TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

4 2007
Số 358

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 44
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (04)5121607, (04)5121606; ĐT-Fax Phát hành, Trị sự: (04)5144272
Email: toanhoctt@yahoo.com Web: http://www.nxbgd.com.vn/toanhoctuoitre

Tập thể cán bộ, giáo viên Trường THPT chuyên Hưng Yên

Chúc mừng
TRƯỜNG THPT CHUYÊN HƯNG YÊN
TRÒN 10 TUỔI

TỔ CHỨC HỘI THI CÁN BỘ, GIÁO VIÊN THƯ VIỆN GIỎI TOÀN QUỐC LẦN THỨ III

Thực hiện chỉ đạo của Bộ Giáo dục và Đào tạo, Nhà xuất bản Giáo dục tổ chức "Hội thi cán bộ, giáo viên thư viện giỏi toàn quốc lần thứ III" tại:

- **Khu vực miền Trung và Tây Nguyên:** Ngày 4,5/5/2007. Tại NXB Giáo dục tại TP. Đà Nẵng, 15 Nguyễn Chí Thanh, TP. Đà Nẵng.
- **Khu vực phía Nam:** Ngày 7,8,9/5/2007. Tại NXB Giáo dục tại TP. Hồ Chí Minh, 231 Nguyễn Văn Cừ, Quận 5, TP. Hồ Chí Minh.
- **Khu vực phía Bắc:** Ngày 14,15,16/5/2007. Tại NXB Giáo dục tại Hà Nội, 187B Giảng Võ, Hà Nội.

Toán học rời rạc ứng dụng trong Tin học

Đây là cuốn sách thuộc dạng «best-seller" đã được tái bản 6 lần của Nhà xuất bản (NXB) McGraw-Hill - một trong những NXB Khoa học danh tiếng nhất nước Mỹ. Lần này sách được xuất bản theo hợp đồng chuyển nhượng tác quyền giữa NXB Giáo dục và NXB McGraw-Hill. Sách là cuốn cẩm nang đầy đủ nhất về các cơ sở toán trong tin học như: tập hợp, lôgic mệnh đề, hàm, thuật toán, ma trận, lí thuyết số, quan hệ, cây, đồ thị, đại số Boole... cùng với các ứng dụng của nó trong tin học. Với lượng kiến thức phong phú, rất nhiều ví dụ và bài tập kèm theo hướng dẫn giải, cuốn sách là một tài liệu tham khảo và tra cứu rất bổ ích cho nhiều đối tượng và được coi là một trong những tài liệu tham khảo chính dùng để ôn tập trong các kì thi tuyển sinh cao học và nghiên cứu sinh ngành Toán và Công nghệ thông tin.

Sách dày 864 trang, khổ 20,5x29cm, bìa cứng, giá bán lẻ 166000 đồng.

BẠN ĐỌC CÓ THỂ MUA SÁCH TẠI CÁC CỬA HÀNG SÁCH CỦA NXB GIÁO DỤC:

- Tại TP. Hà Nội: 187B Giảng Võ, 232 Tây Sơn. ĐT (04).7345556
- Tại TP. Đà Nẵng: 15 Nguyễn Chí Thanh, 62 Nguyễn Chí Thanh.
- Tại TP. Hồ Chí Minh: 104 Mai Thị Lựu, Quận 1; 451B - 453, Hai Bà Trưng, Quận 3; 240 Trần Bình Trọng, Quận 5.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy hai số để giải toán

TRẦN TUẤN ANH
(Khoa Toán - Tin, ĐHKHTN ĐHQG TP. Hồ Chí Minh)

Trước hết ta nhắc lại các dạng bất đẳng thức (BĐT) Cauchy hai số thường gặp:

Dạng 1. $ab \le \dfrac{a^2+b^2}{2}$ (1)

Đẳng thức xảy ra khi khi và chỉ khi $a = b$.

Dạng 2. $\sqrt{ab} \le \dfrac{a+b}{2}$ với $a \ge 0, b \ge 0$ (2)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Bây giờ ta ứng dụng BĐT Cauchy hai số để giải các bài toán sau đây.

✪**Bài toán 1.** *Cho a, b, c là các số thực dương sao cho $a \ge c, b \ge c$. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)} \le \sqrt{ab}.$$

Lời giải. BĐT cần chứng minh tương đương với

$$\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{a-c}{a}}+\sqrt{\frac{c}{a}\cdot\frac{b-c}{b}} \le 1.$$

Áp dụng BĐT (2) ta có

$$\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{a-c}{a}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{c}{b}+\frac{a-c}{a}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{c}{b}-\frac{c}{a}\right),$$

$$\sqrt{\frac{c}{a}\cdot\frac{b-c}{b}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{c}{a}+\frac{b-c}{b}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right).$$

Cộng theo vế hai BĐT trên ta có điều cần chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{c}{b}=\dfrac{a-c}{a}$ và $\dfrac{c}{a}=\dfrac{b-c}{b}$. Tức là $c=\dfrac{ab}{a+b}$. ❐

✪**Bài toán 2.** *Cho a, b là các số thực dương. Chứng minh rằng* $\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{a} \ge \sqrt{2(a^2+b^2)}$.

Lời giải. BĐT cần chứng minh tương đương với $a^3+b^3 \ge ab\sqrt{2(a^2+b^2)}$,

hay $(a+b)(a^2+b^2-ab) \ge \sqrt{ab}.\sqrt{2ab(a^2+b^2)}$.

Áp dụng các BĐT (1) và (2) ta có

$0<\sqrt{ab} \le \dfrac{a+b}{2}$ và

$$0<\sqrt{2ab(a^2+b^2)} \le \frac{2ab+(a^2+b^2)}{2} \le a^2+b^2 \le 2(a^2+b^2-ab).$$

Nhân theo vế hai BĐT trên ta có BĐT cần chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b > 0$. ❐

✪**Bài toán 3.** *Cho a, b là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}+7(a+b) \ge 8\sqrt{2(a^2+b^2)}.$$

Lời giải. BĐT cần chứng minh tương đương với $a^3+b^3+7ab(a+b) \ge 8ab\sqrt{2(a^2+b^2)}$

hay $(a+b)(a^2+b^2+6ab) \ge 8\sqrt{ab}.\sqrt{2ab.(a^2+b^2)}$ (3)

Áp dụng các BĐT (1) và (2) ta có

$$0<\sqrt{2ab.(a^2+b^2)} \le \frac{2ab+(a^2+b^2)}{2}=\frac{(a+b)^2}{2}.$$

Từ đó suy ra bất đẳng thức (3) đúng nếu ta có

$$(a+b)(a^2+b^2+6ab) \ge 4\sqrt{ab}(a+b)^2$$

hay $(a+b)^2+4ab \ge 4\sqrt{ab}(a+b)$.

Áp dụng BĐT (2) ta có

$$(a+b)^2+4ab \ge 2\sqrt{(a+b)^2.4ab} = 4\sqrt{ab}.(a+b).$$

Từ đó ta có BĐT cần chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a>0,\, b>0 \\ 2ab=a^2+b^2 \\ (a+b)^2=4ab \end{cases}$.

Tức là $a=b>0$. ❐

✪Bài toán 4. *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2} \ge \frac{a+b+c}{2}.$$

Lời giải. BĐT cần chứng minh tương đương với

$$\left(a-\frac{a^3}{a^2+b^2}\right)+\left(b-\frac{b^3}{b^2+c^2}\right)+\left(c-\frac{c^3}{c^2+a^2}\right) \le \frac{a+b+c}{2}.$$

hay $\dfrac{ab^2}{a^2+b^2}+\dfrac{bc^2}{b^2+c^2}+\dfrac{ca^2}{c^2+a^2} \le \dfrac{a+b+c}{2}$.

Áp dụng BĐT (1) ta có

$\dfrac{ab^2}{a^2+b^2} = b.\dfrac{ab}{a^2+b^2} \le b.\dfrac{a^2+b^2}{2(a^2+b^2)}$ nên

$\dfrac{ab^2}{a^2+b^2} \le \dfrac{b}{2}$.

Tương tự $\dfrac{bc^2}{b^2+c^2} \le \dfrac{c}{2}$ và $\dfrac{ca^2}{c^2+a^2} \le \dfrac{a}{2}$.

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c>0$. ❐

✪Bài toán 5. *Cho a, b, c là các số thực dương sao cho $abc \ge 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^5-a^2}{a^5+b^2+c^2}+\frac{b^5-b^2}{b^5+c^2+a^2}+\frac{c^5-c^2}{c^5+a^2+b^2} \ge 0.$$

(Thi Olympic Toán quốc tế lần thứ 46 – năm 2005)

Lời giải. BĐT cần chứng minh tương đương với

$$\left(1-\frac{a^5-a^2}{a^5+b^2+c^2}\right)+\left(1-\frac{b^5-b^2}{b^5+c^2+a^2}\right)+\left(1-\frac{c^5-c^2}{c^5+a^2+b^2}\right) \le 3$$

hay $$\frac{1}{a^5+b^2+c^2}+\frac{1}{b^5+c^2+a^2}+\frac{1}{c^5+a^2+b^2} \le \frac{3}{a^2+b^2+c^2} \qquad (4)$$

Từ $abc \ge 1$ và áp dụng BĐT (1) ta có

$$\frac{1}{a^5+b^2+c^2} \le \frac{1}{\frac{a^5}{abc}+b^2+c^2} = \frac{1}{\frac{a^4}{bc}+b^2+c^2}$$

$$\le \frac{1}{\frac{2a^4}{b^2+c^2}+b^2+c^2} = \frac{b^2+c^2}{2a^4+(b^2+c^2)^2}.$$

Do $4u^2+v^2 \ge 4uv \Leftrightarrow 4u^2+v^2 \ge \frac{2}{3}(u+v)^2$ nên

$$2a^4+(b^2+c^2)^2 \ge \frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)^2.$$

Suy ra $$\frac{1}{a^5+b^2+c^2} \le \frac{3(b^2+c^2)}{2(a^2+b^2+c^2)^2}.$$

Tương tự $$\frac{1}{b^5+c^2+a^2} \le \frac{3(c^2+a^2)}{2(a^2+b^2+c^2)^2},$$

$$\frac{1}{c^5+a^2+b^2} \le \frac{3(a^2+b^2)}{2(a^2+b^2+c^2)^2}.$$

Cộng theo vế ba BĐT trên, ta được BĐT(4).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. ❐

Cuối cùng, mời các bạn áp dụng BĐT Cauchy hai số để giải quyết các bài toán sau đây.

Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

1) *Nếu $a+b+c=1$ thì*

$$\sqrt{\frac{ab}{c+ab}}+\sqrt{\frac{bc}{a+bc}}+\sqrt{\frac{ca}{b+ca}} \le \frac{3}{2};$$

2) $(ab+c^2)(bc+a^2)(ca+b^2) \ge abc(a+b)(b+c)(c+a)$;

3) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a} \ge \dfrac{a+b}{b+c}+\dfrac{b+c}{a+b}+1$.

LỜI GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
CHUYÊN TOÁN, TRƯỜNG ĐHSP TP. HỒ CHÍ MINH
năm học 2006 - 2007

(Đề thi đăng trên THTT số 356, tháng 2 năm 2007)

NGÀY THỨ NHẤT

Bài 1. 1) Xét các trường hợp $x \ge 1$ và $x < 1$, giải các PT bậc hai tương ứng ta thấy PT đã cho có hai nghiệm $x_1 = 1$ và $x_2 = 3$.

a) Áp dụng hệ thức Viète và BĐT Cauchy cho hai số không âm ta có

$$x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2 \ge 2(|x_1x_2|+|y_1y_2|)$$

$$\ge 4\sqrt{|x_1x_2|.|y_1y_2|}=4\sqrt{\left|\frac{c}{a}\right|.\left|\frac{a}{c}\right|}=4.$$

Bài 2. 1) • Ta có

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}=\frac{1}{\sqrt{k+1}.\sqrt{k}\,(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}$$

$$=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}.\sqrt{k}}=\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

• *Áp dụng*: Sử dụng công thức trên với $k = 1, ..., 99$. *Đáp số:* $\frac{9}{10}$.

2) *Điều kiện cần.* Nhận xét rằng nếu $(x ; y)$ là một nghiệm của hệ thì $(y ; x)$ cũng là nghiệm hệ đó. Do đó nếu hệ có nghiệm duy nhất thì $x = y$. Lại thấy nếu $(x ; x)$ là nghiệm của hệ thì $(1-x ; 1-x)$ cũng là nghiệm. Khi đó $x = 1-x$ hay $x = \frac{1}{2}$. Từ đó $m = \sqrt{2}$.

Điều kiện đủ. Khi $m = \sqrt{2}$, ta có hệ

$$\begin{cases}\sqrt{1-x}+\sqrt{y}=\sqrt{2}\\ \sqrt{1-y}+\sqrt{x}=\sqrt{2}.\end{cases}$$

Suy ra $\sqrt{1-x}+\sqrt{x}+\sqrt{1-y}+\sqrt{y}=2\sqrt{2}$. Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số không âm, ta thấy

$$\sqrt{1-x}+\sqrt{x}+\sqrt{1-y}+\sqrt{y}$$

$$=\sqrt{2}\left(\sqrt{(1-x)\frac{1}{2}}+\sqrt{x.\frac{1}{2}}+\sqrt{(1-y).\frac{1}{2}}+\sqrt{y.\frac{1}{2}}\right)$$

$$\le\frac{\sqrt{2}}{2}\left((1-x)+\frac{1}{2}+x+\frac{1}{2}+(1-y)+\frac{1}{2}+y+\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{2}.$$

Từ cách đánh giá trên ta thấy hệ có nghiệm duy nhất $(x ; y) = \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$. Vậy $m = \sqrt{2}$.

Bài 3. Hệ đã cho tương đương với

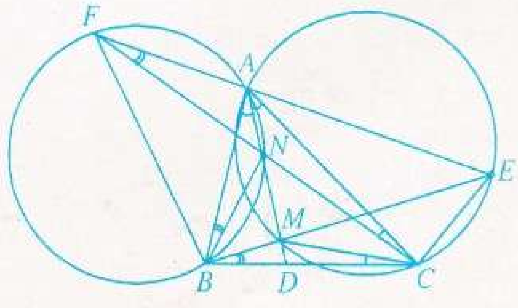
$$\begin{cases}(x+y)(x+z)=8\\(y+x)(y+z)=16\\(z+x)(z+y)=32\\ [(x+y)(y+z)(z+x)]^2=8.16.32.\end{cases}$$

Hệ trên tương đương với tuyển của hai hệ sau:

$$\begin{cases}(x+y)(x+z)=8\\(y+x)(y+z)=16\\(z+x)(z+y)=32\\(x+y)(y+z)(z+x)=64\end{cases}\qquad\begin{cases}(x+y)(x+z)=8\\(y+x)(y+z)=16\\(z+x)(z+y)=32\\(x+y)(y+z)(z+x)=-64.\end{cases}$$

Đáp số: Hệ đã cho có hai nghiệm $(x ; y ; z)$ là $(-1 ; 3 ; 5)$, $(1 ; -3 ; -5)$.

Bài 4. 1) (h.1) Ta có $\widehat{BFC}=\widehat{BAN}$, $\widehat{BEC}=\widehat{CAN}$. Mà $\widehat{BAN}=\widehat{CAN}$, suy ra $\widehat{BFC}=\widehat{BEC}$, dẫn tới tứ giác $BCEF$ nội tiếp.



Hình 1

2) Do tứ giác $BCEF$ nội tiếp nên $\widehat{CFE}=\widehat{CBE}$, mà $\widehat{CBE}=\widehat{ABN}=\widehat{NFA}$, suy ra $\widehat{CFE}=\widehat{NFA}$.

Vậy hai tia FA và FE trùng nhau, hay ba điểm A, E, F thẳng hàng.

3) Ta có $\widehat{BCF}=\widehat{BEF}$, do $\widehat{ACM}=\widehat{BEF}$ nên $\widehat{BCF}=\widehat{ACM}$. Từ đó suy ra $\widehat{ACM}=\widehat{BCF} \Rightarrow \widehat{ACN}=\widehat{BCM}$.

NGÀY THỨ HAI

Bài 5. ĐK $x \neq m-2006$ và $x \neq 2006-m$. PT đã cho tương đương với

$$(x+2006)(x-2006+m)=(x-2006)(x+2006-m)$$
$$\Leftrightarrow 2mx=0.$$

Kết luận. Với $m=0$, PT đã cho có vô số nghiệm khác ± 2006.

Với $m \neq 0$ và $m \neq 2006$, PT đã cho có nghiệm $x=0$.

Bài 6. Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 2x^3-2y^3=2y^2-2x^2+y-x \\ 2y^3=2x^2+x \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)\left((x+y+1)^2+x^2+y^2\right)=0 \\ 2y^3-2x^2-x=0. \end{cases}$$

Đáp số: Hệ đã cho có ba nghiệm $(x\,;\,y)$ là $(0\,;\,0)$, $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2};\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2};\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$.

Bài 7. Ta có $xy+6x+2006y+12033=0$

$\Leftrightarrow x(y+6)+2006(y+6)=3$

$\Leftrightarrow (y+6)(x+2006)=3.$

Đáp số: Nghiệm nguyên $(x\,;\,y)$ của PT đã cho là $(-2005\,;\,-3)$; $(-2003\,;\,-5)$; $(-2007\,;\,-9)$; $(-2009\,;\,-7)$.

Bài 8. Xét dãy số gồm 1004 số hạng sau:

$$9\,;99\,;...\,;\underbrace{99...9}_{1004\text{ chữ số}}$$

Chia tất cả các số hạng của dãy cho 1003 có 1003 số dư từ 0 đến 1002. Vì có 1004 phép chia nên theo nguyên tắc Dirichlet phải có ít nhất hai số có cùng số dư khi chia cho 1003. Giả sử hai số đó là $a=\underbrace{99...9}_{m\text{ chữ số}}$ và $b=\underbrace{99...9}_{n\text{ chữ số}}$ $(m, n \in \mathbb{N},\ 1 \leq n < m < 1004)$.

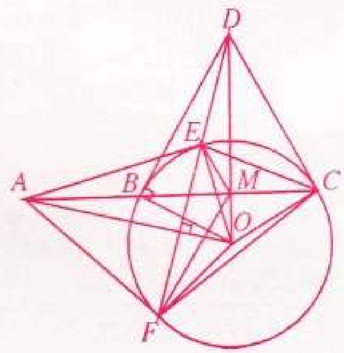
Ta có $a-b \,\vdots\, 1003$ hay $A=\underbrace{99...9}_{m-n\text{ chữ số}}\underbrace{00...0}_{n\text{ chữ số}} \,\vdots\, 1003$.

Mặt khác $A \,\vdots\, 10$ và $(1003,\ 10)=1$, nên $A \,\vdots\, 10030 \Rightarrow$ đpcm.

Bài 9. (Bạn đọc tự vẽ hình). Gọi M là giao điểm của tiếp tuyến chung qua C của hai đường tròn. Từ tính chất tiếp tuyến ta có $MA=MB=MC=\frac{1}{2}AB$. Do đó C chạy trên đường tròn tâm M bán kính $\frac{AB}{2}$. Phần đảo bạn đọc tự thực hiện.

Bài 10. 1) (h.2) Ta có $DC^2=DM.DO$ (1). Do $\Delta DCE \backsim \Delta DFC$ nên $\frac{DC}{DF}=\frac{DE}{DC}$ (2).

