BỒI DƯỠNG SINH HỌC SINH GIỎI TOÁN 9

TUYỂN CHỌN

50 ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 CẤP HUYỆN TỈNH

CÓ ĐÁP ÁN VÀ GIẢI CHI TIẾT

50 ĐỀ ÔN THI LUYỆN THI
HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN LỚP 9 CẤP QUẬN, HUYỆN

LỜI NÓI ĐẦU

Nhằm đáp ứng nhu cầu về của giáo viên toán THCS và học sinh luyện thi học sinh giỏi môn toán lớp 9, Chúng tôi giới thiệu đến thầy cô và các em bộ đề thi học sinh giỏi toán lớp 9 của các huyện trên cả nước có hướng dẫn giải cụ thể. Đây là bộ đề thi mang tính chất thực tiễn cao, giúp các thầy cô và các em học sinh luyện thi học sinh giỏi lớp 9 có một tài liệu bám sát đề thi để đạt được thành tích cao, mang lại vinh dự cho bản thân, gia đình và nhà trường. Bộ đề gồm nhiều Câu toán hay được các thầy cô trên cả nước sưu tầm và sáng tác, ôn luyện qua sẽ giúp các em phát triển tư duy môn toán từ đó thêm yêu thích và học giỏi môn học này, tạo được nền tảng để có những kiến thức nền tốt đáp ứng cho việc tiếp nhận kiến thức ở các lớp, cấp học trên được nhẹ nhàng và hiệu quả hơn.

Các vị phụ huynh và các thầy cô dạy toán có thể dùng có thể dùng tuyển tập đề toán này để giúp con em mình học tập. Hy vọng Tuyển tập 50 đề thi học sinh giỏi lớp 9 này sẽ có thể giúp ích nhiều cho học sinh phát huy nội lực giải toán nói riêng và học toán nói chung.

Bộ đề này được viết theo hình thức Bộ đề ôn thi, gồm: đề thi và hướng dẫn giải đề ngay dưới đề thi đó dựa trên các đề thi chính thức đã từng được sử dụng trong các kì thi học sinh giỏi toán lớp 9 ở các quận, huyện trên cả nước.

Mặc dù đã có sự đầu tư lớn về thời gian, trí tuệ song không thể tránh khỏi những hạn chế, sai sót. Mong được sự góp ý của các thầy, cô giáo và các em học!

Chúc các thầy, cô giáo và các em học sinh thu được kết quả cao nhất từ bộ đề này!

MỤC LỤC

Phần 1. Đề thi

Phần 2. Đáp án

- Đề 1:_____Trang ….56
- Đề 2:_____Trang ….59
- Đề 3:_____Trang ….63
- Đề 4:_____Trang ….65
- Đề 5:_____Trang ….70
- Đề 6:_____Trang ….73
- Đề 7:_____Trang ….78
- Đề 8:_____Trang ….82
- Đề 9:_____Trang ….85
- Đề 10:_____Trang ….88
- Đề 11:_____Trang ….91
- Đề 12:_____Trang ….95
- Đề 13:_____Trang ….99
- Đề 14:_____Trang ….102
- Đề 15:_____Trang ….106
- Đề 16:_____Trang ….109
- Đề 17:_____Trang ….113
- Đề 18:_____Trang ….115
- Đề 19:_____Trang ….119
- Đề 20:_____Trang ….123
- Đề 21:_____Trang ….128
- Đề 22:_____Trang ….131
- Đề 23:_____Trang ….135
- Đề 24:_____Trang ….138
- Đề 25:_____Trang ….142
- Đề 26:_____Trang ….145
- Đề 27:_____Trang ….149
- Đề 28:_____Trang ….153
- Đề 29:_____Trang ….157
- Đề 30:_____Trang ….162
- Đề 31:_____Trang ….166
- Đề 32:_____Trang ….170
- Đề 33:_____Trang ….173
- Đề 34:_____Trang ….179
- Đề 35:_____Trang ….181

- Đề 36:_____Trang ….184
- Đề 37:_____Trang ….186
- Đề 38:_____Trang ….190
- Đề 39:_____Trang ….193
- Đề 40:_____Trang ….197
- Đề 41:_____Trang ….201
- Đề 42:_____Trang ….205
- Đề 43:_____Trang ….209
- Đề 44:_____Trang ….212
- Đề 45:_____Trang ….215
- Đề 46:_____Trang ….219
- Đề 47:_____Trang ….222
- Đề 48:_____Trang ….225
- Đề 49:_____Trang ….229
- Đề 50:_____Trang ….233

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN HOẰNG HÓA

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 1

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2014-2015
MÔN THI: TOÁN
Ngày thi: 21/10/2014
Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. Cho biểu thức: $P=\frac{x^2-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}-\frac{2x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\frac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1}$.

a. Rút gọn P.

b. Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

c. Xét biểu thức: $Q=\frac{2\sqrt{x}}{P}$, chứng tỏ $0<Q<2$.

Câu 2. *(4,5 điểm)*

a. Không dùng máy tính hãy so sánh : $\frac{2014}{\sqrt{2015}}+\frac{2015}{\sqrt{2014}}$ và $\sqrt{2014}+\sqrt{2015}$.

b. Tìm x, y, z, biết: $4x^2+2y^2+2z^2-4xy-2yz+2y-8z+10\le 0$.

c. Giải phương trình: $\sqrt{\frac{1}{x+3}}+\sqrt{\frac{5}{x+4}}=4$.

Câu 3. *(4,0 điểm)*

a. Với $x=\frac{(\sqrt{5}+2)\sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}}{\sqrt{5}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}}$. Tính giá trị của biểu thức: $B=(3x^3+8x^2-2)^{2015}$.

b. Tìm tất cả các cặp số nguyên (x ; y) với x > 1, y > 1 sao cho (3x+1) ⋮ y đồng thời (3y + 1) ⋮ x.

Câu 4. *(6,0 điểm)*

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn với các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

a. Chứng minh rằng:

Tam giác AEF đồng dạng với tam giác ABC; $\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}}=\cos^2 A$.

b. Chứng minh rằng : $S_{DEF}=(1-\cos^2 A-\cos^2 B-\cos^2 C).S_{ABC}$

c. Cho biết AH = k.HD. Chứng minh rằng: tanB.tanC = k + 1.

d. Chứng minh rằng: $\frac{HA}{BC}+\frac{HB}{AC}+\frac{HC}{AB}\ge\sqrt{3}$.

Câu 5. *(1,5 điểm)*

Cho x, y là các số tự nhiên khác 0, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A=|36^x-5^y|.$$

Hết

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN THẠCH HÀ

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 2

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2016-2017
MÔN THI: TOÁN
Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. **a)** Tính giá trị của đa thức $f(x)=(x^4-3x+1)^{2016}$ tại $x=9-\frac{1}{\sqrt{\frac{9}{4}-\sqrt{5}}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{9}{4}+\sqrt{5}}}$

b) So sánh $\sqrt{2017^2-1}-\sqrt{2016^2-1}$ và $\frac{2.2016}{\sqrt{2017^2-1}+\sqrt{2016^2-1}}$

c) Tính giá trị biểu thức: $\sin x.\cos x+\frac{\sin^2 x}{1+\cot x}+\frac{\cos^2 x}{1+\tan x}$ với $0^0<x<90^0$

d) Biết $\sqrt{5}$ là số vô tỉ, hãy tìm các số nguyên a, b thỏa mãn:

$$\frac{2}{a+b\sqrt{5}}-\frac{3}{a-b\sqrt{5}}=-9-20\sqrt{5}$$

Câu 2. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{3}{x-3}-\frac{2}{x-1}=\frac{x-1}{2}-\frac{x-3}{3}$

b) $x^2-5x+8=2\sqrt{x-2}$

Câu 3. **a)** Cho đa thức $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với a, b, c, d là các hệ số nguyên. Chứng minh rằng nếu P(x) chia hết cho 5 với mọi giá trị nguyên của x thì các hệ số a, b, c, d đều chia hết cho 5

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 - xy + y^2 - 4 = 0$

c) Cho n là số tự nhiên lớn hơn 1. Chứng minh rằng $n^4 + 4^n$ là hợp số.

Câu 4. **a)** Chứng minh rằng $\frac{a^4+b^4}{2}\ge ab^3+a^3b-a^2b^2$

b) Cho a, b, c là 3 số dương thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1}=2$

Tìm giá trị lớn nhất của tích (a + b)(b + c)(c + a).

Câu 5. Cho ΔABC nhọn, có ba đường cao AD, BI, CK cắt nhau tại H. Gọi chân các đường vuông góc hạ từ D xuống AB, AC lần lượt là E và F

a) Chứng minh rằng: AE.AB = AF.AC

b) Giả sử HD = $\frac{1}{3}$AD. Chứng minh rằng: tanB.tanC = 3

c) Gọi M, N lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ D đến BI và CK. Chứng minh rằng: 4 điểm E, M, N, F thẳng hàng.

Hết

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN KINH MÔN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 3

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2010-2011
MÔN THI: TOÁN
Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (*2,5 điểm*)

1. So sánh : $\frac{2008}{\sqrt{2009}}+\frac{2009}{\sqrt{2008}}$ và $\sqrt{2008}+\sqrt{2009}$

2. Cho biểu thức $B=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{2010}}$. Chứng minh rằng $B>86$

Câu 2. (*1,0 điểm*)

Chứng minh biểu thức : $P=(x^3-4x-1)^{2010}$ có giá trị là một số tự nhiên với

$$x=\frac{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}.(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}}$$

Câu 3. (*2,5 điểm*)

1. Giải phương trình sau: $\sqrt{2x-1}+2=x$

2. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $y=\sqrt{x^2+4x+5}$

Câu 4. (*3,0 điểm*)

Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh BC lấy điểm M, trên cạnh CD lấy điểm N. Tia AM cắt đường thẳng CD tại K. Kẻ AI vuông góc với AK cắt CD tại I

1. Chứng minh : $\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{AK^2}=\frac{1}{AB^2}$

2. Biết góc MAN có số đo bằng 45^0, CM + CN = 7 cm, CM - CN = 1 cm. Tính diện tích tam giác AMN.

3. Từ điểm O trong tam giác AIK kẻ OP, OQ, OR lần lượt vuông góc với IK, AK, AI (P $\in$ IK, Q $\in$ AK, R $\in$ AI). Xác định vị trí của O để $OP^2+OQ^2+OR^2$ nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Câu 5. (*1,0 điểm*)

Cho ba số a, b, c thỏa mãn $0\le a,b,c\le 2$ và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$a^3+b^3+c^3\le 9.$$

_____Hết_____

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN HOẰNG HÓA

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2012-2013
MÔN THI: TOÁN
Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 4

(Đề thi có một trang)

Câu 1. *(4,0 điểm)* Cho biểu thức : $B=\frac{1}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}+\frac{x\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}-1}$

a. Rút gọn biểu thức B.

b. Tìm x để B > 0.

c. Tính giá trị của B khi : $x=\frac{53}{9-2\sqrt{7}}$

Câu 2. *(4,0 điểm)*

a. Giải phương trình : $\sqrt{x-1+4\sqrt{x-5}}+\sqrt{-1+x-4\sqrt{x-5}}=4$

b. Chứng minh rằng: $\sqrt{10}$ là số vô tỉ.

Câu 3. *(3,0điểm)*

a. Vẽ đồ thị hàm số: $y=|2x+1|$.

b. Xác định tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số ở câu a với đồ thị hàm số y = 3x – 5.

Câu 4. *(4,0 điểm)*

Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Trên các bán kính OA, OB lần lượt lấy các điểm M và N sao cho OM = ON. Qua M và N vẽ các dây CD và EF song song với nhau (C, E cùng thuộc một nửa đường tròn đường kính AB).

a. Chứng minh tứ giác CDFE là hình chữ nhật.

b. Cho $OM=\frac{2}{3}R$, góc nhọn giữa CD và OA bằng 60^0.

Tính diện tích hình chữ nhật CDFE.

Câu 5. *(2,0 điểm)*

Một ngũ giác có tính chất: Tất cả các tam giác có ba đỉnh là ba đỉnh liên tiếp của ngũ giác đều có diện tích bằng 1. Tính diện tích ngũ giác đó.

Câu 6. *(3,0 điểm)*

a. Cho a, b, c là các số thực, chứng minh rằng: $a^4+b^4+c^4 \geq abc(a+b+c)$

b. Tìm tất cả các số tự nhiên có ba chữ số $\overline{abc}$ sao cho $\begin{cases}\overline{abc}=n^2-1\\ \overline{cba}=(n-2)^2\end{cases}$

Với n là số nguyên lớn hơn 2.

Hết

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN THANH OAI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2012-2013
MÔN THI: TOÁN
Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 5

(Đề thi có một trang)

Câu 1. *(6 điểm)*

Cho $P=\left(1-\frac{x-3\sqrt{x}}{x-9}\right):\left(\frac{9-x}{x+\sqrt{x}-6}-\frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3}\right)$

1. Rút gọn P.
2. Tìm x để $P>0$
3. Với $x>4$, $x\neq 9$. Tìm giá trị lớn nhất của $P.(x+1)$

Câu 2. *(4 điểm)*

1. Tìm tất cả số tự nhiên n sao cho $n^2-14n-256$ là 1 số chính phương.
2. Cho: $a>0$, $b>0$ và $ab=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A=(a+b+1)(a^2+b^2)+\frac{4}{a+b}$$

Câu 3. *(2 điểm)*

Cho hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{2012-y}=\sqrt{2012}\\ \sqrt{2012-x}+\sqrt{y}=\sqrt{2012}\end{cases}$

1. Chứng minh rằng: $x=y$
2. Tìm nghiệm của hệ phương trình.

Câu 4. *(5 điểm)*

Cho hai đường tròn (O; R) và (O′; R′) tiếp xúc ngoài tại A(R > R′). Vẽ dây AM của đường tròn (O) và dây AN của đường tròn (O′) sao cho AM ⊥ AN. Gọi BC là tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn (O) và (O′) với B ∈ (O) và C ∈ (O′)

1. Chứng minh OM // O′N.
2. Chứng minh: Ba đường thẳng MN, BC, OO′ đồng qui.
3. Xác định vị trí của M và N để tứ giác MNO′O có diện tích lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất đó.

Câu 5. *(3 điểm)*

1. Cho tam giác nhọn ABC. Gọi ha, hb, hc lần lượt là các đường cao và ma, mb, mc lần lượt là trung tuyến của các cạnh BC, CA, AB; R và r lần lượt là bán kính của các đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$\frac{ma}{ha}+\frac{mb}{hb}+\frac{mc}{hc}\le\frac{R+r}{r}$$

2. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương a,b sao cho: $a+b^2$ chia hết cho a^2b-1.

Hết

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ THANH HÓA

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 6

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THÀNH PHỐ
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2015-2016
MÔN THI: TOÁN
Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. *(4,0 điểm)*

Cho $P = \dfrac{x\sqrt{x}-2x-\sqrt{x}+2}{x\sqrt{x}-3\sqrt{x}-2} + \dfrac{x\sqrt{x}+2x-\sqrt{x}-2}{x\sqrt{x}-3\sqrt{x}+2}$

1. Rút gọn P. Với giá trị nào của x thì $P > 1$

2. Tìm x nguyên biết P đạt giá trị nguyên lớn nhất

Câu 2. *(4,0 điểm)*

1. Giải phương trình $\dfrac{|5-3x|-|x-1|}{x-3+|3+2x|} = 4$

2. Tìm số nguyên x, y thỏa mãn $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$

Câu 3. (4,0 điểm)

1. Cho $a = x + \dfrac{1}{x}$ $\quad b = y + \dfrac{1}{y}$ $\quad c = xy + \dfrac{1}{xy}$

Tính giá trị biểu thức: $A = a^2 + b^2 + c^2 - abc$

2. Chứng minh rằng với mọi $x > 1$ ta luôn có. $3(x^2 - \dfrac{1}{x^2}) < 2(x^3 - \dfrac{1}{x^3})$

Câu 4. *(4,0 điểm)* Cho tứ giác ABCD có AD = BC; AB < CD. Gọi I, Q, H, P lần lượt là trung điểm của AB, AC, CD, BD

1. Chứng minh IPHQ là hình thoi và PQ tạo với AD, BC hai góc bằng nhau.

2. Về phía ngoài tứ giác ABCD, dựng hai tam giác bằng nhau ADE và BCF. Chứng minh rằng trung điểm các đoạn thẳng AB, CD, EF cùng thuộc một đường thẳng.

Câu 5. *(2,0 điểm)* Tam giác ABC có BC = 40cm, phân giác AD dài 45cm đường cao AH dài 36cm. Tính độ dài BD, DC.

Câu 6. *(2,0 điểm)* Với a, b là các số thực thỏa mãn đẳng thức $(1 + a)(1 + b) = \dfrac{9}{4}$.

Hãy tìm GTNN của $P = \sqrt{1+a^4} + \sqrt{1+b^4}$

Hết

GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THANH HÓA
TRƯỜNG THCS TRẦN MAI NINH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TRƯỜNG
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2012-2013
MÔN THI: TOÁN
Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 7

(Đề thi có một trang)

Câu 1.(*5 điểm*)

a) Tính giá trị biểu thức $Q = \dfrac{a^6 - 2a^5 + a - 2}{a^5 + 1}$

Biết $\dfrac{a}{x+y} = \dfrac{5}{x+z}$ và $\dfrac{25}{(x+z)^2} = \dfrac{16}{(z-y)(2x+y+z)}$

b) Cho các số nguyên a, b, c $\neq$ 0 thoả mãn: $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{abc}$

Chứng minh rằng: $(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)$ là số chính phương

Câu 2. (*4 điểm*)

a) Giải phương trình: $\dfrac{x-241}{17} + \dfrac{x-220}{19} + \dfrac{x-195}{21} + \dfrac{x-166}{23} = 10$

b) Giải phương trình nghiệm nguyên: $x(x^2 + x + 1) = 4y(y + 1)$

Câu 3. *(4 điểm)*

a) Cho a, b, c là các số thực dương sao cho $a \geq c$, $b \geq c$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$$

b) Giả sử f(x) là đa thức bậc 4 với hệ số nguyên.

Chứng minh rằng: Nếu $f(x) \vdots 7$ với $\forall x \in Z$ thì từng hệ số của f(x) cũng $\vdots 7$

Câu 4. *(5 điểm)*

Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AA′, BB′, CC′, H là trực tâm

a) Tính tổng $\dfrac{HA'}{AA'} + \dfrac{HB'}{BB'} + \dfrac{HC'}{CC'}$

b) Gọi AI là phân giác của tam giác ABC; IM, IN thứ tự là phân giác của góc AIC và góc AIB. Chứng minh rằng: AN.BI.CM = BN. IC.AM

c) Tam giác ABC như thế nào thì biểu thức $\dfrac{(AB+BC+CA)^2}{(AA')^2 + (BB')^2 + (CC')^2}$

đạt giá trị nhỏ nhất?

Câu 5. (2 *điểm*)

Cho hình vuông MNPQ, lấy điểm E thuộc cạnh MQ, điểm F thuộc cạnh NP sao cho: ME = PF. Các đường thẳng MF và NE cắt đường thẳng PQ lần lượt tại C và B. Kéo dài MB và NC cắt nhau tại A. Chứng minh rằng tam ABC là tam giác vuông.

Hết

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN HOẰNG HÓA

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 8

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THÀNH PHỐ
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2015-2016
MÔN THI: TOÁN
Ngày thi: 12/10/2015
Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. *(4,0 điểm)* Cho $A=\frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6}+\frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}+\frac{\sqrt{x}+3}{2-\sqrt{x}}(x\ge 0, x\ne 4, x\ne 9)$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm giá trị của x để $A=-\frac{1}{2}$.

Câu 2. *(4,5 điểm)*

a) Tính $\sqrt{8-2\sqrt{15}}-\sqrt{8+2\sqrt{15}}$

b) Cho $x^2-x-1=0$. Tính giá trị của biểu thức: $P=\frac{x^6-3x^5+3x^4-x^3+2015}{x^6-x^3-3x^2-3x+2015}$.

c) Giải phương trình: $x+\frac{3x}{\sqrt{x^2-9}}=6\sqrt{2}$.

Câu 3. *(4,0 điểm)*

a) Tìm số nguyên dương n bé nhất để $F=n^3+4n^2-20n-48$ chia hết cho 125.

b) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n >1 thì số $A=n^6-n^4+2n^3+2n^2$ không thể là số chính phương.

Câu 4. *(6,0 điểm)* Cho tam giác ABC có ba góc nhọn với các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Chứng minh rằng:

a) $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.BC.\sin B$ và $AE.BF.CD=AB.BC.CA.\cos A.\cos B.\cos C$.

b) $\tan B.\tan C=\frac{AD}{HD}$.

c) H là giao điểm ba đường phân giác trong của tam giác DEF.

d) $\frac{HB.HC}{AB.AC}+\frac{HC.HA}{BC.BA}+\frac{HA.HB}{CA.CB}=1$.

Câu 5. *(1,5 điểm)*

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn: $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{y^2+z^2}+\sqrt{z^2+x^2}=2015$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}$.

Hết

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN TRIỆU PHONG

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 9

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018-2019
MÔN THI: TOÁN
Ngày thi: 16/10/2018
Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. *(5 điểm)*

1. Cho $n \in N^*$. Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$

2. Áp dụng tính tổng:

$$S_{2018} = \frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{2018\sqrt{2017}+2017\sqrt{2018}}$$

3. Viết công thức tổng quát tính S_n? cho biết với những giá trị nào của n thì ta được kết quả S_n là số hữu tỉ?

Câu 2. *(5 điểm)*

1. Giải phương trình: $x^2 - 7x = 6\sqrt{x+5} - 30$

2. Tìm các số nguyên x, y, z thỏa mãn: $10x^2 + y^2 + z^2 < 2x + 4y + 6xz - 4$

Câu 3. *(4 điểm)*

1. Tìm giá trị nhỏ nhất của: A = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)

2. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh tam giác.

Chứng minh: $\dfrac{a}{b+c-a} + \dfrac{b}{a+c-b} + \dfrac{c}{a+b-c} \geq 3$

Câu 4. *(4 điểm)*

Cho hình vuông ABCD, M là một điểm tuỳ ý trên đường chéo BD. Kẻ $ME \perp AB$, $MF \perp AD$.

1. Chứng minh: DE = CF.

2. Chứng minh ba đường thẳng DE, BF, CM đồng quy.

3. Xác định vị trí của điểm M để diện tích tứ giác AEMF lớn nhất.

Câu 5. *(2 điểm)* Cho hình vuông ABCD và 2018 đường thẳng thỏa mãn hai điều kiện:

1. Mỗi đường thẳng đều cắt hai cạnh đối của hình vuông.

2. Mỗi đường thẳng đều chia hình vuông thành hai phần có tỉ lệ diện tích bằng $\dfrac{1}{3}$.

Chứng minh rằng trong 2018 đường thẳng đó có ít nhất 505 đường thẳng đồng quy.

Hết

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
QUẬN HẢI AN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 10

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUẬN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018-2019
MÔN THI: TOÁN
Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. *(2,0 điểm)*

a) Cho biểu thức $A=\left(x^2-x-1\right)^{2018}+2019.$

Tính giá trị biểu thức A khi $x=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}-1}-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}+1}.$

b) Cho $\left(x+\sqrt{x^2+2019}\right)\left(y+\sqrt{y^2+2019}\right)=2019.$ Chứng minh: $x^{2019}+y^{2019}=0$

Câu 2. *(2,0 điểm)*

a) Giải phương trình: $(4x-1)\sqrt{x^2+1}=2\left(x^2+1\right)+2x-1.$

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2019}.$

Câu 3. (1,5 điểm)

a) Tìm ba chữ số tận cùng của tích mười hai số nguyên dương đầu tiên.

b) Cho $a,b,c\in[-1;2]$ thỏa mãn: $a^2+b^2+c^2=6.$ Chứng minh rằng $a+b+c\ge 0.$

Câu 4. (3,0 điểm) Cho đường tròn $(O;R)$, vẽ hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Trên đoạn CA lấy G sao cho $GC=\frac{1}{3}AC$. Tia OG cắt BC tại M, vẽ ON vuông góc với BG ($N\in BG$).

a) Chứng minh MA là tiếp tuyến của đường tròn $(O;R)$;

b) Tia CN cắt đường tròn tại K. Tính $KA^4+KB^4+KC^4+KD^4$ theo R;

c) Chứng minh $MN=2R.$

Câu 5. (1,0 điểm)

Trong một cuộc họp có 6 người. Người ta nhận thấy cứ ba người bất kỳ thì có hai người quen nhau. Chứng minh rằng thế nào cũng có ba người đôi một quen nhau.

Hết

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN CẨM THỦY

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 11

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2011-2012
MÔN THI: TOÁN
Ngày thi: 21/10/2014
Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Câu 1.

Cho biểu thức: $P=\frac{x}{x-\sqrt{x}}+\frac{2}{x+2\sqrt{x}}+\frac{x+2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+2\sqrt{x}\right)}$.

d. Rút gọn P.

e. Tính P khi $x=3+2\sqrt{2}$

f. Tìm x nguyên để P nhận giá trị nguyên.

Câu 2.

Giải phương trình:

a) $x^2-10x+27=\sqrt{6-x}+\sqrt{x-4}$ b) $x^2-2x-x\sqrt{x}-2\sqrt{x}+4=0$

Câu 3.

a) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $y^2+2xy-3x-2=0$

b) Cho $x>1$ và $y>0$. Chứng minh: $\frac{1}{(x-1)^3}+\left(\frac{x-1}{y}\right)^3+\frac{1}{y^3}\ge 3\left(\frac{3-2x}{x-1}+\frac{x}{y}\right)$

c) Tìm số tự nhiên n để $A=n^{2012}+n^{2002}+1$ là số nguyên tố

Câu 4.

Cho hình vuông ABCD có độ dài cạnh bằng a. E là một điểm di chuyển trên CD (E khác C và D). Đường thẳng AE cắt BC tại F, đường thẳng vuông góc với AE tại A cắt đường thẳng CD tại K.

a) Chứng minh $\frac{1}{AE^2}+\frac{1}{AF^2}$ không đổi

b) Chứng minh $\cos AKE=\sin EKF.\cos EFK+\sin EFK.\cos EKF$

c) Lấy M là trung điểm của AC. Trình bày cách dựng điểm N trên DM sao cho khoảng cách từ N đến AC bằng tổng khoảng cách từ N đến DC và AD.

Câu 5.

Cho ABCD là hình bình hành. Đường thẳng d đi qua A không cách hình bình hành, ba điểm H, I, K lần lượt là hình chiếu của B, C, D trên d. Xác định vị trí của d để tổng: BH + CI + DK có giá trị lớn nhất.

Hết

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN TRIỆU SƠN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 12

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2012-2013
MÔN THI: TOÁN
Ngày thi: 28/11/2012
Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. *(4,0 điểm)*

1. Cho biểu thức: $P=\dfrac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3}+\dfrac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}}-\dfrac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm m để có x thỏa mãn $P\left(\sqrt{x}+3\right)=m$.

2. Cho hàm số: $f(x)=\left(x^3+6x-7\right)^{2012}$. Tìm $f(a)$ với $a=\sqrt[3]{3+\sqrt{17}}+\sqrt[3]{3-\sqrt{17}}$.

Câu 2. *(4,0 điểm)*

1. Giải phương trình: $x^2+5x+9=(x+5)\sqrt{x^2+9}$.

2. Tìm các số nguyên x, y thoả mãn đẳng thức: $2xy^2+x+y+1=x^2+2y^2+xy$.

Câu 3. *(4,0 điểm)*

1. Tìm các số thực x sao cho $x+\sqrt{2012}$ và $\dfrac{13}{x}-\sqrt{2012}$ đều là số nguyên.

2. Cho ba số thực x,y,z thoả mãn $xyz=1$. Chứng minh rằng:

Nếu $x+y+z>\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$ thì trong ba số x,y,z có duy nhất một số lớn hơn 1.

Câu 4. *(6,0 điểm)*

1. Cho hình vuông ABCD và điểm P nằm trong tam giác ABC.

a) Giả sử $BPC=135^o$. Chứng minh rằng $AP^2 = CP^2 + 2BP^2$.

b) Các đường thẳng AP và CP cắt các cạnh BC và AB tương ứng tại các điểm M và N. Gọi Q là điểm đối xứng với B qua trung điểm của đoạn MN. Chứng minh rằng khi P thay đổi trong tam giác ABC, đường thẳng PQ luôn đi qua D.

2. Cho tam giác ABC, lấy điểm C_1 thuộc cạnh AB, A_1 thuộc cạnh BC, B_1 thuộc cạnh AC. Biết rằng độ dài các đoạn thẳng AA_1, BB_1, CC_1 không lớn hơn 1.

Chứng minh rằng $S_{ABC}\le\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (S_{ABC} là diện tích tam giác ABC).

Câu 5. *(2,0 điểm)*

Với x, y là những số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$Q=\sqrt{\frac{x^3}{x^3+8y^3}}+\sqrt{\frac{4y^3}{y^3+(x+y)^3}}$$

Hết

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN THỦY NGUYÊN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018-2019
MÔN THI: TOÁN
Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 13

(Đề thi có một trang)

Câu 1. *(2,5 điểm)* Cho biểu thức $P=\left(\frac{x+3\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}-2}-\frac{x+\sqrt{x}}{x-1}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}+\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right)$. (với $x>0; x\neq 1$)

a) Rút gọn biểu thức P;

b) Với giá trị của x ta có $\frac{1}{P}-\frac{\sqrt{x}+1}{8}\geq 1$.

Câu 2. *(2,0 điểm)*

a) Giải phương trình: $\sqrt{x+3}+2x\sqrt{x+1}=2x+\sqrt{x^2+4x+3}$.

b) Cho các số thực $x, y, z\neq 0$ thỏa mãn $x^2+y^2+z^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=6$. Tính giá trị biểu thức $P=x^{2017}+y^{2018}+z^{2019}$.

Câu 3. *(1,5 điểm)* a) Chứng minh rằng $A=n^2+n+2$ không chia hết cho 15 với mọi số nguyên n.

b) Có tồn tại hay không các số nguyên x, y thỏa mãn điều kiện

$$2016x^{2017}+2017y^{2018}=2019.$$

Câu 4. *(3,0 điểm)* Từ điểm P nằm ngoài đường tròn $(O;R)$ kẻ hai tiếp tuyến PA và PB với A và B là các tiếp điểm. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ A đến đường kính BC của đường tròn $(O;R)$.

a) Chứng minh rằng PC cắt AH tại trung điểm của AH;

b) Cho $OP=m$. Tính độ dài AH theo R và m;

c) Đường thẳng d đi qua P sao cho khoảng cách từ O đến đường thẳng d bằng $R\sqrt{2}$, đường thẳng vuông góc với PO tại O cắt tia PB tại M. Xác định vị trí của điểm P trên đường thẳng d để diện tích tam giác POM đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó theo R?

Câu 5. *(1,25 điểm)* a) Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq 3$. Chứng minh rằng $\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}+\frac{1}{2}(ab+bc+ca)\geq 3$.

b) Cho các số 1; 2; 3; 4;….; 2018 được viết trên một cái bảng. Bạn được phép thay thế bất cứ hai trong các số này bởi một số mà hoặc tổng hoặc hiệu bằng hiệu của các số đó. Chỉ ra rằng sau 2017 lần thực hiện phép toán này, số duy nhất còn lại trên bảng không thể là số 0.

Hết

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
QUẬN NGÔ QUYỀN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 14

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUẬN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018-2019
MÔN THI: TOÁN
Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. *(2,0 điểm)* Cho biểu thức $P=\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{1-\sqrt{xy}}+\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{1+\sqrt{xy}}\right):\left(1+\frac{x+y+2xy}{1-xy}\right)$.

a) Rút gọn biểu thức P;

b) Tính giá trị của P với $x=\frac{2}{2+\sqrt{3}}$.

Câu 2. *(2,0 điểm)*

a) Giải phương trình: $x^2-10x+27=\sqrt{6-x}+\sqrt{x-4}$.

b) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $y^2+2xy-3x-2=0$.

Câu 3. (2,0 điểm)

a) Tìm số tự nhiên gồm bốn chữ số $\overline{abcd}$ biết rằng nó là một số chính phương, chia hết cho 9 và d là một số nguyên tố.

b) Cho ba số nguyên dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}+\frac{(a+b+c)^3}{abc}\ge 28.$$

Câu 4. *(3,0 điểm)* Cho đường tròn $(O;R)$ và dây cung $AH<R$. Qua H vẽ đường thẳng d tiếp xúc với $(O;\ R)$. Vẽ đường tròn $(A;\ R)$ cắt đường thẳng d tại B và C sao cho H nằm giữa B và C. Vẽ HM vuông góc với OB $(M\in OB)$, vẽ HN vuông góc với OC $(N\in OC)$.

a) Chứng minh $MN\perp OA$;

b) $OB.OC=2R^2$;

c) Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác OMN khi H thay đổi.

