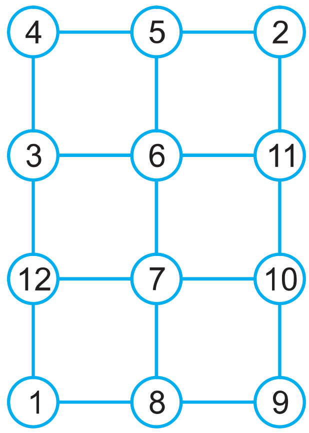
Lời giải. Trước hết, ta đánh số thứ tự các ô như hình vẽ.

a) Người A luôn thắng sau không nhiều hơn 7 nước đi của cả 2 người chơi A và B nếu A đi theo thuật toán sau:

- Nước đi thứ 1: Người A di chuyển quân cờ S từ ô số 1 sang ô số 12.
- Nước đi thứ 2: Người B di chuyển quân cờ T đến ô số 5 hoặc 11.

- Nước đi thứ 3: Người A sẽ di chuyển quân cờ S đến vị trí ô số 3 sau khi người B di chuyển đến ô số 5, hoặc di chuyển S đến ô số 7 nếu B đã đi đến ô số 11.

- Nước đi thứ 4: Sau nước đi thứ 3 của người A thì hai quân cờ S và T ở hai vị trí ô đối diện nhau của một ô vuông đơn vị nên ở nước đi thứ 4 này, người B đi đến các ô số 4, 6 (hoặc 6, 10) thì kiểu gì thì cũng bị người A chiến thắng ở nước đi thứ 5 vì quân cờ S đang ở ô 3 (hoặc ô số 5). Do đó người B buộc phải di chuyển quân cờ T về ô số 2 ban đầu.

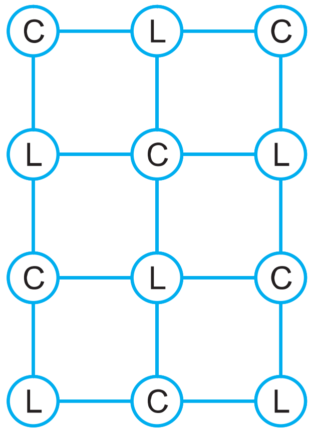


- Nước đi thứ 5: Người A di chuyển quân cờ S về ô số 6.

- Nước đi thứ 6: Người B di chuyển quân cờ T về ô số 5 hoặc 11.

- Nước đi thứ 7, người A di chuyển quân cờ S tới ô mà quân cờ T đang đứng ở đó và chiến thắng.

b) Người A không thể thắng nếu người B chơi với thuật toán giữ vị trí quân cờ T cách 2 nước đi so với vị trí quân cờ S. Trên bàn cờ, ô có số chẵn ghi là C, ô có số lẻ ghi là L. Vì ban đầu quân cờ S và T tương ứng ở ô số 1 và số 3 có khoảng cách là 2 nước đi và có số ô cùng là số lẻ (L) nên người B chơi chiến thuật đi quân cờ T tới ô có số cùng tính chẵn lẻ với với vị trí quân cờ S ở nước đi ngay trước đó và không được tự đi vào ô mà quân cờ S đang đứng. Khi đó khoảng cách giữa hai quân cờ S và T sau nước đi của người B luôn là 2 nước đi nên người A không thể thắng (dù sau hơn 20 nước đi).



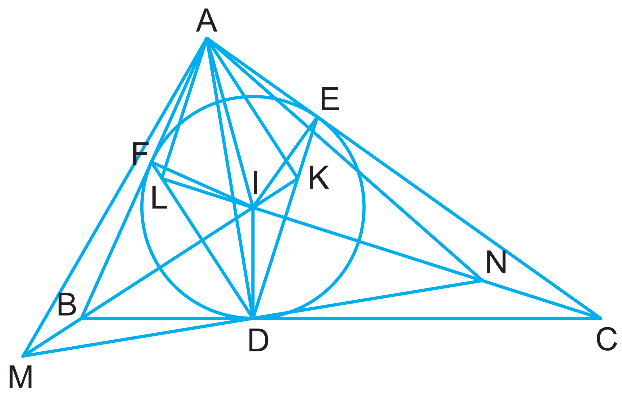
Nhận xét. Đây là bài toán khá thú vị, tương đối khó và là loại hình mới với học sinh THCS ở Việt Nam nên tuy có nhiều bạn gửi bài đến tòa soạn, nhưng rất tiếc là hầu hết các bạn đều giải sai. Có duy nhất bạn *Hoàng Tuấn Dũng*, 7A1, THCS Minh Khai, TP. Hà Giang, **Hà Giang** có lời giải tốt.

TRỊNH HOÀI DƯƠNG

Bài 6(183). Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn tâm I. Gọi D là tiếp điểm của (I) và BC. Đường thẳng qua D vuông góc với AD cắt IB, IC theo thứ tự tại M và N. Chứng minh rằng tam giác AMN cân tại A.

Lời giải. Đường tròn (I) tiếp xúc với AB, AC tương ứng tại F, E.

Gọi K là giao điểm của BI và DE, L là giao điểm của CI và DF.



Giả sử L nằm trong đoạn DF và K nằm trong đoạn DE. Các trường hợp khác chứng minh tương tự.

Dễ thấy

$$\widehat{AIK}=\widehat{IAB}+\widehat{IBA}=\frac{\widehat{BAC}}{2}+\frac{\widehat{ABC}}{2}=90^o-\frac{\widehat{ACB}}{2}$$

$$=\widehat{CED}=180^o-\widehat{AEK};$$

$$\widehat{AIL}=\widehat{IAC}+\widehat{ICA}=\frac{\widehat{BAC}}{2}+\frac{\widehat{ACB}}{2}=90^o-\frac{\widehat{ABC}}{2}$$

$$=\widehat{BFD}=180^o-\widehat{AFL}.$$

Do đó các tứ giác AEKI, AFLI nội tiếp. (1)

Vậy $\widehat{AKM}=\widehat{AKI}=\widehat{AEI}=90^o=\widehat{AFI}=\widehat{ALI}=\widehat{ALN}$.

Kết hợp với $AD\perp MN$, suy ra các tứ giác AKDM, ALDN nội tiếp. (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$$\widehat{DAM}=\widehat{DKM}=180^o-\widehat{EKI}=\widehat{EAI}=\widehat{CAI}=\widehat{BAI}$$

$$=\widehat{FAI}=180^o-\widehat{FLI}=\widehat{DLI}=\widehat{DLN}=\widehat{DAN}.$$

Từ đó, chú ý rằng $AD\perp MN$, suy ra tam giác AMN cân tại A.

Nhận xét. Không có bạn nào giải đúng bài này.

NGUYỄN MINH HÀ

Kết quả kì thi Olympic quốc tế của học sinh Việt Nam năm 2018

- Kì thi Olympic Toán học quốc tế lần thứ 59 năm 2018 (IMO 2018) diễn ra tại Romania với sự tham dự của 615 thí sinh đến từ 110 quốc gia và vùng lãnh thổ. Kết quả cả 6 thí sinh của đoàn Việt Nam dự thi đều đoạt huy chương. Thí sinh Nguyễn Quang Bin, lớp 12, trường THPT chuyên Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội đoạt huy chương Vàng. Huy chương Bạc thuộc về 2 thí sinh: Phan Minh Đức, lớp 11, trường THPT chuyên Hà Nội-Amsterdam, Hà Nội; Trịnh Văn Hoàn, lớp 12, trường THPT chuyên Trần Phú, TP. Hải Phòng. Huy chương Đồng thuộc về các thí sinh Trần Việt Hoàng, lớp 12, trường THPT chuyên Trần Phú, TP. Hải Phòng; Trương Mạnh Tuấn, lớp 12, trường THPT chuyên Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội; Đỗ Hoàng Việt, lớp 12, trường THPT chuyên Nguyễn Quang Diệu, Đồng Tháp.
- Kì thi Olympic Vật lí quốc tế lần thứ 49 năm 2018 được tổ chức tại Cộng hòa Bồ Đào Nha từ ngày 21 đến 29/7/2018, với sự tham gia của 86 nước và vùng lãnh thổ. Việt Nam là một trong số 10 nước đoạt từ 2 huy chương Vàng trở lên và xếp thứ hạng cao. Cả 5 thí sinh của Việt Nam dự thi đều đoạt giải. Huy chương Vàng thuộc về các thí sinh Nguyễn Ngọc Long, lớp 12, trường THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa; Trần Đức Huy, lớp 12, trường THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam, Hà Nội. Thí sinh Nguyễn Xuân Tân, lớp 11, trường THPT chuyên Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội và Trịnh Duy Hiếu, lớp 11, trường THPT chuyên Bắc Giang, Bắc Giang đoạt huy chương Bạc; Nguyễn Văn Thành Lợi, lớp 12, trường THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước đoạt Huy chương Đồng.
- Kì thi Olympic Hoá học quốc tế năm 2018 lần thứ 50 tổ chức tại Cộng hòa Séc và Cộng hòa Solovakia với sự tham dự của 304 thí sinh đến từ 82 quốc gia và vùng lãnh thổ. Cả 4 thí sinh của Việt Nam dự thi đều đoạt huy chương. Huy chương Vàng thuộc về thí sinh Phạm Đức Anh, lớp 12, trường THPT chuyên Khoa học Tự nhiên, ĐHQG Hà Nội. Huy chương Bạc thuộc về Nguyễn Văn Chí Nguyên, lớp 11, trường THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa và Hoàng Thanh Tùng, lớp 12, trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định. Huy chương Đồng thuộc về Phan Nhật Duật, lớp 12, trường THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An.
- Kì thi Olympic Sinh học quốc tế năm 2018 lần thứ 29 tổ chức ở nước Cộng hòa Hồi giáo Iran, có 71 quốc gia và vùng lãnh thổ tham dự với tổng số 261 thí sinh. Kết quả cả 4 thí sinh dự thi đều đoạt huy chương. Huy chương Vàng thuộc về các thí sinh Nguyễn Phương Thảo, lớp 12, trường THPT chuyên Khoa học tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội; Trần Thị Minh Anh, lớp 12, trường THPT chuyên Trần Phú, Hải Phòng; Hoàng Minh Trung, lớp 11, trường THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa. Thí sinh Hoàng Văn Đông, lớp 12, trường THPT chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương đoạt Huy chương Bạc. Đặc biệt, thí sinh Nguyễn Phương Thảo đạt tổng điểm cao nhất cuộc thi trên tổng số 261 thí sinh.
- Kì thi Olympic Tin học Châu Á năm 2018 được tổ chức theo hình thức thi trực tuyến với 586 thí sinh thuộc 31 nước và vùng lãnh thổ tham gia, Cộng hòa Liên bang Nga là nước đăng cai. Việt Nam có 7/7 thí sinh tham gia xét giải đều đoạt giải. Huy chương Vàng thuộc về Phạm Đức Thắng, lớp 12, THPT chuyên Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội. Huy chương Bạc thuộc về các thí sinh: Hoàng Xuân Nhật, lớp 12, THPT Năng khiếu, Đại học Quốc gia TP. Hồ Chí Minh; Nguyễn Khánh, lớp 12; Nguyễn Minh Tùng, lớp 11, THPT chuyên Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội; Trịnh Hữu Gia Phúc, lớp 11, THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa. Huy chương Đồng thuộc về: Nguyễn Hoàng Hải Minh, lớp 12, THPT chuyên Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội và Dương Quốc Hưng, lớp 12, THPT chuyên Thăng Long, Lâm Đồng.

MAI VŨ

TOÁN CHUYỂN ĐỘNG ĐỀU TRONG HAI CUỐN SÁCH TOÁN CỔ HÁN NÔM NƯỚC TA

TẠ DUY PHƯỢNG *(Viện Toán học, Hà Nội)*
ĐOÀN THỊ LỆ *(Đại học Thanh Hoa, Đài Loan)*
CUNG THỊ KIM THÀNH, PHAN THỊ ÁNH TUYẾT

1. Mở đầu

Toán chuyển động đều hiện nay được giảng dạy trong chương trình lớp 5. Dạng toán chuyển động đều có lẽ đầu tiên được trình bày trong cuốn *Cửu chương toán thuật* của Lưu Huy (Lui Hui, Trung Hoa, thế kỉ III), là cuốn sách mà vai trò của nó trong phát triển toán học Trung Hoa được coi là tương đương với cuốn *Cơ sở* của Euclid ở phương Tây. *Cửu chương toán thuật* là một trong 10 cuốn sách toán được dạy trong Quốc tử giám Trung Quốc từ thời nhà Đường và cũng có ảnh hưởng lớn đến phát triển toán học tại Nhật Bản, Triều Tiên, Việt Nam.

Dạng toán chuyển động đều cũng đã được đề cập đến trong một số sách toán Hán Nôm nước ta. Bài viết này giới thiệu *dạng toán chuyển động đều* trong hai cuốn sách toán Hán Nôm *Ý Trai toán pháp nhất đắc lục* của Nguyễn Hữu Thận và *Bút toán chỉ nam* của Nguyễn Cẩn.

2. Các công thức cơ bản

Công thức cơ bản 1. (*Chuyển động ngược chiều*) Hai vật cách nhau quãng đường s khởi hành cùng lúc và chuyển động đều ngược chiều với vận tốc v_1 và v_2. Sau thời gian t chúng gặp nhau thì $s = s_1 + s_2 = v_1t + v_2t$.

Suy ra $t = s : (v_1 + v_2)$. (1)

Công thức cơ bản 2. (*Chuyển động cùng chiều*) Hai vật cách nhau một quãng đường độ dài s khởi hành cùng lúc và chuyển động đều cùng chiều với vận tốc v_1 và v_2 $(v_2 > v_1)$. Sau thời gian t chúng gặp nhau. Ta có $v_2t = s + v_1t$.

Suy ra $t = s : (v_2 - v_1)$. (2)

Công thức cơ bản 3. Hai vật chuyển động đều với vận tốc v_1 và v_2 thì tỉ lệ quãng đường đi được s_1 và s_2 bằng tỉ lệ vận tốc:

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{v_1}{v_2}. \qquad (3)$$

Ba công thức (1), (2), (3) là ba công thức cơ bản giải các bài toán chuyển động đều.

Toán chuyển động đều trong *Ý Trai toán pháp nhất đắc lục*

Cuốn sách *Ý Trai toán pháp nhất đắc lục* (*Một điều tâm đắc về toán của Ý Trai*) của Nguyễn Hữu Thận hoàn thành năm 1829 đã được giới thiệu sơ bộ trong [3], [4]. Để dễ đọc, chúng tôi trình bày lời giải gần với ngôn ngữ hiện đại, nhưng vẫn cố gắng trung thành với lời giải trong các sách toán Hán Nôm.

Toán chuyển động đều trong *Ý Trai toán pháp nhất đắc lục* **[2]** được Nguyễn Hữu Thận gọi là *hành trình khoai mạn* (hành trình nhanh chậm).

Bài toán 1. Giáp đi được 80 dặm một ngày, Ất đi 48 dặm một ngày. Ất đã đi trước được 480 dặm thì Giáp mới xuất phát. Hỏi Giáp đi bao nhiêu dặm và đi bao nhiêu ngày thì đuổi kịp Ất?

Lời giải. Thời gian Giáp và Ất cùng đi là:

$t = s : (v_2 - v_1) = 480 : (80 - 48) = 15$ (ngày).

Vậy quãng đường hai người đi cho tới khi gặp nhau là $15 \times 80 = 1200$ (dặm).

Bài toán 2. Người đi nhanh trong một ngày đi được 95 dặm, người đi chậm trong một ngày đi được 75 dặm. Nay người đi chậm đã đi được 8 ngày. Hỏi người đi nhanh phải đi trong bao nhiêu ngày để có thể đuổi kịp người kia? Và đoạn đường dài bao nhiêu dặm?

Lời giải. Quãng đường người đi chậm đi trong tám ngày là $s = 75 \times 8 = 600$ (dặm).

Vậy thời gian để người đi nhanh đuổi kịp người đi chậm là:

$t = s : (v_2 - v_1) = 600 : (95 - 75) = 30$ (ngày).

Đoạn đường dài $95 \times 30 = 2850$ (dặm).

Bài toán 3. Giả sử người đi chậm đã đi được 7 ngày, sau đó người đi nhanh đi theo được 6 ngày thì gặp người kia. Lộ trình của họ là 1170 dặm. Hỏi mỗi người mỗi ngày đi được quãng đường bao nhiêu?