Từ (1), (2) suy ra $\frac{DM}{DE}=\frac{DF}{DO}$ $\Rightarrow \Delta DMF \backsim \Delta DEO$, suy ra $\widehat{DFM}=\widehat{DOE}$. Dẫn tới tứ giác $EMOF$ nội tiếp (3).



Hình 2

Vì $\widehat{EMD}=\widehat{OFE}$, $\widehat{FMO}=\widehat{FEO}=\widehat{OFE}$ nên $\widehat{EMD}=\widehat{FMO}$, mà $\widehat{EMD}+\widehat{EMB}=\widehat{FMO}+\widehat{AMF}=90^\circ$.

Suy ra $\widehat{EMA}=\widehat{AMF}=\frac{\widehat{EMF}}{2}$ (4)

Tam giác OEF cân tại O nên

$\widehat{EOA}=\widehat{AOF}=\frac{\widehat{EOF}}{2}$ (5)

Do tứ giác $EMOF$ nội tiếp nên $\widehat{EMF}=\widehat{EOF}$ (6)

Từ (4), (5), (6) suy ra $\widehat{EMA}=\widehat{EOA}$, dẫn đến tứ giác $EMOA$ nội tiếp (7). Từ (3) và (7) ta thấy năm điểm A, E, M, O, F cùng nằm trên một đường tròn.

2) Do $\widehat{AEO}=\widehat{AMO}=90^\circ$ và $AECF$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{AFO}=90^\circ$. Vậy AE, AF là các tiếp tuyến của đường tròn (O).

NGUYỄN ĐỨC TẤN

(*TP. Hồ Chí Minh*) sưu tầm và giới thiệu

Khảo sát sự tương giao của ĐƯỜNG TRÒN và ĐƯỜNG THẲNG để giải hệ có tham số

HOÀNG TUẤN DOANH
(GV THPT chuyên Hưng Yên)

Bài toán giải và biện luận hệ có tham số tương đối phức tạp đối với học sinh, đặc biệt là hệ chứa bất phương trình. Tuy nhiên, trong một số bài tập nếu ta sử dụng phương trình và tính chất của đường tròn (hình tròn) trong mặt phẳng tọa độ để khảo sát sự tương giao giữa các hình thì bài toán nói trên trở nên đơn giản hơn rất nhiều. Sau đây xin nêu một vài thí dụ.

Bài 1. *Tìm a để hệ sau có nghiệm duy nhất:*

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x\le 2 & (1)\\ x-y+a=0 & (2)\end{cases}$$

Lời giải. Ta có (1) $\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2\le 3$. Bất phương trình này biểu diễn hình tròn tâm $I(1; 0)$, bán kính $R=\sqrt{3}$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

Phương trình (2) biểu diễn một đường thẳng.

Để hệ có nghiệm duy nhất thì đường thẳng $\Delta: x-y+a=0$ tiếp xúc với đường tròn có PT: $(x-1)^2+y^2=3 \Leftrightarrow d(I,\Delta)=R$

$$\Leftrightarrow \frac{|1-0+a|}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}$$

$\Leftrightarrow a=-1-\sqrt{6}$ hoặc $a=-1+\sqrt{6}$. □

Bài 2. *Tìm a để hệ sau có nghiệm duy nhất:*

$$\begin{cases} x+y+\sqrt{2xy+m}\ge 1\\ x+y \le 1.\end{cases}$$

Lời giải. Hệ trên tương đương với

$$\begin{cases}\sqrt{2xy+m}\ge 1-(x+y)\\ x+y\le 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2xy+m\ge (1-(x+y))^2\\ x+y\le 1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2\le m+1 & (3)\\ x+y \le 1 & (4)\end{cases}$$

Với $m+1\le 0$ hay $m\le -1$, hệ vô nghiệm.

Với $m+1>0$ hay $m>-1$, BĐT (3) biểu diễn hình tròn tâm $I(1; 1)$, bán kính $R=\sqrt{m+1}$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

BPT (4) biểu diễn nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng $x+y=1$. Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi đường thẳng $x+y=1$ tiếp xúc với đường tròn $(x-1)^2+(y-1)^2=m+1$. Khi đó $\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{m+1} \Leftrightarrow m=-\frac{1}{2}$. □

Bài 3. *Tìm a để hệ sau có nghiệm:*

$$\begin{cases}4x-3y+2\le 0\\ x^2+y^2=a.\end{cases}$$

Lời giải. Nếu $a\le 0$ thì hệ vô nghiệm.

Nếu $a>0$ thì số nghiệm của hệ (nếu có) là số giao điểm của nửa mặt phẳng biểu diễn bởi $4y-3x+2\le 0$ và đường tròn tâm $O(0; 0)$, bán kính $R=\sqrt{a}$. Vậy hệ có nghiệm khi và chỉ khi $\sqrt{a}\ge OH \Leftrightarrow a\ge \frac{4}{25}$ (với H là chân đường vuông góc hạ từ O xuống đường thẳng $4y-3x+2=0$).

Bài 4. *Cho hệ*

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2\le 2 & (5)\\ x-y+m=0 & (6)\end{cases}$$

Xác định m để hệ nghiệm đúng với mọi $x\in[0; 2]$.

Lời giải. Tập hợp các điểm $(x\ ;\ y)$ thỏa mãn (5) là các điểm nằm trong và trên đường tròn $(x-1)^2+(y-1)^2=2$, với tâm $I\ (1\ ;\ 1)$ bán kính $R=\sqrt{2}$. Tập hợp các điểm $(x\ ;\ y)$ thỏa mãn (6) là các điểm nằm trên đường thẳng Δ có PT: $x-y+m=0$.

Giả sử $A\in\Delta$ sao cho $x_A=0$ thì $A\ (0\ ;\ m)$;

$B\in\Delta$ sao cho $x_B=2$ thì $B\ (2\ ;\ 2+m)$.

Để hệ có nghiệm với mọi $x\in[0;\ 2]$ thì đoạn thẳng AB nằm trong đường tròn $(I;\ R)$. Lúc đó

$$\begin{cases}IA\le R\\ IB\le R\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(0-1)^2+(m-1)^2\le 2\\ (2-1)^2+(2+m-1)^2\le 2\end{cases}\Leftrightarrow m=0.\ \square$$

✪Bài 5. *Cho hệ phương trình*

$$\begin{cases}x^2+y^2-x=0 & (7)\\ x+ay-a=0 & (8)\end{cases}$$

Tìm a để hệ có hai nghiệm phân biệt.

Lời giải. PT (7) $\Leftrightarrow\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{4}$.

Vậy tập nghiệm của PT (7) là tọa độ những điểm nằm trên đường tròn tâm $I\left(\dfrac{1}{2};0\right)$ bán kính $R=\dfrac{1}{2}$. Tập nghiệm của PT (8) là toạ độ những điểm nằm trên đường thẳng $x+ay-a=0$. Họ đường thẳng này luôn qua điểm $A\ (0\ ;\ 1)$ cố định. Ta có A nằm ngoài đường tròn $(I\ ;\ R)$, từ A dựng hai tiếp tuyến với đường tròn $(I\ ;\ R)$.

Phương trình hai tiếp tuyến đó là: $x=0$ và $x+\dfrac{4}{3}y-\dfrac{4}{3}=0$ cũng luôn đi qua $A\ (0\ ;\ 1)$.

Để hệ có hai nghiệm phân biệt thì đường thẳng $x+ay-a=0$ phải cắt đường tròn $(I\ ;\ R)$ tại hai điểm phân biệt. Vậy đường thẳng $x+ay-a=0$ phải nằm giữa hai tiếp tuyến trên. Lúc đó $0<a<\dfrac{4}{3}$. $\square$

Thông qua các thí dụ trên nhận thấy rằng: Khi sử dụng phương trình và tính chất của đường tròn (hình tròn) xét sự tương giao giữa các hình, ta đã đưa các bài toán biện luận hệ về một dạng toán đơn giản và quen thuộc hơn với học sinh. Sau đây là một số bài tập tương tự để các bạn luyện tập thêm :

(Xem tiếp trang 12)

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT CHUYÊN LƯƠNG THẾ VINH, ĐỒNG NAI

NĂM HỌC 2006 – 2007
(Thời gian làm bài : 150 phút)

Bài 1. *(3 điểm)*

1) Giải phương trình

$$11x^2+2|8x-9|-18x+6=0.$$

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y+2}=-2\\[2mm] \dfrac{1}{x+2}-\dfrac{3}{y}=4.\end{cases}$$

Bài 2. *(3 điểm)*

1) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho ba đường thẳng (d), (d_1), (d_2) lần lượt có phương trình là: $y=x-4$, $x+2y=-2$, $y=-2x+2$.

Chứng minh nếu điểm M thuộc (d) thì M cách đều (d_1) và (d_2).

2)Tìm tất cả các bộ gồm ba số nguyên $(u\ ;\ v\ ;\ t)$ thoả mãn $u^2+v^2+t^2=u+v+t$.

Bài 3. *(3 điểm)*

Cho tam giác ABC vuông góc tại A. M là một điểm tuỳ ý thuộc cạnh AB (M không trùng A và M không trùng B). Dựng MN vuông góc với BC (N thuộc BC). Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BM, CM.

1) Chứng minh rằng tứ giác $APNQ$ nội tiếp.

2) Với điều kiện nào của tam giác ABC (vuông tại A) để tồn tại điểm M sao cho tứ giác $APNQ$ là hình thang.

Bài 4. *(1 điểm)*

Cho tứ giác lồi $ABCD$ có $AC+AD\le BC+BD$. Chứng minh $AD<BD$.

LƯƠNG QUANG DƯƠNG
(Sở GD – ĐT Đồng Nai) giới thiệu

Một câu chuyện dài về một bất đẳng thức nổi tiếng

VŨ ĐÌNH HÒA
(GV ĐHSP Hà Nội) sưu tầm

Trong các bất đẳng thức nổi tiếng, có một bất đẳng thức mà đã thu hút sự chú ý của rất nhiều nhà toán học lừng danh trên thế giới trong suốt một thời gian nửa thế kỉ. Đó là bất đẳng thức Shapiro (ông đã nêu bài toán này trên tạp chí toán nổi tiếng American Mathematical Monthly vào năm 1954) mà chúng ta thường hay gọi là bất đẳng thức Nesbit (Nasσbít) và được phát biểu như sau

Với mọi $x_i \ge 0$, $x_i + x_{i+1} > 0$ $(i = 1, ..., n)$, $x_{n+i} = x_i$ *thì*

$$S_n(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_{i+1}+x_{i+2}}\ge\frac{n}{2} \qquad (1)$$

dấu bằng xảy ra nếu và chỉ nếu các mẫu số của các phân thức bằng nhau, tức là $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Nó nổi tiếng đến mức mà trong năm 1990, tại hội nghị toán học Oberwolfach về các bất đẳng thức, các nhà toán học đã phải nhắc lại toàn bộ lịch sử chứng minh lâu dài của nó mà đôi khi được xem là vô vọng. Bất đẳng thức Shapiro tuy với vẻ bề ngoài cực kì đơn giản nhưng để chứng minh nó là điều vô cùng khó, do chúng ta phải xét một số lượng rất lớn các trường hợp riêng biệt. Điều này không làm cho chúng ta ngạc nhiên, bởi vì *bất đẳng thức Shapiro không đúng với mọi số tự nhiên n.* Do khuôn khổ bài báo này, chúng tôi chỉ cố gắng trình bày tóm tắt lại các kết quả quan trọng của các nhà toán học liên quan đến bất đẳng thức này mà không đề cập chi tiết đến các chứng minh bởi vì trong một số trường hợp việc chứng minh đòi hỏi phải sử dụng đến các kiến thức của toán cao cấp vượt ra ngoài chương trình toán phổ thông.

Ngược dòng lịch sử có lẽ là nhà toán học Nesbit là người đầu tiên đã đề cập đến bất đẳng thức này cho trường hợp $n = 3$. Sau đây là một chứng minh rất đơn giản cho trường hợp này.

Đặt $y_1 = x_2 + x_3$, $y_2 = x_3 + x_1$, $y_3 = x_1 + x_2$.

Từ bất đẳng thức Cauchy ta có

$$(y_1+y_2+y_3)\left(\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\frac{1}{y_3}\right)\ge 9$$

hay $\dfrac{y_2+y_3}{y_1}+\dfrac{y_3+y_1}{y_2}+\dfrac{y_1+y_2}{y_3}\ge 6$

và vì vậy $\dfrac{x_1}{x_2+x_3}+\dfrac{x_2}{x_3+x_1}+\dfrac{x_3}{x_1+x_2}\ge\dfrac{3}{2}$.

Một điều thú vị là khi $n = 3$, (1) sẽ có dạng tương đương như sau:

$$(x_1+x_2+x_3)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\le 3(x_1^3+x_2^3+x_3^3) \qquad (2)$$

Bất đẳng thức trên có thể chứng minh bằng cách sử dụng tính đơn điệu của $M_t=\left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^t\right)^{\frac{1}{t}}$ theo t.

Tuy nhiên, khi $n > 3$ việc chứng minh sẽ không còn dễ dàng như trên. Mãi đến năm 1958, Mordell đã đưa ra một chứng minh (1) cho $n \le 6$, đơn giản nhưng lại rất sáng tạo như sau: Đặt $y_i = x_{i+1} + x_{i+2}$ với các chỉ số được lấy một cách tuần hoàn.

Do $\left(\sum_{i=1}^{n}\dfrac{x_i}{y_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2+\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n}\dfrac{x_j}{y_j}$

nên bất đẳng thức sau đúng thì bất đẳng thức (1) cũng đúng.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \geq \frac{n}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad (3)$$

Nếu $n = 4$ thì (3) sẽ trở thành $\left(\sum_{i=1}^{4} x_i\right)^2 \geq$

$\geq 2[x_1(x_2+x_3)+x_2(x_3+x_4)+x_3(x_4+x_1)+x_4(x_1+x_2)]$.

Qua một vài tính toán đơn giản ta có

$$(x_1-x_3)^2+(x_2-x_4)^2 \geq 0.$$

Vì vậy (3) đúng cho $n = 4$.

Trường hợp $n = 5$ được rút ra từ bất đẳng thức sau:

$$(n-1)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \geq 2n\sum_{i<j} x_i y_j \quad (4)$$

và bất đẳng thức này đúng cho mọi n và mọi x_i thực. Khi $n = 5$, ta có hệ thức sau:

$\sum_{i<j} x_i y_j = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ và $\frac{2n}{n-1} = \frac{n}{2}$. Vì vậy (4) tương đương với (3).

Sau cùng khi $n = 6$ thì (3) được rút ra từ một bất đẳng thức mà chúng ta đã biết

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^2 \geq \frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^2 \quad (5)$$

Đặt $S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$, ta xét

$$\begin{aligned} & 3[x_1(x_2+x_3)+\ldots+x_6(x_1+x_2)] \\ = \; & 3\left(\sum_{i<j} x_i x_j - x_1x_4 - x_2x_5 - x_3x_6\right) \\ = \; & \frac{3}{2}\left(S_6^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2x_1x_4 - 2x_2x_5 - 2x_3x_6\right) \\ = \; & \frac{3}{2}\{S_6^2 - [(x_1+x_4)^2+(x_2+x_5)^2+(x_3+x_6)^2]\}. \end{aligned}$$

Vì vậy (3) tương đương với

$$(x_1+x_4)^2+(x_2+x_5)^2+(x_3+x_6)^2$$
$$\geq \frac{1}{3}[(x_1+x_4)+(x_2+x_5)+(x_3+x_6)]^2$$

Kết quả này đúng theo bất đẳng thức (5) với $m = 3$.

Đây là một chứng minh rất đẹp cho trường hợp $n \leq 6$. Tuy nhiên, chúng ta không thể áp dụng cách chứng minh của Mordell như thế cho trường hợp $n > 6$ bởi vì bất đẳng thức (3) không còn đúng nữa. Mordell cũng đã chứng minh cho trường hợp $n \geq 7$.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \geq 3\sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Hằng số 3 là ước lượng tốt nhất có nghĩa là bạn không thể thay nó bằng giá trị lớn hơn. *Mordell đã giả định rằng bất đẳng thức Shapiro sẽ không đúng với mọi* $n \geq 7$. Năm 1956, Lighthill lần đầu tiên đã tìm ra một phản ví dụ cho bất đẳng thức này với $n = 20$. Hai năm sau, ngoài Mordell, Zulauf và Rankine cũng tìm ra một phản ví dụ cho $n = 14$. Zulauf cũng đã tìm ra kết quả sau:

$$S_{n+2}(x_1,\ldots,x_n,x_{n-1},x_n) = S_n(x_1,\ldots,x_n)+1 \quad (6)$$

Từ đây ông nhận xét rằng nếu tìm được một phản ví dụ cho (1) với n nào đó, thì cũng sẽ có các phản ví dụ khác cho $n + 2$, $n + 4$,....

Năm 1959, Zulauf lại cho thêm một phản ví dụ khác với $n = 53$. Năm 1963, Diananda tìm được kết quả khác:

$$\begin{aligned} & S_{n+2}(x_1,\ldots,x_n,x_n) \\ = \; & S_n(x_1,\ldots,x_n)+\frac{1}{2}-\frac{(x_n-x_{n+1})(x_n-x_1)}{2x_n(x_n+x_1)} \end{aligned}$$

Do đó, nếu với một bộ giá trị $(x_1, ..., x_n)$ nào đó ta có $S_n(x_1, ..., x_n) \leq \frac{n}{2}$ và có một giá trị r nào đó, $1 \leq r \leq n$, để mà x_{r-1}, x_r, x_{r+1} (chỉ số tuần hoàn) đơn điệu (chúng ta có thể giả sử rằng $r = n$), thì sẽ dẫn đến sự đúng đắn của bất đẳng thức $S_{n+1}(x_1,\ldots,x_n,x_n) \leq \frac{n+1}{2}$. Với n lẻ rõ ràng rằng luôn luôn có một giá trị r như thế do chuỗi tuần hoàn có độ dài lẻ không thể chuyển giữa sự tăng và sự giảm ở mọi vị trí. Diananda rút ra được định lí sau

• **Định lí.** *Nếu (1) sai với $n = n_0$ lẻ nào đó, thì nó sẽ sai cho mọi $n \geq n_0$. Nếu (1) đúng cho $n = n_0$ chẵn nào đó thì nó cũng sẽ đúng cho mọi $n \leq n_0$.*

Cùng với định lí này ông đã đưa ra một phản ví dụ cho (1) với $n = 27$. Điều này có nghĩa là (1) sai với mọi n lẻ ≥ 27. Cùng một lập luận như đã được sử dụng trong định lí Diananda cũng cho ta thấy với n chẵn, dấu bằng của (1) xảy ra ở mọi điểm

$$x^{\alpha} = \frac{1}{2}(1+\alpha, 1-\alpha, ..., 1+\alpha, 1-\alpha) \quad (0 \leq \alpha \leq 1),$$

trong khi với n lẻ nó chỉ xảy ra với $x^0 = (1,...,1)$.

