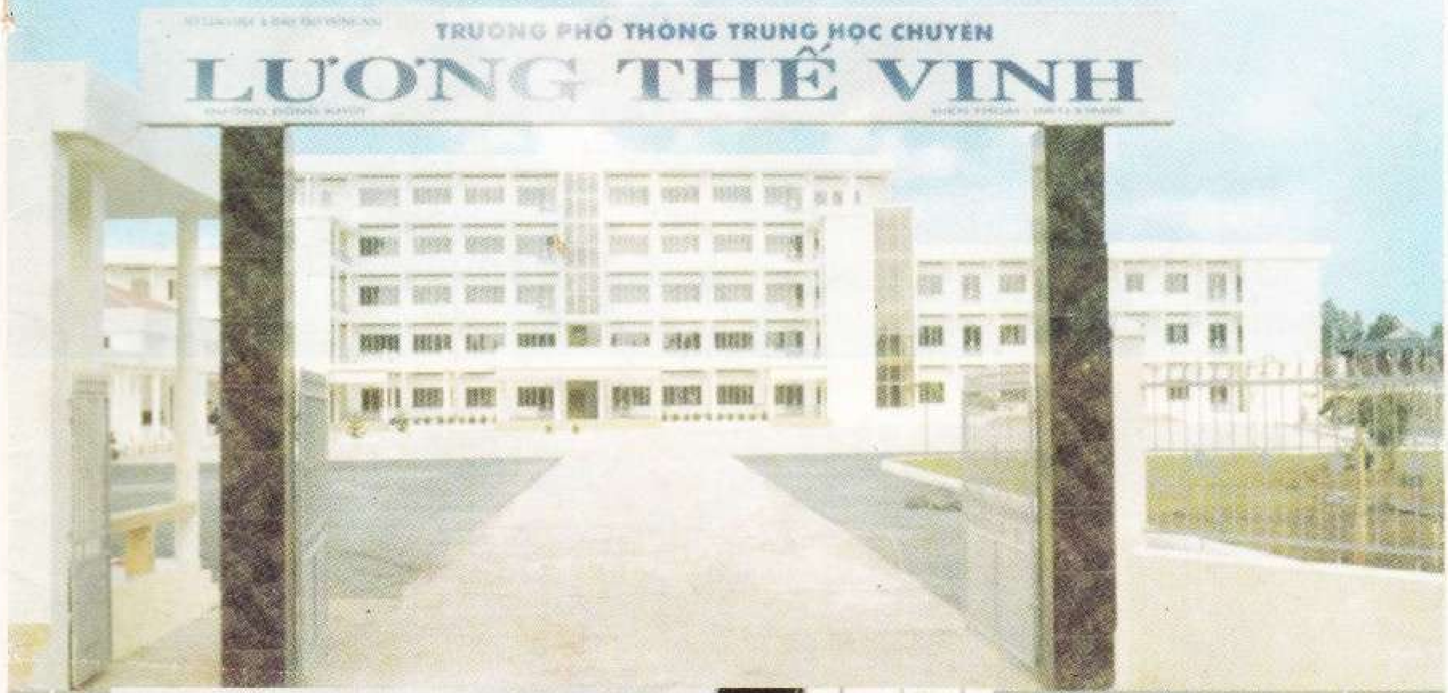
BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ✻ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Toán học & Tuổi trẻ

4
2001

SỐ 286 - NĂM THỨ 38 - TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG

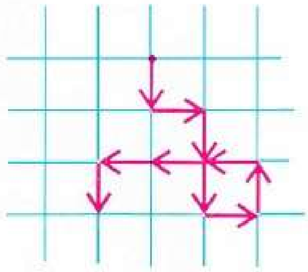


NIỀM VUI CỦA
ĐẠI TƯỚNG
VÕ NGUYÊN GIÁP KHI VỀ
THĂM TRƯỜNG PTTH
CHUYÊN
LƯƠNG THẾ VINH

TOÁN HỌC MUÔN MÀU

TRÒ CHƠI ĐI NỐI TIẾP NHAU

Hai bạn A và B chơi trò đi nối tiếp nhau trên một bàn chơi hình chữ nhật kích thước 2001×100 (đơn vị) được kẻ thành 200100 hình vuông đơn vị. Bạn A đi đầu tiên kẻ một cạnh hình vuông đơn vị nào đó. Bạn B đi tiếp sau theo quy tắc : *Kẻ một cạnh hình vuông đơn vị nào đó sao cho điểm đầu của cạnh đang kẻ phải trùng với điểm cuối cạnh vừa kẻ của bạn đi trước, nhưng không được trùng với các cạnh đã kẻ rồi*. Hai bạn thay phiên nhau kẻ đường đi theo các cạnh hình vuông đơn vị theo quy tắc trên (chẳng hạn như hình bên) cho đến khi không thể kẻ tiếp được nữa. Ai kẻ cạnh cuối cùng là thua, biết rằng hai bạn A và B đều muốn thắng, nghĩa là không ai muốn kẻ lần cuối cùng nếu còn cách đi khác.



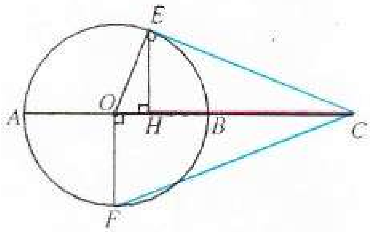
Dành cho bạn đọc

1. Hãy vẽ hình chỉ ra các trường hợp kẻ lần cuối cùng.

2. Có thể khẳng định rằng bạn A hay bạn B sẽ thắng không ? Cách chơi để thắng như thế nào ?

Sẽ có 5 tặng phẩm dành cho câu trả lời tốt nhất.

Giải đáp bài : BẤT ĐẲNG THỨC ĐẠI SỐ THEO CÁCH NHÌN HÌNH HỌC



Hình 1

Trên hình 1 lấy $AC = a$, $BC = b$ với $a \ge b > 0$. Lúc đó :

$$OE = OF = \frac{a-b}{2}, \; CO = \frac{a+b}{2}, \; CF = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

$$CE = \sqrt{ab}, \; CH = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{(1/a)+(1/b)}.$$

Dễ thấy $CH \le CE \le CO \le CF$.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b \Leftrightarrow AB = 0$.

Ta thấy trên hình 2 :

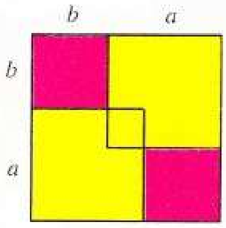
$$2a^2 + 2b^2 \ge (a+b)^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \ge \frac{a+b}{2}$$

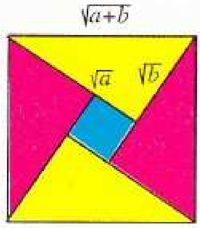
Trên hình 3 :

$$\left(\sqrt{a+b}\right)^2 \ge 4 \cdot \frac{\sqrt{a}.\sqrt{b}}{2}$$

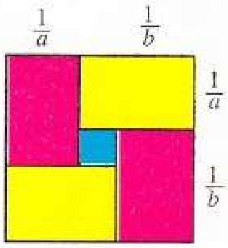
$$\Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$$



Hình 2



Hình 3



Hình 4

Trên hình 4 :

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2 \ge 4 \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \ge \frac{2}{\sqrt{ab}} \Leftrightarrow \sqrt{ab} \ge \frac{2}{(1/a)+(1/b)}$$

Trong các trường hợp trên đẳng thức xảy ra khi $a = b$.

Rất tiếc rằng không có bạn nào trả lời đầy đủ các trường hợp.

PHI PHI

Toán học và Tuổi trẻ
Mathematics and Youth

Năm thứ 38
Số 286 (4-2001)
Tòa soạn : Ngõ 187, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT : 04.5142648-04.5142650
FAX: 04.5142648

TRONG SỐ NÀY

Dành cho các bạn
TRUNG HỌC CƠ SỞ

VẼ HÌNH PHỤ ĐỂ CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC HÌNH HỌC

TRỊNH KHÔI
(GV trường THPT NK Hàn Thuyên, Bắc Ninh)

Khi giải các bài toán hình học, việc vẽ hình phụ tạo điều kiện thuận lợi cho ta tìm ra lời giải của bài toán, nhưng biết tạo ra hình phụ một cách thích hợp không phải lúc nào cũng dễ dàng. Trong bài viết này chúng tôi đưa ra một cách phân tích có chủ ý để tìm cách vẽ thêm được hình phụ thích hợp khi giải một số bài toán chứng minh đẳng thức hình học dạng : $xy = ab+cd$, $x^2 = ab+cd$, $x^2 = a^2 + cd$, $x^2 = a^2 + c^2$ và các dạng tương tự mà vế phải là một tổng.

Ta xuất phát từ một bài toán đơn giản hơn :

Để chứng minh một đoạn thẳng bằng tổng của hai đoạn thẳng khác : $AB = CD + EF$, ta tìm cách phân chia đoạn AB thành hai đoạn bởi điểm M sao cho $AM = CD$, công việc còn lại là chứng minh $MB = EF$.

Ý tưởng trên cũng được sử dụng để chứng minh đẳng thức $xy = ab + cd$ và các trường hợp riêng như sau :

Bước 1. Chia đoạn thẳng độ dài x thành 2 đoạn bởi điểm chia M để có $x = x_1 + x_2$ sao cho $x_1y = ab$ (1)

Bước 2. Chứng minh hệ thức : $x_2y = cd$ (2)

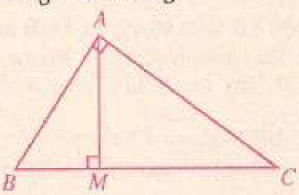
Bước 3. Cộng từng vế của (1) và (2) được điều phải chứng minh :

$$x_1y + x_2y = ab + cd$$

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. *Chứng minh định lí Pitago : Tam giác ABC có góc A vuông, chứng minh rằng* $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Phân tích : Lấy điểm M thuộc cạnh BC sao cho $BM.BC = AB^2$ $\Leftrightarrow \frac{BM}{AB} = \frac{AB}{BC}$ suy ra $\Delta BMA \backsim \Delta BAC$ nên $\angle BMA = 1v$, từ đó M là chân đường cao hạ từ A xuống BC (h.1).



Hình 1

Lời giải: Hạ $AM \perp BC$. Vì các góc B, C đều nhọn nên M thuộc đoạn BC.

Ta có $\Delta BMA \backsim \Delta BAC$ (g-g) $\Rightarrow \frac{BM}{AB} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AB^2 = BM.BC$ (3).

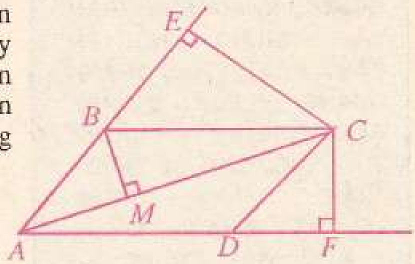
Tương tự $\Delta CMA \backsim \Delta CAB \Rightarrow AC^2 = CM.BC$ (4)

Cộng theo từng vế các hệ thức (3), (4) được $AB^2 + AC^2 = BC(BM + CM) = BC^2$.

Ví dụ 2. *Cho hình bình hành ABCD có góc A nhọn. Gọi E và F lần lượt là chân các đường vuông góc hạ từ C xuống các đường thẳng AB và AD. Chứng minh rằng :*

$$AC^2 = AB.AE + AD.AF.$$

Phân tích: Lấy điểm M thuộc đoạn AC sao cho $AM.AC = AB.AE \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AE}{AC}$ suy ra $\Delta ABM \backsim \Delta ACE$ nên $BM \perp AC$. Vậy điểm M cần tìm là chân đường vuông góc hạ từ B xuống AC (h.2)



Hình 2

Lời giải.

- Gọi M là chân đường vuông góc hạ từ B xuống AC (do các góc BAC và BCA đều nhọn nên M thuộc đoạn AC) hay $AC = AM + CM$.

- Dễ thấy $\Delta ABM \backsim \Delta ACE$ (g.g) suy ra : $AM.AC = AB.AE$

- Lại có $\Delta ACF \backsim \Delta CBM$ (g.g) suy ra : $CM.AC = BC.AF$

Từ đó với chú ý $BC = AD$ ta có : $AB.AE + AD.AF = AM.AC + CM.AC = AC^2$ (đpcm).

Ví dụ 3. Định lí Ptôlêmê :

Tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm O. Chứng minh rằng

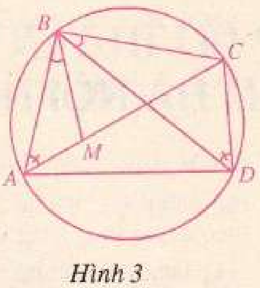
$AC.BD = AB.CD + AD.BC$

Phân tích: Giả sử M thuộc đoạn AC sao cho $AM.BD = AB.CD$, suy ra $\Delta ABM \backsim \Delta DBC$ nên

$\angle ABM = \angle DBC$. Như vậy điểm M được xác định (h.3).

Lời giải.

Vì $\angle ABC > \angle DBC$ nên trong đoạn AC tồn tại điểm M sao cho $\angle ABM = \angle DBC$.



Hình 3

Suy ra $\Delta ABM \backsim \Delta DBC$ (g.g) $\Rightarrow AM.BD = AB.CD$.

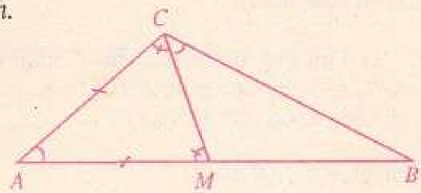
Dễ thấy $\Delta BMC \backsim \Delta BAD$ (g.g) suy ra : $MC.BD = AD.BC$.

Cộng theo từng vế các đẳng thức trên ta được : $AB.CD + AD.BC = AC.BD$

Ví dụ 4. *Cho tam giác ABC, biết rằng $3A + 2B = 180^o$. Chứng minh rằng*

$$AB^2 = BC^2 + AB.AC.$$

Phân tích. Giả sử điểm M thuộc cạnh AB sao cho $BM.AB = BC^2$ suy ra $\Delta BMC \backsim \Delta BCA \Rightarrow$



Hình 4

$\angle BCM = \angle BAC = \angle A$, kết hợp với giả thiết ta dễ dàng suy ra $\angle ACM = \angle AMC$ hay tam giác ACM cân với đáy CM. Vậy điểm M được xác định (h.4).

Lời giải. - Từ giả thiết suy ra :

$\angle C = 2\angle A + \angle B \Rightarrow AB > AC$.

Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $AM = AC$ hay tam giác ACM cân với đáy CM, từ đây suy ra

$$\angle ACM = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C - \angle A) = \angle A + \angle B$$

và do đó có

$$\angle BCM = \angle C - \angle ACM = \angle A.$$

Suy ra $\Delta BCM \backsim \Delta BAC \Rightarrow BM.BA = BC^2 \Rightarrow (AB - AC).AB = BC^2 \Rightarrow AB^2 = BC^2 + AB.AC$ (đpcm).

Ví dụ 5. *Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn. D là một điểm trên cung BC không chứa đỉnh A. Gọi I, K và H lần lượt là hình chiếu của D trên các đường thẳng BC, AB và AC. Chứng minh rằng :*

$$\frac{BC}{DI} = \frac{AB}{DK} + \frac{AC}{DH}$$

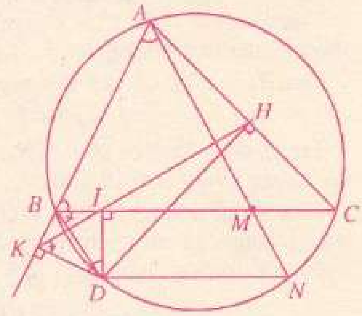
Phân tích: Giả sử M thuộc cạnh BC sao cho $\frac{BM}{DI} = \frac{AB}{DK} \Rightarrow \Delta DKI \backsim \Delta BAM$

$\Rightarrow \angle BAM = \angle DKI$ mà $\angle DKI = \angle DBI$

$\Rightarrow$ số đo cung CD = số đo cung BN (N là giao điểm khác A của AM với đường tròn)$\Rightarrow DN // BC$. Vậy ta xác định được các điểm N và M (h.5)

Lời giải :

Qua D kẻ đường thẳng song song với BC, đường thẳng này cắt đường tròn tại điểm thứ hai là N (N có thể trùng D). AN cắt BC tại M. Dễ thấy :



Hình 5

$$\Delta DKI \backsim \Delta BAM \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{BM}{DI} = \frac{AB}{DK}$$

Lại thấy $\Delta ACM \backsim \Delta HDI$ (g.g) $\Rightarrow \frac{CM}{DI} = \frac{AC}{DH}$

Cộng theo từng vế các đẳng thức trên được điều cần chứng minh.

Trong mỗi bài toán nêu trên còn có những cách giải khác và có thể có những cách giải hay hơn. Bài viết này muốn trình bày lời giải có vẻ tự nhiên hơn bằng cách phân tích để tìm và vẽ hình phụ thích hợp cho mỗi bài toán và cũng giúp cho một số bạn trong quá trình đọc sách tự giải đáp băn khoăn : Tại sao người ta lại vẽ được những hình phụ như vậy !

VỀ LỜI GIẢI ... *(Tiếp trang 22)*

Giả sử (2) có nghiệm nguyên dương (u, v). Ta có

$$(2) \Leftrightarrow (6u+1)^2 = (v+1)(v^2 - v + 1) \quad (3)$$

Gọi d là ước chung lớn nhất của $v+1$ và $v^2 - v + 1 = v(v+1) - 2(v+1) + 3$ thì d phải là ước của 3, nhưng vế trái của (3) không chia hết cho 3 nên chỉ có thể $d = 1$. Từ (3) tích hai số nguyên tố cùng nhau là số chính phương nên ta có :

$v+1 = m^2$ và $v^2 - v + 1 = n^2$ với $m \geq 2$

lúc đó $n^2 = m^4 - 3m^2 + 3 \quad (4)$

hay $n^2 = (m^2 - 2)^2 + (m^2 - 1) =$

$= (m^2 - 1)^2 - (m^2 - 2)$

suy ra với $m \geq 2$ thì

$m^2 - 2 \leq n \leq m^2 - 1 \Rightarrow$ (4) vô nghiệm.

