TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964
6 2009
Số 384

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 46
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35144272, (04) 35121606
Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn Web: http://www.nxbgd.com.vn/toanhoctuoitre

CHÚC CÁC BẠN ĐẠT KẾT QUẢ CAO
trong các kì thi sắp tới

GIAO LƯU OLYMPIC TIẾNG ANH TIỂU HỌC năm 2009

Thực hiện chỉ đạo của Lãnh đạo Bộ Giáo dục và Đào tạo (GD&ĐT), Vụ Giáo dục Tiểu học phối hợp với Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam và Viện Khoa học Giáo dục Việt Nam tổ chức ***Giao lưu Olympic Tiếng Anh Tiểu học*** cấp khu vực năm 2009 dành cho học sinh tiểu học nhằm động viên, khuyến khích việc dạy và học tiếng Anh ở Tiểu học của các tỉnh và thành phố trong cả nước.

◆ Thời gian, địa điểm

- Miền Bắc: Ngày 13.6.2009 tại Trường tiểu học Kim Liên, 17 Hoàng Tích Trí, Q. Đống Đa, Hà Nội.

- Miền Trung: Ngày 22.6.2009 tại Nhà hát tuồng Nguyễn Hiển Dĩnh, 155 Phan Châu Trinh, TP. Đà Nẵng.

- Miền Nam: Ngày 20.6.2009 tại Trường Tiểu học Trần Quốc Tuấn, 19 Cộng hòa, P. 12, Q. Tân Bình, TP. Hồ Chí Minh.

◆ Thành phần

Mỗi Sở GD&ĐT cử 1 đoàn (gồm cán bộ chỉ đạo và 1 - 2 đội học sinh, mỗi đội 6 em học sinh). Các tỉnh, thành phố tham gia lần này gồm có:

- Miền Bắc: Hà Nội, Hải Phòng, Quảng Ninh, Thái Bình, Nam Định, Hưng Yên, Vĩnh Phúc, Phú Thọ, Hòa Bình, Thanh Hóa, Nghệ An.

- Miền Trung: Thừa Thiên - Huế, Đà Nẵng, Quảng Nam, Quảng Ngãi, Bình Định.

- Miền Nam: Bến Tre, Bình Dương, Cần Thơ, Đồng Tháp, Đắk Lắk, Trà Vinh, Đồng Nai.

◆ Nội dung giao lưu

Bao hàm trong Chương Trình tiếng Anh tự chọn của Bộ GD&ĐT.

◆ Hình thức giao lưu

1. *Khảo sát cá nhân:* Học sinh làm bài đánh giá kĩ năng nghe hiểu, đọc hiểu, viết.

2. *Giao lưu đồng đội:* gồm 2 phần

- Phần 1: Mỗi đoàn có 10 phút để trình bày nội dung giao lưu tự chọn của mình sử dụng hoàn toàn tiếng Anh: kể chuyện theo tranh, vẽ tranh theo lời kể, đố vui, hát hoặc đọc thơ, diễn kịch. Kịch bản tập trung vào chủ đề Vui học Tiếng Anh theo các tiêu chí: gần gũi với đời sống hàng ngày, thân thiện với học sinh và có các tác dụng khuyến khích học sinh học tập.

- Phần 2: Mỗi đoàn tham gia 2 - 4 hoạt động tiếp sức đồng đội. Học sinh sử dụng bút cảm ứng để viết, vẽ, tô màu, đánh dấu trên bảng tương tác IP Board theo yêu cầu của hoạt động, mỗi hoạt động thực hiện trong 3 - 5 phút.

◆ Giải thưởng

1. *Giải đồng đội.* Khu vực (KV) miền Bắc gồm 1 HC Vàng, 1 HC Bạc, 7 HC Đồng. KV miền Trung gồm 1 HC Vàng, 1 HC Bạc, 3 HC Đồng. KV miền Nam gồm 1 HC Vàng, 1 HC Bạc, 5 HC Đồng. Mỗi giải Vàng trị giá 7 triệu đồng, giải Bạc trị giá 5 triệu đồng, giải Đồng trị giá 3 triệu đồng.

2. *Giải cá nhân.* KV miền Bắc gồm 5 HC Vàng, 7 HC Bạc, 9 HC Đồng; KV miền Trung gồm 2 HC Vàng, 3 HC Bạc, 4 HC Đồng. KV miền Nam gồm 3 HC Vàng, 5 HC Bạc, 7 HC Đồng. Mỗi học sinh đoạt giải sẽ được tặng phần thưởng trị giá 1 triệu đồng. Hơn nữa, các học sinh đoạt HC Vàng và giáo viên tiếng Anh trực tiếp dạy được tặng một chuyến tham quan và trao đổi tại Singapore.

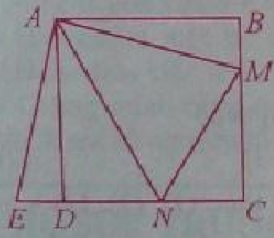
Khai thác một tính chất của HÌNH VUÔNG

NGUYỄN THỊ THỦY
(GV trường THCS Nguyễn Thiện Thuật, Khoái Châu, Hưng Yên)

Trong hình học THCS có rất nhiều bài toán có mối liên hệ với nhau. Từ một bài toán ban đầu nếu ta chịu khó đào sâu, tìm tòi, phân tích, khai thác sẽ được nhiều bài toán khác khá thú vị. Ta xuất phát từ bài toán sau đây.

Bài toán 1. *Cho hình vuông ABCD cạnh a. M, N theo thứ tự nằm trên cạnh DC, BC. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để chu vi tam giác CMN bằng 2a là* $\widehat{MAN} = 45°$.

Lời giải (h. 1). Kí hiệu chu vi tam giác ABC là $\mathscr{C}_{ABC}$. Trên tia đối của tia DC lấy điểm E sao cho $DE = BM$.



Hình 1

Điều kiện cần. Giả sử $\mathscr{C}_{CMN} = 2a$, lúc đó $MN = BM + ND = NE$.

Lại có $\Delta ABM = \Delta ADE$ nên $AM = AE$ và $\widehat{MAB} = \widehat{EAD}$ suy ra $AE \perp AM$.

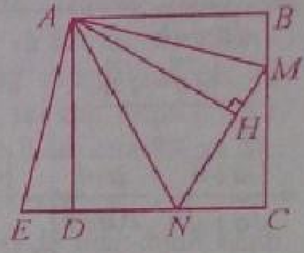
Mặt khác, $\Delta ANM = \Delta ANE$ (c.c.c), suy ra $\widehat{MAN} = \widehat{NAE} = 45°$.

Điều kiện đủ. Giả sử $\widehat{MAN} = 45°$, ta có $\Delta ABM = \Delta ADE$. Suy ra $AM = AE$, $AM \perp AE$. Do đó $\Delta ANM = \Delta ANE$ (c.g.c). Do đó $MN = NE = ND + BM$. Vậy chu vi tam giác CMN bằng $2a$. ❒

Qua bài toán trên ta thấy rằng khi $\mathscr{C}_{ABC} = 2a$, với điểm E xác định như trên thì $\Delta ANM = \Delta AEN$, dẫn đến hai đường cao hạ từ A của hai tam giác đó bằng nhau. Ta có bài toán sau đây.

Bài toán 2. *Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a. Trên cạnh BC và CD lần lượt lấy điểm M và N sao cho chu vi tam giác CMN bằng 2a. Hạ* $AH \perp MN$ ($H \in MN$). *Tìm tập hợp điểm H khi M, N thay đổi.*

Lời giải. (h. 2)



Hình 2

Vì $\mathscr{C}_{CMN} = 2a$ nên theo Bài toán 1 ta có $\Delta ANM = \Delta ANE$ (c.c.c). Suy ra $AH = AD = a$.

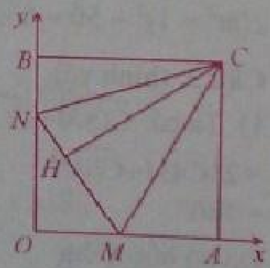
Mặt khác, khi $M \equiv B$ thì $H \equiv B$, khi $M \equiv C$ thì $H \equiv D$, do đó H nằm trên cung tròn BD của đường tròn tâm A, bán kính a.

Phần đảo xin dành cho bạn đọc. ❒

Nhận xét. Do $AH = a$ không đổi nên đường thẳng MN luôn tiếp xúc với đường tròn (A, a) cố định. Ta có bài toán sau.

Bài toán 3. *Trong hệ trục toạ độ vuông góc Oxy lấy điểm M trên tia Ox, N trên tia Oy sao cho* $\mathscr{C}_{CMN} = 2a$ *không đổi. Chứng minh rằng MN luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.*

Lời giải. (h. 3)



Hình 3

Trên tia Ox lấy điểm A, trên tia Oy lấy điểm B sao cho $OA = OB = a$. Dựng hình vuông $OACB$, khi đó C cố định. Theo Nhận xét trên, MN luôn tiếp xúc với đường tròn (C, a) tâm C bán kính a cố định. ❒

Tiếp tục khai thác ta có bài toán sau.

(Xem tiếp trang 26)

LỜI GIẢI ĐỀ THI VÀO LỚP 10 KHỐI THPT CHUYÊN TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

NĂM HỌC 2008 - 2009

(Đề thi đã đăng trên THTT số 383, tháng 5 năm 2009)

VÒNG 1

Câu 1. 1) Ta có

$$P=\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}:\frac{a+b+\sqrt{b}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)+\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{a-b}-\frac{\left|\sqrt{a}-\sqrt{b}\right|}{2}$$

$$=\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.\frac{a-b}{2(a+b)}-\frac{\left|\sqrt{a}-\sqrt{b}\right|}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}-\left|\sqrt{a}-\sqrt{b}\right|}{2}=\begin{cases}0, & \text{nếu } a>b\\ \sqrt{a}-\sqrt{b}, & \text{nếu } a<b\end{cases}$$

2) Do $b=(a+1)^2>a$ nên $P=-1 \Leftrightarrow a=1\ ;\ b=4$.

Câu 2. 1) PT đã cho tương đương với

$$x^2+(m^2+1)x+m-2=0.$$

Ta có $\Delta = m^4+2(m-1)^2+7>0$ với mọi m. Do đó PT đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m.

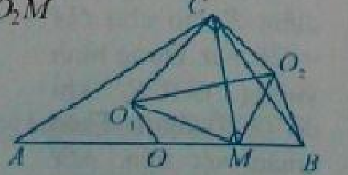
2) Để $x_1\neq 0, x_2\neq 0$ thì $m\neq 2$, từ ĐK bài ra ta có

$$2((x_1+x_2)^2-2x_1x_2)-(x_1+x_2)-x_1^2x_2^2-55=0 \quad (1)$$

Theo định lí Viète có $x_1+x_2=-(m^2+1)$, $x_1x_2=m-2$, thay vào (1) ta được

$2(m^2+1)^2-50=0 \Leftrightarrow m=-2$ (do $m\neq 2$).

Câu 3. (hình vẽ).



1) Ta có $\widehat{CO_1M}+\widehat{CO_2M}$
$=2\left(\widehat{CAM}+\widehat{CBM}\right)$
$=180°$.

Do đó bốn điểm C, O_1, M, O_2 cùng thuộc một đường tròn $(\mathscr{C})$.

2) Vì ΔCO_1M và ΔCO_2M cân tại O_1, O_2 tương ứng, suy ra $\widehat{O_1CO_2}=\widehat{O_1MO_2}=90°$. Vậy O_1O_2 là một đường kính của đường tròn $(\mathscr{C})$. Mặt khác, OO_1 là đường trung trực của cạnh AC, OO_2 là đường trung trực của cạnh BC. Suy ra $\widehat{O_1OO_2}=\widehat{ACB}=90°$. Do đó O cũng nằm trên đường tròn $(\mathscr{C})$.

3) Giả sử R là bán kính đường tròn $(\mathscr{C})$, ta có $2R\geq CO$ (không đổi). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi CO là đường kính đường tròn $(\mathscr{C})$, lúc đó $\widehat{CMO}=90°$, hay M là chân đường vuông góc hạ từ C xuống AB.

Câu 4. Theo giả thiết i) ta có

$$ac-a-c=b^2-2b$$

$$\Leftrightarrow (a-1)(c-1)=(b-1)^2 \quad (1)$$

Tương tự, từ giả thiết ii) ta có

$$(b-1)(d-1)=(c-1)^2 \quad (2)$$

Nhân theo vế hai đẳng thức (1), (2), kết hợp với giả thiết iii) ta có

$$(a-1)(d-1)=(b-1)(c-1).$$

Suy ra đpcm.

Câu 5. Đặt $a=z+x$, $b=z+y$. Từ giả thiết suy ra $a>0$, $b>0$ và $ab=1$. BĐT cần chứng minh trở thành

$$\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geq 4 \Leftrightarrow \frac{a^2}{(a^2-1)^2}+\frac{1}{a^2}+a^2\geq 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{(a^2-1)^2}+\frac{(a^2-1)^2}{a^2}\geq 2. \quad (*)$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương ta suy ra BĐT (*) luôn đúng.

LƯU XUÂN TÌNH
(GV trường ĐHSP Hà Nội) giới thiệu

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 KHỐI THPT CHUYÊN TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

NĂM HỌC 2008 - 2009

VÒNG 2

Câu 1 (*2 điểm*). Ba số dương a, b, c thoả mãn $b \neq c$, $\sqrt{a}+\sqrt{b} \neq \sqrt{c}$ và $a+b=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2$.

Chứng minh đẳng thức $\dfrac{a+\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)^2}{b+\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$.

Câu 2 (*2 điểm*)

1) Với mỗi số dương a thoả mãn $a^3 = 6(a+1)$, chứng minh rằng phương trình sau vô nghiệm:
$$x^2 + ax + a^2 - 6 = 0.$$

2) Tìm tất cả các giá trị của a và b sao cho
$$2(a^2+1)(b^2+1) = (a+1)(b+1)(ab+1).$$

Câu 3 (*1,5 điểm*). Ba số nguyên dương a, b, c đôi một khác nhau và thoả mãn đồng thời các điều kiện:

i) a là ước của $b + c + bc$

ii) b là ước của $a + c + ac$

iii) c là ước của $a + b + ab$.

1) Hãy chỉ ra một bộ ba số $(a\ ;\ b\ ;\ c)$ thoả mãn các điều kiện trên.

2) Chứng minh rằng a, b, c không thể đồng thời là các số nguyên tố.

Câu 4 (*3,5 điểm*). Cho tam giác ABC. Một đường tròn $(\mathscr{C})$ đi qua các điểm A, B và cắt các cạnh CA, CB tại các điểm L, N tương ứng ($L \neq A$, $L \neq C$, $N \neq B$, $N \neq C$). Gọi M là trung điểm của cung LN của đường tròn $(\mathscr{C})$ và M nằm trong tam giác ABC. Đường thẳng AM cắt các đường thẳng BL và BN tại các điểm D và F tương ứng, đường thẳng BM cắt các đường thẳng AN và AL tại các điểm E và G tương ứng. Gọi P là giao điểm của AN và BL.

1) Chứng minh rằng $DE \,//\, GF$.

2) Giả sử tứ giác $DEFG$ là hình bình hành. Chứng minh rằng:

a) Tam giác ALP đồng dạng với tam giác ANC.

b) $DF \perp EG$.

Câu 5 (*1 điểm*). Cho ba điểm phân biệt nằm trong hay trên cạnh một tam giác đều có cạnh bằng 6cm. Chứng minh rằng luôn tồn tại hai điểm trong số 13 điểm đã cho mà khoảng cách giữa chúng không vượt quá $\sqrt{3}$ cm.

THỬ SỨC TRƯỚC KÌ THI... (*Tiếp trang 8*)

ĐÁP SỐ ĐỀ SỐ 4

Câu 1. 2) $|m|>\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ PT có 1 nghiệm;

$|m|=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ hoặc $|m|=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ PT có 2 nghiệm.

$|m|<\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ và $|m|\neq\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ PT có 3 nghiệm.

Câu 2. 1) $x=(2k+1)\pi$; $x=\dfrac{\pi}{4}\pm\arccos\dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+2k\pi$;

2) $x=\log_{\sqrt{2}+1}2$.

Câu 3. $V_{ASBC}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Câu 4. $e^I=\dfrac{11}{4}$.

Câu 5. $\min P=2\sqrt{3}$.

Câu 6a. 1) (C): $\left(x-\dfrac{8}{5}\right)^2+\left(y+\dfrac{6}{5}\right)^2=9$;

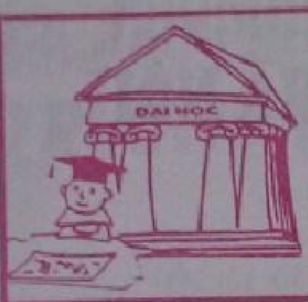
2) (d): $\begin{cases} x=1+t \\ y=5+3t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=0. \end{cases}$

Câu 7a. $\min\limits_{x\in D} y=-18$, $\max\limits_{x\in D} y=18$.

Câu 6b. 1) $M\left(-\dfrac{15}{4};\dfrac{9}{4}\right)$; 2) $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{4}$.

Câu 7b. $z_{1,2}=\dfrac{1}{2}\left(-1\pm\sqrt{\sqrt{17}-4}+\left(1\mp\sqrt{\sqrt{17}+4}\right)i\right)$

$z_3=i$.



Chuẩn bị cho kì thi tốt nghiệp THPT và thi vào Đại học

Tính khoảng cách nhờ tính chất của tứ diện vuông

HOÀNG ĐỨC NGUYÊN
(GV khối THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)

Định nghĩa. *Tứ diện vuông là tứ diện có một góc tam diện ba mặt vuông.*

Trong tứ diện vuông có một tính chất đáng chú ý sau đây

Tính chất. *Giả sử O.ABC là tứ diện vuông ($OA \perp OB, OB \perp OC, OC \perp OA$). Khi đó đường cao OH của tứ diện O.ABC được tính theo công thức* $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

Sử dụng tính chất này để tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng trong nhiều trường hợp tỏ ra khá thuận lợi. Sau đây là một số thí dụ, như là sự tiếp nối của bài *"Tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng và khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau"* (THTT số 367, 1/2008). Trong bài viết, kí hiệu $d(a\,;\,b)$ là khoảng cách giữa đường thẳng a và đường thẳng b; $d(X\,;\,(YZT))$ là khoảng cách từ điểm X đến mặt phẳng (YZT).

★**Thí dụ 1.** *Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O, cạnh a,* $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $SO \perp \text{mp}(ABCD)$ *và* $SO = \dfrac{3a}{4}$.

a) *Tính* $d(O; (SBC))$, $d(A; (SBC))$.

b) *Tính* $d(AD\,;\,SB)$.

Lời giải. Bạn đọc tự vẽ hình.

a) Từ giả thiết ta tính được $OB = \dfrac{a}{2};\ OC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Do tứ diện $O.SBC$ vuông tại O nên

$$\frac{1}{d^2(O;(SBC))} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$$

$$= \frac{16}{9a^2} + \frac{4}{a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{64}{9a^2}.$$ Suy ra $d(O,(SBC)) = \dfrac{3a}{8}$.

