BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ❊ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Toán học & Tuổi trẻ

NĂM THỨ 37 - RA HÀNG THÁNG

1 (271)
2000

Hộp số 6mục

Chúc Mừng Năm Mới

Xuân Canh Thìn 2000

Những gương mặt, những tấm lòng dành cho *Toán học và Tuổi trẻ*

PTS NGUYỄN VIỆT HẢI sinh ngày 29.11.1943 tại Thừa Thiên - Huế, quê ở Chàng Sơn, Thạch Thất, Hà Tây, học phổ thông tại Hà Nội, tốt nghiệp ĐHSP Hà Nội năm 1964. Ông đã dạy ở trường THSP Yên Bái, khoa Toán và khối PT chuyên toán ĐHSP Vinh, bảo vệ luận án PTS tại LB Nga (1984), công tác tại Vụ Trung học phổ thông, phụ trách môn Toán và các lớp chuyên toán (1985-1998), Phó tổng biên tập tạp chí KHTN-THPT, Phó trưởng đoàn học sinh Việt Nam dự thi toán quốc tế nhiều năm, ủy viên Hội đồng bộ môn Toán Bộ GD-ĐT, ủy viên BCH Hội giảng dạy toán học phổ thông, ủy viên Hội đồng biên tậpTHVTT từ 1992. Ông công tác tại THVTT từ 1998 và hiện là Trưởng ban Biên tập của Tạp chí.

PTS LÊ HẢI KHÔI sinh ngày 11 tháng 12 năm 1959 tại Hà Nội, quê ở Xuân Đan, Nghi Xuân, Hà Tĩnh, tốt nghiệp đại học năm 1982 và bảo vệ luận án PTS tại Liên Xô năm 1985, hiện là Phó Viện trưởng Viện Công nghệ Thông tin, ủy viên Hội đồng biên tập tạp chí Tin học và Điều khiển học. Gắn bó với THVTT gần 30 năm, PTS Lê Hải Khôi từng đoạt giải nhất của lớp 8 (tương đương 10 PTTH hiện nay) trong kì thi giải toán kỉ niệm 10 năm báo THVTT và nhiều năm nay là ủy viên Hội đồng biên tập tạp chí. Ông chúc cho THVTT ngày càng có nhiều bạn đọc hơn.

Nhà giáo ưu tú NGUYỄN KHÁNH NGUYÊN sinh ngày 05.02.1953 quê tại Quảng Ngãi, dạy các lớp chuyên toán tại trường THCS Hồng Bàng, Hải Phòng từ 1975 và từ 1995 là Hiệu trưởng trường này. Ông đã có nhiều đóng góp trong việc bồi dưỡng và phát hiện các học sinh có năng khiếu về toán ở Hải Phòng. Ông không quên bài giải đầu tiên của mình gửi báo năm 1967 và từ đó THTT đã theo ông như một người bạn đồng hành. Hiện nay ông vẫn theo dõi đều đặn THVTT, vẫn háo hức chờ đợi các đề toán hay, lời giải đẹp, các bài viết bổ ích.

Thạc sĩ TÔ XUÂN HẢI sinh ngày 17.03.1960 quê tại Văn Giang, Hưng Yên, tốt nghiệp khoa Toán ĐHSP 1 Hà Nội, dạy ở khoa Toán Đại học Sư phạm Quy Nhơn đến 1986 rồi về dạy chuyên toán trường PTTH chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương, bảo vệ luận án thạc sĩ chuyên ngành Phương pháp giảng dạy Toán ở ĐHSP Hà Nội. Ông tham gia bồi dưỡng cho Đội tuyển toán PTTH của tỉnh, có nhiều học sinh đạt giải Quốc gia giải của tạp chí THVTT và là tác giả của một số đề trên THVTT. Ông thường động viên học sinh đọc, giải bài trên tạp chí để học tập những phương pháp hay, các kinh nghiệm tốt.

Toán học và Tuổi trẻ
Mathematics and Youth

Năm thứ 37
Số 271 (1-2000)
Tòa soạn : 25 Hàn Thuyên, Hà Nội
ĐT : 04.8262477-04.9714359
FAX: (84).4.9714359

TRONG SỐ NÀY

NĂM 2000 - NĂM TOÁN HỌC THẾ GIỚI

NGÔ VIỆT TRUNG

Năm 1992 Hội toán học quốc tế (IMU) họp tại Rio de Janeiro (Brazil) đã ra tuyên bố coi năm 2000 là năm toán học thế giới (World Mathematical Year). Tuyên bố Rio de Janeiro đặt ra ba mục tiêu. Thứ nhất là đón nhận *sự thách thức của thế kỷ 21* đối với toán học. Thứ hai là phải làm cho mọi người thấy được *toán học là chìa khoá cho sự phát triển.* Thứ ba là nâng cao *hình ảnh của toán học* trong xã hội.

Tuyên bố này đã được Ủy ban văn hoá khoa học và giáo dục của Liên hợp quốc (UNESCO) bảo trợ. Tại sao UNESCO lại bảo trợ cho năm toán học thế giới 2000 mà không chọn các ngành khoa học quan trọng khác như vật lý, hoá học hay sinh học? Nghị quyết của UNESCO đã nêu ra bốn lý do.

1) *Toán học có nguồn gốc lâu đời trong nhiều nền văn hoá và các nhà toán học xuất sắc nhất trong lịch sử đều đã có những cống hiến to lớn cho sự phát triển khoa học.* Có thể nói toán học là ngành khoa học lâu đời nhất trong lịch sử phát triển loài người. Người ta đã tìm thấy ở Ai Cập các dấu tích về các chữ số được dùng cách đây hơn 5000 năm. Các nền văn minh cổ đại trên thế giới như Ai Cập, Trung Cận Đông, Ấn Độ và Trung Quốc đều có một lịch sử toán học phong phú. Các nhà toán học Talét và Đêmôkrit là những người đầu tiên bác bỏ nguồn gốc thần thánh của vũ trụ và coi các hiện tượng tự nhiên như là các biểu hiện của các quy luật khoa học. Những điều này có thể coi là cuộc cách mạng khoa học đầu tiên đã giải phóng con người ra khỏi những quan niệm duy tâm, làm nảy sinh các ngành khoa học thực sự. Ngày nay thì hầu như học sinh nào cũng biết đến tên những nhà toán học lớn như Pitago, Ácsimét, Đêcác, Niutơn, Gauxơ và những cống hiến của họ cho khoa học.

2) *Tầm quan trọng chủ chốt của toán học trong khoa học, công nghệ, kinh tế, thông tin và nhiều lĩnh vực khác của xã hội.* Nhà hiền triết Ấn Độ Vedanga Jyotisa sống cách chúng ta khoảng 2500 năm đã từng phát biểu như sau "Toán học đứng đầu mọi tri thức giống như những lông vũ trên đầu con công và hòn ngọc trên đầu con rắn". Ngày nay toán học có mặt trong tất cả các ngành khoa học tự nhiên và trong hầu hết các ngành khoa học xã hội. Các phát minh lớn ngày nay đều có sự trợ giúp của toán học. Tin học ra đời trên cơ sở của toán học và máy tính điện tử. Hiện nay người ta đang dùng nhiều công cụ của toán học hiện đại để mô tả gen của con người hay cấu trúc của vật chất. Người ta có thể dùng các mô hình toán học để thử công hiệu của các vũ khí nguyên tử mà không cần thiết phải thử chúng trong thực tế. Hầu hết các giải Nobel về kinh tế gần đây đều thuộc lĩnh vực toán kinh tế. Các phát hiện toán học về mật mã khoá công khai hay mã tự sửa sai đang đóng một vai trò thiết yếu đối với việc truyền thông tin trên mạng internet. Trong y học, các phương pháp thống kê toán học đã giúp giải quyết nhiều vấn đề cơ bản trong việc phòng chống dịch bệnh và trong việc tạo ra các thuốc chữa bệnh mới. Đây chỉ là một vài ví dụ về ứng dụng của toán học hiện nay.

3) *Vai trò của giáo dục toán học, đặc biệt là trong trường phổ thông, đối với việc hiểu các khái niệm toán học và hình thành khả năng suy luận.* Bản thân chương trình giảng dạy toán ở các trường phổ thông đã phản ánh phần nào sự hình thành tư duy toán học trong lịch sử phát triển của loài người. Người ta đã thấy một hiện tượng là nhiều sinh viên tốt nghiệp ngành toán có khả năng tiếp cận nhanh hơn với những sự thay đổi chóng mặt của công nghệ tin học hơn là sinh viên tốt nghiệp ngành tin học. Kinh nghiệm cho thấy các sinh viên tốt nghiệp ngành toán đều có khả năng phân tích và tổng hợp tốt. Không có môn khoa học nào có thể giúp cho sự phát triển trí tuệ ở học sinh nhiều bằng môn toán mà trí tuệ hiện nay được coi là yếu tố chiến lược trong sự phát triển kinh tế của một đất nước.

(Xem tiếp trang 23)

KẾT QUẢ KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA MÔN TOÁN THPT NĂM HỌC 1998-1999

NGUYỄN THẾ THẠCH
(*Vụ THPT*)

Kì thi chọn học sinh giỏi quốc gia môn toán THPT năm học 1998-1999 diễn ra trong hai ngày 13 và 14 tháng 3 năm 1999. Mỗi ngày thí sinh giải 3 bài toán trong thời gian 180 phút. Thí sinh dự thi theo 2 bảng : bảng A dành cho học sinh các lớp chuyên toán THPT thuộc các trường đại học và học sinh của các tỉnh, thành phố có truyền thống về học giỏi toán; bảng B dành cho học sinh các tỉnh còn lại với đề có mức độ dễ hơn bảng A.

Tham dự kì thi có 62 đội với 473 thí sinh, trong đó bảng A có 31 đội với 282 thí sinh; bảng B có 31 đội với 191 thí sinh.

Kế quả cụ thể : Ở bảng A có 3 giải nhất đều đạt 35 điểm, 33 giải nhì từ 29 đến 34 điểm, 56 giải ba từ 25 đến 28,5 điểm và 49 giải khuyến khích từ 21,5 đến 24,5 điểm. Có 141 thí sinh đạt giải, chiếm 50% số thí sinh. Có 92 thí sinh đạt giải nhất, nhì, ba, chiếm 64,5% số thí sinh đạt giải.

Ở bảng B có 1 giải nhất đạt 34 điểm, 4 giải nhì từ 28 đến 33,5 điểm, 18 giải ba từ 22 đến 27,5 điểm và 20 giải khuyến khích từ 20 đến 21,5 điểm. Có 43 thí sinh đạt giải, chiếm 22,5% số thí sinh. Có 23 thí sinh đạt giải nhất, nhì, ba, chiếm 53,5% số thí sinh đạt giải.

Sau đây là danh sách các học sinh THPT đạt giải trong kì thi chọn học sinh giỏi quốc gia môn toán năm học 1998-1999.

BẢNG A

Giải nhất (3 giải)

Đỗ Quang Yên (Thanh Hóa); *Nguyễn Trung Tú, Bùi Viết Lộc* (ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội)

Giải nhì (33 giải)

Lê Thái Hoàng, Lưu Hoàng Đức (ĐHSP Hà Nội); *Đỗ Đức Nhật Quang, Bùi Mạnh Hùng, Nguyễn Hồng Điệp, Nguyễn Huy Dương, Nguyễn Minh Hoài, Nguyễn Minh Tuấn, Nguyễn Vũ Thanh Tùng, Phạm Hoàng Anh, Phạm Trần Quân* (ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội); *Lê Xuân Trung* (Thanh Hóa); *Đặng Đình Hanh, Nguyễn Hoài Nam, Nguyễn Khắc Tùng, Nguyễn Thị Hảo, Phạm Hải Trung, Trương Văn Nhất* (Bắc Ninh); *Đỗ Trung Kiên, Cao Thế Thụ, Nguyễn Duy Tân* (Vĩnh Phúc); *Bùi Minh Mẫn, Tạ Anh Sơn* (Phú Thọ); *Phạm Văn Quyền, Vũ Việt Tài* (Nam Định); *Vũ Tiến Đạt* (Thái Bình); *Trịnh Việt Anh* (Hải Phòng); *Nguyễn Quang Bằng* (Hải Dương); *Nguyễn Đức Trung* (ĐHSP Vinh); *Trần Văn Nghĩa* (Quảng Ngãi); *Trần Tuấn Anh* (Khánh Hòa); *Phan Thị Thu Hằng* (Đồng Nai); *Phạm Khánh Sơn* (Đà Nẵng).

Giải ba (56 giải)

Cao Vũ Dân, Phạm Hùng, Hoàng Tùng (ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội); *Nguyễn Minh Công, Nguyễn Việt Cường* (Hà Nội); *Nguyễn Hữu Nguyên, Đỗ Hồng Sơn, Lương Trung Tuấn* (Tp Hồ Chí Minh); *Phạm Quốc Việt, Trần Quang Vinh,* (ĐHKHTN-ĐHQG, Tp Hồ Chí Minh); *Dương Đặng Xuân Thành* (Đà Nẵng); *Nguyễn Hòa Bình, Tạ Tiến Cường, Nguyễn Hà Duy, Tạ Quang Đức, Nguyễn Mạnh Hà* (Hà Tây); *Đặng Minh Thế* (Nam Định); *Nguyễn Khuyến Lân, Phạm Ngọc Mai, Nguyễn Văn Quang, Phan Xuân Thành* (Thanh Hóa); *Nguyễn Đăng Hồ Hải* (Thừa Thiên - Huế); *Hoàng Thanh Phúc* (ĐHSP Vinh); *Nguyễn Hàm Toàn* (Nghệ An); *Lương Văn Khuê* (Bắc Giang); *Nguyễn Quốc Hải* (Bắc Ninh); *Mai Xuân Đức, Đào Xuân Hoàng, Võ Sỹ Nam, Trần Nguyên Thọ, Nguyễn Vĩnh Thuận, Nguyễn Danh Tịnh* (Hà Tĩnh); *Nguyễn Dũng, Nguyễn Thị Quỳnh Diệp, Nguyễn Huy Khương, Phạm Ngọc Lợi, Đào Thị Thu Mai, Trần Đại Nghĩa, Vũ Văn Tâm* (Hải Dương); *Trần Ngọc Hải, Phùng Văn Mạnh, Vũ Tuấn Long* (Hưng Yên); *Võ Thị Dung Hòa, Võ Duy* (Khánh Hòa); *Lê Hoài Nam, Nguyễn Thanh Sơn, Nguyễn Văn Thành* (Ninh Bình); *Ngô Hoàng Long, Nguyễn Văn Minh* (Phú Thọ); *Hoàng Thị Thanh Giang, Nguyễn Đình Mích* (Thái Bình); *Trịnh Quốc Khánh, Nguyễn Trung Lập, Vũ Văn Phong, Phạm Hoàng Hà* (Vĩnh Phúc); *Trần Thị Lê* (Thái Nguyên).

Giải khuyến khích (49 giải)

Đào Phương Bắc (ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội), *Nguyễn Bá Hải, Vũ Văn Hải, Vũ Thanh Hùng* (ĐHSP Hà Nội); *Hà Hồng Hà, Phạm Bảo Lâm, Bùi Nhật Linh* (Hà Nội); *Nguyễn Thanh Bình, Lê Minh Tuấn,* (ĐHKHTN-ĐHQG Tp Hồ Chí Minh); *Nguyễn Đắc Dương, Nguyễn Thành Khiêm* (Tp Hồ Chí Minh); *Nguyễn Thị Thùy Minh* (Đà Nẵng); *Nguyễn Văn Thắng* (Hà Tây);

Tạ Thành Định (Hải Phòng); *Vũ Trần Cường, Trần Tuấn Cường, Hoàng Mạnh Quang, Nguyễn Văn Trung* (Nam Định); *Bùi Văn Bình* (Thanh Hóa); *Hồ Ngọc Kỳ, Võ Trần Mạnh, Lê Thế Phùng* (Nghệ An); *Hồ Xuân Liên, Nguyễn Xuân Sáng, Nguyễn Anh Tuấn, Nguyễn Tiến Trung* (ĐHSP Vinh), *Hà Minh Ngọc* (Đồng Nai); *Nguyễn Thị Minh Hoàng* (Bắc Giang); *Phạm Tùng Sơn* (Bắc Ninh); *Nguyễn An Trung* (Hà Nam); *Lê Đăng Khoa, Nguyễn Viết Tú* (Hà Tĩnh); *Nguyễn Ngọc Nhật Huy, Đoàn Thanh Nga, Vũ Trụ, Nguyễn Đình Sơn* (Hưng Yên); *Đặng Võ Công, Lê Văn Cường, Nguyễn Sơn Hà, Hoàng Văn Tuấn* (Ninh Bình); *Phạm Ngọc Hưng, Nguyễn Xuân Sơn* (Phú Thọ), *Nguyễn Hoa* (Quảng Bình); *Trần Cường, Đặng Hồng Toan, Nguyễn Thị Hương Thơm* (Thái Bình); *Vũ Tuấn Anh, Vũ Ngọc Dương, Nguyễn Lê Thành* (Thái Nguyên).

BẢNG B

Giải nhất (1 giải)

Đỗ Quang Dương (Hòa Bình)

Giải nhì (4 giải)

Lê Ngọc Thúy (Bình Dương); *Sĩ Đức Quang* (Hòa Bình); *Tô Thu Hiền* (Lâm Đồng); *Nguyễn Công Chính* (Yên Bái).

