ỜNG ĐẠI HỌC KINH TẾ QUỐC DÂN
BỘ MÔN TOÁN CƠ BẢN
Nguyễn Huy Hoàng (Chủ biên)

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP TOÁN CAO CẤP CHO CÁC NHÀ KINH TẾ

(Phần I: Đại số tuyến tính)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC KINH TẾ QUỐC DÂN

LỜI NÓI ĐẦU

Tiếp theo cuốn bài tập *"Toán cao cấp cho các nhà kinh tế"*, do Nhà xuất bản Thống kê ấn hành năm 2005, lần này chúng tôi cho biên soạn cuốn "Hướng dẫn giải bài tập Toán cao cấp cho các nhà kinh tế".

Mục đích của cuốn sách nhằm giúp cho sinh viên có thể tự học tốt môn học, hoặc dùng để ôn tập thi hết học phần, thi tuyển sinh đầu vào Sau đại học.

Kết cấu cuốn sách gồm hai phần chính tương ứng với nội dung của giáo trình lý thuyết và cuốn bài tập. Trong mỗi bài học, chúng tôi tóm tắt lại các khái niệm và kết quả cơ bản cùng các ví dụ mẫu. Hướng dẫn phương pháp giải các loại bài tập cụ thể, cuối cùng là các bài tập và đáp số hoặc gợi ý để các bạn tự rèn luyện.

Hy vọng cuốn sách sẽ giúp các bạn tự học và ôn tập tốt môn học *"Toán cao cấp cho các nhà kinh tế"*.

Lần đầu biên soạn, cuốn sách không tránh khỏi thiếu sót, rất mong nhận được sự góp ý của bạn đọc và đồng nghiệp để lần xuất bản sau được hoàn thiện hơn.

Mọi ý kiến góp ý xin gửi về: Bộ môn Toán cơ bản, Khoa Toán Kinh tế, Trường Đại học Kinh tế Quốc dân.

ĐT/Fax: (04) 6283007.

Email: hoangtoancb@neu.edu.vn

Xin chân thành cảm ơn!

Trưởng Bộ môn Toán Cơ bản, ĐH KTQD.

NGUYỄN HUY HOÀNG

Phần 1

ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Tái bản lần thứ 3

(Có sửa chữa bổ sung)

Chương 1

KHÔNG GIAN VECTƠ

§1. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

A. Tóm tắt lý thuyết và các ví dụ mẫu

Hệ phương trình tuyến tính tổng quát gồm m phương trình và n ẩn:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Hệ tam giác:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \cdots \quad \cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

ở đó, $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn} \neq 0$ và $a_{ij} = 0$ với $i > j$.

Hệ dạng tam giác có nghiệm duy nhất.

Cách giải: Từ phương trình cuối cùng giải được ẩn x_n, thay ngược lên các phương trình trên tìm các ẩn còn lại, nghiệm của hệ phương trình là duy nhất.

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ \qquad x_2 + 3x_3 = 7 \\ \qquad\qquad 5x_3 = 2 \end{cases}$$

Giải. Lần lượt tìm giá trị của ẩn x_3, x_2, x_1. Hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất:

$$\left(x_1 = -\frac{1}{5}, x_2 = \frac{29}{5}, x_3 = \frac{2}{5}\right).$$

Hệ hình thang:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \qquad\qquad\qquad a_{mm}x_m + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

ở đó, $a_{ii} \neq 0, \forall i = 1,2,...,m; m < n$ và $a_{ij} = 0$ với $i > j$.

Cách giải:

+ Chọn $x_1, x_2, ..., x_m$ là các ẩn chính (số ẩn chính bằng số phương trình); $x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n$ là ẩn tự do.

+ Chuyển các ẩn tự do sang vế phải và gán cho chúng những giá trị tuỳ ý:

$$x_{m+1} = \alpha_{m+1}, x_{m+2} = \alpha_{m+2}, ..., x_n = \alpha_n.$$

Khi đó, ta thu được hệ mới có dạng tam giác với các ẩn chính, giải hệ này ta được:

$$x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, ..., x_m = \alpha_m.$$

Vậy ta có nghiệm của hệ phương trình đã cho có dạng:

$$(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m, \alpha_{m+1}, ..., \alpha_n).$$

Vì các giá trị mà ta gán cho các ẩn tự do là tuỳ ý nên hệ hình thang có vô số nghiệm .

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ \qquad x_2 - x_3 - 2x_4 = -2 \\ \qquad\qquad 2x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$$

Giải: Chọn x_1, x_2, x_3 là các ẩn chính; x_4 là ẩn tự do, $x_4 = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$.

Hệ phương trình đã cho tương đương:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 - \alpha \\ \qquad x_2 - x_3 = -2 + 2\alpha \\ \qquad\qquad x_3 = 3 + \alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -8\alpha + 8 \\ x_2 = \frac{1}{2}(\alpha+3) + 2\alpha - 2 \\ x_3 = \frac{1}{2}(\alpha+3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -8(\alpha-1) \\ x_2 = \frac{1}{2}(5\alpha-1) \\ x_3 = \frac{1}{2}(\alpha+1) \end{cases}$$

Nghiệm tổng quát: $\left(-8(\alpha-1), \frac{1}{2}(5\alpha-1), \frac{1}{2}(\alpha+1), \alpha\right)$.

Phương pháp khử ẩn liên tiếp

Các phép biến đổi tương đương đối với hệ phương trình tuyến tính:

- Đổi chỗ hai phương trình trong hệ cho nhau;
- Nhân hai vế của một phương trình trong hệ với một số khác không;
- Cộng vào hai vế của một phương trình hai vế tương ứng của một phương trình khác sau khi đã nhân với một số.

Bây giờ chúng tôi xin giới thiệu phương pháp khử ẩn liên tiếp Gauss để giải hệ phương trình tuyến tính tổng quát.

Nội dung:

Chuyển hệ phương trình tuyến tính tổng quát về hệ tam giác hoặc hệ hình thang, bằng các phép biến đổi tương đương đối với hệ phương trình tuyến tính.

Chú ý:

Để giải hệ phương trình tuyến tính ta thường biến đổi trên ma trận mở rộng tương ứng của hệ phương trình đó.

Cách giải: Tương ứng với hệ phương trình tuyến tính tổng quát ta có ma trận mở rộng và không mất tính tổng quát giả sử $a_{11} \neq 0$.

Bước 1: Khử ẩn x_1 bằng cách lấy dòng một nhân với $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ và cộng vào dòng $i, i = 2,3,...,m$.

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a'_{m2} & \cdots & a'_{mn} & b'_m \end{pmatrix}$$

Bước 2: Khử ẩn x_2 (giả sử $a'_{22} \neq 0$) bằng cách lấy dòng hai nhân với $-\frac{a'_{i2}}{a'_{22}}$ rồi cộng vào dòng $i, i = 3,4,...,m$.

Cứ tiếp tục quá trình trên ta đưa được hệ phương trình đã cho về hệ tam giác hoặc hệ hình thang.

Trong quá trình sử dụng các phép biến đổi tương đương nếu thấy trong hệ phương trình xuất hiện phương trình dạng:

- $0x_1 + 0x_2 + ... + 0x_n = b \neq 0$ thì kết luận hệ phương trình đã cho vô nghiệm;
- $0x_1 + 0x_2 + ... + 0x_n = 0$ thì có thể bỏ phương trình này.

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 2x - 3y + z = 2 \\ 3x - y - 2z = 4 \end{cases}$$

Giải:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & -7 & 7 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hệ phương trình trên tương đương với hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ \quad -7y + 7z = 0 \\ \qquad 0z = 1 \end{cases}$$

Hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Ví dụ 4: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y - z = 1 \\ 3x - y + z = 4 \end{cases}$$

Giải:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & -11 \\ 0 & -4 & -2 & -14 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 10 & 30 \end{pmatrix}$$

Hệ phương trình đã cho tương đương với hệ sau:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ \quad -y - 3z = -11 \\ \qquad 10z = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(1,2,3)$.

Ví dụ 5: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} -4x_1 - x_2 + 10x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Giải:

$$\begin{pmatrix} -4 & -1 & 10 & -5 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 7 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -4 & -1 & 10 & -5 \\ -2 & 3 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 1\\ 0 & 7 & 2 & -1\\ 0 & 7 & 3 & 0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 1\\ 0 & 7 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Hệ phương trình đã cho tương đương với hệ phương trình sau:

$$\begin{cases}x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\\ \quad\quad 7x_2 + 2x_3 - x_4 = 0\\ \quad\quad\quad\quad x_3 + x_4 = 0\end{cases}$$

Chọn x_1, x_2, x_3 là các ẩn chính; x_4 là ẩn tự do, gán cho $x_4 = \alpha$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$.

Hệ phương trình trên tương đương với hệ phương trình sau:

$$\begin{cases}x_1 + x_2 - 2x_3 = -\alpha\\ \quad 7x_2 + 2x_3 = \alpha\\ \quad\quad x_3 = -\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1 = -\alpha - 2\alpha - \frac{6}{7}\alpha\\ x_2 = \frac{3}{7}\alpha\\ x_3 = -\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1 = -\frac{27}{7}\alpha\\ x_2 = \frac{3}{7}\alpha\\ x_3 = -\alpha\end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $\left(-\frac{27}{7}\alpha, \frac{3}{7}\alpha, -\alpha, \alpha\right)$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

Chú ý: Mọi hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có số phương trình ít hơn số ẩn đều có vô số nghiệm (có nghiệm không tầm thường).

B. Bài tập

I. Đề bài

Giải các hệ phương trình tuyến tính sau bằng phương pháp khử ẩn liên tiếp Gauss:

1. $\begin{cases}2x + 3y = 5\\ 3x - y = -9\\ x + 2y = 4\end{cases}$

2. $\begin{cases}x - 2y = 3\\ 2x - y = 1\\ 3x - 3y = 5\end{cases}$

3. $\begin{cases} 8x - y = 10 \\ 10x - 9z = 19 \\ y - 10z = 8 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y - z = 1 \\ 3x - y + z = 4 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x - 6y + 8z = 0 \\ 3x - 4y + 5z = 18 \\ 2x + 4y - 3z = 26 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 2x - 3y + z = 2 \\ 3x - y - 2z = 4 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x - 3y + 2z = 1 \\ 3x - 5y - 4z = 2 \\ 3x - 4y + 10z = 1 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + 3y - 3z = 0 \\ 4x - 3y + 5z = 0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \\ 4x + 3y + 5z = 0 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x - y - z = -2 \\ 2x + 3y + 2z = 1 \\ 3x - 5y - 4z = -8 \\ -2x + 2y + 3z = 4 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \\ 3x + y + 2z = 4 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ 2x_2 + x_3 = 11 \\ 3x_3 + x_4 = 22 \\ 4x_4 + x_1 = 29 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 9 \\ x_3 + x_4 + x_1 = 8 \\ x_4 + x_1 + x_2 = 7 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 - x_2 - x_1 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_1 - x_4 = 4 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 1 \\ 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 4x_4 = -10 \\ -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 7 \\ -4x_1 - x_2 + 3x_3 + 6x_4 = -4 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 2 \\ 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 - 5x_4 = 3 \\ 4x_1 - 6x_2 + 8x_3 - 2x_4 = 4 \end{cases}$ 18. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 5x_4 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 10x_4 = 0 \end{cases}$ 20. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$

II. Đáp số

1. $(x = -2,\ y = 3)$. **2.** Vô nghiệm. **3.** $(x = 1,\ y = -2,\ z = -1)$.

4. $(x = 1,\ y = 2,\ z = 3)$. **5.** $(x = 8,\ y = 4,\ x = 2)$. **6.** Vô nghiệm.

7. $(x = -22\alpha - 1,\ y = -14\alpha - 1,\ z = \alpha)$. **8.** $(x = 0,\ y = 0,\ z = 0)$.

9. $(x = 7\alpha\ ,\ y = -11\alpha,\ z = \alpha)$. **10.** $(x = -1,\ y = 1,\ z = 0)$.

11. Vô nghiệm. **12.** $(x_1 = 1,\ x_2 = 3,\ x_3 = 5,\ x_4 = 7)$.

13. $(x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4)$.

14. $(x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 2 + \alpha,\ x_4 = \alpha)$. **15.** Vô nghiệm.

16. $(x_1 = 2\alpha,\ x_2 = \alpha + 1,\ x_3 = \alpha - 1,\ x_4 = \alpha)$.

17. $(x_1 = 1 + \alpha - 10\beta,\ x_2 = 2\alpha - 7\beta,\ x_3 = \alpha,\ x_4 = \beta)$.

18. $(x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0)$. **19.** $(x_1 = 13\alpha,\ x_2 = 0,\ x_3 = \alpha,\ x_4 = 5\alpha)$.

20. $(x_1 = -7\alpha + 10\beta,\ x_2 = -5\alpha + 7\beta,\ x_3 = \alpha,\ x_4 = \beta)$.

§2. Các phép toán véc tơ

A. Tóm tắt lý thuyết và các ví dụ mẫu

Định nghĩa:

+ Phép cộng hai véc tơ cùng chiều:

$$X = (x_1, x_2, ..., x_n);$$

$$Y = (y_1, y_2, ..., y_n).$$

$$\Rightarrow X + Y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n).$$

+ Phép nhân một số với véc tơ:

$$X = (x_1, x_2, ..., x_n), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow \alpha X = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n).$$

+ Véc tơ không:

$$0_n = \underbrace{(0, 0, ..., 0)}_{n}$$

+ Véc tơ đối:

Cho véc tơ $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, ta có $-X = (-x_1, -x_2, ..., -x_n)$.

là véc tơ đối của véc tơ X.

Tính chất:

Với $X, Y, Z \in \mathbb{R}^n$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ta có các tính chất sau:

* $X + Y = Y + X;$
* $(X + Y) + Z = X + (Y + Z);$
* $X + 0_n = X;$
* $X + (-X) = 0_n;$

- $1.X = X$;
- $\alpha(X+Y) = \alpha X + \alpha Y$;
- $(\alpha+\beta)X = \alpha X + \beta Y$;
- $(\alpha\beta)X = \alpha(\beta X) = \beta(\alpha X)$.

Ví dụ 1: Xác định véc tơ X biết:

a. $X = 2X_1 - X_2$;

b. $3X - 2X_1 + X_2 = 0_3$.

Với $X_1 = \left(1, -\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$, $X_2 = \left(\frac{1}{4}, -3, \frac{5}{2}\right)$.

Giải:

a. $2X_1 = 2\left(1, -\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right) = \left(2, -\frac{4}{3}, 1\right)$

$-X_2 = \left(-\frac{1}{4}, 3, -\frac{5}{2}\right)$

Vậy: $X = 2X_1 - X_2 = \left(2, -\frac{4}{3}, 1\right) + \left(-\frac{1}{4}, 3, -\frac{5}{2}\right) = \left(2 - \frac{1}{4}, -\frac{4}{3} + 3, 1 - \frac{5}{2}\right)$

$$= \left(\frac{7}{4}, \frac{5}{3}, -\frac{3}{2}\right)$$

b. $3X - 2X_1 + X_2 = 0 \Leftrightarrow 3X = 2X_1 - X_2$

$2X_1 = 2\left(1, -\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right) = \left(2, -\frac{4}{3}, 1\right)$

$-X_2 = \left(-\frac{1}{4}, 3, -\frac{5}{2}\right) \Rightarrow 3X = \left(\frac{7}{4}, \frac{5}{3}, -\frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow X = \frac{1}{3}\left(\frac{7}{4}, \frac{5}{3}, -\frac{3}{2}\right)$

$$= \left(\frac{7}{12}, \frac{5}{9}, -\frac{1}{2}\right).$$

Không gian con

Định nghĩa: Một tập hợp không rỗng $L \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là không gian con của không gian $\mathbb{R}^n$ nếu nó thoả mãn:

i. L đóng kín đối với phép cộng các véc tơ ($\forall X, Y \in L$ thì $X + Y \in L$);

ii. L đóng kín đối với phép nhân véc tơ với số ($\forall X \in L, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ thì $\alpha X \in L$).

Ví dụ 2: Chứng minh rằng: $L_1 = \{X = (x_1, x_2) : x_2 = 0\}$ là không gian con của không gian $\mathbb{R}^2$.

Giải:

Hiển nhiên $L_1 \neq \varnothing$ vì $0_2 \in L_1$.

Lấy $X = (x_1, x_2), Y = (y_1, y_2)$ bất kì $\in L_1$ nên $x_2 = 0, y_2 = 0 \Rightarrow x_2 + y_2 = 0$

$\Rightarrow X + Y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \in L_1$. Mặt khác, $\forall X = (x_1, x_2) \in L_1, \alpha \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \alpha X = (\alpha x_1, \alpha x_2) \in L_1$ vì $\alpha x_2 = 0$.

Vậy theo định nghĩa L_1 là không gian con của không gian $\mathbb{R}^2$.

Ví dụ 3: Tập véc tơ sau đây có phải là không gian con của không gian véc tơ $\mathbb{R}^3$ không?

$$L = \{X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$$

Giải: Hiển nhiên $L \neq \varnothing$ vì $X = (1,0,0) \in L$.

Lấy $X = (x_1, x_2, x_3), Y = (y_1, y_2, y_3)$ bất kì $\in L$ tức là: $x_1 + x_2 + x_3 = 1$,

$y_1 + y_2 + y_3 = 1 \Rightarrow X + Y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$, ta có:

$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) = (x_1 + x_2 + x_3) + (y_1 + y_2 + y_3) = 2 \neq 1$.

$\Rightarrow X + Y \notin L$.

Vậy theo định nghĩa thì L không là không gian con của không gian $\mathbb{R}^3$.

B. Bài tập

I. Đề bài

Xác định véc tơ X từ các phương trình sau:

21. $X = 2X_1 - 3X_2$ với $X_1 = (1,-2), X_2 = (-2,1)$.

22. $X = 3X_1 + 2X_2$ với $X_1 = (1,-4), X_2 = (-3,6)$.

23. $2X = 3X_1 + X_2$ với $X_1 = (1,2), X_2 = (-1,4)$.

24. $X = 3X_1 - 2X_2 + 3X_3$ với $X_1 = (1,0,-1)$,
$X_2 = (-2,0,2)$,
$X_3 = (-1,1,0)$.

25. $X = 2X_1 + 3X_2 - 2X_3$ với $X_1 = (1,3,-1)$,
$X_2 = (-2,0,2)$,
$X_3 = (-2,3,2)$.

26. $3X - 2X_1 - X_2 + 2X_3 = 0$ với $X_1 = (-1,1,2)$,
$X_2 = (3,5,7)$,
$X_3 = (2,-1,4)$.

II. Đáp số

21. $X = (8,-7)$. 22. $X = (-3,0)$. 23. $X = (1,5)$.

24. $X = (4,3,-7)$. 25. $X = (0,0,0)$. 26. $X = (-1,3,1)$.

§3. Các mối liên hệ tuyến tính

A. Tóm tắt lý thuyết và các ví dụ mẫu

Phép biểu diễn tuyến tính

Định nghĩa: Véc tơ $X \in \mathbb{R}^n$ được gọi là biểu diễn tuyến tính qua các véc tơ n chiều $X_1, X_2, ..., X_m$ nếu nó biểu diễn dưới dạng:

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + ... + \alpha_m X_m.$$

ở đó $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 1: Tìm λ để véc tơ X biểu diễn tuyến tính qua các véc tơ còn lại.

$$X = (2,-1,\lambda),\ X_1 = (4,3,2),\ X_2 = (-1,-2,-3).$$

Giải: Giả sử tồn tại k_1, k_2 sao cho: $X = k_1X_1 + k_2X_2$.

Để X biểu diễn tuyến tính qua các véc tơ còn lại thì hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4k_1 - k_2 = 2 \\ 3k_1 - 2k_2 = -1 \\ 2k_1 - 3k_2 = \lambda \end{cases}$$

phải có nghiệm. Ma trận mở rộng tương ứng là:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & \lambda \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & \lambda - 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \lambda + 4 \end{pmatrix}$$

Hệ phương trình tương đương với hệ phương trình trên là:

$$\begin{cases} 4k_1 - k_2 = 2 \\ -\frac{5}{4}k_2 = -\frac{5}{2} \\ 0k_2 = \lambda + 4 \end{cases}$$

Hệ phương trình chỉ có nghiệm khi $\lambda = -4$. Vậy để X biểu diễn tuyến tính qua các véc tơ còn lại thì $\lambda = -4$.

Tổng quát. Để giải bài toán như trên ta xét hệ phương trình có ma trận hệ số với các cột là tọa độ các véc tơ còn lại và cột hệ số tự do là tọa độ của véc tơ X. Nếu hệ phương trình này có nghiệm thì X biểu diễn tuyến tính qua các véc tơ còn lại, ngược lại thì không.

Ví dụ 2: Tìm λ để X biểu diễn tuyến tính qua các véc tơ còn lại.

$$X=(\lambda,2,5), X_1=(3,2,6),\ X_2=(7,3,8),\ X_3=(5,1,3).$$

Giải: Xét hệ phương trình có ma trận hệ số mở rộng sau:

$$\begin{pmatrix}3&7&5&\lambda\\2&3&1&2\\6&8&3&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&3&1&2\\6&8&3&5\\3&7&5&\lambda\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&3&1&2\\0&-1&0&-1\\0&\frac{5}{2}&\frac{7}{2}&\lambda-3\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}2&3&1&2\\0&-1&0&-1\\0&5&7&2\lambda-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&3&1&2\\0&-1&0&-1\\0&0&7&2\lambda-11\end{pmatrix}$$

Hệ phương trình luôn có nghiệm với mọi giá trị của λ. Vậy với mọi λ thì X đều biểu diễn tuyến tính qua các véc tơ còn lại.

Sự phụ thuộc tuyến tính và độc lập tuyến tính của một hệ véc tơ

Cho một hệ gồm m véc tơ n chiều:

$$X_1, X_2, \ldots, X_m \tag{1}$$

Xét hệ thức:

$$k_1X_1+k_2X_2+\ldots+k_mX_m=0_n \tag{2}$$

Nếu hệ thức (2) viết dưới dạng thành phần, theo định nghĩa hai véc tơ bằng nhau ta được hệ gồm n phương trình tuyến tính thuần nhất với m ẩn $k_1, k_2, \ldots, k_m$. Nếu hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có vô số nghiệm (tức có nghiệm không tầm thường) thì hệ véc tơ phụ thuộc tuyến tính, còn nếu hệ phương trình chỉ có nghiệm duy nhất là tầm thường thì hệ véc tơ độc lập tuyến tính.

Ví dụ 3: Xét sự độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính của hệ véc tơ sau:

$$X_1 = (1,-1,0),\ X_2 = (-2,1,-1),\ X_3 = (-3,2,-1).$$

Giải: Xét hệ thức:

$$k_1X_1 + k_2X_2 + k_3X_3 = 0_3$$

Hệ phương trình tương ứng là:

$$\begin{cases} k_1 - 2k_2 - 3k_3 = 0 \\ -k_1 + k_2 + 2k_3 = 0 \\ -k_2 - k_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hệ phương trình tương đương:

$$\begin{cases} k_1 - 2k_2 - 3k_3 = 0 \\ -k_2 - k_3 = 0 \end{cases}$$

Hệ hình thang có vô số nghiệm. Vậy hệ véc tơ đã cho phụ thuộc tuyến tính.

Chú ý: Để giải bài toán xét sự độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính của một hệ véc tơ, ta xét hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có ma trận hệ số với các cột tương ứng là các véc tơ này viết theo dạng cột. Thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên ma trận này, nếu ma trận cuối cùng có dạng hình thang thì hệ véc tơ phụ thuộc tuyến tính, nếu có dạng tam giác thì hệ véc tơ độc lập tuyến tính.

Ví dụ 4: Xét sự độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính của hệ véc tơ sau: $X_1 = (-1,1,2)$, $X_2 = (-2,1,-1)$, $X_3 = (3,-1,1)$.

Giải:

Xét hệ thức: $k_1X_1 + k_2X_2 + k_3X_3 = 0_3$.

Ma trận hệ số tương ứng:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ma trận cuối có dạng tam giác nên hệ véc tơ trên độc lập tuyến tính.

Chú ý: Trên đây mới chỉ là phương pháp giải bài toán theo định nghĩa, ở các phần sau ta có thể xét bài toán này theo phương pháp hạng của hệ véc tơ thông qua hạng của ma trận hay phương pháp định thức (nếu số véc tơ bằng số chiều của véc tơ).

Ví dụ 5: Tìm λ để hệ véc tơ sau là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính: $X_1 = (1,-2,-1)$, $X_2 = (-1,1,2)$, $X_3 = (2,-3,\lambda)$.