Lời giải. Người đi nhanh đi với vận tốc
1170 : 6 = 195 (dặm/ngày).
Người đi chậm đi hết 7 + 6 = 13 (ngày).
Vậy người đi chậm đi với vận tốc
1170 : 13 = 90 (dặm/ngày).

Bài toán 4. Giả sử có một người đi bộ, một người cưỡi ngựa. Người đi bộ đi trước 37 dặm, người cưỡi ngựa đuổi đến 154 dặm, còn 23 dặm mới đuổi kịp người đi bộ. Hỏi người cưỡi ngựa còn phải đi bao nhiêu dặm mới đuổi kịp người đi bộ?

Lời giải. Gọi vận tốc của người cưỡi ngựa là v_2, vận tốc của người đi bộ là v_1. Thời gian người cưỡi ngựa đi hết quãng đường 154 dặm cũng bằng thời gian người đi bộ đi hết quãng đường (154 – 37) + 23 = 140 (dặm).
Vậy ta có

$t = \frac{154}{v_2} = \frac{140}{v_1}$. Suy ra $\frac{v_2}{v_1} = \frac{154}{140} = \frac{11}{10}$.

Gọi quãng đường người cưỡi ngựa còn phải đi cho tới khi gặp nhau là s. Theo bài ra ta có

$\frac{11}{10} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{s}{s-23}$. Suy ra s = 253 dặm.

Để so sánh, chúng tôi đưa thêm một bài trong *Bút toán chỉ nam* ([1], in năm 1909), tuy ngôn ngữ của đề bài là mới, nhưng phương pháp giải vẫn như cũ (sử dụng ba công thức cơ bản trên).

Bút toán chỉ nam được Nguyễn Cẩn in năm 1909. Tuy *Bút toán chỉ nam* được viết bằng chữ Hán, nhưng Nguyễn Cẩn đã chịu ảnh hưởng của toán học phương Tây (do Pháp đưa vào Việt Nam cuối thế kỉ XIX). Thí dụ, ông đã trình bày phép toán cộng trừ nhân chia theo hàng dọc, nghĩa là khá gần với cách dạy toán hiện nay.

Bài toán 5. Chiều dài quãng đường từ trạm xe lửa Đông Khê đến Thái Nguyên là 52800 xích. Mỗi giờ xe ngựa đi được 9000 xích, xe tay đi được 7500 xích. Một xe đi từ Đông Khê lên, một xe đi từ Thái Nguyên xuống đều bắt đầu đi từ 6 giờ thì mấy giờ sẽ gặp nhau và ở nơi gặp nhau đó, mỗi xe đã đi được bao nhiêu xích?

Lời giải. Thời gian hai xe đi từ nơi xuất phát đến lúc gặp nhau là:

$t = s : (v_1 + v_2) = 52800 : (9000 + 7500)$

$= 3{,}2$ (giờ); 3,2 giờ = 3 giờ 12 phút.
Hai xe gặp nhau lúc:
6 giờ + 3 giờ 12 phút = 9 giờ 12 phút.
Xe ngựa đã đi: $9000 \times 3{,}2 = 28800$ (xích);
Xe tay đã đi: $7500 \times 3{,}2 = 24000$ (xích).

Kết luận. *Chuyển động đều* là dạng toán có ý nghĩa thực tế, đã được biết đến từ gần 2000 năm trước và cũng đã được phổ biến tại Việt Nam, ít nhất là cách đây khoảng 200 năm trong *Ý Trai toán pháp nhất đắc lục*. Bạn đọc có thể xem thí dụ, [5], để biết kĩ hơn về dạng toán chuyển động trong chương trình toán hiện nay.

Tài liệu trích dẫn

[1] 阮 瑾 Nguyễn Cẩn, 筆 算 指 南 *Bút toán chỉ nam*, 1909, Thư viện Hán Nôm: A. 1031.

[2] 阮 有 慎 Nguyễn Hữu Thận, 意 齋 算 法 一 得 錄 *Ý Trai toán pháp nhất đắc lục* (1829), Thư viện Hán Nôm: A.1336; VHv.1184; A. 982; A.1336/a.

[3] Tạ Duy Phượng, Đoàn Thị Lệ, Cung Thị Kim Thành, Phan Thị Ánh Tuyết, *Đôi nét về nhà toán học Việt Nam đầu thế kỉ XIX, Ý Trai Nguyễn Hữu Thận và cuốn sách Ý Trai toán pháp nhất đắc lục của ông*, Tạp chí *Toán học và Tuổi trẻ*, số 481 (tháng 7, 2017).

[4] Tạ Duy Phượng, Đoàn Thị Lệ, Cung Thị Kim Thành, Phan Thị Ánh Tuyết, *Sai phân pháp trong Ý Trai toán pháp nhất đắc lục*, Tạp chí *Toán Tuổi thơ* 2, số 183 và số 184 (tháng 4 và tháng 5-2018).

[5] Vũ Dương Thụy, Nguyễn Danh Ninh, *Các bài toán số học về chuyển động đều*, Nhà xuất bản Giáo dục, 2001 (Tái bản lần thứ nhất).

BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CỰC TRỊ ĐẠI SỐ QUA KÌ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN NĂM HỌC 2018-2019

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP. Hồ Chí Minh)

Bài viết này chúng tôi xin được giới thiệu cùng bạn đọc một số bài toán bất đẳng thức và cực trị đại số qua kì thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên toán năm học 2018 - 2019.

Bài toán 1. Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 1$.
Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{xy}{xy+z}} + \sqrt{\frac{yz}{yz+x}} + \sqrt{\frac{zx}{zx+y}} \le \frac{3}{2}.$$

(Đề thi tuyển sinh vào 10 chuyên toán tỉnh Hà Tĩnh)

Hướng dẫn giải. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số dương, ta có:

$$\sqrt{\frac{xy}{xy+z}} = \sqrt{\frac{xy}{xy+z(x+y+z)}} = \sqrt{\frac{x}{x+z}\cdot\frac{y}{y+z}}$$

$$\le \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+z} + \frac{y}{y+z}\right).$$

Vậy $\sqrt{\dfrac{xy}{xy+z}} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{x+z} + \dfrac{y}{y+z}\right)$. (1)

Chứng minh tương tự ta có

$$\sqrt{\frac{yz}{yz+x}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x+y} + \frac{z}{x+z}\right). (2)$$

$$\sqrt{\frac{zx}{zx+y}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{z}{y+z} + \frac{x}{x+y}\right). (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta có

$$\sqrt{\frac{xy}{xy+z}} + \sqrt{\frac{yz}{yz+x}} + \sqrt{\frac{zx}{zx+y}} \le \frac{3}{2}.$$

Bình luận. Đây là một bài toán quen thuộc, từ điều kiện rằng buộc $x + y + z = 1$, có được $xy + z = (x + z)(y + z)$ để đến lời giải.

Bài toán 2. Chứng minh rằng $x^4 - x + \frac{1}{2} > 0$ với mọi số thực x.

(Đề thi tuyển sinh vào 10 chuyên toán TP. Hồ Chí Minh)

Hướng dẫn giải. Ta có

$$x^4 - x + \frac{1}{2} = \left(x^4 - x^2 + \frac{1}{4}\right) + \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right)$$

$$= \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \ge 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$x^2 - \frac{1}{2} = 0$ và $x - \frac{1}{2} = 0$. Suy ra không có giá trị nào của x để đẳng thức xảy ra.

Vậy $x^4 - x + \frac{1}{2} > 0$ với mọi số thực x.

Bình luận. Bài toán với đánh giá chặt chẽ hơn là: Chứng minh rằng $x^4 - x + \frac{1}{2} \ge \frac{1}{8}(4 - 3\sqrt[3]{2})$ với x là số thực.

Bài toán 3. Với x, y, z là các số thực dương thay đổi và thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{\sqrt{2x^2+y^2+3}} + \frac{1}{\sqrt{2y^2+z^2+3}} + \frac{1}{\sqrt{2z^2+x^2+3}}.$$

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên toán TP. Hà Nội)

Hướng dẫn giải. Ta có $2(x - y)^2 \ge 0$ nên $9xy \le 4xy + 2x^2 + 2y^2 + xy$.

Suy ra $9xy \le (2x + y)(2y + x)$.

Mà $x, y > 0$ nên ta có

$$\frac{1}{2x+y} \le \frac{2y+x}{9xy} \Rightarrow \frac{1}{2x+y} \le \frac{2}{9x} + \frac{1}{9y}. \ (1)$$

Từ (1) và áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số dương, ta có

$$\frac{1}{\sqrt{2x^2+y^2+3}} = \frac{1}{\sqrt{2(2x^2+1)+y^2+1}}$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{4x+2y}} = \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{(2x+y).3}} \le \frac{\sqrt{6}}{4}\left(\frac{1}{2x+y} + \frac{1}{3}\right)$$

$$\le \frac{\sqrt{6}}{4}\left(\frac{2}{9x} + \frac{1}{9y} + \frac{1}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2x^2+y^2+3}} \le \frac{\sqrt{6}}{4}\left(\frac{2}{9x} + \frac{1}{9y} + \frac{1}{3}\right). \ (2)$$

Tương tự ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{2y^2+z^2+3}} \le \frac{\sqrt{6}}{4}\left(\frac{2}{9y} + \frac{1}{9z} + \frac{1}{3}\right). \ (3)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2z^2+x^2+3}} \le \frac{\sqrt{6}}{4}\left(\frac{2}{9z} + \frac{1}{9x} + \frac{1}{3}\right). \ (4)$$

Từ (2); (3) và (4) ta có

$$P \le \frac{\sqrt{6}}{4}\left(\frac{2}{9x} + \frac{1}{9y} + \frac{1}{3} + \frac{2}{9y} + \frac{1}{9z} + \frac{1}{3} + \frac{2}{9z} + \frac{1}{9x} + \frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Bình luận. Việc nhận ra P đạt giá trị lớn nhất khi $x = y = z = 1$ kết hợp điều kiện ràng buộc $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3$ giúp ta có được lời giải.

Bài toán 4. Chứng minh rằng với x, y là các số thực lớn hơn 2 thì $\frac{x^2}{y-2} + \frac{y^2}{x-2} \ge 16.$

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10, THPT chuyên Đại học Sư phạm TP. Hồ Chí Minh)

Hướng dẫn giải. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số dương, ta có

$$\frac{x^2}{y-2} + \frac{y^2}{x-2} = \frac{x^2}{y-2} + 4(y-2) + \frac{y^2}{x-2} + 4(x-2) - 4y - 4x + 16$$

$$\ge 2\sqrt{\frac{x^2}{y-2}.4(y-2)} + 2\sqrt{\frac{y^2}{x-2}.4(x-2)} - 4y - 4x + 16 = 4x + 4y - 4y - 4x + 16 = 16.$$

Bài toán 5. Các số thực x, y, z không âm thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = 6$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = x + y + z$.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10, THPT chuyên Đại học Sư phạm TP. Hồ Chí Minh)

Hướng dẫn giải. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số không âm ta có

$Q^2 = (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz \le x^2 + y^2 + z^2 + x^2y^2 + 1 + x^2z^2 + 1 + y^2z^2 + 1 = 6 + 3 = 9.$

Do đó $Q \le 3$.

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của $Q = x + y + z$ là 3.

Ta có $6 = x^2 + y^2 + z^2 + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \ge x^2 + y^2 + x^2y^2 \ge 2xy + x^2y^2 \ge xy + x^2y^2$.

$\Rightarrow x^2y^2 + xy - 6 \le 0 \Rightarrow (xy - 2)(xy + 3) \le 0$

$\Rightarrow xy - 2 \le 0 \Rightarrow 2xy \ge x^2y^2$.

Tương tự ta có $2yz \ge y^2z^2$, $2zx \ge z^2x^2$.

Do đó $Q^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

$\ge x^2 + y^2 + z^2 + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = 6.$

Mà $x, y, z \ge 0$ nên $Q = x + y + z \ge 0$.

Ta có $Q = x + y + z \ge \sqrt{6}$.

Đẳng thức xảy ra khi $x = \sqrt{6}$, $y = 0$, $z = 0$.

Bình luận. Dự đoán giá trị lớn nhất của Q là 3 khi $x = y = z$ và giá trị nhỏ nhất của Q là $\sqrt{6}$ khi $x = \sqrt{6}$, $y = z = 0$, từ đó biến đổi có được lời giải.

Bài toán 6. Cho x, y, z là các số thực không âm và thỏa mãn $x + y + z = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau

$T = (2x + 3y + 4z)(5x + 2y + z)$.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên toán tỉnh Tây Ninh)

Hướng dẫn giải. Vì $x, y, z \ge 0$ và $x + y + z = 1$ nên $9 - y \le 9$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số không âm, ta có

$$T=\frac{1}{8}.4(4x+6y+8z)(5x+2y+z)$$

$$\le\frac{1}{8}(4x+6y+8z+5x+2y+z)^2$$

$$=\frac{1}{8}[9(x+y+z)-y]^2=\frac{1}{8}(9-y)^2\le\frac{1}{8}.9^2=\frac{81}{8}.$$

Đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases}4x+6y+8z=5x+2y+z\\ y=0\\ x+y+z=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{7}{8}\\ y=0\\ z=\dfrac{1}{8}.\end{cases}$$

Vậy giá trị lớn nhất của T là $\frac{81}{8}$.

Bình luận. Ta "chỉnh số thích hợp" để xuất hiện x = y = z và áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số không âm, rồi chọn điều kiện $|9-y|$ lớn nhất.

Bài toán 7. Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2}{\sqrt{8x^2+3y^2+14xy}}+\frac{y^2}{\sqrt{8y^2+3z^2+14yz}}+\frac{z^2}{\sqrt{8z^2+3x^2+14xz}}\ge\frac{x+y+z}{5}.$$

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên toán tỉnh Thái Nguyên)

Hướng dẫn giải. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số dương, ta có

$$\frac{x^2}{\sqrt{8x^2+3y^2+14xy}}\ge\frac{x^2}{\sqrt{8x^2+3y^2+14xy+(x-y)^2}}$$

$$=\frac{x^2}{\sqrt{(3x+2y)^2}}=\frac{x^2}{3x+2y}=\frac{x^2}{3x+2y}+\frac{3x+2y}{25}-\frac{3x+2y}{25}$$

$$\ge2\sqrt{\frac{x^2}{3x+2y}.\frac{3x+2y}{25}}-\frac{3x+2y}{25}=\frac{7x-2y}{25}.$$

Do đó $\frac{x^2}{\sqrt{8x^2+3y^2+14xy}}\ge\frac{7x-2y}{25}$. (1)

Tương tự ta có

$$\frac{y^2}{\sqrt{8y^2+3z^2+14yz}}\ge\frac{7y-2z}{25}.\ (2)$$

$$\frac{z^2}{\sqrt{8z^2+3x^2+14xz}}\ge\frac{7z-2x}{25}.\ (3)$$

Từ (1); (2) và (3) ta có

$$\frac{x^2}{\sqrt{8x^2+3y^2+14xy}}+\frac{y^2}{\sqrt{8y^2+3z^2+14yz}}+\frac{z^2}{\sqrt{8z^2+3x^2+14xz}}\ge\frac{x+y+z}{5}.$$

Bài toán 8. Cho a, b là hai số nguyên thỏa mãn $a^3+b^3>0$.

a) Chứng minh rằng $a^3+b^3\ge a+b>0$.

b) Chứng minh rằng $a^3+b^3\ge a^2+b^2$.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên toán, trường PTNK, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh)

Hướng dẫn giải. a) Ta có $a^3+b^3>0$

$\Rightarrow a^3>-b^3\Rightarrow a^3>(-b)^3\Rightarrow a>-b\Rightarrow a+b>0.$

Mà $a^2-ab+b^2=\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}\ge0.$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=0$.

Do đó $a+b=0$ (mâu thuẫn với $a+b>0$).

Suy ra $a^2-ab+b^2>0$.

Mà $a, b\in\mathbb{Z}$. Do đó $a^2-ab+b^2\ge1$.

Ta có $(a+b)(a^2-ab+b^2)\ge(a+b).1$

$\Rightarrow a^3+b^3\ge a+b>0.$

b) Ta có $a+b>0\Rightarrow a, b$ không đồng thời âm $\Rightarrow ab\le0$ hoặc $a, b>0$.

• Nếu $ab\le0$ thì $a^2-ab+b^2\ge a^2+b^2$.

Mà $a+b\ge1$ nên $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ $\ge a^2-ab+b^2\ge a^2+b^2$.

• Nếu $a, b>0$ thì $a\ge1, b\ge1$ (vì $a, b\in\mathbb{Z}$).

Do đó $a^3\ge a^2, b^3\ge b^2$.