Cùng lúc này Djokovic đã chứng minh rằng (1) đúng cho $n = 8$ và Bajsanski chứng minh (1) cũng đúng cho $n = 7$. Năm 1968, Nowosad đã chứng minh (1) đúng cho $n = 10$ và vì vậy theo lí thuyết trên bất đẳng thức Shapiro cũng đúng cho $n = 9$. Do đó cho đến lúc này, chỉ còn lại có 10 trường hợp chưa được xác định là $n = 12$ đối với n chẵn và $n = 9, 11,..., 25$ cho n lẻ. Năm 1971, Daykin và Malcoln đã chứng minh (1) sai với $n = 25$ và Kristiansen cũng đã chứng minh (1) đúng cho $n = 12$, và vì vậy đúng cho $n = 11$. Vào năm này Drinfeljd đã đưa ra một chứng minh rất ngắn gọn, sơ cấp mà lại sáng tạo. Đồng thời ông chỉ ra rằng bất đẳng thức sau là bất đẳng thức Shapriro đúng với mọi n:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i+1} + x_{i+2}} \geq \frac{n}{2} . 0{,}989133...$$

Việc chứng minh bất đẳng thức trên dựa theo một định lí nổi tiếng và một bất đẳng thức hoán vị sau đây.

• **Định lí.** *Nếu đặt $g(x)$ là một bao lồi dưới của hai hàm lồi giảm $f(x) = 2\left(e^x + e^{\frac{x}{2}}\right)^{-1}$ và $h(x) = e^{-x}$ thì $\inf \frac{2}{n} S_n(x_1,...,x_n) \geq g(0)$ đúng với mọi n.*

Giá trị thực của $g(0)$ rất gần với 1: $g(0) =$ 0,989133... và nó không phải là một số đại số.

* **Bất đẳng thức hoán vị.** *Nếu $a_1 \leq ... \leq a_n$ và $b_1 \geq ... \geq b_n$ thì đối với bất kỳ hoán vị $\{k_1,...,k_n\}$ nào của các chỉ số, ta có bất đẳng thức sau:*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_{ki} \geq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Có lẽ rằng nhờ bài báo nổi tiếng này mà Drinfeljd đã nhận được giải thưởng Fields vào năm 1990.

Việc tìm miền đúng của (1) đã kéo dài gần 20 năm sau đó. Bắt đầu vào năm 1976, Godunova và Leni đã chứng minh (1) đúng cho $n = 12$. Cùng lúc này Bushell cũng đã đưa ra một phản ví dụ khác cho $n = 25$ và ông cũng đưa ra một chứng minh sơ cấp mới với $n = 7$. Bushell cùng với Craven đã chứng minh rằng (1) đúng với mọi n lẻ ≤ 23. Năm 1979, Troesch và Searcy đã xét bài toán đại số các giá trị riêng tương ứng và chứng minh một kết quả nổi tiếng rằng: *Bất đẳng thức* (1) *không đúng với mọi $n \geq 14$. Bằng cách dùng máy tính số, ông đã chỉ ra rằng* (1) *đúng với mọi n chẵn ≥ 12 và n lẻ ≤ 23.* Năm 1985, trong tạp chí Math. Computing, Troesch đã thành công trong việc đưa ra một chứng minh (1) đúng cho $n = 13$ và đến năm 1989 ông mới chứng minh được cho $n = 23$. Như vậy (1) đã được chứng minh cho tất cả các giá trị n còn lại là 15, 17, 19 và 21.

Gần 40 năm sau khi Shapiro đề xuất bài toán, chính Troesch đã là người kết thúc một giai đoạn lịch sử kéo dài cho việc chứng minh bất đẳng thức nổi tiếng này khi mà ông thông qua việc giải bài toán với $n = 23$ và đã hoàn thành việc chứng minh (1) với kết quả nổi tiếng như sau:

Bất đẳng thức (1) đúng với mọi n chẵn ≤ 12 và n lẻ ≤ 23. Với mọi giá trị khác của n thì (1) sai.

Sau ông một số nhà toán khác như Diananda, Mordell và Daykin cũng đã đề xuất một số bài toán mở rộng. Năm 1992, Achim Clausing đã đề nghị bài toán sau:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i+2} + x_{i+3}} \geq \left[\frac{n}{3}\right]$$

với $[a]$ là phần nguyên của a.

Có lẽ đây lại là một thách thức lớn nữa cho các nhà toán học trẻ trong thế kỉ XXI này.

*(Theo tạp chí toán **International Series of Numerical Mathematics**, 1992)*

Thử sức TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 3

(Thời gian làm bài: 180 phút)

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH

Câu I. (2 *điểm*)

Cho hàm số

$y=x^3-(2m+3)x^2+(2m^2-m+9)x-2m^2+3m-7\,(C_m)$

1) Khảo sát hàm số khi $m=0$.

2) Tìm m để (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 không nhỏ hơn 1.

Câu II (2 *điểm*)

Giải các phương trình sau :

1) $3+\sqrt{3+\sqrt{x}}=x$;

2) $2\cos x\cos 2x\cos 3x+5=7\cos 2x$.

Câu III. (2 *điểm*)

Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình: $x+y+z+3=0$ và các điểm $A(3\,;1\,;1)$; $B(7\,;3\,;9)$; $C(2\,;2\,;2)$.

1) Tính khoảng cách từ gốc toạ độ đến mặt phẳng (ABC).

2) Tìm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất.

Câu IV (2 *điểm*)

1) Tính $I=\int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^2)^3}\,dx$.

2) Cho các số dương x, y, z thoả mãn:

$$\begin{cases} 3x^2+3xy+y^2=75 \\ y^2+3z^2=27 \\ z^2+xz+x^2=16. \end{cases}$$

Tính $P=xy+2yz+3xz$.

PHẦN TỰ CHỌN

Câu Va. (2 *điểm*)

(Theo chương trình THPT không phân ban)

1) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, hãy lập phương trình đường thẳng d cách điểm $A(1\,;1)$ một khoảng bằng 2 và cách $B\,(2\,;3)$ một khoảng bằng 4.

2) Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n=\frac{195C_{n+3}^n}{16(n+1)}-C_{n+5}^n$ $(1\le n\in\mathbb{N})$. Tìm các số hạng dương của dãy.

Câu Vb. (2 *điểm*)

(Theo chương trình THPT phân ban thí điểm)

1) Giải phương trình trong tập số phức: $z^2+|z|=0$.

2) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và $\widehat{ASB}=\alpha$. Tìm thể tích hình chóp $S.ABCD$.

NGUYỄN THANH GIANG
(GV THPT chuyên Hưng Yên)

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 2

Câu I. 1) *Bạn đọc tự giải.*

2) Hoành độ giao điểm của đồ thị với trục hoành là nghiệm PT

$$x^3-(m+1)x^2+(m-1)x+1=0$$

hay $(x-1)(x^2-mx-1)=0$.

Ta thấy hoành độ của A là $x_o=1$, hoành độ giao điểm B, C là hai nghiệm x_1, x_2 của PT

$$x^2-mx-1=0 \qquad (1)$$

Hệ số góc của tiếp tuyến được tính theo công thức $k=3x^2-2(m+1)x+m-1$ (2)

Từ (1), (2) suy ra hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị tại B, C được tính bởi

$$k=(m-2)x+m+1.$$

Với x_1, x_2 phân biệt thì các tiếp tuyến tại B, C song song với nhau khi và chỉ khi $k_B=k_C$ hay $m-2=0$, suy ra $m=2$.

Câu II. 1) PT đã cho tương đương với

$(2\cos2x-1)(2\cos2x+1)=2\cos2x(1+2\sin x)$

$\Leftrightarrow (1-4\sin^2x)(2\cos x+1)=2\cos2x(1+2\sin x)$

$\Leftrightarrow (2\sin x+1)(4\sin x\cos2x+2\sin x-1)=0$

$\Leftrightarrow (2\sin x+1)(2\sin3x-1)=0.$

Kết luận: PT đã cho có nghiệm

$$x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi;\qquad x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi;$$
$$x=\frac{\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3};\qquad x=\frac{5\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3}\ (k\in\mathbb{Z}).$$

2) *Đáp số:* GTLN $\max\limits_{[-3;3]} f(x)=f(-1)=17$;

GTNN $\min\limits_{[-3;3]} f(x)=f(-3)=-35$.

Câu III. 1) Hàm số $y=2^x+4x$ đồng biến, có $y(x)=1\Leftrightarrow x=0$. Ta có

$$\frac{2^{\sin A}}{2^{\sin B}}+4\sin A=1+4\sin B$$

$\Leftrightarrow 2^{\sin A-\sin B}+4(\sin A-\sin B)=1$

$\Leftrightarrow \sin A=\sin B$.

Lập luận tương tự đối với điều kiện thứ hai của hệ, ta có $\sin B=\sin C$. Suy ra điều cần chứng minh.

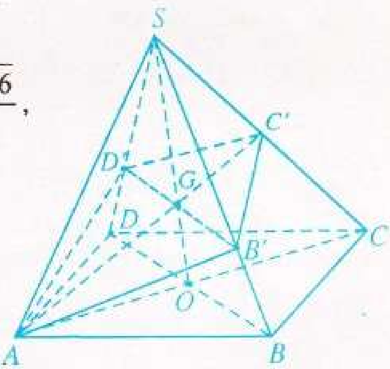
2) Ta có

$$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\tan x\,dx}{\cos^2x\sqrt{1+\frac{1}{\cos^2x}}}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\tan x\,dx}{\cos^2x\sqrt{2+\tan^2x}}.$$

Đặt $t=\sqrt{2+\tan^2x}$ thì $dt=\dfrac{\tan x.dx}{\cos^2x\sqrt{2+\tan^2x}}$.

Từ đó $I=\displaystyle\int_{\sqrt3}^{\sqrt5}dt=\sqrt5-\sqrt3$.

Câu Va. 1) (Hình vẽ). Dựng $AC'\perp SC$. Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$, G là giao điểm của AC' với SO. Qua G dựng đường thẳng song song với BD cắt SB, SD tương ứng tại B', D'. Vì $BD\perp$ mp(SAC) nên $BD\perp AC'$.



• Tam giác SAC đều, từ đó

$$AC'=SO=\frac{a\sqrt6}{2},$$

$$B'D'=\frac{2}{3}a\sqrt2$$

(G là trọng tâm tam giác SAC).

Do đó

$$S_{AB'C'D'}=\frac12AC'.B'D'=\frac{a^2\sqrt3}{3}.$$

• Ta có $V_{S.ABCD}=\dfrac{a^3\sqrt6}{6}$; $V_{S.AB'C'D'}=\dfrac{a^3\sqrt6}{18}$.

Từ đó $\dfrac{V_{S.AB'C'D'}}{V_{ABCD.D'C'B'}}=\dfrac12$.

2) Xét hệ trục tọa độ Descartes sao cho $O(0;0;0)$, $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, điểm $S(0;0;\sqrt3)$ thuộc trục Oz. Khi đó $C(-1;0;0)$,

$C'\left(-\frac{1}{2};0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Do đó $\overrightarrow{AC'}=\left(-\frac{3}{2};0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\overrightarrow{AB}=(-1;1;0)$, $\overrightarrow{SA}=(1;0;-\sqrt{3})$. Tọa độ vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (SAB) là $\vec{n}=[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{SA}]=(-\sqrt{3};\sqrt{3};-1)$.

Gọi φ là góc giữa AC' và mặt phẳng (SAB). Tính được $\sin\varphi=\frac{\sqrt{7}}{7}$.

Câu Vb. 1) Ta có $i^5+i^7+\ldots+i^{2007}$

$$=i^5(1+i^2+i^4+\ldots+i^{2002})=i\left(\frac{1-(i^2)^{1002}}{1-i^2}\right)=0;$$

$$i^4+i^5+\ldots+i^{2008}$$

$$=1+i+i^2+i^3+i^4+i^5+\ldots+i^{2008}-(1+i+i^2+i^3)$$

$$=\frac{1-i^{2009}}{1-i}-(1+i-1-i)=1.$$ *Đáp số:* $P=0$.

2) $B(-1+2t;1+3t;4+4t)$, $C(1+2s;-2-3s;5+s)$ $(t,s\in\mathbb{R})$. Vì $A(-1;-1;2)$ nên $\overrightarrow{AC}=(2s+2;-3s-1;s+3)$ và tọa độ trung điểm K của AB là $K\left(t-1;\frac{3t-2}{2};2t+3\right)$. Sử dụng giả thiết $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{u_{BH}}=0$ ($\overrightarrow{u_{BH}}=(2;3;4)$) là vectơ chỉ phương của đường cao BH) $\Rightarrow s=13$. Vậy $C(27;-41;18)$. Vì K thuộc đường trung tuyến của tam giác kẻ từ C nên

$$\begin{cases}t-1=2s+1\\3t-2=2(-3s-2)\\2t+3=s+5\end{cases}\Rightarrow t=\frac{2}{3}.$$

Do đó $B\left(\frac{1}{3};3;\frac{20}{3}\right)$.

PT AB: $\frac{x+1}{2}=\frac{y+3}{9}=\frac{z-2}{7}$;

PT AC: $\frac{x+1}{13}=\frac{y+3}{-19}=\frac{z-2}{8}$.

NGUYỄN THANH CẢNH
(GV CĐSP Hưng Yên)

Bạn có biết?
VỀ HỆ THỐNG TRƯỜNG ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG, TRUNG HỌC ở nước ta

Kì thi Đại học, Cao đẳng đang gần đến. Câu lạc bộ kì này có mấy câu đố các bạn trả lời:

1. Theo bạn, năm nay thi vào đại học có những thay đổi nào so với năm học trước về quy chế?

2. Nước ta có tổng cộng bao nhiêu trường đại học, đại học vùng và Đại học Quốc gia (không tính các trường trong đại học vùng, trong đại học Quốc gia và các trường riêng của quân đội, cảnh sát)?

3. Kể tên các tỉnh, thành phố thuộc Trung ương có từ 3 trường đại học và đại học trở lên.

4. Kể tên các tỉnh, thành phố có từ 10 trường đại học, cao đẳng và trung học nghề trở lên.

5. Theo bạn, không kể các trường dân lập thì có bao nhiêu phần trăm học sinh tốt nghiệp lớp 12 được các trường quốc lập tiếp nhận trong năm học 2007-2008?

6. Câu hỏi phụ dành để xếp hạng: Có bao nhiêu bạn trả lời đúng cả 5 câu hỏi?

Quà tặng dành cho các bạn trả lời đúng và gửi bài sớm căn cứ theo dấu bưu điện.

BÍNH NAM HÀ

KHẢO SÁT.... *(Tiếp trang 6)*

Bài 1. Tìm các số dương a để hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases}x^2+y^2=1-a^2\\x+y>a.\end{cases}$$

Bài 2. Tìm a để mỗi hệ sau có nghiệm:

a) $\begin{cases}x^2+y^2=1-a^2\\x+y>a;\end{cases}$ b) $\begin{cases}\log_{x^2+y^2}(x+y)\geq 1\\x+2y=a.\end{cases}$

Bài 3. Giả sử $(x_1;y_1)$ và $(x_2;y_2)$ là hai nghiệm của hệ

$$\begin{cases}x^2+y^2-x=0\\x+ay-a=0.\end{cases}$$

Chứng minh rằng $(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2\leq 1$.

Bài 4. Tìm a để hệ sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases}x^2+y^2+2y+1\leq a\\x^2+y^2+2x+1\leq a.\end{cases}$$

PROBLEMS... *(Tiếp trang 17)*

denoted by D. Let K be the midpoint of BE. Find the measure angle $\widehat{AKD}$.

T3/358. Find the least positive integer n ($n > 1$) such that $\frac{1^2+2^2+...+n^2}{n}$ is a perfect square number.

T4/358. Prove the following inequality:

$$\left(1+\frac{2a}{b}\right)^2+\left(1+\frac{2b}{c}\right)^2+\left(1+\frac{2c}{a}\right)^2 \geq \frac{9(a+b+c)^2}{ab+bc+ca},$$

where a, b, c are arbitrary positive real numbers. When does equality occur?

T5/358. Solve the equation: $x^3-\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{x+6}}=6$.

T6/358. Let ABC be a right triangle at A. Draw the circle (B) with center at B and radius BA and draw a diameter AD. Choose two points E and F on the line BC such that B is their midpoint. DE and DF meets with (B) at M and N respectively. Prove that M, N and C are colinear.

T7/358. Let ABC be an equilateral triangle with circumcircle (O). Draw a circle (O_1) which is tangent to both side BC and arc $\overset{\frown}{BC}$. Construct the circles (O_2), (O_3) similarly for the remaining sides CA and AB. Prove that $AO_1=BO_2=CO_3$ iff (ie. if and only if) the circles (O_1),(O_2) and (O_3) all have the same radius. (Notation: (X) is a circle with center at X).

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T8/358. Let (a_n), ($n = 0, 1, 2,\ldots$) be a sequence given by $a_0=29$, $a_1=105$, $a_2=381$, and $a_{n+3} = 3a_{n+2}+2a_{n+1}+a_n$ for all $n = 0, 1, 2, \ldots$. Prove that for each positive integer m, there exists a number n such that a_n, $a_{n+1}-1$, $a_{n+2}-2$ are all divisible by m.

T9/358. Let f be a continuous function on the interval $[0, 1]$ and satisfies the following properties:

i) $f(0) = 0$;

ii) $f(1) = 1$;

iii) $6f\left(\frac{2x+y}{3}\right)=5f(x)+f(y)$ for all $x\geq y$ in $[0, 1]$.

Find $f\left(\frac{8}{23}\right)$.

T10/358. Let a, b, c be non-negative real numbers with sum equal to 1. Prove that

$$\sqrt{a+(b-c)^2}+\sqrt{b+(c-a)^2}+\sqrt{c+(a-b)^2}\geq\sqrt{3}.$$

T11/358. Let H and I be, respectively, the orthorcenter and the incenter of an acute triangle ABC. The lines AH, BH and CH meet the circumcircles of triangles HBC, HCA and HAB at A_1,B_1,C_1 respectively. AI, BI and CI meet the circumcircles of triangles IBC, ICA and IAB at A_2,B_2,C_2 respectively. Prove that $HA_1.HB_1.HC_1+64R^3\geq 9.IA_2.IB_2.IC_2$.

T12/358. Let G be the centroid of a tetrahedron $ABCD$. Let A_1,B_1,C_1,D_1 be arbitrary points on GA, GB, GC and GD respectively. GA meets the plane $(B_1C_1D_1)$ at A_2. Construct the points B_2,C_2,D_2 similarly. Prove that

$$3\left(\frac{GA}{GA_1}+\frac{GB}{GB_1}+\frac{GC}{GC_1}+\frac{GD}{GD_1}\right)$$

$$=\frac{GA}{GA_2}+\frac{GB}{GB_2}+\frac{GC}{GC_2}+\frac{GD}{GD_2}.$$

Người dịch
LÊ MINH HÀ
(ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Giải trí toán học

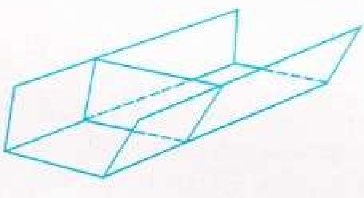
Giải đáp bài:

TẠO CHIẾC MÁNG NƯỚC

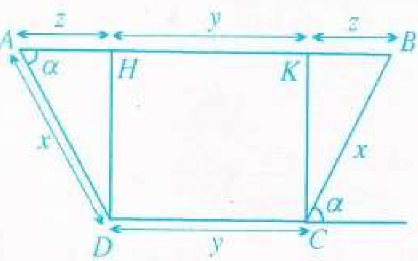
(THTT số 355, tháng 1 năm 2007)

(Theo bạn *Đỗ Mạnh Cường*, 11A1, THPT Phùng Khắc Khoan, Thạch Thất, **Hà Tây**).

