BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ★ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

5 (239)
1997
NĂM THỨ 34

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG

1957 - 1997

40 năm

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
MATHEMATICS AND YOUTH

MỤC LỤC

Trụ sở tòa soạn :
45B Hàng Chuối, Hà Nội ĐT : 8213786
231 Nguyễn Văn Cừ, TP Hồ Chí Minh ĐT : 8356111

Biên tập và trị sự : VŨ KIM THỦY
LÊ THỐNG NHẤT
Trình bày : NGUYỄN QUỐC HỒNG

Dành cho các bạn Trung học cơ sở

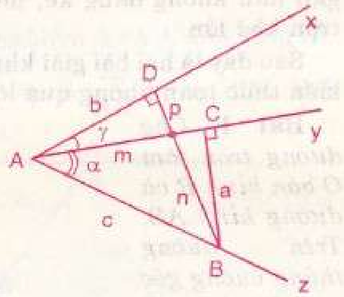
Chứng minh một số công thức lượng giác

BẰNG KIẾN THỨC TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

AN SƠN
(Phú Thọ)

Ở lớp 8, các bạn đã biết một số tỉ số lượng giác của góc nhọn. Với vốn kiến thức nho nhỏ đó nếu để ý tìm tòi, sáng tạo, ta có thể xây dựng được cách chứng minh một số công thức lượng giác cơ bản. Các công thức này các bạn có thể tham khảo trong sách *Đại số và giải tích 11* với phương pháp chứng minh bằng vectơ. Trong bài này xin trình bày cách chứng minh các công thức lượng giác đó bằng cách sử dụng kiến thức tỉ số lượng giác ở lớp 8.

Bây giờ ta xét góc nhọn xAz và trong góc nhọn này ta dựng tia Ay. Trên Az lấy B bất kì, từ B hạ các đường vuông góc với Ay, Ax với các giao điểm lần lượt là C và D.



Gọi giao điểm của BD và Ay là E

Đặt : $AB = c$; $AE = m$; $EC = l$; $AD = b$; $DE = p$; $EB = n$; $BC = a$; $\widehat{CAB} = \alpha$; $\widehat{CAD} = \gamma$; $\beta = \alpha + \gamma$.

Ta có :

$\Delta AED \backsim \Delta BEC$ (g.g) $\rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{l}{p} = \dfrac{n}{m}$ (I).

+ Xét hiệu sau :

$S = \cos(\beta - \alpha) - (\cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha)$

Có : $\cos(\beta - \alpha) = \cos\gamma = \dfrac{b}{m}$

$\cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha = \dfrac{b}{c} \cdot \dfrac{m+l}{c} + \dfrac{n+p}{c} \cdot \dfrac{a}{c}$

$\Rightarrow S = \dfrac{b}{m} - \dfrac{b(m+l) + a(n+p)}{c^2}$

$= \dfrac{bc^2 - bm^2 - bml - amn - amp}{mc^2}$

Có : $c^2 = a^2 + (m+l)^2 = a^2 + m^2 + 2ml + l^2$

Từ (I) ta có : $ap = bl$; $ml = np$; $am = bn$ (II)

$\Rightarrow S = \dfrac{ba^2 + bl^2 + 2bml + bm^2 - bm^2 - bml - amn - amp}{mc^2}$

$= \dfrac{b(n^2 - l^2) + bl^2 + bml - amn - amp}{mc^2}$ $(a^2 = n^2 - l^2)$

$= \dfrac{bn^2 + bml - amn - amp}{mc^2}$

$= \dfrac{n(bn - am) + m(bl - ap)}{mc^2}$

$= 0$ (từ (II) suy ra) $\Rightarrow S = 0$.

Vậy ta có :

$$\cos(\beta - \alpha) = \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha \qquad (1)$$

+ Xét hiệu

$P = \sin(\beta - \alpha) - (\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha)$

Với cách làm tương tự ta cũng có :

$P = \dfrac{p}{m} - \left[\dfrac{(n+p)}{c} \cdot \dfrac{(m+l)}{c} - \dfrac{a}{c} \cdot \dfrac{b}{c}\right]$

$= \dfrac{c^2p - lnm - pm^2 + abm - nm^2 - lpm}{mc^2}$

$= \dfrac{c^2p - n^2p - pm^2 - n(b^2 + p^2) - np^2 + b^2n}{mc^2}$

$= \dfrac{p}{mc^2}(c^2 - m^2 - n^2 - 2np) =$

$= \dfrac{p}{mc^2}\left[c^2 - (a^2 + l^2) - m^2 - 2ml\right]$

$= \dfrac{p}{mc^2}\left[c^2 - a^2 - (m+l)^2\right] = 0$

(vì $c^2 = a^2 + (m+l)^2$)

$\Rightarrow P = 0$

Vậy ta có :

$$\sin(\beta - \alpha) = \sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha \qquad (2)$$

+ Bây giờ ta lại xét tiếp hiệu sau :

$Q = \cos(\alpha + \gamma) - (\cos\alpha\cos - \sin\alpha\sin\gamma)$

Với cách làm tương tự ta cũng có :

$Q = \dfrac{b}{c} - \left(\dfrac{m+l}{c} \cdot \dfrac{b}{m} - \dfrac{a}{c} \cdot \dfrac{p}{m}\right)$

$= \dfrac{bm - bm - bl + ap}{mc} = 0$ (theo (II) : $bl = ap$).

$\Rightarrow Q = 0$

Vậy ta có :

$$\cos(\alpha + \gamma) = \cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma \qquad (3)$$

+ Ta lại xét tiếp hiệu sau :

$M = \sin(\alpha + \gamma) - (\sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma)$

Cũng biến đổi như trên ta có :

$M = \dfrac{n+p}{c} - \left(\dfrac{a}{c} \cdot \dfrac{b}{m} + \dfrac{m+l}{c} \cdot \dfrac{p}{m}\right)$

$= \dfrac{mn + mp - ab - mp - lp}{mc} = \dfrac{mn - ab - lp}{mc}$

$$= \frac{lp}{mc}\left(\frac{mn}{lp} - \frac{ab}{lp} - \frac{lp}{lp}\right) = \frac{lp}{mc}\left[\left(\frac{n}{l}\right)^2 - \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \left(\frac{l}{l}\right)^2\right]$$

$$= \frac{lp[n^2 - (a^2 + b^2)]}{mcl^2} = 0 \quad (\text{do } n^2 = a^2 + l^2)$$

$\Rightarrow Q = 0$

Vậy ta có :

$$\sin(\alpha + \gamma) = \sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma \quad (4).$$

Với bốn công thức trên ta lại vận dụng để xét các trường hợp đặc biệt sau :

+ Từ (3) nếu cho $\alpha = \gamma$ thì ta có :

$$\cos2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \quad (*)$$

Như ta đã biết $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, thay vào (*) ta có :

$$\left[\begin{array}{l}\cos2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \\ \cos2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1\end{array}\right. \quad (5)$$

+ Từ (4) nếu cho $\alpha = \gamma$ ta lại có :

$$\sin2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \quad (6)$$

+ Từ (*) và (6) ta có :

$$tg2\alpha = \frac{\sin2\alpha}{\cos2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$$

$$= \frac{2 \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1 - \left(\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)} = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} \quad (7)$$

+ Từ (3) nếu ta lại cho $2\alpha = \gamma$ thì ta có :

$\cos3\alpha = \cos\alpha\cos2\alpha - \sin\alpha\sin2\alpha$

$= \cos\alpha[2\cos^2\alpha - 1 - 2\sin^2\alpha]$

$= \cos\alpha[2\cos^2\alpha - 1 - 2(1 - \cos^2\alpha)]$

$= \cos\alpha(4\cos^2\alpha - 3) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

$\Rightarrow \cos3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \quad (8)$

Các bạn thấy đó, chỉ từ bốn công thức cơ bản ban đầu mà khi áp dụng vào các trường hợp đặc biệt lại cho ta thêm bốn công thức khác. Nhưng chưa hết, cũng từ bốn công thức ban đầu nếu chịu khó tìm tòi lượng biến đổi lại cho ta thêm các công thức sau (phần biến đổi này xin dành cho bạn đọc) :

$$\sin3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha \quad (9);$$

$$tg\alpha + tg\gamma = \frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\cos\alpha\cos\gamma} \quad (10);$$

$$tg\alpha - tg\gamma = \frac{\sin(\alpha - \gamma)}{\cos\alpha\cos\gamma} \quad (11);$$

$$tg(\alpha - \gamma) = \frac{tg\alpha - tg\gamma}{1 + tg\alpha tg\gamma} \quad (12);$$

$$tg(\alpha + \gamma) = \frac{tg\alpha + tg\gamma}{1 - tg\alpha tg\gamma} \quad (13);$$

$$\cos\alpha + \cos\gamma = 2\cos\frac{\alpha + \gamma}{2}\cos\frac{\alpha - \gamma}{2} \quad (14);$$

$$\cos\alpha - \cos\gamma = -2\sin\frac{\alpha + \gamma}{2}\sin\frac{\alpha - \gamma}{2} \quad (15);$$

$$\sin\alpha + \sin\gamma = 2\sin\frac{\alpha + \gamma}{2}\cos\frac{\alpha - \gamma}{2} \quad (16);$$

$$\sin\alpha - \sin\gamma = 2\cos\frac{\alpha + \gamma}{2}\sin\frac{\alpha - \gamma}{2} \quad (17);$$

NHỮNG KHÁC CÓ CHÚT XÍU

PHAN THANH QUANG
(TP. Hồ Chí Minh)

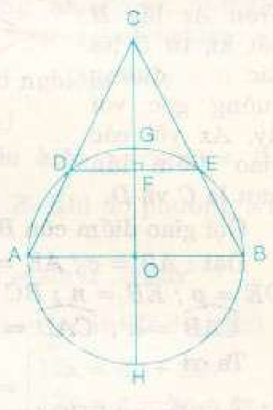
Ta đã biết rằng bằng thước và compas không thể dựng được một đoạn thẳng có độ dài bằng chu vi một đường tròn cho trước.

Bằng thước và compas cũng không thể dựng được một hình vuông có diện tích bằng diện tích một hình tròn cho trước. Nghĩa là bài toán "cầu phương một hình tròn" là một bài toán không có lời giải, đừng có mất thì giờ tìm kiếm vô ích, vì điều khẳng định đó đã được chứng minh chặt chẽ.

Tuy vậy, như để "đỡ nghiện", nhiều người vẫn tìm cách giải các bài toán trên một cách gần đúng, nghĩa là sai số phạm phải rất nhỏ, gần như không đáng kể, nếu bán kính đường tròn khá lớn.

Sau đây là hai bài giải khá độc đáo, chỉ dùng kiến thức toán không quá lớp 9.

Bài 1. *Cho đường tròn tâm O bán kính R và đường kính AB. Trên đường thẳng vuông góc với AB tại tâm O lấy điểm C sao cho OC = AB. CA và CB lần lượt cắt đường tròn tại D và E. Gọi F là trung điểm của DE.*



So sánh chu vi tam giác CDF với chu vi nửa đường tròn tâm O đã cho.

Nếu R = 100m thì hiệu giữa hai chu vi xấp xỉ là bao nhiêu ?

Áp dụng định lý Pitago vào Δ *CAO* ta có $CA = R\sqrt{5}$.

Từ $CD \times CA = CG \times CH$, với $CG = R$, $CH = 3R$, $CA = R\sqrt{5}$ suy ra $CD = 3R : \sqrt{5} = 0{,}6R\sqrt{5}$

Vì $DF \parallel AO$, áp dụng định lí Ta-lét vào ΔCAO ta có $CF = 0{,}6 \,.\, CO$, $DF = 0{,}6.AO$ tức là $CF = 1{,}2R$ và $DF = 0{,}6R$.

Chu vi $\Delta CDF = R(0{,}6\sqrt{5} + 1{,}2 + 0{,}6) \approx 3{,}141640R$

Suy ra hiệu giữa chu vi ΔCDF và chu vi nửa đường tròn (O) xấp xỉ là $0{,}000048R$. Nếu $R = 100$m thì hiệu đó xấp xỉ bằng 4,8mm.

Nếu lấy chu vi ΔCDF thay cho chu vi nửa đường tròn thì sai số phạm phải có 4,8mm ! Thật là quá thỏa mãn !

(xem tiếp bìa 4)

Bài T1/235. *Tìm số có 8 chữ số $\overline{a_1a_2a_3\ldots a_8}$ sao cho*

$$\begin{cases}\overline{a_1a_2a_3} = \overline{a_7a_8}^2\\ \overline{a_5a_5a_6a_7a_8} = \overline{a_7a_8}^3\end{cases}$$

Lời giải của *Nguyễn Đức Thành*, 8A, Trường trọng điểm Uông Bí, **Quảng Ninh**. Ta có :

$$\begin{cases}\overline{a_1a_2a_3} = \overline{a_7a_8}^2, & (1)\\ \overline{a_4a_5a_6a_7a_8} = \overline{a_7a_8}^3. & (2)\end{cases}$$

Từ (1) và (2) suy ra $22 \leqslant \overline{a_7a_8} \leqslant 31$ (3)

Từ (2) ta có $\overline{a_7a_8}^3 = \overline{a_4a_5a_6 00} + \overline{a_7a_8}$

$\Leftrightarrow \overline{a_7a_8}^3 - \overline{a_7a_8} = \overline{a_4a_5a_6 00}$

$\Leftrightarrow (\overline{a_7a_8} - 1)(\overline{a_7a_8})(\overline{a_7a_8} + 1) = \overline{a_4a_5a_6} \times 100$

Từ đó suy ra $(\overline{a_7a_8} - 1)(\overline{a_7a_8})(\overline{a_7a_8} + 1) \vdots 25$

Vì $(\overline{a_7a_8} - 1)(\overline{a_7a_8})(\overline{a_7a_8} + 1)$ là tích của 3 số tự nhiên liên tiếp nên trong 3 số trên phải có một số chia hết cho 25.

Nhưng do (3) ta suy ra $\overline{a_7a_8} = 24, 25$ hoặc 26.

– Với $\overline{a_7a_8} = 24$ ta có : $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8} = 57613824$

– Với $\overline{a_7a_8} = 25$ ta có $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8} = 62515625$

– Với $\overline{a_7a_8} = 26$ ta thấy không thỏa mãn (2), vậy loại.

