TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

5 2012 Số 419

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 49

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.

ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606

Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn Web: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre

Kỉ niệm ngày sinh Bác Hồ kính yêu

(19.5.1890 - 19.5.2012)

CUỘC THI ĐỐ VUI NGÀY HÈ 2012

Đợt 1

Đến hẹn lại lên, mùa Hè này Toán học và Tuổi trẻ xin mời bạn đọc trong cả nước yêu thích toán học tham gia Cuộc thi ĐỐ VUI NGÀY HÈ 2012. Cuộc thi chia làm hai đợt, đề đăng lần lượt trên các số báo 419 (tháng 5.2012) và 420 (tháng 6.2012). Đối tượng dự thi là tất cả các bạn yêu toán trên cả nước. Bạn hãy gửi lời giải ba bài đố vui Đợt 1 về Tòa soạn trước ngày 31.7.2012 (theo dấu Bưu điện) và lời giải ba bài đợt 1 sẽ đăng trong THTT số 423 (tháng 9.2012).

Bài 1. BÔNG HOA ĐIỂM 10

Trong phong trào thi đua chào mừng Ngày sinh nhật Bác Hồ, một lớp học sinh đề ra mỗi điểm 10 của một bài thi học kì II được tặng một bông hoa. Nhóm các bạn *An, Bình, Đông, Nam, Hoa* đã nhận được 27 bông hoa. Số bông hoa nhận được của mỗi bạn này là khác nhau. Hỏi có thể chọn được 3 bạn trong 5 bạn này mà có tổng số bông hoa điểm 10 không ít hơn 20 không ? Giải thích vì sao?

THANH LOAN

Bài 2. TUỔI CỦA CON TRAI NGƯỜI BẠN

Một người đến thăm bạn của mình sau một thời gian xa cách, họ hỏi han nhau về tình hình con cái. Chủ nhà trả lời câu hỏi đó của khách như sau:

- Tôi có ba con trai, cậu thử đoán xem năm nay chúng lên mấy, biết tuổi của chúng nhân với nhau thì bằng tuổi của tôi, tuổi của chúng cộng lại là 13.

Khách ngẫm nghĩ một hồi mà vẫn chưa thể tính được tuổi của ba cậu con trai mặc dù đã biết tuổi của chủ nhà là 36. Cuối cùng khách nói:

- Bài toán của anh không xác định. Chủ nhà cho biết:

Đúng vậy, tôi đang hi vọng rằng cháu lớn nhất sẽ được đi dự thi bơi lội do Thành Đoàn tổ chức vào ngày Quốc tế thiếu nhi năm nay.

Khách nói: Như vậy tôi có thể biết được tuổi các cháu rồi!

Theo bạn người khách đã suy luận như thế nào?

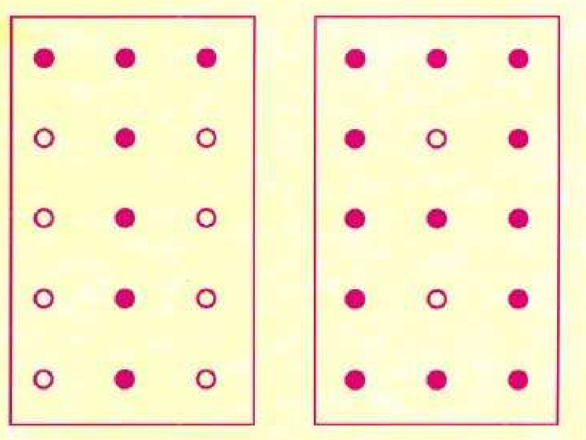
TUẤN MINH

Bài 3. THÁNG TÁM

Để chuẩn bị kỉ niệm Cách mạng tháng 8, người ta làm hai bảng, mỗi bảng có 15 bóng đèn xếp theo các ô vuông thành 5 hàng và 3 cột như ở hình bên.

Ở mỗi bảng, mỗi lần bấm công tắc thì ánh sáng đèn chuyển trạng thái (sáng hoặc tối) đối với tất các đèn nằm trên một hàng, hoặc một cột, hoặc trên một đường thẳng chứa đường chéo của ô vuông nào đó. Ban đầu tất cả các đèn ở hai bảng đều tắt.

Bạn hãy trình bày cách chọn bấm công tắc ở mỗi bảng để cuối cùng các đèn sáng xếp thành hình T8 như trên hình vẽ.



HOÀNG NGUYỄN

DÀNH CHO TRUNG HỌC CƠ SỞ

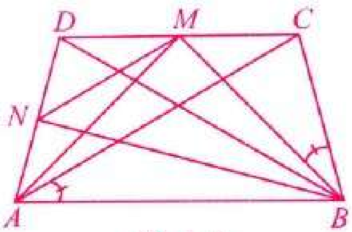
SỬ DỤNG TỨ GIÁC NỘI TIẾP VÀO CHỨNG MINH HÌNH HỌC

HÀ VĂN NHÂN
(GV THCS Hoằng Xuân, Hoằng Hóa, Thanh Hóa)

Tứ giác nội tiếp đường tròn có nhiều ứng dụng trong việc giải các bài toán hình học. Chúng ta không những có thể sử dụng tính chất của tứ giác nội tiếp mà còn sử dụng mối quan hệ giữa các góc với đường tròn ngoại tiếp tứ giác để giải nhiều bài tập hình học trong chương trình toán THCS. Bài viết này xin giới thiệu kĩ năng giải một số bài toán hình học dựa vào việc chứng minh tứ giác nội tiếp.

Bài toán 1. *Cho hình thang ABCD có hai đường chéo AC và BD bằng nhau và bằng đáy lớn AB. Gọi M là trung điểm của CD. Cho biết góc $\widehat{MBC} = \widehat{CAB}$. Tính số đo các góc của hình thang đó.*

Lời giải. (h.1) Gọi N là trung điểm của AD thì $MN//CA \Rightarrow$ $\widehat{DAC} = \widehat{DNM}$ (1)



Hình 1

Vì $AC = BD$ (gt) nên $ABCD$ là hình thang cân suy ra $\widehat{BAD} = \widehat{ABC}$, mà $\widehat{CAB} = \widehat{MBC}$(gt)

$\Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{ABM}$ (2)

Từ (1) và (2) có $\widehat{ABM} = \widehat{DNM}$ nên tứ giác $ANMB$ nội tiếp, suy ra $\widehat{ANB} = \widehat{AMB}$.

Do $AB = BD$ (gt) nên tam giác BAD cân tại B, có $DN = NA$, suy ra $\widehat{ANB} = 90^o = \widehat{AMB}$. Lại có $MA = MB$ (tính chất đối xứng trục), do đó tam giác AMB vuông cân tại M nên $\widehat{MAB} = \widehat{MBA} = 45^o$.

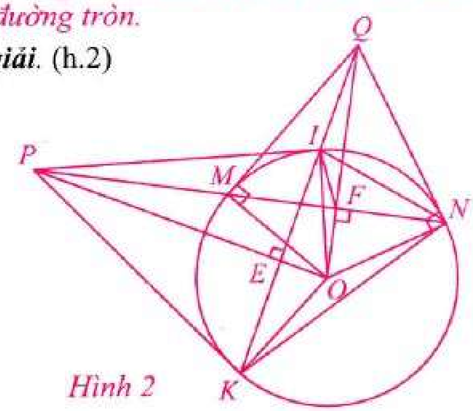
Tam giác ABC cân tại A ($AB = AC$) nên $\widehat{ACB} = \widehat{ABC} = \widehat{MBA} + \widehat{MBC} = 45^o + \widehat{MBC}$.

Thay vào đẳng thức $\widehat{BAC} + \widehat{ACB} + \widehat{ABC} = 180^o$, ta được $\widehat{MBC} = 30^o$. Do đó $\widehat{BAD} = \widehat{ABC} = 75^o$,

$\widehat{ADC} = \widehat{BCD} = 180^o - \widehat{ABC} = 105^o$. ❒

Bài toán 2. *Từ một điểm P ở ngoài đường tròn (O) kẻ cát tuyến PMN với đường tròn (M nằm giữa P và N). Các tiếp tuyến của đường tròn tại M và N cắt nhau tại Q. Qua Q kẻ đường thẳng vuông góc với OP, cắt OP tại E và cắt đường tròn (O) tại I và K (I nằm giữa Q và K). Gọi F là giao điểm của OQ và MN. Chứng minh rằng năm điểm P, I, F, O, K thuộc cùng một đường tròn.*

Lời giải. (h.2)



Hình 2

Vì $\widehat{INQ} = \widehat{NKQ} = \frac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{IN}$ nên $\Delta QIN \backsim \Delta QNK$

(g. g) $\Rightarrow QN^2 = QI.QK$ (1)

Dễ thấy $QO \perp NF$, mà tam giác NOQ vuông tại N nên $QN^2 = QF.QO$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $QI.QK = QF.QO \Rightarrow \frac{QI}{QO} = \frac{QF}{QK}$

$\Rightarrow \Delta QIF \backsim \Delta QOK$(c.g.c) $\Rightarrow \widehat{QFI} = \widehat{QKO}$, suy ra tứ giác $IFOK$ nội tiếp (3)

Do tam giác OIK cân tại O có $OE \perp IK$ nên $\widehat{IOE} = \widehat{KOE}$, mà $\widehat{KOE} + \widehat{EKO} = 90^o$,

nên $\widehat{IOE} + \widehat{EKO} = 90^o$.

Lại có $\widehat{EKO} = \widehat{QFI}$; $\widehat{QFI} + \widehat{IFP} = 90^o$, suy ra $\widehat{IOE} = \widehat{IFP} \Rightarrow$ tứ giác $IFOP$ nội tiếp (4)

Từ (3), (4) suy ra năm điểm P, I, F, O, K cùng thuộc một đường tròn. ❒

Bài toán 3. *Đường phân giác vẽ từ A của tam giác ABC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác đó ở D. Chứng minh rằng* $AD > \frac{AB + AC}{2}$.

Lời giải. (Bạn đọc tự vẽ hình). Trên tia đối của tia CA lấy điểm E sao cho $CE = AB$. Vì AD là tia phân giác góc $\widehat{BAC}$ (gt) suy ra $DB = DC$. Lại do tứ giác $ACDB$ nội tiếp nên $\widehat{ABD}=\widehat{ECD}$. Từ đó $\Delta ABD=\Delta ECD$ (c.g.c) $\Rightarrow AD=DE$.

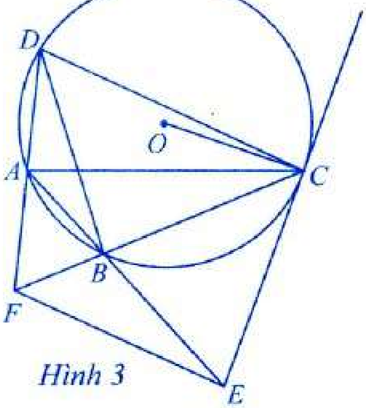
Trong tam giác ADE có $AD+DE>AE=AC+CE$ $=AC+AB$, suy ra $AD>\dfrac{AB+AC}{2}$ (đpcm). ❒

✪Bài toán 4. *Cho tứ giác ABCD có BC = BD, nội tiếp đường tròn (O). Từ C kẻ tiếp tuyến với đường tròn cắt đường thẳng AB tại E. Gọi F là giao điểm của hai đường thẳng AD và BC. Chứng minh rằng EF//CD.*

Lời giải. (h. 3) Tứ giác $ABCD$ nội tiếp nên $\widehat{BCD}=\widehat{FAE}$ (1)

Lại có $BC=BD$ suy ra $\widehat{BCD}=\widehat{BDC}$ (2)

Mặt khác $\widehat{BDC}=\widehat{BCE}$ $=\dfrac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{BC}$ (3)



Hình 3

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\widehat{FAE}=\widehat{BCE}$, do đó tứ giác $ACEF$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CFE}=\widehat{CAE}$.

Mà $\widehat{CAE}=\widehat{BDC}=\widehat{BCD}\Rightarrow\widehat{CFE}=\widehat{BCD}$ suy ra $EF//CD$. ❒

✪Bài toán 5. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AH, BI. Chứng minh rằng OC vuông góc HI.*

Lời giải. (Bạn đọc tự vẽ hình).

Từ giả thiết, ta có $\widehat{AIB}=\widehat{AHB}=90^\circ$ nên tứ giác $ABHI$ nội tiếp, suy ra $\widehat{ABC}=\widehat{HIC}$ (1)

Kẻ tia tiếp tuyến Cx với (O) tại C ta có

$$\widehat{ABC}=\widehat{ACx}=\frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AC} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{HIC}=\widehat{ACx}\Rightarrow HI//Cx$ mà $OC\perp Cx$ nên $OC\perp HI$ (đpcm). ❒

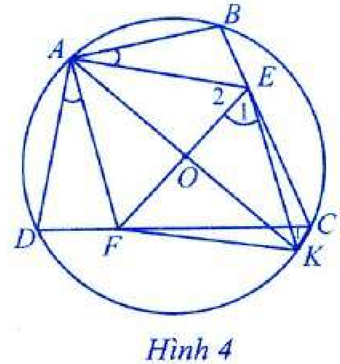
✪Bài toán 6. *Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Đường vuông góc với AD tại A cắt BC ở E. Đường vuông góc với AB tại A cắt CD ở F. Chứng minh rằng ba điểm E, O, F thẳng hàng.*

Lời giải. (h. 4). Từ giả thiết có $180^\circ=\widehat{BAF}+\widehat{DAE}=\left(\widehat{EAF}+\widehat{EAB}\right)+\left(\widehat{EAF}+\widehat{FAD}\right)$ $=\widehat{EAF}+\widehat{BAD}$.

Mặt khác, lại có $\widehat{BCD}+\widehat{BAD}=180^\circ$.

Suy ra $\widehat{EAF}=\widehat{BCD}$.

Gọi K là điểm đối xứng với A qua EF thì ta có



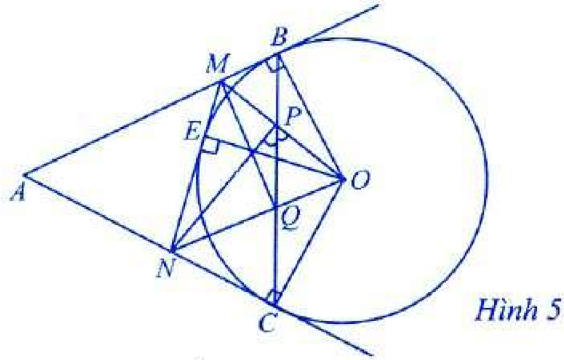
Hình 4

$\widehat{EKF}=\widehat{EAF}=\widehat{BCD}=\widehat{ECF}$. Dẫn đến tứ giác $ECKF$ nội tiếp, nên $\widehat{C_1}=\widehat{E_1}$. Ta lại có $\widehat{E_1}=\widehat{E_2}$ (tính chất đối xứng), $\widehat{E_2}=\widehat{DAK}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc). Suy ra $\widehat{C_1}=\widehat{DAK}$, nên tứ giác $ADKC$ nội tiếp. Do đó $K\in(O)$.

Vậy EF là đường trung trực của dây cung AK, suy ra E, O, F thẳng hàng. ❒

✪Bài toán 7. *Từ một điểm A ở ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). E là một điểm trên cung nhỏ BC (E khác B và C). Tiếp tuyến với đường tròn (O) tại E cắt AB, AC theo thứ tự ở M, N. Gọi giao điểm của OM, ON với BC lần lượt là P, Q. Chứng minh rằng ba đường thẳng OE, MQ, NP đồng quy.*

Lời giải. (h. 5). Ta có $\widehat{MOE}=\widehat{MOB}=\dfrac{1}{2}\widehat{BOE}$,



Hình 5

$\widehat{NOE}=\widehat{NOC}=\dfrac{1}{2}\widehat{COE}$. Nên $\widehat{MON}=\widehat{MOE}+\widehat{NOE}$ $=\dfrac{1}{2}\widehat{BOC}=\dfrac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{BC}=\widehat{MBC}$. Suy ra tứ giác $OBMQ$ nội tiếp. Lại có $\widehat{OBM}=90^\circ$ nên OM là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $OBMQ\Rightarrow\widehat{OQM}=90^\circ\Rightarrow MQ\perp OQ$.

Tương tự $NP\perp OM$ mà $OE\perp MN$ (gt) nên OE, MQ, NP là ba đường cao của tam giác OMN, do đó OE, MQ, NP đồng quy. ❒

Bài toán 8. *Gọi I là một điểm nằm trong và K là một điểm bên ngoài tứ giác lồi $ABCD$ sao cho $ABID$, $BICK$ là các hình bình hành và $\widehat{CBI}=\widehat{CDI}$. Chứng minh rằng $\widehat{ACD}=\widehat{BCI}$.*

Lời giải. (Bạn đọc tự vẽ hình)

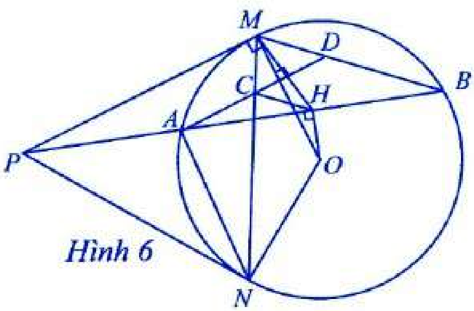
Do $ABID$, $BICK$ là hình bình hành nên $AD//BI//CK$; $AD = BI = CK$ nên tứ giác $ADCK$ là hình bình hành $\Rightarrow \widehat{ACD}=\widehat{KAC}$ (1)

Lại có $\Delta ABK = \Delta DIC$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{KAB}=\widehat{CDI}$ mà $\widehat{CDI}=\widehat{CBI}=\widehat{KCB} \Rightarrow \widehat{KAB}=\widehat{KCB} \Rightarrow$ tứ giác $ABKC$ nội tiếp, nên $\widehat{KAC}=\widehat{KBC}=\widehat{BCI}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ACD}=\widehat{BCI}$ (đpcm). ❒

Bài toán 9. *Từ điểm P ở ngoài đường tròn (O) vẽ các tiếp tuyến PM, PN với đường tròn (M, N là các tiếp điểm). Qua P kẻ cát tuyến PAB (A nằm giữa P và B) không đi qua O. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với OM cắt MN, MB theo thứ tự tại C, D. Chứng minh rằng $CA = CD$.*

Lời giải. (h. 6). Kẻ $OH \perp AB$ ($H \in AB$), kết hợp với $OM \perp PM$, $ON \perp PN$, $OH \perp PB$, ta có năm điểm O, H, M, P, N cùng thuộc một đường tròn nên $\widehat{MNH}=\widehat{MPH}$.



Hình 6

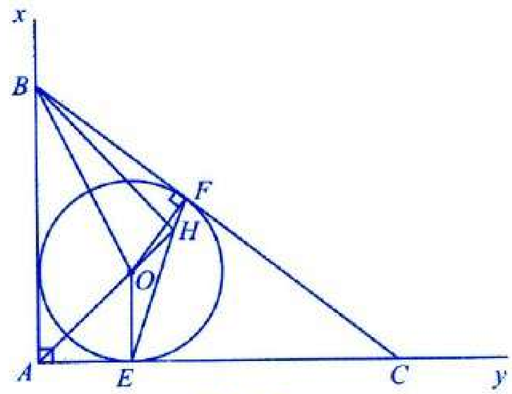
Lại có $PM \perp OM$; $AD \perp OM$ nên $AD//PM \Rightarrow \widehat{MPH}=\widehat{DAB} \Rightarrow \widehat{MNH}=\widehat{DAB}$, suy ra tứ giác $ACHN$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AHC}=\widehat{ANC}=\widehat{ABM}$ nên $CH//BM$ mà $HB = HA$ (do $OH \perp AB$) suy ra $CA = CD$. ❒

Bài toán 10. *Cho góc vuông xAy, điểm B cố định trên Ax, điểm C di động trên Ay. Đường tròn tâm O nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với AC, BC theo thứ tự ở E và F. Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định.*

Lời giải. (h. 7). Gọi H là giao điểm của hai đường thẳng EF và AO. Dễ thấy $CE = CF$ nên $\widehat{CFE}=90^\circ-\frac{1}{2}\widehat{ACB}$. Mặt khác

$$\widehat{HOB}=\widehat{OAB}+\widehat{OBA}=\frac{1}{2}\left(\widehat{CAB}+\widehat{CBA}\right)$$
$$=90^\circ-\frac{1}{2}\widehat{ACB}.$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{CFE}=\widehat{HOB}$.