Gọi chiều rộng tấm tôn là a; chiều rộng thành bên máng là $x = BC = AD$; chiều rộng đáy máng là $y = CD$ và $z = AH$ (xem h.1, h.2).



Hình 1



Hình 2

Khi đó $a = y + 2x$. Diện tích mặt cắt của máng

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB+CD).DH$$
$$= \frac{1}{2}(z+y+z+y).\sqrt{x^2-y^2}$$
$$= \sqrt{(y+z)^2.(x^2-z^2)}.$$

Sử dụng BĐT Cauchy cho bốn số không âm ta thấy

$$3S^2_{ABCD} = (y+z)(y+z)(3x-3z)(x+z)$$
$$\le \left(\frac{y+z+y+z+3z-3z+x+z}{4}\right)^4 = \left(\frac{a}{2}\right)^4$$

hay $S \le \dfrac{a^2\sqrt{13}}{12}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} y+z=3x-3z=x+z \\ y+2x=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=\dfrac{a}{3} \\ z=\dfrac{a}{6}. \end{cases}$$

Lúc đó $\cos\alpha = \dfrac{AH}{AD} = \dfrac{z}{x} = \dfrac{1}{2}$, nghĩa là $\alpha = 60^\circ$.

Vậy để diện tích mặt cắt của máng lớn nhất thì chiều rộng của thành máng phải bằng chiều rộng đáy máng, góc tạo bởi thành máng và đáy máng bằng 120°.

Nhiều bạn phải sử dụng đến công cụ đạo hàm để giải bài toán này. Ngoài bạn *Cường*, các bạn sau cũng có lời giải tốt: *Vũ Thị Thêu*, $11A_0$, THPT Yên Phong I, **Bắc Ninh**; *Nguyễn Quang Huy*, 10A1, THPT Nguyễn Tất Thành, Cầu Giấy, **Hà Nội**; *Trần Văn Hạnh*, 10A5, THPT Ninh Giang, **Hải Dương**; *Lưu Ngọ*, 11A1, THPT Hậu Lộc I, Hậu Lộc, **Thanh Hóa**.

LÊ BÍCH

Tạo đẳng thức "123456789 = 100"

Chỉ dùng các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 *theo đúng thứ tự* đó và các dấu "+", "−", liệu bạn có thể hình thành số 100? Thí dụ:

12 − 3 − 4 + 5 − 6 + 7 + 89 = 100

Ngoài cách nói trên còn có ít nhất 10 cách thỏa mãn yêu cầu vừa nêu. Nếu bạn tìm được 7 cách thì là một người có năng khiếu về toán. Nếu tìm đủ 10 cách thì có thể công nhận là một người giỏi toán. Còn nếu tìm được hơn 10 cách thì... quả là một người rất "siêu". Nào, mời các bạn thử sức!

NGUYỄN HANH
(Hà Nội)

GIẢI THƯỞNG Lê Văn Thiêm năm 2006

Để khuyến khích thế hệ trẻ say mê học tập môn Toán và lựa chọn Toán học làm nghề nghiệp tương lai của mình, để ghi nhận công lao của những người thầy dạy Toán tận tụy với nghề nghiệp, Hội Toán học Việt Nam trao giải thưởng hàng năm mang tên Giải thưởng Lê Văn Thiêm cho một số học sinh xuất sắc và thầy giáo dạy Toán giỏi trong cả nước. Giải thưởng đối với học sinh được trao cho hai đối tượng: các học sinh đoạt kết quả xuất sắc trong các kì thi Olympic Toán Quốc tế, và các học sinh hoàn cảnh khó khăn nhưng đã vươn lên đạt thành tích cao trong học tập môn Toán.

Hội đồng Giải thưởng Lê Văn Thiêm 2006 gồm các ông: Hà Huy Khoái (Phó Chủ tịch Hội Toán học Việt Nam, Viện trưởng Viện toán học, Chủ tịch), Phạm Thế Long (Chủ tịch Hội Toán học Việt Nam, Ủy viên), Lê Tuấn Hoa (Phó Chủ tịch kiêm Tổng thư kí Hội Toán học Việt Nam, Ủy viên), Nguyễn Văn Mậu (Phó Chủ tịch Hội Toán học Việt Nam, Hiệu trưởng Trường Đại học Khoa học tự nhiên - ĐHQG Hà Nội, Ủy viên).

Hội đồng Giải thưởng nhất trí quyết định trao Giải thưởng Lê Văn Thiêm 2006 cho các giáo viên và học sinh sau đây.

GIÁO VIÊN: *Phạm Quốc Phong*, sinh năm 1951, giáo viên trường THPT Hồng Lĩnh, thị xã Hồng Lĩnh, Hà Tĩnh. Thành tích: Đã đào tạo được nhiều học sinh giỏi đoạt giải tại kì thi học sinh giỏi Toán của Hà Tĩnh. Đã viết được nhiều sách tham khảo Toán THPT. Từ năm 1990 liên tục được tỉnh Hà Tĩnh công nhận là Giáo viên Giỏi.

HỌC SINH:

1. *Hoàng Mạnh Hùng*, năm học 2005 – 2006 là học sinh lớp 12 THPT chuyên Toán Tin ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội. Thành tích: Giải Nhất thi học sinh giỏi Toán toàn quốc năm 2006 và Huy chương Vàng Olympic Toán Quốc tế, Slovenia 2006.

2. *Nguyễn Duy Mạnh*, năm học 2005 – 2006 là học sinh lớp 12 THPT chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương. Thành tích: Giải Nhì thi học sinh giỏi Toán toàn quốc năm 2006 và Huy chương Vàng Olympic Toán Quốc tế, Slovenia 2006.

3. *Nguyễn Thị Linh*, năm học 2005 – 2006 là học sinh lớp 11 THPT chuyên Thái Bình. Thành tích: Giải Nhì thi học sinh giỏi Toán toàn quốc năm 2006. Hoàn cảnh gia đình khó khăn: đông anh chị em, bố mẹ đều làm ruộng.

LÊ TUẤN HOA

(*Viện Toán học Việt Nam*)

Tin tức dạy - học toán

HOẠT ĐỘNG CỦA HỘI TOÁN HỌC HÀ NỘI

Tại Hội trường Lê Văn Thiêm, Hội Toán học Hà Nội đã tổng kết một năm hoạt động sôi nổi và phát thưởng cho học sinh Việt Nam dự thi Olympic Singapore (SMO) dành cho học sinh Đông Nam Á. GS. TSKH. Lê Hùng Sơn, Phó Chủ tịch Hội đã đọc báo cáo điểm lại các hoạt động của Hội: tổ chức trường hè Hùng Vương tại các tỉnh Tây Bắc, Seminar khoa học đều đặn thứ năm hàng tuần, bồi dưỡng kiến thức cho giáo viên THCS Hà Nội, tổ chức thi SMO, phối hợp với trường Đại học Bách khoa Hà Nội, Hội Giảng dạy Toán học thuộc Liên đoàn Toán học thế giới (IMO) tổ chức Hội thảo Khoa học Quốc tế, ... ThS. Vũ Kim Thủy, Phó ban tổ chức cuộc thi đã đọc báo cáo tổng kết và danh sách 40 em tham dự thi và đều đoạt giải. GS. TSKH. Nguyễn Văn Mậu, Chủ tịch Hội Toán học Hà Nội đã trao Giấy khen của Hội và Bằng chứng nhận của Singapore cho học sinh đoạt giải và trình bày phương hướng hoạt động của Hội trong năm tới.

VŨ NAM TRỰC

CÁC LỚP THCS

Bài T1/358. (**Lớp 6**) Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a^3 + b^3 = c^3$. So sánh $a^{2007} + b^{2007}$ và c^{2007}.

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(GV TP. Hồ Chí Minh)

Bài T2/358. (**Lớp 7**) Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi E là điểm tùy ý nằm giữa B và C. Đường thẳng qua E vuông góc với AB và đường thẳng qua C vuông góc với AC cắt nhau ở D. Gọi K là trung điểm của BE. Tính độ lớn của góc AKD.

NGUYỄN TẤN NGỌC
(GV THCS Nhơn Mỹ, An Nhơn, Bình Định)

Bài T3/358. Tìm số nguyên n ($n>1$) bé nhất sao cho $\dfrac{1^2+2^2+...+n^2}{n}$ là một số chính phương.

NGUYỄN MINH TUẤN
(GV THPT Chu Văn An, TP. Lạng Sơn)

Bài T4/358. Chứng minh rằng

$$\left(1+\frac{2a}{b}\right)^2+\left(1+\frac{2b}{c}\right)^2+\left(1+\frac{2c}{a}\right)^2 \geq \frac{9(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}$$

trong đó a, b, c là các số thực dương.

Đẳng thức xảy ra khi nào?

PHẠM KIM HÙNG
(SV khóa K9, hệ CNTN ngành Toán, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội)

Bài T5/358. Giải phương trình

$$x^3-\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{x+6}}=6.$$

NGUYỄN VĂN TIẾN
(SV lớp 03H, khoa Hóa Kĩ thuật, ĐHBK Đà Nẵng)

Bài T6/358. Cho tam giác ABC vuông ở A. Vẽ đường tròn tâm B, bán kính BA. Trên đường thẳng BC lấy các điểm E và F sao cho B là trung điểm của EF. Vẽ đường kính AD. Các đường thẳng DE và DF cắt đường tròn (B) lần nữa theo thứ tự tại các điểm M và N. Chứng minh rằng ba điểm C, M, N thẳng hàng.

HUỲNH THANH TÂM
(CB Bưu điện An Nhơn, Bình Định)

Bài T7/358. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Vẽ đường tròn (O_1) tiếp xúc với cạnh BC và với cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$; đường tròn (O_2) tiếp xúc với cạnh CA và với cung nhỏ $\overset{\frown}{CA}$; đường tròn (O_3) tiếp xúc với cạnh AB và với cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$. Chứng minh rằng: $AO_1 = BO_2 = CO_3$ khi và chỉ khi bán kính các đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) bằng nhau.

(Kí hiệu (X) là đường tròn tâm X).

NGUYỄN TIẾN LÂM
(SV K50A1S, khoa Toán-Cơ-Tin, ĐHKHTN Hà Nội)

CÁC LỚP THPT

Bài T8/358. Cho dãy số (a_n) ($n = 0, 1, 2, ...$) được xác định bởi: $a_0 = 29$, $a_1 = 105$, $a_2 = 381$ và $a_{n+3} = 3a_{n+2}+2a_{n+1}+a_n$ với mọi $n = 0, 1, 2,...$ Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương m luôn tồn tại số tự nhiên n sao cho các số a_n, $a_{n+1}-1, a_{n+2}-2$ đều chia hết cho số m.

TRẦN QUỐC HOÀN
(SV K50CA, ĐH Công nghệ, ĐHQG Hà Nội)

Bài T9/358. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0 ; 1]$ và thỏa mãn các điều kiện sau:

i) $f(0) = 0$;

ii) $f(1) = 1$;

iii) $6f\left(\dfrac{2x+y}{3}\right) = 5f(x) + f(y)$ với mọi x, y thuộc $[0 ; 1]$ mà $x \geq y$.

Hãy tính $f\left(\dfrac{8}{23}\right)$.

VŨ THÁI LUÂN
(Học viên Cao học khóa 05-07, khoa Toán-Cơ-Tin, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T10/358. Cho a, b, c là các số thực không âm có tổng bằng 1. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a+(b-c)^2}+\sqrt{b+(c-a)^2}+\sqrt{c+(a-b)^2}\geq\sqrt{3}.$$

PHAN THÀNH NAM

(SV Lớp 03TT1A, khoa Toán-Tin, ĐHKHTN, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh)

Bài T11/358. Gọi H và I theo thứ tự là trực tâm và tâm đường tròn nội tiếp một tam giác nhọn ABC. Các đường thẳng AH, BH, CH theo thứ tự cắt đường tròn ngoại tiếp các tam giác HBC, HCA, HAB lần nữa tại A_1, B_1, C_1. Các đường thẳng AI, BI, CI theo thứ tự cắt lại đường tròn ngoại tiếp các tam giác IBC, ICA, IAB lần nữa tại A_2, B_2, C_2. Chứng minh rằng $HA_1.HB_1.HC_1+64R^3\geq 9IA_2.IB_2.IC_2$.

TRẦN MINH HIỀN

(GV THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước)

Bài T12/358. Gọi G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$. Lấy các điểm A_1, B_1, C_1, D_1 theo thứ tự nằm trong các đoạn GA, GB, GC, GD. Gọi A_2, B_2, C_2, D_2 theo thứ tự là các giao điểm của GA với mặt phẳng $(B_1C_1D_1)$, của GB với mặt phẳng $(C_1D_1A_1)$, của GC với mặt phẳng $(D_1A_1B_1)$, cuả GD với mặt phẳng $(A_1B_1C_1)$.

Chứng minh rằng

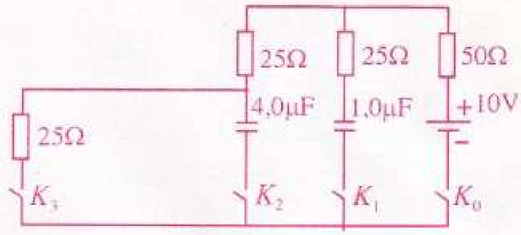
$$3\left(\frac{GA}{GA_1}+\frac{GB}{GB_1}+\frac{GC}{GC_1}+\frac{GD}{GD_1}\right)=\frac{GA}{GA_2}+\frac{GB}{GB_2}+\frac{GC}{GC_2}+\frac{GD}{GD_2}.$$

ĐÀO QUỐC DŨNG

(GV THPT Diễn Châu 4, Nghệ An)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/358. Có một mạch điện như hình vẽ. Nguồn điện 10V; hai tụ 1,0μF và 4,0μF ; một điện trở 50Ω và ba điện trở 25Ω. Bốn ngắt điện, lúc đầu tất cả đều mở.



a) Hãy tính điện tích của mỗi tụ sau một thời gian dài trong mỗi trường hợp sau:

i) Khi K_0, K_1, K_2 đóng; K_3 mở .

ii) Khi K_0, K_1, K_2, K_3 đóng.

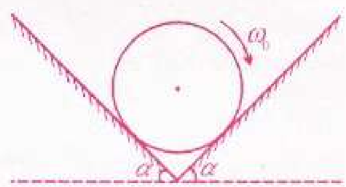
iii) Khi K_0 và K_3 mở ; K_1 và K_2 đóng.

b) Khi K_2 và K_3 mở; K_0 và K_1 đóng. Sau một thời gian dài, ta cho vào trong tụ 1,0 μF một tấm điện môi có hằng số điện môi là 3,0 lấp đầy không gian giữa hai bản cực. Tính công toàn phần được thực hiện khi đưa rất chậm tấm điện môi vào trong tụ (tức là công được thực hiện bởi ta và bởi nguồn).

TÔ GIANG

(Hà Nội) (sưu tầm)

Bài L2/358. Người ta quay một xilanh thành mỏng bán kính R cho đến vận tốc góc ω_0 rồi đặt vào giữa hai mặt phẳng nghiêng $\alpha = 45^\circ$ so với phương ngang. Hệ số ma sát giữa mặt phẳng nghiêng và xi lanh là μ. Xác định số vòng quay của xilanh cho đến khi dừng lại. Coi trục của xi lanh đứng yên khi bị hãm.



ĐƯỜNG LIÊN PHƯỢNG

(GV THCS Nam Hà, TX. Hà Tĩnh, Hà Tĩnh)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOS

T1/358. (for 6th grade) Let a, b, c be positive numbers such that $a^3+b^3=c^3$. Compare $a^{2007}+b^{2007}$ and c^{2007}.

T2/358. (for 7th grade) Let ABC be an isosceles triangle at A. Let E be an arbitrary point on the side BC. The line through E perpendicular to AB meets with the line through C perpendicular to AC at a point ...

(Xem tiếp trang 13)

★**Bài T1/354.** a) *Tìm tất cả các số tự nhiên có thể viết được dưới dạng tổng hai số nguyên lớn hơn 1 và nguyên tố cùng nhau.*

b) *Tìm tất cả các số tự nhiên có thể viết được dưới dạng tổng ba số nguyên lớn hơn 1 và đôi một nguyên tố cùng nhau.*

Lời giải. Để giải bài này ta cần *Nhận xét* sau.

Nhận xét. Với các số a, b nguyên dương ($a > b$) nếu a và b có ước chung lớn nhất là d thì d phải là ước của $a - b$.

Thực vậy, giả sử $(a, b) = d$ thì $a = dm$, $b = dn$ với $(m, n) = 1$ thì $a - b = d(m - n)$ chia hết cho d.

Sử dụng nhận xét trên một lần hoặc nhiều lần ta có các khẳng định sau đối với các số nguyên dương:

$(k, k + 1) = 1$;

$(2k + 1, 2k + 3) = 1$;

$(2k - 1, 2k + 3) = 1$;

$(2k - 3, 2k + 1) = 1$;

$(3k - 2, 3k + 4) = 1$ với k lẻ;

$(3k - 4, 3k + 2) = 1$ với k lẻ;

$(3k - 5, 3k + 7) = 1$ với k chẵn;

$(3k - 7, 3k + 5) = 1$ với k chẵn.

Số 3 nguyên tố cùng nhau với mỗi số hạng $3k + r$, $3k - r$ trong đó r bằng 2, 4, 5, 7.

a) Xét cách viết số nguyên dương $n = a + b$, ta thấy $5 = 2 + 3$ thỏa mãn và $n = 6$ không thỏa mãn, nên chỉ cần xét với các số nguyên $n \geq 7$.

• Nếu $n = 2k + 1$ thì viết $2k + 1 = k + (k + 1)$, thỏa mãn.

• Nếu $n = 4k$ thì viết $4k = (2k - 1) + (2k + 1)$, thỏa mãn.

• Nếu $n = 4k + 2$ thì viết $4k + 2 = (2k - 1) + (2k + 3)$, thỏa mãn.

Vậy các số nguyên dương n cần tìm là $n = 5$ và mọi $n \geq 7$.

b) Xét cách viết số nguyên dương $n = a + b + c$, ta thấy $10 = 2 + 3 + 5$, $12 = 2 + 3 + 7$, $14 = 2 + 5 + 7$, $15 = 3 + 5 + 7$, $16 = 2 + 5 + 9$, còn 9, 11, 13, 17 không thỏa mãn nên chỉ xét với các số nguyên $n \geq 18$.

• Nếu $n = 4k$ thì viết $4k = 2 + (2k - 3) + (2k + 1)$ với $k \geq 3$, thỏa mãn.

• Nếu $n = 4k + 2$ thì viết $4k + 2 = 2 + (2k - 1) + (2k + 1)$ với $k \geq 3$, thỏa mãn.

• Nếu $n = 6k + 1$ thì viết
$6k + 1 = 3 + (3k - 4) + (3k + 2)$ với k lẻ, $k \geq 3$ hoặc $6k + 1 = 3 + (3k - 7) + (3k + 5)$ với k chẵn, $k \geq 4$, thỏa mãn.