Tóm lại ta tìm được 2 số có 8 chữ số thỏa mãn điều kiện của đầu bài là : 57613824 và 62515625

Nhận xét 1. Rất nhiều bạn đã phát hiện ra chỗ sai của đề bài và đã sửa như trên để giải đúng. Thành thực xin lỗi bạn đọc về sai sót này.

2. Các bạn sau đây có lời giải tốt : **Vĩnh Phúc** : *Nguyễn Minh Kiên*, 7A$_1$, Chuyên Mê Linh ; *Nguyễn Trung Lập*, 9B, Chuyên Yên Lạc ; *Vũ Văn Phong*, 9A, Chuyên Vĩnh Tường. **Thái Bình** : *Phan Hương Thu*, 9T, Chuyên thị xã. **Nam Định** : *Vũ Việt Tài*, 9T ; *Hoàng Tiến*, 9 Lý ; NK Hải Hậu. **Thanh Hóa** : *Lưu Ngọc Tuấn*, 8C, NK Thành phố ; *Hà Thị Phương Thảo*, 9TN, NK Bỉm Sơn, *Nguyễn Thị Quyên*, *Tài Hải Nhân*, 9T, Lam Sơn. **Hà Tĩnh** : *Nguyễn Nhật Tân*. 8T, NK Thị xã. **Bình Định** : *Lê Ánh Dương*, 9A, Quốc học Quy Nhơn. **Khánh Hòa** : *Trần Tuấn Anh*, 9T, Lê Quý Đôn, Nha Trang.

TÔ NGUYÊN

Bài T2/235. *Cho các số thực a, b, x, y thỏa mãn điều kiện*

$$\begin{aligned} a + b &= 6\\ ax + by &= 10\\ ax^2 + by^2 &= 24\\ ax^3 + by^3 &= 62 \end{aligned}$$

Tính giá trị của $ax^4 + by^4$

Lời giải : Ta có

$24 = ax^2 + by^2 = (ax + by)(x + y) - (a + b)xy$

$= 10(x + y) - 6xy$ (1)

$62 = ax^3 + by^3 = (ax^2 + by^2)(x+y) - (ax+by)xy$

$= 24(x + y) - 10xy$ (2)

Từ (1) và (2) rút ra $x + y = 3$

$xy = 1$

Vậy $ax^4+by^4=(ax^3+by^3)(x+y) - (ax^2+by^2)xy$

$= 62.3 - 24 = 162$

Nhận xét. Bài này có rất nhiều bạn tham gia giải và hầu hết giải đúng. Các bạn có lời giải tốt : *Nguyễn Công Thành*, 8T, NK Vinh, **Nghệ An**, *Lê Trung Kiên*, 9A Nguyễn Tri Phương **Thừa Thiên Huế** ; *Nguyễn Thị Bích Hà*, 7A Chuyên thị xã **Phú Thọ**, *Nguyễn Hoàng Minh* 9A PTTH **Tuyên Quang**, *Nguyễn Viết Tú* 9CT, **Hà Tĩnh** ; *Đàm Mạnh Tuấn*, 9T Lam Sơn, **Thanh Hóa** ; *Chu Mạnh Dũng* 8T NK Bắc Giang, *Nguyễn Viết Vi*, 8T, Nghĩa Thành, **Quảng Ngãi** ; *Nguyễn Quỳnh Hoa*, 8T, NK **Hải Dương** ; *Hà Anh Tuấn*, 7A Uông Bí, **Quảng Ninh** ; *Lê Đại Dương*, 9A, Nguyễn Huệ, **Đà Nẵng**, *Phan Long Yến Ánh*, 9A, Lương Văn Chánh, Tuy Hòa, **Phú Yên**, *Nguyễn Văn Tiến*, PTCS Phổ Quang, Đức Phổ, **Quảng Ngãi**, *Mai Nguyên Dũng*, 8NK **Thái Nguyên** ; *Vũ Ngọc Minh*, 7T, Chu Văn An, **Hải Phòng**, *Hoàng Thiên Lí*, 9C, Ngô Gia Tự, **Đắc Lắc**, *Dương Hải Châu*, 9 Phú Mĩ, **Bình Định**...

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T3/235. *Tìm giá trị của x sao cho thương của phép chia 1996x + 1497 cho $x^2 + 1$ đạt giá trị bé nhất có thể được.*

Lời giải : *Cách 1* : Ta có

$$A = \frac{1996x + 1497}{x^2 + 1} = \frac{499(x + 2)^2}{x^2 + 1} - 499$$

Do đó : $A \geqslant -499$ với mọi x. Vì $A = -499 \Leftrightarrow x = -2$ nên A đạt giá trị bé nhất là $-499 \Leftrightarrow x = -2$.

Cách 2. Tìm miền giá trị của

$$A = \frac{1996x + 1497}{x^2 + 1}$$

tức là tìm A để tồn tại x :

$Ax^2 - 1996x + A - 1497 = 0$

$+ A = 0$ thì $x = -\dfrac{1497}{1996} = -\dfrac{3}{4}$

$+ A \neq 0$ thì x tồn tại $\Leftrightarrow \Delta'_x \geqslant 0$

$\Leftrightarrow A^2 - 1497A - 998^2 \leqslant 0$

$\Leftrightarrow (A + 499)(A - 1996) \leqslant 0$

$\Leftrightarrow -499 \leqslant A \leqslant 1996$.

Tóm lại : Miền giá trị của A là $[-499 ; 1996]$

Do đó A đạt giá trị bé nhất là -499

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1996}{2 \times (-499)} = -2$

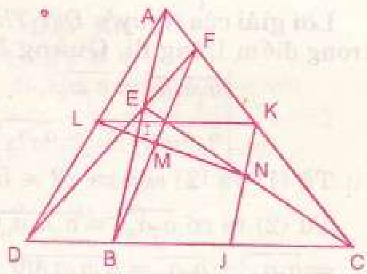
Nhận xét. Nhiều bạn chỉ ra được giá trị lớn nhất của thương là 1996 đạt được khi và chỉ khi $x = \frac{1}{2}$. Các bạn có lời giải và nhận xét tốt là : *Nguyễn Lương Huy*, 9/1, Nguyễn Khuyến (**Đà Nẵng**) ; *Nguyễn Hoàng Điệp*, 9A, Quang Trung (**Yên Bái**) ; *Phạm Lan Hương*, 8T, Nguyễn Du ; *Đặng Ngọc Châu*, 9T, Phan Chu Trinh (**Đăk Lăk**) ; *Nguyễn Tiến Khải*, 7T, Lê Khiết (**Quảng Ngãi**) ; *Phạm Công Phiệt*, xóm 19, Nghi Trung, Nghi Lộc ; *Đỗ Chí Thành*, 8B, Nghĩa Đàn ; *Trần Thanh Phương*, 8H, Trung Đô, Vinh (**Nghệ An**) ; *Trần Nam Trung, Tào Hải Nhân, Phạm Hoàng Phong*, 9, Lam Sơn ; *Lê Ngọc Giang*, 9T, Hoằng Hóa (**Thanh Hóa**) ; *Nguyễn Hữu Hạnh*, 8, Duy Tiên (**Hà Nam**) ; *Phạm Thu giang ; Nguyễn Trọng Kiên* ; 9T, Trần Đăng Ninh ; *Phùng Văn Huân*, 8T, Xuân Thủy (**Nam Định**) ; *Phạm Nguyên Thắng*, 9T, Thăng Long (**Lâm Đồng**) ; *Trần Anh Vũ, Nguyễn Sơn Phong*, 8T, Lê Quý Đôn, (**Bà Rịa – Vũng Tàu**). *Phạm Xuân Tiến*, 8T, Hải Đình, Đồng Hới (**Quảng Bình**) ; *Nguyễn Quang Vũ, Lê Trung Kiên*, 9/1, Nguyễn Tri Phương (**Thừa Thiên-Huế**) ; *Đặng Văn Cảnh, Trần Nguyên Thọ*, 9T, Năng khiếu (**Hà Tĩnh**) ; *Lê Nguyễn Thủy Tiên, Nguyễn Hoàng Quân*, 9, Nguyễn Bỉnh Khiêm (**Vĩnh Long**) ; *Trần Đình Học Hải*, 9A1, Phước Bình, Thủ Đức ; *Phan Minh Trí*, 9T, Nguyễn Du, Gò Vấp (**TP Hồ Chí Minh**) ; *Nguyễn Quốc Tuấn*, 9B, Lê Quý Đôn (**Tuyên Quang**) ; *Lê Đình Tiến*, 7T, Năng khiếu (**Hải Dương**) ; *Phan Long Yên Ánh*, 9A, Lương Văn Chánh, Tuy Hòa (**Phú Yên**) ; *Cao Hoài Trung*, 9B, Hoài Châu Bắc, Hoài Nhơn (**Bình Định**) ; *Trần Tuấn Anh*, 9T, Lê Quý Đôn, Nha Trang (**Khánh Hòa**) ; *Doãn Phương Thảo, Hoàng Minh Hoàng, Nguyễn Hải Hà* (**Hà Tây**) ; *Bùi Bá Hưng, Bùi Anh Đức*, Trọng điểm Uông Bí (**Quảng Ninh**) ; *Trương Anh Tuấn*, 9A, Kim Sơn ; *Ninh Đức Tuấn*, 9t, Tam Điệp (**Ninh Bình**) ; *Nguyễn Văn Biên*, 8A2 Tiên Lãng ; *Cao Đức Phúc*, 9A1, Hồng Bàng ; *Nguyễn Kim Thắng*, 9L, Trần Phú (**Hải Phòng**) ; *Nguyễn Trung Lập, Nguyễn Đức Hải*, 9B, Yên Lạc (**Vĩnh Phúc**) ; *Nguyễn Tuấn Sơn, Nguyễn Bích Hà*, 7A, Chuyên Phú Thọ ; *Trần Thị Thơ*, 9a, Supe, Phong Châu (**Phú Thọ**) ; *Lê Cường*, 9M, Marie–Curie ; *Đỗ Quang Anh*, 9D, Quang Trung ; *Vũ Đình Hoàng*, 9A3, Giảng Võ ; *Lê Hồng Quang*, 9A2, Nguyễn Tường Tộ ; *Phạm Quang Bình*, 8T, Từ Liêm ; *Phạm Quốc Nhân* ; 9D, Phương Mai ; *Phạm Bảo Dương, Đỗ Mai Vân*, 8A, Chu Văn An (**Hà Nội**), ...

• Nhiều bạn giải cách 2, không lưu ý trường hợp $A = 0$!

LÊ THỐNG NHẤT

Bài T4/235. *Cho tam giác ABC, một điểm D cố định trên tia đối của tia BC. Kẻ tia Dx cắt các cạnh AB, AC tại các điểm tương ứng E, F. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của BF, CE. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn luôn đi qua một điểm cố định.*

Lời giải. (Dựa theo Trần Tất Đạt 9A1, Chu Văn An, Tây Hồ, Hà Nội) Gọi I, J, K, L là các trung điểm tương ứng của AB, BC, CA, AD. Ta có L cố định. trong các tam giác BAF, BCF ta có các đường trung bình MI, MJ nên chúng cùng song song với AC, suy ra I, M, J thẳng hàng ; tương tự, ta cũng có J, N, K thẳng hàng, L, I, K thẳng hàng. Áp dụng định lí Ménélaus vào tam giác ABC, cát tuyến DEF, ta có



$\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \dfrac{\overline{CF}}{\overline{FA}} \cdot \dfrac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = -1$ (*). Mặt khác, do các đường trung bình nêu trên, ta cũng có

$\dfrac{\overline{MJ}}{\overline{MI}} = \dfrac{\overline{CF}}{\overline{FA}}$; $\dfrac{\overline{KN}}{\overline{NJ}} = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{EB}}$; $\dfrac{\overline{IL}}{\overline{LK}} = \dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}}$.

Đem thế vào (*), ta có :

$\dfrac{\overline{MJ}}{\overline{MI}} \cdot \dfrac{\overline{IL}}{\overline{LK}} \cdot \dfrac{\overline{KN}}{\overline{NJ}} = -1$. Áp dụng định lí Ménélaus đảo, ta có N, M, L thẳng hàng. Mà L cố định nên ta có đpcm.

Nhận xét. Có 123 bài giải, tất cả đều giải đúng, phần lớn dùng phương pháp diện tích, một số bài trình bày còn rườm rà. Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Hà Nội : Trần Tất Đạt, 9A1, Chu Văn An, Tây Hồ, Trần Anh Dũng, 7 Chuyên Toán, Trường Chuyên Từ Liêm, Lê Anh Vinh, 8A$_1$ Giảng Võ, Ba Đình, **Nghệ An :** Phan Thanh Minh, 8 Toán Năng khiếu Vinh, Nguyễn Viết Cường, 9TB Phan Bội Châu, Tp Vinh, Đinh Linh Côn, 9T$_A$ Phan Bội Châu, Chu Viết Tuấn, 9T$_A$ Phan Bội Châu, Trần Thanh Phương, 9H PTCS Trung Đô, Tp Vinh. **Thanh Hóa :** Nguyễn Thị Quyên, Lưu Văn Minh, Đàm Mạnh Tuất, 9T PTTH Lam Sơn. **Vĩnh Phúc :** Phạm Quang Nhật Minh (7A$_1$ Chuyên Mê Linh), Tạ Nguyễn Phương Dũng 7C Chuyên Yên Lạc, Nguyễn Đức Hải 9B Chuyên Yên Lạc. **Hà Tây :** Đỗ Thanh Hiên 7A Toán Thường Tín. **Hà Nam :** Nguyễn Văn Minh 8 Toán Năng Khiếu Duy Tiên

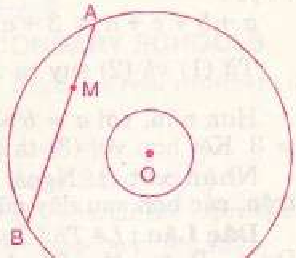
ĐẶNG VIỄN

Bài T5/235. *Cho đường tròn (O, R) và một điểm M ở bên trong. Hỏi điểm M phải thỏa mãn điều kiện gì để có thể kẻ dây AB qua M sao cho MA : MB = 1 : 2, tại sao ?*

Lời giải : Theo hệ thức Ơle ta có :

$MA \cdot MB = R^2 - OM^2$

$\Rightarrow 2MA^2 = R^2 - OM^2$ (1)



Mặt khác : $AB \leqslant 2R$ nên $AM \leqslant \frac{2R}{3}$

$\Rightarrow AM^2 \leqslant \frac{4}{9}R^2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$$R^2 - OM^2 \leqslant 2 \cdot \frac{4}{9}R^2$$

$$\Leftrightarrow OM^2 \geqslant \frac{R^2}{9} \Leftrightarrow OM \geqslant \frac{1}{3}R$$

Vậy M thuộc hình vành khăn được giới hạn bởi 2 đường tròn (O, R) và $\left(O, \frac{R}{3}\right)$ (không tính biên ngoài).