Giải ba (18 giải)

Nguyễn Khắc Nhật, (Bạc Liêu); *Nguyễn Ngọc Huy, Lê Trường Giang, Phan Hữu Trọng Hiền* (Bình Thuận); *Võ Thái Sơn, Thái Phương Anh* (Cà Mau); *Trần Thị Hoàng Quyên* (Đắc Lắc); *Lâm Viết Hoan, Nguyễn Ngọc Xuân* (Hòa Bình), *Nguyễn Thái Đức, Phạm Ngọc Quyên, Huỳnh Trọng Tín, Trần Kim Tuyến* (Lâm Đồng); *Nguyễn Hòa Duyên, Nguyễn Hoàng Minh* (Tuyên Quang); *Nguyễn Trường Tín* (Tiền Giang); *Bùi Minh Khoa* (Trà Vinh); *Nguyễn Hoàng Quân* (Vĩnh Long).

Giải khuyến khích (20 giải) :

Huỳnh Duy Thanh (Bến Tre); *Nguyễn Thanh Sơn* (Cà Mau); *Nguyễn Thiện Bình* (Đắc Lắc); *Phạm Đình Thế Duy, Lê Xuân Đại* (Đồng Tháp); *Đỗ Thị Thu Hà, Nguyễn Thị Thanh Huyền, Phạm Phi Long* (Hòa Bình); *Nguyễn Quốc Duy* (Lâm Đồng); *Bùi Đức Nhã, Nguyễn Hữu Xuân* (Long An); *Trần Xuân Thọ* (Sơn La); *Lê Quang Hòa, Nguyễn Trung Kiên* (Tuyên Quang); *Lưu Huỳnh Quốc Dũng, Trần Minh Hưng* (Tiền Giang); *Nguyễn Hà Hải Đăng, Bùi Trần Hạnh Loan* (Vĩnh Long), *Nguyễn Thị Ngọc Anh, Dương Quang Huy* (Yên Bái).

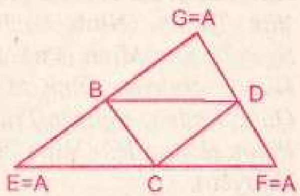
(Đề thi và đáp án sẽ đăng trong số 272)

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 25

Problem. If the sum of the face angles at each vertex of a tetrahedron is 180^o, prove that the tetrahedron is isosceles, i.e., the opposite edges are equal in pairs.

Solution. Let *ABCD* be the given tetrahedron. Cut *ABCD* along the edges *AB, AC* and *AD* and lay it out flat on a plane. Let *E, F, G* be the points on the plane which correspond to the vertex *A* and which are opposite to the edges *BC, CD, DB*, respectively.



Then *EBG, ECF, FDG* are all straight because the sum of the face angles at each of the points *B, C, D* is 180^o. Now, *EFG* becomes a triangle and *B, C, D* become the midpoints of its sides. Hence $BC = FD = AD$, $BD = EC = AC$, $CD = EB = AB$.

Từ mới :

face	= mặt
angle	= góc
vertex	= đỉnh
tetrahedron	= tứ diện
isosceles	= cân (tính từ)
edge	= cạnh
pair	= đôi, cặp
in pairs	= từng đôi một
cut	= cắt
along	= dọc theo
lay out	= trải ra (động từ)
flat	= phẳng (tính từ)
plane	= mặt phẳng
correspond	= tương ứng (động từ)
respectively	= tương xứng, tương ứng (trạng từ)
straight	= thẳng hàng (tính từ)
midpoint	= trung điểm

NGÔ VIỆT TRUNG

Dành cho các bạn
TRUNG HỌC CƠ SỞ

Một số chú ý khi giải toán TÌM CỰC TRỊ ĐẠI SỐ

HUỲNH VĂN TRỌNG
(Bình Định)

Trong đại số, các bài toán cực trị có một vị trí khá quan trọng. Đã có rất nhiều tài liệu, sách, báo nói về vấn đề này. Bài này trình bày một số sai lầm thường thấy của học sinh khi tìm cực trị của biểu thức chứa biến và một vài dạng toán tìm cực trị đại số.

Xét biểu thức chứa biến $P(x)$, $P(x, y)$... Ta kí hiệu giá trị lớn nhất của biểu thức P *trên tập xác định của biến* là GTLN(P) hay max$P$, còn giá trị nhỏ nhất của P là GTNN(P) hay min$P$.

I- Các kiến thức thường dùng:

1) Cho $P = A + B$ thì $\max P = \max A + \max B$
$(\min P = \min A + \min B)$
trong đó A và B là các biểu thức chứa các biến độc lập với nhau, hoặc nếu A và B chứa cùng biến thì cùng đạt GTLN (GTNN) tại một giá trị xác định $x = x_o$, tức là $\max P = P(x_o)$, $\max A = A(x_o)$, $\max B = B(x_o)$.

2) Cho $P = \dfrac{1}{A}$ với $A > 0$ thì $\max P = \dfrac{1}{\min A}$

3) a) $\sum\limits_{i=1}^{n} \left[f(x_i) \right]^{2k} + m \geq m$

b) $M - \sum\limits_{i=1}^{n} \left[f(x_i) \right]^{2k} \leq M$

với $\forall k \in \mathbf{N}, m \in \mathbf{R}, M \in \mathbf{R}$.

4) $A \geq 0$ thì $\max(A^2) = (\max A)^2$ và $\min(A^2) = (\min A)^2$

5) Các dạng của bất đẳng thức Côsi :

a) $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ $(a \geq 0, b \geq 0)$; Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b$

b) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2$ $(ab > 0)$; Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b$

6) Bất đẳng thức Bunhiacốpxki :

$(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$; Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow ay = bx$.

Cần chú ý rằng sau khi tìm được giá trị của biến để biểu thức P đạt cực trị cần thử lại xem P có đạt cực trị tại đúng giá trị đó không và giá trị đó của biến có thỏa mãn các điều kiện giả thiết không.

II- Những sai sót thường gặp khi giải toán tìm cực trị đại số :

Bài toán 1. Giả sử hai số thực x, y thỏa mãn $x > y$ và $xy = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $\dfrac{x^2 + y^2}{x - y}$

Giải. Ta có : $A = \dfrac{x^2+y^2}{x-y} = \dfrac{(x-y)^2 + 2xy}{x-y}$.

Do $x > y$ và $xy = 1$ nên :

$$A = \frac{(x-y)^2}{x-y} + \frac{2xy}{x-y} = x - y + \frac{2}{x-y}.$$

Theo (5b), $A = \dfrac{x-y}{2} + \dfrac{2}{x-y} + \dfrac{x-y}{2} \geq 2 + \dfrac{x-y}{2}$ (*)

Vậy A có giá trị nhỏ nhất khi :

$\dfrac{x-y}{2} + \dfrac{2}{x-y} = 2 \Leftrightarrow (x-y)^2 + 4 = 4(x-y)$

$\Leftrightarrow (x-y)^2 - 4(x-y) + 4 = 0$

Giải phương trình được nghiệm là $x = 1 \pm \sqrt{2}$,

$y = -1 \pm \sqrt{2} \Rightarrow$

$$\min A = \frac{x-y}{2} + 2 = \frac{2}{2} + 2 = 3$$

Bài giải trên là sai. Có thể biến đổi như sau :

$A = x-y + \dfrac{2}{x-y} = \sqrt{2}\left(\dfrac{x-y}{\sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{2}}{x-y}\right) \geq 2\sqrt{2}$

Kết quả đúng là $\min A = 2\sqrt{2}$ khi (x, y) là

$\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} ; \dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right); \left(\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} ; \dfrac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6}\right)$

Vậy sai lầm của bài giải trên là biến đổi đến (*) thì $2 + \dfrac{x-y}{2}$ không phải là hằng số mà còn phụ thuộc vào biến x, y.

Bài toán 2: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

Có học sinh đã giải $P = (x^2 + x + 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow$ $\min P = 0$ Điều này không xảy ra vì không có giá trị nào của x làm cho $P(x) = 0$

Có học sinh khác đã giải :

$P = x^2(x^2 + 2x + 1) + 2x^2 + 2x + 1$

$$= x^2(x+1)^2 + 2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \ge \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \min P = \frac{1}{2} \text{ khi } x = -1;\ x = -\frac{1}{2}.$$

Dễ thấy cách giải này sai vì lúc đó x đồng thời bằng -1 và bằng $-\frac{1}{2}$. Cách giải đúng như sau :

Vì $x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \ge \frac{3}{4}$ mà $x^2+x+1 > 0$ nên $\min(x^2+x+1) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$. Vậy

$$\min P = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Bài toán 3: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau với $x \ge 0, y \ge 0$:

$P = x - 2\sqrt{xy} + 3y - 2\sqrt{x} + 1977$. Có học sinh đã giải như sau :

$$P = \frac{1}{3}\left[(\sqrt{x}-3\sqrt{y})^2 + (\sqrt{x}-2)^2 + (\sqrt{x}-1)^2\right] + \frac{5986}{3}$$

$\Rightarrow \min P = \frac{5986}{3}$ (không thể $x = 1$ và $x = 4$).

Cách giải đúng như sau :

$$3P = 3x - 6\sqrt{xy} + 9y - 6\sqrt{x} + 5991$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{1}{3}\left[(\sqrt{x}-3\sqrt{y})^2 + 2\left(\sqrt{x}-\frac{3}{2}\right)^2\right] + \frac{3991}{2} \ge \frac{3991}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \min P = \frac{3991}{2} \text{ khi } \begin{cases} \sqrt{x} - \frac{3}{2} = 0 \\ \sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{4} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

III. Biến đổi một bài toán cực trị:

Khi giải một bài toán tìm cực trị ta có thể quy về bài toán gốc đơn giản hơn, hoặc ngược lại từ một bài toán gốc có thể sáng tạo ra bài toán mới phức tạp hơn.

Bài toán 1. Cho $x, y \in \mathbf{R}$ thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $x + y$.

Giải. Từ $(x+y)^2 = x^2+y^2+2xy \le 2(x^2+y^2) \le 2$ dẫn đến : $\max(x+y) = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ và

$$\min(x+y) = -\sqrt{2} \Leftrightarrow x = y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Từ bài toán trên có thể biến đổi thành các bài toán khác như sau :

Bài toán 1.1. Cho $x^2 + 4y^2 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của

$$S = x + 2y$$

Bài toán 1.2. Cho $4x^2 + 9y^2 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $S = 2x + 3y$ nếu $x \ge 0, y \ge 0$.

Bài toán 2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức : $A = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$

Hướng dẫn : Xét A^2 với $2 \le x \le 4$

Bài toán 2.1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức : $B = \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{6-2x}$

Hướng dẫn. B xác định $\Leftrightarrow 2 \le x \le 3$; Xét $B = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{3-x}$

Bài toán 2.2. Giải phương trình :

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11$$

Giải. Điều kiện : $2 \le x \le 4$. Từ bài toán 2, ta có : $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} \le 2$.

Mặt khác : $x^2 - 6x + 11 = (x-3)^2 + 2 \ge 2$

Suy ra $x = 3$ là nghiệm duy nhất.

Bài toán 3. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số :

$$f(x, y, z) = \frac{yz\sqrt{x-1} + xz\sqrt{y-2} + xy\sqrt{z-3}}{xyz} \text{ trên}$$

miền $D = \{(x, y, z): x \ge 1, y \ge 2; z \ge 3\}$

Giải. $f(x, y, z) = \frac{\sqrt{x-1}}{x} + \frac{\sqrt{y-2}}{y} + \frac{\sqrt{z-3}}{z}$

Vận dụng bất đẳng thức Côsi cho từng biến :

$$\sqrt{x-1} \cdot 1 \le \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{x-1}}{x} \le \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{y-2} \cdot \sqrt{2} \le \frac{y}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{y-2}}{y} \le \frac{1}{2\sqrt{2}};$$

$$\sqrt{z-3} \cdot \sqrt{3} \le \frac{z}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{z-3}}{z} \le \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = 2, y = 4, z = 6$.

Do đó $\max\limits_{(x,y,z) \in D} f(x, y, z) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

BÀI TẬP

Bài 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của mỗi biểu thức sau :

a) $A = \frac{x^4+y^4}{x^2-y^2}$ với $x > y$ và $xy = 1$

b) $B = x^4 - x^3 + \frac{9}{4}x^2 - x + 1$.

c) $C = x - 2\sqrt{xy} + 2y - \sqrt{x}$ với $x \ge 0, y \ge 0$.

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$P = \sqrt{2x-1} \cdot \sqrt{2-x}.$$

Bài 3. Giải phương trình :

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = 2 + \sqrt{(x-2)(4-x)}$$

Diễn đàn
DẠY VÀ HỌC TOÁN

KHAI THÁC ĐỊNH NGHĨA HÀM SỐ TUẦN HOÀN

NGUYỄN VIỆT HẢI

Trong sách giáo khoa Đại số và Giải tích lớp 11 có nêu định nghĩa hàm số tuần hoàn (HSTH) như sau :

Hàm số $f(x)$ trên tập xác định $D \subset \mathbf{R}$ (hoặc viết D_f) được gọi là tuần hoàn (trên D) nếu tồn tại một số $T \neq 0$ sao cho với mọi $x \in D$ ta có:

a) $x + T \in D$ và $x - T \in D$

b) $f(x + T) = f(x)$

Số dương T thỏa mãn điều kiện trên gọi là *chu kì* của hàm số tuần hoàn $f(x)$.

Sau đó trong SGK chỉ ra rằng các hàm số lượng giác sin$x$, cos$x$, tg$x$, cotg$x$ là các HSTH có chu kì tương ứng là 2π, 2π, π, π. Ở phần bài tập học sinh được biết thêm một số dạng HSTH đều là hàm số lượng giác. Vì các ví dụ về HSTH còn ít nên đa số học sinh rất lúng túng khi giải bài tập về chúng. Trong bài này xin nêu thêm một số ví dụ và các tính chất đơn giản của HSTH suy ra ngay từ định nghĩa để học sinh có quan niệm rõ ràng hơn về HSTH.

I. Các tính chất cơ bản

(Bạn đọc tự suy ra từ định nghĩa)

1) Giả sử $f(x)$ là HSTH. Nếu $x_o \in D$ thì $x_o + nT \in D$ với mọi $n \in Z$. Nếu $x \notin D$ thì $x_o + nT \notin D$ với mọi $n \in Z$.

2) Nếu $f(x)$ là HSTH mà $f(x_o) = a$ thì tồn tại vô số giá trị $x_o + nT$ ($n \in Z$) để $f(x_o + nT) = a$. Từ đó : nếu HSTH $f(x)$ có chu kì T mà bị chặn (nghĩa là $|f(x)| \le c$ trong đó c là hằng số) với mọi $x \in D$ và thỏa mãn $a \le x \le a + T$ thì $f(x)$ bị chặn trên tập xác định D.

3) Nếu các số dương T_1, T_2 là chu kì của HSTH $f(x)$ trên tập D thì các số dương mT_1, nT_2, $mT_1 + nT_2$ (với $m, n \in Z \backslash \{0\}$) đều là chu kì của $f(x)$ trên tập D.

4) Nếu HSTH $f(x)$ có chu kì nhỏ nhất T_o thì T_o gọi là chu kì cơ sở (CKCS) của $f(x)$. Lúc đó với T là chu kì nào đó của $f(x)$ ta có $T = nT_o$ với n là số nguyên dương.

a) Ví dụ về HSTH có chu kì cơ sở :

• Các hàm số sin$x$, cos$x$ có CKCS là $T_o = 2\pi$, các hàm số tg$x$, cotg$x$, $|\sin x|$, $|\cos x|$ có CKCS là $T_o = \pi$.

• Hàm số $y = x - [x]$ ($[x]$ là phần nguyên của x) có CKCS là $T_o = 1$.

b) Ví dụ về HSTH không có chu kì cơ sở :

• Hàm số $f(x) = 2$ là tuần hoàn với chu kì là số T dương bất kì.

• Hàm số $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } x \text{ hữu tỉ} \\ 0 \text{ nếu } x \text{ vô tỉ} \end{cases}$

là tuần hoàn với chu kì là số hữu tỉ T dương bất kì.

5) Giả sử hai HSTH $f(x)$, $g(x)$ xác định trên cùng một tập $D_f = D_g$, có chu kì tương ứng là T_1, T_2. Nếu $\frac{T_1}{T_2} \in Q$ (tập số hữu tỉ) thì các hàm số $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x).g(x)$ cũng là HSTH với chu kì là $T = mT_1 = nT_2$ (m, n là các số nguyên dương).

II. Các bài tập áp dụng

Trong các bài tập sau yêu cầu xét xem mỗi hàm số có tuần hoàn không và nếu có thì tìm chu kì của nó. Nếu biết sử dụng các tính chất trên thì có lời giải khá đơn giản.

BT1. $f(x) = \log_2 \cos\frac{2\pi x}{\sqrt{3}}$

ĐS : Xét D_f. HSTH, CKCS $T_o = \sqrt{3}$.

BT2. $f(x) = \sin(\sqrt{x})^2$.

Hướng dẫn: Nếu là HSTH thì $\exists n > 0, T > 0$ để $1 - nT \notin D_f$. Sử dụng tính chất 1.

BT3. $f(x) = \dfrac{10x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$.

Hướng dẫn: Chọn a để phương trình $f(x) = a$ có 2 nghiệm. Sử dụng tính chất 2.

BT4. $f(x) = \cos^2 x + \cos^2(1 + x) - 2\cos 1.\cos x.\cos(1 + x) - \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn. Biến đổi tương đương về dạng $f(x) = \dfrac{-\cos 2}{2}$ (hằng số)

BT5. $f(x) = 2^{\frac{1}{x(1+x)}}$

ĐS: không là HSTH vì chỉ có hữu hạn $x_o \notin D_f$

BT6. $f(x) = x^2.\cos x$.