Vậy phương trình (3), (2) không có nghiệm nguyên dương nên phương trình (1) chỉ có 1 nghiệm nguyên là $x = 0$, $y = 1$.

THTT

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 CHUYÊN TOÁN - TIN TRƯỜNG ĐH SƯ PHẠM HÀ NỘI NĂM 2000

NGÀY THI THỨ NHẤT (*Thời gian : 150 phút*)

Câu 1. Giải phương trình

$$x^3 + \frac{x^3}{(x-1)^3} + \frac{3x^2}{x-1} - 2 = 0$$

Câu 2. Cho x, y, z là ba số thực tùy ý thỏa mãn điều kiện :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -1 \le x, y, z \le 1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng $x^2 + y^4 + z^6 \le 2$. Đẳng thức có thể xảy ra được không ?

Câu 3. Tìm tất cả các số nguyên tố P có dạng :

$$P = n^n + 1$$

Trong đó n là một số nguyên dương, biết rằng P có không nhiều hơn 19 chữ số.

Câu 4. Giả sử P là một điểm bất kì nằm trong mặt phẳng của một tam giác đều ABC cho trước. Trên các đường thẳng BC, CA và AB lần lượt lấy các điểm A', B' và C' sao cho PA', PB' và PC' theo thứ tự song song với AB, BC và CA.

1) Tìm mối liên hệ giữa độ dài các cạnh của tam giác $A'B'C'$ với các khoảng cách từ P đến các đỉnh của tam giác đều ABC. Chứng minh rằng có một điểm P duy nhất sao cho tam giác $A'B'C'$ là tam giác đều.

2) Chứng minh rằng với mọi điểm P nằm trong tam giác ABC, ta có : $\angle BPC - \angle B'A'C' = \angle CPA - \angle C'B'A' = \angle APB - \angle A'C'B'$ ($= \varphi$) và giá trị chung φ của các hiệu này không phụ thuộc vào vị trí của điểm P.

3) Tìm quỹ tích các điểm P nằm trong tam giác ABC sao cho tam giác $A'B'C'$ vuông ở A' ; hãy chỉ rõ cách dựng quỹ tích này.

NGÀY THỨ HAI (*Thời gian : 150 phút*)

Câu 5. Chứng minh rằng

$$\sqrt{2 + \sqrt{3\sqrt{4 \ldots \sqrt{2000}}}} < 3$$

Câu 6. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3(y^2 + 3y + 3) = 3y^2 \\ y^3(z^2 + 3z + 3) = 3z^2 \\ z^3(x^2 + 3x + 3) = 3x^2 \end{cases}$$

Câu 7. Tìm tất cả các bộ ba số tự nhiên lớn hơn 1 thỏa mãn điều kiện sau : tích của hai số bất kì trong ba số ấy cộng với 1, chia hết cho số thứ ba.

Câu 8a. (*dành riêng cho học sinh thi vào chuyên toán*).

Tam giác XYZ có các đỉnh X, Y, Z lần lượt nằm trên các cạnh BC, CA, AB của một tam giác ABC gọi là *nội tiếp* tam giác ABC.

1) Gọi Y' và Z' là hình chiếu vuông góc của Y và Z trên cạnh BC, chứng minh rằng nếu tam giác XYZ đồng dạng với tam giác ABC thì $Y'Z' = \frac{1}{2}BC$.

2) Trong số những tam giác XYZ nội tiếp tam giác ABC theo nghĩa trên và đồng dạng với tam giác ABC, hãy xác định tam giác có diện tích nhỏ nhất.

Câu 8b. (*dành riêng cho học sinh thi vào chuyên tin*)

Cho lưới ô vuông kích thước $n \times n$ (với n nguyên dương), người ta đánh số thứ tự các dòng lần lượt từ trên xuống dưới là 1, 2, ..., n, đánh số thứ tự các cột từ trái qua phải là 1, 2, ..., n. Một ô vuông nằm trên dòng thứ i, cột thứ j được kí hiệu là (i, j).

Có một *quy tắc* (bao gồm một số bước cần làm) để ghi các số tự nhiên nhất định vào lưới ô vuông nói trên. Làm theo quy tắc đó, khi n = 2, 3, 4, 5 ta lần lượt thu được các kết quả như sau :

a) $n = 2$

	1	2
1	1	1
2	1	1

b) $n = 3$

	1	2	3
1	1	2	1
2	3	4	3
	1	2	1

c) $n = 4$

	1	2	3	4
1	1	2	2	1
2	3	4	4	3
3	3	4	4	3
4	1	2	2	1

d) $n = 5$

	1	2	3	4	5
1	1	2	3	2	1
2	4	5	6	5	4
3	7	8	9	8	7
4	4	5	6	5	4
5	1	2	3	2	1

Với mỗi n, người ta kí hiệu số đã ghi trong ô (i, j) là $f(n, i, j)$, chẳng hạn có : $f(2, 2, 2) = 1$; $f(3, 2, 3) = 3$; $f(4, 2, 3) = 4$. Cho biết thêm n có dạng $n = 2q+r$, trong đó $0 \le r < 2$ và cho $k = q + r$.

1) Hãy tìm và phát biểu quy tắc ghi số vào lưới ô vuông kích thước $n \times n$ đã nói ở trên.

Sử dụng quy tắc đã phát biểu, ghi các số vào lưới ô vuông trong các trường hợp $n = 6$, $n = 7$, $n = 8$.

2) Với quy tắc đã phát biểu, ở mỗi bước hãy chỉ ra công thức tính $f(n, i, j)$ khi biết trước k, n, j trong đó $0 \le i, j \le n$, còn n và k đã cho biết ở trên.

HỌ TIẾP TUYẾN với ĐƯỜNG TRÒN

BÙI VĂN VIỆN
(GV trường THPT bán công Nguyễn Thái Bình, Tp. Hồ Chí Minh)

Có nhiều cách tìm phương trình tiếp tuyến với đường tròn và tọa độ của tiếp điểm. Sau đây là một cách tương đối ngắn gọn.

Cho đường tròn $(C): (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.

Tiếp tuyến với (C) tại $M_o(x_o, y_o) \in (C)$ có dạng $(x-a)(x_o-a) + (y-b)(y_o-b) = R^2$.

$$\Leftrightarrow (x-a)\left(\frac{x_o-a}{R}\right) + (y-b)\left(\frac{y_o-b}{R}\right) = R.$$

Ta có $\left(\frac{x_o-a}{R}\right)^2 + \left(\frac{y_o-b}{R}\right)^2 = 1$ vì $M_o \in (C)$.

Vì vậy có thể đặt $\frac{x_o-a}{R} = \cos\alpha$, $\frac{y_o-b}{R} = \sin\alpha$, $\alpha \in [0, 2\pi)$ và mọi tiếp tuyến d_α của (C) có dạng

$$(x-a)\cos\alpha + (y-b)\sin\alpha - R = 0$$

Ta gọi các tiếp tuyến d_α với tham số α là *họ tiếp tuyến* của (C). Tọa độ tiếp điểm của (C) với d_α là $x_o = a + R\cos\alpha$, $y_o = b + R\sin\alpha$.

Ta áp dụng phương pháp này để giải các bài toán dưới đây.

Bài toán 1. *Cho đường tròn* (C) *:*
$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$$

Viết phương trình tiếp tuyến với (C) đi qua A (3, 2). Tìm tọa độ tiếp điểm.

Giải. Họ tiếp tuyến với (C) là d_α :

$(x-1)\cos\alpha + (y-1)\sin\alpha - 1 = 0$

Do $A(3, 2) \in d_\alpha \Rightarrow 2\cos\alpha + \sin\alpha - 1 = 0 \Rightarrow$ $\sin\alpha = 1 - 2\cos\alpha$ thay vào đẳng thức $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow (1 - 2\cos\alpha)^2 + \cos^2\alpha = 1$

$\Rightarrow 5\cos^2\alpha - 4\cos\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha = 0$ hay $\cos\alpha = \frac{4}{5}$

• $\cos\alpha = 0 \Rightarrow \sin\alpha = 1 \Rightarrow (d_\alpha) : y - 2 = 0$ và tiếp điểm $E(x_o, y_o)$ với $x_o = 1 + \cos\alpha = 1$; $y_o = 1 + \sin\alpha = 2$

• $\cos\alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin\alpha = -\frac{3}{5}$

$\Rightarrow (d_\alpha) : \frac{4}{5}(x-1) - \frac{3}{5}(y-1) - 1 = 0$

$\Rightarrow (d_\alpha) : 4x - 3y - 6 = 0$

và tiếp điểm $F(x_o, y_o)$ với $x_o = 1 + \frac{4}{5} = \frac{9}{5}$;

$y_o = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$.

Bài toán 2. *Cho hai đường tròn*

$(C_1) : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$

$(C_2) : (x-2)^2 + (y+1)^2 = 4.$

Viết phương trình tiếp tuyến chung của (C_1) *và* (C_2).

Giải. Họ tiếp tuyến của (C_1) là

$$(d_1) : (x-1)\cos\alpha + (y-1)\sin\alpha - 1 = 0 \quad (1)$$

Họ tiếp tuyến của (C_2) là

$$(d_2) : (x-2)\cos\beta + (y+1)\sin\beta - 2 = 0 \quad (2)$$

Để tìm tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2), ta tìm α và β sao cho d_1 trùng d_2 (các bạn tự giải), suy ra $\alpha = \beta$ và ta có :

$$\begin{cases}(x-1)\cos\alpha + (y-1)\sin\alpha - 1 = 0 & (1')\\ (x-2)\cos\alpha + (y+1)\sin\alpha - 2 = 0 & (2')\end{cases}$$

Thay $(x-1)\cos\alpha + (y-1)\sin\alpha = 1$ từ (1') vào (2'), có $-\cos\alpha + 2\sin\alpha - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha = -1 + 2\sin\alpha \quad (*)$$

Thay vào đẳng thức $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ được

$\sin^2\alpha + (2\sin\alpha - 1)^2 = 1$

$\Leftrightarrow 5\sin^2\alpha - 4\sin\alpha = 0$

$\Leftrightarrow \sin\alpha = 0$ hay $\sin\alpha = \frac{4}{5}$

• $\sin\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha = -1 \Rightarrow (d_\alpha) : x = 0$

• $\sin\alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{3}{5}$, còn $\cos\alpha = \frac{-3}{5}$ không thỏa mãn (*).

$\Rightarrow (d_\alpha) : 3(x-1) + 4(y-1) - 5 = 0$

$\Rightarrow (d_\alpha) : 3x + 4y - 12 = 0$

Vậy có hai tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2) với phương trình :

$x = 0$ và $3x + 4y - 12 = 0$ ./.

DÀNH CHO THI VÀO ĐẠI HỌC

Từ HỆ THỨC LƯỢNG GIÁC ĐƠN GIẢN đến ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC

NGUYỄN PHÚ CHIẾN
(GV THPT chuyên Ngoại ngữ, ĐH Ngoại ngữ, ĐHQG Hà Nội)

Cho tam giác ABC, chúng ta có thể dễ dàng chứng minh các đẳng thức cơ bản sau đây :

1) $\mathrm{tg}A + \mathrm{tg}B + \mathrm{tg}C = \mathrm{tg}A.\mathrm{tg}B.\mathrm{tg}C$ (ΔABC không vuông)

2) $\mathrm{cotg}A.\mathrm{cotg}B + \mathrm{cotg}B.\mathrm{cotg}C + \mathrm{cotg}C.\mathrm{cotg}A = 1$

3) $\mathrm{tg}\frac{A}{2}.\mathrm{tg}\frac{B}{2} + \mathrm{tg}\frac{B}{2}.\mathrm{tg}\frac{C}{2} + \mathrm{tg}\frac{C}{2}.\mathrm{tg}\frac{A}{2} = 1$

4) $\mathrm{cotg}\frac{A}{2} + \mathrm{cotg}\frac{B}{2} + \mathrm{cotg}\frac{C}{2} = \mathrm{cotg}\frac{A}{2}.\mathrm{cotg}\frac{B}{2}.\mathrm{cotg}\frac{C}{2}$

Từ đó có thể chứng minh các bất đẳng thức sau :

5) $\mathrm{tg}A + \mathrm{tg}B + \mathrm{tg}C \geq 3\sqrt{3}$ (tam giác nhọn)

6) $\mathrm{cotg}A + \mathrm{cotg}B + \mathrm{cotg}C \geq \sqrt{3}$

7) $\mathrm{tg}\frac{A}{2} + \mathrm{tg}\frac{B}{2} + \mathrm{tg}\frac{C}{2} \geq \sqrt{3}$

8) $\mathrm{cotg}\frac{A}{2} + \mathrm{cotg}\frac{B}{2} + \mathrm{cotg}\frac{C}{2} \geq 3\sqrt{3}$.

Tiếp theo, chúng ta sẽ tìm cách kết hợp các kết quả trên với một số đẳng thức đơn giản để tạo ra những bài toán mới.

1) Đẳng thức thứ nhất: $\mathrm{tg}x + \mathrm{cotg}x = \frac{2}{\sin 2x}$

Áp dụng vào tam giác ABC ta nhận được :

$\mathrm{tg}\frac{A}{2} + \mathrm{cotg}\frac{A}{2} = \frac{2}{\sin A}$, $\mathrm{tg}\frac{B}{2} + \mathrm{cotg}\frac{B}{2} = \frac{2}{\sin B}$,

$\mathrm{tg}\frac{C}{2} + \mathrm{cotg}\frac{C}{2} = \frac{2}{\sin C}$

Cộng theo từng vế các đẳng thức trên dẫn đến :

$$\mathrm{tg}\frac{A}{2} + \mathrm{tg}\frac{B}{2} + \mathrm{tg}\frac{C}{2} + \mathrm{cotg}\frac{A}{2} + \mathrm{cotg}\frac{B}{2} + \mathrm{cotg}\frac{C}{2} = \frac{2}{\sin A} + \frac{2}{\sin B} + \frac{2}{\sin C}$$

Kết hợp với hệ thức (4) ta được :

Bài toán 1.1. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta có :

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tg}\frac{A}{2} + \mathrm{tg}\frac{B}{2} + \mathrm{tg}\frac{C}{2} + \mathrm{cotg}\frac{A}{2}.\mathrm{cotg}\frac{B}{2}.\mathrm{cotg}\frac{C}{2}\right)$$

(Đề thi ĐH Ngoại thương 1998)

Nếu kết hợp với các hệ thức (7) và (8) chúng ta có thêm một số bài toán sau :

Bài toán 1.2. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta có :

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} - \frac{1}{2}.\mathrm{cotg}\frac{A}{2}.\mathrm{cotg}\frac{B}{2}.\mathrm{cotg}\frac{C}{2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Bài toán 1.3. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta có :

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} - \frac{1}{2}\left(\mathrm{tg}\frac{A}{2} + \mathrm{tg}\frac{B}{2} + \mathrm{tg}\frac{C}{2}\right) \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Bài toán 1.4. Chứng minh trong trong mọi tam giác ABC ta có : $\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \geq 2\sqrt{3}$

Ở các bất đẳng thức trên, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều. Do đó chúng ta cũng có thể phát biểu lại các bài toán trên dưới dạng bài toán về nhận dạng tam giác đều.