Hình 7

Từ đó tứ giác $OHFB$ nội tiếp, $\widehat{OHB}=\widehat{OFB}=90^\circ$ $\Rightarrow BH \perp AO$. Vì AO là phân giác của $\widehat{xAy}$ nên cố định, mà B cố định suy ra H cố định. Vậy EF luôn đi qua điểm cố định H là chân đường vuông góc hạ từ B xuống đường phân giác của góc $\widehat{xAy}$. ❒

Bài toán 11. *Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Gọi I là một điểm trên cung nhỏ AB. Vẽ $IM \perp BC$, $IN \perp AC$. Xác định vị trí của điểm I để MN có độ dài lớn nhất.*

Lời giải. (Bạn đọc tự vẽ hình). Vẽ $IP \perp AB$ ($P \in AB$), kết hợp với $IN \perp AC$, $IM \perp BC$, ta có các tứ giác $BIPM$, $ANIP$ và $INCM$ nội tiếp.

Từ đó ta có $\widehat{BPM}=\widehat{BIM}$ (1)

$\widehat{APN}=\widehat{AIN}$ (2)

Mặt khác, tứ giác $ACBI$ nội tiếp nên $\widehat{IAN}=\widehat{IBM}$.

Suy ra $\widehat{APN}=\widehat{BPM}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{APN}=\widehat{BPM}$. Do đó $\widehat{MPN}=\widehat{NPA}+\widehat{APM}=\widehat{BPM}+\widehat{APM}=\widehat{APB}=180^\circ$. nên ba điểm M, P, N thẳng hàng.

Ta lại có $\widehat{IAB}=\widehat{INM}$, $\widehat{IBA}=\widehat{IMN}$ suy ra $\Delta IAB \backsim \Delta INM$ (g.g) $\Rightarrow \frac{MN}{BA}=\frac{IN}{IA}\le 1 \Rightarrow MN \le BA$

Vậy MN lớn nhất khi và chỉ khi $N \equiv A, M \equiv B$ $\Leftrightarrow \widehat{IAC}=\widehat{IBC}=90^\circ \Leftrightarrow CI$ là đường kính của đường tròn $(O) \Leftrightarrow I$ đối xứng với C qua O. ❒

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN, BÌNH ĐỊNH

NĂM HỌC 2011 - 2012

(Đề thi đã đăng trên THTT số 418, tháng 4 năm 2012)

Câu 1. Với $\frac{\sqrt{2}}{2}<x<1$, ta có

$$P=\frac{\dfrac{x+\sqrt{1-x^2}}{x-\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}}{1+\dfrac{x+\sqrt{1-x^2}}{x-\sqrt{1-x^2}}.\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}}$$

$$=\frac{\dfrac{x^2+x\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-x^2}+1-x^2}{x\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)}}{\dfrac{x^2-x\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-x^2}+1-x^2}{x\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)}}=1.$$

Vậy $P=1$.

Câu 2. a) Phương trình đã cho có nghiệm kép khi và chỉ khi $\Delta'=3-m=0 \Leftrightarrow m=3$.

b) Điều kiện để phương trình đã cho có nghiệm là $\Delta'=3-m\geq 0 \Leftrightarrow m\leq 3$.

Theo hệ thức Viète, ta có $x_1+x_2=-4,\ x_1x_2=m+1$.

Khi đó $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}=\frac{10}{3}$

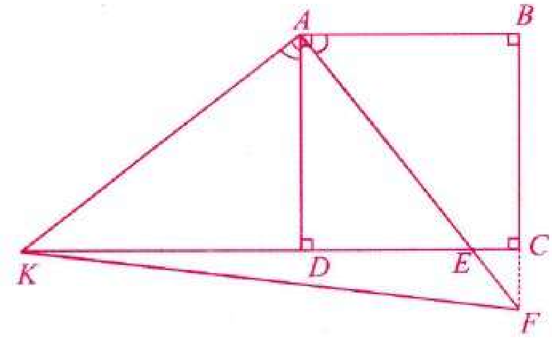
$\Leftrightarrow \frac{(-4)^2-2(m+1)}{m+1}=\frac{10}{3} \Leftrightarrow m=2$ (tmđk).

Câu 3. BĐT đã cho tương đương với

$(x+y)^2\geq 4xy \Leftrightarrow (x-y)^2\geq 0$ (luôn đúng).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y$.

Câu 4. a) Vì $AB=AD$, $\widehat{BAF}=\widehat{DAK}$ (cùng phụ với góc $\widehat{DAF}$), $\widehat{ABF}=\widehat{ADK}=90^{\circ}$. Do đó $\Delta ABF=\Delta ADK$ (g.c.g), suy ra $AF=AK$, mà $\widehat{KAF}=90^{\circ}$, nên tam giác AKF vuông cân tại A.



b) Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông AEK với AD là đường cao, ta được $DK.DE=AD^2=a^2$ (a là độ dài cạnh hình vuông $ABCD$).

Mặt khác, lại có

$$EK^2(DK+DE)^2\geq 4DK.DE=4AD^2=4a^2$$

$\Leftrightarrow EK\geq 2a$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $DK=DE=a$ $\Leftrightarrow E\equiv C$.

Vậy khi E trùng với đỉnh C của hình vuông $ABCD$ thì EK có độ dài ngắn nhất và bằng $2a$.

Câu 5. Ta có

$m^2+n^2=m+n+8 \Leftrightarrow 4(m^2+n^2)=4(m+n+8)$

$\Leftrightarrow 4m^2-4m+1+4n^2-4n+1=34$

$\Leftrightarrow (2m-1)^2+(2n-1)^2=3^2+5^2$ (*)

Vì $m,n\in\mathbb{N}$, kết hợp với (*) suy ra

$\begin{cases}2m-1=3\\2n-1=5\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}2m-1=5\\2n-1=3\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m=2\\n=3\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}m=3\\n=2.\end{cases}$

Vậy tìm được hai cặp số $(m;n)$ thỏa mãn đề bài là $(2;3)$ và $(3;2)$.

BÙI VĂN CHI
(GV THCS Lê Lợi, Quy Nhơn, Bình Định)
sưu tầm và giới thiệu

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10

TRƯỜNG THPT CHUYÊN QUỐC HỌC HUẾ, THỪA THIÊN - HUẾ

NĂM HỌC 2011 - 2012

(Thời gian làm bài : 150 phút)

Câu 1. (2 *điểm*)

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 19 \\ x^3 + y^3 + 19 = 0. \end{cases}$$

Câu 2. (1,5 *điểm*) Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = ax - a$.

Xác định tham số a để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn

$$\frac{1}{|x_1|} + \frac{1}{|x_2|} = 1.$$

Câu 3. (2,5 *điểm*)

a) Giải phương trình

$$\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}} = 1 + x.$$

b) Tìm các số nguyên tố p sao cho hai số $2(p+1)$ và $2(p^2+1)$ là hai số chính phương.

Câu 4. (2 *điểm*) Cho hai đường tròn (S) và (T) cắt nhau tại A và B. Một đường thẳng Δ tiếp xúc với đường tròn (S) tại C, tiếp xúc với đường tròn (T) tại E, sao cho khoảng cách từ A đến Δ lớn hơn khoảng cách từ B đến Δ.

a) Gọi D là điểm đối xứng của A qua đường thẳng Δ. Chứng minh rằng tứ giác $BCDE$ nội tiếp được trong một đường tròn (V).

b) Gọi R_S, R_T và R_V lần lượt là bán kính của các đường tròn (S), (T) và (V).

Chứng minh rằng $R_S R_T = R_V^2$.

Câu 5. (2 *điểm*)

a) Xét các số thực x, y, z, t thỏa mãn đồng thời các điều kiện $x + y + z + t = 8$ và $xy + xz + xt + yz + yt + zt = 18$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của t.

b) Cho chín hình vuông có các độ dài cạnh tính bằng mét lần lượt là $n + 1, n + 2, n + 3, n + 4, n + 5, n + 6, n + 7, n + 8, n + 9$, với n là số nguyên dương. Gọi S là tổng diện tích của chín hình vuông này.

Có hay không một hình vuông diện tích bằng S và độ dài cạnh là một số nguyên mét?

CAO NGỌC TOẢN

(GV THPT Tam Giang, Phong Điền, Thừa Thiên - Huế)

sưu tầm và giới thiệu

Giải đáp Hình tượng RỒNG VIỆT NAM

(Đề đăng trên THTT số 416, tháng 2 năm 2012)

Hình ảnh Rồng qua các thời đại được sắp xếp như sau:

1a. Thế kỉ X – XII, **2c.** Nhà Lý, **3b.** Rồng trên đồ sứ.

1b. Thế kỉ XII – XIV, **2e.** Nhà Trần, **3a.** Rồng bằng đất nung.

1c. Thế kỉ XIV – XVII, **2a.** Nhà Lê, **3d.** Rồng đá ở Điện Kính Thiên, Thăng Long.

1d. Thế kỉ XVIII, **2d.** Nhà Tây Sơn, **3e.** Rồng trên mái Đền Vua Bà Đào Thánh Hồng Nương Lê Thị Yến, được sắc phong năm 1796.

1e. Thế kỉ XIX – XX, **2b.** Nhà Nguyễn, **3c.** Rồng trên mái Điện.

Các bạn sau có đáp án đúng được nhận tặng phẩm:

1) *Bùi Đình Hiếu*, 11A1, THPT Quỳnh Côi, Quỳnh Phụ, **Thái Bình**.

2) *Nguyễn Quang Trọng*, 11A1, THPT Tây Tiền Hải, **Thái Bình**.

VÂN KHANH

Chuẩn bị cho kì thi tốt nghiệp THPT và thi vào Đại học

MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ ĐẠI SỐ TỔ HỢP

ĐẶNG THANH HẢI - NGUYỄN THỊ ANH THƠ
(GV Học viện PK - KQ Sơn Tây, Hà Nội)

Các bài toán về đại số tổ hợp rất đa dạng và phong phú, thường có mặt trong các kì thi tuyển sinh vào Đại học, Cao đẳng và cả trong các kì thi học sinh giỏi các cấp. Nội dung bài viết này xin đề cập tới một số cách lập nhóm dựa trên hai quy tắc đếm cơ bản là quy tắc cộng và quy tắc nhân. Các bài toán này thường được chia thành ba dạng cơ bản sau đây.

DẠNG 1. Các phần tử tham gia trong nhóm không lặp lại

✪Bài toán 1. *Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số chẵn gồm 5 chữ số đôi một khác nhau?*

Lời giải

• Nếu chữ số hàng vạn lẻ, thì có ba cách chọn từ các chữ số 1, 3, 5. Do chữ số hàng đơn vị là chẵn, nên có ba cách chọn từ các chữ số 0, 2, 4. Khi đó các chữ số hàng chục, hàng trăm, hàng nghìn được chọn 3 từ 4 chữ số còn lại, Cách chọn thoả mãn định nghĩa chỉnh hợp và có A_4^3 cách. Theo *quy tắc nhân,* ta có

$$3.3.A_4^3 = 216 \text{ (số)}.$$

• Nếu chữ số hàng vạn chẵn, thì có hai cách chọn từ các chữ số 2, 4. Từ đó suy ra chữ số hàng đơn vị được chọn từ hai chữ số chẵn còn lại. Khi đó các chữ số hàng chục, hàng trăm, hàng nghìn được chọn 3 từ 4 chữ số còn lại cách chọn thoả mãn định nghĩa chỉnh hợp và có A_4^3 cách. Theo *quy tắc nhân,* ta có

$$2.2.A_4^3 = 96 \text{ (số)}.$$

Theo *quy tắc cộng,* ta có tất cả

$$216 + 96 = 312 \text{ (số)}. \square$$

✪Bài toán 2. *Với các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số chẵn có 3 chữ số đôi một khác nhau và không lớn hơn 789?*

Lời giải. Do số có 3 chữ số là số chẵn, nên chữ số hàng đơn vị có 4 cách chọn từ các chữ số 2, 4, 6, 8.

Do các số được lập không lớn hơn 789, nên chữ số hàng trăm không thể là 8 và 9.

Ứng với một cách chọn chữ số hàng đơn vị:

• Nếu chữ số hàng trăm khác 7, thì có 5 cách chọn chữ số hàng trăm (do chữ số hàng trăm nhỏ hơn 7 và khác chữ số hàng đơn vị) và tương ứng có 7 cách chọn chữ số hàng chục. Theo *quy tắc nhân,* ta có $7.5 = 35$ (số).

• Nếu chữ số hàng trăm là 7, thì có 6 cách chọn chữ số hàng chục (do chữ số hàng chục nhỏ hơn 9). Theo *quy tắc nhân,* ta có $1.6 = 6$ (số).

Theo *quy tắc cộng,* suy ra ứng với mỗi cách chọn chữ số hàng trăm có $35 + 6 = 41$ (số).

Vậy theo *quy tắc nhân* có tất cả

$$4.41 = 164 \text{ (số)}. \square$$

DẠNG 2. Các phần tử tham gia trong nhóm không lặp lại, song yêu cầu sự có mặt của một số phần tử theo một tính chất nào đó

✪Bài toán 3. *Với các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau và trong đó nhất thiết phải có mặt chữ số 5?*

Lời giải. • *Cách 1*

- Nếu chữ số hàng vạn là 5, thì 4 chữ số còn lại được chọn từ 6 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 6. Cách chọn thoả mãn định nghĩa chỉnh hợp và có $A_6^4 = 360$ (cách). Từ đó suy ra có 360 (số).

- Nếu chữ số hàng vạn khác 5, thì có 5 cách chọn chữ số hàng vạn (do chữ số hàng vạn khác 0). Do chữ số 5 có thể đứng ở 1 trong 4 vị trí hàng nghìn, hàng trăm, hàng chục, hàng đơn vị và ứng với mỗi vị trí đó có A_5^3 cách chọn 3 chữ số còn lại, nên theo nguyên lí nhân có $5.4.A_5^3 = 1200$ (số).

Vậy theo *quy tắc cộng* có $360 + 1200 = 1560$ (số).

• *Cách 2*

Chữ số 5 có thể đứng ở 5 vị trí hàng vạn, hàng nghìn, hàng trăm, hàng chục, hàng đơn vị và ứng với mỗi vị trí này có A_6^4 cách chọn 4 vị trí còn lại. Theo *quy tắc nhân,* suy ra có $5.A_6^4 = 1800$ (số). Trong các số này, ta phải loại bỏ các số mà chữ số 0 đứng ở vị trí hàng vạn. Lập luận tương tự, có $4.A_5^3 = 240$ (số) như vậy. Từ đó suy ra số các số thoả mãn điều kiện bài toán là $1800 - 240 = 1560$ (số). ❐

✪Bài toán 4. *Với các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số có 6 chữ số đôi một khác nhau, trong đó hai chữ số 1 và 9 luôn đứng kề nhau?*

Lời giải. Từ 10 chữ số đã cho, lập được C_8^4 bộ gồm 6 chữ số khác nhau, trong đó luôn có mặt chữ số 1 và 9. Để chữ số 1 và 9 luôn đứng kề nhau thì mỗi bộ gồm 6 chữ số khác nhau ở trên lập được 5!2! (số). Theo *quy tắc nhân,* suy ra lập được $C_8^4.5!.2!$ (số).

Trong các số được lập, ta phải loại các số có chữ số 0 đứng đầu (hàng chục vạn). Lập luận tương tự có $C_7^3.4!.2!$ (số) như vậy.

Từ đó suy ra số các số thoả mãn điều kiện bài toán là $C_8^4.5!.2! - C_7^3.4!.2! = 15120$ (số). ❐

DẠNG 3. Các phần tử tham gia trong nhóm có lặp lại

✪Bài toán 5. *Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 7 chữ số, biết rằng chữ số 2 có mặt đúng hai lần, chữ số 3 có mặt đúng ba lần và các chữ số còn lại có mặt không quá một lần?*

Lời giải. Xét tất cả các số gồm 7 chữ số (kể cả chữ số đầu tiên là 0).

Do chữ số 2 có mặt hai lần, chữ số 3 có mặt ba lần, nên phải chọn 2 chữ số từ 8 chữ số còn lại (do các chữ số còn lại có mặt không quá một lần). Có C_8^2 cách chọn 2 chữ số này.

Ứng với mỗi bộ gồm 2 chữ số được chọn cùng với hai chữ số 2, ba chữ số 3 lập được $\frac{7!}{3!2!}$ (số) (do hoán vị các chữ số 2 cho nhau và vị trí các chữ số 3 cho nhau thì số các số lập được không đổi). Theo *quy tắc nhân*, ta có

$$C_8^2.\frac{7!}{3!2!} = 11760 \text{ (số)}.$$

Trong tất cả các số đã lập ở trên, ta phải loại bỏ các số có chữ số 0 đứng ở vị trí đầu. Lập luận tương tự như trên, ta phải loại bỏ

$$C_7^1.\frac{6!}{3!2!} = 420 \text{ (số)}.$$

Từ đó suy ra số các số thoả mãn điều kiện bài toán là $11760 - 420 = 11340$ (số). ❐

✪Bài toán 6. *Cho các chữ số 0, 1, 2, 3, 4. Hỏi có thể lập được bao nhiêu số có 7 chữ số từ những chữ số trên, trong đó chữ số 4 có mặt đúng ba lần, còn các chữ số khác có mặt đúng một lần?*

Lời giải. Xét tất cả các số được lập (kể cả các số có chữ số 0 đứng ở vị trí đầu). Do chữ số 4 có mặt đúng ba lần, các chữ số còn lại có mặt đúng một lần, nên lập được $\frac{7!}{3!}$ (số). Trong các số được lập, ta phải loại bỏ các số có chữ số 0 đứng đầu. Lập luận tương tự, ta có $\frac{6!}{3!}$ (số) như vậy.

Từ đó suy ra, số các số thoả mãn điều kiện bài toán là $\frac{7!}{3!} - \frac{6!}{3!} = 720$ (số).

Nhận xét. Từ bài toán 5 và bài toán 6, ta rút ra quy tắc tổng quát sau (số các hoán vị lặp):

Cho tập $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Xét tất cả các hoán vị của tập B gồm m phần tử được lấy từ tập A, sao cho phần tử a_i có mặt trong tập B đúng k_i lần $(i = 1, 2, ..., n)$, với điều kiện $k_1 + k_2 + ... + k_n = m$. Khi đó số các hoán vị là $\frac{m!}{k_1!k_2!...k_n!}$ (kết quả này chứng minh khá đơn giản, xin dành cho bạn đọc).

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5. Hỏi có thể lập được bao nhiêu số có 9 chữ số từ những chữ số trên, trong đó chữ số 5 có mặt đúng hai lần, chữ số 0 có mặt đúng ba lần, còn các chữ số khác có mặt đúng một lần?

2. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số gồm 5 chữ số đôi một khác nhau, trong đó phải có mặt các chữ số 1, 2, 3 đứng kề nhau?

Thử sức TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 8

(Thời gian làm bài : 180 phút)

PHẦN CHUNG

Câu I. (2 *điểm*) Cho hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-1}(C)$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

2) Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến tạo với hai đường tiệm cận của (C) thành tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất.