Câu 5. *(1,0 điểm)* Chứng minh rằng bất kỳ một tam giác nhọn nào có diện tích bằng 1 cũng có thể đặt được trong một tam giác vuông có diện tích không quá $\sqrt{3}$ (Ta nói: Tam giác ABC đặt trong tam giác MNP nếu mọi điểm thuộc tam giác ABC đều không nằm ngoài tam giác MNP).

Hết

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
QUẬN HỒNG BÀNG

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 15

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUẬN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018-2019
MÔN THI: TOÁN
Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. *(2,0 điểm)* Cho biểu thức

$$P=\frac{x}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(1-\sqrt{y}\right)}-\frac{y}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}-\frac{xy}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(1-\sqrt{y}\right)}.$$

a) Tìm điều kiện của x, y để biểu thức P xác định và rút gọn P;

b) Tìm x, y nguyên thỏa mãn phương trình $P=2$.

Câu 2. *(2,0 điểm)*

a) Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+x+6}+\sqrt{x^2+x+2}=x+\frac{4}{x}$.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2+2y^2+2xy+3y-4=0$.

Câu 3. *(2,0 điểm)*

a) Tìm các chữ số a, b sao cho $\overline{a56b}\vdots 45$.

b) Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $xyz=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x+y+1}+\frac{1}{y+z+1}+\frac{1}{z+x+1}\le 1.$$

Câu 4. *(3,0 điểm)* Cho đường tròn $(O;R)$ và một điểm A nằm ngoài đường tròn $(O;R)$. Từ A vẽ hai tiếp tuyến AB, AC của $(O;R)$ (B, C là tiếp điểm). Từ B vẽ đường kính BD của $(O;R)$, đường thẳng AD cắt $(O;R)$ tại E (khác D).

a) Chứng minh $AE.AD=AH.AO$;

b) Qua O vẽ đường thẳng vuông góc với cạnh AD tại K và cắt đường thẳng BC tại F. Chứng minh rằng FD là tiếp tuyến của $(O;R)$;

c) Gọi I là trung điểm của cạnh AB, qua I vẽ đường thẳng vuông góc với cạnh AO tại M và đường thẳng này cắt đường thẳng DF tại N. Chứng minh $NA=ND$.

Câu 5. *(1,0 điểm)* Cho hình H gồm ngũ giác lồi có tất cả các góc là góc tù và tất cả các điểm nằm trong ngũ giác đó.Chứng minh rằng tồn tại hai đường chéo của ngũ giác sao cho hai hình tròn có đường kính là các đường chéo đố phủ kín hình H (Ta nói: Hai hình tròn phủ kín hình H nếu mọi điểm thuộc hình H đều thuộc ít nhất một trong hai hình tròn nói trên)

Hết

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN THANH HÀ

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 16

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2016-2017
MÔN THI: TOÁN
Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. *(2 điểm)*

1) Rút gọn biểu thức $A=\left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}+\frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right):\left(1-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right)$ với $x\ge 0; x\ne 4; x\ne 9$

2) Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $ab+bc+ca=6$ và $a^2+b^2+c^2=21$.

Tính giá trị biểu thức: $P=\sqrt{\frac{(a^2+6)(b^2+6)}{c^2+6}}+\sqrt{\frac{(b^2+6)(c^2+6)}{a^2+6}}+\sqrt{\frac{(c^2+6)(a^2+6)}{b^2+6}}$

Câu 2. *(2điểm)*

1) Giải phương trình: $x^2+2015x-2014=2\sqrt{2017x-2016}$

2) Cho hàm số $y=(m-1)x+2m-3$ (*m là tham số*) có đồ thị là đường thẳng (d).

Tìm m để đường thẳng (d) tiếp xúc với đường tròn tâm O (*O là gốc tọa độ Oxy*) bán kính 2cm (*đơn vị trên 2 trục tọa độ là cm*).

Câu 3. *(2 điểm)*

1) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì: $n^4+6n^3+11n^2+30n-24$ chia hết cho 24.

2) Tìm số hữu tỉ a, b biết phuong trình : $x^3+ax^2+bx+2=0$ có một nghiệm là $x=1+\sqrt{2}$

Câu 4. *(3 điểm)*

Cho nửa (O) đường kính BC=2R, A là điểm bất kì trên nửa đường tròn (A không trùng với B, C). Kẻ $AH\perp BC$, gọi E và F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ H xuống AB và AC.

a) Chứng minh AE.AB = AF.AC và $EF^3=BE.CF.BC$

b) Gọi I là điểm đối xứng với H qua AB. Chứng minh IA là tiếp tuyến của (O).

c) Tìm vị trí điểm A trên nửa đường tròn sao cho diện tích tam giác AHB đạt giá trị lớn nhất ?

Câu 5. *(1 điểm)*

Cho a, b là hai số dương thỏa mãn $a+b\le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{a^2+b^2+1}+\frac{1}{2ab}$$

Hết

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN HẬU LỘC

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 17

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2012-2013
MÔN THI: TOÁN
Ngày thi: 03/12/2012
Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. *(4,0 điểm)* Cho biểu thức $M=\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}+\frac{1}{1-\sqrt{x}}$

a) Rút gọn biểu thức M.

b) Tính giá trị của M với $x=9-4\sqrt{2}$.

c) Chứng minh $M<\frac{1}{3}$.

Câu 2. *(4,0 điểm)* Cho đường thẳng: y = (m - 2)x + 3 (m là tham số) (d).

a) Tìm giá trị của m để đường thẳng (d) song song với đường thẳng : y = 2x - 1

b) Chứng minh rằng đường thẳng (d) luôn đi qua một điểm cố định với mọi giá trị của m.

c) Tìm giá trị của m để khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng (d) bằng 1.

Câu 3. *(4,0 điểm)* Giải các phương trình sau:

a) $\frac{x+2}{x+1}+\frac{3}{x-2}=\frac{3}{x^2-x-2}+1$

b) $\sqrt{x^2-1}=x+1+\sqrt{x+1}$

Câu 4. *(2,0 điểm)* Giải phương trình nghiệm nguyên:

$$x^2y+xy-x=4.$$

Câu 5. *(5,0điểm)* Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, HB = 2cm, HC = 4,5cm. Vẽ đường tròn tâm A bán kính AH. Kẻ các tiếp tuyến BM, CN với đường tròn (M và N là các tiếp điểm, khác điểm H).

a) Chứng minh rằng ba điểm M, A, N thẳng hàng.

b) Tính diện tích tứ giác BMNC.

c) Gọi K là giao điểm của CN và HA. Tính các độ dài AK, KN.

Câu 6. *(1,0điểm)* Cho $x^2+y^2+z^2=3$.

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=x+y+2z$.

Hết

PHÒNG GD&ĐT KINH MÔN
TRƯỜNG THCS LÊ NINH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 18

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018-2019
MÔN THI: TOÁN
Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. *(2,0 điểm)*

1) Tính giá trị của biểu thức sau:

$$A = x^2(x+1) - y^2(y-1) + xy - 3xy(x-y+1) + 1974$$

Biết $x - y = \sqrt{29+12\sqrt{5}} - 2\sqrt{5}$

2) Chứng minh rằng:

Nếu a , b , c là các số không âm thoả mãn điều kiện: $b = \dfrac{a+c}{2}$ thì ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{2}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$$

Câu 2. *(2,0 điểm)*

1) Giải phương trình (ẩn x): $\dfrac{x-ab}{a+b} + \dfrac{x-ac}{a+c} + \dfrac{x-bc}{b+c} = a+b+c$

2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x+y)(x+2y)(x+3y) = 60\\(y+x)(y+2x)(y+3x) = 105\end{cases}$

Câu 3. *(2,0 điểm)*

1) Tìm các số nguyên a, b thoả mãn: $(a-\sqrt{2011})(b+\sqrt{2011}) = 14$
2) Cho $N = k^4 + 2k^3 - 16k^2 - 2k + 15$, k là số nguyên
   Tìm điều kiện của k để số N chia hết cho 16.

Câu 4. *(3,0 điểm)*

Cho đường tròn tâm O bán kính R và hai đường kính AB và MN bất kì. Đoạn BM và BN kéo dài cắt tiếp tuyến ở A của đường tròn tại hai điểm tương ứng là C và D, gọi P, Q là trung điểm của CA và DA.

a) Chứng minh tứ giác MNDC nội tiếp.
b) Đường cao BI của tam giác BPQ cắt OA tại E.Chứng minh E là trung điểm của OA.
c) Đường kính AB cố định, đường kính MN thay đổi. Hãy tính giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác BPQ theo R.

Câu 5. *(1,0 điểm)*

Cho 3 số a,b,c thoả mãn : $a+b+c=0$ và $-1 < a \le b \le c < 1$

Chứng minh : $a^2+b^2+c^2 < 2$

Hết

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐẠO TẠO
HUYỆN VĨNH LỘC

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 19

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2016-2017
MÔN THI: TOÁN
Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. *(4,0 điểm)*

Cho biểu thức $P = \dfrac{3x+\sqrt{9x}-3}{x+\sqrt{x}-2} - \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} - \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}$

a. Tìm ĐKXĐ và rút gọn P

b. Tìm x để $P < 0$

Câu 2. *(4,0 điểm)*

a. Giải phương trình: $x^2 - 7x = 6\sqrt{x+5} - 30$.

b. Cho hai số dương a và b. Chứng minh rằng $(a+b).\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right) \ge 4$

Câu 3. *(4,0 điểm)*

a. Tìm số tự nhiên n sao cho $A = n^2 + n + 6$ là số chính phương

b. Cho các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 = z^2$

Chứng minh A = xy chia hết cho 12

Câu 4. *(6,0 điểm)* Cho tam giác ABC nhọn, ba đường cao AA', BB', CC'.

a. Chứng minh $\Delta AC'C \sim \Delta AB'B$

b. Trên BB' lấy M, trên CC' lấy N sao cho $AMC = ANB = 90^0$. Chứng minh rằng AM = AN.

c. Gọi S, S' lần lượt là diện tích của tam giác ABC và tam giác A'B'C'.

Chứng minh rằng $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - \dfrac{S'}{S}$

Câu 5. *(2,0 điểm)*

Cho x, y là các số dương thỏa mãn $x + y \ge \dfrac{34}{35}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = 3x + 4y + \frac{2}{5x} + \frac{8}{7y}$$

Hết

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐẠO TẠO
HUYỆN CẨM GIANG

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 20

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2016-2017
MÔN THI: TOÁN
Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. *(2,0 điểm)*

a) Cho biểu thức: $P=\left(\frac{1}{2\sqrt{x}-1}+\frac{2}{1-4x}\right)\cdot\frac{6\sqrt{x}-9x-1}{1-3\sqrt{x}}$ với $x\ge 0; x\ne\frac{1}{4}; x\ne\frac{1}{9}$ Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức P nhận giá trị nguyên.

b) Cho $x=\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}}+\sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}$

Tính giá trị của biểu thức $A = x^{2015} - x^{2016} + 2017$.

Câu 2. *(2,0 điểm)*

a) Giải phương trình: $x^2+3x+1=(x+3)\sqrt{x^2+1}$

b) Tìm các cặp số (x; y) nguyên thỏa mãn: $5x-3y=2xy-11$.

Câu 3. *(2,0 điểm)*

a) Cho n là số tự nhiên lớn hơn 1. Chứng minh rằng n^4+4^n là hợp số.

b) Cho x, y, z > 0 và x + y + z = 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+1}+\frac{z}{z+1}$$

Câu 4. *(3,0 điểm)*

Cho hình vuông ABCD có độ dài cạnh bằng 2cm. Gọi E, F thứ tự là trung điểm của AD, DC. Gọi I, H thứ thự là giao điểm của AF với BE, BD. Vẽ $BIM=45^0$ (M thuộc cạnh BC), O là giao điểm của IM và BD.

a) Tính độ dài của AI, BI.

b) Chứng minh 4 điểm B, I, H, M cùng thuộc một đường tròn.

c) Chứng minh DH.BO = OH.BD.

Câu 5. *(1,0 điểm)*

Cho a, b, c là các số thực dương có tổng bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\cdot\left(b+\frac{1}{c}\right)\cdot\left(c+\frac{1}{a}\right)\ge\left(\frac{10}{3}\right)^3.$$

Hết

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN CẨM GIÀNG

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 21

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2015-2016
MÔN THI: TOÁN
Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. *(2,0 điểm)*

a) Cho biểu thức: $A = \left(1-\frac{2\sqrt{a}}{a+1}\right):\left(\frac{1}{1+\sqrt{a}}-\frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a}+\sqrt{a}+a+1}\right)$, với $a \geq 0$

Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức A khi $a = 2016 - 2\sqrt{2015}$.

b) Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{56}{54}}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{\frac{56}{54}}}$ là một số nguyên.

Câu 2. *(2,0 điểm)*

Giải phương trình:

a) $\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=4$.

b) $\left(x^2+2x\right)^2-2x^2-4x=3$

Câu 3. *(2,0 điểm)*

a) Cho $S = 4 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{98}$. Chứng tỏ S không phải là số chính phương.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x; y) thoả mãn: $2x^2+y^2+4x=4+2xy$.

Câu 4. *(3,0 điểm)*

Cho hình vuông ABCD, gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Lấy điểm G thuộc cạnh BC, điểm H thuộc cạnh CD sao cho $GOH = 45^0$. Gọi M là trung điểm của AB.

a) Chứng minh: $DOH = BGO$ và $HD.BG = OB.OD$.

b) Chứng minh: $HD.BG = MB.AD$ và $MG // AH$.

c) Đường thẳng qua D cắt AB, BC lần lượt tại E và F (E và A nằm cùng phía đối với B, F và C nằm cùng phía đối với B). Chứng minh: $\frac{\sqrt{2}}{BD}=\frac{1}{BE}+\frac{1}{BF}$.

Câu 5. *(1,0 điểm)*

a) Cho x, y, z dương thoả mãn: x + y + z = 1. CMR: $\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}\leq\sqrt{6}$.

b) So sánh tổng $S=\frac{1}{\sqrt{1.2015}}+\frac{1}{\sqrt{2.2014}}+\frac{1}{\sqrt{3.2013}}+...+\frac{1}{\sqrt{2015.1}}$ với số $\frac{2015}{1008}$.

Hết

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
QUẬN LÊ CHÂN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 22

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUẬN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018-2019
MÔN THI: TOÁN
Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. *(2,0 điểm)*

a) Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}+\dfrac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2}-a+b}\right)\cdot\dfrac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\quad (a>b>0)$

Chứng minh rằng khi $a-b=1$ thì $P\ge 2\sqrt{2}+2$.

b) Cho $x_0=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}-\sqrt{6-3\sqrt{2+\sqrt{3}}}$. Chứng ming rằng x_0 là một nghiệm của phương trình $x^4-16x^2+32=0$.

Câu 2. *(3,0 điểm)*

a) Giải phương trình $x^2+8x-1=2(2x+1)\sqrt{x^2-1}\ \sqrt{2}$

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x(1+x+x^2)=4y(y+1)$

Câu 3. *(3,0 điểm)*

1. Cho ΔABC có $A=60^0$. Đặt $BC=a$; $CA=b$; $AB=c$

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a+c}=\dfrac{3}{a+b+c}$.

2. Cho hai đường tròn (O) và (O′) cắt nhau tại A, B. Kẻ tiếp tuyến chung MN, M ∈ (O), N ∈ (O′). Qua A kẻ đường thẳng song song với MN cắt (O) và (O′) lần lượt tại C, D. Hai đường thẳng CM và DN cắt nhau tại E. Hai đường thẳng BM và BN cắt CD lần lượt tại P, Q. Chứng minh rằng $EP=EQ$.

Câu 4. *(1,0 điểm)*

Cho x, y là hai số thực dương thỏa mãn: $(x-1)(y-1)\ge 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A=\dfrac{x^2y+xy^2}{(x^2+y^2+8)^2.\sqrt{1+x^2y^2}}$.

Câu 5. *(1,0 điểm)*

Xét tập $X=\{1;2;3;...;19791126\}$, tô màu các phần tử của X bằng một trong 7 màu: đỏ, cam, vàng, lục, lam, tràm, tím. Chứng minh rằng tồn tại ba phần tử phân biệt a, b, c của X cùng màu sao cho a, b, c lớn hơn 1 và 2019^a+1 là bội của 2019^b+1; 2019^b+1 là bội của 2019^c+1.

Hết

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN KINH MÔN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2013-2014
MÔN THI: TOÁN
Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 23

(Đề thi có một trang)

Câu 1. *(2.0 điểm)*

Rút gọn các biểu thức sau:

1) $M=\dfrac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{10}+\sqrt{3+\sqrt{5}}}-\dfrac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{10}+\sqrt{3-\sqrt{5}}}$.

2) $Q=\dfrac{\sqrt{x-\sqrt{4(x-1)}}+\sqrt{x+\sqrt{4(x-1)}}}{\sqrt{x^2-4(x-1)}}.\left(1-\dfrac{1}{x-1}\right)$ với $x>1; x\neq 2$

Câu 2. *(2.0 điểm)*

1) Giải phương trình: $(x+4)\sqrt{x^2+7}=x^2+4x+7$

2) Cho $M=\dfrac{2\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}+5}$ tìm số hữu tỉ a để M nguyên

Câu 3. *(2.0 điểm)*

1) Tìm số nguyên dương x, y thỏa mãn: $x=\sqrt{2x(x-y)+2y-x+2}$

2) Cho a, b là số nguyên thỏa mãn: $2a^2+3ab+2b^2$ chia hết cho 7. Chứng minh rằng a^2-b^2 chia hết cho 7.

Câu 4. *(3.0 điểm)*

Cho tam giác ABC vuông tại A (AC > AB) đường cao AH (H ∈ BC). Trên tia HC lấy điểm D sao cho HD = HA. Đường vuông góc với BC tại D cắt AC tại E.

1) Chứng minh rằng hai tam giác BEC và ADC đồng dạng. Tính độ dài đoạn thẳng BE theo m =AB.

2) Gọi M là trung điểm của của đoạn BE. Chứng minh rằng hai tam giác BHM và BEC đồng dạng. Tính số đo góc AHM.

3) Tia AM cắt BC tại G. Chứng minh: $\dfrac{GB}{BC}=\dfrac{HD}{AH+HC}$

Câu 5. *(1.0 điểm)*

Cho a,b,c là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$M=\sqrt{\frac{a}{b+c+2a}}+\sqrt{\frac{b}{c+a+2b}}+\sqrt{\frac{c}{a+b+2c}}.$$

Hết

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN TRỰC NINH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 24

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2009-2010
MÔN THI: TOÁN
Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. *(4,0 điểm)*

Cho biểu thức:

$$A=\left(\frac{1}{1-\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right):\left(\frac{2x+\sqrt{x}-1}{1-x}+\frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}}\right) \quad \text{Với } x>0;\ \ x\neq\frac{1}{4};\ \ x\neq 1$$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tính giá trị của A khi $x=17-12\sqrt{2}$

c) So sánh A với $\sqrt{A}$.

Câu 2. *(3,5 điểm)* Chứng minh rằng:

a) $2\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)<\frac{1}{\sqrt{b}}<2\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)$ Biết a; b; c là 3 số thực thỏa mãn điều kiện:

a = b + 1 = c + 2 ; c >0.

b) Biểu thức $B=\sqrt{1+2008^2+\frac{2008^2}{2009^2}}+\frac{2008}{2009}$ có giá trị là một số tự nhiên.

Câu 3. *(3,0 điểm)* Giải phương trình

a) $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x+3}=\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2+2x-3}$ b) $\sqrt{4x+1}-\sqrt{3x-2}=\frac{x+3}{5}$.

Câu 4.*(8,0 điểm)*

Cho AB là đường kính của đường tròn (O;R). C là một điểm thay đổi trên đường tròn (C khác A và B), kẻ CH vuông góc với AB tại H. Gọi I là trung điểm của AC, OI cắt tiếp tuyến tại A của đường tròn (O;R) tại M, MB cắt CH tại K.

a) Chứng minh 4 điểm C, H, O, I cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh MC là tiếp tuyến của (O;R).

c) Chứng minh K là trung điểm của CH.

d) Xác định vị trí của C để chu vi tam giác ACB đạt giá trị lớn nhất? Tìm giá trị lớn nhất đó theo R.

Câu 5. *(1,5 điểm)* Cho $M=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{2008}+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{2008}$

a) Chứng minh rằng M có giá trị nguyên. b) Tìm chữ số tận cùng của M.

Hết

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN TIỀN HẢI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2016-2017
MÔN THI: TOÁN
Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 25

(Đề thi có một trang)

Câu 1. *(4,0 điểm)*

1. Cho biểu thức $A=\left(\frac{1}{x-\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right):\frac{1}{x-2\sqrt{x}+1}$.

a) Rút gọn A.

b) Tìm x để $A=\frac{3}{2}$.

2. Chứng minh rằng: Nếu $\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}}=a$ thì $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$

Câu 2. *(4,0 điểm)*

1. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x+(m-1)y=2 \\ (m+1)x-y=m+1 \end{cases}$

Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x, y) thỏa mãn x + 5y = 0.

2. Tìm tất cả các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn:

$\frac{a-b\sqrt{2}}{b-c\sqrt{2}}$ là số hữu tỉ và $a^2+b^2+c^2$ là số nguyên tố

Câu 3. *(4,0 điểm)*

1. Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): y = mx + m + 1 (m là tham số)

a) Tìm m để đường thẳng (d) và parabol (P) cắt nhau tại 2 điểm phân biệt.

b) Trên parabol (P) lấy 3 điểm phân biệt: $A(a, a^2)$, $B(b, b^2)$, $C(c, c^2)$.

Biết rằng $a^2 - b = b^2 - c = c^2 - a$.

Tính giá trị của biểu thức: M = (a + b + 1)(b + c + 1)(c + a + 1).

2. Giải phương trình: $x^2-x-1=\sqrt{8x+1}$

Câu 4. *(6,0 điểm)*

Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh CD lấy điểm M khác C và D. Đường tròn đường kính AM cắt cạnh AB tại điểm N khác A. Đường tròn đường kính CD cắt đường tròn đường kính AM tại E khác D.

a) Chứng minh rằng ba điểm C, E, N thẳng hàng.

b) Gọi giao điểm của đoạn thẳng MN với DE là H, đoạn thẳng NM cắt đường tròn đường kính CD tại K. Chứng minh rằng $MK^2 = MH.MN$.

c) Gọi F là giao điểm của DE với cạnh BC. Chứng minh rằng MF ⊥ AC.

Câu 5. *(2,0 điểm)*

Cho các số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện: $\begin{cases} a\neq 0 \\ \frac{2b}{a}\geq\frac{c}{a}+4 \end{cases}$.

Chứng minh rằng phương trình $ax^2+bx+c=0$ có nghiệm.

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ BẮC GIANG

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 26

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2017-2018
MÔN THI: TOÁN
Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. *(5 điểm)*

a/ Cho biểu thức $M=\left(\frac{x+2\sqrt{x}+4}{x\sqrt{x}-8}+\frac{x+2\sqrt{x}+1}{x-1}\right):\left(\frac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2}+\frac{2\sqrt{x}+10}{x+6\sqrt{x}+5}\right)$

Rút gọn M và tìm x để $M>1$

b/Cho a, b, c >0 thỏa mãn $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=1$. Tính H=$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{1+c}+\frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{1+a}+\frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{1+b}$

Câu 2. *(4 điểm)*

a/ Giải phương trình $\sqrt{30-\frac{5}{x^2}}+\sqrt{6x^2-\frac{5}{x^2}}=6x^2$

b/ Tìm số thực x để 3 số $x-\sqrt{3};x^2+2\sqrt{3};x-\frac{2}{x}$ là số nguyên

Câu 3. *(4 điểm)*

a/ Tìm x nguyên dương để $4x^3+14x^2+9x-6$ là số chính phương

b/ Cho *x, y, z* là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=xyz$.

Chứng minh rằng: $\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}+\frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y}+\frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z}\le xyz$

Câu 4. *(6 điểm)*

Cho đoạn thẳng OA = R, vẽ đường tròn (O;R). Trên đường tròn (O;R) lấy H bấy kỳ sao cho AH < R, qua H vẽ đường thẳng a tiếp xúc với đường tròn (O;R). Trên đường thăng a lấy B và C sao cho H nằm giữa B và C và AB = AC=R. Vẽ HM vuông góc với OB ($M\in OB$), vẽ HN vuông góc với OC ($N\in OC$)

a/ Chứng minh $OM\cdot OB=ON\cdot OC$ và MN luôn đi qua 1 điểm cố định

b/ Chứng minh $OB\cdot OC=2R^2$

c/ Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác OMN khi H thay đổi

Hết

PHÒNG GD&ĐT THANH OAI
TRƯỜNG THCS THANH VĂN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 27

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TRƯỜNG
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2015-2016
MÔN THI: TOÁN
Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. *(6 điểm)*

a. Cho biểu thức $M=\left(1-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right):\left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}+\frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right)$

1) Rút gọn M

2) Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức M nhận giá trị là số nguyên

b. Tính giá trị của biểu thức P

$P=3x^{2013}+5x^{2011}+2006$ với $x=\sqrt{6+2\sqrt{2}.\sqrt{3-\sqrt{\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{18-8\sqrt{2}}}}}-\sqrt{3}$

Câu 2. *(4 điểm)*

a - Giải phương trình: $\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}-4x^3=1-3x^4$

b - Tìm tất cả các số nguyên n sao cho n^2+2014 là một số chính phương

Câu 3. *(4 điểm)*

a) Cho đường thẳng: $(m-2)x+(m-1)y=1$ (m là tham số) (1)

Chứng minh rằng đường thẳng (1) luôn đi qua một điểm cố định với mọi giá trị của m

b) Chứng minh rằng: nếu a, b ,c là ba số thỏa mãn a + b + c = 2013 và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2013}$ thì một trong ba số phải có một số bằng 2013

Câu 4. *(5 điểm)*

Cho đường tròn (O; R). AB và CD là hai đường kính cố định của (O) vuông góc với nhau. M là một điểm thuộc cung nhỏ AC của (O). K và H lần lượt là hình chiếu của M trên CD và AB.

a) Tính $\sin^2 MBA+\sin^2 MAB+\sin^2 MCD+\sin^2 MDC$

b) Chứng minh: $OK^2=AH(2R-AH)$

c) Tìm vị trí điểm H để giá trị của: P = MA. MB. MC. MD lớn nhất.

Câu 5. *(1 điểm)*

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{4a}{b+c-a}+\frac{9b}{a+c-b}+\frac{16c}{a+b-c}$

Hết

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN GIA LỘC

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 28

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2015-2016
MÔN THI: TOÁN
Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. *(2,0 điểm)*

Rút gọn biểu thức:

1) $A=\dfrac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$ với $x\ge 0,\ x\ne 1$

2) $B=\dfrac{2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

Câu 2. (2,0 điểm)

Giải phương trình:

1) $2x^4-7x^3+9x^2-7x+2=0$ 2) $2\sqrt{3x+10}=x^2+9x+20$

Câu 3. (2,0 điểm)

1) Giải phương trình nghiệm nguyên : $x^2+xy-2014x-2015y-2016=0$

2) Tìm số nguyên tố k để k^2+4 và k^2+16 đồng thời là các số nguyên tố.

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho hình vuông ABCD có AC cắt BD tại O. Goïi M là điểm bất kỳ thuộc cạnh BC (M khác B, C). Tia AM cắt đường thẳng CD tại N. Trên cạnh AB lấy điểm E sao cho BE = CM.

1) Chứng minh tam giác OME vuông cân.

2) Chứng minh ME // BN.

3) Gọi H là giao điểm của OM và BN. Chứng minh CH $\perp$ BN.

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=4$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{2x+y+z}+\dfrac{1}{x+2y+z}+\dfrac{1}{x+y+2z}\le 1$

Hết

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN VŨ QUANG

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 29

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018-2019
MÔN THI: TOÁN
Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Câu 1.

a) Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x^3+y^3-6\left(x^2+y^2\right)+13(x+y)-20=0$.

Tính giá trị của $A=x^3+y^3+12xy$.

b) Cho biểu thức $x^2-x-1=0$. Tính giá trị của $Q=\dfrac{x^6-3x^5+3x^4-x^3+2017}{x^6-x^3-3x^2-3x+2017}$.

c) Cho $x+y=1$ và $xy\neq 0$. Chứng minh rằng $\dfrac{x}{y^3-1}-\dfrac{y}{x^3-1}+\dfrac{2(x-y)}{x^2y^2+3}=0$.

Câu 2.

a) Cho biểu thức $B=\dfrac{2}{a}-\left(\dfrac{a^2}{a^2-ab}+\dfrac{a^2-b^2}{ab}-\dfrac{b^2}{b^2-ab}\right):\dfrac{a^2-ab+b^2}{a-b}$.

Rút gọn và tính giá trị của B với $|2a-1|=1$ và $|b+1|=\dfrac{1}{2}$.

b) Cho $P(x)$ là đa thức bậc 4 với hệ số cao nhất bằng 1.

Biết $P(2015)=2016$; $P(2016)=2017$; $P(2017)=2018$.

Tính $P(2014)+P(2018)$.

Câu 3.

a) Giải phương trình $\dfrac{1}{x^2+5x+4}+\dfrac{1}{x^2+11x+28}+\dfrac{1}{x^2+17x+70}=\dfrac{3}{4x-2}$.

b) Giải phương trình nghiệm nguyên $x^2-xy+y^2=3$.

Câu 4.

a) Tìm x, y để biểu thức $F=5x^2+2y^2-2xy-4x+2y+3$ đạt giá trị nhỏ nhất.

b) Tìm các số nguyên dương n sao cho $2^n+3^n+4^n$ là số chính phương.

Câu 5.

a) Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M là điểm trên cạnh AB sao cho $AM=\dfrac{1}{3}AB$, N là trung điểm của CD, G là trọng tâm tam giác BMN, I là giao điểm của AG và BC. Tính $\dfrac{AG}{GI}$ và $\dfrac{IB}{IC}$.

b) Cho tam giác ABC, phân giác trong góc A cắt BC tại D, trên các đoạn thẳng DB, DC lần lượt lấy các điểm E và F sao cho $EAD=FAD$. Chứng minh rằng $\dfrac{BE.BF}{CE.CF}=\dfrac{AB^2}{AC^2}$.

c) Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng đường chéo AC, trên tia đối của tia AD lấy điểm E. Đường thẳng EB cắt đường thẳng DC tại F, CE cắt AF tại O. Chứng minh rằng $\Delta AEC\sim\Delta CAF$, tính số đo EOF.

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
QUẬN BẮC TỪ LIÊM

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUẬN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018-2019
MÔN THI: TOÁN
Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 30

(Đề thi có một trang)

Câu 1. *(4,0 điểm)*

1. Cho biểu thức:

$$A=\sqrt{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right).\frac{1}{x+y+2\sqrt{xy}}+\frac{2}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^3}.\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\right)}:\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{xy\sqrt{xy}}$$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=3+\sqrt{5}$; $y=3-\sqrt{5}$

2. Cho 2 biểu thức: $P=\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b};Q=\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}$ với $a,b,c\neq 0$ thỏa mãn: $a\neq b\neq c$ và $a^3+b^3+c^3=3abc$. Chứng minh rằng: $P.Q=9$

Câu 2. *(4,0 điểm)* Giải các phương trình sau:

a) $x\left(\frac{5-x}{x+1}\right)\left(x+\frac{5-x}{x+1}\right)=6$

b) $(4x-1)\sqrt{x^2+1}=2(x^2+1)+2x-1$

Câu 2. *(4,0 điểm)*

a) Tìm các số nguyên x,y thỏa mãn: $y^2+2xy-7x-12=0$

b) Tìm số tự nhiên n để: $A=n^{2012}+n^{2002}+1$ là số nguyên tố.

Câu 3. *(6,0 điểm)*

Cho tam giác ABC vuông tại A có cạnh $AC>AB$, đường cao AH (H thuộc BC). Trên tia HC lấy điểm D sao cho $HD=HA$. Đường vuông góc với BC tại D cắt AC tại E.

a) Chứng minh: $\Delta ADC\backsim\Delta BEC$. Cho $AB=m$, tính BE theo m.

b) Gọi M là trung điểm của BE. Chứng minh rằng: $\Delta BHM\backsim\Delta BEC$. Tính góc AHM.

c) Tia AM cắt BC tại G.Chứng minh rằng: $\frac{GB}{BC}=\frac{HD}{AH+HC}$

Câu 4. *(2,0 điểm)*

Cho x,y,z là các số dương thỏa mãn: $\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}=6$.

Chứng minh rằng $\frac{1}{3x+3y+2z}+\frac{1}{3x+2y+3z}+\frac{1}{2x+3y+3z}\leq\frac{3}{2}$.

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN LỤC NAM

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 31

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018-2019
MÔN THI: TOÁN
Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. *(4,0 điểm)*

1. Rút gọn biểu thức: $\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1}+\frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{1-\sqrt{xy}}+1\right):\left(1-\frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{\sqrt{xy}-1}-\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1}\right)$, với $x>0; y>0; xy\neq 1$.