Giải:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & \lambda \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda+2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda+3 \end{pmatrix}$$

Nếu $\lambda + 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -3$ thì ma trận dạng hình thang, do đó hệ véc tơ trên là phụ thuộc tuyến tính.

Nếu $\lambda + 3 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq -3$ thì ma trận có dạng tam giác nên hệ véc tơ độc lập tuyến tính.

Ví dụ 6: Chứng minh rằng hệ véc tơ X_1, X_2, X_3 phụ thuộc tuyến tính mà X_3 không thể biểu diễn tuyến tính qua X_1, X_2 thì các véc tơ X_1, X_2 tỷ lệ với nhau.

Giải. Do X_1, X_2, X_3 phụ thuộc tuyến tính nên tồn tại k_1, k_2, k_3 không đồng thời bằng không sao cho: $k_1X_1 + k_2X_2 + k_3X_3 = 0$ (*)

Mặt khác, ta có $k_3 = 0$, vì nếu $k_3 \neq 0$ thì từ (*) ta có :

$$X_3 = -\frac{k_1}{k_3}X_1 - \frac{k_2}{k_3}X_2$$

Nghĩa là, X_3 biểu diễn tuyến tính qua X_1, X_2 mâu thuẫn với giả thiết, suy ra $k_1X_1 + k_2X_2 = 0$ với k_1, k_2 không đồng thời bằng không, không mất tính tổng quát giả sử $k_1 \neq 0 \Rightarrow X_1 = -\frac{k_2}{k_1}X_2$.

B. Bài tập

I. Đề bài

Tìm số λ để véc tơ X biểu diễn tuyến tính qua các véc tơ còn lại:

27. $X = (2,-1,\lambda)$, $X_1 = (4,3,2)$, $X_2 = (-1,-1,-3)$.

28. $X = (1,2,3)$, $X_1 = (-1,2,\lambda)$, $X_2 = (3,-2,-3)$.

29. $X = (1,3,5)$, $X_1 = (3,2,5)$, $X_2 = (2,4,7)$, $X_3 = (5,6,\lambda)$.

30. $X = (2,5,\lambda)$, $X_1 = (3,2,6)$, $X_2 = (7,3,9)$, $X_3 = (5,1,3)$.

Các hệ véc tơ sau là độc lập tuyến tính hay là phụ thuộc tuyến tính:

31. $\begin{cases} X_1 = (2,-1,3) \\ X_2 = (-4,2,-6) \end{cases}$

32. $\begin{cases} X_1 = (1,-2,3) \\ X_2 = (3,-2,1) \end{cases}$

33. $\begin{cases} X_1 = (1,-1,0) \\ X_2 = (-2,1,-1) \\ X_3 = (-3,2,-1) \end{cases}$

34. $\begin{cases} X_1 = (-1,1,-2) \\ X_2 = (-2,1,-1) \\ X_3 = (3,-1,1) \end{cases}$

35. $\begin{cases} X_1 = (1,2,3,4) \\ X_2 = (2,3,4,1) \\ X_3 = (3,4,1,2) \end{cases}$

36. $\begin{cases} X_1 = (1,-1,1,-1) \\ X_2 = (2,1,0,-1) \\ X_3 = (3,-6,5,-4) \end{cases}$

37. $\begin{cases} X_1 = (1,2,3,4) \\ X_2 = (2,3,4,1) \\ X_3 = (3,4,1,2) \\ X_4 = (4,1,2,3) \end{cases}$

38. $\begin{cases} X_1 = (1,1,1,1) \\ X_2 = (1,-1,-1,1) \\ X_3 = (1,-1,1,-1) \\ X_4 = (1,1,-1,-1) \end{cases}$

Biện luận theo λ sự độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính của hệ véctơ sau:

39. $\begin{cases} X_1 = (-1,2) \\ X_2 = (3,\lambda) \end{cases}$ 40. $\begin{cases} X_1 = (-2,3) \\ X_2 = (\lambda,-6) \end{cases}$

41. $\begin{cases} X_1 = (1,-2,-1) \\ X_2 = (-1,1,2) \\ X_3 = (2,-3,\lambda) \end{cases}$ 42. $\begin{cases} X_1 = (2,-3,-2,3) \\ X_2 = (-3,2,1,-2) \\ X_3 = (1,-4,-3,\lambda) \end{cases}$

43. Chứng minh rằng nếu hệ véc tơ $\{X_1, X_2, ..., X_m\}$ độc lập tuyến tính còn hệ véc tơ $\{X_1, X_2, ..., X_k, X\}$ với $1 < k \le m$ phụ thuộc tuyến tính thì véc tơ X là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ $X_1, X_2, ..., X_m$.

II. Đáp số

27. $\lambda = -24$. 28. $\lambda = 3$. 29. $\lambda \ne 12$. 30. Không tồn tại λ.

31. Phụ thuộc. 32. Độc lập. 33. Phụ thuộc. 34. Độc lập.

35. Độc lập. 36. Phụ thuộc. 37. Độc lập. 38. Độc lập.

39. Phụ thuộc tuyến tính với $\lambda = -6$.

40. Phụ thuộc tuyến tính với $\lambda = 4$.

41. Phụ thuộc tuyến tính với $\lambda = -3$.

42. Phụ thuộc tuyến tính với $\lambda = 4$.

§4. Cơ sở của không gian véc tơ

A. Tóm tắt lý thuyết và các ví dụ mẫu

Cơ sở của một không gian véc tơ, toạ độ của véc tơ trong một cơ sở

+ Hệ gồm n véc tơ n chiều, độc lập tuyến tính được gọi là cơ sở của không gian $\mathbb{R}^n$.

+ Nếu $P_1, P_2, ..., P_n$ là một cơ sở của không gian $\mathbb{R}^n$ thì mọi véc tơ $X \in \mathbb{R}^n$ đều biểu diễn duy nhất dưới dạng:

$$X = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \cdots + \alpha_n P_n \qquad (1)$$

+ Bộ n số thực có thứ tự $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ thoả mãn hệ thức (1) được gọi là toạ độ của véc tơ X trong cơ sở $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

Chú ý: Với cơ sở $P_1, P_2, \ldots, P_n$ và véc tơ X cho trước thì hệ thức (1) tương đương với hệ phương trình tuyến tính gồm n phương trình và n ẩn số là $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ có ma trận hệ số nhận tọa độ các véc tơ cơ sở là các cột và tọa độ véc tơ X là cột hệ số tự do. Nghiệm duy nhất của hệ này là toạ độ của véc tơ X trong cơ sở đã cho.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng hệ ba véc tơ:

$$\begin{cases} P_1 = (1,1,0) \\ P_2 = (1,0,1) \\ P_3 = (0,1,1) \end{cases}$$

lập thành một cơ sở của không gian $\mathbb{R}^3$. Tìm toạ độ của véc tơ $X = (1,5,2)$ trong cơ sở đó.

Giải:

* Chứng minh rằng hệ véc tơ $P_1 = (1,1,0)$, $P_2 = (1,0,1)$, $P_3 = (0,1,1)$ là một cơ sở của không gian $\mathbb{R}^3$.

Xét hệ thức: $k_1P_1 + k_2P_2 + k_3P_3 = 0_3$.

Hệ thức trên tương đương với hệ phương trình:

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 0 \\ k_1 + k_3 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \end{cases}$$

Dễ dàng thấy rằng hệ phương trình này có nghiệm duy nhất $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. Suy ra hệ véc tơ $P_1 = (1,1,0)$, $P_2 = (1,0,1)$, $P_3 = (0,1,1)$ độc lập tuyến tính. Do đó nó là một cơ sở của không gian $\mathbb{R}^3$.

* Toạ độ của véc tơ X trong cơ sở P_1, P_2, P_3 là bộ ba số thực thoả mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 \qquad = 1 \\ \alpha_1 \qquad + \alpha_3 = 5 \\ \qquad \alpha_2 + \alpha_3 = 2 \end{cases}$$

Bằng phương pháp khử ẩn liên tiếp ta tìm được nghiệm duy nhất của hệ phương trình là: $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 3$. Vậy toạ độ của véc tơ X trong cơ sở P_1, P_2, P_3 ở trên là $(2,-1,3)$.

Ví dụ 2: Chứng minh rằng hệ bốn véc tơ: $P_1 = (0,1,3,4)$, $P_2 = (1,0,2,3)$, $P_3 = (-3,-2,0,-5)$, $P_4 = (4,3,-5,0)$ lập thành một cơ sở của không gian $\mathbb{R}^4$. Tìm toạ độ của véc tơ $X = (-5,-4,12,5)$ trong cơ sở đó.

Giải:

* Chứng minh hệ bốn véc tơ: $P_1 = (0,1,3,4)$, $P_2 = (1,0,2,3)$ $P_3 = (-3,-2,0,-5)$, $P_4 = (4,3,-5,0)$ là một cơ sở của không gian $\mathbb{R}^4$. Xét hệ thức:

$$k_1P_1 + k_2P_2 + k_3P_3 + k_4P_4 = 0_4$$

Hệ thức trên tương đương với hệ phương trình:

$$\begin{cases} \quad\quad k_2 - 3k_3 + k_4 = 0 \\ k_1 \quad\quad - 2k_3 + k_4 = 0 \\ 3k_1 + 2k_2 \quad\quad + k_4 = 0 \\ 4k_1 + 3k_2 - 5k_3 \quad\quad = 0 \end{cases}$$

Giải hệ bằng phương pháp khử ẩn liên tiếp:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & -14 \\ 0 & 3 & 3 & -12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 12 & -22 \\ 0 & 0 & 12 & -24 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 12 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Dễ thấy hệ có nghiệm là $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$. Suy ra hệ bốn véc tơ $P_1 = (0,1,3,4), P_2 = (1,0,2,3)$, $P_3 = (-3,-2,0,-5), P_4 = (4,3,-5,0)$ độc lập tuyến tính. Do đó nó là cơ sở của không gian $\mathbb{R}^4$.

* Toạ độ của véc tơ X trong cơ sở P_1, P_2, P_3, P_4 là hệ thống bốn số thực thoả mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} \quad\quad \alpha_2 - 3\alpha_3 + \alpha_4 = -5 \\ \alpha_1 \quad\quad - 2\alpha_3 + \alpha_4 = -4 \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 \quad\quad + \alpha_4 = 12 \\ 4\alpha_1 + 3\alpha_2 - 5\alpha_3 \quad\quad = 5 \end{cases}$$

Giải hệ bằng phương pháp khử ẩn liên tiếp:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -3 & 4 & -5 \\ 1 & 0 & -2 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & 0 & -5 & 12 \\ 4 & 3 & -5 & 0 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & -5 \\ 3 & 2 & 0 & -5 & 12 \\ 4 & 3 & -5 & 0 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & 6 & -14 & 24 \\ 0 & 3 & 3 & -12 & 21 \end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-2&3&-4\\0&1&-3&4&-5\\0&0&12&-22&34\\0&0&12&-24&36\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-2&3&-4\\0&1&-3&4&-5\\0&0&12&-22&34\\0&0&0&-2&2\end{array}\right)$$

Từ ma trận cuối này ta dễ thấy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $(\alpha_1=1,\alpha_2=2,\alpha_3=1,\alpha_4=-1)$. Vậy toạ độ của véc tơ X trong cơ sở P_1, P_2, P_3, P_4 ở trên là $(1,2,1,-1)$.

Cơ sở của không gian con

Định nghĩa: Một hệ véc tơ $P_1,P_2,\ldots,P_r$ của không gian con L được gọi là cơ sở của nó nếu nó thoả mãn hai điều kiện sau:

i. $P_1,P_2,\ldots,P_r$ độc lập tuyến tính;

ii. Mọi véc tơ $X\in L$ đều biểu diễn tuyến tính qua hệ véc tơ $P_1,P_2,\ldots,P_r$.

Chú ý: Với mỗi không gian con L, nó có thể có nhiều cơ sở khác nhau, tuy nhiên số véc tơ trong mỗi cơ sở đều bằng nhau. Trên cơ sở đó chúng ta có định nghĩa sau.

Định nghĩa: Số véc tơ trong một cơ sở của không gian con được gọi là số chiều của không gian con đó.

Ví dụ 3: Các tập véc tơ sau đây có phải là không gian con của không gian véc tơ tương ứng hay không? Nếu đúng hãy tìm một cơ sở của không gian con đó.

a. $L_1=\{X=(x_1,x_2):x_2=0\}\subset\mathbb{R}^2$;

b. $L_2=\{X=(x_1,x_2,x_3):x_2=2x_1,x_3=3x_1\}\subset\mathbb{R}^3$.

Giải:

a. Dễ dàng chứng minh được L_1 là không gian con của không gian $\mathbb{R}^2$ theo định nghĩa trong §1. Bây giờ ta tìm một cơ sở của không gian con này. Xét véc tơ $X=(x_1,x_2)\in L_1$ bất kì. Khi đó, $X=(x_1,x_2)=(x_1,0)=x_1(1,0)\ \ \forall x_1\in\mathbb{R}$, nghĩa là véc tơ $X=(x_1,x_2)\in L_1$

bất kì luôn biểu diễn tuyến tính qua véc tơ $P=(1,0)$. Mặt khác, hệ chỉ gồm một véc tơ $P=(1,0)$ luôn độc lập tuyến tính. Vậy cơ sở của không gian L_1 là $\{P=(1,0)\}$.

b. L_2 là không gian con xin dành cho bạn đọc tự chứng minh. Bây giờ chúng ta tìm một cơ sở của không gian con đó.

Xét véc tơ $X=(x_1,x_2,x_3)\in L_2$ bất kì.

Khi đó, $X=(x_1,x_2,x_3)=(x_1,2x_1,3x_1)=x_1(1,2,3)\ \forall x_1\in\mathbb{R}$, nghĩa là véc tơ $X=(x_1,x_2,x_3)\in L_2$ bất kì luôn biểu diễn tuyến tính qua véc tơ $P=(1,2,3)$. Mặt khác, hệ chỉ gồm một véc tơ $P=(1,2,3)$ luôn độc lập tuyến tính. Vậy cơ sở của không gian L_1 là $\{P=(1,2,3)\}$.

B. Bài tập

I. Đề bài

Chứng minh rằng các vécto P_1, $P_2,\ldots,P_n$ tạo thành cơ sở của không gian $\mathbb{R}^n$ và tìm toạ độ của véc tơ X trong cơ sở đó:

45. $P_1=(2,-1)$; $P_2=(1,-2)$; $X=(4,1)$.

46. $P_1=(3,-2)$; $P_2=(-4,5)$; $X=(2,1)$.

47. $P_1=(1,1,0)$; $P_2=(1,0,1)$; $P_3=(0,1,1)$; $X=(1,5,2)$.

48. $P_1=(1,2,3)$; $P_2=(-2,1,-1)$; $P_3=(-1,3,4)$; $X=(6,-3,1)$.

49. $P_1=(1,0,1,1)$; $P_2=(1,1,0,1)$; $P_3=(1,1,1,0)$; $P_4=(0,1,1,1)$; $X=(6,9,8,7)$.

50. $P_1=(1,0,0,1)$; $P_2=(1,2,0,0)$; $P_3=(0,1,3,0)$; $P_4=(0,0,1,4)$; $X=(4,11,22,29)$.

51. $P_1=(0,1,3,4)$; $P_2=(1,0,2,3)$; $P_3=(-3,-2,0,-5)$; $P_4=(4,3,-5,0)$; $X=(-5,-4,12,5)$.

Các tập véc tơ sau đây có phải là không gian con của không gian véc tơ tương ứng hay không? Nếu đúng hãy tìm một cơ sở không gian con đó.

52. $L_1 = \{X = (x_1, x_2):\ x_2 = 0\} \subset \mathbb{R}^2$.

53. $L_2 = \{X = (x_1, x_2):\ x_2 = 2x_1\} \subset \mathbb{R}^2$.

54. $L_3 = \{X = (x_1, x_2):\ x_1x_2 = 0\} \subset \mathbb{R}^2$.

55. $L_4 = \{X = (x_1, x_2):\ x_2 = x_1^2\} \subset \mathbb{R}^2$.

56. $L_5 = \{X = (x_1, x_2):\ x_2 = ax_1 + b\} \subset \mathbb{R}^2$.

57. $L_6 = \{X = (x_1, x_2):\ x_1 + x_2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$.

58. $L_7 = \{X = (x_1, x_2, x_3):\ x_2 = ax_1, x_3 = ax_2\} \subset \mathbb{R}^3$.

59. $L_8 = \{X = (x_1, x_2, x_3):\ x_2 = 2x_1,\ x_3 = 3x_1\} \subset \mathbb{R}^3$.

60. $L_9 = \{X = (x_1, x_2, x_3):\ x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$.

61. $L_{10} = \{X = (x_1, x_2, x_3):\ x_1 + x_2 + x_3 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$.

62. $L_{11} = \{X = (x_1, x_2, x_3):\ x_3 = x_2x_1\} \subset \mathbb{R}^3$.

63. $L_{12} = \{X = (x_1, x_2, x_3):\ x_1x_2x_3 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$.

II. Đáp số

45. $X = (3, -2)$. **46.** $X = (2, 1)$. **47.** $X = (2, -1, 3)$.

48. $X = (1, -2, -1)$. **49.** $X = (1, 2, 3, 4)$. **50.** $X = (1, 3, 5, 7)$.

51. $X = (1, 2, 1, -1)$. **52.** Phải, $X = (1, 0)$. **53.** Phải, $X = (1, 2)$.

54. Không **55.** Không.

56. $b = 0$, Phải, $X = (1, a)$; $b \neq 0$, Không **57.** Không.

58. Phải, $X = (1, a, a^2)$. **59.** Phải, $X = (1, 2, 3)$.

60. Phải, $\{X_1 = (0, 1, -1),\ X_2 = (1, 0, -1)\}$.

61. Không. **62.** Không. **63.** Không.

§5. Hạng của một hệ véc tơ

A. Tóm tắt lý thuyết và các ví dụ mẫu

Cho một hệ gồm m véc tơ n chiều $X_1, X_2, \ldots, X_m$. (1)

Định nghĩa: Cơ sở của một hệ véc tơ là một hệ con của nó thoả mãn hai điều kiện sau:

1. Độc lập tuyến tính;
2. Mọi véc tơ của hệ đã cho biểu diễn tuyến tính qua hệ con đó.

Nhận xét:

Một hệ véc tơ có thể có nhiều cơ sở khác nhau, tuy nhiên số véc tơ trong mỗi cơ sở của một hệ véc tơ là bằng nhau.

Định nghĩa: Hạng của một hệ véc tơ là số véc tơ trong một cơ sở của hệ véc tơ đó.

Một số tính chất về hạng của hệ véc tơ

Gọi r là hạng của hệ (1), khi đó ta có:

- $r \le m, r \le n$; (hạng không vượt quá số véc tơ và số chiều của véc tơ)
- Mọi hệ con gồm r véc tơ độc lập tuyến tính đều là cơ sở của hệ véc tơ đã cho.
- Nếu $r = m$ (số véc tơ bằng hạng của hệ véc tơ) thì hệ véc tơ (1) độc lập tuyến tính.
- Nếu $r < m$ (hạng nhỏ hơn số véc tơ) thì hệ véc tơ (1) phụ thuộc tuyến tính.

Để tìm hạng của một hệ véc tơ ta có thể làm như sau:

Cách 1. Tìm một cơ sở bất kì của hệ véc tơ đó, hạng của hệ véc tơ là số véc tơ trong cơ sở đó.

Cách 2. Tìm một hệ con lớn nhất của hệ véc tơ đó mà độc lập tuyến tính, số véc tơ trong hệ con đó là hạng của hệ véc tơ đã cho.

Các phép biến đổi không làm thay đổi hạng của một hệ véc tơ

Phép biến đổi thêm, bớt véc tơ:

Xét hai hệ véc tơ:

$$\{X_1, X_2, \ldots, X_m\} \qquad \text{(a)}$$

$$\{X_1, X_2, \ldots, X_m, X\} \qquad \text{(b)}$$

Trong đó $X = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i X_i$, khi đó hai hệ (a) và (b) có hạng bằng nhau.

Phép biến đổi sơ cấp:

1. Đổi chỗ hai véc tơ trong hệ;.
2. Nhân một véc tơ của hệ với một số $k \neq 0$;
3. Cộng vào một véc tơ của hệ tích của một véc tơ khác trong cùng hệ với một số bất kì.

Ví dụ 1: Tìm hạng của hệ véc tơ :

$$\begin{cases} X_1 = (2,-3) \\ X_2 = (-4,6) \\ X_3 = (-3,4) \end{cases}$$

Giải:

Cách 1. Dễ dàng thấy hệ hai véc tơ X_1, X_3 độc lập tuyến tính do chúng không tỷ lệ. Mặt khác, $X_1 = X_1 + 0X_3$, $X_3 = 0X_1 + X_3$, $X_2 = -2X_1 + 0X_3$. Vậy hệ hai véc tơ X_1, X_3 là cơ sở của hệ ba véc tơ X_1, X_2, X_3. Vậy hạng của hệ véc tơ trên bằng 2

Cách 2. Ta cũng dễ dàng thấy rằng hệ 3 véc tơ hai chiều X_1, X_2, X_3 là phụ thuộc tuyến tính vì số véc tơ trong hệ lớn hơn số chiều. Mặt khác, hệ hai véc tơ X_1, X_3 độc lập tuyến tính do chúng không tỷ lệ và nó là hệ véc tơ con có số véc tơ lớn nhất độc lập tuyến tính. Vậy hạng của hệ của véc tơ đã cho bằng 2.

Ví dụ 2: Tìm hạng của hệ véc tơ sau:

$$\begin{cases} X_1 = (2,-1,3,1) \\ X_2 = (4,-2,6,2) \\ X_3 = (6,-3,9,3) \\ X_4 = (1,1,1,1) \end{cases}$$

Giải:

Dễ thấy hệ hai véc tơ X_1, X_4 độc lập tuyến tính do chúng không tỷ lệ. Mặt khác ta lại có, $X_1 = X_1 + 0X_4$, $X_4 = 0X_1 + X_4$, $X_2 = 2X_1 + 0X_4$, $X_3 = 3X_1 + 0X_4$. Theo định nghĩa suy ra hệ hai véc tơ X_1, X_4 là một cơ sở của hệ véc tơ đã cho. Vậy hạng của hệ véc tơ X_1, X_2, X_3, X_4 đã cho bằng hai.

Chú ý: Trong chương này mới chỉ giới thiệu cách giải bài toán tìm hạng của hệ véc tơ bằng định nghĩa, ở chương sau chúng ta có thể giải bài toán này dễ dàng hơn thông qua hạng của ma trận.

Ví dụ 3: Biện luận theo k hạng của hệ véc tơ:

$$\begin{cases} X_1 = (1,2,-3) \\ X_2 = (0,-1,-2) \\ X_3 = (2,3,k) \end{cases}$$

Giải:

Xét hệ thức: $k_1X_1 + k_2X_2 + k_3X_3 = 0_3$.

Ma trận hệ số tương ứng:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & -2 & k \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & k+6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & k+8 \end{pmatrix}$$

Dễ thấy với $k \neq -8$ thì hệ ba véc tơ X_1, X_2, X_3 độc lập tuyến tính. Với $k = -8$ thì hệ ba véc tơ X_1, X_2, X_3 phụ thuộc tuyến tính. Do đó, nếu $k \neq -8$ thì X_1, X_2, X_3 độc lập tuyến tính và nó là hệ lớn nhất độc lập tuyến tính nên hạng của hệ véc tơ đã cho bằng 3, nếu $k = -8$ thì X_1, X_2, X_3 phụ thuộc tuyến tính mà hệ hai véc tơ X_1, X_2 luôn độc lập tuyến tính với mọi k và đây cũng là hệ véc tơ lớn nhất độc lập tuyến tính nên hạng của hệ véc tơ là 2.

Kết luận, $k \neq -8$ thì $r(X_1, X_2, X_3) = 3$;

$k = -8$ thì $r(X_1, X_2, X_3) = 2$.

Ví dụ 4: Cho 2 hệ véc tơ n chiều S và S' có hạng tương ứng $r(S)$ và $r(S')$. Chứng minh rằng nếu $S \subset S'$ thì $r(S) \leq r(S')$.