Câu II. (2 *điểm*) 1) Giải phương trình

$$2\sin 7x\sin x+8\sin^4 2x+\sqrt{3}\sin 6x=8\sin^2 2x.$$

2) Giải bất phương trình

$$4^{2x}-15.2^{2(x+\sqrt{x+4})}-16^{1+\sqrt{x+4}}\le 0.$$

Câu III. (1 *điểm*) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $x=1$; $x=3$ và các đồ thị hàm số

$$y=x^3-2x^2+x-\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right);$$

$$y=\sin x+2^{3\log_8 x}.$$

Câu IV. (1 *điểm*) Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$, đáy ABC là tam giác vuông có $CA=CB=a$, góc giữa đường thẳng BA_1 và mặt phẳng (ACC_1A_1) bằng 30^o. Gọi M là trung điểm cạnh A_1B_1. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (A_1BC).

Câu V. (1 *điểm*) Tìm các số thực x,y,z thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-2xy+y^2+1}+\sqrt{y^2-6y+10}=5\\ \log_3 8xyz^3=10\log_9 z^2-\left(\log_3\dfrac{3x^2z}{y}\right)^2.\end{cases}$$

PHẦN RIÊNG

(Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần A hoặc B)

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu VIa. (2 *điểm*)

1) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho các điểm $A(1;2)$, $B(4;3)$. Tìm tọa độ điểm M sao cho góc MAB có số đo bằng 135^o và khoảng cách từ M đến đường thẳng AB bằng $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

2) Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho $A(5;3;-2)$, $B(2;0;4)$, $C(-1;0;1)$. Lập phương trình mặt phẳng qua OA, cắt đoạn BC tại D sao cho tỉ số thể tích của các khối tứ diện $OABD$ và $OACD$ bằng 3.

Câu VIIa. (1 *điểm*)

Tìm tất cả các số phức z thoả mãn phương trình $\left(\dfrac{\mathrm{i}-z}{z+\mathrm{i}}\right)^4=1$.

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu VIb. (2 *điểm*) 1) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho $A(2;3)$ là một trong hai giao điểm của đường tròn (C_1) : $x^2+y^2=13$ và đường tròn (C_2) : $x^2+y^2-12x+11=0$. Viết phương trình đường thẳng đi qua A cắt (C_1), (C_2) theo hai dây cung khác nhau có độ dài bằng nhau.

2) Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có A trùng gốc tọa độ, các điểm $B(1;0;0)$, $D(0;1;0)$, $A_1(0;0;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua AA_1, biết (P) tạo với BC và B_1D_1 những góc bằng nhau.

Câu VIIb. (1 *điểm*) Xét khai triển $(1-x+x^2-x^3)^6$ thành đa thức

$$P(x)=a_o+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+...+a_{18}x^{18}.$$

Tìm hệ số a_9.

NGUYỄN THANH GIANG
(GV THPT chuyên Hưng Yên)

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 6

Câu I. 1) Bạn đọc tự giải.

2) Hàm số có tiệm cận đứng $x=-m$; tiệm cận ngang $y=m \Rightarrow I(-m;m)$. Giả sử $M\left(x_0; m-\dfrac{m^2+1}{x_0+1}\right)\in(C_m)$.

PTTT tại M với (C_m) có dạng

$$y=\frac{m^2+1}{(x_0+m)^2}(x-x_0)+m-\frac{m^2+1}{x_0+m} \quad (x_0\neq -m)$$

suy ra $A\left(-m; m-\dfrac{2m^2+2}{x_0+m}\right)$ và $B(2x_0+m; m)$.

Tìm được $IA=2\left|\dfrac{m^2+1}{x_0+m}\right|$; $IB=2\left|x_0+m\right|$.

Từ đó $S_{IAB}=\dfrac{1}{2}IA.IB=2\left|m^2+1\right|=12$

suy ra $m=-\sqrt{5}$ hoặc $m=\sqrt{5}$.

Câu II. 1) ĐK $x<-1$ hoặc $x\le 3$. PT đã cho tương đương với

$$(x+1)(x-3)+2(x+1)\sqrt{\frac{x-3}{x-1}}-8=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\sqrt{\frac{x-3}{x+1}}=2 \text{ hoặc } (x+1)\sqrt{\frac{x-3}{x+1}}=-4.$$

Đáp số. $x=1-2\sqrt{5}; x=1+2\sqrt{2}$.

2) ĐK $\cos 3x\neq 0$. Đưa PT đã cho về dạng $2\sin^2 x-\sin x-1=0$. PT đã cho vô nghiệm.

Câu III. Ta có

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{1+\sin 2x}.\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{1+\sin 2x}.\mathrm{d}x=I_1+I_2.$$

Đáp số. $I=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}$.

Câu IV. Gọi I là trung điểm của CD, M là giao điểm của IB với mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Đường tròn lớn của (S) là đường tròn (ABM). Mặt phẳng (BCD) cắt (S) theo đường tròn (BCD) qua M và BM là đường kính, nên

$$BM=\frac{a}{\sin 60^\circ}=\frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

Lưu ý tam giác ABI đều, nên $\widehat{ABM}=60^\circ$. Tìm được $AM=a\sqrt{\dfrac{13}{12}} \Rightarrow R=\dfrac{AM}{2\sin 60^\circ}=\dfrac{a\sqrt{13}}{6}$.

Vậy $V_{\text{cầu}}=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{13\sqrt{13}}{162}\pi a^3$.

Câu V. Ta có $P+11=$

$$=2+\frac{3(b+c)}{2a}+\left(1+\frac{4a+3c}{3b}\right)+\frac{12(b-c)}{2a+3c}+8$$

$$=(4a+3b+3c)\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{3b}+\frac{4}{2a+3c}\right).$$

Dễ có $\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{3b}\ge\dfrac{4}{2a+3b}$;

$$\frac{4}{2a+3b}+\frac{4}{2a+3c}\ge\frac{16}{4a+3b+3c}.$$

Từ đó $\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{3b}+\dfrac{4}{2a+3c}\ge\dfrac{16}{4a+3b+3c}$,

suy ra $P+11\ge 16$, hay $P\ge 5$. Vậy $\min P=5$ đạt được khi $b=c=\dfrac{2}{3}a$.

Câu VIa. 1) $B\left(\dfrac{12}{5};\dfrac{3}{5}\right)$ và $C\left(\dfrac{12}{5};-\dfrac{3}{5}\right)$ hoặc $B\left(\dfrac{12}{5};-\dfrac{3}{5}\right)$ và $C\left(\dfrac{12}{5};\dfrac{3}{5}\right)$.

2) Chứng minh được A và B nằm khác phía so với (α). Gọi B_1 là điểm đối xứng với B qua (α), I là trung điểm BB_1. Từ điều kiện $\overrightarrow{BB_1}$ cùng phương với $\overrightarrow{n_\alpha}$ và $I\in(\alpha)$, tìm được $B_1(0;3;1)$. Ta có $\left|MA-MB\right|=\left|MA-MB_1\right|\le AB_1=\sqrt{6}$.

$\max\left|MA-MB\right|=\sqrt{6}$ khi $M(-1;4;-1)$.

Câu VIIa.

$(z_1;z_2)=(3-i;1+i)$; $(z_1;z_2)=(-1-i;-3+i)$.

Câu VIb. 1) Gọi A_1 là điểm đối xứng của A qua BE ($A_1\in BC$). PT đường thẳng BC: $3x+y+5=0$.

Gọi A_2 là điểm đối xứng với A qua B thì $A_2C//BM$. PT đường thẳng A_2C: $7x-y+35=0$. Tìm được $C(-4;7)$.

Đáp số. $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}BC.d(A,BC)=10$ (đvdt).

2) Ta thấy A, B nằm về cùng phía đối với (α). Gọi B_1 là điểm đối xứng với B qua (α). Tương tự câu VIa 2) tìm được $B_1(-2;2;0)$. Ta có

$$C_{MAB}=AB+MA+MB=\sqrt{6}+MA+MB_1$$
$$\ge\sqrt{6}+AB_1=\sqrt{6}+3\sqrt{2}.$$

Đáp số. $\min C_{MAB}=\sqrt{6}+3\sqrt{2}$ khi $M(-1;2;1)$.

Câu VIIb. Đặt $\log_3 x=t$ thì $x=3^t$.

Đáp số. PT đã cho có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{1}{3}$.

DƯƠNG CHÂU DINH

(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị)

HƯỚNG DẪN ÔN TẬP MÔN VẬT LÍ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG NĂM 2012

ĐÀO THỊ THU THỦY
(GV THPT chuyên Trần Phú, Hải Phòng)

DÒNG ĐIỆN XOAY CHIỀU

I – CÁC DẠNG BÀI TẬP

1. Xác định các đại lượng: điện trở thuần, cảm kháng cuộn dây, dung kháng của tụ điện, tổng trở của mạch điện, điện áp, cường độ dòng điện trong mạch, công suất của dòng điện xoay chiều.

2. Viết biểu thức điện áp tức thời, cường độ dòng điện tức thời.

3. Tìm cực trị của điện áp, cường độ dòng điện, công suất khi cho R hoặc L hoặc C hoặc ω biến thiên theo thời gian.

4. Xác định suất điện động cảm ứng, tần số dòng điện của máy phát điện, công suất động cơ điện.

5. Bài tập về máy biến áp, sự truyền tải điện năng.

II – MỘT SỐ LƯU Ý KHI GIẢI BÀI TẬP

1. Cần xác định đúng các phần tử của mạch điện, cách mắc các phần tử trong mạch điện.

2. Công thức tính tổng trở, độ lệch pha u, i đối với mạch R, L, C mắc nối tiếp trong bài học chỉ đúng cho trường hợp cuộn dây là thuần cảm.

3. Cộng hưởng điện xảy ra trong mạch R, L, C mắc nối tiếp là trường hợp giữ nguyên giá trị điện áp hiệu dụng hai đầu đoạn mạch và thay đổi tần số dòng điện trong mạch sao cho $L\omega = \dfrac{1}{C\omega}$.

4. Công thức tính công suất dòng điện xoay chiều $P = U.I.\cos\varphi$ là ứng với công suất trung bình của dòng điện.

5. Trong cách mắc dòng ba pha hình sao, chỉ khi các tải hoàn toàn đối xứng, dòng điện trên dây trung hòa mới bằng không. Công suất mạch điện ba pha bằng tổng công suất dòng điện trên các pha

6. Các công thức của máy biến áp trong bài học chỉ đúng với máy biến áp gồm hai cuộn dây có điện trở không đáng kể, mắc chung trên một lõi sắt kín, bỏ qua hao phí điện năng trong máy.

III – BÀI TẬP VÍ DỤ

❖**Câu 1.** *Nhiều hộp kín giống nhau, mỗi hộp có hai chốt với hai đầu của một tụ điện hoặc một cuộn cảm ở trong hộp. Lấy một đoạn mạch gồm một trong các hộp đó nối tiếp với một điện trở thuần có giá trị 60Ω. Khi đặt đoạn mạch vào một điện áp xoay chiều tần số 50Hz thì dòng điện trong mạch nhanh pha $\dfrac{29\pi}{90}$ so với điện áp. Hộp kín đó chứa*

A. *tụ điện có* $C = 33{,}2\mu F$.

B. *tụ điện có* $C = 16{,}6\mu F$.

C. *cuộn cảm có* $L = 153mH$.

D. *cuộn cảm có* $L = 306mH$.

Hướng dẫn. Do điện áp hai đầu mạch trễ pha so với dòng điện nên mạch gồm R và C nối tiếp có

$$\tan\left(-\frac{29\pi}{90}\right) = -\frac{1}{2\pi fRC} \Rightarrow C = 33{,}2.10^{-6}\,F.$$

❖**Câu 2.** *Đặt một điện áp xoay chiều có giá trị hiệu dụng U vào hai đầu đoạn mạch gồm hai cuộn cảm có các giá trị (R_1, L_1) và (R_2, L_2) mắc nối tiếp nhau. Gọi U_1 và U_2 lần lượt là điện áp hiệu dụng của hai cuộn (R_1, L_1) và (R_2, L_2). Điều kiện để $U = U_1 + U_2$ là*

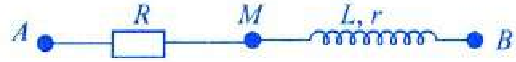
A. $L_1L_2 = R_1R_2$. **B.** $\dfrac{L_1}{R_2} = \dfrac{L_2}{R_1}$

C. $L_1 + L_2 = R_1 + R_2$. **D.** $\dfrac{L_1}{R_1} = \dfrac{L_2}{R_2}$.

Hướng dẫn. Để $U = U_1 + U_2$ thì $\vec{U}_1 \nearrow\nearrow \vec{U}_2$

suy ra $\tan\varphi_{u_1/i} = \tan\varphi_{u_2/i} \Rightarrow \dfrac{\omega L_1}{R_1} = \dfrac{\omega L_2}{R_2}$

❖**Câu 3.** *Cho mạch điện xoay chiều như hình vẽ.*



Biết các điện áp hiệu dụng $U_{AB} = 200$V; $U_{AM} = 100$V; $U_{MB} = 100\sqrt{2}$ V, $R = 50\Omega$, $f = 50$Hz. Tìm giá trị của r.

A. 50Ω. **B.** 30Ω. **C.** 25Ω. **D.** 20Ω.

Hướng dẫn

$$\frac{U_{AM}}{U_{AB}} = \frac{R}{\sqrt{(R+r)^2 + (2.\pi.f.L)^2}} = \frac{1}{2};$$

$$\frac{U_{AM}}{U_{MB}} = \frac{R}{\sqrt{r^2 + (2.\pi.f.L)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow r = 25\Omega.$$

❖**Câu 4.** *Cho mạch điện xoay chiều R, L, C mắc nối tiếp được duy trì bởi điện áp $u = 100\sqrt{2}\cos(100\pi t)$V. Biết điện áp hiệu dụng $U_L = 40$V; $U_C = 120$V. Tìm hệ số công suất của mạch điện.*

A. 0,8. **B.** 0,6. **C.** 0,7. **D.** 0,5.

Hướng dẫn

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} = \frac{U_R}{U} = \frac{\sqrt{U^2 - (U_L - U_C)^2}}{U} = 0,6.$$

❖**Câu 5.** *Cho một đoạn mạch R, L, C mắc nối tiếp, cuộn dây thuần cảm có $L = \frac{1}{\pi}$(H); $C = \frac{10^{-3}}{6\pi}$(F), điện áp hai đầu mạch là $u = 100\cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{2}2\right)$(V). Tìm điện trở R để công suất tiêu thụ trên đoạn mạch là lớn nhất. Xác định giá trị lớn nhất của công suất tiêu thụ trên đoạn mạch đó.*

A. 40Ω; 62,5W. **B.** 40Ω; 125W.

C. 20Ω; 125W. **D.** 20Ω; 62,5W.

Hướng dẫn

$$P = \frac{U^2.R}{R^2 + (Z_L - Z_C)^2} = \frac{U^2}{R + \frac{(Z_L - Z_C)^2}{R}}$$

Áp dụng BĐT Cauchy tìm được $P_{max} = \frac{U^2}{2|Z_L - Z_C|}$ khi $R = |Z_L - Z_C|$ suy ra $R = 40\Omega$; $P_{max} = 125$W.

❖**Câu 6.** *Một máy hạ áp có tỉ số giữa số vòng dây cuộn sơ cấp và cuộn thứ cấp bằng k = 6. Người ta mắc vào hai đầu cuộn dây thứ cấp một động cơ 150W-25V, có hệ số công suất 0,8. Mất mát năng lượng trong máy biến áp là không đáng kể. Nếu động cơ hoạt động bình thường thì cường độ hiệu dụng trong cuộn dây sơ cấp là*

A. 1,25A **B.** 1,6A. **C.** 0,8A. **D.** 1A.

Hướng dẫn. Động cơ hoạt động bình thường nên $150 = 25.I_2.0,8$ vậy $I_2 = 7,5$A suy ra $I_1 = \frac{I_2}{k} = 1,25$A

❖**Câu 7.** *Máy phát điện xoay chiều một pha có rôto nam châm gồm 4 cặp cực N-S xen kẽ, tốc độ quay của rôto là 750 vòng/phút. Phần ứng gồm bốn cuộn dây giống nhau, mỗi cuộn có 50 vòng, mắc nối tiếp. Biết suất điện động hiệu dụng máy tạo ra là 220V. Tính từ thông cực đại qua mỗi vòng dây.*

A. $3,5.10^{-3}$Wb. **B.** $2,8.10^{-3}$Wb.

C. 5.10^{-3}Wb. **D.** $12,5.10^{-3}$Wb.

Hướng dẫn. Tần số dòng điện máy tạo ra là

$$f = \frac{750.4}{60} = 50(Hz).$$

Suất điện động hiệu dụng máy tạo ra là

$$E = \frac{N.\Phi_0.2.\pi.f}{\sqrt{2}} \Rightarrow \Phi_0 \approx 5.10^{-3}(\text{Wb}).$$

DAO ĐỘNG VÀ SÓNG ĐIỆN TỪ

I – CÁC DẠNG BÀI TẬP

1. Xác định tần số dao động điện từ tự do, giá trị độ tự cảm, điện dung của mạch.

2. Viết biểu thức cường độ dòng tức thời, điện tích trên một bản tụ điện.

3. Sự biến thiên điện trường và từ trường trong mạch, vận dụng sự bảo toàn năng lượng điện từ của mạch dao động lí tưởng.

4. Xác định bước sóng điện từ mạch dao động có thể phát ra hay thu được.

II – MỘT SỐ LƯU Ý KHI GIẢI BÀI TẬP

1. Khi tụ phóng điện thì q giảm, i tăng; i biến thiên cùng tần số và nhanh pha hơn q là $\frac{\pi}{2}$.

2. Điện trường giữa hai bản tụ và từ trường của cuộn dây trong mạch biến thiên cùng pha với nhau, năng lượng điện trường và năng lượng điện trường cùng biến thiên với tần số gấp đôi tần số dao động của mạch và ngược pha nhau.

3. Khi sóng điện từ truyền từ môi trường này sang môi trường khác thì tần số sóng không đổi nhưng tốc độ truyền sóng thay đổi, công thức $\lambda = 3.10^8.2\pi\sqrt{LC}$ đúng với môi trường chân không (hoặc gần đúng trong không khí).

4. Nếu mạch dao động có giá trị điện dung tụ điện C và độ tự cảm cuộn dây L thay đổi thì bước sóng điện từ lớn nhất ứng với C_{max} và L_{max}, bước sóng điện từ nhỏ nhất ứng với C_{min} và L_{min}.

5. Sóng điện từ có tần số càng lớn, bước sóng càng nhỏ thì mang năng lượng càng lớn.

6. Nếu mạch dao động có điện trở thì dao động riêng của mạch sẽ tắt dần, để duy trì dao động cần cung cấp năng lượng bù vào phần năng lượng hao phí do toả nhiệt.

III – BÀI TẬP VÍ DỤ

❖**Câu 1.** *Trong mạch dao động điện từ, khi mắc C_1 nối tiếp với C_2 vào mạch thì tần số mạch là $f_{nt} = 100$MHz. Khi mắc C_1 song song với C_2 vào mạch thì tần số mạch là $f_{ss} = 48$MHz. Hỏi tần số mạch bằng bao nhiêu khi chỉ mắc C_1 vào mạch? (Biết $C_1 < C_2$).*

A. 60MHz. **B.** 80MHz.
C. 20MHz. **D.** 140MHz.

Hướng dẫn. Từ các công thức: $C_{ss} = C_1 + C_2$;

$\frac{1}{C_{nt}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$; $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ suy ra

$f_1^2 + f_2^2 = f_{nt}^2$; $\frac{1}{f_1^2} + \frac{1}{f_2^2} = \frac{1}{f_{ss}^2}$, chú ý $C_1 < C_2$

nên $f_1 > f_2$ suy ra $f_1 = 80$MHz.