Đảo lại : Nếu M thuộc hình vành khăn nói trên thì $OM \geqslant \frac{1}{3}R$. Ta có thể kẻ qua nó dây AB sao cho

$MA : MB = 1 : 2$. Thật vậy :

Vẽ $\left(M, \frac{1}{3}R\right)$ và $\left(O, \frac{2}{3}R\right)$. Do $OM \geqslant \frac{1}{3}R = \frac{2}{3}R - \frac{1}{3}R$. $(d \geqslant R - r)$ nên 2 đường tròn trên giao nhau tại ít nhất 1 điểm. Gọi N là giao điểm. Kéo dài ON cắt (O) tại A, kéo dài AM cắt (O) tại điểm thứ 2 là B.

Ta có : $\frac{NA}{OA} = \frac{R - \frac{2}{3}R}{R} = \frac{1}{3} = \frac{MN}{OB}$. Theo định lí Talét đảo thì $MN \parallel OB$.

Suy ra $\frac{NA}{NO} = \frac{MA}{MB}$

$\Rightarrow MA : MB = 1 : 2$

Nhận xét. Bài này được rất nhiều bạn giải theo nhiều cách khác nhau. Giải tốt bài này có các bạn :

Quảng Ninh : *Bùi Bá Hưng*, 9A Trọng điểm Uông Bí. **Yên Bái :** *Nguyễn Xuân Kiện*, 8T THCS Yên Thịnh ; **Bắc Giang :** *Chu Mạnh Dũng*, 8T Năng khiếu BG, **Phú Thọ :** *Hà Quang Chiến*, 9A, Chuyên Sông Thao. **Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Đức Hai, Nguyễn Trung Lập*, 9B Chuyên Yên Lạc ; **Hà Tây :** *Hoàng Minh Hoàng*, 9B Chuyên V-T Ứng Hòa, *Đào Thị Mai Anh*, 9A1 THCS Nguyễn Trãi, Hà Đông ; **Hải Phòng :** *Nguyễn Hoàng Long*, 8A1 Hồng Bàng, **Hà Nội :** *Vũ Nhật Linh*, 8C Hà Nội – Amsterdam, *Lê Cường*, 9M Mari–Quyri, *Trần Tất Đạt*, 9A1 Chu Văn An, *Vũ Phương Nhi*, 8H, Trưng Vương, **Nam Định :** *Vũ Việt Tài*, 9T Năng khiếu Hải Hậu, *Nguyễn Thế Vinh*, 9CT Năng khiếu Ý Yên, *Nguyễn Trọng Kiên, Trần Đình Hùng, Nguyễn Văn Trung*, 9T Trần Đăng Ninh ; **Thanh Hóa :** *Tào Hải Nhân*, 9T Lam Sơn ; **Nghệ An :** *Nguyễn Đình Quân, Phan Thanh Trung*, 9TA Phan Bội Châu, *Nguyễn Hồ Xuân Minh Đức*, 8A Hưng Dũng, Vinh ; **Hà Tĩnh :** *Phạm Hồng Đức*, 9 Lý Năng khiếu HT, **Quảng Bình :** *Đặng Thị Tố Như*, 9T Năng khiếu Hảo Đình, **Đà Nẵng :** *Nguyễn Lương Huy*, 9/1 trường Nguyễn Khuyến, *Đỗ Trọng Tuấn*, 9/2 trường Nguyễn Huệ ; **Quảng Nam :** *Huỳnh Minh Việt*, 8A Nguyễn Hiền, Điện Bàn ; **Quảng Ngãi :** *Phạm Tuấn Anh* 8 Toán Chuyên Lê Khiết, **Đắc Lắc :** *Dương Thành An*, 8 Toán, Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột ; **Khánh Hòa :** *Trần Tuấn Anh*, 9 Toán Lê Quý Đôn, Nha Trang, **HCM** : *Chung Nhân Phú*, 9T1 Nguyễn An Khương, Hóc Môn ; **An Giang :** *Hoàng Thanh Lâm*, 9T Chuyên Thoại Ngọc Hầu, Long Xuyên ; **Vĩnh Long :** *Nguyễn Hoàng Quân*, 9T2 Nguyễn Bỉnh Khiêm ; **Trà Vinh :** *Trần Vinh Trung*, 9_8 Lý Tự Trọng.

VŨ KIM THỦY

Bài T6/235. *Tìm hằng số C > 0 nhỏ nhất sao cho* $\forall\, a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ ta đều có

$$\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_1 + a_2} + \ldots + \frac{n}{a_1 + . + a_n} <$$

$$< C\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right)$$

Lời giải. Trước hết ta chứng minh $C \geqslant 2$. Thật vậy chọn $a_i = i$ ta có

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{2}{i+1} < C \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

$$\leftrightarrow \frac{2}{n+1} < C + (C-2)\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i}$$

Nếu $C < 2$ thì khi cho $n \to \infty$ vế trái tiến đến $-\infty$ còn vế phải tiến tới 0. Mâu thuẫn.

Bây giờ ta coi với $C = 2$ thì BĐT đúng.

Áp dụng bđt Bunhiakopxki ta có

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{i^2}{a_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{k} i\right)^2 = \frac{1}{4}k^2(k+1)^2$$

$$\leftrightarrow \frac{k}{\sum_{i=1}^{k} a_i} \leqslant \frac{4}{k(k+1)^2}\sum_{i=1}^{k} \frac{i^2}{a_i}.$$

Vậy $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sum_{i=1}^{k} a_i} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{k(k+1)^2}\sum_{i=1}^{k} \frac{i^2}{a_i}$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} \frac{4i^2}{k(k+1)^2 a_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=i}^{n} \frac{4i^2}{k(k+1)^2 a_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \sum_{k=i}^{n} \frac{4i^2}{k(k+1)^2}$$

Ta có

$$\sum_{k=i}^{n} \frac{4i^2}{k(k+1)^2} < i^2 \left(\frac{2}{i^2} - \frac{2}{(n+1)^2} \right) < \frac{2i^2}{i^2} = 2$$

Vì $\dfrac{4}{k(k+1)^2} < \dfrac{4k+2}{k^2(k+1)^2} = \dfrac{2}{k^2} - \dfrac{2}{(k+1)^2}$

Thành thử

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sum_{i=1}^{k} a_i} < 2 \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \right)$$

Vậy số C cần tìm là C = 2

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tương đối tốt : *Nguyễn Thịnh*, 11T Phan Bội Châu, *Phạm Hữu Thảm*, 10T Lam Sơn, **Thanh Hóa**, *Nguyễn Ngọc Hải*, Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng**, *Nguyễn Trung Kiên* 10A PTTH Lê Thủy, **Quảng Bình** ; *Huỳnh Thế Khanh* 12A$_1$ TX **Trà Vinh**, *Hà Duy Hưng* 12T Ngô Quyền, **Hải Phòng** ; *Lê Hồng Hà*, 11A, PTCT Sư phạm Vinh **Nghệ An** ; *Nguyễn Văn Quang*, 10T Lam Sơn, **Thanh Hóa** ; *Trần Nam Dũng* 11CT Phan Bội Châu, **Nghệ An** ; *Nguyễn Văn Dung* 12A, Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng** ; *Đặng Đức Hạnh*, 11T, Phan Bội Châu, **Nghệ An**.

DẶNG HÙNG THẮNG

Bài T7/235 : *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :*

$$F = \frac{a}{bcd+1} + \frac{b}{cda+1} + \frac{c}{dab+1} + \frac{d}{abc+1}$$

với a, b, c, d ∈ [0, 1].

Lời giải. (của *Trương Xuân Nghiêu, Vũ Hải Đông* – 10CT, 11T Trường Chuyên Nguyễn Du – Buôn Ma Thuột **Đắc Lắc** ; *Lê Quốc Bảo, Nguyễn Ngọc Hải, Ngô Phong, Trần Quang Sơn, Nguyễn Anh Tuấn* – PTTH Lê Quí Đôn **Đà Nẵng** ; *Cao Xuân Sinh* – (10A THCB Ba Đình, Nga Sơn – **Thanh Hóa** ; *Hoàng Trung Tuyến* – 12A PTTH Hà Trung Thanh Hóa ; *Nguyễn Hà Duy* – 10A PTTH Nguyễn Huệ Hà Tây ; *Cao Thế Thụ* – 10B PTTH Vĩnh Tường – **Vĩnh Phúc** ; *Nguyễn Minh Phương* – 11A Trường Chuyên Hùng Vương – **Phú Thọ** ; *Nguyễn Kiên* – 10A$_2$ PTTH Chuyên **Yên Bái** ; *Ngô Anh Tuấn* – 10A PTCT ĐHSP Vinh **Nghệ An** ; *Nguyễn Hồng Dung* – 10A PTCT – Tin ĐHKHTN – ĐHQG **Hà Nội**) : Do $a, b, c \in [0, 1]$ nên :

$$F \leqslant \frac{a}{abcd+1} + \frac{b}{abcd+1} + \frac{c}{abcd+1} + \frac{d}{abcd+1} =$$
$$= \frac{a+b+c+d}{abcd+1} \qquad (1)$$

Mặt khác, từ $a, b, c, d \in [0, 1]$ ta còn có :

$$a + b \leqslant 1 + ab$$
$$c + d \leqslant 1 + cd$$
$$ab + cd \leqslant 1 + abcd$$

Cộng ba bất đẳng thức trên, vế theo vế, ta được :

$$a + b + c + d \leqslant 3 + abcd \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $F \leqslant \dfrac{3 + abcd}{abcd + 1} \leqslant 3$ (3)

Hơn nữa, với $a = b = c = 1$ và $d = 0$ thì $F = 3$. Kết hợp với (3) ta có maxF = 3.

Nhận xét. 1. Ngoài các bạn đã nêu tên ở trên, các bạn sau đây cũng có lời giải tốt :

Đắc Lắc : *Lê Thế Tân* (PT Chuyên Nguyễn Du – Buôn Ma Thuột). **Trà Vinh :** *Trần Huỳnh Thế Khanh* (12A$_1$ PTTH Phạm Thái Bường – Trà Vinh). **TP HCM :** *Trần Đình Học Hải* (9A$_1$ THCS Phước Bình – Thủ Đức), *Chung Nhân Phú* (9T$_1$ Trường Nguyễn An Khương – Hóc Môn). **Khánh Hòa :** *Trần Tuấn Anh* (9 Trường Lê Quí Đôn – Nha Trang). **Đà Nẵng :** *Phan Phú Đông, Bùi Việt Phương, Huỳnh Trấn Quốc, Nguyễn Hoàng Thành* (PTTH Lê Quí Đôn). **Thừa Thiên Huế :** *Nguyễn Trần Mạnh Quân* (10CT Trường Quốc học). **Quảng Bình :** *Trần Đức Thuận* (11CT Trường PTNK tỉnh). **Nghệ An :** *Nguyễn Đình Quân, Trần Nam Dũng, Đặng Đức Hạnh* (9T, 11T PTTH Phan Bội Châu). **Thanh Hóa :** *Vũ Đức Nghĩa* (8A THCS Đông Lương), *Hoàng Trung Kiên* (9T Trường NK Nga Sơn), *Vũ Bá Tiến* (11A$_2$ THCB Ba Đình – Nga Sơn), *Hán Văn Thắng* (12A$_6$ THCB Đào Duy Từ) ; *Đàm Mạnh Tuấn, Nguyễn Văn Quang* (9T, 10T PTTH Lam Sơn), *Lưu Đức Cảnh* (10A PTTH Hoàng Lệ Kha – Hà Trung). **Ninh Bình :** *Lê Văn Cường* (PTTH Lương Văn Tụy), *Phạm Trung Kiên* (TX Tam Điệp). **Nam Định :** *Nguyễn Kỳ Nha* (9CT Trường Nguyễn Hiền – Nam Ninh) ; *Nguyễn Văn Trung, Nguyễn Trọng Kiên* (9T Trần Đăng Ninh), *Đỗ Khánh Hải* (11A PTTH A Nghĩa Hưng). **Hà Tây :** *Bùi Xuân Hảo* (11A PTTH Nguyễn Huệ). **Hải Dương :** *Phùng Đức Tuấn* (11CT PTNK tỉnh). **Bắc Ninh :** *Hoàng Tùng* (9CT Trường NK Yên Dũng), **Nguyễn Ngọc Sơn** (12A PTTH Yên Dũng số 1) ; *Đặng Hoàng Việt Hà, Nguyễn Tiến Mạnh* (11A PTNK Ngô Sĩ Liên). **Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Thanh Tú* (9B Yên Lạc). **Phú Thọ :** *Lê Anh Tuấn, Trần Anh Tuấn* (10A, 11A PTTH Chuyên Hùng Vương). **Tuyên Quang :** *Nguyễn Quốc Tuấn* (9B Lê Quí Đôn). **ĐHQG TP HCM :** *Nguyễn Lê Lực* (11CT Trường PTNK). **ĐHSP Vinh :** *Lê Thanh Bình, Nguyễn Văn Hợp, Nguyễn Nghĩa Lâm, Hồ Sỹ Ngọc, Nguyễn Trần Phương* (Khối PTCT). **ĐHQG Hà Nội :** *Bùi Mạnh Hùng, Trần Thị Lê, Cung Thái Sơn, Phạm Hải Trung, Phạm Quang Vinh* (Khối PTCT – Tin ĐHKHTN).