Giải:

Gọi cơ sở của hệ véc tơ S là: $\{X_1^1, X_2^1, ..., X_m^1\}$ và cơ sở của hệ véc tơ S' là $\{X_1^2, X_2^2, ..., X_p^2\}$. Giả sử $r(S) > r(S') \Rightarrow p < m$, mặt khác vì $S \subset S'$ nên hệ $\{X_1^1, X_2^1, ..., X_m^1\} \subset S'$ suy ra mọi véc tơ trong hệ $\{X_1^1, X_2^1, ..., X_m^1\}$ đều biểu diễn tuyến tính qua cơ sở $\{X_1^2, X_2^2, ..., X_p^2\}$ của S', theo định lý về sự phụ thuộc tuyến tính hệ véc tơ $\{X_1^1, X_2^1, ..., X_m^1\}$ là phụ thuộc tuyến tính, điều này mâu thuẫn với $\{X_1^1, X_2^1, ..., X_m^1\}$ là một cơ sở của hệ véc tơ S, (đpcm).

B. Bài tập

I. Đề bài

Tìm hạng của các hệ véc tơ sau và chỉ ra một cơ sở của nó:

64. $\begin{cases} X_1 = (2,-3) \\ X_2 = (-4,6) \\ X_3 = (-3,4) \end{cases}$

65. $\begin{cases} X_1 = (-1,3,-2) \\ X_2 = (2,-4,2) \\ X_3 = (3,-7,4) \end{cases}$

66. $\begin{cases} X_1 = (1,2,3,4) \\ X_2 = (2,3,4,5) \\ X_3 = (3,4,5,6) \\ X_4 = (4,5,6,7) \end{cases}$

67. $\begin{cases} X_1 = (1,2) \\ X_2 = (3,4) \\ X_3 = (5,6) \end{cases}$

68. $\begin{cases} X_1 = (1,-2,3) \\ X_2 = (-1,3,2) \\ X_3 = (2,-3,1) \end{cases}$

69. $\begin{cases} X_1 = (2,-1,3,1) \\ X_2 = (4,-2,6,2) \\ X_3 = (6,-3,9,3) \\ X_4 = (1,1,1,1) \end{cases}$

Biện luận theo k hạng của các hệ véc tơ sau:

70. $\begin{cases} X_1 = (1,2,-3) \\ X_2 = (0,-1,-2) \\ X_3 = (2,3,k) \end{cases}$

71. $\begin{cases} X_1 = (2,-1,3) \\ X_2 = (-4,2,-6) \\ X_3 = (-2,k,-3) \end{cases}$

72. Cho 2 hệ véc tơ n chiều và S và S' có hạng tương ứng $r(S)$ và $r(S')$. Chứng minh rằng $r\{S,S'\} \le r(S) + r(S')$.

II. Đáp số

64. $r = 2$. Các cơ sở là $\{X_1, X_3\}$; $\{X_2, X_3\}$.

65. $r = 2$. Các cơ sở là $\{X_1, X_2\}$; $\{X_2, X_3\}$; $\{X_3, X_1\}$.

66. $r = 2$. Các cơ sở là $\{X_1, X_2\}$; $\{X_2, X_3\}$; $\{X_3, X_1\}$.

67. $r = 3$. Một cơ sở là $\{X_1, X_2, X_3\}$.

68. $r = 2$. Các cơ sở là bất kỳ hai véctơ nào của hệ.

69. $r = 2$. Các cơ sở là $\{X_1, X_4\}$; $\{X_2, X_4\}$; $\{X_3, X_4\}$.

70. $k = -8, r = 2$; $k \neq -8, r = 3$.

71. $k = 1, r = 1$; $k \neq 1, r = 2$.

72. Gợi ý: chứng minh tương tự như ví dụ 4.

Chương 2

MA TRẬN VÀ ĐỊNH THỨC

§1. Các khái niệm cơ bản

A. Tóm tắt lý thuyết và các ví dụ mẫu

Định nghĩa: Ma trận là một bảng số được xếp có thứ tự theo dòng và cột. Một ma trận có m dòng và n cột được gọi là ma trận cấp $m \times n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$$

Ma trận đối: Ma trận đối của ma trận A là ma trận cùng cấp mà mỗi phần tử của nó là số đối của phần tử tương ứng của ma trận A.

$$-A = \left(-a_{ij}\right)_{m\times n}$$

Ma trận chuyển vị: Ma trận chuyển vị của ma trận A cấp $m \times n$ là một ma trận cấp $n \times m$ mà các dòng của nó là các cột tương ứng của ma trận A (hoặc ngược lại).

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ma trận bằng nhau: Hai ma trận được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi chúng cùng cấp và các phần tử ở các vị trí tương ứng của chúng đôi một bằng nhau.

$$A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n};\quad B = \left(b_{ij}\right)_{m\times n}$$

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} a_{ij} = b_{ij} \\ i = \overline{1,m};\, j = \overline{1,n} \end{cases}$$

Phép cộng ma trận và phép nhân ma trận với một số

Định nghĩa: Cho hai ma trận cùng cấp

$$A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n};\quad B = \left(b_{ij}\right)_{m\times n}$$

và α là một số thực bất kì.

- Tổng của hai ma trận A và B là một ma trận cùng cấp $m \times n$, được kí hiệu và xác định như sau:

$$A + B = \left(a_{ij} + b_{ij}\right)_{m\times n}$$

(*cộng các phần tử tương ứng với nhau*)

- Tích của số thực α với ma trận A là một ma trận cùng cấp $m \times n$, được kí hiệu và xác định như sau:

$$\alpha A = \left(\alpha a_{ij}\right)_{m\times n}$$

(*nhân tất cả các phần tử của ma trận với số thực* α)

Chú ý: Hiệu hai ma trận A và B được tính như sau:

$$A - B = A + (-B) = A + (-1)B$$

Ví dụ 1: Cho hai ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ và } B = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -10 \\ 6 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Tính A + B, 3A, 2A − 3B.

Giải:

$$A+B=\begin{pmatrix}2+7 & -1+4 & 5+(-10)\\ 0+6 & 3+8 & 1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 3 & -5\\ 6 & 11 & 2\end{pmatrix};$$

$$3A=3\begin{pmatrix}2 & -1 & 5\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3.2 & 3.(-1) & 3.5\\ 3.0 & 3.3 & 3.1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -3 & 15\\ 0 & 9 & 3\end{pmatrix};$$

$$2A-3B=2\begin{pmatrix}2 & -1 & 5\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}+(-3)\begin{pmatrix}7 & 4 & -10\\ 6 & 8 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4 & -2 & 10\\ 0 & 6 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-21 & -12 & 30\\ -18 & -24 & -3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-17 & -14 & 40\\ -18 & -18 & -1\end{pmatrix}.$$

B. Bài tập

I. Đề bài

1. Thực hiện phép cộng các ma trận và nhân ma trận với một số

a. $3\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & 4 & 3\\ 8 & 7 & 15\end{pmatrix};$

b. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-9 & 8 & -7\\ 6 & -5 & 4\\ -3 & 2 & -1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}7 & -8 & 9\\ -4 & 5 & -6\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix};$

c. $\begin{pmatrix}-1 & 3 & 6\\ 6 & 2 & -3\\ -3 & -3 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ -2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$

II. Đáp số

1. a. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; b. $\begin{pmatrix} 4 & -6 & 16 \\ 4 & 10 & -4 \\ 4 & 6 & 16 \end{pmatrix}$; c. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

§2. Định thức

A. Tóm tat lý thuyết và các ví dụ mẫu

Hoán vị của n số tự nhiên đầu tiên

- Có $n!$ hoán vị của tập hợp $\{1,2,\ldots,n\}$, mỗi hoán vị được biểu diễn dưới dạng

$$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$$

trong đó α_i $(i=\overline{1,n})$ là số tự nhiên đứng ở vị trí thứ i trong hoán vị $(1\le\alpha_i\le n, \alpha_i\ne\alpha_j$ nếu $i\ne j)$.

- Nếu $i<j$ mà $\alpha_i>\alpha_j$ thì ta nói hai số α_i,α_j tạo thành một cặp nghịch thế.

- Hoán vị chẵn là hoán vị có số nghịch thế chẵn, hoán vị lẻ là hoán vị có số nghịch thế lẻ.

Định lý: Nếu từ một hoán vị, ta đổi chỗ hai số và giữ nguyên vị trí các số còn lại thì tính chẵn - lẻ của hoán vị thay đổi.

Ví dụ 1: Tìm số nghịch thế của hoán vị 1, 3, 5, 2, 4.

Giải: Các hoán vị có trong nghịch thế trên là: $(3, 2),(5, 2),(5, 4)$. Vậy hoán vị trên có số nghịch thế là 3.

Định nghĩa định thức cấp n. Cho ma trận A vuông cấp n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Lập tích $(-1)^h a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \cdots a_{n\alpha_n}$, trong đó $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ là một hoán vị của n số tự nhiên đầu tiên và h là số nghịch thế của hoán vị đó. Tổng của $n!$ tích trên được gọi là định thức cấp n của ma trận A. Kí hiệu: $|A|$, $\det A$.

Ví dụ 2: Xác định dấu của các tích sau

a. $a_{11}a_{23}a_{35}a_{42}a_{54}$;

b. $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}a_{55}$;

c. $a_{15}a_{24}a_{33}a_{42}a_{51}$.

Giải: a. Xét dấu của tích bằng cách tính số nghịch thế của hoán vị theo chỉ số cột 1, 3, 5, 2, 4. Theo Ví dụ 2, ta tính được hoán vị này có 3 nghịch thế, vậy dấu của tích là dấu $(-)$.

b. Tương tự, hoán vị 1, 2, 3, 4, 5 có 0 nghịch thế, vậy dấu của tích là dấu $(+)$.

c. Hoán vị 5, 4, 3, 2, 1 có các nghịch thế

$$(5,\ 4), (5, 3), (5, 2), (5, 1), (4, 3), (4, 2), (4, 1), (3, 2), (3, 1), (2, 1)$$

Số nghịch thế là 10, vậy tích mang dấu $(+)$.

Quy tắc tính định thức

- Định thức cấp 1:

$$A = (a) \Rightarrow \det A = |A| = |a| = a.$$

- **Định thức cấp 2:**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Định thức cấp hai bằng tích hai phần tử trên đường chéo chính trừ đi tích hai phần tử trên đường chéo phụ.

- **Định thức cấp 3:**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{33}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Quy tắc đường chéo:

- ***Các thành phần mang dấu $(+)$ gồm: tích các phần tử nằm trên đường chéo chính; tích các phần tử nằm trên các đường song song với đường chéo chính với phần tử nằm ở góc đối diện.***
- ***Các thành phần mang dấu $(-)$ gồm: tích các phần tử nằm trên đường chéo phụ; tích các phần tử nằm trên các đường song song với đường chéo phụ với phần tử nằm ở góc đối diện.***

Ví dụ 3: $A = (-3) \Rightarrow \det A = -3$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 1.4 - (-2).5 = 4 + 10 = 14$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 1.4.(-1) + 1.2.(-1) + 3.6.3 - 3.4.1 - 1.6.(-1) - 2.3.(-1)$$

$$= -4 - 2 + 54 - 12 + 6 + 6 = 48.$$

- **Định thức cấp n:**

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- **Phương pháp khai triển:**

  + Phần bù của a_{ij} :

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

  + Phần bù đại số của a_{ij} :

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

  + Công thức khai triển:

$$d = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$

(công thức khai triển theo dòng i)

$$d = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$$

(công thức khai triển theo cột j)

Phương pháp biến đổi về dạng tam giác: Dùng các tính chất của định thức để biến đổi định thức về dạng tam giác, sau đó áp dụng công thức:

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Ví dụ 4: Tính định thức sau bằng hai phương pháp:

$$d = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

Giải:

- Phương pháp khai triển: Để việc tính toán đơn giản hơn, trước khi áp dụng công thức khai triển, ta có thể dùng các tính chất của định thức để biến đổi định thức:

  + Nhân dòng 2 với (-3) rồi cộng vào dòng 1;

  + Nhân dòng 2 với 2 rồi cộng vào dòng 3;

  + Nhân dòng 2 với (-1) rồi cộng vào dòng 4;

$$d = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 & -10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 9 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & -2 & -10 \\ 1 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(-20 - 20 + 90 + 20) = -70.$$

Phương pháp biến đổi về dạng tam giác:

+ Đổi chỗ dòng 1 và dòng 2:

$$d=-\begin{vmatrix}1&2&3&4\\3&5&7&2\\-2&-3&3&2\\1&3&5&4\end{vmatrix}$$

+ Nhân dòng 1 lần lượt với $(-3), 2, (-1)$ rồi cộng vào dòng 2, 3, 4:

$$d=-\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-2&-10\\0&1&9&10\\0&1&2&0\end{vmatrix}$$

+ Cộng lần lượt dòng 2 với dòng 3, 4:

$$d=-\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-2&-10\\0&0&7&0\\0&0&0&-10\end{vmatrix}=-(-1).7.(-10)=-70.$$

Một số tính chất cơ bản của định thức:

- $|A|=|A'|$;
- Nhân một dòng/cột của định thức với một số α thì định thức mới nhận được bằng định thức cũ nhân α;
- Nếu ta cộng vào một dòng/cột của định thức tích của một dòng/cột khác với một số α tuỳ ý thì định thức không thay đổi;
- Nếu ta đổi chỗ hai dòng/cột của định thức cho nhau thì định thức đổi dấu;
- Nếu hệ véc tơ dòng/cột của định thức phụ thuộc tuyến tính thì định thức bằng 0.

Nhận xét: Từ tính chất cuối ta suy ra nếu định thức khác không thì hệ véctơ dòng/cột của nó độc lập tuyến tính.

Ví dụ 5: Dùng các tính chất của định thức để tính nhanh định thức sau:

$$\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$$

Giải:

$$\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 246 & 427 & 327-427 \\ 1014 & 543 & 443-543 \\ -342 & 721 & 621-721 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 246 & 427 & -100 \\ 1014 & 543 & -100 \\ -342 & 721 & -100 \end{vmatrix}$$

$$= -100\begin{vmatrix} 246 & 427 & 1 \\ 1014 & 543 & 1 \\ -342 & 721 & 1 \end{vmatrix} = -100\begin{vmatrix} 246 & 427 & 1 \\ 1014-246 & 543-427 & 0 \\ -342-246 & 721-427 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -100.(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 768 & 116 \\ -588 & 294 \end{vmatrix} = -100.294\begin{vmatrix} 768 & 116 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -29400(768+232) = -29400000.$$

Ví dụ 6: Chứng minh định thức

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 9 \\ 3 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

chia hết cho 19, biết rằng 209, 347, 133 chia hết cho 19.

Giải: Ta nhân 100 vào cột 1, 10 vào cột 2 rồi cộng vào cột 3

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 200+9 \\ 3 & 4 & 300+40+7 \\ 1 & 3 & 100+30+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 209 \\ 3 & 4 & 347 \\ 1 & 3 & 133 \end{vmatrix}$$

Trong định thức sau khi biến đổi có cột 3 gồm các phần tử đều chia hết cho 19 (theo giả thiết), do đó định thức chia hết cho 19.

Ví dụ 7: Tính định thức cấp n sau:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x & x \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & x & x & \dots & 0 & x \\ 1 & x & x & \dots & x & 0 \end{vmatrix}$$

Giải:

Nếu $x = 0 \Rightarrow D = 0$. Giả sử $x \neq 0$, nhân dòng 1 và cột 1 với x được:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x & x \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & x & x & \dots & 0 & x \\ 1 & x & x & \dots & x & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{x}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x & 0 & x & \dots & x & x \\ x & x & 0 & \dots & x & x \\ . & . & . & . & . & . \\ x & x & x & \dots & 0 & x \\ x & x & x & \dots & x & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{x^2}\begin{vmatrix} 0 & x & x & \dots & x & x \\ x & 0 & x & \dots & x & x \\ x & x & 0 & \dots & x & x \\ . & . & . & . & . & . \\ x & x & x & \dots & 0 & x \\ x & x & x & \dots & x & 0 \end{vmatrix}$$

Cộng các cột $2,3,\dots,n$ vào cột đầu tiên ta được:

$$D = \frac{1}{x^2}\begin{vmatrix} (n-1)x & x & x & \dots & x & x \\ (n-1)x & 0 & x & \dots & x & x \\ (n-1)x & x & 0 & \dots & x & x \\ . & . & . & . & . & . \\ (n-1)x & x & x & \dots & 0 & x \\ (n-1)x & x & x & \dots & x & 0 \end{vmatrix} = \frac{n-1}{x}\begin{vmatrix} 1 & x & x & \dots & x & x \\ 1 & 0 & x & \dots & x & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x & x \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & x & x & \dots & 0 & x \\ 1 & x & x & \dots & x & 0 \end{vmatrix}$$

Lấy lần lượt các cột thứ $2,3,\dots,n$ trừ đi x lần cột thứ nhất ta được:

$$D=\frac{n-1}{x}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -x & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -x \end{vmatrix}=\frac{n-1}{x}(-x)^{n-1}=(-1)^{n-1}(n-1)x^{n-2}$$

B. Bài tập

I. Đề bài

2. Tìm số nghịch thế trong các hoán vị sau

a. 2, 1, 3, 5, 4;

b. 5, 2, 3, 4, 1, 6;

c. 9, 1, 8, 2, 7, 3, 6, 4, 5;

d. 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1;

e. 1, 3, 5,..., $2n-1$, 2, 4, 6,..., $2n$;

f. 2, 4, 6,..., $2n$, 1, 3, 5,...., $2n-1$.

3. Trong các hoán vị của n số tự nhiên đầu tiên

a. Hoán vị nào có số nghịch thế nhỏ nhất. Tính số đó.

b. Hoán vị nào có số nghịch thế lớn nhất. Tính số đó.

4. Xác định dấu của các tích sau để tích đó là thành phần của định thức cấp tương ứng

a. $a_{13}a_{24}a_{31}a_{45}a_{52}$;

b. $a_{15}a_{24}a_{33}a_{42}a_{51}$;

c. $a_{16}a_{25}a_{34}a_{43}a_{52}a_{61}$;

d. $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$,

e. $a_{14}a_{25}a_{32}a_{43}a_{51}a_{65}$.

5. Xác định i, j, k để các tích sau là thành phần của các định thức cấp tương ứng với dấu đặt ở trước

a. $(+)a_{1i}a_{25}a_{32}a_{4j}a_{53}$; b. $(-)a_{13}a_{2i}a_{31}a_{45}a_{5j}$;

c. $(+)a_{1i}a_{22}a_{31}a_{4j}a_{55}a_{64}$; d. $(-)a_{1i}a_{2j}a_{35}a_{44}a_{51}a_{6k}$.

6. a. Tìm tất cả thành phần của định thức cấp 5 mang dấu $(+)$ có chứa các phần tử $a_{12}a_{24}a_{43}$;

b. Tìm tất cả các thành phần của định thức cấp 4 chứa phần tử a_{32} và mang dấu $(+)$.

7. Trong định thức cấp n, xác định dấu của

a. Tích các phần tử nằm trên đường chéo chính;

b. Tích các phần tử nằm trên đường chéo phụ.

8. Tính các định thức cấp 2 sau

a. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$; b. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$; c. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$;

d. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$; e. $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$; f. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\sin\beta \\ \cos\alpha & \cos\beta \end{vmatrix}$;

g. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$; h. $\begin{vmatrix} \operatorname{tg}\alpha & -1 \\ 1 & \operatorname{tg}\alpha \end{vmatrix}$; i. $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$

9. Tính các định thức cấp 3 sau

a. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; b. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$; c. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$;

d. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$; e. $\begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix}$; f. $\begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix}$;

g. $\begin{vmatrix} x & a & a \\ -a & x & a \\ -a & -a & x \end{vmatrix}$; h. $\begin{vmatrix} 1 & \sin\alpha & \cos\alpha \\ a & \sin\beta & \cos\beta \\ 1 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{vmatrix}$; i. $\begin{vmatrix} x+y & z & 1 \\ y+z & x & 1 \\ z+x & y & 1 \end{vmatrix}$;

j. $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}$; k. $\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^2+1 \end{vmatrix}$

10. Chứng minh các đồng nhất thức

a. $\begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$;

b. $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1-b_1x & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2-b_2x & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3-b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$;

c. $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$;

d. $\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = (x+3a)(x-a)^3$;

e. $\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ -a & x & a & a \\ -a & -a & x & a \\ -a & -a & -a & x \end{vmatrix} = x^4 + 6a^2x^2 + a^4$;

f. $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)(a-c)(c-b)$.

11. Rút gọn định thức

$$\begin{vmatrix} am + bp & an + bq \\ cm + dp & cn + dq \end{vmatrix}$$

12. Chứng minh rằng

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$$ chia hết cho $x - y$, $y - z$, $z - x$.

13. Chứng minh rằng

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$ chia hết cho 17 biết rằng các số 204, 527, 255 đều chia hết cho 17.

14. Nếu các số $\overline{a_1a_2a_3}$, $\overline{b_1b_2b_3}$, $\overline{c_1c_2c_3}$ chia hết cho 7 thì

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ cũng chia hết cho 7.

15. Dùng các tính chất của định thức để tính các định thức sau

a. $\begin{vmatrix} 13547 & 13647 \\ 28423 & 28523 \end{vmatrix}$; b. $\begin{vmatrix} 42 & 84 \\ 45 & 60 \end{vmatrix}$; c. $\begin{vmatrix} 9 & 18 & 27 \\ 12 & 15 & 18 \\ 14 & 16 & 18 \end{vmatrix}$;

d. $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 0 \end{vmatrix}$; e. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$; f. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$;

g. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$; h. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{vmatrix}$; i. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}$;

j. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$; k. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & 2^3 \\ 1 & 3 & 3^2 & 3^3 \\ 1 & 4 & 4^2 & 4^3 \end{vmatrix}$.

16. Dùng khai triển theo dòng hoặc theo cột tính định thức

a. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & -1 & 7 \end{vmatrix}$; b. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$;

c. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 7 & 5 & 0 & 6 \\ -4 & 2 & 5 & 0 \end{vmatrix}$; d. $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 9 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}$;

e. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ a & b & c & d \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; f. $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$;

g. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 1 & b \\ 1 & 1 & 2 & c \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; h. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$;

i. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; j. $\begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & y \\ y & 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$.

17. Tính các định thức

a. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$; b. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -5 & 13 \\ 1 & -2 & 10 & 4 \\ -2 & 9 & -8 & 25 \end{vmatrix}$;

c. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & -8 & -13 \end{vmatrix}$; d. $\begin{vmatrix} 30 & 20 & 15 & 12 \\ 20 & 15 & 12 & 15 \\ 15 & 12 & 15 & 20 \\ 12 & 15 & 20 & 30 \end{vmatrix}$;

e. $\begin{vmatrix} 1001 & 1002 & 1003 & 1004 \\ 1002 & 1003 & 1001 & 1002 \\ 1001 & 1001 & 1001 & 999 \\ 1001 & 1000 & 998 & 999 \end{vmatrix}$;

f. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 0 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 \end{vmatrix}$; g. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$;

h. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$; i. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}$;

j. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; k. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

18. Tính định thức cấp n biết

a. $a_{ij} = \min(i, j)$; b. $a_{ij} = \max(i, j)$

19. Tính các định thức cấp n sau đây

a. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$; b. $\begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ n & n & 3 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix}$;

c. $\begin{vmatrix} 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n \end{vmatrix}$; d. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

20. Định thức cấp n thay đổi thế nào nếu đổi dấu tất cả các phần tử của nó?

21. Định thức cấp n thay đổi thế nào nếu viết các cột theo thứ tự ngược lại.

22. Các phần tử của một định thức cấp 3 chỉ nhận các giá trị 0 và +1. ...á trị lớn nhất của định thức đó.

...ác phần tử của một định thức cấp 3 chỉ nhận các giá trị 1 và −1. ...minh rằng định thức đó chia hết cho 4.

Các phần tử của một định thức cấp 3 chỉ nhận các giá trị 1 và −1 ...á trị lớn nhất của định thức loại đó.

25. Biết A là ma trận vuông cấp n lẻ thoả mãn $A' = -A$, hãy tính định thức của A.

26. Bi... ma trận vuông cấp n thoả mãn $|A| = |kA|$, hãy tính k

II. Đáp số

2. a. $N=2$, b. $N=7$; c. $N=20$; d. $N=36$;

e. $N=\frac{n(n-1)}{2}$; f. $N=\frac{n(n+1)}{2}$.

3. a. $1,2,3,\ldots,n$; số nghịch thế là $N=0$;

b. $n,n-1,\ldots,2,1$; số nghịch thế là $N=\frac{n(n-1)}{2}$.

4. a. dấu $(-)$; b. dấu $(+)$; c. dấu $(-)$,

d. dấu $(+)$; e. dấu $(-)$.

5. a. $i=1,\ j=4$; b. $i=4,\ j=2$; c. $i=3,\ j=6$;

d. $(i=6,\ j=2,\ k=3),(i=2,\ j=3,\ k=6),(i=3,\ j=6,\ k=2)$.