❖**Câu 2.** *Một khung dao động có thể cộng hưởng trong dải bước sóng từ 100m đến 2000m. Khung này gồm một cuộn dây và một tụ phẳng có thể thay đổi khoảng cách giữa hai bản tụ. Với dải sóng mà khung cộng hưởng được thì khoảng cách giữa hai bản tụ thay đổi là*

A. $n = 120$ lần. **B.** $n = 200$ lần.
C. $n = 240$ lần. **D.** $n = 400$ lần.

Hướng dẫn. Sử dụng công thức $\lambda = v.2\pi\sqrt{LC}$

suy ra giá trị điện dung thay đổi $\left(\frac{2000}{100}\right)^2 = 400$ lần.

Với tụ phẳng $C \sim \frac{1}{d}$ nên khoảng cách hai bản tụ thay đổi 400 lần.

❖**Câu 3.** *Một mạch LC lí tưởng có năng lượng dao động là $W = 2.10^{-6}$J. Cứ sau một khoảng thời gian là $\Delta t = 0,314.10^{-6}$s thì năng lượng tụ lại biến thiên qua giá trị 10^{-6}J. Tính tần số góc của dao động của mạch.*

A. $\omega = 10^6$ rad/s. **B.** $\omega = 5.10^6$ rad/s.
C. $\omega = 5.10^7$ rad/s. **D.** $\omega = 10^7$ rad/s.

Hướng dẫn. Nhận thấy giá trị $10^{-6} J = \frac{W}{2}$.

Cứ sau một khoảng thời gian bằng $\frac{T}{4}$ thì năng lượng điện trường lại bằng năng lượng từ trường và bằng một nửa năng lượng điện từ, suy ra $w = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4\Delta t} = 5.10^6$(rad/s).

❖**Câu 4.** *Mạch dao động điện từ LC gồm tụ điện có $C = 5\mu$F và cuộn cảm thuần. Biết giá trị cực đại của điện áp giữa hai đầu tụ điện là $U_0 = 12$V. Tại thời điểm điện áp giữa hai đầu cuộn cảm bằng $u_L = 8$V năng lượng từ trường trong mạch bằng*

A. 2.10^{-4}J. **B.** $1,6.10^{-4}$J.
C. $4,0.10^{-4}$J. **D.** $3,2.10^{-4}$J.

Hướng dẫn. Năng lượng điện từ của mạch được bảo toàn, suy ra

$$W_{từ} = \frac{CU_0^2}{2} - \frac{Cu^2}{2} = 2.10^{-4} \text{ (J)}.$$

❖**Câu 5.** *Mạch dao động gồm cuộn dây có độ tự cảm $L = 30\mu$H một tụ điện có $C = 3000$pF. Điện trở thuần của mạch dao động là 1Ω. Để duy trì dao động điện từ trong mạch với hiệu điện thế cực đại trên tụ điện là 6V phải cung cấp cho mạch một năng lượng điện có công suất*

A. 1,80W. **B.** 3,6W.
C. 1,80mW. **D.** 3,6mW.

Hướng dẫn. Công suất cung cấp năng lượng

$$P = I^2R = \frac{I_0^2}{2}R = \frac{CU_0^2}{2L}R = 1,8.10^{-3}\text{(W)}.$$

GIỚI THIỆU MỘT SỐ CHƯƠNG TRÌNH ĐÁNH GIÁ QUỐC GIA VÀ QUỐC TẾ HỌC SINH PHỔ THÔNG ĐÃ THỰC HIỆN Ở VIỆT NAM

NGUYỄN HẢI CHÂU
*(Phó Vụ trưởng Vụ Giáo dục Trung học,
Giám đốc Chương trình Phát triển Giáo dục Trung học, Bộ GD&ĐT)*

Đánh giá quốc gia và quốc tế là đánh giá ngoài trên diện rộng đối với các cơ sở giáo dục. Đánh giá ngoài là kênh thông tin quan trọng xem xét độ tin cậy của đánh giá trong; làm hạn chế tính chủ quan; tăng cường tính khách quan của đánh giá trong góp phần điều chỉnh đánh giá trong; là động lực nâng cao chất lượng đánh giá trong nhằm nâng cao hiệu quả hai chức năng cơ bản của đánh giá:

- Chức năng xác nhận: Độ tin cậy cao (chính xác, khách quan, công bằng);
- Chức năng điều khiển: Tác động vào quá trình dạy học (tạo động lực thúc đẩy, nâng cao chất lượng dạy học).

I. CHƯƠNG TRÌNH ĐÁNH GIÁ QUỐC GIA

1. Đánh giá kết quả học tập của học sinh lớp 5

- *Khảo sát 2 môn:* Toán và Tiếng Việt.
- *Mẫu học sinh:* 60.000 em lớp 5 thuộc 63 tỉnh, thành phố.
- Đã triển khai 3 kì vào các năm 2001, 2007, 2011:

+ Kì khảo sát 2001: Chuyên gia quốc tế Ngân hàng thế giới (WB) thực hiện, chuyên gia Việt Nam chỉ hỗ trợ.

+ Kì khảo sát 2007: Việt Nam thực hiện, chuyên gia quốc tế hỗ trợ.

+ Kì khảo sát 2011: Việt Nam thực hiện hoàn toàn.

2. Đánh giá kết quả học tập của học sinh lớp 6 năm 2009

- *Mẫu học sinh*: 10.000 em lớp 6 thuộc 25 tỉnh, thành phố.
- *Khảo sát 2 môn*: Toán và Ngữ văn.

3. Đánh giá kết quả học tập của học sinh lớp 9 năm 2009

- *Mẫu học sinh*: 36.000 em lớp 9 thuộc 63 tỉnh, thành phố.
- Khảo sát 4 môn: Toán, Ngữ Văn, Vật lí, Tiếng Anh.

4. Đánh giá kết quả học tập của học sinh lớp 11

a) Mục tiêu

- Giám sát, đánh giá kết quả học tập của học sinh sau một giai đoạn học tập và rèn luyện. Từ đó cung cấp các thông tin góp phần vào việc chỉnh lí và điều chỉnh chương trình – sách giáo khoa và tạo cơ sở cho việc thiết kế chương trình – sách giáo khoa THPT cho giai đoạn tiếp theo.
- Xem xét mức độ đạt chuẩn kiến thức, kĩ năng theo chương trình hiện hành đối với các môn Toán, Ngữ văn và Tiếng Anh của học sinh tại thời điểm khảo sát.
- Cung cấp một mô hình khảo sát kết quả học tập của học sinh cho các Sở Giáo dục và Đào tạo để thực hiện các cuộc khảo sát tương tự với quy mô cấp tỉnh, thành phố. Các thông tin từ các cuộc khảo sát đó có thể giúp các tỉnh đánh giá được chất lượng học tập ở địa phương, đồng thời có thể giúp việc xây dựng và điều chỉnh kế hoạch phát triển giáo dục cho phù hợp thực tiễn địa phương.
- Cung cấp cho các nhà hoạch định chính sách những nguồn thông tin về các xu hướng dài hạn rút ra được từ kết quả giám sát, đánh giá thành tích học tập của học sinh. Đề xuất các kiến nghị giúp Bộ Giáo dục và Đào tạo điều chỉnh các chính sách hiện hành và xây dựng những chiến lược và chính sách mới nhằm phát triển sự nghiệp giáo dục Trung học nói riêng và giáo dục phổ thông nói chung.
- Nâng cao năng lực và trình độ đội ngũ chuyên gia về các lĩnh vực: Thiết kế và điều hành các cuộc khảo sát; Thiết kế các công cụ khảo sát; Chọn mẫu khảo sát; Xử lí và phân tích kết quả khảo sát; Xây dựng các báo cáo giám sát, đánh giá thành tích học tập học sinh.

- Góp phần chuẩn bị tâm thế và các điều kiện cho cán bộ quản lí, giáo viên và học sinh tham gia Chương trình đánh giá học sinh quốc tế (PISA) vào năm 2012.

b) Đối tượng khảo sát. Học sinh học lớp 11 năm học 2011-2012; Giáo viên dạy các môn học được khảo sát lớp 11; Hiệu trưởng các trường THPT.

c) Nội dung khảo sát

- Khảo sát kết quả học tập của học sinh học hết chương trình học kỳ 1 lớp 11 năm học 2011-2012 ở môn Toán, Ngữ văn và Tiếng Anh.

- Khảo sát về các nhân tố liên quan đến kết quả học tập của học sinh.

d) Chọn mẫu khảo sát thử nghiệm

- *Mẫu trường*: Chọn ngẫu nhiên 12 trường THPT trên toàn quốc thuộc 4 tỉnh ; thành phố.

- *Mẫu học sinh*: Chọn 1080 học sinh (90 học sinh/trường được khảo sát) .

- *Mẫu giáo viên*: Hiệu trưởng, Phó hiệu trưởng; giáo viên dạy Toán, giáo viên dạy Ngữ văn, giáo viên dạy Tiếng Anh.

e) Chọn mẫu khảo sát chính thức

- *Mẫu trường*: Chọn ngẫu nhiên 340 trường THPT thuộc 63 tỉnh/thành phố.

- *Mẫu học sinh*: Chọn 30 học sinh/trường được khảo sát.

- *Mẫu Hiệu trưởng, giáo viên*: Mỗi trường chọn Hiệu trưởng, 2 giáo viên dạy Toán, 2 giáo viên dạy Ngữ văn, 2 giáo viên dạy Tiếng Anh.

f) Các công cụ khảo sát

- Các đề khảo sát đánh giá kết quả môn học

+ Đề khảo sát môn Toán, Ngữ văn, học kì I - lớp 11 gồm 2 phần: Trắc nghiệm và Tự luận.

+ Đề khảo sát môn tiếng Anh học kì I - lớp 11. gồm 3 phần: Phần Nghe hiểu, Kiến thức ngôn ngữ và Đọc hiểu, phần Viết.

- Các bộ phiếu hỏi

+ Phiếu hỏi Hiệu trưởng trường THPT.

+ Phiếu hỏi giáo viên dạy môn Toán, Ngữ văn, Tiếng Anh lớp 11.

+ Phiếu hỏi học sinh lớp 11.

g) Thời điểm khảo sát thử nghiệm và chính thức

Khảo sát thử nghiệm lớp 11 được tiến hành từ ngày 3-5/11/2011.

Khảo sát chính thức lớp 11 được tiến hành từ ngày 29-31/12/2011.

II. CHƯƠNG TRÌNH ĐÁNH GIÁ QUỐC TẾ

1. CHƯƠNG TRÌNH PASEC

PASEC - Programme d'analyse des systèmes éducatifs de la CONFEMEN.

Căn cứ trên Thỏa thuận về Chương trình phân tích các hệ thống giáo dục của Hội nghị Bộ trưởng Giáo dục các nước sử dụng tiếng Pháp giai đoạn 10 (PASEC X).

a) Mục tiêu chung của PASEC

- Nhận dạng các mô hình nhà trường có hiệu quả, ít tốn kém, bằng cách tiến hành các cuộc điều tra theo mẫu lựa chọn tại các trường, sau đó tiến hành so sánh trên phạm vi quốc gia và quốc tế.

- Phát triển tại mỗi nước thành viên năng lực bên trong và thường xuyên về đánh giá của hệ thống giáo dục nước mình.

- Phổ biến các phương pháp, các công cụ đánh giá được áp dụng cũng như các kết quả đạt được.

- Nâng cao vai trò quan sát các hệ thống giáo dục của Ban Thư kí kĩ thuật thường trực CONFEMEN.

b) Mục tiêu riêng của Việt Nam

- Đánh giá kết quả học tập của học sinh lớp 2 và lớp 5 trong lĩnh vực Toán và Tiếng Việt vào đầu và cuối năm học, đồng thời thu thập các thông tin về những nhân tố tác động đến kết quả học tập của học sinh.

- Hội nghị Bộ trưởng Giáo dục các nước sử dụng tiếng Pháp đưa ra kết quả phân tích và đánh giá về chính sách giáo dục quốc gia và đề xuất những thay đổi về chính sách giáo dục cho các quốc gia.

- Nâng cao năng lực của đội ngũ cán bộ quản lí giáo dục và giáo viên về kĩ thuật đánh giá kết quả học tập của học sinh theo chuẩn quốc tế.

- Góp phần đổi mới phương pháp đánh giá và đưa ra cách tiếp cận mới về dạy, học, đánh giá và thi.

- Tăng cường hợp tác quốc tế trong lĩnh vực giáo dục.

c) Đối tượng khảo sát

- Học sinh lớp 2 và lớp 5 năm học 2011 - 2012.

- Hiệu trưởng trường Tiểu học và giáo viên dạy lớp 2 và lớp 5 năm học 2011 - 2012.

d) Công cụ khảo sát

- Đề kiểm tra 2 môn Toán, Tiếng Việt lớp 2 và lớp 5.
- Bộ phiếu hỏi học sinh lớp 2 và lớp 5.
- Bộ phiếu hỏi giáo viên dạy lớp 2 và lớp 5.
- Bộ phiếu hỏi Hiệu trưởng trường Tiểu học.

e) Mẫu khảo sát

- *Mẫu học sinh*: Chọn 2.700 em lớp 2 và 2.700 em lớp 5. Tổng mẫu khảo sát quốc gia cả 2 khối lớp là 5.400 em.
- *Mẫu giáo viên*: Mỗi khối chọn 180 giáo viên. Tổng cộng là 360 giáo viên.
- *Mẫu Hiệu trưởng*: Chọn 180 người.

f) Thời điểm tiến hành khảo sát

- Khảo sát đầu vào: Tuần thứ hai tháng 12 năm 2011.
- Khảo sát đầu ra: Từ 22-25/5/2012.

2. CHƯƠNG TRÌNH PISA

PISA - Progamme for International Students Assessment (Chương trình đánh giá học sinh quốc tế)

a) Mục tiêu của PISA

Mục tiêu của chương trình PISA nhằm kiểm tra xem, khi đến độ tuổi kết thúc phần giáo dục bắt buộc, học sinh đã được **chuẩn bị để đáp ứng các thách thức của cuộc sống sau này ở mức độ nào**.

Thu thập và cung cấp cho các quốc gia các dữ liệu có thể **so sánh được ở tầm quốc tế** cũng như xu hướng của dữ liệu quốc gia về trình độ đọc hiểu, toán học và khoa học của học sinh độ tuổi 15.

b) Đề thi PISA

- Bộ đề thi PISA bao gồm nhiều bài tập (Unit), mỗi bài tập gồm một số câu hỏi (Item). Mỗi đề thi đánh giá một số nhóm năng lực của một lĩnh vực nào đó và được đóng thành quyển **Đề thi PISA** (Booklet), dày khoảng 60 trang, khoảng 60 câu hỏi. Thời gian để học sinh làm một đề thi là 120 phút.
- Các dạng câu hỏi trong đề thi PISA

+ Câu hỏi trắc nghiệm khách quan nhiều lựa chọn, đơn giản hoặc phức tạp;

+ Câu hỏi đóng đòi hỏi trả lời ngắn;

+ Câu hỏi mở đòi hỏi trả lời ngắn hoặc trả lời dài.

- Mỗi kì đánh giá tập trung vào một lĩnh vực chính (Năm 2000 là Đọc hiểu; Năm 2003 là Toán học; Năm 2006 là Khoa học, Năm 2009 là Đọc hiểu; Năm 2012 là Toán học).

c) Chấm thi PISA (Mã hóa)

PISA sử dụng thuật ngữ coding (mã hóa), không sử dụng khái niệm chấm bài, vì mỗi một mã của câu trả lời được quy ra điểm số tùy theo yêu cầu của câu hỏi.

d) Các hoạt động chính tham gia PISA

- Đánh giá các câu hỏi thi PISA 2012 và thực hiện các công việc liên quan đến chọn mẫu; tập huấn kĩ thuật.

- *Tổ chức khảo sát thử nghiệm*

+ *Đối tượng:* Học sinh sinh năm 1995 tại các cơ sở giáo dục được chọn (35 học sinh/1 trường). Tổng cộng 1.080 học sinh ở tuổi 15.

+ *Công cụ khảo sát*

• Bài khảo sát (đề thi) gồm 3 lĩnh vực: Toán học, Khoa học và Đọc hiểu.

• Bộ phiếu hỏi học sinh.

• Bộ phiếu hỏi dành cho Nhà trường.

+ *Thời gian*: Từ 17-19/5/2011.

- *Tổ chức khảo sát chính thức*

+ *Đối tượng*: Học sinh sinh năm 1996 tại các cơ sở giáo dục được chọn (35 học sinh/1 trường). 162 trường thuộc 59 tỉnh. Tổng cộng khoảng 5.200 học sinh ở tuổi 15.

+ *Công cụ khảo sát*

• 13 bộ đề thi chính thức, mỗi học sinh làm 01 đề thi trong 120 phút. Các câu hỏi thi PISA ở lĩnh vực Toán, Khoa học, Đọc hiểu được tổ hợp thành 13 quyển đề thi (booklet) khác nhau. Học sinh được xác định ngẫu nhiên để làm một trong 13 đề.

• 03 bộ phiếu hỏi học sinh.

• 01 bộ phiếu hỏi dành cho nhà trường.

+ *Thời gian*: Từ 12-14/4/2012.

CÁC LỚP THCS

Bài T1/419. (Lớp 6). Cho

$$A = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{50^2} \text{ và } B = \frac{165}{101}.$$

So sánh A và B.

NGUYỄN SƠN HÀ
(GV THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)

Bài T2/419. (Lớp 7). Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Giả sử trong tam giác có điểm M thỏa mãn điều kiện $\widehat{MBA} = \widehat{MAC} = \widehat{MCB}$. Tính $MA : MB : MC$.

NGUYỄN KHÁNH NGUYÊN
(GV THCS Hồng Bàng, Hải Phòng)

Bài T3/419. Tìm giá trị nhỏ nhất của các số tự nhiên a, b, c thỏa mãn

$$a + (a+1) + (a+2) + \ldots + (a+6)$$
$$= b + (b+1) + (b+2) + \ldots + (b+8)$$
$$= c + (c+1) + (c+2) + \ldots + (c+10).$$

LÊ VĂN TRẠCH
(Đồng Nai)

Bài T4/419. Giải phương trình

$$6(x-1)\sqrt{x+1} + (x^2+2)\left(\sqrt{x-1} - 3\right) = x(x^2+2).$$

LẠI QUANG THỌ
(GV THCS Tam Dương, Vĩnh Phúc)

Bài T5/419. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. M là điểm chính giữa của cung $\overset{\frown}{AB}$, C là một điểm trên nửa đường tròn, AC cắt MO tại D. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MDC luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi C di động trên nửa đường tròn.

PHẠM TUẤN KHẢI
(Hà Nội)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/419. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$6(a^3+b^3+c^3)$$
$$\geq 18abc + \left(\sqrt[3]{a(b-c)^2} + \sqrt[3]{b(c-a)^2} + \sqrt[3]{c(a-b)^2}\right)^3.$$

ĐOÀN VĂN SOẠN
(GV THPT Lý Thường Kiệt, Việt Yên, Bắc Giang)

Bài T7/419. Cho tam giác nhọn ABC không cân. Gọi H, O lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC; D, E lần lượt là chân đường cao hạ từ các đỉnh A, B của tam giác ABC. Các đường thẳng OD và BE cắt nhau tại K, các đường thẳng OE và AD cắt nhau tại L. Gọi M là trung điểm cạnh AB. Chứng minh rằng ba điểm K, L, M thẳng hàng khi và chỉ khi bốn điểm C, D, O, H cùng nằm trên một đường tròn.

NGUYỄN VĂN NHIỆM
(GV THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa)

Bài T8/419. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (n, k) thỏa mãn điều kiện $C_{3n}^n = 3^n n^k$

(với $C_p^m = \dfrac{p!}{m!(p-m)!}$; $0 \leq m \leq p, p \neq 0, m, p \in \mathbb{N}$).