Suy ra $a^3+b^3\ge a^2+b^2$.

Vậy $a^3+b^3\ge a^2+b^2$.

Bình luận. Đây là bài toán bất đẳng thức với các biến là các số nguyên, chú ý rằng với số nguyên $x>0$ thì $x\ge1$.

VÀI PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

ThS. PHẠM MINH TÚ
(GV. Khoa CNTT, Trường Đại học Lao Động - Xã Hội, Hà Nội)

Các bài toán về phương trình vô tỉ thường xuất hiện trong các đề thi học sinh giỏi lớp 9 và đề thi vào lớp 10 THPT, bài viết này giới thiệu phương pháp đặt ẩn phụ kết hợp với phân tích các biểu thức để giải một số dạng toán về phương trình vô tỉ.

Bài toán 1. Giải phương trình

$$\sqrt{1-x^2}+\sqrt[4]{x^2+x-1}+\sqrt[6]{1-x}=1.$$

Lời giải. ĐKXĐ $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\le x\le 1$.

Đặt $\sqrt{1-x^2}=a$, $\sqrt[4]{x^2+x-1}=b$, $\sqrt[6]{1-x}=c$ $(0\le a, b, c\le 1)$.

Ta có $a+b+c=1$; $a^2+b^4+c^6=1$; $b^3\le 1$, $c^5\le 1$.

Suy ra $\begin{cases}a(1-a)\ge 0\\ b(1-b^3)\ge 0\\ c(1-c^5)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\ge a^2\\ b\ge b^4\\ c\ge c^6.\end{cases}$

Do đó $a+b+c\ge a^2+b^4+c^6=1$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a=0\\ a=1\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}b=0\\ b=1\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}c=0\\ c=1.\end{array}\right.\end{cases}$

Với $a=0$ hoặc $a=1$ thì $x=\pm 1$ hoặc $x=0$.

Thử lại chỉ có $x=1$ thỏa mãn.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 2. Giải phương trình

$$4x^2-11x+10=(x-1)\sqrt{2x^2-6x+2}.$$

Lời giải. ĐKXĐ $x\le\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ hoặc $x\ge\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Ta có $4x^2-11x+10=\left(2x-\frac{11}{4}\right)^2+\frac{39}{16}>0$.

Vì $\sqrt{2x^2-6x+2}\ge 0$ nên $x-1\ge 0\Rightarrow x\ge 1$.

Kết hợp với ĐKXĐ ta có $x\ge\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$(x-1)\sqrt{2x^2-6x+2}-(4x^2-11x+10)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)\sqrt{2x^2-6x+2}+(2x^2-6x+2)-(6x^2-17x+12)=0$. (1)

Đặt $\sqrt{2x^2-6x+2}=a$ $(a\ge 0)$.

Phương trình (1) trở thành

$a^2+a(x-1)-(6x^2-17x+12)=0$

$\Leftrightarrow (a-2x+3)(a+3x-4)=0$.

• TH1. $a=2x-3$, ta có

$\sqrt{2x^2-6x+2}=2x-3$.

$\Leftrightarrow\begin{cases}2x-3\ge 0\\ 2x^2-6x+2=(2x-3)^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\frac{3}{2}\\ 2x^2-6x+7=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\frac{3}{2}\\ 2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{5}{2}=0\end{cases}$

(vô nghiệm).

• TH2. $a=4-3x\Leftrightarrow\sqrt{2x^2-6x+2}=4-3x$.

$\Leftrightarrow\begin{cases}4-3x\ge 0\\ 2x^2-6x+2=(4-3x)^2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{4}{3} \\ 7\left(x-\dfrac{9}{7}\right)^2 + \dfrac{17}{7} = 0 \end{cases}$$

(vô nghiệm).

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 3. Giải phương trình

$$8x^2 - 13x + 7 = \left(1 + \frac{1}{x}\right)\sqrt[3]{3x^2 - 2}.$$

Lời giải. ĐKXĐ $x \ne 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$(2x-1)^3 - (x^2 - x - 1) = (x+1)\sqrt[3]{3x^2-2}$

$\Leftrightarrow (2x-1)^3 = (x^2 - x - 1) + (x+1)\sqrt[3]{3x^2-2}$. (1)

Đặt $2x - 1 = a$; $\sqrt[3]{3x^2-2} = b$.

$b^3 = 3x^2 - 2 = (2x-1)(x+1) + (x^2 - x - 1)$. (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a^3 = x^2 - x - 1 + (x+1)b \ (3) \\ b^3 = x^2 - x - 1 + (x+1)a. \ (4) \end{cases}$$

Trừ vế theo vế của (3) cho (4) ta được

$(a - b)(a^2 + b^2 + ab + x + 1) = 0$.

• TH1. $a = b \Leftrightarrow 2x - 1 = \sqrt[3]{3x^2-2}$.

$\Leftrightarrow (2x-1)^3 = 3x^2 - 2$.

$\Leftrightarrow 8x^3 - 15x^2 + 6x + 1 = 0$.

$$\Leftrightarrow (8x+1)(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-1}{8} \\ x = 1. \end{array}\right.$$

• TH2. $a^2 + b^2 + ab + x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left(b + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3a^2}{4} + x + 1 = 0. \ (5)$$

Mà $\left(b + \dfrac{a}{2}\right)^2 + \dfrac{3a^2}{4} + x + 1$

$$\ge \frac{3a^2}{4} + x + 1 = \frac{3(2x-1)^2}{4} + x + 1$$

$$= \frac{12x^2 - 8x + 7}{4} = \frac{3\left(2x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{17}{3}}{4} > 0.$$

Suy ra phương trình (5) vô nghiệm.

Thử lại ta có phương trình có tập nghiệm là $S = \left\{\dfrac{-1}{8}; 1\right\}$.

Bài toán 4. Giải phương trình

$$x^2 + 2 = 2\sqrt{x^3 + 1}.$$

Lời giải. ĐKXĐ $x \ge -1$.

$\Leftrightarrow (x^2+2)^2 = 4(x^3+1) \Leftrightarrow x^4 + 4x^2 + 4 = 4x^3 + 4$

$\Leftrightarrow x^4 - 4x^3 + 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-2)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$ (thỏa mãn ĐKXĐ).

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \{0; 2\}$.

Bài toán 5. Giải phương trình

$$x + y + z + 4 = 2\sqrt{x-2} + 4\sqrt{y-3} + 6\sqrt{z-5}.$$

Lời giải. ĐKXĐ $x \ge 2$; $y \ge 3$; $z \ge 5$.

Phương trình đã cho tương đương với

$(x - 2 - 2\sqrt{x-2} + 1) + (y - 3 - 4\sqrt{y-3} + 4)$

$+ (z - 5 - 6\sqrt{z-5} + 9) = 0$.

$\Leftrightarrow (\sqrt{x-2} - 1)^2 + (\sqrt{y-3} - 2)^2 + (\sqrt{z-5} - 3)^2 = 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2} - 1 = 0 \\ \sqrt{y-3} - 2 = 0 \\ \sqrt{z-5} - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 7 \\ z = 14. \end{cases}$$

(thỏa mãn ĐKXĐ).

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y; z) = (3; 7; 14)$.

Bài tập vận dụng

Bài 1. Giải các phương trình sau

a) $x + \sqrt{x + \dfrac{1}{2} + \sqrt{x + \dfrac{1}{4}}} = 2$;

b) $x^4 + \sqrt{x^2 + 2008} = 2008$;

c) $\sqrt{4x^2 + 5x + 1} - 2\sqrt{x^2 - x + 1} = 9x - 3$;

d) $2\sqrt{x+1} + 6\sqrt{9 - x^2} + 6\sqrt{(x+1)(9-x^2)}$

$= 38 + 10x - 2x^2 - x^3$.

BÀI TOÁN HAY VỀ PHẦN NGUYÊN CỦA MỘT SỐ

TRƯƠNG QUANG AN
(GV. THCS Nghĩa Thắng, Tư Nghĩa, Quảng Ngãi)

Sau đây chúng tôi xin giới thiệu bài toán hay có chứa phần nguyên của một số trong kì thi Olympic toán học của Canada năm 1999. Kí hiệu [x] là các số nguyên lớn nhất không vượt quá x.

Bài toán. Giải phương trình $4x^2-40[x]+51=0.$

Lời giải. Cách 1. Đặt $[x]=y\ (y\in\mathbb{Z})$.

Khi đó ta có $40y=4x^2+51>0.$

Lại có $y\le x<y+1\Rightarrow y^2\le x^2<(y+1)^2$

$$\Rightarrow 4y^2+51\le 4x^2+51<4y^2+8y+55$$

$$\Rightarrow 4y^2+51\le 40y<4y^2+8y+55$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4y^2-40y+51\le 0 \\ 4y^2-32y+55>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1{,}5\le y\le 8{,}5 \\ \left[\begin{array}{l} y<2{,}5 \\ y>5{,}5 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Rightarrow y\in\{2;6;7;8\}.$$

- TH1. $\begin{cases} [x]=2 \\ x^2=\dfrac{29}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\le x<3 \\ x=\pm\dfrac{\sqrt{29}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{29}}{2}.$

- TH2. $\begin{cases} [x]=6 \\ x^2=\dfrac{189}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\le x<7 \\ x=\pm\dfrac{3\sqrt{21}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{3\sqrt{21}}{2}.$

- TH3. $\begin{cases} [x]=7 \\ x^2=\dfrac{229}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7\le x<8 \\ x=\pm\dfrac{\sqrt{229}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{229}}{2}.$

- TH4. $\begin{cases} [x]=8 \\ x^2=\dfrac{269}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8\le x<9 \\ x=\pm\dfrac{\sqrt{269}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{269}}{2}.$

Vậy phương trình có tập nghiệm là

$$S=\left\{\frac{\sqrt{29}}{2};\frac{3\sqrt{21}}{2};\frac{\sqrt{229}}{2};\frac{\sqrt{269}}{2}\right\}.$$

Cách 2. Đặt $[x]=n\in\mathbb{Z},\ \{x\}=\alpha\in[0;1)$ thì $x=[x]+\{x\}=n+\alpha.$

Phương trình đã cho trở thành

$$4(n+\alpha)^2-40n+51=0$$

$$\Leftrightarrow 4\alpha^2+8n\alpha+4n^2-40n+51=0.\ (2)$$

Phương trình (2) có nghiệm khi

$$\Delta'=16n^2-4(4n^2-40n+51)$$

$$=160n-204=16\left(10n-\frac{51}{4}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow n\ge\frac{51}{4}\Rightarrow n\ge 2.$$

Do $\alpha\ge 0$ nên với $n\ge 2$ thì (2) có nghiệm $\alpha=-n+\sqrt{10n-\dfrac{51}{4}}$.

Vì $0\le\alpha<1$ nên ta có

$$\begin{cases} -n+\sqrt{10n-\dfrac{51}{4}}\ge 0 \\ -n+\sqrt{10n-\dfrac{51}{4}}<1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10n-\dfrac{51}{4}\ge n^2 \\ 10n-\dfrac{51}{4}<(n+1)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n^2-10n+\dfrac{51}{4}\le 0 \\ n^2-8n+\dfrac{55}{4}>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{2}\le n\le\dfrac{17}{2} \\ \left[\begin{array}{l} n<\dfrac{5}{2} \\ n>\dfrac{11}{2} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\le n\le 8 \\ \left[\begin{array}{l} n\le 2 \\ n\ge 6 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow n\in\{2;6;7;8\}.$$

Từ đẳng thức $x=[x]+\{x\}=n+\alpha=\sqrt{10n-\dfrac{51}{4}}$, thay n bằng 4 giá trị trên ta tìm được các nghiệm của phương trình như ở cách 1.

Kết quả *Cuộc thi giải toán dành cho nữ sinh* (TTT2 số 183)

Bài 31NS. Đặt $n^2 - 2016n + 1016067 = m^2$ $(n \in \mathbb{N})$

$\Rightarrow (n-1008)^2 - m^2 = -3$

$\Rightarrow (n-1008+m)(n-1008-m) = -3.$

Vì $m \in \mathbb{N}$ nên $n-1008+m \geq n-1008-m$

$$\Rightarrow \begin{cases} n-1008+m=1 \\ n-1008-m=-3 \end{cases} \Rightarrow n=1007$$

hoặc $\begin{cases} n-1008+m=3 \\ n-1008-m=-1 \end{cases} \Rightarrow n=1009.$

Thử lại đúng. Vậy n = 1007 hoặc n = 1009.

Nhận xét. Các bạn có lời giải đúng: *Hà Như Nguyệt,* 7E, Nguyễn *Thị Diệu Linh,* 8I, *Vũ Huyền Trang,* 8H, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, **Phú Thọ**; *Phạm Khánh Huyền,* 8B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Bùi Hà Linh,* 7D, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; *Trần Thiên Ngân,* 7A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, **Nghệ An**; *Nguyễn Thu Hiền*, 8A3, THCS Thị trấn Kỳ Sơn, Kỳ Sơn, **Hòa Bình.**

Bài 32NS. ĐKXĐ $x \geq \frac{1}{4\sqrt{3}}$.

Phương trình đã cho tương đương với $1 + x^4 = 4\sqrt{3}.\sqrt[4]{4\sqrt{3}x - 1}.$

Đặt $y = \sqrt[4]{4\sqrt{3}x-1}$ $(y \geq 0)$ ta được

$$\begin{cases} x^4 = 4\sqrt{3}y - 1 \\ y^4 = 4\sqrt{3}x - 1 \end{cases} \text{(1), với } x; y \geq \frac{1}{4\sqrt{3}}.$$

Với $x > y \geq \frac{1}{4\sqrt{3}}$ thì $x^4 > y^4$, nên từ hệ (1) suy ra $y > x$ (mâu thuẫn với $x > y$).

Tương tự với $y > x \geq \frac{1}{4\sqrt{3}}$ cũng dẫn đến mâu thuẫn. Suy ra $x = y \geq \frac{1}{4\sqrt{3}}$.

Do đó từ hệ (1) suy ra

$x^4 = 4\sqrt{3}x - 1$

$\Leftrightarrow x^4 + 4x^2 + 4 = 4x^2 + 4\sqrt{3}x + 3$

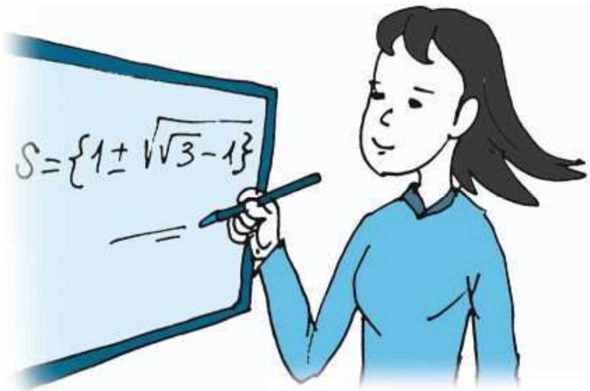
$\Leftrightarrow (x^2+2)^2 = (2x+\sqrt{3})^2$

$\Leftrightarrow x^2 + 2 = 2x + \sqrt{3}$ (vì $x \geq \frac{1}{4\sqrt{3}}$)

$\Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{\sqrt{3}-1}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{1 \pm \sqrt{\sqrt{3}-1}\}$.

Nhận xét. Không có bạn nào có lời giải đúng.



Bài 33 NS. Vì có 21 điểm được tô bởi 4 màu nên theo nguyên lí Dirichlet có ít nhất 6 điểm cùng màu. Giả sử các điểm đó là A, B, C, D, E, F.

Xét 5 đoạn thẳng AB, AC, AD, AE, AF được tô bởi 2 màu nên theo nguyên lí Dirichlet có ít nhất 3 đoạn thẳng cùng màu, giả sử AB, AC, AD cùng màu tím.

Để giải tiếp ta cần 2 Nhận xét dưới đây để tìm tam giác có ba cạnh cùng màu.

- **Nhận xét 1.** Nếu hai đoạn thẳng MN và NP cùng màu thì chỉ cần xét đoạn thẳng MP với màu khác (vì nếu MP cùng màu thì ΔMNP có 3 cạnh cùng màu).
- **Nhận xét 2.** Nếu các đoạn thẳng MN, MP cùng màu và QN, QP cùng màu (nhưng khác màu với MN, MP) và đoạn NP có một trong hai màu trên thì luôn tồn tại tam giác có ba cạnh cùng màu.

• Trường hợp I. Nếu trong 3 đoạn thẳng BC, CD, DB có một đoạn thẳng màu tím, chẳng hạn BC thì khi đó tam giác ABC có ba cạnh cùng màu tím.