2. Bằng phương pháp của Lời giải nêu trên, cũng như bằng một số phương pháp khá đơn giản khác, nhiều bạn đã giải đúng *Bài toán khái quát* sau : *"Xét các số $a_1, a_2, \dots, a_n \in$*

[0, 1] *(n là số nguyên lớn hơn 1 cho trước). Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :*

$$F = \frac{a_1}{a_2a_3...a_n + 1} + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{a_i}{a_1...a_{i-1}a_{i+1}...a_n+1} + \\ + \frac{a_n}{a_1a_2...a_{n-1}+1}$$

(Đáp số : maxF = n − 1).

Đặc biệt, bạn *Phạm Quang Vinh* (11B Khối PTCT − Tin ĐHKHTN − ĐHQG Hà Nội) đã đề xuất và, bằng phương pháp của Lời giải nêu trên, đã giải đúng *Bài toán tổng quát hơn Bài toán vừa nêu : "Cho số nguyên n > 1 và cho số thực α > 0. Xét n số thực $a_1, a_2, ..., a_n \in [0, \alpha]$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :*

$$F = \frac{a_1}{a_2a_3...a_n + \alpha^{n}+1} + \\ + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{a_i}{a_1...a_{i-1}a_{i+1}...a_n + \alpha^{n-1}} + \\ \frac{a_n}{a_1a_2...a_{n-1}+\alpha^{n-1}}"$$

3. Không ít bạn đã sử dụng phương pháp khảo sát hàm số để giải bài đã ra và đồng thời cho lời giải khá rườm rà, phức tạp.

4. Do mắc phải ít nhất một trong hai sai lầm dưới đây mà có 12 bạn (trong tổng số 102 bạn gửi Lời giải tới Tòa soạn) giải sai bài đã ra :

• **Sai lầm 1 :** *Từ F(a, b, c, d) ≤ G(a, b, c, d) (*) suy ra : F đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi ở bất đẳng thức (*) xảy ra dấu "=". (!)*

• **Sai lầm 2 :** *Khi xét các phân thức, không để ý tới điều kiện để các phân thức đó tồn tại.*

Chẳng hạn, có bạn đã viết : Viết lại F dưới dạng :

$$F = \frac{x}{bcd(bcd+1)} + \frac{x}{cda(cda+1)} + \\ + \frac{x}{dab(dab+1)} + \frac{x}{abc(abc+1)}$$

với $x = abcd$, v.v.

5. Ngoài 12 bạn nói trên, còn một bạn khác cũng giải sai bài toán do bạn đã hiểu [0, 1] là tập hợp gồm hai phần tử : 0 và 1. (!)

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T8/235. *Cho hai đa thức với hệ số thực P(x) và Q(x), trong đó P(x) là đa thức bậc 3 tùy ý, Q(x) là tam thức bậc 2 không có nghiệm thực. Chứng minh rằng nếu đồ thị hàm số $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ có ba điểm uốn thì ba điểm uốn của nó nằm trên một đường thẳng.*

Lời giải. (*Trần Nam Dũng* (PBC, **Nghệ An**), *Phùng Đức Tuấn* (PTNK **Hải Dương**), *Nguyễn Đức Mạnh* (Đông Anh, **Hà Nội**) ...)

Giả sử $Q(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$. Khi đó $[Q'(x)]^2 - 2Q(x)\,Q''(x) \equiv b^2 - 4ac < 0$. Theo giả thiết thì tồn tại các nhị thức bậc nhất $G(x)$ và $R(x)$ sao cho $P(x) = Q(x)\,G(x) + R(x)$

(Chú ý : { $Q''(x) \equiv 2a$; $R'(x) \equiv const$)

Suy ra :

$$y = G(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

$$y'' = \left(\frac{R(x)}{Q(x)}\right)''$$

Vậy $y''(x) = 0 \Leftrightarrow 2R(x)\,[Q'(x)]^2 - \\ - 2Q(x)\,Q'(x)\,R'(x) - Q(x)\,R(x)\,Q''(x) = 0$

$$\leftrightarrow \frac{2R(x)}{Q(x)}\left((Q'(x))^2 - 2Q(x)\,Q''(x)\right) = \\ = 3R(x)\,Q''(x) + 2Q'(x)\,R'(x)$$

$$\leftrightarrow 2y(x)\,(b^2-4ac) = 3R(x)\,Q''(x) + 2Q'(x)\,R'(x)$$

$$\leftrightarrow y(x) = \frac{1}{2(b^2-ac)}(3R(x)Q''(x) + 2Q'(x)\,R'(x))$$

Nhận xét rằng bậc của :

$(3R(x)\,Q''(x) + 2Q'(x)\,R'(x)) \leq 1$,

nên $3R(x)\,Q''(x) + 2Q'(x)\,R'(x) \equiv \alpha x + \beta$.

Vậy $y''(x) = 0$

$$\leftrightarrow y(x) = \frac{1}{2(b^2-4ac)}(\alpha x + \beta), \text{ đpcm.}$$

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt. *Lê Văn An* (PBC, **Nghệ An**), *Trần Đức Thuận* (PTNK, Quảng Bình) *Hà Duy Hưng* (PTNK **Hải Phòng**), *Hoàng Trung Tuyến* (Hà Trung, **Thanh Hóa**), *Trần Huỳnh Thế Khanh* (PTTH Nguyễn Thái Bường, Trà Vinh), *Nguyễn Đăng Triển* 12T (Cao Lãnh, **Đồng Tháp**) *Lê Hoàng Tuân* (PTTH Hùng Vương, **TP HCM**).

NGUYỄN VĂN MẬU

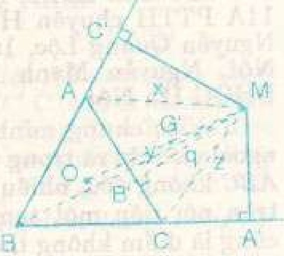
Bài T9/235. *Giả sử M là một điểm bất kỳ nằm trong mặt phẳng của một tam giác đều ABC. Gọi x, y, z là khoảng cách từ M đến các đỉnh và p, q, r là khoảng cách từ M đến các cạnh của tam giác. Chứng minh rằng ta luôn có :*

$$p^2 + q^2 + r^2 \geq \frac{1}{4}(x^2 + y^2 + z^2)\,; \qquad (*)$$

Đồng thời hãy chứng tỏ rằng bất đẳng thức (*) là đặc trưng của các tam giác đều, theo nghĩa : Với mọi tam giác ABC không đều, ta luôn tìm được một điểm M trong mặt phẳng tam giác sao cho (*) không đúng.

Lời giải. (Dựa theo Vũ Duy Tuấn, 11A, PTTHNK Ngô Sĩ Liên, **Bắc Giang**).

a) Nếu điểm M trùng với một trong các đỉnh A, B, C thì dễ thấy (*) đúng. Xét trường hợp M không trùng với bất kỳ đỉnh nào của tam giác. Gọi A', B', C', lần lượt là hình chiếu vuông góc của M



trên các đường thẳng chứa các cạnh BC, CA, AB và G' là trọng tâm của hệ ba điểm $\{A', B', C'\}$. Theo công thức Lépnít, ta có :

$$MA'^2 + MB'^2 + MC'^2 = 3MG'^2 + \frac{1}{3}(B'C'^2 + C'A'^2 + A'B'^2) \geq \frac{1}{3}(B'C'^2 + C'A'^2 + A'B'^2) \; ; (1)$$

Mặt khác, tam giác $AB'C'$ nội tiếp đường tròn đường kính $MA = x$, có góc $B'AC' = 60^o$ hoặc $= 120^o$, nên ta được (định lý hàm sin) :

$B'C' = MA \sin 60^o$ $(= MA \sin 120^o) = \frac{x\sqrt{3}}{2}$, hay là : $B'C'^2 = \frac{3x^2}{4}$;

Chứng minh tương tự :

$$C'A'^2 = \frac{3y^2}{4} \text{ và } A'B'^2 = \frac{3z^2}{4} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta được :

$$p^2 + q^2 + r^2 = \frac{1}{4}(x^2 + y^2 + z^2) + 3MG'^2 \quad (3)$$

Do đó ta thu được B.Đ.T. (*) (đpcm).

Dễ thấy rằng dấu đẳng thức đạt được khi và chỉ khi M là điểm sao cho M trùng với trọng tâm G' của tam giác chiếu $A'B'C'$ của nó trên tam giác ABC, và do đó $M \equiv G$, điểm đối trọng tâm của tam giác đều ABC, nghĩa là $M \equiv$ tâm O của tam giác đều ABC.

b) Giả sử tam giác ABC không đều. Chọn M là trọng tâm tam giác. Khi đó : $\frac{1}{4}x^2 = \left(\frac{1}{2}MA\right)^2 = MA_o^2 \geq MA'^2 = p^2$. Tương tự : $\frac{1}{4}y^2 \geq q^2$ và $\frac{1}{4}z^2 \geq r^2$. Vì tam giác ABC không đều nên, trong ba bất đẳng thức trên phải có ít nhất một B.Đ.T. thực sự và do đó ta có :

$$p^2 + q^2 + r^2 < \frac{1}{4}(x^2 + y^2 + z^2)$$

nghĩa là (*) không đúng. Nói khác đi là, B.Đ.T (*) là đặc trưng cho tam giác đều.

Nhận xét. 1. Có thể thiết lập hệ thức sau :

$4(p^2 + q^2 + r^2) - (x^2 + y^2 + z^2) = 3OM^2$, $(\forall M)$(**)

trong đó O là tâm của tam giác đều ABC.

Từ đó suy ra B.Đ.T (*) cần chứng minh là hệ quả trực tiếp của hệ thức (**) ở trên. Có thể chứng minh (**) từ hệ thức Véctơ :

$$\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO} (= 3\overrightarrow{MG'})$$

(và do đó trọng tâm G' của hệ ba điểm $\{A', B', C'\}$ là trung điểm của OM)

2. Các bạn sau đây có lời giải tốt hơn cả, cũng là những bạn đã thiết lập được hệ thức (**) như trên đã nói : Nguyễn Minh Phương, 11A PTTH chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ**, Nguyễn Quang Lộc, 10A ĐHSP – ĐHQG **Hà Nội**, Nguyễn Mạnh Hà, 10A ĐHKHTN – ĐHQG **Hà Nội**.

3. Việc chứng minh phần b) của bài toán, ngoài việc chỉ ra trọng tâm G của một tam giác ABC không đều, nhiều bạn chỉ ra tâm I đường tròn nội tiếp một tam giác ABC không đều cũng là điểm không thỏa mãn B.Đ.T. (*) và do đó B.Đ.T. (*) là một tính chất đặc trưng của tam giác đều.

4. Bạn Nguyễn Minh Phương và bạn Bùi Minh Thiên, 12c, PTTH Chuyên, **Trà Vinh** (cả hai bạn này đều sử dụng phương pháp tọa độ) còn đề xuất và giải đúng bài toán tương tự trong không gian đối với tứ diện đều.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài T10/235. *Giả sử M là một điểm thuộc mặt BCD của một tứ diện ABCD. Một mặt phẳng bất kỳ cắt các cạnh AB, AC, AD và đoạn AM theo thứ tự ở B', C', D' và M'. Chứng minh rằng :*

$$AM + AM' < \max\{AB + AB', AC + AC', AD + AD'\}$$

Lời giải. (của Ngô Anh Tuấn, 10A, CT, ĐHSP Vinh). Để giải bài toán này, trước hết ta giải bài toán tương tự trong hình học phẳng.

a) "Giả sử M là một điểm thuộc cạnh BC của một tam giác ABC. Một đường thẳng bất kỳ cắt các cạnh AB, AC và đoạn AM theo thứ tự ở B', C' và M'. Thế thì ta có :

$$AM + AM' < \max\{AB + AB', AC + AC'\} \; (1)$$

b) Đặc biệt, nếu đường thẳng đi qua A cũng tức là B', C' và M' trùng nhau ở A ; khi đó ta được :

$$AM < \max\{AB, AC\} \quad (2)$$

Thật vật, nếu $AM \perp BC = M$ thì $AM < AB$ và $AM < AC$ và ta được (2). Nếu $AM \perp BC$ thì trong hai góc AMB và AMC át phải có một góc tù, do đó AM nhỏ hơn một trong hai cạnh AB hoặc AC tùy theo góc tù đó đối diện với AB hay AC và ta thu được (2).

Bây giờ ta xét mệnh đề a). Xét hai trường hợp.

1. Nếu $B'C' \parallel BC$, không mất tổng quát, giả sử $AB' = \max\{AB', AC'\}$. Suy ra : $AB = \max\{AB, AC\}$ và $AM' < AB'$, $AM < AB$. Do đó :

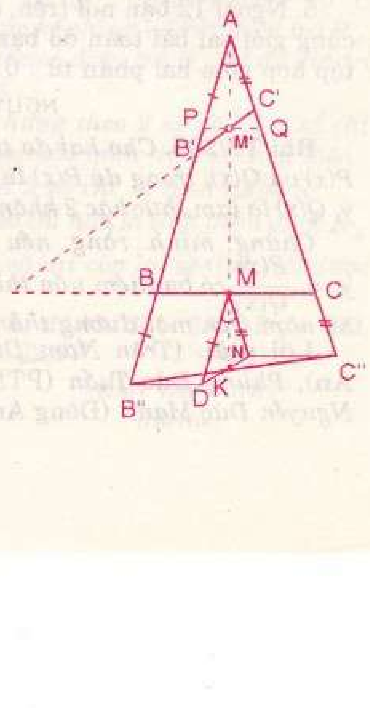
$$AM + AM' < AB + AB' = \max\{AB + AB', AC + AC'\}$$

và ta thu được (1).

2) $B'C' \parallel BC$, không mất tổng quát giả sử giao điểm của các đường thẳng BC và $B'C'$ nằm trên các tia $[CB)$ và $[C'B')$ (x. hình vẽ). Qua M' dựng đường thẳng $PQ \parallel BC$, cắt AB và AC lần lượt ở P và Q, ta được :

$$\frac{MB}{MC} = \frac{M'P}{M'Q} = \frac{s(AM'P)}{s(AM'Q)} < \frac{s(AM'B')}{s(AM'C')} = \frac{M'B'}{M'C'}$$

Trên các tia $[AB)$ và $[AC)$ lần lượt lấy hai điểm B'' và C'' sao cho $B'B'' = AB$, $C'C'' = AC$ và do đó : $BB'' = AB'$, $CC'' = AC'$. Sau đó dựng hai hình bình hành $MBB''D$ và $MCC''E$, gọi $N = (AM) \cap [DE]$ và $K = B''C'' \cap [DE]$.