Áp dụng vào tam giác ABC theo hướng thứ hai :

$\mathrm{tg}A + \mathrm{cotg}A = \frac{2}{\sin 2A}$, $\mathrm{tg}B + \mathrm{cotg}B = \frac{2}{\sin 2B}$,

$\mathrm{tg}C + \mathrm{cotg}C = \frac{2}{\sin 2C}$

Cộng từng vế ta có :

$$\mathrm{tg}A + \mathrm{tg}B + \mathrm{tg}C + \mathrm{cotg}B + \mathrm{cotg}C = \frac{2}{\sin 2A} + \frac{2}{\sin 2B} + \frac{2}{\sin 2C}$$

Từ các hệ thức (1), (5), (6) và bằng cách tương tự như trên, chúng ta có các bài toán sau :

Bài toán 1.5. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC không phải là tam giác vuông ta có :

$$\frac{1}{\sin 2A} + \frac{1}{\sin 2B} + \frac{1}{\sin 2C} = \frac{1}{2}(\mathrm{tg}A.\mathrm{tg}B.\mathrm{tg}C + \mathrm{cotg}A + \mathrm{cotg}B + \mathrm{cotg}C)$$

Bài toán 1.6. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC không phải là tam giác vuông ta có :

$$\frac{1}{\sin 2A} + \frac{1}{\sin 2B} + \frac{1}{\sin 2C} - \frac{1}{2}\mathrm{tg}A\,\mathrm{tg}B\,\mathrm{tg}C \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Bài toán 1.7. Chứng minh rằng trong mọi tam giác nhọn ABC ta có :

$$\frac{1}{\sin 2A}+\frac{1}{\sin 2B}+\frac{1}{\sin 2C}-\frac{1}{2}(\cot g A+\cot g B+\cot g C)$$
$$\ge \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Bài toán 1.8. Chứng minh rằng trong mọi tam giác nhọn ABC ta có :

$$\frac{1}{\sin 2A}+\frac{1}{\sin 2B}+\frac{1}{\sin 2C}\ge 2\sqrt{3}$$

2) Đẳng thức thứ hai: $\frac{1}{\sin x}-\cot g x=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$

Áp dụng vào tam giác ABC ta nhận được :

$$\frac{1}{\sin A}-\cot g A=\operatorname{tg}\frac{A}{2},\ \frac{1}{\sin B}-\cot g B=\operatorname{tg}\frac{B}{2},$$
$$\frac{1}{\sin C}-\cot g C=\operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

Cộng từng vế các đẳng thức trên ta được :

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}-(\cot g A+\cot g B+\cot g C)$$
$$=\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

Để ý đến (5) là $\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\ge\sqrt{3}$ (đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác đều) ta có bài toán sau :

Bài toán 2.1. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tam giác ABC đều là :

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}-(\cot g A+\operatorname{tg} B+\cot g C)=\sqrt{3}$$

(Đề thi ĐH Bách khoa Hà Nội - 1999)

Nếu sử dụng $\cot g A+\cot g B+\cot g C\ge\sqrt{3}$ (đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác đều) ta có bài toán khác :

Bài toán 2.2. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tam giác ABC đều là :

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}-\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)=\sqrt{3}$$

Áp dụng vào tam giác ABC theo hướng thứ hai :

$$\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}-\cot g\frac{A}{2}=\operatorname{tg}\frac{A}{4},\ \frac{1}{\sin\frac{B}{2}}-\cot g\frac{B}{2}=\operatorname{tg}\frac{B}{4},$$
$$\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}-\cot g\frac{C}{2}=\operatorname{tg}\frac{C}{4}$$

Cộng theo từng vế các đẳng thức trên ta được :

$$\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}-\left(\cot g\frac{A}{2}+\cot g\frac{B}{2}+\cot g\frac{C}{2}\right)$$
$$=\operatorname{tg}\frac{A}{4}+\operatorname{tg}\frac{B}{4}+\operatorname{tg}\frac{C}{4}$$

Đến đây, chúng ta có thể kết hợp với (4) và (8) để có các bài toán :

Bài toán 2.3. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có :

$$\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}$$
$$=\operatorname{tg}\frac{A}{4}+\operatorname{tg}\frac{B}{4}+\operatorname{tg}\frac{C}{4}+\cot g\frac{A}{2}.\cot g\frac{B}{2}.\cot g\frac{C}{2}$$

Bài toán 2.4. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có :

$$\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}-\left(\operatorname{tg}\frac{A}{4}+\operatorname{tg}\frac{B}{4}+\operatorname{tg}\frac{C}{4}\right)$$
$$\ge 3\sqrt{3}$$

Áp dụng vào tam giác ABC theo hướng thứ ba :

$$\frac{1}{\sin 2A}-\cot g 2A=\operatorname{tg}A,\quad \frac{1}{\sin 2B}-\cot g 2B=\operatorname{tg}B,$$
$$\frac{1}{\sin 2C}-\cot g 2C=\operatorname{tg}C$$

Cộng theo từng vế các đẳng thức trên ta có :

$$\frac{1}{\sin 2A}+\frac{1}{\sin 2B}+\frac{1}{\sin 2C}-$$
$$-(\cot g 2A+\cot g 2B+\cot g 2C)=\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C$$

Kết hợp với các hệ thức (1) trong tam giác không vuông và (5) trong tam giác nhọn ta có các bài toán :

Bài toán 2.5. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC không có góc vuông ta có :

$$\frac{1}{\sin 2A}+\frac{1}{\sin 2B}+\frac{1}{\sin 2C}$$
$$-(\cot g 2A+\cot g 2B+\cot g 2C)=\operatorname{tg}A.\operatorname{tg}B.\operatorname{tg}C$$

Bài toán 2.6. Chứng minh rằng với mọi tam giác nhọn ABC ta có :

$$\frac{1}{\sin 2A}+\frac{1}{\sin 2B}+\frac{1}{\sin 2C}-$$
$$-(\cot g 2A+\cot g 2B+\cot g 2C)\ge 3\sqrt{3}$$

Như vậy có thể tạo ra nhiều bài toán mới và hay bằng cách kết hợp một số hệ thức lượng giác cơ bản trong tam giác với chỉ một đẳng thức lượng giác đơn giản.

Để kết thúc, đề nghị bạn đọc có thể suy nghĩ tự mình tạo ra bài toán mới theo cách làm ở trên nhờ sử dụng mỗi đẳng thức lượng giác sau :

1) $\cot g x-\operatorname{tg}x=2\cot g 2x,$

2) $\frac{1}{\sin x}+\cot g x=\cot g\frac{x}{2}$

ĐỀ THI TUYỂN SINH MÔN TOÁN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC THƯƠNG MẠI - NĂM 2000

Câu I:

1. Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số :

$$y = x^3 - 3x + 1$$

2. Cho điểm $A(x_o, y_o)$ thuộc (C), tiếp tuyến với (C) tại A cắt (C) tại điểm B khác A. Tìm hoành độ điểm B theo x_o.

Câu II: Cho hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + ay - a = 0 \\ x^2 + y^2 - x = 0 \end{cases}$$

1. Tìm tất cả các giá trị của a để hệ phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

2. Gọi (x_1, y_1), (x_2, y_2) là các nghiệm của hệ đã cho, hãy chứng minh $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \le 1$.

Dấu bằng xảy ra khi nào ?

Câu III:

1. Giải phương trình :

$$\sqrt{3}\sin 2x - 2\cos^2 x = 2\sqrt{2 + 2\cos 2x}$$

2. Hãy chứng minh : Trong ΔABC nếu cotg$A$, cotg$B$, cotg$C$ theo thứ tự tạo thành cấp số cộng thì a^2, b^2, c^2 cũng tạo thành cấp số cộng.

Câu IV:

1. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số :

$$y = \sin^6 x + \cos^6 x + a\sin x\cos x$$

2. Tính tích phân : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sin x\, dx}{(\sin x + \cos x)^3}$

Câu V: 1. Cho ΔABC, biết $A(2, -1)$ và phương trình hai đường phân giác trong của góc B và góc C lần lượt là :

$$(d_B) : x - 2y + 1 = 0$$

$$(d_C) : x + y + 3 = 0$$

Tìm phương trình của đường thẳng chứa cạnh BC.

2. Viết phương trình của đường thẳng đi qua điểm $M(2, -1, 0)$, vuông góc và cắt đường thẳng (d) có phương trình :

$$\begin{cases} 5x + y + z + 2 = 0 \\ x - y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1:

1) Bạn đọc tự giải.

2) Vì $A(x_o, y_o) \in (C)$ nên $y_o = x_o^3 - 3x_o + 1$

Phương trình tiếp tuyến (d) tại A của (C) là

$$y - f(x_o) = f'(x_o)(x - x_o)$$

$$\Leftrightarrow y - (x_o^3 - 3x_o + 1) = (3x_o^2 - 3)(x - x_o)$$

Hoành độ điểm chung của (d) và (C) là các nghiệm của phương trình :

$$(x^3 - 3x + 1) - (x_o^3 - 3x_o + 1) = (3x_o^2 - 3)(x - x_o)$$

$$\Leftrightarrow (x - x_o)^2(x + 2x_o) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_o \\ x = -2x_o \end{array}\right.$$

Từ đó ta thấy : nếu $x_o \neq 0$ thì (d) cắt (C) tại B có hoành độ $x_B = -2x_o$ mà B khác A.

Câu II:

1) Viết hệ về dạng

$$\begin{cases} x + a(y - 1) = 0 & (1) \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} & (2) \end{cases}$$

Phương trình (1) là phương trình đường thẳng (Δ) quay quanh $A(0; 1)$ và phương trình (2) là phương trình đường tròn (C) tâm $I\left(\frac{1}{2}; 0\right)$, bán kính $R = \frac{1}{2}$ (bạn đọc tự vẽ hình kiểm tra). Ta thấy hệ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ khoảng cách từ I tới (Δ) nhỏ hơn $R \Leftrightarrow \dfrac{\left|\frac{1}{2} - a\right|}{\sqrt{1 + a^2}} < \dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow 3a^2 - 4a < 0 \Leftrightarrow 0 < a < \frac{4}{3}$$

2) Với $0 < a < \frac{4}{3}$ thì (Δ) cắt (C) tại M, N mà $MN \le 2R = 1$. Vì $M(x_1, y_1)$ và $N(x_2, y_2)$ nên $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \le 1 \Rightarrow$ đpcm.

Câu III.

1) PT $\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin x\cos x - 2\cos^2 x = 4|\cos x|$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos x \ge 0 \\ \cos x(\sqrt{3}\sin x - \cos x - 2) = 0 \end{cases} \\ \\ \begin{cases} \cos x < 0 \\ \cos x(\sqrt{3}\sin x - \cos x + 2) = 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \begin{cases} \cos x > 0 \\ \sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = 1 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases} \\ \begin{cases} \cos x < 0 \\ \sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = -1 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in Z)$$

2) Áp dụng định lí hàm số côsin và hàm số sin ta có

$$\text{cotg}A = \frac{R(b^2+c^2-a^2)}{abc}\ ; \quad \text{cotg}B = \frac{R(c^2+a^2-b^2)}{abc}\ ;$$

$$\text{cotg}C = \frac{R(a^2+b^2-c^2)}{abc}$$

Nếu cotg$A$, cotg$B$, cotg$C$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng thì : cotg$A$ + cotg$C$ = 2cotg$B$

$$\Rightarrow \frac{R}{abc}\left[(b^2+c^2-a^2)+(a^2+b^2-c^2)\right] =$$

$$= \frac{2R}{abc}(c^2+a^2-b^2)$$

$$\Rightarrow 2b^2 = 2(c^2+a^2-b^2)$$

$$\Rightarrow 2b^2 = a^2 + c^2 \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Câu IV. 1) $y = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x + \frac{a}{2}\sin 2x$

Đặt $\sin 2x = t \in [-1; 1]$ thì $y = -\frac{3}{4}t^2 + \frac{a}{2}t + 1$

Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho chính là GTLN và GTNN của hàm số

$f(t) = -\frac{3}{4}t^2 + \frac{a}{2}t + 1$ với $t \in [-1; 1]$.

Vì $y' = -\frac{3}{2}t + \frac{a}{3}$ có nghiệm $t = \frac{a}{3}$ nên so sánh $\frac{a}{3}$ với ± 1 sẽ có các khả năng

KN1: $a < -3$ thì $\frac{a}{3} < -1$, khi đó :

$$y_{LN} = f(-1) = \frac{1}{4} - \frac{a}{2};\ y_{NN} = f(1) = \frac{1}{4} + \frac{a}{2}$$

KN2: $a > 3$ thì $\frac{a}{3} > 1$, khi đó :

$$y_{LN} = f(1) = \frac{1}{4} + \frac{a}{2};\quad y_{NN} = f(-1) = \frac{1}{4} - \frac{a}{2}$$

KN3: $-3 \le a \le 3$ hay $-1 \le \frac{a}{3} \le 1$ thì

$$y_{LN} = f\left(\frac{a}{3}\right) = \frac{a^2}{12} + 1 \text{ và}$$

$$y_{NN} = \min[f(1); f(-1)] = \min\left(\frac{1}{4} + \frac{a}{2};\ \frac{1}{4} - \frac{a}{2}\right) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{4} + \dfrac{a}{2} & \text{nếu } -3 \le a \le 0 \\ \dfrac{1}{4} - \dfrac{a}{2} & \text{nếu } 0 < a \le 3 \end{cases}$$

2) Gọi tích phân cần tính là I:

Đặt $u = \frac{\pi}{2} - x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - u$ ta có :

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{4\sin u\, du}{(\cos u + \sin u)^3} = \int_0^{\pi/2} \frac{4\cos x\, dx}{(\sin x + \cos x)^3} = J.$$

Mặt khác :

$$2I = I + J = \int_0^{\pi/2} \frac{4dx}{(\sin x + \cos x)^2} = \int_0^{\pi/2} \frac{2d\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= -2\text{cotg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\pi/2} = -2(-1-1) = 4$$

$$\Rightarrow I = 2.$$

Câu V.

1) Gọi điểm đối xứng của $A(2, -1)$ qua các đường thẳng (d_B) và (d_C) theo thứ tự là A_1 và A_2, ta tính được : $A_1(0, 3)$ và $A_2(-2, -5)$.

Đường thẳng đi qua B, C cũng là đường thẳng đi qua $A_1(0, 3)$, $A_2(-2, -5)$ nên có phương trình :

$$\frac{y-3}{x-0} = \frac{-5-3}{-2-0}$$

$$\Leftrightarrow y - 3 = 4x \Leftrightarrow 4x - y + 3 = 0$$

(Xem tiếp trang 23)

ĐÓN ĐỌC THTT số 287 (5-2001)

Mùa thi sắp đến, các sĩ tử chuẩn bị khăn gói đi thi Đại học nên biết :

- Đề thi tuyển sinh môn Toán vào Học viện Kĩ thuật quân sự năm 2000 với lời giải.
- Các tính chất của một tam giác đặc biệt.

Còn các bạn sắp vượt cấp lên THPT hãy đọc :

- Đề thi môn Toán vào khối chuyên Toán - Tin ĐHKHTN- ĐHQG Hà Nội.
- Chứng minh bất đẳng thức bằng phương pháp phản chứng.

Các bạn sẽ được làm quen với :

- Một hình học kì lạ.
- Cách chứng minh ngắn gọn một bất đẳng thức hình học do Garfulkel nêu ra.
- Đường xoắn ốc vàng trong hội họa

và các chuyên mục vui thường lệ : Câu lạc bộ, Giải trí toán học, Sai lầm ở đâu, Cuộc chơi Đoán tuổi và biết ai qua ảnh...

THTT

TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC SƠ CẤP

ƯỚC LƯỢNG KHOẢNG CÁCH GIỮA CÁC ĐIỂM ĐẶC BIỆT TRONG TAM GIÁC

ĐINH THÀNH TRUNG
(*Khoa Toán – ĐHKHTN–ĐHQG Hà Nội*)

Trong bài báo này, ta sử dụng các kí hiệu quen thuộc G, H, I, O lần lượt là trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn nội tiếp và tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC với ba cạnh $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Trước hết để phục vụ cho mục đích của bài báo này, đề nghị các bạn giải bài toán sau coi như bài tập nhỏ.

Bài tập 1. *Chứng minh rằng trong ΔABC bất kì ta có hệ thức sau*

$$a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$$

Ta sẽ tính các độ dài OG, OI, HI, IG... thông qua a, b, c và bán kính R của đường tròn ngoại tiếp ΔABC, sau đó so sánh các khoảng cách này.

• *Tính OG*: Xuất phát từ đẳng thức quen thuộc $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$, ta sẽ được $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, bình phương vô hướng hai vế rồi sử dụng hệ thức

$2\overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OB} = OA^2 + OB^2 - (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB})^2 = 2R^2 - c^2$ và 2 hệ thức tương tự ta tính được khoảng cách OG là $OG^2 = R^2 - \dfrac{a^2+b^2+c^2}{9}$ (1)

• Để tính *khoảng cách OI* ta sẽ sử dụng hệ thức trong bài tập 1, phân tích $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OC}$ rồi nhóm lại ta được $(a+b+c)\overrightarrow{OI} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}$

Tiếp tục bình phương vô hướng hai vế và sử dụng phép biến đổi ở trên suy ra

$$(a+b+c)^2OI^2 =$$
$$= R^2(a^2+b^2+c^2) + ab(2R^2-c^2) + bc(2R^2-a^2) +$$
$$+ ca(2R^2-b^2) \Leftrightarrow OI^2 = R^2 - \frac{abc}{a+b+c} \quad (2)$$

Đến đây để ý rằng với a, b, c là các số dương thì theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$(a^2+b^2+c^2)(a+b+c) \geq 9abc$$

chúng ta sẽ thu được $OG \leq OI$. (3)

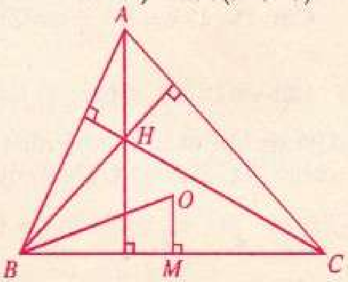
• *Khoảng cách IH* cũng có thể tính được nhờ hệ thức ở bài tập 1 theo cách tương tự.

$$(a+b+c)\overrightarrow{HI} = a\overrightarrow{HA} + b\overrightarrow{HB} + c\overrightarrow{HC}$$

Bình phương vô hướng hai vế, biến đổi $2\overrightarrow{HA}\,.\,\overrightarrow{HB} = HA^2 + HB^2 - (\overrightarrow{HA} - \overrightarrow{HB})^2$ suy ra

$$(a+b+c)^2HI^2 =$$
$$= (a+b+c)(aHA^2 + bHB^2 + cHC^2) - abc(a+b+c)$$

Chú ý rằng các độ dài HA, HB, HC có thể tính theo cách sau (hình 1). $HA^2 = 4OM^2 = 4R^2 - a^2$, $HB^2 = 4R^2 - b^2$, $HC^2 = 4R^2 - c^2$, thay vào hệ thức ở trên ta được



Hình 1

$$HI^2 = 4R^2 - \frac{a^3+b^3+c^3+abc}{a+b+c} \quad (4)$$

Từ $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$ chúng ta có ngay

$$HI \leq 2OI \quad (5)$$

Đây chính là nội dung một bài toán trong kì thi chọn đội tuyển Olympic Việt Nam năm 1993.