6. a. $a_{12}a_{24}a_{31}a_{45}a_{53}$;

b. $(a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}),(a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}),(a_{14}a_{23}a_{32}a_{41})$.

7. a. Dấu $(+)$; b. Dấu $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

8. a. $d=-2$; b. $d=ad-bc$; c. $d=1$;

d. $d=\cos 2\alpha$; e. $d=4ab$; f. $d=\sin(\alpha+\beta)$;

g. $d=\cos(\alpha+\beta)$; h. $d=\frac{1}{\cos^2\alpha}$; i. $d=0$.

9. a. $d=2$; b. $d=0$; c. $d=-4$;

d. $d=3abc-a^3-b^3-c^3$; e. $d=2x^3-(a+b+c)x^2+abc$;

f. $d=x^3-3a^2x+2a^3$; g. $d=x^3+3a^2x$;

h. $d=\sin(\alpha-\beta)+\sin(\beta-\gamma)+a\sin(\gamma-\alpha)$; i. $d=0$;

j. $d=abc+(ab+bc+ca)x$; k. $d=1+a^2+b^2+c^2$.

10. *Hướng dẫn*: dùng các tính chất của định thức để biến đổi vế trái. Tham khảo ví dụ 3 (trang 120 - giáo trình Toán cao cấp cho các nhà kinh tế, phần 1).

11. $(mq-np)\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

12, 13, 14. *Hướng dẫn*. dùng các tính chất của định thức để biến đổi định thức về dạng có một dòng/cột là bội của nhân tử cần chia hết.

15. a. $d=-1487600$; b. $d=-1260$; c. $d=0$;

d. $d=48$; e. $d=48$; f. $d=1$;

g. $d=12$; h. $d=24$; i. $d=-4$;

j. $d=-24$; k. $d=12$.

16. a. 280; b. 52;

c. 275; d. 277;

e. $d=3a-b+2c+d$; f. $d=2a-b-c-d$;

g. $d=4-a-b-c$; h. $d=5$;

i. $d=9$; j. $d=x^5+y^5$.

17. a. $d=0$; b. $d=301$; c. $d=-107$

d. $d=-2639$; e. $d=-18016$; f. $d=120$;

g. $d=24$; h. $d=394$; i. $d=-12$;

j. $d=6$; k. $d=1875$.

18. a. $d_n=1$; b. $d_n=(-1)^{n-1}n$.

19. a. $d_n=n!$; b. $d_n=(-1)^{n-1}n!$; c. $d_n=0$;

d. $d_n=n-1$ nếu n lẻ; $d_n=1-n$ nếu n chẵn.

20. Sai khác hệ số $(-1)^n$.

21. Sai khác hệ số $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

22. Giả sử $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, a_{ij} = 0;1$, khi đó ta có:

$$d = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} < 3;$$

Từ biểu thức của d ta dễ suy ra: $\text{Max}\, d = 2$.

23. *Hướng dẫn*: tham khảo Ví dụ 1 (trang 118 - giáo trình Toán cao cấp cho các nhà kinh tế, phần 1) chứng minh trong trường hợp tổng quát.

24. $\text{Max}\, d = 4$.

25. $d = 0$.

26. +) Với mọi k nếu $|A| = 0$;

+) $k = 1$ nếu $|A| \neq 0$ và n lẻ;

+) $k = \pm 1$ nếu $|A| \neq 0$ và n chẵn.

§3. Phép nhân ma trận và ma trận nghịch đảo

A. Tóm tắt lý thuyết và các ví dụ mẫu

Định nghĩa: Cho hai ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ và $B = (b_{jk})_{n\times p}$. Tích của hai ma trận A và B là ma trận $C = AB$ có cấp $m \times p$, với các thành phần được xác định như sau:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk}, \quad \left(i = \overline{1,m};\ k = \overline{1,p}\right).$$

Chú ý:

- Phép nhân chỉ thực hiện được khi số cột của ma trận đứng trước bằng số dòng của ma trận đứng sau;
- Cấp của ma trận tích: số dòng bằng số dòng của ma trận đứng trước, số cột bằng số cột của ma trận đứng sau;
- Phép nhân hai ma trận không có tính chất giao hoán.

Ví dụ 1: Tính AB và BA:

a. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$;

b. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Giải:

a. $AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.1+1.2 & 2.5+1.6 \\ 3.1+(-2).2 & 3.5+(-2).6 \\ 0.1+4.2 & 0.5+4.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 16 \\ -1 & 3 \\ 8 & 24 \end{pmatrix}$

BA: không tồn tại do số cột của B khác số dòng của A.

b. $AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1.2+3.1+1.3 & 1.1+3.(-1)+1.2 & 1.0+3.2+1.1 \\ 2.2+0.1+4.3 & 2.1+0.(-1)+4.2 & 2.0+0.2+4.1 \\ 1.2+2.1+3.3 & 1.1+2.(-1)+3.2 & 1.0+2.2+3.1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 0 & 7 \\ 16 & 10 & 4 \\ 13 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2.1+1.2+0.1 & 2.3+1.0+0.2 & 2.1+1.4+0.3 \\ 1.1-1.2+2.1 & 1.3-1.0+2.2 & 1.1-1.4+2.3 \\ 3.1+2.2+1.1 & 3.3+2.0+1.2 & 3.1+2.4+1.3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 7 & 3 \\ 8 & 11 & 14 \end{pmatrix}$$

Ví dụ 2: Tính A^2 trong đó $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Giải:

Hiển nhiên rằng khi tính toán các số nguyên là khó nhầm hơn khi tính các số hữu tỷ, vì lý do đó nên ta có:

$$B = 6A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 2 & -3 & 4 \\ -9 & 9 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \frac{1}{6}B \Rightarrow A^2 = \frac{1}{36}B^2.$$

$$\text{và } B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 2 & -3 & 4 \\ -9 & 9 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 2 & -3 & 4 \\ -9 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3.3+4.2-9.9 & 3.4-4.3+9.9 & 3.9+4.4+9.2 \\ 2.3-3.2-4.9 & 2.4+3.3+4.9 & 2.9-3.4+4.2 \\ -9.3+9.2-2.9 & -9.4-9.3+2.9 & -9.9+9.4+2.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -64 & 81 & 61 \\ -36 & 53 & 14 \\ -27 & -45 & -41 \end{pmatrix}$$

$$\text{Do đó } A^2 = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} -64 & 81 & 61 \\ -36 & 53 & 14 \\ -27 & -45 & -41 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{9}{4} & \frac{61}{36} \\ -1 & \frac{53}{36} & \frac{7}{18} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{41}{36} \end{pmatrix}.$$

Ví dụ 3: Tính $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$.

Giải: Ta dùng phương pháp quy nạp để chứng minh $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Thật vậy ta có

+ Với $n = 1$ thì $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

+ Với $n = 2$ thì : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

+ Giả sử mệnh đề đúng tới $n = k \geq 3, k \in \mathbb{Z}$ nghĩa là $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

+ Ta chứng minh mệnh đề cũng đúng với $n = k + 1$. Nghĩa là ta phải chứng minh $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Thật vậy ta có:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{k} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vậy ta có: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ma trận nghịch đảo:

Định nghĩa: Cho ma trận A vuông cấp n. Nếu tồn tại ma trận cùng cấp X sao cho $AX = XA = E$ (E là ma trận đơn vị), thì X được gọi là ma trận nghịch đảo của ma trận A.

Ma trận nghịch đảo, nếu có, là duy nhất.

Kí hiệu: A^{-1}.

Ma trận phụ hợp: Ma trận phụ hợp của ma trận A vuông cấp n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

cũng là ma trận vuông cấp n được kí hiệu và xác định như sau:

$$A^{*} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

trong đó A_{ij} là phần bù đại số của phần tử a_{ij} của ma trận A $\left(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}\right)$.

Định lý: $AA^* = A^*A = |A|E$.

Điều kiện tồn tại ma trận nghịch đảo: Cần và đủ để một ma trận vuông A có ma trận nghịch đảo là $|A| \neq 0$. Khi đó ma trận nghịch đảo của A được xác định bằng công thức:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$$

Các phương pháp tìm ma trận nghịch đảo

- Phương pháp 1:

  + Bước 1: Tính $|A|\begin{cases} = 0: \nexists A^{-1} \\ \neq 0: \exists A^{-1} \end{cases}$

  + Bước 2: Tính các A_{ij} và lập ma trận A^*.

  + Bước 3: Lập A^{-1}.

- Phương pháp 2:

  + Lập ma trận C là ghép của ma trận A và ma trận đơn vị E

$$C = (A|E)$$

  + Nếu ma trận A có ma trận nghịch đảo thì bằng các phép biến đổi sơ cấp đối với hệ véc tơ dòng của ma trận ta có thể biến đổi ma trận C về dạng

$$(E|B)$$

  Khi đó ma trận B là ma trận nghịch đảo của ma trận A.

Chú ý: Phương pháp 2 chỉ nên áp dụng cho các ma trận mà việc biến đổi sơ cấp trên dòng của nó diễn ra dễ dàng, còn những trường hợp biến đổi sơ cấp trên ma trận phức tạp hơn (các phần tử của ma trận gồm các phân số, số lớn...) thì ta không dùng phương pháp này.

Ví dụ 4: Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & \lambda \end{pmatrix}$$

a. Tìm tham số λ sao cho A có ma trận nghịch đảo;

b. Với $\lambda = 4$, hãy tìm ma trận nghịch đảo của ma trận A.

Giải:

a. Ta có $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & \lambda \end{vmatrix} = 9\lambda + 6 + 10 - 30 - 9 - 2\lambda = -23 + 7\lambda;$

Ma trận A có nghịch đảo khi và chỉ khi $|A| \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq \dfrac{23}{7}$.

b. Với $\lambda = 4$ thì $|A| = -23 + 7.4 = 5 \neq 0$ nên tồn tại ma trận nghịch đảo A^{-1};

Tính các phần bù đại số:

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 9$

$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$

$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 1$

$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2$

$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -12$

$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 1$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7$$

Lập ma trận phụ hợp A^*:

$$A^* = \begin{pmatrix} 9 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -12 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Vậy ma trận nghịch đảo

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 9 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -12 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Một số tính chất của ma trận nghịch đảo:

- $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$;
- $\left|A^{-1}\right| = |A|^{-1}$;
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Ví dụ 5: Chứng minh rằng nếu $\det(A)$ là một số nguyên và $|\det(A)| \geq 2$ thì A^{-1} không thể có toàn bộ các phần tử là số nguyên.

Giải: Giả sử A^{-1} có tất cả các phần tử đều là số nguyên. Khi đó theo định nghĩa của định thức, $\left|A^{-1}\right|$ cũng là một số nguyên. Mặt khác theo giả thiết, $|A|$ là số nguyên nên

$$\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$$

không thể là số nguyên $\Rightarrow$ mâu thuẫn. Vậy trong A^{-1} phải tồn tại các phần tử không phải là số nguyên.

Phương trình ma trận.

$$AX = B \text{ và } YA = B.$$

TH_1: Nếu tồn tại A^{-1} thì:

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B;$$

$$YA = B \Rightarrow Y = BA^{-1};$$

TH_2: Nếu A không có ma trận nghịch đảo thì đưa về giải hệ phương trình tuyến tính với các ẩn số là các phần tử của ma trận phải tìm (B có bao nhiêu phần tử thì hệ có bấy nhiêu phương trình).

Ví dụ 6: Giải phương trình ma trận

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Giải: Ta có ma trận nghịch đảo của ma trận

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

là ma trận

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 9 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -12 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Vậy

$$X = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 9 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -12 & 1 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -27 & -24 & -21 \\ 2 & 4 & 6 \\ 41 & 37 & 33 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ 7: Giải phương trình ma trận

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \\ 23 & 34 \end{pmatrix}$$

Giải:

Đặt $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, khi đó phương trình trên trở thành

$$\begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ 3x+4z & 3y+4t \\ 5x+6z & 5y+6t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \\ 23 & 34 \end{pmatrix}$$

Phương trình ma trận trên cho ta hệ phương trình tuyến tính 4 ẩn sau:

$$\begin{cases} x+2z = 7 \\ 3x+4z = 15 \\ 5x+6z = 23 \\ y+2t = 10 \\ 3y+4t = 22 \\ 5y+6t = 34 \end{cases}$$

Dễ thấy hệ trên có nghiệm $(x = 1, y = 2, z = 3, t = 4)$, vậy phương trình ma trận trên có nghiệm là: $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

B. Bài tập

I. Đề bài

27. Thực hiện phép nhân các ma trận sau

a. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

b. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$;

c. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$;

d. $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 5 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [illegible] & 5 \\ [illegible] & 3 \end{pmatrix}$.

e. $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$;   f. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

g. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$;

h. $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;   i. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

j. $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 29 \\ 2 & 18 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$;   k. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

l. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

m. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$;

n. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

28. Thực hiện phép toán sau:

a. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^3$;   b. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}^2 - 5\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

c. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2$;

d. $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^2$;

e. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^2$;

f. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^n$;

g. $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$;

h. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}^n$;

i. $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^n$;

j. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n$.

29. Tính $AB - BA$ biết:

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$;

b. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$;

c. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

d. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

30. Tìm ma trận X để $AX = XA$ với

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;   b. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$;

c. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$;   d. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

31. Chứng minh rằng nếu các ma trận A và B có tích AB, BA cùng tồn tại và $AB = BA$ thì A, B là 2 ma trận vuông cùng cấp và ta có các đẳng thức

a. $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$;

b. $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$.

32. Tích AB của các ma trận A và B sẽ thay đổi như thế nào nếu

a. Đổi chỗ dòng i và dòng j của ma trận A;

b. Nhân dòng j của ma trận A với số k rồi cộng vào dòng i của nó;

c. Đổi chỗ cột i và cột j của ma trận B;

d. Nhân cột j của ma trận B với số k rồi cộng vào cột i của nó.

33. Chứng minh đẳng thức $AB - BA = E$ không thể thoả mãn với bất kỳ ma trận A, B nào.

34. Chứng minh rằng ma trận $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ thoả mãn phương trình $X^2 - (a + d)X + (ad - bc)E = 0$, trong đó E là ma trận đơn vị, 0 là ma trận không cấp 2.

35. Cho X là ma trận vuông cấp 2. Chứng minh rằng nếu $X^3 = 0$ thì $X^2 = 0$.

36. Tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của ma trận sau

a. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$;   b. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$;   c. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$;

d. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$; e. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; f. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

g. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$; h. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

i. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; j. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

37. Chứng minh rằng nếu $A = A^{-1}$ thì $A^{2n} = E$; $A^{2n+1} = A$

38. Chứng minh rằng nếu $AB = BA$ và $|A| \neq 0$ thì $A^{-1}B = BA^{-1}$.

39. Chứng minh rằng nếu $|A| = 2$ thì các phần tử của ma trận nghịch đảo A^{-1} không thể gồm toàn các số nguyên.

40. Cho A là ma trận vuông cấp n có $|A| = 2$. Hãy tính $|A^*|$.

41. Giải các phương trình ma trận sau

a. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; b. $X \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$;

c. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; d. $X \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$;

e. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; f. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

g. $X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; h. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$.

42. Giải các phương trình ma trận sau

a. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

b. $X \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$;

c. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{pmatrix}$;

d. $X \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 14 & -2 \\ 10 & -19 & 17 \end{pmatrix}$;

e. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;

f. $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

g. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$;

h. $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

II. Đáp số

27. a. $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 10 & 3 & 6 \end{pmatrix}$; b. $\begin{pmatrix} 6 & 8 & -2 \\ 3 & 4 & -1 \\ 9 & 12 & -3 \end{pmatrix}$; c. (14);

d. $\begin{pmatrix} a+12c & b+12d \\ 39a-14c & 39b-14d \end{pmatrix}$;

e. $\begin{pmatrix} a+b+c & a^2+b^2+c^2 & b^2+2ac \\ a+b+c & b^2+2ac & a^2+b^2+c^2 \\ 3 & a+b+c & a+b+c \end{pmatrix}$; f. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

g. $\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$; h. $\begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -21 & 24 \end{pmatrix}$;

i. $\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$; j. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$; k. $\begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{pmatrix}$;

l. $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 15 \\ -5 & 5 & 9 \\ 12 & 26 & 32 \end{pmatrix}$; m. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; n. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

28. a. $\begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 20 & 35 \end{pmatrix}$; b. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

c. $\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 9 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; d. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

e. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; f. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ nếu n lẻ; $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ nếu n chẵn;

g. $\begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; h. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ nếu n lẻ; $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ nếu n chẵn;

i. $\begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$; j. $\begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$.

29. a. $\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 12 & -4 \end{pmatrix}$; b. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

c. $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 8 \\ -2 & -6 & 3 \\ -5 & -9 & 2 \end{pmatrix}$; d. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

30. a. $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x-y \end{pmatrix}$; b. $\begin{pmatrix} x & 2y \\ -y & x-2y \end{pmatrix}$;

c. $\begin{pmatrix} x & 2y \\ 3y & x+3y \end{pmatrix}$; d. $\begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$.

33. *Hướng dẫn*: Chứng minh rằng tổng các phần tử trên đường chéo chính của $AB - BA$ bằng 0.

35. *Hướng dẫn*: Sử dụng bài 34, ta có $|X| = ad - bc = 0$ cho nên $X^2 = (a+d)X$. Lập luận còn lại giành cho bạn đọc.

36. a. $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; b. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$;

c. $\bar{\exists} A^{-1}$; d. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$;

e. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; f. $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$;

g. $\bar{\exists} A^{-1}$; h. $\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

i. $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$;

j. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 & -38 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

40. $|A^*| = 2^{n-1}$.

41. a. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

b. $\begin{pmatrix} 11 & 3 \\ -24 & -7 \end{pmatrix}$;

c. vô nghiệm;

d. vô nghiệm;

e. $\begin{pmatrix} 1+a & b \\ -2a & 1-2b \end{pmatrix}$;

f. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

g. $\begin{pmatrix} -2a & a \\ -2b & b \end{pmatrix}$;

h. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

42. a. $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$; b. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$; c. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

d. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$;

e. $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$;

f. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ với $a^2 + bc = 0$;

g. $\begin{pmatrix} a & b \\ a-1 & b \\ 10-3a & 3-3b \end{pmatrix}$;

h. $\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ với $a^2 + bc = 1$.

§4. Hạng của ma trận

A. Tóm tắt lý thuyết và các ví dụ mẫu

Định nghĩa: Hạng của ma trận A là hạng của hệ véc tơ cột của nó. Kí hiệu: $r(A)$.

Chú ý: Phép chuyển vị không làm thay đổi hạng của ma trận. Do đó hạng của ma trận $A=(a_{ij})_{m\times n}$ bằng hạng của hệ véc tơ cột và cũng bằng hạng của hệ véc tơ dòng của nó

$$r(A)=r\left(A_1^d,A_2^d,\ldots,A_m^d\right)=r\left(A_1^c,A_2^c,\ldots,A_n^c\right).$$

Định thức con của ma trận: Trong ma trận $A=(a_{ij})_{m\times n}$, chúng ta xác định một ma trận vuông cấp s bằng cách lấy các phần tử nằm ở giao của s dòng và s cột bất kì $(s\le \min(m,n))$. Định thức của ma trận này được gọi là định thức con cấp s của ma trận A.

Kí hiệu: $D_{i_1 i_2\ldots i_s}^{j_1 j_2\ldots j_s}$, trong đó i_k là các chỉ số dòng và j_k là các chỉ số cột đã chọn $(k=\overline{1,s})$.

Định lý: Cấp cao nhất của các định thức con khác 0 của ma trận A bằng hạng của nó.

Các phép biến đổi sơ cấp đối với ma trận:

- Đổi chỗ hai dòng/cột của ma trận cho nhau;
- Nhân một dòng/cột với một số thực khác 0;
- Cộng vào một dòng/cột tích của một dòng/cột khác với một số thực.

Kết quả: Các phép biến đổi sơ cấp (trên dòng hoặc cột) không làm thay đổi hạng của ma trận.

Các phương pháp tìm hạng của ma trận

- Phương pháp định thức bao quanh: Xuất phát từ một định thức con $D \neq 0$ cấp s của ma trận (thường bắt đầu với $s = 2$), ta xét các định thức con cấp $s+1$ bao quanh D. Nếu không tồn tại các định thức này, hoặc tất cả các định thức này đều bằng 0, thì hạng của ma trận bằng s. Ngược lại nếu tồn tại một định thức con $\overline{D}$ cấp $s+1$ bao quanh D khác 0 thì ta lặp lại cách làm trên với $\overline{D}$.

- Phương pháp biến đổi ma trận: Dùng các phép biến đổi sơ cấp để biến đổi ma trận ban đầu về dạng ma trận:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{ss} & \cdots & a_{sn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

trong đó $s \leq n$ và $a_{ii} \neq 0, i = \overline{1,s}$. Khi đó hạng của ma trận ban đầu bằng hạng của ma trận B và bằng s.

Chú ý:

- Nếu $m < n$ thì B có dạng hình thang;
- Nếu A là ma trận vuông cấp n thì:
  - $r(A) = n \Leftrightarrow |A| \neq 0$;
  - $r(A) < n \Leftrightarrow |A| = 0$.

Ví dụ 1: Tìm hạng của ma trận sau bằng hai phương pháp:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

Giải:

- Phương pháp định thức bao quanh: xuất phát từ định thức cấp 2:

$$D_{1,2}^{1,2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

ta kiểm tra hai định thức cấp 3 bao quanh:

$$D_{1,2,3}^{1,2,3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{vmatrix} = 0 \text{ và } D_{1,2,3}^{1,2,4} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 9 & 10 & 12 \end{vmatrix} = 0.$$

Vậy $r(A) = 2$.

- Phương pháp biến đổi ma trận:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) Nhân lần lượt dòng 1 với (-5), (-9) rồi cộng vào dòng 2 và 3;

(2) Nhân dòng 2 với (-2) rồi cộng vào dòng 3.

Ma trận sau khi biến đổi có hạng bằng 2, do đó $r(A) = 2$.

Ví dụ 2: Biện luận theo k hạng của ma trận sau:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Giải: Trước hết ta biến đổi ma trận A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & k-1 & 1-k \\ 0 & 1-k & 1-k^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & k-1 & 1-k \\ 0 & 0 & (k+2)(1-k) \end{pmatrix}$$

(1) Nhân lần lượt dòng 1 với (-1),$(-k)$ rồi cộng vào dòng 2 và 3;

(2) Cộng dòng 2 vào dòng 3.

Biện luận: Gọi ma trận sau khi biến đổi là B. Ta có $r(A) = r(B)$.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & k-1 & 1-k \\ 0 & 0 & (k+2)(1-k) \end{pmatrix}$$

TH$_1$: $k = 1$: $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(B) = 1 \Rightarrow r(A) = 1;$

TH$_2$: $k = -2$: $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(B) = 2 \Rightarrow r(A) = 2;$

TH$_3$: $k \neq 1, -2 : k - 1 \neq 0, (k+2)(1-k) \neq 0 \Rightarrow r(B) = 3 \Rightarrow r(A) = 3.$

Ứng dụng khảo sát hệ véc tơ

Cho hệ gồm m véc tơ n chiều $X_1, X_2, \ldots, X_m$. **Để khảo sát hệ véc** tơ này ta thực hiện như sau:

1. Lập ma trận A với các cột (dòng) lần lượt là các véc tơ $X_1, X_2, \ldots, X_m$.
2. Tìm $r(A)$ bằng phương pháp tìm hạng của ma trận. Hạng của hệ véc tơ đã cho bằng hạng của ma trận A.
3. Kết luận:
   - Nếu $r < m$ thì hệ véc tơ phụ thuộc tuyến tính.
   - Nếu $r = m$ thì hệ véc tơ độc lập tuyến tính.

Khi đã tìm được hạng $r(A)$ của ma trận thì ta cũng có thể tìm được cơ sở của hệ véc tơ qua việc xác định một định thức con cơ sở. Cụ thể ta có cơ sở của hệ véc tơ này gồm các véc tơ có chỉ số là các chỉ số cột (dòng) của định thức con cơ sở tuỳ theo cách lập ma trận A theo cột hay dòng.

Ví dụ 3: Cho hệ véc tơ

$$\begin{cases} X_1 = (1, -2, 1, 3) \\ X_2 = (2, 3, -4, -1) \\ X_3 = (5, -3, -1, 8) \end{cases}$$

a. Tìm hạng của hệ véc tơ trên, từ đó kết luận hệ véc tơ độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính;

b. Chỉ ra một cơ sở của hệ véc tơ và biểu diễn các véc tơ còn lại (nếu có) theo cơ sở đó.

