ĐOÀN QUỲNH (Chủ biên) - VĂN NHƯ CƯƠNG - TRẦN NAM DŨNG
NGUYỄN MINH HÀ - ĐỖ THANH SƠN - LÊ BÁ KHÁNH TRÌNH

TÀI LIỆU CHUYÊN TOÁN
HÌNH HỌC 10

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

ĐOÀN QUỲNH (Chủ biên) - VĂN NHƯ CƯƠNG - TRẦN NAM DŨNG
NGUYỄN MINH HÀ - ĐỖ THANH SƠN - LÊ BÁ KHÁNH TRÌNH

TÀI LIỆU CHUYÊN TOÁN
HÌNH HỌC 10

(Tái bản lần thứ hai)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

13-2011/CXB/157-2048/GD

Mã số : TXT44h1-CPH

Lời nói đầu

Từ hơn 40 năm nay, hệ chuyên toán ở nước ta là một hệ học chính thống bên cạnh hệ đại trà. Tuy nhiên gần đây, Bộ Giáo dục và Đào tạo mới ban hành chính thức chương trình chuyên Toán lớp 10 và đang xét duyệt chương trình chuyên Toán lớp 11, 12 bên cạnh chương trình Toán THPT đã được ban hành năm 2006.

Chúng tôi nhận thấy cần biên soạn một bộ tài liệu chuyên Toán bậc THPT với các mục đích sau :

– Phục vụ việc dạy và học ở hệ chuyên Toán thể hiện được tinh thần của chương trình nói trên, khá gần với chương trình và sách giáo khoa (SGK) Toán nâng cao nhằm giúp học sinh có thể chuyển đổi từ việc học ở hệ chuyên sang hệ không chuyên và ngược lại.

– Làm một tài liệu giáo khoa cho giáo viên dạy các lớp chuyên Toán.

– Giúp học sinh các lớp chuyên tự học ; giúp học sinh khá giỏi ở các lớp đại trà có tài liệu để có thể tự học, tự bồi dưỡng thêm (bên cạnh SGK nâng cao).

Chúng tôi đã mời được nhiều thầy dạy ở các trường chuyên, lớp chuyên (dạy các lớp bồi dưỡng thi toán quốc tế cũng như trong nước, dạy các khối chuyên ở các trường đại học,...) tham gia biên soạn để tài liệu sát với thực tiễn giảng dạy hệ chuyên ở nước ta, đồng thời giới thiệu được phần nào đôi nét giảng dạy ở hệ chuyên Toán của các trường đó.

Bộ sách *Tài liệu chuyên Toán lớp 10* bao gồm 4 cuốn :

– Tài liệu chuyên Toán – Đại số 10

– Tài liệu chuyên Toán – Hình học 10

– Tài liệu chuyên Toán – Bài tập Đại số 10

– Tài liệu chuyên Toán – Bài tập Hình học 10.

Các tác giả viết cuốn Tài liệu chuyên Toán – Hình học 10 này là :

– Thầy ***Nguyễn Minh Hà*** (Khối chuyên Toán, Trường ĐHSP Hà Nội) : *Chương I và Bài đọc thêm*

– Thầy ***Lê Bá Khánh Trình*** (Trường ĐHKHTN Tp Hồ Chí Minh) : *Chương II*

– Thầy ***Văn Như Cương*** (Trường Lương Thế Vinh, Hà Nội) : *Chương III*

– Thầy ***Đỗ Thanh Sơn*** (Khối chuyên toán Trường ĐHKHTN Hà Nội) : *Chương IV*

– Thầy ***Trần Nam Dũng*** (Trường ĐHKHTN Tp Hồ Chí Minh) : *Chuyên đề Hình học phẳng.*

Từng tác giả chịu trách nhiệm về bài viết của mình. Chủ biên và biên tập viên tôn trọng "văn phong" của từng tác giả (người trình bày chi tiết, chặt chẽ ; người trình bày dựa nhiều vào trực giác ; người trình bày phần lí thuyết phong phú, sâu sắc ; người chú trọng phần ứng dụng, bài tập...). Chúng tôi chủ yếu sửa chữa những lỗi biên tập, phối hợp các phần biên soạn của những tác giả khác nhau để chúng trở thành một thể thống nhất theo đúng khuôn khổ của chương trình.

Trong tài liệu này chỉ trình bày một chuyên đề bắt buộc của chương trình là chuyên đề *Hình học phẳng*. Tác giả đã chọn giải một số bài toán "điển hình" của hình học phẳng chủ yếu dựa vào các kiến thức hình học ở THCS mà hầu như tất cả học sinh chuyên đều cần biết. Trong từng chương, các tác giả đã cố gắng tuân thủ theo sắp xếp của chương trình. Có một số điều cần lưu ý là :

Trong chương I (*Vectơ*), tác giả đã cho nhiều ví dụ và bài tập về hình học phẳng có sử dụng công cụ vectơ (chưa đề cập đến tích vô hướng), có nói đến tâm tỉ cự, tỉ số kép của hàng và tỉ số kép của chùm. Tác giả cũng đã viết bài đọc thêm về góc định hướng với định lí Ceva, với tỉ số kép đặt vào cuối chương II.

Trong chương II (*Tích vô hướng và ứng dụng*), bên cạnh giá trị lượng giác của các góc có mối liên quan đặc biệt, sách có giới thiệu các công thức lượng giác để sử dụng trong những chứng minh hình học ngay sau đó.

Trong chương III (*Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng*) có trình bày thêm một số nội dung mà SGK Hình học 10 nâng cao không nói đến, chẳng hạn như tiếp tuyến của các đường cônic, tính chất quang học của các đường cônic....