2. Cho $x=\frac{\left(\sqrt{3}-1\right).\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}{\sqrt{21+4\sqrt{5}}+3}$, tính giá trị biểu thức $P=\left(x^2+4x-2\right)^{2017}$.

Câu 2. *(2,0 điểm)*

1. Cho $x=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ là một nghiệm của phương trình: $ax^2+bx+1=0$. Với a,b là các số hữu tỉ. Tìm a và b.

2. Cho p là số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh $p^{20}-1$ chia hết cho 100.

3. Cho a,b,c là độ dài của 3 cạnh một tam giác, chứng minh rằng:

$$a^4+b^4+c^4<2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2$$

Câu 3. *(2,0 điểm)*

1. Tìm các số nguyên x sao cho x^3-3x^2+x+2 là số chính phương.

2. Giải phương trình: $\sqrt{x^2+3x}+2\sqrt{x+2}=2x+\sqrt{x+\frac{6}{x}+5}$.

Câu 4. *(6,0 điểm)*

Cho hình thoi $ABCD$ có $AB=BD=a$. Trên tia đối của tia AB lấy điểm N, trên tia đối của tia DB lấy điểm K sao cho $AN+DK=2a$. Gọi giao điểm của CN với BD và AD thứ tự là I và M. Tia BM cắt ND tại P.

1. Chứng minh $IC.CN=IN.CM$.

2. Chứng minh $DM.BN=a^2$. Từ đó tính số đo góc BPD.

3. Tìm vị trí điểm N và K để diện tích tứ giác $ADKN$ lớn nhất.

Câu 5. *(1,0 điểm)*

Cho $a,b,c>0$ và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$a^5+b^5+c^5+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 6$$

Hết

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN KIM THÀNH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 32

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018-2019
MÔN THI: TOÁN
Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. *(2,0 điểm)*

1. Cho biểu thức: $A=\left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}+\frac{1}{1-\sqrt{x}}\right):\frac{\sqrt{x}-1}{2}$.

a, Rút gọn biểu thức A.

b, Chứng minh rằng: $0<A\le 2$.

2. Cho biểu thức: $\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}=\sqrt{2}$ với $-2<x<2$ và $x\ne 0$.

Tính giá trị của biểu thức: $\frac{x+2}{x-2}$.

Câu 2. *(2,0 điểm)*

1. Giải phương trình: $x^2-7x=6\sqrt{x+5}-30$.

2. Cho hai đường thẳng $(d_1): y=(m-1)x-m^2-2m$;

$(d_2): y=(m-2)x-m^2-m+1$ cắt nhau tại G. (Với m là tham số)

a, Xác định tọa độ điểm G.

b, Chứng tỏ rằng điểm G luôn thuộc một đường thẳng cố định khi m thay đổi.

Câu 3. *(2,0 điểm)*

a, Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $p^2-1\,\vdots\,24$.

b, Tìm số tự nhiên n sao cho $A=n^2+n+6$ là số chính phương.

c, Tìm các số nguyên x,y thỏa mãn: $y^2+2xy-3x-2=0$.

Câu 4. *(3,0 điểm)*

Cho đường tròn tâm O, đường thẳng (d) cố định nằm ngoài đường tròn. M di động trên đường thẳng (d), kẻ 2 tiếp tuyến MA và MB với đường tròn $(O;R)$, OM cắt AB tại I.

a, Chứng minh tích $OI.OM$ không đổi.

b, Tìm vị trí của M để ΔMAB đều.

c, Chứng minh rằng khi M di động trên (d) thì AB luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 5. *(1,0 điểm)*

Cho các số thực dương $x;y;z$ thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{x+yz}+\frac{y}{y+zx}+\frac{z}{z+xy}\le\frac{9}{4}$$

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN HOÀI NHƠN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 33

(Đề thi có 2 trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018-2019
MÔN THI: TOÁN
Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. *(4,0 điểm)*

a) Thu gọn biểu thức: $A=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+4}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}$.

b) Cho $x=\dfrac{2}{\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}-11}-\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}+1}}$. Tính giá trị của biểu thức $B=\left(1-2x+x^2+x^3-x^4\right)^{2018}$.

c) Cho $x=\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}$ và $y=\sqrt[3]{17+12\sqrt{2}}+\sqrt[3]{17-2\sqrt{2}}$. Tính giá trị của biểu thức:

$$C=x^3+y^3-3(x+y)+2018.$$

Câu 2. *(4,0 điểm)*

a) Tìm các số nguyên dương có hai chữ số, biết số đó là bội của tích hai chữ số của chính số đó.

b) Chứng minh rằng số tự nhiên

$A=1.2.3....2017.2018.\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+...+\dfrac{1}{2017}+\dfrac{1}{2018}\right)$ chia hết cho 2019.

Câu 3. *(5,0 điểm)*

3.1. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện:

$$a^2+b^2+c^2=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2.$$

a) Tính $a+b+c$, biết rằng $ab+bc+ca=9$.

b) Chứng minh rằng: Nếu $c\ge a$, $c\ge b$ thì $c\ge a+b$.

3.2. Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn $x^{2019}+y^{2019}+z^{2019}=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $E=x^2+y^2+z^2$.

Câu 4. *(4,0 điểm)*

Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Hai điểm M, N lần lượt di động trên hai đoạn thẳng AB, AC sao cho $\frac{AM}{MB}+\frac{AN}{NC}=1$. Đặt $AM=x$ và $AN=y$. Chứng minh rằng:

a) $MN^2=x^2+y^2-xy$.

b) $MN=a-x-y$.

c) MN luôn tiếp xúc với đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Câu 5. *(3,0 điểm)*

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O), gọi M là trung điểm của cạnh BC, H là trực tâm của tam giác ABC và K là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh BC. Tính diện tích của tam giác ABC, biết $OM=OK=\frac{KM}{4}$ và $AM=30$ cm.

_____**Hết**_____

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN HẠ HÒA

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2015-2016
MÔN THI: TOÁN
Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 34

(Đề thi có 1 trang)

Câu 1. *(3,0 điểm)*

a) Giải phương trình nghiệm nguyên: $4x^2+8x=38-6y^2$.

b) Tìm số tự nhiên n để n^4+4 là số nguyên tố.

Câu 2. *(4,0 điểm)*

a) Cho $\left(x+\sqrt{x^2+2015}\right)\left(y+\sqrt{y^2+2015}\right)=2015$.

Hãy tính giá trị của biểu thức $A=x+y+2016$.

b) Chứng minh rằng:

Nếu $ax^3=by^3=cz^3$ và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ thì $\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$.

Câu 3. *(4,0 điểm)*

a) Giải phương trình $4\left(x^2+4x+2\right)=11\sqrt{x^4+4}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(x+y)+y^2-4y+1=0 \\ y(x+y)^2-2x^2-7y=2 \end{cases}$.

Câu 4. *(7,0 điểm)*

Cho đường tròn $(O;R)$ và dây cung BC cố định $(BC<2R)$. Điểm A di động trên cung lớn BC sao cho ΔABC có ba góc nhọn. Kẻ các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh $\Delta AEF \backsim \Delta ABC$ và $\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}}=\cos^2 A$.

b) Chứng minh rằng: $S_{DEF}=\left(1-\cos^2 A-\cos^2 B-\cos^2 C\right).S_{ABC}$.

c) Xác định vị trí điểm A trên cung lớn BC sao cho chu vi ΔDEF đạt giá trị lớn nhất.

Câu 5. *(2,0 điểm)*

Cho a, b, c là ba số thực dương, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{a^3+b^3+c^3}{2abc}+\frac{a^2+b^2}{c^2+ab}+\frac{b^2+c^2}{a^2+bc}+\frac{c^2+a^2}{b^2+ca}.$$

Hết

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN ĐAN PHƯỢNG

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 35

(Đề thi có 1 trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018-2019
MÔN THI: TOÁN
Ngày thi: 23/10/2018
Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. *(5,0 điểm)*

1. Cho biểu thức: $p=\dfrac{x\sqrt{x}+26\sqrt{x}-19}{x+2\sqrt{x}-3}-\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}+\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}$.

a) Rút gọn *P*;

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức *P*.

2. Cho $a=\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}$. Chứng minh rằng: $\dfrac{64}{\left(a^2-3\right)^3}-3a$ là số nguyên

Câu 2. *(4,0 điểm)*

1. Giải phương trình : $x^2-x-4=2\sqrt{x-1}\left(1-x\right)$.

2. Nhà toán học De Morgan (1806 – 1871) khi được hỏi tuổi đã trả lời: Tôi *x* tuổi vào năm x^2. Hỏi năm x^2 đó ông bao nhiêu tuổi.

3. Tìm số tự nhiên *A* biết rằng trong ba mệnh đề sau có hai mệnh đề đúng và một mệnh đề sai:

a) $A+51$ là số chính phương.

b) Chữ số tận cùng bên phải của *A* là số 1.

c) $A-38$ là số chính phương.

Câu 3. *(4,0 điểm)*

a) Tìm x và y biết $2x^2+4x-3y^3+5=0$ và $x^2y^2+2xy+y^2=0$.

b) Tìm các cặp số nguyên *(x; y)* thỏa mãn $x^2y+xy-2x^2-3x+4=0$.

Câu 4. *(6,0 điểm)*

1. Cho tam giác nhọn ABC. Các đường cao AH, BI, CK
   a) Chứng minh rằng tam giác AKI đồng dạng với tam giác ACB;
   b) Biết $S_{AKI}=S_{BKH}=S_{CHI}$. Chứng minh rằng: ABC là tam giác đều.
2. Cho tam giác ABC là tam giác nhọn nội tiếp đường tròn (O; R) và đường cao AH bằng $R\sqrt{2}$. Gọi M và N thứ tự là hình chiếu của H trên AB, AC. Chứng minh rằng ba điểm M, N, O thẳng hàng.

Câu 5. *(1,0 điểm)* Với ba số dương x,y,z thỏa mãn $x+y+z=1$, chứng minh:

$$\frac{1-x^2}{x+yz}+\frac{1-y^2}{y+zx}+\frac{1-z^2}{z+xy}\ge 6.$$

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN BỈM SƠN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2016-2017
MÔN THI: TOÁN
Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 36

(Đề thi có 1 trang)

Câu 1. *(2,0 điểm)*

Cho biểu thức:

$$P=\left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}-\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}+4\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right).$$

a) Rút gọn P.

b) Tính giá trị của P tại $a=\left(2+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{2-\sqrt{3}}$

Câu 2. *(1,5 điểm)*

Giải phương trình: $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-1}=1.$

Câu 3. *(2,5 điểm)*

Cho x, y là các số dương.

a) Chứng minh: $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ge 2$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{xy}{x^2+y^2}$.

Câu 4. *(3,0 điểm)*

Cho điểm M nằm trên nửa đường tròn tâm O đường kính $AB=2R$ (M không trùng với A và B). Trong nửa mặt phẳng chứa nửa đường tròn có bờ là đường thẳng AB, kẻ tiếp tuyến Ax. Đường thẳng BM cắt Ax tại I; tia phân giác của IAM cắt nửa đường tròn O tại E, cắt IB tại F; đường thẳng BE cắt AI tại H, cắt AM tại K.

a) Chứng minh 4 điểm F, E, K, M cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh $HF\perp BI$.

c) Xác định vị trí của M trên nửa đường tròn O để chu vi ΔAMB đạt giá trị lớn nhất và tìm giá trị đó theo R?

Câu 5. *(1,0 điểm)*

Tìm các số tự nhiên x, y biết rằng: $\left(2^x+1\right)\left(2^x+2\right)\left(2^x+3\right)\left(2^x+4\right)-5^y=11879$.

Hết

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN QUẢNG ĐIỀN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 37

(Đề thi có 1 trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2016-2017
MÔN THI: TOÁN
Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Câu 1: *(4,0 điểm)*

Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{3x+\sqrt{9x}-3}{x+\sqrt{x}-2}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}-2\right):\dfrac{1}{x-1}$

a) Tìm điều kiện của x để biểu thức *A* có nghĩa.

b) Rút gọn biểu thức *A*.

c) Tìm giá trị của x để $\dfrac{2}{A}$ là số tự nhiên.

Câu 2: *(6,0 điểm)*

Giải phương trình và hệ phương trình sau:

a) $\sqrt{x-2}+\sqrt{6-x}=\sqrt{x^2-8x+24}$.

b) $\begin{cases}(x^2+xy+y^2)\sqrt{x^2+y^2}=185\\(x^2-xy+y^2)\sqrt{x^2+y^2}=65\end{cases}$

Câu 3: *(4,0 điểm)*

Cho đường thẳng (d) có phương trình là: y = 2x + 3.

a) Tìm trên đường thẳng (d) những điểm có toạ độ thoả mãn đẳng thức $x^2+y^2-2xy-4=0$.

b) Từ điểm A(–1; 1) vẽ đường thẳng (d′) vuông góc với (d) và từ điểm B(–3;–3) vẽ đường thẳng (d′′) đi qua điểm C(1; 0). Viết phương trình của các đường thẳng (d′) và (d′′).

c) Tính diện tích của tam giác tạo bởi các đường thẳng (d), (d′), (d′′).

Câu 4: *(6,0 điểm)*

Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Gọi M là điểm nằm giữa A và B. Qua M vẽ dây CD vuông góc với AB, lấy điểm E đối xứng với A qua M.

a) Tứ giác ACED là hình gì? Vì sao?

b) Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của M trên AC và BC. Chứng minh rằng $\dfrac{HM}{HK}.\dfrac{MK}{MC}=\dfrac{CD}{4R}$.

c) Gọi C′ là điểm đối xứng với C qua A. Chứng minh rằng C′ nằm trên một đường tròn cố định khi M di chuyển trên đường kính AB (M khác A và B).

Hết

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN VŨ QUANG

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 38

(Đề thi có 1 trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018-2019
MÔN THI: TOÁN (Vòng 2)
Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^2+6xy+5y^2-5y-x$.

b) Cho $a^3-3ab^2=5$ và $b^3-3a^2b=10$. Tính $S=2018a^2+2018b^2$.

c) Cho biểu thức: $A=\left(\dfrac{x^2}{x^3-4x}+\dfrac{6}{6-3x}+\dfrac{1}{x+2}\right):\left(x-2+\dfrac{10-x^2}{x+2}\right)$. Tìm giá trị của x để $A>0$.

Câu 2. a) Cho n là số nguyên không chia hết cho 3. Chứng minh rằng $P=3^{2n}+3^n+1$ chia hết cho 13.

b) Tìm các số hữu tỉ n thỏa mãn tổng sau là số chính phương: $n^2+n+503$.

Câu 3. a) Tìm các số nguyên x thỏa mãn phương trình: $(3x-1)(4x-1)(6x-1)(12x-1)=330$

b) Giải phương trình: $|x-2|(x-1)(x+1)(x+2)=4$

c) Tìm các cặp $(x;y)$ nguyên thỏa mãn: $y^2+2xy-3x-2=0$

Câu 4. Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng AB. Trên cùng nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB kẻ hai tia Ax và By cùng vuông góc với AB. Trên tia Ax lấy điểm C (C khác A). Từ O kẻ đường thẳng vuông góc với OC, đường thẳng này cắt By tại D. Từ O hạ đường vuông góc OM xuống CD (M thuộc CD).

a) Chứng minh rằng: $OA^2=AC.BD$.

b) Chứng minh rằng tam giác AMB vuông.

c) Gọi N là giao điểm của BC và AD. Chứng minh rằng MN//AC.

Câu 5. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2(b+c)}+\frac{1}{b^2(c+a)}+\frac{1}{c^2(a+b)}\ge\frac{3}{2}.$$

Hết

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN THĂNG BÌNH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018-2019
MÔN THI: TOÁN
Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 39

(Đề thi có 1 trang)

Câu 1. *(3,0 điểm)*

Cho biểu thức $P=\left(\frac{1}{x-\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right):\frac{\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}$ (với $0<x\neq 1$)

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q=P-9\sqrt{x}+2019$.

Câu 2. *(4,0 điểm)*

a) Giải phương trình: $x-1+4\sqrt{7-x}=4\sqrt{x-1}+\sqrt{(7-x)(x-1)}$.

b) Cho các số thực dương a, b với $a\neq b$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{\frac{(a-b)^3}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^3}-b\sqrt{b}+2a\sqrt{a}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}+\frac{3a+3\sqrt{ab}}{b-a}\leq\frac{1}{3abc}.$$

Câu 3. *(3,0 điểm)*

Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{1}{a(a^2+8bc)}+\frac{1}{b(b^2+8ac)}+\frac{1}{c(c^2+8ab)}\leq\frac{1}{3abc}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Câu 4. *(4,0 điểm)*

a) Tìm các số tự nhiên n sao cho $n-50$ và $n+50$ đều là số chính phương.

b) Tìm các số nguyên tố p, q sao cho $p^2=8q+1$.

Câu 5. *(2,5 điểm)*

Trong tam giác ABC lấy điểm O sao cho $ABO=ACO$. Gọi H,K lần lượt là hình chiếu của O lên AB và AC.

a) Chứng minh rằng $OB.\sin OAC=OC.\sin OAB$.

b) Gọi M,N lần lượt là trung điểm của BC và HK. Chứng minh rằng MN vuông góc với HK.

Câu 6. *(3,5 điểm)*

Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Đường thẳng d là tiếp tuyến với đường tròn (O) tại C và gọi D là hình chiếu của C trên AB. Từ A và B kẻ AH và BK vuông góc với đường thẳng d. Chứng minh rằng:

a) $AH+BK$ không đổi khi tiếp tuyến d thay đổi trên đường tròn (O).

b) Đường tròn đường kính HK luôn tiếp xúc với AK, BK và AB.

Xác định vị trí C để tứ giác $AHKB$ có diện tích lớn nhất.

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN PHÙ NINH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2013-2014
MÔN THI: TOÁN
Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 40

(Đề thi có 1 trang)

Câu 1. *(4,0 điểm)*

a. Tìm số tự nhiên n sao cho: n + 24 và n – 65 là hai số chính phương

b. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta có: $A = 7.5^{2n} + 12.6^{n}$ chia hết cho 19.

Câu 2. (4,0 điểm):

a. Cho $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{xy}+\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{yz}+\sqrt{y}+1} + \frac{2\sqrt{z}}{\sqrt{zx}+2\sqrt{z}+2}$ ..

Biết *xyz = 4*, tính $\sqrt{A}$.

b. Cho $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. và $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$. Chứng minh rằng: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Câu 3. (3,0 điểm):

Giải phương trình: $x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} = 3$

Câu 4. (7,0 điểm)

1. Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AA', BB', CC', H là trực tâm.

a) Tính tổng $\frac{HA'}{AA'}+\frac{HB'}{BB'}+\frac{HC'}{CC'}$

b) Gọi AI là phân giác của tam giác ABC; IM, IN thứ tự là phân giác của góc AIC và góc AIB. Chứng minh rằng: AN.BI.CM = BN.IC.AM.

c) Tam giác ABC như thế nào thì biểu thức $\frac{(AB+BC+CA)^2}{AA'^2+BB'^2+CC'^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất?

2. Cho tam giác đều ABC, gọi M là trung điểm của BC. Một góc xMy bằng 60^0 quay quanh điểm M sao cho 2 cạnh Mx, My luôn cắt cạnh AB và AC lần lượt tại D và E. Chứng minh rằng:

a) $BD.CE = \frac{BC^2}{4}$

b) DM, EM lần lượt là tia phân giác của các góc BDE và CED.

c) Chu vi tam giác ADE không đổi.

Câu 5. (2,0 điểm):

Cho a, b, c là các số dương, chứng minh rằng:

$$T = \frac{a}{3a+b+c} + \frac{b}{3b+a+c} + \frac{c}{3c+b+a} \le \frac{3}{5}$$

Hết

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ THANH HÓA

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 41

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2014-2015
MÔN THI: TOÁN
Ngày thi: 02/12/2014
Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. *(4,0 điểm)*

1) Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của x:

$$A = \frac{6x-(x+6)\sqrt{x}-3}{2(x-4\sqrt{x}+3)(2-\sqrt{x})} - \frac{3}{-2x+10\sqrt{x}-12} - \frac{1}{3\sqrt{x}-x-2}.$$

Điều kiện $x \geq 0$, $x \neq 4$; $x \neq 9$; $x \neq 1$

2) Rút gọn biểu thức: $B = \dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

Câu 2. *(6,0 điểm)*

1) Cho phương trình : $\dfrac{3a+1}{a+x} - \dfrac{a-1}{a-x} = \dfrac{2a(a^2-1)}{x^2-a^2}$ (a là tham số)

a) Giải phương trình trên.

b) Tìm các giá trị nguyên dương của a để phương trình có nghiệm x là số nguyên tố.

2) Tìm nghiệm nguyên dương của hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^3 - y^3 - z^3 = 3xyz \\ x^2 = 2(y+z) \end{cases}$

Câu 3. *(4,0 điểm)*

1) Tìm tất cả các số tự nhiên có 3 chữ số $\overline{abc}$ sao cho :

$\begin{cases} \overline{abc} = n^2 - 1 \\ \overline{cba} = (n-2)^2 \end{cases}$ Với $n \in \mathbb{Z}$; $n > 2$

2) Cho tam giác ABC có 3 cạnh a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 6$.

Chứng minh : $52 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2) + 2abc < 54$

Câu 4. *(4,0 điểm)*

Cho hình vuông ABCD cạnh là a và N là một điểm trên cạnh AB. Tia CN cắt tia DA tại E. Trên tia đối của tia BA lấy điểm F sao cho BF = DE. Gọi M là trung điểm của EF.

1) Chứng minh tam giác ACE đồng dạng với tam giác BCM.

2) Xác định vị trí điểm N trên AB sao cho diện tích tứ giác ACFE gấp ba lần diện tích hình vuông ABCD.

Câu 5. *(2,0 điểm)*

Cho tam giác ABC có $B + C = 105^0$ và $AB + AC\sqrt{2} = 2BC$. Tính B và C

Hết

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN TÂN KÌ

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 42

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018-2019
MÔN THI: TOÁN
Ngày thi: 02/12/2014
Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. *(5,0 điểm)*

Cho biểu thức: $A=\left(\dfrac{3x+\sqrt{16x}-7}{x+2\sqrt{x}-3}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}-\dfrac{\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}-1}\right):\left(2-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right)$.

a) Nêu điều kiện xác định rồi rút gọn A..

b) Tính giá trị của A khi $\dfrac{x}{9}=\dfrac{2\sqrt{27+7\sqrt{5}}}{\sqrt{10}+7\sqrt{2}}$.

c) Cho $P=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}.A.$. Tìm x để $P<0$.

Câu 2. *(4,0 điểm)*

a) Chứng minh rằng tổng các bình phương của hai số lẻ không là số chính phương.

b) Giải phương trình: $x+17=2\sqrt{4-x}+6\sqrt{2x+3}$

c) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $6x^2+19y^2+24x-2y+12xy-725=0$.

Câu 3. *(3,0 điểm)*

Cho ba số thực không âm x,y,z thỏa mãn $x+y+z=3$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M=\dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{y}{y^2+1}+\dfrac{z}{z^2+1}$

Câu 4. *(6,0 điểm)*

Cho tam giác ABC vuông tại $A(AB>AC)$, đường cao AH. Gọi M là trung điểm của AB, AD là phân giác của góc $BAH,(D\in BH)$, MD cắt AH tại E.

a) Chứng minh rằng $\dfrac{AB^2}{BH}=\dfrac{AC^2}{CH}$.

b) Tính độ dài AH biết diện tích các tam giác $\Delta AHC;\Delta AHB$ và lần lượt là $8,64cm^2;15,36cm^2$.

c) Chứng minh: $CE \parallel AD$.

Câu 5. *(2,0 điểm)*

Cho 33 điểm nằm trong hình vuông có độ dài cạnh bằng 4 trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Người ta vẽ các đường tròn bán kính bằng $\sqrt{2}$ và tâm là các điểm đã cho. Hỏi có hay không 3 điểm trong các điểm đã cho sao cho chúng đều thuộc phần chung của ba hình tròn có tâm cũng chính là ba điểm đó.

Hết

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN ĐỒNG XUÂN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 43

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2012-2013
MÔN THI: TOÁN
Ngày thi: 13/12/2012
Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. *(4điểm)*

a/ Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^2-9x+20$

b/ Rút gọn $A = \dfrac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6}-\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$

Câu 2. *(4 điểm)*

a/ Giải phương trình: $\sqrt{3x^2-20x+6}=x-4$

b/ Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $A=\dfrac{8x^2+6xy}{x^2+y^2}$

Câu 3. *(4 điểm)*

a/ Cho S = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + … + n(n+1)(n+2)

Chứng minh 4S + 1 là một số chính phương với mọi số nguyên dương n

b/ Cho a,b,c,d > 0 và $S=\dfrac{a}{a+b+d}+\dfrac{b}{a+b+c}+\dfrac{c}{b+c+d}+\dfrac{d}{a+c+d}$

Chứng minh 1< S < 2

Câu 4. *(4 điểm)*

Cho điểm D nằm trong tam giác đều ABC. Vẽ các tam giác đều BDE và CDF (E, F, D nằm cùng phía đối với BC). Chứng minh tứ giác AEDF là hình bình hành.

Câu 5. *(4điểm)*

Cho nửa đường tròn tâm O; bán kính R, đường kính AB. Từ A và B kẻ hai tiếp tuyến Ax và By. Qua một điểm H thuộc nửa đường tròn này, kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt các tiếp tuyến Ax và By lần lượt ở M và N, các đường thẳng AN và BM cắt nhau tại P.

a/ Chứng minh HP // AM

b/ Gọi K là giao điểm của HI và AB. Tính độ dài của HK theo R biết $AK=\dfrac{1}{5}AB$

Hết

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN MỘC XUÂN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 44

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2016-2017
MÔN THI: TOÁN
Ngày thi: 10/01/2017
Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. *(3,0 điểm)*

a) Chứng minh rằng các số $A=6^{2015}+1$ và $B=6^{2016}-1$ đều là bội của 7.

b) So sánh $A=\dfrac{10^{2016}-1}{10^{2017}-11}$ và $B=\dfrac{10^{2016}+1}{10^{2017}+9}$

Câu 2. *(5,5 điểm)*

a) Rút gọn biểu thức: $P=\dfrac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6}+\dfrac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{\sqrt{x}+3}{2-\sqrt{x}}$ với $x\ge 0; x\ne 4; x\ne 9$.\

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $Q=\dfrac{2016x^2+2x+2016}{x^2+1}$

c) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $6x^2+5y^2=74$.

Câu 3. *(3,5 điểm)*

a) Trên mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng (d) có phương trình $(m-4)x+(m-3)y=1$ (m là tham số). Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng (d) là lớn nhất.

b) Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng: $1<\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{b+c}+\dfrac{c}{c+a}<2$

Câu 4. *(5,5 điểm)*

Cho nửa đường tròn (O), đường kính $AB=2R$. Lấy điểm M bất kỳ trên nửa đường tròn (M khác A và B); các tiếp tuyến tại A và M của nửa đường tròn (O) cắt nhau ở K. Gọi E là giao điểm của AM và OK.

a) Chứng minh $OE.OK$ không đổi khi M di chuyển trên nửa đường tròn.

b) Qua O kẻ đường vuông góc với AB cắt BK tại I và cắt đường thẳng BM tại N. Chứng minh: $IN=IO$.

c) Vẽ MH vuông góc với AB tại H. Gọi F là giao điểm của BK và MH. Chứng minh: $EF \,//\, AB$.

Câu 5. *(2,5 điểm)*

Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn $(O;\ R)$. Một điểm P chạy trên cung nhỏ AB (P khác A và B). Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ P đến A và từ P đến B không lớn hơn đường kính của đường tròn $(O;\ R)$.

Hết

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN TIỀN HẢI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 45

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2017-2018
MÔN THI: TOÁN
Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. *(4,0 điểm)* Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $A=\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$

b) $B=\sqrt{\frac{(a+bc)(b+ca)}{c+ab}}+\sqrt{\frac{(c+ab)(b+ca)}{a+bc}}+\sqrt{\frac{(c+ab)(a+bc)}{b+ca}}$

(Với a, b, c là các số thực dương và a + b + c = 1)

Câu 2. *(3,0 điểm)*

a) Tìm các số a, b sao cho đa thức $f(x) = x^4 + ax^3 + bx - 1$ chia hết cho đa thức $x^2 - 3x + 2$.

b) Chứng minh rằng: $B = 4x(x + y)(x + y + z)(x + z) + y^2z^2$ là một số chính phương với x, y, z là các số nguyên.

Câu 3. *(4,0 điểm)*

a) Tìm m để phương trình: $\frac{2m-1}{x-2}=m-3$ vô nghiệm.

b) Giải phương trình: $4\sqrt{x+1}=x^2-5x+14$.

c) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}=3$.

Câu 4. *(7,0 điểm)*

Cho tam giác ABC vuông tại A (AB < AC). Kẻ AH vuông góc với BC tại H. Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của H trên AB, AC.

a) Biết AB = 6cm, HC = 6,4cm. Tính BC, AC.

b) Chứng minh rằng $DE^3 = BC.BD.CE$

c) Đường thẳng kẻ qua B vuông góc với BC cắt HD tại M, Đường thẳng kẻ qua C vuông góc với BC cắt HE tại N. Chứng minh rằng M, A, N thẳng hàng.

d) Chứng minh rằng BN, CM, DE đồng qui.

Câu 5. *(2,0 điểm)*

Cho đa thức $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ (Với a, b, c, d là các số thực)

Biết f(1) = 10; f(2) = 20; f(3) = 30. Tính giá trị biểu thức $A = f(8)+f(-4)$.

Hết

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ HẢI PHÒNG

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 46

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018-2019
MÔN THI: TOÁN
Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. *(2,0 điểm)*

a) Cho biểu thức $A=\dfrac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^3+2x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}+\dfrac{3\sqrt{xy}-3y}{x-y}$ với $x,y\ge 0$ và $x\ne y$. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức A không phụ thuộc giá trị của biến.

b) Chứng minh rằng $x_o=\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$ là một nghiệm của phương trình sau $\left(x^3-3x-17\right)^{2019}-1=0.$

Câu 2. *(2,0 điểm)*

a) Gọi $x_1;x_2$ là nghiệm của phương trình $x^2-2mx+2m-3=0$ (1) (với m là tham số). Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $B=\dfrac{2x_1x_2+7}{x_1^2+x_2^2+2\left(x_1x_2+1\right)}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3y^3+1=19x^3\\ xy^2+y=-6x^2\end{cases}$.

Câu 3. *(2,0 điểm)*

a) Cho biểu thức $P=a_1+a_2+a_3+...+a_{2019}$ với $a_1;a_2;a_3;...;a_{2019}$ là các số nguyên dương và P chia hết cho 30. Chứng minh rằng $Q=a_1^5+a_2^5+a_3^5+...+a_{2019}^5$ chia hết cho 30.

b) Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $abc=8$. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{\sqrt{1+a^3}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+b^3}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+c^3}}\ge 1.$

Câu 4. *(3,0 điểm)* Cho hai đường tròn O_1 và O_2 tiếp xúc ngoài nhau tại điểm I. Vẽ đường tròn O tiếp xúc trong với O_1 và O_2 lần lượt tại B và C. Từ điểm I vẽ đường thẳng d vuông góc với O_1O_2, d cắt cung lớn và cung nhỏ BC của O lần lượt tại điểm A,Q. Cho AB cắt O_1 tại điểm thứ hai là E, AC cắt O_2 tại điểm thứ hai là D.

a) Chứng minh rằng tứ giác $BCDE$ nội tiếp ;

b) Chứng minh rằng OA vuông góc với DE;

c) Vẽ đường kính MN của O vuông góc với AI (điểm M nằm trên AB không chứa điểm C). Chứng minh rằng ba đường thẳng AQ,BM,CN đồng quy.

Câu 5. *(1,0 điểm)* Bên trong đường tròn có đường kính $AB=19$ cho 38 đoạn thẳng, mỗi đoạn thẳng có độ dài bằng 1. Chứng minh rằng tồn tại đường thẳng vuông góc hoặc song song với AB và giao ít nhất hai đoạn trong 38 đoạn đã cho.

Hết

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN KIM THÀNH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2012-2013
MÔN THI: TOÁN
Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề số 47

(Đề thi có một trang)

Câu 1. *(4,0 điểm)*

a) Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6}-\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$

b) Cho x,y,z thoả mãn: $xy+yz+zx=1$.

Hãy tính giá trị biểu thức

$$A=x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{(1+x^2)}}+y\sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{(1+y^2)}}+z\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{(1+z^2)}}$$

Câu 2. *(3,0 điểm)*

c) Cho hàm số: $f(x)=\left(x^3+12x-31\right)^{2012}$

Tính $f(a)$ tại $a=\sqrt[3]{16-8\sqrt{5}}+\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}$

d) Tìm số tự nhiên n sao cho n^2+17 là số chính phương?