• Nếu $n = 6k + 3$ thì viết $6k + 3 = (2k - 1) + (2k + 1) + (2k + 3)$ với $k \geq 2$, thỏa mãn.

• Nếu $n = 6k + 5$ thì viết $6k + 5 = 3 + (3k - 2) + (3k + 4)$ với k lẻ, $k \geq 3$ hoặc $6k + 5 = 3 + (3k - 5) + (3k + 7)$ với k chẵn, $k \geq 4$, thỏa mãn.

Vậy các số nguyên dương n cần tìm là 10, 12, 14, 15, 16 và mọi $n \geq 18$. ❒

Nhận xét. 1) Có thể giải bài này bằng nhiều cách. Chẳng hạn viết được
$18k + r = (6k + t) + (6k + u) + (6k + v)$ với $k \geq 1$, $0 \leq r \leq 17$ mà $r = t + u + v$ như sau:
$1 = (-3) + (-1) + 5$; $5 = (-1) + 1 + 5$;
$7 = (-1) + 1 + 7$; $11 = 1 + 3 + 7$; $13 = 1 + 5 + 7$;
$17 = 1 + 7 + 9$.

2) Giải đúng bài này có các bạn:

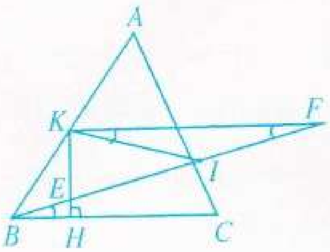
Hà Nội: *Hoàng Anh Tú*, 6I, THPT Marie - Curie, Thanh Xuân; **Hải Dương:** *Vũ Thị Phương, Phạm Thị Hải Yến*, 6A1, THCS Vũ Hữu, Bình Giang.

VIỆT HẢI

★**Bài T2/354.** *Cho tam giác ABC có góc $\widehat{ABC}$ nhọn. Cho K là một điểm thuộc cạnh AB và*

H là hình chiếu vuông góc của nó trên BC. Một tia Bx cắt đoạn KH tại E, cắt đường thẳng đi qua K và song song với BC tại F. Chứng minh rằng $\widehat{ABC}=3\widehat{CBF}$ khi và chỉ khi $EF = 2BK$.

Lời giải. Bằng phương pháp phản chứng ta chứng minh được bổ đề sau.



Bổ đề: Trong tam giác vuông độ dài trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền.

Theo giả thiết, $KF \parallel BC$, mà $KH \perp BC \Rightarrow KH \perp KF$. Gọi I là trung điểm của EF. Theo bổ đề trên, trong tam giác vuông KEF ta có $IK = IE = IF = \dfrac{EF}{2}$.

• Giả sử $\widehat{ABC}=3\widehat{CBF}$. Khi đó $\widehat{KBF}=2\widehat{CBF}$.

Vì $\widehat{CBF}=\widehat{KFB}$ (so le trong) nên $\widehat{KBF}=2\widehat{KFB}$ (1)

Tam giác IKF cân tại I nên $\widehat{IKF}=\widehat{IFK}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{KBF} = \widehat{IKF}+\widehat{IFK}$ (3)

Ta lại có $\widehat{KIB}=\widehat{IKF}+\widehat{IFK}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{KBF}=\widehat{KIB}$, tức ΔKBI cân tại K, do đó $BK = IK$ hay $EF = 2BK$.

• Ngược lại, giả sử $EF = 2BK$. Khi đó $IK = BK$, suy ra ΔKBI cân tại $K \Rightarrow \widehat{KBI}=\widehat{KIB}$ (5)

Ta lại có $\widehat{KIB}=\widehat{IFK}+\widehat{IKF} = 2\widehat{IFK} = 2\widehat{CBF}$ (6)

Từ (5) và (6) suy ra $\widehat{KBI}=2\widehat{CBF}$ hay $\widehat{ABC}=3\widehat{CBF}$.

Tóm lại, $\widehat{ABC}=3\widehat{CBF}$ khi và chỉ khi $EF = 2BK$. □

Nhận xét. 1) Bài toán này có nhiều bạn tham gia giải và đều cho lời giải đúng. Tuy nhiên, đa số các bạn thừa nhận bổ đề về độ dài đường trung tuyến ứng với cạnh huyền trong tam giác vuông.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Phú Thọ: *Kim Huyền Trang, Đào Quốc Hiếu*, 7A1, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Thị Phương Anh, Lê Việt Trinh, Nguyễn Thanh Hằng, Nguyễn Thị Hường, Nguyễn Thị Lan Thơm*, 7A1, THCS Trưng Vương, Mê Linh; **Bắc Ninh:** *Vũ Thắng*, 6A, THCS Yên Phong, Yên Phong, *Ngô Thế Sơn*, 7B, THCS Tương Giang, Từ Sơn; **Nam Định:** *Lê Thị Phương Thanh, Phùng Mạnh Linh*, 7A4, THCS Trần Đăng Ninh, TP. Nam Định; **Hải Dương:** *Vũ Tuấn Anh*, 7A2, THCS Vũ Hữu, Bình Giang; **Hải Phòng:** *Đào Lê Anh Tuấn*, 7C2, THCS Quang Trung, *Nguyễn Thị Lan Phương*, 7B8, THCS Chu Văn An, Q. Ngô Quyền; **Thanh Hóa:** *Lê Tiến Tùng*, 7B, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn, *Cao Thanh Tùng*, 7A, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, *Đinh Uỵt Nảy*, 6B, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc; **Nghệ An:** *Phan Phú Nguyên*, 7A, THCS Lý Nhật Quang, *Đặng Trung Anh, Hồ Khánh Duy*, 7A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Thị Vân Anh*, 7B, THCS Bình An, Can Lộc; **Bình Định:** *Trần Bảo Trinh*, THCS Nhơn Lộc, An Nhơn, *Bùi Hồng Ngọc*, 7A6, THCS Lê Lợi, TP. Quy Nhơn; **Khánh Hòa:** *Nguyễn Bảo Nhi*, 6/5, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★Bài T3/354. *Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho tích các chữ số của nó bằng*

$$(n-86)^2(n^2-85n+40).$$

Lời giải. Giả sử $n=\overline{a_1a_2...a_m}$ là số tự nhiên có m chữ số. Vì mỗi chữ số đều nhỏ hơn 10 nên khi $m>1$, có $n=\overline{a_1a_2...a_m}\geq a_1.10^{m-1} > a_1a_2...a_m$.

Từ đó dễ dàng thấy rằng với mọi số tự nhiên $n=\overline{a_1a_2...a_m}$, ta đều có $n\geq a_1a_2...a_m$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $m = 1$ (số n có một chữ số).

Từ kết quả trên và giả thiết, suy ra

$$0\leq(n-86)^2(n^2-85n+40)\leq n \quad (1)$$

Nhận thấy, số $n = 86$ có tích các chữ số bằng 48 khác 0, không thoả mãn giả thiết.

Với số tự nhiên n khác 86, có $(n-86)^2\geq 1$.

Dó đó, từ (1) suy ra $0\leq n^2-85n+40\leq n$.

Với $n^2-85n+40\geq 0$ có $n^2-85n+84>0$

$$\Rightarrow (n-1)(n-84)>0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n<1 \\ n>84 \end{array}\right. \quad (2)$$

Mặt khác, với $n^2-85n+40\leq n \Rightarrow n^2-86n+40\leq 0$

$$\Rightarrow n^2-86n<0 \Rightarrow n(n-86)<0 \Rightarrow 0<n<86 \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra $n = 85$.

Thử lại, ta thấy số tự nhiên $n = 85$ thoả mãn giả thiết của bài toán. ❐

Nhận xét. 1) Có rất nhiều bạn tham gia giải bài toán trên và hầu hết đều làm đúng.

Điều then chốt của bài toán là chứng minh bất đẳng thức (1).

2) Các bạn sau đây có bài giải tốt:

Thái Nguyên: *Ngô Trần Việt Hà*, 8A4, THCS Chu Văn An, TP. Thái Nguyên; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Thị Hường, Kiều Thị Thu Hà, Nguyễn Thị Phương Anh, Nguyễn Thanh Hằng, Nguyễn Thị Hồng Hạnh, Lê Thanh Nga*, 7A1, THCS Trưng Vương, Mê Linh; *Mạc Thị Thu Huệ*, 7A, THCS Đồng Quế; *Khổng Hoàng Trang*, 7D, *Nguyễn Thị Thu Hương, Nguyễn Văn Tú, Đỗ Tiến Quang*, 9A,THCS Lập Thạch, Lập Thạch; *Phùng Ngọc Quý*, 8A1, Nguyễn Thế Bảo, 7A1,THCS Yên Lạc, Yên Lạc ; **Hà Nội:** *Nguyễn Văn Dự*, 9A, THCS Dương Xá, Gia Lâm; *Phạm Duy Long*, 9H, THCS Lê Quý Đôn, Cầu Giấy; **Hà Tây:** *Sỹ Danh Hưng*, 9A, THCS Kiều Phú, Quốc Oai; **Quảng Ninh:** *Ngô Đức Long*, 9A8, THCS Trần Quốc Toản, TP. Hạ Long; **Hải Dương:** *Trần Thị Mận*, 4A, TH Nghĩa An, Ninh Giang, *Vương Hùng Mạnh*, 6/3, THCS Lê Quý Đôn, TP Hải Dương; **Thanh Hoá:** *Hoàng Kiên An*, 9E, THCS Bắc Sơn, Sầm Sơn; **Nghệ An:** *Đậu Thế Vũ*, 8B, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, *Vũ Đình Long*, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Bình:** *Bùi Quang Vũ*, 9A, THCS Quách Xuân Kì, Bố Trạch; **Quảng Ngãi:** *Trần Thành Luân*, 9C, THCS Phổ Văn, Đức Phổ; **Phú Yên:** *Phạm Quang Thịnh*, 8H, THCS Hùng Vương, Tuy Hòa; **TP Hồ Chí Minh:** *Bùi Trần Long*, 9A5, THCS Chu Văn An, Q.1; *Nguyễn Đình Hưng*, 9A6, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa; **Bạc Liêu:** *Trần Trọng Hoàng Tuấn*, 8/1, THCS Trần Huỳnh, TX Bạc Liêu.

NGUYỄN ANH DŨNG

★Bài T4/354. *Chứng minh rằng*

$$ab + bc + ca < \sqrt{3}d^2,$$

trong đó a, b, c, d là các số thực thoả mãn các điều kiện sau :

i) $0 < a, b, c < d$;

ii) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}=\frac{2}{d}$.

Lời giải. *Cách 1.* Từ ii) ta có:

$$ab+bc+ca-\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}=\frac{2abc}{d}$$

$$\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}=ab+bc+ca-\frac{2abc}{d}$$

$$=ab+bc\left(1-\frac{a}{d}\right)+ca\left(1-\frac{b}{d}\right) \quad (1)$$

Từ i) ta có: $\frac{a}{d}<1, \frac{b}{d}<1$ hay $1-\frac{a}{d}>0$, $1-\frac{b}{d}>0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$$\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}<ab+bd\left(1-\frac{a}{d}\right)+ad\left(1-\frac{b}{d}\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}<ab+bd-ab+ad-ab$$

$$=bd+ad-ab=d^2-(d-a)(d-b)<d^2 \quad (3)$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacovski và kết hợp với (3), ta có

$$ab+bc+ca\le\sqrt{3}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}<\sqrt{3}d^2.$$

Cách 2. Đặt $x=\frac{d}{a}$, $y=\frac{d}{b}$, $z=\frac{d}{c}$. Khi đó:

$x, y, z > 1$ và $x+y+z-\sqrt{x^2+y^2+z^2}=2$ (1').

Do $x, y, z > 1$ nên ta có thể đặt $x_1 = x - 1$, $x_2 = y - 1$; $x_3 = z - 1$ với $x_1, x_2, x_3 > 0$. Khi đó (1') trở thành:

$$x_1+x_2+x_3+3=2+\sqrt{(x_1+1)^2+(x_2+1)^2+(x_3+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow (x_1+x_2+x_3+1)^2=x_1^3+x_2^3+x_3^3+2(x_1+x_2+x_3)+3$$

$$\Leftrightarrow x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=1 \quad (2')$$

Ta sẽ chứng minh: $\frac{x+y+z}{xyz}<\sqrt{3}$ hay

$$\frac{x_1+x_2+x_3+3}{(x_1+1)(x_2+1)(x_3+1)}<\sqrt{3} \quad (3')$$

Ta có: (3') $\Leftrightarrow x_1+x_2+x_3+3$

$<\sqrt{3}(x_1x_2x_3+1+x_1+x_2+x_3+x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)$

$\Leftrightarrow x_1+x_2+x_3+3$

$<\sqrt{3}(x_1+x_2+x_3)+2\sqrt{3}+\sqrt{3}x_1x_2x_3$ (do (2')).

Bất đẳng thức cuối luôn đúng. Vậy $\frac{x+y+z}{xyz}<\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{d}{a}+\frac{d}{b}+\frac{d}{c}}{\frac{d}{a}\cdot\frac{d}{b}\cdot\frac{d}{c}}<\sqrt{3} \Leftrightarrow ab+bc+ca<\sqrt{3}d^2.$$ ❐

Nhận xét. Các bạn có lời giải tốt là:

Phú Thọ: *Vũ Văn Hiệp*, 9A, THCS Đỗ Xuyên, Đỗ Xuyên; **Nam Định:** *Phạm Bá Thuyết*, 8A, THCS Bình Hòa, Giao Thủy; **Thanh Hóa:** *Hoàng Kiên An*, 9E, THCS Bắc Sơn, Sầm Sơn.

TRẦN HỮU NAM

★Bài T5/354. *Giải phương trình*

$$x^4+2x^3+2x^2-2x+1=(x^3+x)\sqrt{\frac{1-x^2}{x}} \quad (1)$$

Lời giải. Ta thấy

$x^4+2x^3+2x^2-2x+1=x^2(1+x)^2+(1-x)^2$ luôn dương với mọi x nên nếu x là nghiệm của (1) thì phải có điều kiện $x>0$ và $\frac{1-x^2}{x}>0$, tức là $0<x<1$. Với điều kiện $0<x<1$ thì (1) tương đương với

$$(x(1+x))^2+(1-x)^2=(x^2+1)\sqrt{x(1+x)(1-x)} \quad (2)$$

Đặt $u=x(1+x)$, $v=1-x$ (với $u>0$, $v>0$) thì $u+v=x^2+1$. Ta có thể viết (2) dưới dạng

$u^2+v^2=(u+v)\sqrt{uv} \Leftrightarrow (\sqrt{u}-\sqrt{v})^2(u+v+\sqrt{uv})=0$

$\Leftrightarrow u=v$ (vì $u+v+\sqrt{uv}>0$).

Với $u=v$ thì $x(1+x)=1-x \Leftrightarrow x^2+2x-1=0$. PT này có hai nghiệm $x=-1-\sqrt{2}$ và $x=-1+\sqrt{2}$. Đối chiếu với điều kiện $0<x<1$ chỉ có $x=-1+\sqrt{2}$ thoả mãn. Vậy PT (1) có nghiệm duy nhất $x=-1+\sqrt{2}$. ☐

Nhận xét. 1) Có rất nhiều bạn tham gia giải bài này. Tuy nhiên, không ít bạn do không chú ý đến điều kiện của x nên có kết luận sai về nghiệm. Rất tiếc có ba bạn *Lê Văn Dũng, Nguyễn Kiều Quyên, Tạ Hồng Khang*, 6A1, THCS Thanh Đà, Mê Linh, **Vĩnh Phúc** đã cùng làm chung như vậy không đúng quy định.

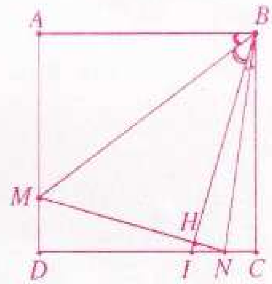
2) Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Bắc Giang: *Tạ Ngọc Cảnh*, 9A, THCS Đức Thắng; **Bắc Ninh**: *Lê Trọng Tín*, 9A, THCS Yên Phong; **Vĩnh Phúc**: *Vũ Thị Kim Oanh*, 9A, THCS Yên Lạc; **Hải Phòng**: *Đỗ Kim Anh*, 7A, THCS Thanh Lương, Vĩnh Bảo; **Phú Thọ**: *Nguyễn Ngọc Trung*, 9A1, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Hà Tây**: *Nguyễn Khánh Việt*, 9C, THCS Ngô Sĩ Liên, Chương Mĩ; **Hà Tĩnh**: *Nguyễn Thị Quỳnh*, 7E, THCS Bình Thịnh, Đức Thọ; **Thanh Hoá**: *Nguyễn Tiến Liên*, 7A, THCS Yên Trường, *Lê Quốc Đạt*, 9B, THCS Lê Đình Kiên, Yên Định; **Nghệ An**: *Cao Thị Thanh Hoa*, 9C, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, *Hồ Thanh Bình*, 9A, THCS Thái Hoà II, Nghĩa Đàn; **Phú Yên**: *Phan Long Trí Yên*, 8H, THCS Hùng Vương, TP. Tuy Hoà; **Khánh Hoà**: *Trần Thị Ánh Nguyên*, 8⁷, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh; **Đăk Lăk**: *Bùi Đình An*, xã Eakpan, H. Cư M'gar.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★Bài T6/354. *Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a. Trên cạnh AD lấy điểm M sao cho AM = 3MD. Kẻ tia Bx cắt cạnh CD tại I sao cho $\widehat{ABM}=\widehat{MBI}$. Kẻ tia phân giác BN ($N \in CD$) của góc $\widehat{CBI}$. Tính diện tích tam giác BMN.*

Lời giải. Trên tia BI, lấy điểm H sao cho $BH=a$. Khi đó $BH=AB=BC$ nên ta có $\Delta ABM=\Delta HBM$ (c.g.c) và $\Delta CBN=\Delta HBN$(c.g.c). Do đó $MH=AM$ và $NH=CN$; $\widehat{BHM}=\widehat{BAM}=90°$ và $\widehat{BHN}=\widehat{BCN}=90°$.



Suy ra M, H, N thẳng hàng, BI vuông góc với MN tại H và $MN=AM+NC$.

Vậy $S_{BMN}=\frac{1}{2}BH.MN=\frac{1}{2}a(AM+NC)$.

Vì $AM=3MD$ nên $MD=\frac{1}{4}a$; $AM=\frac{3}{4}a$.

Đặt $NC=x$, áp dụng định lí Pythagore cho tam giác vuông MDN, ta có

$$MN^2=MD^2+DN^2$$

$$\Leftrightarrow (AM+NC)^2=MD^2+(DC-NC)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}a+x\right)^2=\frac{a^2}{16}+(a-x)^2 \Leftrightarrow x=\frac{a}{7}.$$

Suy ra $S_{BMN}=\frac{1}{2}a\left(\frac{3}{4}a+\frac{a}{7}\right)=\frac{25}{56}a^2$. ☐

Nhận xét. 1) Bạn *Tạ Đức Thành*, 9A$_3$, Lâm Thao, **Phú Thọ** đã có nhận xét tốt : "Nếu thay tỉ số $\frac{AM}{MD}=3$

trong đề bài thành $\dfrac{AM}{MD}=k$ thì với cách giải hoàn toàn tương tự, kết quả sẽ là $S_{BMN}=\dfrac{k^2+(k+1)^2}{2(k+1)(2k+1)}a^2$ ".