Giải. Lập ma trận A nhận hệ véc tơ đã cho làm hệ véc tơ cột

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & -3 \\ 1 & -4 & -1 \\ 3 & 8 & -9 \end{pmatrix}$$

Dùng các phép biến đổi sơ cấp để biến đổi ma trận A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & -3 \\ 1 & -4 & -1 \\ 3 & 8 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & -6 & -6 \\ 0 & -7 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

(1) Nhân lần lượt dòng 1 với $2, (-1), (-3)$ rồi cộng vào dòng 2, 3, 4;

(2) Nhân lần lượt dòng 2, 3, 4 với $\frac{1}{7}, \left(-\frac{1}{6}\right), \left(-\frac{1}{7}\right)$;

(3) Nhân dòng 2 với (-1) rồi cộng vào dòng 3, 4.

a. $r(X_1, X_2, X_3, X_4) = r(A) = r(B) = 2$.

Do số véc tơ của hệ véc tơ bằng $3 > 2$ nên hệ véc tơ phụ thuộc tuyến tính.

b. Định thức con cơ sở của ma trận A

$$D_{1,2}^{1,2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$$

nên $\{X_1, X_2\}$ lập thành một cơ sở của hệ véc tơ;

Ta tìm biểu diễn của các véc tơ X_3 theo cơ sở trên thông qua việc giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}\alpha_1 + 2\alpha_2 = 5 \\ \alpha_2 = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1 = 3 \\ \alpha_2 = 1\end{cases} \Rightarrow X_3 = 3X_1 + X_2.$$

Ví dụ 4: Tìm hạng của hệ véc tơ sau:

$$\begin{cases}X_1 = (3, 0, 8) \\ X_2 = (2, -3, 4) \\ X_3 = (5, -3, \lambda)\end{cases}$$

Giải:

Lập ma trận A nhận các véc tơ này làm các véc tơ dòng ta được:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 2 & -3 & 4 \\ 5 & -3 & \lambda \end{pmatrix}$$

Ta có $D_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$, $D_{123}^{123} = |A| = -9\lambda + 108$. Vậy ta có:

- Nếu $\lambda = 12$ thì $|A| = D_{123}^{123} = 0$, do đó $r(A) = 2$;
- Nếu $\lambda \neq 12$ thì $|A| = D_{123}^{123} \neq 0$, do đó $r(A) = 3$.

Ví dụ 5: Tìm giá trị của tham số λ sao cho véc tơ X viểu diễn tuyến tính qua các véc tơ còn lại của hệ:

$$\begin{cases}X = (2, 3, \lambda) \\ X_1 = (1, 0, -2) \\ X_2 = (-2, 1, -3) \\ X_3 = (1, 1, -9)\end{cases}$$

Giải:

Ta xét riêng hệ véc tơ X_1, X_2, X_3, trước hết ta đi tìm hạng và một cơ sở của hệ véc tơ này:

Với $A=\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&1&1\\-2&-3&-9\end{pmatrix}$ thì $D_{12}^{12}\begin{vmatrix}1&-2\\0&1\end{vmatrix}=1\neq 0, |A|=\begin{vmatrix}1&-2&1\\0&1&1\\-2&-3&-9\end{vmatrix}=0.$

Vậy X_1, X_2 là một cơ sở của hệ véc tơ đã cho.

Để véc tơ X biểu diễn tuyến tính qua hệ X_1, X_2, X_3 thì cần và đủ là nó biểu diễn tuyến tính qua hệ cơ sở X_1, X_2, nghĩa là cần và đủ để hạng của ma trận sau bằng 2:

$$B=\left(X_1\ X_2\ X\right)=\begin{pmatrix}1&-2&2\\0&1&3\\-2&-3&\lambda\end{pmatrix}$$

Ta có $D_{12}^{12}=\begin{vmatrix}1&-2\\0&1\end{vmatrix}=1\neq 0, D_{123}^{123}=|B|=\lambda+25,$ Cho nên: $r(B)=2$ $\Leftrightarrow \lambda=-25.$

Vậy đáp số là $\lambda=-25$.

B. Bài tập

I. Đề bài

43. Tìm hạng của các ma trận sau

a. $\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\\10&11&12\end{pmatrix}$;

b. $\begin{pmatrix}1&2&3&0&-1\\0&1&1&1&0\\1&3&4&1&-1\end{pmatrix}$;

c. $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{pmatrix}$;

d. $\begin{pmatrix}2&0&2&0&2\\0&1&0&1&0\\2&1&0&2&1\\0&1&0&1&0\end{pmatrix}$;

e. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$; f. $\begin{pmatrix} 14 & 12 & 6 & 8 & 2 \\ 6 & 104 & 21 & 9 & 17 \\ 7 & 6 & 3 & 4 & 1 \\ 35 & 30 & 15 & 20 & 5 \end{pmatrix}$;

g. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$; h. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

44. Tìm hạng của các ma trận sau tuỳ theo giá trị của λ

a. $\begin{pmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{pmatrix}$; b. $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$;

c. $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & \lambda \end{pmatrix}$; d. $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$;

e. $\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -\lambda & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -\lambda & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -\lambda & 1 \end{pmatrix}$; f. $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & \lambda & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & \lambda & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \lambda & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$.

45. Chứng minh rằng nếu A, B là hai ma trận cùng cấp thì

$$r(A+B) \le r(A) + r(B).$$

46. Chứng minh rằng nếu A, B có cùng số dòng thì

$$r(A|B) \le r(A) + r(B).$$

47. Cho A là ma trận vuông cấp n, $n \geq 1$. Hãy tính hạng của A^* trong các trường hợp sau:

a. $r(A) = n$;

b. $r(A) \leq n-2$;

c. $r(A) = n-1$.

48. Cho A và B là 2 ma trận thoả mãn điều kiện $AB = BA$.

a. Chứng minh A và B là 2 ma trận vuông cùng cấp;

b. Chứng minh nếu các dòng của AB độc lập tuyến tính thì các dòng của ma trận A cũng độc lập tuyến tính;

c. Chứng minh nếu các cột của ma trận B phụ thuộc tuyến tính thì các cột của ma trận AB cũng phụ thuộc tuyến tính.

Ứng dụng hạng ma trận khảo sát hệ véc tơ

49. Xét sự độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính của hệ véc tơ

a. $\begin{cases} X_1 = (1,-2,3,-4,1) \\ X_2 = (2,-3,4,-1,2) \\ X_3 = (3,-5,7,-5,3) \\ X_4 = (4,-6,8,-2,4) \end{cases}$ b. $\begin{cases} X_1 = (1,-2,3,-4) \\ X_2 = (2,-3,4,-1) \\ X_3 = (3,-5,7,-5) \\ X_4 = (4,-6,8,-2) \end{cases}$

50. Với những giá trị nào của λ thì véc tơ X là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ còn lại

a. $\begin{cases} X = (7,-2,\lambda) \\ X_1 = (2,3,5) \\ X_2 = (3,7,8) \\ X_3 = (1,-6,1) \end{cases}$ b. $\begin{cases} X = (1,3,5) \\ X_1 = (3,2,5) \\ X_2 = (2,4,7) \\ X_3 = (5,6,\lambda) \end{cases}$

c. $\begin{cases} X = (1,8,5,\lambda) \\ X_1 = (-6,7,3,-2) \\ X_2 = (1,3,2,7) \end{cases}$ d. $\begin{cases} X = (5, 5, 7, \lambda) \\ X_1 = (3, 2, 4, 7) \\ X_2 = (1, 3, 2, 5) \end{cases}$

e. $\begin{cases} X = (5,9,\lambda) \\ X_1 = (4,4,3) \\ X_2 = (7,2,1) \\ X_3 = (4,1,6) \end{cases}$ f. $\begin{cases} X = (\lambda, 2, 5) \\ X_1 = (3, 2, 6) \\ X_2 = (7, 3, 9) \\ X_3 = (5, 1, 3) \end{cases}$

g. $\begin{cases} X = (5,2,\lambda) \\ X_1 = (3,2,6) \\ X_2 = (7,3,9) \\ X_3 = (5,1,3) \end{cases}$ h. $\begin{cases} X = (\lambda,6,9,3) \\ X_1 = (2,2,3,1) \\ X_2 = (5,3,7,5) \end{cases}$

51. Tìm hạng và 1 cơ sở của hệ véc tơ sau

a. $\begin{cases} X_1 = (2,1,3,1) \\ X_2 = (1,2,0,1) \\ X_3 = (-1,1,-3,0) \end{cases}$ b. $\begin{cases} X_1 = (1,2,3,4) \\ X_2 = (2,3,4,5) \\ X_3 = (3,4,5,6) \\ X_4 = (4,5,6,7) \end{cases}$

c. $\begin{cases} X_1 = (5,2,-3,1) \\ X_2 = (4,1,-2,3) \\ X_3 = (1,1,-1,-2) \\ X_4 = (3,4,-1,2) \end{cases}$ d. $\begin{cases} X_1 = (2,0,1,3,-1) \\ X_2 = (1,1,0,-1,1) \\ X_3 = (0,-2,1,5,-3) \\ X_4 = (1,-3,2,9,-5) \end{cases}$

e. $\begin{cases} X_1 = (1,-1,0,0) \\ X_2 = (0,1,-1,0) \\ X_3 = (1,0,-1,1) \\ X_4 = (0,0,0,1) \\ X_5 = (3,-5,2,-3) \end{cases}$ f. $\begin{cases} X_1 = (2,-1,3,5) \\ X_2 = (4,-3,1,3) \\ X_3 = (3,-2,3,4) \\ X_4 = (4,-1,15,17) \\ X_5 = (7,-6,7,0) \end{cases}$

52. Tìm hạng và 1 cơ sở của hệ véc tơ sau và biểu diễn các véc tơ còn lại qua các véc tơ của cơ sở đó

a. $\begin{cases} X_1 = (2,3,-4,-1) \\ X_2 = (1,-2,1,3) \\ X_3 = (5,-3,-1,8) \\ X_4 = (3,8,-9,-5) \end{cases}$ b. $\begin{cases} X_1 = (2,3,5,-4,1) \\ X_2 = (1,-1,2,3,5) \\ X_3 = (3,7,8,-11,-3) \\ X_4 = (1,-1,1,-2,3) \end{cases}$

c. $\begin{cases} X_1 = (1,-3,0,1,-2) \\ X_2 = (2,1,-3,2,-5) \\ X_3 = (4,3,-1,1,-1) \\ X_4 = (1,5,\ 2,-2,6) \end{cases}$

53. Cho m véc tơ n chiều $X_1, X_2, ..., X_m$. Giả sử hệ véc tơ này độc lập tuyến tính. Nếu ta thêm vào mỗi véc tơ này thành phần thứ $(n+1)$ thì m véc tơ $(n+1)$ chiều đó còn độc lập tuyến tính hay không?

54. Cho m véc tơ n chiều $X_1, X_2, ..., X_m$. Giả sử hệ véc tơ này phụ thuộc tuyến tính. Nếu ta bớt ở mỗi véctơ này thành phần thứ $(n-1)$ thì m véctơ $(n-1)$ chiều đó còn phụ thuộc tuyến tính hay không?

II. Đáp số

43.a. $r = 2$; b. $r = 2$; c. $r = 4$; d. $r = 3$;

e. $r = 2$; f. $r = 2$; g. $r = 4$; h. $r = 5$.

44. a. $r = 1$ nếu $\lambda = 1$; $r = 2$ nếu $\lambda = -1$; $r = 3$ nếu $\lambda \neq \pm 1$;

b. $r = 2$ nếu $\lambda = 3$; $r = 3$ nếu $\lambda \neq 3$;

c. $r = 3$ với $\forall \lambda$;

d. $r = 1$ nếu $\lambda = 1$; $r = 3$ nếu $\lambda = -3$; $r = 4$ nếu $\lambda \neq 1$ và $\lambda \neq -3$;

e. $r = 3$ nếu $\lambda = 0, -2, -4$; $r = 4$ nếu $\lambda \neq 0, -2, -4$;

f. $r = 3$ nếu $\lambda = 1, 2, 3$; $r = 4$ nếu $\lambda = 4$; $r = 5$ nếu $\lambda \neq 1, 2, 3, 4$.

47. a. Ta luôn có $AA^* = |A|E$ nên suy ra $|A||A^*| = |AA^*| = |A|^n$, nhưng vì $r(A) = n$ cho nên $|A| \neq 0$, vì vậy $|A^*| \neq 0$, suy ra $r(A^*) = n$;

b. Gọi $A^* = (A_{ij})$, trong đó A_{ij} là phần bù đại số của a_{ij}. Vì A_{ij} là định thức cấp $n-1$ cho nên $A_{ij} = 0, \forall i = 1 \ldots n, j = 1 \ldots n$ (do

$r(A) \le n-2$ nên mọi định thức con cấp lớn hơn $n-2$ đều bằng 0).
Vậy $r(A^*) = 0$.

c. Ta đã có $r(A) = n-1$, không mất tính tổng quát giả sử $D^{12...n-1}_{12...n-1}$ là định thức con cơ sở của A. Hiển nhiên rằng $A_{nn} \neq 0$ cho nên cột cuối cùng của A^* khác cột không. Bạn hãy tự chứng minh rằng các cột $1, 2, \ldots, n-1$ của A^* đều là bội của cột thứ n, do đó $r(A^*) = 1$.

49. a. Phụ thuộc tuyến tính; b. Phụ thuộc tuyến tính.

50. a. $\lambda = 15$; b. $\lambda \neq 12$; c. $\lambda = 15$; d. $\overline{\exists}\lambda$;

e. $\forall \lambda$; f. $\overline{\exists}\lambda$. g. $\lambda = 6$; h. $\lambda = 6$;

51. a. $r = 2$; $\{X_1, X_2\}$; b. $r = 2$; $\{X_1, X_2\}$;

c. $r = 3$; $\{X_2, X_3, X_4\}$; d. $r = 2$; $\{X_1, X_2\}$;

e. $r = 3$; $\{X_1, X_2, X_3\}$; f. $r = 3$; $\{X_1, X_2, X_3\}$.

52. a. $\{X_1, X_2\}$; $X_3 = X_1 + 3X_2$; $X_4 = 2X_1 - X_2$;

b. $\{X_1, X_2, X_4\}$; $X_3 = 2X_1 - X_2$;

c. $\{X_1, X_2, X_3\}$; $X_4 = -X_1 - X_2 + X_3$.

53. Còn độc lập tuyến tính.

54. Còn phụ thuộc tuyến tính.

Chương 3
HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

§1. Hệ phương trình Cramer

A. Tóm tắt lý thuyết và các ví dụ mẫu

Định nghĩa: Hệ phương trình Cramer là hệ phương trình gồm n phương trình n ẩn có dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

với định thức của ma trận hệ số khác 0, tức là $\det(A) \neq 0$, ở đây

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Phương pháp ma trận

Dạng ma trận của hệ phương trình Cramer là:

$$\begin{cases} AX = B \\ \det(A) \neq 0 \end{cases} \quad (2) \qquad \text{với } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Vì $\det(A) \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$, nên hệ có nghiệm duy nhất:

$$X = A^{-1}B. \qquad (3)$$

Ví dụ 1. Giải hệ sau bằng phương pháp ma trận

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 4 \\ 2x + 3y - z = 1 \\ -x + y + 3z = -3 \end{cases}$$

Giải: Hệ trên được viết ở dạng ma trận $AX = B$, với:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Ta có $\det A = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 45 \neq 0$ nên hệ trên là hệ Cramer.

Ma trận nghịch đảo của ma trận A là: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{7}{45} & -\frac{1}{45} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{45} & \frac{13}{45} \end{pmatrix}.$

Áp dụng công thức (3) ta có:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{7}{45} & -\frac{1}{45} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{45} & \frac{13}{45} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{9} \\ -\frac{5}{9} \\ -\frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

Vậy nghiệm duy nhất của hệ là $\left(x = \frac{10}{9}, \ y = -\frac{5}{9}, \ z = -\frac{4}{9} \right)$.

Phương pháp định thức (Quy tắc Cramer)

Định lý: Hệ Cramer (1) có nghiệm duy nhất được xác định bởi công thức:

$$x_j = \frac{d_j}{d} \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{4}$$

trong đó:

d - là định thức của ma trận hệ số;

d_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ là định thức nhận được từ định thức d khi thay cột thứ j bằng cột hệ số tự do.

Ví dụ 2: Giải hệ sau bằng quy tắc Cramer

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 4 \\ 2x + 3y - z = 1 \\ -x + y + 3z = -3 \end{cases}$$

Giải:

Ta có $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $d = |A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 45 \neq 0$ nên hệ trên là hệ Cramer.

Theo quy tắc Cramer ta có $\left(x = \dfrac{d_1}{d},\ y = \dfrac{d_2}{d},\ z = \dfrac{d_3}{d}\right)$ với:

$$d_1 = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 50, d_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = -25, d_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -20.$$

Vậy nghiệm duy nhất của hệ phương trình đã cho là:

$$\left(x = \frac{10}{9},\ y = -\frac{5}{9},\ z = -\frac{4}{9}\right).$$

B. Bài tập

I. Đề bài

Giải các hệ sau bằng phương pháp ma trận và quy tắc Cramer:

1. $\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x + 8y + 20z = 31 \\ 9x - 4y + 5z = 10 \\ 15 + 4y + 10z = 29 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 45x + 26y + 16z = 0 \\ 30x + 65y + 48z = 0 \\ 45x + 52y + 32z = 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x + y - 2z = 6 \\ 6x + 3y - 7z = 16 \\ 15x + 2y + z = 16 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 20x + 32y + 4z = 8 \\ 18x - 12y + 36z = -42 \\ 24x + 12y - 12z = -60 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 12 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 4 \\ 7x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 16 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 6x_1 + 9x_2 + 33x_3 + 15x_4 = 6 \\ 7x_1 + 7x_2 + 35x_3 + 14x_4 = 7 \\ 8x_1 + 4x_2 + 12x_3 + 8x_4 = -12 \\ 9x_1 + 9x_2 + 27x_3 + 36x_4 = -27 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 30x_1 + 40x_2 + 5x_3 + 10x_4 + 15 = 0 \\ 24x_1 + 40x_2 + 12x_3 + 20x_4 + 24 = 0 \\ 24x_1 + 32x_2 + 2x_3 + 10x_4 + 16 = 0 \\ 18x_1 + 30x_2 + 9x_3 + 21x_4 + 24 = 0 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = -2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5 = 5 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 13 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 11 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 6 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 3 \end{cases}$

II. Đáp số

1. $(x = 1,\ y = 2,\ z = -2)$.

2. $(x = 2,\ y = -2,\ z = 3)$.

3. $(x = 1,\ y = 1,\ z = 1)$.

4. $(x = 0,\ y = 0,\ z = 0)$.

5. $(x = 1,\ y = 1,\ z = -1)$.

6. $(x = -3,\ y = 2,\ z = 1)$.

7. $\left(x_1 = -\dfrac{11}{17},\ x_2 = -\dfrac{53}{51},\ x_3 = \dfrac{4}{51},\ x_4 = \dfrac{77}{51}\right)$.

8. $\left(x_1 = \dfrac{17}{16},\ x_2 = -\dfrac{15}{16},\ x_3 = \dfrac{9}{16},\ x_4 = \dfrac{25}{16}\right)$.

9. $(x_1 = -2,\ x_2 = 2,\ x_3 = -3,\ x_4 = 3)$.

10. $\left(x_1 = \dfrac{5}{8},\ x_2 = \dfrac{7}{4},\ x_3 = -\dfrac{7}{8},\ x_4 = -\dfrac{9}{4}\right)$.

11. $(x_1 = -2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ x_4 = -1)$.

12. $(x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1,\ x_4 = -1)$.

13. $\left(x_1 = -3,\ x_2 = -5,\ x_3 = -1,\ x_4 = -\dfrac{7}{3},\ x_5 = \dfrac{49}{3}\right)$.

14. $(x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = -2,\ x_4 = 0,\ x_5 = 3)$.

§2. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

A. Tóm tắt lý thuyết và các ví dụ mẫu

Các dạng biểu diễn của hệ phương trình tuyến tính tổng quát

Dạng khai triển:

Một hệ phương trình tuyến tính tổng quát gồm m phương trình và n ẩn số là hệ có dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

Dạng ma trận:

Ma trận mở rộng của hệ (1) là:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Chú ý rằng: $\overline{A} = (A \mid B)$.

Nếu viết các ẩn số dưới dạng ma trận cột $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ thì hệ phương trình (1) có thể viết dưới dạng ma trận: $AX = B$.

Dạng véc tơ:

Hệ (1) còn được viết dưới dạng:

$$x_1A_1^c + x_2A_2^c + \cdots + x_nA_n^c = B.$$

trong đó: $A_j^c = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, $\quad j = 1, 2, \ldots, n.$

Điều kiện có nghiệm:

Định lý Cronecker – Capelli: Điều kiện cần và đủ để một hệ phương trình tuyến tính có nghiệm là hạng của ma trận mở rộng bằng hạng của ma trận hệ số.

Từ định lý trên ta có kết quả sau:

+ Nếu $r(A) \neq r(\overline{A})$ thì hệ phương trình vô nghiệm;

+ Nếu $r(A) = r(\overline{A}) = n$ (n là số ẩn) thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất;

+ Nếu $r(A) = r(\overline{A}) = r < n$ thì hệ phương trình có vô số nghiệm. Khi đó hệ phương trình tương đương với hệ phương trình cơ sở của nó.

Hệ phương trình cơ sở được xác định theo định thức con cơ sở của ma trận hệ số, nếu định thức con cơ sở là $D_{i_1 i_2 \ldots i_r}^{j_1 j_2 \ldots j_r}$ thì hệ phương trình cơ sở gồm r phương trình $i_1, i_2, \ldots, i_r$.

Ví dụ 1: **Giải hệ phương trình:**

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 5 \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 7 \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 - 13x_4 = 3 \end{cases}$$

Giải: Xét ma trận hệ số và ma trận mở rộng của hệ:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -7 \\ 6 & -3 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 5 & -13 \end{pmatrix},\quad \overline{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -7 & 5 \\ 6 & -3 & 1 & -1 & 7 \\ -2 & 1 & 5 & -13 & 3 \end{pmatrix}$$

Tính hạng của ma trận hệ số và ma trận mở rộng:

Ta có $D_{12}^{23}=\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}=8\neq 0$, các định thức con cấp 3 của A và $\overline{A}$ bao quanh định thức này là:

$$D_{123}^{123}=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 6 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix}=0,\ D_{123}^{234}=\begin{vmatrix} -1 & 3 & -7 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & -13 \end{vmatrix}=0,\ D_{123}^{235}=\begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ -3 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}=0$$

nên $r(A)=r(\overline{A})=2<4$ suy ra hệ có vô số nghiệm.

Vì $D_{12}^{23}\neq 0$ suy ra hệ phương trình cơ sở của hệ đã cho là:

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3-7x_4=5 \\ 6x_1-3x_2+x_3-x_4=7 \end{cases}$$

và ta cũng có x_2, x_3 là hai ẩn chính; x_1, x_4 là hai ẩn tự do.

Chuyển các số hạng chứa ẩn tự do sang vế phải đồng thời gán cho chúng các giá trị tuỳ ý: $x_1=\alpha, x_2=\beta, (\alpha,\beta\in\mathbb{R})$ ta được một hệ Cramer với hai ẩn x_2, x_3:

$$\begin{cases} -x_2+3x_3=5-2\alpha+7\beta \\ -3x_2+x_3=7-6\alpha+\beta \end{cases}$$

Theo quy tắc Cramer ta có $\begin{cases} x_2=\dfrac{-4+4\alpha-\beta}{2} \\ x_3=\dfrac{2+5\beta}{2} \end{cases}$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ đã cho là:

$$\left(x_1 = \alpha, x_2 = \frac{-4+4\alpha-\beta}{2}, x_3 = \frac{2+5\beta}{2}, x_4 = \beta\right).$$

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 5 \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 7 \\ -6x_1 + 3x_2 + 7x_3 - 19x_4 = 2 \end{cases}$$

Giải: Xét ma trận hệ số và ma trận mở rộng của hệ:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -7 \\ 6 & -3 & 1 & -1 \\ -6 & 3 & 7 & -19 \end{pmatrix}, \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -7 & 5 \\ 6 & -3 & 1 & -1 & 7 \\ -6 & 3 & 7 & -19 & 2 \end{pmatrix}$$

Tính hạng của ma trận hệ số và ma trận mở rộng:

Ta có $D_{12}^{23} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$, các định thức con cấp 3 của A bao quanh định thức này là

$$D_{123}^{123} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 6 & -3 & 1 \\ -6 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 0, \; D_{123}^{234} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -7 \\ -3 & 1 & -1 \\ 3 & 7 & -19 \end{vmatrix} = 0.$$

nên $r(A) = 2$.