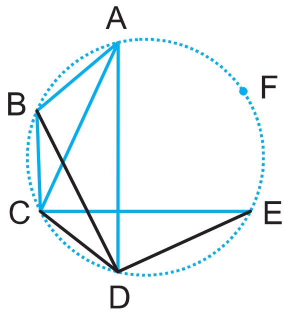
Từ Nhận xét 1 chỉ xét DB và DC màu đen. Xét hai trường hợp sau với DE.

I.a. Nếu DE màu đen, theo Nhận xét 1 chỉ xét CE màu tím, lúc đó CB, CE và DB, DE thỏa mãn Nhận xét 2 *(Hình 1)*.

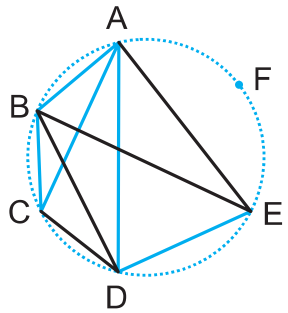
I.b. Nếu DE màu tím, theo Nhận xét 1 xét EA màu đen. Xét hai trường hợp sau đối với AF *(Hình 2)*.

I.b.1. Nếu AF màu đen, theo Nhận xét 1 xét EF màu tím, lại xét DF màu đen, rồi xét CF màu tím. Lúc đó CB, CF và DB, DF thỏa mãn Nhận xét 2.

I.b.2. Nếu AF màu tím, theo Bổ đề 1 xét DF màu đen. Lúc đó AB, AF và DB, DF thỏa mãn Nhận xét 2.



Hình 1



Hình 2

• Trường hợp II. Nếu cả 3 đoạn thẳng BC, CD, DB cùng màu đen, khi đó tam giác BCD có ba cạnh cùng màu đen.

Xét hai trường hợp sau với AF.

II.a. Nếu AF màu đen.

Xét hai trường hợp sau đối với AE.

II.a.1. Nếu AE màu đen, theo Nhận xét 1 xét EF màu tím (*Hình 3*).

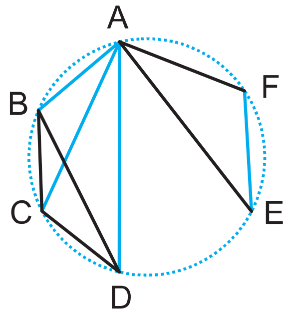
Xét hai trường hợp sau đối với BE.

• Nếu BE màu đen, theo Nhận xét 1 xét EC, ED màu tím, rồi xét CF màu đen. Lúc đó CD, CF và ED, EF thỏa mãn Nhận xét 2.

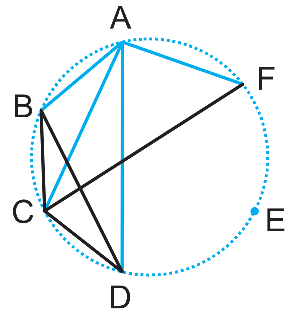
• Nếu BE màu tím, theo Nhận xét 1 xét BF màu đen, lại xét CF màu tím, rồi xét CE màu đen, suy ra ED phải màu tím. Lúc đó BD, BF và ED, EF thỏa mãn Nhận xét 2.

II.a.2. Nếu AE màu tím, theo Nhận xét 1 xét EB, EC màu đen. Lúc đó ΔBCE có 3 cạnh màu đen.

II.b. Nếu AF màu tím, theo Nhận xét 1 xét CF màu đen. Lúc đó AB, AF và CB, CF thỏa mãn Nhận xét 2 (*Hình 4*).



Hình 3
II.a.1



Hình 4
II.b

Vậy với cách tô màu tùy ý luôn có hai tam giác có ba đỉnh cùng màu và ba cạnh cùng màu.

Nhận xét. Bạn *Hà Như Nguyệt,* 7E, THCS Văn Lang, Việt Trì, **Phú Thọ** lập luận đúng luôn chọn được một tam giác có ba đỉnh cùng màu và ba cạnh cùng màu.

Chỉ có duy nhất một bạn được thưởng, đó là: *Hà Như Nguyệt,* 7E, THCS Văn Lang, Việt Trì, **Phú Thọ**.

NGUYỄN HIỆP

TIN TỨC - HOẠT ĐỘNG - GẶP GỠ

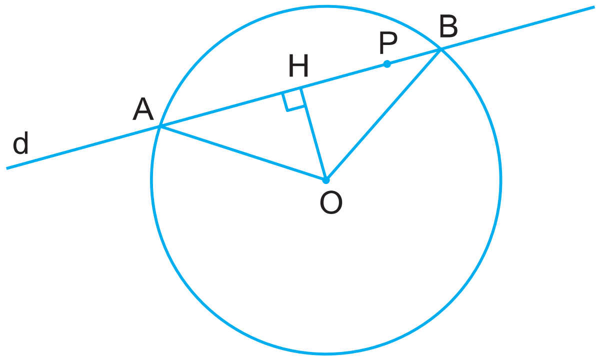
Ngày 16.9.2018, Cuộc thi vô địch Toán cấp Trung học Úc mở rộng (AIMO) năm 2018 đã được tổ chức tại trường THCS Cầu Giấy, Q. Cầu Giấy, Hà Nội. Hàng năm cuộc thi có các thí sinh của hơn 20 quốc gia và vùng lãnh thổ tham gia tranh tài. Năm nay có 940 thí sinh đến từ 50 trường THCS và THPT trên địa bàn thành phố Hà Nội tham dự, đây là lần thứ ba cuộc thi AIMO được tổ chức tại Việt Nam.

TTT

LỜI GIẢI ĐÚNG CHƯA?

ThS. ĐINH VĂN THƯ
(GV. CĐSP Thái Bình, TP. Thái Bình, Thái Bình)

Bài toán. Cho đường tròn tâm O, bán kính R và điểm P nằm bên trong đường tròn đó (P không trùng O). Gọi d là đường thẳng đi qua P cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt A, B (d không qua đi tâm O). Tìm diện tích lớn nhất của tam giác AOB khi đường thẳng d di động nhưng luôn đi qua P.



Lời giải. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm O lên đường thẳng d. Ta có H là trung điểm của đoạn thẳng AB, suy ra AH = $HB = \frac{AB}{2}$.

Xét tam giác vuông AHO có $OH^2 = OA^2 - AH^2$

$$= OA^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = R^2 - \frac{AB^2}{4}$$

$$\Rightarrow OH = \sqrt{R^2 - \frac{AB^2}{4}}.$$

Vậy diện tích của tam giác AOB là

$$S_{AOB} = \frac{1}{2}OH.AB = \frac{1}{2}AB.\sqrt{R^2 - \frac{AB^2}{4}}.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$S_{AOB} = \frac{1}{2}AB.\sqrt{R^2 - \frac{AB^2}{4}} = \frac{AB}{2}\sqrt{R^2 - \frac{AB^2}{4}}$$

$$\le \frac{1}{2}.\left(\frac{AB^2}{4} + R^2 - \frac{AB^2}{4}\right) = \frac{R^2}{2}.$$

Suy ra $S_{AOB} \le \frac{R^2}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{AB}{2} = \sqrt{R^2 - \frac{AB^2}{4}} \Leftrightarrow \frac{AB^2}{4} = R^2 - \frac{AB^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow AB = R\sqrt{2}.$$

Suy ra diện tích lớn nhất của ΔAOB là $\frac{R^2}{2}$ khi tam giác AOB vuông tại O.

Theo bạn, lời giải trên đã hợp lí chưa? Tòa soạn đợi thư của bạn.

Kết quả **(TTT2 số 183)**

LỜI GIẢI NHƯ THẾ ĐÃ ĐÚNG CHƯA?

Cho x, y, z là các số thực dương và x + y + z $\le \frac{5}{2}$. Sử dụng phương pháp biến đổi tương đương ta có bất đẳng thức

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \ge \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} \quad (1)$$

với a, b, c, d là các số thực dương.

Đẳng thức xảy ra ở (1) khi và chỉ khi ad = bc.

Áp dụng bất đẳng thức (1) ta được

$$A = \sqrt{x^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{z^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{x^2}}$$

$$\ge \sqrt{(x+y+z)^2 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2}. \quad (2)$$

Đẳng thức xảy ra ở (2) khi và chỉ khi x = y = z.

Biến đổi đến đây là đúng.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ở vế phải của (2) và sử dụng bất đẳng thức

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \ge 9 \quad (3)$$

ta được $\sqrt{(x+y+z)^2 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2}$

$$\ge \sqrt{2(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)} \ge \sqrt{2.9} = 3\sqrt{2}. \quad (4)$$

Đẳng thức ở (4) xảy ra khi và chỉ khi

$$x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}.$$

Kết luận $A \ge 3\sqrt{2}$ sẽ đúng nếu hai lần biến đổi ở (2) và (4) các đẳng thức đều xảy ra, tức là $x=y=z$ và $3x=\frac{3}{x}$, dẫn đến $x=y=z=1$, nhưng lúc đó $x+y+z=3>\frac{5}{2}$, không thỏa mãn đề bài. Như vậy biến đổi ở (4) đúng và $A > 3\sqrt{2}$, nhưng không tồn tại các giá trị x, y, z để $A=3\sqrt{2}$.

Chú ý rằng bất đẳng thức (3) luôn đúng với các số dương x, y, z tùy ý (bạn đọc tự chứng minh bất đẳng thức (3) khi khai triển vế trái và áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho từng cặp số hạng), do đó ta vẫn có thể áp dụng bất đẳng thức AM-GM ở vế phải của (2) nhưng cần thêm hệ số m nào đó vào thừa số dạng phân số ở vế trái của (4).

Đặt $x+y+z=a\le\frac{5}{2}$ thì

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{9}{x+y+z}=\frac{9}{a}.$$

Từ (2) ta biến đổi tiếp như sau

$$B=\sqrt{(x+y+z)^2+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2}=$$

$$\sqrt{(x+y+z)^2+m^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2+(1-m^2)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2}$$

$$\ge\sqrt{2m(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+(1-m^2)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2}$$

$$\ge\sqrt{18m+(1-m^2)\frac{81}{a^2}}.\quad(5)$$

Đẳng thức xảy ra ở (5) khi và chỉ khi $x+y+z=m\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$ và trong lần biến đổi thứ nhất thì đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=\frac{a}{3}$ nên có $3x=m.\frac{3}{x}$, hay là $m=x^2=\frac{a^2}{9}$.

Thay giá trị của m vào (5) ta được

$$B\ge\sqrt{18m+(1-m^2)\frac{81}{a^2}}=$$

$$\sqrt{18\frac{a^2}{9}+\left(1-\frac{a^4}{81}\right)\frac{81}{a^2}}=\sqrt{a^2+\frac{81}{a^2}}.$$

Đặt $t=a^2$ ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(t)=t+\frac{81}{t}$ với $0<t\le\frac{25}{4}=6{,}25$.

Giả sử $0<t_1<t_2\le 6{,}25<7$.

Xét $f(t_1)-f(t_2)$

$$=t_1+\frac{81}{t_1}-t_2-\frac{81}{t_2}=(t_1-t_2)-81\left(\frac{1}{t_2}-\frac{1}{t_1}\right)$$

$$=(t_1-t_2)-81\frac{t_1-t_2}{t_1t_2}=(t_1-t_2)\left(1-\frac{81}{t_1t_2}\right)>0$$

(vì $0<t_1<t_2$ và $0<t_1t_2<7.7=49<81$).

Như vậy với $0<t\le 6{,}25$ khi t tăng thì hàm số f(t) luôn giảm, suy ra hàm số f(t) đạt giá trị nhỏ nhất khi $t=\frac{25}{4}$, lúc đó

$$B\ge\sqrt{\frac{25}{4}+\frac{324}{25}}=\frac{\sqrt{1921}}{10}.$$

Từ đó và (2) ta có $A\ge B\ge\frac{\sqrt{1921}}{10}$.

Giá trị của $A=\frac{\sqrt{1921}}{10}$ đạt được khi $x+y+z=a=\frac{5}{2}$ và $x=y=z=\frac{a}{3}=\frac{5}{6}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{\sqrt{1921}}{10}$.

Nhận xét. Đây là bài khó, chỉ có bạn *Vũ Huyền Trang*, 8H, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, **Phú Thọ** đã phân tích đúng là các bất đẳng thức ở (2) và ở (4) không đồng thời xảy ra.

ANH KÍNH LÚP

Chữ & Chữ số

Kì này KÌ 34

Hãy thay các chữ cái bởi các chữ số. Các chữ khác nhau biểu diễn các chữ số khác nhau. Lời giải cần có lập luận lôgic.

$$\begin{array}{r} \text{DOS} \\ \times\quad \text{DOS} \\ \hline \text{CUATRO} \end{array}$$

ĐÔNG BA

Kết quả KÌ 32 (TTT2 số 183)

$$\begin{array}{r} \text{TRO} \\ \times\quad \text{HOPP} \\ \hline \text{KARLEK} \end{array}$$

Tích của số có 3 chữ số với số có 4 chữ số thì có 6 hoặc 7 chữ số, do đó $T.H \le K \le 9$.

Do K, T, H phân biệt nên $K > 2$.

Xét các trường hợp sau:

1) K = 3 thì (T; H) bằng (1; 2) hoặc (2; 1) và P.O = 3 + 10X với X là số nguyên.

Từ đó (P; O) bằng (7; 9) hoặc (9; 7).

a) Nếu P = 7, O = 9 thì 77(10R + 9) = 770R + 693 nên 7R + 9 = E + 10X. Cho R các giá trị 4, 5, 6, 8 thì được giá trị tương ứng E là 7 (loại), 4, 1 (loại), 5. Thử thấy 1977.259 = 512043 (loại); 2977.159 = 473343 (loại); 1977.289 = 571353 (loại); 2977.189 = 562653 (loại).

b) Nếu P = 9, O = 7 thì 99(10R + 7) = 990R + 693 nên 9R + 9 = E + 10X. Cho R các giá trị 4, 5, 6, 8 thì được giá trị tương ứng E là 5, 4, 3 (loại), 1 (loại). Thử thấy không thỏa mãn.

3) K = 5 thì P.O = 5 + 10X nên một trong các chữ số P hoặc O bằng 5 (loại).

4) K = 7 thì P.O = 7 + 10X nên (P; O) bằng (3; 9) hoặc (9; 3). Cho R các giá trị 1, 2, 4, 5, 6, 8 rồi xét E, H, T thấy không thỏa mãn.

5) K = 9 thì P.O = 9 + 10X thì không có các chữ số P, O thỏa mãn.

6) K = 4 thì P.O = 4 + 10X.

a) Nếu (P; O) bằng (2; 7) hoặc (7; 2), cho R các giá trị 1, 3, 5, 6, 8, 9 rồi xét E, H, T thấy không thỏa mãn.

b) Nếu (P; O) bằng (3; 8) hoặc (8; 3), cho R các giá trị 1, 2, 5, 6, 7, 9 rồi xét E, H, T thấy không thỏa mãn.

c) Nếu (P; O) bằng (6; 9) hoặc (9; 6), cho R các giá trị 1, 2, 3, 5, 7, 8 rồi xét E, H, T thấy không thỏa mãn.

4) K = 6 thì P.O = 6 + 10X.

a) Nếu (P; O) bằng (2; 8) hoặc (8; 2), xét tương tự như trên, cho R các giá trị 1, 3, 4, 5, 7, 9 được một nghiệm là 472.1288 = 607936.

b) Nếu (P; O) bằng (4; 9) hoặc (9; 4), cho R các giá trị 1, 2, 3, 5, 7, 8 thấy không thỏa mãn.

c) Nếu (P; O) bằng (7; 8) hoặc (8; 7), cho R các giá trị 1, 2, 3, 4, 5, 9 thấy không thỏa mãn.

5) K = 8 thì P.O = 8 + 10X.

a) Nếu (P; O) bằng (2; 9) hoặc (9; 2), cho R các giá trị 1, 3, 4, 5, 6, 7 thấy không thỏa mãn.

c) Nếu (P; O) bằng (3; 6) hoặc (6; 3). Cho R các giá trị 1, 2, 4, 5, 7, 9 thấy không thỏa mãn.

b) Nếu (P; O) bằng (4; 7) hoặc (7; 4). Cho R các giá trị 1, 2, 3, 5, 6, 9 thấy không thỏa mãn.

Bài toán chỉ có một nghiệm là
472.1288 = 607936.

Nhận xét. Rất tiếc không có bạn nào giải đúng kì này.