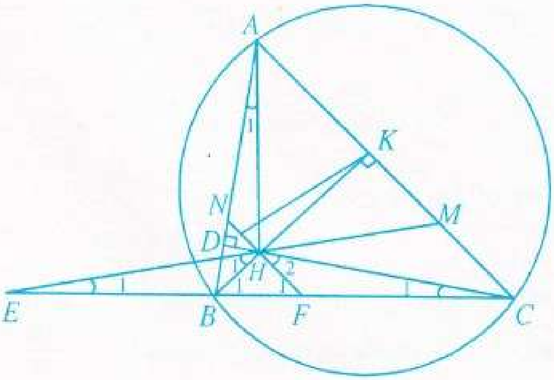
2) Có rất nhiều bạn tham gia giải bài toán trên và đưa ra nhiều cách giải khác nhau. Ngoài bạn *Thành*, các bạn sau đây có lời giải tốt hơn cả :

Thái Nguyên : *Đào Hoàng Tùng*, 8A$_3$, THCS Chu Văn An, TP. Thái Nguyên; **Phú Thọ:** *Nguyễn Ngọc Trung*, 9A$_1$, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Vĩnh Phúc**: *Mạc Thị Thu Huệ*, 7A, THCS Đồng Quế, Lập Thạch; **Hà Tây:** *Trần Thị Quỳnh Châu*, 8B, *Nguyễn Thị Hà Mi*, 8C, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa; **Hải Dương**: *Trần Thị Mận*, 4A$_1$, TH Nghĩa An, Ninh Giang; **Hải Phòng**: *Lê Mạnh Thắng*, 8C$_9$, THCS Chu Văn An, Ngô Quyền; **Thanh Hóa**: *Hoàng Kiên An*, 9E, THCS Bắc Sơn, *Trần Văn Sáng*, 9C, *Trịnh Quang Dũng*, 8A, *Đinh Uýt Này*, 6B, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc; **Nghệ An** : *Trần Viết Thành*, 9A$_2$,THCS Trà Lân, huyện Con Cuông; *Cao Thị Thanh Hoa*, 9C, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; *Vũ Đình Long*, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh**: *Lê Hà Đặng Hùng*, THCS Bình An, Can Lộc; **Phú Yên**: *Phan Long Tri Yên*, 8H, THCS Hùng Vương, Tp Tuy Hòa; **Vĩnh Long**: *Mai Duy*, 9^1, THCS Trung Hiếu, Vũng Liêm.

PHAN THỊ MINH NGUYỆT

★Bài T7/354. *Cho BC là dây cung cố định (không là đường kính) của đường tròn. Trên cung lớn BC lấy một điểm A bất kì không trùng với B và C. Gọi H là trực tâm tam giác ABC. Giao điểm thứ hai của đường thẳng BC với các đường tròn ngoại tiếp tam giác ABH và ACH lần lượt là E và F. EH cắt cạnh AC tại M, FH cắt cạnh AB tại N. Hãy xác định vị trí điểm A sao cho độ dài đoạn MN là ngắn nhất.*

Lời giải. Giả sử $AB \le AC$ (trường hợp ngược lại xét tương tự).



Khi đó B nằm trên đoạn EC, F nằm trên đoạn BC. Ta có $\widehat{E_1}=\widehat{A_1}=\widehat{C_1}$ (tính chất góc nội tiếp và tính chất góc có cạnh tương ứng vuông góc). Tương tự $\widehat{F_1}=\widehat{B_1}$. Suy ra $\widehat{H_1}=\widehat{H_2}$.

Gọi BK, CD là các đường cao của ΔABC. Ta có $\widehat{DHN}=\widehat{H_2}=\widehat{H_1}=\widehat{MHK}$. Từ đó $\Delta DHN \backsim \Delta KHM$.

Nên $\dfrac{HD}{HK}=\dfrac{HN}{HM}$. Do đó $\Delta DHK \backsim \Delta NHM$ hay $MN=\dfrac{HN}{HD}.DK$. Vậy $MN \ge DK$ (1).

Đặt $\widehat{BAC}=\alpha$ (không đổi). Ta có $\Delta ADK \backsim \Delta ACB$ suy ra $DK = BC.\dfrac{AK}{AB} = BC.\cos\alpha$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $MN \ge BC.\cos\alpha$. Mà $BC.\cos\alpha$ không đổi nên MN ngắn nhất khi dấu đẳng thức xảy ra. Khi đó $MN = BC.\cos\alpha = DK$ (vì $\dfrac{DK}{BC}=\dfrac{AK}{AB}$ do $\Delta ADK \backsim \Delta ACB$) hay $N \equiv D$, $M \equiv K$ tức A là điểm chính giữa cung BC. ❒

Nhận xét. Các bạn có lời giải đúng và gọn :

Phú Thọ: *Nguyễn Ngọc Trung*, 9A1, *Tạ Đức Thành*, 9A3, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Hoàng Hải*, 10A1, THPT chuyên; **Thanh Hóa:** *Lê Nhật Minh*, 9E, THCS Chu Văn An; **Nghệ An:** *Tăng Văn Bình*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **TP. Hồ Chí Minh:** *Bùi Trần Long*, 9A5, THPT Chu Văn An, Q.1.

BÍNH NAM HÀ

★Bài T8/354. *Có bao nhiêu số tự nhiên có 9 chữ số, trong đó có 3 chữ số lẻ khác nhau và 3 chữ số chẵn khác nhau mà mỗi chữ số chẵn có mặt đúng hai lần?*

Lời giải. (Theo bạn *Võ Xuân Quang*, 12 Toán, THPT chuyên Lê Khiết, **Quảng Ngãi** và bạn *Đào Phúc Quang Trị*, 10T, THPT chuyên Thăng Long, **Lâm Đồng**).

i) Trước hết ta tính các số thỏa mãn điều kiện đầu bài, kể cả số có chữ số 0 đứng đầu. Kí hiệu số đó là A.

Có C_5^3 cách chọn 3 chữ số lẻ và có C_5^3 cách chọn 3 chữ số chẵn. Với 3 số lẻ đã chọn và 3 số chẵn đã chọn số các số có 9 chữ số mà có mặt

3 chữ số lẻ và 3 chữ số chẵn trên, mỗi chữ số chẵn có mặt đúng hai lần là $\frac{9!}{2!2!2!}$. Vậy theo quy tắc nhân ta có

$$A = C_5^3.C_5^3.\frac{9!}{2!2!2!} = 4536000.$$

ii) Tiếp theo ta tính số các số thỏa mãn điều kiện đầu bài mà có chữ cố 0 đứng đầu: Nó bằng số các số có 8 chữ số trong đó có 3 chữ số lẻ khác nhau, có 1 chữ số 0 và 2 chữ số chẵn khác 0, mỗi chữ số này lặp lại hai lần. Gọi số đó là B. Có C_5^3 cách chọn 3 chữ số lẻ và có C_4^2 cách chọn 2 chữ số chẵn khác 0.

Với 3 chữ số lẻ, 2 chữ số chẵn đã chọn có $\frac{8!}{2!2!}$ số có 8 chữ số có tính chất đã nêu. Vậy theo quy tắc nhân $B = C_5^3.C_4^2.\frac{8!}{2!2!} = 604800.$

Vậy số các số thỏa mãn đề bài là $A - B = 4536000 - 604800 = 3931200.$ □

Nhận xét. 1) Có thể giải bài toán bằng cách tính trực tiếp: Tính số các số không có chữ số 0 rồi cộng với số có chữ số 0.

2) Có 22 bạn có lời giải sai.

3) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Yên Bái: *Nguyễn Duy Cương*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Nghệ An:** *Nguyễn Đức Công*, 10A1, THPT Đô Lương I, *Hoàng Minh Thắng*, 11A1, THPT Phan Bội Châu; **Bình Định:** *Võ Xuân Thanh*, 12A, THPT Tuy Phước; **Đà Nẵng:** *Nguyễn Như Đức Trung*, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Kiên Giang:** *Trần Minh Hải*, 11 Toán, THPT chuyên Kiên Giang.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★Bài T9/354. *Với mỗi số nguyên dương n, ta xét hàm số f_n trên $\mathbb{R}$ được xác định bởi*

$$f_n(x) = x^{2n} + x^{2n-1} + ... + x^2 + x + 1.$$

a) Chứng minh rằng hàm số f_n đạt giá trị nhỏ nhất tại một điểm duy nhất.

b) Gọi giá trị nhỏ nhất của hàm số f_n là S_n đạt tại điểm x_n. Chứng minh rằng :

i) $S_n > \frac{1}{2}$ với mọi n và không tồn tại số thực $a > \frac{1}{2}$ sao cho $S_n > a$ với mọi n.

ii) (S_n) $(n = 1, 2, ...)$ là dãy giảm và $\lim S_n = \frac{1}{2}$.

iii) $\lim x_n = -1$.

Lời giải. (Theo bạn *Nguyễn Minh Hằng*, 11A$_0$, THPT Yên Phong I, **Bắc Ninh** và đa số các bạn).

a) Nhận xét rằng $f_n(x) \ge 1$ khi $x \ge 0$ và

$$f_n(x) = \sum_{j=1}^{n-1} x^{2j-1}(1+x) + 1 \ge 1,\ \forall x \le -1.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $f_n(x)$ đạt được trong $[-1; 0]$. Khi đó, ta có

$$f_n(x) = \frac{1-x^{2n+1}}{1-x},$$

$$f'_n(x) = \frac{2nx^{2n+1} - (2n+1)x^{2n} + 1}{(1-x)^2}.$$

Xét hàm số $g_n(x) := 2nx^{2n+1} - (2n+1)x^{2n} + 1$ trong $[-1; 0]$. Ta có $g_n(0) = 1$, $g_n(-1) = -4n < 0$,

$$g'_n(x) = 2n(2n+1)x^{2n-1}(x-1) \ge 0,\ x \in [-1; 0].$$

Vậy phương trình $g_n(x) = 0$ có đúng một nghiệm x_n trong $[-1; 0]$. Từ đó suy ra $f'_n(x) \le 0$ với $-1 \le x \le x_n$ và $f'_n(x) \ge 0$ với $x_n \le x \le 0$. Do đó hàm số $f_n(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$ tại một điểm duy nhất $x_n \in [-1; 0]$.

b) i) Vì $-1 \le x_n \le -\frac{1}{2}$ nên

$$S_n = f_n(x_n) = \frac{1-x_n^{2n+1}}{1-x_n} > \frac{1}{1-x_n} \ge \frac{1}{2}.$$

Giả sử tồn tại số a $\left(a > \frac{1}{2}\right)$ sao cho $S_n > a$ với mọi $n \ge 1$. Khi đó

$$f_n(x) = \frac{1-x^{2n+1}}{1-x} > a,\ \forall x \in (-1\ ;\ 0],\ n \ge 1.$$

Chuyển qua giới hạn khi $n \to \infty$, ta thu được

$$\frac{1}{1-x} > a,\ \forall x \in [-1\ ;\ 0].$$

Khi $x \to -1$ ta nhận được điều mâu thuẫn với giả thiết.

ii) Với $x \in [-1\,;\,0]$ thì

$$f_{n+1}(x) = x^{2n+2} + x^{2n+1} + f_n(x) \le f_n(x).$$

Do đó $S_{n+1} = f_{n+1}(x_{n+1}) \le f_{n+1}(x_n) \le f_n(x_n) = S_n$, tức (S_n) ($n = 1, 2, ...$) là một dãy giảm. Do dãy bị chặn dưới bởi $\frac{1}{2}$ nên tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ và $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \ge \frac{1}{2}$. Do dãy (S_n) giảm nên $S_n \ge S$ với mọi $n \ge 1$. Theo kết quả của phần i) ở trên thì $S \le \frac{1}{2}$.

Từ đó suy ra $S = \frac{1}{2}$.

iii) Sử dụng đẳng thức $f_{n+1}(x) = f_n(x)x^2 + x + 1$, ta thu được

$$S_{n+1} = f_{n+1}(x_{n+1}) = f_n(x_{n+1})x_{n+1}^2 + x_{n+1} + 1 \qquad (1)$$

Do $f_n(x_{n+1}) \ge f_n(x_n) = S_n > \frac{1}{2}$, nên từ (1) suy ra

$$S_{n+1} > \frac{1}{2}x_{n+1}^2 + x_{n+1} + 1 = \frac{1}{2}(x_{n+1}+1)^2 + \frac{1}{2},$$

hay $S_{n+1} - \frac{1}{2} > \frac{1}{2}x_{n+1}^2 + x_{n+1} \ge 0$, $\forall n \ge 1$.

Chuyển qua giới hạn $n \to \infty$, ta thu được đpcm. ❒

Nhận xét. Các bạn có lời giải tốt:

Hải Dương: *Nguyễn Văn Trung*, 11K, THPT Kim Thành; **Thanh Hóa:** *Trịnh Quang Thanh*, 10T, THPT Lam Sơn; **Bình Định:** *Võ Xuân Thanh*, 12A6, THPT số 2 Tuy Phước.

NGUYỄN VĂN MẬU

★Bài T10/354. *Cho*

$$A = \sqrt{x^2 + \sqrt{4x^2 + \sqrt{16x^2 + \sqrt{100x^2 + 39x + \sqrt{3}}}}}.$$

Hãy tìm số nguyên lớn nhất không vượt quá A khi x = 20062007.

Lời giải. Với số thực $x > 0$ ta có

$$A < \sqrt{x^2 + \sqrt{4x^2 + \sqrt{16x^2 + \sqrt{100x^2 + 40x + 4}}}}$$

$$= \sqrt{x^2 + \sqrt{4x^2 + \sqrt{16x^2 + 10x + 2}}}$$

$$< \sqrt{x^2 + \sqrt{4x^2 + \sqrt{16x^2 + 16x + 4}}}$$

$$= \sqrt{x^2 + \sqrt{4x^2 + 4x + 2}} < \sqrt{x^2 + 4x + 4} = x + 2$$

và $A > \sqrt{x^2 + \sqrt{4x^2 + \sqrt{16x^2 + \sqrt{64x^2 + 16x + 1}}}}$

$$= \sqrt{x^2 + \sqrt{4x^2 + \sqrt{16x^2 + 8x + 1}}}$$

$$= \sqrt{x^2 + \sqrt{4x^2 + 4x + 1}} = \sqrt{x^2 + 2x + 1} = x + 1.$$

Như vậy với mọi số thực $x > 0$ thì

$$x + 1 < A < x + 2.$$

Nói riêng với $x = 20062007$ thì

$$20062008 < A < 20062009.$$

Khi đó số nguyên lớn nhất không vượt quá A (tức là phần nguyên của số A, kí hiệu là $[A]$) bằng 20062008. ❒

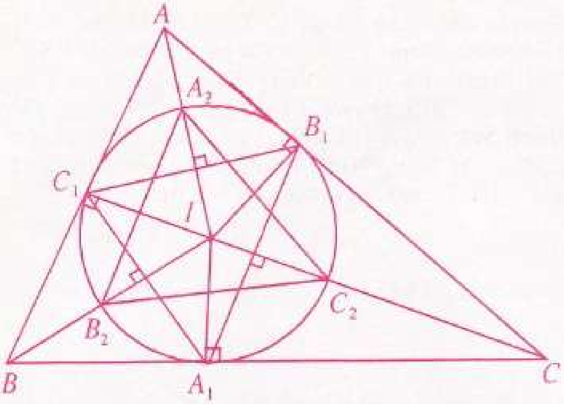
Nhận xét. Để giải bài toán trên ta chỉ cần vận dụng một số đánh giá (bất đẳng thức) đơn giản. Tất cả các bạn tham gia giải bài đều giải đúng và giải theo cách trên. Hoan nghênh các bạn lớp 7, lớp 8 sau có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Nguyễn Thị Ngọc*, 8A1, THCS Yên Lạc; **Hải Dương:** *Mạc Đức Huy*, 8C, THCS Phạm Sư Mạnh, Kinh Môn; **Hà Tĩnh:** *Lê Hà Đặng Hùng*, 8G, THCS Bình An, Can Lộc; **Quảng Bình:** *Võ Thành Văn*, 7B, THCS Quách Xuân Kỳ, Bố Trạch; **Phú Yên:** *Phạm Quang Thịnh*, 8H, THCS Hùng Vương, TP. Tuy Hòa; **Đăk Lăk:** *Trương Thành Công*, 8A, THCS Nguyễn Khuyến, Eakar; **Quảng Ngãi:** *Tống Thị Thanh Hà*, 8E, *Phan Nữ Như Huyền*, 8D, *Nguyễn Thị Trang*, 8H, THCS Hành Phước, *Võ Quang Viễn*, 8A, THCS Hành Trung, Nghĩa Hành.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★Bài T11/354. *Cho tam giác ABC với các cạnh BC = a, CA = b, AB = c và đường tròn tâm I bán kính r nội tiếp tam giác. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là tiếp điểm của đường tròn (I) với các cạnh BC, CA, AB. Các tia IA, IB, IC cắt đường tròn (I) tại A_2, B_2, C_2 theo thứ tự. Đặt $B_iC_i = a_i$, $C_iA_i = b_i$, $A_iB_i = c_i$ (i = 1, 2). Chứng minh rằng $\dfrac{a_2^3b_2^3c_2^3}{a_1^2b_1^2c_1^2} \ge \dfrac{216r^6}{abc}$. Đẳng thức xảy ra khi nào ?*

Lời giải. (Theo bạn *Nguyễn Ngọc Trung*, 9A1, THCS Lâm Thao, **Phú Thọ**).



Gọi A, B, C là số đo của các góc $\widehat{BAC}$, $\widehat{CBA}$, $\widehat{ACB}$; A_1, B_1, C_1 là số đo các góc $\widehat{B_1A_1C_1}$, $\widehat{C_1B_1A_1}$, $\widehat{A_1C_1B_1}$; A_2, B_2, C_2 là số đo các góc $\widehat{B_2A_2C_2}$, $\widehat{C_2B_2A_2}$, $\widehat{A_2C_2B_2}$. Gọi p, S lần lượt là nửa chu vi và diện tích của tam giác ABC.

Dễ thấy $A_2 = \dfrac{B_1+C_1}{2}$; $B_2 = \dfrac{C_1+A_1}{2}$; $C_2 = \dfrac{A_1+B_1}{2}$.

Suy ra $a_2b_2c_2 = 8r^3\sin A_2\sin B_2\sin C_2$

$= 8r^3\sin\dfrac{B_1+C_1}{2}\sin\dfrac{C_1+A_1}{2}\sin\dfrac{A_1+B_1}{2}$

$\geq r^3(\sin B_1+\sin C_1)(\sin C_1+\sin A_1)(\sin A_1+\sin B_1)$

$\geq r^3.2\sqrt{\sin B_1\sin C_1}.2\sqrt{\sin C_1\sin A_1}.2\sqrt{\sin A_1\sin B_1}$

$= 8r^3\sin A_1\sin B_1\sin C_1 = a_1b_1c_1$. Suy ra

$\dfrac{a_2^3b_2^3c_2^3}{a_1^2b_1^2c_1^2} \geq a_1b_1c_1 = 8r^3\sin A_1\sin B_1\sin C_1$.