Hướng dẫn: Nếu $f(x)$ có chu kì T thì tồn tại hằng số $c > 0$ để $|x^2 \cos x| \le c$ với mọi x thuộc $[a;\ a+T]$. Chọn $x_o = (2 + 2c)\pi$ thì $|f(x_o)| = \pi^2(c+2c)^2 > c$.

Sử dụng tính chất 2.

BT7. $f(x) = x - [x] + \text{arctg}x$, trong đó $[x]$ là phần nguyên của x.

Giải. Giả sử $f(x)$ là HSTH có chu kì T thì $f(x + T) = f(x)$ với mọi $x \in \mathbf{R}$, từ đó

lấy $x = 0$ có $T - [T] + \text{arctg}T = 0$ (1)

lấy $x = -T$ có $-T - [-T] - \text{arctg}T = 0$ (2)

Từ (1) (2) suy ra $[T] + [-T] = 0 \Rightarrow T \in Z$, thay vào (1) rút ra $T = 0$. Vậy $f(x)$ không là HSTH.

III. Các bài toán

BT1. Mỗi hàm số sau có là HSTH không và nếu có thì tìm chu kì, chu kì cơ sở của nó :

a) $f(x) = \cos 3\pi x + \sin 2\pi x$

b) $f(x) = \sin\dfrac{3x}{2} - \cos\dfrac{x}{3}$

BT2. Cho hàm số $f(x) = a\sin ux + b\cos vx$ xác định trên tập số thực, trong đó a, b, u, v là các hằng số thực khác 0. Chứng minh rằng $f(x)$ là HSTH khi và chỉ khi $\dfrac{u}{v}$ là số hữu tỉ. (Thi HS giỏi THPT toàn quốc bảng B năm học 1996-1997)

Xem THVTT số 248 (2/1998).

BT3. Chứng minh rằng nếu đồ thị hàm số $f(x)$ ($x \in \mathbf{R}$) có 2 trục đối xứng $x = a$ và $x = b$ với $a \neq b$ thì $f(x)$ là HSTH.

Hướng dẫn: Đồ thị $f(x)$ đối xứng qua trục $x=a$ $\Leftrightarrow f(x) = f(2a - x) \Leftrightarrow f(a + x) = f(a - x)$ với mọi $x \in R$. Xem THVTT bài T6/260 (6/1999)

BT4. Chứng minh rằng nếu đồ thị hàm số $f(x)$ ($x \in \mathbf{R}$) có tâm đối xứng $E(a, b)$ và có trục đối xứng $x = c$ với $a \neq c$ thì $f(x)$ là HSTH.

Hướng dẫn. Đồ thị $f(x)$ đối xứng qua tâm $E(a, b) \Leftrightarrow f(x) + f(2a - x) = 2b \Leftrightarrow f(a + x) + f(a - x) = 2b$ với mọi $x \in \mathbf{R}$

BT5. Chứng minh rằng nếu đồ thị hàm số $f(x)$ ($x \in \mathbf{R}$) có 2 tâm đối xứng phân biệt thì $f(x)$ biểu diễn được thành tổng của một HSTH và một hàm số tuyến tính./.

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO ĐẠI HỌC HUẾ NĂM 1999

Câu I. Cho hàm số f xác định bởi :

$$f(x) = \begin{cases} x\cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{nếu } x \neq 0, \\ 0 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

1) Chứng minh rằng f liên tục trên tập số thực $\mathbf{R}$.

2) Hàm số f có đạo hàm tại những điểm nào ? Tính đạo hàm của f tại các điểm đó.

Câu II. 1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số : $y = \dfrac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$

2) Biện luận theo m số nghiệm của phương trình :

$$m(x^2 + 3x + 3) + x + 1 = 0,$$

với m là tham số thực.

Câu III. 1) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho ba điểm $A(1, 3, 2)$, $B(1, 2, 1)$, $C(1, 1, 3)$. Hãy viết phương trình tham số của đường thẳng (Δ) đi qua trọng tâm tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng chứa tam giác.

2) (*Chưa phân ban*) Tính diện tích tam giác cong giới hạn bởi các đường :

$$y = (x + 1)^5, y = e^x, x = 1.$$

(*Phân ban*) Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi các đường $x = 1$, $x = e$, $y = 0$, $y = \dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}$

Câu IV. (*Chưa phân ban*)

1) Cho m là một số thực lớn hơn 1. Chứng minh rằng hệ bất phương trình sau vô nghiệm :

$$\begin{cases} m^2(1 - y^2) \geq x^2 \\ x - m^3 \geq my^2 \end{cases}$$

2) Giải phương trình lượng giác :

$$\frac{\sin x \,.\, \text{cotg}(5x)}{\cos(9x)} = 1.$$

Câu V. (*Chưa phân ban*) Cho tứ diện ABCD có ba cạnh AB, AC, AD vuông góc với nhau từng đôi một và $AB = a$, $AC = 2a$, $AD = 3a$. Hãy tính diện tích tam giác BCD theo a.

Câu IV. (*Phân ban*)

1) Cho a là một số thực dương. Chứng minh rằng hệ bất phương trình sau vô nghiệm :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4ax, \\ y - x^2 \geq 2a. \end{cases}$$

2) Giải phương trình :

$$\ln(\sin^2 x) - 1 + \sin^3 x = 0.$$

Câu V. (*Phân ban*) Một hộp đựng 4 viên bi đỏ, 5 viên bi trắng và 6 viên bi vàng. Người ta chọn ra 4 viên bi từ hộp đó. Hỏi có bao nhiêu cách chọn để trong số bi lấy ra không có đủ cả ba màu ?

(Xin xem tiếp đáp án ở số tạp chí 272)

DÀNH CHO CÁC BẠN CHUẨN BỊ THI VÀO ĐẠI HỌC

SỬ DỤNG TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

TÔ XUÂN HẢI
(*Hải Dương*)

Đối với các phương trình, bất phương trình mũ và lôgarit, ngoài các dạng quen thuộc, đôi khi còn gặp dạng phức tạp mà để giải nó đòi hỏi phải có các nhận xét đặc biệt. Dựa trên cơ sở tính đơn điệu của hàm số, sau cách đặt ẩn số phụ thích hợp, ta có thể tìm được nghiệm của phương trình, bất phương trình.

Ví dụ 1. Giải phương trình :

$$\log_2(1+\sqrt[3]{x})=\log_7 x.$$

Giải. Điều kiện $x>0$, đặt $\log_7 x=t$

$\Rightarrow x=7^t$ và $1+\sqrt[3]{x}=2^t$

$\Rightarrow 1+\sqrt[3]{7^t}=2^t$

$\Leftrightarrow 1=\left(\sqrt[3]{\frac{7}{8}}\right)^t+\left(\frac{1}{2}\right)^t=f(t)$

Vì $f(t)$ là hàm nghịch biến trên **R**, phương trình có nghiệm $t=3 \Rightarrow t=3$ là nghiệm duy nhất $\Rightarrow x=7^3=343$.

Ví dụ 2. Giải phương trình :

$$3\log_3(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})=2\log_2\sqrt{x}.$$

Hướng dẫn. Đặt $2\log_2\sqrt{x}=12t$.

Có nghiệm duy nhất $t=1 \Rightarrow x=2^{12}=4096$

Ví dụ 3. Giải phương trình :

$$-2^{x^2-x}+2^{x-1}=(x-1)^2$$

Giải. Viết phương trình về dạng :

$$2^{x-1}+x-1=2^{x^2-x}+x^2-x$$

Xét hàm $f(t)=2^t+t$ đồng biến trên R, mà $f(x-1)=f(x^2-x)$

$\Leftrightarrow x-1=x^2-x \Leftrightarrow x=1$

Ví dụ 4. Giải bất phương trình :

$$\frac{3^{2-x}+3-2x}{4^x-2}\ge 0 \qquad (*)$$

(Đại học Luật - 1996)

Giải. Xét $f(x)=3^{2-x}-2x+3$ nghịch biến trên **R**, $f(2)=0$, $g(x)=4^x-2$ đồng biến trên **R**, $g\left(\frac{1}{2}\right)=0$

Bất phương trình $(*) \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)}\ge 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)\ge 0=f(2)\\ g(x)>0=g\left(\frac{1}{2}\right)\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)\le 0=f(2)\\ g(x)<0=g\left(\frac{1}{2}\right)\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le 2\\ x>\frac{1}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 2\\ x<\frac{1}{2}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \frac{1}{2}<x\le 2$$

Vậy bất phương trình có nghiệm là $\frac{1}{2}<x\le 2$

Ví dụ 5. Giải bất phương trình

$$\log_7 x>\log_3(2+\sqrt{x}) \qquad (**)$$

Điều kiện $x>0$, đặt $\log_7 x=t \Leftrightarrow x=7^t$.

Bất phương trình (**)

$\Leftrightarrow t>\log_3(2+\sqrt{7^t}) \Leftrightarrow 3^t>2+\sqrt{7^t}$.

$\Leftrightarrow 1>2.\left(\frac{1}{3}\right)^t+\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^t=f(t)$.

Do $f(t)$ là hàm nghịch biến trên **R**, $f(2)=1$ nên bất phương trình $(**) \Leftrightarrow f(t)<f(2) \Leftrightarrow t>2$ $\Leftrightarrow \log_7 x>2 \Leftrightarrow x>7^2=49$

Bài tập

Giải các phương trình, bất phương trình, hệ phương trình sau đây :

1) $\log_3(x^2-3x-13)=\log_2 x$ ĐS : $x=8$

2) $\log_{\frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}}(x^2-4x-2)=$
$=\log_{\frac{1}{2-\sqrt{3}}}(x^2-4x-3)$

ĐS : $x=2\pm\sqrt{14+4\sqrt{3}}$

3) $2^{\log_5(x+3)}=x$

ĐS : $x=2$

4) $2\log_3 cotgx=\log_2\cos x$

ĐS : $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi,\ k\in Z$

5) Giải hệ $\begin{cases}\log_6(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x})=\frac{1}{4}\log_2 x & (1)\\ \dfrac{\sin\frac{16\pi}{x}+1}{\cos\frac{\pi x}{16}}<1-\cos\frac{\pi\sqrt{x}}{4} & (2)\end{cases}$

ĐỘI TUYỂN ANH DỰ THI TOÁN QUỐC TẾ - THÀNH TÍCH VÀ QUY TRÌNH TUYỂN CHỌN

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Mở đầu

Một phương pháp truyền thống nhằm phát hiện và khuyến khích các học sinh giỏi toán, tạo ra một bầu không khí thi đua học toán trong nhà trường phổ thông là tổ chức các kì thi học sinh giỏi (HSG) Toán (còn gọi là thi Olympic Toán). Hiện nay ở rất nhiều nước trên thế giới đều đã tổ chức thi HSG Toán quốc gia hàng năm, nối tiếp theo là kì thi chọn đội tuyển quốc gia để chọn 6 em xuất sắc nhất đại diện cho nước mình tham dự kì thi Toán quốc tế (IMO) tổ chức hàng năm vào tháng 7. Cho đến nay đã có đến 83 đội tham dự IMO. Mỗi nước có những cách riêng của mình trong việc tổ chức kì thi HSG Quốc gia và thi chọn đội tuyển song nói chung đều tổ chức rất bài bản hợp lí. Các cuộc thi "thể thao trí tuệ" này đều nhằm mục đích để các em giỏi toán ở các trường được gặp gỡ, giao lưu, thi tài với nhau và sau đó với sự có mặt của các bạn cùng lứa, các em đoạt giải được trao các phần thưởng mà các em xứng đáng được hưởng. Cuộc thi thường do Hội Toán học, Bộ Giáo dục phối hợp với một số trường đại học tổ chức, có sự tài trợ của một số công ty, cơ quan, Hội...

Trong bài này, chúng tôi xin giới thiệu một số nét về cách tổ chức thi HSG ở Anh, một nước phát triển, có một truyền thống Toán học lâu đời, nơi đã sản sinh ra nhiều nhà bác học và toán học lớn.

Thi học sinh giỏi toán ở Anh

Nước Anh bắt đầu tham gia thi toán quốc tế (IMO) vào năm 1967. Cho đến năm 1999 họ đã tham dự 32 lần với 218 lượt thí sinh dự thi. Tổng số huy chương (HC) giành được là 176 trong đó có : 30 HC Vàng, 63 HC Bạc và 83 HC Đồng. Bình quân số HC kiếm được trong một lần thi là 176/32 = 5,5 và số HCV trung bình trong một lần thi là 30/33 = 0,937. Nước Anh đã đăng cai IMO một lần vào năm 1979. Đã có thí sinh Simon Norton từng lập một hattric : 3 lần liên tiếp đoạt HCV của IMO trong các năm 1967, 1968, 1969. Đặc biệt có hai nhà Toán học Anh nổi tiếng là R.E. Borcherds và U.T Gowers được nhận giải thưởng Fields (được coi như giải Nobel trong Toán học) vốn đã từng khoác áo đội tuyển Anh và giành được HCV vào các năm 1978 và 1981.

Quá trình chọn đội tuyển bắt đầu vào tháng 11 với kì thi sơ tuyển. Có khoảng 40000 thí sinh của gần 300 trường tham dự. Đề thi dưới dạng trắc nghiệm khách quan gồm 25 câu hỏi, thí sinh phải làm trong 1 giờ 30 phút, trong đó có 15 câu tương đối dễ mà đa số làm được. Dựa trên kết quả kì thi này chọn ra 700 thí sinh dự thi kì thi HSG toán quốc gia BMO (British Mathematical Olympiad) tổ chức vào giữa tháng giêng. Bài thi gồm 5 bài toán với thời gian làm bài là 3 giờ rưỡi, mỗi bài 10 điểm. Sau đó 100 thí sinh điểm cao nhất của vòng thi này được mời tham dự tiếp vòng 2 BMO tổ chức vào tháng 2. Ở vòng này thí sinh phải giải 4 bài toán trong 3 giờ rưỡi, mỗi bài 10 điểm. Từ kết quả thi chọn ra 20 thí sinh xuất sắc nhất. Các em này được gọi tập trung một tuần tại trường đại học Cambridge vào tháng 4. Trong tuần lễ này các em được các giáo sư giỏi giảng dạy, mở rộng nâng cao hiểu biết Toán học, rèn luyện kĩ năng, bản lĩnh giải các bài toán khó. Các buổi học tập với cường độ cao được xen kẽ, kết hợp với các buổi hoạt động văn hóa giải trí, tham quan du lịch ngoài trời.

Kết thúc đợt tập huấn là kì thi chọn đội tuyển quốc gia. Đề thi gồm ba bài toán với thời gian làm bài là 4 tiếng rưỡi. Căn cứ trên kết quả thi này từ 20 em chọn ra đội dự tuyển gồm 8 em. Từ giữa tháng 4 đội dự tuyển lao vào một khóa luyện thi theo hình thức gửi thư. Cứ 10 ngày các em trong đội được giao từ 8-10 bài toán và yêu cầu gửi lời giải vào đúng hạn. Đến cuối tháng 5 dựa trên kết quả học tập của đợt luyện toán này, danh sách 6 em đại diện cho Vương quốc Anh tham dự IMO được chính thức công bố, 6 em trong đội tuyển lại tiếp tục ôn luyện bằng hình thức gửi thư này cho đến đầu tháng 7. Sau đó toàn đội được gọi tập trung 1 tuần, tại trường ĐH Hoàng gia Birmingham để cùng nhau làm các thủ tục chuẩn bị cần thiết cho ngày lên đường dự thi IMO, đồng thời có cơ hội làm quen và hiểu biết lẫn nhau, phát triển tinh thần đồng đội.

TOÁN HỌC VÀ ĐỜI SỐNG

TOÁN HỌC và chiếc cà vạt

PHAN THANH QUANG
(Tp Hồ Chí Minh)

Từ *cà vạt* là cách phát âm Việt hóa của tiếng Pháp cravate, xuất phát từ thế kỉ 17 do các ky sĩ người Croates (Crôatơ) vùng Bancăng thường quấn xung quanh cổ chiếc khăn màu đỏ.

Cho đến nay người ta thường nhắc đến 4 cách thắt cà vạt : thắt kiểu đơn giản, kiểu Windsor, kiểu nửa Windsor, kiểu Pratt. Các kiểu trước do Công tước Windsor tạo ra trong thời gian rồi rãi khi ông nhường ngôi Vua nước Anh năm 1936. Kiểu Pratt mới thịnh hành từ năm 1989 được đưa lên trang đầu tờ báo nổi tiếng New York Times và được xem là một sự kiện mới trong thời trang thế giới.

Câu chuyện chiếc cà vạt bình thường trong đời sống bỗng một ngày được các nhà vật lí Thomas Fink và Yong Mao, làm việc ở Phòng thí nghiệm Cavendish Cambridge nước Anh quan tâm vì đó là một đề tài khoa học vui vui. Thomas Fink kể lại "Có một lúc tôi chú ý đến cà vạt. Càng mầy mò, tôi nghiệm ra rằng có một công thức toán học liên quan đến các cách thắt cà vạt. Công thức đó chưa ai tìm hiểu... Tôi sợ rằng nghiên cứu về cà vạt sẽ bị mọi người cười cho là "trò chơi ngông" của các nhà vật lí, trong khi chính nó là một khía cạnh của một công trình khác, cơ bản hơn". Công trình nghiên cứu của Fink không ngờ về sau lại liên quan đến một vấn đề nghiêm túc trong sinh học, đó là *các kiểu xoắn của prôtêin.*

Yong Mao, một chuyên gia về cấu trúc chất keo và pôlime, cho biết : "Quan hệ giữa đề tài nghiên cứu của tôi và các cách thắt cà vạt thuộc về một ngành của toán học có liên quan đến các quy luật của chất lỏng và chất khí, gọi là quy luật về bước đi ngẫu nhiên". Sự nghiên cứu quy luật này đã được giải Nobel mà một người có công đầu là Pierre Gilles de Gennes.