AN MINH

VỤ ÁN TRƯỚC CỬA HÀNG SÁCH

LÊ HỒNG MAI *(Hà Nội)*

Buổi sáng, trời thu trong xanh, từng làn gió mát lành thổi nhè nhẹ. Thám tử Sê Lốc Cốc ngồi bên li cà phê với dáng vẻ thật thảnh thơi, thanh nhàn. Nhìn đám trẻ con tíu tít ra vào cửa hàng sách phía đối diện, thám tử ước ao: “Giá như mình được trở lại tuổi học trò, chắc bây giờ mình đang được mẹ đưa vào hiệu sách kia, mình sẽ mua vài tập truyện trinh thám li kì, hấp dẫn...”.

Đang mơ màng nghĩ về thời quá khứ, thám tử chợt giật mình bởi tiếng cãi cọ:

- Ồ, sao chốn văn minh như hiệu sách mà lại xảy ra tiếng cãi cọ ồn ào như chợ búa thế nhỉ? Biết mua sách, đọc sách thì chắc chắn là người văn minh rồi. Sao mà lại om sòm thế chú nhỉ? - Cô bán cà phê thắc mắc.

- Ừ, thôi cô cho tôi trả tiền cà phê, để tôi thử sang bên ấy xem sao.

- Ôi, chú cứ ngồi đây, tiện thể trông hàng cho cháu.

Cô gái mồm nói chân chạy, thám tử đành ngồi chờ. Một lát, cô gái tíu tít chạy về:

- Có một bà để túi tiền trong tủ gửi đồ chú ạ. Vào hiệu sách xong ra bị mất tiền. Lạ thật, đã quy định không được để đồ quý trong tủ gửi đồ rồi giờ mất lại đòi bắt đền.

- Bà ta mất nhiều tiền không?

- Hình như mấy chục triệu chú ạ!

- Thế bà ta có nghi ngờ ai không?

- Dạ, đang đổ riết cho anh thợ sửa khóa ngồi gần đó.

- Cửa hàng có người bảo vệ không?

- Có chú ạ. Nhưng bà ấy chỉ nghi ngờ anh thợ sửa khóa vì anh ta ngồi ngay gần tủ để đồ.

- Ồ, vụ này thú vị đây.

Thám tử Sê Lốc Cốc đi sang cửa hàng sách.

Bà khách mất tiền vẫn đang đứng giữa đám đông tay xỉa xói về phía anh thợ sửa khóa:

- Anh không trả tiền cho tôi thì không yên đâu. Chỗ làm ăn của người ta, anh ngồi đây làm ăn mà dám ăn trộm hả?

- Bà này kì lạ quá! Tôi không lấy tiền của bà. Tôi mở tủ bằng cách nào hả?

- Anh là thợ sửa khóa. Khóa nào anh không mở được hả?

- Nhưng tôi không lấy của bà.

- Anh không lấy, thế anh ngồi ngay đây, anh sẽ nhìn thấy người lấy.

- Lúc nãy tôi có khách gọi đi sửa khóa, tôi vừa về đến đây nên tôi không biết.

- Ai làm chứng? Gọi người khách của anh đến đây!

- Anh ta sửa khóa xe máy nên đi rồi. Mà tôi không việc gì phải thanh minh với bà.

Thấy hai bên tranh cãi gay gắt, thám tử liền lên tiếng:

- Chị ơi, tôi là thám tử, tôi sẽ giúp chị tìm ra người lấy tiền của chị.

- Tôi không cần thám tử, tôi biết chắc kẻ trộm là anh ta! - Bà mất tiền vẫn lu loa.

- Thì phải có chứng cớ mới bắt người ta trả tiền được chứ. Sao chị chỉ nghi ngờ anh thợ khóa mà không nghi ngờ ai khác, ví dụ anh bảo vệ cửa hàng chẳng hạn.

- Bảo vệ cửa hàng không lấy vì nó là cháu tôi... - Bà ta đang nói bỗng dừng lại - Với lại khi chọn sách tôi có để ý, tôi không thấy nó rời khỏi chỗ cửa.

- Chị vào cửa hàng sách lâu chưa? Sao đi mua sách mà chị mang nhiều tiền vậy?

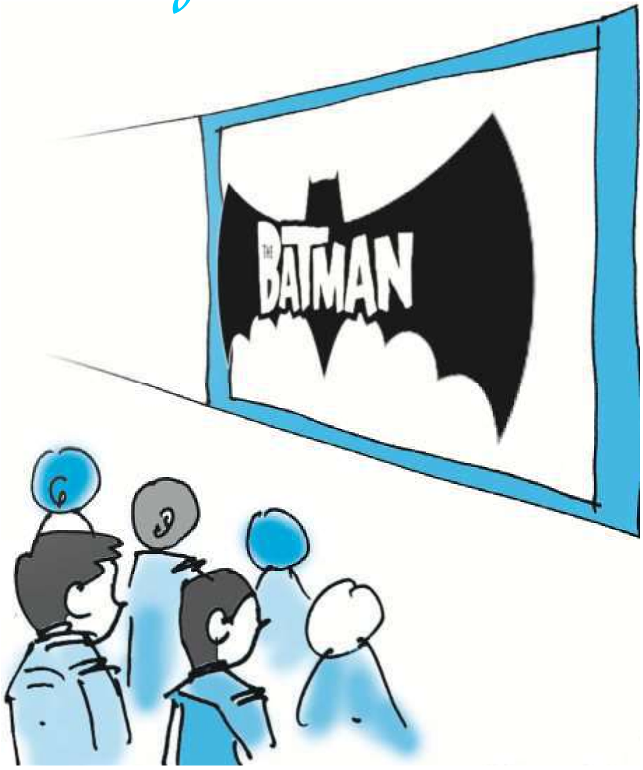
- Tôi vào được khoảng 1 tiếng, từ lúc cửa hàng vừa mở. Tôi vừa ra ngân hàng rút tiền về tiện thể ghé đây mua sách.

Thám tử liếc nhìn đồng hồ: 7 giờ 45 phút.
- Bà mua sách gì vậy?
- Tôi mua Từ điển Tiếng Anh cho cháu tôi!
Thám tử nghe xong đi vào cửa hàng sách. Ông đi sâu vào phía có giá để loại sách Từ điển. Đó là góc trong cùng của cửa hàng, nơi kín đáo nhất mà người ở cửa không thể nhìn thấy. Ông cầm quyển từ điển đi ra, qua quầy ông hỏi cô bán hàng:
- Cửa hàng mình mấy giờ mở cửa cô nhỉ?
- Dạ, 7 giờ đúng ạ.
Thám tử đi về phía vị khách đáo để:
- Tôi nghĩ chị nhầm lẫn gì chăng! Tôi đã tìm ra sự thật câu chuyện mất tiền này.
- Anh biết gì mà lại nói thế! - Bà mất tiền vẫn to tiếng.
- Để tôi chỉ cho chị ba chứng cứ dẫn đến kết luận của tôi nhé! Chị nên xin lỗi anh thợ khóa đi! Chị muốn tôi nói riêng hay tôi nói luôn trước mặt mọi người!
- Đồ dở hơi! Đang đâu chõ mũi vào chuyện người khác - Bà ta nói xong rồi chuồn thẳng!

Các thám tử Tuổi Hồng có tìm ra chứng cứ để minh oan cho anh thợ sửa khóa không?

Kết quả **(TTT2 số 183)**

Vụ trộm trước chuyến du lịch



Thám tử Sê Lốc Cốc nghi ngờ cậu Dũng, cháu bà Hiền bởi hai lí do: Thứ nhất, tên bộ phim phải là Batman (Người dơi) chứ không phải Badman. Thứ hai, bộ phim Batman đó của hãng DC Comics chứ không phải của hãng Marvel. Rất vui vì tất cả các bạn tham gia kì này đều tìm đúng sơ hở của cậu Dũng. Thám tử gửi lời cảm ơn tới tất cả các bạn.

Phần thưởng kì này sẽ được gửi tới: *Vũ Minh Nguyệt*, 6E, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Thu Hiền*, 8A3, THCS Thị trấn Kỳ Sơn, Kỳ Sơn, **Hòa Bình**; *Ngô Xuân Nguyên*, 7A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Vũ Huyền Trang*, 8H, THCS Văn Lang, Việt Trì, **Phú Thọ**; *Lê Hoàng Minh*, 7D, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**.

Thám tử Sê Lốc Cốc

MỘT SỐ DẠNG TOÁN VỀ TỈ LỆ THỨC

HÀ VĂN NHÂN *(GV. THCS Hoằng Xuân, Hoằng Hóa, Thanh Hóa)*

Trong chương trình lớp 7, dạng toán về tỉ lệ thức là một trong những kiến thức cơ bản và quan trọng. Tuy nhiên, có nhiều học sinh còn khá lúng túng khi gặp dạng toán này. Bài viết này giới thiệu phương pháp giải một số bài toán về tỉ lệ thức.

Tính chất của tỉ lệ thức và tính chất dãy tỉ số bằng nhau

* Tính chất 1. Nếu $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ thì ad = bc.

* Tính chất 2. Nếu ad = bc với a, b, c, d khác 0 thì ta có các tỉ lệ thức

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}, \frac{a}{c}=\frac{b}{d}, \frac{d}{b}=\frac{c}{a}, \frac{d}{c}=\frac{b}{a}.$

* Tính chất 3. Từ tỉ lệ thức $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, suy ra dãy tỉ số bằng nhau $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}.$

* Tính chất 4. Từ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{g}$, suy ra dãy tỉ số bằng nhau $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{g}=\frac{a+c+e}{b+d+g}=\frac{a-c+e}{b-d+g}.$

* Tính chất 5. Cho a, b, c tỉ lệ thuận với x, y, z tức là ta có $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}.$

* Tính chất 6. Cho a, b, c tỉ lệ nghịch với x, y, z tức là ta có ax = by = cz.

Trong các đẳng thức trên điều kiện là các mẫu khác 0.

Sau đây là một số bài tập vận dụng

Bài toán 1. Cho $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Chứng minh rằng $\left(\frac{a-b}{c-d}\right)^4=\frac{a^4+b^4}{c^4+d^4}.$

Lời giải. Ta có

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\frac{a-b}{c-d}\Rightarrow\frac{a^4}{c^4}=\left(\frac{a-b}{c-d}\right)^4.$ (1)

Ta lại có $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\Rightarrow\frac{a^4}{c^4}=\frac{b^4}{d^4}=\frac{a^4+b^4}{c^4+d^4}.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\left(\frac{a-b}{c-d}\right)^4=\frac{a^4+b^4}{c^4+d^4}.$

Bài toán 2. Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn a + c = 2b và 2bd = c(b + d) (với b; d khác 0). Chứng minh rằng $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$

Lời giải. Ta có $a+c=2b\Rightarrow(a+c)d=2bd.$

Kết hợp với giả thiết ta có

$c(b+d)=(a+c)d\Rightarrow cb+cd=ad+cd$

$\Rightarrow ad=bc\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$

Bài toán 3. Cho các số thực a, b, c, d khác 0 và khác nhau thỏa mãn $b^2=ac$; $c^2=bd$ và $b^3+c^3+d^3\neq0$. Chứng minh rằng $\frac{a^3+b^3+c^3}{b^3+c^3+d^3}=\frac{a}{d}.$

Lời giải. Ta có $b^2=ac\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{b}{c}.$ (1)

Ta lại có $c^2=bd\Rightarrow\frac{b}{c}=\frac{c}{d}.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a^3}{b^3}=\frac{b^3}{c^3}=\frac{c^3}{d^3}=\frac{a^3+b^3+c^3}{b^3+c^3+d^3}.$ (3)

Mặt khác $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a^3}{b^3}=\frac{a}{b}.\frac{b}{c}.\frac{c}{d}=\frac{a}{d}.$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\frac{a^3+b^3+c^3}{b^3+c^3+d^3}=\frac{a}{d}.$

Bài toán 4. Cho a, b, c là các số khác nhau và khác 0 thỏa mãn $a(y+z)=b(z+x)=c(x+y)$. Chứng minh rằng

$$\frac{y-z}{a(b-c)}=\frac{z-x}{b(c-a)}=\frac{x-y}{c(a-b)}.$$

Lời giải. Vì a; b; c khác 0 nên từ giả thiết và áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{a(y+z)}{abc}=\frac{b(z+x)}{abc}=\frac{c(x+y)}{abc}$$

$$\Rightarrow \frac{y+z}{bc}=\frac{z+x}{ac}=\frac{x+y}{ab}$$

$$\Rightarrow \frac{y+z}{bc}=\frac{(x+y)-(z+x)}{ab-ac}$$

$$=\frac{(y+z)-(x+y)}{bc-ab}=\frac{(z+x)-(y+z)}{ac-bc}.$$

$$\Rightarrow \frac{y-z}{a(b-c)}=\frac{z-x}{b(c-a)}=\frac{x-y}{c(a-b)}.$$

Bài toán 5. Cho các số thực a, b, c, x, y, z với a, b, c khác 0 thỏa mãn $\frac{bz-cy}{a}=\frac{cx-az}{b}$ $=\frac{ay-bx}{c}$. Chứng minh rằng $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$.

Lời giải. Từ giả thiết và áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{bz-cy}{a}=\frac{cx-az}{b}=\frac{ay-bx}{c}$$

$$=\frac{abz-acy}{a^2}=\frac{bcx-baz}{b^2}=\frac{cay-cbx}{c^2}$$

$$=\frac{abz-acy+bcx-baz+cay-cbx}{a^2+b^2+c^2}=0.$$

Suy ra

$$bz-cy=0\Rightarrow bz=cy\Rightarrow \frac{z}{c}=\frac{y}{b}.$$

$$ay-bx=0\Rightarrow ay=bx\Rightarrow \frac{x}{a}=\frac{y}{b}.$$

Suy ra $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$.

Bài toán 6. Tìm các số thực x; y; z thỏa mãn $(x+y):(5-z):(y+z):(9+y)=3:1:2:5$.

Lời giải. Từ giả thiết và áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$k=\frac{x+y}{3}=\frac{5-z}{1}=\frac{y+z}{2}=\frac{9+y}{5}$$

$$=\frac{(x+y)+(5-z)+(y+z)-(9+y)}{3+1+2-5}=\frac{x+y-4}{1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y-4=k \\ x+y=3k \end{cases} \Rightarrow k+4=x+y=3k$$

$\Rightarrow 4+k=3k\Rightarrow 4=2k\Rightarrow k=2.$

Do đó ta có

$5-z=k\Rightarrow z=5-k=5-2=3;$

$9+y=5k\Rightarrow y=5k-9=10-9=1;$

$x+y=3k\Rightarrow x=3k-y=6-1=5.$

Vậy $x=5,\ y=1,\ z=3.$

Bài toán 7. Tổng các luỹ thừa bậc ba của ba số là –1009. Biết tỉ số giữa số thứ nhất và số thứ hai là $\frac{2}{3}$; tỉ số giữa số thứ nhất và số thứ ba là $\frac{4}{9}$. Tìm ba số đó?

Lời giải. Gọi ba số cần tìm là x, y, z.

Ta có $x^3+y^3+z^3=-1009;\ \frac{x}{y}=\frac{2}{3}\Rightarrow \frac{x}{2}=\frac{y}{3}$

$$\Rightarrow \frac{x}{4}=\frac{y}{6};\ \frac{x}{z}=\frac{4}{9}\Rightarrow \frac{x}{4}=\frac{z}{9}\Rightarrow \frac{x}{4}=\frac{y}{6}=\frac{z}{9}=k$$

$\Rightarrow x=4k, y=6k, z=9k.$

Mặt khác $x^3+y^3+z^3=-1009.$

Suy ra $(4k)^3+(6k)^3+(9k)^3$

$=64k^3+216k^3+729k^3=1009k^3=-1009$

$\Rightarrow k^3=-1\Rightarrow k=-1$

Từ đó ta có $x=-1.4=-4;$

$y=-1.6=-6; z=-1.9=-9.$

Vậy ba số cần tìm là –4; –6; –9.

Bài toán 8. Cho các số thực a; b; c khác 0 thỏa mãn $\frac{ab}{a+b}=\frac{bc}{b+c}=\frac{ca}{c+a}$. Tính giá trị của biểu thức $P=\frac{ab^2+bc^2+ca^2}{a^3+b^3+c^3}$ (các mẫu thức khác 0).

Lời giải. Vì $a, b, c\neq 0$ nên từ giả thiết ta có

$$\frac{a+b}{ab}=\frac{b+c}{bc}=\frac{c+a}{ca}\Rightarrow\frac{1}{b}+\frac{1}{a}=\frac{1}{c}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{c}\Rightarrow a=b=c.$$

Thay vào P ta được

$$P=\frac{a^3+b^3+c^3}{a^3+b^3+c^3}=1.$$

Bài toán 9. Tìm số tự nhiên có ba chữ số biết rằng số đó chia hết cho 18 và các chữ số của nó tỉ lệ với 1; 2; 3.