Các định thức con cấp 3 của $\overline{A}$ bao quanh định thức này là

$D_{123}^{123} = 0, D_{123}^{234} = 0$, nhưng $D_{123}^{235} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ -3 & 1 & 7 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 8$ nên $r(\overline{A}) = 3$.

Suy ra $r(A) \neq r(\overline{A})$, vậy hệ vô nghiệm.

Ví dụ 3: Giải và biện luận hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ -2x + y - z = 1 \\ mx - y + 2z = 2 \end{cases}$$

Giải: Ma trận hệ số của hệ là:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ m & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ m & -1 & 2 \end{vmatrix} = 15 - 5m.$$

Nếu $m = 3$ thì hệ đã cho trở thành $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ -2x + y - z = 1 \\ 3x - y + 2z = 2 \end{cases}$

Khi đó, ta có $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $D_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0.$

Có một định thức con của A bao quanh D_{12}^{12} là $D_{123}^{123} = |A| = 0$ nên $r(A) = 2$.

Xét ma trận mở rộng:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ có } D_{234}^{234} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -13 \neq 0.$$

Mà $\overline{A}$ chỉ có 3 dòng nên $r(\overline{A}) = 3$, suy ra $r(A) \neq r(\overline{A})$.

Vậy hệ vô nghiệm.

Nếu $m \neq 3 \Rightarrow |A| \neq 0$, khi đó hệ đã cho là hệ Cramer.

Theo quy tắc Cramer ta có $\left(x=\frac{13}{5(m-3)},\ y=\frac{7m-8}{5(m-3)},\ z=\frac{2m-19}{5(m-3)}\right)$.

Ví dụ 4: Tìm điều kiện của tham số để hệ sau có nghiệm duy nhất và tìm nghiệm đó.

$$\begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ 2x + my + 3z = 1 \\ 3x + 3y + z = 4 \end{cases}$$

Giải:

Điều kiện để một hệ phương trình tuyến tính có nghiệm duy nhất là $r(A)=r(\overline{A})=n \Leftrightarrow |A|\neq 0$ (n là số ẩn của hệ).

Ta có $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & m & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & m & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}=-5m-4.$

Vậy điều kiện cần tìm của m là $-5m-4\neq 0 \Leftrightarrow m\neq -\frac{4}{5}$.

Khi $m\neq -\frac{4}{5}$ ta có $|A|\neq 0$. Do đó, hệ đã cho là hệ Cramer.

Theo quy tắc Cramer ta có: $\left(x=\frac{5m+32}{5m+4}, y=\frac{-20}{5m+4}, z=\frac{5m-20}{5m+4}\right)$.

B. Bài tập

I. Đề bài

Tìm nghiệm tổng quát của các hệ phương trình:

15. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4 \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 6 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 8 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 6x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 9x_4 = 10 \\ 11x_1 + 12x_2 + 13x_3 + 14x_4 = 15 \\ 16x_1 + 17x_2 + 18x_3 + 19x_4 = 20 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 12x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 8x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7 \\ 16x_1 + 12x_2 + 4x_3 + 9x_4 = 13 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2 \end{cases}$

Giải và biện luận các hệ phương trình sau:

21. $\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \end{cases}$

22. $\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = k \\ x + y + kz = k^2 \end{cases}$

23. $\begin{cases} (k+1)x + y + z = 1 \\ x + (k+1)y + z = k \\ x + y + (k+1)z = k^2 \end{cases}$

24. $\begin{cases} kx + ky + (k+1)z = k \\ kx + ky + (k-1)z = k \\ (k+1)x + ky + (2k+3)z = 1 \end{cases}$

Tìm điều kiện của các tham số để các hệ sau có nghiệm duy nhất và tìm nghiệm đó.

25. $\begin{cases} (k-1)x - ky + (k+1)z = k-1 \\ (k-2)x + (k-1)y + (k-2)z = k \\ (2k-1)x + (k-1)y + (2k-1)z = k \end{cases}$

26. $\begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ 4x - y + 7z = 0 \\ x + ky + 2z = 0 \end{cases}$

27. $\begin{cases} k^2x + 3y + 2z = 0 \\ kx - y + z = 0 \\ 8x + y + 4z = 0 \end{cases}$

28. $\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + kx_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + kx_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + kx_4 = 1 \end{cases}$

29. $\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + kx_2 + x_3 + x_4 = k \\ x_1 + x_2 + kx_3 + x_4 = k^2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + kx_4 = k^3 \end{cases}$

30. $\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5 \\ 12x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3 \\ kx_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases}$

31. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 6x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7 \\ 8x_1 + 12x_2 + 7x_3 + kx_4 = 9 \end{cases}$

32. $\begin{cases} -6x_1 + 8x_2 - 5x_3 - x_4 = 9 \\ -2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 1 \\ -3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 3 \\ -3x_1 + 7x_2 + 17x_3 + 7x_4 = k \end{cases}$

33. $\begin{cases} -cy + bz = a \\ az + cx = b \\ bx - ay = c \end{cases}$

34. $\begin{cases} x - ay + a^2z = a^3 \\ x - by + b^2z = b^3 \\ x - cy + c^2z = c^3 \end{cases}$

II. Đáp số

15. $\left(x_1 = \alpha\ x_2 = \beta, x_3 = 2\beta - \alpha, x_4 = 1\right)$.

16. $\left(x_1 = 12\alpha, x_2 = -13 + 38\alpha, x_3 = -7, x_4 = \alpha\right)$.

17. $\left(x_1 = -3 + \alpha + 2\beta,\ x_2 = 4 - 2\alpha - 3\beta, x_3 = \alpha, x_4 = \beta\right)$.

18. $\left(x_1 = -3 + \alpha + 2\beta,\ x_2 = 4 - 2\alpha - 3\beta, x_3 = \alpha,\ x_4 = \beta\right)$.

19. $\left(x_1 = \alpha, x_2 = \beta, x_3 = 1 - 4\alpha - 3\beta, x_4 = 1\right)$.

20. $\left(x_1 = \dfrac{1+\gamma}{3}, x_2 = \dfrac{1 + 3\alpha + 3\beta - 5\gamma}{3}, x_3 = \alpha, x_4 = \beta, x_5 = \gamma\right)$.

21. $\begin{cases} k \neq 1 \\ k \neq -2 \end{cases}$: $x = y = z = \dfrac{1}{k+2}$;

+ $k = 1$: Nghiệm tổng quát của hệ là:

$$\left(x = 1 - \alpha - \beta, y = \alpha, z = \beta\right),\ \left(\alpha, \beta \in \mathbb{R}\right);$$

+ $k = -2$: Hệ vô nghiệm.

22. + $\begin{cases} k \neq 1 \\ k \neq -2 \end{cases}$: $\left(x = -\dfrac{k+1}{k+2}, y = \dfrac{1}{k+2}, z = \dfrac{(k+1)^2}{k+2}\right)$.

+ $k = 1$: Nghiệm tổng quát của hệ là:

$$\left(x = 1 - \alpha - \beta, y = \alpha, z = \beta\right),\ \left(\alpha, \beta \in \mathbb{R}\right);$$

+ $k = -2$: Hệ vô nghiệm.

23. + $\begin{cases} k \neq 0 \\ k \neq -3 \end{cases}$: $\left(x = \dfrac{2 - k^2}{k(k+3)}, y = \dfrac{2k-1}{k(k-1)}, z = \dfrac{k^3 + 2k^2 - k - 1}{k(k+3)}\right)$.

+ $k = 0$ hoặc $k = -3$ thì hệ vô nghiệm.

24. + $k \neq 0 : (x = 1 - k,\ y = k,\ z = 0)$;

+ $k = 0 : (x = 1, y = \alpha, z = 0),\ (\alpha \in \mathbb{R})$.

25. $k \neq \pm 1 : \left(x = \dfrac{2k^2 - 2k + 1}{-2(k-1)}, y = \dfrac{k}{k-1}, z = \dfrac{2k^2 - 2k + 1}{2(1-k)}\right)$.

26. $k \neq -1 :\ (x = y = z = 0)$.

27. $\begin{cases} k \neq 2 \\ k \neq -4 \end{cases} :\ (x = y = z = 0)$.

28. $\begin{cases} k \neq 1 \\ k \neq -3 \end{cases} : \left(x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \dfrac{1}{k+3}\right)$.

29. $\begin{cases} k \neq 1 \\ k \neq -3 \end{cases} : \left(x_1 = -\dfrac{k^2 + 2k + 2}{k+3}, x_2 = -\dfrac{k^2 + k - 1}{k+3},\right.$

$\left. x_3 = \dfrac{2k+1}{k+3}, x_4 = \dfrac{k^3 + 3k^2 + 2k + 1}{k+3}\right)$.

30. Không tồn tại k.

31. Không tồn tại k.

32. Không tồn tại k.

33. $abc \neq 0 : \left(x = \dfrac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc}, y = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ca}, z = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)$.

34. $\begin{cases} a \neq b \\ b \neq c : (x = abc, y = ab + bc + ca, z = a + b + c). \\ c \neq a \end{cases}$

§3. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

A. Tóm tắt lý thuyết và các ví dụ mẫu

Định nghĩa: Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất là hệ có dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Ma trận hệ số của hệ (1) là:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Khảo sát hệ thuần nhất

+ Nếu $r(A) = n$ (hạng ma trận hệ số bằng số ẩn) thì hệ thuần nhất có nghiệm duy nhất, là nghiệm tầm thường;

+ Nếu $r(A) < n$ (hạng ma trận hệ số nhỏ hơn số ẩn) thì hệ thuần nhất có vô số nghiệm.

Định lý: Điều kiện cần và đủ để một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có nghiệm không tầm thường là hạng của ma trận hệ số của nó nhỏ hơn số ẩn.

Hệ quả 1: Một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất với số phương trình bằng số ẩn có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi định thức của ma trận hệ số bằng không.

Hệ quả 2: Mọi hệ phương trình tuyến tính thuần nhất với số phương trình nhỏ hơn số ẩn đều có nghiệm không tầm thường.

Hệ nghiệm cơ bản

Định nghĩa: Mỗi cơ sở của không gian nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất được gọi là một ***hệ nghiệm cơ bản*** của nó.

Định lý: Khi $r(A) = r < n$ thì không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (1) là một không gian con $n-r$ chiều của không gian R^n, tức là mỗi hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình (1) gồm $n-r$ nghiệm.

Chú ý: Khi hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có vô số nghiệm, thì nó có vô số hệ nghiệm cơ bản. Việc tìm ra một hệ nghiệm cơ bản nào đó phụ thuộc vào việc chỉ định các ẩn chính và việc lựa chọn $n-r$ véc tơ độc lập tuyến tính $n-r$ chiều làm các bộ số thực gán cho các ẩn tự do.

Thuật toán xác định hệ nghiệm cơ bản của hệ thuần nhất

1. Tìm nghiệm tổng quát của hệ thuần nhất;
2. Căn cứ vào hạng của ma trận hệ số $r(A)$ để xác định số nghiệm trong hệ nghiệm cơ bản là: $n-r(A)$.
3. Xác định các nghiệm trong một hệ nghiệm cơ bản.

Trong bước 1 của thuật toán trên, thì việc chỉ định các ẩn chính và các ẩn tự do dựa vào việc chọn định thức con cơ sở của ma trận hệ số: Các ẩn chính là các ẩn tương ứng với chỉ số các cột của ma trận hệ số tạo thành định thức con cơ sở, các ẩn còn lại là các ẩn tự do.

Trong bước 3 của thuật toán, để cho đơn giản chúng ta thường lấy các véc tơ đơn vị $E_1 = (\underbrace{1,0,\ldots,0}_{n-r}), E_2 = (\underbrace{0,1,\ldots,0}_{n-r}), \ldots, E_{n-r} = (\underbrace{0,\ldots,0,1}_{n-r})$, làm các bộ số gán cho các ẩn tự do để được $n-r$ nghiệm của hệ nghiệm cơ bản.

Ví dụ 1: Tìm một hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0 \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0 \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 \qquad\; + 4x_4 + 8x_5 = 0 \end{cases}$$

Giải:

Ma trận hệ số của hệ phương trình là:

$$A=\begin{pmatrix}3&2&1&3&5\\6&4&3&5&7\\9&6&5&7&9\\3&2&0&4&8\end{pmatrix},\ \text{có } D_{12}^{45}=\begin{vmatrix}3&5\\5&7\end{vmatrix}=-4\neq 0,$$

các định thức con cấp 3 của A bao quanh định thức này là:

$$D_{123}^{345}=\begin{vmatrix}1&3&5\\3&5&7\\5&7&9\end{vmatrix}=0,\quad D_{123}^{245}=\begin{vmatrix}2&3&5\\4&5&7\\6&7&9\end{vmatrix}=0,\quad D_{123}^{145}=\begin{vmatrix}3&3&5\\6&5&7\\9&7&9\end{vmatrix}=0$$

$$D_{124}^{345}=\begin{vmatrix}1&3&5\\3&5&7\\0&4&8\end{vmatrix}=0,\quad D_{124}^{245}=\begin{vmatrix}2&3&5\\4&5&7\\2&4&8\end{vmatrix}=0,\quad D_{124}^{145}=\begin{vmatrix}3&3&5\\6&5&7\\3&4&8\end{vmatrix}=0$$

suy ra $r(A)=2$.

Chọn $D_{12}^{45}\neq 0$ làm định thức con cơ sở của ma trận hệ số. Khi đó ta có hệ phương trình cơ sở của hệ đã cho là:

$$\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3+3x_4+5x_5=0\\6x_1+4x_2+3x_3+5x_4+7x_5=0\end{cases}$$

Cũng do $D_{12}^{45}\neq 0$ nên ẩn chính của hệ phương trình là x_4, x_5; các ẩn còn lại là các ẩn tự do. Đặt $x_1=\alpha, x_2=\beta, x_3=\gamma;\ \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ và chuyển vế ta được:

$$\begin{cases}3x_4+5x_5=-3\alpha-2\beta-\gamma\\5x_4+7x_5=-6\alpha-4\beta-3\gamma\end{cases}$$

Đây là hệ Cramer với hai ẩn số x_4, x_5.

Theo quy tắc Cramer ta có: $x_4 = -\dfrac{9\alpha + 6\beta + 8\gamma}{4}, x_5 = \dfrac{3\alpha + 2\beta + 4\gamma}{4}$.

Chọn các véc tơ đơn vị 3 chiều:

$$E_1 = (1,0,0), E_2 = (0,1,0), E_3 = (0,0,1)$$

làm các bộ giá trị gán cho α, β, γ ta được:

$$\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 0 \Rightarrow x_4 = \frac{9}{4}, x_5 = \frac{3}{4} \Rightarrow P_1 = \left(1,0,0,\frac{9}{4},\frac{3}{4}\right).$$

$$\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 0 \Rightarrow x_4 = -\frac{3}{2}, x_5 = \frac{1}{2} \Rightarrow P_2 = \left(0,1,0,-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right).$$

$$\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 1 \Rightarrow x_4 = -2, x_5 = 1 \Rightarrow P_3 = (0,0,1,-2,1).$$

Suy ra một hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình đã cho là:

$$\left\{P_1 = \left(1,0,0,\frac{9}{4},\frac{3}{4}\right), P_2 = \left(0,1,0,-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right), P_3 = (0,0,1,-2,1)\right\}$$

Mối liên hệ với hệ không thuần nhất

Tổng của một nghiệm riêng của hệ phương trình tuyến tính không thuần nhất và nghiệm tổng quát của hệ thuần nhất liên kết với nó là nghiệm tổng quát của hệ phương trình tuyến tính không thuần nhất đó (hoặc hiệu giữa nghiệm tổng quát của hệ phương trình tuyến tính không thuần nhất với một nghiệm riêng của nó là nghiệm tổng quát của hệ thuần nhất liên kết với nó).

Ví dụ 2:

a. Tìm nghiệm tổng quát của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}$$

b. Tìm một hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất liên kết.

Giải:

a. Ma trận hệ số và ma trận mở rộng của hệ trên là:

$$A=\begin{pmatrix}2&7&3&1\\3&5&2&2\\9&4&1&7\end{pmatrix},\quad \overline{A}=\begin{pmatrix}2&7&3&1&6\\3&5&2&2&4\\9&4&1&7&2\end{pmatrix}$$

Ta có $D_{12}^{12}=\begin{vmatrix}2&7\\3&5\end{vmatrix}=-11\neq 0$, và các định thức bao quanh nó là:

$$D_{123}^{123}=\begin{vmatrix}2&7&3\\3&5&2\\9&4&1\end{vmatrix}=0,\ D_{123}^{124}=\begin{vmatrix}2&7&1\\3&5&2\\9&4&7\end{vmatrix}=0,\ D_{123}^{125}=\begin{vmatrix}2&7&6\\3&5&4\\9&4&2\end{vmatrix}=0.$$

Vậy $r(A)=2, r(\overline{A})=2$; Vậy hệ trên có nghiệm, chọn $D_{12}^{12}\neq 0$ làm định thức con cơ sở của ma trận hệ số, khi đó hệ phương trình cơ sở của hệ thuần nhất là:

$$\begin{cases}2x_1+7x_2+3x_3+x_4=6\\3x_1+5x_2+2x_3+2x_4=4\end{cases}$$

Chọn các ẩn x_1, x_2 là các ẩn chính và x_3, x_4 là các ẩn tự do. Đặt $x_3=\alpha, x_4=\beta,\ (\alpha,\beta\in\mathbb{R})$ ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases}2x_1+7x_2=6-3\alpha-\beta\\3x_1+5x_2=4-2\alpha-2\beta\end{cases}$$

Giải hệ này theo quy tắc Cramer ta được:

$$x_1=\frac{\alpha-9\beta-2}{11}, x_2=\frac{-5\alpha+\beta+10}{11}.$$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ phương trình đã cho là:

$$\left(x_1=\frac{\alpha-9\beta-2}{11}, x_2=\frac{-5\alpha+\beta+10}{11}, x_3=\alpha, x_4=\beta\right).$$

b. Từ kết quả trên, bây giờ chúng ta lấy một nghiệm riêng của hệ ứng với $\alpha = 0, \beta = 0$ là $\left(\frac{-2}{11}, \frac{10}{11}, 0, 0\right)$, hiệu giữa nghiệm tổng quát và nghiệm riêng này sẽ là nghiệm tổng quát của hệ thuần nhất liên kết:

$$\left(x_1 = \frac{\alpha - 9\beta}{11}, x_2 = \frac{-5\alpha + \beta}{11}, x_3 = \alpha, x_4 = \beta\right).$$

Vậy hệ nghiệm cơ bản của hệ thuần nhất liên kết có 2 véc tơ là:

$$\left\{P_1 = \left(\frac{1}{11}, -\frac{5}{11}, 1, 0\right), P_2 = \left(-\frac{9}{11}, \frac{1}{11}, 0, 1\right)\right\}$$

B. Bài tập

I. Đề bài

Tìm nghiệm tổng quát và một hệ nghiệm cơ bản của mỗi hệ sau:

35. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 9x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$

36. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$

37. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

38. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$

39. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + 17x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$

40. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 = 0 \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$

41. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$

42. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$

Tìm nghiệm tổng quát của hệ phương trình tuyến tính không thuần nhất và một hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất liên kết tương ứng.

43. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$

44. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3 \\ 3x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ 4x_1 + 12x_2 + 8x_3 + 6x_4 = 6 \end{cases}$

45. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 5x_5 = 2 \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 + 10x_5 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 1 \end{cases}$

46. $\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 + 5x_3 + 5x_4 - 10x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3 \end{cases}$

47. Cho hệ 3 phương trình tuyến tính của hai ẩn, chứng minh rằng nếu hệ có nghiệm thì định thức của ma trận mở rộng bằng không.

48. Cho hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có 3 phương trình 3 ẩn thoả mãn điều kiện $A' = -A$, chứng minh rằng hệ trên có nghiệm không tầm thường.

49. Cho A, B là các ma trận hệ số của 2 hệ phương trình tuyến tính, giả sử $AB = BA$, chứng minh rằng nếu ma trận nào có các dòng độc lập tuyến tính thì hệ phương trình tương ứng có một nghiệm duy nhất.

50. Cho hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có ma trận hệ số là A, chứng minh rằng nếu hệ các véc tơ cột của A độc lập tuyến tính thì hệ phương trình này chỉ có nghiệm tầm thường.

II. Đáp số

35. $\left(x_1 = \frac{15\alpha}{13}, x_2 = -\frac{\alpha}{13}, x_3 = \alpha\right)$; $P = (15, -1, 13)$.

36. $(x_1 = 2\alpha + 3\beta, x_2 = \alpha, x_3 = \beta)$; $P_1 = (2, 1, 0), P_2 = (3, 0, 1)$.

37. $\left(x_1 = -\frac{4}{5}\alpha, x_2 = -\frac{1}{5}\alpha, x_3 = \alpha\right)$; $P = (-4, -1, 5)$.

38. $(x_1 = \alpha + 2\beta, x_2 = -2\alpha - 3\beta, x_3 = \alpha, x_4 = \beta)$;

$P_1 = (2, -3, 0, 1), P_2 = (1, -1, -1, 1)$.

39. $(x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0)$.

40. $\left(x_1 = \frac{3\alpha - 13\beta}{17}, x_2 = \frac{19\alpha - 20\beta}{17}, x_3 = \alpha, x_4 = \beta\right)$.

$P_1 = (3, 19, 17, 0)$; $P_2 = (-13, -20, 0, 17)$

41. $(x_1 = \alpha + \beta,\ x_2 = -2\alpha - 2\beta,\ x_3 = \alpha,\ x_4 = \beta,\ x_5 = 0)$;

$P_1 = (1, -2, 1, 0, 0)$; $P_2 = (1, -2, 0, 1, 0)$.

42. $(x_1 = \alpha, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 5\alpha, x_5 = 4\alpha)$;

$P = (1, 0, 0, 5, 4)$.

43. $\left(x_1 = \frac{1 + 5\alpha}{6}, x_2 = \frac{1 - 7\alpha}{6}, x_3 = \frac{1 + 5\alpha}{6},\ x_4 = \alpha\right)$;

$P = (5, -7, 5, 6)$.

44. $(x_1=\alpha, x_2=\beta, x_3=6-5\alpha-15\beta, x_4=-7+6\alpha+18\beta)$

$P_1=(1,0,1,-1)$; $P_2=(0,1,-9,11)$.

45. $\left(x_1=1,\ x_2=\dfrac{3\alpha+4\beta+5\gamma+1}{-2},\ x_3=\alpha,\ x_4=\beta,\ x_5=\gamma\right)$;

$P_1=\left(0,-\dfrac{3}{2},1,0,0\right)$; $P_2=(0,-4,0,1,0)$; $P_3=\left(0,-\dfrac{5}{2},0,0,1\right)$.

46. $\left(x_1=\dfrac{1+\gamma}{3}, x_2=\dfrac{1+3\alpha+3\beta-5\gamma}{3}, x_3=\alpha,\ x_4=\beta,\ x_5=\gamma\right)$;

$P_1=(0,1,1,0,0)$; $P_2=(0,1,0,1,0)$; $P_3=\left(\dfrac{1}{3},-\dfrac{5}{3},0,0,1\right)$.

47. Gọi $A, \overline{A}$ là ma trận hệ số và ma trận hệ số mở rộng của hệ phương trình này. Vì hệ này có nghiệm nên theo định lý Cronecker – Capelli ta có $r(A)=r(\overline{A})$. Nhưng A là ma trận cấp 3×2 nên $r(A)\le 2$, do đó $r(\overline{A})\le 2$, suy ra $|\overline{A}|=0$ (Tại sao?).

48. Do $A'=-A$ nên ta có $|A'|=|-A|$, nhưng vì $|A|=|A'|$ và $|-A|=(-1)^3|A|=-|A|$ cho nên ta có $|A|=-|A|$, suy ra $|A|=0$, vậy hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có nghiệm không tầm thường.

49. Vì các tích AB và BA đều tồn tại cho nên A có cấp $m\times n$ và B có cấp $n\times m$. Nhưng ta lại có $AB=BA$ cho nên $m=n$, nghĩa là cả A và B đều là các ma trận vuông. Do đó nếu ma trận nào có các dòng độc lập tuyến tính thì hệ phương trình tương ứng là hệ Cramer do định thức của ma trận đó khác không, suy ra điều phải chứng minh.