Lại có $\dfrac{d(A;(SBC))}{d(O;(SBC))} = \dfrac{CA}{CO} = 2$, nên

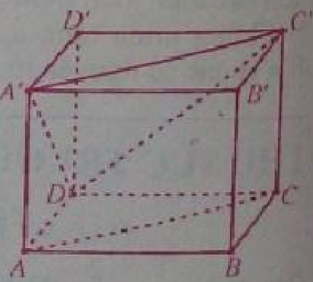
$$d(A\,;\,(SBC)) = 2d(O\,;\,(SBC)) = 2.\frac{3a}{8} = \frac{3a}{4}.$$

b) Vì $AD//(SBC)$ nên $d(AD\,;\,SB) = d(AD\,;\,(SBC))$ $= d(A\,;\,(SBC)) = \dfrac{3a}{4}$. □

★**Thí dụ 2.** *Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a. Tính* $d(AC\,;\,DC')$.

Lời giải (h. 1)

Vì $AC//(DA'C')$ nên $d(AC\,;\,DC')$
$= d(AC\,;\,(DA'C'))$
$= d(A\,;\,(DA'C'))$
$= d(D'\,;\,(DA'C'))$.



Hình 1

Tứ diện $D'.DA'C'$ vuông tại D' nên

$$\frac{1}{d^2(D';(DA'C'))} = \frac{1}{D'A'^2} + \frac{1}{D'C'^2} + \frac{1}{D'D^2} = \frac{3}{a^2}.$$

Do đó $d(AC\,;\,DC') = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. □

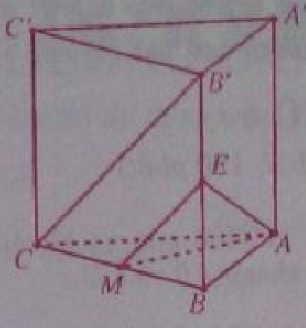
★**Thí dụ 3.** (Đề thi TSĐH khối D năm 2008)

Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại B, AB = BC = a, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. *Gọi M là trung điểm của BC. Tính* $d(AM\,;\,B'C)$.

Lời giải (h. 2)

Gọi E là trung điểm của BB', suy ra $B'C//(AME)$. Do đó

$d(AM ; B'C)$
$= d(B'C; (AME))$
$= d(B'; (AME))$
$= d(B ; (AME))$.



Hình 2

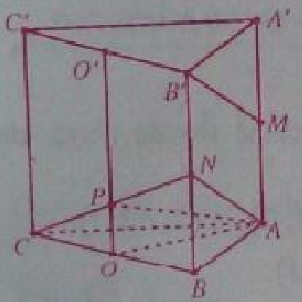
Vì tứ diện $B.AME$ vuông tại B nên ta có

$$\frac{1}{d^2(B;(AME))} = \frac{1}{BE^2} + \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} = \frac{7}{a^2}$$

$$\Rightarrow d(B;(AME)) = \frac{a\sqrt{7}}{7}.$$

Vậy $d(AM; B'C) = \dfrac{a\sqrt{7}}{7}$. □

★**Thí dụ 4.** *Cho lăng trụ đều ABC.A'B'C' có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA', BB'. Tính d(B'M; CN).*



Hình 3

Lời giải (h. 3)

Gọi O, O' lần lượt là trung điểm của BC, $B'C'$ và $P = OO' \cap CN$. Vì $B'M$ // mp(CAN) nên $d(B'M ; CN)$
$= d(B'M ;(CAN))$
$= d(B'; (CAN))$
$= d(B ;(CAN))$
$= 2d(O ; (CAN))$
$= 2d(O; (CAP))$.

Tứ diện $O.ACP$ vuông tại O nên

$$\frac{1}{d^2(O;(CAP))} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OP^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{64}{3a^2}.$$

Vậy $d(O; (CAP)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{8}$.

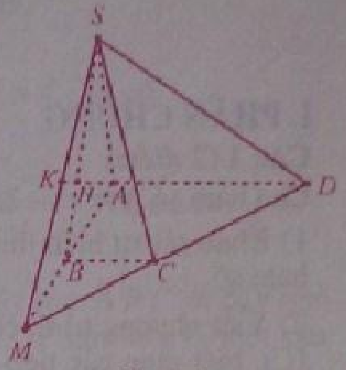
Do đó $d(B'M ; CN) = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. □

★**Thí dụ 5.** ***(Đề thi TSĐH khối D năm 2007)*** *Cho hình chóp S.ABCD, có đáy ABCD là hình thang,* $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^\circ$, $BA = BC = a$, $AD = 2a$. *Cạnh bên SA vuông góc với đáy và* $SA = a\sqrt{2}$. *Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Tính d(H; (SCD)).*

Lời giải (h. 4)

Gọi $M = AB \cap CD$, $K = AH \cap SM$. Dễ thấy B là trung điểm của AM. Ta có

$$\frac{BH}{BS} = \frac{BH.BS}{BS^2} = \frac{BA^2}{BS^2} = \frac{a^2}{3a^2} = \frac{1}{3}.$$



Hình 4

Suy ra H là trọng tâm của tam giác SAM.

Từ đó $\dfrac{d(H;(SCD))}{d(A;(SCD))} = \dfrac{KH}{KA} = \dfrac{1}{3}$.

Tứ diện $A.SDM$ vuông tại A nên

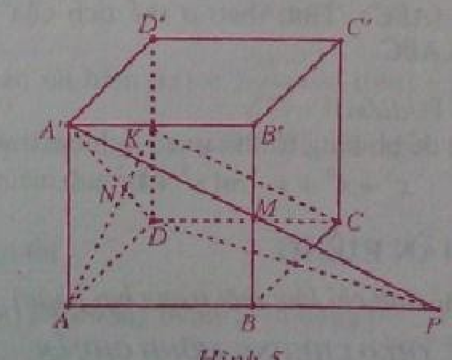
$$\frac{1}{d^2(A;(SCD))} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{a^2}$$

$\Rightarrow d(A,(SCD)) = a$.

Vậy $d(H ; (SCD)) = \dfrac{a}{3}$. □

★**Thí dụ 6.** *Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a. Gọi K là trung điểm của DD'. Tính d(CK; A'D).*

Lời giải (h. 5)



Hình 5

Gọi M là trung điểm của BB'. Ta có $A'M//KC$ nên $d(CK;A'D) = d(CK; (A'MD)) = d(K; (A'MD))$.

(Xem tiếp trang 31)

Thử sức TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 6

(Thời gian làm bài: 180 phút)

I. PHẦN CHUNG

Câu 1 (2 *điểm*)

Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Viết phương trình các tiếp tuyến với đồ thị (C), biết rằng các tiếp tuyến này đi qua điểm $A(0\,;2)$.

Câu 2 (2 *điểm*)

1) Giải bất phương trình

$$\left(2^x + 3.2^{-x}\right)^{2\log_2 x - 2\log_2(x+6)} > 1.$$

2) Giải phương trình

$$\frac{(\sin x + \cos x)^2 - 2\sin^2 x}{1 + \cot^2 x} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right)\right).$$

Câu 3 (1 *điểm*)

Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{x\sqrt{x-1}}{x-5}\,dx.$

Câu 4 (1 *điểm*)

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, tam giác SAC cân tại S, góc SBC bằng 60°, mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABC$.

Câu 5 (1 *điểm*)

Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực:

$$x^3 + x^2 + x - m(x^2 + 1)^2 = 0.$$

II. PHẦN RIÊNG

(Thí sinh chỉ làm một trong hai phần)

THEO CHƯƠNG TRÌNH CHUẨN

Câu 6a (2 *điểm*)

Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho các điểm $A(-1\,;-1\,;0), B(1\,;-1\,;2), C(2\,;-2\,;1), D(-1\,;1\,;1)$.

1) Tính góc và khoảng cách giữa các đường thẳng AB và CD.

2) Giả sử (α) là mặt phẳng đi qua D và cắt ba trục toạ độ Ox, Oy, Oz tương ứng tại các điểm M, N, P khác gốc O sao cho D là trực tâm của tam giác MNP. Hãy viết phương trình của mặt phẳng (α).

Câu 7a (1 *điểm*)

Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn

$$ab + bc + ca = 3.$$

Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{1+a^2(b+c)} + \frac{1}{1+b^2(a+c)} + \frac{1}{1+c^2(b+a)} \le \frac{1}{abc}.$$

THEO CHƯƠNG TRÌNH NÂNG CAO

Câu 6b (2 *điểm*)

Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho các điểm

$A(-1;-1;0)$, $B(1;-1;2)$, $C(2;-2;1)$, $D(-1;1;1)$, $E(4;2;1)$.

1) Tính góc và khoảng cách giữa các đường thẳng AB và CD.

2) Giả sử (α) là mặt phẳng đi qua E và cắt tia Ox tại M, tia Oy tại N, tia Oz tại P. Viết phương trình mặt phẳng (α) khi tứ diện $OMNP$ có thể tích nhỏ nhất.

Câu 7b (1 *điểm*)

Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển

$$\left(1 + \frac{1}{x} + x^3\right)^{10} \text{ (với } x \neq 0).$$

HUỲNH TẤN CHÂU
(GV THPT chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên)

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 3

(Đề thi đã đăng trên THTT số 381, tháng 3/2009)

Câu 1. 1) *Bạn đọc tự giải.*

2) Ta tìm m để hệ PT sau có nghiệm: $\begin{cases} f(x)=x \\ f'(x)=1 \end{cases}$

hay hệ $\begin{cases} \dfrac{-(x-m)^2}{x-1}=0 \\ \dfrac{-2(x-m)(x-1)+(x-m)^2}{(x-1)^2}=0 \end{cases}$ (*)

có nghiệm.

Với $\forall m \neq 1$; $x = m$ luôn thỏa mãn hệ (*). Vì vậy $\forall m \neq 1$, hệ (*) luôn có nghiệm, đồng thời khi $m = 1$ thì hệ (*) vô nghiệm.

Đáp số. $m \neq 1$.

Câu 2. 1) ĐK $x(x+9) > 0$.

Đưa PT đã cho về dạng $\log_2(x+9)^2 = 0$.

Đáp số. $x = -10$.

2) ĐK $x + y > 0$. PT thứ nhất của hệ có dạng

$$x^2+y^2+\frac{(x+y)^2-(x^2+y^2)}{x+y}-1=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y-1)\left(\frac{x^2+y^2}{x+y}+1\right)=0.$$

Đáp số. Hệ có hai nghiệm $(x\,;\,y)$ là $(1\,;\,0)$ và $(-2\,;\,3)$.

Câu 3. 1) Ta có

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-2x^2}-\sqrt[3]{1+x^2}}{\ln(1+x^2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{-2x^2}-\sqrt[3]{1+x^2}}{x^2}\cdot\frac{x^2}{\ln(1+x^2)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{-2x^2}-1}{x^2}+\frac{1-\sqrt[3]{1+x^2}}{x^2}\right)$$

$$=-2+\frac{1}{3}=-\frac{7}{3}.$$ Vậy $L=\frac{1}{I}=-\frac{3}{7}$.

2) Xét tích phân $J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\,dx}{(\sin x+\cos x)^3}$.

Đặt $x=\frac{\pi}{2}-t$ suy ra $I = J$. Ta có

$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{(\sin x+\cos x)^2}=1.$$ Từ đó $I=\frac{1}{2}$.

Câu 4. Gọi ABC là đáy lớn, $A'B'C'$ là đáy nhỏ của hình chóp cụt; H, H' lần lượt là tâm của các tam giác đều ABC và $A'B'C'$. Còn I, I' lần lượt là trung điểm của AB, $A'B'$.

Hình cầu nội tiếp hình chóp cụt này tiếp xúc với hai đáy tại H, H' và tiếp xúc với mặt bên $(ABB'A')$ tại điểm $K \in II'$.

Gọi x là cạnh đáy nhỏ thì $2x$ là cạnh đáy lớn.

Ta có $I'K=\frac{x\sqrt{3}}{6}$, $IK=\frac{x\sqrt{3}}{3}$.

Gọi O là tâm hình cầu thì do $I'K.IK=OK^2$ nên $x^2=6r^2$.

Thể tích hình chóp cụt tính bởi

$V=\frac{h}{3}(B+B'+\sqrt{BB'})$. *Đáp số* $V=\frac{21r^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 5. Đưa PT đã cho về dạng $\frac{3x^2-2x}{\sqrt{2x-1}}=mx$ (1)

Ta thấy $x = 0$ không là nghiệm của (1) suy ra $x \neq 0$. Do đó (1) $\Leftrightarrow \frac{3x-2}{\sqrt{2x-1}}=m$.

Khảo sát hàm $f(x)=\frac{3x-2}{\sqrt{2x-1}}$ trên $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ ta thấy với mọi $m \in \mathbb{R}$, PT đã cho luôn có nghiệm duy nhất.

Câu 6a

1) a) PT đường thẳng d có dạng $\begin{cases} y+2x=0 \\ x-z+1=0. \end{cases}$

Vì mặt phẳng (Q) chứa d, nên (Q) có dạng:

$(n+2m)x+my-nz+n=0$ $(m^2+n^2\neq 0)$.

Từ điều kiện mp(Q)//mp(P) ta suy ra $\begin{cases} m=-n \\ n\neq 0. \end{cases}$

Chọn $n = 1$, $m = -1$ ta được PT mp(Q) cần tìm là $x + y + z - 1 = 0$.

b) Giả sử $M(x_0; y_0; z_0)$, thì do $M \in$ mp(P) nên $x_0 + y_0 + z_0 = -3$.

Ta thấy

$$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = (23 - 6x_0; 13 - 6y_0; 25 - 6z_0).$$

Suy ra $|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}|$

$$= \sqrt{(23 - 6x_0)^2 + (13 - 6y_0)^2 + (25 - 6z_0)^2}$$

$$\geq \sqrt{\frac{1}{3}(23 - 6x_0 + 13 - 6y_0 + 25 - 6z_0)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{237}}{3} \text{ (do } x_0 + y_0 + z_0 = -3).$$

Đáp số. $M\left(-\frac{5}{9}; -\frac{20}{9}; -\frac{2}{9}\right)$.

2) Đường tròn (C) có tâm $I(3 ; 1)$ và bán kính $R = 3$. Giả sử (C) cắt d tại A và B. Kẻ $IH \perp AB$ thì H là trung điểm của AB. Từ đó $AH = \frac{l}{2} = 2$. Tính được $IH = \sqrt{5}$.

PT d: $Ax + By - 2B = 0$ $(A^2 + B^2 \neq 0)$.

Ta có $IH = \sqrt{5} \Leftrightarrow d(I ; (d)) = \sqrt{5}$

$$\Leftrightarrow \frac{|3A + B - 2B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \sqrt{5}.$$

Chọn $B = 1$ thì $A = 2$ hoặc $A = -\frac{1}{2}$.

Có hai đường thẳng phải tìm là:

(d_1): $2x + y - 2 = 0$; (d_2): $x - 2y + 4 = 0$.

Câu 7a. Xét hàm số $f(x) = \frac{x^n}{1 + x^{2(n-1)}}$, với $x > 0$.

Ta có

$$f'(x) = \frac{nx^{n-1} - (n-2)x^{3n-3}}{(1 + x^{2(n-1)})^2} = \frac{x^{n-1}(n - (n-2)x^{2n-2})}{(1 + x^{2(n-1)})^2}$$

Do $x > 0$ nên $x^{n-1} > 0$.

Lập bảng biến thiên của hàm $f(x)$ ta thấy hàm số đạt cực đại khi $x_0 = \sqrt[2n-2]{\frac{n}{n-2}} \neq 1$, suy ra $f(x_0) > f(1) = \frac{1}{2}$. Từ đó suy ra BĐT cần chứng minh.

Câu 6b. 1) PT đường thẳng AB là $\begin{cases} x + y = 4 \\ z = 0 \end{cases}$

Tọa độ giao điểm của đường thẳng AB với mp(α) là $(-4 ; 8 ; 0)$. Tọa độ điểm $I(2 ; 2 ; 0)$.

PT đường thẳng KI có dạng

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-1}.$$

Tọa độ chân đường vuông góc hạ từ I xuống mp(α) là $H(-1 ; 0 ; 1)$.

Giả sử tọa độ của K là $(x_0; y_0; z_0)$. Thế thì

$$KH = \sqrt{(x_0 + 1)^2 + y_0^2 + (z_0 - 1)^2};$$

$$KO = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}.$$

Đáp số. $K\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$.

2) Ta có $a = 10$, $b = 5$, $c = 5\sqrt{3}$.

Hai tiêu điểm $F_1(-5\sqrt{3}; 0)$; $F_2(5\sqrt{3}; 0)$.

Tâm sai $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Từ định lí côsin cho ΔF_1MF_2 ta có

$$F_1F_2^2 = MF_1^2 + MF_2^2 - 2MF_1.MF_2 \cos 120^o$$

$$\Rightarrow 4c^2 = (MF_1 + MF_2)^2 - MF_1.MF_2.$$

Suy ra $4c^2 = 4a^2 - (a + ex_M)(a - ex_M)$

$$\Rightarrow e^2x_M^2 = 4c^2 - 3a^2 \Rightarrow x_M = 0 \; (y_M = \pm 5).$$

Vậy có hai điểm phải tìm: $M_1(0; -5)$; $M_2(0; 5)$.

Câu 7b. Với $n = 3$ thì BĐT cần chứng minh đúng. Xét $n > 3$, khi đó $\ln(n-1) > 0$. BĐT cần chứng minh tương đương với

$$\frac{\ln n}{\ln(n-1)} > \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \quad (1)$$

Hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{\ln(x-1)}$, với $x > 3$ là hàm nghịch biến, nên với $n > 3$ thì

$$f(n) > f(n+1) \Leftrightarrow \frac{\ln n}{\ln(n-1)} > \frac{\ln(n+1)}{\ln n}.$$

BĐT (1) được chứng minh.

NGUYỄN VĂN THÔNG
(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng)

Mời các bạn xem ĐÁP SỐ ĐỀ SỐ 4 ở trang 3.

Hướng dẫn ôn tập môn Vật lí

THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG NĂM 2009

Các chủ đề: HẠT NHÂN NGUYÊN TỬ TỪ VI MÔ ĐẾN VĨ MÔ

NGUYỄN VĂN THUẬN
(GV trường ĐHSP Hà Nội)

Theo nội dung cấu trúc đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng năm 2009 của Bộ Giáo dục và Đào tạo, trong phần chung cho tất cả thí sinh, các chủ đề HẠT NHÂN NGUYÊN TỬ và TỪ VI MÔ ĐẾN VĨ MÔ có 5 câu trắc nghiệm.

Chủ đề HẠT NHÂN NGUYÊN TỬ gồm các nội dung kiến thức: Cấu tạo hạt nhân nguyên tử, khối lượng hạt nhân; Độ hụt khối, năng lượng liên kết, năng lượng liên kết riêng; Hệ thức Einstein giữa khối lượng và năng lượng; Phóng xạ; Phản ứng hạt nhân; Phản ứng phân hạch; Phản ứng nhiệt hạch.