Lời giải. Gọi ba chữ số của số cần tìm là a, b, c.

Theo bài ra ta có $a:b:c=1:2:3$.

Từ đó suy ra $\frac{a}{1}=\frac{b}{2}=\frac{c}{3}$.

Vì số đó chia hết cho 18 nên tổng các chữ số của số đó chia hết cho 2 và chia hết cho 9.

Suy ra $a+b+c \,\vdots\, 9$.

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có

$\frac{a}{1}=\frac{b}{2}=\frac{c}{3}=k\Rightarrow a=k;\ b=2k;\ c=3k.$

Vì $c=3k\le 9$ nên $k\le 3$.

Suy ra $a+b+c=6k \,\vdots\, 9$.

Từ đó $k \,\vdots\, 3$ mà k khác 0 nên $k=3$.

Do đó $a=3$, $b=6$, $c=9$.

Vì số đó chia hết cho 2 nên chữ số hàng đơn vị là 6.

Vậy số cần tìm là 396 hoặc 936.

Bài toán 10. Tìm ba phân số có tổng bằng $-3\frac{3}{70}$. Biết tử của chúng tỉ lệ với 3; 4; 5 còn mẫu của chúng tỉ lệ với 5; 1; 2.

Lời giải. Gọi ba phân số cần tìm là $\frac{a}{b};\frac{c}{d};\frac{e}{g}$

(với a, b, c, d, e, g là số nguyên và b, d, g khác 0).

Theo giả thiết ta có $a:c:e=3:4:5$; $b:d:g=5:1:2$ và $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{g}=-3\frac{3}{70}$. (1)

Từ $a:c:e=3:4:5$, suy ra $\frac{a}{3}=\frac{c}{4}=\frac{e}{5}=k$ với $k\in\mathbb{Z}$.

Suy ra $a=3k$, $c=4k$, $e=5k$.

Từ $b:d:g=5:1:2$, suy ra $\frac{b}{5}=\frac{d}{1}=\frac{g}{2}=t$ với $t\in\mathbb{Z}$, $t\neq 0$.

Do đó $b=5t$, $d=t$, $g=2t$.

Suy ra $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{g}=-3\frac{3}{70}$.

Thay vào (1) ta được $\frac{3k}{5t}+\frac{4k}{t}+\frac{5k}{2t}=\frac{-213}{70}$

$\Rightarrow\frac{k}{t}.\frac{71}{10}=\frac{-213}{70}\Rightarrow\frac{k}{t}=\frac{-3}{7}$

Do đó $\frac{a}{b}=\frac{-9}{35}$, $\frac{c}{d}=\frac{-12}{7}$, $\frac{e}{g}=\frac{-15}{14}$.

Vậy ba phân số cần tìm là $\frac{-9}{35}$, $\frac{-12}{7}$, $\frac{-15}{14}$.

Bài toán 11. Độ dài ba cạnh của một tam giác tỉ lệ với 2; 3; 4. Hỏi độ dài ba đường cao của tam giác tỉ lệ với ba số nào?

Lời giải. Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác và h_a, h_b, h_c lần lượt là các chiều cao tương ứng.

Ta có $S_{ABC}=\frac{ah_a}{2}=\frac{bh_b}{2}=\frac{ch_c}{2}$.

Suy ra $ah_a=bh_b=ch_c$. (1)

Vì a, b, c tỉ lệ với 2, 3, 4 nên

$\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}=k\ (k>0)$.

Từ đó $a=2k$, $b=3k$, $c=4k$.

Từ (1) suy ra $2k.h_a=3k.h_b=4k.h_c$

$\Rightarrow\frac{2h_a}{12}=\frac{3h_b}{12}=\frac{4h_c}{12}\Rightarrow\frac{h_a}{6}=\frac{h_b}{4}=\frac{h_c}{3}$.

Vậy độ dài ba đường cao của tam giác tỉ lệ với 6; 4; 3.

Bài tập vận dụng

Bài 1. Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Chứng minh rằng

$\frac{7a^2+3ab}{11a^2-8b^2}=\frac{7c^2+3cd}{11c^2-8d^2}$ (với các mẫu khác 0).

Bài 2. Lớp 7A có 52 học sinh được chia làm ba tổ. Nếu tổ 1 bớt đi 1 học sinh, tổ 2 bớt đi 2 học sinh, tổ 3 thêm vào 3 học sinh thì số học sinh tổ một, tổ hai, tổ ba tỉ lệ nghịch với 3; 4; 2. Tìm số học sinh mỗi tổ.

THÁCH ĐẤU

TRẬN ĐẤU THỨ MỘT TRĂM NĂM MƯƠI LĂM

Người thách đấu: *Võ Quốc Bá Cẩn*, trường THCS Archimedes Academy, **Hà Nội.**

Bài toán thách đấu: Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $(x + 1)(y + 1) = 4xy$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{\sqrt{3x^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{3y^2+1}}\le 1.$

Thời hạn: Trước ngày 08.10.2018 theo dấu bưu điện.

Kết quả TRẬN ĐẤU THỨ MỘT TRĂM NĂM MƯƠI HAI (TTT2 số 180+181)

Đề bài. Tìm nghiệm nguyên không âm của phương trình $x(8x^2 + 12x + 6) = y(y^4 + y^3 + 1)$.

Lời giải. Phương trình đã cho tương đương với

$(2x+1)^3 = (y+1)(y^4+1).$ (1)

Vì $(2x+1)^3$ lẻ nên $(y+1), (y^4+1)$ lẻ.

a) Xét y = 0 thì a = b = 1; x = 0 (thỏa mãn đề bài).

b) Xét số chẵn $y \ge 2$.

Gọi $d = (y+1;\ y^4+1)$ thì d là số lẻ.

Vì $y^4-1 = (y^2+1)(y-1)(y+1)$ nên

$d = (y+1;\ y^4+1) = (y+1;\ y^4-1+2) = (y+1;\ 2).$

Mà d lẻ nên d = 1.

Từ đó và (1) suy ra $\begin{cases} y^4+1 = a^3 \\ y+1 = b^3 \end{cases}$ $(a, b \in \mathbb{N}^*)$. (2)

trong đó các số lẻ $a \ge 17$; $b \ge 3$ và (a, b) = 1.

Từ (2) ta có

$y^4 = (b^3-1)^4 = a^3-1 = (a-1)(a^2+a+1).$ (3)

Gọi $c = (a-1,\ a^2+a+1); (c \in \mathbb{N}^*).$

Vì $a^2+a+1 = (a-1)(a+2)+3$ nên

$c = (a-1;\ a^2+a+1) = (a-1;\ 3) \Rightarrow c \in \{1; 3\}.$

- TH1. $c = 1$.

Từ (3) có $(a-1)(a^2+a+1) = (b^3-1)^4$ là số chính phương.

Vì $(a-1;\ a^2+a+1) = 1$ và $a-1;\ a^2+a+1 \in \mathbb{N}^*$

nên $a-1;\ a^2+a+1$ là các số chính phương.

Đặt $a^2+a+1 = k^2$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ thì

$(2k)^2-(2a+1)^2 = 3$

$\Rightarrow (2k-2a-1)(2k+2a+1) = 3.$

Mà $k, a \in \mathbb{N}^*, a \ge 3$, suy ra phương trình không có nghiệm nguyên dương.

- TH2. c = 3 là ước của a – 1.

Từ (2) có $y^4 = a^3 - 1$ nên $y \,\vdots\, 3$.

Do y chẵn nên $b^3 - 1 = y \,\vdots\, 6$.

Hơn nữa $y + 1 = b^3$ là số lẻ và b không chia hết cho 3 nên $b = 6k + 1$ hoặc $b = 6k - 1$.

* Nếu $b = 6k - 1$ thì $y = b^3 - 1 = (6k - 1)^3 - 1$ không chia hết cho 6 (loại).

Do $b \ge 3$, $b = 6k + 1 \ge 7$.

Từ (2) có $a^3 = y^4 + 1 = (b^3 - 1)^4 + 1$

$= b^{12} - 4b^9 + 6b^6 - 4b^3 + 2.$ (4)

Từ (4) dễ thấy số $(b^4 - 2b)^3 = b^3(b^3 - 2)^3$ $= b^{12} - 6b^9 + 12b^6 - 8b^3 < a^3$ với $b \ge 7$.

Do đó chỉ có thể xảy ra:

$a^3 = (b^4 - b - n)^3$ với số nguyên n mà $1 \le n < b$.

Xét số $e = [b^4 - (b + n)]^3 = b^{12} - 3b^9 - 3b^8n + 3b^6 + 6b^5n + 3b^4n^2 - b^3 - 3b^2n - 3bn^2 - n^3$.

Từ đó và (4) có $e - a^3 = b^9 - 3b^8n - 3b^6 + 6b^5n + 3b^4n^2 + 3b^3 - 3b^2n - 3bn^2 - n^3 - 2.$ (5)

* Khi $n = 2k = \dfrac{b-1}{3}$, từ (5) ta có $e - a^3 =$

$b^8-\dfrac{2}{3}b^6-\dfrac{8}{3}b^5+\dfrac{1}{3}b^4+\dfrac{44}{27}b^3+\dfrac{16}{9}b^2+\dfrac{4}{9}b-\dfrac{53}{27}$

$=b^5\left(b^3-\dfrac{2}{3}b-\dfrac{8}{3}\right)+\dfrac{1}{3}b^4+\dfrac{16}{9}b^2$

$+\dfrac{4}{9}b+\dfrac{1}{27}(44b^3-53)>0$ với $b \ge 7$.

* Khi $n = 2k + 1 = \dfrac{b+2}{3}$, từ (5) ta có

$e-a^3=-2b^8-\dfrac{2}{3}b^6+\dfrac{16}{3}b^5+\dfrac{4}{3}b^4$

$+\dfrac{44}{27}b^3-\dfrac{32}{9}b^2-\dfrac{16}{9}b-\dfrac{62}{27}$

$=-\dfrac{2}{3}b^4(3b^4-8b+2)-\dfrac{2}{9}b^3\left(3b^3-\dfrac{22}{3}\right)$

$-\dfrac{32}{9}b^2-\dfrac{16}{9}b-\dfrac{62}{17}<0$ với $b \ge 7$.

Như vậy với $b \ge 7$ thì

$(b^4 - b - 2k - 1)^3 < a^3 < (b^4 - b - 2k)^3$

$\Leftrightarrow b^4 - b - 2k - 1 < a < b^4 - b - 2k.$

Suy ra không tồn tại số nguyên a với $b \ge 7$.

Tóm lại phương trình ban đầu có nghiệm nguyên không âm duy nhất (x; y) = (0; 0).

Nhận xét. Đây là bài toán khó nên không có võ sĩ nào giải trọn vẹn.

NGUYỄN VIỆT HẢI

MỞ RỘNG VÀ KHAI THÁC MỘT SỐ BÀI TOÁN TỔ HỢP

ThS. TRỊNH HOÀI DƯƠNG *(GV. THCS Giảng Võ, Ba Đình, Hà Nội)*
ThS. LÊ ĐÌNH TRƯỜNG *(Học viện Aladdin)*

(Tiếp theo kì trước)

Bài toán 2. Cho X là một tập hợp gồm 700 số nguyên dương đôi một khác nhau, mỗi số không lớn hơn 2006. Chứng minh trong tập hợp X luôn tìm được hai phần tử x, y sao cho x – y thuộc tập hợp E = {3; 6; 9}.

(Đề thi vào lớp 10 THPT chuyên Đại học Sư phạm Hà Nội năm học 2006 - 2007)

Lời giải. Cách 1. Theo nguyên lí Dirichlet thì trong 700 = 3.233 + 1 số có ít nhất 234 số có cùng số dư khi chia cho 3. Gọi 234 số đó là $a_1, a_2, ..., a_{234}$ với $1 \le a_1 < a_2 < ... < a_{234} \le 2006$.

Giả sử không tồn tại hai số a_i, a_j nào thỏa mãn $a_i - a_j \in \{3; 6; 9\}$. Do đó $a_i - a_j \ge 12$ (vì $a_i - a_j \vdots 3$ và $a_i \ne a_j$). Trong 234 số trên, hai số kề nhau hơn kém nhau ít nhất 12 đơn vị nên $a_{234} - a_1 \ge 234.12 = 2808 > 2006$ (vô lí).

Vậy điều giả sử là sai, suy ra đpcm.

Chúng ta đi khai thác bài toán trên

✻ **Hướng khai thác 1.** Tìm thêm các cách giải cho bài toán trên.

Cách 2. Xét 700 số nguyên dương đã cho đôi một khác nhau và sắp thứ tự như sau:

$1 \le a_1 < a_2 < ... < a_{700} \le 2006$.

Xét 700.3 = 2100 số nguyên dương trong bảng sau:

a_1	a_2	...	a_{699}	a_{700}
$a_1 + 3$	$a_2 + 3$	...	$a_{699} + 3$	$a_{700} + 3$
$a_1 + 9$	$a_2 + 9$	...	$a_{699} + 9$	$a_{700} + 9$

Vì 2100 số trong bảng trên nhận các giá trị nguyên từ 1 đến 2006 + 9 = 2015 nên theo nguyên lí Dirichlet có ít nhất 2 số nhận cùng một giá trị, hay là có hai số bằng nhau, hai số đó không cùng thuộc một hàng ngang, không cùng thuộc một hàng dọc.

Suy ra đpcm.

Cách 3. Ta chia dãy số nguyên dương từ 1 đến 2006 thành 201 đoạn: [1; 10], [11; 20], …, [1991; 2000] và [2001; 2006].

Vì có 700 = 3.201 + 7 số nguyên dương khác nhau nên theo nguyên lí Dirichlet có ít nhất 4 số thuộc cùng một đoạn. Hiệu của hai số bất kì trong 4 số này luôn lớn hơn 0 và nhỏ hơn 10. Trong 4 số bất kì ta luôn chọn được hai số có cùng số dư khi chia cho 3, hiệu hai số này chia hết cho 3.

Suy ra đpcm.

✻ **Hướng khai thác 2.**

* Ta có thể làm chặt bài toán bằng cách giảm số các số cho ban đầu hoặc tăng giá trị các số có thể nhận.

Bài toán 2.1. Cho X là một tập hợp gồm a số nguyên dương đôi một khác nhau, mỗi số không lớn hơn b. Chứng minh trong tập hợp X luôn tìm được hai phần tử x, y sao cho x – y thuộc tập hợp E = {3; 6; 9} trong mỗi trường hợp sau:

a) a = 607 và b = 2016;

b) a = 505 và b = 2016;

c) a = 504 và b = 2006.

Lời giải. a) Với cách làm này ta có thể làm chặt bài toán bằng cách thay 700 số bằng 607 số và có thể tăng giá trị 2006 lên 2016.

Ta chia dãy số nguyên dương từ 1 đến 2016 thành 202 đoạn: [1; 10], [11; 20], …, [1991; 2000], [2001; 2010] và [2011; 2016].

Vì có 607 = 3.202 + 1 số nguyên dương khác nhau nên theo nguyên lí Dirichlet có ít nhất 4 số thuộc cùng một đoạn. Hiệu của hai số bất kì trong 4 số này luôn lớn hơn 0 và nhỏ hơn 10. Trong 4 số bất kì ta luôn chọn được hai số có cùng số dư khi chia cho 3, hiệu hai số này chia hết cho 3. Suy ra đpcm.

b) Ta cũng có thể mở rộng các khoảng chia thêm 2 đơn vị nên từ 1 đến 2016 ta chia thành 168 đoạn như sau: [1; 12], [13; 24], ... , [1993; 2004] và [2005; 2016]. Khi đó ta chỉ cần 505 số nếu mở rộng giá trị 2006 thành 2016.

c) Ta có thể làm chặt bài toán bằng cách thay 700 số thành 504 số như sau:

Gọi 504 số nguyên dương đôi một khác nhau đã cho và sắp thứ tự như sau:

$1 \le a_1 < a_2 < \ldots < a_{504} \le 2006$.

Xét 504.4 = 2016 số nguyên dương trong bảng sau:

a_1	a_2	…	a_{503}	a_{504}
$a_1 + 3$	$a_2 + 3$	…	$a_{503} + 3$	$a_{504} + 3$
$a_1 + 6$	$a_2 + 6$	…	$a_{503} + 6$	$a_{504} + 6$
$a_1 + 9$	$a_2 + 9$	…	$a_{503} + 9$	$a_{504} + 9$

Vì 2006 số trong bảng trên nhận các giá trị nguyên từ 1 đến 2006 + 9 = 2015 nên theo nguyên lí Dirichlet có ít nhất 2 số nhận cùng một giá trị hay là có hai số bằng nhau. Lập luận tiếp như ở cách giải 2. Suy ra đpcm.