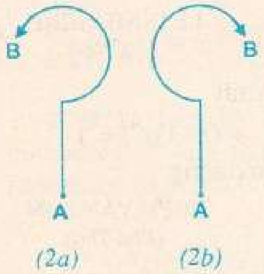
Sự nghiên cứu về các cách thắt cà vạt của Fink và Yong Mao được đăng trên một tạp chí khoa học có uy tín là Nature.

Để tính số các cách thắt cà vạt, hai ông đã mô hình hóa quá trình thắt và biểu diễn các động tác bằng các kí hiệu. Sau khi toán học hóa, mỗi cách thắt cà vạt được biểu diễn thành một công thức. *Trò chơi thắt cà vạt* có thể mô tả như sau :

a) *Cấu tạo.* Khi thắt cà vạt có thể coi đầu nhỏ bản **A** đứng yên còn đầu to bản **B** di chuyển vì nếu khác đi thì chỉ việc xét sự di chuyển của đầu to bản thay cho đầu nhỏ bản theo thứ tự và hướng ngược lại.

Đầu to bản **B** có thể di chuyển tính theo mặt nút tam giác (hình 1) về 3 *phía* : phía trái dưới (*T*), phía phải dưới (*P*), phía giữa trên (*G*) và theo 2 *hướng* : từ ngoài vào trong sát áo (*v*) và từ trong ra ngoài (*r*).

Hình 1



Hình 2

Ở vị trí ban đầu : chiếc cà vạt có hình móc câu, đầu nhỏ **A** quay xuống dưới, đầu to **B** ở vị trí *T* (hình 2a) hoặc *P* (hình 2b).

Ở vị trí cuối cùng : đầu **B** phải di chuyển đến *Gv*, sau đó đầu **B** được luồn qua một giải nằm ngang (mặt nút) đi xuống phía dưới (*D*).

b) *Quy tắc di chuyển của đầu to bản* **B**

(1) Mỗi lần di chuyển của đầu **B** được xác định bởi *1 phía với 1 hướng* xét theo nhánh gần nhất của hình móc câu.

(2) Lần di chuyển tiếp sau của đầu **B** phải *khác phía và ngược hướng* với lần di chuyển liền trước.

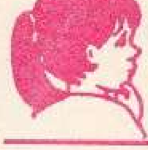
(3) Tồn tại 2 lần di chuyển liên tiếp mà 2 phía có dạng *TP* hoặc *PT* trước lần di chuyển cuối cùng *Gv* (để có giải nằm ngang làm mặt nút)

(4) Số lần di chuyển không vượt quá 8 (điều kiện này tránh làm nút quá dày).

Mỗi cách thắt cà vạt tương ứng với một công thức di chuyển đầu **B**. Bằng cách tổ hợp các lần di chuyển hai ông Fink và Yong Mao đã được tính được 84 cách thắt cà vạt. Chú ý rằng nếu thay thế *T* và *P* cho nhau trong một công thức ta được cách thắt cà vạt "đối xứng" với cách thắt ban đầu. Trò chơi thắt cà vạt trong đời thường hóa ra có liên quan đến việc nghiên cứu *lí thuyết các nút*, một ngành của *lí thuyết tôpô* trong toán học.

Đa số các cách thắt cà vạt tìm được bởi công thức không đạt yêu cầu mĩ thuật, không đẹp vì thiếu tính đối xứng (có thể thấy ở công thức). Hai ông chỉ chọn được 10 cách thắt cà vạt đẹp nhất, nghĩa là ngoài 4 cách thắt đã biết có thể bổ xung thêm 6 cách thắt nữa.

(Xem tiếp trang 23)



ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

T1/271. Cho dãy số (a_n) $(n = 0, 1, 2, ...)$ được xác định bởi $a_o = 9$, $a_{n+1} = 27a_n^{28} + 28a_n^{27}$ với mọi $n = 0, 1, 2, ...$ Chứng minh rằng số a_{11} viết trong hệ thập phân có tận cùng nhiều hơn 2000 chữ số 9.

LÊ ĐÌNH THỊNH
(Hà Nội)

T2/271. Giải phương trình

$$(x-1)^2(1 + 2x + 3x^2 + ... + (n+1)x^n) = 1$$

trong đó n là số nguyên dương

TRIỆU VĂN SƠN
(Phú Thọ)

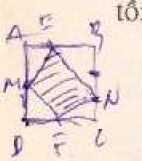
T3/271. Cho các số thực a, b thỏa mãn $a^2 + b^2 \le 1$. Chứng minh rằng

$$(ac + bd - 1)^2 \ge (a^2 + b^2 - 1)(c^2 + d^2 - 1)$$

với mọi số thực c, d.

NGÔ THẾ PHIỆT
(Đà Nẵng)

T4/271. Cho hình vuông $ABCD$. Lấy điểm N trên cạnh BC sao cho $BN = 2NC$. Xét các điểm E và F tương ứng trên các cạnh AB và CD. Tìm điều kiện của biểu thức $AE-DF$ để tồn tại điểm M trên AD sao cho $\dfrac{S_{NEMF}}{S_{ABCD}} = \dfrac{5}{9}$



TRẦN VĂN BÌNH
(Nghệ An)

T5/271. Tìm độ dài nhỏ nhất của cạnh một hình vuông sao cho có thể đặt vào trong nó 5 hình tròn bán kính $r = 1$ mà không có hai hình tròn nào chờm lên nhau.

VŨ ĐÌNH HÒA
(Hà Nội)

CÁC LỚP THPT

T6/271. Tìm điều kiện của m để hệ phương trình sau có nghiệm :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 + xy - yz - zx = 1 \\ y^2 + z^2 + yz = 2 \\ x^2 + z^2 + xz = m \end{cases}$$

ĐOÀN THẾ PHIỆT
(Nam Định)

T7/271. Cho hai số thực dương a, b với $a \le b$. Lập hai dãy số (u_n) và (v_n) $(n = 1, 2, 3, ...)$ như sau :

$$u_1 = a,\ v_1 = b,\ u_{n+1} = 2(u_n + v_n),$$

$$v_{n+1} = \frac{(u_n + v_n)(u_n^2 + v_n^2)}{u_n v_n}$$

với mọi $n = 1, 2, 3, ...$

Chứng minh rằng :

$$4^n(a+b) \le u_{n+1} + v_{n+1} \le 2^{2n+1}\sqrt{ab}\left(\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}\right)^{3^n}$$

DOÃN XUÂN HUY
(Hưng Yên)

T8/271. Xét phương trình $(n > 2)$

$$x^n - x^2 - x - 1 = 0$$

a) Chứng minh rằng với mỗi số nguyên $n > 2$ thì phương trình trên có 1 nghiệm dương duy nhất.

b) Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} n(x_n - 1)$

trong đó x_n là nghiệm dương của phương trình trên.

TRẦN NAM DŨNG
(Tp Hồ Chí Minh)

T9/271. Cho tam giác ABC. Gọi (Q, R) là đường tròn ngoại tiếp và (I, r) là đường tròn nội tiếp tam giác. Gọi d_A, d_B, d_C lần lượt là khoảng cách từ Q tới tâm đường tròn bàng tiếp các góc trong đỉnh A, B, C. Chứng minh rằng

$$d_A^2 + d_B^2 + d_C^2 \ge IA^2 + IB^2 + IC^2 + 3R^2 + 12Rr$$

THÁI VIẾT THẢO
(Nghệ An)

T10/271. Gọi S là diện tích toàn phần của tứ diện $ABCD$. Chứng minh bất đẳng thức :

$$(AB + AC + AD)^2 >$$
$$2S\sqrt{3} + \frac{1}{2}\left((BC-CD)^2+(CD-DB)^2+(DB-BC)^2\right)$$

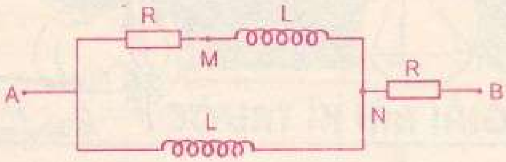
NGUYỄN MINH HÀ
(Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

L1/271. Vật có khối lượng $m = 0,5kg$ được treo vào lò xo có độ cứng $k = 100N/m$ có chiều dài tự nhiên $l_o = 30cm$ và có khối lượng không đáng kể. Một vật nhỏ có khối lượng 100g, bay theo phương ngang với vận tốc $v_o = 6m/s$ tới va chạm đàn hồi với vật m đang ở vị trí cân bằng. Hãy xác định độ cao (so với vị trí cân bằng) của vật m và độ giãn của lò xo khi vật m lên đến điểm cao nhất. Lấy $g = 10\text{m/s}^2$.

LẠI THẾ HIỀN
(Hà Nội)

L2/271. Cho mạch điện xoay chiều như trên hình. L là cuộn dây thuần cảm. Hãy xác định tần số của hiệu điện thế xoay chiều đặt vào 2 điểm A, B để tỉ số hiệu điện thế tức thời $\dfrac{u_{AB}}{u_{MB}}$ là hằng số



NGUYỄN VĂN HẠNH
(Nghệ An)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/271. The sequence of numbers (a_n) $(n = 0, 1, 2, ...)$ is defined by :

$a_0 = 9$, $a_{n+1} = 27a_n^{28} + 28a_n^{27}$ for every $n = 0, 1, 2, ..$

Prove that the number a_{11}, written in the decimal system, ends by at least 2000 digits 9.

T2/271. Solve the equation

$$(x-1)^2(1 + 2x + 3x^2 + ... (n+1)x^n) = 1,$$

where n is a given positive integer.

T3/271. The real numbers a, b satisfy the condition $a^2 + b^2 \le 1$. Prove that

$$(ac + bd - 1)^2 \ge (a^2 + b^2 - 1)(c^2 + d^2 - 1)$$

for all real numbers c, d.

T4/271. Let be given a square $ABCD$. Take the point N on the side BC such that $BN = 2NC$. Consider arbitrary points E and F respectively on the sides AB and CD. Find the conditions to put on the expression $AE - DF$ in order that there exists a point M on AD such that $\dfrac{S_{NEMF}}{S_{ABCD}} = \dfrac{5}{9}$.

T5/271. Find the least measure of a side of a square that can contain 5 circles of radius $r = 1$ with no overlapping.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/271. Find the conditions to put on m in order that the following system of equations has a solution :

$$\begin{cases} x^2+y^2-z^2+xy-yz-zx = 1 \\ x^2+z^2+yz = 2 \\ x^2+z^2+xz = m \end{cases}$$

T7/271. Let be given two positive real numbers a, b such that $a \le b$. Construct the two sequences (u_n) and (v_n) $(n = 1, 2, 3, ...)$ defined by :

$$u_1 = a,\ v_1 = b,\ u_{n+1} = 2(u_n + v_n)$$

$$v_{n+1} = \frac{(u_n + v_n)(u_n^2 + v_n^2)}{u_n v_n}$$

for every $n = 1, 2, 3...$

Prove that :

$$4^n(a + b) \le u_{n+1} + v_{n+1} \le 2^{2n+1}\sqrt{ab}\left(\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}\right)^{3^n}$$

for every $n = 1, 2, 3, ...$

T8/271. Consider the equation $(n > 2)$

$$x^n - x^2 - x - 1 = 0$$

a) Prove that for every integer $n > 2$, it has a unique positive root.

b) Find $\lim\limits_{n \to \infty} n(x_n - 1)$, where x_n is the just mentioned positive root.

T9/271. Let be given a triangle ABC with circumcircle (O, R) and incircle (I, r). Let d_A, d_B, d_C be respectively the distances from O to the centers of the escribed circles in the angles A, B, C. Prove that :

$$d_a^2 + d_B^2 + d_C^2 \ge IA^2 + IB^2 + IC^2 + 3R^2 + 12Rr.$$

T10/271. Let S be the total area of the tetrahedron $ABCD$. Prove the inequality

$$(AB+AC+AD)^2 > 2S\sqrt{3} + \frac{1}{2}\left((BC-CD)^2 + (CD-DB)^2 + (DB-BC)^2\right)$$

Bài T1/267. *Có thể thêm bao nhiêu chữ số 0 xen giữa chữ số 6 và 8 của số 1681 (1681 = 41^2) để số mới tạo thành cũng là số chính phương ?*

Lời giải. *Cách 1.* (của *Trần Thanh Hải*, 9C, THCS Việt Trì, **Phú Thọ**). Gọi số chữ số 0 có thể viết để thỏa mãn đề bài là n ($n \in N^*$), ta có

$$16.10^{n+2} + 81 = k^2\ (k \in N^*) \qquad (1)$$

Ta thấy ngay k là số lẻ. Đặt $k = 2a + 1$ ($a \in N$)

Từ (1) ta có :

$$2^{n+6}.5^{n+2} = (2a-8)(2a+10)$$

hay $2^{n+4}.5^{n+2} = (a-4)(a+5)$ (2)

Dễ thấy $(a-4)$ và $(a+5)$ không cùng tính chẵn lẻ và $(a+5) > (a-4)$. Vậy từ (2) có thể suy ra các trường hợp :

$$(*)\ \begin{cases} a-4 = 1 \\ a+5 = 2^{n+4}.5^{n+2} \end{cases}$$

hoặc $(**)\ \begin{cases} a-4 = 2^{n+4} \\ a+5 = 5^{n+2} \end{cases}$

Ta thấy ngay hệ (*) vô nghiệm

Từ (**) ta có :

$(a+5) - (a-4) = 9 = 5^{n+2} - 2^{n+4}$ suy ra $n = 0$

Vậy ta không thể viết thêm một chữ số không nào vào giữa chữ số 6 và 8 của số 1681 để số mới tạo thành là một số chính phương.

Cách 2. (của *Phùng Văn Doanh*, 9D, THCS Ngô Đồng, Giao Thủy, **Nam Định**). Giả sử có thể thêm n ($n \in N$) chữ số 0 xen giữa chữ số 6 và 8 của số 1681 để số mới cũng là số chính phương, ta có

$$16.10^{n+2} + 81 = a^2 \Rightarrow a^2 > 16.10^{n+2}$$

$$\Rightarrow a \geq 4\sqrt{10^{n+2}} + 1$$

$$\Rightarrow 16.10^{n+2} + 81 \geq 16.10^{n+2} + 8\sqrt{10^{n+2}} + 1$$

$$\Rightarrow 80 \geq 8\sqrt{10^{n+2}}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $n = 0$

Nhận xét. Hầu hết các lời giải gửi đến đều đúng nhưng hơi dài. Các bạn dưới đây có lời giải tốt :

Bắc Ninh: *Đặng Thành Long*, 9A, THCS Yên Phong; **Phú Thọ:** *Hoàng Ngọc Minh*, 9C, THCS Việt Trì; **Vĩnh Phúc:** *Hoàng Minh Châu*, 8A, THCS Vĩnh Tường; **Hà Nội:** *Nguyễn Hà Khánh*, 9A1, THCS Láng Thượng, Đống Đa; **Hưng Yên:** *Doãn Kim Huế*, 6C, THCS Phạm Huy Thông, Ân Thi; **Thanh Hóa:** *Đỗ Cao Sơn*, 8B, Lê Quý Đôn, Bỉm Sơn ; **Quảng Ngãi:** *Lê Kim Phượng*, 9A, THCS Nguyễn Nghiêm, Đức Phổ; **Khánh Hòa:** *Trần Minh Bình*, 9^{15}, THCS Thái Nguyên, Nha Trang; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** *Trần Đức Thuận*, 9A2, Phước Hòa, Tân Thành

TỐ NGUYÊN

Bài T2/267. *Giải phương trình*

$$\sqrt{5x^2+14x+9} - \sqrt{x^2-x-20} = 5\sqrt{x+1}$$

Lời giải. Từ $x+1 \geq 0$, $5x^2+14x+9 = (x+1)(5x+9) \geq 0$, $x^2-x-20 = (x+4)(x-5) \geq 0$ suy ra điều kiện để phương trình có nghĩa là $x \geq 5$.

Chuyển vế rồi bình phương 2 vế của phương trình mới được : $(x+1)(5x+9) =$

$$= x^2 + 24x + 5 + 10\sqrt{(x+4)(x-5)(x+1)} \qquad (1)$$

Cách 1. (của bạn Vũ Mỹ Hoa)

$$(1) \Leftrightarrow (x+1)[2(x-5)+3] + 9 = 5\sqrt{(x+4)(x-5)(x+1)} \qquad (2)$$

Đặt $x+1 = a$ và $x-5 = b$ thì

$(2) \Leftrightarrow 2ab + 3(a+3) - 5\sqrt{ab(a+3)} = 0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{ab} - \sqrt{a+3})(2\sqrt{ab} - 3\sqrt{a+3}) = 0$

a) $\sqrt{ab} = \sqrt{a+3} \Leftrightarrow x^2 - 5x - 9 = 0$

Kết hợp với $x \geq 5$ được nghiệm

$$x_1 = \frac{5+\sqrt{61}}{2}$$

b) $2\sqrt{ab} = 3\sqrt{a+3}$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 25x - 56 = 0$

Kết hợp với $x \geq 5$ được nghiệm $x_2 = 8$.

Thử lại thấy 2 nghiệm trên thỏa mãn đề bài.

Cách 2. $(1) \Leftrightarrow 2(x^2-4x-5) + 3(x+4) - 5\sqrt{(x^2-4x-5)(x+4)} = 0$ (3)

Đặt $\sqrt{x^2-4x-5} = u$ và $\sqrt{x+4} = v$ với $u, v \geq 0$ thì $(3) \Leftrightarrow 2u^2 + 3v^2 - 5uv = 0$

$\Leftrightarrow (u-v)(2u-3v) = 0$

a) $u = v \Leftrightarrow x^2 - 5x - 9 = 0$

b) $2u = 3v \Leftrightarrow 4x^2 - 25x - 56 = 0$

Giải tương tự trên được hai nghiệm thỏa mãn đề bài là $x_1 = \dfrac{5+\sqrt{61}}{2}$, $x_2 = 8$.