Từ đó với chú ý rằng

$A_1 = \dfrac{B+C}{2}$; $B_1 = \dfrac{C+A}{2}$; $C_1 = \dfrac{A+B}{2}$, ta có

$\dfrac{a_2^3b_2^3c_2^3}{a_1b_1c_1} \geq 8r^3\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

$= 8r^3\sqrt{\dfrac{p(p-a)}{bc}}.\sqrt{\dfrac{p(p-b)}{ca}}.\sqrt{\dfrac{p(p-c)}{ab}}$

$= \dfrac{8r^3}{abc}pS = \dfrac{8r^4}{abc}.p^2$.

Từ đó với chú ý rằng $p \geq 3\sqrt{3}r$, ta có

$$\frac{a_2^3b_2^3c_2^3}{a_1b_1c_1} \geq \frac{216r^6}{abc}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều. ❒

Nhận xét. 1) Bài toán này có rất nhiều bạn tham gia giải, đa số đều giải đúng. Tuy nhiên, một số bạn giải quá dài.

2) Xin nêu tên một số bạn có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Nguyễn Huy Hoàng*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hòa Bình:** *Vũ Việt Dũng*, 12T, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ; **Hà Nam:** *Trương Phước Đại*, 10A1, THPT chuyên Hà Nam; **Hải Dương:** *Đỗ Thị Thu Thảo*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Trãi, TP. Hải Dương; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Minh Anh*, 10T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** *Nguyễn Đức Công*, 10A1, THPT Đô Lương 1, Đô Lương; **Quảng Ngãi:** *Võ Văn Cửu*, 10T, THPT chuyên Lê Khiết; **Bình Định:** *Trần Quốc Thuận*, 10T, THPT Lê Quý Đôn; **Vĩnh Long:** *Chương Công Danh*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **TP. Hồ Chí Minh:** *Lê Minh Triết*, 11CT, THPT Lê Hồng Phong.

NGUYỄN MINH HÀ

★Bài T12/354. *Cho tứ diện OABC có $\widehat{AOB} + \widehat{BOC} + \widehat{COA} = 180^o$. Gọi OA_1, OB_1, OC_1 theo thứ tự là đường phân giác trong của các tam giác OBC, OCA, OAB. Gọi OA_2, OB_2, OC_2 theo thứ tự là đường phân giác trong của các tam giác OAA_1, OBB_1, OCC_1. Chứng minh rằng*

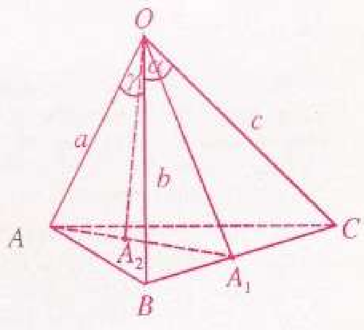
$$\left(\frac{AA_1}{A_2A_1}\right)^2 + \left(\frac{BB_1}{B_2B_1}\right)^2 + \left(\frac{CC_1}{C_2C_1}\right)^2 \geq \left(2+\sqrt{3}\right)^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. (*Theo nhiều bạn*).

Đặt $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $\widehat{BOC} = \alpha$, $\widehat{COA} = \beta$, $\widehat{AOB} = \gamma$.

Ta có $\alpha+\beta+\gamma = 180^o$.



Theo tính chất đường phân giác trong tam giác OAA_1 ta thấy

$\dfrac{AA_2}{A_2A_1} = \dfrac{OA}{OA_1} = \dfrac{a}{OA_1}$, suy ra

$\dfrac{AA_1}{A_2A_1} = 1 + \dfrac{AA_2}{A_2A_1} = 1 + \dfrac{a}{OA_1}$.

Tương tự có $\dfrac{BB_1}{B_2B_1} = 1 + \dfrac{b}{OB_1}$; $\dfrac{CC_1}{C_2C_1} = 1 + \dfrac{c}{OC_1}$.

Đặt vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh là P thì theo BĐT Bunhiacovski:

$$P=\left(1+\frac{a}{OA_1}\right)^2+\left(1+\frac{b}{OB_1}\right)^2+\left(1+\frac{c}{OC_1}\right)^2$$
$$\geq\frac{1}{3}.\left(3+\frac{a}{OA_1}+\frac{b}{OB_1}+\frac{c}{OC_1}\right)^2 \quad (1)$$

Mặt khác, áp dụng BĐT Cauchy ta có

$$\frac{a}{OA_1}+\frac{b}{OB_1}+\frac{c}{OC_1}\geq 3\sqrt[3]{\frac{abc}{OA_1.OB_1.OC_1}} \quad (2)$$

Sử dụng công thức tính độ dài đường phân giác trong của tam giác, ta thu được

$$OA_1.OB_1.OC_1=\frac{8a^2b^2c^2.\cos\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{\beta}{2}.\cos\frac{\gamma}{2}}{(a+b)(b+c)(c+a)} \quad (3)$$

Do $(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc$ và

$\cos\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{\beta}{2}.\cos\frac{\gamma}{2}\leq\frac{3\sqrt{3}}{8}$, nên từ (3) suy ra

$$\frac{abc}{OA_1.OB_1.OC_1}\geq\frac{8}{3\sqrt{3}} \quad (4)$$

Từ (1), (2) và (4) ta nhận được

$$P\geq\frac{1}{3}\left(3+3\sqrt[3]{\frac{8}{3\sqrt{3}}}\right)^2=(2+\sqrt{3})^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$\begin{cases}a=b=c\\ \alpha=\beta=\gamma=60^\circ\end{cases}$ hay $OABC$ là tứ diện đều. ❐

Nhận xét. Tất cả các lời giải gửi đến Tòa soạn đều đúng. Hầu hết các bạn đều sử dụng công thức đường phân giác trong tam giác và các BĐT cổ điển như Cauchy, Bunhiacovski để đánh giá kết quả ở đề bài. Sau đây là những bạn trình bày lời giải gọn hơn cả:

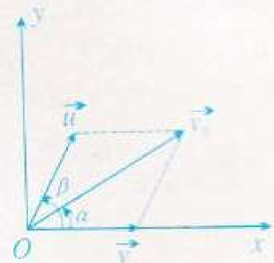
Vĩnh Phúc: *Nguyễn Hoàng Hải*, 10A1; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Minh Hằng*, $11A_0$, THPT Yên Phong I, Yên Phong; **Hà Nội:** *Trịnh Ngọc Dương*, 11A1 Toán, Khối PTCT, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội, *Nguyễn Tiến Sáng*, 11A2, Khối THPT chuyên, ĐHSP Hà Nội;

Hòa Bình: *Phạm Quỳnh Mai*, 11 Toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ; **Nam Định:** *Nguyễn Quốc Đại*, 11CT, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Nam Định;

Hải Dương: *Đỗ Đức Tài*, $11T_1$, THPT chuyên Nguyễn Trãi, TP. Hải Dương; **Hải Phòng:** *Lý Trần Đức Anh, Trần Hoàng Bá*, 11T, THPTNK Trần Phú; **Thanh Hóa:** *Trịnh Quang Thanh, Nguyễn Cao Tuấn*, 10T, THPT chuyên Lam Sơn, TP. Thanh Hóa; **Nghệ An:** *Hoàng Minh Thắng, Lưu Văn Trung*, $11A_1$, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Thị Hạnh Dung*, 12 Toán, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Bình Định:** *Võ Xuân Thanh*, 12A6, THPT Số 2, Tuy Phước; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** *Đinh Ngọc Thái*, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu; **Đồng Nai:** *Trần Thị Huyền*, 11 Toán 1, THPT chuyên Lương Thế Vinh; **Vĩnh Long:** *Chương Công Danh*, $11T_1$, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

HỒ QUANG VINH

★Bài L1/354. *Một người đang chạy với vận tốc $\vec{v}$ trên mặt đất, ném một hòn đá với vận tốc ban đầu $\vec{u}$ so với người đó. Biết $u = v$, hãy tìm góc β hợp bởi vectơ $\vec{u}$ với phương ngang để tầm ném xa theo phương ngang của hòn đá là lớn nhất. Bỏ qua sức cản không khí và chiều cao người.*



Lời giải. Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ. Gọi $\vec{v}_0$ là vận tốc ban đầu của hòn đá so với mặt đất, α là góc hợp bởi $\vec{v}_0$ với mặt đất. Tầm xa của hòn đá theo phương ngang là $x_0=\frac{v_0^2.\sin2\alpha}{g}$.

Ta có $\vec{v}_0=\vec{v}+\vec{u}$. Theo định lí sin:

$$\frac{v_0}{\sin\beta}=\frac{v}{\sin(\beta-\alpha)}=\frac{u}{\sin\alpha}.$$

Vì $v = u$ nên $\beta = 2\alpha$, suy ra $v_0 = 2v.\cos\alpha$.

Do vậy $x_0=\frac{8v^2}{g}.\cos^3\alpha.\sin\alpha$ (1)

Theo BĐT Cauchy, ta lại có

$$1=\frac{1}{3}\cos^2\alpha+\frac{1}{3}\cos^2\alpha+\frac{1}{3}\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$$
$$\geq 4\sqrt[4]{\frac{1}{27}.\cos^6\alpha.\sin^2\alpha}$$
$$\Rightarrow \cos^3\alpha.\sin\alpha\leq\frac{3\sqrt{3}}{16} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $x_0\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}.\frac{v^2}{g}$.

Vậy $x_{0\max}=\frac{3\sqrt{3}}{2}.\frac{v^2}{g}$ đạt được $\Leftrightarrow\frac{1}{3}\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$

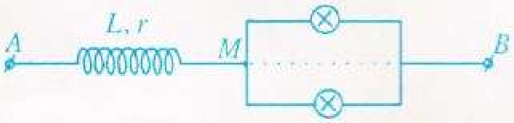
$\Leftrightarrow \tan\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\alpha=60^\circ$ dẫn đến $\beta=60^\circ$. ❐

Nhận xét. Rất nhiều bạn tham gia giải và hầu hết đều giải đúng. Sau đây là một số bạn có lời giải ngắn gọn và trình bày sáng sủa:

Vĩnh Phúc: *Đỗ Trung Quân*, 10A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Nội:** *Nguyễn Thế Anh*, 11 Tin, khối THPT chuyên, ĐHSP Hà Nội; **Hà Tây:** *Nguyễn Ngọc Đăng*, 11A1, THPT Phú Xuyên A, *Đỗ Mạnh Cường*, 11A1, THPT Phùng Khắc Khoan, Thạch Thất; **Hải Phòng:** *Trần Hoàng Bá*, 11 Toán, THPT NK Trần Phú, TP. Hải Phòng; **Nghệ An:** *Đậu Thị Kiều Oanh*, 10A1, THPT Nguyễn Xuân Ôn, Diễn Châu, *Lê Văn Thắng*, 11A1, THPT Quỳnh Lưu 3, *Nguyễn Đức Công*, 10A1, THPT Đô Lương I; **Quảng Ngãi:** *Võ Xuân Quang*, 12 Toán, THPT chuyên Lê Khiết; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** *Nguyễn Long*, 12A7, THPT Trần Phú, Châu Đốc, *Đinh Ngọc Thái*, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu.

NGUYỄN XUÂN QUANG

★Bài L2/354. *Cho mạch điện như hình vẽ.*



Đặt vào A, B một hiệu điện thế xoay chiều có giá trị hiệu dụng U = 220V và tần số f = 50Hz. Giữa M và B có thể mắc vào các bóng đèn giống nhau ghi 110V–55W. Khi mắc vào giữa M và B hai bóng đèn thì các đèn sáng bình thường và công suất tiêu thụ trên toàn mạch là P = 180W. Hỏi có thể mắc vào giữa M và B bao nhiêu bóng đèn để công suất tiêu thụ trên toàn mạch là lớn nhất ?(Coi rằng điện trở các bóng đèn khi hoạt động có giá trị không đổi).

Lời giải. Cường độ dòng điện định mức và điện trở của đèn là

$$I_đ=\frac{P_đ}{U_đ}=\frac{55}{110}=0,5\,(A)\ ;\ R_đ=\frac{U_đ^2}{P_đ}=\frac{110^2}{55}=220(\Omega).$$

Khi hai đèn sáng bình thường, cường độ dòng điện và công suất điện tiêu thụ trên cuộn dây là: $I=2I_đ=1$ A; $P_d=P-2P_đ=180-2.55=70$ (W).

Điện trở thuần r và cảm kháng Z_L của cuộn dây là: $r=\frac{P_d}{I^2}=70(\Omega)$

$$Z=\frac{U}{I}=\sqrt{\left(\frac{R_đ}{2}+r\right)^2+Z_L^2}=220(\Omega).$$

Suy ra $Z_L=\sqrt{Z^2-\left(\frac{R_đ}{2}+r\right)^2}=40\sqrt{10}\,(\Omega)$.

Gọi n là số bóng đèn mắc vào giữa M và B (với $n\in\mathbb{N}$). Công suất điện tiêu thụ trên toàn mạch là

$$P_n=I^2\left(\frac{R_đ}{n}+r\right)=\frac{U^2\left(\frac{R_đ}{n}+r\right)}{\left(\frac{R_đ}{n}+r\right)^2+Z_L^2}$$

$$=\frac{U^2}{\left(\frac{R_đ}{n}+r\right)+\frac{Z_L^2}{\left(\frac{R_đ}{n}+r\right)}}.$$

Theo hệ quả của bất đẳng thức Cauchy, P đạt cực đại khi $Z_L=\frac{R_đ}{n}+r$, từ đây ta có

$$\frac{220}{n}=40\sqrt{10}-70\ \Rightarrow n\approx3,89.$$

Do $n\in\mathbb{N}$ nên $n=3$ hoặc $n=4$.

Nếu $n=3$ thì $P_3\approx189,8$ W.

Nếu $n=4$ thì $P_4\approx191,3$ W.

Kết quả cho thấy $P_4>P_3$. Vậy khi mắc vào giữa M và B bốn bóng đèn thì công suất điện tiêu thụ trên toàn mạch là lớn nhất. □

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Nghệ An: *Trần Văn Giai*, A3K34, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Tiền Giang**: *Trương Mai Thanh Tâm*, 11 Lí, THPT chuyên Tiền Giang; **Thanh Hoá:** *Lê Hồng Minh*, 11K1, THPT Triệu Sơn IV; **Hà Tĩnh**: *Võ Tá Sơn*, 12A1, THPT Trần Phú, *Nguyễn Thanh Long*, 12A10, THPT Nguyễn Huệ; **Vĩnh Phúc**: *Hoàng Mạnh Thắng*, 11A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Bắc Ninh**: *Trần Việt Long*, 11 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh; **Hưng Yên**: *Phạm Đức Linh*, 11 Lí, THPT chuyên Hưng Yên; **Ninh Bình**: *Mai Trọng Phúc*, 11A9, THPT Yên Mô A; **Thái Bình**: *Nguyễn Văn Thành*, 12A1, THPT Nam Tiền Hải, *Vũ Quang Hiệu*, 11A4, THPT Quỳnh Côi, Quỳnh Phụ.

NGUYỄN VĂN THUẬN

Giải bài *CHÀO IMO 2007* - Đợt 2

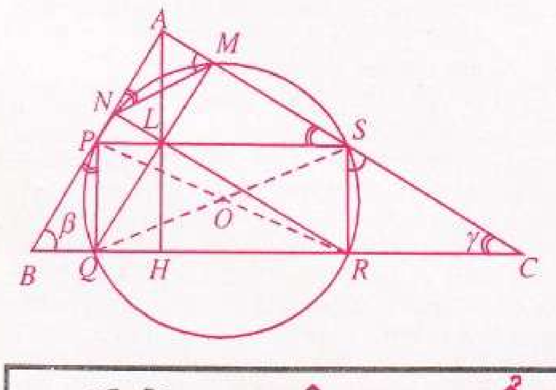
★**Bài I–6.** *Cho tam giác ABC vuông ở A. Hãy tìm tất cả các bộ sáu điểm phân biệt (M, N, P, Q, R, S) thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:*

1) N, P nằm trên cạnh AB; Q, R nằm trên cạnh BC; S, M nằm trên cạnh CA;

2) MN = PQ = RS;

3) Lục giác MNPQRS là một lục giác lồi nội tiếp và có ba đường chéo chính MQ, NR, PS đồng quy.

Lời giải. a) Giả sử ta đã tìm được một bộ sáu điểm phân biệt (M, N, P, Q, R, S) thỏa mãn tất cả các điều kiện nêu trên. Gọi L là điểm đồng quy của MQ, NR và PS. Từ giả thiết của bài toán, dễ thấy rằng các tứ giác nội tiếp $MNPQ$, $PQRS$ và $RSMN$ đều là những *hình thang cân* có các đáy MQ, PS và RN tương ứng song song với các cạnh AB, BC và CA của tam giác ABC (vuông ở A) đã cho. Từ đó ta được: $\widehat{AMN} = \widehat{SPN} = \widehat{CSR}$ $(= \beta)$, $\widehat{ANM} = \widehat{BPQ} = \widehat{MSP}$ $(= \gamma)$, trong đó β và γ lần lượt là độ lớn các góc $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ của tam giác vuông ABC đã cho. Từ đó suy ra $PQRS$ là một hình chữ nhật. Cũng vậy, $AMLN$ là hình chữ nhật nên $AL = MN = PQ = LH$. Suy ra *L là trung điểm của đường cao AH của tam giác ABC.*



b) Đảo lại, qua trung điểm L của đường cao AH ta dựng các đường thẳng $MQ//AB$, $NR//AC$ và $PS//BC$, trong đó các cặp điểm N, P; Q, R và S, M tương ứng nằm trên các cạnh AB, BC và CA. Dễ dàng chứng minh được rằng $MNPQRS$ là một *lục giác lồi nội tiếp*, có ba đường chéo chính song song với các cạnh của tam giác ABC và đồng quy ở L, đồng thời $MN = PQ = RS$.

c) Tóm lại, *lục giác lồi MNPQRS nhận được là duy nhất, thỏa mãn đầy đủ các điều kiện đặt ra của bài toán.* ❐

Nhận xét. 1) Bài toán trên đây thuộc loại *toán dựng hình* trong mặt phẳng. Trong phần a) của lời giải chúng ta đã thực hiện *bước phân tích* (của bài toán dựng hình) để chỉ ra *tính chất của hình* (cụ thể là của bộ sáu điểm M, N, P, Q, R, S) phải dựng. Tính chất tìm được là: Ba đoạn thẳng MQ, NR và PS nối ba cặp điểm phải tìm song song với các cạnh của tam giác ABC và đồng quy ở trung điểm L của đường cao AH. Phần b) chỉ *cách dựng hình phải tìm* (đó là bộ sáu điểm) sau đó *chứng minh hình dựng được là hình cần tìm*. Phần c) cuối cùng là *phần biện luận*: bài toán có nghiệm duy nhất.

2) Số bạn tham gia giải bài toán này không nhiều. Nhiều bạn trình bày lời giải còn thiếu chặt chẽ. Cụ thể là đa số chỉ thực hiện phần phân tích sau đó đã vội vã kết luận bài toán có nghiệm duy nhất! Một số bạn không trình bày cách dựng hoặc có chứng minh đảo nhưng lại không kết luận về số nghiệm của bài toán.