✻ **Hướng khai thác 3.** Sáng tác bài toán mới.

Ta có thể thay điều kiện tập E = {3; 6; 9} thành E = {4; 8; 12} hoặc E = {5; 10; 15} ta được hai bài toán sau:

Bài toán 2.2. Cho X là một tập hợp gồm 505 số nguyên dương đôi một khác nhau, mỗi số không lớn hơn 2016. Chứng minh trong tập hợp X luôn tìm được hai phần tử x, y sao cho x – y thuộc tập hợp E = {4; 8; 12}.

Bài toán 2.3. Cho A là một tập hợp gồm 506 số nguyên dương đôi một khác nhau, mỗi số không lớn hơn 2016. Chứng minh trong tập hợp X luôn tìm được hai phần tử x, y sao cho x – y thuộc tập hợp E = {5; 10; 15}.

Bài toán 3. Cho tập hợp A gồm 36 số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 36. Chứng minh trong 25 phần tử bất kì của tập hợp A luôn tìm được 3 phần tử là 3 số đôi một nguyên tố cùng nhau.

(Đề thi vào lớp 10 trường THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam, năm học 2014 - 2015)

Lời giải. Xét các tập hợp B = {2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31}; C = {4; 9; 25} và D = {1; 8; 33; 35}. Tập hợp B gồm các số nguyên tố nhỏ hơn 36.

Cả ba tập hợp này có 18 số, còn lại 18 số thuộc tập hợp A và không thuộc các tập hợp B, C, D.

Trong 25 số đã chọn thì có tối đa 18 số không thuộc B, C, D. Suy ra có ít nhất 7 số thuộc 3 tập hợp B, C, D.

Theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất 3 số thuộc cùng 1 tập hợp trong ba tập hợp B, C, D nên 3 số này nguyên tố cùng nhau.

Suy ra đpcm.

Khai thác bài toán.

✻ **Hướng khai thác 1.** Tìm thêm cách giải cho bài toán trên.

Cách 2. Trong tập hợp A ta có 11 số nguyên tố là 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 và 31.

Đặt A_1 = {4; 9; 25}, A_2 = {1; 8; 27} và A_3 = {16; 33; 35}.

Dễ thấy các phần tử trong các tập hợp A_i (i = 1, 2, 3) đôi một nguyên tố cùng nhau dù không có số nào là số nguyên tố.

Gọi T là tập hợp con bất kì của của A chứa 25 phần tử.

• TH1. Trong T không có số nguyên tố nào thì $A_i \subset T$ (i = 1, 2, 3). Như vậy các phần tử của A_i thỏa mãn yêu cầu bài toán.

• TH2. Trong T có đúng một số nguyên tố thì tồn tại ít nhất 2 trong 3 tập hợp $A_i \subset T$ (i =1, 2, 3). Khi đó các phần tử trong các tập hợp đó thỏa mãn yêu cầu bài toán.

• TH3. Trong T có đúng hai số nguyên tố thì tồn tại ít nhất 1 trong 3 tập hợp $A_i \subset T$ (i = 1, 2, 3). Khi đó các phần tử trong tập hợp đó thỏa mãn yêu cầu bài toán.

• TH4. Trong T có ít nhất 3 số nguyên tố thì bộ ba số đó thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Suy ra đpcm.

Cách 3. • Bổ đề: *Cho tập hợp M gồm 6 số tự nhiên liên tiếp, Q là tập hợp con gồm 5 phần* *tử bất kì của M. Khi đó luôn tồn tại 3 phần tử của Q đôi một nguyên tố cùng nhau.*

Chứng minh. + Nếu trong 5 số đó có 3 số lẻ thì chúng là ba số lẻ liên tiếp nên ba số đó đôi một nguyên tố cùng nhau.

+ Nếu trong 5 số đó có 2 số lẻ và 3 số chẵn, dễ thấy đó là 3 số chẵn liên tiếp và trong đó có đúng 1 số chia hết cho 3 và nhiều nhất 1 số chia hết cho 5. Như vậy có ít nhất một số chẵn không chia hết cho cả 3 và 5. Ta chứng minh số chẵn đó cùng với 2 số lẻ là 3 số đôi một nguyên tố cùng nhau.

Gọi 3 số đó là a_1, a_2, a_3. Vì a_1, a_2, a_3 cùng thuộc tập hợp M nên $1 \le |a_i - a_j| \le 5$. (1)

Giả sử có $(a_i, a_j) = p$ với $p \ge 7$ (vì nếu $p = 3$ hoặc $p = 5$ thì vô lí), khi đó $a_i = mp$; $a_j = np$ $(m \ne n)$.

Như vậy $|a_i - a_j| = p|m - n| \ge p.1 \ge 7$ (mâu thuẫn với (1)).

Vậy a_1, a_2, a_3 là ba số đôi một nguyên tố cùng nhau. Bổ đề được chứng minh.

• Quay trở lại bài toán: Ta chia tập hợp A thành 6 tập hợp, mỗi tập hợp gồm 6 số tự nhiên liên tiếp $A_k = \{6k + 1; 6k + 2; ... ; 6k + 6\}$ với $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Theo nguyên lí Dirichlet thì trong 25 phần tử của tập hợp A thì có ít nhất 5 phần tử thuộc cùng một tập hợp A_k. Theo bổ đề trên ta có đpcm.

✻ **Hướng khai thác 2.** Tổng quát bài toán: Bản chất bài toán là chỉ ra 5 số cùng thuộc tập hợp $A_k = \{6k + 1; 6k + 2; ... ; 6k + 6\}$ với $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Tức là cho 36 số nguyên dương từ 1 đến 36 thì ta cần lấy $25 = 6.4 + 1$ số khác nhau trong 36 số đã cho.

Ta cho k nhận các giá trị khác, chẳng hạn từ 0 đến 499 tức là cho 3000 số nguyên dương từ 1 đến 3000 thì ta cần lấy $2001 = 500.4 + 1$ số khác nhau trong 3000 số đã cho thì luôn tìm được 3 số đôi một nguyên tố cùng nhau.

Từ đó ta có bài toán tổng quát:

Bài toán 3.1. Cho tập hợp A gồm 6k số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 6k ($k \in \mathbb{N}$, $k \ge 1$). Chứng minh rằng trong $4k + 1$ phần tử bất kì của tập hợp A luôn tìm được 3 phần tử là 3 số đôi một nguyên tố cùng nhau.

Lời giải bài toán này hoàn toàn tương tự như lời giải thứ hai.

✻ **Hướng khai thác 3.** Các bài toán tương tự.

Bài toán 3.2. Cho tập hợp A gồm 36 số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 36. Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho mọi tập hợp con n phần tử của A đều chứa 3 phần tử là các số đôi một nguyên tố cùng nhau.

Lời giải. Trước hết ta chứng minh $n > 24$.

Đặt $M_2 = \{2; 4; 6; ... ; 36\}$; $M_3 = \{3; 6; 9; ... ; 36\}$; $M_1 = M_2 \cup M_3$; $M_4 = M_2 \cap M_3$.

Ta thấy tập hợp M_2 có 18 phần tử, tập hợp M_3 có 12 phần tử, tập hợp M_4 có 6 phần tử.

Do đó tập hợp M_1 có $18 + 12 - 6 = 24$ phần tử.

Theo nguyên lí Dirichlet, mọi tập hợp con của M_1 chứa ít nhất 3 phần tử đều có 2 phần tử nằm trong M_2 hoặc M_3, hai phần tử này không nguyên tố cùng nhau.

Do đó $n > 24$. Ta chứng minh tiếp $n = 25$ thỏa mãn yêu cầu của đề bài như Bài toán 3. Vậy n nhỏ nhất là 25.

Một cách tự nhiên ta có bài toán tổng quát:

Bài toán 3.3. Cho tập hợp A gồm 6k số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 6k ($k \in \mathbb{N}$, $k \ge 1$). Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho mọi tập hợp con n phần tử của A đều chứa 3 phần tử là các số đôi một nguyên tố cùng nhau.

Hướng dẫn. Với lập luận tương tự bài toán 1 ta chứng minh được $4k + 1$ là số tự nhiên nhỏ nhất thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Như vậy trong trường hợp tập hợp A gồm 6k phần tử và số các phần tử nguyên tố cùng nhau là 3 thì bài toán được giải quyết. Bây giờ nếu ta thay đổi các dữ kiện của bài toán thì sao? Các bạn hãy giải bài toán IMO 1991 sau đây:

Bài toán 3.4. Cho tập hợp A gồm 280 số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 280. Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho mọi tập hợp con n phần tử của A đều chứa 5 phần tử là các số đôi một nguyên tố cùng nhau.

Bài toán 4. Có bao nhiêu số nguyên dương có ba chữ số $\overline{abc}$ thỏa mãn $a \le b \le c$?

(IMSO 2015 tại Thái Lan)

Lời giải. • Nếu a = b = c thì có 9 số.

• Nếu a = b hoặc b = c thì có

$2.C_9^2.1 = 2\times\frac{9\times 8}{2\times 1} = 72$ số.

• Nếu a < b < c thì có $C_9^3 = \frac{9!}{3!(9-3)!} = 84$ số.

Vậy tất cả có 9 + 72 + 84 = 165 số.

Khai thác bài toán.

✻ **Hướng khai thác 1.** Tìm thêm cách giải khác:

Ta có $a \le b \le c \Leftrightarrow 1 \le a < b + 1 < c + 2 \le 11$.

Chọn 3 số nguyên dương bất kì trong 11 số từ 1 đến 11 thì có C_{11}^3 cách chọn.

Từ 3 chữ số đó chỉ có 1 cách sắp xếp các số theo thứ tự tăng dần.

Theo quy tắc nhân ta có kết quả là $1\times C_{11}^3 = C_{11}^3 = \frac{11!}{3!(11-3)!} = \frac{9.10.11}{6} = 165$ số.

✻ **Hướng khai thác 2.** Các bài toán tương tự: *Ta thay đổi số chữ số của số cần đếm, chẳng hạn từ đếm số có 3 chữ số thành đếm số có 5 chữ số như sau:*

Bài toán 4.1. Có bao nhiêu số nguyên dương có 5 chữ số $\overline{abcde}$ sao cho a < b < c < d < e?

Lời giải. Chọn 5 chữ số bất kì trong 9 chữ số từ 1 đến 9 có C_9^5 cách chọn.

Từ 5 chữ số đó chỉ có 1 cách sắp xếp các số theo thứ tự tăng dần.

Số các số cần đếm là:

$$1\times C_9^5 = C_9^5 = \frac{9!}{5!(9-5)!} = 126 \text{ số.}$$

Ta bổ sung thêm điều kiện có thể có hai hay nhiều chữ số bằng nhau, chẳng hạn như bài tập sau:

Bài toán 4.2. Có bao nhiêu số nguyên dương có 5 chữ số $\overline{abcde}$ sao cho a ≤ b < c < d ≤ e?

Lời giải. Ta có a ≤ b < c < d ≤ e.

Suy ra $1 \le a < b + 1 < c + 1 < d + 1 < e + 2 \le 11$.

Có C_{11}^5 cách chọn 5 số nguyên dương trong 11 số từ 1 đến 11.

Từ 5 chữ số đó chỉ có 1 cách sắp xếp các chữ số theo thứ tự tăng dần.

Số các số cần đếm là

$$1\times C_{11}^5 = C_{11}^5 = \frac{11!}{5!(11-5)!} = 462 \text{ số.}$$

✻ **Hướng khai thác 3.** Phát biểu bài toán dưới dạng khác.

Bài toán ban đầu có thể phát biểu dưới dạng:

Bài toán 4.3. Tìm số nghiệm nguyên dương của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$.

Bài toán 4.4. Chia 12 cái kẹo cho 4 bạn sao cho mỗi bạn có ít nhất một cái kẹo. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chia kẹo?

Lời giải. Đặt $a_1 = x_1$; $a_2 = x_1 + x_2$; $a_3 = x_1 + x_2 + x_3$; $a_4 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.

Dễ thấy $1 \le a_1 < a_2 < a_3 < a_4 = 12$.

Suy ra $1 \le a_1 < a_2 < a_3 \le 11$.

Số nghiệm nguyên dương của phương trình bằng số bộ ba số (a_1, a_2, a_3) thỏa mãn điều kiện trên. Với mỗi nhóm 3 số tự nhiên phân biệt lấy từ 11 số tự nhiên từ 1 đến 11, ta chỉ có một cách sắp xếp theo thứ tự tăng dần.

Vậy số nghiệm nguyên dương của phương trình đã cho là $C_{11}^3 = \frac{11!}{3!8!} = 165$.

Với cách phát biểu mới, ta xét một số các bài toán tương tự như sau:

Bài toán 4.5. Tìm số nghiệm nguyên dương của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = 20$.

Bài toán 4.6. Có bao nhiêu cách để chia 20 chiếc bút chì đôi một khác nhau cho 3 bạn nữ sao cho mỗi bạn có ít nhất 1 chiếc bút chì?

(IMC 2012 tại Đài Loan)

Bài toán 4.7. Tìm số nghiệm nguyên dương của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2018$.

Lời giải. Đặt $a_1 = x_1$; $a_2 = x_1 + x_2$; $a_3 = x_1 + x_2 + x_3$; $a_4 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.

Dễ thấy $1 \le a_1 < a_2 < a_3 < a_4 = 2018$.

Suy ra $1 \le a_1 < a_2 < a_3 \le 2017$.

Số nghiệm nguyên dương của phương trình bằng số bộ ba số (a_1, a_2, a_3) thỏa mãn điều kiện trên. Với mỗi nhóm 3 số tự nhiên phân biệt lấy từ 2017 số tự nhiên từ 1 đến 2017, ta chỉ có một cách sắp xếp theo thứ tự tăng dần.

Vậy số nghiệm nguyên dương của phương trình đã cho là C_{2017}^3.

Bài toán 5. Cho tập hợp

$$S = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \le x \le 50\}.$$

Xét A là một tập hợp con bất kì của tập hợp S và có tính chất: Không có ba phần tử nào của tập hợp A là số đo độ dài ba cạnh của một tam giác vuông.

a) Tìm một tập hợp A có đúng 40 phần tử và thỏa mãn điều kiện đề bài.

b) Có hay không có một tập hợp A có đúng 41 phần tử và thỏa mãn điều kiện đề bài? Hãy giải thích câu trả lời.

(Đề thi vào lớp 10 trường THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam, năm học 2018 - 2019)

Lời giải. a) Có thể có nhiều tập A thỏa mãn điều kiện đề bài. Xét tập A gồm 40 phần tử còn lại của S sau khi loại đi 10 phần tử 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50 của S. Ta sẽ chứng minh tập A ở trên thỏa mãn đề bài.

Giả sử có bộ số nguyên (x; y; z) với x; y; z $\in$ A thỏa mãn $x^2 + y^2 = z^2$.

Vì x; y; z $\in$ A nên x; y; z đều không chia hết cho 5 và $x^2; y^2; z^2 \equiv 1; 4 \pmod 5$. (*)

Mặt khác $x^2 + y^2 = z^2$ nên $z^2 \equiv 2; 5; 3; 0 \pmod 5$ mâu thuẫn với (*) nên điều giả sử là sai.

Do đó tập A với 40 phần tử vừa tìm thỏa mãn đề bài.

b) Có ít nhất một tập hợp A có 41 phần tử thỏa mãn. Thật vậy, khi bổ sung 5 phần tử 10, 15, 25, 40 và 45 vào tập hợp A, ta thấy có tất cả 9 bộ số tạo thành độ dài 3 cạnh của một tam giác vuông là:

(6; 8; 10); (10; 24; 26); (9; 12; 15);
(8; 15; 17); (15; 36; 39); (7; 24; 25);
(24; 32; 40); (9; 40; 41) và (27; 36; 45).

Như vậy ta chỉ cần loại đi 4 phần tử 8, 9, 24, 36 thì tập hợp A có 41 phần tử còn lại thỏa mãn đề bài.

✻ **Hướng khai thác 1.** Phát biểu bài toán dưới dạng khác, dạng cực trị tổ hợp:

Bài toán 5.1. Cho tập hợp

$$S = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \le x \le 50\}.$$

Xét A là một tập hợp con bất kì của tập hợp S và A có n phần tử. Tìm giá trị lớn nhất của n để tập hợp A có tính chất: Không có ba phần tử nào của tập hợp A là số đo độ dài ba cạnh của một tam giác vuông.