Câu 3. *(4,0 điểm)*

Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{1-x}+\sqrt{4+x}=3$ b) $x^2+4x+5=2\sqrt{2x+3}$

Câu 4. *(3,0 điểm)*

e) Tìm $x;y$ thỏa mãn: $2\left(x\sqrt{y-4}+y\sqrt{x-4}\right)=xy$

f) Cho $a;b;c$ là các số thuộc đoạn $[-1;2]$ thỏa mãn: $a^2+b^2+c^2=6$.

Hãy chứng minh rằng: $a+b+c\ge 0$

Câu 5. *(6,0 điểm)*

Cho tam giác ABC nhọn; các đường cao $AK;BD;CE$ cắt nhau tại H.

g) Chứng minh: $\dfrac{KC}{KB}=\dfrac{AC^2+CB^2-BA^2}{CB^2+BA^2-AC^2}$

b) Giả sử: $HK=\dfrac{1}{3}AK$. Chứng minh rằng: $\tan B.\tan C=3$.

c) Giả sử $S_{ABC}=120\,cm^2$ và $BAC=60°$. Hãy tính diện tích tam giác ADE ?

Hết

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN THANH OAI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 48

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2013-2014
MÔN THI: TOÁN
Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. *(6,0 điểm)*

a) Cho $M=\left(1-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right):\left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}+\frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right)$

1. Rút gọn M.

2. Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức M nhận giá trị là số nguyên.

b) Tính giá trị của biểu thức P.

$P=3x^{2013}+5x^{2011}+2006$ với $x=\sqrt{6+2\sqrt{2}.\sqrt{3-\sqrt{\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{18-8\sqrt{2}}}}}-\sqrt{3}.$

Câu 2. *(4,0 điểm)* Giải phương trình:

a) $(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)=24$ b) $|2x-x^2-1|=2x-x^2-1$

Câu 3. *(4,0 điểm)*

a) Cho hai số dương x,y thoả mãn $x+y=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M=\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)\left(y^2+\frac{1}{x^2}\right)$

b) Cho x,y,z là các số dương thoả mãn $\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}=6$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{3x+3y+2z}+\frac{1}{3x+2y+3z}+\frac{1}{2x+3y+3z}\le\frac{3}{2}$.

Câu 4. *(5,0 điểm)*

Cho đường tròn $(O;R)$ và hai đường kính AB và CD sao cho tiếp tuyến tại A của đường tròn $(O;R)$ cắt các đường thẳng BC và BD tại hai điểm tương ứng là E và F. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AE và AF.

1. Chứng minh rằng trực tâm H của tam giác BPQ là trung điểm của đoạn thẳng OA.

2. Gọi α là số đo của góc BFE. Hai đường kính AB và CD thoả mãn điều kiện gì thì biểu thức $P=\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$ đạt giá trị nhỏ nhất? tìm giá trị nhỏ nhất đó.

3. Chứng minh các hệ thức sau: $CE.DF.EF=CD^3$ và $\frac{BE^3}{BF^3}=\frac{CE}{DF}$.

Câu 5. *(1,0 điểm)*

Tìm $n\in\mathbb{N}^*$ sao cho: n^4+n^3+1 là số chính phương.

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG AMSTERDAM

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 49

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2017-2018
MÔN THI: TOÁN
Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương $(p;q;n)$, trong đó p, q là các số nguyên tố thỏa mãn: $p(p+3)+q(q+3)=n(n+3)$

Câu 2. Gọi a, b, c là ba nghiệm của phương trình $2x^3-9x^2+6x-1=0$

Không giải phương trình, hãy tính tổng:

$$S=\frac{a^5-b^5}{a-b}+\frac{b^5-c^5}{b-c}+\frac{c^5-a^5}{c-a}$$

Câu 3. Cho tam giác ABC, $(AB<AC)$, với ba đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. Các đường thẳng EF, BC cắt nhau tại G, gọi I là hình chiếu của H trên GA.

1. Chứng minh rằng tứ giác $BCAI$ nội tiếp.
2. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng $GH\perp AM$.

Câu 4. Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge a^2+b^2+c^2$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Cau 4. Mỗi điểm của mặt phẳng được tô bởi một trong ba màu Đỏ, Xanh, Vàng. Chứng minh rằng tồn tại hai điểm A, B được tô bởi cùng một màu mà $AB=1$.

Hết

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG TRỰC NINH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 50

(Đề thi có 2 trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2011-2012
MÔN THI: TOÁN
Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian giao đề)

Phần trắc nghiệm. *(2,0 điểm) Mỗi câu sau có nêu bốn phương án trả lời, trong đó chỉ có một phương án đúng. Hãy chọn phương án đúng (viết vào bài làm chữ cái đứng trước phương án được lựa chọn).*

1. Biểu thức $\sqrt{(-4)^2\left(\sqrt{7}-3\right)^2}$ có giá trị bằng:

A. $2\left(\sqrt{7}-3\right)$ B. $-2\left(\sqrt{7}-3\right)$ C. $4\left(\sqrt{7}-3\right)$ D. $4\left(3-\sqrt{7}\right)$

2. Cho $\sqrt{20-a^2}-\sqrt{10-a^2}=5$ biểu thức $\sqrt{20-a^2}+\sqrt{10-a^2}$ có giá trị bằng:

A. 2 B. - 2 C. 6 D. -6

3 Gọi R và r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và bán kính đường tròn nội tiếp của một tam giác vuông cân. Khi đó, tỉ số $\frac{R}{r}$ bằng:

A. $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ B. $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ C. $1+\sqrt{2}$ D. $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

4. Cho (O; 5 cm) và O nằm trong hai dây AB // CD có độ dài AB = 8 cm, CD = 6 cm. Khi đó khoảng cách giữa hai dây là:

A. 3 cm B. 4 cm C. 5 cm D. 7 cm

Phần tự luận *(18 điểm)*

Câu 1 . *(3 điểm)*

1. Tính $A=\sqrt{6-\sqrt{11}}-\sqrt{6+\sqrt{11}}$

2. Cho biểu thức $P=\left(\frac{2x+1}{x\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}\right).\left(x-\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}\right)$ (với $x\ge 0;\ x\ne 4$)

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm các giá trị của x để $P\sqrt{4-x}<0$

Câu 2.*(2 điểm)* Giải phương trình $(4x+2)\sqrt{x+8}=3x^2+7x+8$

Câu 3. *(3 điểm)* Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho các đường thẳng

(d_1): $x-3y+5=0$

(d_2): $x+2y-5=0$

(d_3): $\left(m^2-1\right)x+3y-5-2m=0$

a) Tìm tọa độ giao điểm A của (d_1) và (d_2)

b) Xác định m để ba đường thẳng trên là 3 đường thẳng phân biệt đồng quy.

Câu 4. *(8 điểm).* Cho ΔABC có 3 góc nhọn nội tiếp đường tròn (O; R). Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Kéo dài AO cắt đường tròn tại K.

1. Chứng minh tứ giác BHCK là hình bình hành

2. Kẻ $OM \perp BC$ tại M. Gọi G là trọng tâm của ΔABC. Chứng minh $S_{AHG} = 2S_{AGO}$

3. Chứng minh $\frac{AD}{HD}+\frac{BE}{HE}+\frac{CF}{HF}\geq 9$

Câu 5.*(2 điểm)* Tìm tất cả các cặp số (x; y) thỏa mãn $\begin{cases} 2\sqrt{2xy-y}+2x+y=10 \\ \sqrt{3y+4}-\sqrt{2y+1}+2\sqrt{2x-1}=3 \end{cases}$

_____Hết_____

HƯỚNG DẪN GIẢI

Đề số 1

Câu 1.

a. Điều kiện : $x>0; x\neq 1$.

$$P=\frac{\sqrt{x}\left(x\sqrt{x}-1\right)}{x+\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}}+\frac{2\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}-1}$$

$$=\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)-\left(2\sqrt{x}+1\right)+2\left(\sqrt{x}+1\right)$$

$$=x-\sqrt{x}+1$$

Vậy $P=x-\sqrt{x}+1$, với $x>0; x\neq 1$.

b. $P=x-\sqrt{x}+1=\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}$

dấu bằng xảy ra khi $x=\frac{1}{4}$ thỏa mãn đk.

Vậy GTNN của P là $\frac{3}{4}$ khi $x=\frac{1}{4}$.

c. Với $x>0; x\neq 1$ thì $Q=\frac{2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}>0$. (1)

Xét $2-\frac{2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}=\frac{2\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{x-\sqrt{x}+1}\geq 0$

Dấu bằng không xảy ra vì điều kiện $x\neq 1$.

suy ra $Q<2$.(2)

Từ (1) và (2) suy ra $0<Q<2$.

Câu 2.

$$a)\quad \frac{2014}{\sqrt{2015}}+\frac{2015}{\sqrt{2014}}=\frac{2015-1}{\sqrt{2015}}+\frac{2014+1}{\sqrt{2014}}$$

$$=\sqrt{2015}+\sqrt{2014}+\frac{1}{\sqrt{2014}}-\frac{1}{\sqrt{2015}}>\sqrt{2015}+\sqrt{2014}$$

Vậy $\frac{2014}{\sqrt{2015}}+\frac{2015}{\sqrt{2014}}>\sqrt{2014}+\sqrt{2015}$.

b) Phân tích được thành $(2x-y)^2+(y-z+1)^2+(z-3)^2\leq 0$ (1)

Vì $(2x-y)^2\geq 0$; $(y-z+1)^2\geq 0$; $(z-3)^2\geq 0$ với mọi x, y, z nên từ (1) suy ra x = 1; y = 2; z = 3.

b. Điều kiện: x > - 3.

Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$\left(2-\sqrt{\frac{1}{x+3}}\right)+\left(2-\sqrt{\frac{5}{x+4}}\right)=0$$

$$\frac{4-\frac{1}{x+3}}{2+\sqrt{\frac{1}{x+3}}}+\frac{4-\frac{5}{x+4}}{2+\sqrt{\frac{5}{x+4}}}=0 \Leftrightarrow \frac{4x+11}{(x+3)\left(2+\sqrt{\frac{1}{x+3}}\right)}+\frac{4x+11}{(x+4)\left(2+\sqrt{\frac{5}{x+4}}\right)}=0$$

Vì x > - 3 nên $\frac{1}{(x+3)\left(2+\sqrt{\frac{1}{x+3}}\right)}+\frac{1}{(x+4)\left(2+\sqrt{\frac{5}{x+4}}\right)}>0$

Do đó 4x + 11 = 0 $\Leftrightarrow$ x = $-\frac{11}{4}$ thỏa mãn điều kiện.

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S=\left\{-\frac{11}{4}\right\}$.

Câu 3.

a. Ta có $x=\frac{\sqrt[3]{\left(\sqrt{5}-2\right)^3}\left(\sqrt{5}+2\right)}{\sqrt{5}+\sqrt{(3-\sqrt{5})^2}}=\frac{\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}+2\right)}{\sqrt{5}+3-\sqrt{5}}=\frac{1}{3}$.

Do đó B = - 1.

b. Dễ thấy $x \neq y$. Không mất tính tổng quát, giả sử x > y.

Từ (3y + 1) $\vdots$ x $\Rightarrow 3y+1=p.x \quad (p \in N^*)$.

Vì x > y nên 3x > 3y + 1 = p.x. $\Rightarrow$ p < 3. Vậy p $\in \{1;2\}$

- Với p = 1: $\Rightarrow$x = 3y + 1 $\Rightarrow$ 3x + 1 = 9y + 4 $\vdots$ y $\Rightarrow$ 4 $\vdots$ y

  Mà y > 1 nên y $\in \{2;4\}$

  + Với y = 2 thì x = 7.

  + Với y = 4 thì x = 13.

- Với p = 2: $\Rightarrow$2x = 3y + 1 $\Rightarrow$ 6x = 9y + 3 $\Rightarrow$ 2(3x + 1) = 9y + 5

  Vì 3x + 1 $\vdots$ y nên 9y + 5 $\vdots$ y suy ra 5 $\vdots$ y , mà y > 1 nên y = 5,

  suy ra x = 8.

  Tương tự với y > x ta cũng được các giá trị tương ứng.

  Vậy các cặp (x; y) cần tìm là: (7;2);(2;7);(8;5);(5;8);(4;13);(13;4);

Câu 4

a. Tam giác ABE vuông tại E nên cosA = $\frac{AE}{AB}$

Tam giác ACF vuông tại F nên cosA = $\frac{AF}{AC}$.

Suy ra $\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC} \Rightarrow \Delta AEF \sim \Delta ABC(c.g.c)$

* Từ $\Delta AEF \sim \Delta ABC$ suy ra $\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}}=\left(\frac{AE}{AB}\right)^2=\cos^2 A$

b. Tương tự câu a, $\frac{S_{BDF}}{S_{ABC}}=\cos^2 B, \frac{S_{CDE}}{S_{ABC}}=\cos^2 C.$

Từ đó suy ra $\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}}=\frac{S_{ABC}-S_{AEF}-S_{BDF}-S_{CDE}}{S_{ABC}}=1-\cos^2 A-\cos^2 B-\cos^2 C$

Suy ra $S_{DEF}=\left(1-\cos^2 A-\cos^2 B-\cos^2 C\right).S_{ABC}$

c. Ta có: tanB = $\frac{AD}{BD}$,tanC = $\frac{AD}{CD}$. Suy ra tanB.tanC = $\frac{AD^2}{BD.CD}$

Vì AH = k.HD $\Rightarrow AD=AH+HD=(k+1).HD$ nên $AD^2=(k+1)^2.HD^2$ (1)

Do đó tanB.tanC = $\frac{HD^2(k+1)^2}{BD.CD}$ (2)

Lại có $\Delta DHB \sim \Delta DCA(g.g)$ nên $\frac{DB}{AD}=\frac{HD}{DC} \Rightarrow DB.DC=HD.AD$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra:

tanB.tanC = $\frac{HD^2(k+1)^2}{AD.HD}=\frac{HD(k+1)^2}{AD}=\frac{HD(k+1)^2}{HD(k+1)}=k+1.$

d. Từ $\Delta AFC \sim \Delta HEC \Rightarrow \frac{HC}{AC}=\frac{CE}{CF} \Rightarrow \frac{HC.HB}{AC.AB}=\frac{CE.HB}{CF.AB}=\frac{S_{HBC}}{S_{ABC}}$

Tương tự: $\frac{HB.HA}{AC.BC}=\frac{S_{HAB}}{S_{ABC}}$; $\frac{HA.HC}{AB.BC}=\frac{S_{HAC}}{S_{ABC}}$. Do đó:

$$\frac{HC.HB}{AC.AB}+\frac{HB.HA}{AC.BC}+\frac{HA.HC}{AB.BC}=\frac{S_{HBC}+S_{HCA}+S_{HAB}}{S_{ABC}}=1$$

- Ta chứng minh được: $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$ (*)

Áp dụng (*) ta có: $\left(\frac{HA}{BC}+\frac{HB}{AC}+\frac{HC}{AB}\right)^2 \geq 3.\left(\frac{HA.HB}{BC.BA}+\frac{HB.HC}{CA.CB}+\frac{HC.HA}{AB.AC}\right)=3.1=3$

Suy ra $\frac{HA}{BC}+\frac{HB}{AC}+\frac{HC}{AB}\geq\sqrt{3}$.

Câu 5.

Với $x, y \in N^*$ thì 36^x có chữ số tận cùng là 6, 5^y có chữ số tận cùng là 5 nên :

A có chữ số tận cùng là 1 (nếu $36^x > 5^y$) hoặc 9 (nếu $36^x < 5^y$)

TH1: A = 1. khi đó $36^x - 5^y = 1 \Leftrightarrow 36^x - 1 = 5^y$. Điều này không xảy ra vì $(36^x - 1) \vdots 35$ nên $(36^x - 1) \vdots 7$, còn 5^y không chia hết cho 7.

TH2: A = 9. Khi đó $5^y - 36^x = 9 \Leftrightarrow 5^y = 9 + 36^x$ điều này không xảy ra vì $(9 + 36^x) \vdots 9$ còn còn 5^y không chia hết cho 9.

TH3: A = 11. Khi đó $36^x - 5^y = 11$. Thấy x = 1, y = 2 thỏa mãn.

Vậy GTNN của A bằng 11, khi x = 1, y = 2.

Đề số 2

Câu 1.

a) Ta có: $x=9-\sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{5}-2}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{5}+2}\right)^2}$

$$=9-\frac{2}{\sqrt{5}-2}+\frac{2}{\sqrt{5}+2}=9-\frac{2\sqrt{5}+4-2\sqrt{5}+4}{\left(\sqrt{5}\right)^2-2^2}=9-8=1$$

$f(x)=f(1)=1$

b) Ta có $\sqrt{2015^2-1}-\sqrt{2014^2-1}=\frac{(\sqrt{2017^2-1}-\sqrt{2016^2-1})(\sqrt{2017^2-1}+\sqrt{2016^2-1})}{\sqrt{2017^2-1}+\sqrt{2016^2-1}}$

$$=\frac{(2015^2-1)-(2014^2-1)}{\sqrt{2017^2-1}+\sqrt{2016^2-1}}=\frac{2017^2-2016^2}{\sqrt{2017^2-1}+\sqrt{2016^2-1}}=\frac{(2017-2016)(2017+2016)}{\sqrt{2017^2-1}+\sqrt{2016^2-1}}$$

$$=\frac{2017+2016}{\sqrt{2017^2-1}+\sqrt{2016^2-1}}>\frac{2.2016}{\sqrt{2017^2-1}+\sqrt{2016^2-1}}$$

Vậy $\sqrt{2017^2-1}-\sqrt{2016^2-1} > \frac{2.2016}{\sqrt{2017^2-1}+\sqrt{2016^2-1}}$

c) Ta có: $\sin x.\cos x+\dfrac{\sin^2 x}{1+\dfrac{\cos x}{\sin x}}+\dfrac{\cos^2 x}{1+\dfrac{\sin x}{\cos x}}$

$=\sin x.\cos x+\dfrac{\sin^3 x}{1+\cos x}+\dfrac{\cos^3 x}{1+\sin x}$

$=\sin x.\cos x+\dfrac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin x+\cos x}=\sin x.\cos x+\dfrac{(\sin x+\cos x)(\sin^2 x-\sin x.\cos x+\cos^2 x)}{\sin x+\cos x}$

$=\sin x.\cos x+1-\sin x.\cos x=1$

d) Ta có: ĐK: $a\neq\pm b\sqrt{5}$ (*)

$\dfrac{2}{a+b\sqrt{5}}-\dfrac{3}{a-b\sqrt{5}}=-9-20\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow 2(a-b\sqrt{5})-3(a+b\sqrt{5})=-(9+20\sqrt{5})(a+b\sqrt{5})(a-b\sqrt{5})$

$\Leftrightarrow 9a^2-45b^2-a=\sqrt{5}(-20a^2+100b^2+5b)$ (*)

Ta thấy (*) có dạng $A=B\sqrt{5}$ trong đó A, B $\in Q$, nếu $B\neq 0$ thì $\sqrt{5}=\dfrac{A}{B}\in I$ vô lí vậy B = 0 => A= 0.

Do đó (*) $\Leftrightarrow\begin{cases}9a^2-45b^2-a=0\\-20a^2+100b^2+5b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9a^2-45b^2-a=0\\-9a^2+45b^2+\dfrac{9}{4}b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9a^2-45b^2-a=0\\a=\dfrac{9}{4}b\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{9}{4}b\\b^2-4b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=9\\b=4\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a=0\\b=0\end{cases}$ (không t/m ĐK (*)). Vậy a = 9; b = 4

Câu 2.

a) ĐK $x\neq 1;\ x\neq 3$ (**)

$\dfrac{3}{x-3}-\dfrac{2}{x-1}=\dfrac{x-1}{2}-\dfrac{x-3}{3}$ (2)

$\Leftrightarrow\dfrac{x+3}{(x-3)(x-1)}=\dfrac{x+3}{6}$

+ Trường hợp: $x+3=0\Leftrightarrow x=-3$ (TMĐK (**)

+ Trường hợp: $x+3\neq 0\Leftrightarrow x\neq -3$

Ta có (x-3)(x-1) = 6 $\Leftrightarrow x^2-4x-3=0$

$\Leftrightarrow x^2-4x+4=7\Leftrightarrow (x-2)^2=7$

$\Leftrightarrow x=2+\sqrt{7}$ *hoac* $x=2-\sqrt{7}$ (TMĐK (*))

Vậy tập nghiệm của phương trình (2) là: S ={-3; $2+\sqrt{7}$; $2-\sqrt{7}$}

b) ĐK: x ≥ 2 (***)

$x^2-6x+9+x-1-2\sqrt{x-2}=0$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 + x - 2 - 2\sqrt{x-2} + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 + \left(\sqrt{x-2} - 1\right)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ \sqrt{x-2}-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$ (thỏa mãn ĐK(***))

Vậy nghiệm của phương trình là x = 3

Câu 3. **a)** Ta có: P(0) = d ⋮ 5

P(1) = a + b + c + d ⋮ 5 => a + b + c ⋮ 5 (1)

P(-1) = -a + b – c + d ⋮ 5 => -a + b – c ⋮ 5 (2)

Từ (1) và (2) suy ra 2b ⋮ 5 => b ⋮ 5 vì (2,5) = 1, suy ra a + c ⋮ 5

P(2) = 8a + 4b + 2c + d ⋮ 5 => 8a + 2c ⋮ 5 => a ⋮ 5 => c ⋮ 5

b) Ta có $4x^2 - 4xy + 4y^2 = 16$

$\Leftrightarrow (2x - y)^2 + 3y^2 = 16$

$\Leftrightarrow (2x - y)^2 = 16 - 3y^2$

Vì $(2x - y)^2 \geq 0$ nên $16 - 3y^2 \geq 0 \Rightarrow y^2 \leq 5 \Rightarrow y^2 \in \{0; 1; 4\}$

- Nếu $y^2 = 0$ thì $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$
- Nếu $y^2 = 1$ thì $(2x - y)^2 = 13$ không là số chính phương nên loại $y^2 = 1$
- Nếu $y^2 = 4 \Leftrightarrow y = \pm 2$

+ Khi y = 2 thì x = 0 hoặc x = 2

+ Khi y = - 2 thì x = 0 hoặc x = - 2

Vậy phương trình có 6 nghiệm nguyên là (x, y) = (- 2; 0); (2; 0); (0; 2); (2; 2); (0; - 2); (- 2; -2)

c) - Nếu n là số chẵn thì $n^4 + 4^n$ là số chẵn lớn hơn 2 nên là hợp số

- Nếu n là số lẻ, đặt n = 2k + 1 với k là số tự nhiên lớn hơn 0

$n^4 + 4^{2k+1} = (n^2)^2 + (2.4^k)^2$

$= (n^2)^2 + 2.n^2.2.4^k + (2.4^k)^2 - 2.n^2.2.4^k$

$= (n^2 + 2.4^k)^2 - (2n.2^k)^2 = (n^2 + 2.4^k - 2n.2^k).(n^2 + 2.4^k + 2n.2^k)$

Vì $n^2 + 2.4^k + 2n.2^k > n^2 + 2.4^k - 2n.2^k = n^2 + 4^k - 2n.2^k + 4^k$

$= (n - 2^k)^2 + 4^k > 4$

Suy ra $n^4 + 4^{2k+1}$ là hợp số

Vậy $n^4 + 4^n$ là hợp số với mọi số tự nhiên n lớn hơn 1.

Câu 4.

a) Giả sử ta có $\dfrac{a^4 + b^4}{2} \geq ab^3 + a^3b - a^2b^2$

$\Leftrightarrow a^4+b^4 \ge 2ab^3+2a^3b-2a^2b^2$

$\Leftrightarrow a^4+b^4-2ab^3-2a^3b+2a^2b^2 \ge 0$

$\Leftrightarrow a^4-2a^3b+a^2b^2+b^4-2ab^3+a^2b^2 \ge 0$

$\Leftrightarrow \left(a^2-ab\right)^2+\left(b^2-ab\right)^2 \ge 0$ luôn đúng với mọi a, b

Vậy $\dfrac{a^4+b^4}{2} \ge ab^3+a^3b-a^2b^2$ với mọi a, b

b) Đặt a + b = x; b + c = y; c + a = z với x, y, z là các số thực dương

Ta có $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{y+1}+\dfrac{1}{z+1}=2$

$\Rightarrow \dfrac{1}{x+1}=2-\dfrac{1}{y+1}-\dfrac{1}{z+1}=1-\dfrac{1}{y+1}+1-\dfrac{1}{z+1}=\dfrac{y}{y+1}+\dfrac{z}{z+1}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{x+1} \ge 2\sqrt{\dfrac{y}{y+1}\cdot\dfrac{z}{z+1}}$

(Áp dụng bất đẳng thức Côsy cho 2 số dương $\dfrac{y}{y+1}$ và $\dfrac{z}{z+1}$)

Chứng minh tương tự ta có $\dfrac{1}{y+1} \ge 2\sqrt{\dfrac{x}{x+1}\cdot\dfrac{z}{z+1}}$ và $\dfrac{1}{z+1} \ge 2\sqrt{\dfrac{y}{y+1}\cdot\dfrac{x}{x+1}}$

Suy ra $\dfrac{1}{x+1}\cdot\dfrac{1}{y+1}\cdot\dfrac{1}{z+1} \ge 2\sqrt{\dfrac{y}{y+1}\cdot\dfrac{z}{z+1}}\cdot 2\sqrt{\dfrac{x}{x+1}\cdot\dfrac{z}{z+1}}\cdot 2\sqrt{\dfrac{x}{x+1}\cdot\dfrac{y}{y+1}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x+1}\cdot\dfrac{1}{y+1}\cdot\dfrac{1}{z+1} \ge 8\dfrac{xyz}{(x+1)(y+1)(z+1)}$

$\Leftrightarrow xyz \le \dfrac{1}{8}$.

Dấu " = " xẩy ra khi

$\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{y}{y+1}=\dfrac{z}{y+1} \Leftrightarrow x=y=z=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow a=b=c=\dfrac{1}{4}$

Vậy giá trị lớn nhất của tích (a + b)(b + c)(c + a) là $\dfrac{1}{8}$

Câu 5.

a) Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông tac có: AE.AB = AD² ;

AF.AC = AD²

Suy ra: AE.AB = AF.AC

Biểu thị được : tanB = $\frac{AD}{BD}$; tanC = $\frac{AD}{CD}$; tanB.tanC = $\frac{AD^2}{BD.CD}$

b) Biểu thị được:

tanB = $\tan DHC = \frac{CD}{HD}$; tanC = $\tan DHB = \frac{BD}{HD}$; tanB.tanC = $\frac{BD.CD}{HD^2}$

Suy ra: (tanB.tanC)² = $\frac{AD^2}{HD^2}$ => tanB.tanC = $\frac{AD}{HD} = 3$

c) Chứng minh được: AE.AB/AK.AB=AF.AC/AI.AC => EF // IK

Chứng minh được: $\frac{BM}{MI} = \frac{BD}{DC} = \frac{BE}{EK} \Rightarrow ME//IK \Rightarrow M \in EF$

Tương tự chứng minh được $N \in EF$ và suy ra 4 điểm E, M, N, F thẳng hàng

Đề số 3

Câu 1.

1) Ta có: $\frac{2008}{\sqrt{2009}} + \frac{2009}{\sqrt{2008}} = \frac{2009-1}{\sqrt{2009}} + \frac{2008+1}{\sqrt{2008}}$

$= (\sqrt{2008} + \sqrt{2009}) + (\frac{1}{\sqrt{2008}} - \frac{1}{\sqrt{2009}}) > 0$

Vậy $\frac{2008}{\sqrt{2009}} + \frac{2009}{\sqrt{2008}} > \sqrt{2008} + \sqrt{2009}$

2) Ta có: $B=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{2010}}$

$$B=\frac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}+\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}+...+\frac{2}{\sqrt{2010}+\sqrt{2010}}$$

$$>\frac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\frac{2}{\sqrt{2010}+\sqrt{2011}}$$

$$=2.(\sqrt{2011}-1)>2.43=86$$

Câu 2.

Ta có: $x=\frac{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}.(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}}=\frac{(\sqrt{3}+1).(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{5}+1-\sqrt{5}}=2$

$\Rightarrow P=(2^3-4.2-1)^{2010}=1\in \mathrm{N}$

Câu 3.

1) Ta có: $\sqrt{2x-1}+2=x\Rightarrow\sqrt{2x-1}=x-2$ Điều kiện: $x\geq 2$

$\sqrt{2x-1}=x-2\Leftrightarrow 2x-1=x^2-4x+4$

$\Leftrightarrow x^2-6x+5=0\Leftrightarrow (x-1)(x-5)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=5 \end{array}\right.$

2) Ta có: $y=\sqrt{x^2+4x+5}$ Điều kiện : $x\in R, y>0$

Bình phương hai vế ta được:

$y^2=(x+2)^2+1$

$\Leftrightarrow (y+x+2)(y-x-2)=1$

Do x, y nguyên và y nguyên dương nên ta có:

$\begin{cases} y+x+2=1 \\ y-x-2=1 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$

Câu 4.

1) Ta có: $\Delta ABM = \Delta ADI \Rightarrow AM = AI\,(1)$

Trong tam giác AIK vuông tại A ta có: $\frac{1}{AI^2}+\frac{1}{AK^2}=\frac{1}{AD^2}\,(2)$. và AB = AD

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{1}{AM^2}+\frac{1}{AK^2}=\frac{1}{AB^2}$

2) Kẻ AH vuông góc MN $(H \in MN)$.

Do CM + CN = 7 và CM - CN = 1 $\Rightarrow$CM = 4; CN = 3 $\Rightarrow$MN = 5

Ta có $\Delta AMN = \Delta AIN \Rightarrow AH = AD \Rightarrow IN = MN$

$\Delta AMH = \Delta AID \Rightarrow ID = MH$ mà $ID = BM \Rightarrow MH = BM$

Ta lại có: $DN + BM = MN = 5$ và $CM + BM = CN + DN \Rightarrow DN - BM = CM - CN = 1$

$\Rightarrow$ DN = 3; BM = 2; BC = AD = AH = 6

$\Rightarrow \quad S_{\Delta AMN} = \frac{1}{2}AH.MN = \frac{1}{2}.6.5 = 15(cm^2)$

3) Từ giả thiết ta có AQRO là hình chữ nhật

$OP^2 + OQ^2 + OR^2 = OA^2 + OP^2 \geq \frac{(OA+OP)^2}{2} \geq \frac{AP^2}{2} \geq \frac{AD^2}{2}$

$OP^2 + OQ^2 + OR^2$ nhỏ nhất khi O là trung điểm của AD

Câu 5.

Vai trò của a, b, c là như nhau nên không mất tính tổng quát, giả sử : $a \leq b \leq c$. Khi đó vì: $0 \leq a,b,c \leq 2$ và $a+b+c=3$ nên ta có: $0 \leq a \leq 1 \Rightarrow a^3 \leq a$.

Mặt khác: $1 \leq c \leq 2 \Rightarrow (c-1)(c-2)(c+3) \leq 0 \Rightarrow c^3 \leq 7c-6$

Ta xét hai trường hợp của b:

Nếu $0 \leq b \leq 1 \Rightarrow b^3 \leq b$. Khi đó:

$a^3 + b^3 + c^3 \leq a + b + 7c - 6 = a + b + c + 6c - 6 \leq 3 + 6.2 - 6 = 9$

$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 \leq 9$

Nếu $1 \leq b \leq 2 \Rightarrow b^3 \leq 7b - 6$.Khi đó:

$a^3 + b^3 + c^3 \leq a + 7b - 6 + 7c - 6 = 7(a+b+c) - 6a - 12 = 9 - 6a \leq 9$

Vậy $a^3 + b^3 + c^3 \leq 9$(đpcm)

Đề số 4

Câu 1.

a) Điều kiên: x > 1.

$$B = \frac{1}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}-1}$$

$$= \frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}{(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})(\sqrt{x-1}-\sqrt{x})} + \frac{x(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1}$$

$= \dfrac{2\sqrt{x-1}}{-1} + x$

$= x - 2\sqrt{x-1}$

b) Với $x > 1$ ta có : $B > 0 \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x-1} > 0$

$\Leftrightarrow x > 2\sqrt{x-1}$

$\Leftrightarrow x^2 > 4(x-1)$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 > 0 \quad (*)$

(*) đúng với mọi $x \neq 2$. Vậy $B > 0$ khi $x > 1$ và $x \neq 2$

c) Ta có: $x = \dfrac{53}{9-2\sqrt{7}} = \dfrac{53(9+2\sqrt{7})}{81-28} = 9 + 2\sqrt{7}$

Thay vào $B = x - 2\sqrt{x-1}$ ta có:

$B = 9 + 2\sqrt{7} - 2\sqrt{8+2\sqrt{7}} = 9 + 2\sqrt{7} - 2(\sqrt{7}+1) = 7$

Vậy khi $x = \dfrac{53}{9-2\sqrt{7}}$ thì $B = 7$.