50. Gợi ý: Viết hệ phương trình dưới dạng một đẳng thức véc tơ cột và sử dụng phương pháp phản chứng để chứng minh.

§4. Một số mô hình tuyến tính trong phân tích kinh tế

A. Tóm tắt lý thuyết và các ví dụ mẫu

Mô hình cân bằng thị trường

Xét mô hình cân bằng thị trường n hàng hoá liên quan, ta ký hiệu:

Q_{si} là lượng cung hàng hoá i,

Q_{di} là lượng cầu đối với hàng hoá i,

p_i là giá hàng hoá i.

Với giả thiết các yếu tố khác không thay đổi, hàm cung và hàm cầu tuyến tính có dạng như sau:

Hàm cung của hàng hoá i:

$$Q_{si} = a_{i0} + a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \cdots + a_{in}p_n \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Hàm cầu đối với hàng hoá i:

$$Q_{di} = b_{i0} + b_{i1}p_1 + b_{i2}p_2 + \cdots + b_{in}p_n \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Mô hình cân bằng thị trường n hàng hoá có dạng như sau:

$$\begin{cases} Q_{si} = a_{i0} + a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \cdots + a_{in}p_n \\ Q_{di} = b_{i0} + b_{i1}p_1 + b_{i2}p_2 + \cdots + b_{in}p_n \\ Q_{si} = Q_{di} \\ i = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

Từ hệ phương trình này ta suy ra hệ phương trình xác định giá cân bằng:

$$\begin{cases} a_{10} + a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + \cdots + a_{1n}p_n = b_{10} + b_{11}p_1 + b_{12}p_2 + \cdots + b_{1n}p_n \\ a_{20} + a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + \cdots + a_{2n}p_n = b_{20} + b_{21}p_1 + b_{22}p_2 + \cdots + b_{2n}p_n \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n0} + a_{n1}p_1 + a_{n2}p_2 + \cdots + a_{nn}p_n = b_{n0} + b_{n1}p_1 + b_{n2}p_2 + \cdots + b_{nn}p_n \end{cases}$$

Đặt $c_{ik} = a_{ik} - b_{ik}$ với $i = 1,2,\ldots,n$ và $k = 0,1,2,\ldots,n$ ta được hệ:

$$\begin{cases} c_{11}p_1 + c_{12}p_2 + \cdots + c_{1n}p_n = -c_{10} \\ c_{21}p_1 + c_{22}p_2 + \cdots + c_{2n}p_n = -c_{20} \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ c_{n1}p_1 + c_{n2}p_2 + \cdots + c_{nn}p_n = -c_{n0} \end{cases} \qquad (1)$$

Giải hệ phương trình tuyến tính (1) ta xác định được giá cân bằng của tất cả n hàng hoá, sau đó thay vào hàm cung (hoặc hàm cầu) ta xác định được lượng cân bằng.

Ví dụ 1: Giả sử thị trường gồm **2** mặt hàng: hàng hoá 1 và hàng hoá 2, với hàm cung và hàm cầu như sau:

Hàng hoá 1: $Q_{s1} = -1 + 6p_1$; $Q_{d1} = 8 - p_1 + 2p_2$.

Hàng hoá 2: $Q_{s2} = -4 + p_2$; $Q_{d2} = 10 + 2p_1 - 2p_2$.

Hệ phương trình xác định giá cân bằng:

$$\begin{cases} -1 + 6p_1 = 8 - p_1 + 2p_2 \\ -4 + p_2 = 10 + 2p_1 - 2p_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7p_1 - 2p_2 = 9 \\ -2p_1 + 3p_2 = 14 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta tìm được giá cân bằng của mỗi loại hàng hoá:

$$\bar{p}_1 = \frac{55}{17};\ \bar{p}_2 = \frac{116}{17}.$$

Thay giá cân bằng vào các biểu thức hàm cung ta xác định được lượng cân bằng:

$$\bar{Q}_1 = 1 + 6\bar{p}_1 = \frac{313}{17};\quad \bar{Q}_2 = 4 + \bar{p}_2 = \frac{48}{17}.$$

Ví dụ 2: Giả sử thị trường gồm 3 mặt hàng: hàng hoá 1, hàng hoá 2 và hàng hoá 3, với hàm cung và hàm cầu như sau:

$$\begin{aligned} Q_{s1} &= -20 + p_1 - 0{,}5p_2 \qquad & Q_{d1} &= 80 - 2p_1 - p_3 \\ Q_{s2} &= -10 + 2p_2 & Q_{d2} &= 50 - 2p_2 \\ Q_{s3} &= -10 + p_3 & Q_{d3} &= 90 - 2p_3 - p_1 \end{aligned}$$

Tìm giá và số lượng của ba loại mặt hàng trong trạng thái cân bằng.

Giải:

Hệ phương trình xác định giá cân bằng là:

$$\begin{cases} -20 + p_1 - 0{,}5p_2 = 80 - 2p_1 - p_3 \\ -10 + 2p_2 = 50 - 2p_2 \\ -10 + p_3 = 90 - p_1 - 2p_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3p_1 - 0{,}5p_2 + p_3 = 100 \\ 4p_2 = 60 \\ p_1 + 3p_3 = 100 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta được $\left(\overline{p_1} = 39{,}0625, \overline{p_2} = 15, \overline{p_3} = 20{,}3125\right)$.

Thay các giá trị trên vào biểu thức hàm cung ta được lượng cân bằng:

$\overline{Q_1} = -20 + \overline{p_1} - 0{,}5\overline{p_2} = 11{,}5625$, $\overline{Q_2} = -10 + 2\overline{p_2} = 20$,

$\overline{Q_3} = -10 + \overline{p_3} = 10{,}3125$

Mô hình cân bằng kinh tế vĩ mô

Gọi Y là tổng thu nhập quốc dân và E là tổng chi tiêu kế hoạch của nền kinh tế, trạng thái cân bằng được biểu diễn dưới dạng phương trình:

$$Y = E.$$

Trong một nền kinh tế đóng, tổng chi tiêu kế hoạch của toàn bộ nền kinh tế gồm các thành phần sau:

C: Tiêu dùng của các hộ gia đình;

G: Chi tiêu của chính phủ;

I : Chi tiêu cho đầu tư của các hãng sản xuất.

Ta giả sử $I = I_0$, $G = G_0$ cố định còn tiêu dùng của các hộ gia đình phụ thuộc vào thu nhập dưới dạng hàm bậc nhất (gọi là hàm tiêu dùng):

$$C = aY + b \quad (0 < a < 1,\ b > 0)..$$

Mô hình cân bằng kinh tế vĩ mô có dạng hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{cases} Y = C + I_0 + G_0Y \\ C = aY + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y - C = I_0 + G_0Y \\ -aY + C = b \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta xác định được mức thu nhập cân bằng và mức tiêu dùng cân bằng của nền kinh tế:

$$\bar{Y} = \frac{b + I_0 + G_0}{1-a}; \ \bar{C} = \frac{b + a(I_0 + G_0)}{1-a}.$$

Nếu tính thuế thu nhập thì hàm tiêu dùng sẽ thay đổi như sau:

$$C = aY_d + b,$$

trong đó Y_d là thu nhập sau thuế. Gọi tỷ lệ thuế thu nhập là t (biểu diễn ở dạng thập phân), ta có:

$$Y_d = Y - tY = (1-t)Y,$$

$$C = a(1-t)Y + b.$$

Mức thu nhập quốc dân và tiêu dùng cân bằng là:

$$\bar{Y} = \frac{b + I_0 + G_0}{1-a(1-t)}; \ \bar{C} = \frac{b + a(1-t)(I_0 + G_0)}{1-a(1-t)}.$$

Ví dụ 3: Nếu $C = 250 + 0{,}85Y$; $I_0 = 250$; $G_0 = 300$ (tính bằng triệu USD) thì ta tính được mức thu nhập cân bằng và mức tiêu dùng cân bằng là:

$$\bar{Y} = \frac{250 + 250 + 300}{1-0{,}85} = 5333 \quad \text{(triệu USD);}$$

$$\bar{C} = \frac{250 + 0{,}85(250 + 300)}{1-0{,}85} = 4783 \quad \text{(triệu USD).}$$

Nếu nhà nước thu thuế thu nhập ở mức 10% thì $t = 0{,}1$. Khi đó mức cân bằng như sau:

$$\bar{Y} = \frac{250 + 250 + 300}{1-0{,}85(1-0{,}1)} = 3404 \quad \text{(triệu USD);}$$

$$\bar{C} = \frac{250 + 0{,}85(1-0{,}1)(250 + 300)}{1-0{,}85(1-0{,}1)} = 2854 \quad \text{(triệu USD).}$$

Mô hình Input - Output của Leontief

Trong một nền kinh tế hiện đại, việc sản xuất một loại sản phẩm hàng hoá dòi hỏi phải sử dụng các loại hàng hoá khác nhau trong cơ cấu các yếu tố sản xuất, việc xác định tổng cầu đối với sản phẩm của mỗi ngành sản xuất trong tổng thể nền kinh tế là quan trọng, nó bao gồm:

- *Cầu trung gian* từ phía các nhà sản xuất sử dụng loại sản phẩm đó cho quá trình sản xuất;
- *Cầu cuối cùng* từ phía những người sử dụng sản phẩm để tiêu dùng hoặc xuất khẩu, bao gồm các hộ gia đình, nhà nước, các tổ chức xuất khẩu...

Xét một nền kinh tế có n ngành sản xuất: ngành 1,2,...,n. Để thuận tiện cho việc tính chi phí cho các yếu tố sản xuất, ta biểu diễn lượng cầu của tất cả các loại hàng hoá ở dạng giá trị, tức là đo bằng tiền. Tổng cầu về sản phẩm hàng hoá của mỗi ngành i $(i = 1,2,\ldots,n)$ là:

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} + b_i,$$

trong đó x_i là tổng cầu đối với hàng hoá của ngành i; x_{ik} là giá trị hàng hoá của ngành i mà ngành k cần sử dụng cho việc sản xuất; b_i là giá trị hàng hoá của ngành i cần cho tiêu dùng và xuất khẩu.

Công thức nêu trên có thể viết lại dưới dạng:

$$x_i = \frac{x_{i1}}{x_1}x_1 + \frac{x_{i2}}{x_2}x_2 + \cdots + \frac{x_{in}}{x_n}x_n + b_i;\ (i = 1,2,\ldots,n).$$

Đặt:

$$a_{ik} = \frac{x_{ik}}{x_k}\ (i, k = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1 \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + (1-a_{22})x_2 - \cdots - a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - (1-a_{nn})x_n = b_n \end{cases} \tag{3}$$

Hệ phương trình (3) có thể viết dưới dạng ma trận như sau:

$$(E - A)X = B \tag{4}$$

trong đó:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

E là ma trận đơn vị cấp n.

Ma trận A được gọi là *ma trận hệ số kỹ thuật*; ma trận X là *ma trận tổng cầu*, còn B là *ma trận cầu cuối cùng*. Ma trận $E - A$ được gọi là *ma trận Leontief*. Ma trận nghịch đảo của ma trận $E - A$ có thể tính xấp xỉ theo công thức: $(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \cdots + A^n$, còn ma trận tổng cầu X được tính theo công thức $X = (E - A)^{-1} B$.

Ví dụ 4: Quan hệ trao đổi sản phẩm giữa 3 ngành sản xuất và cầu hàng hoá được cho ở bảng sau (đơn vị tính: triệu USD):

Ngành cung ứng sản phẩm (Output)	Ngành sử dụng sản phẩm (Inputs)			Cầu cuối cùng
	1	2	3	
1	15	50	20	40
2	60	15	50	10
3	20	20	30	10

Trong bảng số liệu trên, mỗi dòng đứng tên một ngành sản xuất; mỗi cột ở giữa đứng tên một ngành với danh nghĩa là người mua sản phẩm.

Hãy tính tổng cầu đối với sản phẩm của mỗi ngành và lập ma trận hệ số kỹ thuật.

Giải:

Tổng cầu:

Đối với sản phẩm của ngành 1: $x_1 = 15 + 50 + 20 + 40 = 125$;

Đối với sản phẩm của ngành 2: $x_2 = 60 + 15 + 50 + 10 = 135$;

Đối với sản phẩm của ngành 3: $x_3 = 20 + 20 + 30 + 10 = 80$.

Ma trận hệ số kỹ thuật là:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{15}{125} & \frac{50}{135} & \frac{20}{80} \\ \frac{60}{125} & \frac{15}{135} & \frac{50}{80} \\ \frac{20}{125} & \frac{20}{135} & \frac{30}{80} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,120 & 0,370 & 0,250 \\ 0,480 & 0,111 & 0,625 \\ 0,160 & 0,148 & 0,375 \end{pmatrix}$$

Ví dụ 5: Giả sử trong một nền kinh tế có 2 ngành sản xuất: ngành 1, ngành 2. Cho biết ma trận hệ số kỹ thuật:

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Cho biết mức cầu cuối cùng đối với hàng hoá của các ngành 1, 2 lần lượt là: 19, 84 triệu USD. Hãy xác định mức tổng cầu đối với mỗi ngành.

Giải: Ta có

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,3 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,4 \\ -0,3 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

Ma trận nghịch đảo của ma trận (E – A) là:

$$(E - A)^{-1} = \frac{1}{0,52}\begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,4 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

Ma trận tổng cầu là:

$$X = (E - A)^{-1}B = \frac{1}{0,52}\begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,4 & 0,8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 19 \\ 84 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 77,69 \\ 143,85 \end{pmatrix}$$

Ví dụ 6: Giả sử trong một nền kinh tế có 3 ngành sản xuất: ngành 1, ngành 2 và ngành 3. Cho biết ma trận hệ số kỹ thuật:

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Cho biết mức cầu cuối cùng đối với hàng hoá của các ngành 1, 2, 3 lần lượt là: 30, 4, 82 triệu USD. Hãy xác định mức tổng cầu đối với mỗi ngành.

Giải: Ta có

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 & -0,3 & -0,2 \\ -0,3 & 0,9 & -0,2 \\ -0,2 & -0,3 & 0,9 \end{pmatrix}.$$

Theo phương pháp tìm ma trận nghịch đảo đã biết ta tìm được

$$(E - A)^{-1} = \frac{1}{0,528}\begin{pmatrix} 0,75 & 0,33 & 0,24 \\ 0,31 & 0,77 & 0,24 \\ 0,27 & 0,33 & 0,72 \end{pmatrix}.$$

Ma trận tổng cầu là:

$$X = (E - A)^{-1}B = \frac{1}{0,528}\begin{pmatrix} 0,75 & 0,33 & 0,24 \\ 0,31 & 0,77 & 0,24 \\ 0,27 & 0,33 & 0,72 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 30 \\ 4 \\ 82 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 82,39 \\ 60,72 \\ 129,66 \end{pmatrix}.$$

B. Bài tập

I. Đề bài

1. Cho biết hàm cung và hàm cầu của thị trường 2 hàng hoá

$$Q_{d1} = 18 - 3p_1 + p_2, \qquad Q_{d2} = 12 + p_1 - 2p_2,$$

$$Q_{s1} = -2 + 4p_1 \qquad Q_{s2} = -2 + 3p_2.$$

Hãy xác định giá và lượng cân bằng của hai mặt hàng.

2. Cho biết hàm cung và hàm cầu của thị trường 3 hàng hoá

$$Q_{s1} = -10 + p_1; \quad Q_{s2} = 2p_2; \quad Q_{s3} = -5 + 3p_3$$

$$Q_{d1} = 20 - p_1 - p_3; \; Q_{d2} = 40 - 2p_2 - p_3;$$

$$Q_{d3} = 10 + p_2 - p_3 - p_1.$$

Hãy xác định giá và lượng cân bằng của ba mặt hàng.

3. Xét mô hình kinh tế vĩ mô:

$$Y = C + I_0 + G_0; \; C = 30 + 0,4Y;$$

Hãy xác định mức thu nhập quốc dân cân bằng và mức tiêu dùng cân bằng, cho biết $I_0 = 19$, $G_0 = 82$ (triệu dollar).

4. Xét mô hình kinh tế vĩ mô:

$$Y = C + I_0 + G_0;\ C = 60 + 0,7Y_t;\ Y_t = (1-t)Y.$$

Hãy xác định mức thu nhập quốc dân cân bằng, cho biết $I_0 = 90$, $G_0 = 140$ (triệu dollar) và thuế suất thu nhập $t = 40\%$.

5. Quan hệ trao đổi sản phẩm giữa 4 ngành sản xuất và cầu hàng hoá được cho ở bảng sau (đơn vị tính: triệu USD):

Ngành cung ứng sản phẩm (Output)	Ngành ứng dụng sản phẩm (Input)				Cầu cuối cùng
	1	2	3	4	
1	80	20	110	230	160
2	200	50	90	120	140
3	220	110	30	40	0
4	60	140	160	240	400

Hãy tính tổng cầu đối với sản phẩm của mỗi ngành và lập ma trận hệ số kỹ thuật (tính xấp xỉ đến 3 chữ số thập phân).

6. Cho biết ma trận hệ số kỹ thuật A và véc tơ cầu cuối cùng B, hãy xác định mức tổng cầu và tổng chi phí cho các hàng hoá được sử dụng làm đầu vào của sản xuất đối với mỗi ngành.

a. $A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 \\ 0,5 & 0,2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 170 \\ 280 \end{pmatrix}$.

b. $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,1 & 0,3 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 150 \\ 200 \\ 210 \end{pmatrix}$.

7. Cho biết ma trận hệ số kỹ thuật A và véc tơ cầu cuối cùng B, hãy xác định mức tổng cầu và tổng chi phí cho các hàng hoá được sử dụng làm đầu vào của sản xuất đối với mỗi ngành.

$$A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,3 \\ 0,2 & 0,4 & 0,2 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 140 \\ 220 \\ 180 \end{pmatrix}$$

Tính mức tổng cầu mới khi cầu cuối cùng đối với ngành 1 tăng thêm 30, đối với các ngành 2 và 3 thì giảm đi tương ứng 15 và 35.

II. Đáp số

1. $\overline{p_1} = \frac{57}{17}; \overline{p_2} = \frac{59}{17}; \overline{Q_1} = \frac{194}{17}; \overline{Q_2} = \frac{143}{17}$.

2. $\overline{p_1} = \frac{205}{15}; \overline{p_2} = \frac{140}{15}; \overline{p_3} = \frac{40}{15}; \overline{Q_1} = \frac{55}{15}; \overline{Q_2} = \frac{280}{15}; \overline{Q_3} = 3$.

3. $Y = 218,33;\ C = 117,33$.

4. $Y = 500$.

5. $x_1 = 600,\ x_2 = 600,\ x_3 = 400,\ x_4 = 1000$.

$$A = \begin{pmatrix} 0,133 & 0,033 & 0,275 & 0,230 \\ 0,333 & 0,083 & 0,225 & 0,120 \\ 0,367 & 0,183 & 0,075 & 0,040 \\ 0,100 & 0,233 & 0,400 & 0,240 \end{pmatrix}$$

6. a. $x_1 = 385,96; x_2 = 591,21$.

Chi phí đầu vào: $c_1 = 231,58;\ c_2 = 295,61$.

b. $x_1 = 879,50;\ x_2 = 1023,85;\ x_3 = 1232,22$.

Chi phí đầu vào: $c_1 = 791,55;\ c_2 = 921,465;\ c_3 = 862,554$

7. $x_1 = 743,24;\ x_2 = 756,76;\ x_3 = 789,19$.

Chi phí đầu vào: $c_1 = 594,592;\ c_2 = 681,084;\ c_3 = 473,514$.

Tổng cầu mới : $x_1 = 767,79;\ x_2 = 723,88;\ x_3 = 735,14$.

Chương 4
DẠNG TOÀN PHƯƠNG

§1. Các khái niệm cơ bản

A. Tóm tắt lý thuyết và các ví dụ mẫu

Dạng toàn phương của n biến số $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là biểu thức dạng:

$$f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

trong đó các hệ số a_{ij} là các hằng số cho trước.

Dạng toàn phương trên cho tương ứng một ma trận vuông:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

với các phần tử a_{ij} là các hệ số của $x_i x_j$. Ta gọi ma trận A là *ma trận của dạng toàn phương*.

Dạng toàn phương trên có thể viết dưới dạng ma trận như sau:

$$f = X'AX$$

trong đó X là ma trận cột biến số và X' là ma trận chuyển vị của X:

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad X'=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{pmatrix}.$$

Hạng của một dạng toàn phương là hạng của ma trận của dạng toàn phương đó.

Chú ý: Khi viết dạng toàn phương hay ma trận của một dạng toàn phương bạn phải tuân theo *quy tắc san bằng*.

Ví dụ 1: Hãy viết ma trận của dạng toàn phương:

$$f=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2+4x_2x_3+2x_1x_3.$$

Giải: Ma trận của dạng toàn phương trên là ma trận vuông đối xứng A cấp 3 vì dạng toàn phương trên có số ẩn $n=3$. Ta có:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{pmatrix}.$$

Ví dụ 2: Hãy viết dạng toàn phương có ma trận như sau:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&2&2\\3&2&1\end{pmatrix}.$$

Giải: Vì A là ma trận của dạng toàn phương nên dạng toàn phương là:

$$f=x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+4x_2x_3+6x_1x_3.$$

Ví dụ 3: Tìm hạng của dạng toàn phương:

$$f=x_1^2+x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3.$$

Giải: Ma trận của dạng toàn phương trên là:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&0\\1&0&3\end{pmatrix}.$$

Ta có thể kiểm tra lại rằng $r(A)=3$. Theo định nghĩa về hạng của dạng toàn phương thì hạng của dạng toàn phương này là hạng của ma trận A và bằng 3.

Ví dụ 4: Tìm hạng của dạng toàn phương sau:

$$f = 2x_1^2 + \lambda x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 8x_2x_3.$$

Giải:

Ma trận của dạng toàn phương này là:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & \lambda & 4 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Ta lại có $D_{13}^{13} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -2-9 = -11 \neq 0, D_{123}^{123} = |A| = -11\lambda - 76.$

Vì vậy ta có:

- Nếu $\lambda = -\dfrac{76}{11}$ thì $|A| = 0$ cho nên $r(A) = 2$, vậy hạng của dạng toàn phương là 2;
- Nếu $\lambda \neq -\dfrac{76}{11}$ thì $|A| \neq 0$ cho nên $r(A) = 3$, vậy hạng của dạng toàn phương là 3.

B. Bài tập

I. Đề bài

1. Hãy viết ma trận của các dạng toàn phương sau:

a. $f = 3x^2 - 6xy + 2y^2$;

b. $f = x_1^2 + 5x_2^2 - x_3^2 + x_1x_2 - 7x_1x_3 + 8x_2x_3$;

c. $f = 2x_1^2 - 3x_2^2 + 5x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_3x_4$.

2. Viết dạng toàn phương có ma trận cho như sau:

a. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; b. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -3 \\ -2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

3. Tìm hạng của các dạng toàn phương sau:

a. $f = 4x^2 - 4xy + y^2$;

b. $f = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 8x_2x_3$;

c. $f = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_4^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 +$

$+4x_1x_4 - 4x_2x_3 + 2x_2x_4 + 6x_3x_4$.

II. Đáp số

1. a. $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$; b. $\begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & -3{,}5 \\ 0{,}5 & 5 & 4 \\ -3{,}5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$;

c. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

2. a. $f = 4x_1^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$;

b. $f = x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_4^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_1x_4 +$

$+6x_2x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4$.

3. a. $r = 1$; b. $r = 3$; c. $r = 3$.

§2. Các phép biến đổi tuyến tính trong không gian R^n

A. Tóm tắt lý thuyết và các ví dụ mẫu

Biến đổi cơ sở của không gian $\mathbb{R}^n$

Cho 2 cơ sở của không gian $\mathbf{R}^n$:

$$P_1, P_2, \ldots, P_n, \tag{1}$$

$$Q_1, Q_2, \ldots, Q_n. \tag{2}$$

Gọi $(u_{1k}, u_{2k}, \ldots, u_{nk})$ là toạ độ của véc tơ Q_k trong cơ sở (1) tức là:

$$Q_k = u_{1k}P_1 + u_{2k}P_2 + \ldots + u_{nk}P_n, \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

Lập ma trận vuông cấp n với cột thứ k là toạ độ của véc tơ Q_k trong cơ sở (1):

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}.$$

Định nghĩa: Ma trận U được gọi là *ma trận đổi cơ sở* từ sơ sở (1) sang cơ sở (2).