Bài toán 5.2. Cho bảng ô vuông kích thước $3 \times n$ (3 hàng; n cột, n là số tự nhiên lớn hơn 1) được tạo bởi các ô vuông nhỏ kích thước 1×1. Mỗi ô vuông nhỏ được tô bởi một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Tìm số n bé nhất để với mọi cách tô màu như thế luôn tìm được hình chữ nhật tạo bởi các ô vuông nhỏ 1×1 sao cho 4 ô vuông nhỏ 1×1 ở 4 góc của hình chữ nhật đó cùng màu.

(Đề thi vào lớp 10 trường THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam, năm học 2014 - 2015)

Bài toán 6. Xét tập hợp S gồm các số nguyên dương có tính chất: Với hai phần tử phân biệt bất kì x, y thuộc S, ta luôn có $30|x - y| \ge xy$. Hỏi tập hợp S có thể có nhiều nhất bao nhiêu phần tử?

(Đề thi vào lớp 10 trường THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam, năm học 2017 - 2018)

Lời giải. Xét $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là n số nguyên dương của tập S thỏa mãn đề bài.

Giả sử $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$.

Ta có $30(a_{i+1} - a_i) \ge a_i a_{i+1}$ $(\forall i = \overline{1, n-1})$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_{i+1}} \ge \frac{1}{30} \quad (\forall i = \overline{1, n-1}). \ (*)$$

Ta sẽ chứng minh $n \le 10$.

Thật vậy giả sử ngược lại $n \ge 11$. (1)

Từ (*) ta có $\frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_{i+1}} \ge \frac{1}{30}$ $(\forall i = \overline{6, n-1})$.

Suy ra $\sum_{i=6}^{n-1}\left(\frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_{i+1}}\right) \ge \frac{n-6}{30}$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_6} - \frac{1}{a_n} \ge \frac{n-6}{30}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6} \ge \frac{1}{a_6} \ge \frac{n-6}{30} + \frac{1}{a_n} > \frac{n-6}{30} \quad (\text{vì } a_6 \ge 6)$$

$\Rightarrow n < 11$ (mâu thuẫn với (1)).

Suy ra điều giả sử là sai.

Do đó $n \le 10$.

Mặt khác, ta chỉ ra được một tập hợp S có 10 phần tử là $S = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 11; 18; 45\}$.

Từ đó, tập hợp S có thể có nhiều nhất là 10 phần tử.

PERPENDICULAR LINES AND PARALLEL LINES

TRỊNH HOÀI DƯƠNG *(GV. THCS Giảng Võ, Ba Đình, Hà Nội)*
NGUYỄN THÀNH NAM *(Cựu SV Đại học Oxford, Vương quốc Anh)*
HOÀNG ANH QUÂN *(Cử nhân tài năng toán, Đại học KHTN Hà Nội)*

Key word

Point, Segment, Line, Ray, Plane, Angle, Parallel, Perpendicular, Supplementary, Complementary.

Transversal	cát tuyến
Alternate angles	các góc so le (trong)
Alternate exterior angles	các góc so le ngoài
Corresponding angles	các góc đồng vị

Definition

- When two lines cut to form right angles (90°), we say that the lines are perpendicular to each other.
- If M is the midpoint of AB, and PM is perpendicular to AB, PM is called the perpendicular bisector of AB.
- Two lines in a plane are parallel lines if they have not a common point.
- Two angles are said to be complementary if their sum is 90°. If two angles are complementary, each angle is called the complement of the other.
- Two angles are said to be supplementary if their sum is 180°. If two angles are supplementary, each angle is called the supplement of the other.
- In Figure 1, two lines cut at G to form four angles. $\angle AGD$ and $\angle BGC$ are called vertically opposite angles, and so are $\angle BGD$ and $\angle AGC$.

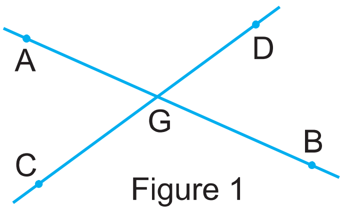


Figure 1

Properties

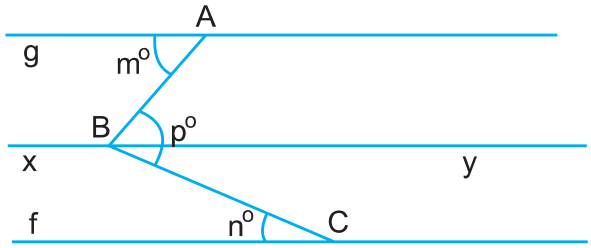
A line that is perpendicular to one of two parallel lines is also perpendicular to the other.

A line that is parallel to one of two parallel lines is also parallel to the other.

- When a transversal cuts two parallel lines:
- The alternate angles are equal,
- The corresponding angles are equal,
- The interior angles on the same side of the transversal are supplementary.
- Two lines in a plane are parallel if they are cut by a transversal in such a way that:
- The alternate angles are equal, or
- The corresponding angles are equal, or
- The interior angles on the same side of the transversal are supplementary.

Exercise

In the figure below, lines g and f are parallel. Prove that $p^o = m^o + n^o$.



Solution

Draw a line xy such that line xy goes through point B and it is parallel to line g, as shown in the figure.

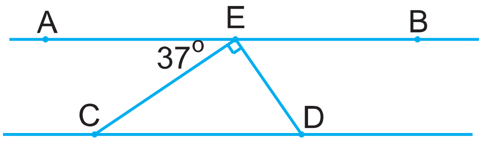
The transversal AB cuts two parallel lines g and xy, it impies that the alternate angles $\angle gAB$ and $\angle ABy$ are equal. Similarly, two angles $\angle fCB$ and $\angle CBy$ are equal.

Therefore, $\angle ABC = \angle ABy + \angle CBy$

$= \angle gAB + \angle fCB$. Hence, $p^o = m^o + n^o$.

Homework

Problem. In the figure below, AB is parallel to CD. What is the value of the angle EDC?



Bạn hãy giải bài toán trên bằng tiếng Anh và gửi về tòa soạn để nhận quà nhé.

Thì thầm... Thì thầm thôi...

Tuổi hồng... xin cứ tuổi hồng
Chuyện gì quá sớm... xin không trả lời

Hỏi: Chị em ngày xưa kể: "Rubic Hỏi - Đáp" trước gọi là "Thì thầm thì thầm thôi" có vẻ gần gũi hơn... Có phải không anh?

HOA HỒNG
(Lớp 7A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, Bắc Ninh)

Đáp:

Chị em vẫn nhớ ngày xưa
Là thời em bé chắc chưa biết ngồi
Bây giờ em đã lớn rồi
Anh xin đổi lại... tên hồi chị em.

Hỏi: Gửi bài về Toán Tuổi thơ thì phong bì có phải dán tem không anh?

Người yêu Toán
(THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, Nghệ An)

Đáp:

Phong bì mà chẳng dán tem
Em hỏi bưu điện thử xem thế nào?
Đùa thôi... tem nhớ dán vào
Để bài anh nhận chất cao mỗi ngày...

Hỏi: Có khi thầy giáo em bảo em giải sai nhưng tại sao đáp số lại vẫn đúng ạ? Theo anh liệu em có được điểm nào không?

Tên toàn vần T
(THCS Lê Hồng Phong, TP. Huế, Thừa Thiên - Huế)

Đáp:

Câu hỏi em rất là hay
Giải sai, thầy đã gạch ngay... còn gì
Nhầm đi, nhầm lại, có khi
Đáp số vẫn đúng, điểm thì vẫn không.

Hỏi: Em cứ thắc mắc, thi giải toán qua thư, nhỡ nhờ ai làm hộ thì sao ạ?

Người hay thắc mắc
(Trường Quốc tế Hòa Bình, Cần Thơ)

Đáp:

Cũng như cây chẳng muốn trồng
Lại thích ăn quả phụ công của người
Nhờ nhiều sẽ mắc bệnh lười
Oai thêm một tí... nhưng thời hiểm nguy

Hỏi: Em học lớp 6 nhưng không muốn chỉ giải bài lớp 6 trên Toán Tuổi thơ có được không anh?

NGUYỄN VĂN H
(THCS Nghĩa Tân, Hà Nội)

Đáp:

Theo anh, chuyện đó cũng tùy
Nếu tự giải được tiếc gì không cho
Giải hay sẽ được thưởng to
Nhưng đừng gian nhé! Anh dò ra luôn...

ANH PHÓ GỠ XƯA

CÁC LỚP 6 & 7

Bài 1(185+186). Tìm các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn a + b + c = 91 và $b^2 = ca$.

TRƯƠNG QUANG AN

(GV. THCS Nghĩa Thắng, Tư Nghĩa, Quảng Ngãi)

Bài 2(185+186). Cho a, b, c là các số thực bất kì. Chứng minh rằng:

1) $|b + c - a| + |c + a - b| + |a + b - c| + |a + b + c| \geq 2(|a| + |b| + |c|)$.

2) $|a| + |b| + |c| + |a + b + c| \geq |a + b| + |b + c| + |c + a|$.

HOÀNG NGỌC MINH

(GV. THPT Chuyên Khoa học Tự nhiên, Hà Nội)

Bài 3(185+186). Cho các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. Người ta lập ra các số có 7 chữ số khác nhau từ các chữ số đã cho. Hỏi trong các số được lập ra có tồn tại hai số mà số này chia hết cho số kia không?

LẠI QUANG THỌ

(Phòng GD-ĐT Tam Dương, Vĩnh Phúc)

Bài 4(185+186). Cho hình chữ nhật ABCD với AB = 2AD, M là trung điểm của đoạn AB. Trên AB lấy điểm H sao cho $\widehat{ADH} = 15^o$. Hai đường thẳng CH và DM cắt nhau tại K. Hãy so sánh độ dài các đoạn thẳng DH và DK.

LƯU LÝ TƯỞNG

(GV. THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, Phú Thọ)

SOLVE VIA MAIL COMPETITION QUESTIONS

Translated by Trang Duong Thu

1(185+186). Find the positive integers a, b, c such that a + b + c = 91 and $b^2 = ca$.

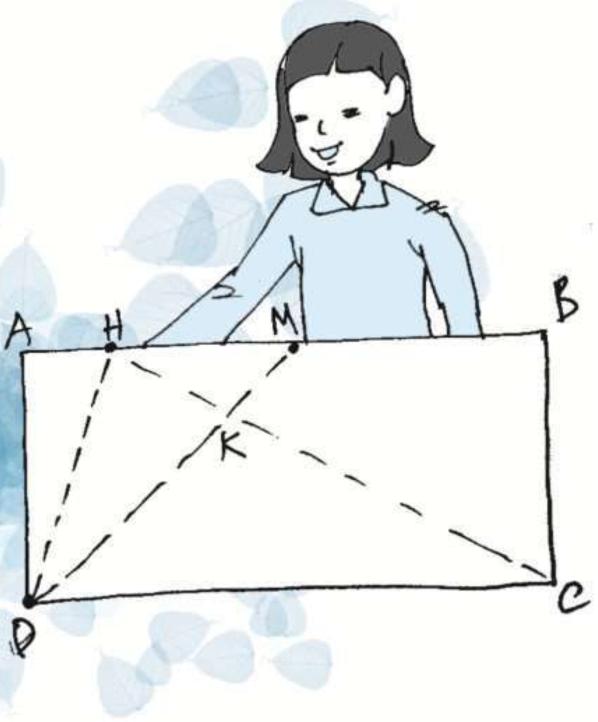
2(185+186). Let a, b, c be real numbers. Prove that:

1) $|b + c - a| + |c + a - b| + |a + b - c| + |a + b + c| \geq 2(|a| + |b| + |c|)$.

2) $|a| + |b| + |c| + |a + b + c| \geq |a + b| + |b + c| + |c + a|$.

3(185+186). The digits 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7 are used to form seven - distinct - digit - numbers. Among these numbers, are there 2 numbers such that one is divisible by the other?

4(185+186). Let ABCD be a rectangle with AB = 2AD. M is a midpoint of AB. H is on AB such that $\angle ADH = 15^o$. CH intersects DM at K. Compare the length of DH and DK.



CÁC LỚP THCS

Bài 5(185+186). Tìm các số nguyên dương n sao cho $3^n + 4^n + 2018^n$ là số chính phương.

TRẦN XUÂN ĐÁNG

(5/7/136 Phan Đình Phùng, TP. Nam Định, Nam Định)

Bài 6(185+186). Tìm các số tự nhiên a và b nguyên tố cùng nhau, thỏa mãn điều kiện

$$\frac{2ab}{a^2+4b^2}+\frac{b^2}{3a^2+2b^2}\geq\frac{3}{5}.$$

ĐẬU CÔNG NHO

(GV. THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, Nghệ An)

Bài 7(185+186). Một giải bóng đá gồm các đội trong nước và một số đội bóng nước ngoài với thể thức thi đấu vòng tròn một lượt. Số đội bóng trong nước gấp 5 lần số đội bóng nước ngoài. Kết thúc giải thì tổng số điểm của các đội trong nước gấp đôi tổng số điểm của các đội nước ngoài. Biết rằng không có trận nào hòa và ở mỗi trận đấu thì đội thắng được 3 điểm, đội thua được 0 điểm. Hỏi có bao nhiêu đội nước ngoài và cho biết thứ tự trong bảng xếp hạng của các đội nước ngoài?

VÕ XUÂN MINH

(GV. THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa)

Bài 8(185+186). Cho hình vuông ABCD với M, N lần lượt là trung điểm của BC và CD; AM cắt BN tại điểm O. Biết diện tích tứ giác AOND bằng 55 cm^2. Tính độ dài cạnh của hình vuông.

LÊ TRẦN QUỐC CẢNH

(GV. THCS Gia Lộc, Trảng Bàng, Tây Ninh)

SOLVE VIA MAIL COMPETITION QUESTIONS

Translated by Trang Duong Thu

5(185+186). Find the positive integers n such that $3^n + 4^n + 2018^n$ is a square number.

6(185+186). Find whole numbers a, b such that (a, b) = 1 and $\frac{2ab}{a^2+4b^2}+\frac{b^2}{3a^2+2b^2}\geq\frac{3}{5}$.

7(185+186). In a football match with local and foreign teams, each team plays one game with each other. The number of local teams is 5 times the number of foreign teams. At the end, the total score of local teams is twice the total score of foreign teams. No game is draw. Win gets 3 score and loss gets 0 score. How many foreign teams are there? What are the foreign teams' places in the ranking score table?

8(185+186). Let ABCD be a square with M, N as the midpoint of BC and CD respectively. AM intersects BN at O. The area of quadrilateral AOND is 55 cm^2. Find the length of the square's side.

LTS. *TS. Lê Thống Nhất, một trong những người sáng lập "Toán Tuổi thơ" từ năm 2000. Sau 10 năm tạm biệt Toán Tuổi thơ để sáng lập các cuộc thi trên mạng như ViOlympic, IOE và Trường học lớn BigSchool, thầy đã trở về tham gia Hội đồng biên tập để cùng xây dựng, phát triển Tạp chí. Thầy đã tâm sự với bạn đọc qua bài thơ "Tâm sự ngày trở về".*

Tâm sự ngày trở về...

Ra đi rồi lại trở về
Bồi hồi nhớ thuở đam mê ngày nào
Mười năm... nhanh thế rồi sao?
Nhìn từng chuyên mục, nghẹn ngào lòng ta

Thầy Cô muôn nẻo gần xa
Học trò cả nước như là vẫn thân
Biết bao bài viết rất cần
Biết bao câu hỏi xoay vần cùng nhau

Mong trò học giỏi, tiến mau
Vừa chơi, vừa học mai sau thành tài
Mong Thầy Cô vẫn miệt mài
Góp thêm trí tuệ qua bài viết hay

Mong cho tạp chí đổi thay
Mong cho bạn đọc mỗi ngày thêm đông
Cùng nhau gian khó vun trồng
Chỉ mong trái ngọt, còn công xá gì ...

LÊ THỐNG NHẤT

Dành cho giáo viên, phụ huynh và trẻ em từ 12 tuổi đến dưới 16 tuổi.
Giấy phép xuất bản: số 31/GP-BVHTT, cấp ngày 23/1/2003 của Bộ Văn hóa và Thông tin.
Mã số: 8BTT185M18. **In tại:** Công ty cổ phần in Công Đoàn Việt Nam, 167 Tây Sơn, Đống Đa, Hà Nội. In xong và nộp lưu chiểu tháng 9 năm 2018.

Giá: 20 000 đồng