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải đúng và đầy đủ.

Phú Yên: *Hồ Hoàng Chinh*, 8A, THCS Lương Thế Vinh, *Đàm Văn Thành*, 9C, THCS Hoàng Hoa Thám, Tuy Hòa, *Huỳnh Phi Hùng*, 9G, THCS Trần Quốc

Toản, Tuy Hòa; **Hải Dương:** *Hoàng Trung Tú, Nguyễn Thành Nam, Nguyễn Thành Trung, Phạm Thành Trung, Lê Quang Hòa*, 9A, PTCS Nguyễn Trãi; **Thái Bình:** *Đỗ Xuân Diễn*, 9C, THCS Thái Thọ, Thịnh Thái; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Trung Hiếu*, 9C, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ; **Bắc Giang:** *Vũ Mỹ Hoa*, 9A, PTCS Việt Yên; **Hà Tây:** *Phan Anh Dũng*, 9b, THCS Kiều Phú, Quốc Oai; **Phú Thọ:** *Vũ Thị Thu Hiền, Hoàng Ngọc Minh*, 9C, THCS Việt Trì, *Nguyễn Công Sơn*, $9A_1$, THCS Phong Châu; **Hà Nội:** *Vũ Xuân Tùng, Nguyễn Anh Tôn*, 9T, Ngô Sĩ Liên; **Nghệ An:** *Đinh Viết Sang*, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Quan Minh Vương*, 9B, C2 Sông Hiếu, Thái Hòa, Nghĩa Đàn; **Khánh Hòa:** *Trần Minh Bình*, 9^{15}, THCS Thái Nguyên, Nha Trang; **Hải Phòng:** *Bùi Văn Tuấn*, 9A, THCS Tự Cường, Tiên Lãng; **Hưng Yên:** *Doãn Thị Kim Huế*, THCS Phạm Huy Thông, Ân Thi; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Văn Phúc*, 9B, THCS Bình Hải, Bình Sơn.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T3/267. *Chứng minh rằng :*

$$\frac{1}{a+3b}+\frac{1}{b+3c}+\frac{1}{c+3a}\geq \frac{1}{a+2b+c}+\frac{1}{b+2c+a}+\frac{1}{c+2a+b}$$

trong đó a, b, c là các số dương. Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải. Với $x, y > 0$ ta có :

$$(x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow (x+y)^2 \geq 4xy$$

$$\Rightarrow \frac{x+y}{xy} \geq \frac{4}{x+y} \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

Vì $a, b, c > 0$ nên áp dụng kết quả trên ta lần lượt có :

$$\frac{1}{a+3b}+\frac{1}{b+2c+a}\geq \frac{4}{(a+3b)+(b+2c+a)}=\frac{2}{a+2b+c} \quad (1)$$

$$\frac{1}{b+3c}+\frac{1}{c+2a+b}\geq \frac{2}{b+2c+a} \quad (2)$$

$$\frac{1}{c+3a}+\frac{1}{a+2b+c}\geq \frac{2}{c+2a+b} \quad (3)$$

Cộng từng vế của (1), (2), (3) ta được điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a+3b=b+2c+a \\ b+3c=c+2a+b \\ c+3a=a+2b+c \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c.$$

Nhận xét. 1) Hầu hết các bạn đều có lời giải như trên. Một vài bạn giải hơi phức tạp vì chia ra nhiều trường hợp và biến đổi dài dòng. Có bạn tổng quát hóa bài toán nhưng chưa thật "thú vị".

2) Các bạn có lời giải trình bày tốt là :

Vĩnh Phúc: *Hoàng Thị Phượng*, 9A, THCS Vĩnh Tường; *Dương Công Minh*, 9B, THCS Yên Lạc; **Phú Thọ:** *Vũ Văn Trung*, 9C, THCS Việt Trì; *Nguyễn Tuyết Trang*, 9A1, THCS Phong Châu; **Hải Dương:** *Lê Anh Thùy*, 8A, *Nguyễn Thanh Hoàn*, 9A, THCS Nguyễn Trãi; **Nghệ An:** *Võ Văn Thành*, 9B, *Trung Tuấn Dũng*, 8B, THCS Đặng Thai Mai; *Nguyễn Thị Dung*, 8A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Hà Nội:** *Nguyễn Ngọc Diệp*, 9 bổ túc, 29 ngõ 105, Bạch Mai, *Đặng Quang Khải*, 9A1, PTDL Lương Thế Vinh; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Thu Thảo*, 9C, THCS Nghĩa dũng; *Nguyễn Duy Thành*, 9A trọng điểm Nghĩa Hành; **Khánh Hòa:** *Nguyễn Tiến Việt, Trần Thiên Ân*, 8/13, THCS Thái Nguyên; **Đồng Tháp:** *Lê Thanh Nhàn, Nguyễn Công Thắng, Hoàng Công Thiện*, 9A1, THCB thị xã Cao Lãnh; **Hải Phòng:** *Nguyễn Việt Hòa*, 9A, THCS Hồng Bàng, *Bùi Văn Tuấn*, 9A, THCS Tự Cường; **Bắc Giang:** *Trịnh Văn Tào*, 9b, THCS Đồng Sơn, Yên Dũng; **Hà Tây:** *Phan Anh Dũng*, 9B, THCS Kiều Phú, Quốc Oai; **Ninh Bình:** *Đinh Quyết Tiến*, 9D, THCS thị trấn Yên Ninh, Yên Khánh; **Hà Nam:** *Bùi Công Tùng*, 9B, THCS Trần Phú, Phủ Lý; **Đồng Nai:** *Trần Võ Huy*, 9/3, THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, Biên Hòa...

LÊ THỐNG NHẤT

Bài T4/267. *Các trung tuyến AM, CN của ΔABC cắt nhau tại G. Chứng minh rằng tứ giác BMGN ngoại tiếp khi và chỉ khi ΔABC cân tại B.*

Lời giải. • Giả sử tứ giác BMGN là ngoại tiếp. Giả sử $\hat{A} > \hat{C}$, suy ra

$AM < CN$ và $AB < BC$. Từ đó

$$NG + BM = \frac{1}{3}NC+\frac{1}{2}BC > \frac{1}{3}AM+\frac{1}{2}AB = GM + NB.$$ Mâu thuẫn.

Tương tự $\hat{A} < \hat{C}$ cũng mâu thuẫn với giả thiết. Vậy $\hat{A} = \hat{C}$ tức ΔABC cân tại B.

• Đảo lại, giả sử ΔABC cân tại B suy ra $NC=AM$ và $AB=BC$, nên $NG=MG$ và $BM=BN$. Do đó $NG+BM = MG+BN$ tức tứ giác $BMGN$ ngoại tiếp.

Nhận xét. Nhiều bạn giải đúng bài này. Giải đúng và gọn là các bạn : **Quảng Ninh:** *Đinh Trọng Chính*, 8A2, THCS Trần Quốc Toản, Uông Bí; **Hải Phòng:** *Nguyễn Việt Hòa, Nguyễn Diệu Ly*, 9A, Hồng Bàng; **Hà Tây:** *Phạm Tuấn*, 9A, THCS Thạch Thất; **Phú Thọ:** *Đinh Thái Sơn*, 9C, THCS Việt Trì; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Tuấn Học*, 9B, THCS Yên Lạc, *Vũ Nhật Huy*, 9A THCS Vĩnh Tường; **Bắc Ninh:** *Đặng Thành Long*, 9A, THCS Yên Phong; **Hải Dương:** *Nguyễn Thành Trung*, THCS Nguyễn Trãi; **Hà Nội:** *Lê Ngọc Sơn*, 9A1, THCS Phan Chu Trinh; **Nam Định:** *Đỗ Thị Hải*

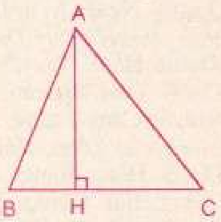
Yến, 9B, THCS Đặng Thai Mai, Vinh; **Quảng Nam:** *Đặng Quang Huy*, 9A, THCS Lương Thế Vinh; **Tây Ninh** : *Đào Duy Bình*, 9A1, THCS Thị trấn Dương Minh Châu

VŨ KIM THỦY

Bài T5/267. *Cho tam giác ABC với độ dài các cạnh là a, b, c và diện tích S. Chứng minh rằng :* $S \le \frac{1}{16}(3a^2 + 2b^2 + 2c^2)$

Đẳng thức xảy ra khi nào ? Có thể tìm được các hệ số khác của a, b, c để bất đẳng thức vẫn xảy ra không ?

Lời giải. (của bạn *Đỗ Thị Hải Yến*, 9B, THCS Hải Hậu, **Nam Định**)



Hình 1

Đặt $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Gọi H là hình chiếu của A trên BC (h.1). Ta có :

$3a^2 + 2b^2 + 2c^2$

$= 3a^2 + 2(HC^2 + HA^2) + 2(HB^2 + HA^2)$

$= 3a^2 + 2(HC^2 + HB^2) + 4HA^2$

$\ge 3a^2 + (HC + HB)^2 + 4HA^2$

$\ge 3a^2 + a^2 + 4HA^2 = 4(a^2 + HA^2) \ge 8a.HA = 16S$

Vậy : $3a^2 + 2b^2 + 2c^2 \ge \frac{1}{16} S$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} HB = HC \\ H \in \text{đoạn } BC \\ HA = a \end{cases}$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ cân tại A và đường cao $HA = a$

$\Leftrightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{\sqrt{5}} = \frac{c}{\sqrt{5}}$ (định lí Pitago)

Để giải quyết câu hỏi cuối cùng của bài toán, ta phát biểu và giải bài toán sau :

Bài toán: *Cho tam giác ABC với độ dài 3 cạnh là a, b, c và diện tích S. Với ba số x, y, z thỏa mãn điều kiện* $\sqrt{y+z}$, $\sqrt{z+x}$, $\sqrt{x+y}$ *có nghĩa và là độ dài ba cạnh của một tam giác nào đó, chứng minh rằng :*

$xa^2 + yb^2 + zc^2 \ge 4\sqrt{yz + zx + xy}\, S$

Khi nào xảy ra đẳng thức ?

Giải. Trước hết ta chứng minh một nhận xét

Nhận xét. Nếu $\sqrt{y+z}$, $\sqrt{z+x}$, $\sqrt{x+y}$ có nghĩa và là độ dài ba cạnh của một tam giác thì :

$$yz + zx + xy > 0$$

Chứng minh. Nếu x, y, z dương thì ta có ngay $yz + zx + xy > 0$

Nếu trong ba số x, y, z có một số không dương. Giả sử $x \le 0$ thì theo giả thiết :

$\sqrt{z+x} + \sqrt{x+y} > \sqrt{z+y}$

$\Rightarrow 2x + z + y + 2\sqrt{(z+x)(x+y)} > z + y$

$\Rightarrow \sqrt{(z+x)(x+y)} > -x$

$\Rightarrow x^2 + yz + zx + xy > x^2$

$\Rightarrow yz + zx + xy > 0$

Nhận xét đã được chứng minh.

Trở lại bài tóan của ta. Vì $y + z > 0$; $z + x > 0$; $x + y > 0$ nên trong ba số x, y, z không thể có hai số không dương. Vậy, không mất tính tổng quát giả sử $y > 0$, $z > 0$ và $y + z = \max\{y+z, z+x, x+y\}$. Gọi H là hình chiếu của A trên BC thì $HB + HC \ge BC$. Ta có :

$xa^2 + yb^2 + zc^2 =$

$= xBC^2 + y(HC^2 + HA^2) + z(HB^2 + HC^2)$

$= xBC^2 + (y+z)AH^2 + (yHC^2 + zHB^2) \quad (*)$

Áp dụng BĐT Bunhiacốpxki, ta có :

$yHC^2 + zHB^2 =$

$= \frac{yz}{y+z}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right)^2\right)\left((\sqrt{y}HC)^2 + (\sqrt{z}HB)^2\right)$

$\ge \frac{yz}{y+z}(HC + HB)^2 = \frac{yz}{y+z}BC^2.$

Thay vào (*) được :

$xa^2 + yb^2 + zc^2 \ge \left(x + \frac{yz}{y+z}\right)BC^2 + (y+z)AH^2$

$= \frac{yz + zx + xy}{y+z}BC^2 + (y+z)AH^2$

$\ge 2\sqrt{yz + zx + xy}\, BC.AH$

$= 4\sqrt{yz + zx + xy}\, S$

Vậy : $xa^2 + yb^2 + zc^2 \ge 4\sqrt{yz + zx + xy}\, S$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi :

$\Leftrightarrow \begin{cases} yHC = zHB \\ H \text{ thuộc đoạn } BC \\ \sqrt{\frac{yz + zx + xy}{y+z}}\, BC = \sqrt{y+z}\, AH \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} HC = \frac{z}{y+z} BC \\ HB = \frac{y}{y+z} BC \\ HA = \frac{\sqrt{yz+zx+xy}}{y+z} BC \end{cases} \quad (**)$

$$\Rightarrow \begin{cases} HC^2 + HA^2 = \dfrac{x+z}{y+z}BC^2 \\ HB^2 + HA^2 = \dfrac{x+y}{y+z}BC^2 \end{cases} \quad (***)$$

Chú ý rằng : $y + z = \max\{y+z,\ z+x,\ x+y\}$ nên từ hệ (***) suy ra

$\begin{cases} HC < BC \\ HB < BC \end{cases} \Rightarrow H$ thuộc đoạn BC. Từ đó $HB + HC = BC$ nên (***) $\Rightarrow$ (**)

Vậy : Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} AC^2 = \dfrac{x+z}{y+z}BC^2 \\ AB^2 = \dfrac{x+y}{y+z}BC^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{y+z}} = \frac{b}{\sqrt{z+x}} = \frac{c}{\sqrt{x+y}}$$

Nhận xét. 1) Bài này có 36 bạn tham gia giải. 2 bạn giải sai. Ngoài cách giải của bạn *Hải Yến*, một số bạn khác cũng cho lời giải tốt nhờ công thức biểu diễn độ dài đường trung tuyến qua ba cạnh của tam giác. Một vài bạn khác dùng công thức Hêrông tuy nhiên biến đổi hơi dài (có bạn quá dài).

2) Không bạn nào trả lời được triệt để câu hỏi cuối cùng của bài toán. Thực ra để đi đến bất đẳng thức

$$xa^2 + yb^2 + zc^2 \geq 4\sqrt{yz+zx+xy}\ S$$

là một yêu cầu quá cao đối với các bạn.

3) Các bạn sau đây có lời giải tốt : **Tp Hồ Chí Minh:** *Trần Vĩnh Hưng*, 10T, PTNK, ĐHQG Tp Hồ Chí Minh; **Hải Phòng:** *Nguyễn Hải Tùng*, 9T, THCS Chu Văn An, Ngô Quyền; **Nghệ An:** *Võ Văn Thành*, 9B, THCS Đặng Thai Mai, Vinh, Ninh Bình, *Phạm Quang Huy*, 9T, THCS Yên Khánh; **Hải Dương:** *Nguyễn Tuấn Đạt*, 9A, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách; **Phú Thọ:** *Hoàng Ngọc Minh*, 9C, THCS Việt Trì; **Vĩnh Phúc:** *Vũ Nhật Huy*, 9A, THCS Vĩnh Tường.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài T6/267. *Giải phương trình*

$$(1 + \cos x)(2 + 4^{\cos x}) = 3.4^{\cos x}.$$

Lời giải. (của đa số các bạn)

Đặt $\cos x = y$, $-1 \leq y \leq 1$. Theo bài ra ta có phương trình

$$(1 + y)(2 + 4^y) = 3.4^y,$$

hay $f(y) = 0$ với $f(y) = \dfrac{3.4^y}{2 + 4^y} - y - 1$

Ta có : $f'(y) = \dfrac{6.\ln 4.4^y}{(2 + 4^y)^2} - 1.$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6\ln 4.4^y = (2 + 4^y)^2$. Đây là phương trình bậc hai theo 4^y, nên có không quá 2 nghiệm. Vậy theo Định lí Rolle thì phương trình $f(y) = 0$ có không có quá 3 nghiệm. Mặt khác ta thấy $y = 0$, $y = \dfrac{1}{2}$, $y = 1$ là 3 nghiệm của $f(y) = 0$. Suy ra phương trình đã cho có các nghiệm tương ứng $x = 2k\pi$, $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$,

$x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ $(k \in Z)$

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt :

An Giang: *Nguyễn Anh Tuấn*, 12TL, PTTH Thoại Ngọc Hầu, Long Xuyên; **Bình Dương:** *Nguyễn Tiến Hùng*, 11T, Hùng Vương; **Đắc Lắc:** *Đặng Ngọc Châu*, 11T1, chuyên Nguyễn Du, Tp Buôn Ma Thuột; **Kon Tum:** *Hoàng Phi Dũng*, 11A1, PTTH CB Kon Tum; **Hà Nam:** *Nguyễn Thanh Hải* và *Nguyễn Trung Hiếu*, 11A1, THCB Hà Nam; **Hải Dương:** *Tô Minh Hoàng*, *Phạm Ngọc Lợi*, *Nguyễn Việt Đức*, *Hoàng Thị Nguyệt Ánh*; **Hà Nội:** *Đỗ Đình Cường* ; *Nguyễn Tuấn Anh*, Đặng Lộc; *Nguyễn Tuấn Dương*, *Trần Tất Đạt*, *Vũ Thái Sơn*, *Ngô Quốc Anh*; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Thừa Thắng* ; **Ninh Bình:** *Ngô Văn Giang*, 11B7, PTTH Tam Điệp. **Huế:** *Trần Đình Khiêm*, Ngọc Diên;**Quảng Nam:** *Trần Công Linh*, 11A7, THCB Nguyễn Duy Hiệu, huyện Điện Bàn; **Quảng Ngãi:** *Lương Hữu Thuận;* **Quảng Trị:** *Bạch Ngọc Đức*, *Trần Văn Cương*...