Câu 2.

a) Điều kiện: $x \geq 5$

$\sqrt{x-1+4\sqrt{x-5}} + \sqrt{-1+x-4\sqrt{x-5}} = 4$

$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-5}+2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-5}-2)^2} = 4$

$\Leftrightarrow \left|\sqrt{x-5}+2\right| + \left|\sqrt{x-5}-2\right| = 4$

$\Leftrightarrow \left|\sqrt{x-5}+2\right| + \left|2-\sqrt{x-5}\right| = 4 \quad (1)$

Áp dụng bất đẳng thức: $|A| + |B| \geq |A+B|$ vào (1) ta có :

$\left|\sqrt{x-5}+2\right| + \left|2-\sqrt{x-5}\right| \geq \left|\sqrt{x-5}+2+2-\sqrt{x-5}\right| = 4$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow (\sqrt{x-5}+2).(2-\sqrt{x-5}) \geq 0$

$\Leftrightarrow (2-\sqrt{x-5}) \geq 0$ (vì $\sqrt{x-5}+2 > 0$)

$\Leftrightarrow 2 \geq \sqrt{x-5}$

$\Leftrightarrow x \leq 9$

Kết hợp với điều kiện, ta có $5 \leq x \leq 9$

Vậy nghiệm của phương trình là: $5 \leq x \leq 9$

b. Giả sử: $\sqrt{10}$ là số hữu tỉ. Đặt : $\sqrt{10} = \dfrac{a}{b}$ (a, b $\in N^*$,UCLN(a;b)=1)

$\Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = 10 \Rightarrow a^2 = 10b^2 \Rightarrow a^2 \vdots 5 \Rightarrow a \vdots 5 \Rightarrow a^2 \vdots 25$

$\Rightarrow 10b^2 \vdots 25 \Rightarrow b^2 \vdots 5 \Rightarrow b \vdots 5$

Khi đó ƯCLN(a;b) ≥ 5 mâu thẫn với ƯCLN(a;b) = 1.

Vậy $\sqrt{10}$ là số vô tỉ.

Câu 3.

a. Vẽ đồ thị hàm số $y = |2x+1|$

$$y = |2x+1| = \begin{cases} 2x+1 \text{ khi } x \geq -\frac{1}{2} \\ -2x-1 \text{ khi } x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Nhận xét rằng $y \geq 0$ với mọi x.

Ta có đồ thị hàm số :

b.(1,5đ) Giả sử M(x_0 ; y_0) là tọa độ giao điểm của hai đồ thị hai hàm số $y = |2x+1|$ và y = 3x – 5. ta có :

$|2x_0 + 1| = 3x_0 - 5$ điều kiện $x_0 \geq \frac{5}{3}$

Trường hợp 1: $2x_0 + 1 = 3x_0 - 5 \Rightarrow x_0 = 6$ (nhận).

Trường hợp 2: $2x_0 + 1 = -3x_0 + 5 \Rightarrow x_0 = \frac{4}{5}$ (loại).

Vậy tọa độ giao điểm cần tìm là M(6 ; 13)

Câu 4.

a) Vẽ OH vuông góc với CD, OH cắt EF tại K, suy ra HK vuông góc với EF (vì CD // EF). Suy ra HC = HD; KE = KF.

Ta chứng minh được $\Delta HOM = \Delta KON$ (cạnh huyền - góc nhọn)

Suy ra OH = OK, suy ra CD = EF, từ đó suy ra tứ giác CDEF là hình bình hành.

Lại có KH là đường trung bình của hình bình hành CDFE, nên HK // CE, suy ra $ECD = KHD = 90^0$. Vậy tứ giác CDFE là hình chữ nhật.

b) Ta có: $OH = OM.\text{Sin}HMO = \frac{2}{3}.R.\text{Sin}60^0 = \frac{R\sqrt{3}}{3}$

$$CE = HK = 2.OH = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$$

$$CH^2 = OC^2 - OH^2 = R^2 - \frac{3R^2}{9} = \frac{6R^2}{9}$$

Suy ra: $CH = \frac{R\sqrt{6}}{3} \Rightarrow CD = \frac{2R\sqrt{6}}{3}$

Vậy: $S_{CDFE} = CE.CD = \frac{2R\sqrt{3}}{3}.\frac{2R\sqrt{6}}{3} = \frac{2R^2\sqrt{2}}{3}$ (đvdt)

Câu 5.

Giả sử ngũ giác ABCDE thoả mãn đk bài toán.

ΔBCD và ΔECD có $S_{BCD} = S_{ECD} = 1$, đáy CD chung nên các đường cao hạ từ B và E xuống CD bằng nhau => EB // CD.

Tương tự AC// ED, BD //AE, CE // AB, DA // BC

Gọi I = EC $\cap$ BC => ABIE là hình bình hành.

=> $S_{IBE} = S_{ABE} = 1$. Đặt $S_{ICD} = x < 1$

=> $S_{IBC} = S_{BCD} - S_{ICD} = 1-x = S_{ECD} - S_{ICD} = S_{IED}$

Lại có: $\frac{S_{ICD}}{S_{IDE}} = \frac{IC}{IE} = \frac{S_{IBC}}{S_{IBE}}$ Lại có $\frac{x}{1-x} = \frac{1-x}{1} \Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

Do $x < 1$ nên $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

Vậy $S_{IED} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Do đó $S_{ABCDE} = S_{EAB} + S_{EBI} + S_{BCD} + S_{IED}$

$= 3 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$ (đvdt)

Câu 6.

a) Áp dụng bất đẳng thức $x^2 + y^2 \geq 2xy$, ta có:

$$a^4 + b^4 + c^4 = \frac{1}{2}(a^4 + b^4) + \frac{1}{2}(b^4 + c^4) + \frac{1}{2}(c^4 + a^4)$$

$$\geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \quad (1)$$

Mặt khác :

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = \frac{1}{2}a^2(b^2 + c^2) + \frac{1}{2}b^2(c^2 + a^2) + \frac{1}{2}c^2(a^2 + b^2)$$

$$\geq a^2bc + b^2ca + c^2ab = abc(a + b + c) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$ (đpcm).

b) Ta có: $\overline{abc} = 100a + 10b + c = n^2 - 1 \quad (1)$

$\overline{cba} = 100c + 10b + a = (n-2)^2 = n^2 - 4n + 4 \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có: $99(a-c) = 4n - 5 \Rightarrow (4n-5) \vdots 99 \quad (3)$

Mặt khác $100 \leq n^2 - 1 \leq 999 \Leftrightarrow 101 \leq n^2 \leq 1000 \Leftrightarrow 11 \leq n^2 \leq 31 \Leftrightarrow 39 \leq 4n - 5 \leq 119 \quad (4)$

Từ (3) và (4): $\Rightarrow 4n - 5 = 99 \Rightarrow n = 26$

Vậy $\overline{abc} = 675$.

Đề số 5

Câu 1.

1) Điều kiện: $x \ge 0,\ x \ne 4,\ x \ne 9$

$$P = \left(1 - \frac{x - 3\sqrt{x}}{x - 9}\right) : \left(\frac{9 - x}{x + \sqrt{x} - 6} - \frac{\sqrt{x} - 3}{2 - \sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 3}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{x - 3\sqrt{x}}{x - 9}\right) : \left(\frac{9 - x}{\left(\sqrt{x} + 3\right)\left(\sqrt{x} - 2\right)} - \frac{\sqrt{x} - 3}{2 - \sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 3}\right)$$

$$= \frac{3\sqrt{x} - 9}{x - 9} : \frac{9 - x + \left(\sqrt{x} - 3\right)\left(\sqrt{x} + 3\right) - \left(\sqrt{x} - 2\right)^2}{\left(\sqrt{x} + 3\right)\left(\sqrt{x} - 2\right)}$$

$$= \frac{3\left(\sqrt{x} - 3\right)}{\left(\sqrt{x} - 3\right)\left(\sqrt{x} + 3\right)} : \frac{9 - x + x - 9 - \left(\sqrt{x} - 2\right)^2}{\left(\sqrt{x} + 3\right)\left(\sqrt{x} - 2\right)}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{x} + 3} : \frac{2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3}$$

$$= \frac{3}{2 - \sqrt{x}}$$

2) Ta có:

$$P > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0,\ x \ne 4,\ x \ne 9 \\ \dfrac{3}{2 - \sqrt{x}} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0,\ x \ne 4,\ x \ne 9 \\ 2 - \sqrt{x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le x < 4$$

3) Ta có:

$$P.\left(x + 1\right) = \frac{3}{2 - \sqrt{x}}.\left(x + 1\right) = -3\left(\frac{x + 1}{\sqrt{x} - 2}\right) = -3\left(\frac{x - 4 + 5}{\sqrt{x} - 2}\right)$$

$$= -3\left[\left(\sqrt{x} + 2\right) + \frac{5}{\sqrt{x} - 2}\right] = -3\left[\left(\sqrt{x} - 2\right) + \frac{5}{\sqrt{x} - 2}\right] - 12$$

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\left(\sqrt{x} - 2\right) + \frac{5}{\sqrt{x} - 2} \ge 2\sqrt{\left(\sqrt{x} - 2\right).\frac{5}{\sqrt{x} - 2}} = 2\sqrt{5}$$

Do đó: $P.\left(x + 1\right) \le -3.2\sqrt{5} - 12 = -6\sqrt{5} - 12$

Dấu "=" xảy ra khi $\sqrt{x} - 2 = \dfrac{5}{\sqrt{x} - 2} \Leftrightarrow \sqrt{x} - 2 = \sqrt{5} \Leftrightarrow x = \left(2 + \sqrt{5}\right)^2$

Câu 2.

1) Đặt $n^2 - 14n - 256 = k^2\ \left(k \in N\right) \Leftrightarrow \left(n - 7\right)^2 - k^2 = 305$

$\Leftrightarrow \left(n - k - 7\right)\left(n + k - 7\right) = 305 = 1.305 = 61.5$

Xét các trường hợp: do $n + k - 7 > n - k - 7$

Trường hợp 1: $n - k - 7 = 1$ và $n + k - 7 = 305 \Rightarrow n = 160$ (nhận)

Trường hợp 2: $n - k - 7 = -305$ và $n + k - 7 = -1 \Rightarrow n = -146$ (loại)

Trường hợp 3: $n - k - 7 = 5$ và $n + k - 7 = 61 \Rightarrow n = 40$ (nhận)

Trường hợp 4: $n - k - 7 = -61$ và $n + k - 7 = -5 \Rightarrow n = -26$ (loại)

Vậy $n = 40$, $k = 28$ hoặc $n = 160$, $k = 152$

2) Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 2 số dương a^2 và b^2

$$a^2 + b^2 \ge 2\sqrt{a^2b^2} = 2ab = 2$$

$$A = (a+b+1)(a^2+b^2) + \frac{4}{a+b} \ge 2\left((a+b+1) + \frac{2}{a+b}\right) = 2 + \left(a+b+\frac{4}{a+b}\right) + (a+b)$$

Áp dụng BĐT AM-GM ta có :

$$A \ge 2 + 2\sqrt{(a+b).\frac{4}{a+b}} + 2\sqrt{ab} = 2 + 4 + 2 = 8$$

Giá trị nhỏ nhất của A= 8 khi $a = b = 1$.

Câu 3. Điều kiện : $\begin{cases} 0 \le x \le 2012 \\ 0 \le y \le 2012 \end{cases}$

Từ 2 phương trình của hệ ta có:

$$\sqrt{x} + \sqrt{2012 - y} = \sqrt{2012 - x} + \sqrt{y} \Leftrightarrow \sqrt{x} - \sqrt{2012 - x} = \sqrt{y} - \sqrt{2012 - y}$$

Nếu $x > y$ thì : $-\sqrt{2012 - x} > -\sqrt{2012 - y}$ => VT > VP (mâu thuẫn)

Tương tự nếu $x < y$ => VT < VP (mâu thuẫn)

=> $x = y$

Do đó: Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = y & (1) \\ \sqrt{x} + \sqrt{2012 - x} = \sqrt{2012} & (2) \end{cases}$

Bình phương 2 vế của pt (2) => $x = 0$ hoặc $x = 2012$

Vậy nghiệm của hệ (x;y) = (0;0),(2012;2012)

Câu 4.

1. Ta có: $\widehat{O}_1 = \widehat{O}'_1 (= 180^0 - 2\hat{A}_1)$ => OM //O'N

2. Gọi P là giao điểm của MN và OO'

Ta có: $\dfrac{PO'}{PO} = \dfrac{O'N}{OM} = \dfrac{R'}{R}$

Gọi P' là giao điểm của BC và OO'

Do OB // O'C nên: $\dfrac{P'O'}{P'O} = \dfrac{O'C}{OB} = \dfrac{R'}{R}$

$\Rightarrow P \equiv P'$ do đó 3 đường thẳng BC, OO' và MN đồng quy

3. MNO'C là hình thang có:

$$S = \frac{(OM + O'N)O'H}{2} = \frac{R + R'}{2} \cdot O'H \le \frac{R + R'}{2} \cdot OO' = \frac{(R + R')^2}{2}$$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow H \equiv O \Leftrightarrow OM \perp OO'$ và $O'N \perp OO'$

Vậy Max $S = \dfrac{(R + R')^2}{2}$

Câu 5.

1. Gọi O và I là tâm đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ABC

A_1 , B_1, C_1 lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB

Có: $AA_1 = m_a \le R + OA_1$ đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ AB = AC

$BB_1 = m_b \le R + OB_1$ đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ AB = BC

$CC_1 = m_c \le R + OC_1$ đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ AC = BC

$$\Rightarrow \frac{m_a}{h_a} + \frac{m_b}{h_b} + \frac{m_c}{h_c} \le R\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) + \left(\frac{OA_1}{h_a} + \frac{OB_1}{h_b} + \frac{OC_1}{h_c}\right) \quad (1)$$

Có $2S = (a + b + c)r \Rightarrow \dfrac{2S}{r} = a + b + c = \dfrac{2S}{h_a} + \dfrac{2S}{h_b} + \dfrac{2S}{h_c}$

Với $(AB = c, BC = a, AC = b) \Rightarrow \dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} = \dfrac{1}{r}$ (2)

$$2S = a.OA_1 + b.OB_1 + c.OC_1 = \frac{2S}{h_a}\cdot OA_1 + \frac{2S}{h_b}\cdot OB_1 + \frac{2S}{h_c}\cdot OC_1$$

$$= 2S\left(\frac{OA_1}{h_a} + \frac{OB_1}{h_b} + \frac{OC_1}{h_c}\right) \Rightarrow \frac{OA_1}{h_a} + \frac{OB_1}{h_b} + \frac{OC_1}{h_c} = 1 \qquad (3)$$

Từ (1),(2),(3) $\Rightarrow \frac{m_a}{h_a} + \frac{m_b}{h_b} + \frac{m_c}{h_c} \le \frac{R+r}{r}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi ΔABC đều

2. Theo đề bài có: $a + b^2 = k\left(a^2b - 1\right)\left(k \in N^*\right)$

$\Leftrightarrow a + k = b\left(ka^2 - b\right) \Leftrightarrow a + k = mb \qquad (1)$

Với $ka^2 - b = m\left(m \in N^*\right) \Rightarrow m + b = ka^2 \qquad (2)$

Từ (1) và (2) có $(m - 1)(b - 1) = mb - b - m + 1$

$= a + k - ka^2 + 1 = (a + 1)(k + 1 - ka) \quad (3)$

Vì $m > 0$ theo (1) nên $(m - 1)(b - 1) \ge 0$. Từ (3)

=> $k + 1 - ka \ge 0$ => $k + 1 \ge ka$ => $1 \ge k(a - 1)$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} k(a-1) = 0 \\ k(a-1) = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = 2, k = 1 \end{array}\right.$$

* Nếu a = 1 từ (3) => $(m - 1)(b - 1) = 2$ => b = 2 hoặc b = 3

=> (a; b) = (1; 2) và (1; 3)

* Nếu a = 2, k = 1 => $(m -1)(b - 1) = 0$

Khi m = 1 từ (1) => (a; b) = (2; 3)

Khi b = 1 => (a; b) = (2; 1)

Thử lại ta có đáp số (a,b) = (1,2),(1,3), (2,3),(2,1)

Đề số 6

Câu 1.

1) Điều kiện $x > 0; x \ne 1; 4$

$$P = \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)^2} + \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$$

$$= \frac{2(x+1)}{x-1}$$

$$P > 1 \Leftrightarrow \frac{2(x+1)}{x-1} > 1 \Leftrightarrow \frac{2(x+1)}{x-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{2x+2-x+1}{x-1} > 0$$

$\Leftrightarrow \frac{x+3}{x-1} > 0$ Theo đ/k $x > 0 \Rightarrow x + 3 > 0$

$\Rightarrow x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$

Kết hợp điều kiện $x > 0; x \neq 1; 4$

Suy ra $x > 1; x \neq 4$ thì $P > 1$

2) $P = \frac{2(x+1)}{x-1} = 2 + \frac{4}{x-1}$ Với $x > 0; x \neq 1; 4$

P nguyên $\Leftrightarrow$ $x - 1$ là ước của 4

P đạt giá trị nguyên lớn nhất $\Leftrightarrow$ $x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 2$

Vậy P đạt giá trị lớn nhất bằng 6 khi $x = 2$.

Câu 2.

1) Điều kiện $x - 3 + |3 + 2x| \neq 0$

Phương trình tương đương

$|3x - 5| - |x - 1| - 4|2x + 3| - 4x + 12 = 0$ (*)

Xét $x < -\frac{3}{2}$ Thì (*) $\Leftrightarrow -3x + 5 + (x - 1) + 4(2x + 3) - 4x + 12 = 0$

$\Leftrightarrow 2x = -28$

$\Leftrightarrow x = -14$ (Thỏa mãn đk)

Xét $-\frac{3}{2} \leq x < 1$ Thì (*)

$\Leftrightarrow -3x + 5 + x - 1 - 4(2x + 3) - 4x + 12 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{2}{7}$ (Thỏa mãn đk)

Xét $1 \leq x < \frac{5}{3}$ Thì (*)

$\Leftrightarrow -3x + 5 - (x - 1) - 4(2x + 3) - 4x + 12 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{3}{8}$ (loại)

Xét $x \geq \frac{5}{3}$ Thì (*) $\Leftrightarrow 3x - 5 - (x - 1) - 4(2x + 3) - 4x + 12 = 0$

$\Leftrightarrow x = -\frac{2}{5}$ (Loại)

Vậy phương trình có nghiệm $x \in \left\{-14; \frac{2}{7}\right\}$

2) Ta có $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$

$\Leftrightarrow (x + y)^2 = xy(xy + 1)$

+ Nếu x + y = 0 $\Rightarrow$ xy(xy + 1) = 0 $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} xy = 0 \\ xy = -1 \end{array}\right.$

Với xy = 0. Kết hợp với x + y = 0 $\Rightarrow$ x = y = 0

Với xy = -1. Kết hợp với x + y = 0 $\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$

+ Nếu x + y $\neq$ 0 $\Rightarrow$ $(x + y)^2$ là số chính phương

xy(xy + 1) là hai số nguyên liên tiếp khác 0 nên chúng nguyên tố cùng nhau. Do đó không thể cùng là số chính phương

Vậy nghiệm nguyên của phương trình là (x; y) = (0; 0); (1; -1); (-1; 1)

Câu 3.

1) Ta có: $a^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$; $b^2 = y^2 + \frac{1}{y^2} + 2$; $c^2 = x^2y^2 + \frac{1}{x^2y^2} + 2$

Do đó: $ab = (x + \frac{1}{x})(y + \frac{1}{y}) = xy + \frac{1}{xy} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = c + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

$\Rightarrow abc = (c + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}).c = c^2 + c(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}) = c^2 + (xy + \frac{1}{xy})(\frac{x}{y} + \frac{y}{x})$

$= c^2 + x^2 + y^2 + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2 + b^2 - 2 + c^2$

$\Rightarrow A = a^2 + b^2 + c^2 - abc = 4$

2) Ta có: $3(x^2 - \frac{1}{x^2}) < 2(x^3 - \frac{1}{x^3})$

$\Leftrightarrow 3(x - \frac{1}{x})(x + \frac{1}{x}) < 2(x - \frac{1}{x})(x^2 + \frac{1}{x^2} + 1)$

$\Leftrightarrow 3(x + \frac{1}{x}) < 2(x^2 + \frac{1}{x^2} + 1)$ (1) (Vì x > 1 nên $x - \frac{1}{x} > 0$)

Đặt $x + \frac{1}{x} = t$ thì $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$

Ta có (1) $\Leftrightarrow 2t^2 - 3t - 2 > 0$

$\Leftrightarrow (t - 2)(2t + 1) > 0$ (2)

Vì x > 1 nên $(x - 1)^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 > 2x \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} > 2$ hay t > 2

$\Rightarrow$ (2) đúng. Suy ra điều phải chứng minh

Câu 4.

1) Ta có: IP = HQ; IP//HQ (Tính chất đường trung bình) và AD = BC (GT)

$\Rightarrow$ IPHQ là hình bình hành

Có IP = IQ = $\frac{1}{2}$AD = $\frac{1}{2}$BC nên IPHQ là hình thoi

Gọi P_1; Q_1 là giao điểm của PQ với AD và BC

Nhận thấy Δ HPQ cân đỉnh H

$\Rightarrow HPQ = HQP$ (Góc ở đáy tam giác cân) (1)

Mà PH // BC $\Rightarrow BQ_1P = HPQ$ (So le trong) (2)

QH // AD $\Rightarrow AP_1P = HQP$ (So le trong) (3)

Từ (1); (2); (3) Suy ra $AP_1P = BQ_1P$ (đpcm)

2)

Gọi K, M, N lần lượt là trung điểm của EF, DF, CE

Từ giả thiết Δ ADE = Δ BCF và dựa vào tính chất của đường trung bình trong tam giác ta có Δ HMP = Δ HNQ (c.c.c)

Suy ra $MHP = NHQ \Rightarrow MHQ = NHP \Rightarrow MHN$ và PHQ có cùng tia phân giác

Mặt khác dễ có IPHQ và KMHN là các hình thoi.

Suy ra HK và HI lần lượt là phân giác của MHN và PHQ. Suy ra H, I, K thẳng hàng

Câu 5.

Đặt BD = x, DC = y. Giả sử x < y. Pitago trong tam giác vuông AHD ta tính được HD = 27cm. Vẽ tia phân giác của góc ngoài tại A, cắt BC ở E. Ta có AE $\perp$ AD nên AD^2 = DE.DH. Suy ra

$$DE = \frac{AD^2}{DH} = \frac{45^2}{27} = 75cm$$

Theo tính chất đường phân giác trong và ngoài của tam giác

$$\frac{DB}{DC} = \frac{EB}{EC} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{75-x}{75+y} \quad (1)$$

Mặt khác x + y = 40 (2)

Thay y = 40 – x vào (1) và rút gọn được

$x^2 - 115x + 1500 = 0 \Leftrightarrow (x - 15)(x - 100) = 0$

Do x < 40 nên x = 15, từ đó y = 25.

Vậy DB = 15cm, DC = 25cm

Câu 6.

Áp dụng Bunhiacopski cho hai dãy a^2; 1 và 1; 4 ta có

$$(1^2 + 4^2)(a^4 + 1) \geq (a^2 + 4)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+a^4} \geq \frac{a^2+4}{\sqrt{17}} \quad (1)$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $a = \frac{1}{2}$

Áp dụng Bunhiacopski cho b^2; 1 và 1; 4 ta có

$$17(b^4 + 1) \geq (b^2 + 4)^2 \Rightarrow \sqrt{b^4+1} \geq \frac{b^2+4}{\sqrt{17}} \quad (2)$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $b = \frac{1}{2}$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow P \geq \dfrac{a^2+b^2+8}{\sqrt{17}}$ $(*)$

Mặt khác theo giả thiết $(1+a)(1+b) = \dfrac{9}{4} \Leftrightarrow a+b+ab = \dfrac{5}{4}$

Áp dụng Côsi ta có: $a \leq a^2 + \dfrac{1}{4}$; $b \leq b^2 + \dfrac{1}{4}$; $ab \leq \dfrac{a^2+b^2}{2}$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức ta được

$\dfrac{3}{2}(a^2+b^2) + \dfrac{1}{2} \geq a+b+ab = \dfrac{5}{4} \Rightarrow a^2+b^2 \geq (\dfrac{5}{4} - \dfrac{1}{2}) : \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{2}$

Thay vào $(*)$ ta được: $P \geq \dfrac{\frac{1}{2}+8}{\sqrt{17}} = \dfrac{\sqrt{17}}{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\dfrac{\sqrt{17}}{2}$ khi $a = b = \dfrac{1}{2}$

Đề số 7

Câu 1.

a) Ta có $\dfrac{a}{x+y} = \dfrac{5}{x+z} = \dfrac{5-a}{z-y} = \dfrac{5+a}{2x+y+z}$

Suy ra $\dfrac{25}{(x+z)^2} = \dfrac{(5-a)(5+a)}{(z-y)(2x+y+z)} = \dfrac{25-a^2}{(z-y)(2x+y+z)} = \dfrac{16}{(z-y)(2x+y+z)}$

Suy ra $25 - a^2 = 16 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$

Mặt khác $Q = \dfrac{a^6-2a^5+a-2}{a^5+1} = \dfrac{a^5(a-2)+(a-2)}{a^5+1} = \dfrac{(a-2)(a^5+1)}{a^5+1} = a-2$, với $a \neq -1$

Với $a = 3$ thì $Q = 1$

Với $a = -3$ thì $Q = -5$

b) Ta có: $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{abc} \Rightarrow ab+bc+ca = 1$

$\Rightarrow 1+a^2 = ab+bc+ca+a^2 = a(a+b)+c(a+b) = (a+b)(a+c)$

$\Rightarrow 1+b^2 = ab+bc+ca+b^2 = b(a+b)+c(a+b) = (a+b)(b+c)$

$\Rightarrow 1+c^2 = ab+bc+ca+c^2 = b(a+c)+c(a+c) = (a+c)(b+c)$

$\Rightarrow (1+a^2)(1+b^2)(1+c^2) = (a+b)^2(b+c)^2(a+c)^2 = [(a+b)(b+c)(c+a)]^2$ Vì a, b, c là các số nguyên $\Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a) \in Z$

$\Rightarrow (1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)$ là số chính phương.

Câu 2.

a) Ta có: $\frac{x-241}{17}+\frac{x-220}{19}+\frac{x-195}{21}+\frac{x-166}{23}=10$

$$\Leftrightarrow \frac{x-241}{17}-1+\frac{x-220}{19}-2+\frac{x-195}{21}-3+\frac{x-166}{23}-4=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-258}{17}+\frac{x-258}{19}+\frac{x-258}{21}+\frac{x-258}{23}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-258)\left(\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\frac{1}{21}+\frac{1}{23}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x=258$$

Vậy phương trình có nghiệm x = 258.

b) + Phương trình được biến đổi thành: $(x + 1)(x^2 + 1) = (2y + 1)^2$

+ Ta chứng minh (x + 1) và $(x^2 + 1)$ nguyên tố cùng nhau.

Vì nếu d = UCLN $(x+1, x^2+1)$ thì d phải là số lẻ (*vì 2y+1 lẻ*)

$$\Rightarrow \begin{cases} x+1 \vdots d \\ x^2+1 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+x \vdots d \\ x^2+1 \vdots d \\ x+1 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+1 \vdots d \\ x-1 \vdots d \end{cases} \Rightarrow 2 \vdots d$$ mà d lẻ nên d = 1.

+ Nên muốn $(x + 1)(x^2 + 1)$ là số chính phương

Thì (x+1) và $(x^2 + 1)$ đều phải là số chính phương

Đặt: $\begin{cases} x^2+1=k^2 \\ x+1=t^2 \end{cases} \Rightarrow (k+x)(k-x)=1 \Rightarrow \begin{cases} k=1 \\ x=0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} k=-1 \\ x=0 \end{cases}$

+ Với x = 0 thì $(2y + 1)^2 = 1 \Rightarrow$ y = 0 hoặc y = - 1.(*Thỏa mãn pt*)

Vậy nghiệm của phương trình là: $(x; y) = \{(0; 0), \ (0; -1)\}$

Câu 3.

a) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với: $\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{a-c}{a}}+\sqrt{\frac{c}{a}\cdot\frac{b-c}{b}}\le 1$

Áp dụng bđt Cauchy $\sqrt{xy}\le\frac{x+y}{2}$ Với $x \ge 0$, $y \ge 0$.

Đẳng thức xảy ra <=> x = y. Ta có:

$$\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{a-c}{a}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{c}{b}+\frac{a-c}{a}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{c}{b}-\frac{c}{a}\right)$$

$$\sqrt{\frac{c}{a}\cdot\frac{b-c}{b}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{c}{a}+\frac{b-c}{b}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)$$

Cộng vế với vế hai bđt ta được bđt cần chứng minh:

Đẳng thức xảy ra <=> $\frac{c}{b}=\frac{a-c}{a}$ và $\frac{c}{a}=\frac{b-c}{b}$ <=> $c=\frac{ab}{a+b}$

b) Giả sử $f(x)=ax^4+bx^3+cx^3+dx+e$

Do $f(0)=e$ nên $e\vdots 7$

Mặt khác: $\begin{cases} f(1)=a+b+c+d+e\vdots 7 \\ f(-1)=a-b+c-d+e\vdots 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+c\vdots 7 \\ b+d\vdots 7 \end{cases}$

$$\begin{cases} f(2)=16a+8b+4c+2d+e\vdots 7 \\ f(-1)=16a-8b+4c-2d+e\vdots 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a+c\vdots 7 \\ 4b+d\vdots 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+c\vdots 7 \\ 4a+c\vdots 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a\vdots 7 \\ c\vdots 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\vdots 7 \\ c\vdots 7 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} b+d\vdots 7 \\ 4b+d\vdots 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3b\vdots 7 \\ d\vdots 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b\vdots 7 \\ d\vdots 7 \end{cases}$$

Vậy các hệ số của f(x) đều chia hết cho 7.

Câu 4.

a) Ta có: $\frac{S_{HBC}}{S_{ABC}}=\frac{\frac{1}{2}.HA'.BC}{\frac{1}{2}.AA'.BC}=\frac{HA'}{AA'}$;

Tương tự: $\frac{S_{HAB}}{S_{ABC}}=\frac{HC'}{CC'}$; $\frac{S_{HAC}}{S_{ABC}}=\frac{HB'}{BB'}$

$$\frac{HA'}{AA'}+\frac{HB'}{BB'}+\frac{HC'}{CC'}=\frac{S_{HBC}}{S_{ABC}}+\frac{S_{HAB}}{S_{ABC}}+\frac{S_{HAC}}{S_{ABC}}=1$$

b) Áp dụng tính chất phân giác vào các ΔABC, ΔABI, ΔAIC:

$$\frac{BI}{IC}=\frac{AB}{AC};\frac{AN}{NB}=\frac{AI}{BI};\frac{CM}{MA}=\frac{IC}{AI}$$

$$\Rightarrow \frac{BI}{IC}.\frac{AN}{NB}.\frac{CM}{MA}=\frac{AB}{AC}.\frac{AI}{BI}.\frac{IC}{AI}=\frac{AB}{AC}.\frac{IC}{BI}=1$$

$$\Rightarrow BI.AN.CM=BN.IC.AM$$

c) Vẽ $Cx\perp CC'$. Gọi D là điểm đối xứng của A qua Cx

- Chứng minh được góc BAD vuông, CD = AC, AD = 2CC'

- Xét 3 điểm B, C, D ta có: BD ≤ BC + CD

- Δ BAD vuông tại A nên: $AB^2 + AD^2 = BD^2$

$\Rightarrow$ $AB^2 + AD^2 \le (BC+CD)^2$ => $AB^2 + 4CC'^2 \le (BC+AC)^2$

=> $4CC'^2 \le (BC+AC)^2 - AB^2$

Tương tự: $4AA'^2 \le (AB+AC)^2 - BC^2$

$4BB'^2 \le (AB+BC)^2 - AC^2$

- Chứng minh được : $4(AA'^2 + BB'^2 + CC'^2) \le (AB+BC+AC)^2$

$$\Leftrightarrow \frac{(AB+BC+CA)^2}{(AA')^2+(BB')^2+(CC')^2} \ge 4$$

Vậy GTNN của $\dfrac{(AB+BC+CA)^2}{(AA')^2+(BB')^2+(CC')^2} = 4$

Đẳng thức xảy ra khi BC = AC, AC = AB, AB = BC hay AB = BC = CA tức là ΔABC đều

Câu 5.