• Một câu hỏi đặt ra là *giữa HI và OG có mối quan hệ như thế nào ?* Từ sự chênh lệch hệ số của R^2 giữa HI^2 và OG^2 ta thử so sánh HI^2 với $4OG^2$. Ta có

$$4OG^2 - HI^2 = \frac{a^3+b^3+c^3+abc}{a+b+c} - \frac{4(a^2+b^2+c^2)}{9}$$

Phải chăng ta có bất đẳng thức

$$\frac{a^3+b^3+c^3+abc}{a+b+c} \geq \frac{4(a^2+b^2+c^2)}{9}\ ?$$

CÂU LẠC BỘ THTT

CUỘC CHƠI ĐẦU THIÊN NIÊN KÍ MỚI

Mời các bạn tham gia cuộc chơi hàng tháng
ĐOÁN TUỔI VÀ BIẾT AI QUA ẢNH

Bạn hãy cắt phiếu cuộc chơi và *dán ở bên ngoài phong bì* gửi Tòa soạn THTT sau khi đã điền câu trả lời. Bên trong phong bì bạn có thể viết cảm tưởng về cuộc chơi nhưng không gửi bài khác. Nhớ ghi địa chỉ của bạn !

THAM GIA CUỘC CHƠI ĐẦU THIÊN NIÊN KỈ

Người trong ảnh ?
Họ và tên :
. . . .
Ảnh chụp khi . . . . tuổi.

Khẳng định trên tương đương với

$5(a^3+b^3+c^3) + 9abc \geq 4ab(a+b) + 4bc(b+c) + 4ca(c+a)$

Việc kiểm tra tính đúng đắn của bất đẳng thức này không phải là dễ, tuy nhiên nếu bạn bình tĩnh suy xét sẽ thấy nó chỉ là hệ quả của một bất đẳng thức quen thuộc sau mà nếu bạn chưa gặp thì có thể chứng minh lại xem như một bài tập

Bài tập 2. *Chứng minh rằng với 3 số thực không âm a, b, c ta có bất đẳng thức*

$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq$

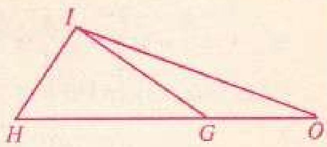
$\geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a).$

Như vậy ta đã có được điều mong muốn

$HI \leq 2OG \qquad (6)$

Từ (3) ta thấy ngay bất đẳng thức (5) chỉ là hệ quả của (6).

• Đến đây các bạn sẽ thấy còn một đại lượng ta chưa đề cập tới, đó chính là *khoảng cách IG*. Dùng hệ thức của bài tập 1 kết hợp với công thức tính độ dài đường trung tuyến các bạn có thể tìm độ dài IG, ở đây tôi muốn đưa ra cách làm khác bằng việc sử dụng hệ thức Stewart cho tam giác IOH (h. 2)



Hình 2

$$IH^2.OG + IO^2.HG = IG^2.OH + HG.GO.OH.$$

Ta đã biết theo định lí Euler

$OG = \frac{1}{3}OH,\ HG = \frac{2}{3}OH$ do vậy ta sẽ có

$IG^2 = \frac{1}{3}IH^2 + \frac{2}{3}OI^2 - 2OG^2$, suy ra

$$IG^2 = \frac{2}{9}(a^2+b^2+c^2) - \frac{a^3+b^3+c^3+3abc}{3(a+b+c)}$$

Trong tam giác ta có bất đẳng thức quen thuộc $a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$, kết hợp với bất đẳng thức Cauchy $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$ ta sẽ có

$$IG^2 \leq 2R^2 - \frac{2abc}{a+b+c} = 2OI^2 \text{ suy ra } IG \leq \sqrt{2}\, OI$$

Để kết thúc đề nghị các bạn hãy giải bài toán sau

Bài tập 3. *Chứng minh rằng ΔABC đều khi và chỉ khi* $OH^2 = 5OI^2 + HI^2$

Các bạn đã thấy bằng những kiến thức toán học bình thường chúng ta đã tìm được những mối quan hệ tương đối thú vị giữa các khái niệm vốn đã quen thuộc. Tất nhiên sẽ còn nhiều những tính chất như vậy, tôi mong rằng các bạn hãy tiếp tục tìm tòi, khám phá để làm giàu thêm kiến thức toán học của mình.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 40

Problem. Assume that all the underground stations of London are connected so that it is possible to travel from any station to any other (if necessary, the passengers are allowed to change trains). Prove that there is an underground station such that when it is closed (the trains are not allowed to go past this station) it is still possible to go from any of the remaining stations to any other.

Solution. Let S be an arbitrary underground station and T be the farthest station from S in the sense that on the shortest way from S to T there are more or at least not fewer intermediate stations than on the shortest way from S to any other station. Now suppose that station T is closed. Then we can again go from S to any other station U different than T since the shortest way from S to U cannot go through T (otherwise, station U would be farther from S than T). Therefore, if U and V are two arbitrary stations different from T, then we can undoubtedly go from one to the other without passing station T. Indeed, we may assume that they are different than station S. Then we only need to go from U to station S and then from S to station V without passing T.

Từ mới:

underground	= ngầm
station	= ga
connect	= nối, liên kết (động từ)
possible	= có khả năng (tính từ)
necessary	= cần thiết (tính từ)
travel	= đi, di chuyển (động từ)
passenger	= hành khách (động từ)
allow	= cho phép (động từ)
change	= đổi (động từ)
train	= tàu
close	= đóng (động từ)
arbitrary	= bất kỳ (tính từ)
past	= sau (giới từ)
few	= ít (tính từ)
intermediate	= ở giữa, trung gian (tính từ)
different	= khác (tính từ)
through	= qua (giới từ)
otherwise	= nếu không (liên từ)
undoubtedly	= không còn nghi ngờ, rõ ràng (phó từ)
pass	= đi qua (động từ)
indeed	= thật vậy

NGÔ VIỆT TRUNG

ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/286. Dãy số $u_1, u_2, ..., u_k$ được xác định như sau: $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$ với $n = 1, 2, ..., k$.

Đặt $S = u_1 + u_2 + ... + u_k$. Chứng minh rằng

$$18 < \frac{1}{S} \le 24.$$

BÙI ĐÌNH THÂN

(GV THCS Tân Thuật, Kiến Xương, Thái Bình)

Bài T2/286. Giải phương trình :

$$18x^2 - 18x\sqrt{x} - 17x - 8\sqrt{x} - 2 = 0$$

TRẦN HỒNG SƠN

(GV THPT bán công Thái Thụy, Thái Bình)

Bài T3/286. Chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} \ge$$
$$\ge 2\left(\sqrt{\frac{c}{a+b}} + \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}}\right)$$

trong đó a, b, c là các số dương. Đẳng thức xảy ra khi nào ?

ĐẶNG THANH HẢI

(GV Học viện Phòng không – Không quân Sơn Tây)

Bài T4/286. Cho hình vuông $ABCD$. Trên các cạnh CB và CD lần lượt lấy các điểm E và F sao cho $\dfrac{BE}{BC} = k$ và $\dfrac{DF}{DC} = \dfrac{1-k}{1+k}$ với $0 < k < 1$. Đoạn thẳng BD cắt AE và AF tại H và G tương ứng. Đường vuông góc với EF kẻ từ A cắt BD tại P. Chứng minh rằng $\dfrac{PG}{PH} = \dfrac{DG}{BH}$

PHẠM HÙNG

(Hà Nội)

Bài T5/286. Ta gọi đường chéo chính của một lục giác lồi là đoạn thẳng nối hai đỉnh và chia lục giác thành hai tứ giác. Chứng minh rằng :

a) Với bất kì lục giác lồi có độ dài các cạnh đều bằng 1 thì tồn tại đường chéo chính có độ dài không lớn hơn 2.

b) Với bất kì lục giác lồi có độ dài các cạnh đều bằng 1 thì tồn tại đường chéo chính có độ dài lớn hơn $\sqrt{3}$.

VŨ ĐÌNH HÒA

(Viện Công nghệ thông tin)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/286. Xét dãy số (u_n) $(n = 1, 2, 3,...)$ được xác định bởi : $u_1 = 2$,

$u_n = 3u_{n-1} + 2n^3 - 9n^2 + 9n - 3$ với $n = 2, 3, ...$

Chứng minh rằng với mỗi số nguyên tố p thì $2000.\sum_{i=1}^{p-1} u_i$ chia hết cho p.

NGUYỄN THẾ BÌNH

(GV THPT chuyên Hà Giang)

Bài T7/286. Xét phương trình

$$a\cos x + b\sin 2x + c\cos 3x = x$$

a) Chứng minh rằng với bất kì các số thực a, b, c thì phương trình trên có nghiệm trong đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

b) Chứng minh rằng có các số thực a, b, c mà phương trình trên không có nghiệm trong đoạn $[u, v]$, trong đó các số u, v thỏa mãn

$-\frac{\pi}{2} \le u \le v \le \frac{\pi}{2}$ nhưng $[u, v] \ne \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

NGUYỄN MINH ĐỨC

(Viện Công nghệ thông tin)

Bài T8/286. Cho tam giác ABC không có góc tù. Chứng minh rằng :

$$\mathrm{tg}\frac{A}{2} + \mathrm{tg}\frac{B}{2} + \mathrm{tg}\frac{C}{2} + \mathrm{tg}\frac{A}{2}\,\mathrm{tg}\frac{B}{2}\,\mathrm{tg}\frac{C}{2} \ge \frac{10\sqrt{3}}{9}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

ĐỖ BÁ CHỦ

(GV THPT Đông Hưng Hà, Thái Bình)

Bài T9/286. Cho tam giác ABC không có góc tù và mỗi góc không nhỏ hơn $\dfrac{\pi}{4}$. Chứng minh rằng :

$\mathrm{cotg}A + \mathrm{cotg}B + \mathrm{cotg}C + 3\mathrm{cotg}A.\mathrm{cotg}B.\mathrm{cotg}C \le 4(2 - \sqrt{2})$

TRẦN TUẤN ĐIỆP

(GV khoa Toán ứng dụng ĐHBK Hà Nội)

Bài T10/286. Cho tứ diện $ABCD$ có các cặp cạnh đối diện bằng nhau. Gọi E là tiếp điểm của mặt (BCD) và mặt cầu tâm O nội tiếp tứ diện. Gọi K là tiếp điểm của mặt (BCD) và mặt cầu bàng tiếp tứ diện ứng với đỉnh A. Chứng minh rằng :

a) K là trực tâm của tam giác BCD.

b) $FA = 2EF$ trong đó F là giao điểm của AE và KO.

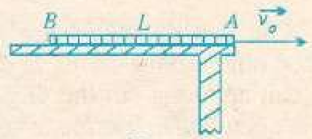
ĐÀO TAM

(GV khoa Toán, ĐHSP Vinh)

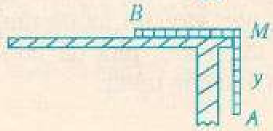
CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/286. Một sợi dây xích dài $L = 1,09$ cm được đặt trên mặt bàn nằm ngang. Truyền cho xích vận tốc ban đầu $v_o = 6$cm/s dọc theo chiều dài của nó thì nó sẽ tuột dần khỏi mặt bàn. Hỏi sau bao lâu

a) Lúc $t = 0$



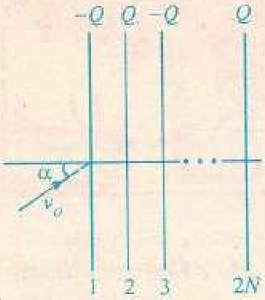
b) Thời điểm t



(kể từ lúc đầu A của xích rời khỏi mặt bàn) toàn bộ sợi dây xích sẽ rời khỏi mặt bàn và tính vật tốc v của xích lúc đó. Cho g=9,81m/s^2 và bỏ qua mọi ma sát.

NGUYỄN QUANG HẬU
(Hà Nội)

Bài L2/286. Một hệ thống gồm $2N$ lưới kim loại giống nhau được đặt song song với nhau, cách đều nhau. Khoảng cách giữa 2 lưới kề nhau là d (d rất nhỏ so với kích thước của mỗi lưới). Mỗi lưới có diện tích là S. Các lưới được tích điện theo thứ tự là : $-Q$, Q, $-Q$, ..., Q. Một electrôn e chui vào hệ thống từ tấm lưới thứ nhất với vận tốc ban đầu v_0 theo phương hợp với pháp tuyến của lưới thứ nhất một góc α. Xác định độ lớn và hướng vận tốc của electrôn khi ra khỏi hệ thống. Bỏ qua tác dụng của trọng lực.



NGUYỄN QUANG MINH
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/286. The sequence of numbers $u_1, u_2, ..., u_k$ is defined by :

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} \text{ for } n = 1, 2, ..., k.$$

Let $S = u_1 + u_2 + ... + u_k$. Prove that $18 < \frac{1}{S} \leq 24$.

T2/286. Solve the equation :

$$18x^2 - 18x\sqrt{x} - 17x - 8\sqrt{x} - 2 = 0$$

T3/286. Prove the inequality :

$$\sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} \geq$$
$$\geq \quad 2\left(\sqrt{\frac{c}{a+b}} + \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}}\right)$$

for arbitrary positive numbers a, b, c. When does equality occur ?

T4.286. Let ABCD be a square. Take the points E and F respectively on the sides CB and CD so that $\frac{BE}{BC} = k$ and $\frac{DF}{DC} = \frac{1-k}{1+k}$ where k is a given number, $0 < k < 1$. The segment BD cut AE and AF respectively at H and G. The line, passing through A, perpendicular to EF cuts BD at P. Prove that $\frac{PG}{PH} = \frac{DG}{BH}$.

T5/286. In a convex hexagon, the segment joining two of its vertices, dividing the hexagon into two quadrilaterals is called a principal diagonal. Prove that in every convex hexagon, the measure of every side of which is equal to 1, there exits a principal diagonal with measure not greater than 2 and there exists a principal diagonal with measure greater than $\sqrt{3}$.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/286. Consider the sequence of numbers (u_n) $(n = 1, 2, 3,...)$ defined by : $u_1 = 2$,
$u_n = 3u_{n-1} + 2n^3 - 9n^2 + 9n - 3$ for $n = 2, 3, ...$

Prove that for every prime number p, the number $2000.\sum_{i=1}^{p-1} u_i$ is divisible by p.

T7/286. Consider the equation

$$a\cos x + b\sin 2x + c\cos 3x = x$$

a) Prove that for arbitrary real numbers a, b, c, this equation has a root in the segment $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

b) Prove that for given u, v such that $-\frac{\pi}{2} \leq u \leq v \leq \frac{\pi}{2}$ but $[u, v] \neq \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, there exist real numbers a, b, c so that the above mentioned equation has no root in the segment $[u, v]$.

T8/286. Let ABC be a triangle having no obtuse angle. Prove that :

$$\mathrm{tg}\frac{A}{2} + \mathrm{tg}\frac{B}{2} + \mathrm{tg}\frac{C}{2} + \mathrm{tg}\frac{A}{2}\,\mathrm{tg}\frac{B}{2}\,\mathrm{tg}\frac{C}{2} \geq \frac{10\sqrt{3}}{9}.$$

When does equality occur ?

T9/286. Let ABC be a triangle having no obtuse angle but each angle of which is not less than $\frac{\pi}{4}$.

Prove that :

$$\mathrm{cotg}A + \mathrm{cotg}B + \mathrm{cotg}C + 3\mathrm{cotg}A.\mathrm{cotg}B.\mathrm{cotg}C \leq 4(2 - \sqrt{2})$$

T10/286. Let $ABCD$ be a tetrahedron, each side of which is equal to the opposite side. Let E and K be the touching points of the face (BCD) respectively with the inscribed sphere and with the escribed sphere in the trihedral angle with vertex A. Prove that :

a) K is the orthocenter of triangle BCD.

b) $FA = 2EF$ where F is the point of intersection of AE with KO (O is the center of the inscribed sphere).

Bài T1/282. *Tìm tất cả cặp số nguyên dương x, y sao cho* $\frac{x^3+x}{xy-1}$ *là số nguyên dương*

Lời giải. của *Vương Anh Quyền*, 8A, NK Trần Phú, **Hải Phòng**. Trước hết ta giải :

Bài toán : Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình $x+y+z=xyz$ (1)

Giải. Không hạn chế tính tổng quát ta giả sử $x \geq y \geq z$.

Khi đó ta có $x+y+z \leq 3x$

$\Rightarrow 3x \geq xyz \Rightarrow 3 \geq yz \geq z^2 \Rightarrow z = 1$

Từ $3 \geq yz$ suy ra $3 \geq y$ hay $y \in \{1, 2, 3\}$

– Nếu $y = 1$. Từ (1) $\Rightarrow x + 2 = x$ (loại)

– Nếu $y = 2$. Từ (1) $\Rightarrow x + 3 = 2x \Rightarrow x = 3$

– Nếu $y = 3$. Từ (1) $\Rightarrow x+4 = 3x$ $\Rightarrow x = 2 < y$ (loại)

Vậy phương trình (1) có nghiệm $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$ và các hoán vị của nó.

Trở lại bài toán của ta : $\frac{x^3+x}{xy-1} \in \mathbf{Z}^+$

$\Rightarrow x(x^2+1) \,\vdots\, (xy-1)$

$\Rightarrow x^2+1 \,\vdots\, (xy-)1$ (vì $(x, xy-1) = 1$)

$\Rightarrow (x^2+1+xy-1) \,\vdots\, (xy-1)$

$\Rightarrow x(x+y) \,\vdots\, (xy-1)$

$\Rightarrow (x+y) \,\vdots\, (xy-1)$ (vì $(x, xy-1) = 1$)

hay $x + y = (xy-1)z$ ($z \in \mathbf{Z}^+$)

$\Leftrightarrow x+y+z = xyz$ (2)

Đây là dạng phương trình (1) đã xét trên. Vậy ta có các cặp số x, y nguyên dương sao cho $\frac{x^3+x}{xy-1}$ là số nguyên dương như sau $(x, y) =$ (3, 2), (3, 1), (2, 1), (2, 3), (1, 2), (1, 3).

Nhận xét. 1. Rất nhiều bạn giải đúng.