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T7/267. *Cho các số thực x, y, z thỏa mãn :*

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 1 \\ y^2 + 2y(x + z) = 6 \end{cases}$$

Chứng minh rằng : $y(z - x) \leq 4$.

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải. *Cách 1.* (của bạn Hoàng Thị Phượng, 9A, THCS Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc** và một số bạn).

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacốpxki ta có

$(y(z - x))^2 = ((-x)(y+2z) + z(2x+y))^2$

$\leq ((-x)^2 + z^2)((y+2z)^2 + (2x+y)^2)$

$= 2(x^2+z^2)(y^2 + 2y(x+z) + 2(x^2+z^2))$

$= 2.1.(6+2) = 16$. Do đó $y(z-x) \leq 4$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x^2+z^2=1 \\ z(y+2z)+x(2x+y)=0 \\ y(z-x)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+z^2=1 \\ y(z+x)=-2 \\ y(z-x)=4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+z^2=1 \\ y(z+x)=-2 \\ z-x=-2(z+x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+z^2=1 \\ y(z+x)=-2 \\ x=-3z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=\dfrac{1}{\sqrt{10}};\ x=-\dfrac{3}{\sqrt{10}};\ y=\sqrt{10} \\ z=-\dfrac{1}{\sqrt{10}};\ x=\dfrac{3}{\sqrt{10}};\ y=-\sqrt{10}. \end{array} \right. \qquad (*)$$

Cách 2. (của nhiều bạn)

Từ giả thiết ta có $y \neq 0$ và $x + z = \dfrac{6-y^2}{2y}$

Suy ra

$$y^2(z-x)^2 = y^2(2(z^2+x^2)-(z+x)^2)$$

$$= y^2\left(2-\frac{(6-y^2)^2}{4y^2}\right) = \frac{8y^2-(6-y^2)^2}{4}$$

$$= 16 - \frac{(y^2-10)^2}{4} \leq 16$$

Do đó $y(z-x) \leq 4$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x^2+z^2=1 \\ y^2+2y(x+z)=6 \\ y^2=10 \\ y(z-x)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \qquad (*)$$

Nhận xét. 1) Tòa soạn nhận được lời giải của 269 bạn và phần lớn các bạn giải theo cách 2.

2) Hai bạn *Phạm Gia Vĩnh Anh* và *Vũ Ngọc Minh*, 10A1, PTCTT, ĐHSP **Hà Nội** đã phát biểu và chứng minh bài toán tổng quát :

Cho a, b là các số thực dương. x, y, z là các số thực thỏa mãn $\begin{cases} x^2+z^2=b \\ y^2+(a-b)y(x+z)=2ab^2. \end{cases}$

Chứng minh $\quad y(z-x) \leq (a+b)b$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$x = \pm\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a^2+b^2}},\ z = \mp\frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$y = \mp\sqrt{b(a^2+b^2)}.$$

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T8/267. *Cho dãy số (u_n) $(n = 0, 1, 2...)$ được xác định bởi :*

$u_0 = 3$, $u_1 = 11$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 7u_n$ với $n = 0, 1, 2, ...$

Tìm các số nguyên dương lẻ a sao cho với các số nguyên dương m và n tùy ý luôn tìm được số nguyên dương k thỏa mãn $u_n^k - a \,\vdots\, 2^m$.

Lời giải. (của bạn *Vũ Thành Long*, lớp 10A1, PTCT ĐHSP Hà Nội)

Bằng quy nạp dễ dàng chứng minh được $u_n \equiv 3 \pmod 8$

Điều kiện cần : Chọn $n = 1$, $m = 3$ thì $\exists k$ sao cho

$$11^k \equiv a \pmod 8 \Leftrightarrow 3^k \equiv a \pmod 8$$

Vì $3^k \equiv 1$ hoặc $3^k \equiv 3 \pmod 8$ do đó $a \equiv 1$ hoặc $a \equiv 3 \pmod 8$.

Điều kiện đủ : Giả sử $a \equiv 1$ hoặc $a \equiv 3 \pmod 8$. Với $m = 1$ chọn $k = 1$, với $m = 2, 3$ chọn k chẵn nếu $a \equiv 1 \pmod 8$ và chọn k lẻ nếu $a \equiv 3 \pmod 8$.

Xét $m \geq 3$. Ta chứng minh bằng quy nạp theo m. Với $m = 3$ đúng. Giả sử khẳng định đúng với m : tồn tại k_m sao cho $u_n^{k_m} - a = 2^m b$.

Nếu b chẵn thì $u_n^{k_m} - a \equiv 0 \pmod{2^{m+1}}$ do đó chọn $k_{m+1} = k_m$. Nếu b lẻ ta chọn $k_{m+1} = k_m + 2^{m-2}$. Khi đó

$$u_n^{2^{m-2}} - 1 = (u_n-1)(u_n+1)(u_n^2+1)\ldots(u_n^{2^{m-3}}+1)$$

$$= 2^m q_m \text{ với } q_m \text{ lẻ}$$

bởi vì $u_n^2 - 1 = (u_n - 1)(u_n + 1) = 8q$ (q lẻ)

thành thử

$$u_n^{k_{m+1}} - a = u_n^{2^{m-2}}(u_n^{k_m} - a) + a(u_n^{2^{m-2}} - 1)$$

$$= 2^m\left[u_n^{2^{m-2}} b + aq_m\right] \,\vdots\, 2^{m+1}.$$

Nhận xét. Ngay trước khi đính chính đề, một số bạn (như bạn Nguyễn Ngọc Huy, 12 Toán, PTNK ĐHQG TP Hồ Chí Minh, *Trần Duy Dương*, 10T, Hà Nội - Amsterdam, **Hà Nội**) đã phát hiện thấy và đã chứng minh chỉ với các số $a \equiv 1$ hoặc $3 \pmod 8$ thì kết luận bài toán mới đúng. Một số bạn khác đã chứng minh không chặt chẽ rằng kết luận bài toán đúng cho mọi số a lẻ ! (như đề toán chưa đính chính)

Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Nguyễn Anh Linh*, 12A, ĐHKHTN–ĐHQG, *Phạm Gia Vĩnh Anh*, 10A1, ĐHSP, *Bùi Đức Hiệp*, 10P, Marie, Curie, **Hà Nội**; *Phạm Hồng Quân*, 12T, PTTH Nguyễn Trãi, **Hải Dương**; *Nguyễn Xuân Trọng*, 12A, *Trịnh Quốc Khánh*, 12A1, PTTH chuyên Vĩnh Phúc; *Đinh Thanh Thường*, 10A, Vinh, **Nghệ An**.

Bạn *Đào Văn Sáng*, 11T, PTNK **Hưng Yên** nhận xét đúng rằng bài toán này là sự tổng quát bài toán số 5 thi HS giỏi quốc gia năm học 96-97.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

T9/267. *Cho tam giác ABC. Trên tia đối của tia CA lấy điểm D sao cho CD = CB. Lấy điểm E sao cho AE = AB, $\angle BAE = \angle BCA$ và đường thẳng AB cắt đoạn thẳng DE tại điểm M nào đó. Chứng minh rằng M là trung điểm của DE khi và chỉ khi $\angle ACB = 2\angle BAC$.*

Lời giải. *Cách 1.* (*Hàn Thế Anh*, 11A1, CT, ĐHSP **Hà Nội**, *Phạm Tuấn Anh*, 11 Toán, ĐHKHTN, **Tp Hồ Chí Minh**; *Đỗ Mạnh Tùng*, 11A3, PTTH chuyên **Vĩnh Phúc**; *Phạm Hồng Quân*, 12 Toán, PTTH Nguyễn Trãi, **Hải Dương** và nhiều bạn khác).

Đặt : $BC = a$, $CA = b$, $AE = AB = c$, $\angle BAC = A$, $\angle ACB = C$; Thế thì dễ thấy rằng M là trung điểm của DE khi và chỉ khi $S_{AMD} = S_{AME}$ và do đó, ta được

$\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{ME} \Leftrightarrow AM.AD\sin A = AM.AE\sin C$

$\Leftrightarrow (a+b)\sin A = c\sin C$

$\Leftrightarrow (\sin A + \sin B)\sin A = \sin^2 C$

$\Leftrightarrow \sin A\sin B = \sin^2 C - \sin^2 A$

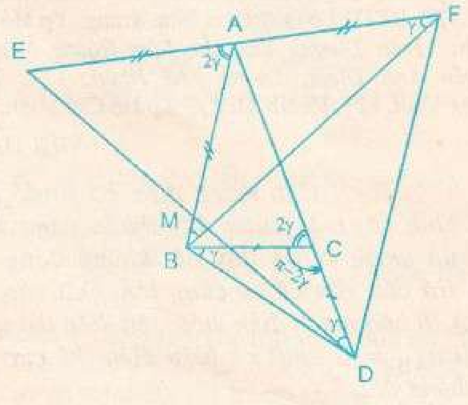
$\Leftrightarrow \sin A\sin B = (\sin C + \sin A)(\sin C - \sin A)$

$\Leftrightarrow \sin A\sin B = \sin(C+A)\sin(C-A)$

$\Leftrightarrow \sin A = \sin(C-A)$

$\Leftrightarrow A = C-A \Leftrightarrow 2A = C$

(Trường hợp $C - A = \pi - A$ không xảy ra vì $c < \pi$)



Cách 2. (Dựa theo *Ngô Quốc Anh*, 11A, PTCT ĐHKHTN, ĐHQG **Hà Nội**; *Nguyễn Hải Viễn*, 11T, PTTH chuyên Lê Khiết, **Quảng Ngãi**)

Tóm tắt cách giải bằng phép dời hình :

Đặt $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 2\gamma$ và $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) = \beta$. Xét các phép quay tâm A và tâm C như sau : $Q_A^{2\gamma} : E \mapsto B$ và $Q_C^{\beta} : B \mapsto D$. Vì $2\gamma + \beta = \pi$ nên tích hai phép quay trên $Q_C^{\beta} \circ Q_A^{2\gamma} : E \mapsto D$ là phép đối xứng tâm với tâm P là trung điểm của DE. Từ đó $M \equiv P \Leftrightarrow 2\angle BAC = \angle ACB$.

Cách 3. (*Vũ Thái Sơn*, 11A, ĐHKHTN–ĐHQG **Hà Nội** và một số bạn khác). Gọi F là điểm đối xứng của E qua A :

Đặt $\angle BAE = \angle ACB = 2\gamma$, sử dụng định lí góc ngoài của tam giác ta được : $\angle CBD = \angle CDB = \angle ABF = \angle AFB = \gamma$, và do đó $\angle AFB = \angle ADB$ $(= \gamma)$. Suy ra $ABDF$ là một tứ giác nội tiếp, và ta được : $\angle BAD = \angle BFD$, nghĩa là : $\angle BAC = \angle BFD$. Từ đó suy ra :

$\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{ME}$

$\Leftrightarrow AM // FD$, tức là $AB // DF$

$\Leftrightarrow \angle AFD = \angle EAB\ (= 2\gamma)$

$\Leftrightarrow \angle BFD = \gamma$

$\Leftrightarrow \angle BAC = \gamma = \frac{1}{2}\angle ACB$

$\Leftrightarrow \angle ACB = 2\angle BAC$; (đpcm)

Nhận xét. 1) Ngoài ba lời giải nêu trên, nhiều bạn đưa ra lời giải tương tự lời giải 3, đơn thuần chỉ sử dụng kiến thức hình học lớp 8 và 9: Từ D kẻ đường thẳng $//AE$, cắt (AB) ở G rồi suy ra $BCDG$ là một tứ giác nội tiếp.

2) Đa số các bạn tính toán hoặc lập luận dài dòng, không gọn vì không biết chứng minh gộp hai phần thuận đảo. Bạn *Kim Đình Thái*, 10A2, ĐHSP **Hà Nội** đưa ra 5 lời giải khác nhau.

3) Các bạn sau đây có lời giải tốt (ngoài các bạn đã nêu tên ở trên).

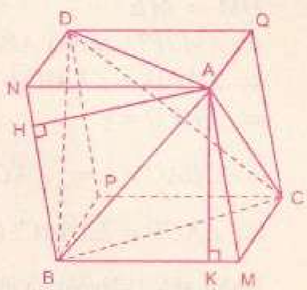
Hà Nội: *Phạm Văn Hùng*, 10A2, *Phạm Gia Vĩnh Anh*, 10A1, *Nguyễn Như Thắng*, 11A1, ĐHSP Hà Nội; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Huy Việt*, 12A1, PTTH số 1, Gia Bình; **Hải Dương :** *Hoàng Thị Nguyệt ánh*, 11T; *Vũ Vĩnh Trường*, 12T, *Tô Minh Hoàng*, 11T; *Đỗ Thị Ngọc Quỳnh*, 10T, PTTH chuyên Nguyễn Trãi; *Nguyễn Anh Dũng*, PTTH Tứ Kỳ; **Thái Bình:** *Đỗ Tuấn Vũ*, 11A5, PTTH Thái Ninh, Thái Thụy; **Vĩnh Phúc:** *Kim Đình Trường*, 8B, THCS Yên Lạc; *Nguyễn Trung Lập*, 12A1, *Nguyễn Xuân Trọng*, 12A1,; *Phan Duy Viện*, 11A1, *Vũ Mạnh Cường*, 12A4, PTTH chuyên; *Đỗ Thị Tâm*, 12A1, PTTH Ngô Gia Tự, Lập Thạch; **Phú Thọ:** *Vũ Chí Công*, 10A1, PTTH chuyên Hùng Vương, Việt Trì; *Phạm Minh Sơn*, 12A7, PTTH Việt Trì; **Hà Giang:** *Nguyễn Kim Cương*, 11 Toán, PTTH chuyên Hà Giang; **Hòa Bình:** *Đỗ Thị Thu Hà*, 12 Toán, PTTH Hoàng Văn Thụ; **Nghệ An:** *Phan Đăng Khoa*, 11A chuyên toán ĐHSP Vinh; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Duy Đạt*, 11L, PTTH Kỳ Anh; **Quảng Trị:** *Trần Việt Anh*, 11 Toán, PTTH chuyên Lê Quý Đôn; **Thừa Thiên – Huế:** *Trần Đình Khiêm*, 11T, Quốc học Huế; **Đà Nẵng:** *Đặng Quang Huy*, 10A1, PTTH chuyên Lê Quý Đôn; **Khánh Hòa** *Trần Tuấn Anh*, 12 toán, PTTH Lê Quý Đôn, Nha Trang; **Đắc Lắc :** *Tăng Thị Hà Yên*, 11T, Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột; **Tp Hồ Chí Minh:** *Trần Thượng Văn Du*, 11T, *Lương Thế Nhân*, 11T, PTNK ĐHQG, *Lê Kiệu Cường*, 12A1, PTTH Gia Định.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài T10/267. *Gọi V là thể tích của hình tứ diện với độ dài các cạnh là a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6. Chứng minh rằng*

$$V \leq \frac{\sqrt{2}}{12}\left(\frac{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}+\sqrt{a_4}+\sqrt{a_5}+\sqrt{a_6}}{6}\right)^6$$

Lời giải. Xét tứ diện $ABCD$ có thể tích V và $AB = a_1$, $AC = a_2$, $AD = a_3$, $BC = a_4$, $BD = a_5$, $CD = a_6$.



Lập hình hộp $ANDQMBPC$ có thể tích V_1 sao cho sáu đường chéo của mặt bên hình hộp là các cạnh của tứ diện $ABCD$. Dễ thấy $V_1 = 3V$ (1)

Từ công thức tính diện tích hình bình hành có :

$$S_{AMBN} \leq \frac{1}{2}AB.MN = \frac{1}{2}a_1a_6.$$

Tương tự $S_{BNDP} \leq \frac{1}{2}a_2a_5$, $S_{BMCP} \leq \frac{1}{2}a_3a_4$.

Tính thể tích hình hộp :

$$V_1^2 \leq (AK.S_{BMCP})(AH.S_{BNDP})$$

$$\leq \frac{1}{4}a_2a_5a_3a_4.AK.AN = \frac{1}{4}a_2a_5a_3a_4.S_{AMBN}$$

$$\leq \frac{1}{8}a_1a_2a_3a_4a_5a_6 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$9V^2 = V_1^2 \leq \frac{1}{8}a_1a_2a_3a_4a_5a_6$$

Áp dụng BĐT Côsi cho 6 số ta được :

$$V \leq \frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$$

$$\leq \frac{\sqrt{2}}{12}\left(\frac{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}+\sqrt{a_4}+\sqrt{a_5}+\sqrt{a_6}}{6}\right)^6$$

Đẳng thức cuối cùng xảy ra khi mọi đẳng thức ở trên xảy ra, tức là khi $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6$.