Áp dụng định lí Talet ta có : $\dfrac{ME}{EQ} = \dfrac{MN}{BQ}$ (1); $\dfrac{PF}{FN} = \dfrac{PC}{MN}$ (2)

Vì ME = PF $\Rightarrow \dfrac{ME}{EQ} = \dfrac{PF}{FN}$ (3)

Từ (1); (2); (3) $\Rightarrow \dfrac{MN}{BQ} = \dfrac{PC}{MN} \Leftrightarrow \dfrac{MQ}{QB} = \dfrac{PC}{NP}$

Suy ra hai tam giác vuông Δ BMQ và Δ NCP đồng dạng với nhau

=> MBQ + NCP = CNP + NCP = 90^0

Suy ra : Δ ABC vuông tại A

Đề số 8

Câu 1.

a) Ta có: $A=\dfrac{2\sqrt{x}-9}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)}+\dfrac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}-\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}$

$$=\frac{2\sqrt{x}-9+(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)-(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)}$$

$$=\frac{2\sqrt{x}-9+2x-4\sqrt{x}+\sqrt{x}-2-x+9}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)}=\frac{x-\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)}$$

$$=\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$$

Vậy $A=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$ với $(x\ge 0, x\ne 4, x\ne 9)$.

b) Với $(x\ge 0, x\ne 4, x\ne 9)$ Ta có:

$$A=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2\sqrt{x}+2=-\sqrt{x}+3$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x}=1\Leftrightarrow x=\frac{1}{9}(t/m)$$

Vậy $A=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{9}$.

Câu 2.

a) Ta có $\sqrt{8-2\sqrt{15}}-\sqrt{8+2\sqrt{15}}$

$$=\sqrt{5-2\sqrt{15}+3}-\sqrt{5+2\sqrt{15}+3}=\sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}-\sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}$$

$$=\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{5}-\sqrt{3}=-2\sqrt{3}$$

b) Ta có: $x^2-x-1=0\Rightarrow x^2-x=1\Rightarrow\left(x^2-x\right)^3=1\Rightarrow x^6-3x^5+3x^4-x^3=1.$

Mặt khác: $x^2-x-1=0\Rightarrow x^2=x+1\Rightarrow x^6=\left(x+1\right)^3=x^3+3x^2+3x+1.$

Suy ra: $P=\dfrac{1+2015}{1+2015}=\dfrac{2016}{2016}=1.$

c) Điều kiện: $x^2-9>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>3\\x<-3\end{array}\right.$

+ Nếu $x>3$: Bình phương hai vế của phương trình ta được:

$$x^2+\frac{9x^2}{x^2-9}+\frac{6x^2}{\sqrt{x^2-9}}=72\Leftrightarrow\frac{x^4}{x^2-9}+6.\frac{x^2}{\sqrt{x^2-9}}-72=0$$

Đặt $t = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-9}}$ $(t > 0)$, được phương trình: $t^2 + 6t - 72 = 0 \Leftrightarrow t = 6$.

Khi đó: $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-9}} = 6 \Leftrightarrow x^4 - 36x^2 + 324 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 18$.

Trong trường hợp này tìm được: $x = 3\sqrt{2}$

+ Nếu $x < -3$: Khi đó: $x + \dfrac{3x}{\sqrt{x^2-9}} < 0 < 6\sqrt{2}$: PT vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất: $x = 3\sqrt{2}$.

Câu 3.

a) Ta có: $F = n^3 + 4n^2 - 20n - 48 = (n-4)(n+2)(n+6)$.

Thử với $n = 1; 2; 3$ thì F đều không chia hết cho 125.

Thử với $n = 4$ thì $F = 0$ chia hết cho 125.

Vậy số nguyên dương bé nhất cần tìm là: $n = 4$.

b) Ta có: $A = n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$

$= n^4(n^2-1) + 2n^2(n+1)$

$= n^2(n+1)(n^3-n^2+2)$

$= n^2(n+1)[(n+1)(n^2-2n+2)]$

$= n^2(n+1)^2(n^2-2n+2) = n^2(n+1)^2[(n-1)^2+1]$

Ta có: $(n-1)^2 < (n-1)^2 + 1 = n^2 + 2(1-n) < n^2$ (vì $n > 1$)

$\Rightarrow (n-1)^2 + 1$ không thể là số chính phương

Vậy A không thể là số chính phương

Câu 4.

a) Ta có: $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}.BC.AD$.

ΔABD vuông tại D có $AD = AB.\sin B$, do đó S_{ABC}

$= \dfrac{1}{2}BC.AB.\sin A$.

ΔABE vuông ở E có $AE = AB.\cos A$

ΔBFC vuông ở F có $BF = BC.\cos B$

ΔACD vuông ở D có $CD = AC.\cos C$

Do đó $AE.BF.CD = AB.BC.CA.\cos A.\cos B.\cos C$.

b) Xét ΔABD có $\tan B = \dfrac{AD}{BD}$; ΔACD có $\tan C = \dfrac{AD}{CD}$

suy ra $\tan B.\tan C = \dfrac{AD^2}{BD.CD}$ (1)

Do $HBD = CAD$ (cùng phụ với ACB) nên $\Delta BDH \sim \Delta ADC$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{DH}{DC} = \dfrac{BD}{AD} \Rightarrow BD.DC = DH.DA$

Kết hợp với (1) được $\tan B.\tan C = \dfrac{AD^2}{DH.AD} = \dfrac{AD}{DH}$.

c) Chứng minh được $\Delta AEF \sim \Delta ABC$ (g.g) $\Rightarrow AEF = ABC$.

Tương tự được $CED = CBA$ nên $AEF = CED$ mà $BE \perp AC \Rightarrow AEB = CEB = 90^0$.

Từ đó suy ra $FEB = DEB \Rightarrow$ EH là phân trong của ΔDEF.

Tương tự DH, FH cũng là phân giác trong của ΔDEF nên H là giao ba đường phân giác trong của ΔDEF.

d) Ta có : $S_{BHC} + S_{CHA} + S_{AHB} = S_{ABC}$.

Dễ thấy $\Delta CHE \sim \Delta CAF$(g.g) $\Rightarrow \dfrac{CH}{CA} = \dfrac{CE}{CF} \Rightarrow \dfrac{HB.HC}{AB.AC} = \dfrac{HB.CE}{AB.CF} = \dfrac{2.S_{BHC}}{2.S_{ABC}} = \dfrac{S_{BHC}}{S_{ABC}}$

Tương tự có $\dfrac{HC.HA}{BC.BA} = \dfrac{S_{CHA}}{S_{CBA}}$; $\dfrac{HA.HB}{CA.CB} = \dfrac{S_{HAB}}{S_{CAB}}$.

Do đó: $\dfrac{HB.HC}{AB.AC} + \dfrac{HC.HA}{BC.BA} + \dfrac{HA.HB}{CA.CB} = \dfrac{S_{BHC}}{S_{BAC}} + \dfrac{S_{CHA}}{S_{CBA}} + \dfrac{S_{AHB}}{S_{ACB}} = 1$

Câu 5.

Đặt $a = \sqrt{x^2+y^2}; b = \sqrt{y^2+z^2}; c = \sqrt{z^2+x^2} \Rightarrow a;b;c > 0$ và $a+b+c = 2015$.

Ta có: $a^2+b^2+c^2 = 2(x^2+y^2+z^2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{a^2-b^2+c^2}{2}; y^2 = \frac{a^2+b^2-c^2}{2}; z^2 = \frac{-a^2+b^2+c^2}{2}.$$

Do đó: $(y+z)^2 \le 2(y^2+z^2) = 2b^2 \Rightarrow y+z \le \sqrt{2}b \Rightarrow \dfrac{x^2}{y+z} \ge \dfrac{a^2-b^2+c^2}{2b\sqrt{2}}$.

Tương tự: $\dfrac{y^2}{z+x} \ge \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2c\sqrt{2}}, \dfrac{z^2}{x+y} \ge \dfrac{-a^2+b^2+c^2}{2a\sqrt{2}}$.

$$\Rightarrow T \ge \frac{a^2+b^2+c^2}{2b\sqrt{2}} - \frac{b}{\sqrt{2}} + \frac{a^2+b^2+c^2}{2c\sqrt{2}} - \frac{c}{\sqrt{2}} + \frac{a^2+b^2+c^2}{2a\sqrt{2}} - \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) - \frac{a+b+c}{\sqrt{2}}$$

$$\geq \frac{1}{6\sqrt{2}}(a+b+c)^2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-\frac{2015}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{6\sqrt{2}}(a+b+c)(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-\frac{2015}{\sqrt{2}}\geq$$

$$\geq \frac{1}{6\sqrt{2}}2015.9-\frac{2015}{\sqrt{2}}=\frac{2015}{2\sqrt{2}}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{2015}{3}$.

Vậy $\min T=\frac{2015}{2\sqrt{2}}$ khi $x=y=z=\frac{2015}{3\sqrt{2}}$.

Đề số 9

Câu 1.

1) Ta có:

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{\left[(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}\right]\left[(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}\right]}$$

$$=\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{(n+1)^2n-n^2(n+1)}=\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{n(n+1)}$$

$$=\frac{(n+1)\sqrt{n}}{n(n+1)}-\frac{n\sqrt{n+1}}{n(n+1)}=\frac{\sqrt{n}}{n}-\frac{\sqrt{n+1}}{n+1}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

2) Từ kết quả câu 1, ta có

$$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}=\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}$$

.....

$$\frac{1}{2017\sqrt{2016}+2016\sqrt{2017}}=\frac{1}{\sqrt{2016}}-\frac{1}{\sqrt{2017}}$$

$$\frac{1}{2018\sqrt{2017}+2017\sqrt{2018}}=\frac{1}{\sqrt{2017}}-\frac{1}{\sqrt{2018}}$$

Cộng các đẳng thức trên, vế theo vế ta được

$$S_{2018}=1-\frac{1}{\sqrt{2018}}=\frac{\sqrt{2018}-1}{\sqrt{2018}}=\frac{2018-\sqrt{2018}}{2018}$$

c) Ta có $S_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$

Khi n là số chính phương thì rõ ràng S_n là số hữu tỉ

Chẳng hạn n = 36 $\Rightarrow S_n = \frac{5}{6}$

Câu 2.

1) Ta có:

$$x^2 - 7x = 6\sqrt{x+5} - 30 \Leftrightarrow x^2 - 7x - 6\sqrt{x+5} + 30 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(x^2 - 8x + 16\right) + \left(x + 5 - 6\sqrt{x+5} + 9\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-4)^2 + \left(\sqrt{x+5} - 3\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)^2 = 0 \\ \left(\sqrt{x+5} - 3\right)^2 = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x - 4 = 0 \\ \sqrt{x+5} - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4$$

2) Ta có:

$$10x^2 + y^2 + z^2 < 2x + 4y + 6xz - 4 \Leftrightarrow 10x^2 + y^2 + z^2 \le 2x + 4y + 6xz - 5$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3x)^2 \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - 2 = 0 \\ z - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

Câu 3.

1) Ta có: $A = \left(x^2 - 5x + 4\right)\left(x^2 - 5x + 6\right)$ Đặt $y = x^2 - 5x + 4$ thì

$$A = y(y+2) = y^2 + 2y = y^2 + 2y + 1 - 1 = (y+1)^2 - 1 \ge -1$$

$$\text{Min}A = -1 \Leftrightarrow y = -1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 5 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}; x_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$$

2) Đặt x = b + c – a; y = a + c – b; z = a + b – c (x, y, z > 0)

Khi đó: x + y + z = a + b +c

Và $2a = a + b + c - (b + c - a) = x + y + z - x\ y + z \Rightarrow a = \frac{y+z}{2}$

Tương tự $b = \frac{x+z}{2}$ $c = \frac{x+y}{2}$

BĐT cần chứng minh tương đương với:

$$\frac{y+z}{x} + \frac{x+z}{y} + \frac{x+y}{z} \ge 6 \Leftrightarrow \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) + \left(\frac{z}{y} + \frac{y}{z}\right) \ge 6$$

BĐT cuối cùng đúng theo kết quả của BĐT phụ: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \ge 2$

Câu 4.

1. Chứng minh: $AE = FM = DF$

$\Rightarrow \Delta AED = \Delta DFC \Rightarrow$ đpcm

2. c/m được DE, BF, CM là ba đường cao của $\Delta EFC \Rightarrow$ đpcm

3. Gọi cạnh hình vuông ABCD là a

Có Chu vi hình chữ nhật AEMF = 2a không đổi

$\Rightarrow ME + MF = a$ không đổi

$\Rightarrow S_{AEMF} = ME.MF$ lớn nhất $\Leftrightarrow ME = MF$ (AEMF là hình vuông)

$\Rightarrow M$ là trung điểm của BD.

Câu 5.

Giả sử hình vuông ABCD có cạnh là a (a>0). Gọi M, N, P. Q lần lượt là trungg điểm của AB, BC, CD, DA. Gọi d là một đường thẳng bất kỳ trrong 2018 đường thẳng đã cho thỏa mãn yêu cầu bài toán. Không mất tính tổng quát, giả sử d cắt các đoạn AD, MP, BC lần lượt tại S, E, K

sao cho $S_{CDSK} = 3S_{ABKS}$

Từ $S_{CDSK} = 3S_{ABKS} \Rightarrow$ DS+CK=3(AS+BK)

$\Leftrightarrow$ a – AS +a – BK = 3 (AS + BK) $\Leftrightarrow$ AS + BK = $\frac{1}{2}$a

$\Leftrightarrow$ EM = $\frac{1}{4}$a $\Rightarrow$ E cố định và d đi qua E

Lấy F, H trên đoạn NQ và G trên đoạn MP sao cho FN = GP = HQ = $\frac{a}{4}$

Lập luận tương tự như trên ta có các đường thẳng thỏa mãn điều kiện của đề bài phải đi qua một trong bốn điểm cố định E, F, G, H.

Theo nguyên ý Dirichlet từ 2018 đường thẳng thỏa mãn điều kiện của đề bài phải có ít nhất $\left[\frac{2018}{4}\right]+1=505$ đường thẳng đi qua một trong bốn điểm E, F, G, H cố định, nghĩa là 505 đường thẳng đó đồng quy

Đề số 10

Câu 1.

1) Ta có

$$x=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}-1}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}+1}=\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{\sqrt{3}+1}+1\right)-\sqrt{3}\left(\sqrt{\sqrt{3}+1}-1\right)}{\sqrt{3}+1-1}$$

$$=\frac{\sqrt{\sqrt{3}+1}+1-\sqrt{\sqrt{3}+1}+1}{1}=2$$

Thay $x=2$ vào biểu thức A ta được

$$A=\left(2^2-2-1\right)^{2018}+2019=1+2019=2020$$

2) Ta có:

$$\left(x+\sqrt{x^2+2019}\right)\left(y+\sqrt{y^2+2019}\right)=2019$$

$$\Leftrightarrow\left(x-\sqrt{x^2+2019}\right)\left(x+\sqrt{x^2+2019}\right)\left(y+\sqrt{y^2+2019}\right)=2019\left(x-\sqrt{x^2+2019}\right)$$

$$-2019\left(y+\sqrt{y^2+2019}\right)=2019\left(x-\sqrt{x^2+2019}\right)$$

$$\Leftrightarrow y+\sqrt{y^2+2019}=\sqrt{x^2+2019}-x$$

Tương tự: $x+\sqrt{x^2+2019}=\sqrt{y^2+2019}-y$

Cộng theo vế hai đẳng thức trên ta được $x+y=0\Leftrightarrow x=-y\Rightarrow x^{2019}+y^{2019}=0.$

Câu 2.

a) Đặt $y=\sqrt{x^2+1}$ (điều kiện $y\ge 1$)

Ta có phương trình:

$$(4x-1)y=2y^2+2x-1\Leftrightarrow 2y^2-4xy+2x+y-1=0\Leftrightarrow(y-1)(y-2x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow y-2x+1=0 \text{ (vì } y\ge 1)$$

$$\sqrt{x^2+1}=2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \frac{1}{2} \\ x^2+1=4x^2-4x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \frac{1}{2} \\ 3x^2-4x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{4}{3}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=\frac{4}{3}$.

2) Điều kiện $x, y \ge 0$

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2019} \Leftrightarrow \sqrt{y}=\sqrt{2019}-\sqrt{x}$

Bình phương hai vế ta được $y=2019+x-2\sqrt{2019x} \Rightarrow \sqrt{2019x} \in \mathbb{N}$

Vì $2019=3.673$ và $(3;673)=1$

Nên $x=3.673.n^2=2019n^2$ (với $n \in \mathbb{N}$)

Tương tự: $y=3.673.m^2=2019m^2$

Thay vào ta được

$m+n=1 \Rightarrow (m;n) \in \{(0;1);(1;0)\} \Rightarrow (x;y) \in \{(0;2019);(2019;0)\}$

Câu 3.

a) Đặt $S=1.2.3.4....12 \Rightarrow \frac{S}{100}=3.4.6.7.8.9.12$ (1) là một số nguyên

Suy ra hai chữ số tận cùng của S là 00

Mặt khác, trong suốt quá trình nhân liên tiếp các thừa số ở vế phải của (1), nếu chỉ để ý đến chữ số tận cùng ta thấy $\frac{S}{100}$ có chữ số tận cùng là 6 (vì $3.4=12; 2.6=12; 2.7=14; 4.8=32; 2.0=18; 8.11=88; 8.12=96$)

Vậy ba chữ số tận cùng của S là 600.

b) Do $a,b,c \in [-1;2]$

Nên $a+1 \ge 0; a-2 \le 0 \Rightarrow (a+1)(a-2) \le 0 \Leftrightarrow a^2-a-2 \le 0 \Leftrightarrow a^2 \le a+2$

Tương tự: $b^2 \le b+2; c^2 \le c+2$

Suy ra $a^2+b^2+c^2 \le a+b+c+6$

Mà $a^2+b^2+c^2=6 \Rightarrow a+b+c \ge 0$.

Câu 4.

M

a) Gọi I là trung điểm của BC $\Rightarrow OI$ là đường trung bình của tam giác ABC

$\Rightarrow OI//BC$ và $OI=\frac{1}{2}BC$

Chứng minh $GC=2GI\Rightarrow OI=\frac{1}{2}CM\Rightarrow CB=CM$.

Xét ΔABM có OA=OB=R và CB=CM nên OC là đường trung bình

$\Rightarrow OC//AM$ mà $OC\perp AB\Rightarrow AM\perp AB$

$\Rightarrow MA$ là tiếp tuyến của đường tròn $(O;R)$

b) Từ K hạ lần lượt các đường vuông góc với AB và CD tại P và Q.

* Chứng minh: ΔAKB vuông tại K theo định lý Pitago ta có:

$KA^2+KB^2=AB^2\Rightarrow KA^2+KB^2=4R^2\Rightarrow KA^4+KB^4+2KA^2.KB^2=16R^4$

Mặt khác:

$KA.KB=AB.KP=2R.KP\Rightarrow KA^2.KB^2=4R^2.KP^2$

$\Rightarrow KA^4+KB^4+2KA^2.KB^2=KA^4+KB^4+8R^2.KP^2$

$\Rightarrow KA^4+KB^4=16R^4-8R^2.KP^2$

Chứng minh tương tự: $KC^4+KD^4=16R^4-8R^2.KQ^2$

Từ đó suy ra $KA^4+KB^4+KC^4+KD^4=32R^4-8R^2\left(KP^2+KQ^2\right)$

Xét tứ giác $KPOQ$ có: $O=P=Q$ nên tứ giác $KPOQ$ là hình chữ nhật

$\Rightarrow KP^2+KQ^2=PQ^2=KO^2=R^2$

$KA^4+KB^4+KC^4+KD^4=32R^4-8R^2.R^2=24R^4$.

c) Chứng minh AM=AB

Kéo dài BG cắt đường tròn tại F cắt AM tại E

* Chứng minh E là trung điểm của $AM \Rightarrow EA = BO$

* Chứng minh $EAF = OBN \Rightarrow AF = NB$

* Chứng minh ΔAFN vuông cân $\Rightarrow FNA = 45^0 \Rightarrow ANB = 45^0$.

* Chứng minh $\Delta MAF = \Delta BAN\left(c-g-c\right) MFA = ANB = 135^0$.

Mà $AFN = 90^0 \Rightarrow MFN = 360^0 - 135^0 - 90^0 = 135^0$

Chứng minh $\Delta MFN = \Delta MFA\left(c-g-c\right) \Rightarrow MN = MA$

Mà $MA = AB = 2R \Rightarrow MN = 2R.$

Câu 5.

Các đại biểu ứng với 6 điểm A, B, C, D, E, F.

Hai đại biểu X và Y nào đó quen nhau thì ta tô đoạn thẳng XY màu xanh còn nếu X và Y không quen nhau thì ta tô đoạn thẳng XY màu đỏ.

Xét 5 đoạn thẳng AB, AC, AD, AE, AF theo Nguyên lí Dirichlet thì tồn tại ba đoạn cùng màu

* Giả sử AB, AC, AD màu xanh

Xét 3 điểm B, C, D: Vì 3 đại biểu nào cũng có hai người quen nhau suy ra một trong ba đoạn BC, CD, DB màu xanh.

Giả sử BC màu xanh thì suy ra $A,\ B, C$ đôi một quen nhau.

* Còn nếu AB, AC, AD màu đỏ suy ra B, C, D đôi một quen nhau.

Đề số 11

Câu 1. Điều kiện: $x > 0, x \neq 1$.

a) Ta có:

$$P = \frac{x}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)} + \frac{2}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)} + \frac{x+2}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$= \frac{x\left(\sqrt{x}+2\right)+2\left(\sqrt{x}-1\right)+x+2}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)} = \frac{x\sqrt{x}+2x+2\sqrt{x}-2+x+2}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$= \frac{x\sqrt{x}+2x+2\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)} = \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$$

b) Ta có:

$$x = 3+2\sqrt{2} = 2+2\sqrt{2}+1 = \left(\sqrt{2}+1\right)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2} = \left|\sqrt{2}+1\right| = \sqrt{2}+1$$

$$P=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\frac{\sqrt{2}+1+1}{\sqrt{2}+1-1}=\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}$$

c) Ta có:

$$P=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)+2}{\sqrt{x}-1}=1+\frac{2}{\sqrt{x}-1}$$

Để P nguyên thì $\left(\sqrt{x}-1\right)$ là ước của 2 và $\left(\sqrt{x}-1\right)>-1$

Do đó: $\left(\sqrt{x}-1\right)\in\{0;1;2\}\Rightarrow\sqrt{x}\in\{1;2;3\}\Rightarrow x\in\{1,4,9\}$

Mặt khác theo điều kiện $x>0, x\neq 1\Rightarrow x=4\vee x=9$

Vậy để P nguyên thì x = 4 hoặc x = 9

Câu 2.

a) Điều kiện $4\le x\le 6$

Ta có: $VT=x^2-10x+27=\left(x-5\right)^2+2\ge 2$

Dấu "=" xảy ra khi x = 5.

Mặt khác: Theo bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-ski ta có:

$$VP=\sqrt{6-x}+\sqrt{x-4}\le\sqrt{\left(1^2+1^2\right)\left[\left(\sqrt{6-x}\right)^2+\left(\sqrt{x-4}\right)^2\right]}=2$$

Dấu "=" xảy ra khi: $\frac{1}{\sqrt{6-x}}=\frac{1}{\sqrt{x-4}}\Leftrightarrow 6-x=x-4\Leftrightarrow x=5$

Do đó phương trình có nghiệm khi VT = VP = 2 khi đó x = 5.

Vậy x = 5 là nghiệm duy nhất của phương trình.

b) Điều kiện $x\ge 0$.

Ta thấy x = 0 không phải là nghiệm của phương trình nên chia cả hay vế cho x ta được:

$$x^2-2x-x\sqrt{x}-2\sqrt{x}+4=0\Leftrightarrow x-2-\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{4}{x}=0\Leftrightarrow\left(x+\frac{4}{x}\right)-\left(\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)-2=0\quad(*)$$

Đặt $\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}=t>0\Leftrightarrow t^2=x+4+\frac{4}{x}\Leftrightarrow x+\frac{4}{x}=t^2-4$

Do đó: $(*)\Leftrightarrow\left(t^2-4\right)-t-2=0\Leftrightarrow t^2-t-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\quad(TM)\\t=-2\ (loai)\end{array}\right.$

Với t = 3 ta được:

$$\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}=3\Leftrightarrow x-3\sqrt{x}+2=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\x=1\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm x = 4 và x = 1.

Câu 3.

a) Ta có:

$$y^2+2xy-3x-2=0 \Leftrightarrow x^2+2xy+y^2=x^2+3x+2 \Leftrightarrow (x+y)^2=(x+1)(x+2) \quad (*)$$

Vế trái của (*) là một số chính phương, vế phải (*) là tích hai số nguyên liên tiếp nên phải có một trong hai số bằng 0. Do đó: $\left[\begin{array}{l} x=-1 \Rightarrow y=1 \\ x=-2 \Rightarrow y=2 \end{array}\right.$

Vậy có 2 cặp nghiệm nguyên (x, y) = (-1; 1), (-2; 2).

b) Điều kiện $x>1; y>0 \Leftrightarrow x-1>0; y>0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{(x-1)^3}>0; \dfrac{x-1}{y}>0; \dfrac{1}{y^3}>0$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM cho 3 số dương:

$$\frac{1}{(x-1)^3}+1+1 \ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{(x-1)^3}.1.1} \Leftrightarrow \frac{1}{(x-1)^3} \ge \frac{3}{x-1}-2 \quad (1)$$

$$\left(\frac{x-1}{y}\right)^3+1+1 \ge 3\sqrt[3]{\left(\frac{x-1}{y}\right)^3.1.1} \Leftrightarrow \left(\frac{x-1}{y}\right)^3 \ge \frac{3(x-1)}{y}-2 \quad (2)$$

$$\frac{1}{y^3}+1+1 \ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{y^3}.1.1} \Leftrightarrow \frac{1}{y^3} \ge \frac{3}{y}-2 \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra:

$$\frac{1}{(x-1)^3}+\left(\frac{x-1}{y}\right)^3+\frac{1}{y^3} \ge \frac{3}{x-1}-6+\frac{3(x-1)}{y}+\frac{3}{y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(x-1)^3}+\left(\frac{x-1}{y}\right)^3+\frac{1}{y^3} \ge \frac{3-6x+6}{x-1}+\frac{3x}{y}=3\left(\frac{3-2x}{x-1}+\frac{x}{y}\right)$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Dấu "=" xảy ả khi x = 2, y = 1.

c) Xét n = 0 thì A = 1 không phải số nguyên tố

n = 1 thì A = 3 là số nguyên tố

Xét n > 1 ta có:

$$A=n^{2012}-n^2+n^{2002}-n+n^2+n+1=n^2\left[(n^3)^{670}-1\right]+n\left[(n^3)^{667}-1\right]+(n^2+n+1)$$

Mà $\left[(n^3)^{670}-1\right]$ chia hết cho (n^3-1) suy ra $\left[(n^3)^{670}-1\right]$ chia hết cho (n^2+n+1)

Tương tự: $\left[(n^3)^{667}-1\right]$ chia hết cho (n^2+n+1)

Do đó với n > 1 thì A chia hết cho (n^2+n+1) nên A là hợp số.

Vậy n = 1 là giá trị cần tìm.

Câu 4.

a) Dễ chứng minh $\Delta ABF = \Delta ADK\,(g.c.g) \Rightarrow AF = AK$

Ta giác KAE có đường cao AD nên:

$$\frac{1}{AK^2}+\frac{1}{AE^2}=\frac{1}{AD^2} \Rightarrow \frac{1}{AF^2}+\frac{1}{AE^2}=\frac{1}{AD^2}=\frac{1}{a^2} \text{ (không đổi)}$$

b) Dễ chứng minh được: $S_{KEF}=\frac{1}{2}KE.EF.\sin AEK=\frac{1}{2}.KE.EF.\cos AKE$

Mặt khác: $S_{KEF}=\frac{1}{2}EH.KF=\frac{1}{2}EH.(KH+HF)$. suy ra:

$$KE.EF.\cos AKE=\frac{1}{2}EH.(KH+HF) \Leftrightarrow \cos AKE=\frac{EH.KH+EH.HF}{KE.EF}$$

$$\Leftrightarrow \cos AKE=\frac{EH}{EF}.\frac{KH}{EK}+\frac{EH}{KE}.\frac{HF}{EF}=\sin EFK.\cos EKF+\sin EKF.\cos EFK$$

c) Dã sử đã dựng được điểm N thỏa mãn NP + NQ = NM

Lấy N′ đối xứng với N; M′ đối xứng với M qua AD suy ra tam giác NN′M cân tại N suy ra MN′ là phân giác của DMM'. Suy ra cách dựng điểm N như sau:

- Dựng M′ đối xứng với M qua AD
- Dựng phân giác góc DMM′ cắt DM′ tại N′
- Dựng N đối xứng với N′ qua AD

Chú ý: Học sinh có thể không trình bày phân tích mà chỉ trình bày cách dựng vẫn cho điểm tối đa.

Câu 5.

Gọi O là giao điểm hai đường chéo hình bình hành, kẻ OP vuông góc với d tại P.

Ta có OP là đường trung bình của hình thang DKHB nên DK + BH = 2OP

Lại dó OP là đường trung bình của tam giác ACI nên CI = 2OP

Do đó: DK + BH + CI = 4OP

Mà $OP \le AO$ nên $BH + CI + DK \le 4AO$. Vậy $\text{Max}(BH + CI + DK) = 4AO$

Đạt được khi $P \equiv A$ hay $d \perp AC$

Đề số 12

Câu 1.

1. a) ĐKXĐ: $x \ge 0; x \ne 1$.

Ta có: $P = \dfrac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3} + \dfrac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} - \dfrac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3} = \dfrac{15\sqrt{x}-11}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} - \dfrac{3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} - \dfrac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$

$$= \frac{15\sqrt{x}-11-(3\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)-(2\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}$$

$$= \frac{15\sqrt{x}-11-3x-7\sqrt{x}+6-2x-\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} = \frac{-5x+7\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}-1)(2-5\sqrt{x})}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} = \frac{2-5\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}.$$

b) Với $x \ge 0; x \ne 1$ ta có $P = \dfrac{2-5\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$

$$P(\sqrt{x}+3) = m \Leftrightarrow 2-5\sqrt{x} = m \Leftrightarrow 5\sqrt{x} = 2-m \qquad \sqrt{x} = \frac{2-m}{5} \qquad m \le 2$$

Lại có: $x \ne 1 \Leftrightarrow \dfrac{2-m}{5} \ne 1 \qquad m \ne -3$

Vậy $m \le 2; m \ne -3$

2. Ta có: $a = \sqrt[3]{3+\sqrt{17}} + \sqrt[3]{3-\sqrt{17}} \qquad a^3 = 6 - 6\left(\sqrt[3]{3+\sqrt{17}} + \sqrt[3]{3-\sqrt{17}}\right)$

$$\Leftrightarrow\ a^3+6a-6=0$$

Từ đó: $f(a)=(a^3+6a-7)^{2012}=(a^3+6a-6-1)^{2012}=1$.

Câu 2.

1. Đặt $\sqrt{x^2+9}=y$ (với $y\ge 3$)

Khi đó, ta có: $y^2+5x=(x+5)y\ \Leftrightarrow (y-5)(y-x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=5\\ y=x\end{array}\right.$

Từ đó tìm được nghiệm của phương trình là: $x=\pm 4$.

2. Ta có: $2xy^2+x+y+1=x^2+2y^2+xy$

$$\Leftrightarrow 2y^2(x-1)-x(x-1)-y(x-1)+1=0\quad (1)$$

Nhận thấy x = 1 không phải là nghiệm của PT (1). Chia cả 2 vế của phương trình cho x – 1, ta được:

$$2y^2-x-y+\frac{1}{x-1}=0\qquad (2)$$

PT có nghiệm x, y nguyên, suy ra $\frac{1}{x-1}$ nguyên nên x – 1 thuộc $\{-1;1\}$

- x – 1 = -1 ⇔ x = 0
- x – 1 = 1 ⇔ x = 2

Thay x = 0 vào PT(2) ta được: $2y^2-y-1=0\Leftrightarrow y=1;\ y=-\frac{1}{2}$

Thay x = 2 vào PT(2) ta được: $2y^2-y-1=0\ \Leftrightarrow y=1;\ y=-\frac{1}{2}$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm nguyên $(x,y)\in\{(0,1);(2,1)\}$

Câu 3.

1. ĐK: $x\ne 0$

Đặt $a=x+\sqrt{2012}$, $b=\frac{13}{x}-\sqrt{2012}$

Thay $x=a-\sqrt{2012}$ vào biểu thức b, ta được:

$$b=\frac{13}{a-\sqrt{2012}}-\sqrt{2012}\Leftrightarrow ab-2025=(b-a)\sqrt{2012}$$

Để $a,b\in Z$ thì $a=b$, do đó $ab-2025=0$

Từ đó, suy ra $a=b=\pm 45\ \Rightarrow x=\pm 45-\sqrt{2012}$

Thử lại với $x=\pm 45-\sqrt{2012}$ thì thấy a,b là số nguyên.