2. Các bạn *Vương Bá Tuấn*, 9A, THCS Thuận Thành, **Bắc Ninh**, *Nguyễn Lâm Tuyền*, 9B, THCS Lạc Thịnh, Yên Thủy, **Hòa Bình** có nhận xét cách giải bài T1/282 tương tự bài T1/273.

BÌNH PHƯƠNG

Bài T2/282. *Cho các số thực dương x, y, z, t thỏa mãn xyzt = 1. Chứng minh rằng :*

$$\frac{1}{x^3(yz+zt+ty)} + \frac{1}{y^3(xz+zt+tx)} + \frac{1}{z^3(xt+ty+yx)} + \frac{1}{t^3(xy+yz+zx)} \geq \frac{4}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải.

Hầu hết các bạn đều biết đặt $a = \frac{1}{x}$, $b = \frac{1}{y}$, $c = \frac{1}{z}$, $d = \frac{1}{t}$ để đưa về chứng minh :

$$S = \frac{a^2}{b+c+d} + \frac{b^2}{c+d+a} + \frac{c^2}{d+a+b} + \frac{d^2}{a+b+c} \geq \frac{4}{3}$$

với $abcd = 1$ và a, b, c, d là các số dương.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki ta có :

$S[(b+c+d)+(c+d+a)+(d+a+b)+(a+b+c)]$ $\geq (a+b+c+d)^2$

$$\Rightarrow S \geq \frac{(a+b+c+d)^2}{3(a+b+c+d)} = \frac{1}{3}(a+b+c+d) \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có :

$\frac{1}{4}(a+b+c+d) \geq \sqrt[4]{abcd} = 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}(a+b+c+d) \geq \frac{4}{3} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $S \geq \frac{4}{3}$ (đpcm).

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = d = 1$ $\Leftrightarrow x = y = z = t = 1$.

Nhận xét. 1) Một số bạn còn đưa thêm nhiều cách khác để có (1), chẳng hạn : áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có $\frac{a^2}{b+c+d} + \frac{b+c+d}{9} \geq \frac{2a}{3}$

Với ba bất đẳng thức tương tự nữa sẽ suy ra (1).

2) Các bạn *Phạm Quang Chiến*, 9B, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**; *Huỳnh Thị Thùy Lam*, 7B1, THCS Phú Lâm, Tuy Hòa, **Phú Yên** đã chứng minh đến 3, 4 cách (sử dụng cả bất đẳng thức Trêbưsep!).

3) Các bạn *Nguyễn Dũng*, 8H, THCS Lê Lợi, thị xã Tam Điệp, **Ninh Bình**, *Nguyễn Thành Vinh*, 10 Toán, PTNK ĐHQG **Tp Hồ Chí Minh**; *Nguyễn Đức Thuận*, 9A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai, **Hà Tây**; *Vũ Quang Thanh*, 9B, THCS Nguyễn Hữu Tiến, Duy Tiên, **Hà Nam**; *Đỗ Anh Đông*, 9A, THCS Dân tộc nội trú Lập Thạch, **Vĩnh Phúc**, *Nguyễn Văn Tài*, 10A, THPT chuyên ban Thanh Chương I, **Nghệ An**, *Trần Thị Lệ Hằng*, 9A, THCS Hương Canh, Bình Xuyên, **Vĩnh Phúc**, *Nguyễn Lâm Tuyền*, 9B, THCS Lạc Thịnh, Yên Thủy, **Hòa Bình** đã nêu bất đẳng thức tổng quát : "Với n số dương $a_1, a_2, ..., a_n$ thỏa mãn

$\prod_{i=1}^{n} a_i = 1$ và $S = \sum_{i=1}^{n} a_i$ thì $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{S-a_i} \geq \frac{n}{n-1}$.

LTN

Bài T3/282. *Tìm tất cả các đa thức P(x) với hệ số nguyên và thỏa mãn hai điều kiện sau :*

a) P(x) > x với mọi số tự nhiên x

b) Với mỗi số nguyên dương d tùy ý thì trong dãy số (b_k) (k = 1, 2, ...) xác định bởi $b_1 = 1$, $b_{k+1} = P(b_k)$ với mọi k = 1, 2, ..., bao giờ cũng tìm được số hạng chia hết cho d.

Lời giải.

Xét dãy (b_k) nói trên. Ta có $b_{k+1} > b_k$ $\Rightarrow b_{k+1} \geq b_k + 1$.

• Nếu $b_{k+1} = b_k + 1$ $(\forall k)$ thì $P(b_k) = b_k + 1$ $\Rightarrow P(x) - x - 1 = 0$ tại vô số giá trị b_k thành thử $P(x) = x + 1$ với mọi x. Đa thức $P(x) = x + 1$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

• Giả sử tồn tại n để $b_{n+1} > b_n + 1$. Gọi m là số nguyên dương nhỏ nhất để $b_{m+1} > b_m + 1$. Khi đó $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, ..., $b_m = m$, $b_{m+1} > m+1$.

Gọi $d = b_{m+1} - 1 > m$. Ta có $b_{m+1} \equiv 1 \pmod d$ $\Rightarrow b_{m+2} = P(b_{m+1}) \equiv P(1) = P(b_1) = b_2 = 2 \pmod d$. Tương tự $b_{m+3} \equiv b_3 = 3 \pmod d$, ..., $b_{2m} \equiv m \pmod d$. Ta có dãy (b_k) (mod d) tuần hoàn với chu kì $(1, 2, ..., m)$. Vậy không có số hạng nào của dãy chia hết cho d.

Thành thử $P(x) = x + 1$ là đa thức duy nhất thỏa mãn điều kiện đầu bài.

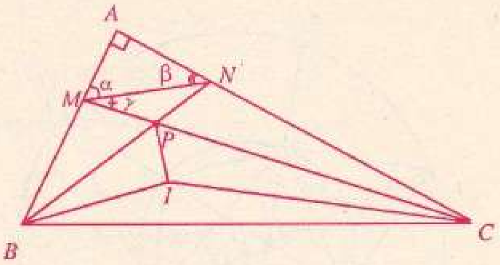
Nhận xét. Đây là một bài toán hay và tương đối khó với học sinh THCS. Thành thử chỉ có 4 bạn gửi lời giải đến. Hai bạn : *Ngô Ngọc Khiêm*, 9_2, THCS Bình Sơn, **Quảng Ngãi** và *Nguyễn Thành Tùng*, 7A1, THCS Láng Thượng, **Hà Nội** có lời giải tốt.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T4/282. *Cho tam giác ABC vuông ở A và $\angle ABC = 60^o$. Trên các cạnh AB và AC lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $\angle MCB = \angle NBA = 20^o$. Gọi số đo bằng độ của các góc AMN, ANM, CMN tương ứng là α, β, γ. Chứng minh rằng $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$*

Lời giải. Gọi P là giao điểm của BN và CM, I là giao điểm của 3 đường phân giác trong của ΔBPC. Ta có :

$\angle BPC = 180^o - (\angle PBC + \angle PCB) = 120^o$.



Suy ra $\angle MPB = \angle IPB = 60^o \Rightarrow \angle PBC = 40^o$.

Mặt khác từ giả thiết và cách dựng điểm I suy ra $\angle MBP = \angle IBP = \angle IBC = 20^o$. Do đó $\Delta MPB = \Delta IPB$ (gcg). Từ đó $PM = PI$. Tương tự ta có $PN = PI$. Suy ra tam giác PMN cân tại P. Vì vậy $\gamma = \frac{1}{2}\angle MPB = 30^o$.

Mặt khác $\alpha + \beta = \angle MBC + \angle BCM = 80^o$. Nên $\alpha = 50^o$.

Do $\alpha : \beta = 90^o$ suy tiếp ra $\beta = 40^o$.

Vậy $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$.

Nhận xét. Giải tốt bài này có các bạn :

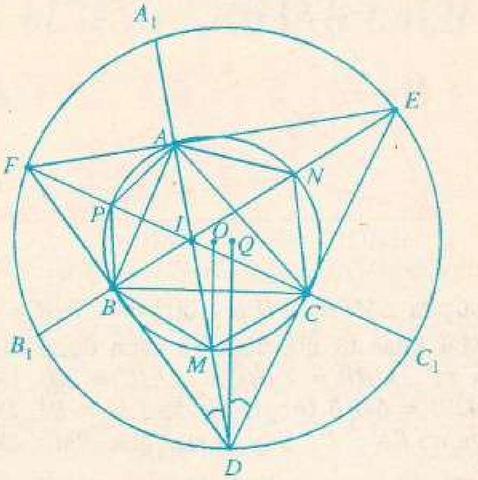
Hòa Bình: *Nguyễn Lâm Tuyền*, 9B, THCS Lạc Thịnh, Yên Thủy, *Nguyễn Thị Phương Thúy*, 9A, THCS Kim Đồng, Tân Lạc, **Vĩnh Phúc:** *Trần Hoàng Tùng*, 8A, THCS Vĩnh Tường, *Phạm Văn Hoàng*, 9B, THCS Yên Lạc, *Khổng Đức Kiên*, 9A, THCS Hương Canh, Bình Xuyên, **Hải Phòng**: *Bùi Tuấn Anh, Nguyễn Vũ Lệ, Nguyễn Thu Thúy*, 8A, THPT NK Trần Phú, **Nam Định:** *Nguyễn Đăng Hợp*, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên.

VŨ KIM THỦY

Bài T5/282. *Tam giác ABC có chu vi 2p và bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng R. Gọi D, E, F lần lượt là tâm các đường tròn bàng tiếp tam giác tương ứng với các góc đỉnh A, B, C. Chứng minh rằng diện tích tam giác DEF bằng 2pR.*

Lời giải. Vì EF, FD, DE là các đường phân giác ngoài của góc A, B, C tương ứng nên DA, EB, FC là các đường cao của tam giác DEF và chúng đều đi qua tâm I của đường tròn nội tiếp ΔABC. Điểm I nằm trong ΔABC nên ΔDEF có ba góc nhọn. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Cách 1. Gọi Q là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔDEF. Ta có $\angle QDE = 90^o - \frac{1}{2}(\angle DQE) = 90^o - \angle DFE = \angle FDA = \angle FEB = \angle FCB$ (tứ giác $FBCE$ nội tiếp). Suy ra $\angle QDE + \angle BCD$



$= 90^\circ$ nên $DQ \perp BC$. Tương tự $EQ \perp AC$, $FQ \perp AB$. Từ đó

$S(DEF) = S(BDCQ) + S(CEAQ) + S(AFBQ)$

$= \frac{1}{2}(DQ.BC + EQ.CA + FQ.AB) = DQ.p$ (1)

Lấy A_1, B_1, C_1 đối xứng với điểm I lần lượt qua EF, FD, DE thì $\angle A_1EF = \angle FEB = \angle FDA_1$ nên A_1 nằm trên đường tròn tâm Q ngoại tiếp ΔDEF. Tương tự B_1, C_1 cũng thuộc đường tròn tâm Q. Dễ thấy hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ đồng dạng theo tỉ số 1/2 nên $DQ = 2R$ (2).

Từ (1) và (2) có $S = 2pR$

Cách 2. Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của ID, IE, IF với đường tròn ngoại tiếp ΔABC thì M, N, P là trung điểm các cung BC, CA, AB tương ứng. Ta có :

$\angle BIM = \angle BAM + \angle ABI = \angle CBM + \angle IBC = \angle IBM$.

Từ đó và từ $\angle IBD = 90^\circ$ suy ra $IM = ID$ (*).

Vậy $S(BID) = 2S(BIM)$. Lập luận tương tự với các tam giác DIC, CIE, EIA, AIF, FIB ta được

$S(DEF) = S(BICD) + S(CIAE) + S(AIBF) = 2S(BMCNAP)$

$= 2(S(BMCO) + S(CNAO) + S(APBO)) = R(BC + CA + AB) = 2pR$.

Cách 3. Chứng minh như ở phần đầu cách 2 được $IM = ID$ (*). Lấy điểm Q đối xứng với I qua điểm O thì OM là đường trung bình của ΔIQD nên $QD = 2OM = 2R$. Lập luận tương tự có $QE = QF = 2R$. Từ đó

$S(DEF) = S(BQCD) + S(CQAE) + S(AQBF)$

$= \frac{1}{2}(BC.2R + AC.2R + AB.2R) = 2pR$.

Nhận xét. 1) Nhiều bạn đưa ra các cách giải khác nhưng phải sử dụng kiến thức trợ giúp như : đường tròn Ơle hoặc $S = r_a(p-a) = r_b(p-b) = r_c(p-c) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{abc}{4R}$

2) Các bạn có lời giải trực tiếp và gọn là :

Thái Nguyên: *Trần Đức Phong*, 9A1, THCS Chu Văn An, Tp. Thái Nguyên; **Phú Thọ:** *Lê Thanh Tùng*, 9C, THCS Việt Trì; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Thu Ngọc*, 7C Toán, THCS Vĩnh Yên, *Hoàng Minh Châu*, 9A, THCS Vĩnh Tường, *Trần Khánh Tùng*, 9C, THCS Tam Đảo, Tam Dương; **Bắc Giang:** *Nguyễn Tuyết Mai*, 9A, THCS Lê Quý Đôn, Tx. Bắc Giang; **Bắc Ninh:** *Lê Duy Cường*, 9B, THCS Yên Phong; **Hà Tây:** *Nguyễn Trung Nghĩa*, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa; **Hà Nam:** *Vũ Quang Thanh*, 9B, THCS Nguyễn Hữu Tiến, Duy Tiên; **Nam Định:** *Hoàng Văn Tường*, *Đặng Đình Trường*, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên; **Thanh Hóa:** *Trương Nho Đại*, 9A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc; **Hà Tĩnh:** *Đào Xuân Hoàng*, 9B, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Vĩnh Long:** *Mai Thanh Loan*, 9, TH Nguyễn Bỉnh Khiêm, Tx. Vĩnh Long; **Tp Hồ Chí Minh:** *Trần Hải Đăng*, 6A9, THCS Trần Đại Nghĩa, Quận 3.

VIỆT HẢI

Bài T6/282. *Hai dãy số (a_n) và (b_n) ($n = 1, 2, 3, \ldots$) được xác định bởi : $a_1 = 3$, $b_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n^2 + 2b_n^2$ và $b_{n+1} = 2a_nb_n$ với mọi $n = 1, 2, 3, \ldots$*

Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{b_n}$ và $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{a_1a_2\ldots a_n}$

Lời giải. Với mọi $n = 1, 2, \ldots$ ta có

$a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{2} = a_n^2 + 2b_n^2 + 2\sqrt{2}\,a_nb_n = (a_n + b_n\sqrt{2})^2$

Do đó $a_n + b_n\sqrt{2} = (a_{n-1} + b_{n-1}\sqrt{2})^2 = (a_{n-2} + b_{n-2}\sqrt{2})^{2^2} = \ldots = (a_1 + b_1\sqrt{2})^{2^{n-1}} = (3 + 2\sqrt{2})^{2^{n-1}} = (\sqrt{2} + 1)^{2^n}$

Tương tự ta có

$$a_n - b_n\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^{2^n}.$$

Từ đó

$$a_n = \frac{1}{2}\left((\sqrt{2} + 1)^{2^n} + (\sqrt{2} - 1)^{2^n}\right),$$

$$b_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left((\sqrt{2} + 1)^{2^n} - (\sqrt{2} - 1)^{2^n}\right)$$

Chú ý

$$\sqrt[2^n]{\frac{(\sqrt{2}+1)^{2^n}}{4\sqrt{2}}} < \sqrt[2^n]{b_n} < \sqrt[2^n]{a_n} < \sqrt{2}+1$$

và $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[2^n]{\frac{(\sqrt{2}+1)^{2^n}}{4\sqrt{2}}} = \sqrt{2}+1$

nên theo định lí kẹp ta có

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[2^n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[2^n]{b_n} = \sqrt{2}+1$$

Mặt khác $b_{n+1} = 2a_nb_n$ hay $a_n = \frac{b_{n+1}}{2b_n}$ $(\forall n \geq 1)$.

Suy ra $a_1a_2...a_n = \frac{b_2}{2b_1}\cdot\frac{b_3}{2b_2}\cdots\frac{b_{n+1}}{2b_n} = \frac{b_{n+1}}{2^n}$.

Do đó $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[2^n]{a_1a_2...a_n} =$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[2^n]{b_{n+1}} = (\sqrt{2}+1)^2 = 3+2\sqrt{2}$

(vì $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[2^n]{\frac{1}{2^n}} = 1$).

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải tốt : **Hà Nội:** *Đinh Ngọc Thắng*, 10A Toán, ĐHKHTN-ĐHQG; **Phú Thọ:** *Hoàng Ngọc Minh, Trần Thanh Hải, Bùi Quang Nhã, Đinh Thái Sơn*, 10A1, THPT chuyên Hùng Vương; **Vĩnh Phúc:** *Vũ Nhật Huy, Nguyễn Thành Trung*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, *Triệu Hoàng Anh Tuấn*, 10A1, THPT Liên Sơn – Lập Thạch; **Hải Dương:** *Lê Quang Hòa, Nguyễn Anh Ngọc, Đỗ Quang Trung*, 10T, THPT Nguyễn Trãi; **Thanh Hóa:** *Trần Thanh Bình, Trần Anh Quang*, 10T1, THPT Lam Sơn; **Nghệ An:** *Lê Văn Đức*, 10 Tin 2, THPT Lê Viết Thuật; **Tp. Hồ Chí Minh:** *Trần Võ Huy, Nguyễn Thành Nhân*, 10T, PTNK-ĐHQG ; **Đồng Nai:** *Lê Phương*, 10T1, THPT Lương Thế Vinh...