Chủ đề TỪ VI MÔ ĐẾN VĨ MÔ gồm các nội dung kiến thức: Các Hạt sơ cấp; Hệ Mặt Trời, các Sao và Thiên hà.

Dưới đây là một số câu trắc nghiệm thuộc nội dung hai chủ đề này.

★**Thí dụ 1.** *Phát biểu nào dưới đây là sai?*

A. *Các nguyên tử mà hạt nhân có cùng số prôtôn nhưng có số nơtron khác nhau gọi là các đồng vị.*

B. *Các đồng vị phóng xạ đều không bền.*

C. *Các đồng vị của cùng một nguyên tố đều có cùng vị trí trong bảng hệ thống tuần hoàn.*

D. *Các đồng vị của cùng một nguyên tố có số nơtron khác nhau nên tính chất hoá học khác nhau.*

Hướng dẫn. Dễ dàng nhận thấy các đáp án A, B, C đúng.

Tính chất hoá học của một nguyên tố phụ thuộc vào cấu hình điện tử của lớp vỏ điện tử của nguyên tố chứ không phụ thuộc số nơtron trong một hạt nhân nguyên tử. Vậy phát biểu D sai.

Chọn D. ❒

★**Thí dụ 2.** *Hạt nhân* $^{10}_{4}Be$ *có khối lượng* 10,0135u. *Khối lượng của nơtron* $m_n = 1,0087u$, *khối lượng của prôtôn* $m_p = 1,0073u$, $1u = 931MeV/c^2$. *Năng lượng liên kết riêng của hạt nhân* $^{10}_{4}Be$ *là*

A. 6,32MeV/nuclôn. B. 7,25MeV/nuclôn.
C. 5,21MeV/nuclôn. D. 8,57MeV/nuclôn.

Hướng dẫn. Năng lượng liên kết

$$E_{lk} = \Delta mc^2 = \left(Zm_p + \left(A-Z\right)m_n - m_{hn}\right).c^2.$$

Năng lượng liên kết riêng

$$E_r = \frac{E_{lk}}{A}$$
$$= \frac{(4.1,0073 + (10-4).1,0087 - 10,0135).931}{10}$$
$$\approx 6,32MeV/nuclôn.$$

Đáp án A đúng.

Chọn A. ❒

★**Thí dụ 3.** *Ban đầu một mẫu chất phóng xạ nguyên chất có khối lượng* m_0, *chu kì bán rã của chất này là 3,8 ngày. Sau 15,2 ngày khối lượng của chất phóng xạ đó còn lại là 2,24g. Khối lượng ban đầu* m_0 *của mẫu chất phóng xạ đó là*

A. 24,35g. B. 35,84g.
C. 17,46g. D. 41,25g.

Hướng dẫn. Từ công thức phóng xạ $m = m_0e^{-\lambda t}$, suy ra

$$\frac{m}{m_0} = e^{-\lambda t} \Rightarrow \ln\frac{m}{m_0} = -\lambda t = -\frac{t\ln 2}{T} = \ln 2^{-\frac{t}{T}}.$$

Vậy $\frac{m}{m_0} = 2^{-\frac{t}{T}} \Rightarrow m_0 = m2^{\frac{t}{T}} = 2{,}24.2^{\frac{15,2}{3,8}} \approx 35{,}84\text{g}$.

Đáp án **B** đúng.

Chọn B. □

★**Thí dụ 4.** *Xét một phản ứng hạt nhân* ${}_1^2H + {}_1^2H \rightarrow {}_2^3He + {}_0^1n$. *Biết khối lượng của các hạt nhân* $m_{{}_1^2H} = 2{,}0135\text{u}$; $m_{{}_2^3He} = 3{,}0149\text{u}$; $m_{{}_0^1n} = 1{,}0087\text{u}$; $1\text{u} = 931\text{MeV/c}^2$. *Năng lượng phản ứng trên toả ra là*

A. 2,5425MeV. **B.** 4,2765MeV.
C. 3,1654MeV. **D.** 1,4728MeV.

Hướng dẫn. Năng lượng của phản ứng hạt nhân:

$$\Delta E = \Delta mc^2 = (2.2{,}0135 - 3{,}0149 - 1{,}0087).931$$
$$= 3{,}4.10^{-3}.931 = 3{,}1654\text{MeV}.$$

Đáp án **C** đúng.

Chọn C. □

★**Thí dụ 5.** *Trong các hành tinh sau đây thuộc hệ Mặt Trời, hành tinh nào xa Mặt Trời nhất?*

A. Thổ tinh. **B.** Kim tinh.
C. Mộc tinh. **D.** Hoả tinh.

Hướng dẫn. Trong các hành tinh: Thổ tinh, Kim tinh, Mộc tinh, Hoả tinh thì Thổ tinh xa Mặt Trời nhất. Đáp án **A** đúng.

Chọn A. □

Sau đây là một số câu trắc nghiệm thuộc nội dung hai chủ đề trên, các bạn tự làm.

Câu 1. Hạt nhân A đang đứng yên thì phân rã thành hạt nhân B có khối lượng m_B và hạt α có khối lượng m_α. Tỉ số giữa động năng của hạt nhân B và động năng của hạt α ngay sau phân rã bằng

A. $\frac{m_B}{m_\alpha}$. **B.** $\left(\frac{m_\alpha}{m_B}\right)^2$.

C. $\frac{m_\alpha}{m_B}$. **D.** $\left(\frac{m_B}{m_\alpha}\right)^2$.

Câu 2. Cho $m_C = 12{,}0000\text{u}$; $m_p = 1{,}0073\text{u}$; $m_n = 1{,}0087\text{u}$; $1\text{u} = 1{,}6606.10^{-27}\text{kg}$; $1\text{eV} = 1{,}6.10^{-19}\text{J}$; $c = 3.10^8\text{m/s}$. Năng lượng tối thiểu để tách hạt nhân ${}_6^{12}C$ thành các nuclôn riêng biệt bằng

A. 57,2MeV. **B.** 74,2MeV.
C. 62,8MeV. **D.** 89,4MeV.

Câu 3. Một chất phóng xạ có chu kì bán rã là 3,8 ngày. Sau thời gian 11,4 ngày thì độ phóng xạ của lượng chất phóng xạ còn lại bằng bao nhiêu phần trăm so với độ phóng xạ của lượng chất phóng xạ ban đầu?

A. 12,5%. **B.** 25%.
C. 17,5%. **D.** 15%.

Câu 4. Hạt nhân ${}_{17}^{37}Cl$ có khối lượng nghỉ bằng 36,9566u. Biết khối lượng của nơtron là 1,0087u, khối lượng của prôtôn là 1,0073u và $1\text{u} = 931\text{MeV/c}^2$. Năng lượng liên kết riêng của hạt nhân ${}_{17}^{37}Cl$ bằng

A. 6,28MeV/nuclôn. **B.** 8,57MeV/nuclôn.
C. 7,15MeV/nuclôn. **D.** 7,65MeV/nuclôn.

Câu 5. Phát biểu nào dưới đây là ***sai***?

A. Vũ trụ có cấu tạo gồm hàng tỉ Thiên hà và các đám Thiên hà.

B. Thiên hà là một hệ thống gồm nhiều loại sao và tinh vân.

C. Sao là một khối khí nóng sáng như Mặt Trời.

D. Tinh vân là những đám bụi khổng lồ phát sáng giống như những ngôi sao.

Đáp án kì trước (THTT số 383, tháng 5 năm 2009)

Câu 1: Chọn A; Câu 2: Chọn D; Câu 3: Chọn C; Câu 4: Chọn B; Câu 5: Chọn C.

DIỄN ĐÀN DẠY HỌC TOÁN

Về một công thức TÍNH THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY

ĐỖ BÁ CHỦ
(GV THPT Đông Hưng Hà, Thái Bình)

Như chúng ta đã biết, để tính thể tích khối tròn xoay sinh ra do hình phẳng giới hạn bởi các đường: $x = g(y)$, trục tung, $y = c$ và $y = d$ (trong đó hàm $g(y)$ liên tục và không âm trên đoạn $[c;d]$) quay quanh trục tung, ta sử dụng công thức

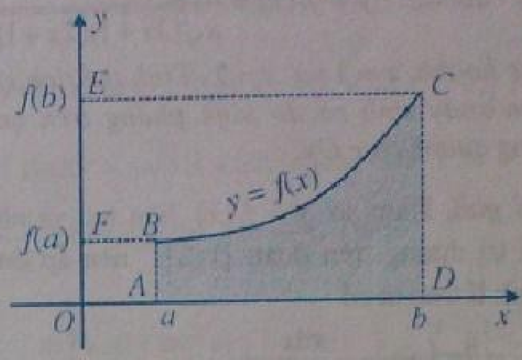
$$V = \pi\int_c^d g^2(y)\mathrm{d}y \qquad (*)$$

Tuy nhiên, trong thực tế hình phẳng thường được cho giới hạn bởi các đường: $y = f(x)$, trục hoành, $x = a$ và $x = b$. Do đó để vận dụng được công thức (*) thì ta phải chuyển phương trình của đồ thị hàm số $y = f(x)$ sang phương trình đồ thị $x = g(y)$, tức là phải giải phương trình $f(x) = y$ để được nghiệm $x = g(y)$. Trong nhiều trường hợp việc giải phương trình này không đơn giản. Bài báo này chúng tôi nêu thêm một công thức để tính thể tích khối tròn xoay sinh ra do hình phẳng quay xung quanh trục Oy.

Định lí. *Nếu hình phẳng được giới hạn bởi các đường : $y = f(x)$, trục hoành, $x = a$ và $x = b$ (trong đó $0 \le a < b$, hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$) thì thể tích của khối tròn xoay sinh ra do hình phẳng trên quay xung quanh trục Oy được cho bởi công thức*

$$V_{Oy} = 2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \qquad (**)$$

Chứng minh. Nhận xét rằng ta có thể chia đoạn $[a;b]$ thành những đoạn con sao cho hàm số $y = f(x)$ đơn điệu trong mỗi đoạn con đó. Do đó ta chỉ cần chứng minh định lí với giả thiết hàm số $y = f(x)$ đơn điệu, chẳng hạn hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên đoạn $[a;b]$ (h. 1) (trường hợp hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $[a;b]$ được chứng minh tương tự).



Hình 1

Ta có thể tích cần tính là

$$V_{Oy} = V_{ODCE} - V_{OABF} - V_{BCEF} \qquad (1)$$

Trong đó

• V_{ODCE} là thể tích khối tròn xoay sinh do hình chữ nhật $ODCE$ quay xung quanh trục Oy, nó chính là thể tích khối trụ tròn xoay có chiều cao $f(b)$, bán kính đáy bằng b nên

$$V_{ODCE} = \pi b^2 f(b) \qquad (2)$$

• V_{OABF} là thể tích khối tròn xoay sinh ra do hình chữ nhật $OABF$ quay xung quanh trục Oy. Tương tự như trên ta có $V_{OABF} = \pi a^2 f(a)$ (3)

• V_{BCEF} là thể tích khối tròn xoay sinh ra do hình thang cong $BCEF$ quay xung quanh trục Oy.

Vì hàm $y = f(x)$ liên tục và đồng biến trên $[a;b]$ nên phương trình $f(x) = y$ có nghiệm duy nhất $x = g(y)$. Từ đó

$$V_{BCEF} = \pi\int_{f(a)}^{f(b)} g^2(y)\mathrm{d}y.$$

Để tính tích phân này ta đặt $x = g(y) \Leftrightarrow y = f(x)$. Khi $y = f(a)$ thì $x = a$, $y = f(b)$ thì $x = b$. Do đó

$$V_{Ox} = \pi\int_a^b x^2 d(f(x)) = \pi\left(x^2 f(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)d(x^2)\right)$$

$$= \pi b^2 f(b) - \pi a^2 f(a) - 2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \qquad (4)$$

Thay (2), (3), (4) vào (1) ta thu được công thức (**) ❐

Sau đây là một số các bài toán minh hoạ.

✪Bài toán 1. *Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường:* $y = f_1(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{(3x+1)(2x+1)^3}}$, *trục hoành,* $x = 1$ *và* $x = 2$. *Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra do hình phẳng trên quay xung quanh trục Oy.*

Lời giải. Hàm số $y = f_1(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên đoạn $[1;2]$, nên áp dụng Định lí trên ta có

$$V_{Oy} = 2\pi\int_1^2 \frac{x\mathrm{d}x}{x\sqrt{(3x+1)(2x+1)^3}}$$

$$= 2\pi\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)^2\sqrt{\dfrac{3x+1}{2x+1}}} = 2\pi\int_1^2 \frac{d\left(\dfrac{3x+1}{2x+1}\right)}{\sqrt{\dfrac{3x+1}{2x+1}}}$$

$$= 4\pi\sqrt{\frac{3x+1}{2x+1}}\Bigg|_1^2 = \frac{4\pi(3\sqrt{35}-10\sqrt{3})}{15} \text{ (đvtt) ❐.}$$

✪Bài toán 2. *Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường* $y = f_2(x) = \dfrac{x}{(x\sin x + \cos x)^2}$, *trục hoành, trục tung và* $x = \dfrac{\pi}{4}$. *Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra do hình phẳng trên quay xung quanh trục Oy.*

Lời giải. Hàm số $y = f_2(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$, từ Định lí trên ta có

$$V_{Oy} = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2\mathrm{d}x}{(x\sin x+\cos x)^2}$$

$$= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2\cos x\mathrm{d}x}{\cos x(x\sin x+\cos x)^2}.$$

Đặt $\begin{cases} u = \dfrac{x}{\cos x} \\ dv = \dfrac{x\cos x\mathrm{d}x}{(x\sin x+\cos x)^2} = \dfrac{\mathrm{d}(x\sin x+\cos x)}{(x\sin x+\cos x)^2} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{x\sin x+\cos x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x \\ v = -\dfrac{1}{x\sin x+\cos x}. \end{cases}$$

Từ đó áp dụng công thức tích phân từng phần tính được $V_{Oy} = \dfrac{2\pi(4-\pi)}{4+\pi}$ (đvtt) ❐

✪Bài toán 3. *Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường* $y = f_3(x) = \dfrac{x^2-x}{x\sqrt[3]{3x-4}-1}$ *và trục hoành. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra do hình phẳng trên quay xung quanh trục Oy.*

Lời giải. Xét phương trình

$$\frac{x^2-x}{x\sqrt[3]{3x-4}-1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x=0 \\ x\sqrt[3]{3x-4}-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1. \end{array}\right.$$

Trên đoạn $[0;1]$ ta có $x^2-x \le 0$ và $x\sqrt[3]{3x-4}-1<0$ suy ra hàm $y = f_3(x)$ không âm và liên tục trên $[0;1]$. Theo Định lí trên ta có

$$V_{Oy} = 2\pi\int_0^1 \frac{(x^2-x)x\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{3x-4}-1} = 2\pi\int_0^1 \frac{(x^3-x^2)\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{3x^4-4x^3}-1}.$$

Đặt $t = \sqrt[3]{3x^4-4x^3}-1 \Rightarrow 3x^4-4x^3 = (t+1)^3$

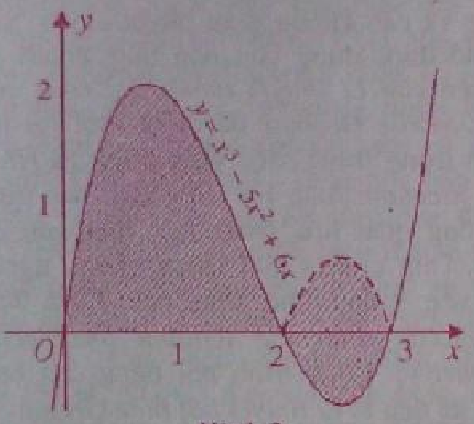
$\Rightarrow (x^3-x^2)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{4}(t+1)^2\mathrm{d}t$. Khi $x = 0$ thì $t = -1$, khi $x = 1$ thì $t = -2$. Thành thử

$$V_{Oy} = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{-2} \frac{(t+1)^2}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{-2}\left(t+2+\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{t^2}{2}+2t+\ln|t|\right)\Bigg|_{-1}^{-2} = \frac{\pi(\ln 4-1)}{4} \text{ (đvtt). ❐}$$

Bài toán 4. *Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường : $y = f_4(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$ và trục hoành. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra do hình phẳng trên quay xung quanh trục Oy.*

Lời giải. Đồ thị hàm số $y = f_4(x)$ được biểu diễn như hình 2 dưới đây.



Hình 2

Hình đối xứng của đồ thị hàm $y = f_4(x)$ (trên đoạn $[2;3]$) qua Ox có phương trình $y = -x^3 + 5x^2 - 6x$. Từ đó áp dụng Định lí ta suy ra

$$V_{Oy} = 2\pi\left(\int_0^2 x(x^3 - 5x^2 + 6x)dx + \int_2^3 x(-x^3 + 5x^2 - 6x)dx\right)$$

$$= \frac{69\pi}{10} \text{ (đvtt).} \square$$

Bài toán 5. *Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường* $y = f_5(x) = \dfrac{\cos 2x + 2\sin x + 7}{\cos 2x + 7}$, $y = 1$, *trục tung và* $x = \pi$. *Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra do hình phẳng trên quay xung quanh trục Oy.*

Lời giải. Trên đoạn $[0;\pi]$ ta có $\sin x \geq 0$ và $\cos 2x + 7 > 0$ nên $\dfrac{\cos 2x + 2\sin x + 7}{\cos 2x + 7} \geq 1$, do đó đồ thị hàm số $y = f_5(x)$ nằm phía trên đường thẳng $y = 1$. Áp dụng công thức (**) ta có

$$V_{Oy} = 2\pi\int_0^\pi x.\frac{\cos 2x + 2\sin x + 7}{\cos 2x + 7}dx - 2\pi\int_0^\pi x.1dx$$

$$= 4\pi\int_0^\pi \frac{x\sin xdx}{\cos 2x + 7} = 2\pi\int_0^\pi \frac{x\sin xdx}{\cos^2 x + 3}.$$

Xét tích phân $I = \displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin xdx}{\cos^2 x + 3}$. Đặt $x = \pi - t$, ta có $dx = -dt$ và $x = 0$ thì $t = \pi$; $x = \pi$ thì $t = 0$ nên

$$I = -\int_\pi^0 \frac{(\pi - t)\sin(\pi - t)dt}{\cos^2(\pi - t) + 3} = \int_0^\pi \frac{(\pi - t)\sin tdt}{\cos^2 t + 3}$$

$$= \pi\int_0^\pi \frac{\sin tdt}{\cos^2 t + 3} - \int_0^\pi \frac{t\sin tdt}{\cos^2 t + 3} = \pi\int_0^\pi \frac{\sin tdt}{\cos^2 t + 3} - I$$

Suy ra $I = \dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin tdt}{\cos^2 t + 3}$.