2. Xét tích:

$$(x-1)(y-1)(z-1)=xyz-xy-yz-zx+x+y+z-1$$

$$=x+y+z-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\quad (\text{vì } xyz=1)$$

mà $x+y+z>\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \Rightarrow (x-1)(y-1)(z-1)>0$

Nếu cả 3 thừa số: $(x-1), (y-1), (z-1)$ đều dương $\Rightarrow xyz>1$ (loại)

Nếu cả 3 thừa số: $(x-1), (y-1), (z-1)$ đều âm $\Rightarrow (x-1)(y-1)(z-1)<0$ (loại)

Nếu 2 thừa số dương, 1 thừa số âm $\Rightarrow (x-1)(y-1)(z-1)<0$ (loại)

Nên phải có 2 thừa số âm, 1 thừa số dương $\Rightarrow$ trong 3 số x, y, z có hai số bé hơn 1. Còn một số lớn hơn 1.

Vậy trong 3 số x, y, z có duy nhất một số lớn hơn 1.

Câu 4.

1.a) Lấy điểm E khác phía với điểm P đối với đường thẳng AB sao cho ΔBPE vuông cân tại B.

Ta có $\Delta BPC = \Delta BEA$ (c.g.c)

$\Rightarrow BEA = 135^0$

Do $BEP = 45^0$ nên $PEA = 90^0$

ΔAEP vuông tại E. Theo định lí Py –Ta – go ta có:

$AP^2 = AE^2 + EP^2$

$= CP^2 + 2BP^2$

1.b. Trước hết ta chứng minh nhận xét sau:

Giả sử I là điểm nằm trong hình chữ nhật ABCD. Qua I kẻ các đường thẳng MN, PQ tương ứng song song với AB, AD. Gọi diện tích hình chữ nhật IPBN là S_1, diện tích hình chữ nhật IQDM là S_2.

Ta có $S_1 = S_2$ khi và chỉ khi I thuộc đường chéo AC.

Thật vậy: Giả sử I thuộc đường chéo AC. Vì đường chéo của hình chữ nhật chia hình chữ nhật thành hai phần có diện tích bằng nhau nên $S_1 = S_2$.

Ngược lại, giả sử $S_1 = S_2$, suy ra: IN.IP = IM.IQ

=> $\frac{IN}{IM}=\frac{IQ}{IP}=\frac{NC}{MA}$

Suy ra ΔMAI đồng dạng với ΔNIC (c.g.c) => $MIA = NIC$

Do M, I, N thẳng hàng nên A, I, C thẳng hàng.

Trở lại bài toán:

Dễ thấy tứ giác NBMQ là hình chữ nhật. Qua P và Q kẻ các đường thẳng song song với các cạnh của hình vuông. Do P thuộc đường chéo AM của hình chữ nhật ABMR nên $S_{BLPK} = S_{PIRS}$ (1)

P thuộc đường chéo CN của hình chữ nhật NBCH nên $S_{BLPK} = S_{PTHF}$ (2)

Từ (1)&(2) suy ra: $S_{PIRT} = S_{PTHF}$

=> $S_{FQRS} = S_{QITH}$.

Theo nhận xét trên, suy ra Q thuộc đường chéo PD của hình chữ nhật SPTD, tức PQ qua điểm D.

2) Không mất tính tổng quát, giả sử:

$\angle A \geq \angle B \geq \angle C \Rightarrow \hat{A} \geq 60^0$

TH1: $60^0 \leq \hat{A} < 90^0$

Kẻ $CH \perp AB$, $BK \perp AC$.

$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}CH.AB$

Mà $CH \leq CC_1 \leq 1$, ta có:

$$AB = \frac{BK}{\sin A} \leq \frac{BB_1}{\sin A} \leq \frac{1}{\sin A} \leq \frac{1}{\sin 60^0} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow S_{ABC} \leq \frac{1}{2}.1.\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (1)$$

TH2: $\hat{A} \geq 90^0 \Rightarrow AB \leq BB_1 \leq 1$; $CH \leq CC_1 \leq 1$.

$\Rightarrow S_{ABC} \leq \frac{1}{2}.1.1 = \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$ (2). Từ (1)&(2) suy ra $S_{ABC} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$

Câu 5.

Ta chứng minh hai bất đẳng thức:

$$\sqrt{\frac{x^3}{x^3+8y^3}} \geq \frac{x^2}{x^2+2y^2} \quad (1) \qquad \sqrt{\frac{y^3}{y^3+(x+y)^3}} \geq \frac{y^2}{x^2+2y^2} \quad (2)$$

Thật vậy BĐT (1) $\Leftrightarrow \frac{x^3}{x^3+8y^3} \geq \frac{x^4}{(x^2+2y^2)^2}$

$\Leftrightarrow x^2+y^2 \geq 2xy$ (đúng với mọi x, y)

BĐT (2) $\Leftrightarrow \frac{y^3}{y^3+(x+y)^3} \geq \frac{y^4}{(x^2+2y^2)^2}$

$\Leftrightarrow (x^2+y^2)(x^2+3y^2) \geq y(x+y)^3$

Do $x^2+3y^2=x^2+y^2+2y^2\ge 2y(x+y)$

Nên $(x^2+y^2)(x^2+3y^2)\ge \frac{1}{2}(x+y)^2.2y(x+y)=y(x+y)^3$

Suy ra BĐT (2) luôn đúng.

Từ (1) và (2) ta được $Q\ge 1$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi x = y.

Vậy min P = 1 khi x = y.

Đề số 13

Câu 1.

a) Ta có:

$$P=\left(\frac{x+3\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}-2}-\frac{x+\sqrt{x}}{x-1}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}+\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right)$$

$$=\left[\frac{x+3\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)}-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right]:\left[\frac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}\right]$$

$$=\frac{x+3\sqrt{x}+2-x-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)}.\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{2\sqrt{x}}$$

$$=\frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)}.\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{2\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}.$$

b) Ta có

$$\frac{1}{P}-\frac{\sqrt{x}+1}{8}\ge 1\Leftrightarrow\begin{cases}x>0;x\ne 1\\ \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}+1}{8}\ge 1\quad (*)\end{cases}$$

$$(*)\Leftrightarrow\frac{16\sqrt{x}-(\sqrt{x}+1)^2}{8(\sqrt{x}+1)}\ge 1\quad\Leftrightarrow(\sqrt{x}-3)^2\le 0\Leftrightarrow x=9(tm)$$

Vậy $x=9$ thì $\frac{1}{P}-\frac{\sqrt{x}+1}{8}\ge 1$

Câu 2.

a) Điều kiện: $x\ge -1$

$$\sqrt{x+3}+2x\sqrt{x+1}=2x+\sqrt{x^2+4x+3}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x+3}+2x\sqrt{x+1}=2x+\sqrt{(x+1)(x+3)}$$

$$\Leftrightarrow 2x\left(\sqrt{x+1}-1\right)+\sqrt{x+3}\left(1-\sqrt{x+1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(2x-\sqrt{x+3}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+1}-1=0\\ 2x-\sqrt{x+3}=0\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\end{array}\right.(tm)$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=0; x=1$

b) Ta có:

$$x^2+y^2+z^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=6$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(y^2-2+\frac{1}{y^2}\right)+\left(z^2-2+\frac{1}{z^2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{x}\right)^2+\left(y-\frac{1}{y}\right)^2+\left(z-\frac{1}{z}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x-\dfrac{1}{x}=0\\ y-\dfrac{1}{y}=0\\ z-\dfrac{1}{z}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-1\\ y=-1\\ z=-1\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases}x=1\\ y=1\\ z=1\end{cases}$$

Do đó $P=x^{2017}+y^{2018}+z^{2019}=3$ khi $x=y=z=1$

Hoặc $P=x^{2017}+y^{2018}+z^{2019}=1$ khi $x=y=z=-1$

Câu 3.

a) Nếu $n=3k\left(k\in\mathbb{Z}\right)$ thì $A=9k^2+3k+2$ không chia hết cho 3.

Nếu $n=3k+1\left(k\in\mathbb{Z}\right)$ thì $A=9k^2+9k+4$ không chia hết cho 3.

Nếu $n=3k+2\left(k\in\mathbb{Z}\right)$ thì $A=9k^2+15k+8$ không chia hết cho 3.

Do đó A không chia hết cho 3 với mọi số nguyên n.

Vậy A không chia hết cho 15 với mọi số nguyên n.

b) Nếu $y=2k\left(k\in\mathbb{Z}\right)$, suy ra VT là số chẵn (vô lí)

Nếu $y=2k+1\left(k\in\mathbb{Z}\right)$, suy ra

$$y^{1009}=2n+1\Rightarrow 2017y^{2018}=2017.\left(2n+1\right)^2$$

$$\Rightarrow 2017y^{2018}=2017.\left(4n^2+4n+1\right)=4.2017.\left(n^2+n\right)+2017$$

Mà 2017 chia cho 4 dư 1, suy ra VT chia cho 4 dư 1.

Còn VP=2019 chia cho 4 dư 3 (vô lí)

Vậy phương trình trên không có nghiệm nguyên.

Câu 4.

a) Gọi CP cắt AH tại N

Ta có $OA=OB=R$; $AP=PB$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Suy ra OP là đường trung trực của AB hay $OP \perp AB$ tại K.

Xét ΔACH và ΔPOB có

$AHC = PBO = 90^0$

$ACH = POB$ (cùng phụ với ABC)

Do đó ΔACH đồng dạng ΔPOB (g.g) $\dfrac{AH}{PB} = \dfrac{CH}{OB}$ (1)

Xét ΔCPB có $AH//BP$ (gt) nên $\dfrac{NH}{PB} = \dfrac{CH}{CB} \Rightarrow \dfrac{2NH}{PB} = \dfrac{CH}{OB}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AH=2NH$ hay $AN=NH$.

b) Xét ΔABC vuông tại A với đường cao AH có:

$AH^2 = BH.CH = (2R-CH).CH$ (3)

Từ (2) ta có $CH = 2\dfrac{NH.OB}{PB}$ thay vào (3), kết hợp với $AH=2NH$ ta được:

$$AH^2 = \left(2R - \frac{AH.CB}{2PB}\right)\left(\frac{AH.CB}{2PB}\right)$$

$$\Leftrightarrow 4PB^2.AH^2 = (4R.PB - AH.CB).AH.2R = 8R^2.PB.AH - 4R^2.AH^2$$

$$\Leftrightarrow PB^2.AH = 2R^2.PB - R^2.AH$$

$$\Leftrightarrow AH(PB^2 + R^2) = 2R^2.PB$$

Thay $PB^2=m^2-R^2$ vào đẳng thức trên ta được $AH = \dfrac{2R^2}{m^2}\sqrt{m^2 - R^2}$

c) Ta có $S_{MOP} = \dfrac{1}{2}MP.OB = \dfrac{1}{2}(PB + BM).OA = \dfrac{1}{2}(PB + BM).R$ (4)

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta được:

$$\frac{1}{2}(PB + BM) \geq \sqrt{PB.BM} \quad (5)$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi *PB=BM*

ΔMOP vuông tại *O* với $OB \perp PB$ có: $PB.MB = OB^2 = R^2 \quad (6)$

Từ (4); (5); (6) suy ra $S_{MOP} \geq R^2$

Do đó $\text{Min}\, S_{MOP} = R^2 \Leftrightarrow PB = MB = R$

$\Leftrightarrow \Delta PBO$ vuông cân tại B $\Leftrightarrow OP = R\sqrt{2}$

Vậy diện ΔMOP có diện tích nhỏ nhất $\Leftrightarrow OP = R\sqrt{2}$. Khi đó *P* là chân đường vuông góc hạ từ *O* đến đường thẳng *d*.

Câu 5.

a) Từ giả thiết suy ra $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} \Rightarrow 3 \geq \frac{9}{a+b+c} \Rightarrow a+b+c \geq 3$

Ta thấy $\frac{a}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2}$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số dương ta được

$$\frac{a}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2} \geq a - \frac{ab^2}{2b} = a - \frac{ab}{2}$$

Tương tự ta được: $\frac{b}{1+c^2} \geq b - \frac{bc}{2}; \frac{c}{1+a^2} \geq a - \frac{ab}{2}$

Cộng theo vế của ba bất đẳng thức trên ta được

$$P \geq a+b+c-\frac{1}{2}(ab+bc+ca)+\frac{1}{2}(ab+bc+ca) = 3$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

b) Có 1009 số lẻ trên bảng lúc đầu

Mỗi lần các phép toán được thực hiện, số các số lẻ còn lại hoặc giữ nguyên như vậy (khi các số này đưa ra là không cùng lẻ) hoặc giảm đi hai (khi các số đưa ra là cùng lẻ)

Vì vậy số các số lẻ còn lại trên bảng sau mỗi phép toán luôn là lẻ.

Bởi vậy, khi thực hiện quy tác trên một số còn lại thì nó phải là lẻ và vì thế không thể là số 0.

Đề số 14

Câu 1.

a) ĐKXĐ: $x \geq 0; y \geq 0, xy \neq 1$.

$$P = \frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(1+\sqrt{xy}\right)+\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(1-\sqrt{xy}\right)}{1-xy} : \left(\frac{1-xy+x+y+2xy}{1-xy}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{x}+x\sqrt{y}+\sqrt{y}+y\sqrt{x}+\sqrt{x}-x\sqrt{y}-\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{1-xy} \cdot \frac{1-xy}{1+x+y+xy}$$

$$=\frac{2\left(\sqrt{x}+y\sqrt{x}\right)}{(1+x)(1+y)}=\frac{2\sqrt{x}(1+y)}{(1+x)(1+y)}=\frac{2\sqrt{x}}{1+x}$$

b) Với $x=\frac{2}{2+\sqrt{3}}=\frac{2\left(2-\sqrt{3}\right)}{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}=4-2\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}-1\right)^2$.

$$\sqrt{x}=\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}=\left|\sqrt{3}-1\right|=\sqrt{3}-1$$

$$P=\frac{2\left(\sqrt{3}-1\right)}{1+\left(\sqrt{3}-1\right)^2}=\frac{2\sqrt{3}-2}{5-2\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{3}+2}{13}.$$

Câu 2.

a) ĐK: $4\le x\le 6$

$VT=x^2-10x+27=(x-5)^2+2\ge 2$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=5$

$$VP=\sqrt{6-x}+\sqrt{x-4}\le\sqrt{\left(1^2+1^2\right)\left[\left(\sqrt{6-x}\right)^2+\left(\sqrt{x-4}\right)^2\right]}=2.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{6-x}}=\frac{1}{\sqrt{4-x}}\Leftrightarrow 6-x=x-4\Leftrightarrow x=5(tm)$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=5$.

b) Ta có:

$y^2+2xy-3x-2=0\Leftrightarrow x^2+2xy+y^2=x^2+3x+2$

$\Leftrightarrow(x+y)^2=(x+1)(x+2)\quad(*)$

VT của (*) là số chính phương; VP của (*) là tích của hai số nguyên liên tiếp nên phải có một số bằng 0 $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+1=0\\x+2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\Rightarrow y=1\\x=-2\Rightarrow y=2\end{array}\right.$

Vậy có hai cặp số nguyên $(x;y)=(-1;1)$ hoặc $(x;y)=(-2;2)$.

Câu 3.

a) Ta có

+ d là số nguyên tố và $\overline{abcd}$ là số chính phương nên $d=5$.

+ $\overline{abcd}<10000=100^2\Rightarrow\overline{abcd}=\left(\overline{x5}\right)^2$; với $x\in\{1;2;3;4;...;9\}$

+ Vì $\overline{abcd}$ chia hết cho 9 $\left(\overline{x5}\right)^2\vdots 9\Rightarrow\overline{x5}\vdots 3\Rightarrow x+5\in\{6;9;12\}\Rightarrow x\in\{1;4;7\}$

Kiểm tra lại ta được hai số: 2015 và 5625.

b) Với $x;y;z>0$ ta có:

+) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ge 2 \quad (1).$

+) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge \frac{9}{x+y+z} \quad (2)$

+) $x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}\ge 1 \quad (3)$

Xảy ra đẳng thức ở (1), (2) và (3) $\Leftrightarrow x=y=z$

Ta có:

$$M=\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}+(a+b+c)^2.\frac{a+b+c}{abc}$$
$$=\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}+\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\right).\frac{a+b+c}{abc}$$

Áp dụng các bất đẳng thức (1), (2) và (3) ta được:

$$M\ge \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}+\left(a^2+b^2+c^2\right).\frac{9}{ab+bc+ca}+2.9$$
$$=\left(\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}+\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\right)+8.\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+18\ge 2+8+18=28.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca \\ ab=bc=ca \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c.$

Câu 4.

a) Ta có:

+ ΔOHB vuông tại H có HM là đường cao nên $OM.OB=OH^2$

+ ΔOHC vuông tại H có HN là đường cao nên $ON.OC=OH^2$

Suy ra $OM.OB=ON.OC$

Mà $OA = OH = R \Rightarrow OA^2 = OM.OB \Rightarrow \dfrac{OA}{OM} = \dfrac{OB}{OA}$

+) Xét ΔOMA và ΔOAB có:

AOB chung

$\dfrac{OA}{OM} = \dfrac{OB}{OA}$ (cmt)

Suy ra ΔOMA, ΔOAB đồng dạng theo trường hợp (c.g.c)

$\Rightarrow MAO = OBA$ mà $AOB = OBA$ (vì $OA = AB = R$) $\Rightarrow MAO = MOA \Rightarrow \Delta MOA$ cân tại $M \Rightarrow MA = MO.$

Chứng minh tương tự: $NA = NO.$

Từ đó suy ra MN là đường trung trực của ON $\Rightarrow MN \perp OA.$

b) Gọi giao điểm của MN và OA là D. Ta có $DA = DO$

Ta có $OM.OB = ON.OC(cmt) \Rightarrow \dfrac{OM}{ON} = \dfrac{OC}{OB}$

$\Rightarrow \Delta OMN$ đồng dạng với ΔOCB (c.g.c) $\Rightarrow OMN = OCB \Rightarrow \Delta OMD \# \Delta OCH$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{OM}{OC} = \dfrac{OD}{OH} = \dfrac{OD}{OA} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow OM = \dfrac{1}{2}OC$

Lại có $OM.OB = OH^2 = R^2 \Rightarrow \dfrac{1}{2}OB.OC = R^2 \Rightarrow OB.OC = 2R^2$

c) Ta có ΔOMN đồng dạng với ΔOCB

$\Rightarrow \dfrac{S_{OMN}}{S_{OCB}} = \left(\dfrac{OD}{OH}\right)^2 = \dfrac{R^2}{4R^2} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow S_{OMN} = \dfrac{1}{4}S_{OCB} = \dfrac{1}{8}OH.BC$

$\le \dfrac{1}{8}R(AB + AC) = \dfrac{1}{8}R(R + R) = \dfrac{R^2}{4}.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow A, B, C$ thẳng hàng $\Leftrightarrow A \equiv H$

Vậy diện tích lớn nhất của ΔOMN là $S_{OMN} = \dfrac{R^2}{4} \Leftrightarrow H \equiv A.$

Câu 5.

Gọi BC là cạnh lớn nhất của tam giác nhọn ABC có diện tích bằng 1.

Kẻ trung tuyến AM

Đặt $MA = R$

Vẽ $(O;R)$ cắt BC tại $D,\ E$

Các điểm $B,\ C$ đối xứng với nhau qua M, chúng nằm trong đường tròn.

Ta sẽ chứng minh tam giác ADE là tam giác cần tìm. Nghĩa là cần chứng minh $S_{ADE} \le \sqrt{3}$.

Kẻ đường cao AH

Đặt $MB = MC = a$, ta có:

$$\begin{cases} S_{ADE} = \dfrac{1}{2}DE.AH = R.AH \\ AH = \dfrac{2S_{ABC}}{BC} = \dfrac{2}{2a} = \dfrac{1}{a} \end{cases} \Rightarrow S_{ADE} = \frac{R}{a}$$

Ta sẽ chứng minh $\dfrac{R}{a} \le \sqrt{3}$.

Ta thấy trong hai góc AMB, AMC có một góc lớn hơn hoặc bằng 90^0.

Giả sử $AMC \ge 90^0$ khi đó ta có:

$$AM^2 + MC^2 \le AC^2 \Rightarrow R^2 + a^2 \le AC^2 \le BC^2 = 4a^2$$

$$\Rightarrow R^2 \le 3a^2 \Rightarrow \left(\frac{R}{a}\right)^2 \le 3 \Rightarrow \frac{R}{a} \le \sqrt{3} \text{ (đpcm)}$$

Đề số 15

Câu 1.

a) ĐKXĐ: $x \ge 0; y \ge 0, y \ne 1, x + y \ne 0.$

$$P = \frac{x\left(\sqrt{x}+1\right) - y\left(1-\sqrt{y}\right) - xy\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(1-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}+x-\sqrt{xy}+y-xy\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(1-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} = \sqrt{x}+\sqrt{xy}-\sqrt{y}.$$

b) Để $P = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x}+\sqrt{xy}-\sqrt{y} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x}\left(1+\sqrt{y}\right) - \left(\sqrt{y}+1\right) = 1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-1\right)\left(1+\sqrt{y}\right) = 1$

Ta có: $1+\sqrt{y} \ge 1 \Rightarrow \sqrt{x}-1 \le 1 \Rightarrow \sqrt{x} \le 2 \Leftrightarrow x \le 4.$

Kết hợp với điều kiện $x \ge 0 \Rightarrow 0 \le x \le 4 \Leftrightarrow x \in \{0;1;2;3;4\}$

Thay vào phương trình trên $P = 2$

Ta được $(x;y) \in \{(4;0);(2;2)\}$

Câu 2.

a) Điều kiện $x>0$

$$\sqrt{2x^2+x+6}+\sqrt{x^2+x+2}=x+\frac{4}{x}\Leftrightarrow\frac{x^2+4}{\sqrt{2x^2+x+6}-\sqrt{x^2+x+2}}=\frac{x^2+4}{x}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{2x^2+x+6}-\sqrt{x^2+x+2}=x\Leftrightarrow\sqrt{2x^2+x+6}=\sqrt{x^2+x+2}+x$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x^2+x+2}=\frac{4}{x}\Rightarrow x^4+x^3+2x^2-4=0$$

$$\Leftrightarrow(x-1)(x^3+2x^2+4x+4)=0\Leftrightarrow x=1\ (\text{do } x^3+2x^2+4x+4>0)$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=1$

b) Ta có:

$$x^2+2y^2+2xy+3y-4=0\Leftrightarrow(x^2+y^2+2xy)+(y^2+3y-4)=0$$

$$(x+y)^2+(y-1)(y+4)=0\Leftrightarrow(y-1)(y+4)=-(x+y)^2\quad(*)$$

Do $-(x+y)^2\le 0\quad\forall x,y$ nên

$$(y-1)(y+4)\le 0\Leftrightarrow -4\le y\le 1\Rightarrow y\in\{-4;-3;-2;-1;0;1\}$$

Theo các giá trị nguyên của y ta tính được các giá trị nguyên của x.

Vậy phương trình có nghiệm nguyên $(x;y)$ là:

$$(4;-4);(2;0);(1;-3);(5;-3);(-2;0);(-1;1)$$

Câu 3.

a) Ta có: $45=5.9$ mà $(5;9)=1\Rightarrow\overline{a56b}\,\vdots\,45\Leftrightarrow\overline{a56b}\,\vdots\,5$ và 9.

* Xét $\overline{a56b}\,\vdots\,5\Leftrightarrow b\in\{0;5\}$

- Nếu $b=0$ ta có $\overline{a560}\,\vdots\,9\Leftrightarrow a+11\,\vdots\,9\Rightarrow a=7$

- Nếu $b=5$ ta có $\overline{a560}\,\vdots\,9\Leftrightarrow a+16\,\vdots\,9\Rightarrow a=2$

Vậy ta tìm được hai số 7560 và 2565 thỏa mãn.

b) Đặt $x=a^3;y=b^3;z=c^3$

Ta có $x;y;z>0$ và $xyz=1\Rightarrow a,b,c>0$ và $abc=1$

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)\ge(a+b)ab\left(\text{do } a+b>0;a^2-ab+b^2\ge ab\right)$$

$$\Rightarrow a^3+b^3+1\ge(a+b)ab+abc=ab(a+b+c)>0$$

$$\Rightarrow\frac{1}{a^3+b^3+1}\le\frac{1}{ab(a+b+c)}$$

Tương tự ta có: $\dfrac{1}{b^3+c^3+1}\le\dfrac{1}{bc(a+b+c)};\dfrac{1}{c^3+a^3+1}\le\dfrac{1}{ca(a+b+c)}$

Cộng theo vế của các bất đẳng thức ta có:

$$\frac{1}{x+y+1}+\frac{1}{y+z+1}+\frac{1}{z+x+1}=\frac{1}{a^3+b^3+1}+\frac{1}{b^3+c^3+1}+\frac{1}{c^3+a^3+1}$$

$$\le\frac{1}{a+b+c}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)=\frac{1}{a+b+c}.(a+b+c)=1.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Câu 4.

a) Ta có ΔBED nội tiếp đường tròn $(O;R)$ đường kính BD

$\Rightarrow \Delta BED$ vuông tại $E \Rightarrow BE \perp AD$ tại E

+ Chứng minh $AH.AO = AB^2 \quad (1)$

+ Chứng minh $AE.AD = AB^2 \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $AE.AD = AH.AO$

b) Chứng minh $AO \perp BC$ tại H và $OH.OA = OB^2 \quad (3)$

+ Chứng minh $\Delta OHF \ \# \Delta OKA(g-g)$

$\Rightarrow \dfrac{OH}{OK}=\dfrac{OF}{OA} \Rightarrow OK.OF = OH.OA \quad (4)$

Từ (3) và (4) suy ra $OK.OF = OB^2$

Mà $OD = OB(bk) \Rightarrow OK.OF = OD^2 \Rightarrow \dfrac{OK}{OD}=\dfrac{OD}{OF}$

Chứng minh $\Delta OKD \ \# \Delta ODF(c-g-c)$

$\Rightarrow ODF = 90^0 \Rightarrow DF \perp OD$ tại D

Mà D thuộc đường tròn (O) đường kính BD nên FD là tiếp tuyến của đường tròn (O)

Câu 5.

Áp dụng định lý Pitago ta có:

$ND^2 + OD^2 = NO^2 \Rightarrow ND^2 = NO^2 - OD^2 = \left(NM^2 + OM^2\right) - OB^2$

$= \left(NM^2 + OM^2\right) - \left(OI^2 - IB^2\right)$

$= \left(NM^2 + OM^2\right) - \left[\left(OM^2 + MI^2\right) - IA^2\right] \quad (IA = IB)$

$= \left(NM^2 + OM^2\right) - OM^2 + \left(IA^2 - MI^2\right)$

$= NM^2 + AM^2 = NA^2$

$\Rightarrow ND = NA$ (đpcm)

Gọi AB là cạnh lớn nhất của ngũ giác lồi $ABCDE$ có các góc tù. Kẻ các đường thẳng Ax, By vuông góc với AB, tạo thành 1 dải (hình vẽ).

E, C nằm ngoài giải vì $BAE > 90^0; ABC > 90^0$

D nằm trong giải vì nếu D nằm ở vị trí D' cùng phía với C đối với By thì $ED' > AB$ trái với cách chọn AB.

Kẻ $DH \perp AB\left(H \in AB\right)$. Hình tròn đường kính AD phủ tứ giác $AHDE$, hình tròn đường kính BD phủ tứ giác $BHDC$.

Như vậy AD, BD là hai đường chéo cần tìm.

Đề số 16

Câu 1.

1) Ta có:

$$A = \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right) : \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right)$$

$$A=\left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}-\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}+\frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}\right):\frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

$$A=\frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)-(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}:\frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

$$A=\frac{x-9-x+4+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}:\frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

$$A=\frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}:\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$$

2) Vì ab+bc+ca = 6 nên $a^2 + 6 = a^2 + ab+bc+ca =(a+b)(a+c)$; tương tự ta có :

$b^2 +6 = (b+c)(b+a)$; $c^2 +6= (c+a)(c+b)$

Thay và biểu thức P ta có :

$$P=\sqrt{\frac{(a+b)^2(b+c)(c+a)}{(b+c)(c+a)}}+\sqrt{\frac{(a+b)(b+c)^2(c+a)}{(a+b)(a+c)}}+\sqrt{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)^2}{(b+c)(b+a)}}$$

$P=2(a+b+c)$ (vì a, b,c >0)

Mặt khác : $(a+b+c)^2= a^2 + b^2 + c^2 -2(ab+bc+ca) = 21-2.6 = 9$

=> a+b+c = 3 =>P = 6

Câu 2.

1) $x^2+2015x-2014=2\sqrt{2017x-2016}$

Điều kiện $x\ge\frac{2016}{2017}$

$\Rightarrow$Phương trình đã cho tương đương với

$$x^2-2x+1+2017x-2016-2\sqrt{2017x-2016}+1=0$$

$$\Leftrightarrow(x-1)^2+\left(\sqrt{2017x-2016}-1\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=0\\ \sqrt{2017x-2016}-1=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ 2017x-2016=1\end{cases}$$

$\Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy $x=1$ là nghiệm của phương trình đã cho.

2) Để đường thẳng (d) tiếp xúc với đường tròn tâm O (*O là gốc tọa độ Oxy*) bán kính 2cm khi khoảng cách từ O tới đường thẳng (d) là 2cm

* Nếu m =1 ta có : y = -1 là đường thẳng song song với trục Ox cắt trục tung tại điểm có tung độ là -1. Khoảng cách từ (d) tới O là $1\neq 2$ => m = 1(loại)

* Nếu m = 1,5 ta có: y = 0,5x là đường thẳng đi qua gốc tọa độ, khoảng cách từ O tới (d) là $0 \neq 2$ => m = 1,5 (loại)

* Nếu $m \neq 1$, $m \neq 1,5$:

+ Cho x=0 => y=2m-3 ta có A(0, 2m-3)=> $OA = |2m-3|$

+ Cho y=0 => $x = \frac{-(2m-3)}{m-1}$ ta có $B\left(\frac{-(2m-3)}{m-1};0\right)$=> $OB = \frac{|2m-3|}{|m-1|}$

Đồ thị hàm số là đường thẳng AB và tạo với 2 trục tọa độ tam giác AOB vuông tại O. Kẻ $OH \perp AB$ ta có $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$ để OH=2 thì:

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{(2m-3)^2} + \frac{(m-1)^2}{(2m-3)^2} \Rightarrow 4m^2 - 12m + 9 = 4 + 4m^2 - 8m + 4 \Leftrightarrow m = \frac{5}{4}(tm)$$

Vậy $m = \frac{5}{4}$ thỏa mãn đk đề bài.

Câu 3.

1) Ta có : $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 30n - 24$

$= (n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n) + (24n - 24) = n(n^3 + 6n^2 + 11n + 6) + 24(n-1)$

$= n[(n^3 + n^2) + (5n^2 + 5n) + (6n + 6)] + 24(n-1) = n(n+1)(n^2 + 5n + 6) + 24(n-1)$

$= n(n+1)(n+2)(n+3) + 24(n-1)$

Vì n; n + 1; n + 2; n + 3; là bốn số tự nhiên liên tiếp nên tích của chúng chia hết cho 3. Mặt khác trong 4 số tự nhiên liên tiếp luôn tồn tại 2 số chẵn liên tiếp nên có một số chia hết cho 2, một số chia hết cho 4 . Vậy $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết 2.3.4 = 24 và 24 (n - 1) chia hết cho 24 nên $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 30n - 24$ chia hết cho 24.

2) Thay x =$1+\sqrt{2}$ vào phương trình ta có : $(1+\sqrt{2})^3 + a(1+\sqrt{2})^2 + b(1+\sqrt{2}) + 2 = 0$

=> $9 + 5\sqrt{2} + 3a + 2a\sqrt{2} + b + b\sqrt{2} = 0$

=>$(5+2a+b)\sqrt{2} = -(3a + b + 9)$

Nếu $5 + 2a + b \neq 0$ thì $\sqrt{2} = \frac{-(3a+b+9)}{5+2a+b} \in Q$ (vô lí)

Vậy $\begin{cases} 5+2a+b=0 \\ 3a+b+9=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+b=-5 \\ 3a+b=-9 \end{cases} \Rightarrow a=-4; b-13$

Câu 4.

a) * Tam giác ABH vuông tại H, đường cao HE nên : AH^2 =AE.AB

Tam giác ACH vuông tại H, đường cao HF nên : AH^2 =AF.AC

=> AE.AB =AF.AC

* Tam giác ABC nội tiếp (O) đường kính BC => $\triangle$ ABC vuông tại A , có AH là đường cao =>AH^2 =BH.CH => AH^4 =$BH^2.CH^2$

Mặt khác: BH^2 =BE.BA ; CH^2=CF.CA => AH^4 = BE.CF.BA.CA

Ta lại có AB.AC= AH.BC => AH^3 =BE.CF.BC

Ta có : Tứ giác AEHF là hình chữ nhật => AH=EF => EF^3 =BE.CF.BC

b) -Vì H đx với I qua AB => $IAB = HAB$

- Tam giác OAB cân tại O => $OAB = OBA$

Ta có $OAB + IAB = OBA + HAB = 90^0$ => $IAO = 90^0$ => IA là tiếp tuyến với (O) tại A

c) Đặt BH = x($0 \le x \le 2R$) =>HC = 2R - x

Tính được $AH = \sqrt{x(2R - x)}$

Ta có $S_{\triangle AHB} = \frac{1}{2}AH.BH = \frac{1}{2}x.\sqrt{x(2R-x)} = \frac{1}{2}\sqrt{x^3(2R-x)}$

Biến đổi :

$$x^3(2R-x) = x^2(2Rx - x^2) = \frac{x^2(6Rx-3x^2)}{3} \le \frac{(x^2+6Rx-3x^2)^2}{12} = \frac{(6Rx-2x^2)^2}{12} = \frac{(3Rx-x^2)^2}{3}$$

Mặt khác : $3Rx - x^2 = \frac{9R^2}{4} - (x - \frac{3R}{2})^2 \le \frac{9R^2}{4}$

=> $S_{\triangle AHB} \le \frac{1}{2}\sqrt{\frac{81R^4}{16.3}} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{8}$ => $S_{\triangle AHB(max)} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{8}$ <=> x= $\frac{3R}{2}$

Vậy $S_{\triangle AHB(max)} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{8}$ khi A là giao điểm của đường trung trực đoạn OB và (O)

Câu 5.