ĐỖ THANH HÂN
(GV THPT chuyên Bạc Liêu)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/419. Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện

$$15\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) = 10\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) + 2012.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{\sqrt{5a^2+2ab+2b^2}} + \frac{1}{\sqrt{5b^2+2bc+2c^2}}$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{5c^2+2ca+2a^2}}.$$

NGUYỄN TIẾN TIẾN
(GV THPT Gia Viễn B, Ninh Bình)

Bài T10/419. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ ta có

$$f(xf(y)) + f(f(x) + f(y)) = yf(x) + f(x + f(y)).$$

TRẦN NGỌC THẮNG
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T11/419. Trên đoạn $[a\ ;\ b]$, ta lấy k điểm phân biệt $x_1, x_2, ..., x_k$. Gọi d_n là tích các khoảng cách từ điểm x_n tới $k-1$ điểm còn lại; $n = 1, 2, 3..., k$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{d_n}$.

PHẠM NGỌC BỘI
(GV ĐH Vinh, Nghệ An)

Bài T12/419. Cho tam giác ABC và điểm M bất kì trong mặt phẳng. Chứng minh rằng

$$\frac{MA}{BC} + \frac{MB}{CA} + \frac{MC}{AB} \geq \frac{BC + CA + AB}{MA + MB + MC}.$$

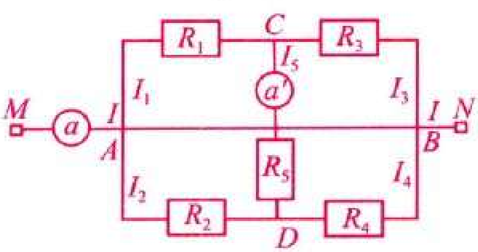
NGUYỄN VĂN QUÝ
(SV K56A1T1, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/419. Một người bơi thẳng từ điểm A ở cạnh bờ sông đến điểm đối diện B ở bờ bên kia với vận tốc ban đầu v_0 = 2m/s, A cách B một khoảng L = 100 m. Coi dòng nước chảy đều trên mặt sông với vận tốc v_n = 1 m/s. Hỏi người đó bơi qua sông mất bao lâu? Biết rằng vận tốc bơi giảm đều theo khoảng cách và khi đến B thì chỉ còn 1m/s.

PHẠM XUÂN THI
(3CB-38-Biên Hòa, Đồng Nai)

Bài L2/419. Cho một mạch cầu như hình vẽ.



Cho biết $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 3\Omega$, $R_3 = 13\Omega$, $R_4 = 4\Omega$, $R_5 = 6\Omega$, điện trở của các ampe kế a và a' nhỏ không đáng kể; ampe kế a chỉ $I = 0{,}7$A.

1) Hãy xác định các cường độ dòng điện qua các điện trở R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 (R_5 gọi là điện trở cầu) và điện áp U_{AB};

2) Giữ nguyên U_{AB} như câu 1, thay điện trở R_4 bằng điện trở R thì thấy ampe kế a' chỉ số không (cầu cân bằng). Hãy xác định R và số chỉ của ampe kế a.

3) Cầu có còn cân bằng không khi thay đổi giá trị của U_{AB} hoặc của I?

NGUYỄN QUANG HẬU
(Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/419. (For 6th grade). Let

$$A = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{50^2} \text{ and } B = \frac{165}{101}.$$

Compare A and B.

T2/419. (For 7th grade). Let ABC be a right isosceles triangle with right angle at A. If there exists a point M inside the triangle with $\widehat{MBA} = \widehat{MAC} = \widehat{MCB}$. Find the ratio $MA : MB : MC$.

T3/419. Find the minimum values of the natural numbers a, b, c satisfying

$$a + (a+1) + (a+2) + ... + (a+6)$$
$$= b + (b+1) + (b+2) + ... + (b+8)$$
$$= c + (c+1) + (c+2) + ... + (c+10).$$

T4/419. Solve the following equation

$$6(x-1)\sqrt{x+1} + (x^2+2)\left(\sqrt{x-1} - 3\right) = x(x^2+2).$$

T5/419. Let M be the midpoint of the arc AB of a semicircle with center O and diameter AB. AC meets MO at D. Prove that the circumcenter of triangle MDC always lies on a fixed line when C moves on the semicircle.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/419. Let a, b, c be positive real numbers. Prove that $6(a^3 + b^3 + c^3)$

$$\geq 18abc + \left(\sqrt[3]{a(b-c)^2} + \sqrt[3]{b(c-a)^2} + \sqrt[3]{c(a-b)^2}\right)^3.$$

T7/419. Let ABC be an acute triangle which is not isosceles; and H, O be its orthocenter and circumcenter respectively; let D, E be respectively the foot of the altitude from A, B. The lines OD and BE intersect at K, OE and AD intersect at L. Let M be the midpoint of edge AB. Prove that K, L, M are collinear if and only if C, D, O, H lies on the same circle.

T8/419. Find all pairs of positive integers (n, k) satisfying $C_{3n}^{n} = 3^n n^k$, where

$$C_p^m = \frac{p!}{m!(p-m)!};\ 0 \leq m \leq p, p \neq 0,\ m, p \in \mathbb{N}.$$

(Xem tiếp trang 27)

★Bài T1/415. *Cho* $A=\dfrac{2011^{2011}}{2012^{2012}}$ *và* $B=\dfrac{2011^{2011}+2011}{2012^{2012}+2012}$. *So sánh A và B.*

Lời giải. Ta giải bài toán tổng quát. Đặt $n=2011$, khi đó cần so sánh

$$A=\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \text{ và } B=\frac{n^n+n}{(n+1)^{n+1}+n+1}.$$

$$B-A=\frac{n^n(n+1)^{n+1}+n(n+1)^{n+1}-n^n(n+1)^{n+1}-(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}\left((n+1)^{n+1}+n+1\right)}.$$

Tử số của phân số $B-A$ (với $n>1$) bằng

$C=n(n+1)\left((n+1)^n-n^{n-1}\right)>0$, do đó $B>A$. ❐

➢Nhận xét. 1) Nhiều bạn chứng tỏ $\dfrac{B}{A}>1$ hoặc chứng minh bổ đề sau:

"*Với các số dương x, y mà* $x<y$ *thì* $\dfrac{x}{y}<\dfrac{x+1}{y+1}$", rồi đặt $x=2011^{2010}, y=2012^{2011}$ cũng suy ra kết quả.

2) Các bạn sau có lời giải đúng:

Phú Thọ: *Lê Việt Hòa*, 6A, THCS Vĩnh Lại, Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Khánh Lâm, Lê Anh Tuấn*, 6A, THCS Sơn Đông, Lập Thạch, *Nguyễn Thị Duyên, Nguyễn Thị Mỹ Duyên B, Nguyễn Thị Thùy Hòa, Lê Thị Thùy Linh, Hoàng Thị Minh Nguyệt, Phạm Hoàng Ly, Phạm Thị Thúy Nga*, 6A1, *Nguyễn Xuân Dương, Đàm Tuấn Minh, Nguyễn Hương Quỳnh*, 6A3, *Lưu Thị Hồng Nhung*, 6A5, *Chu Mai Anh*, 6E, THCS Yên Lạc; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Tuấn Anh*, 6D, THCS Nhữ Bá Sỹ, TTr. Bút Sơn, Hoằng Hóa; **Nghệ An:** *Hồ Hữu Hai*, 6A, *Hồ Văn Trung*, 6B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Tấn Trung*, 6H, THCS Huỳnh Thúc Kháng, *Đặng Lưu Việt Quý, Phạm Thị Mỹ Hằng, Cao Thị Thúy Điểm, Nguyễn Thúy Phượng, Nguyễn Tấn Phúc, Nguyễn Thị Mỹ Chi, Võ Quang Phú Thời*, 6A, *Đỗ Thị Thanh Truyền*, 6D, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành, *Trần Thị Mỹ Ninh, Võ Nguyên Hải, Nguyễn Phan Trà My*, 6A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Đình Duy*, 6A1, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa.

VIỆT HẢI

★Bài T2/415. *Cho* $A=\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6}}}$, $B=\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\ldots+\sqrt[3]{6}}}$, *A và B đều có n dấu căn. Kí hiệu [x] là số nguyên lớn nhất không vượt quá x. Hãy tìm* $\left[\dfrac{A-B}{A+B}\right]$.

Lời giải. Ta có

Với $n=1$ thì $A=\sqrt{6}>\sqrt{4}=2=\sqrt[3]{8}>\sqrt[3]{6}=B$.

Với $n\geq 2$ thì

$$A=\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6}}}>\sqrt{6}>\sqrt{4}=2 \Rightarrow A>2 \quad (1)$$

$$B=\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\ldots+\sqrt[3]{6}}}<\underbrace{\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\ldots+\sqrt[3]{8}}}}_{n \text{ dấu căn}}$$

$$=\underbrace{\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\ldots+\sqrt[3]{8}}}}_{n-1 \text{ dấu căn}}=\ldots=\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{8}}=\sqrt[3]{8}=2.$$

$$\Rightarrow B<2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $A>B\Rightarrow A-B>0$.

Vì $A>0$, $B>0$ nên $A+B>0$ (3)

Mặt khác, $(A+B)-(A-B)=2B>0$

$\Rightarrow A+B>A-B>0$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $0<\dfrac{A-B}{A+B}<1$.

Vậy $\left[\dfrac{A-B}{A+B}\right]=0$. ❐

➢Nhận xét. 1) Một số bạn chứng minh $A>B$ bằng cách nhận xét: *Nếu* $a>1$ *thì* $\sqrt{a}>\sqrt[3]{a}$. *Có thể chứng minh được kết quả mạnh hơn* $\dfrac{1}{12}<\dfrac{A-B}{A+B}<\dfrac{4}{9}$.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:
Phú Thọ: *Kiều Thế Hưng*, 7C, THCS Sông Thao, Cẩm Khê, *Nguyễn Đức Thuận*, 7A3, THCS Lâm Thao; **Hà Nội:** *Tạ Mai Anh*, 6C, THCS Tam Hưng, Thanh Oai; **Thanh Hóa:** *Lê Quang Dũng*, 7D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Thúy Phượng, Nguyễn Thị Hạ Vy, Phạm Quang Nghĩa, Nguyễn Thị Hạnh, Đặng Lưu Việt Quý, Cao Thị Thúy Điểm, Vũ Thị Thi*, 7A, THCS Hành Phước, *Nguyễn Tấn Trung*, 6H, THCS Huỳnh Thúc Kháng, Nghĩa Hành, *Phạm Thị Vy Vy, Nguyễn Phan Trà My, Trần Thị Mỹ Ninh*, 7A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★Bài T3/415. *Tìm các số tự nhiên x, y thỏa mãn* $x^2-5x+7=3^y$ (1)

Lời giải. • Nếu $y=0$ thì PT (1) trở thành

$$x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=3. \end{array}\right.$$

PT (1) có hai cặp nghiệm $(x;y)$ là $(2;0),(3;0)$.

• Nếu $y=1$ thì (1) trở thành

$$x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4. \end{array}\right.$$

PT(1) có hai cặp nghiệm $(x;y)$ là $(1;1),(4;1)$.

• Nếu $y\ge 2$ thì $3^y=3.3^{y-1}\vdots 9$.

Ta xét VT (1) theo các trường hợp số dư của x khi chia cho 3.

Nếu $x=3k$ $(k\in\mathbb{N})$ thì $x^2-5x+7\not\vdots\, 3$ nên PT (1) vô nghiệm.

Nếu $x=3k+1$ $(k\in\mathbb{N})$ thì

$x^2-5x+7=(3k+1)^2-5(3k+1)+7=9k^2-9k+3\not\vdots\, 9$

nên PT (1) vô nghiệm.

Nếu $x=3k+2$ $(k\in\mathbb{N})$ thì

$x^2-5x+7=(3k+2)^2-5(3k+2)+7=9k^2-3k+1\not\vdots\, 3$

nên PT (1) vô nghiệm.

Vậy có bốn cặp nghiệm tự nhiên $(x;y)$ thỏa mãn PT (1) là $(2;0),(3;0),(1;1),(4;1)$. ❒

➤**Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải tốt:
Phú Thọ: *Nguyễn Đức Thuận*, 7A3, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Thị Thu Trang*, 6A5, *Đàm Tuấn Minh, Nguyễn Thị Thanh*, 6A3, THCS Yên Lạc; **Hà Nội:** *Nguyễn Chí Tùng*, 9A10, THCS Giảng Võ, Ba Đình; **Bắc Ninh:** *Tạ Thị Nga, Nguyễn Thị Vân, Nguyễn Thị Phương*, 9A, THCS Yên Phong; **Nam Định:** *Phạm Quang Huy*, 7A4, THCS Trần Đăng Ninh; **Thanh Hóa:** *Lê Quang Dũng*, 7D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Thị Khánh Huyền*, 7A, *Trần Đoan Trang*, 8C, THCS Xuân Diệu, Can Lộc, *Phạm Hoàng, Nguyễn Thị Khánh Linh, Trần Mai Hiền, Lê Trung Anh*, 8B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ; **Quảng Ngãi:** *Trần Thị Mỹ Ninh*, 8A, THCS Nghĩa Mỹ, *Nguyễn Quang Tính*, 9C, THCS TTr. Sông Vệ, Tư Nghĩa; **TP. Hồ Chí Minh:** *Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy*, 8A3, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa.

TRẦN HỮU NAM

★Bài T4/415. *Chứng minh bất đẳng thức*

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)...\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<3 \qquad (1)$$

Lời giải. Gọi vế trái của BĐT (1) là A.

• Với $n=1$ thì $A=1+\frac{1}{2}<3$ (BĐT (1) đúng).

• Với $n\ge 2$ thì $A=\frac{3}{2}.\left(1+\frac{1}{2^2}\right)...\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$.

Cách 1. Nhận xét: Với $m\in\mathbb{N}^*$, $m\ge 2$ thì

$$1+\frac{1}{2^m}<\frac{1}{2}.\frac{2^m-1}{2^{m-1}-1} \qquad (2)$$

Thật vậy, xét hiệu

$$\frac{1}{2}.\frac{2^m-1}{2^{m-1}-1}-\left(1+\frac{1}{2^m}\right)=\frac{2^m-1}{2^m-2}-1-\frac{1}{2^m}$$

$$=\frac{1}{2^m\left(2^{m-1}-1\right)}>0 \quad (\text{do } m\ge 2).$$

Do đó suy ra BĐT (2) được chứng minh.

Áp dụng BĐT (2) với $m=2, 3, ..., n$ ta được

$$A<\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}.\frac{2^2-1}{2-1}\right)\left(\frac{1}{2}.\frac{2^3-1}{2^2-1}\right)...\left(\frac{1}{2}.\frac{2^n-1}{2^{n-1}-1}\right)$$

$$=\frac{3}{2}.\frac{1}{2^{n-1}}.\frac{(2^2-1)(2^3-1)...(2^n-1)}{(2-1)(2^2-1)...(2^{n-1}-1)}$$

$$=3.\frac{2^n-1}{2^n}<3.1=3 \text{ (đpcm).}$$

Cách 2. Nhận xét: Với $m\in\mathbb{N}^*$, $m\ge 2$ thì

$$2^m\ge m^2-1 \qquad (3)$$

Ta chứng minh nhận xét trên bằng phương pháp quy nạp toán học.

Ta có $2^2>2-1$; $2^3=3^2-1$ (luôn đúng).

Giả sử $2^k\ge k^2-1$ (với $k\ge 3$) ta sẽ chứng minh rằng $2^{k+1}\ge(k+1)^2-1$.

Thật vậy $2^{k+1}=2.2^k\ge 2(k^2-1)$

$=(k^2+2k+1)+(k^2-2k-3)$

$=(k+1)^2+(k-1)^2-2\ge(k+1)^2+1.$

Theo nguyên lí quy nạp, suy ra BĐT (3) đã được chứng minh.

Từ (3) $\Leftrightarrow 1+\frac{1}{2^m} \le 1+\frac{1}{m^2-1}=\frac{m^2}{m^2-1}$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{1}{2^m} \le \frac{m^2}{(m-1)(m+1)} \qquad (4)$$

Áp dụng BĐT (4) với $m = 2, 3, ..., n$, ta có

$$A<\frac{3}{2}.\frac{2^2}{1.3}.\frac{3^2}{2.4}...\frac{n^2}{(n-1)(n+1)}=\frac{3n}{n+1}$$

$$<\frac{3(n+1)}{n1}=3 \text{ (đpcm). } \square$$

➤**Nhận xét.** 1) Với trường hợp $n \ge 2$ ta có thể dùng nhận xét: Nếu $0<x<1$, $0<y<1$ thì $1+x<\frac{1}{1-x}$ và $(1-x)(1-y) > 1-x-y$ để đánh giá $A < 3$.

Đa số bài giải của các bạn theo một trong hai cách trên. Tuy nhiên, nhiều bạn lập luận thiếu chặt chẽ và không chứng minh nhận xét đưa ra.

2) Tuyên dương các bạn sau đây có lời giải tốt:

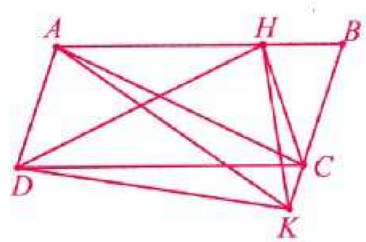
Vĩnh Phúc: *Trương Thị Hoài Thu*, 8A, *Nguyễn Đức Đại*, 9A1, THCS Yên Lạc, *Ngô Tuấn Anh*, 8T, THCS Đồng Xuân, TX. Phúc Yên; **Thanh Hóa:** *Lê Quang Dũng*, 7D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; **Quảng Ngãi:** *Cao Thị Thủy Điểm*, 8A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★Bài T5/415. *Cho hình bình hành ABCD. Trên các đường thẳng AB và BC lấy các điểm tương ứng H và K, sao cho các tam giác KAB và HCB cân (KA = AB, HC = CB). Chứng minh rằng*

1) Tam giác KDH cân.

2) Các tam giác KAB, BCH, KDH đồng dạng với nhau.



Lời giải. Ta chứng minh cho trường hợp hình bình hành $ABCD$ có dạng như ở hình vẽ bên (H nằm trên đoạn AB, K nằm ngoài đoạn BC), các trường hợp khác chứng minh tương tự.

a) Do tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên $AD = BC$, lại có $HC = BC$ nên $AD = HC$, suy ra $AHCD$ là hình thang cân. Do đó $AC = DH$ (1)

Tương tự, vì $AK = AB = CD$ nên $ACKD$ là hình thang cân, suy ra $AC = DK$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $DH = DK$ hay tam giác DHK cân tại D.

b) Do hai hình thang cân $AHCD$ và $ACKD$ nội tiếp được nên năm điểm A, H, C, K, D nằm trên một đường tròn. Do đó

$$\widehat{DKH}=\widehat{DCH}=\widehat{CHB}=\widehat{CBH}.$$

Ba tam giác cân KAB, BCH, KDH có góc ở đáy bằng nhau, do đó chúng đồng dạng. $\square$

➤**Nhận xét.** Có rất nhiều bạn đã giải đúng bài này. Xin tuyên dương hai bạn học sinh lớp 7 đã cho những lời giải tốt: **Thanh Hóa**: *Lê Quang Dũng*, 7D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa. **Tiền Giang**: *Nguyễn Nguyễn Minh Mẫn*, 7[18], THCS Lê Ngọc Hân, TP. Mỹ Tho.