Lại đặt $\cos t = \sqrt{3}\tan u$, với $u \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$, ta có $\sin tdt = -\sqrt{3}(1 + \tan^2 u)du$, khi $t = 0$ thì $u = \dfrac{\pi}{6}$, khi $t = \pi$ thì $u = -\dfrac{\pi}{6}$. Từ đó

$$I = -\frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3}(1 + \tan^2 u)}{3(1 + \tan^2 u)}du = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} du = \frac{\pi^2\sqrt{3}}{18}.$$

Vậy $V_{Oy} = \dfrac{\pi^3\sqrt{3}}{9}$ (đvtt). $\square$

Cuối cùng là một số bài tập để các bạn luyện tập:

Hãy tính thể tích khối tròn xoay sinh ra do các hình phẳng giới hạn bởi các đường sau quay xung quanh trục Oy

1. $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = \pi$.
2. $y = 2x^2 - x^3$ và $y = 0$.
3. $y = \dfrac{\ln(\sqrt{x^2 + 1} + 1)}{\sqrt{x^2 + 1}}$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = \sqrt{3}$.
4. $y = \dfrac{1}{x + \sqrt{x + 2}}$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 7$.
5. $y = \dfrac{1}{x\ln^2 x}$, $y = \dfrac{1}{x\ln x}$, $x = e^2$.
6. $y = \dfrac{e^x}{(x + 1)^2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$.
7. $y = \dfrac{\cos x - \sin x}{1 + \sin 2x}$, $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{x(1 + \sin 2x)}$, $x = \dfrac{\pi}{6}$, $x = \dfrac{\pi}{3}$.

GIẢI THƯỞNG TOÁN HỌC ABEL NĂM 2009

Giải thưởng Abel năm 2009 đã được trao cho nhà toán học Pháp gốc Nga *Mikhail Gromov* vì những cống hiến của ông trong lĩnh vực *Hình học Riemann toàn thể hiện đại*. Công trình này vượt ra ngoài phạm vi toán học, liên thông với nhiều ngành khác như vật lí và sinh học.

Mikhail Gromov

Hình học là một trong những bộ môn thuộc lĩnh vực lâu đời nhất của toán học. Nó xuất hiện từ hàng nghìn năm trước, dựa trên việc trả lời những câu hỏi mang tính thực tiễn, chẳng hạn như làm thế nào để ước lượng kích thước của một mảnh đất. Hình học vẫn luôn được gắn liền với các khái niệm như *hình khối, khoảng cách, kích thước* và *vị trí của vật* cũng như các tính chất của *bề mặt* và *không gian*. Trải qua hàng nghìn năm, hình học vẫn giữ nguyên mối liên hệ mật thiết và gần gũi với thế giới thực mà chúng ta đang sống. Tuy nhiên, nó cũng được phát triển, mở rộng và có tầm ảnh hưởng mang tính chất vũ trụ, toàn cầu.

Hình học đã có một cuộc cách mạng lớn trong khoảng 50 năm trở lại đây. *Mikhail Gromov* là một trong những người đi tiên phong trong cuộc cách mạng này bằng cách khai sáng nền văn minh hình học Riemann. *Hình học Riemann* ban đầu phát triển dựa trên các nghiên cứu về bề mặt cong và các không gian nhiều chiều. Sau đó nó được dùng làm nền tảng chính để nghiên cứu *Lí thuyết tương đối rộng* của *A. Einstein*. *Gromov* đã đóng một vai trò quan trọng trong việc phát minh ra *Hình học Riemann toàn thể hiện đại*, bao quát và tổng quát hóa *Hình học Riemann cổ điển*. Ông còn là một trong những người đặt nền móng cho lĩnh vực *Hình học Symplectic toàn thể* (*Global Symplectic Geometry*). Công trình nổi tiếng của ông phải kể đến là *Lí thuyết bất biến Gromov – Wittens*, nó là xương sống của một trong những lĩnh vực hấp dẫn thuộc phạm trù của Vật lí lí thuyết mang tên *Lí thuyết trường lượng tử*. Công trình này đồng thời cũng khai sinh ra *Tôpô Symplectic*, đồng thời liên thông và ảnh hưởng sâu sắc tới nhiều ngành toán học khác.

Công trình của Gromov về các *Nhóm khai triển đa thức* (*Groups of Polynomiadl Growth*) dẫn đến các khái niệm làm thay đổi hoàn toàn nhận thức của chúng ta về các *Nhóm rời rạc vô hạn* (*Discrete Infinite Groups*). Ông đã khám phá ra hình học của các nhóm rời rạc và giải quyết nhiều bài toán cơ sở trong lĩnh vực này. Hướng tiếp cận hình học của ông đã làm cho các mệnh đề tổ hợp phức tạp trở nên tự nhiên và mạnh mẽ hơn rất nhiều.

Mikhail Gromov là một nhà toán học sáng tạo và kiệt xuất. Ông luôn đưa ra các câu hỏi và hướng tiếp cận mới để giải quyết các bài toán đã tồn tại lâu dài. Công trình và sự nghiệp của *Gromov* sẽ tiếp tục truyền nguồn cảm hứng cho nhiều khám phá toán học quan trọng trong tương lai.

LÊ MAI

(*Nguồn: http://diendantoanhoc.net*)

HỘI THẢO KHOA HỌC
tại TP. Hạ Long, Quảng Ninh

Trong hai ngày 23 và 24 tháng 5 năm 2009, tại Trung tâm tổ chức Hội nghị Tỉnh Quảng Ninh, Hội Toán học Hà Nội và trường ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội phối hợp với Sở GD&ĐT Quảng Ninh tổ chức Hội thảo khoa học ***"Phương pháp Giải tích hiện đại trong nghiên cứu và ứng dụng"***. Đây là hội thảo khoa học tiếp tục hướng nghiên cứu của Đề tài trọng điểm QGTĐ08.09 (về Giải tích hiện đại và ứng dụng trong khoa học môi trường và tính toán vật liệu) và chương trình JSPS (Hợp tác với Đại học Osaka Nhật Bản) GS.TSKH. NGND *Nguyễn Văn Mậu*, Chủ tịch Hội đồng khoa học trường ĐHKHTN Hà Nội kiêm Chủ tịch Hội Toán học Hà Nội chủ trì Hội thảo. Hội thảo lần này có nhiều nhà khoa học, các chuyên gia toán học của các trường ĐHKHTN Hà Nội, ĐHKHTN TP. Hồ Chí Minh, ĐHBK Hà Nội, ĐHSP Hà Nội, ĐH Thuỷ Lợi, ĐH Giao thông Vận tải, ĐH Lao động Hà Nội, Hội Toán học Hà Nội, NXBGD tại Hà Nội, Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ tham gia báo cáo tại các phiên toàn thể; các cán bộ giáo dục, các cán bộ chỉ đạo chuyên môn, các thầy giáo, cô giáo đang trực tiếp bồi dưỡng học sinh giỏi Toán của các tỉnh Quảng Ninh, Hải Dương, Thái Nguyên, Tuyên Quang, Bắc Kạn, Lạng Sơn, Hà Giang,... tham gia báo cáo tại các phiên chuyên đề. Trong phiên khai mạc, Hội nghị hân hạnh được đón nhận lẵng hoa chúc mừng của Uỷ ban Nhân dân Tỉnh Quảng Ninh, phát biểu chào mừng của ông *Hoàng Đức Minh*, Phó Giám đốc Sở GD&ĐT Quảng Ninh và Báo cáo hoạt động của Hội Toán học Hà Nội. Nhân dịp này, Hội nghị đã tổ chức cho đại biểu tham quan Vịnh Hạ Long, viếng Đền thờ Nhà giáo Chu Văn An và Đền thờ nữ Tiến sĩ Nguyễn Thị Duệ. Hội nghị đã thành công tốt đẹp, để lại ấn tượng sâu sắc cho tỉnh Quảng Ninh và hi vọng rằng phong trào giáo dục của tỉnh sẽ có bước phát triển cao hơn.

PV

CÁC LỚP THCS

Bài T1/384. (Lớp 6) Hãy thay các chữ khác nhau trong đẳng thức sau bởi các chữ số khác nhau để được một đẳng thức đúng

VỀ.TRƯỜNG.SA = 22 × 12 × 2009

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(GV TP. Hồ Chí Minh)

Bài T2/384. (Lớp 7) Ta đã biết hai tam giác vuông có độ dài các cạnh là các số nguyên dương như (5, 12, 13) và (6, 8, 10) đồng thời số đo diện tích của mỗi tam giác bằng số đo chu vi của mỗi tam giác đó.

Hỏi còn tam giác vuông nào có tính chất như vậy nữa không ?

NGUYỄN XUÂN BÌNH
(Công ti CPĐầu tư và Phát triển Giáo dục tại Hà Nội)

Bài T3/384. Cho 1003 số hữu tỉ khác 0, trong đó 4 số bất kì nào trong chúng cũng có thể lập thành một tỉ lệ thức. Chứng minh rằng trong các số đã cho có ít nhất 1000 số bằng nhau.

BÙI VĂN TUYÊN
(Hà Nội)

Bài T4/384. Cho x, y, z là các số không âm và thoả mãn $x + y + z = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = (x + 2y + 3z)(6x + 3y + 2z).$$

TRỊNH XUÂN TÌNH
(GV THPT Phú Xuyên B, Hà Nội)

Bài T5/384. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Các đường phân giác của các góc BAD và BCD cắt nhau tại điểm K nằm trên đường chéo BD. Gọi Q là giao điểm khác A của đường thẳng AP với đường tròn (O) ; M và N thứ tự là trung điểm của BD và CP. Đường thẳng qua C song song với AD cắt tia AM tại điểm P. Chứng minh rằng

1) $S_{ABQ} = S_{ADQ}$;

2) DN vuông góc với CP.

NGUYỄN ĐỄ
(Hải Phòng)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/384. Với mỗi số tự nhiên n, gọi $p(n)$ là ước số lẻ lớn nhất của n. Hãy tính tổng

$$\sum_{n=2006}^{4012} p(n).$$

TRẦN BÁ DUY LINH
(SV lớp 30, K34, ĐH Kinh tế TP. Hồ Chí Minh)

Bài T7/384. Giải phương trình

$$\sqrt{3x-2} = -4x^2 + 21x - 22.$$

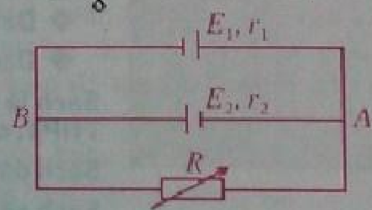
NGUYỄN BÁ LONG
(GV THPT Như Thanh, Thanh Hoá)

Bài T8/384. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với $AC < AB$. Tiếp tuyến với đường tròn (O) tại B, C cắt nhau tại T. Đường thẳng qua A và vuông góc với AT cắt BC tại S. Trên đường thẳng ST lấy các điểm B_1, C_1 sao cho $TB_1 = TC_1 = TB$, C_1 nằm giữa S và T. Chứng minh rằng hai tam giác ABC và AB_1C_1 đồng dạng với nhau.

PHẠM QUANG TRƯỜNG
(SV BK79, K52, ĐHBK Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/384. Cho mạch điện như hình vẽ với $E_1 = 6V$, $E_2 = 3V$, $r_2 = 2\Omega$. Điều chỉnh biến trở R để công suất tiêu thụ trên R đạt giá trị cực đại bằng $\frac{27}{8}$ W. Tìm R và r_1.



ĐỖ TUẤN
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

(Xem tiếp trang 27)

CUỘC THI GIẢI TOÁN

KỈ NIỆM 45 NĂM TẠP CHÍ TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ

THE M&Y 45th ANNIVERSARY CONTEST

Bài T7/THCS. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1})=1\\ y+\dfrac{y}{\sqrt{x^2-1}}+\dfrac{35}{12}=0.\end{cases}$$

TRẦN VĂN HẠNH
(GV ĐH Phạm Văn Đồng, Quảng Ngãi)

Bài T8/THCS. Cho tam giác ABC với trọng tâm G và điểm O nằm trong tam giác đó. Các đường thẳng AO, BO, CO theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1. Gọi A_2, B_2, C_2 theo thứ tự là các điểm đối xứng của O qua trung điểm của B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1. Chứng minh rằng các đường thẳng AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy tại một điểm thuộc OG.

NGUYỄN NGUYỆT HẰNG
(Hà Nội)

Bài T7/THPT. Cho hàm số $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ thoả mãn điều kiện:

$$\begin{cases}(f(2n)+f(2n+1)+1)(f(2n+1)-f(2n)-1)=3(1+2f(n))\\ f(2n)\ge f(n)\end{cases}$$

với mọi số tự nhiên n.

Hãy tìm các số tự nhiên n sao cho $f(n)\le 2009$.

VŨ THÁI LUẬN
(Viện CNTT Hà Nội)

Bài T8/THPT. Chọn hai điểm A, B phân biệt và cố định trên đường thẳng Δ cho trước trong mặt phẳng. Với mỗi điểm M trên đường thẳng Δ xác định điểm N nằm trên Δ sao cho $\overline{BN}=k\overline{BA}$, với $k=\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$.

Trên nửa mặt phẳng bờ Δ, dựng nửa đường tròn (α) đường kính MN. Chứng minh rằng khi M di động trên đường thẳng Δ thì nửa đường tròn (α) luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT
(Hà Nội)

T7/Junior. Solve the following system of equations

$$\begin{cases}(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1})=1\\ y+\dfrac{y}{\sqrt{x^2-1}}+\dfrac{35}{12}=0.\end{cases}$$

T8/Junior. Let ABC be a triangle with centroid G and let O be a point inside the triangle. The lines AO, BO and CO meet BC, CA and AB at A_1, B_1 and C_1, respectively. Let A_2, B_2 and C_2 be the points of symmetry through O of the midpoints of B_1C_1, C_1A_1 and A_1B_1. Prove that AA_2, BB_2 and CC_2 meet at a common point which lies on OG.

T7/Senior. Let f be a function on natural numbers $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ with the following properties:

$$\begin{cases}(f(2n)+f(2n+1)+1)(f(2n+1)-f(2n)-1)=3(1+2f(n))\\ f(2n)\ge f(n)\end{cases}$$

for all natural numbers n.

Determine all values of n such that $f(n)\le 2009$.

T8/Senior. Fixes two distinct points A and B on a given straight line Δ in a plane. For each point M on Δ, let N be on Δ such that $\overline{BN}=k\overline{BA}$, where $k=\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$. Let (α) be the half-circle that lies on a chosen half-plane given by Δ whose diameter is MN. Prove that (α) is always tangent to a fixed circle when M moves on Δ.

Translated by LE MINH HA

★Bài T1/379. *Cho*

$$A=\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{17}-\frac{1}{31}+\frac{1}{65}-\frac{1}{127}.$$

Hãy so sánh A với $\frac{1}{6}$.

Lời giải. *Cách 1.* Biến đổi

$$A=\frac{26}{130}-\frac{18}{126}+\frac{8}{136}-\frac{4}{124}+\frac{2}{130}-\frac{1}{127}.$$

Ta có

$$A<\frac{26}{130}-\frac{18}{130}+\frac{8}{130}-\frac{4}{130}+\frac{2}{130}-\frac{1}{130}$$

nên $A<\frac{13}{130}=\frac{1}{10}$, do đó $A<\frac{1}{6}$.

Cách 2. Biến đổi

$$A=\frac{20}{100}-\frac{14}{98}+\frac{6}{102}-\frac{3}{93}+\frac{2}{130}-\frac{1}{127}.$$

Ta có

$$A<\frac{20}{100}-\frac{14}{100}+\frac{6}{100}-\frac{3}{100}+\frac{1}{130}$$

hay $A<\frac{9}{100}+\frac{1}{100}=\frac{1}{10}$.

Do đó $A<\frac{1}{6}$. ☐

Nhận xét. 1) Hai cách giải trên đều cho kết quả $A<\frac{1}{10}$ (gần đúng hơn so với $A<\frac{1}{6}$), một số bạn thay thế sáu số hạng của A bởi $\frac{2}{8}, \frac{1}{8}, \frac{2}{32}, \frac{1}{32}, \frac{2}{128}, \frac{1}{128}$ theo thứ tự cũng dẫn đến $A<\frac{1}{6}$.

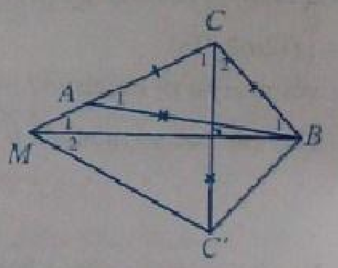
2) Các bạn sau có lời giải gọn:

Phú Thọ: *Nguyễn Thu Phương, Vũ Thị Mai*, 6A1, *Nguyễn Hoàng Việt, Trần Hải Dương, Bùi Đức Thịnh, Triệu Đỗ Quyên, Triệu Quốc Đạt*, 6A3, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Trần Lê Lan Chi, Lê Thị Việt Hà, Nguyễn Minh Phương*, 6A1, THCS Hai Bà Trưng, TX. Phúc Yên, *Phạm Thị Vân Anh, Nguyễn Ngọc Mai, Nguyễn Minh Tuấn, Nguyễn Hữu Cường, Nguyễn Tú Anh, Nguyễn Văn Long, Tạ Đức Chính, Nguyễn Thành Công, Nguyễn Đức Đại*, 6A1, THCS Yên Lạc; **Hải Phòng:** *Phạm Hương Giang*, 6A8, THCS Chu Văn An, Q. Ngô Quyền; **Nghệ An:** *Trần Thị Thu Hằng, Trần Ngọc Đông*, 6A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Hà Tĩnh:** *Thân Ngọc Phương Chi, Trần Ngọc Tùng Dương, Võ Hữu Hiệp, Nguyễn Thị Hương Giang, Bùi Linh Giang, Võ Thị Hồng Nhung, Hoàng Mạnh Cường, Trần Thọ Lưu*, 6A, THCS Xuân Diệu, Can Lộc, *Bùi Thị Trang*, 6A, THCS Hồng Lộc, Lộc Hà; **Bình Định:** *Đặng Trường Vũ*, 4C, TH số 2 Ngô Mây, Phù Cát; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Thế Phong, Nguyễn Bảo Trâm*, 6A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; **Ninh Thuận:** *Trần Đạo Nghĩa*, 6/10, THCS Nguyễn Văn Trỗi, TP. Phan Rang, Tháp Chàm.

VIỆT HẢI

★Bài T2/380. *Cho tam giác ABC cân tại C có* $\widehat{ACB}=100^\circ$. *Điểm M thuộc tia CA sao cho CM = AB. Tìm số đo của góc* $\widehat{CMB}$.