Chứng minh BĐT phụ: Với mọi x, y > 0 ta có : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \ge \frac{4}{x+y}$ *, dấu '=' xảy ra khi x=y*

Áp dụng BĐT phụ trên ta có :

$$P = \frac{1}{a^2+b^2+1} + \frac{1}{2ab} = \frac{1}{a^2+b^2+1} + \frac{1}{6ab} + \frac{1}{3ab} \ge \frac{4}{a^2+b^2+1+6ab} + \frac{1}{3ab}$$

$$\Rightarrow P \ge \frac{4}{(a+b)^2+1+4ab} + \frac{1}{3ab}$$

Vì a, b > 0, theo BĐT Cosi ta có $a+b\ge 2\sqrt{ab}$, mà $a+b\le 1 \Rightarrow ab\le \frac{1}{4}$

Vậy $P\ge \frac{4}{1^2+1+4.\frac{1}{4}}+\frac{1}{3.\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$, dấu '=' xảy ra khi $a=b=\frac{1}{2}$

Đề số 17

Câu 1.

a) ĐKXĐ: $x\ge 0; x\ne 1$

Ta có: $M=\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}+\frac{1}{1-\sqrt{x}}=\frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}+\frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}-\frac{1}{\sqrt{x}-1}$

$=\frac{x+2+(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)-x-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}=\frac{x+2+x-1-x-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}=\frac{x-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}$

$=\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}=\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$

b) Ta có: $x=9-4\sqrt{2}=(2\sqrt{2}-1)^2\Rightarrow \sqrt{x}=2\sqrt{2}-1$. Khi đó

$M=\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}=\frac{2\sqrt{2}-1}{9-4\sqrt{2}+2\sqrt{2}-1+1}=\frac{2\sqrt{2}-1}{9-2\sqrt{2}}=\frac{(2\sqrt{2}-1)(9+2\sqrt{2})}{81-8}=\frac{16\sqrt{2}-1}{73}$

c) Xét $M-\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}-\frac{1}{3}=\frac{-(\sqrt{x}-1)^2}{3(x+\sqrt{x}+1)}$

Vì $x\ge 0; x\ne 1\Rightarrow 3(x+\sqrt{x}+1)>0; -(\sqrt{x}-1)^2<0$. Suy ra $M-\frac{1}{3}<0\Rightarrow M<\frac{1}{3}$.

Câu 2.

a) Ta có $3\ne -1$ để đường thẳng (d) song song đường thẳng y = 2x -1 thì

m - 2 = 2 ⇔ m = 4.

b) Điều kiện để (d) đi qua điểm cố định N(x_0, y_0) với mọi giá trị của m là:

(m-2)x_0 - y_0 + 3 = 0 $\forall m$ ⇔ mx_0 - (2x_0 + y_0 - 3) = 0 $\forall m$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0=0 \\ 2x_0+y_0-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=0 \\ y_0=3 \end{cases}$. Vậy (d) đi qua điểm cố định N(0; 3) $\forall m$.

c) Gọi A và B là giao điểm (d) với Ox; Oy.

$x=0\Rightarrow y=3\Rightarrow OA=3$

$y=0\Rightarrow x=\frac{-3}{m-2}=\frac{3}{2-m}\Rightarrow OB=\frac{3}{|2-m|}$

Gọi OH là khoảng cách từ O đến (d).

Ta có: $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{1}{9}+\frac{(2-m)^2}{9}=\frac{m^2-4m+5}{9}$

Mà $OH=1\Rightarrow m^2-4m+5=9\Leftrightarrow(m-2)^2=8\Rightarrow m=2\pm2\sqrt{2}$

Vậy với $m=2\pm2\sqrt{2}$ thì khoảng cách từ O đến (d) bằng 1.

Câu 3.

a) ĐK: $x\neq-1;x\neq2$

Ta có: $\frac{x+2}{x+1}+\frac{3}{x-2}=\frac{3}{x^2-x-2}+1\Leftrightarrow x^2-4+3(x+1)=3+x^2-x-2$

$\Leftrightarrow 4x=2\Rightarrow x=\frac{1}{2}(tm)$. Vậy phương trình có nghiệm $x=\frac{1}{2}$.

b) $\sqrt{x^2-1}=x+1+\sqrt{x+1}$. Điều kiện căn thức có nghĩa

$$\begin{cases}x^2-1\geq0\\x+1\geq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\geq1\\x\leq-1\end{array}\right.\\x\geq-1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x\geq1\end{array}\right.$$

* Thay x = -1 thoả mãn phương trình.

* Với $x\geq1$. Khi đó phương trình có dạng $\sqrt{(x-1)(x+1)}-\sqrt{x+1}=x+1$

Vì $x\geq1$ nên $\sqrt{x+1}>0$, chia hai vế cho $\sqrt{x+1}$

Ta có : $\sqrt{x-1}-1=\sqrt{x+1}$. Vì với $x\geq1$ thì $\sqrt{x-1}<\sqrt{x+1}$

Nên $\sqrt{x-1}-1<\sqrt{x+1}$ => phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình có nghiệm x = - 1.

Câu 4.

Ta có: $x^2y+xy-x=4\Leftrightarrow xy(x+1)-(x+1)=3\Leftrightarrow(xy-1)(x+1)=3$

+ TH1: $\begin{cases}x+1=1\\xy-1=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\-1=3\text{ (vô lí)}\end{cases}$ + TH3: $\begin{cases}x+1=3\\xy-1=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}(tm)$

+ TH2: $\begin{cases}x+1=-1\\xy-1=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=1\end{cases}(tm)$ + TH4: $\begin{cases}x+1=-3\\xy-1=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=0\end{cases}(tm)$

Vậy phương trình có nghiệm $(x;y)\in\{(-2;1);(2;1);(-2;0)\}$.

Câu 5.

a) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có:

$A_1=A_2;A_3=A_4\Rightarrow MAN=A_1+A_2+A_3+A_4=2(A_2+A_3)=2.90^0=180^0$

Suy ra ba điểm M, A, N thẳng hàng.

b) Ta có:

$MB\perp MN;CN\perp MN\Rightarrow MB//CN\Rightarrow BMNC$

hình thang có đường cao MN.

Theo t/c hai tiếp tuyến cắt nhau ta có:

BM = BH = 2cm; CN = CH = 4,5cm.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông

ABC đường cao $AH = \sqrt{BH.CH} = \sqrt{2.4,5} = 3$ (cm).

⇨ MN = 2.AH = 2.3 = 6 (cm).

$S_{BMNC} = \dfrac{(MB+CN).MN}{2} = \dfrac{(2+4,5).6}{2} = 19,5\,(cm^2)$

c) Đặt AK = x; KN = y.

Ta có $\Delta KNA \sim \Delta KHC(g.g) \Rightarrow \dfrac{AK}{CK} = \dfrac{KN}{KH} = \dfrac{AN}{CH} \Rightarrow \dfrac{x}{y+4,5} = \dfrac{y}{x+3} = \dfrac{2}{3}$

$3x = 2y + 9$ (1) ;$3y = 2x + 6$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $x = 7,8;\quad y = 7,2$.

Vậy AK = 7,8 (cm); KN = 7,2 (cm).

Câu 6.

Ta có: $x^2 + y^2 + z^2 = 3 \Leftrightarrow 6x^2 + 6y^2 + 6z^2 = 18$

$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz + 4yz) + (x^2 - 2xy + y^2) + (4x^2 - 4xz + z^2) + (4y^2 - 4yz + z^2) = 18$

$\Leftrightarrow (x + y + 2z)^2 + (x - y)^2 + (2x - z)^2 + (2y - z)^2 = 18$

Vì $(x-y)^2 \ge 0; (2x-z)^2 \ge 0; (2y-z)^2 \ge 0.$

Suy ra $(x+y+2z)^2 \le 18 \Leftrightarrow -3\sqrt{2} \le x + y + 2z \le 3\sqrt{2}$.

Vậy $\text{Min}\,P = -3\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - z = 0 \\ 2y - z = 0 \\ x + y + 2z = -3\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}; z = -\sqrt{2}$

$\text{Max}\ P = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - z = 0 \\ 2y - z = 0 \\ x + y + 2z = 3\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}; z = \sqrt{2}$

Đề số 18

Câu 1.

1) Ta có $x - y = \sqrt{29 + 12\sqrt{5}} - 2\sqrt{5} = \sqrt{(2\sqrt{5}+3)^2} - 2\sqrt{5} = 2\sqrt{5} + 3 - 2\sqrt{5} = 3$

Nên : $A = x^3 + x^2 - y^3 + y^2 + xy - 3x^2y + 3xy^2 - 3xy + 1974$

$$=(x-y)^3+(x-y)^2+1974$$
$$=3^3+3^2+1974$$
$$=2010$$

2) Ta có $\dfrac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}-\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{(\sqrt{c}+\sqrt{a})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\dfrac{b-c}{(\sqrt{c}+\sqrt{a})(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{b}+\sqrt{c})}$ (1)

Tương tự $\dfrac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}-\dfrac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}=\dfrac{a-b}{(\sqrt{c}+\sqrt{a})(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{b}+\sqrt{c})}$ (2)

Mà $b=\dfrac{a+c}{2}\Rightarrow a-b=b-c$ (3)

Từ (1) (2) (3) $\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}-\dfrac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}=\dfrac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}-\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

hay $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\dfrac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\dfrac{2}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$

Câu 2.

1) ĐK : $a+b\neq 0, a+c\neq 0, b+c\neq 0$

Biến đổi phương trình ta được :

$$x\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)=\frac{ab}{a+b}+\frac{ac}{a+c}+\frac{bc}{b+c}+(a+b+c)$$

Biến đổi vế phải :

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{ac}{a+c}+\frac{bc}{b+c}+(a+b+c)=$$
$$\frac{ab}{a+b}+\frac{ac}{a+c}+\frac{bc}{b+c}+\left[\frac{a(b+c)}{b+c}+\frac{b(a+c)}{a+c}+\frac{c(a+b)}{a+b}\right]$$
$$=\frac{ab}{a+b}+\frac{ac}{a+c}+\frac{bc}{b+c}+\left(\frac{ab+ac}{b+c}+\frac{ba+bc}{a+c}+\frac{ca+cb}{a+b}\right)$$
$$=\frac{ab+bc+ca}{a+b}+\frac{ac+ab+bc}{a+c}+\frac{bc+ab+ca}{b+c}$$
$$=(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)$$

Ta có: $x\left(\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a+c}+\dfrac{1}{b+c}\right)=(ab+bc+ca)\left(\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a+c}+\dfrac{1}{b+c}\right)$

$\Leftrightarrow x=ab+bc+ca$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=ab+bc+ca$

2) Từ hệ phương trình đã cho ta có:

$x+y\neq 0; x+2y\neq 0, x+3y\neq 0, y+2x\neq 0, y+3x\neq 0$

$$\Rightarrow x+y=\frac{60}{(x+2y)(x+3y)}=\frac{105}{(y+2x)(y+3x)}$$

Hay $\frac{60}{x^2+5xy+6y^2}=\frac{105}{y^2+5xy+6x^2}\Leftrightarrow 60y^2+300xy+360x^2=105y^2+525y+630y^2$

Rút gọn phương trình ta được: $525x^2-225xy-570y^2=0$

$$\Leftrightarrow 17x^2-15xy-38y^2=0\Leftrightarrow (x-2y)(17x+19y)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2y \\ x=\frac{-19}{17}y \end{array}\right.$$

- Với x = 2y thay vào một trong hai phương trình của hệ ban đầu ta được x = 2; y =1

- Với $x=\frac{-19}{17}y$ ta được $x=\frac{19\sqrt[3]{4}}{4};y=\frac{17\sqrt[3]{4}}{4}$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là: $(2;1);\left(\frac{19\sqrt[3]{4}}{4};\frac{17\sqrt[3]{4}}{4}\right)$

Câu 3.

1) Ta có:

$$\left(a-\sqrt{2011}\right)\left(b+\sqrt{2011}\right)=14$$

$$\Leftrightarrow ab+a\sqrt{2011}-b\sqrt{2011}-2011=14$$

$$\Leftrightarrow (a-b)\sqrt{2011}=2025-ab$$

- Nếu $a\neq b$ thì VP là số vô tỉ, VT là số nguyên $\Rightarrow$ Vô lí

- Nếu a = b thì ab-2025 = 0 $\Rightarrow a=b=\pm 45$. Vậy a = b = ± 45

2) Ta có :

N= $k^4+2k^3-16k^2-2k+15=(k^4-k^2)+(2k^3-2k)-(15k^2-15)$

$=(k^2-1)(k^2+2k-15)=(k-1)(k+1)(k-3)(k+5)$

Ta thấy rằng với k là số nguyên lẻ thì N là tích của 4 thừa số (nhân tử) chẵn. Do đó N chắc chắn chia hết cho 16

Vậy k phải là số nguyên lẻ

Câu 4.

1) Ta có : $CDB = CBA$ (cùng phụ với C)

$\Rightarrow CBO = MBA = BMO$ (Vì ΔOBM cân tại O)

$CDB = BMO$

Mà $BMO + CMN = 180^0$

$\Rightarrow CDN + CMN = 180^0 \Rightarrow MNDC$ nội tiếp

2) Xét ΔPAE và ΔBAQ có $PAE = BAQ = 90^0$ (GT) (*)

ta có $APE + PEA = ABQ + BEI = 90^0$ mà $PEA = BEI$ (đối đỉnh)

Nên $APE = ABQ$ (**)

Từ (*) và (**) $\Rightarrow \Delta PAE \sim \Delta BAQ$

$$\Rightarrow \frac{AP}{BA} = \frac{EA}{AQ} \Rightarrow AP.AQ = BA.EA \Rightarrow EA = \frac{AP.AQ}{BA} = \frac{\frac{1}{2}AC.\frac{1}{2}AD}{AB}$$

$$(\text{ do } AP = \frac{1}{2}AC, AQ = \frac{1}{2}AD) \Rightarrow EA = \frac{\frac{1}{4}AC.AD}{AB}$$

Mà AC.AD = $AB^2 = 4R^2$(hệ thức trong tam giác vuông CBD)

$\Rightarrow EA = \dfrac{\frac{1}{4}.4R^2}{2R} = \dfrac{R}{2}$.Vậy E là trung điểm của OA

3) Ta có : $S_{BPQ} = \frac{1}{2}AB.PQ$

Do AB không đổi , nên S_{BPQ} nhỏ nhất khi CD nhỏ nhất (Vì CD = 2. PQ).

Ta có CD = AC + AD mà AC.AD = $4R^2$ không đổi .

Nên AC + AD nhỏ nhất khi AC = AD = 2R

Lúc đó : $PQ = \dfrac{AC + AD}{2} = 2R$

Vậy S_{BPQ} đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{1}{2}AB.PQ_{(\min)} = 2R^2$

Câu 5.

Với mọi số x sao cho : -1 < x < 1 thì ta luôn có $x^2 < 1$ và $x^2 < |x|$

Từ a + b + c = 0 thì 3 số không thể cùng dấu.Do đó chỉ xảy ra 3 trường hợp sau :

1) Nếu b = 0 $\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + c^2 < 1 + 1 = 2$

2) Nếu $-1 < a < 0, b \le c \le 1$ thì 0 < -a < 1 $\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \le -a + b + c = -2a < 2$

3) Nếu $-1 < a \le b < 0 < c < 1$ thì 0 < - a <1, 0 < - b <1

và 0 < c = (a + b) <1 $\Rightarrow a^2 + b^2 \le (-a) + (-b) + c = -(a + b) + c = c + c < 1 + 1 = 2$

Vậy $a^2+b^2+c^2<2$

Đề số 19

Câu 1.

a) ĐKXĐ: $x\ge 0, x\ne 1$

- Ta có

$$\frac{3x+\sqrt{9x}-3}{x+\sqrt{x}-2}-\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}-\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}$$

$$=\frac{3x+3\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)}-\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)}-\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)}$$

$$=\frac{3x+3\sqrt{x}-3-x+1-x+4}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)}$$

$$=\frac{x+3\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)}$$

$$=\frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$$

b) - Ta có: $P<0$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}<0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}-1<0 \quad (\text{do } \sqrt{x}+1>0)$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}<1$$

$$\Rightarrow x<1$$

- Kết hợp với ĐKXĐ ta được: Với $0\le x<1$ thì $P<0$.

Câu 2.

a) ĐKXĐ $x\ge -5$.

- Ta có: $x^2-7x=6\sqrt{x+5}-30$

$$\Leftrightarrow x^2-8x+16+x+5-6\sqrt{x+5}+9=0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)^2+\left(\sqrt{x+5}-3\right)^2=0$$

- Vì $(x-4)^2\ge 0;\left(\sqrt{x+5}-3\right)^2\ge 0$ nên

$$\begin{cases}(x-4)^2=0\\ \left(\sqrt{x+5}-3\right)^2=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x-4=0\\ \sqrt{x+5}-3=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=4$$

(thỏa mãn ĐKXĐ)

- Nghiệm của phương trình đã cho là x = 4

b) Ta có: $(a+b).\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=2+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$

- Vì a, b > 0 nên áp dụng bất đẳng thức cosi cho hai số dương

$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2\sqrt{\frac{a}{b}.\frac{b}{a}}=2$

- Do đó $(a+b).\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 4$

Dấu "=" xảy ra khi a = b.

Câu 3.

a) Tìm số tự nhiên n sao cho $A = n^2 + n + 6$ là số chính phương

- Để A là số chính phương thì $A = n^2 + n + 6 = a^2$ ($a \in N$)

- Ta có: $n^2 + n + 6 = a^2$

$\Leftrightarrow 4n^2+4n+24=4a^2$

$\Leftrightarrow (2a)^2-(2n+1)^2=23$

$\Leftrightarrow (2a+2n+1).(2a-2n-1)=23$

- Vì a, n là các số tự nhiên nên (2a +2n +1) là số tự nhiên và

2a + 2n + 1 > 2a – 2n -1. Do đó

$\begin{cases}2a+2n+1=23\\2a-2n-1=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4a=24\\4n=20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=6\\n=5\end{cases}$

- Vậy n = 5

b) - Xét phép chia của xy cho 3

Nếu xy không chia hết cho 3 thì

$\begin{cases}x\equiv\pm1(\bmod 3)\\y\equiv\pm1(\bmod 3)\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}x^2\equiv1(\bmod 3)\\y^2\equiv1(\bmod 3)\end{cases}$ (Vô lí)

$\Rightarrow z^2=x^2+y^2\equiv2(\bmod 3)$

Vậy xy chia hết cho 3 (1)

- Xét phép chia của xy cho 4

Nếu xy không chia hết cho 4 thì

TH1: $\begin{cases}x\equiv\pm1(\bmod 4)\\y\equiv\pm1(\bmod 4)\end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 \equiv 1 (\bmod 4) \\ y^2 \equiv 1 (\bmod 4) \end{cases}$$

$\Rightarrow z^2 = x^2 + y^2 \equiv 2 (\bmod 4)$ (vô lí)

TH2: Trong hai số x,y một số chia 4 dư 2, một số chia 4 dư 1 hoặc -1. Không mất tính tổng quát giả sử

$$\begin{cases} x \equiv \pm 1 (\bmod 4) \\ y \equiv 2 (\bmod 4) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 \equiv 1 (\bmod 8) \\ y^2 \equiv 4 (\bmod 8) \end{cases}$$

$\Rightarrow z^2 = x^2 + y^2 \equiv 5 (\bmod 8)$ (vô lí)

- Vậy xy chia hết cho 4 (2)

- Từ (1) và (2): Vậy xy chia hết cho 12

Câu 4.

a) Chứng minh $\Delta AC'C \sim \Delta AB'B$

- Xét $\Delta AC'C; \Delta AB'B$ có

Góc A chung

$B' = C' = 90^0$

Suy ra: $\Delta AC'C \sim \Delta AB'B$

b) Chứng minh AM = AN.

- Xét ΔAMC vuông tại M đường cao MB'

$AM^2 = AB'.AC$

- Xét ΔANB vuông tại N đường cao NC'

$AN^2 = AC'.AB$

- Theo câu a ta có AB'.AC = AC'.AB

- Do đó: AM = AN

c) Chứng minh $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-\frac{S'}{S}$

- Chỉ ra được $\frac{S_{AB'C'}}{S_{ABC}}=\left(\frac{AB'}{AB}\right)^2=\cos^2 A$

- Tương tự $\frac{S_{BA'C'}}{S_{ABC}}=\cos^2 B$

$\frac{S_{CA'B'}}{S_{ABC}}=\cos^2 C$

- Do đó:

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=\frac{S_{AB'C'}+S_{BA'C'}+S_{CA'B'}}{S_{ABC}}$$

$$=\frac{S_{ABC}-S_{A'B'C'}}{S_{ABC}}=1-\frac{S'}{S}$$

Câu 5.

- Ta có:

$$A=3x+4y+\frac{2}{5x}+\frac{8}{7y}$$

$$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{2}{5x}+\frac{5x}{2}+\frac{8}{7y}+\frac{7y}{2}$$

- Áp dụng bất đẳng thức cosi cho hai số dương ta được

$$\frac{2}{5x}+\frac{5x}{2}\ge 2\sqrt{\frac{2.5x}{5x.2}}=2$$

$$\frac{8}{7x}+\frac{7x}{2}\ge 2\sqrt{\frac{8.7x}{7x.2}}=4$$

- Vì $x+y\ge\frac{34}{35}$ nên $A\ge\frac{1}{2}.\frac{34}{35}+2+4=6\frac{17}{35}$

- Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}\frac{2}{5x}=\frac{5x}{2}\\ \frac{8}{7y}=\frac{7y}{2}\\ x+y=\frac{34}{35}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{2}{5}\\ y=\frac{4}{7}\end{cases}$

- A đạt giá trị nhỏ nhất là $6\frac{17}{35}$ khi $\begin{cases}x=\frac{2}{5}\\ y=\frac{4}{7}\end{cases}$

Đề số 20

Câu 1.

a) $P=\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}-1}+\dfrac{2}{1-4x}\right)\cdot\dfrac{6\sqrt{x}-9x-1}{1-3\sqrt{x}}$

$=\left[\dfrac{1}{2\sqrt{x}-1}-\dfrac{2}{(2\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-1)}\right]\cdot\dfrac{9x-6\sqrt{x}+1}{3\sqrt{x}-1}$

$=\dfrac{2\sqrt{x}+1-2}{(2\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-1)}\cdot\dfrac{(3\sqrt{x}-1)^2}{3\sqrt{x}-1}$

$=\dfrac{1}{2\sqrt{x}+1}\cdot(3\sqrt{x}-1)$

$=\dfrac{3\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}+1}$

Vậy $P=\dfrac{3\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}+1}$ với $x\geq 0; x\neq\dfrac{1}{4}; x\neq\dfrac{1}{9}$

Xét $2P=\dfrac{6\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+1}=\dfrac{3(2\sqrt{x}+1)-5}{2\sqrt{x}+1}=3-\dfrac{5}{2\sqrt{x}+1}$

Với $x\in Z$ thì:

$P\in Z\Leftrightarrow 2P=3-\dfrac{5}{2\sqrt{x}+1}$ là số nguyên chẵn

$\Leftrightarrow\dfrac{5}{2\sqrt{x}+1}$ là số nguyên lẻ

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x}+1\in\{1;5\}$

1) $2\sqrt{x}+1=1\Leftrightarrow x=0$ (thỏa mãn ĐK)

2) $2\sqrt{x}+1=5\Leftrightarrow x=4$ (thỏa mãn ĐK)

Vậy $x\in\{0;4\}$ là các giá trị cần tìm.

b) Ta có:

$$x^3=\left(\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}}+\sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow x^3=10+3\sqrt[3]{-27}\left(\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}}+\sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}\right)$$

$$\Leftrightarrow x^3=10-9x$$

$$\Leftrightarrow x^3+9x-10=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+10)=0$$

$\Leftrightarrow x = 1$ vì $x^2 + x + 10 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{39}{4} > 0$, với mọi giá trị của x.

Thay x = 1 vào biểu thức A ta được:

$A = 1^{2015} - 1^{2016} + 2017 = 2017$.

Câu 2.

a) $x^2 + 3x + 1 = (x+3)\sqrt{x^2+1}$.

Đặt $\sqrt{x^2+1} = t$, với $t > 0$, ta có $t^2 + 3x = (x + 3).t$

Từ đó giải được t = x; t = 3

Do đó:

+ Với t = x, ta có $\sqrt{x^2+1} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 + 1 = x^2 \end{cases}$ vô nghiệm.

+ Với t = 3, ta có $\sqrt{x^2+1} = 3 \Leftrightarrow x^2 = 8 \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x = \pm 2\sqrt{2}$.

b) Ta có: 5x – 3y = 2xy – 11

$\Leftrightarrow 2xy + 3y = 5x + 11$

$\Leftrightarrow y(2x + 3) = 5x + 11$

Dễ thấy $2x + 3 \neq 0$ (vì x nguyên) do đó

$y = \frac{5x+11}{2x+3}$

Để $y \in Z$ ta phải có $5x + 11 \vdots 2x + 3$

$\Rightarrow 2(5x+11) \vdots 2x+3$

$\Rightarrow 10x + 22 \vdots 2x+3$

$\Rightarrow 5(2x+3) + 7 \vdots 2x+3$

$\Rightarrow 7 \vdots 2x+3$

$\Rightarrow$ 2x + 3 là ước của 7

Ta có

2x + 3	1	-1	7	-7
x	-1	-2	2	-5
y	6	-1	3	2

Vậy cặp số (x; y) nguyên cần tìm là (-1; 6); (-2; -1); (2; 3); (-5; 2)

Câu 3.

a) Ta có n là số tự nhiên lớn hơn 1 nên n có dạng n = 2k hoặc n = 2k + 1, với k là số tự nhiên lớn hơn 0.

+ Với n = 2k, ta có:

$n^4 + 4^n = (2k)^4 + 4^{2k}$ lớn hơn 2 và chia hết cho 2.

Do đó $n^4 + 4^n$ là hợp số.

+ Với n = 2k + 1, tacó:

$$n^4 + 4^n = n^4 + 4^{2k}.4 = n^4 + (2.4^k)^2$$
$$= n^4 + 2.n^2.2.4^k + (2.4^k)^2 - 2.n^2.2.4^k$$
$$= (n^2 + 2.4^k)^2 - (2.n.2^k)^2$$
$$= \left(n^2 + 2.4^k - 2.n.2^k\right)\left(n^2 + 2.4^k + 2.n.2^k\right)$$
$$= \left((n - 2^k)^2 + 4^k\right)\left((n + 2^k)^2 + 4^k\right)$$

Mỗi thừa số đều lớn hơn hoặc bằng 2. Vậy $n^4 + 4^n$ là hợp số.

Vậy $n^4 + 4^n$ là hợp số với n là số tự nhiên lớn hơn 1.

b) Ta có: $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$

$\frac{y}{y+1} = 1 - \frac{1}{y+1}$

$\frac{z}{z+1} = 1 - \frac{1}{z+1}$

=> $P = 3 - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1}\right) = 3 - Q.$

Theo BDT Côsi , nếu a, b, c > 0 thì

$$a + b + c \ge 3\sqrt[3]{abc} \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} \Rightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \ge 9$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \ge \frac{9}{a+b+c}$$

Suy ra $Q = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \ge \frac{9}{4}$

$\Rightarrow -Q \le -\frac{9}{4}$ nên $P = 3 - Q \le 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}$

Vậy GTLN của $P = \frac{3}{4}$ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Câu 4.

a) Chứng minh được $\Delta ABE = \Delta DAF$

$\Rightarrow\ ABE = DAF$

Mà $DAF + BAF = 90^0$

$\Rightarrow\ ABE + BAF = 90^0$

$\Rightarrow\ AIB = 90^0$

Xét tam giác ABE vuông tại A, theo định lý Pytago có:

$BE = \sqrt{AB^2 + AE^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ (cm)

Lại có AI $\perp$ BE, do đó:

AI.BE = AB.AE $\Rightarrow\ AI = \dfrac{AB.AE}{BE} = \dfrac{2.1}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ (cm)

BI.BE = AB² $\Rightarrow BI = \dfrac{AB^2}{BE} = \dfrac{2^2}{\sqrt{5}} = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ (cm)

b) Xét ΔABH và ΔBIM có

$ABH = BIM = 45^0$

$BAH = IBM$ (cùng phụ với ABI)

Suy ra $\Delta ABH \backsim \Delta BIM$ (g.g)

$\Rightarrow\ \dfrac{AB}{BI} = \dfrac{AH}{BM} = \dfrac{BH}{IM}$ (1)

Ta có $\Delta HAB \backsim \Delta HFD$

$\Rightarrow \dfrac{HB}{HD} = \dfrac{AB}{DF} = \dfrac{HA}{HF} = 2$

$\Rightarrow\ BH = \dfrac{2}{3}BD = \dfrac{2}{3}\cdot 2\sqrt{2} = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$ (cm); $AH = \dfrac{2}{3}AF = \dfrac{2}{3}\cdot\sqrt{5} = \dfrac{2\sqrt{5}}{3}$ (cm)

Từ (1) $\Rightarrow\ BM = \dfrac{AH.BI}{AB} = \dfrac{\dfrac{2\sqrt{5}}{3}\cdot\dfrac{4\sqrt{5}}{5}}{2} = \dfrac{4}{3}$ (cm)

Ta có $\frac{BM}{BC}=\frac{BH}{BD}=\frac{2}{3}$

$\Rightarrow \Delta BMH \backsim \Delta BCD$ (c.g.c)

Do đó $BMH = BCD$, mà hai góc này ở vị trí đồng vị

$\Rightarrow$ MH // CD

Mà BC $\perp$ CD

$\Rightarrow$ MH $\perp$ BC

Ta có ΔBIH và ΔBMH là hai tam giác vuông có chung cạnh huyền BH, do đó 4 điểm B, I, H, M cùng thuộc đường tròn đường kính BH.

c) Ta có $BIM = MIF = 45^0$, do đó IM là phân giác của BIF

Ta lại có $AF = BE = \sqrt{5}$ (cm) $\Rightarrow IF = AF - AI = \sqrt{5} - \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ (cm)

Suy ra $\frac{IF}{BA}=\frac{DF}{AH}=\frac{3\sqrt{5}}{10}$

Suy ra $\Delta IDF \backsim \Delta BAH$ (c.g.c) $\Rightarrow DIF = ABH = 45^0$

Do đó ID là phân giác của EIF

Xét tam giác BIH có IO và ID là phân giác trong và ngoài

$\Rightarrow \frac{OH}{OB}=\frac{DH}{DB}=\frac{IH}{IB}$

Suy ra DH.BO = OH.BD.

Câu 5.

Chứng minh rằng: $\left(a+\frac{1}{b}\right)\cdot\left(b+\frac{1}{c}\right)\cdot\left(c+\frac{1}{a}\right)\ge\left(\frac{10}{3}\right)^3$.

Vì a + b + c = 1 nên

$P=\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right)=abc+\frac{1}{abc}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+1$

Từ bất đẳng thức Cô-si cho 3 số dương ta có:

$\frac{1}{3}=\frac{a+b+c}{3}\ge\sqrt[3]{abc}\Rightarrow abc\le\frac{1}{27}$

Đặt $x = abc$, thì $0 < x \le \frac{1}{27}$

Do đó $x+\frac{1}{x}-27-\frac{1}{27}=\frac{(27-x)(1-27x)}{27x}\ge 0$

Suy ra $x+\frac{1}{x}=abc+\frac{1}{abc}\ge 27+\frac{1}{27}=\frac{730}{27}$

Mặt khác $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 9$

Nên $P \geq \frac{730}{27} + 10 = \frac{1000}{27} = \left(\frac{10}{3}\right)^3$

Vậy $\left(a + \frac{1}{b}\right) \cdot \left(b + \frac{1}{c}\right) \cdot \left(c + \frac{1}{a}\right) \geq \left(\frac{10}{3}\right)^3$; dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.