3) Các bạn sau đây có lời giải tốt hơn cả (trình bày chặt chẽ và đầy đủ các bước của bài toán dựng hình):

Phú Thọ: *Nguyễn Ngọc Trung*, 9A1, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Hà Nội:** *Đỗ Văn Đức*, 10A$_2$ Toán, *Đinh Hoàng Long*, 10A$_1$ khối PTCT, ĐHKHTN ĐHQG Hà Nội; **Thái Bình:** *Nguyễn Tiến Hưởng*, 10A$_1$, THPT Quỳnh Côi, Quỳnh Phụ; **Phú Yên:** *Phạm Quang Thịnh*, 8H, THCS Hùng Vương, Tuy Hòa.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

★**Bài I–7.** *Cho k là một số thực thuộc khoảng (– 1; 2) và cho a, b, c là ba số thực đôi một khác nhau. Chứng minh rằng ta có bất đẳng thức sau:*

$$\left(a^2+b^2+c^2+k(ab+bc+ca)\right)\times$$
$$\times\left(\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\right)\geq\frac{9(2-k)}{4}.$$

Hỏi đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi nào ?

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức

$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\geq\frac{8}{(x+y)^2}$ $(x\neq 0, y\neq 0)$, ta thấy

$$\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}$$
$$\geq\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{8}{((b-c)+(c-a))^2}=\frac{9}{(a-b)^2}\quad(1)$$

Chúng ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức

$$a^2+b^2+c^2+k(ab+bc+ca)\geq\frac{(2-k)(a-b)^2}{4}.$$

Hay $(k+2)(a+b)^2+4kc(a+b)+4c^2\geq 0$ (2)

Xét tam thức bậc hai, ẩn là $(a+b)$:

$f(a+b)=(k+2)(a+b)^2+4kc(a+b)+4c^2$,

ta có biệt thức

$\Delta'=4k^2c^2-4c^2(k+2)=4(k-2)(k+1)c^2$.

Theo giả thiết $k\in(-1\ ;\ 2)$, suy ra $\Delta'\leq 0$. Kết hợp với $k+2>0$, ta đi đến $f(a+b)\geq 0$, với mọi $k\in(-1\ ;\ 2)$. Nghĩa là bất đẳng thức (2) được chứng minh.

Từ (1) và (2) ta thấy bất đẳng thức ở đầu bài được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi trong ba số a, b, c *có một số bằng* 0, *hai số còn lại khác* 0 *và đối nhau.* ❐

Nhận xét. Một số bạn sử dụng các kết quả trong bài "*Thiết lập các bất đẳng thức từ một đẳng thức có điều kiện*" trong cuốn "*Tuyển chọn theo chuyên đề Toán học và Tuổi trẻ*" Quyển 1, NXBGD, năm 2005, trang 12, cũng cho lời giải đúng. Sau đây là những bạn có lời giải tốt:

Hải Dương: *Trần Văn Hạnh*, 10A5, THPT Ninh Giang; **Hà Nội:** *Đỗ Văn Đức*, 10A2 Toán, *Nguyễn Lưu Bách*, *Trịnh Ngọc Dương*, 11A1 Toán khối PTCT, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội; **Phú Thọ:** *Nguyễn Ngọc Trung*, 9A1, THCS Lâm Thao; **TP. Hồ Chí Minh:** *Võ Văn Tuấn*, 10 Toán, PTNK - ĐHQG TP. Hồ Chí Minh.

HỒ QUANG VINH

★**Bài I–8.** *Hỏi có tồn tại hay không số nguyên dương a sao cho trong dãy số (a_n), xác định bởi $a_n=n^3+a^3$, với mọi $n=1, 2, 3, \ldots$, thì bất kì hai số hạng liên tiếp nào cũng là hai số nguyên tố cùng nhau ?*

Lời giải. Giả sử tồn tại số nguyên dương a thỏa mãn điều kiện bài toán. Xét $n=3a^2+2a$, ta có:

$*\ a_{n+1}=a^3+(n+1)^3$

$=(a+n+1)[a^2+(n+1)^2-a(n+1)]\ \vdots\ (a+n+1)$

hay $a_{n+1}\ \vdots\ 3a^2+3a+1$ (1)

$*\ a_n=n^3+a^3=(3a^2+2a)^3+(a+1)^3-(a+1)^3+a^3$

$=[(3a^2+2a)^3+(a+1)^3]-(3a^2+3a+1)$.

Mà $[(3a^2+2a)^3+(a+1)^3]\ \vdots\ (3a^2+2a)+(a+1)$

hay $[(3a^2+2a)^3+(a+1)^3]\ \vdots\ 3a^2+3a+1$

nên $a_n\ \vdots\ 3a^2+3a+1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(a_n, a_{n+1})\geq 3a^2+3a+1>1$. Mâu thuẫn. Điều này chứng tỏ không có số nguyên dương a nào thỏa mãn điều kiện đề bài. ❐

Nhận xét. 1) Không có nhiều bạn gửi lời giải của bài này.

2) Các bạn có lời giải đúng và gọn:

Phú Thọ: *Nguyễn Ngọc Trung*, 9A1, THCS Lâm Thao; **Hòa Bình:** *Vũ Việt Dũng*, 12 Toán, THPT Hoàng Văn Thụ; **Hà Nội:** *Nguyễn Lưu Bách*, 11A1 Toán, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội; **Nghệ An:** *Hoàng Đức Hải*, 11A1, THPT Phan Bội Châu.

VŨ KIM THỦY

★**Bài I–9.** *Hỏi có tồn tại hay không số nguyên dương n sao cho ta có thể ghi lên n đỉnh $A_1, A_2, \ldots, A_n$ của n-giác lồi $A_1A_2\ldots A_n$ n số nguyên (không nhất thiết đôi một khác nhau) để các điều kiện sau được đồng thời thỏa mãn:*

1) Tổng của n số được ghi bằng 2007;

2) Với mỗi $i = 1, 2, \ldots, n$, số được ghi tại đỉnh A_i bằng giá trị tuyệt đối của hiệu hai số được ghi tại hai đỉnh A_{i+1} và A_{i+2}. (Quy ước $A_{n+1} \equiv A_1$ và $A_{n+2} \equiv A_2$) ?

Lời giải. (Theo bạn *Nguyễn Khắc Tuyền*, 10A1, THPT Hoằng Hóa 4, **Thanh Hóa** và *Nguyễn Lưu Bách*, 11A1 Toán, ĐHKHTN - ĐHQG **Hà Nội**).

Kí hiệu a_i là số ghi tại đỉnh A_i ($i = 1, 2, \ldots, n+2$) trong đó coi $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$.

Chú ý rằng với số a tùy ý thì $|a| - a$ bằng 0 hoặc bằng $-2a$, tức là $|a| \equiv a \pmod 2$, do đó

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} |a_i - a_{i+1}| \equiv \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i+1}) \pmod 2,$$

hay $\sum_{i=1}^{n} a_i \equiv 0 \pmod 2$ nhưng theo giả thiết thì $\sum_{i=1}^{n} a_i = 2007$ là số lẻ. Điều mâu thuẫn này chứng tỏ không tồn tại số nguyên dương n để n thỏa mãn yêu cầu đề bài. ❐

Nhận xét. 1) Nhiều bạn giải theo hướng sau:

$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \sum_{i=1}^{n} |a_i - a_{i+1}|^2 = 2\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+1} \equiv 0 \pmod 2$, suy ra

$\sum_{i=1}^{n} a_i(a_i - 1) + \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \equiv 0 \pmod 2$ nên $\sum_{i=1}^{n} a_i \equiv 0 \pmod 2$.

Nhưng theo giả thiết thì $\sum_{i=1}^{n} a_i = 2007$ là số lẻ. Mâu thuẫn.

2) Một số bạn còn xét số lớn nhất a trong dãy số (a_i) ($i = 1, 2, \ldots, n$) để suy ra dãy số trên được chia thành từng bộ ba số dạng $(a, a, 0)$, dẫn đến mâu thuẫn. Chú ý rằng nếu $n = 3k$ thì tồn tại dãy số (a_i) ($i = 1, 2, \ldots, 3k$) thỏa mãn yêu cầu thứ hai của đề bài và $\sum_{i=1}^{n} a_i = 2ka$, trong đó $a = \max\{a_i \mid i = 1, 2, \ldots, 3k\}$.

3) Ngoài hai bạn nêu trên, các bạn sau có lời giải đúng và gọn:

Phú Thọ: *Nguyễn Ngọc Trung*, 9A1, THCS LâmThao; **Hà Nội:** *Đỗ Văn Đức*, 10A2 Toán, PTCTT, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội; **Hòa Bình:** *Vũ Việt Dũng*, 12 Toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, TX. Hòa Bình; **Bắc Giang:** *Lê Trung Kiên*, 12 Toán, THPT chuyên Bắc Giang; **Thái Bình:** *Tô Tất Đạt*, 11A1, THPT Đông Thụy Anh, Thái Thụy, *Nguyễn Tiến Hưởng*, 10A1, THPT Quỳnh Côi, Quỳnh Phụ; **Nghệ An:** *Đặng Tuấn Anh*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; **Đắk Lắk:** *Trần Như Ngọc*, 10A4, THPT Nguyễn Bỉnh Khiêm, Krông Păk; **TP. Hồ Chí Minh:** *Võ Văn Tuấn*, 10 Toán, PTNK ĐHQG TP. Hồ Chí Minh; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** *Đinh Ngọc Thái*, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu.

VIỆT HẢI

★**Bài I–10.** *Trong mặt phẳng tọa độ, mỗi điểm có tọa độ nguyên được tô bởi một trong hai màu cho trước. Chứng minh rằng tồn tại một tập hợp gồm vô số điểm có tọa độ nguyên là một hình có tâm đối xứng và đồng thời tất cả các điểm thuộc tập hợp đó được tô bởi cùng một màu.*

Lời giải. Ta quy ước, trong phần trình bày dưới đây, khi nói tới điểm ta hiểu đó là điểm có tọa độ nguyên.

Hiển nhiên, yêu cầu chứng minh của bài toán tương đương với yêu cầu chứng minh tồn tại một phép đối xứng tâm biến vô hạn các điểm cùng màu thành chính các điểm đó. Ta sẽ chứng minh điều vừa nêu bằng phương pháp phản chứng.

Thật vậy, giả sử ngược lại, bất kì phép đối xứng tâm nào cũng làm đổi màu tất cả các điểm, có thể trừ ra một số hữu hạn điểm mà ta sẽ gọi là điểm đặc biệt.

Xét phép đối xứng $Đ_1$ tâm O_1 và phép đối xứng $Đ_2$ tâm O_2. Xét hai đường thẳng l_1 và l_2 mà $l_1 \parallel l_2$, $Đ_1(l_1) = Đ_2(l_1) = l_2$ và tất cả các điểm đặc biệt của $Đ_1$, $Đ_2$ đều nằm trong dải L giới hạn bởi l_1 và l_2. Khi đó, phép biến hình tích $Đ_1 \circ Đ_2$ là một phép tịnh tiến biến mỗi điểm nằm ngoài dải L thành điểm cùng màu với nó. Từ đó suy ra phép đối xứng tâm X, với X là một điểm tùy ý nằm ngoài dải L, sẽ biến mỗi điểm Y mà vectơ $\overrightarrow{XY} = 2k.\overrightarrow{O_1O_2}$, $k \in \mathbb{Z}$, thành điểm cùng màu với nó. Mâu thuẫn nhận được cho ta điều cần chứng minh.❐

Nhận xét. Tòa soạn nhận được Lời giải của ba bạn gửi tới. Các bạn đều có ý tưởng như ý tưởng của Lời giải trên. Tuy nhiên, do các bạn không chuyển đổi được cách phát biểu yêu cầu của bài toán nên Lời giải của các bạn đều dài và chưa chính xác.

NGUYỄN KHẮC MINH

Địa chỉ liên hệ:

Công ty Cổ phần Sách Giáo dục tại TP.HCM

240 Trần Bình Trọng, P.4, Q.5

ĐT: (08) 8.323.557 - (08) 8.352.845

Fax: (08) 8.307.141

Mã	Tên sách	Trang	Khổ sách	Giá bìa	Tác giả
8D242	30 bài luyện thi trắc nghiệm tiếng Anh - T1 (THPT)	112	14.5 x 20.5	7,400	SONG PHÚC (CB)
8D243	30 bài luyện thi trắc nghiệm tiếng Anh - T2 (THPT)	112	14.5 x 20.5	7,900	SONG PHÚC (CB)
8H863	Câu hỏi trắc nghiệm Lượng giác 12	244	14.3 x 20.3	16,000	PHAN LƯU BIÊN
8H864	Câu hỏi trắc nghiệm Đại số sơ cấp 12	328	14.3 x 20.3	21,200	PHAN LƯU BIÊN
8H865	Câu hỏi trắc nghiệm Giải tích 12	408	14.3 x 20.3	26,300	PHAN LƯU BIÊN
8H866	Câu hỏi trắc nghiệm Hình học 12	256	14.3 x 20.3	16,700	PHAN LƯU BIÊN
8H981	Bài tập trắc nghiệm Vật lí THPT	324	14.5 x 20.5	21,800	NGUYỄN MẠNH TUẤN - MAI LỄ
8I214	Bài tập trắc nghiệm ngữ pháp tiếng Anh THPT	220	17 x 24	21,000	ĐỖ TUẤN MINH - HOÀNG TUẤN
8I215	Bài tập trắc nghiệm đọc hiểu tiếng Anh THPT	200	17 x 24	26,000	ĐỖ TUẤN MINH - HOÀNG TUẤN
8I217	Trắc nghiệm kiến thức tiếng Anh THPT - T1	180	17 x 24	16,000	ĐẶNG KIM ANH - ĐỖ BÍCH HÀ
8N582	Trắc nghiệm kiến thức tiếng Anh THPT - T2	164	17 x 24	16,000	ĐẶNG KIM ANH - ĐỖ BÍCH HÀ
CHK01	Câu hỏi và bài tập trắc nghiệm Hóa học 12	180	17 x 24	19,000	NGÔ NGỌC AN
TZL13	Bài tập trắc nghiệm Vật lí 12	164	14.5 x 20.5	11,000	NGUYỄN VĂN HƯỚNG (CB)

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 358 (4-2007)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.5121607, 04.5121606
ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.5144272
Email : toanhoctt@yahoo.com

TRONG SỐ NÀY

Biên tập : HỒ QUANG VINH. *Mĩ thuật :* MINH THO. *Trị sự, Chế bản :* VŨ ANH THƯ , NGUYỄN THỊ OANH.
Đại diện phía Nam : TRẦN CHÍ HIẾU, 283 Thích Quảng Đức, Thủ Dầu Một, Bình Dương. Tel : 0650.858330

Hiệu trưởng LƯU TRÍ THIỆM

TRƯỜNG THPT CHUYÊN HƯNG YÊN
10 NĂM XÂY DỰNG VÀ PHÁT TRIỂN

Trường PTNK tỉnh Hưng Yên (nay là trường THPT chuyên Hưng Yên) được thành lập ngay sau ngày tỉnh Hưng Yên được tái lập, tháng 5 năm 1997 với nhiệm vụ phát hiện, bồi dưỡng học sinh giỏi thực hiện chiến lược đào tạo nhân tài cho tỉnh Hưng Yên và đất nước.

Thầy và trò nhà trường đã từng trải qua những giai đoạn khó khăn những năm đầu. Được sự chỉ đạo trực tiếp của Sở GD-ĐT, phát huy truyền thống hiếu học của quê hương văn hiến, trường không ngừng phát triển, đã đạt được những kết quả đáng khích lệ.

Đội ngũ giáo viên nhà trường không ngừng lớn mạnh về số lượng cũng như về chất lượng. Từ 14 cán bộ giáo viên được điều động về xây dựng trường ngày mới thành lập đến nay số cán bộ giáo viên nhà trường là 60. Các thầy, cô giáo của trường là những người có tâm huyết, giỏi chuyên môn, yêu nghề, nhiệt tình trong các công việc. Trường có trên 30 cán bộ, giáo viên là chiến sỹ thi đua, giáo viên giỏi cấp tỉnh, cấp cơ sở. Các thầy có nhiều học sinh giỏi Quốc gia như: thầy Nguyễn Ngọc Luân (môn Lí); thầy Nguyễn Thanh Giang (môn Toán); thầy Lê Công My (môn tiếng Pháp); thầy Lưu Minh Nam (môn Tin học)...

Nhiều thầy, cô giáo là giáo viên giỏi như: Thầy Phạm Văn Mài (môn Toán); thầy Nguyễn Kim Khánh (môn Lí); cô Nguyễn Thị Ngọc Anh, cô Nguyễn Thị Huệ (môn Hóa); thầy Nguyễn Xuân Giang (môn Sinh); thầy Đào Ngọc Đính (môn Sử); thầy Đào Ngọc Kháng (môn Địa); cô Nguyễn Thị Thuỷ (môn Tiếng Anh),...

Trong những năm qua học sinh của trường đã đoạt được 278 giải học sinh giỏi Quốc gia trong đó có 4 giải Nhất, 29 giải Nhì, 120 giải Ba; đã có 2023 giải học sinh giỏi cấp tỉnh với 202 giải Nhất. Hàng năm tỉ lệ học sinh xếp loại văn hoá khá, giỏi chiếm khoảng 96%, trong đó xếp loại văn hoá giỏi chiếm 70% đến 80%. Học sinh hạnh kiểm tốt chiếm tỉ lệ từ 85% đến 90%. Học sinh nhà trường hàng năm đỗ tốt nghiệp 100%; tỉ lệ học sinh tốt nghiệp loại khá, giỏi chiếm 95% đến 98% . Đến nay đã có 1847 học sinh tốt nghiệp trong đó có 1178 học sinh tốt nghiệp loại giỏi, chiếm 63,8%. Hàng năm học sinh nhà trường đỗ vào Đại học và Cao đẳng với tỉ lệ từ 80% đến 90%, có năm chiếm tỉ lệ trên 90%. Có nhiều học sinh đoạt giải cao trong các cuộc thi trên *Toán học và Tuổi trẻ*, *Vật lí và Tuổi trẻ* và các cuộc thi sáng tác văn học, tìm hiểu lịch sử trên các báo và tạp chí ở Trung ương và địa phương.

Tổ chức Đoàn TNCS Hồ Chí Minh của trường là đơn vị dẫn đầu phong trào Đoàn và công tác thanh niên khối THPT toàn tỉnh 6 năm liền (1999-2005) được TƯ Đoàn tặng cờ thi đua 2 lần liên tiếp. Hội LHTN trường được nhận bằng khen của Hội LHTN Việt Nam. Công đoàn nhà trường được nhận bằng khen của Công đoàn ngành. Trường liên tục được công nhận là trường Tiên tiến xuất sắc. Năm học 2003-2004 trường được công nhận là đơn vị dẫn đầu khối THPT toàn tỉnh và được UBND Tỉnh tặng cờ thi đua.

Trường THPT chuyên Hưng Yên đã, đang và sẽ thực sự trở thành địa chỉ tin cậy trong công tác ươm trồng và bồi dưỡng nhân tài cho tỉnh Hưng Yên và đất nước.

Thầy giáo Nguyễn Thanh Giang và học sinh đội tuyển Toán của trường đang trao đổi về một bài trong Tuyển tập 30 năm tạp chí Toán học và Tuổi trẻ.

ISSN : 0866-8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT60M7

Giấy phép XB số 67/GP-BVHTT cấp ngày 15.6.2004
In tại Công ty CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ, Hà Nội
In xong và nộp lưu chiểu tháng 4 năm 2007

Giá : 5000 đồng
Năm nghìn đồng