Với P và Q là ma trận nhận hệ (1), (2) làm các véc tơ cột, P và Q không suy biến và

$$Q = PU, \quad U = P^{-1}Q. \tag{4}$$

Tương tự, nếu gọi V là ma trận đổi cơ sở từ cơ sở (2) sang cơ sở (1) thì

$$P = QV, \quad V = Q^{-1}P. \tag{5}$$

Từ (4) và (5) ta có: $U^{-1} = (P^{-1}Q)^{-1} = Q^{-1}(P^{-1})^{-1} = Q^{-1}P = V.$

Ví dụ 1: Cho hai cơ sở của không gian $\mathbb{R}^3$:

$$P_1 = (1,-1,0),\ P_2 = (1,0,-2),\ P_3 = (0,-1,1); \qquad (6)$$

$$Q_1 = (1,-2,0),\ Q_2 = (2,-1,0),\ Q_3 = (-1,0,-2). \qquad (7)$$

Ta có:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Ma trận đổi cơ sở từ (6) sang (7) là ma trận:

$$U = P^{-1}Q = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ -1 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Biến đổi toạ độ của véc tơ

Cho X là một véc tơ n chiều bất kỳ. Gọi $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ là toạ độ của X trong cơ sở (1) và $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ là toạ độ của nó trong cơ sở (2), ta có

$$X = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \ldots + \alpha_n P_n = \beta_1 Q_1 + \beta_2 Q_2 + \ldots + \beta_n Q_n.$$

Hệ thức này có thể viết dưới dạng:

$$P\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

Nhân hai vế với Q^{-1} về bên trái, ta được:

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = Q^{-1}P\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = V\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}. \qquad (8)$$

Do $V = U^{-1}$, công thức (6) có thể viết dưới dạng:

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = U^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}. \qquad (9)$$

Ví dụ 2: Gọi X là véc tơ 3 chiều có toạ độ trong cơ sở (6) là $(1,2,-1)$. Áp dụng công thức (9) ta tìm được toạ độ của X trong cơ sở (7):

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = U^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 2 & 8 & -4 \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{6} \\ -\frac{11}{3} \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Phép biến đổi tuyến tính

Viết mỗi véc tơ $X \in \mathbf{R}^n$ dưới dạng véc tơ cột, ta có

$$X = x_1E_1 + x_2E_2 + \ldots + x_nE_n,$$

trong đó $E_1, E_2, \ldots, E_n$ là các véc tơ đơn vị.

Cho F là một phép biến đổi tuyến tính trong không gian $\mathbb{R}^n$. Phép biến đổi tuyến tính F biến véc tơ $X = x_1E_1 + x_2E_2 + \ldots + x_nE_n$ thành véc tơ

$$FX = x_1(FE_1) + x_2(FE_2) + \ldots + x_n(FE_n).$$

Với F là một phép biến đổi tuyến tính cho trước thì các véc tơ ảnh $FE_1, FE_2, \ldots, FE_n$ là các véc tơ xác định:

$$FE_1 = \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ \vdots \\ t_{n1} \end{pmatrix}, FE_2 = \begin{pmatrix} t_{12} \\ t_{22} \\ \vdots \\ t_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, FE_n = \begin{pmatrix} t_{1n} \\ t_{2n} \\ \vdots \\ t_{nn} \end{pmatrix}.$$

Lập ma trận vuông T với cột thứ k là véc tơ FE_k :

$$T = \begin{pmatrix} FE_1 & FE_2 & \cdots & FE_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

Định nghĩa: Ma trận vuông T, với các cột theo thứ tự là các véc tơ ảnh của các véc tơ đơn vị $E_1, E_2, \ldots, E_n$ qua phép biến đổi tuyến tính F, được gọi là *ma trận của phép biến đổi tuyến tính F*.

Ví dụ 3: Cho biết ma trận của phép biến đổi tuyến tính φ của không gian $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Hãy tìm véc tơ ảnh của véc tơ $X = (x_1, x_2, x_3)$.

Giải. Dễ thấy rằng: $\varphi X = \left(4x_1 - x_2 + x_3, 3x_1 - x_3, -2x_2 + 3x_3\right)$.

B. Bài tập

I. Đề bài

4. Cho 2 cơ sở của không gian $\mathbb{R}^3$:

$$P_1 = (1,2,3),\quad P_2 = (0,-1,2),\quad P_3 = (0,1,-3) \qquad (1)$$

$$Q_1 = (-1,1,-10),\; Q_2 = (3,1,7),\; Q_3 = (-5,-2,-10) \qquad (2)$$

Hãy lập ma trận đổi cơ sở từ cơ sở (1) sang cơ sở (2) và lập công thức biến đổi toạ độ khi đổi cơ sở. Tìm toạ độ của véc tơ X trong cơ sở (2), cho biết $X = 2P_1 + P_2 - 3P_3$.

5. Cho biết ma trận của phép biến đổi tuyến tính φ của không gian $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hãy tìm véc tơ ảnh của véc tơ $X = (x_1, x_2, x_3)$.

II. Đáp số

4. a. $U = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -5 \\ -2 & 17 & -9 \\ 1 & 12 & -21 \end{pmatrix}$

Công thức biến đổi toạ độ:

$$\begin{cases} \beta_1 = -9\alpha_1 + 3\alpha_2 - 2\alpha_3 \\ \beta_2 = -71\alpha_1 + 26\alpha_2 - 19\alpha_3 \\ \beta_3 = -41\alpha_1 + 15\alpha_2 - 11\alpha_3 \end{cases}$$

Trong đó: $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ là toạ độ của véc tơ X bất kỳ của không gian $\mathbb{R}^3$ trong cơ sở (1) và $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ là tọa độ của nó trong cơ sở (2).

b) $(-9, -59, -34)$.

5. $\varphi(X) = (x_1 - 2x_2, 2x_1 + 2x_2 + x_3, 3x_1 - x_2 - x_3)$.

§3. Biến đổi dạng toàn phương về dạng chính tắc

A. Tóm tắt lý thuyết và các ví dụ mẫu

Định nghĩa: *Dạng toàn phương chính tắc* là dạng toàn phương chỉ chứa bình phương của các biến số:

$$f = b_1y_1^2 + b_2y_2^2 + \cdots + b_ny_n^2.$$

Chú ý: Số các hệ số khác 0 của dạng toàn phương chính tắc bằng hạng của dạng toàn phương đó.

Biến đổi dạng toàn phương về dạng chính tắc

Định lý: Mọi dạng toàn phương đều có thể biến đổi được về dạng chính tắc bằng một phép biến đổi tuyến tính không suy biến.

Từ cách chứng minh định lý này ta có thể suy ra một cách biến đổi dạng toàn phương về dạng chính tắc như sau:

- Trường hợp 1. Dạng toàn phương (1) khuyết tất cả các bình phương, tức là:

$$a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = 0.$$

Trong trường hợp này ta có thể biến đổi làm xuất hiện bình phương của ít nhất một trong các biến số. Thật vậy, giả sử $a_{12} \neq 0$, ta biến đổi dạng toàn phương (1) như sau:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_1 + y_2 \\ x_3 = y_3 \\ \cdots \quad \cdots \\ x_n = y_n \end{cases}$$

• Trường hợp 2. Nếu $a_{ii} \neq 0$ thì ta đặt y_i bằng biểu thức bậc nhất của các biến số $x_1, \ldots, x_n$, với các hệ số là các phần tử thuộc dòng thứ i của ma trận của dạng toàn phương. $y_k = x_k$ với $k \neq i$. Trong các bước biến đổi tiếp theo không được chọn lặp lại dòng thứ i.

Ví dụ 2: Biến đổi dạng toàn phương sau về dạng chính tắc:

$$f = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

Giải:

Ma trận của dạng toàn phương này là:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Do $a_{11} = 2 \neq 0$, theo dòng thứ nhất của ma trận này ta đặt:

$$y_1 = 2x_1 - x_3, \; y_2 = x_2, \; y_3 = x_3.$$

Đảo ngược lại ta được phép biến đổi:

$$x_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_3), \quad x_2 = y_2, \quad x_3 = y_3.$$

Sau phép biến đổi này ta được dạng toàn phương:

$$f = \frac{1}{2}y_1^2 + 2y_2^2 + \frac{5}{2}y_3^2 - 2y_2y_3.$$

Ma trận của dạng toàn phương này là:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Theo dòng thứ hai (có $a_{22} = 2 \neq 0$) của ma trận này ta biến đổi dạng toàn phương bằng cách đặt:

$$z_2 = 2y_2 - y_3, \quad z_1 = y_1, \quad z_3 = y_3.$$

Đảo ngược lại ta được phép biến đổi:

$$y_1 = z_1, \quad y_2 = \frac{1}{2}(z_2 + z_3), \quad y_3 = z_3.$$

Sau phép biến đổi này ta được dạng toàn phương chính tắc:

$$f = \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2 + 2z_3^2.$$

Bây giờ ta hãy xét một ví dụ ứng với trường hợp 1 khi mà tất cả các hệ số $a_{ii} = 0, i = 1, 2, ..., n$.

Ví dụ 3: Biến đổi dạng toàn phương sau về dạng chính tắc:

$$f = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

Giải: Trước hết ta có $a_{12} = 1 \neq 0$, nên ta áp dụng phép biến đổi làm xuất hiện bình phương như sau:

$$x_1 = y_1 - y_2, \ x_2 = y_1 + y_2, \ x_3 = y_3.$$

Sau phép biến đổi này ta được dạng toàn phương:

$$f = y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_3$$

Ma trận của dạng toàn phương này là:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Do $a_{11} = 1 \neq 0$, theo dòng thứ nhất của ma trận này ta đặt:

$$z_1 = y_1 + y_3, \ z_2 = y_2, \ z_3 = y_3.$$

Đảo ngược lại ta được phép biến đổi:

$$y_1 = z_1 - z_3, y_2 = z_2, y_3 = z_3.$$

Sau phép biến đổi này ta được dạng toàn phương chính tắc:

$$f = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2.$$

Nhận xét: Trong các ví dụ trên, ta đã thực hiện việc biến đổi đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc theo một thuật toán nhất định dựa vào ma trận của dạng toàn phương, nhưng ta cũng có thể đưa về dạng chính tắc bằng cách nhóm dần các phần tử, cụ thể ta xét lại ví dụ 3 như sau:

Biến đổi dạng toàn phương sau về dạng chính tắc:

$$f = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

Giải: Trước hết ta có $a_{12} = 1 \neq 0$, nên ta áp dụng phép biến đổi làm xuất hiện bình phương như sau:

$$x_1 = y_1 - y_2,\ \ x_2 = y_1 + y_2,\ \ x_3 = y_3. \tag{*}$$

Sau phép biến đổi này ta được dạng toàn phương:

$$f = y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_3$$

Tiếp đó, ta nhóm tất cả các phần tử chứa y_1:

$$\begin{aligned} f &= \left(y_1^2 + 2y_1y_3\right) - y_2^2 = \left(y_1^2 + 2y_1y_3 + y_3^2\right) - y_2^2 - y_3^2 \\ &= \left(y_1 + y_3\right)^2 - y_2^2 - y_3^2 \end{aligned}$$

Đặt
$$z_1 = y_1 + y_3, z_2 = y_2, z_3 = y_3. \tag{**}$$

Sau phép biến đổi này ta được dạng toàn phương chính tắc:

$$f = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2.$$

Chú ý rằng nếu ta cần ma trận của phép biến đổi đưa dạng toàn phương ban đầu về dạng toàn phương chính tắc thì từ (*) và (**) ta viết ma trận của phép đổi biến, ma trận của phép đổi biến cần tìm là tích của hai ma trận này.

Về bản chất, hai cách biến đổi như trên đều nội dung của phương pháp Lagrange đưa một dạng toàn phương về dạng chính tắc.

Định lý (luật quán tính): Số hệ số dương và số hệ số âm trong dạng chính tắc của một dạng toàn phương không phụ thuộc vào phép biến đổi tuyến tính không suy biến đưa dạng toàn phương đó về dạng chính tắc.

Chú ý: Có nhiều dạng chính tắc của cùng một dạng toàn phương, nhưng chỉ số quán tính của các dạng chính tắc đó luôn giống nhau.

B. Bài tập

I. Đề bài

6. Biến đổi về dạng chính tắc các dạng toàn phương sau:

a. $f = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$;

b. $f = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$;

c. $f = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$.

7. Cho biết ma trận của dạng toàn phương f của 4 biến số x_1, x_2, x_3, x_4:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Hãy viết dạng toàn phương đó và cho biết ở dạng chính tắc dạng toàn phương f khuyết mấy biến số?

II. Đáp số

6. Đáp số không duy nhất:

a. $f = \frac{1}{2}z_1^2 - z_2^2 + 4z_3^2$; b. $f = z_1^2 - \frac{1}{2}z_2^2 + 5z_3^2$;

c. $f = \frac{1}{3}z_1^2 + \frac{3}{8}z_2^2 + \frac{7}{2}z_3^2$.

7. $f = 2x_1^2 + 56x_3^2 - 6x_4^2 + 2x_1x_2 + 22x_1x_3 +$

$+4x_1x_4 + 8x_2x_3 - 2x_2x_4 + 10x_3x_4$.

Dạng chính tắc khuyết 1 biến số, do $r(A) = 3$.

§4. Dạng toàn phương xác định

A. Tóm tắt lý thuyết và các ví dụ mẫu

Cho dạng toàn phương:

$$f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = X'AX. \qquad (1)$$

- Dạng toàn phương (1) được gọi là dạng toàn phương *xác định dương* nếu nó luôn luôn nhận giá trị dương với mọi bộ số thực $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ không đồng thời bằng 0.

- Dạng toàn phương (1) được gọi là dạng toàn phương *xác định âm* nếu nó luôn luôn nhận giá trị âm với mọi bộ số thực $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ không đồng thời bằng 0.

- Một dạng toàn phương nhận cả giá trị dương và giá trị âm được gọi là dạng toàn phương *không xác định*.

Đa thức đặc trưng

Cho một ma trận vuông cấp n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ma trận $\lambda E - A$, trong đó λ là một biến số được gọi là *ma trận đặc trưng* của ma trận A. Ma trận đặc trưng của ma trận A có dạng:

$$\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Định thức của ma trận đặc trưng của ma trận A được gọi là *đa thức đặc trưng* của ma trận đó.

Giá trị riêng của ma trận

Giá trị riêng của một ma trận vuông A là nghiệm của đa thức đặc trưng của ma trận đó.

Ví dụ 1: Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Đa thức đặc trưng của ma trận A đã cho là đa thức:

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda.$$

Phương trình $f(\lambda) = 0$ cho ta 2 nghiệm là $\lambda_1 = 0; \lambda_2 = 5,$ từ đó suy ra ma trận A có 2 giá trị riêng là: $\lambda = 0;\ \lambda = 5.$

Dấu hiệu dạng toàn phương xác định

Xét một ma trận vuông cấp n bất kỳ:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ta gọi mỗi định thức con được thành lập từ các phần tử thuộc k dòng đầu và k cột đầu của ma trận A là các *định thức con chính* của ma trận đó $(k = 1,2,\ldots,n)$. Ma trận A có n định thức con chính được ký hiệu lần lượt là:

$$D_1 = a_{11}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ldots, D_n = |A|.$$

Định lý 1: Dạng toàn phương f là một dạng toàn phương xác định dương khi và chỉ khi ma trận của nó có tất cả các định thức con chính dương: $D_1 > 0,\ D_2 > 0, \ldots,\ D_n > 0$.

Ví dụ 2: Xét dạng toàn phương:

$$f = x_1^2 + 2x_2^2 + 9x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3.$$

Ma trận của dạng toàn phương này là:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Ma trận này có tất cả các định thức con chính dương:

$$D_1 = 1 > 0;\ D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 > 0; \quad D_3 = |A| = 1 > 0.$$

do đó f là dạng toàn phương xác định dương.

Chú ý: Dạng toàn phương f xác định âm khi và chỉ khi dạng toàn phương $-f$ xác định dương. Áp dụng định lý trên cho dạng toàn phương $-f$ suy ra:

Định lý 2: Dạng toàn phương f là một dạng toàn phương xác định âm khi và chỉ khi ma trận của nó có tất cả các định thức con chính cấp chẵn dương và tất cả các định thức con chính cấp lẻ âm:

$$D_1 < 0,\ D_2 > 0, \ldots, (-1)^n D_n > 0.$$

Ví dụ 3: Xét dạng toàn phương:

$$f = -x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + x_1x_3.$$

Ma trận của dạng toàn phương này là:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ma trận này có:

$$D_1 = -1 < 0; \quad D_2 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 > 0; \quad D_3 = |A| = -\frac{1}{2} < 0.$$

Vậy dạng toàn phương đã cho là dạng toàn phương xác định âm.

Để xét dấu của dạng toàn phương ta còn có thể sử dụng các giá trị riêng của ma trận.

Định lý 3:

- Một dạng toàn phương f là dạng toàn phương xác định dương khi và chỉ khi ma trận của nó có tất cả các giá trị riêng dương.

- Một dạng toàn phương f là dạng toàn phương xác định âm khi và chỉ khi ma trận của nó có tất cả các giá trị riêng âm.

- Một dạng toàn phương f là dạng toàn phương không xác định khi và chỉ khi ma trận của nó có các giá trị riêng trái dấu.

Ví dụ 4: Xét dạng toàn phương:

$$f = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2.$$

Ma trận của dạng toàn phương này là:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Đa thức đặc trưng:

$$|\lambda E - A| = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{pmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 1.$$

Ma trận A có hai giá trị riêng là:

$$\lambda_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} > 0; \quad \lambda_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} > 0.$$

Vì hai giá trị riêng này đều dương cho nên dạng toàn phương này là dạng toàn phương xác định dương.

Ví dụ 5: Xét dạng toàn phương:

$$f = -x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 + 2x_2x_3.$$

Ma trận của dạng toàn phương này là:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Đa thức đặc trưng:

$$|\lambda E - A| = A = \begin{pmatrix} \lambda + 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 2 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda + 1 \end{pmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda^2 + 3\lambda + 1).$$

Ma trận A có 3 giá trị riêng là:

$$\lambda_1 = -1 < 0; \ \lambda_2 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} < 0; \quad \lambda_3 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} < 0.$$

Vì 3 giá trị riêng này đều âm cho nên dạng toàn phương này là dạng toàn phương xác định âm.

Ví dụ 6: Với giá trị nào của tham số λ thì dạng toàn phương sau là dạng toàn phương xác định dương?

$$f = 2x_1^2 + 2\lambda x_2^2 + \frac{\lambda}{2}x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3.$$

Giải:

Ma trận của dạng toàn phương này là:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2\lambda & 3 \\ -1 & 3 & \frac{\lambda}{2} \end{pmatrix}$$

Ta có: $D_1 = |2| = 2, D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2\lambda \end{vmatrix} = 4\lambda^2 - 4, D_3 = |A| = 2\lambda^2 - 4\lambda - 30.$

Dễ thấy $D_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1; D_3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -3; \lambda = 5$. Để dạng toàn phương là xác định dương thì điều kiện cần và đủ là tất cả các định thức con chính đều dương, nghĩa là: $D_1 > 0, D_2 > 0, D_3 > 0$.

Ta có $D_2 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda > 1 \\ \lambda < -1 \end{array}\right.$; $D_3 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda > 5 \\ \lambda < -3 \end{array}\right.$

Vậy với $\lambda \in (-\infty, -3) \cup (5, +\infty)$ thì dạng toàn phương trên là xác định dương.

B. Bài tập

I. Đề bài

8. Tìm các giá trị riêng của ma trận:

a. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; b. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$;

c. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; d. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

e. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$; f. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Cho A và B là hai ma trận vuông cùng cấp. Chứng minh rằng nếu A là ma trận không suy biến thì hai ma trận AB và BA có cùng đa thức đặc trưng.

10. Cho A là ma trận vuông không suy biến. Cho biết λ_0 là một giá trị riêng của A, hãy chứng minh:

a. $\lambda_0 \neq 0$;

b. $1/\lambda_0$ là giá trị riêng của ma trận A^{-}

11. Chứng minh rằng λ_0 là một giá trị riêng của ma trận vuông A khi và chỉ khi tồn tại ma trận cột $X \neq 0$ sao cho $AX = \lambda_0 X$.

12. Chứng minh rằng nếu λ_0 là giá trị riêng của ma trận vuông A thì λ_0^2 là giá trị riêng của ma trận A^2.

13. Hãy thử tổng quát hoá mệnh đề ở bài tập 12 và chứng minh.

14. Các dạng toàn phương sau đây là dạng toàn phương xác định dương, xác định âm hay không xác định?

a. $f = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$;

b. $f = -5x_1^2 - 4x_2^2 - 2x_3^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$;

c. $f = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$;

d. $f = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$;

e. $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 +$

$$+2x_1x_4 - 2x_2x_3 - 2x_2x_4 - 2x_3x_4.$$

f. $f = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 +$

$$+2x_1x_4 + 2x_2x_3 + x_3x_4.$$

II. Đáp số

8.a. $f(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3$; $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$;

b. $f(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda - 14$; $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 7$;

c. $f(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1$; $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$;

d. $f(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1$; $\lambda = -1$;

e. $f(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda - 2$; $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$;

f. $f(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 16\lambda - 16$; $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2$.

9. Ta có:

$$|\lambda E - AB| = |A(A^{-1}\lambda E - B)| = |A||A^{-1}\lambda E - B|$$
$$= |A^{-1}\lambda E - B||A| = |\lambda E - BA|$$

Bài toán còn đúng nữa không trong trường hợp tổng quát?

10. a. Nếu $\lambda_0 = 0$ thì $|\lambda_0 E - A| = |-A| = 0$ vô lý do $|A| \neq 0$.

b. Gợi ý. Ta có $|\lambda_0 E - A| = |A(\lambda_0 A^{-1} - E)| = |\lambda_0 A|\left|A^{-1} - \dfrac{1}{\lambda_0}E\right|$.

11. Xem lại định lý trang 229 trong giáo trình.

12. Ta có, tồn tại véc tơ $X \neq 0$, sao cho $AX = \lambda_0 X$ cho nên:

$$A^2(X) = A(AX) = A(\lambda_0 X) = \lambda_0^2 X$$

$\Rightarrow \lambda_0^2$ là giá trị riêng của A^2.

13. Mệnh đề: "Nếu λ_0 là giá trị riêng của ma trận vuông A thì λ_0^m là giá trị riêng của ma trận A^m". Bạn đọc hãy tự chứng minh theo phương pháp quy nạp giống như trong bài tập 12.

14. a. Xác định dương; b. Xác định âm;
c. Xác định dương; d. Không xác định;
e. Không xác định; f. Không xác định.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. BỘ MÔN TOÁN CƠ BẢN, *Bài tập Toán cao cấp*, NXB ĐHKTQD, 2005.

[2]. LÊ ĐÌNH THUÝ – *Toán cao cấp cho các nhà kinh tế, Phần I, Đại số tuyến tính*, NXB Thống kê, 2003.

[3]. NGUYỄN ĐÌNH TRÍ, TẠ VĂN ĐĨNH, NGUYỄN HỒ QUỲNH, *Toán cao cấp tập 1*, NXB Giáo dục, 2001.

[4]. NGUYỄN ĐÌNH TRÍ, TẠ VĂN ĐĨNH, NGUYỄN HỒ QUỲNH, *Bài tập Toán cao cấp tập 1*, NXB Giáo dục, 2001.

[5]. HOÀNG KỲ, VŨ TUẤN, *Bài tập Đại số*, NXB ĐH & THCN, 1980.

[6]. LÊ ĐÌNH THỊNH, PHAN VĂN HẠP, HOÀNG ĐỨC NGUYÊN, LÊ ĐÌNH ĐỊNH, *Đại số tuyến tính phần bài tập*, NXB Khoa học Kỹ thuật, 1998.

[7]. MICHAEL HOY, JOHN LIVERNOIS, CHRIS Mc KENNA, RAY REES, THANASIS STENGOS, *Mathematics for Economics*, The MIT Press Cambrige, Massachusetts, London, England (Second edition), 2001.

[8]. ALPHA C.CHIANG, *Fundamental methods of Mathematical Economics*, Third Edition. Mc. Graw – Hill, Inc.

MỤC LỤC

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP

TOÁN CAO CẤP

CHO CÁC NHÀ KINH TẾ

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC KINH TẾ QUỐC DÂN
Địa chỉ: 207 Đường Giải Phóng - Hà Nội
Điện thoại: 043.8696407

---*---

Chịu trách nhiệm xuất bản
NGUYỄN THÀNH ĐỘ
Chịu trách nhiệm nội dung
NGUYỄN HUY HOÀNG
Biên tập:
NGUYỄN HUY HOÀNG
Chế bản:
QUANG KÉT
Vẽ bìa:
TRẦN HOA

In 1000 cuốn khổ 14.5*20.5cm tại xưởng in DDHKTQD.
Mã số ĐKXB 88/2010-CXB/01/480.
In xong và nộp lưu chiểu Quý II năm 2010.