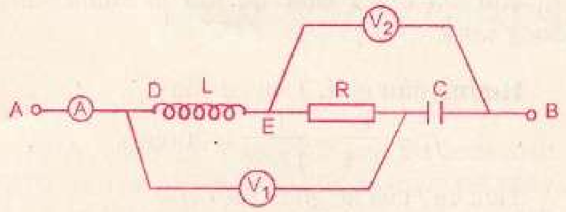
Nhận xét. 1) Một số bạn chứng minh bổ đề $V \geq \frac{1}{6}h_Ah_Bh_C$, trong đó h_A, h_B, h_C tương ứng là độ dài các đường cao kẻ từ các đỉnh A, B, C của hình tứ diện rồi dùng nó để chứng minh (2). Một số bạn đã chứng minh các công thức thể tích biểu thị qua lượng giác rất dài. Nhiều bạn đã áp dụng bài T10/245 có lời giải ở số 249 (3/1998) để suy ra (2).

2) Các bạn sau đây có lời giải đúng và gọn :

Yên Bái: *Triệu Thanh Hải*, 11A2, PTTH chuyên Yên Bái; **Tuyên Quang:** *Nguyễn Văn Ngọc*, 12C1, PTTH chuyên Tuyên Quang; **Phú Thọ:** *Hoàng Ngọc Minh*, 9C, THCS Việt Trì; **Vĩnh Phúc:** *Trịnh Quốc Khánh, Phan Hồng Nhật, Nguyễn Trung Lập, Đỗ Ngọc Ánh*, 12A1, PTTH chuyên Vĩnh Phúc; **Bắc Giang:** *Trần Thị Hà Phương*, 12A, PTTH Ngô Sĩ Liên, thị xã Bắc Giang **Hà Nội:** *Bùi Viết Lộc*, 12A, PTCT, *Trần Tất Đạt*, 12B Toán, ĐHKHTN–ĐHQG Hà Nội; **Nam Định:** *Bùi Văn Tùng*, 11B, PTTH Trần Nhật Duật, Tp Nam Định; **Hải Dương:** *Tô Minh Hoàng*, 11T, *Phạm Ngọc Lợi, Vũ Mạnh Huấn*, 12T, PTTH NK Nguyễn Trãi, Tp Hải Dương; **Hải Phòng:** *Nguyễn Trọng Dũng*, 11T PTTH NK Trần Phú; **Quảng Ninh:** *Lê Đức Thịnh*, 11T1, PTTH chuyên Hạ Long; **Nghệ An:** *Lê Tất Thắng, Nguyễn Anh Linh, Phan Đăng Khoa*, 11A, PTCT, ĐHSP Vinh, *Đinh Thanh Thường*, 11A, PTTH Hermann Gmeiner, Vinh; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Thừa Thắng*, 11T, PTTH NK Hà Tĩnh, *Lê Tâm*, 9G, THCS Kỳ Anh; **Thừa Thiên – Huế:** *Nguyễn Du Thái*, 11 PTCT, ĐHKH Huế; **Khánh Hòa:** *Trần Tuấn Anh, Võ Duy*, 12T, PTTH Lê Quý Đôn, Nha Trang; **Tp Hồ Chí Minh:** *Trần Thượng Văn Du, Lâm Hoàng Nguyên, Nguyễn Anh Dũng, Lương Thế Nhân*, 11T, *Trần Quang Vinh*, 12T, PTNK ĐHQG Tp Hồ Chí Minh;

VIỆT HẢI

Bài L1/267. *Cho mạch điện có sơ đồ như trên hình vẽ. L là cuộn dây thuần cảm; điện trở của ampe kế và dây nối không đáng kể; điện trở của vôn kế vô cùng lớn. Đặt vào hai đầu A, B của mạch điện một hiệu điện thế xoay chiều $u_{AB} = U_o sinft$ có hiệu điện thế cực đại U_o không đổi.*

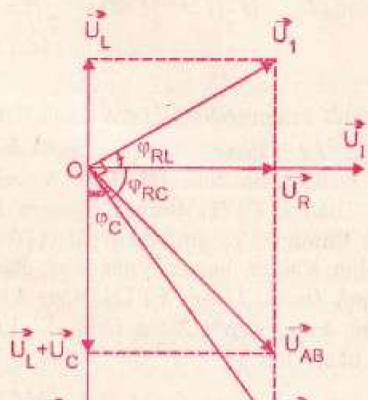


1) Khi tần số dòng điện bằng $f_1 = 50Hz$, người ta thấy ampe kế chỉ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ A; các vôn kế V_1, V_2 chỉ $U_1 = 100V$, $U_2 = 100\sqrt{3}V$; hiệu điện thế tức thời giữa hai đầu các vôn kế lệch pha nhau $\frac{\pi}{2}$. Hãy tính R, L, C, U_o. Viết biểu thức của hiệu điện thế giữa hai đầu cuộn cảm.

2) Thay đổi tần số dòng điện đến giá trị bằng f_2 thì người thấy hiệu điện thế giữa hai đầu vôn kế V_2 lệch pha $\frac{\pi}{4}$ so với hiệu điện thế giữa hai bản tụ điện. Tính f_2. Viết biểu thức của hiệu điện thế giữa hai bản tụ điện. Hãy cho biết hiệu điện thế hiệu dụng giữa hai bản tụ điện khi đó có đạt giá trị cực đại không ? Nếu có, hãy giải thích.

Hướng dẫn giải. 1) Vẽ giản đồ vectơ, chọn $\vec{I}$ làm trục gốc (trục pha), vẽ $\vec{U_R}$, $\vec{U_L}$, $\vec{U_C}$, rồi $\vec{U_1} = \vec{U_L} + \vec{U_R}$ $\vec{U_2} = \vec{U_R} + \vec{U_C}$;

$\vec{U}_{AB} = \vec{U_R} + \vec{U_L} + \vec{U_C}$, sao cho theo đề bài, $\vec{U_1} \perp \vec{U_2}$. Ta có $\sqrt{R^2 + Z_L^2} = \frac{U_1}{I} = \frac{200}{\sqrt{3}}$ (1);



$\sqrt{R^2 + Z_C^2} = \frac{U_2}{I} = 200$ (2);

$|tg\varphi_{RL}| = |cotg\varphi_{RC}| \Rightarrow R^2 = Z_L . Z_C$ (3).

Từ (1), (2), (3) tìm được $R = 100\Omega$;

$Z_L = \frac{100}{\sqrt{3}}\Omega \Rightarrow L = \frac{Z_L}{\omega} = \frac{1}{\sqrt{3}\pi} \approx 0,18$ H;

$Z_C = \frac{300}{\sqrt{3}}\Omega \Rightarrow C = \frac{1}{\omega Z_C} \approx 18,4\mu F$.

Từ đó $Z = \sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2} = 100\sqrt{\frac{7}{3}}\ \Omega$

$\Rightarrow U_{AB} = IZ = 50\sqrt{7} \approx 132V$ và $U_o = U_{AB}\sqrt{2}$ $\approx 186,5V$. Theo giản đồ, độ lệch pha giữa u_{AB} và u_C là : $|tg\varphi_C| = \frac{U_R}{U_C - U_L} = \frac{R}{Z_C - Z_L} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow |\varphi_C| \approx 0,71$rad

Suy ra U_L sớm pha so với u_{AB} một góc $\pi - 0,71 \approx 2,43$rad.

Mặt khác $U_L = IZ_L = 50(V)$. Biểu thức của u_L là $u_L \approx 50\sqrt{2}\sin(100\pi t + 2,43)$ (V)

2) Theo giản đồ véctơ, độ lệch pha giữa u_2 và u_C :

$$|tg\varphi_{2C}| = \frac{U'_R}{U'_C} = \frac{R}{Z'_C} = tg\frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow R = Z'_C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\omega' C} = 100 \Rightarrow \omega' = \frac{1}{100C} = 100\sqrt{3}\pi \text{ rad/s}$$

$$f_2 = \frac{\omega'}{2\pi} = 50\sqrt{3}\ Hz$$

$$\Rightarrow Z'_L = \omega' L = 100\,\Omega = Z'_C.$$

Như vậy $Z'_L = Z'_C \Rightarrow tg\varphi' = 0 \Rightarrow \varphi' = 0$: trong mạch có cộng hưởng điện, u_{AB} và i cùng pha và cường độ hiệu dụng của dòng điện đạt giá trị cực đại : $I' = \frac{U_{AB}}{Z'} = \frac{U_{AB}}{R} = \frac{\sqrt{7}}{2}(A)$.

Hiệu điện thế hiệu dụng giữa hai bản tụ điện đạt giá trị bằng : $U'_C = I'.Z'_C = 50\sqrt{7}$ (V), và $U'_{CO} = U'_C.\sqrt{2} = 50\sqrt{7}.\sqrt{2} \approx 187$ (V).

Vì u_c trễ pha góc $\frac{\pi}{2}$ so với u_{AB}, nên biểu thức của u'_C là $u'_C \approx 187\sin\left(100\pi.\sqrt{3}t - \frac{\pi}{2}\right)$ (V)

Mặt khác $U_C = IZ_C = \frac{\sqrt{3}}{2}.100\sqrt{3} = 150V > 50\sqrt{7} = U'_c \Rightarrow U'_c$ không đạt cực đại (U'_c đạt cực đại khi tần số $f'_2 = 25\sqrt{6}Hz$).

Nhận xét. Các em có lời giải đầy đủ và đúng :

Đà Nẵng : *Phạm Minh Tuấn*, 12A2, PTTH chuyên Lê Quý Đôn, *Đặng Ngọc Hiến*, 12A2, PTTH chuyên Lê Quý Đôn; **Hà Nội:** *Đặng Lộc*, Bo 12A, ĐHKHTN–ĐHQG Hà Nội, *Nguyễn Tuấn Anh*, 12B, PTTH Nguyễn Gia Thiều, Gia Lâm; **Phú Thọ :** *Hà Thiết Hùng*, 10N, PTTH Hùng Vương; **Bắc Ninh :** *Nguyễn Huy Việt*, 12A1, PTTH số 1 Gia Bình; **Yên Bái :** *Vũ Hải Đăng*, 12A1, PTTH chuyên Yên Bái; **Nghệ An :** *Lê Mạnh Cường*, 12A Tin, PT chuyên Toán – Tin, ĐHSP Vinh; *Trần Tiến Dũng*, 12A3, *Nguyễn Xuân Linh*, 12 Lí, PTTH Phan Bội Châu, Vinh; **Thừa Thiên – Huế:** *Trương Văn Tứ*, Thôn Vân Lâm, thị trấn Sịa, Quảng Điền; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Mạnh Hùng*, 12B, PTTH Quảng Xương II; *Nguyễn Quốc Dương*, 12A1, PTTH Đào Duy Từ, Tp Thanh Hóa; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Nhật Anh*, PTTH CB số 1, Đức Phổ; **Hải Phòng:** *Phạm Anh Đức*, 12 Lí, PTTH NK Trần Phú; **Tp Hồ Chí Minh :** *Trần Vinh Quang*, 12 Lí, PTTH NK ĐHQG–Tp Hồ Chí Minh; **Hải Dương :** *Trần Quang Minh*, 12A1, PTTH Nam Sách; **Quảng Bình :** *Lê Quang Trung*, 11 Lí, PTTH NK Quảng Bình; **Bắc Giang :** *Phạm Việt Hướng*, 12a, PTTH Lục Ngạn; **Hà Tĩnh :** *Trương Hữu Cát*, 12 Lí, PTTH NK Hà Tĩnh; **Vĩnh Phúc :** *Vũ Thanh Tùng*, 12A1, *Hoàng Minh Tuấn*, 12A3, *Nguyễn Thành Lập*, 12A3, *Đỗ Ngọc ánh*, 12A1, *Nguyễn Minh Kiên*, 10A1, PTTH chuyên Vĩnh Phúc.

MAI ANH

Bài L2/267. *Một thấu kính mỏng L_1 làm bằng thủy tinh chiết suất 1,5 có một mặt lồi và một mặt phẳng, bán kính mặt lồi là 15cm. Một thấu kính phẳng lõm L_2, mặt lõm vừa lắp khít mặt lồi của L_1. Khi ghép L_1 và L_2 sát nhau, chiếu một chùm sáng song song với trục chính của hệ, đặt mắt sau L_2 hứng chùm tia ló, ta nhìn thấy có một chấm sáng chói nằm trên trục chính và cách L_1 là 15cm. Tách L_1 và L_2 ra, lắp vào 2 đầu một ống chứa đầy nước (xem hình vẽ), chiết suất của nước là $\frac{4}{3}$. Hỏi chiều dài ống nước là bao nhiêu để chùm sáng song song với trục chính của L_1 sau khi đi ra khỏi L_2 vẫn là chùm sáng song song.*

Hướng dẫn giải. Tiêu cự của L_1 :

$$f_1 = \frac{R}{n-1} = \frac{15}{1,5-1} = 30(\text{cm}).$$

Tiêu cự f của hệ ghép sát L_1L_2

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \Rightarrow f_2 = \frac{f_1f}{f_1-f}$$

Theo đề bài $f = \pm 15$cm. Vì $f_2 < 0$ nên ta có $f = -15$cm và $f_2 = -10cm$. Ống nước tương đương quang hệ gồm 2 thấu kính mỏng L'_1, L'_2 tiêu cự f'_1, f'_2 ở 2 đầu (ghép sát với L_1, L_2 xem hình vẽ), được ngăn cách bởi một bản mặt song song có bề dày l, chiết suất $n_2 = \frac{4}{3}$. Vì thấu kính mỏng nên l cũng chính là chiều dài ống nước. Ta có :

$$f'_2 = -f'_1 = \frac{R}{n_o - 1} \quad (n_o = \frac{4}{3} \text{ là chiết suất của nước})$$

$\Rightarrow f'_2 = -f'_1 = 45$cm. Kí hiệu F_1, F_2 là tiêu cự của các hệ ghép sát $L_1L'_1$ và $L_2L'_2$, ta có :

$$F_1 = \frac{f_1f'_1}{f_1+f'_1} = 90\text{cm},\ F_2 = \frac{f_2f'_2}{f_2+f'_2} = -\frac{90}{7}\text{ cm}.$$

Theo đề bài chùm sáng ra khỏi L_2 vẫn là chùm sáng song song, muốn vậy chùm sáng qua hệ ghép sát $L_1L'_1$ và bản mặt song song phải hội tụ tại tiêu điểm vật của hệ ghép sát $L_2L'_2$, nghĩa là phải có :

$$F_1 + l\left(1 - \frac{1}{n_o}\right) = l + |F_2|$$

$$\Rightarrow l = n_o(F_1 - |F_2|) = \frac{4}{3}\left(90 - \frac{90}{7}\right) = \frac{720}{7} \approx 103\text{cm}.$$

Nhận xét. Các em có lời giải đầy đủ và đúng :

Hà Nội: *Lê Cường*, Bo12A, khối chuyên lí, ĐHKHTN–ĐHQG Hà Nội; **Hà Tây:** *Nguyễn Minh Chính*, 11 Toán I, PTTH chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Hải Phòng:** *Nguyễn Văn Nghị*, 11B1, PTTH Nguyễn Bỉnh Khiêm, huyện Vĩnh Bảo; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Đình Đoàn*, 11 Lí, PTTH Năng khiếu Bắc Ninh; **Nghệ An:** *Nguyễn Xuân Linh*, 12 Lí, PTTH Phan Bội Châu, Vinh.

MAI ANH

NĂM 2000... *(Tiếp trang 2)*

4) *Ngôn ngữ và các thành quả của toán học có tính phổ dụng trên toàn thế giới làm cho toán học trở thành công cụ hợp tác quốc tế lý tưởng.* Không có ngành khoa học nào lại được tất cả mọi người biết đến như là toán học. Ai cũng biết làm các phép toán cộng trừ. Toàn thế giới đều sử dụng các con số và các ký hiệu cộng, trừ, nhân, chia giống nhau. Các nhà toán học trên thế giới có thể trao đổi chuyên môn với nhau mà không cần nắm vững ngôn ngữ của nhau. Ngày nay, khi thông tin có thể gửi đến mọi nơi trên trái đất trong chớp mắt, các nhà toán học cũng là những người đi tiên phong trong việc cộng tác nghiên cứu khoa học. Nếu chúng ta giở các tạp chí toán học ra thì chúng ta sẽ thấy rất nhiều công trình mang tên nhiều tác giả ở các nước khác nhau. Có nhiều trường hợp là các đồng tác giả không hề biết mặt nhau mà vẫn cộng tác nghiên cứu với nhau nhiều năm liền.

Có một nghịch lý là tuy quan trọng như vậy nhưng vai trò của toán học lại không được xã hội đánh giá đúng mức, đặc biệt ở các nước đang phát triển như Việt Nam ta. Có lẽ chính vì toán học có mặt ở khắp mọi lĩnh vực của xã hội nên dường như người ta thấy nó tầm thường. Toán học còn bị đánh giá thấp là vì đầu tư cho toán học không cần nhiều tiền của như là các ngành khoa học khác. Cái gì rẻ thì chắc là không tốt!

Có một quan niệm sai lầm là các nước đang phát triển không cần đến nghiên cứu toán học và rộng hơn là các môn khoa học cơ bản. Phần lớn các nước này đã vì những nhu cầu xã hội cấp bách mà quên mất những mục tiêu phát triển lâu dài về giáo dục và nghiên cứu khoa học. Hậu quả là các nước đang phát triển chỉ biết nhập công nghệ và không bao giờ có khả năng thực sự đuổi kịp các nước phát triển.

Vì những lý do trên mà Hội toán học thế giới thấy cần thiết phải tổ chức năm toán học thế giới 2000 nhằm nâng cao nhận thức của xã hội đối với toán học khi bước sang một thiên niên kỷ mới.

Tài liệu tham khảo

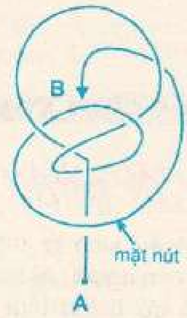
1. IMU Declaration of Rio de Janeiro on Mathematics, 5/6/1992.
2. UNESCO resolution, 11/11/1997.
3. World Mathematical Year 2000 Newsletters 1-7.