Lời giải. Dựng tam giác đều MCC' sao cho C và C' khác phía đối với AB. Ta có $\widehat{C_1}=60^\circ \Rightarrow \widehat{C_2}=40^\circ=\widehat{A_1}=\widehat{B_1}$, do đó $\Delta CAB=\Delta BCC'$ (c.g.c), suy ra $BC=BC'$ $\Rightarrow C'$ đối xứng với C qua MB $\Rightarrow \widehat{M_1}=\widehat{M_2}=30^\circ$ hay $\widehat{CMB}=30^\circ$. ☐



Nhận xét. 1) Bài toán này có nhiều cách giải. Tất cả các bạn tham gia gửi bài đều tìm ra đáp số đúng. Tuy nhiên, khi vẽ thêm hình phụ một số bạn chưa nêu rõ vị trí của các điểm vẽ thêm.

Ngoài lời giải trên, có thể giải bằng cách vẽ thêm tam giác đều cạnh AB hoặc cạnh BC.

2) Các bạn sau đây có lời giải đúng và ngắn gọn:

Phú Thọ: *Vũ Tuấn Linh, Trịnh Hồng Ngọc, Nguyễn Thị Mai Anh*, 7A1, *Nguyễn Hữu Dũng*, 7A3, THCS Lâm Thao; **Bắc Giang:** *Hoàng Thu Vân*, 7A1, THCS Ngô Sĩ Liên, TP. Bắc Giang; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Mai Phương(B)*, 7A1, THCS Hai Bà Trưng, TX. Phúc Yên, *Nguyễn Tuấn Anh*, 7C, THCS Vĩnh Tường; **Hà Nội:** *Dương Tú Anh*, 7C, THCS Đa Tốn, Gia Lâm, *Nguyễn Hoài Nam*, 7C, THCS Thạch Thất; **Nam Định:** *Bùi Vũ Việt Hà*, 7A, THCS Ngô Đồng, Giao Thủy; **Hải Dương:** *Trần Xuân Thắng*, 7/1, THCS Lê Quý Đôn, TP.Hải Dương; **Hải Phòng:** *Phạm Hương Giang*, 6A8, THCS Chu Văn An, Q. Ngô Quyền, TP. Hải Phòng; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Thị Minh Tâm, Nguyễn Thùy Linh*, 7B, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; **Nghệ An:** *Trần Thị Diệu Linh, Phan Thị Huyền Trang, Lưu Văn Cường, Phan Thanh Tùng*, 7D, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Phú Yên:** *Trương Minh Vũ*, 7B, THCS Trần Quốc Toản, TP. Tuy Hòa; **Quảng Nam:** *Phạm Đình Chí Nguyên*, 7/4, THCS Lý Tự Trọng, Điện Bàn; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Bảo Trâm, Nguyễn Thế Phong*, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; **Bình Định:** *Đào Duy Khoa*, 7A3, THCS Ngô Mây, Phù Cát.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★Bài T3/380. *Tìm tất cả các bộ ba số nguyên $(x\,;\,y\,;\,z)$ thoả mãn*

$$\begin{cases} y^3 = x^3 + 2x^2 + 1 & (1) \\ xy = z^2 + 2 & (2) \end{cases}$$

Lời giải. Do $2x^2+1>0$ nên từ (1) ta có $y^3>x^3$ $\Leftrightarrow y>x$. Mặt khác $x,\,y\in\mathbb{Z}$ nên $y\ge x+1 \Leftrightarrow$ $y^3\ge(x+1)^3 \Leftrightarrow x^3+2x^2+1\ge x^3+3x^2+3x+1$ $\Leftrightarrow x^2+3x\le 0 \Leftrightarrow -3\le x\le 0$.

Do $x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\{-3;-2;-1;0\}$.

Từ (2) ta có $xy>0$, do đó x và y cùng dấu. Ta tìm được cặp $(x\,;\,y)$ thỏa mãn là $(-3;\,-2)$. Thay vào (2) ta có các bộ ba $(x\,;\,y\,;\,z)$ cần tìm là: $(-3;-2;-2)$, $(-3;-2;\,2)$.□

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải đúng và gọn:

Bắc Ninh: *Nguyễn Hữu Dũng*, 7A, THCS Hàn Thuyên, Lương Tài; **Nghệ An:** *Võ Duy Văn*, 8A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, *Cao Xuân Bang*, 9B, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Kon Tum:** *Cao Thanh Hà*, 9A, THCS Chu Văn An; **Quảng Trị:** *Nguyễn Kim*, 7A, *Nguyễn Anh Thư*, 7E, THCS Phan Đình Phùng, Đông Hà; **Bạc Liêu:** *Trần Quang Minh*, 8/4, THCS Trần Huỳnh, TX. Bạc Liêu.

TRẦN HỮU NAM

★Bài T4/380. *Tìm hai số x, y thoả mãn các điều kiện sau:* $x>1,\ 0<y<1,\ x+y\le\sqrt{5}$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\le\sqrt{5}$, $\frac{x}{x+1}+\frac{y}{1-y}\le\sqrt{5}$.

Lời giải

• Từ $x>1,\ 0<y<1,\ x+y\le\sqrt{5}$ suy ra

$1<x\le\sqrt{5}-y \Rightarrow \frac{1}{x}\ge\frac{1}{\sqrt{5}-y}$.

Do đó $\frac{1}{\sqrt{5}-y}+\frac{1}{y}\le\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\le\sqrt{5}$.

Suy ra $y^2-\sqrt{5}y+1\le 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{5}-1}{2}\le y\le\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (1)

• Từ $x>1,\ 0<y<1,\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}\le\sqrt{5}$ và $\frac{x}{x+1}+\frac{y}{1-y}\le\sqrt{5}$

suy ra $1+\frac{1}{x}>1,\ \frac{1}{y}-1>0,\ \left(1+\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{1}{y}-1\right)\le\sqrt{5}$

và $\frac{1}{1+\frac{1}{x}}+\frac{1}{\frac{1}{y}-1}\le\sqrt{5}$.

Đặt $1+\frac{1}{x}=a,\ \frac{1}{y}-1=b$ ta có $a>1,\ b>0$,

$a+b\le\sqrt{5}$ và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\le\sqrt{5}$.

Từ đó tương tự trên suy ra $\frac{\sqrt{5}-1}{2}\le b\le\frac{\sqrt{5}+1}{2}$,

hay $\frac{\sqrt{5}-1}{2}\le\frac{1}{y}-1\le\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Do đó

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2}\le y\le\frac{\sqrt{5}-1}{2} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $y=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

• Khi đó $x\le\sqrt{5}-y=\sqrt{5}-\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (3)

$\frac{1}{x}\le\sqrt{5}-\frac{1}{y}=\sqrt{5}-\frac{2}{\sqrt{5}-1}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

$\Rightarrow x\ge\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Vậy $x=\frac{\sqrt{5}+1}{2};\ y=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.□

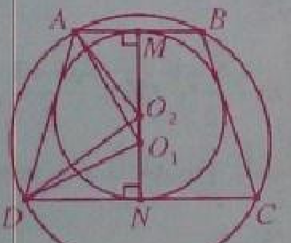
Nhận xét. 1) Đa số các bạn giải theo cách trên. Riêng bạn *Phạm Huy Hoàng*, 8A5, THCS Giảng Võ, **Hà Nội** đã nêu và chứng minh bài toán:

"Nếu $x > 1$, $0 < y < 1$, $x + y \le \sqrt{5}$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \le \sqrt{5}$ thì $\frac{x}{x+1}+\frac{y}{1-y} \ge \sqrt{5}$. Đẳng thức xảy ra khi $x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, $y = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$." Từ đó suy ra đáp số của bài toán.

2) Ngoài bạn *Hoàng*, các bạn sau đây có lời giải ngắn gọn và chặt chẽ:
Vĩnh Phúc: *Phạm Mỹ Linh*, 9A1, THCS Yên Lạc; **Nghệ An:** *Phan Nguyễn Thanh Sơn*, 9C, THCS Diễn Xuân, Diễn Châu; **Bình Định:** *Lê Như Ngọc*, 9A1, THCS TTr. Bình Định, An Nhơn, *Nguyễn Danh Nhân*, 9A2, THCS Mỹ Cát, Phù Mỹ; **Quảng Trị:** *Nguyễn Văn Hải Như*, 8I, THCS Thành Cổ, TX. Quảng Trị.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★Bài T5/380. *Cho hình thang cân $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn $(O_1\ ;\ R)$ và ngoại tiếp đường tròn $(O_2\ ;\ r)$. Gọi $d = O_1O_2$. Chứng minh bất đẳng thức $\frac{1}{r^2} \ge \frac{2}{R^2+d^2}$. Đẳng thức xảy ra khi nào?*



Lời giải. Vì $ABCD$ là hình thang cân nên O_1, O_2 nằm trên trục đối xứng MN của hình thang (M là trung điểm của AB, N là trung điểm của CD).

Do $\widehat{BAO_2}+\widehat{CDO_2} = \frac{1}{2}\left(\widehat{BAD}+\widehat{ADC}\right) = 90^0$ nên

$\Delta AMO_2 \backsim \Delta O_2ND \Rightarrow \frac{AM}{O_2N} = \frac{MO_2}{ND}$.

Suy ra $AM.DN = O_2M.O_2N = r^2$.

Áp dụng định lí Pythagore vào các tam giác vuông AMO_1 và DNO_1, ta có

$$\begin{aligned}2R^2 &= AO_1^2 + O_1D^2\\ &= AM^2 + MO_1^2 + DN^2 + NO_1^2\\ &= AM^2 + DN^2 + (r+d)^2 + (r-d)^2\\ &\ge 2AM.DN + 2(r^2+d^2) = 4r^2 + 2d^2.\end{aligned}$$

Suy ra $R^2 - d^2 \ge 2r^2 \Rightarrow \frac{1}{r^2} \ge \frac{2}{R^2-d^2}$ (*)

Bất đẳng thức (*) mạnh hơn bất đẳng thức mà đề bài yêu cầu chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $AM = DN$ hay $AB = CD$, tức $ABCD$ là hình vuông (lúc này $d = O_1O_2 = 0$). ❐

Nhận xét. 1) Các bạn có thể chứng minh đẳng thức

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{(R+d)^2} + \frac{1}{(R-d)^2}$$

và từ đó suy ra điều phải chứng minh.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:
Vĩnh Phúc: *Nguyễn Thế Bảo, Lê Văn Tú*, $9A_1$, THCS Yên Lạc; *Lê Tuấn Anh*, 8A, THCS Đại Đồng, Vĩnh Tường; **Nghệ An:** *Trần Đại Dương*, 9A, THCS Diễn Hùng ; *Phan Nguyễn Thanh Sơn*, 9C, THCS Diễn Xuân, *Trương Thị Minh Nguyệt*, 9B, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, *Nguyễn Văn Thắng*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Ngãi:** *Phạm Quốc Việt*, 9A, THCS Nguyễn Tự Tân; **Quảng Trị:** *Nguyễn Kim*, 7A, THCS Phan Đình Phùng, Đông Hà; **Khánh Hòa:** *Vũ Ngọc Cương*, 8^6, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh; **Đăk Lăk:** *Phạm Trung Hiếu*, $9D_1$, THCS Trần Phú.

PHAN THỊ MINH NGUYỆT

★Bài T6/380. *Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có*

$$\frac{\cot A.\cot B.\cot C}{\sin A.\sin B.\sin C} \le \left(\frac{2}{3}\right)^3.$$

Lời giải. • Nếu tam giác ABC *không nhọn* thì

$$\frac{\cot A.\cot B.\cot C}{\sin A.\sin B.\sin C} \le 0 < \left(\frac{2}{3}\right)^3.$$

• Nếu tam giác ABC *nhọn* thì $\cos A > 0$, $\cos B > 0$, $\cos C > 0$, do đó $\sin 2A > 0$, $\sin 2B > 0$, $\sin 2C > 0$. Sử dụng *bất đẳng thức Cauchy* cho ba số dương ta có

$$\begin{aligned}&\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C\\ =\ &2(\sin A\cos A + \sin B\cos B + \sin C\cos C)\\ \ge\ &6\sqrt[3]{\sin A.\sin B.\sin C.\cos A.\cos B.\cos C} \quad (1)\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Mặt khác, với mọi tam giác ABC ta có hệ thức quen thuộc sau

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A.\sin B.\sin C \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\begin{aligned}&4\sin A\sin B\sin C\\ \ge\ &6\sqrt[3]{\sin A.\sin B.\sin C.\cos A.\cos B.\cos C}.\end{aligned}$$

Từ đó, ta thu được bất đẳng thức

$$\frac{\cot A.\cot B.\cot C}{\sin A.\sin B.\sin C} \le \left(\frac{2}{3}\right)^3 \text{ (đpcm).}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều. □

Nhận xét. 1) Bất đẳng thức ở đề bài trong trường hợp tam giác ABC nhọn chính là BĐT W.I.Gridasov trong tạp chí *Matematyka, No32, Warszawa, Poland, 1972*. Bạn đọc có thể xem phép chứng minh BĐT này ở bài T11/310, THTT số 314, tháng 8 năm 2003.

2) Số lời giải gửi về Tòa soạn khá nhiều. Tất cả các bạn đều giải đúng. Sau đây là những bạn có lời giải gọn hơn cả.

Hà Nội: *Trần Minh Vương*, 10A2 Toán, *Trần Nhật Tân*, 12A1 Toán, khối THPT chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội, *Đào Trọng Anh*, 11A4, THPT Nguyễn Gia Thiều, Q. Long Biên; **Quảng Ninh:** *Giang Thọ Anh*, 10 Toán, THPT chuyên Hạ Long; **Vĩnh Phúc:** *Lê Minh Tú*, 11A7, THPT Đội Cấn, Vĩnh Tường; **Phú Thọ:** *Hạ Hồng Việt*, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương; **Bắc Ninh:** *Trần Anh Tuấn*, 11A1, THPT Thuận Thành 1; **Nam Định:** *Trần Trọng Huy*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Hồng Phong, *Đỗ Thanh Bút*, 10A5, THPT C Hải Hậu; **Thanh Hóa:** *La Hồng Quân*, *Ngọ Văn Dũng*, *Lê Thế Vinh*, 10T, THPT chuyên Lam Sơn, *Lê Hoa*, 10A3, THPT Lê Hoàn, *Lê Viết Nghĩa*, 8A, THCS Hoằng Minh, Hoằng Hóa, *Lê Quốc Đạt*, 11A1, THPT Yên Định I; **Nghệ An:** *Quang Tài Anh Phú*, *Nguyễn Xuân Thắng*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, *Lê Trọng Hiển*, 11A2, THPT Nguyễn Xuân Ôn, Diễn Châu, *Thái Bá Tài*, 10A1, THPT Nguyễn Đức Mậu, Sơn Hải, Quỳnh Lưu; **Hà Tĩnh:** *Trần Thị Diệu Linh*, *Thiều Đăng Ba*, 11 Toán, THPT chuyên Hà Tĩnh, *Hồ Phạm Thiều*, 10A1, THPT Lê Hữu Trác 1, Hương Sơn; **Quảng Trị:** *Nguyễn Kim*, 7A, THCS Phan Đình Phùng, Đông Hà, *Nguyễn Anh Minh*, 10A2, THPT Đông Hà; **Đà Nẵng:** *Nguyễn Tăng Thành*, 11A1, *Lê Văn Tấn Quyền*, 11A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Quảng Nam:** *Nguyễn Hồng Sơn*, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, TP. Tam Kỳ; **Phú Yên:** *Võ Văn Huy*, 10A1, THPT Lê Hồng Phong, Tuy Hòa, *Phan Minh Trí*, 10 Toán, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Cần Thơ:** *Nguyễn Việt Khánh*, *Lê Đại Thành*, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng; **Bến Tre:** *Hoàng Thế Minh*, 10/9, THPT Nguyễn Đình Chiểu; **TP. Hồ Chí Minh:** *Lê Nguyễn Trọng Nhân*, 10CT, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

HỒ QUANG VINH

★Bài T7/380. *Xung quanh một bờ hồ hình tròn có 17 cây cau cảnh. Người ta dự định chặt bớt 4 cây sao cho không có hai cây nào kề nhau bị chặt. Hỏi có bao nhiêu cách thực hiện khác nhau?*

Lời giải. Ta gọi một trong số 17 cây cau cảnh trong đầu bài là A. Có hai trường hợp sau :

Trường hợp 1. Cây A không bị chặt.

Sau khi chặt đi 4 cây, còn lại 13 cây. Xen kẽ giữa 13 cây này có 13 khoảng trống. Bốn cây bị chặt tương ứng với 4 trong số 13 khoảng trống nói trên. Do đó số cách thực hiện trong trường hợp này là $C_{13}^4 = 715$.

Trường hợp 2. Cây A bị chặt.

Sau khi chặt tiếp 3 cây, còn lại 13 cây. Xen kẽ giữa 13 cây này có 12 khoảng trống không kể với vị trí của cây A. Ba cây bị chặt (không kể cây A) tương ứng với 3 trong số 12 khoảng trống nói trên. Do đó số cách thực hiện trong trường hợp này là $C_{12}^3 = 220$.

Theo quy tắc cộng, ta được số khả năng phải tìm là $715 + 220 = 935$ (cách). □

★Nhận xét. 1) Với bài toán tổng quát:

Xung quanh một đường tròn có n điểm. Có bao nhiêu cách xoá đi k điểm sao cho không có hai điểm bị xoá nào cạnh nhau $(n \ge 2k)$?

Bằng cách giải tương tự, ta chứng minh được số cách thực hiện là $S = C_{n-k}^k + C_{n-k-1}^{k-1}$.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Thanh Hoá: *La Hồng Quân*, *Lê Cao Thắng*, *Lê Quang Huy*, *Lê Thế Vinh*, 10T, THPT chuyên Lam Sơn, TP Thanh Hoá, *Đàm Triệu Đạt*, 11B1, THPT Triệu Sơn 3; **Thừa Thiên - Huế:** *Lê Thanh Phúc*, 11 Toán, THPT Quốc Học Huế; **Quảng Nam:** *Nguyễn Hồng Sơn*, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Hà Nam:** *Trần Trung Kiên*, 11 Toán, THPT chuyên Hà Nam; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Tấn Hưng*, 11T, THPT chuyên Lê Khiết; **Bình Định:** *Nguyễn Quang Hải*, 8A1, THCS Hoài Tân, Hoài Nhơn, *Lê Anh Tú*, 10T, *Bùi Trọng Trí*, 11 T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP Quy Nhơn; **TP Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Ngọc Quang*, 9P2, THCS Ngô Sĩ Liên, Tân Bình; **Bến Tre:** *Lê Phúc Lữ*, 12 Toán, *Huỳnh Công Bằng*, 11 Toán, THPT chuyên Bến Tre; **Cần Thơ:** *Lê Đại Thành*, 10A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng.

NGUYỄN ANH DŨNG

★Bài T8/380. *Giải và biện luận (theo tham số a) hệ phương trình*

$$\begin{cases} 2x(y^2+a^2) = y(y^2+9a^2) \\ 2y(z^2+a^2) = z(z^2+9a^2) \\ 2z(x^2+a^2) = x(x^2+9a^2). \end{cases}$$

Lời giải. • Nếu $a = 0$, hệ phương trình (HPT) đã cho tương đương với hệ gồm ba PT

$$2xy^2 = y^3;\ 2yz^2 = z^3;\ 2zx^2 = x^3.$$

Nhân theo vế ba PT trên suy ra $xyz = 0$. Từ đó tìm được $x = y = z = 0$.