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T7/282. *Cho các số nguyên dương k, n và các số thực dương $a_1, a_2,..., a_k$ thỏa mãn $a_1 + a_2 + ... + a_k \geq k$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$\frac{a_1^n + a_2^n + ... + a_k^n}{a_1^{n+1} + a_2^{n+1} + ... + a_k^{n+1}}$$

Lời giải. (của bạn *Nguyễn Minh Hải*, lớp 10A1, THPT chuyên Trần Hưng Đạo, Phan Thiết, **Bình Thuận** và bạn *Đặng Quốc Trang*, 11 Lý, THPT NK **Hà Tĩnh**).

Cho mọi số thực dương a ta có $(a^n - 1)(a - 1) \geq 0$ và do đó $a^{n+1} - a^n \geq a - 1$ với đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 1$. Sử dụng bất đẳng thức này cho các số thực a_i đã cho và cộng tất cả các bất đẳng thức thu được theo từng vế ta có :

$(a_1^{n+1} + a_2^{n+1} + ... + a_k^{n+1}) - (a_1^n + a_2^n + ... + a_k^n) \geq a_1 + a_2 + ... + a_k - k$

Do giả thiết ban đầu của bài toán đã cho là $a_1 + a_2 + ... + a_k - k \geq 0$ suy ra là

$$\frac{a_1^n + a_2^n + ... + a_k^n}{a_1^{n+1} + a_2^{n+1} + ... + a_k^{n+1}} \leq 1.$$

Đẳng thức đạt được khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_k = 1$. Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức là 1 khi $a_1 = a_2 = ... = a_k = 1$.

Nhận xét. Rất nhiều bạn giải được bài toán này, nhưng chỉ có ít bạn có lời giải thật đơn giản. Đó là các bạn sau đây :

Hà Tĩnh: *Nguyễn Quốc Vũ*, lớp 11 Lý, THPT NK Hà Tĩnh; **Thừa Thiên - Huế:** *Nguyễn Dư Thái*, 12CT, PTCT ĐHKHT Huế; **Đắk Lăk :** *Nguyễn Văn Mẫn*, lớp 9A1, THCS Hùng Vương Eakar; **Phú Thọ:** *Lê Thanh Tùng*, 9C, THCS Việt Trì; **Hà Tây:** *Phạm Trung Kiên*, lớp 12 Toán 1 và *Nguyễn Cường Việt*, 12TN THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Hà Nội:** *Vương Xuân Sơn* 10K, THPT Vân Nội, Đông Anh, *Nguyễn Trung Kiên* và *Phạm Văn Hùng*, 11A1, PTCT ĐHSP HN; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Triều Dương*. 9A, THCS Hương Canh, Bình Xuyên; **Thanh Hóa:** *Lê Giang Đức*, lớp 10T2, THPT Lam Sơn, *Hoàng Vũ* 11B7, THPT Đào Duy Từ và *Trần Thanh Tùng*, 9A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T8/282. *Tìm tất cả các hàm số f : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ thỏa mãn các điều kiện :*

a) $f(x) \geq e^x$ với mọi $x \in \mathbf{R}$

b) $f(x+y) \geq f(x).f(y)$ với mọi $x, y \in \mathbf{R}$.

Lời giải. (của đa số các bạn)

Ta có $f(x) \geq e^x > 0$. Với $x = 0, y = 0$ thì

$$\begin{cases} f(0) \geq 1 \\ f(0) \geq f(0)f(0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) \geq 1 \\ f(0) \leq 1 \end{cases}$$

Suy ra $f(0) = 1$

Đặt $y = -x$. Khi đó với mọi $x \in \mathbf{R}$:

$f(0) \geq f(x)f(-x) \Rightarrow 1 \geq f(x).f(-x)$

$\Rightarrow 1 \geq f(x).e^{-x} \Rightarrow f(x) \leq e^x$

Kết hợp với giả thiết $f(x) \geq e^x$ $(\forall x)$ suy ra $f(x) = e^x$ $(\forall x)$.

Thử lại, ta thấy hàm $f(x) = e^x$ thỏa mãn các điều kiện của bài ra.

Nhận xét. Đa số các bạn đều có lời giải đúng. Một số bạn có lời giải ngắn gọn :

Nguyễn Đức Tâm, 8A7, THCS Trần Đăng Ninh, *Bùi Văn Tưởng*, 12B, THPT Trần Nhật Duật, **Nam Định**; *Bùi Duy Thịnh*, 11T, *Lưu Văn Hiền*, 10T, THPT Nguyễn Trãi, *Trần Quang Khải*, 12C3, THPT Nhị Chiểu, Kinh Môn, **Hải Dương**; *Trịnh Thùy Nhung*, 10T, THPT Lương Văn Tụy, **Ninh Bình**; *Nguyễn Vũ Thiên Nga, Trần Vĩnh Hưng*, 11CT, THPT Lê Hồng Phong, *Lương Thế Nhân*, 12 chuyên ĐHQG **Tp Hồ Chí Minh**; *Phan Lạc Việt*, 10A2, ĐHSP, *Nguyễn Quang Hải*, 11A Tin, *Ngô Quốc Anh*, 12A Toán, ĐHKHTN-ĐHQG **Hà Nội**; *Lê Văn Đức*, 10T2, THPT Lê Việt Thuật, Vinh, **Nghệ An**; *Lê Thị Khánh Hiền*, 12T, THPT Lê Quý Đôn, **Khánh Hòa** ; *Phạm HườngẢnh*, 11/6, Nguyễn Duy Hiệu, **Quảng Nam** ; *Phạm Huy*, 6C, THCS Tam Đảo, *Hoàng Xuân Quang, Lê Mạnh Hùng, Bùi Việt Hải*, 11A, THPT chuyên **Vĩnh Phúc**; *Lưu Quang Tuấn*, 12CT, THPT chuyên tỉnh **Quảng Bình**; *Trần Thanh Hải*, 10A1, THPT chuyên **Phú Thọ**; *Lưu Hồng Vân*, 11A4, THPT Yên Định 1, *Đỗ Đức Trung*, 10T1, THPT Lam Sơn, **Thanh Hóa**; *Cao Tiến Đạt*, 11T chuyên Nguyễn Du, **Đăk Lăk**; *Nguyễn Lâm Tuyền*, 11T, chuyên Hoàng Văn Thụ, **Hòa Bình**; *Đoàn Duy Trang*, 11T chuyên Trần Phú, **Hải Phòng**; *Nguyễn Văn Tâm*, 11/1, Giá Rai, **Bạc Liêu**; *Trần Vũ Khanh*, 12A, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển, **Cà Mau**; *Nguyễn Tuấn Nam*, 10T1, THPT chuyên **Hà Tây**; Bạn *Ngô Xuân Bách*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Trãi, **Hải Dương**) cũng cho nhận xét : kết quả của bài toán không thay đổi nếu ta thay điều kiện $f(x) \ge e^x$ bởi điều kiện yếu hơn : $f(x) \ge x + 1$ $(\forall x)$.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T9/282. *Cho tam giác ABC. Các đường trung tuyến xuất phát từ các đỉnh A, B, C của tam giác cắt đường tròn ngoại tiếp ΔABC lần nữa tại A', B', C'. Chứng minh rằng :*

$$AB + BC + CA \le A'B' + B'C' + C'A'$$

Giải. (Dựa theo lời giải của bạn *Lưu Tiến Đức*, 12A1, PTCT, ĐHSP **Hà Nội**) Trước hết ta phát biểu và chứng minh hai bổ đề sau :

Bổ đề 1: Cho bốn số x, y, z, t thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} \pi > x \ge y,\ z \ge t > 0 \\ x + t = y + z \end{cases} \qquad (*)$$

Khi đó : $\sin y + \sin z \ge \sin x + \sin t$

Chứng minh: Theo giả thiết

$$0 \le \left|\frac{y-z}{2}\right| \le \frac{x-t}{2} < \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\frac{y-z}{2} \ge \cos\frac{x-t}{2}$$

Vậy : $\sin y + \sin z = 2\sin\frac{y+z}{2}\cos\frac{y-z}{2}$

$$\ge 2\sin\frac{x+t}{2}\cos\frac{x-t}{2} = \sin x + \sin t.$$

$$\Rightarrow \sin y + \sin z \ge \sin x + \sin t$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \cos\frac{y-z}{2} = \cos\frac{x-t}{2}$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{y-z}{2}\right| = \frac{x-t}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = y \\ t = z \end{cases} \\ \begin{cases} x = z \\ t = y \end{cases} \end{array}\right. \quad \text{do } (*)$$

Bổ đề 2: Cho hai tam giác $A_1B_1C_1$ và $A_2B_2C_2$ thỏa mãn điều kiện :

$$\begin{cases} \max\{A_1, B_1, C_1\} \ge \max\{A_2, B_2, C_2\} \\ \min\{A_1, B_1, C_1\} \le \min\{A_1, B_2, C_2\} \end{cases}$$

Khi đó :

$$\sin A_1 + \sin B_1 + \sin C_1 \le \sin A_2 + \sin B_2 + \sin C_2$$

Chứng minh: Không mất tính tổng quát, giả sử: $A_1 \ge B_1 \ge C_1$; $A_2 \ge B_2 \ge C_2$. Có hai trường hợp xảy ra:

Trường hợp 1: $A_2 \ge B_1$. Khi đó :

$$\begin{cases} \pi > A_1 \ge A_2, A_1 + B_1 - A_2 \ge B_1 > 0 \\ A_1 + B_1 = A_2 + (A_1 + B_1 - A_2) \end{cases}$$

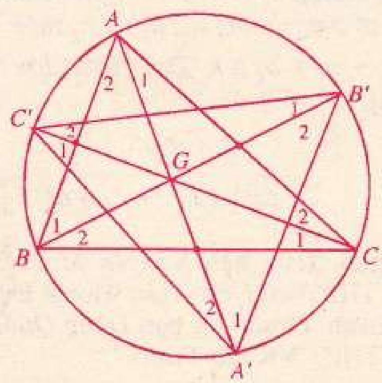
$$\begin{cases} \pi > A_1 + B_1 - A_2 \ge B_2, C_2 \ge C_1 > 0 \\ (A_1 + B_1 - A_2) + C_1 = B_2 + C_2 \end{cases}$$

Theo bổ đề 1 ta có :

$$\begin{cases} \sin A_1 + \sin B_1 \le \sin A_2 + \sin(A_1 + B_1 - A_2) \\ \sin C_1 + \sin(A_1 + B_1 - A_2) \le \sin B_2 + \sin C_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin A_1 + \sin B_1 + \sin C_1 \le \sin A_2 + \sin B_2 + \sin C_2$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow A_1 = A_2, B_1 = B_2, C_1 = C_2$.



Trường hợp 2. $A_2 < B_1$. Khi đó

$$\begin{cases} \pi > B_1 \geq A_2, B_1 + C_1 - A_2 \geq C_1 > 0 \\ B_1 + C_1 = A_2 + (B_1 + C_1 - A_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi > A_1 \geq B_2, C_2 \geq B_1 + C_1 - A_2 > 0 \\ A_1 + (B_1 + C_1 - A_2) = B_2 + C_2 \end{cases}$$

Theo bổ đề 1 ta có :

$$\begin{cases} \sin B_1 + \sin C_1 \leq \sin A_2 + \sin(B_1 + C_1 - A_2) \\ \sin A_1 + \sin(B_1 + C_1 - A_2) \leq \sin B_2 + \sin C_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow \sin A_1 + \sin B_1 + \sin C_1 \leq \sin A_2 + \sin B_2 + \sin C_2$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow A_1 = A_2, B_1 = B_2, C_1 = C_2$. Bổ đề 2 đã được chứng minh. Chú ý rằng bổ đề này đã được giới thiệu trên báo THVTT số 181 (1/1992) trong bài "Thứ tự sắp được của dãy bất đẳng thức cơ bản trong tam giác" của TS. Nguyễn Văn Mậu.

Trở lại bài toán của ta.

Không mất tính tổng quát giả sử $A \geq B \geq C$ $\Rightarrow BC \geq CA \geq AB$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, ta có :

$GA \leq GB \leq GC$ (Kết quả cơ bản)

Ta kí hiệu các góc như hình vẽ. Ta có :

$A' = A'_1 + A'_2 = B_1 + C_2 \leq A_2 + A_1 = A$ (vì $GA \leq GB \leq GC$)

$B' = B'_1 + B'_2 = C_1 + A_2 \leq C_2 + A_2 \leq A_1 + A_2 = A$ (vì $CB \geq CA$, $GA \leq GC$)

$C' = C'_1 + C'_2 = A_1 + B_2 \leq A_1 + B_1 \leq A_1 + A_2 = A$ (vì $BC \geq BA$, $GA \leq GB$)

Vậy : $\max\{A, B, C\} \geq \max\{A', B', C'\}$ (1)

Ta có :

$A' = A'_1 + A'_2 = B_1 + C_2 \geq B_2 + C_2 \geq C_1 + C_2 = C$ (vì $BC \geq BA$, $GB \leq GC$)

$B' = B'_1 + B'_2 = C_1 + A_2 \geq C_1 + A_1 \geq C_1 + C_2 = C$ (vì $AC \geq AB$, $GA \leq GC$)

$C' = C'_1 + C'_2 = A_1 + B_2 \geq C_2 + C_1 = C$ (vì $GA \leq GB \leq GC$)

Vậy : $\min\{A, B, C\} \leq \min\{A', B', C'\}$ (2)

Từ (1), (2) theo bổ đề 2 ta có :

$\sin A + \sin B + \sin C \leq \sin A' + \sin B' + \sin C'$

Theo định lí hàm số sin ta có :

$BC + CA + AB \leq B'C' + C'A' + A'B'$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow A = A', B = B', C = C'$ $\Leftrightarrow$ tam giác ABC đều.

Nhận xét. 1) Đây là bài toán khó, chỉ có 28 bạn tham gia giải, 16 bạn giải sai, sai lầm chủ yếu là do sử dụng bất đẳng thức Trêbưsép không thành thạo.

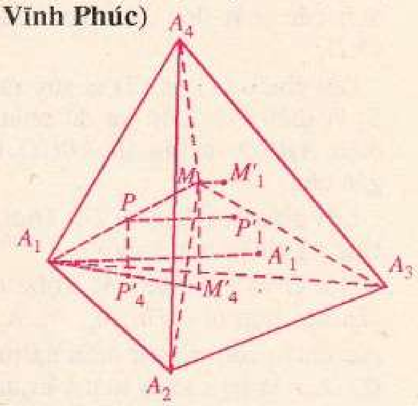
2) Các bạn sau đây có lời giải tương tự như lời giải trên.

Thái Nguyên: *Võ Quang Đức*, 12T, THPT NK ; **Vĩnh Phúc:** *Lê Mạnh Hùng*, 12A1, THPT NK ;**ĐHQG Tp Hồ Chí Minh:** *Lương Thế Nhân, Phạm Tuấn Anh*, 12T, PTNK; **Hải Dương**: Phạm Thành Trung, Lê Quang Hòa, *10T, THPT NK;* **ĐH KH Huế:** *Nguyễn Du Thái*, 12T; **ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội:** *Kim Đình Thái, Nguyễn Văn Hùng*, 11A1; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Đức Tài*, 11T, THPT Lam Sơn.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài T10/282. *Tìm điều kiện cần và đủ đối với tứ diện ABCD sao cho tổng khoảng cách từ một điểm M bất kì nằm trong tứ diện đến các mặt của nó là không đổi.*

Lời giải 1. (Dựa theo *Tạ Việt Tôn*, 12T, THPT chuyên **Vĩnh Phúc**)



Để tiện trình bày ta thay đổi kí hiệu : gọi tên lại các đỉnh A, B, C, D lần lượt là A_1, A_2, A_3, A_4. Giả sử P là một điểm $\neq M$ cũng nằm trong (không nằm trên biên) tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. Gọi $h_i = A_iA'_i$, $m_i = MM'_i$, $p_i = PP'_i$ theo thứ tự là khoảng cách từ A_i, M và P đến mặt đối diện với đỉnh A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) của tứ diện và đặt :

$\sum_{i=1}^{4} m_i = m$, $\sum_{i=1}^{4} p_i = p$. Dễ thấy rằng nếu P là trung điểm của đoạn thẳng A_jM thì ta có các đẳng thức : $2p_j = m_j + h_j$, $2p_i = m_i$ ($i \neq j$), và do đó : $2p = m + h_j$; (1)

Mặt khác, theo giả thiết ta có : $p = m$ (2)

Từ (1) và (2) ta được :

$m = h_j$ ($j = 1, 2, 3, 4$) (3)

Và do đó : $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$) (S_i là diện tích mặt đối diện với đỉnh A_i) suy ra tứ diện là *gần đều* (các cạnh đối diện bằng nhau). Trên đây là điều kiện cần. Điều kiện đủ được chứng minh khá dễ dàng.

Lời giải 2. (*Nguyễn Vũ Nam Phương*, 11A1, THPT Phan Bội Châu, Vinh, **Nghệ An** và nhiều bạn khác). Kí hiệu $\vec{n_1}, \vec{n_2}, \vec{n_3}$ và $\vec{n_4}$ lần lượt là pháp véctơ đơn vị ngoài của các mặt BCD, CDA, DAB và ABC. Giả sử M và N là hai điểm bất kì nằm trong tứ diện $ABCD$; theo giả thiết ta có hệ thức :

$$\overrightarrow{MB}\overrightarrow{n_1} + \overrightarrow{MC}\overrightarrow{n_2} + \overrightarrow{MD}\overrightarrow{n_3} + \overrightarrow{MA}\overrightarrow{n_4}$$
$$= \overrightarrow{NB}\overrightarrow{n_1} + \overrightarrow{NC}\overrightarrow{n_2} + \overrightarrow{ND}\overrightarrow{n_3} + \overrightarrow{NA}\overrightarrow{n_4}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MN}\left(\sum_{i=1}^{4}\overrightarrow{n_i}\right) = 0\ (\forall M, N) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{4}\overrightarrow{n_i} = \overrightarrow{0}\ (1)$$

Mặt khác, theo định lí "con nhím", ta có :

$$\sum_{i=1}^{4} S_i\overrightarrow{n_i} = \overrightarrow{0} \qquad (2)$$

trong đó S_1, S_2, S_3 và S_4 theo thứ tự là diện tích các mặt đối diện với các đỉnh A, B, C và D.