Dễ thấy rằng $\overset{\Delta}{MDE} = \overset{\Delta}{AB'C'}$ và $MN = AM'$, do đó : $AN = AM + AM'$. Ta có :

$$\frac{KD}{KE} = \frac{DB''}{EC''} = \frac{MB}{MC} < \frac{M'B'}{M'C'} = \frac{ND}{NE}$$

Vì K và N đều thuộc đoạn $[DE]$ nên suy ra $KE > NE$ và do đó $N \in [KE]$, cũng tức là điểm N thuộc miền tam giác $AB''C''$ (vì đoạn thẳng KE nằm trong tam giác $AB''C''$). Từ đó ta được :

$AN < \max\{AB'', AC''\}$, hay : $AM + AM' < \max\{AB + AB', AC + AC'\}$

Bây giờ ta trở lại bài toán. Gọi $N = (BM) \cap [CD]$, $N' = (B'M') \cap [C'D']$ thế thì $N' \in (AN) = mp(ABM) \cap mp(ACD)$. Áp dụng mệnh đề a) vào hai tam giác ABN và ACD, ta được :

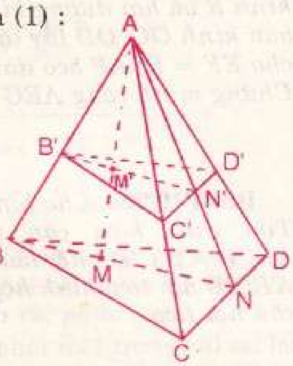
$AM + AM' < \max\{AB + AB', AN + AN'\}$ (3)

$AN + AN' < \max\{AC + AC', AD + AD'\}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra (1) :

$AM + AM' < \max\{AB + AB', AC + AC', AD + AD'\}$

đ.p.c.m.



Nhận xét. 1. Ngoài lời giải thông thường như trên, bạn Lê Hồng Hà, 11A, CT ĐHSP Vinh đã giải đúng và khá gọn bài toán trên bằng phương pháp véctơ. $M \in [BC] \Rightarrow \exists\, \alpha \in \mathbf{R} : (0 \le \alpha < 1)$ sao cho : $\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB} + + (1-\alpha)\overrightarrow{AC}$ và do đó : $\exists\, \alpha, \beta \in \mathbf{R} : 0 \le \alpha, \beta$ và $0 \le \alpha + \beta \le 1$ sao cho :

$\overrightarrow{AM'} = (1-\beta)\overrightarrow{AB'} + \beta\overrightarrow{AC'}$

Từ đó suy ra :

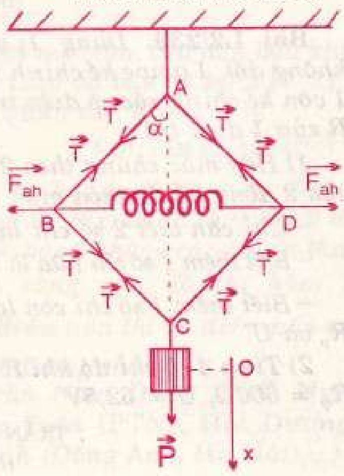
$$AM + AM' < \frac{1+\alpha-\beta}{2}(AB + AB') + \frac{1+\beta-\alpha}{2}(AC + AC') < \max(AB + AB', AC + AC')$$

Sau cùng, sử dụng kết quả này vào việc giải bài toán trong không gian.

2. Lời giải của nhiều bạn khá dài dòng, không gọn (kể cả sử dụng phương pháp véctơ).

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài L1/235. *Một hệ dao động như hình vẽ. Khung ABCD gồm các thanh nhẹ có thể di động nhờ các khớp ở đỉnh. Ở vị trí cân bằng khung có dạng hình thoi, góc ở đỉnh là $2\alpha_o$. Bóp nhẹ hai đầu B, D rồi thả ra.*



1. Chứng minh vật dao động điều hòa.

2. Lập biểu thức tính tần số và chu kì dao động.

Hướng dẫn giải. 1. Chọn trục Ox như hình vẽ, gốc O là vị trí cân bằng. Ở vị trí cân bằng của vật, lò xo bị nén một đoạn Δl_o, gọi ở đỉnh hình thoi là $2\alpha_o$ và $P + 2T_o = 0$, $F_{dho} + 2T_o = 0$. Suy ra $P - 2T\cos\alpha_o = 0$, $2T_o\sin\alpha_o - F_{dh} = 0$, từ đó $mg - \frac{k\,\Delta l_o}{tg\alpha_o} = 0$ (1) (vì $F_{dho} = k\Delta l_o$).

Khi bóp nhẹ α đầu B, D, lò xo bị nén thêm một đoạn x' vật có li độ x và góc ở đỉnh hình thoi là α, ta có $x' = \frac{x}{tg\alpha}$. Tương tự như trên $\vec{P} + 2\vec{T} = m\vec{a}$, $\vec{F}_{dh} + 2\vec{T} = 0$, suy ra $P - 2T\cos\alpha = ma = mx''$; $2T\sin\alpha - k(\Delta l_o + x') = 0$, từ đó $mg - \frac{k(\Delta l_o + x')}{tg\alpha} = mx''$ (2). Từ (1) và (2) rút ra $mx'' = -\frac{kx'}{tg\alpha}$ (3). Vì $x' \ll BD$ nên $\alpha \approx \alpha_o$, ta được $mx'' = -\frac{k}{tg^2\alpha}x$ hay $x'' + \omega^2 x = 0$ với $\omega = \frac{1}{tg\alpha_o}\sqrt{\frac{k}{m}}$. Vậy vật dao động điều hòa với tần số góc ω.

2. Chu kì dao động của vật

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi tg\alpha_o\sqrt{\frac{m}{k}}$$

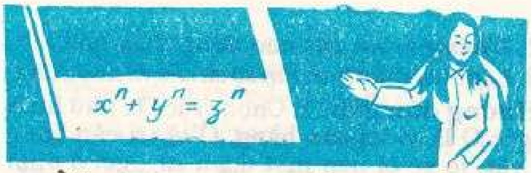
Tần số dao động $f = \frac{1}{2\pi tg\alpha_o}\sqrt{\frac{k}{m}}$.

Nhận xét. Các em có lời giải đúng và tốt : *Trần Hoàng Quân*, 11A$_2$, trường Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng**, *Hoàng Đức Thịnh* 12A$_3$, PTTH Trần Hưng Đạo, **Nam Định** ; *Tạ Thành Sơn*, 11 Lí, PTTH Năng khiếu, Trần Phú, **Hải Phòng** ; *Nguyễn Việt Hùng*, 12B Chuyên Lí, PTTH Chuyên Tuyên Quang, **Tuyên Quang**, *Nguyễn Quang Trường*, 12CL, Chuyên Phan Bội Châu, **Nghệ An** ; *Trần Huỳnh Thế Khanh*, 12A$_1$, PTTH Phạm Thái Bường, **Trà Vinh** ; *Lê Văn Lịch* 11B$_1$, PTTH Lê Văn Hưu, Thuận Hóa, **Thanh Hóa** ; *Nguyễn Văn Nghĩa*, 12A, PTTH Hà Thuyên, Yên Phong, **Bắc Ninh** ; *Lê Hoài Ân*, 11 Lí, trường Lương Văn Thanh, **Phú Yên**, *Nguyễn Thành Hưng*, 11 Lí, Chuyên Lê Khiết, **Quảng Ngãi** ; *Trần Mai Sơn*, 11CL Năng khiếu **Quảng Bình** ; *Phạm Văn Tập*, 11C$_1$, PTTH Vĩnh Bảo, **Hải Phòng** ; *Nguyễn Phương Dung*, 11CL, Quốc học, **Huế** ; *Nguyễn Cảnh Nguyên* 12 CL, Phan Bội Châu **Vinh (Nghệ An)** ; *Lê Thanh Long*, 12A$_2$ PTTH Phước Minh, **Tây Ninh**.

MAI ANH

Bài L2/235. *Cho tụ điện AB điện dung $C_1 = 2\mu F$ và điện tích $q_1 = 10^{-4}$ C (bản A mang điện dương) và tụ điện DE điện dung $C2 = 3\mu F$ và điện tích $q_2 = 3.10^{-4}\ \mu F$ (bản D mang điện dương). Hãy xác định hiệu điện thế U_{AB} và U_{DE} của các tụ điện trên và nói rõ bản nào mang điện dương trong các trường hợp sau đây :*

(xem tiếp trang 11)



ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/239 : *Cho ba số thực a, b, c không âm thỏa mãn :*

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

Chứng minh rằng : $a + b + c \leq 2abc + \sqrt{2}$

DOÃN QUANG MẠNH
(Hải Phòng)

Bài T2/239 : *Xác định x, y để biểu thức sau đạt giá trị nhỏ nhất :*

$$x^4 - 8xy - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4 + 1997$$

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP Hồ Chí Minh)

Bài T3/239 : *Chứng minh rằng, có thể dùng 8 màu để tô tất cả các đỉnh của hai con xúc xắc sao cho hai điều kiện sau được đồng thời thỏa mãn :*

1) Trong mỗi con xúc xắc, không có 2 đỉnh nào được tô cùng màu.

2) Tổng số màu ở hai mặt bất kỳ (một mặt thuộc xúc xắc này, một mặt thuộc xúc xắc kia) không vượt quá 6.

ĐẶNG KỲ PHONG
(Hà Nội)

Bài T4/239. *Cho tam giác cân ABC (AB = AC). Biết* $\widehat{BAC} = 20^o$, $AB = AC = b$, $BC = a$. *Chứng minh rằng :* $a^3 + b^3 = 3ab^2$

ĐOÀN VĂN TRÚC
(Quảng Ngãi)

Bài T5/239. *Cho nửa đường tròn đường kính AB, bán kính R. C là 1 điểm chuyển động trên nửa đường tròn đó. Hạ CH ⊥ AB. Gọi* O_1 *và* O_2 *là tâm các đường tròn nội tiếp trong các tam giác AHC và BHC. Tìm vị trí của điểm C để đoạn* O_1O_2 *có độ dài lớn nhất và tính độ dài lớn nhất đó theo R.*

NGUYỄN KHÁNH NGUYÊN
(Hải Phòng)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/239. *Chứng minh rằng nếu một cấp số nhân có n số hạng (n ⩾ 3) là các số tự nhiên phân biệt và công bội cũng là một số tự nhiên thì tổng của tất cả n số hạng đó không thể là một lũy thừa của 5.*

TRẦN DUY HINH
(Bình Định)

Bài T7/239. *Cho* $0 \leq a, b, c, d \leq 1$. *Chứng minh rằng :*

$$\frac{a}{bcd+2} + \frac{b}{cda+2} + \frac{c}{dab+2} + \frac{d}{abc+2} \leq$$
$$\leq 1 + \frac{1}{abcd+2}$$

ĐÀM VĂN NHỈ
(Thái Bình)

Bài T8/239. *Biết rằng đa thức* $f(x) = x^{2000} + a_1x^{1999} + a_2x^{1998} + ... + a_{1999}x + a_{2000}$ *có 2000 nghiệm thực khác nhau và* $a_{1995} = 1995$, $a_{1997} = 1997$. *Chứng minh rằng* $|a_{1996}| > 1996$.

PHẠM NGỌC BỘI
(Nghệ An)

Bài T9/239. *Cho đường tròn tâm O, bán kính R và hai đường kính AB ⊥ CD. Trên hai bán kính OC, OD lấy lần lượt 2 điểm E, F sao cho EF = R, AF kéo dài cắt đường tròn tại G. Chứng minh rằng AEG là một tam giác nhọn.*

NGÔ VĂN HIỆP
(Hà Nội)

Bài T10/239. *Cho hình hộp ABCDA'B'C'D'. Tìm điều kiện cần và đủ về hình hộp ABCD.A'B'C'D' để hai tứ diện AB'CD' và A'BC'D nội tiếp hình hộp đó có cùng tâm hình cầu nội tiếp.*

NGUYỄN VĂN NGOAN
(Tiền Giang)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/239. *Thanh dài AB gồm 2 mẩu đồng chất có độ dài như nhau (AH = HB) với trọng lượng P và 2P. Hai đầu cuối A, B của thanh buộc 2 sợi chỉ OA = OB, O là điểm treo. Khi cân bằng thanh AB tạo với phương nằm ngang một góc bao nhiêu ? AB = OA = OB = a.*

NGUYỄN CKÔNG MỸ
(Hà Tĩnh)

Bài L2/239. *Dùng 1 nguồn điện có U không đổi, 1 ampe kế chính xác có điện trở* R_A, *1 vôn kế chính xác có điện trở* R_v, *để đo giá trị R của 1 điện trở.*

1) Hãy mắc chúng theo 2 sơ đồ, có 4 số chỉ của 2 đồng hồ đo thỏa mãn đủ các điều kiện :

– Chỉ cần biết 2 số chỉ là tính được R

– Biết thêm 1 số chỉ nữa là tính thêm được R_A

– Biết thêm 1 số chỉ còn lại sẽ tính nốt được R_v *và U.*

2) Tính 4 số chỉ đó khi $R = 25\Omega$, $R_A = 1\Omega$, $R_v = 600\Omega$, $U = 62{,}5V$

TRẦN VĂN MINH
(Hà Nội)

Problems in this issue

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/239. *Three non negative real numbers a, b, c satisfy the condition*

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Prove that : $a + b + c \leq 2abc + \sqrt{2}$

T2/239. *Determine x, y so that the expression* $x^4 - 8xy - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4 + 1997$ *attains its least value.*

T3/239. *Prove that one can colour the vertices of two dice by using 8 colours so that the following two conditions are simultaneously satisfied : 1) no two vertices of one dice have the same colour,*

2) the number of colours used to colour the vertices of two faces of two dice (one face of one dice, the other of the other dice) does not exceed 6.