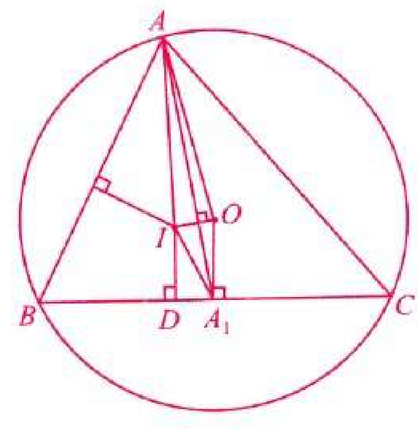
PHAN THỊ MINH NGUYỆT

★Bài T6/415. *Cho tam giác ABC với a = BC, b = CA, c = AB. Gọi A_1 là trung điểm cạnh BC và O, I lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp của tam giác. Chứng minh rằng nếu AA_1 vuông góc với OI thì*

$$\min(b,c) \le a \le \max(b,c).$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $b \ge c$. Từ $AA_1 \perp OI$ suy ra

$$OA^2 - OA_1^2 = IA^2 - IA_1^2 \qquad (1)$$



Gọi R, r theo thứ tự là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ABC. Ta có

$$OA^2 = R^2;\ OA_1^2 = R^2 - \frac{a^2}{4},\ IA^2 = r^2 + (p-a)^2$$

(p là nửa chu vi tam giác ABC);

$$IA_1^2 = ID^2 + DA_1^2 = r^2 + \left(\frac{a}{2}-\frac{a+c-b}{2}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{b-c}{2}\right)^2.$$

Từ (1) có

$$R^2-\left(R^2-\frac{a^2}{4}\right)=r^2+(p-a)^2-\left(r^2+\frac{(b-c)^2}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{4}=\left(\frac{b+c-a}{2}\right)^2-\frac{(b-c)^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4bc=2a(b+c)\Leftrightarrow \frac{2}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \qquad (2)$$

Từ (2) suy ra $\dfrac{2}{\min(b,c)}\geq\dfrac{2}{a}\geq\dfrac{2}{\max(b,c)}$.

Do đó $\min(b,c)\leq a\leq\max(b,c)$ (đpcm). ❐

➤**Nhận xét.** 1) Để đi đến hệ thức (2) chúng ta cũng có thể sử dụng các hệ thức vectơ

$a.\overrightarrow{OA}+b.\overrightarrow{OB}+c.\overrightarrow{OC}=(a+b+c)\overrightarrow{OI}$;

$2\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OA}\right)$ và $\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{AA_1}=0$.

2) Các bạn sau có lời giải đúng và gọn hơn cả:

Hà Nội: *Phan Ngọc Lâm*, 11A1, THPT Liên Hà, Đông Anh; **Vĩnh Phúc:** *Hoàng Đỗ Kiên*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hưng Yên:** *Nguyễn Việt Hà*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thái Bình:** *Trương Trung Quyết*, 10 Toán 1, THPT chuyên Thái Bình, *Bùi Đình Hiếu*, 11A1, THPT Quỳnh Côi, Quỳnh Phụ; **Thanh Hóa:** *Lê Thị Lan Anh*, 11T, THPT chuyên Lam Sơn, *Lê Thế Sơn*, 10C8, THPT Bỉm Sơn; **Nghệ An:** *Dương Nữ Diệp Anh*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, *Lê Hoàng Hiệp*, 11A1, THPT Thái Hòa, *Nguyễn Thị Quỳnh Loan*, 10T1, THPT Đô Lương I; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Hoàng Đăng, Trần Võ Hoàng*, 10 Toán, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Ngãi:** *Ngô Thành Đạt*, 10 Toán 1, THPT chuyên Lê Khiết; **Đồng Nai:** *Phạm Văn Minh*, 11 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh.

HỒ QUANG VINH

★Bài T7/415. *Cho các số thực x, y, z thỏa mãn*

$$\begin{cases}\sqrt{x}.\sin\alpha+\sqrt{y}.\cos\alpha-\sqrt{z}=-2\sqrt{2(x+y+z)}\\ 2x+2y-13\sqrt{z}=7\end{cases}$$

$\pi\leq\alpha\leq\dfrac{3\pi}{2}$. *Hãy tính* $(x+y).z$.

Lời giải. Do $\pi\leq\alpha\leq\dfrac{3\pi}{2}$ nên $\cos\alpha\leq0$, $\sin\alpha\leq0$.

Sử dụng BĐT Bunyakovsky, ta thấy

$$\left(\sqrt{x}.(-\sin\alpha)+\sqrt{y}.(-\cos\alpha)+\sqrt{z}\right)^2$$

$$\leq(x+y+z)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+1)$$

$=2(x+y+z)$. Từ đó suy ra

$$\sqrt{x}.\sin\alpha+\sqrt{y}.\cos\alpha-\sqrt{z}\geq-\sqrt{2(x+y+z)}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{\sqrt{x}}{\sin\alpha}=\frac{\sqrt{y}}{\cos\alpha}=-\sqrt{z}.$$

Suy ra $x=z\sin^2\alpha$, $y=z\cos^2\alpha$, do đó $x+y=z$. Thay vào PT thứ hai của hệ ta được $z=49$.

Vậy $(x+y)z=49^2=2401$. ❐

➤**Nhận xét.** 1) Do sơ suất nên đề bài trong phần tiếng Việt in nhầm (đề bài ghi trong mục "Problems in this issue" in đúng). Rất mong các bạn thông cảm.

2) Các bạn sau đã sửa lại đề bài và có lời giải tốt: **Hưng Yên:** *Nguyễn Trung Hiếu*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Nội:** *Nguyễn Duy Khánh*, 11A1, THPT Ba Vì; **Thái Bình:** *Hoàng Đình Quang*, 12A1, THPT Quỳnh Côi, Quỳnh Phụ; **Nghệ An:** *Trần Trung Hiếu*, 11A1, THPT Thái Hoà.

NGUYỄN THANH HỒNG

★Bài T8/415. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases}\log_2 x=2^{y+2} & (1)\\ 4\sqrt{1+x}+xy\sqrt{4+y^2}=0 & (2)\end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện $x>0$. Từ (2) suy ra $y<0$ (nếu $y\geq0$ thì VT(2) >0).

Ta biến đổi phương trình (2) :

$$4\sqrt{1+x}=-xy\sqrt{4+y^2}>0,$$

bình phương hai vế ta được

$$16(1+x)=x^2y^2(4+y^2)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2y^2-16x+x^2y^4-16=0$$

$$\Leftrightarrow (xy^2-4)(4x+xy^2+4)=0$$

$$\Leftrightarrow xy^2-4=0\Leftrightarrow x=\frac{4}{y^2} \qquad (3)$$

(Do $x>0$ nên $4x+xy^2+4>0$).

Thay (3) vào (1) ta được $\log_2\dfrac{4}{y^2}=2^{y+2}$ (4)

Vì $y<0$, nên PT(4) tương đương với

$$4.2^y+2\log_2(-y)-2=0 \qquad (5)$$

Nhận thấy $y=-1$ là một nghiệm của PT (5).

Xét hàm số $f(y)=4.2^y+2\log_2(-y)-2$.

Ta có $f'(y)=4.2^y\ln2+\dfrac{2}{(-y)\ln2}>0$ $(\forall y<0)$,

nên hàm số $f(y)$ đồng biến khi $y<0$.
Do đó PT (4) có nghiệm duy nhất $y=-1$.

Với $y=-1$, suy ra $x=\frac{4}{y^2}=4$.

Thử lại, ta thấy $(x;y)=(4;-1)$ thỏa mãn hệ phương trình trong đầu bài.
Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất

$$(x;y)=(4;-1). \square$$

➢**Nhận xét.** 1) Có thể suy ra (3) bằng cách khác

Với $x>0$; $y<0$, PT(2) có thể viết thành :

$$\frac{4}{x}\sqrt{1+x}=-y\sqrt{4+y^2} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x}}\sqrt{4+\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^2}=(-y)\sqrt{4+(-y)^2}$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)=f(-y) \text{ với } f(t)=t\sqrt{4+t^2}.$$

$f'(t)=\frac{2(t^2+2)}{\sqrt{4+t^2}}>0$, hàm số $f(t)$ đồng biến khi $t>0$.

Ta được $f\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)=f(-y)\Rightarrow\frac{2}{\sqrt{x}}=-y\Rightarrow(3)$.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Cao Bằng: *Hoàng Ngọc Dương*, 11A, THPT chuyên Cao Bằng; **Bắc Ninh**: *Lưu Ngân*, 12 Toán, THPT chuyên Bắc Ninh; **Hải Dương**: *Vũ Đình Việt*, 12A1, THPT Kẻ Sặt, Bình Giang; **Nghệ An**: *Lương Thị Mai Hương*, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh, *Lê Hoàng Hiệp*, 11A1, THPT Thái Hòa; **Quảng Ngãi**, *Huỳnh Nhật Quang*, 11 Toán 1, THPT chuyên Lê Khiết; **Bình Định**: *Nguyễn Quang Hải*, 12TN2, THPT Tăng Bạt Hổ, Hoài Nhơn; **Tiền Giang**: *Nguyễn Trí Nhân*, 12 Tin, THPT chuyên Tiền Giang; **Đồng Tháp**: *Âu Anh Minh*, *Võ Hoài Bão*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Bến Tre**: *Võ Thiện Khang*, 11 Toán, THPT chuyên Bến Tre.

NGUYỄN ANH DŨNG

★Bài T9/415. *Ta gọi một bộ số nguyên tố đẹp khi tích của các số nguyên tố này bằng 10 lần tổng của chúng. Hãy tìm tất cả các bộ số nguyên tố đẹp nói trên. (Các số trong bộ không nhất thiết phải phân biệt).*

Lời giải. (Theo bạn *Trần Quang Toản*, 11T, THPT chuyên **Quảng Bình**).

Dễ thấy bộ số nguyên tố đẹp phải chứa số 2 và 5. Giả sử $p_1 \le p_2 ... \le p_n$ là các số còn lại trong bộ. Ta có

$$10p_1...p_n = 10(7+p_1+...+p_n)$$

$$\Leftrightarrow p_1...p_n = 7+p_1+...+p_n. \quad (1)$$

Ta có với $x\ge 2$, $y\ge 2$ thì $xy\ge x+y$. Do đó bằng quy nạp dễ thấy $x_1...x_k \ge x_1+...+x_k$ với $x_i\ge 2$ $(i=1, 2, ..., k)$. Vậy

$$p_1+...+p_n+7=p_1...p_n\ge(p_1+...+p_{n-1})p_n$$

$\Leftrightarrow s+p_n+7\ge sp_n$, ở đó $s=p_1+...+p_{n-1}$

$$\Leftrightarrow (p_n-1)(s-1)\le 8 \quad (2)$$

Do $s\ge 2$ nên từ (2) suy ra $p_n-1\le 8$ nên $p\in\{2;3;5;7\}$.

- Với $p_n=2$ thì (1) viết thành $2n+7=2^n$, vô lí.
- Với $p_n=3$ thì $s-1\le 4 \Rightarrow s\le 5 \Rightarrow s\in\{2;3;4;5\}$.

Từ đó $\{p_1,...,p_{n-1}\}$ chỉ có thể là $\{2\}$, $\{3\}$, $\{2\ ;\ 2\}$, $\{2\ ;\ 3\}$. Kiểm tra các bộ này, ta thấy không có bộ nào thỏa mãn (1).

- Với $p_n=5$ thì $s\le 3 \Rightarrow s\in\{2\ ;3\}$. Từ đó $\{p_1,...,p_{n-1}\}$ chỉ có thể là $\{2\}$, $\{3\}$.

Kiểm tra các bộ này ta thấy bộ $\{3\}$ thỏa mãn (1).
Vậy bộ số nguyên tố đẹp cần tìm là (2 ; 3; 5 ; 5) và các hoán vị của chúng. ❐

➢**Nhận xét.** Các bài gửi đến đều có lời giải đúng. Hoan nghênh các bạn THCS sau đã tham gia giải và có lời giải đúng:

Thanh Hóa: *Lê Quang Dũng*, 7D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; **Phú Thọ:** *Nguyễn Tiến Dũng*, *Nguyễn Đình Mậu*, 8A3, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Tiến Thép*, 9C, THCS Vĩnh Tường.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★Bài T10/415. *Cho năm điểm A, B, C, D và E cùng nằm trên một đường tròn (các điểm được liệt kê theo chiều kim đồng hồ). Gọi M, N, P và Q theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của E xuống các đường thẳng AB, BC, CD và DA. Chứng minh rằng bốn đường thẳng MN, NP, PQ và QM là tiếp tuyến của một parabol có tiêu điểm là E.*

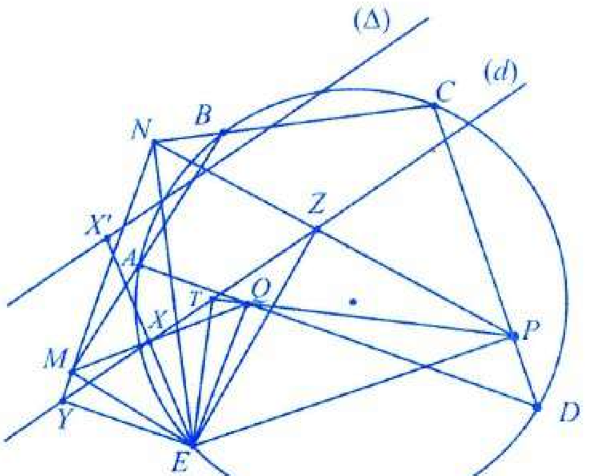
Lời giải. Trước hết, ta cần có hai bổ đề.

Bổ đề 1. *Cho năm điểm A, B, C, D, E cùng thuộc một đường tròn. Các điểm M, N, P, Q theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của E trên các đường thẳng AB, BC, CD, DA. Khi đó hình chiếu vuông góc của E trên các đường thẳng MN, NP, PQ, QM cùng thuộc một đường thẳng.*

Phép chứng minh bổ đề 1 chính là lời giải bài toán **T7/ 351** (TH&TT số 355, tháng 1.2007).

Bổ đề 2. *Cho điểm F và đường thẳng* (Δ) *không đi qua F. Parabol (P) nhận F là tiêu điểm và* (Δ) *là đường chuẩn. Nếu M thuộc* (Δ) *thì đường trung trực của FM tiếp xúc với (P).*
Phép chứng minh bổ đề 2 khá đơn giản, bạn đọc tự chứng minh.

Trở lại giải bài toán **T10/415.**



Gọi *X, Y, Z, T* theo thứ tự là hình chiếu của *E* trên các đường thẳng *MQ, MN, NP, PQ*.
Theo bổ đề 1 thì *X, Y, Z, T* cùng thuộc một đường thẳng, kí hiệu là (*d*).

Gọi (Δ) là ảnh của (*d*) qua phép vị tự tâm *E* tỉ số 2. Gọi (*P*) parabol nhận *E* là tiêu điểm và (Δ) là đường chuẩn. Đặt $X' = EX \cap (\Delta)$. Đương nhiên *MQ* là trung trực của *EX'*.

Do đó, theo bổ đề 2 thì *MQ* tiếp xúc với (*P*).

Tương tự *NP, PQ, NM* cũng tiếp xúc với (*P*).

Tóm lại *MN, NP, PQ, QM* cùng tiếp xúc với parabol (*P*) (có tiêu điểm là *E*). ❐

➤**Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải tốt:

Thanh Hoá: *Lê Thế Sơn*, 10C8, THPT Bỉm Sơn, **Nghệ An:** *Chu Tự Tài*, 11A12, THPT Diễn Châu 2, *Bùi Quang Đông*, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh; **Bến Tre:** *Lê Thị Minh Thảo*, 11T, THPT chuyên Bến Tre.

NGUYỄN MINH HÀ

★**Bài T11/415.** *Cho dãy số* (a_n) *được xác định bởi* $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{1}{a_1 + \ldots + a_n} - \sqrt{2},\ n = 1, 2, \ldots$ *Hãy tìm giới hạn của dãy số* (b_n) *với* $b_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Lời giải. *Nhận xét*

• Với $n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$b_{n+1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} = b_n + \frac{1}{b_n} - \sqrt{2}, b_1 = 1.$$

• Với bất kì $x \in \mathbb{R}^+$, ta có $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$. Do đó, chứng minh bằng quy nạp theo *n* ta thấy $b_n \geq 2 - \sqrt{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

• Với $0 < x < y \leq 1$, $x + \dfrac{1}{x} - \left(y + \dfrac{1}{y}\right) =$

$= (x - y) - \left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x}\right) = (x - y)\left(1 - \dfrac{1}{xy}\right) > 0$, nên

$x + \dfrac{1}{x} > y + \dfrac{1}{y} \Rightarrow f(x) > f(y)$, trong đó ta kí hiệu $f(x) = x + \dfrac{1}{x} - \sqrt{2}\ (x > 0)$.

Ta có $b_2 = f(b_1) = 2 - \sqrt{2}$; $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$b_3 = f(b_2) = 2 - \sqrt{2} + \frac{1}{2 - \sqrt{2}} - \sqrt{2}$$

$$= 2 - \sqrt{2} + \frac{2 + \sqrt{2}}{4 - 2} - \sqrt{2} = 3 - \frac{3}{2}.\sqrt{2}$$

$$= 3\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) < 3(1 - 0,7) = 0,9 < 1 = b_1.$$

$$0 \qquad b_2 \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad b_3 \qquad b_1$$

Từ các nhận xét trên suy ra $b_2 < b_4 < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; do $b_2 = f(b_1), b_4 = f(b_3), f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ và $b_1 > b_3 > \dfrac{1}{\sqrt{2}} \ldots$

Như vậy ta có $b_2 < b_4 < b_6 < \ldots < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$,

$$b_1 > b_3 > b_5 > \ldots > \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Kí hiệu $p = \lim\limits_{n\to+\infty} b_{2n}$, $q = \lim\limits_{n\to+\infty} b_{2n-1}$. Ta suy ra $p \le \frac{1}{\sqrt{2}} \le q$, do $b_{n+1} = b_n + \frac{1}{b_n} - \sqrt{2}, n \in \mathbb{N}^*$.

Cho n chẵn, $n \to +\infty$ ta được $q = p + \frac{1}{p} - \sqrt{2}$

$$\Rightarrow pq = p^2 - \sqrt{2}p + 1 \quad (1)$$

Cho n lẻ, $n \to +\infty \Rightarrow p = q + \frac{1}{q} - \sqrt{2}$

$$\Rightarrow pq = q^2 - \sqrt{2}q + 1 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$(p^2 - q^2) - \sqrt{2}(p - q) = 0$$

$$\Leftrightarrow (p - q)\left(p + q - \sqrt{2}\right) = 0.$$

Chú ý, nếu $p + q - \sqrt{2} = 0$ thì $q = \sqrt{2} - p$. Thay vào (1) ta có

$$p\left(\sqrt{2} - p\right) = p^2 - \sqrt{2}p + 1 \Leftrightarrow 2p^2 - 2\sqrt{2}p + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2}p - 1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow p = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow q = \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Như vậy ta luôn có $p = q = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Hệ quả là $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$. ❒

➤**Nhận xét.** Đây là bài toán giới hạn dạng cơ bản. Lời giải trên không phải dùng đến công cụ đạo hàm để khảo sát hàm số. Các bạn học sinh sau có lời giải tốt:

Hà Nội: *Phạm Ngọc Lâm*, 11A1, THPT Liên Hà, Đông Anh; **Hưng Yên:** *Nguyễn Thị Việt Hà*, 10T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Vĩnh Phúc:** *Hoàng Đỗ Kiên*, *Dương Phước Thọ*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Nghệ An:** *Lê Hoàng Hiệp*, 11A1, *Nguyễn NgọcMinh*, 11A2, THPT Thái Hòa; *Đỗ Bá Đức*, 11A12, THPT Diễn Châu II; *Lương Thị Mai Hương*, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh; **Bình Phước:** *Cao Văn Tiên*, 11A1, THPT chuyên Quang Trung; **Đồng Nai:** *Phạm Văn Minh*, 11T, THPT chuyên Lương Thế Vinh.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★**Bài T12/415.** *Gọi α, β là hai nghiệm thực phân biệt của phương trình $4x^2 - 4tx - 1 = 0$ (t là tham số thực) và hàm số $f(x) = \frac{2x - t}{x^2 + 1}$ xác định trên đoạn $[\alpha;\beta]$.*

Xét hàm số $g(t) = \max\limits_{x\in[\alpha;\beta]} f(x) - \min\limits_{x\in[\alpha;\beta]} f(x)$.