Đối chiếu (1) và (2) ta suy ra $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$ là điều kiện cần và đủ phải tìm đối với tứ diện $ABCD$, nghĩa là $ABCD$ là một tứ diện gần đều.

Lời giải 3. (*Nguyễn Dư Thái*, 12CT, ĐHKH Huế và nhiều bạn khác).

Gọi G và I lần lượt là trọng tâm và tâm mặt cầu nội tiếp tứ diện ; h_a, h_b, h_c, h_d lần lượt là các chiều cao của tứ diện hạ từ các đỉnh A, B, C, D; r là bán kính mặt cầu nội tiếp. Kí hiệu $d(M)$ là tổng khoảng cách từ một điểm M nằm bên trong tứ diện $ABCD$ đến các mặt của nó. Thế thì ta có :

$$d(G) = \frac{1}{4}(h_a + h_b + h_c + h_d)\ ; \qquad (1)$$

$$d(I) = 4r \qquad (2)$$

Ngoài ra, theo một kết quả quen thuộc, ta có hệ thức sau :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_d} \qquad (3)$$

Mặt khác, lại theo BĐT Côsi, ta có :

$$(h_a + h_b + h_c + h_d)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_d}\right) \geq 16$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi : $h_a = h_b = h_c = h_d$

Từ (3) và (4), ta được : Với mọi tứ diện $ABCD$

$$h_a + h_b + h_c + h_d \geq 16r \qquad (5)$$

Từ (1) và (2) suy ra :

$d(G) = d(I) = d(M)$ ($\forall M \in$ Miền trong tứ diện $ABCD$) $\Leftrightarrow h_a + h_b + h_c + h_d = 16r$ (6)

Từ (5) và (6) suy ra :

$h_a = h_b = h_c = h_d \Leftrightarrow S_1 = S_2 = S_3 = S_4$ là điều kiện cần tìm đối với tứ diện $ABCD$, nghĩa là $ABCD$ là một tứ diện gần đều.

Nhận xét. 1) Rất đáng tiếc có một số bạn không đọc kĩ đầu bài (M là một điểm nằm trong tứ diện $ABCD$, không nằm trên mặt cũng như trên cạnh nào của tứ diện), cho ngay M lần lượt trùng với các đỉnh A, B, C và D của tứ diện rồi dựa vào giả thiết của bài toán vội vàng kết luận $h_a = h_b = h_c = h_d$ là điều kiện cần và đủ đối với tứ diện $ABCD$. Thật ra ở đây để khẳng định mệnh đề này ta cần đến tính chất liên tục của một hàm nhiều biến. Chẳng hạn, ta đưa vào không gian một hệ tọa độ Đềcác vuông góc $Oxyz$; điểm M có các tọa độ x, y, z. Thế thì, theo giả thiết :

$d(M) = f(M(x, y, z)) = F(x, y, z) = k$ không đổi.

với $\forall M \in$ miền mở $]ABCD[$ của tứ diện $ABCD$.

Sử dụng tính chất liên tục của hàm ba biến $F(x, y, z)$ ta mới kết luận được :

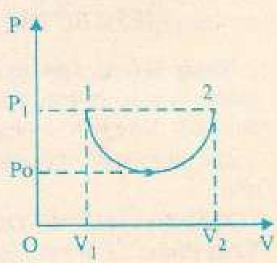
$\lim\limits_{M \to A} f(M) = h_a = k$, $\lim\limits_{M \to B} f(M) = h_b = k$, $\lim\limits_{M \to C} f(M) = h_c = k$, $\lim\limits_{M \to D} f(M) = h_d = k$ và do đó $h_a = h_b = h_c = h_d\ (= k)$.

2) Các bạn sau đây cũng có lời giải tốt :

Hà Nội: *Bùi Việt Dũng, Nguyễn Trung Kiên, Phạm Văn Hùng*, 11A1, ĐHSP Hà Nội, *Đinh Ngọc Thắng*, 10A Toán, ĐHKHTN-ĐHQG HN ; *Nguyễn Hoàng Thạch*, 11T, *Đặng Ngọc Minh*, 12T, THPT Hà Nội - Amsterdam, *Phan Nhất Thống*, 12A1, THPT Tôn Đức Thắng, Ba Đình; **Vĩnh Phúc:** *Lê Mạnh Hùng*, 12A1, *Vũ Nhật Huy*, 10A1, và *Bùi Việt Hải*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Phú Thọ:** *Hoàng Ngọc Minh, Trần Minh Ngọc, Đinh Thái Sơn*, 10A1, THPT chuyên Hùng Vương; **Hải Dương:** *Ngô Xuân Bách*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Hải Phòng:** *Đoàn Duy Trung*, 11T, THPT Trần Phú ; **Nam Định:** *Bùi Văn Tùng*, 12B, THPT Trần Nhật Duật , Nam Định ; **Hòa Bình:** *Nguyễn Lâm Tuyền*, 11T, THPT Hoàng Văn Thụ; **Thanh Hóa:** *Lưu Hồng Vân*, 11A4, THPT Yên Định 1, *Trần Huỳnh*, 11K, THPT Ba Đình, Nga Sơn; *Lê Hoàng Tuân, Lê Anh Sơn*, 12T, THPT Lam Sơn; **Nghệ An:** *Cao Xuân Vinh*, 12B, THPT Nghĩa Đàn; **Khánh Hòa:** *Lê Thị Khánh Hiền*, 12T, THPT Lê Quý Đôn; **Gia Lai:** *Lê Tiến Hoàng*, 12C3, THPT Hùng Vương, Gia Lai ; **Tp Hồ Chí Minh:** *Phạm Tuấn Anh*, 12T, *Trần Anh Hoàng, Trần Vĩnh Hưng, Nguyễn Tiến Khải*, 11T, *Huỳnh Việt Linh*, 10T, THPT NK - ĐHQG Tp Hồ Chí Minh; **Bạc Liêu:** *Nguyễn Văn Tâm*, 11_1, THPT Gia Rai.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài L1/282. *Một mol khí lí tưởng đơn nguyên tử thực hiện một quá trình biến đổi : 1 – 2 được biểu diễn trên đồ thị P–V như hình vẽ.*



Tính nhiệt lượng mà mol khí nhận vào trong quá trình trên theo P_1, P_o, V_1, V_2.

(Đường biểu diễn 1 – 2 là một nửa vòng tròn).

Hướng dẫn giải. Áp dụng nguyên lí I nhiệt động lực học

$Q = \Delta U + A$. Ta có

$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{3R}{2}(T_2 - T_1) = \frac{3}{2}p_1(V_2 - V_1)$

(áp dụng phương trình trạng thái).

Theo đồ thị ở hình vẽ biểu diễn công mà 1 mol khí thực hiện trong quá trình đó là (về mặt hình học) : $A = P_1(V_2 - V_1) - \frac{\pi}{2}(P_1 - P_o)^2$.

Mặt khác về mặt hình học ta lại có :

$$P_1 - P_o = \frac{V_2 - V_1}{2}.$$

Vì vậy để đảm bảo đúng thứ nguyên của các đại lượng ta có:

$$A = P_1(V_2 - V_1) - \frac{\pi}{2}(P_1 - P_o)\left(\frac{V_2 - V_1}{2}\right).$$

Do đó :

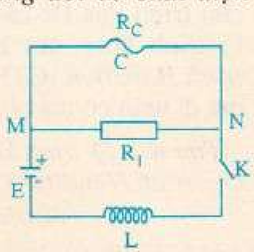
$$Q = \frac{(V_2 - V_1)}{4}[(10 - \pi)P_1 + \pi P_o].$$

Nhận xét. Các em có lời giải và đáp số đúng :

Vĩnh Phúc: *Nguyễn Văn Hùng*, 10A1, *Đào Duy Vũ*, 10A2, *Nguyễn Minh Kiên*, 11A3, *Nguyễn Thế Cương* và *Nguyễn Cao Cường*, 12A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Phú Thọ:** *Lưu Quốc Tuấn*, 11B1, THPT chuyên Hùng Vương; **Tiền Giang:** *Nguyễn Quốc Thịnh*, 12 Lí, THPT chuyên Tiền Giang; **Hải Dương:** *Vũ Xuân Nam*, 11T, *Nguyễn Xuân Trung*, 11 Lí, PTNK Nguyễn Trãi; **Đồng Nai:** *Nguyễn Kim Huy*, 11 Lí 1, THPT chuyên Lương Thế Vinh.

MAI ANH

Bài L2/282. *Một mạch điện có sơ đồ như hình bên. Nguồn điện không đổi có suất điện động E = 10V; cuộn cảm có độ tự cảm L = 5H và điện trở $R_1 = 15\Omega$. Các đại lượng sau được coi như nhỏ không đáng kể so với R_1 : điện trở R_C của cầu chì, điện trở trong của nguồn điện, điện trở thuần của cuộn cảm, điện trở của khóa K và của các dây dẫn nối. Tại thời điểm t=0 người ta đóng khóa K. Hỏi sau bao lâu cầu chì C sẽ bị đứt, biết rằng cầu chì chỉ chịu được một dòng điện lớn nhất là I = 3A.*



Hướng dẫn giải. Có thể xem như $R_C \approx 0$, điện trở mạch ngoài $R = \frac{R_C R_1}{R_C + R_1} \approx 0$ và dòng điện chạy qua R_C khi đóng mạch có cường độ bằng dòng điện mạch chính I. Khi đóng K ta có $U_{MN} = E - L\frac{\Delta I}{\Delta t} = R_{MN}.I \approx 0 \Rightarrow \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{E}{L} \Rightarrow$

$I = \frac{E}{L}t$ (lúc $t = 0$, $I = 0$). Cầu chì bị đứt khi $I =$ 3A. Suy ra thời gian từ lúc đóng K đến khi đứt cầu chì :

$$t = \frac{IL}{E} = 1{,}5s.$$

Ghi chú: Có thể áp dụng công thức tính cường độ dòng điện trong mạch RL khi đóng mạch $I = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$; suy ra

$$I_C\left(1 + \frac{R_c}{R_1}\right) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right).$$

Vì $R_C << R_1$ nên $R \approx R_C$, $1 - e^{-\frac{Rt}{L}} \approx \frac{R_c t}{L}$.

Từ đó tìm lại kết quả như trên.

Nhận xét. Có 2 em có lời giải đúng :

Tiền Giang: *Đào Lê Tín*, 12 Lí, THPT chuyên Tiền Giang; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Thế Cương*, 12A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc

MAI ANH

VỀ LỜI GIẢI BÀI T1/281

Lời Tòa soạn: Trong THTT số 285 (3/2001) đã đăng 2 lời giải bài T1/281 của hai bạn, nhưng các lời giải này có chỗ suy luận chưa chặt chẽ (đề nghị các bạn tự kiểm tra). Thành thật xin lỗi bạn đọc. Tòa soạn đã xem lại tất cả các bài giải khác nhưng đều có sai lầm tương tự, vì vậy xin đăng lời giải của tác giả bài toán :

Bài T1/281. *Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình :*

$$54x^3 + 1 = y^3 \qquad (1)$$

Lời giải.

$(1) \Leftrightarrow 4.54x^3(54x^3 + 1) = 4.54x^3y^3$

$\Leftrightarrow (4.27x^3 + 1)^2 - 1 = (6xy)^3$

Đặt $6u = 4.27x^3$ và $v = 6xy$ thì phương trình trên trở thành

$$(6u + 1)^2 - 1 = v^3 \qquad (2)$$

• Nếu $u = 0$ thì $v = 0$ thỏa mãn (2) và $x = 0$, $y = 1$ là nghiệm của (1).

• Nếu $u \neq 0$ thì $|6u + 1| \geq 5$ ta chỉ cần tìm nghiệm nguyên dương của phương trình (2) với $v \geq 3$.

(Xem tiếp trang 3)

PHƯƠNG PHÁP ĐƠN GIẢN GIẢI BÀI TOÁN QUÂN MÃ ĐI TUẦN

HOÀNG QUÝ và HOÀNG CHÚNG
(*Tp Hồ Chí Minh*)

Trong bàn cờ vua (8 × 8 ô), quân mã có thể di chuyển từ *a* đến ô *b* khi và chỉ khi *a* và *b* là hai ô thuộc một hình chữ nhật 2 × 3 ô hoặc 3 × 2 ô và *a*, *b* ở hai góc đối diện của hình chữ nhật ấy.

Từ giữa thế kỉ XVIII, có một trò chơi hóc búa gọi là *Quân mã đi tuần* (*Knight's Tour Puzzle*), với nội dung như sau :

Tìm đường đi của quân mã qua tất cả các ô của bàn cờ vua, mỗi ô chỉ một lần.

Nếu quân mã trở về ô xuất phát thì đó là một *đường đi tuần khép kín* ; nếu không thì đó là *đường đi tuần mở*.

Câu đố là một bài toán không dễ. Một lời giải đầu tiên (một đường đi tuần khép kín) được nhà toán học Thụy Sĩ *Euler* (1707-1783) tìm ra năm 1759, và nhà toán học Pháp *Vandermonde* (1735-1796) tìm ra năm 1771 (độc lập với *Euler*). Đến nay, bằng cách *mò mẫm*, người ta đã tìm ra nhiều lời giải khác; hình 1 cho thấy một lời giải.

Bài toán *Quân mã đi tuần* trên một bàn cờ $n \times n$ ô ($n \geq 3$), là một bài toán quen thuộc với nhiều bạn khi học về tin học; đó là một ví dụ hay để hiểu về *thuật toán đệ quy có lần ngược (quay lui), dựa trên phương pháp thử – sai.*

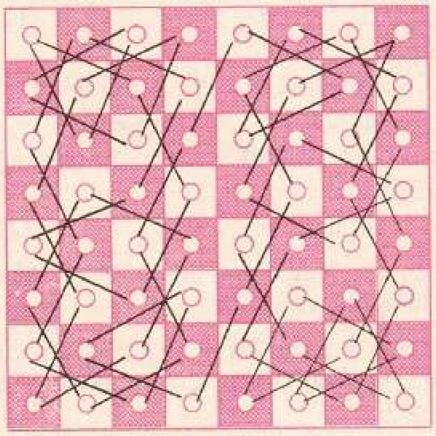
Warnsdorff đã nghĩ ra một phương pháp khá độc đáo giúp tìm một *đường đi tuần mở* của quân mã : *Xuất phát từ một ô bất kì, luôn di chuyển đến ô dính với số lượng ít nhất những ô chưa được dùng đến* (hai ô dính nhau là hai ô có chung một đỉnh). Bạn đọc có thể thử áp dụng phương pháp Warnsdorff và sẽ thấy rằng phương pháp này hạn chế được việc mò mẫm, nhưng không phải bao giờ cũng giúp tìm được dễ dàng một lời giải.

Các tác giả của bài báo này đã *tìm ra một số phương pháp khá đơn giản, giúp tìm ra dễ dàng và nhanh chóng nhiều đường đi tuần khép kín của quân mã trong bàn cờ vua.* Sau đây là một trong các *phương pháp đó.*

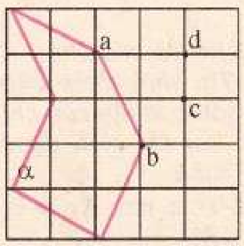
Trước hết, ta *tạm coi* bàn cờ vua là một *hình vuông 7×7 ô*, với vị trí và cách di chuyển của quân mã như trong *bàn cờ tướng*, nghĩa là quân mã (cũng như các quân khác) luôn đứng ở đỉnh các ô vuông và bước đi của quân mã là một đường chéo của hình chữ nhật 1×2 ô hoặc 2×1 ô (ta gọi các đường chéo đó là *một cạnh* thuộc đường đi của quân mã). *Hai đỉnh là kề nhau* nếu đó là các đầu mút của một cạnh nào đó.

Trên bàn cờ như thế một đường đi của một quân cờ có ít nhất một cạnh và không qua đỉnh nào lần thứ hai gọi là một *lộ trình*, viết tắt là (LT), nếu đi từ *a* đến *b* ta kí hiệu là *LT* (*a–b*). Một lộ trình có hai đầu mút trùng nhau gọi là một lộ trình khép kín hay một *chu trình* (CT). Một lộ trình qua tất cả các đỉnh của một bàn cờ gọi là một *lộ trình Hamilton* (LTH) Một chu trình qua tất cả các đỉnh của bàn cờ (một lộ trình khép kín Hamilton) gọi là một *chu trình Hamilton* (CTH). Như vậy, bài toán quân mã đi tuần có thể phát biểu như sau :

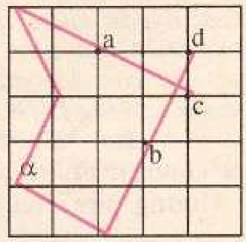
Tìm một lộ trình khép kín Hamilton (hay một chu trình Hamilton) của quân mã trên bàn cờ.



Hình 1



Hình 2



Hình 3

Một phương pháp giải bài toán là sử dụng *phép cắt nối* δ và các *chu trình biên* sau đây.