• Nếu $a \neq 0$ thì $y^2 + a^2 \neq 0$, $z^2 + a^2 \neq 0$, $x^2 + a^2 \neq 0$, HPT đã cho tương đương với hệ gồm ba PT $x = f(y)$, $y = f(z)$, $z = f(x)$, với $f(t) = \dfrac{t(t^2+9a^2)}{2(t^2+a^2)}$.

Không giảm tính tổng quát có thể giả sử $x = \max\{x, y, z\}$. Ta sẽ chứng minh $x = y = z$ theo hai cách.

Cách 1. (Theo bạn *Vũ Đình Long*, 10A1 Toán, khối THPT chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội). Ta có $x - y \geq 0 \Leftrightarrow f(y) - f(z) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{y(y^2+9a^2)}{2(y^2+a^2)} - \frac{z(z^2+9a^2)}{2(z^2+a^2)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow y(y^2+9a^2)(z^2+a^2) - z(z^2+9a^2)(y^2+a^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (y^3z^2 + y^3a^2 + 9a^2yz^2 + 9a^4y) - (z^3y^2 + z^3a^2 + 9a^2y^2z + 9a^4z) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (y-z)((3a^2 - yz)^2 + a^2(y-z)^2) \geq 0 \Leftrightarrow y \geq z.$$

Tương tự có $y - z \geq 0 \Leftrightarrow f(z) - f(x) \geq 0 \Leftrightarrow z \geq x$.

Từ đó suy ra $x = y = z$.

Cách 2. (Theo đa số các bạn). Ta có

$$f'(t) = \frac{(t^2 - 3a^2)^2}{2(t^2+a^2)} \geq 0,\ \forall t.$$

Suy ra $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$. Ta có

$x \geq y \Leftrightarrow f(y) \geq f(z) \Leftrightarrow y \geq z \Leftrightarrow f(z) \geq f(x) \Leftrightarrow z \geq x$.

Vậy $x \geq y \geq z \geq x$, suy ra $x = y = z$.

Thay vào PT thứ nhất của HPT đã cho ta có $2x(x^2 + a^2) = x(x^2 + 9a^2) \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm a\sqrt{7}$.

Kết luận. *) Với $a = 0$ thì HPT đã cho có đúng một nghiệm $(x ; y ; z) = (0 ; 0 ; 0)$.

*) Với $a \neq 0$ thì HPT đã cho có ba nghiệm $(x ; y ; z)$ là $(0 ; 0 ; 0)$, $\left(a\sqrt{7} ; a\sqrt{7} ; a\sqrt{7}\right)$ và $\left(-a\sqrt{7} ; -a\sqrt{7} ; -a\sqrt{7}\right)$.

Nhận xét. 1) Theo *cách 1*, các bạn cấp THCS cũng có thể giải được bài toán này, trong khi ở *cách 2*, bằng việc sử dụng công cụ đạo hàm để xét tính đồng biến nghịch biến làm cho lời giải nhanh gọn hơn. Nhiều bạn không xét trường hợp $a = 0$.

2) Ngoài bạn *Long*, các bạn dưới đây có lời giải tốt:

Đà Nẵng: *Lê Văn Tấn Quyền, Phan Văn Hoàng Vỹ*, 11A2, *Nguyễn Tăng Thành*, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Hà Tĩnh:** *Thiều Đăng Ba*, 11Toán, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Phú Yên:** *Võ Văn Hưng*, 10A1, THPT Lê Hồng Phong, Tây Hoà; **Bến Tre:** *Huỳnh Công Bằng*, 11Toán, THPT chuyên Bến Tre; **Hà Nội:** *Nguyễn Sơn Tùng*, 12A2, THPT Ngô Quyền, Châu Sơn, Ba Vì; **Ninh Bình:** *Nguyễn Đỗ Thành Duy*, 11Toán, THPT chuyên Lương Văn Tụy; **Vĩnh Phúc:** *Kim Đình Sơn, Lưu Thị Thuỳ Dung*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Kon Tum:** *Cao Thanh Hải*, 11A1 toán, THPT chuyên Kon Tum.

NGUYỄN THANH HỒNG

★Bài T9/380. *Dãy số (x_n) với $n = 0, 1, 2, \ldots$ được xác định như sau:*

$x_0 = a$, $x_{n+1} = x_n + \sin x + 2\pi$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, với $a, x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng, tồn tại giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n^2}$ và tìm giới hạn đó.

Lời giải. (Theo bạn *Nguyễn Sơn Tùng*, 12A, THPT Ngô Quyền, Ba Vì, Hà Nội)

Đặt $d = \sin x + 2\pi$. Khi đó rõ ràng (x_n) là một cấp số cộng với công sai d. Từ đó

$$S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$
$$= (a + d) + (a + 2d) + \ldots + (a + nd)$$
$$= na + \frac{n(n+1)}{2}d.$$ Do đó

$$\lim \frac{S_n}{n^2} = \lim\left(\frac{a}{n} + \frac{d}{2} + \frac{d}{2n}\right) = \frac{d}{2} = \pi + \frac{\sin x}{2}. \ \square$$

Nhận xét. Rất nhiều bạn tham gia giải bài toán này và đều giải đúng. Các bạn có lời giải tốt là:

Hà Nội: *Đào Trọng Anh*, 11A4, THPT Nguyễn Gia Thiều, Q. Long Biên; **Hà Nam:** *Phạm Phú Hoàn*, 11A4, THPT Lý Nhân; **Thanh Hóa:** *Mai Chí Đạt*, 11E, THPT Hà Trung; **Nghệ An:** *Lê Trọng Hiếu*, 11A2, THPT Diễn Châu; **Đăk Lăk:** *Lê Quang Hiếu*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Du; **TP. Hồ Chí Minh:** *Bùi Trần Long*, 11T, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa; **Bến Tre:** *Lê Phúc Lữ*, 12 Toán, THPT chuyên Bến Tre.

2) Các bạn hãy giải bài toán khi thay $\sin x$ bởi $\sin x_n$.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★ Bài T10/380. *Chứng minh rằng*

a) $\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=\frac{x(1-x)}{n},\ \forall x\in\mathbb{R}$

b) $\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{k}{n}-x\right| C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\le\frac{1}{2\sqrt{n}},\ \forall x\in[0;1].$

Lời giải. a) Nhận xét

$$k.C_n^k=k.\frac{n!}{k!(n-k)!}=n.\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$$

$$=n.C_{n-1}^{k-1},\quad \forall k=1,2,\ldots,n;$$

$$k(k-1)C_n^k=k.(k-1).\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$=n.(n-1).\frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!}=n(n-1).C_{n-2}^{k-2},$$

$\forall k=2,3,\ldots,n.$

Sử dụng khai triển nhị thức Newton ta có

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=(x+1-x)^n=1,$$

$$\sum_{k=0}^{n}k.C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}k.C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}nC_{n-1}^{k-1}x^k(1-x)^{n-k}=nx\sum_{i=0}^{n-1}C_{n-1}^{i}x^i(1-x)^{n-1-i}$$

$$=n.x(x+1-x)^{n-1}=nx,$$

$$\sum_{k=0}^{n}k(k-1)C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=\sum_{k=2}^{n}k(k-1)C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=x^2\sum_{k=2}^{n}n(n-1)C_{n-2}^{k-2}x^{k-2}(1-x)^{n-k}$$

$$=n(n-1)x^2\sum_{i=0}^{n-2}C_{n-2}^{i}x^i(1-x)^{n-2-i}$$

$$=n(n-1)x^2(x+1-x)^{n-2}=n(n-1)x^2.$$

Do đó

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k^2}{n^2}-2\frac{k}{n}x+x^2\right)C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}k(k-1)C_n^k x^k(1-x)^{n-k}+\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}kC_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$

$$-2.\frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n}kC_n^k x^k(1-x)^{n-k}+x^2\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=\frac{1}{n^2}.n(n-1)x^2+\frac{1}{n^2}.nx-2.\frac{x}{n}.nx+x^2$$

$$=x^2-\frac{x^2}{n}+\frac{x}{n}-2x^2+x^2=\frac{x(1-x)}{n}.$$

b) Dùng đẳng thức a) và áp dụng các bất đẳng thức Bunyakovsky, Cauchy ta có (với $0\le x\le 1$)

$$\left(\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{k}{n}-x\right|C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\right)^2$$

$$\le\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\right)$$

$$\times\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\right)=\frac{x(1-x)}{n}$$

$$\le\frac{\frac{1}{4}(x+1-x)^2}{n}=\frac{1}{4n}.$$

Từ đó ta nhận được bất đẳng thức b). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\left|\frac{0}{n}-x\right|=\left|\frac{1}{n}-x\right|=\ldots=\left|\frac{n}{n}-x\right|\\ x=1-x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow n=1,\ x=\frac{1}{2}.\ \square$$

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải tốt.

Thái Nguyên: *Nguyễn Hữu Trường*, 10 Lí, THPT chuyên Thái Nguyên; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Mạnh Quân*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Nội:** *Mai Anh Bằng*, 10T, PTCT, ĐHSP Hà Nội; **Thanh Hóa:** *La Hồng Quân*, 10T, THPT chuyên Lam Sơn; **TP. Hồ Chí Minh:** *Lương Xuân Vinh*, 10T, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Phú Yên:** *Võ Văn Huy*, 10A1, THPT Lê Hồng Phong, Tây Hòa; **Bến Tre:** *Nguyễn Đặng Thế Nam*, 10T, THPT chuyên Bến Tre.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★ Bài T11/380. *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *thỏa mãn*

$$f(n^2)=f(m+n)f(n-m)+m^2,\ \forall m,n\in\mathbb{R}.$$

Lời giải. (Theo đa số các bạn).

Thay $m=0$, $n=0$ vào (1), ta được $f(0)=1$ hoặc $f(0)=0$.

Thay $n=2$ và $m=2$ vào (1), ta được

$$f(4)=f(4)f(0)+4,$$

nên $f(0)\neq 1$. Do đó $f(0)=0$.

Thay $m=t$, $n=t$ vào (1), ta được

$$f(t^2)=f(2t)f(0)+t^2=t^2,$$

tức là $f(x)=x, \forall x\geq 0$ (2)

Xét $n=0$ và $m=t>0$. Thế vào điều kiện (1), ta được $f(0)=f(t)f(-t)+t^2$,

hay $0=tf(-t)+t^2, \forall t\in\mathbb{R}^+$.

Suy ra $f(-t)=-t, \forall t\in\mathbb{R}^+$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra $f(x)\equiv x$.

Thử lại điều kiện (1), ta thấy hàm này thỏa mãn.

Kết luận. $f(x)\equiv x$. □

Nhận xét. Đây là đề toán rất quen biết nên có nhiều bạn giải được và đa số các bạn đều giải đúng, tương tự như cách đã trình bày ở trên.

NGUYỄN VĂN MẬU

★Bài T12/380. *Trên mặt phẳng cho điểm A ở ngoài đường tròn tâm O, bán kính R. MN là dây cung có độ dài không đổi di động trên đường tròn sao cho hai đoạn thẳng MN và OA luôn cắt nhau. Xác định vị trí M và N sao cho tổng AM + AN*

a) là lớn nhất.

b) là nhỏ nhất.

Lời giải. Trước hết, để cho *đề bài* "chuẩn" hơn, xin thay cụm từ "Xác định vị trí *M* và *N*" bằng cụm từ "Xác định vị trí *MN*". Trở lại với việc giải *bài toán*.

a) Không mất tính tổng quát, giả sử góc giữa hai tia (OM, ON) có hướng dương.

Đặt $(OM, ON)=\alpha$. Kí hiệu $Q_O^{-\alpha}$ là phép quay tâm *O*, góc quay $-\alpha$. Đương nhiên, $Q_O^{-\alpha}(N)=M$. Đặt $Q_O^{-\alpha}(A)=B$.

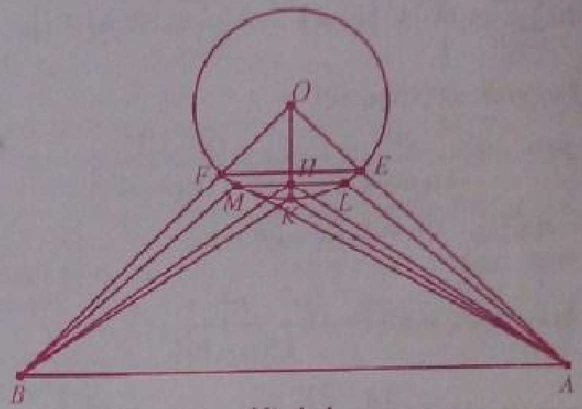
Dễ thấy $MA=NB$.

Suy ra $MA+NA=MA+MB$ (1)

Gọi *E, F* theo thứ tự là giao điểm của các tia *OA*, *OB* với đường tròn (*O*). Chú ý rằng đoạn *MN* cắt đoạn *OA*, ta thấy *M* thuộc cung nhỏ $\overset{\frown}{EF}$.

Có ba trường hợp xảy ra.

• *Trường hợp 1.* Đoạn thẳng *AB* không có điểm chung với đường tròn (*O*) (h.1).



Hình 1

Gọi *K* là điểm chính giữa cung nhỏ $\overset{\frown}{EF}$; *L* là điểm đối xứng của *M* qua *OK*; *H* là giao điểm của *ML* và *OK*. Với mọi điểm *M* thuộc cung nhỏ $\overset{\frown}{EF}$, ta có

$MA+MB=MA+LA$ (vì *ABLM* là hình thang cân với *AB* // *LM*).

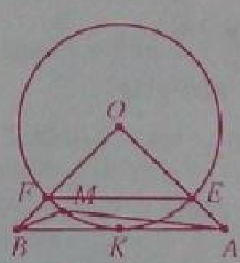
$\geq 2\,HA$ (vì *HA* là trung tuyến của tam giác *MAL*)

$\geq 2\,KA$ (vì $\widehat{HKA}\geq 90^\circ$) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $MA+NA\geq 2\,KA$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi *M* trùng *K*.

Tóm lại $MA+NA$ nhỏ nhất khi *M* trùng *K* (trong đó *N* xác định bởi $(OK, ON)=\alpha$).

• *Trường hợp 2.* Đoạn *AB* có một điểm chung với đường tròn (*O*) (h.2)



Hình 2

Gọi *K* là điểm chính giữa cung nhỏ $\overset{\frown}{EF}$. Với mọi *M* thuộc cung nhỏ $\overset{\frown}{EF}$, ta có

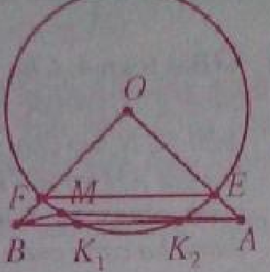
$MA+MB\geq AB$ (3)

Từ (1) và (3) suy ra $MA+NA\geq AB$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi *M* trùng *K*.

Tóm lại $MA+NA$ nhỏ nhất khi *M* trùng *K* (trong đó *N* xác định bởi $(OK, ON)=\alpha$).

• *Trường hợp 3.*

Đoạn AB có hai điểm chung với đường tròn (O) (h.3).



Hình 3

Gọi K_1, K_2 là hai điểm chung của đoạn AB và (O). Với mọi điểm M thuộc cung nhỏ $\widehat{EF}$, ta có $MA + MB \geq AB$ (3).

Từ (1) và (3) suy ra $MA + NA \geq AB$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi M trùng K_1 hoặc M trùng K_2.

Tóm lại $MA + NA$ nhỏ nhất khi M trùng K_1 hoặc M trùng K_2 (Đương nhiên, N_1, N_2 xác định bởi $(OK_1, ON_1) = (OK_2, ON_2) = \alpha$).

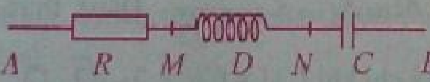
Kết luận chi tiết cho cả ba trường hợp xin dành cho bạn đọc.

b) Để giải câu này, cần có những kiến thức vượt ra ngoài chương trình toán phổ thông, xin không trình bày lời giải ở đây. ❑

Nhận xét. Số bài giải gửi về Tòa soạn không nhiều. Thật đáng tiếc! không có bạn nào cho lời giải đúng.

NGUYỄN MINH HÀ

★Bài L1/380. *Một mạch điện xoay chiều gồm một điện trở R, cuộn dây D có độ tự cảm L và điện trở thuần r, tụ điện có điện dung C mắc nối tiếp nhau như hình vẽ. Cho $U_{AB} = U = 25V$, $U_{AM} = U_R = 13V$, $U_{MN} = U_D = 9{,}9V$, $U_{NB} = U_C = 22V$. Dòng điện trong mạch có cường độ hiệu dụng $I = 2A$. Hãy tính điện trở r và cảm kháng Z_L của cuộn dây D.*



Lời giải. Ta có $U_D^2 = U_L^2 + U_r^2$ (1)

$$U^2 = (U_R + U_r)^2 + (U_L - U_C)^2$$

$$= U_R^2 + U_r^2 + 2U_RU_r + U_L^2 + U_C^2 - 2U_LU_C \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta được

$$U^2 = U_R^2 + U_C^2 + U_D^2 + 2(U_RU_r - U_LU_C) \quad (3)$$

Thay số vào (3) và rút gọn ta được

$$22U_L - 13U_r = 63\text{; suy ra } U_L = \frac{63 + 13U_r}{22} \quad (4)$$

Thay (4) vào (1) và thay $U_D = 9{,}9V$ ta tìm được phương trình

$$653U_r^2 + 1638U_r - 43463 = 0 \quad (5)$$

Phương trình (5) có một nghiệm âm (loại) và một nghiệm dương $U_r = 7V$ (chọn). Thay $U_r = 7V$ vào (4), ta được $U_L = 7V$.