TOÁN HỌC VÀ... *(Tiếp trang 11)*

Dưới đây xin giới thiệu với các bạn 3 kiểu thắt thường gặp.

Nếu cà vạt của bạn có bản to hoặc bạn là phụ nữa thì có thể chọn *kiểu 1: mỏng, nhỏ*. Nếu cà vạt của bạn có bản nhỏ thì có thể chọn *kiểu 3: dày, to. Kiểu 2 : trung bình*, được nhiều người coi là kiểu cân đối nhất. Việc thắt cà vạt có đẹp

Hình 4



Hình 5

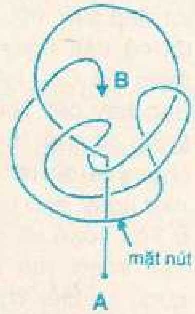
hay không còn phụ thuộc vào sự khéo tay của bạn nữa.

Công thức kiểu 1 (hình 4)
PTv Pr Gv D

Công thức kiểu 2 (hình 5)
PTr, Pv Gr Tv Pr Gv D .

Công thức kiểu 3 (hình 6)
P Tr Gv Tr Pv Gr Pv Tr Gv D.

Các bạn hãy thử tìm thêm các công thức tương ứng với cách thắt cà vạt kiểu khác./.



Hình 6

TOÁN - TUỔI TRẺ

Trịnh trọng tiễn Tết Tây
Thấp thỏm trông Thìn tới
Tuổi ta tăng thêm tuổi
Thấy trời trong thắm tươi

Thích Toán từ thiếu thời
Tìm tòi thường thao thức
Tìm trong ta thôi thúc
Tuổi trăng tròn trôi trôi...

Toán thân thiết trong tôi
Toán tuôn trào tuổi trẻ
Toán tâm tư thủ thỉ :
Toán tâm tư trí tài

NGUYỄN THẠC DŨNG
(A1-K43-Khoa Toán Cơ - Tin học
ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội)

Cuộc chơi xuyên suốt năm 2000

GẶP NHAU QUA NGÀY SINH

Ngày sinh là một ngày thiêng liêng đối với mỗi con người. Ai sinh cùng một ngày với mình ? Điều đó lí thú lắm chứ ! Ngày sinh nào cũng mang lại điều may mắn, bởi từ ngày ấy, một con người đã chào đời và sẽ làm nên bao nhiêu điều tốt đẹp trên trái đất này. TH&TT xin chúc mừng tất cả các ngày sinh của các bạn và mời bạn tham gia Câu lạc bộ "Gặp nhau qua ngày sinh". Bạn hãy cắt Thẻ hội viên CLB trên tạp chí, đặt trong phong bì gửi về Tòa soạn ! Mỗi tháng chúng ta sẽ **ưu tiên** dành niềm vui bạn bè cho *một ngày sinh* bằng cách lựa chọn qua bốc thăm ở Tòa soạn và công bố trên Tạp chí. Không chỉ Tòa soạn, mà tin rằng nhiều bạn đọc trên cả nước sẽ biết bạn, chúc mừng bạn, giao lưu với bạn ! Bạn có quyền hy vọng và vui xuyên suốt năm 2000. Câu lạc bộ sẽ gửi quà cho 5 bạn có ngày sinh ấy và 5 bạn thích ngày sinh đó của bạn mình. Cuộc chơi bắt đầu ! Các bạn hãy nhanh tay lên !

THẺ HỘI VIÊN

Gặp nhau qua ngày sinh

Họ và tên ....

Ngày sinh ....

Địa chỉ ....

....

Ngày sinh bạn thích ....

TH&TT

Kết quả cuộc thi

Ô CHỮ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Các bạn tham gia thật tưng bừng và có nhiều ý tưởng khác nhau, nhất là hai dòng cuối cùng của ô chữ. Khi "loay hoay mãi đành kêu như vậy", mỗi bạn kêu một kiểu : "Ối ! Trời !", "Rắc rối !" "Rối ren !" "Sai rồi !". Đặc biệt có bạn kêu : "A Ra rồi !", hơi bị lạc đề, vì đành kêu" cơ mà ? Dòng cuối gợi ý "đã trọn vẹn mà lại như thừa ra một ít" làm cho nhiều bạn bí mà phán bừa : "toàn số lẻ", "đạo hàm lẻ", "hàm đơn lẻ", "thương lẻ", "tuổi trẻ", "nghiệm lẻ", "vẫn còn lẻ", "thừa số lẻ", "căn bậc lẻ", "hơi hơi lẻ", vân vân và vân vân. Đáp án thuyết phục là "nguyên lẻ".

		Đ	Ư	Ờ	N	G	**T**	H	Ẳ	N	G		
						Đ	**O**	Đ	Ó				
						B	**Á**	N	K	Í	N	H	
					Đ	Ồ	**N**	G	D	Ạ	N	G	
							H	À	M	S	Ố		
					T	R	**Ọ**	N	G	T	Â	M	
				T	R	Ự	**C**	T	Â	M			
			H	Ì	N	H	**V**	Ẽ					
			B	À	I	L	**À**	M					
				G	I	Ả	**T**	H	I	Ế	T		
						C	**U**	N	G	T	R	Ò	N
						B	**Ổ**	Đ	Ề				
						L	**I**	M					
							T	I	N	H	Ọ	C	
				R	Ắ	C	**R**	Ố	I				
N	G	U	Y	Ê	N	L	**Ẻ**						

Xin trao tặng phẩm cho 10 bạn : *Hoàng Ngọc Tân*, 12H, PTTH Bình Giang, Hải Dương; *Đào Đình Thông*, *Đoàn Văn Quang*, 10A1, PTTH Hạ Hòa, Phú thọ; *Nguyễn Thị Phương Tiến*, 10A5, PTTH Vị Xuyên, *Trương Văn Hiệu*, 10c, Toán - Tin, ĐHKH Huế; *Phạm Thị Thu Hà*, lớp toán 4B, khóa 19, khoa Toán, ĐHSP Quy Nhơn, Bình Định, *Trương Xuân Chiến*, 11G, THCBN Phan Đình Phùng, Hà Tĩnh; *Nguyễn Hùng Cường*, Bo10A, chuyên Lý, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; *Vũ Hồng Toản*, 6A3, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Phúc; *Nguyễn Thanh Đông*, 7B, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn, Thanh Hóa

L.T.N

Thách đối :

Tết Tây, Tết Ta, Tổ Toán toàn thi thơ Tết — NGUYỄN HUY ĐOAN (Hà Nội)

Rượu cần uống cho đủ — NGUYỄN MINH HÀ (Hà Nội)

THI THƠ XUÂN

Bạn hãy gửi tới gấp Câu lạc bộ một bài thơ với thể thơ bạn thích mà khi ghép các *từ đầu* của *mỗi câu thơ* sẽ được câu : TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ CHÀO XUÂN MỚI !

Ngọc Mai xin dạo trước và mong các bạn hưởng ứng

CẢM TÁC ĐẦU XUÂN

Toán - nguyện đam mê suốt cuộc đời
Học, còn học nữa, hỡi ai ơi !
Và bao gương sáng còn soi đó
Tuổi có cao thêm vẫn chẳng rời !

Trẻ mãi tình yêu Toán với Người
Chào thiên niên kỉ rực hoa tươi
Xuân mang nhựa sống về muôn ngả
Mới triệu mầm non, triệu nụ cười

NGỌC MAI

NHỮNG VẦN THƠ CỦA MỘT NHÀ TOÁN

Bạn đọc của Toán học và Tuổi trẻ suốt 35 năm qua, ai cũng biết, cũng nhớ một "cây viết kì cựu" Lê Quốc Hán. Mấy năm gần đây, anh lại say và đến với **Nàng thơ**. Câu lạc bộ đã từng giới thiệu thơ anh. Thật giật mình khi biết rằng năm 1996 anh ra tập "Lời khẩn nguyện" (NXB Thanh Niên), in chung với các **Nhà toán** tập thơ "Kỳ vọng" và giờ đây Nhà xuất bản **Văn học** giới thiệu tập thơ "Bến vô cùng" của riêng anh, với lời đề tựa cho cả tập :

Mai sau thịt nát, tình còn
Sá chi hạt bụi cửa mòn gót chân

Sống có **Tình**, sống vì **Tình** nên mọi khó khăn chỉ là **Hạt bụi**. Vâng, **hạt bụi** của đường đời mà anh đã qua **không nhỏ**. Nhưng anh đã vượt lên để tới với **Bến**, dù là **Bến vô cùng**. Trân trọng giới thiệu tập thơ mới của anh và gửi tặng các bạn bài thơ "Ngẫm" mà anh viết dịp Xuân 1997 :

LÊ QUỐC HÁN

NGẪM

Trẻ – ngỡ mình nặng nhất
Già – biết mình nhẹ tênh
Thời gian như rìu sắc
Đẽo bạc cả đầu xanh.

ĐÓN ĐỌC SỐ 272 (2.2000)

Vui đón Tết Canh Thìn vừa xong, các bạn lại có niềm vui mới khi đón đọc tạp chí số 272 với những thông tin tư liệu bổ ích :

✿ Họ các bài toán (với những thí dụ thú vị)

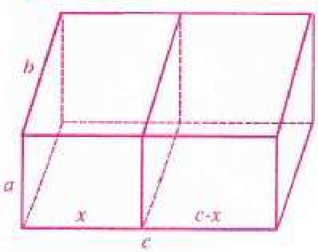
✿ Điểm bất động của hàm số và ứng dụng (đã giới thiệu, nay mới ra mắt bạn đọc).

✿ Bác sĩ Lê Đình Thám học toán.

Đặc biệt, các hội viên của Câu lạc bộ "Gặp nhau qua ngày sinh" sẽ được thử vận may của mình lần đầu tiên trong năm 2000. Các bạn nhớ đặt mua gấp tại Bưu điện hoặc các đại lí ở địa phương. Chúc các bạn một năm mới thật thành đạt.

Giải đáp bài

HÌNH HỘP NÀO ?



Giả sử hình hộp ban đầu (H) có kích thước a, b, c với $a \le b \le c$. Nếu cắt hình (H) bởi 1 mặt phẳng để tạo thành hai hình hộp nhỏ có 3 cạnh tương ứng tỉ lệ với (H) thì dễ thấy mặt phẳng cắt phải song song với một mặt của (H) và phải cắt cạnh dài nhất. Gọi kích thước của 2 hình hộp nhỏ (H_1) và (H_2) được cắt ra là : a, b, x của (H_1) và a, b, $y = c - x$ của (H_2) với $0 < x < c$. Xét hình hộp (H_1) :

• Nếu $a \le b \le x$ thì $\frac{a}{a} = \frac{b}{b} = \frac{x}{c} \Rightarrow x = c$: không được.

• Nếu $a \le x \le b$ thì từ $\frac{a}{a} = \frac{x}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow x = b = c$: không được

• Vậy chỉ có thể xảy ra $x \le a \le b$. Lúc đó

$$\frac{x}{a} = \frac{a}{b} = \frac{b}{c} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = ac \\ x = \dfrac{a^2}{b} \end{cases} \quad (*)$$

Nếu $a = b$ hoặc $b = c$ thì từ (*) có $a = b = c = x$: không được. Hình hộp (H_2) cũng phải thỏa mãn (*) khi thay x bởi y nên có $c - x = \frac{a^2}{b} = x$..

$\Rightarrow c = 2x$ (**) nghĩa là *mặt phẳng cắt đi qua các trung điểm cạnh dài nhất.*

Từ (*) và (**) có $2a^2 = bc \Rightarrow 2a^2 = c\sqrt{ac}$

$\Rightarrow \frac{c\sqrt{c}}{a\sqrt{a}} = 2.$

Đặt $t^2 = \frac{c}{a} \Rightarrow t = \sqrt[3]{2}$. Ta tính được ba cạnh của hình hộp (H) là a, $b = at = a\sqrt[3]{2}$, $c = at^2 = a\sqrt[3]{4}$

Bạn Lê Thanh Tuấn, 10b, PTTH Lê Viết Thuật, thành phố Vinh, Nghệ An có lời giải tốt.

BÌNH PHƯƠNG

PHÂN TÍCH SỐ 2000

Các bạn hãy phân tích số 2000 thành tổng của 4 số nguyên dương sao cho khi cộng số thứ nhất với số nguyên dương a nào đó, trừ số thứ hai cho a, nhân số thứ ba với a, chia số thứ tư cho a thì được các kết quả bằng nhau

NGÂN HỒ

TRƯỜNG THPT CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU, VƯỜN ƯƠM NHỮNG MẦM XANH

Nhà giáo ưu tú NGUYỄN HỮU ĐẮC
Hiệu trưởng

Trường THPT chuyên mang tên nhà chí sĩ yêu nước đầu thế kỉ 20 Phan Bội Châu chính thức được thành lập ngày 15/10/1974 trên cơ sở hợp nhất các lớp chuyên Toán, chuyên Văn hình thành từ năm 1964 ở các trường Phổ thông cấp 3 Đô Lương, Thanh Chương. Từ năm 1976 đến 1992 hai tỉnh Nghệ An, Hà Tĩnh hợp nhất, trường vẫn giữ nguyên tên và tuyển chọn học sinh năng khiếu của Nghệ Tĩnh.

Từ quy mô bé nhỏ với dăm, sáu lớp chuyên Toán, chuyên Văn, qua nhiều lần di dời từ các địa điểm sơ tán trong chiến tranh, đến năm 1981 trường mới chuyển về trung tâm thành phố Vinh. Hiện nay cơ ngơi của trường tương đối khang trang với hai khu vực nhà cao tầng gần 30 lớp học. Trường có phòng vi tính trên 30 máy, thư viện với nhiều đầu sách phong phú; có phòng thí nghiệm, đồ dùng dạy học, có thiết bị nghe nhìn của phòng học tiếng và dùng vào các hoạt động ngoại khóa. Năm học 1999-2000 trường có 27 lớp với các lớp chuyên Toán, Toán - Tin, Lý, Hóa, Sinh, Văn, Sử, Địa, Anh, Nga, Pháp văn.

Trên nền tảng giáo phổ thông toàn diện, trường xác định mục tiêu bồi dưỡng học sinh có năng khiếu, đào luyện nhân tài góp phần xây dựng quê hương đất nước. Đến cuối năm 1998 đã có 19 tiến sĩ, 57 phó tiến sĩ, hàng trăm cao học, thạc sĩ là cựu học sinh của trường. Nhiều học sinh thành danh trên các lĩnh vực nghiên cứu khoa học, trong sáng tác thơ văn và làm ăn kinh tế. .. Nhiều học sinh đã và đang đảm trách các chức vị cao trong bộ máy lãnh đạo Đảng và Nhà nước từ trung ương đến địa phương...

Tỉ lệ tốt nghiệp PTTH hàng năm là 100%. Trong 25 năm trường đã có trên 300 học sinh đạt giải Quốc gia các môn. Có 7 lần học sinh dự thi Quốc tế về Toán, Vật lí trong đó 3 em đạt giải nhì Toán vào các năm 1991, 1993, 1997. Năm học vừa qua (1998-1999) một em đạt giải bạc Toán Châu Á - Thái Bình Dương.

Ngoài ra học sinh của trường còn tích cực tham gia viết bài và dự các cuộc thi giải toán báo Toán học và Tuổi trẻ, sáng tác thơ văn đăng báo Hoa học trò, TNTP, Tiền Phong, Văn nghệ trẻ, các báo và tạp chí địa phương. Có em đạt giải nhất giải toán báo Toán học và Tuổi trẻ, Tác phẩm tuổi xanh và còn nhiều giải nhì, ba, khuyến khích của các báo trên. Giáo viên và học sinh của trường từng dự các Hội thi Văn nghệ, Thể dục thể thao, hội thi thanh lịch, hội thảo, gặp gỡ, giao lưu... do Đoàn TNCSHCM hoặc Ngành tổ chức ở cấp Thành phố hay cấp Tỉnh.

Nhà trường chăm lo xây dựng đội ngũ giáo viên tốt về phẩm chất đạo đức, giỏi về chuyên môn nghiệp vụ. Giáo viên của trường yêu nghề, yêu trẻ, say mê nghiên cứu, nhiệt tình giảng dạy, được phụ huynh và học sinh yêu mến tin tưởng. Hiện có 6 giáo viên được phong tặng danh hiệu Nhà giáo ưu tú. Nhiều giáo viên đã học qua cao học, 7 thạc sĩ.

25 năm tồn tại phát triển, trường THPT chuyên Phan Bội Châu luôn được các cấp ủy Đảng và Chính quyền địa phương quan tâm giúp đỡ. Trường liên tục đạt trường tiên tiến; được Chủ tịch nước tặng Huân chương Lao động hạng ba, Bộ Giáo dục và Đào tạo tặng "Lá cờ đầu" của Ngành, UBND tỉnh Nghệ An tặng cờ và nhiều bằng khen; ba năm liền (1996-1999) được Bộ tặng bằng khen.

Bước sang thế kỉ mới, thầy trò càng phấn khởi hơn khi Chủ tịch nước Trần Đức Lương đã kí quyết định tặng thưởng Nhà trường Huân chương Lao động hạng nhì (30.11.1999).

Với niềm vui mới và sức sống mới của một thế kỉ mới, tin chắc rằng trường THPT chuyên Phan Bội Châu mãi là vườn ươm những mầm xanh đáng tin cậy của đất nước.

ISSN : 0866-0853
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT73M10

Chế bản tại Tòa soạn
In tại Nhà máy in Diên Hồng, 57 Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 1 năm 2000

Giá : 3.000đ
Ba nghìn đồng