• Nếu CT (α) có hai đầu mút a và b của một cạnh lần lượt kề với hai đỉnh c, d không thuộc (α) (h.2), thì bằng cách lập LT $(a-c)$ và LT $(b-d)$ sau đó cắt LT $(a-b)$, ta được LT$(c-d)$ (h.3), lộ trình này có hai đầu mút là c, d và qua tất cả các đỉnh của (α). Ta gọi đây là *phép cắt nối* δ *cắt CT*(α) và nối các đỉnh c, d thành *LT*$(c-d)$ và kí hiệu là

$$(c, d) \times\!\!\rightarrow (\alpha)$$

• Tất cả 64 đỉnh (vị trí của quân mã) trên bàn cờ nằm trên 8 dòng và 8 cột. Các hình vuông có ít nhất một cạnh thuộc cạnh hình vuông bàn cờ lập thành *miền biên* của bàn cờ. Một cạnh $a-b$ được gọi là *cạnh biên* của bàn cờ nếu nó nằm trong miền biên. Một chu trình gồm toàn các cạnh biên được gọi là một *chu trình biên* (CT biên) của bàn cờ. Hình vuông 3×3 ô, đồng tâm với hình vuông bàn cờ, gọi là *miền lõi* của bàn cờ.

Có thể tìm một CTH trên bàn cờ theo *thuật toán* sau đây :

1) *Vạch tất cả các cạnh biên của bàn cờ*, được 4 CT biên, *đánh số (1), (2), (3), (4) các CT biên* này (hình 5 ở bìa 3).

2) Vạch *4 lộ trình qua tất cả đỉnh của miền lõi* LT(5-5*), LT(6-6*), LT(7-7*), LT(8-8*) như trên hình 5.

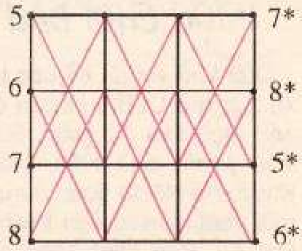
3) *Thực hiện bốn phép cắt nối* δ như sau :

$(7, 8) \times\!\!\rightarrow (1)$, $(8^*, 5^*) \times\!\!\rightarrow (2)$

$(6^*, 7^*) \times\!\!\rightarrow (3)$, $(5,6) \times\!\!\rightarrow (4)$,

Hình 6 ở bìa 3 cho thấy một cách thực hiện bước 3 của thuật toán. Dễ chứng minh rằng việc thực hiện thuật toán cho chu trình Hamilton của quân mã trên bàn cờ.

Chú ý rằng thuật toán trên đây cho ta *không chỉ một mà nhiều lời giải của bài toán*. Chẳng hạn có các cách khác thực hiện phép cắt nối δ ở bước 3 : ba cách thực hiện $(5, 6) \times\!\!\rightarrow (4)$ và ba cách thực hiện $(6^*, 7^*) \times\!\!\rightarrow (3)$. Mặt khác, ở bước 2, có thể vạch trên miền lõi bốn lộ trình khác (như hình 4 chẳng hạn), và từ đó có phép cắt nối khác dẫn đến một thuật toán khác để tìm những CTH khác trong bàn cờ.

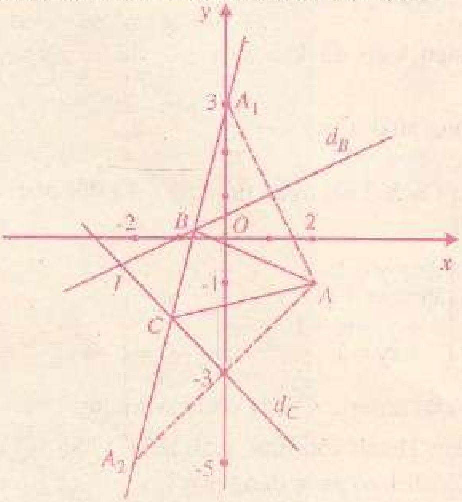


Hình 4

Còn có những phương pháp khác tìm ra những CTH khác của quân mã trên bàn cờ, và có thể chứng minh rằng từ một CTH đã biết, có thể suy ra hàng nghìn CTH khác nhau. Bạn đọc muốn tìm hiểu thêm về vấn đề này, xin đọc cuốn sách của chúng tôi : **Những kết quả mới giải bài toán quân mã đi tuần**, NXB Đại học Quốc gia Tp. Hồ Chí Minh, 2000.

ĐỀ THI TUYỂN SINH... *(Tiếp trang 9)*

Đối với các bài tính toán về phương pháp tọa độ sau khi giải cần phải vẽ hình kiểm nghiệm. Ở bài này theo hình vẽ đề bài cần phải sửa lại :



"... Phương trình hai đường phân giác (*ngoài*) của góc B và góc C lần lượt là (d_B) và (d_C)...".

2. $(d) : \begin{cases} 5x + y + z + 2 = 0 \\ x - y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} x = t \\ y + z = -2 - 5t \\ -y + 2z = -1 - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -1 - 3t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$

$\Rightarrow$ (d) có vectơ chỉ phương $\vec{v} = (1, -3, -2)$.

Lấy $H(t, -1-3t, -1-2t) \in (d)$

$\Rightarrow \overrightarrow{HM} = (2 - t, 3t, 1+2t)$

Ta có $\overrightarrow{HM} \perp (d)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{HM} . \vec{v} = (2 - t) - 9t - 2(1 + 2t) = 0$

$\Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow H(0, -1, -1)$. Đường thẳng đi qua M (2, −1, 0) vuông góc và cắt (d) chính là đường thẳng đi qua H, M với $\overrightarrow{HM} = (2, 0, 1)$ và có phương trình :

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 \\ z = t \end{cases}$$

Hướng dẫn giải
LTN

Kết quả

CUỘC CHƠI ĐẦU THIÊN NIÊN KỈ

Quá khó với tất cả các bạn, vì ảnh của một thời xa xưa mà CLB sưu tầm ở thẻ Đoàn viên từ khi... anh Ngô Đạt Tứ mới 16 tuổi. Chỉ mỗi bạn *Trần Văn Minh*, nhà K12, phòng 312 phường Bách Khoa, Hà Nội là đoán đúng. Khi mở phong bì, CLB mới phát hiện ra bạn Minh là bạn cũ của anh Ngô Đạt Tứ. Bạn Minh tặng người trong ảnh đôi câu đối :

Lúc trẻ xinh trai
Về già đẹp lão

Xin trao tặng phẩm và cảm ơn bạn Minh.

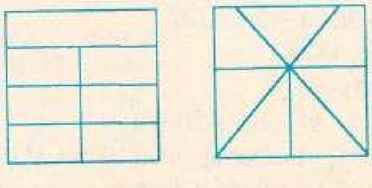
CLB

SỬA THƠ và... CHIA BÁNH

Rất nhiều bạn lập luận rất toán học để tìm ra chỗ nhầm lẫn của các con số. Chỉ có bạn *Lương Xuân Mạnh*, 10C10, THPT Bỉm Sơn, Thanh Hóa là tinh mắt và sáng dạ *để ý và hiểu chữ "miếng" ở bài thơ*. Như vậy không có ai được nguyên cả cái bánh. Nếu 4 người xơi 1 bánh chưng mà cắt đến 7 nhát thì hơi... không thực tế. Do đó bài thơ đúng phải là :

7 người xơi 1 bánh chưng
Cắt đúng 4 nhát chia từng người ăn
Không người nào phải băn khoăn
Nhỏ to nhưng số miếng bằng nhau thôi.

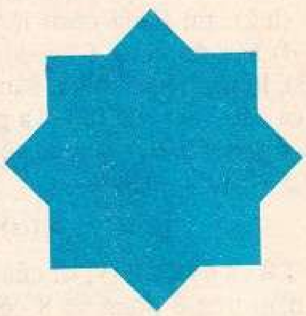
Như vậy thì... bài toán cũng không yêu cầu chia đều về thể tích và .. nhân bánh mà *chỉ mỗi lần cắt thì chia đều về số miếng*. Nhiều bạn chia công phu về thể tích nhưng lại nói sai về số miếng. Đáp án rất chi là đơn giản (nhiều cách) như 2 hình bên. Xin trao tặng phẩm cho bạn Mạnh.



L.T.N

CẮT VÀ GHÉP

Hãy cắt hình dưới và ghép các mảnh thành một hình vuông.



NGUYỄN THỊ ANH THƠ
(Ngõ 1, tổ 8, Cụm 4, Khương Đình, Thanh Xuân, Hà Nội)

MỘT BÀI, HAI LỜI GIẢI, HAI ĐÁP SỐ TRONG MỘT CUỐN SÁCH

Bạn *Phạm Khắc Thanh*, 10B Toán, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội "bắt mạch, kê đơn" ":

1) Ở cách 1, điều kiện cần thì

$x_o^3 + 2x_o = m + 1$ phải sửa thành

$x_o^2 + 2x_o = m + 2$.

Điều kiện đủ khi $m = -\dfrac{3}{4}$ thì $x = y = \dfrac{1}{2}$ chứ không phải $x = y = -\dfrac{3}{4}$.

2) Cách 2 sai ngay từ phép biến đổi đầu tiên, lẽ ra là :

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = m + 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = m + 1 \\ xy = 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

và tất nhiên... không còn gì để đúng.

Bạn Thanh còn bình luận thêm : "So với cách 2 thì cách 1 có phần đúng hơn".

Việc giải đúng là đơn giản nên xin không trình bày ở đây.

Các bạn : *Vũ Danh Được*, 11H, THPT Kẻ Sặt, Bình Giang, **Hải Dương**, *Phan Thành Nam*, 10 Toán 2, THPT chuyên Lương Văn Chánh, **Phú Yên**; *Tô Ngọc Dũng*, 11E, THPT Nguyễn Viết Xuân, Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc**; *Đinh Tuấn Hải*, 10/11, THPT Phan Châu Trinh, **Đà Nẵng**; *Trịnh Xuân Thanh*, 11A, THPT Hà Huy Tập và *Lê Văn Đức*, 10 Tin 2, THPT Lê Viết Thuật, Vinh, **Nghệ An** có nhận xét tốt.

KIHIVI

HÀI LÒNG CHƯA ?

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$a^4 + b^4 + c^4 < 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

Lời giải. (của một số sách về bất đẳng thức) vì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên $|b - c| < a$.

$\Rightarrow b^2 - 2bc + c^2 < a^2$

$\Rightarrow b^2 + c^2 - a^2 < 2bc$

$\Rightarrow (b^2 + c^2 - a^2)^2 < (2bc)^2$

$\Rightarrow b^4 + c^4 + a^4 + 2b^2c^2 - 2a^2b^2 - 2c^2a^2 <$
$< 4b^2c^2$

$\Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 < (2a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$
(đpcm)

Các bạn có hài lòng với lời giải này không ? Theo bạn phải giải thế nào cho đúng ?

NGUYỄN ĐỨC TẤN

Giải đáp bài

BẢNG SỐ KÌ DIỆU

Kí hiệu $(m; n)$ là số ở giao của hàng m và cột n thì thấy ngay $(1; 3) = 30 \Rightarrow (1; 2) = 31$. Mặt khác thấy ngay $(4; 1) = 29 \Rightarrow (4; 2) = 19$. Nhìn hai đường chéo sẽ có $(3; 2) = 26$ và $(2; 2) = 22$ $\Rightarrow (3; 4) = 21$; $(2; 4) = 25$.

Xin trao giải trình bày đẹp nhất cho các bạn *Nguyễn Văn Toàn*, 7C và *Nguyễn Văn Thắng* , 9B, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**, *Trần Văn Ngọc Tân*, 6/3, THCS Phan Phúc Duyên, Điện Thọ, Điện Bàn, **Quảng Nam**.

Cảm ơn tất cả các bạn.

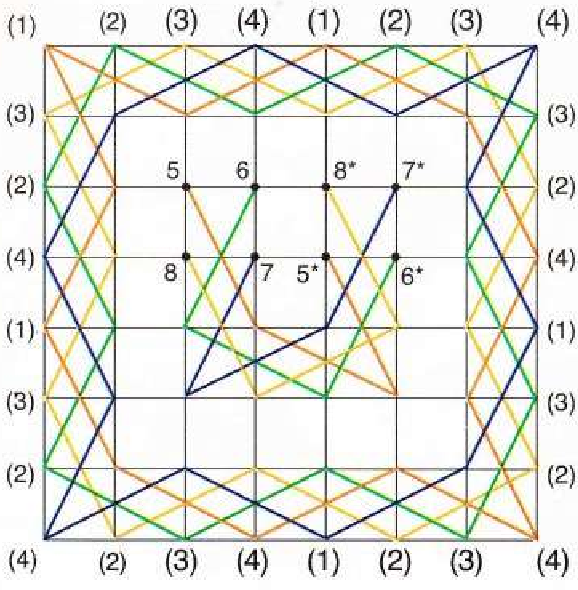
NGỌC MAI

CHƠI CỜ

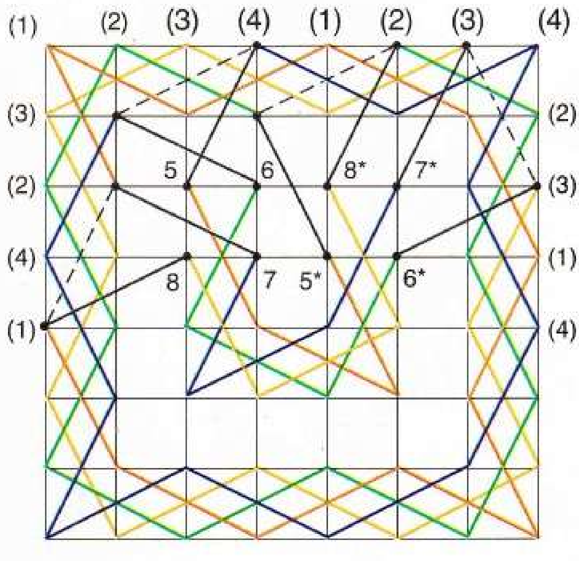
Một người mỗi ngày chơi ít nhất 1 ván cờ, mỗi tuần chơi không quá 13 ván cờ. Chứng minh rằng tồn tại một số ngày liên tiếp nhau mà tổng số ván cờ anh ta chơi đúng bằng 20.

VŨ ĐÌNH HÒA

PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TOÁN *QUÂN MÃ ĐI TUẦN* *(Tiếp trang 23)*



Hình 5



Hình 6

TRƯỜNG THPT CHUYÊN LƯƠNG THẾ VINH, ĐỒNG NAI

Thành lập vào tháng 10/1994, trường THPT chuyên Lương Thế Vinh, tỉnh Đồng Nai được xem là thành viên trẻ tuổi nhất trong hệ thống các trường chuyên cả nước. Được sự quan tâm của Tỉnh Ủy, HĐND, UBND tỉnh Đồng Nai, năm 1997 trường đã khánh thành cơ sở mới với diện tích 2,7ha tại đường Đồng Khởi, phường Tân Hiệp, Tp Biên Hòa tỉnh Đồng Nai. Đến nay trường đã có 30 lớp với trên 800 học sinh thuộc các lớp chuyên Văn, Toán, Lý, Hóa, Sinh, Tin học và tiếng Anh.

Nhà giáo ưu tú
TRẦN ANH DŨNG
Hiệu trưởng nhà trường

Là một trường trọng điểm của tỉnh Đồng Nai, tập thể sư phạm và CBQL của trường ngoài việc chú trọng nâng cao chất lượng giảng dạy, xây dựng đội ngũ, trường còn chú trọng đúng mức đến việc giáo dục toàn diện. Cơ sở vật chất của trường hiện tốt nhất trong tỉnh Đồng Nai với hệ thống phòng thí nghiệm, thư viện, các sân quần vợt, bóng chuyền, bóng rổ, bóng đá. Được sự tài trợ của tổ chức GLOBAL LIFE LEARNING CENTER (Nhật Bản) giáo viên và học sinh của trường được sử dụng 1 phòng Internet để giảng dạy và học tập miễn phí.

Trong 6 năm học qua, vượt bao khó khăn, trở ngại ban đầu cộng với sự mạnh dạn, dám nghĩ dám làm của tập thể sư phạm và CBQL của trường, bước đầu trường đã đạt những kết quả đáng khích lệ về chất lượng giáo dục toàn diện, về xây dựng đội ngũ. Những thành quả tiêu biểu của nhà trường trong 6 năm học qua là :

- Đạt 105 giải trong các kì thi chọn học sinh giỏi cấp quốc gia
- Đạt 1104 giải trong các kì thi chọn học sinh giỏi cấp tỉnh với rất nhiều giải nhất.
- Tỉ lệ đỗ đại học hàng năm từ 90% đến 96%. 15 lượt học sinh đỗ thủ khoa, á khoa các kì thi tú tài và tuyển sinh vào Đại học. 6 học sinh đã được nhận học bổng toàn phần của nhà nước du học tại Úc, Nga, CHLB Đức, Nhật và Trung Quốc.
- Đạt 20 huy chương Vàng trong các kì thi Olympic 30/4 của các tỉnh thành phía Nam. Đạt giải nhì toàn đoàn tại kì thi Olympic 30/4 năm 1998 tổ chức tại trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP Hồ Chí Minh.
- Đạt 2 huy chương Bạc tại Hội khỏe Phù Đổng toàn quốc.
- 4 nhà giáo được Chủ tịch nước tặng danh hiệu cao quý Nhà giáo ưu tú, 5 nhà giáo được Thủ tướng chính phủ tặng Bằng khen, 20 lượt giáo viên được trao tặng Huy chương vì sự nghiệp giáo dục. Hiệu trưởng nhà trường được tặng danh hiệu Chiến sĩ thi đua toàn quốc năm 2000.

Từ ngày thành lập đến nay, nhà trường được nhận nhiều Bằng khen của UBND tỉnh Đồng Nai, Bộ Giáo dục - Đào tạo, Thủ tướng chính phủ. Năm 1998 trường vinh dự được Chủ tịch nước trao tặng Huân chương Lao động hạng Ba.

ISN : 0866-0853
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT88M1

Chế bản tại Tòa soạn
In tại Nhà máy in Diên Hồng, ngõ 187 phố Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 4 năm 2001

Giá : 3.000đ
Ba nghìn đồng