Vậy $r = \dfrac{U_r}{I} = \dfrac{7}{2} = 3{,}5(\Omega)$

và $Z_L = \dfrac{U_L}{I} = \dfrac{7}{2} = 3{,}5(\Omega)$. ❑

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải ngắn gọn và tốt:

Bắc Kạn: *Ngô Việt Hùng*, 12T, THPT chuyên Bắc Kạn; **Vĩnh Phúc:** *Khương Mạnh Thắng*, 10A2, THPT Ngô Gia Tự; **Bắc Giang:** *Nguyễn Hoàng Hiệp*, 12Toán, THPT chuyên Bắc Giang; **Hà Nội:** *Quản Tùng Lâm*, *Nguyễn Văn Phong*, 12T4, THPT Ứng Hoà A; **Nam Định:** *Đỗ Thị Ninh*, 12C1, THPT Hải Hậu B, *Nguyễn Trung Hiếu*, 12A8, THPT Trần Hưng Đạo; **Nghệ An:** *Hà Trọng Hùng*, 10A3K37, THPT chuyên Phan Bội Châu, *Phan Quang Thịnh*, 11A4, khối THPT chuyên Đại học Vinh; **Vĩnh Long:** *Tăng Hồ Phát*, 12T2, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Long An:** *Trần Thuỳ Anh*, 11A, THPT Lê Quý Đôn; **Quảng Ngãi:** *Trần Vy Nhật Quang*, 11Lí, THPT chuyên Lê Khiết; **TP Hồ Chí Minh:** *Lương Xuân Vinh*, 10CT, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

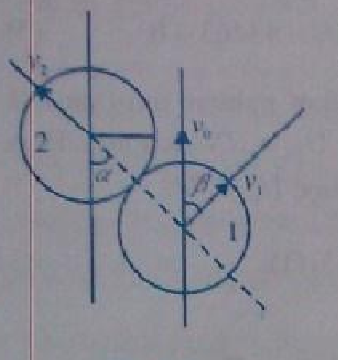
NGUYỄN VĂN THUẬN

★Bài L2/380. *N quả bi da giống hệt nhau được bố trí trên bàn phẳng. Một quả được thúc và qua một số lần va chạm với các quả khác nó dừng lại tại điểm mà từ đó nó bắt đầu chuyển động. Hỏi N nhỏ nhất bằng bao nhiêu thì điều đó có thể xảy ra? Coi các va chạm là tuyệt đối đàn hồi.*

Lời giải. Trước hết ta sẽ chứng minh rằng, sau va chạm tuyệt đối đàn hồi của hai quả cầu như nhau (trước va chạm một quả đứng yên) thì các quả cầu sẽ bay ra theo hai hướng vuông góc với nhau. Thật vậy, theo định luật bảo toàn động lượng và bảo toàn cơ năng ta có

$$m\vec{v}_0 = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 \quad ; \quad \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2}.$$

Từ hai phương trình trên suy ra $\vec{v}_1.\vec{v}_2 = 0$ hay $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$..



Hình 1

Sau va chạm quả cầu bay đến sẽ bị lệch so với hướng ban đầu một góc

$\beta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$ (h. 1).

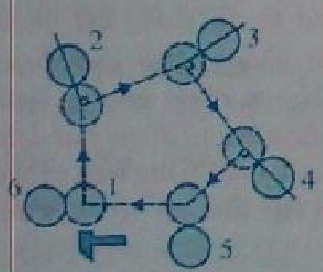
Vì $0 \le \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ nên

$\beta \le \dfrac{\pi}{2}$.

Theo điều kiện của bài toán, một trong các quả bi da (gọi là quả 1) sau khi trải qua một số va chạm phải vạch ra một đường gấp khúc kín. Như đã biết, tổng các góc trong của đường gấp khúc này lớn hơn hoặc bằng 2π (dấu bằng tương ứng với đa giác lồi). Nghĩa là số quả bi da mà quả bi da 1 phải va chạm phải thoả mãn là $n \ge \dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$.

Vậy quả bi da 1 trở về vị trí xuất phát nó cần trải qua ít nhất bốn va chạm.

Ngoài ra, để quả bi da 1 dừng lại ở vị trí ban đầu thì ở cạnh nó cần có 1 quả để sau va chạm trực diện nó dừng lại ở vị trí xuất phát.



Hình 2

Tóm lại, số quả bi da ít nhất để thoả mãn điều kiện bài toán là $N_{\min} = 4 + 1 + 1 = 6$.

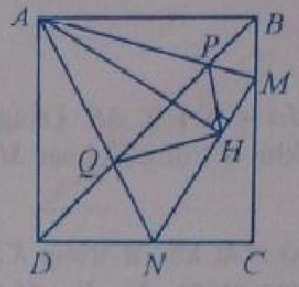
Vị trí có thể có của các quả bi da được minh hoạ như hình 2. ☐

Nhận xét. Rất tiếc không có bạn nào giải đúng bài này.

NGUYỄN XUÂN QUANG

KHAI THÁC... *(Tiếp trang 1)*

Bài toán 4. *Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a. Trên các cạnh BC, CD lần lượt lấy điểm M, N sao cho* $\mathcal{C}_{ABC}$ *bằng 2a. Đường chéo BD cắt AM và AN lần lượt tại P và Q. Chứng minh rằng các đoạn thẳng BP, PQ, QD lập thành ba cạnh của một tam giác vuông.*



Hình 4

Lời giải. (h. 4). Dễ thấy AM là đường trung trực của cạnh BH, suy ra $HP = PB$ và $\widehat{AHP} = \widehat{ABP} = 45°$ (1)

Tương tự, AN là đường trung trực của cạnh DH, suy ra $QH = QD$ và $\widehat{AHQ} = \widehat{ADQ} = 45°$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{PHQ} = 90°$. Do đó ba cạnh BP, PQ, QD lập thành ba cạnh của một tam giác vuông. ☐

Bài toán 5. *Cho hình vuông đơn vị ABCD. Trên cạnh BC lấy điểm M, trên cạnh CD lấy điểm N sao cho* $\widehat{MAN} = 45°$. *Xác định vị trí của M, N để diện tích tam giác CMN là lớn nhất.*

Lời giải. (h. 4). Theo Bài toán 1 thì $\mathcal{C}_{ABC} = 2$. Sử dụng BĐT Cauchy cho hai số dương ta có

$MN = \sqrt{CM^2 + CN^2} \ge \sqrt{2CM.CN} = 2\sqrt{S_{CMN}}$;

$CM + CN \ge 2\sqrt{CM.CN} = 2\sqrt{2}.\sqrt{S_{CMN}}$.

Suy ra $2 = MN + CM + CN \ge \left(2 + 2\sqrt{2}\right)\sqrt{S_{CMN}}$.

Dẫn đến $S_{CMN} \le \dfrac{1}{3 + 2\sqrt{2}}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $CM = CN = 2 - \sqrt{2}$. ☐

Tiếp tục khai thác bài toán 1, ta có bài toán sau.

Bài toán 6. *Với giả thiết như ở bài toán 5. Xác định vị trí của M, N sao cho MN nhỏ nhất.*

Lời giải bài toán 6 xin dành cho bạn đọc.

Trên đây là một vài ý kiến về cách khai thác một tính chất của hình vuông. Rất mong nhận được sự góp ý của bạn đọc.

PROBLEMS... (*Tiếp trang 16*)

Bài L2/384. Đặt một vật sáng AB song song với mặt phẳng của màn ảnh MN. Giữa vật sáng AB và màn ảnh MN đặt một thấu kính hội tụ có tiêu cự $f = \frac{3}{4}$ m, sao cho trục chính của thấu kính vuông góc với AB và màn ảnh MN. Khoảng cách giữa AB và màn ảnh MN là 2m.

1) Xác định các vị trí của thấu kính để có ảnh rõ nét của AB trên màn ảnh MN và hệ số phóng đại ảnh.

2) Phải dùng thấu kính có tiêu cự bằng bao nhiêu để chỉ có một vị trí của thấu kính cho ảnh rõ nét trên màn ảnh MN?

3) Người ta thay màn ảnh MN bằng một gương phẳng G, hướng mặt phản xạ ánh sáng về thấu kính. Điều chỉnh thấu kính để cho mặt phẳng chứa AB trùng với tiêu diện thấu kính. Hãy vẽ và xác định vị trí ảnh của AB cho bởi hệ thống thấu kính và gương phẳng.

NGUYỄN VĂN THUẬN
(*GV ĐHSP Hà Nội*)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/384. (For 6th grade) Replace the distinct letters by distinct numbers such that the following expression becomes a true equality

VỀ + TRƯỜNG + SA = 22 × 12 × 2009

T2/384. (For 7th grade) It is well-known that the two right triangles whose side lengths are positive integers (5, 12, 13) and (6, 8, 10) possess additional property that the area of each triangle equals its perimeter.

Are there other triangles with similar properties?

T3/384. Suppose given 1003 nonzero rational numbers in which any quadruple form a proportion. Prove that at least 1000 numbers are equal.

T4/384. Let x, y, z be non-negative real numbers such that $x + y + z = 1$. Find the maximum value of the following expression

$$P = (x + 2y + 3z)(6x + 3y + 2z).$$

T5/384. Let $ABCD$ be a cyclic quadrilateral, inscribed in a circle (O). The angle- bisectors of BAD and BCD meet at a point K on the diagonal BD. Let Q be the second intersection point (different from A) of AP and the circle (O); M and N be respectively the midpoints of BD and CP. The line through C and parallel to AD meets AM at P. Prove that :

1) $S_{ABQ} = S_{ADQ}$;

2) DN is perpendicular to CP.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/384. For each natural number n, let $p(n)$ be its largest odd divisor. Determine the sum

$$\sum_{n=2006}^{4012} p(n).$$

T7/384. Solve for x

$$\sqrt{3x-2} = -4x^2 + 21x - 22.$$

T8/384. Let ABC be a triangle whose circumcircle is (O) and such that $AC < AB$. The tangent lines to (O) at B, C intersect at T. The line through A and perpendicular to AT meet BC at S. Choose the points B_1 and C_1 on ST such that $TB_1 = TC_1 = TB$ and that C_1 lies between S and T. Prove that ABC and AB_1C_1 are similar.

Translated by LE MINH HA

TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC SƠ CẤP

ĐA THỨC VÀ ỨNG DỤNG TRONG CÁC BÀI TOÁN TỔ HỢP

TRẦN NAM DŨNG
(GV trường ĐHKHTN TP. Hồ Chí Minh)

(Tiếp theo kì trước)

II. Đa thức và công thức truy hồi

Với $P(x)=\sum_{i=0}^{m} a_i x^i, Q(x)=\sum_{j=0}^{n} b_j x^j$ thì

$P(x).Q(x)=\sum_{k=0}^{m+n} c_k x^k$ trong đó $c_k=\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$.

Công thức cơ bản này là cơ sở để chúng ta có thể biểu diễn một số công thức truy hồi thông qua phép nhân đa thức. Dưới đây, chúng ta sẽ giới thiệu sơ lược về *lí thuyết đa thức xe* để minh hoạ cho ý này.

Nhiều bài toán tổ hợp có thể phát biểu dưới dạng tổng quát sau: *Cho bàn cờ C kích thước $n \times n$ và bảng con $B \subset C$. Có bao nhiêu cách xếp n con xe lên $C \setminus B$ sao cho không con nào ăn con nào?* Chẳng hạn, bài toán nổi tiếng về n người và n món quà chính là bài toán trên với B là đường chéo.

Với mỗi B khác nhau, ta có các bài toán khác nhau. Định lí dưới đây cho phép chúng ta chuyển bài toán trên về việc tính số cách xếp r quân xe lên B sao cho không con nào ăn con nào.

Định lí 1. *Gọi $r_k(B)$ là số cách xếp k quân xe lên B sao cho không con nào ăn con nào. Khi đó số cách xếp n quân xe lên $C \setminus B$ sao cho không quân nào ăn quân nào được tính theo công thức*

$$N(B)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k (n-k)! r_k(B).$$

Chứng minh. Có $n!$ cách xếp n quân xe lên C sao cho không quân nào ăn quân nào. Bây giờ ta đếm xem trong các cách xếp này, có bao nhiêu cách xếp phạm luật, tức là các cách xếp có ít nhất 1 quân xe nằm trên 1 ô thuộc B. Đặt $B=\{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$, trong đó b_i $(i=\overline{1,m})$ là các ô. Đặt $B_i=\{$các cách xếp n quân xe lên C sao cho không quân nào ăn quân nào và có 1 quân xe ở ô $b_i\}$. Khi đó, tập các cách xếp không hợp lệ chính là $\bigcup_{i=1}^{m} B_i$. Dùng nguyên lí bù trừ, chú ý rằng $|B_{i_1} \cap B_{i_2} \ldots \cap B_{i_k}|$ sẽ bằng $(n-k)!$ nếu các quân xe ở $b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_k}$ đôi một không ăn nhau và bằng 0 trong trường hợp ngược lại, ta suy ra đpcm. □

Như vậy, điều quan trọng là tính được $r_k(B)$. Với mục đích tính $r_k(B)$, ta đưa vào khái niệm *đa thức xe* như sau:

Định nghĩa 2. *Giả sử $r_k(B)$ là số cách đặt k quân xe lên B sao cho không quân nào ăn quân nào, khi đó $r_B(x)=\sum_{k=0}^{n} r_k(B)x^k$ được gọi là đa thức xe của bảng con B, trong đó $r_0(B)=1$.*

Các định lí dưới đây đưa ra các tính chất quan trọng của *đa thức xe*, giúp chúng ta có thể tính *đa thức xe* của một bảng con bất kì, từ đó tính được các hệ số $r_k(B)$ của nó và như thế, giải quyết hoàn toàn bài toán đặt ra ban đầu. Các tính chất này được chứng minh dựa vào định nghĩa của $r_k(B)$ và phép nhân đa thức. Các mối quan hệ truy hồi giữa r_k được ẩn hoá dưới phép nhân và phép cộng đa thức.

Định lí 2. 1) *Giả sử B và B' là hai bảng con của C có tính chất: Mọi quân xe đặt trên một ô của B đều không ăn được một con xe đặt trên ô bất kì của B'. Khi đó*

$$r_{B \cup B'}(x)=r_B(x).r_{B'}(x).$$

2) *Cho a là một ô vuông tuỳ ý của bảng con B. B_1 là bảng con thu được từ B bằng cách*

xoá đi hàng và cột chứa a, còn B_2 là bảng con thu được từ B bằng cách xoá a. Khi đó

$$r_B(x) = xr_{B_1}(x) + r_{B_2}(x).$$

Chứng minh. 1) Muốn đặt k quân xe lên $B \cup B'$ thì cần phải đặt i quân xe lên B và $k - i$ quân xe lên B'. Nếu B và B' thoả mãn tính chất đề bài thì rõ ràng từ mọi cách đặt i quân xe lên B và $k-i$ quân xe lên B' đều có thể hợp lại thành 1 cách đặt k quân xe lên $B \cup B'$. Từ đó $r_k(B \cup B') = \sum_{i=0}^{k} r_i(B) r_{k-i}(B')$ và đây chính là đẳng thức giữa các hệ số của x^k trong đẳng thức $r_{B \cup B'}(x) = r_B(x).r_{B'}(x)$.

2) Xét một cách xếp k quân xe lên B. Có hai khả năng xảy ra

a) Ô a chứa quân xe. Khi đó, trên hàng và cột chứa a không được chứa quân xe nào nữa, còn trên B_1 ta phải lấy $k - 1$ quân xe sao cho không con nào ăn con nào. Như vậy số cách xếp trong trường hợp này bằng $r_{k-1}(B_1)$.

b) Ô a không chứa quân xe. Khi đó, coi như ta xếp k quân xe lên B_2 sao cho không quân nào ăn quân nào. Số cách xếp trong trường hợp này bằng $r_k(B_2)$. Từ đó

$$r_k(B) = r_{k-1}(B_1) + r_k(B_2).$$

Đẳng thức này chuyển sang ngôn ngữ đa thức chính là $r_B(x) = xr_{B_1}(x) + r_{B_2}(x)$. ❐

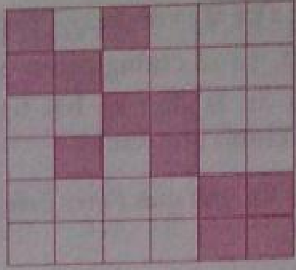
Định nghĩa 3. *Một ma trận L loại $r \times n$ với $r \le n$ gọi là một khối chữ nhật La tinh $r \times n$ nếu mỗi một trong các số 1, 2, …, n xuất hiện trên mỗi dòng đúng một lần và xuất hiện trên mỗi cột không quá một lần. Nếu $r = n$ thì L gọi là khối vuông La tinh.*

✪**Bài toán 5.** *Cho khối vuông La tinh 6 × 6 có hai dòng đầu là*

1	2	3	4	5	6
2	4	1	3	6	5

Có bao nhiêu cách thêm vào dòng thứ ba?

Lời giải. Số cách thêm vào dòng thứ ba chính là số hoán vị $\sigma \in S_6$ sao cho $\sigma(i)$ không ở trong ô bị cấm của bàn cờ sau



Gọi B là bảng gồm các ô cấm. Sử dụng các tính chất về đa thức xe, ta tính được

$$\begin{aligned} r_B(x) &= (1 + 8x + 20x^2 + 16x^3 + 2x^4)(1 + 4x + 2x^2) \\ &= 1 + 12x + 54x^2 + 112x^3 + 106x^4 + 40x^5 + 4x^6. \end{aligned}$$

Từ đó, số cách thêm vào dòng thứ ba là

$$6! - 5!12 + 4!54 - 3!112 + 2!106 - 1!40 + 4 = 70.$$

III. Định lí không điểm tổ hợp

Trong Kì thi Toán Quốc tế lần thứ 48 tổ chức tại Việt Nam tháng 7 năm 2007, bài toán số 6 được coi là bài toán khó nhất của kì thi. Bài toán này có cách phát biểu tổ hợp, nhưng lời giải lại sử dụng đến lí thuyết đa thức. Chỉ có 5 thí sinh làm được bài này, số còn lại đều sa lầy vào con đường tổ hợp thuần tuý.

✪**Bài toán 6.** *Cho $n > 1$ là số nguyên. Trong không gian, xét tập hợp*

$$S = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \{0, 1, \dots, n\}, x + y + z > 0\}.$$

Hãy tìm số mặt phẳng nhỏ nhất cùng chứa tất $(n+1)^3 - 1$ điểm của S nhưng không đi qua gốc toạ độ.

Chú ý là trường hợp 2 chiều của bài toán này có thể giải được bằng phương pháp quy nạp toán học, nhưng lời giải này không thể phát triển thành lời giải cho trường hợp 3 chiều.

Cho đến nay, dù có hai cách chứng minh khác nhau, nhưng cả hai cách đều dựa vào đa thức 3 biến như sau:

Nhận thấy các mặt phẳng có PT: $x_i + y_i + z_i - i = 0$ với $i = 1, 2, \dots, 3n$ chứa tất cả các điểm của S và không chứa gốc toạ độ.

Giả sử $H_1, H_2, \dots, H_k$ là các mặt phẳng chứa tất cả các điểm của S nhưng không qua gốc toạ độ. Giả sử mặt phẳng H_i có PT

$$a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0.$$

Xét đa thức $P(x; y; z) = \prod_{i=1}^{k} (a_i x + b_i y + c_i z + d_i)$.

Ta có $P(x;y;z) = 0$ với x, y, z thuộc S và $P(0;0;0) \neq 0$. Ta sẽ chứng minh $\deg P \geq 3n$. Từ đó suy ra $3n$ là đáp số bài toán. Có hai cách tiếp cận chính như sau:

Cách 1. (Theo lời giải của *Peter Scholze* (Đức)). Giả sử $k < 3n$.

Với mỗi đa thức $Q(x;y;z)$ đặt $\Delta_x Q(x;y;z) = Q(x+1;y;z) - Q(x;y;z)$. Tương tự với Δ_y, Δ_z.