T4/239. *Let be given an isosceles triangle ABC (AB = AC) with* $\widehat{BAC} = 20^o$, $AB = AC = b$, $BC = a$. *Prove that :* $a^3 + b^3 = 3ab^2$

T5/239. *C is a point on the semicircle with diameter AB and radius R. Let H be the orthogonal projection of C on AB and* O_1 *and* O_2 *be respectively the centers of the incircles of the triangles AHC and BHC. Determine the position of C so that the measure of segment* O_1O_2 *attains its greatest value and calculate this value in terms of R.*

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/239. *Prove that if a geometric progression has n terms* $(n \geq 3)$ *which are distincs whole numbers and the common ratio of which is also a whole number then the sum of its terms cannot be a power of 5.*

T7/239. *Let* $0 \leq a, b, c, d \leq 1$. *Prove that :*

$$\frac{a}{bcd+2} + \frac{b}{cda+2} + \frac{c}{dab+2} + \frac{d}{abc+2} \leq$$
$$\leq 1 + \frac{1}{abcd+2}$$

T8/239. *Prove that if the polynomial*

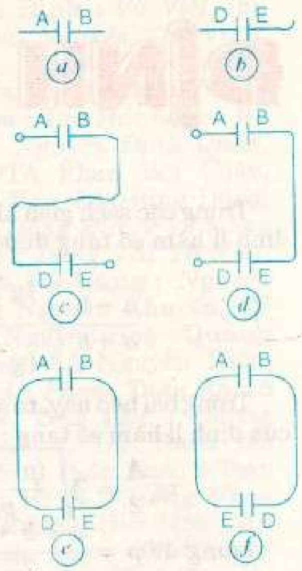
$$f(x) = x^{2000} + a_1x^{1999} + a_2x^{1998} + ... + a_{1999}x + a_{2000}$$

has 2000 real distinct roots and if $a_{1995} = 1995$, $a_{1997} = 1997$ *then* $|a_{1996}| > 1996$.

T9/239. *Let be given a circle with center O, radius R and two perpendicular diameters AB, CD. Let E, F be two points respectively on the radii OC, OD such that EF = R. The line AF cuts the circle again at G. Prove that AEG is an acute triangle.*

T10/239. *Find a necessary and sufficient condition on the parallelepiped ABCDA'B'C'D' so that the inscribed spheres of the tetraludra AB'CD' and A'BC'D have the same center.*

GIẢI BÀI.. *(tiếp theo trang 9)*



a) Các tụ AB và DE di tách riêng (Hình a và b) ;

b) Bản B nối với bản D bằng dây dẫn ;

c) B nối với E

d) A nối với D và B nối với E

e) A nối với E và B nối với D.

Hướng dẫn giải

a) $U_{AB} = U_1 = \frac{q_1}{C_1} = 50V$, bản A mang điện dương

$U_{DE} = U_2 = \frac{q_2}{C} = 100V$, bản D mang điện dương

b) Các bản A và E cô lập nên điện tích của bản A vẫn là q_1, mà bản E vẫn là $-q_2$. Vậy điện tích của C_1 vẫn là q_1, của C_2 vẫn là q_2 nên U_{AB} vẫn bằng $U_1 = 50V$ và U_{DE} vẫn bằng $U_2 = 100V$. Các bản mang điện dương vẫn là A và $D : U_{AE} = U_{AB} + U_{DE} = 150V$.

c) Lập luận tương tự như b) ta có $U_{AB} = U_1 = 50V$; $U_{DE} = U_2 = 100V$. Các bản mang điện dương vẫn là A và D : $U_{AD} = U_{AB} + U_{ED} = -50V$

d) Gọi q'_1 và q'_2 lần lượt là điện tích của các bản A và D sau khi nối A với D và B với E. Theo định luật bảo toàn điện tích ta có $q'_1 + q'_2 = q_1 + q_2 \rightarrow C_1U + C_2U = C_1U_1 + C_2U_2$ (với $U = U'_{AB} = U'_{DE}$ sau khi nối dây). Suy ra

$$U = \frac{C_1U_1 + C_2U_2}{C_1 + C_2} = 80V.$$ Các bản mang điện dương là A và D

e) Vì $q_2 > q_1$ nên khi nối A với E và B với D thì sau khi trao đổi điện tích với nhau, các bản B và D đều mang điện dương với các giá trị lần lượt là q'_1 và q'_2, còn các bản A và E đều mang điện âm với các giá trị lần lượt là $-q'_1$ và $-q'_2$. Theo định luật bảo toàn điện tích : $q'_2 + q'_1 = q_2 - q_1 \rightarrow C_2U + C_1U = C_2U_2 - C_1U_1$ với $U = U'_{BA} = U'_{DE}$ sau khi nối dây :

$$U = \frac{C_2U_2 - C_1U_1}{C_1 + C_2} = 40V$$

Nhận xét. Các em có lời giải đầy đủ và đúng : *Nguyễn Quang Tường*, 12CL, chuyên Phan Bội Châu, **Vinh (Nghệ An)** ; *Ngô Đắc Việt*, 11CL, Quốc học **Huế** ; *Phan Văn Đức* 11 Lí, chuyên Phan Bội Châu, Vinh, **Nghệ An** ; *Phạm Văn Tập*, $10C_1$, PTTH Vĩnh Bảo, **Hải Phòng** ; *Lê Thanh Minh*, 12CL, Quốc học **Huế** ; *Trần Huỳnh Thế Khanh*, $12A_1$, PTTH Phạm Thái Bường, Thị xã **Trà Vinh**.

MAI ANH

Dành cho các bạn chuẩn bị thi vào Đại học

ĐỊNH LÍ HÀM SỐ TANG

LÊ QUỐC HÁN
(*Nghệ An*)

Trong các sách giáo khoa phổ thông trước kia, định lí hàm số tang được phát biểu dưới dạng :

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\mathrm{tg}\dfrac{A-B}{2}}{\mathrm{tg}\dfrac{A+B}{2}}$$

Trong bài báo này, ta sẽ nêu lên một dạng khác của định lí hàm số tang : Trong ΔABC, ta có :

$$\mathrm{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \qquad (*)$$

trong đó $p=\dfrac{a+b+c}{2}$.

Công thức (*) có nhiều phương pháp chứng minh. Sau đây, ta chứng minh (*) bằng cách dùng định lí hàm số côsin. Ta có :

$$\mathrm{tg}^2\frac{A}{2}=\frac{\sin^2\dfrac{A}{2}}{\cos^2\dfrac{A}{2}}=\frac{1-\cos A}{1+\cos A}=$$

$$\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right):\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)=$$

$$\frac{a^2-(b-c)^2}{(b+c)^2-a^2}=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{(b+c+a)(b+c-a)}=$$

$$\frac{(2p-2c)(2p-2b)}{2p(2p-2a)}=\frac{(p-c)(p-b)}{p(p-a)}$$

$$\Rightarrow \mathrm{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$ (vì $\dfrac{A}{2}$ là góc nhọn nên $\mathrm{tg}\dfrac{A}{2}>0$).

Sau đây là vài thí dụ áp dụng (*) :

Thí dụ 1 : *Cho tam giác ABC có* $c=\dfrac{1}{2}(a+b)$. *Chứng minh :* $\mathrm{tg}\dfrac{A}{2}.\mathrm{tg}\dfrac{B}{2}=\dfrac{1}{3}$

Chứng minh : Theo (*), ta có :

$$\mathrm{tg}\frac{A}{2}.\mathrm{tg}\frac{B}{2}=\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}\times\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}=\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow\frac{p-c}{p}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow 3p-3c=p\Leftrightarrow 2p=3c\Leftrightarrow$$

$$a+b+c=3c\Leftrightarrow a+b=2c$$

$$\Leftrightarrow c=\frac{1}{2}(a+b).$$

Thí dụ 2 : *Xác định hình dạng tam giác ABC, biết :* $(p-b)\mathrm{cotg}\dfrac{C}{2}=p\,\mathrm{tg}\dfrac{B}{2}$

Giải : Theo (*), từ giả thiết suy ra :

$$(p-b)\sqrt{\frac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}}=p\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}=\frac{p(p-a)(p-c)}{p-b}$$

$$\Leftrightarrow(p-b)^2=(p-a)^2\Leftrightarrow p-b=p-a$$

$$\Leftrightarrow a=b\Leftrightarrow\Delta ABC \text{ cân tại } C$$

(Chú ý : $p-a=\dfrac{1}{2}(b+c-a)>0$)

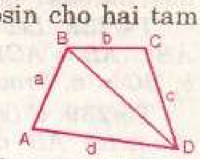
Công thức (*) được mở rộng cho tứ giác như sau :

Thí dụ 3 : *Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O).* $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$. *Chứng minh* $\mathrm{tg}\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)}}$

với $p=\dfrac{a+b+c+d}{2}$

Giải : Vì $ABCD$ là tứ giác nội tiếp nên $\hat{A}+\hat{C}=180^0\Rightarrow\cos A=-\cos C$.

Áp dụng định lí hàm số côsin cho hai tam giác ABD và BCD, ta có



$$\begin{cases}BD^2=a^2+d^2-2ad\cos A\\ BD^2=b^2+c^2-2bc\cos C\end{cases}$$

$$=b^2+c^2+2bc\cos A$$

nên $a^2+d^2-2ad\cos A=b^2+c^2+2bc\cos A$

$$\Rightarrow\cos A=\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)} \qquad (**)$$

Thay (**) vào công thức : $\mathrm{tg}^2\dfrac{2A}{2}=\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}$, ta có điều phải chứng minh.

Bây giờ, các bạn hãy áp dụng các kết quả trên để giải các bài toán sau :

Bài 1 : *Chứng minh rằng trong tam giác ABC, ta có*

$$\mathrm{tg}\frac{A}{2}.\mathrm{tg}\frac{B}{2}+\mathrm{tg}\frac{B}{2}.\mathrm{tg}\frac{C}{2}+\mathrm{tg}\frac{C}{2}.\mathrm{tg}\frac{A}{2}=1$$

Bài 2 : *Xác định hình dạng tam giác ABC, biết rằng :* $\mathrm{tg}^2\dfrac{A}{2}+\mathrm{tg}^2\dfrac{B}{2}+\mathrm{tg}^2\dfrac{C}{2}=1.$

Bài 3 : *Xác định hình dạng tam giác ABC biết rằng :* $S=\dfrac{1}{4}(a-b+c)(a+b-c)$

(Đề 38, Bộ đề tuyển sinh)

Bài 4 : *Xác định hình dạng tam giác ABC, biết rằng :* $r_a=r+r_b+r_c$

Bài 5 : *Chứng minh công thức tính diện tích của tứ giác nội tiếp*

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

(xem kí hiệu ở thí dụ 3)

Bài 6 : *Cho* ΔABC $(AB<AC)$. *AD là phân giác trong và AM là trung tuyến của tam giác đó. Chứng minh*

$$\mathrm{tg}\widehat{DAM}=\mathrm{tg}^2\frac{A}{2}.\mathrm{tg}\frac{B-C}{2}$$

(Đề thi vào Đại học khối A, 1986).

Đề toán thi tuyển sinh phổ thông trung học chuyên
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN ĐHQG HÀ NỘI

VÒNG I. *(Thời gian : 180 phút)*

CHUNG CHO CÁC MÔN

Câu I. Cho $x > 0$, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)^6 - \left(x^6+\frac{1}{x^6}\right) - 2}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^3 + x^3 + \frac{1}{x^3}}$$

Câu II. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{2 - \frac{1}{y}} = 2 \\ \frac{1}{\sqrt{y}} + \sqrt{2 - \frac{1}{x}} = 2 \end{cases}$$

Câu III. Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương ta có :

$$n^3 + 5n \,\vdots\, 6$$

Câu IV. Cho $a, b, c > 0$, chứng minh rằng :

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq ab + bc + ca$$

Câu V. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a. Gọi M, N, P, Q là các điểm bất kỳ lần lượt nằm trên các cạnh AB, BC, CD, DA.

1) Chứng minh rằng :

$$2a^2 \leq MN^2 + NP^2 + PQ^2 + QM^2 \leq 4a^2$$

2) Giả sử M là một điểm cố định cho trước trên cạnh AB. Hãy xác định vị trí của các điểm N, P, Q lần lượt trên các cạnh BC, CD, DA sao cho $MNPQ$ là một hình vuông.

ĐÁP ÁN

Câu I : Ta có

$$P = \frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)^6 - \left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)^2}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^3 + \left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)}$$

$$= \left(x+\frac{1}{x}\right)^3 - \left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)$$

$$= 3\left(x+\frac{1}{x}\right) \geq 6 \ (x > 0)$$

Vậy $P_{\min} = 6$, đạt được khi $x = 1$.

Câu II : Đặt $X = \frac{1}{x}, Y = \frac{1}{y}$ $(x > 0, y > 0)$.

Ta có : $\sqrt{X} + \sqrt{2-Y} = \sqrt{Y} + \sqrt{2-X}$ nhận thấy :

– nếu $X > Y$ thì $\sqrt{X} + \sqrt{2-Y} > \sqrt{Y} + \sqrt{2-X}$

– nếu $X < Y$ thì $\sqrt{X} + \sqrt{2-Y} < \sqrt{Y} + \sqrt{2-X}$

Vậy phải có $X = Y$

Với $X = Y : \sqrt{X} + \sqrt{2-X} = 2$

$\Leftrightarrow X + (2-X) + 2\sqrt{X(2-X)} = 4$

$\Leftrightarrow \sqrt{X(2-X)} = 1$

$\Leftrightarrow X^2 - 2X + 1 = 0$

$\Leftrightarrow X = 1$

$\Rightarrow X = Y = 1 \Rightarrow x = y = 1.$

vậy nghiệm của hệ là $x = y = 1$.

Câu III. Ta có : $n^3 + 5n = n^3 - n + 6n$

$= n(n^2 - 1) + 6n$

$= (n-1)n(n+1) + 6n$

Vậy $n^3 + 5n \,\vdots\, 6$.

Câu IV. Dễ dàng chứng minh với $a, b > 0$:

$a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$

$$\Rightarrow \frac{a^3}{b} + b^2 \geq a(a+b) \quad (1)$$

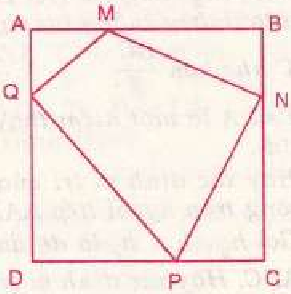
Hoàn toàn tương tự :

$$\frac{b^3}{c} + c^2 \geq b(b+c) \quad (2)$$

$$\frac{c^3}{a} + a^2 \geq c(c+a) \quad (3)$$

Cộng (1), (2), (3) ta được điều phải chứng minh

Câu V.