Chứng minh rằng với $a,b,c \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ thỏa mãn $\sin a + \sin b + \sin c = 1$ ta có bất đẳng thức

$$\frac{1}{g(\tan a)} + \frac{1}{g(\tan b)} + \frac{1}{g(\tan c)} < \frac{3\sqrt{6}}{4}.$$

Lời giải. Nhận xét rằng $f(x)$ là hàm đơn điệu tăng trên đoạn $[\alpha;\beta]$. Thật vậy, khi $\alpha \le x_1 < x_2 \le \beta$, ta có

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{2x_2 - t}{x_2^2 + 1} - \frac{2x_1 - t}{x_1^2 + 1}$$

$$= \frac{(x_2 - x_1)\left(t(x_2 + x_1) - 2x_1x_2 + 2\right)}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)} > 0$$

nên hàm số $f(x)$ là hàm đơn điệu tăng trên đoạn $[\alpha;\beta]$.

Theo định lí Viète ta có

$\alpha + \beta = t; \alpha\beta = -\frac{1}{4}$ nên

$$g(t) = f(\beta) - f(\alpha) = \frac{(\beta - \alpha)\left(t(\alpha + \beta) - 2\alpha\beta + 2\right)}{(\alpha^2 + 1)(\beta^2 + 1)}$$

$$\frac{\sqrt{t^2 + 1}\left(t^2 + \frac{5}{2}\right)}{t^2 + \frac{25}{16}} = \frac{8\sqrt{t^2 + 1}(2t^2 + 5)}{16t^2 + 25}.$$

Vì vậy $g(\tan a) = \frac{8\sqrt{\tan^2 a + 1}(2\tan^2 a + 5)}{16\tan^2 a + 25}$

$$\frac{\frac{8}{\cos a}\left(\frac{2}{\cos^2 a} + 3\right)}{\frac{16}{\cos^2 a} + 9} = \frac{\frac{16}{\cos\alpha} + 24\cos a}{16 + 9\cos^2 a}.$$

Do đó $g(\tan a) \ge \frac{2\sqrt{16.24}}{16 + 9\cos^2 a} = \frac{16\sqrt{6}}{16 + 9\cos^2 a}$.

Cùng với hai BĐT tương tự, ta được

$$\frac{1}{g(\tan a)} + \frac{1}{g(\tan b)} + \frac{1}{g(\tan c)}$$

$$\le \frac{1}{16\sqrt{6}}\left(16.3 + 9(\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c)\right)$$

$$= \frac{1}{16\sqrt{6}}\left(75 - 9(\sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c)\right).$$

Từ $a, b, c \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ và $\sin a + \sin b + \sin c = 1$

$$3(\sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c) > (\sin a + \sin b + \sin c)^2 = 1$$

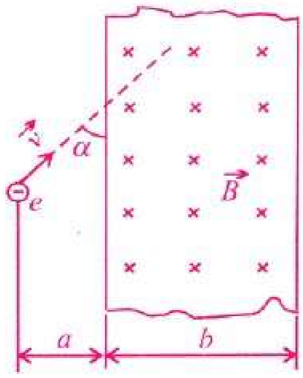
suy ra $\frac{1}{g(\tan a)} + \frac{1}{g(\tan b)} + \frac{1}{g(\tan c)} < \frac{3\sqrt{6}}{4}$. ❐

➢ **Nhận xét.** Đây là một bài toán về bất đẳng thức hàm thuộc dạng không quen thuộc ở bậc phổ thông, nên có ít bạn tham gia giải. Đây là bài lấy từ China Mathematical Competition, Problem 15, năm 2004. Đa số các bạn đều giải tương tự như cách đã trình bày ở trên. Các bạn sau đây có lời giải đúng:

Vĩnh Phúc: *Đặng Quang Tuấn, Dương Viết Thọ*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Nội:** *Phạm Ngọc Lâm*, 11A1, THPT Liên Hà, Đông Anh, *Nguyễn Duy Khánh*, 11A1 THPT Ba Vì; **Hưng Yên:** *Dương Mạnh Cường, Nguyễn Trung Hiếu*, 10T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thái Bình:** *Hoàng Đình Quang, Bùi Đình Hiếu*, 11A1, THPT Quỳnh Côi; **Đồng Nai:** *Phạm Văn Minh*, 11T, THPT chuyên Lương Thế Vinh; **Bình Phước:** *Cao Văn Tiên*, 11B, THPT chuyên Quang Trung; **Bình Định:** *Nguyễn Quang Hải*, 12TN2, THPT Tăng Bạt Hổ, Hoài Nhơn; **Nghệ An:** *Lê Hoàng Hiệp, Trần Trung Hiếu*, 11A1, THPT Thái Hòa.

NGUYỄN VĂN MẬU

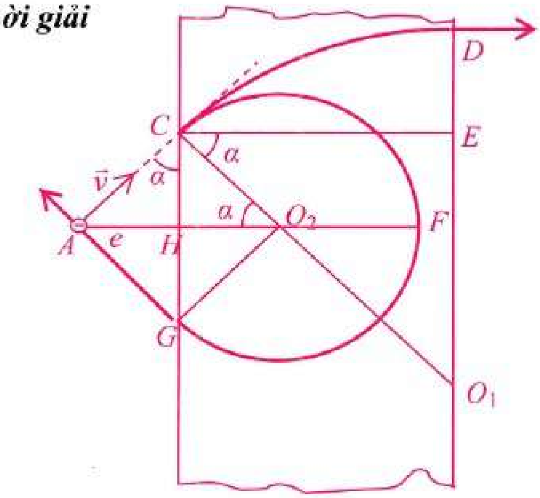
★**Bài L1/415.** *Một vùng từ trường đều với cảm ứng từ $B = 2.10^{-4}$T nằm trong miền giới hạn bởi hai mặt phẳng song song với các đường sức từ và cách nhau đoạn b =15cm. Từ vị trí cách mặt giới hạn vùng từ trường đoạn a = 3cm, một electron được bắn về phía vùng từ trường với vận tốc $\vec{v}$ có phương vuông góc với các đường sức từ và hợp với mặt giới hạn vùng từ trường góc $\alpha = 45^0$ như hình vẽ. Biết khối lượng và điện tích của electron lần lượt là $m = 9{,}1.10^{-31}$kg và $e = -1{,}6.10^{-19}$C. Bỏ qua tác dụng của trọng trường. Tính độ lớn vận tốc của electron để nó:*



a) Ra khỏi vùng từ trường theo phương vuông góc với mặt giới hạn vùng từ trường.

b) Có thể quay trở về vị trí ban đầu. Điều kiện của b khi đó là gì?

Lời giải



Khi electron vào vùng từ trường nó sẽ chuyển động theo quỹ đạo tròn với lực hướng tâm là lực Lo-ren-xơ. Bán kính quỹ đạo tròn xác định bởi $|e|Bv = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow R = \frac{mv}{|e|B}$ (1)

a) Để electron ra khỏi vùng từ trường theo phương vuông góc mặt giới hạn thì nó phải chuyển động theo cung tròn CD có tâm là O_1 như hình vẽ. Bán kính quỹ đạo của electron khi đó là $R_1 = O_1C = \frac{CE}{\cos\alpha} = \frac{b}{\cos\alpha}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra vận tốc của electron là $v = \frac{|e|Bb}{m\cos\alpha}$.

Thay số tính được $v = 7{,}46.10^6$(m/s).

b) Để electron trở về vị trí ban đầu thì quỹ đạo phải đối xứng, nghĩa là nó phải chuyển động theo cung tròn CFG có tâm là O_2 như hình vẽ. Bán kính quỹ đạo của electron khi đó là $R_2 = O_2C = \frac{O_2H}{\cos\alpha} = \frac{AH}{\cos\alpha} = \frac{a}{\cos\alpha}$ (3)

Từ (1) và (3) suy ra vận tốc của electron là

$$v = \frac{|e|Ba}{m\cos\alpha}.$$

Thay số tính được $v = 1{,}49.10^6$(m/s).

Để electron có thể chuyển động theo cung tròn CFG như thế thì b phải không nhỏ hơn đoạn CF, tức là

$$b \geq CF = O_2F + O_2H = \frac{a}{\cos\alpha} + a = a\left(1 + \frac{1}{\cos\alpha}\right)$$

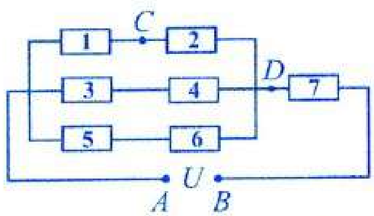
Thay số ta được $b \geq 7,24(\text{cm})$. ❒

➢**Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải đúng:

Bắc Ninh: *Nguyễn Văn Long*, 11A4, THPT Thuận Thành 1; **Nam Định:** *Đinh Việt Thắng, Bùi Xuân Hiển*, 12 Lí, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hà Nam:** *Đinh Ngọc Hải*, 12 Lí, THPT chuyên Biên Hòa; **Nghệ An:** *Lê Xuân Bảo*, 10A3, THPT chuyên Phan Bội Châu; *Nguyễn Viết Tuấn*, 10A5, THPT chuyên ĐH Vinh; **Thái Bình:** *Nguyễn Văn Sơn*, 11A2, THPT Bắc Đông Quan; **Quảng Bình:** *Nguyễn Hoàng Duy Thành*, 11 Lí, THPT chuyên Quảng Bình; **Đồng Tháp:** *Huỳnh Thanh Dư*, 11 Lí, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, Cao Lãnh.

NGUYỄN XUÂN QUANG

★Bài L2/415. *Cho bảy điện trở giống hệt nhau, mỗi cái có giá trị là R, được mắc theo sơ đồ như hình vẽ.*



Đặt giữa A và B một điện áp U có giá trị không đổi.

a) *Mắc giữa C và B một vôn kế lí tưởng thì vôn kế chỉ 12 V.*

b) *Thay vôn kế bằng một ampe kế lí tưởng thì ampe kế chỉ 4 A.*

Hãy xác định U và R.

Lời giải. a) Từ hình vẽ của đề bài và các dữ liệu đã cho, ta có $R_{AD} = \frac{2R}{3}$.

Dòng điện qua mạch chính là

$$I = \frac{U}{R_{AD} + R_{DB}} = \frac{U}{\frac{2R}{3} + R} = \frac{3U}{5R}.$$

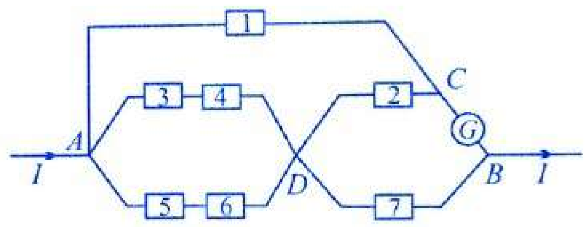
Từ đó $U_{CD} = \frac{1}{2}U_{AD} = \frac{1}{2}IR_{AD} = \frac{1}{2}.\frac{3U}{5R}.\frac{2R}{3} = \frac{U}{5}$;

$$U_{DB} = IR = \frac{3U}{5R}.R = \frac{3U}{5}.$$

Do đó $U_{CB} = U_{CD} + U_{DB} = \frac{U}{5} + \frac{3U}{5} = \frac{4U}{5} = 12(\text{V})$

Suy ra $U = 15(\text{V})$.

b) Sơ đồ mạch điện được mắc lại như hình vẽ.



Từ hình vẽ ta có

$$\{[(R_3 \text{ nt } R_4) // (R_5 \text{ nt } R_6)] \text{ nt } (R_2 // R_7)\} // R_1.$$

Dễ dàng tính được $R_{AD} = R$; $R_{DB} = 0,5R$.

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R + 0,5R} + \frac{1}{R} = \frac{2,5}{1,5R} \Rightarrow R_{AB} = 0,6R.$$

Cường độ dòng điện qua mạch chính bằng

$$I = \frac{U}{R_{AB}} = \frac{15}{0,6R} = \frac{25}{R}.$$

Gọi I' là cường độ dòng điện qua mạch ADB, ta có

$$I' = \frac{U}{R_{AD} + R_{DB}} = \frac{15}{R + 0,5R} = \frac{10}{R}.$$

Do $R_2 = R_7 = R$ nên $I_2 = I_7 = \frac{I'}{2} = \frac{5}{R}$.

Vậy $I_G = I - I_7 = \frac{25}{R} - \frac{5}{R} = \frac{20}{R} = 4(\text{A})$, suy ra $R = 5(\Omega)$. ❒

➢**Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Bùi Văn Vinh*, 9A, THCS Liên Hòa, Lập Thạch; **Bắc Ninh:** *Vũ Sĩ Công*, 10A1, THPT Nguyễn Đăng Đạo, *Nguyễn Văn Long*, 11A4, *Nguyễn Việt Anh, Trương Đức Tài*, 11A1, THPT Thuận Thành Số 1; **Hà Nam:** *Đinh Ngọc Hải*, 12 Lí, THPT chuyên Biên Hòa, Phủ Lý; **Nam Định:** *Bùi Xuân Hiển*, 12 Lí, *Trần Thị Thu Hương*, 11 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hưng Yên:** *Nguyễn Trung Hiếu*, 12 Lí, THPT chuyên Hưng Yên; **Thái Bình:** *Nguyễn Văn Minh, Nguyễn Văn Sơn*, 11A2, THPT Bắc Đông Quan; **Thanh Hóa:** *Lê Thanh Hải*, 10A3, THPT Lương Đắc Bằng; **Nghệ An:** *Nguyễn Viết Tuấn*, 10A5, THPT chuyên ĐH Vinh, *Chu Tự Tài*, 11A12, THPT Diễn Châu 2, *Nguyễn Trung Hiếu, Nguyễn Hải Hậu*, 10A1, THPT Nguyễn Xuân Ôn; **Đồng Tháp:** *Huỳnh Thanh Dư*, 11 Lí, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Quảng Bình:** *Nguyễn Hoàng Duy Thành*, 11 Lí, THPT chuyên Quảng Bình.

NGUYỄN VĂN THUẬN

TIN TỨC

Hội thảo khoa học

CÁC CHUYÊN ĐỀ BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN

❖ Trong hai ngày 14 - 15/4/2012, tại TP. Nha Trang, tỉnh Khánh Hòa đã diễn ra ***Hội thảo khoa học bồi dưỡng học sinh giỏi Toán THPT các tỉnh Duyên hải Nam Trung bộ và Tây Nguyên lần thứ hai*** do Sở GD-ĐT Khánh Hòa và Hội Toán học Hà Nội phối hợp đồng tổ chức. Tham dự Hội thảo có lãnh đạo các Sở GD-ĐT, đại diện Ban Giám hiệu, giáo viên Toán các trường THPT chuyên thuộc khu vực Duyên hải Nam Trung bộ và Tây Nguyên gồm 9 tỉnh *Bình Định, Phú Yên, Khánh Hòa, Ninh Thuận, Lâm Đồng, Đăk Lăk, Đăk Nông, Gia Lai, Kon Tum*. Ông *Lê Xuân Thân*, Phó Chủ tịch UBND tỉnh Khánh Hòa đã tới dự và phát biểu chào mừng Hội thảo. Hội thảo chia làm hai phần : *Phần 1* gồm những báo cáo của các cán bộ quản lí về phát triển năng lực đội ngũ giáo viên các trường chuyên, phát hiện và bồi dưỡng năng khiếu của học sinh chuyên; cách thức quản lí, chỉ đạo, giảng dạy và học tập ở các lớp chuyên; đồng thời thảo luận về liên kết bồi dưỡng học sinh giỏi Toán THPT khu vực Duyên hải Nam Trung bộ và Tây Nguyên. *Phần 2* gồm những báo cáo về Chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi Toán THPT và các vấn đề liên quan của các nhà khoa học và giáo viên Toán các trường THPT chuyên.

❖ Trong hai ngày 26 - 27/4/2012, tại Trường THPT Chu Văn An, TP Hà Nội, Sở GD-ĐT Hà Nội phối hợp với Hội Toán học Hà Nội tổ chức ***Hội nghị khoa học Các chuyên đề Toán học bồi dưỡng học sinh giỏi.*** Đây là hội thảo đầu tiên theo tinh thần kí kết phối hợp hoạt động bản về liên kết bồi dưỡng học sinh giỏi, đặc biệt là bồi dưỡng học sinh giỏi Toán THPT và THCS. Hội thảo vinh dự đón tiếp TS *Vũ Đình Chuẩn*, Vụ Trưởng Vụ Giáo dục Trung học, Bộ GD&ĐT, các nhà khoa học, nhà giáo lão thành, các nhà quản lí, các chuyên gia giáo dục, các nhà Toán học báo cáo tại phiên toàn thể và các giáo viên đang trực tiếp bồi dưỡng học sinh giỏi Toán báo cáo tại phiên chuyên đề. Sáng 27/4, Ban Tổ chức Hội thảo đã tổng kết Kì thi HOMO 2012 và tuyên dương khen thưởng các học sinh đoạt giải: *Lứa tuổi Junior* (12 giải Nhất, 29 giải Nhì, 41 giải Ba, 16 giải Khuyến khích), *Lứa tuổi Senior* (11 giải Nhất, 28 giải Nhì, 48 giải Ba, 14 giải Khuyến khích). Tạp chí TH&TT đã tham dự cả hai hội thảo, tặng tạp chí và đặc san cho các đại biểu, tặng quà cho các em học sinh đoạt giải Nhất, Nhì của Kì thi HOMO 2012.

THẨM NGỌC KHUÊ
(Hội Toán học Hà Nội)

PROBLEMS... *(Tiếp trang 17)*

TOWARD MATHEMATICAL OLYMPIAD

T9/419. Let a, b, c be three positive real numbers satisfying

$$15\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=10\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)+2012.$$

Find the largest possible value of the expression

$$P=\frac{1}{\sqrt{5a^2+2ab+2b^2}}+\frac{1}{\sqrt{5b^2+2bc+2c^2}}+\frac{1}{\sqrt{5c^2+2ca+2a^2}}.$$

T10/419. Find all functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ such that for all $x,y\in\mathbb{R}$ we have

$$f(xf(y))+f(f(x)+f(y))=yf(x)+f(x+f(y)).$$

T11/419. On the interval $[a\,;b]$, pick k distinct points x_1, x_2, ..., x_k. Let d_n be the product of the distances from x_n to the $k-1$ remaining points; $n=1,2,3...,k$. Find the smallest value of $\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{d_n}$.

T12/419. Given a triangle ABC and an arbitrary point M. Prove that

$$\frac{MA}{BC}+\frac{MB}{CA}+\frac{MC}{AB}\geq\frac{BC+CA+AB}{MA+MB+MC}.$$

Translated by LE MINH HA

VỀ MỘT BÀI TOÁN CỰC TRỊ trong hình học không gian

NGUYỄN MINH HÀ
(GV Trường THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)

Trong cuốn sách CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN của V.V. PRAXOLOV và I.F. SARYGIN trang 25, Nhà xuất bản Đà Nẵng, năm 1997 có một bài toán cực trị hình học khá hay.

Bài toán 1. *Xét tứ diện đều $A_1A_2A_3A_4$ có cạnh bằng a và mặt phẳng (P). $\mathbb{S}$ là diện tích hình chiếu vuông góc của $A_1A_2A_3A_4$ trên (P). Tính giá trị lớn nhất của $\mathbb{S}$ theo a.*

Một cách tự nhiên, bài toán sau được đặt ra.

Bài toán 2. *Xét tứ diện đều $A_1A_2A_3A_4$ có cạnh bằng a và mặt phẳng (P). $\mathbb{S}$ là diện tích hình chiếu vuông góc của $A_1A_2A_3A_4$ trên (P). Tính giá trị nhỏ nhất của $\mathbb{S}$ theo a.*

Bài báo này sẽ giới thiệu lời giải Bài toán 2.