Từ tính chất của đa thức P, ta có thể chứng minh bằng quy nạp rằng

$$\Delta_x^h \Delta_y^l \Delta_z^m P(x;y;z) = 0 \text{ với } x \in \{0;\dots;n-h\}, y \in \{0;\dots;n-l\}, z \in \{0;\dots;n-m\}, x+y+z > 0$$

$$\Delta_x^h \Delta_y^l \Delta_z^m P(x;y;z) \neq 0 \text{ với } (x;y;z) = (0;0;0).$$

Từ đây $\Delta_x^n \Delta_y^n \Delta_z^n P(0;0;0) \neq 0$. Điều này mâu thuẫn, vì $\Delta_x^n \Delta_y^n \Delta_z^n P(x;y;z)$ có bậc nhỏ hơn $3n - 3n$, do đó nó là đa thức đồng nhất 0.

Có một thí sinh khác người Italy cũng làm theo cách giải của *Scholze*. Cách giải này cũng tương tự với cách giải 2 của đáp án chính thức của kì thi.

Cách 2. Cách này là một áp dụng trực tiếp của định lí không điểm tổ hợp sau đây.

Định lí 3. (*Combinatorial Nullstellensatz*)

Cho F là một trường bất kì, $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là một đa thức thuộc $F[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Giả sử bậc của f là $deg(f) = t_1 + t_2 + \dots + t_n$, trong đó t_i là các số nguyên không âm và hệ số của đơn thức $x_1^{t_1} x_2^{t_2} \dots x_n^{t_n}$ trong f là khác 0. Khi đó, nếu $S_1, S_2, \dots, S_n$ là các tập con của F sao cho $|S_i| > t_i$ thì tồn tại $s_1 \in S_1$, $s_2 \in S_2$, …, $s_n \in S_n$ sao cho $f(s_1, s_2, \dots, s_n) \neq 0$.

Có ba thí sinh lần lượt đến từ Moldova, Ukraina và Nga đã chứng minh lại định lí này và áp dụng để giải quyết bài toán 6.

Thật vậy, giả sử $k < 3n$

Xét $Q(x;y;z) = P(x;y;z) - d(x-1)\dots(x-n)(y-1)\dots(y-n)(z-1)\dots(z-n)$

Trong đó $d \neq 0$ được chọn sao cho $Q(0;0;0) = 0$. Khi đó $Q(x;y;z) = 0$ với mọi $(x;y;z) \in S_x \times S_y \times S_z$. Vì $|S_x| = |S_y| = |S_z| > n$ và hệ số của $x^n y^n z^n$ trong $Q(x;y;z)$ bằng d khác 0 nên theo định lí *Combinatorial Nullstellensatz*, tồn tại $(x_0;y_0;z_0) \in S_x \times S_y \times S_z$ sao cho $Q(x_0;y_0;z_0) \neq 0$. Mâu thuẫn. Vậy $k = 3n$.

Định lí Combinatorial Nullstellensatz là trường hợp rời rạc của *định lí không điểm Hilbert* nổi tiếng (*Hilbert Nullstellensatz*). Định lí này được *Nora Alon* chứng minh năm 1999 và có nhiều ứng dụng trong số học, tổ hợp và lí thuyết đồ thị.

Bài toán 7. (*Cauchy – Davenport*). *Với các tập hợp A và B, định nghĩa $A+B = \{a+b | a \in A, b \in B\}$. Khi đó với mọi số nguyên tố p và với mọi A, B thuộc Z_p, ta có*

$$|A + B| \geq \min\{p, |A| + |B| - 1\}.$$

Lời giải. Nếu $|A| + |B| > p$, kết luận bài toán là hiển nhiên: Trong trường hợp này $A + B = Z_p$. Bây giờ giả sử rằng $|A| + |B| \leq p$ và giả sử ngược lại rằng $|A + B| \leq |A| + |B| - 2$. Khi đó trong Z_p có tập hợp C sao cho $C \supseteq A + B$, $|C| = |A| + |B| - 2$.

Xét đa thức $f(x\ y) = \prod_{c \in C}(x+y-c)$ trong $F_p[x, y]$.

Nó có bậc $|A| + |B| - 2$ và có hệ số của $x^{|A|-1}y^{|B|-1}$ bằng $C_{|A|+|B|-2}^{|A|-1}$ (mod p). Vì $|A| + |B| - 2 < p$ nên hệ số này khác 0. Theo định lí 3, tồn tại $a \in A$, $b \in B$ sao cho $f(a, b) \neq 0$, trái với định nghĩa của f. Vậy $|A + B| \geq |A| + |B| - 1$.

Định lí *Cauchy – Davenport* có rất nhiều ứng dụng. Chẳng hạn có thể dùng định lí này để chứng minh định lí *Erdos-Ginzburg-Zieve* (bài toán 4 ở phần 1).

IV. Bài tập

1. Cho p là một số nguyên tố lẻ, $n > p$ là số nguyên dương bất kì. Tìm số các tập con A của tập hợp $\{1, 2, \dots, n\}$, biết rằng

(i) A chứa đúng p phần tử;

(ii) Tổng các phần tử của A chia hết cho p.

2. Cho n là một số nguyên dương lớn hơn 1, $S = \{1, 2, \dots, n\}$. Tô màu các phần tử của S bằng hai màu xanh và đỏ, sao cho có s số được tô màu xanh và t số được tô màu đỏ.

Hãy tìm số các bộ ba số $(x\,;\,y\,;\,z) \in S^3$ sao cho x, y, z được tô cùng màu và $x + y + z$ chia hết cho n.

3. Cho A là một tập hợp hữu hạn các số nguyên dương sao cho tất cả các tổng của một hay một số số của A đều khác nhau đôi một. Chứng minh rằng tổng nghịch đảo các số thuộc A nhỏ hơn 2.

4. (*IMO 1990*) Chứng minh rằng tồn tại một đa giác lồi với 1990 cạnh sao cho

i) Tất cả các góc trong của nó bằng nhau;

ii) Độ dài các cạnh, theo một thứ tự nào đó, bằng $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, 1989^2, 1990^2$.

5. Người ta muốn phân phối 5 món quà A, B, C, D, E cho 5 người a, b, c, d, e sao cho a không nhận A hay C; b không nhận D; c không nhận B hay E; d không nhận B; e không nhận A hay C. Tính xác suất để

a) a nhận E;

b) b hoặc e nhận E.

6. Cho $S = \{(x\,;\,y) \mid 0 \le x \le m,\ 0 \le y \le n,\ x + y > 0\}$. Chứng minh rằng để phủ tất cả các điểm của S bằng các đường thẳng không đi qua gốc tọa độ, ta cần ít nhất $m+n$ đường thẳng.

7. (*Vô địch Nga, 1991*) Cho $2n$ số thực phân biệt $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$. Bảng $n \times n$ được ghi các số theo quy tắc sau: Trong ô ở dòng i, cột j ta ghi số $a_i + b_j$. Chứng minh rằng nếu tích các số ở tất cả các cột bằng nhau thì tích các số ở tất cả các hàng cũng bằng nhau.

8. Cho p là một số nguyên tố và G là một đồ thị có bậc không nhỏ hơn $2p - 1$. Chứng minh rằng tồn tại một tập không rỗng các đỉnh U của G sao cho số cạnh có ít nhất một đỉnh thuộc U chia hết cho p.

9. (*Vô địch Saint - Peterburg 2003*) Cho p là số nguyên tố và số nguyên dương $n \ge p$. Giả sử $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là bộ các số nguyên bất kì và f_k là số các tập con k phần tử của bộ này có tổng chia hết cho p. Chứng minh rằng

$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k f_k$ chia hết cho p (ta quy ước $f_0 = 1$).

TÍNH KHOẢNG CÁCH...

(*Tiếp trang 5*)

Gọi $N = AK \cap A'D$; $P = AB \cap A'M$. Khi đó

$$\frac{d(K;(A'MD))}{d(A;(A'MD))} = \frac{NK}{NA} = \frac{1}{2}.$$

Suy ra $d(CK;\,A'D) = \frac{1}{2} d(A;\,(A'MD))$

$$= \frac{1}{2} d(A;\,(A'DP)).$$

Tứ diện $A.A'DP$ vuông tại A nên

$$\frac{1}{d^2(A;(A'DP))} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AP^2} = \frac{9}{4a^2}$$

$$\Rightarrow d(A,(A'DP)) = \frac{2a}{3}.$$

Vậy $d(CK\,;\,A'D) = \dfrac{a}{3}$. ❑

Bài tập tự luyện

1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tính $d(SM\,;\,BN)$.

2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp trong đường tròn đường kính $AD = 2a$ và SA vuông góc với đáy với $SA = a\sqrt{6}$. Tính $d(AD\,;\,(SBC))$.

3. Cho tứ diện $ABCD$ có $AD = BC = a$, $AC = BD = b$, $AB = CD = c$. Tính $d(A;\,(BCD))$.

4. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AA', AD và CC'. Gọi O là tâm của $ABCD$. Tính $d(B\,;\,(MNP))$; $d(O\,;\,(MNP))$.

5. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = 2a$, $AA' = a$. Gọi M là điểm chia trong đoạn AD theo tỉ số $\dfrac{MA}{MD} = 3$.

Tính $d(M\,;\,(AB'C))$.

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

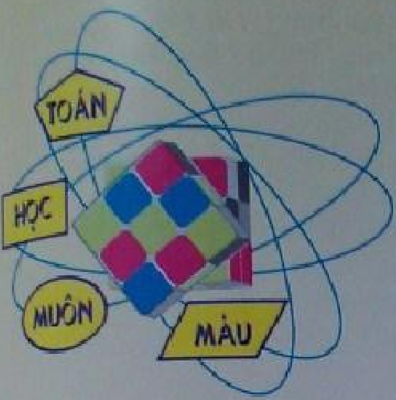
XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 384(6.2009)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.35121607
ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35144272, 04.35121606
Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn

TRONG SỐ NÀY

Biên tập : NGUYỄN THANH HỒNG, HỒ QUANG VINH.
Trị sự, phát hành : NGUYỄN KHOA ĐIỀM, VŨ ANH THƯ
Mĩ thuật : MINH THƠ
Chế bản : NGUYỄN THỊ OANH

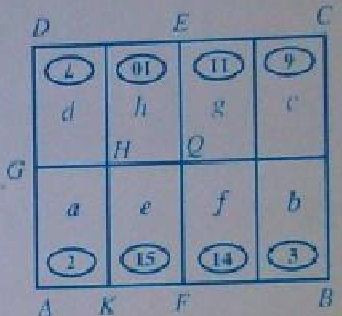
Giải đáp:

Sắp xếp CÁC TRANG SÁCH ĐỂ IN

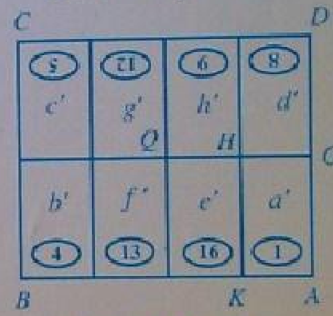


(Đề đăng trên THTT số 378 tháng 12.2008)

Để tiện lập luận ta kí hiệu số trang sách ở mặt trên và mặt dưới tờ giấy $ABCD$ là $a, b, c, d, e, f, g, h, a', b', c', d', e', f', g', h'$ như ở hình 1 và hình 2. Từ các cách gấp giấy ta có các tính chất (TC) sau đối với các số trang:



Hình 1. Mặt trên



Hình 2. Mặt dưới

TC1. Hai trang ở mặt trên và mặt dưới của cùng một phần khi chia tờ giấy thành 8 phần thì hơn kém nhau 1, tức là $x = x' + 1$ hoặc $x = x' - 1$.

TC2. Từng cặp hai trang ở mặt trên là a và b, c và d, e và f, g và h hơn kém nhau 1 (do gấp theo đường EF).

TC3. Từng cặp hai trang ở mặt dưới là b' và c', f' và g' hơn kém nhau 1 (do gấp theo đường GQ).

TC4. Hai trang đầu và cuối là $a' = 1$, $e' = 16$ (do gấp theo đường KH).

TC5. Từng cặp hai trang ở mặt dưới là a' và b', c' và d', e' và f', g' và h' hơn kém nhau 3 (do cách nhau hai trang ở mặt trên khi gấp lại theo các đường EF và GQ).

Dựa vào các tính chất 1, 2, 3, 4 có thể rút ra quy tắc điền số như sau:

- $a' = 1 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow b' = 4 \Rightarrow c' = 5 \Rightarrow c = 6 \Rightarrow d = 7 \Rightarrow d' = 8$.
- $e' = 16 \Rightarrow e = 15 \Rightarrow f = 14 \Rightarrow f' = 13 \Rightarrow g' = 12 \Rightarrow g = 11 \Rightarrow h = 10 \Rightarrow h' = 9$.

Các bạn sau có lời giải tốt, được nhận tặng phẩm: *Dương Xuân Vinh*, 12A1, THPT Phan Đình Phùng, Sông Cầu, Phú Yên; *Lê Hoàng Tín*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Quy Nhơn, Bình Định.

PHI PHI

Kì 2. TRẮNG ĐI TRƯỚC CHIẾU HẾT SAU BA NƯỚC

Giải đáp: Thế cờ (Kì 1)

(THTT số 381, tháng 3 năm 2009)

1.♘f5 ♗xh8 [1...♗d4 2.♖h1+ ♗g1 3.♖xg1#] 2.♘g7 ♗xg7 3.♗xg7#

Các bạn sau có đáp án tốt hơn cả, được nhận tặng phẩm kì này: *Nguyễn Tuấn Anh Quân*, 9A1, THCS Yên Lạc, Vĩnh Phúc, *Nguyễn Tiến Duy*, 8I, THCS Việt Nam- Angieri, Q.Thanh Xuân, Hà Nội, *Vương Trung Hiếu* (gửi qua mạng: nhoc_nhoc_iu172@yahoo.com.vn).

LÊ THANH TÚ

(Đại kiện tướng Q...

Giải đáp: Một số ngày hội THÁNG BA

(Đề đăng trên THTT số 381 tháng 3.2009)

				Q	U	Y	Ề	N	S	Ơ	N			
	Q	U	Ố	C	T	Ế	P	H	Ụ	N	Ữ			
P	H	A	N	V	Ă	N	H	Ớ	N					
						Y	Ê	N	T	H	Ế			
					H	À	N	G	K	Ê	N	H		
		B	À	T	R	I	Ệ	U						
							Đ	Ồ	N	G	N	H	Â	N
	Đ	O	À	N	T	H	A	N	H	N	I	Ê	N	

Chú thích theo hàng.

1. Hội Quyền Sơn (Đền Trúc), 2.3 (6.2 ÂL). Thôn Quyền Sơn, xã Thi Sơn, H. Kim Bảng, Hà Nam, đường vào có rừng trúc, liền với Ngũ Động Sơn. Suy tôn Lý Thường Kiệt, tướng nhà Lý đánh quân Tống (1076 - 1077).
2. Ngày Quốc tế phụ nữ. Ngày 8.3.1899 nữ công nhân Chicago ở Hoa Kỳ đấu tranh đòi cải thiện đời sống, giảm giờ làm.
3. Hội Đền thờ Phan Văn Hớn. 21.3 (25.2 ÂL). Xã Bà Điểm, H. Hóc Môn, TP. Hồ Chí Minh. Người lãnh đạo nhân dân 18 thôn Vườn Trầu tấn công dinh tri huyện thuộc Pháp (1885).
4. Lễ hội Yên Thế 16.3. Thị trấn Cầu Gồ, H. Yên Thế, Bắc Giang. Suy tôn Hoàng Hoa Thám (1858 - 1913), lãnh tụ nông dân lãnh đạo nghĩa quân chống Pháp suốt 30 năm.
5. Lễ hội Đình Dư Hàng, Hàng Kênh, Q. Lê Chân, Hải Phòng 14.3 (18.2 ÂL). Suy tôn Ngô Quyền (898 - 944), đánh quân Nam Hán ở trận Bạch Đằng (938).
6. Hội Đền Bà Triệu (Triệu Thị Trinh) 17.3 (21.2 ÂL). Khởi nghĩa chống quân Đông Ngô (248).
7. Hội Đền Đồng Nhân 1.3 (5.2 ÂL). Phường Đồng Nhân, Q. Hai Bà Trưng, Hà Nội. Suy tôn Hai Bà Trưng (Trưng Trắc, Trưng Nhị), khởi nghĩa chống quân Đông Hán (40 - 43).
8. Ngày thành lập Đoàn Thanh niên Cộng sản 26.3. Ngày 26.3 BCH TƯ ĐCS Đông Dương ra Nghị quyết thành lập Đoàn Thanh niên Cộng sản Đông Dương, sau này đổi tên là Đoàn Thanh niên Cộng sản Hồ Chí Minh.

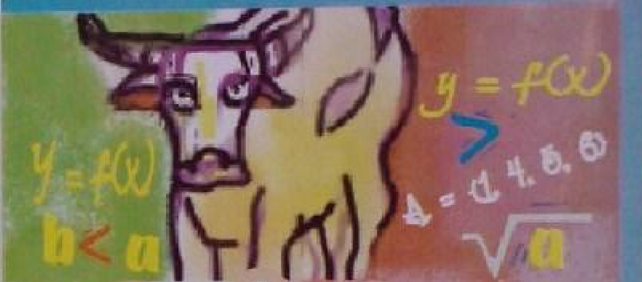
Các bạn sau có lời giải tốt, được nhận tặng phẩm:

1) *Vũ Thanh Tùng*, 11 Toán, THPT chuyên Lương Văn Tụy, Ninh Bình;

2) *Nguyễn Thị Uyên*, 263 Phan Đình Phùng, TX. KonTum, Kon Tum;

3) *Võ Văn Huy*, 10A3, THPT Lê Hồng Phong, Tây Hòa, Phú Yên.

AN MINH



TRÂU và TOÁN

Từ thời xưa ở nông thôn, con trâu giữ vai trò quan trọng trong lao động sản xuất, nhiều trâu biểu thị cho sự giàu có. Con trâu rất gần gũi với người dân nên trong văn học người ta đã sử dụng hình tượng con trâu để ví von, so sánh biểu lộ một ý tưởng, một châm ngôn sống, một kinh nghiệm.

Từ TRÂU còn gắn với các thuật ngữ toán học (như là toán, nửa, không, các số, số thứ tự, các tháng của năm, ...) trong các thành ngữ, tục ngữ, ca dao, dân ca, ... Bạn có thể tìm được bao nhiêu thí dụ như thế, trong đó từ TRÂU và thuật ngữ toán học nằm trọn trong một câu hoặc hai câu liên tiếp.

VĂN KHANH

ISSN : 0866-8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT06M9
Giấy phép XB số 67/GP-BVHTT cấp ngày 15.6.2004
In tại Công ty CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ, Hà Nội
In xong và nộp lưu chiểu tháng 6 năm 2009
Giá : 6000 đồng
Sáu nghìn đồng