Chú ý rằng $\forall x, y \geq 0$ ta luôn có :

$$(x+y)^2 \geq x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}(x+y)^2 (*)$$

$$\text{Ta có : } \begin{cases} MN^2 = MB^2 + NB^2 \\ NP^2 = NC^2 + PC^2 \\ PQ^2 = PD^2 + QD^2 \\ QM^2 = QA^2 + MA^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow MN^2 + NP^2 + PQ^2 + QM^2 = (MB^2 + MA^2) + (NB^2 + NC^2) + (PC^2 + PD^2) + (QD^2 + QA^2)$

Áp dụng bất đẳng thức (*) ta được :

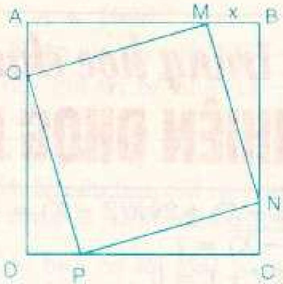
$2a^2 \leq MN^2 + NP^2 + PQ^2 + QM^2 \leq 4a^2$

2) Giả sử $MB = x$. Ta chọn N, P, Q sao cho :

$NC = x$

$DP = x$

$QA = x$



Dễ dàng chứng minh $MNPQ$ là hình vuông. Bài toán có duy nhất nghiệm.

VÒNG II. *(Thời gian : 180 phút)*

RIÊNG CHO CHUYÊN TOÁN VÀ CHUYÊN TIN

Câu I. *Giải phương trình*

$$(\sqrt{x-1}+1)^3 + 2\sqrt{x-1} = 2 - x$$

Câu II. *Giải hệ phương trình :*

$$\begin{cases} x - \sqrt{y} = 1 \\ y - \sqrt{z} = 1 \\ z - \sqrt{x} = 1 \end{cases}$$

Câu III. *Cho x, y là những số nguyên dương thay đổi thỏa mãn điều kiện :*

$$x + y = 201$$

Hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $P = x(x^2+y) + y(y^2+x)$

Câu IV. *Cho đoạn thẳng BC và đường thẳng (d) song song với BC. Biết rằng khoảng cách giữa đường thẳng (d) và đường thẳng đi qua BC nhỏ hơn* $\dfrac{BC}{2}$.

Giả sử A là một điểm thay đổi trên đường thẳng (d).

1) Hãy xác định vị trí của điểm A để bán kính vòng tròn ngoại tiếp ΔABC *là nhỏ nhất.*

2) Gọi h_a, h_b, h_c *là độ dài các đường cao của* ΔABC. *Hãy xác định vị trí của điểm A để tích* $h_a \cdot h_b \cdot h_c$ *là lớn nhất.*

PHẦN DÀNH CHO CHUYÊN TOÁN

Câu V. *Cho* $x, y, z > 0$ *và* $x + y + x \leqslant \dfrac{3}{2}$.

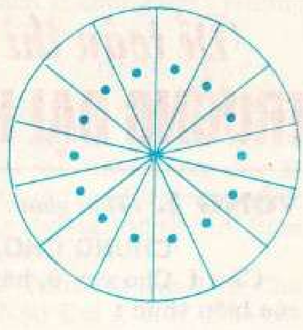
Chứng minh rằng :

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}} \geqslant \frac{3}{2}\sqrt{17}$$

PHẦN DÀNH CHO CHUYÊN TIN

Câu V. *Chia một hình tròn thành 14 hình quạt bằng nhau. Trong mỗi hình quạt đặt một viên bi (xem hình vẽ). Gọi I là phép biến đổi : Lấy hai hình quạt bất kỳ có bi và chuyển từ mỗi hình quạt đó một việc bi sang hình quạt liều kề nhưng theo hai chiều ngược nhau (ví dụ, nếu viên bi ở một hình quạt được chuyển theo chiều kim đồng hồ thì viên bi ở hình quạt kia được chuyển theo chiều ngược lại).*

Hỏi bằng việc thực hiện phép biến đổi trên, sau một số hữu hạn bước ta có thể chuyển được tất cả các viên bi vào một hình quạt được không ? Nếu có, hãy chỉ ra quá trình biến đổi. Nếu không, hãy giải thích tại sao ?



ĐÁP ÁN

Câu I : Điều kiện $x \geqslant 1$

Phương trình đã cho tương đương với

$(\sqrt{x-1}+1)^3 + (x-1) + 1 + 2\sqrt{x-1} = 2$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x-1}+1)^3 + (\sqrt{x-1}+1)^2 = 2$

Đặt $\sqrt{x-1} + 1 = t$ ta được : $t^3 + t^2 - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (t-1)(t^2+2t+2) = 0$

$\Leftrightarrow t = 1$

Với $t = 1 \Rightarrow x = 1$.

Câu II : Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x = \sqrt{y} + 1 \\ y = \sqrt{z} + 1 \\ z = \sqrt{x} + 1 \end{cases}$$

Điều kiện : $x, y, z \geqslant 1$.

Giả sử (x, y, z) là một nghiệm với $x_{\min}$ (các trường hợp khác tương tự). Từ $\begin{cases} x \leqslant y \\ x \leqslant z \end{cases} \Rightarrow y \leqslant z$ $\Rightarrow z \leqslant x$

$\Rightarrow x = y = z$.

Với $x = y$ ta có : $x = \sqrt{x} + 1$

$\Rightarrow x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ $(x \geqslant 1)$

$\Rightarrow x = y = z = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

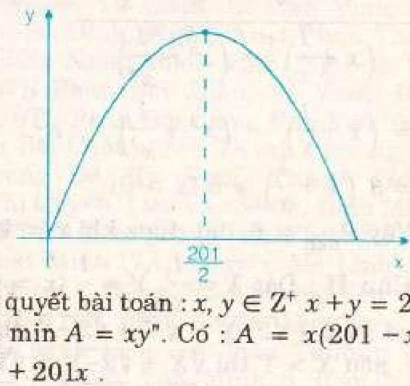
Câu III : $P = x^3 + y^3 + 2xy$

$= (x+y)^3 - 3xy(x+y) + 2xy$

$= (201)^3 - 601xy$

Rõ ràng

$$\begin{cases} P_{\max} \Leftrightarrow xy \text{ min} \\ P_{\min} \Leftrightarrow xy \text{ max} \end{cases}$$



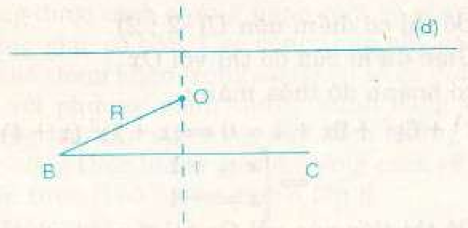
Ta giải quyết bài toán : $x, y \in Z^+$ $x + y = 201$. Tìm max, min $A = xy$". Có : $A = x(201 - x)$ $= -x^2 + 201x$.

$\Rightarrow A_{\max}$ *khi* $\begin{cases} x = 100 \\ y = 101 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 101 \\ y = 100 \end{cases}$

$A_{\min}$ khi $\begin{cases} x = 1 \\ y = 200 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 200 \\ y = 1 \end{cases}$

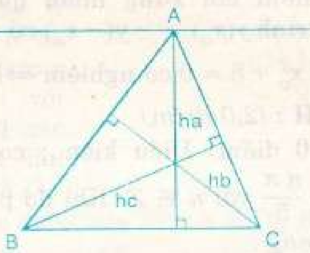
Từ đó $\Rightarrow P_{\max}, P_{\min}$.

Câu IV : 1) Do BC cố định $\Rightarrow$ tâm O của vòng tròn ngoại tiếp ΔABC luôn luôn chạy trên đường trung trực của $BC \Rightarrow$ bán kính ngoại tiếp ΔABC đạt min khi O trùng với I là điểm giữa BC. (Do $d(BC, (d)) < \dfrac{BC}{2} \Rightarrow$ đường tròn tâm I bán kính $\dfrac{BC}{2}$ cắt (d) tại hai điểm phân biệt).



Bài toán có hai nghiệm A và A' đều nhìn BC dưới một góc vuông.

2) Chú ý rằng $h_c = \dfrac{2S}{AB}$ (S – diện tích ΔABC)



Ta có : $h_a . h_b . h_c = h_a . h_b . \dfrac{2S}{AB}$

$= h_a . 2S . \dfrac{h_b}{AB}$

Do h_a và $2S$ luôn luôn không đổi nên

$h_a . h_b . h_c$ max $\Leftrightarrow \dfrac{hb}{AB}$ max .

Song $\dfrac{h_b}{AB} \leqslant 1 \Rightarrow \dfrac{h_b}{AB}$ đạt max bằng 1 khi $h_b = AB \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông tại A.

Bài toán có hai nghiệm hình.

Câu V : *(Dành cho chuyên toán)*

Ta có : $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} \geqslant \dfrac{9}{x+y+z} \geqslant 6$

Đặt $a = \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right)^2 \geqslant 6^2$

$b = (x+y+z)^2 \Rightarrow ab \geqslant 9^2$

Ta có :

$$a+b = \left(\frac{3}{2}\right)^2\left[\frac{a}{6^2} + \frac{b}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}\right] + \left[6^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right]\frac{a}{6^2}$$

$$\geqslant 2\left(\frac{3}{2}\right)^2\sqrt{\frac{ab}{9^2}} + \left[6^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right]\frac{a}{6^2}$$

$$\Rightarrow a + b \geqslant 2\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 6^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 6^2$$

Áp dụng $\sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2} + \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \geqslant$ $\geqslant \sqrt{(a_1 + b_1 + c_2)^2 + (a_2 + b_2 + c_2)^2}$

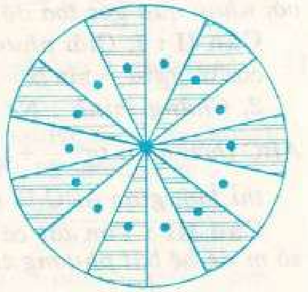
Ta được :

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt{(x+y+z)^2 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{x+1} \geqslant \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 6^2} = \frac{3}{2}\sqrt{17}$$

Câu V : *(Dành cho chuyên tin)*



Ta chứng minh rằng không thể chuyển tất cả các viên bi vào một hình quạt.

Thật vậy, ta sơn đen các hình quạt như hình vẽ. Tại thời điểm ban đầu

Tổng số các viên bi trong các hình quạt đen và tổng số các viên bi trong các hình quạt trắng đều là một số lẻ

Dễ thấy với mọi thời điểm thì tổng số các viên bi trong các hình quạt đen và trong các hình quạt trắng luôn luôn là một số lẻ.

Vì vậy không thể chuyển tất cả các viên bi vào một hình quạt được.

NGUYỄN VŨ LƯƠNG

ĐỀ THI TUYỂN SINH ... *(tiếp theo bìa 3)*

3. *(1,0 điểm)*

a. *(0,5 điểm)* Từ giả thiết ta có

$B_1(0, a, a)$; $D_1(a, 0, a)$

$C(a, a, 0)$; $C_1(a, a, a)$

$M\left(0, 0, \dfrac{2-\sqrt{3}}{2}a\right)$; $N\left(a, \dfrac{a\sqrt{2}}{2}, a\right)$ và $K\left(a, a, \dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)$.

Phương trình đường thẳng (d) là :

$$\frac{x-a}{a} = \frac{y-a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{z - \frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}$$

b. *(0,5 điểm)* Gọi H là giao của (d) với (xOy) thì tọa độ của H là

$x = \dfrac{a}{3}$; $y = \dfrac{3-\sqrt{2}}{3}a$; $z = 0$. Từ đó suy ra H nằm trong hình vuông $ABCD$ và độ dài KH chính là độ dài cần tìm

$$KH = \sqrt{\left(\frac{2}{3}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2} = a.$$

NGUYỄN VĂN LONG

Đề thi tuyển sinh môn toán năm 1996
TRƯỜNG ĐẠI HỌC GIAO THÔNG VẬN TẢI

(Thời gian làm bài 180 phút)

ĐỀ BÀI

Câu I : *Cho hàm số $y = x^3 + mx^2 + 9x + 4$ (1) với m là tham số.*

1. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 1$. Chỉ số giao điểm của đồ thị với trục Ox.

2. Tìm điều kiện của tham số m để trên đồ thị của hàm số (1) có một cặp điểm đối xứng với nhau qua gốc tọa độ.

Câu II : *1. Giải phương trình lượng giác :* $\cos 3x \cdot tg5x = \sin 7x$

2. Chứng minh : Nế các góc của tam giác ABC thỏa mãn $tg^6\frac{A}{2} + tg^6\frac{B}{2} + tg^6\frac{C}{2} = \frac{1}{9}$ *thì tam giác ABC là tam giác đều.*

Câu III : *Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ bất phương trình sau có nghiệm :*

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 7y^2 \geq \dfrac{1-m}{1+m} \\ 3x^2 + 10xy - 5y^2 \leq -2 \end{cases}$$

Câu IV : *1. Giải bất phương trình :*

$$2 \cdot 14^x + 3 \cdot 49^x - 4^x \geq 0$$

2. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2 \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2 \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2 \end{cases}$$

Câu V : *1. Tính đạo hàm cấp n của hàm số $y = ln(2x + 1)$*

2. Tính tích phân $I = \int_0^{\sqrt{3}} x^5 \cdot \sqrt{1 + x^2}dx$

3. Trong không gian với hệ tọa độ trực chuẩn Oxyz, cho hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$, cạnh a, có $A(0,0,0)$; $B(0 ; a, 0))$; $D(a,0,0)$; $A_1(0 , 0 , a)$. Các điểm M, N, K lần lượt nằm trên các cạnh AA_1, D_1C_1, CC_1 sao cho $A_1M = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $D_1N = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $CK = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

a. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm K và song song với đường thẳng MN.

b. Tính độ dài đoạn thẳng thuộc đường thẳng (d) và nằm phía trong hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

TÓM TẮT ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM

Câu I. *(1,5 điểm)*

1) (1,0 điểm). Khi $m = 6$ thì hàm số có dạng

$$y = x^3 + 6x^2 + 9x + 4$$

Miền xác định : $\forall x \in R$.