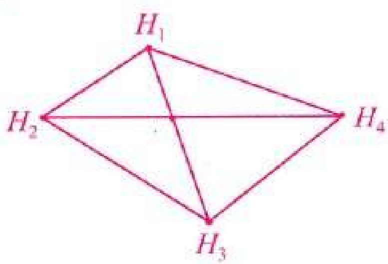
Cho tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ và mặt phẳng (P), ta kí hiệu diện tích các tam giác $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$, $A_1A_2A_3$ theo thứ tự là S_1, S_2, S_3, S_4; diện tích hình chiếu vuông góc của các tam giác $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$, $A_1A_2A_3$ trên mặt phẳng (P) theo thứ tự là S_1', S_2', S_3', S_4'; diện tích hình chiếu vuông góc của tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ trên mặt phẳng (P) là $\mathbb{S}$.

Trước hết, ta cần có ba bổ đề.

Bổ đề 1. *Cho tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ và mặt phẳng (P), ta có $\mathbb{S}=\frac{1}{2}\sum S_a'$.*

Chứng minh

Gọi H_1, H_2, H_3, H_4 theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của A_1, A_2, A_3, A_4 trên mặt phẳng (P).



Hình 1

Có hai trường hợp xảy ra.

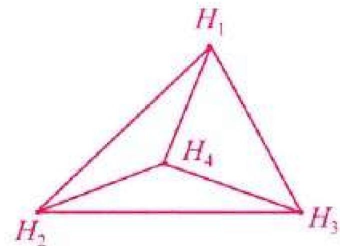
• *Trường hợp 1.* Hình chiếu vuông góc của khối tứ diện đều $A_1A_2A_3A_4$ trên mặt phẳng (P) là một tứ giác lồi, không mất tính tổng quát giả sử tứ giác lồi đó là $H_1H_2H_3H_4$ (h.1).

Ta có $\mathbb{S} = S_{H_1H_2H_3H_4}$

$$=\frac{1}{2}\left(S_{H_2H_3H_4}+S_{H_3H_4H_1}+S_{H_4H_1H_2}+S_{H_1H_2H_3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum S_a'.$$

• *Trường hợp 2.* Hình chiếu vuông góc của khối tứ diện đều $A_1A_2A_3A_4$ trên mặt phẳng (P) là một tam giác, không mất tính tổng quát giả sử tam giác đó là $H_1H_2H_3$ (h.2).



Hình 2

Ta có $\mathbb{S} = S_{H_1H_2H_3}$

$$=\frac{1}{2}\left(S_{H_2H_3H_4}+S_{H_3H_4H_1}+S_{H_4H_1H_2}+S_{H_1H_2H_3}\right)$$

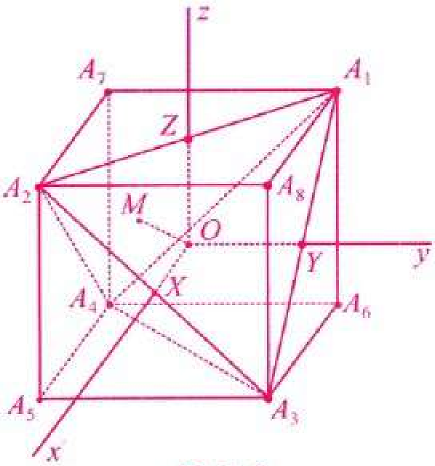
$$=\frac{1}{2}\sum S_a' \text{ (đpcm).}$$

Bổ đề 2. *Nếu O là tâm của tứ diện đều $A_1A_2A_3A_4$ và M là điểm bất kì khác O thì*

$$\sum_{1\le i\le 4}\cos^2\left(\overrightarrow{OA_i},\overrightarrow{OM}\right)=\frac{4}{3}.$$

Chứng minh. Không mất tính tổng quát giả sử khối tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ có cạnh bằng $2\sqrt{2}$.

Gọi $A_1A_7A_2A_8.A_6A_4A_5A_3$ là hình lập phương ngoại tiếp khối tứ diện đều $A_1A_2A_3A_4$ (h.3).



Hình 3

Dễ thấy hình lập phương này có cạnh bằng 2.

Gọi O là tâm của tứ diện đều $A_1A_2A_3A_4$, X, Y, Z theo thứ tự là trung điểm của A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2.

Lập hệ toạ độ Descartes $Oxyz$ sao cho các tia Ox, Oy, Oz tương ứng chính là các tia OX, OY, OZ.

Ta thấy $A_1(-1;1;1)$, $A_2(1;-1;1)$, $A_3(1;1;-1)$, $A_4(-1;-1;-1)$. Giả sử $M(x;y;z)$, ta có

$$\sum_{1\le i\le 4}\cos^2\left(\overrightarrow{OA_i},\overrightarrow{OM}\right)$$

$$=\frac{(-x+y+z)^2+(x-y+z)^2+(x+y-z)^2+(-x-y-z)^2}{\left(\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2}$$

$$=\frac{4(x^2+y^2+z^2)}{3(x^2+y^2+z^2)}=\frac{4}{3}\text{ (đpcm).}$$

Bổ đề 3. *Nếu các số $a_i\ (1\le i\le 4)$ thoả mãn các điều kiện $\sum_{1\le i\le 4}a_i=0$ và $\sum_{1\le i\le 4}a_i^2=\frac{4}{3}$ thì $\sum_{1\le i\le 4}|a_i|\ge 2\sqrt{\frac{2}{3}}$.*

Chứng minh. Ta thấy

$$\left(\sum_{1\le i\le 4}|a_i|\right)^2=\left(\sum_{1\le i\le 4}|a_i|\right)\left(\sum_{1\le i\le 4}|a_i|\right)=\sum_{1\le i\le 4}\left(|a_i|\sum_{1\le j\le 4}|a_j|\right)$$

$$=\sum_{1\le i\le 4}\left(a_i^2+|a_i|\sum_{\substack{1\le j\le 4\\ j\ne i}}|a_j|\right)\ge\sum_{1\le i\le 4}\left(a_i^2+|a_i|\left|\sum_{\substack{1\le j\le 4\\ j\ne i}}a_j\right|\right)$$

$$=\sum_{1\le i\le 4}\left(a_i^2+|a_i||-a_i|\right)=\sum_{1\le i\le 4}\left(a_i^2+a_i^2\right)=2\sum_{1\le i\le 4}a_i^2=2.\frac{4}{3}=\frac{8}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ba số bất kì trong bốn số $a_i\ (1\le i\le 4)$ hoặc cùng không âm hoặc cùng không dương, khi và chỉ khi hai số nào đó trong bốn số $a_i\ (1\le i\le 4)$ bằng không và trong hai số còn lại một số bằng $\sqrt{\frac{2}{3}}$, một số bằng $-\sqrt{\frac{2}{3}}$ (đpcm).

Trở lại giải Bài toán 2.

Dễ thấy $S_1=S_2=S_3=S_4=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ (1)

Gọi O là tâm của tứ diện đều $A_1A_2A_3A_4$ và M là hình chiếu vuông góc của O trên mặt phẳng (P), chú ý rằng OA_1, OA_2, OA_3, OA_4 theo thứ tự vuông góc với các mặt phẳng $(A_2A_3A_4)$, $(A_3A_4A_1)$, $(A_4A_1A_2)$, $(A_1A_2A_3)$, ta có

$$\mathbb{S}=\frac{1}{2}\sum_{1\le i\le 4}S_i'\ \text{(theo Bổ đề 1)}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{1\le i\le 4}S_i\left|\cos(\overrightarrow{OA_i},\overrightarrow{OM})\right|$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{8}a^2\sum_{1\le i\le 4}\left|\cos(\overrightarrow{OA_i},\overrightarrow{OM})\right|\ \text{(theo (1))}\qquad(2)$$

Vì $A_1A_2A_3A_4$ là tứ diện đều nên $\sum_{1\le i\le 4}\overrightarrow{OA_i}=\vec{0}$.

Do đó $\sum_{1\le i\le 4}\overrightarrow{OA_i}.\overrightarrow{OM}=0$.

Từ đó, chú ý rằng $OA_1=OA_2=OA_3=OA_4$, suy ra $\sum_{1\le i\le 4}\cos(\overrightarrow{OA_i}.\overrightarrow{OM})=0$ (3)

Theo Bổ đề 2, ta có

$$\sum_{1\le i\le 4}\cos^2\left(\overrightarrow{OA_i},\overrightarrow{OM}\right)=\frac{4}{3}\qquad(4)$$

Từ (2), (3), và (4), theo Bổ đề 3, suy ra $\mathbb{S}\ge\frac{a^2}{2\sqrt{2}}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ OM vuông góc với hai trong bốn đường thẳng OA_1, OA_2, OA_3, OA_4 $\Leftrightarrow$ OM vuông góc với một trong sáu mặt phẳng (OA_1A_2), (OA_1A_3), (OA_1A_4), (OA_2A_3), (OA_2A_4), (OA_3A_4) $\Leftrightarrow$ OM song song với một cạnh nào đó của tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ $\Leftrightarrow$ mặt phẳng (P) vuông góc với một cạnh nào đó của tứ diện $A_1A_2A_3A_4$.

Tóm lại giá trị nhỏ nhất của $\mathbb{S}$ là $\frac{a^2}{2\sqrt{2}}$. ❐

DANH MỤC SÁCH THAM KHẢO CỦA NXBGD VIỆT NAM

ĐỂ NGƯỜI DỰ THI VIẾT GIỚI THIỆU

LTS. *Tạp chí THTT số 416, 417 đã giới thiệu đến bạn đọc Thể lệ Cuộc thi giới thiệu Sách tham khảo của NXBGD Việt Nam và Danh mục một số cuốn sách. Trong số này và số sau, chúng tôi xin giới thiệu tiếp Danh mục các cuốn sách của NXBGD Việt Nam để người dự thi viết giới thiệu.*

SÁCH THAM KHẢO THEO CẤP LỚP

STT	Tên sách, bộ sách	Tác giả, dịch giả
1	Bồi dưỡng năng lực nghe nói tiếng Anh lớp 3 (English for me) - kèm đĩa.	Nguyễn Quốc Hùng, Nguyễn Quốc Tuấn
2	Bồi dưỡng năng lực nghe nói tiếng Anh lớp 3 (English for me - techer's guide)	Nguyễn Quốc Hùng, Nguyễn Quốc Tuấn
3	Cảm thụ và phân tích tác phẩm văn học 10 - Tập 1, Tập 2	Nguyễn Văn Long (CB)
4	Giảng văn Văn học Việt Nam (THCS)	Trần Thị An, Phan Huy Dũng
5	Kiến thức bổ trợ Ngữ văn 6	Trần Đình Sử (CB)
6	Kiến thức bổ trợ Ngữ văn 7	Trần Đình Sử (CB)
7	Kiến thức bổ trợ Ngữ văn 8	Nguyễn Văn Long (CB)
8	Kiến thức bổ trợ Ngữ văn 9	Nguyễn Văn Long (CB)
9	Kiến thức bổ trợ Ngữ văn 11 nâng cao - Tập 1, Tập 2	Nguyễn Khắc Phi (CB)
10	Kiến thức bổ trợ Ngữ văn 12 nâng cao - Tập 1, Tập 2	Nguyễn Khắc Phi (CB)
11	Những chuyên đề hay và khó Hóa học THCS	Hoàng Thành Chung

SÁCH THAM KHẢO KHÁC

STT	Tên sách, bộ sách	Tác giả, dịch giả
12	100 bài toán vui và trắc nghiệm chỉ số cảm xúc EQ	Nguyễn Mạnh Súy
13	30 tác giả văn chương	Vũ Quần Phương
14	Bác Hồ ở Pháp (sách ảnh)	Hồng Hà - Nguyễn Thị Tình ...
15	Bài học là gì ?	Hồ Ngọc Đại
16	Các nhà Hóa học được giải thưởng Nobel	Nguyễn Quốc Tín
17	Các vị đứng đầu kinh thành Thăng Long (Thế kỉ XII-XVIII)	Quốc Chấn
18	Cây cỏ có ích Việt Nam - Tập 1, Tập 2	Võ Văn Chi, Trần Hợp
19	Chân dung và bút tích nhà văn Việt Nam - Tập 1, Tập 2	Trần Thanh Phương
20	Chân dung và nhận định của nhà văn về tác phẩm trong nhà trường, Tập 1	Nguyễn Văn Tùng, Thân Phương Thu
21	Chuyện lạ về thi cử của Việt Nam thời phong kiến	Nguyễn Thị Hạnh, Thái Ngọc Tường
22	Công nghệ giáo dục - Tập 1, Tập 2	Hồ Ngọc Đại
23	Cuộc đời Lý Công Uẩn	Lê Đình Hà
24	Dạy trẻ có chí tiến thủ	Triệu Anh Ba, Ngọc Linh (sưu tầm-biên soạn)
25	Dạy trẻ có trái tim yêu thương	Vũ Hoa Mỹ, Dương Quỳnh Hoa (sưu tầm-biên soạn)
26	Đến với tác phẩm văn chương phương Đông (Trung Quốc - Nhật Bản - Ấn Độ)	Nguyễn Thị Bích Hải
27	Đông Dương xưa	Đường Công Minh
28	Em đi thăm đất nước - Tập 1, Tập 2, Tập 3	Vũ Xuân Vinh
29	Em tìm hiểu và thực hành pháp luật Tập 1: Pháp luật trong đời sống gia đình Tập 2: Pháp luật trong nhà trường Tập 3: Pháp luật nơi công cộng Tập 4: Pháp luật khi tham gia giao thông Tập 5: Pháp luật với các tệ nạn xã hội	Vũ Xuân Vinh
30	Evo Heritage: Một thiên đường Spa	Thái Quang Trung (CB)
31	Giải pháp giáo dục	Hồ Ngọc Đại

32	Giai thoại dã sử Việt Nam	Nguyễn Khắc Thuần
33	Gương mặt người thầy	Phạm Viết Hoàng
34	Huế - Lãng mạn Việt Nam (Hue - The romance of Vietnam)	Thái Quang Trung, Hà Bích Liên ...
35	Huy Cận - ngọn lửa thiêng không tắt	Hà Minh Đức
36	Kể chuyện các nhà văn Việt Nam thế kỉ XX - Tập 1, Tập 2	Phạm Đình Ân
37	Kính gửi các bậc cha mẹ	Hồ Ngọc Đại
38	Lịch sử quan hệ quốc tế hiện đại	Trần Nam Tiến
39	Nả ơi (tập truyện ngắn về nhà giáo)	Vũ Xuân Vinh
40	Người hoang tưởng số 5 (tập truyện ngắn về nhà giáo)	Vũ Xuân Vinh
41	Nhà thơ Nguyễn Khoa Điềm và trường ca "Mặt đường khát vọng"	Nguyễn Quang Trung, Mai Văn Hoan
42	Nhà văn Nguyễn Trung Thành và truyện ngắn " Rừng xà nu"	Võ Thị Kim Ngân
43	Sáng danh những anh hùng, hào kiệt Việt Nam	Vũ Xuân Vinh
44	Sức nước ngàn năm: Dân là gốc - Tình huống trong cuộc sống hàng ngày Quyển 1: Dân sinh Quyển 2: Y tế, giáo dục, văn hóa Quyển 3: An ninh -trật tự Quyển 4: Tư pháp, Chính sách xã hội	Trương Minh Tuấn,Trịnh Văn Sơn (đồng CB)
45	Suy ngẫm và lựa chọn - Tập I: Những điều xã hội không mong muốn Tập II: Giữa hai dòng trong - đục Tập III: Con đường đi đến những vòng nguyệt quế	Bùi Tiến Quý
46	Tâm lý học dạy học	Hồ Ngọc Đại
47	Theo Bác Hồ đi kháng chiến	Trình Quang Phú
48	Thi pháp học ở Việt Nam	Nguyễn Đăng Điệp, Nguyễn Văn Tùng (tuyển chọn)
49	Tinh hoa văn hóa phương Đông	Đặng Đức Siêu
50	Tinh hoa văn học Nga - Khám phá và thưởng thức	Nguyễn Hải Hà
51	Tô Hoài - Sức sáng tạo của một đời văn	Hà Minh Đức
52	Trò chuyện với nhà văn có tác phẩm trong sách giáo khoa tiểu học	Thân Phương Thu
53	Truyện cổ dân gian (dành cho HS tiểu học)	Chu Thị Hảo (CB)
54	Truyện cổ dân gian các dân tộc Việt Nam - Truyện cổ Bana	Nguyễn Trọng Báu
55	Truyện cổ dân gian các dân tộc Việt Nam - Truyện cổ dân tộc Giáy	Nguyễn Trọng Báu (CB)
56	Truyện cổ dân gian các dân tộc Việt Nam - Truyện cổ H'mông	Nguyễn Trọng Báu (CB)
57	Truyện cổ dân gian các dân tộc Việt Nam - Truyện cổ Khmer	Nguyễn Trọng Báu, Xuân Mai
58	Truyện cổ dân gian các dân tộc Việt Nam - Truyện cổ Tà Ôi	Nguyễn Khánh Phong, Lã Quỳnh Tường
59	Truyện cổ dân gian các dân tộc Việt Nam - Truyện cổ thượng nguồn sông Thao	Lê Quốc Hùng (sưu tầm-biên soạn)
60	Truyện cổ thế giới về loài vật - Tập 1	Nguyễn Mộng Hưng (sưu tầm-biên soạn)
61	Truyện đạo đức xưa và nay - Tập 1: Tình cảm gia đình - Quyển 1	Nguyễn Văn Lũy, Bùi Ngọc Sơn
62	Truyện đạo đức xưa và nay - Tập 1: Tình cảm gia đình - Quyển 2, Quyển 3	Trần Văn Thắng
63	Truyện đạo đức xưa và nay - Tập 2	Nguyễn Văn Lũy, Bùi Ngọc Sơn
64	Truyện đạo đức xưa và nay - Tập 3	Nguyễn Văn Lũy, Bùi Ngọc Sơn
65	Truyện đạo đức xưa và nay - Tập 4: Tôn sư trọng đạo	Nguyễn Văn Lũy, Bùi Ngọc Sơn
66	Truyện đạo đức xưa và nay - Tập 5: Quan hệ thầy trò	Trần Văn Thắng (CB)
67	Truyện đạo đức xưa và nay - Tập 6: Quan hệ gia đình - Quyển 1	Trần Văn Thắng, Vũ Thị Lan
68	Truyện đạo đức xưa và nay - Tập 6: Quan hệ gia đình - Quyển 2	Nguyễn Văn Lũy, Bùi Ngọc Sơn ...
69	Truyện kể về các danh họa trên thế giới - Tập 1, Tập 2	Ngọc Phương, Nguyệt Minh, Ngân Hà
70	Truyện kể về làng quê người Việt	Chu Huy, Đặng Thiêm
71	Văn học trung đại Việt Nam dưới góc nhìn văn hóa	Trần Nho Thìn
72	Việt Nam đất nước con người	Lê Thông (CB)
73	Việt Nam Đông Nam Á - ngôn ngữ và văn hóa	Phạm Đức Dương
74	Việt Nam những sự kiện lịch sử (1975-2000)	Nguyễn Hữu Đạo
75	Việt Nam non xanh nước biếc	Hoàng Thiếu Sơn
76	Việt sử giai thoại (8 tập)	Nguyễn Khắc Thuần

BAN TỔ CHỨC CUỘC THI

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 419 (5.2012)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.35121607
ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35121606
Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn

TRONG SỐ NÀY

Ảnh Bìa 1. **Nhà Bác Hồ ở Làng Sen, xã Kim Liên, huyện Nam Đàn, tỉnh Nghệ An.**
Nguồn: *www.google.com*
Bìa 2. **Cuộc thi Đố vui Ngày hè 2012.**

Biên tập : NGUYỄN THỊ THANH
Mĩ thuật : MINH THƠ, THANH LONG
Trị sự, phát hành : NGUYỄN KHOA ĐIỀM, VŨ ANH THƯ
Chế bản : NGUYỄN THỊ OANH

ISSN : 0866-8035 Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
Chỉ số : 12884 In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP Giá : 8000 đồng
Mã số : 8BT05M2 In xong và nộp lưu chiểu tháng 5 năm 2012 Tám nghìn đồng