Chiều biến thiên : $y' = (3(x^2 + 4x + 3)$ nên có bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
y'		+	0	$-$	0	+	
y	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

Đồ thị có điểm uốn $U(-2 ; 2)$.

Giao điểm của đồ thị với Ox có hoành độ thỏa mãn :

$$x^3 + 6x^2 + 9x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 (x + 4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -4 \end{array}\right. .$$

Đồ thị tiếp xúc với Ox tại $x = -1$ và cắt Ox tại $x = -4$.

Đồ thị cắt Oy tại $(0 ; 4)$. (Bạn đọc tự vẽ đồ thị).

2. (0,5 điểm) Gọi $M(x_o ; y_o)$ và $M'(-x_o;-y_o)$ là cặp điểm đối xứng nhau qua $O(0,0) \Leftrightarrow$ phương trình $y(x_o) = -y(-x_o)$ có nghiệm $x_o \neq 0 \Leftrightarrow 2m \cdot x_o^2 + 8 = 0$ có nghiệm $\Leftrightarrow m < 0$.

Câu II : *(2,0 điểm)*

1. (1,0 điểm) Điều kiện : $\cos 5x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{10} + \frac{n\pi}{5}$ với $n \in Z$. Khi đó phương trình đưa về dạng :

$$\cos 3x \cdot \sin 5x = \sin 7x \cdot \cos 5x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sin 8x + \sin 2x) = \frac{1}{2}(\sin 12x + \sin 2x)$$

$$\Leftrightarrow \sin 12x = \sin 8x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 12x = 8x + 2k\pi \\ 12x = \pi - 8x + 2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{k\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{20} + \dfrac{l\pi}{10} \end{array}\right. \text{ với } k, l \in Z$$

Đối chiếu với điều kiện :

* Xét $x = k\pi$ thì $\frac{k\pi}{2} = \frac{\pi}{10} + \frac{n\pi}{5} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 5k\pi = \pi + 2n\pi \Leftrightarrow 5k = 1 + 2n$$

$$\Leftrightarrow 5k - 2n = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 + 2t \\ n = 2 + 5t \end{cases} (t \in Z)$$

Vậy trong các nghiệm $x = \frac{k\pi}{2}$ chỉ có các nghiệm ứng với k chẵn { $(k = 2t$, $t \in Z)$ thỏa mãn. Ta có nghiệm $x = t\pi$ $(t \in Z)$.

* Xét $x = \frac{\pi}{20} + \frac{l\pi}{10}$ thì $\frac{\pi}{20} + \frac{l\pi}{10} = \frac{\pi}{10} + \frac{n\pi}{5}$

$\Leftrightarrow 1 + 2l = 2 + 4n \Leftrightarrow 4n - 2l = -1$ không xảy ra với mọi $n, l \in Z$. Do đó $x = \frac{\pi}{20} + \frac{l\pi}{10}$ $(l \in Z)$ là nghiệm.

Kết luận : Nghiệm của phương trình là $x = t\pi$ hoặc $x = \frac{\pi}{20} + \frac{l\pi}{10}$ với $t, l \in Z$.

2. (1,0 điểm) Đặt $x = \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}$; $y = \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$; $z = \operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}$ thì $x + y + z > 0$ và $x + y + z = 1$.

Vì $\left(\operatorname{tg}^3\frac{A}{2} - \operatorname{tg}^3\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\operatorname{tg}^3\frac{B}{2} - \operatorname{tg}^3\frac{C}{2}\right)^2 + \left(\operatorname{tg}^3\frac{C}{2} - \operatorname{tg}^3\frac{A}{2}\right)^2 \geq 0$

$\Rightarrow \operatorname{tg}^6\frac{A}{2} + \operatorname{tg}^6\frac{B}{2} + \operatorname{tg}^6\frac{C}{2} \geq x^3 + y^3 + z^3$ (1)

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski :

$(x + y + z)(x^3 + y^3 + z^3) \geq$

$\geq (x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}} + z^{\frac{1}{2}}z^{\frac{3}{2}})^2 =$

$= (x^2 + y^2 + z^2)^2 \geq \left[\frac{1}{3}.3(x^2 + y^2 + z^2)\right]^2 \geq$

$\geq \left[\frac{1}{3}(x + y + z)^2\right]^2 = \frac{1}{9}$

$\Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 \geq \frac{1}{9}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có :

$$\operatorname{tg}^6\frac{A}{2} + \operatorname{tg}^6\frac{B}{2} + \operatorname{tg}^6\frac{C}{2} \geq \frac{1}{9} \quad (3)$$

(3) trở thành đẳng thức $\Leftrightarrow$ (1) và (2) trở thành đẳng thức $\Leftrightarrow \operatorname{tg}\frac{A}{2} = \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \operatorname{tg}\frac{C}{2} \Leftrightarrow A = B = C \Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

Câu III. *(1,5 điểm).*

* *Điều kiện cần* (0,75 điểm)

Giả sử hệ có nghiệm $(x_o ; y_o)$ thì

$$\begin{cases} x_o^2 + 2x_oy_o - 7y_o^2 \geq \dfrac{1-m}{1+m} & (1) \\ 3x_o^2 + 10x_oy_o - 5y_o^2 \leq -2 & (2) \end{cases}$$

Nhân hai vế của (1) với -2 rồi cộng từng vế với (2) suy ra : $x_o^2 + 6x_oy_o + 9y_o^2 \leq \frac{-4}{1+m} \Rightarrow (x_o + 3y_o)^2 \leq \frac{-4}{1+m} \Rightarrow m < -1$.

* *Điều kiện đủ* (0,75 điểm)

Với $m < -1$ thì $\frac{1-m}{1+m} = -1 + \frac{2}{m+1} < -1$

Xét hệ $\begin{cases} x^2 + 2xy - 7y^2 = -1 \ (3) \\ 3x^2 + 10xy - 5y^2 = -2 \ (4) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2xy - 7y^2 = -1 \\ (x + 3y)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y^2 = 1 \\ x = -3y \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

Nghiệm của hệ gồm (3), (4) thỏa mãn hệ đã cho $\Rightarrow$ hệ đã cho có nghiệm.

Tóm lại : Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow m < -1$.

Câu IV. *(2, 0 điểm)*

1. (1,0 điểm) Chia hai vế cho $49^x > 0$ ta có :

$$\left(\frac{4}{49}\right)^x - 2\left(\frac{2}{7}\right)^x - 3 \leq 0$$

Đặt $t = \left(\frac{2}{7}\right)^x > 0$ (1) ta có : $t^2 - 2t - 3 \leq 0$

$\Leftrightarrow -1 \leq t \leq 3$ (2) kết hợp (1) và (2) ta có : $0 < t \leq 3$

$\Leftrightarrow 0 < \left(\frac{2}{7}\right)^x \leq 3 \Leftrightarrow x \geq \log_{\frac{2}{7}} 3$.

2. *(1,0 điểm)* Điều kiện $x, y, z > 0$.

Viết hệ về dạng :

$$\begin{cases} \log_4 x^2 + \log_4 y + \log_4 z = 2 \\ \log_9 y^2 + \log_9 z + \log_9 x = 2 \\ \log_{16} z^2 + \log_{16} x + \log_{16} y = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2yz = 4^2 \\ xy^2z = 9^2 \\ xyz^2 = 16^2 \end{cases}$$

Nhân từng vế ba phương trình trên ta có : $x^4y^4z^4 = 2^4.3^4.4^4 \Leftrightarrow xyz = 2.3.4$ (vì $x, y, z > 0$) Từ đó $x = \frac{2}{3}$; $y = \frac{27}{8}$; $z = \frac{32}{3}$ thỏa mãn

Câu V. *(3,0 điểm)*

1. (1,0 điểm) $y = \ln(2x + 1)$ nên $y' = (2x + 1)^{-1}.2$; $y'' = (2x + 1)^{-2}.2^2.(-1)$; $y''' = (-1).(-2).(2x + 1)^{-3}.2^3$; ...

Dự đoán :

$y^{(n)} = (-1)^{n-1}.(n - 1)!(2x + 1)^{-n}.2^n$.

Chứng minh dự đoán trên bằng phương pháp quy nạp toán học.

* Với $n = 1$: $y' = (2x + 1)^{-1}.2$ nên công thức đúng.

* Giả sử công thức đúng với $n = k$ thì

$y^{(k)} = (-1)^{k-1}.(k - 1)!(2x + 1)^{-k}.2^k$

$\Rightarrow y^{(k+1)} = [y^{(k)}]' = (-1)^{k-1}.(k - 1)!(-k)(2x + 1)^{-(k+1)}.2.2^k = (-1)^k.k!(2x + 1)^{-(k+1)}2^{k+1}$

Chứng tỏ công thức đúng với $n = k + 1$.

2. *(1,0 điểm)* Đặt $t = \sqrt{1 + x^2} \Rightarrow t^2 = 1 + x^2$

$\Rightarrow I = \int_0^{\sqrt{3}} x^5\sqrt{1 + x^2}dx = \int_1^2 (t^2 - 1)^2.t^2dt$

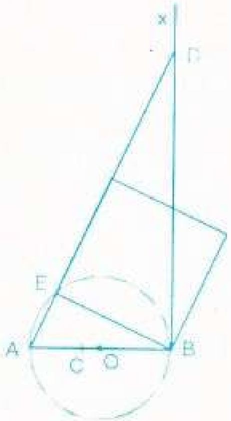
$= \int_1^2 (t^6 - 2t^4 + t^2)dt = \left(\frac{t^7}{7} - \frac{2t^5}{5} + \frac{t^3}{3}\right)\Big|_1^2$

$= \frac{848}{105}$.

(xem tiếp trang 15)

NHƯNG CHỈ KHÁC... *(tiếp theo trang 2)*

Bài 2. *Cho đường tròn tâm O, đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến Bx với đường tròn. Trên đường kính AB lấy điểm C sao cho $AC = \frac{5}{6}AO$. Với C làm tâm, kẻ đường tròn bán kính bằng 2AB. Đường tròn này cắt Bx tại D. AD cắt đường tròn (O) tại E.*



So sánh diện tích của hình tròn (O) và diện tích hình vuông có cạnh là BE. Ta có $BD^2 = CD^2 - CB^2 = 16R^2 - \left(\frac{7R}{6}\right)^2 = \frac{527R^2}{36}$; $AD^2 = 4R^2 + BD^2 = \frac{671R^2}{36}$; các tam giác đồng dạng AEB và ABD cho ta $\frac{BE}{BD} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow BE = 2R \cdot \frac{BD}{AD}$. Diện tích hình vuông cạnh $BE = BE^2 = (4R^2 \times 527) : 671 \approx 3{,}14158R^2$. So với πR^2 thì giá trị này chỉ khác có $0{,}00001R^2$.

Nếu $R = 100$m thì sai số chỉ là 10dm^2 ! Bằng diện tích 2,5 viên gạch bông ! Tốt quá rồi, không mong gì hơn.

Lời bàn của tác giả : Hai bài toán trên có thể gợi cho ta phương pháp tìm *lời giải hình học* gần đúng với sai số tùy ý ? Tác giả cũng chưa biết trả lời sao. Mong các bạn nghỉ giúp.

ĐỌC LẠI CHO ĐÚNG

Các dòng 1, 2, 3 (trên xuống) cột phải trang 6 Tạp chí TH&TT số 4(238)/1997 nay được sửa lại như sau :

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + mz + 1 = 0 & \\ (m+2)y - (m+2)z + 1 = 0 & (1) \\ 4y - (m+4)z - 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

Thành thật cáo lỗi cùng tất cả độc giả.

N.K.M.

Giải đáp bài

CHIA HÀNG

1) Để cho một người (người thứ nhất) chia lô hàng thành 3 phần theo ý của mình. Hai người còn lại được phép nhận phần hàng mà mình ưa thích. Nếu hai người nhận hai phần khác nhau, thì người thứ nhất nhận phần hàng còn lại và việc phân chia như thế là hoàn thành. Nếu hai người cùng nhận một phần hàng thì hãy để cho hai người này chia đôi với nhau phần hàng này theo cách người này chia thì người kia được quyền lựa chọn. Sau đó lại đề nghị chính hai người này chỉ tiếp xem mỗi người ưng phần nào. Nếu họ lại cùng chỉ vào một phần thì tiếp tục để họ chia đôi với nhau phần hàng này theo cách chia đôi ở trên. Nếu họ chỉ vào hai phần khác nhau thì khi đó từng người phải chia đôi với người thứ ba phần hàng mà mình vừa chọn theo cách chia đôi nói trên. Vậy trong cả ba trường hợp, cả ba người đều không thể than phiền rằng mình nhận được phần ít hơn.

2) Ta phải giải bài toán này theo phương pháp quy nạp. Với $n = 2, 3$ đã có cách chia nêu trên. Giả sử ta đã tìm được cách chia hàng với k người. Bây giờ với số người là $k + 1$. Trước hết ta chọn ra k người để chia nhau lô hàng, sau đó đề nghị họ chia phần hàng của mình ra $k + 1$ phần nhỏ (mà theo họ là đều nhau). Khi đó người thứ $k + 1$ chỉ cần nhận một phần trong $k + 1$ phần nhỏ của k người và mỗi một trong k người đầu nhận k phần còn lại trong $k + 1$ phần mình vừa chia ra. Như vậy rõ ràng mỗi người đã nhận được phần hàng mà theo họ là không nhỏ hơn $\frac{1}{k+1}$ giá trị của lô hàng.

NGUYỄN CÔNG SỨ

HỎI TUỔI CỦA MỖI NGƯỜI

Có một bài toán cổ về tìm tuổi của ông, cha và cháu như sau :

Lúc cháu ra đời thì tuổi ông bằng tuổi của cha sau đây 12 năm. Ông có con sớm hơn cha có con là 2 năm. Cả ông lẫn cha và cháu đều là con một. Bây giờ tổng số tuổi của ông, cha và cháu là 100.

Các bạn hãy tính xem bây giờ mỗi người bao nhiêu tuổi.

NGÔ HÂN

ISSN : 0866 - 8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT41M7

Sắp chữ tại TTVT Nhà xuất bản Giáo dục
In tại nhà máy in Diên Hồng - 57 Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 5/1997

Giá 2.000đ
Hai nghìn đồng