Trong chương IV (*Các phép biến hình trong mặt phẳng*), theo đúng tinh thần của chương trình, tác giả đề cập đến từng phép dời hình, đồng dạng (tịnh tiến; đối xứng, quay, vị tự), chưa đi sâu vào hợp thành (tích) của chúng.

Trong từng chương có nhiều ví dụ, nhiều bài tập, bài toán (kể cả bài thi của hệ chuyên, thi học sinh giỏi Toán quốc gia, quốc tế...). Các bài tập đều có lời giải hoặc hướng dẫn giải đầy đủ trong cuốn *Tài liệu chuyên Toán – Bài tập Hình học 10*.

Các tác giả cùng chủ biên và biên tập viên đã rất cố gắng phối hợp biên soạn tài liệu chuyên Toán này. Tuy nhiên, chúng tôi biết bộ sách vẫn còn nhiều thiếu sót bởi vì viết tài liệu dạy và học đầu tiên cho hệ chuyên Toán là một điều rất khó khăn. Trong bộ sách, có thể đây đó vẫn còn dùng những kí hiệu khác nhau để chỉ cùng một đối tượng (nhưng không gây hiểu nhầm gì), đôi chỗ có những bài tập trùng lặp (thường với những ý tưởng giải khác nhau) và cũng có thể có đôi chỗ chưa đầy đủ chi tiết như mong muốn. Chúng tôi mong độc giả lượng thứ về các điều đó và hy vọng các thầy cô và các em học sinh trong quá trình dạy, học, đọc tài liệu này đóng góp ý kiến cho chúng tôi để lần tái bản sau, sách phục vụ được tốt hơn. Các góp ý xin gửi về : *Ban Toán, Công ty cổ phần Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 187, Giảng Võ, Hà Nội.*

Chúng tôi rất cám ơn các tác giả đã nhiệt tình tham gia biên soạn tài liệu trong khi bề bộn bao công việc khác và đã buộc phải biên soạn trong một khuôn khổ chương trình nhất định, phải phối hợp với nhiều tác giả khác (có thể với những ý tưởng biên soạn không hoàn toàn giống nhau). Chúng tôi rất cám ơn Tiến sĩ *Trần Phương Dung* đã đưa ra ý tưởng về bộ sách và giúp đỡ triển khai viết bộ sách này. Chúng tôi đặc biệt cám ơn biên tập viên *Phan Thị Minh Nguyệt*, người đã giúp các tác giả và chủ biên sửa chữa các sai sót, sắp xếp phối hợp các phần của các tác giả khác nhau, khắc phục các khó khăn để bộ sách được xuất bản đúng thời hạn, kịp thời phục vụ bạn đọc. Mong muốn duy nhất của chúng ta là bộ sách này thực sự bổ ích cho các học sinh ham thích và học giỏi môn Toán, đặc biệt giúp học sinh chuyên toán có tài liệu học tập riêng cho hệ chuyên của mình.

Chủ biên

ĐOÀN QUỲNH

BẢNG PHIÊN ÂM
TÊN MỘT SỐ NHÀ TOÁN HỌC NÊU TRONG SÁCH

Phiên âm La-tinh	Phiên âm Tiếng Việt
Apollonius	A-pô-lô-ni-út
Brianchon	Bri-ăng-sông
Bunyakovsky	Bu-nhi-a-cốp-xki
Cauchy	Cô-si
Carnot	Các-nô
Ceva	Xê-va
Chasles	Sa-lơ
Coxeter	Coóc-xtơ
Descartes	Đề-các
De Morgan	Đờ Móc-găng
Desargues	Đờ-dác
Euclid	Ơ-clit
Euler	Ơ-le
Feuerbach	Phoi-ơ-bắc
Gauss	Gau-xơ
Gergonne	Gec-gon
Greitzer	Gờ-rai-xơ
Heron	Hê-rông

Phiên âm La-tinh	Phiên âm Tiếng Việt
Lemoine	Lơ-moan
Maclaurin	Mác-lô-ranh
Menelaus	Mê-nê-la-uýt
Miquel	Mi-ken
Newton	Niu-tơn
Pappus	Pa-puýt
Pascal	Pat-xcan
Poncelet	Pông-xơ-lê
Ptolemy	Ptô-lê-my
Pythagoras	Py-ta-go
Simson	Xim-xơn
Steiner	Stây-ne
Stewart	Stiu-oat
Terquem	Téc-kem
Thales	Ta-lét
Torricelli	Tô-ri-xe-li
Venn	Ven
Viète	Vi-ét

LƯU Ý MỘT SỐ KÍ HIỆU ĐƯỢC DÙNG TRONG SÁCH

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$	góc định hướng giữa hai vectơ
(AB, AC)	góc định hướng giữa hai tia góc lượng giác giữa hai tia
$\overline{(AB, AC)}$	góc định hướng giữa hai đường thẳng
$\vec{u} // \vec{v}$	$\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng phương
$\vec{u} \uparrow\uparrow \vec{v}$	$\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng hướng
$\vec{u} \downarrow\uparrow \vec{v}$	$\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng phương khác hướng
(ABC) hoặc (A, B, C)	tỉ số đơn của A, B, C nếu A, B, C thẳng hàng
(ABC)	đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nếu A, B, C không thẳng hàng
$(ABCD)$ hoặc (A, B, C, D)	tỉ số kép của 4 điểm thẳng hàng hoặc của 4 điểm trên đường tròn
$S(ABCD)$ hoặc $S(SA, SB, SC, SD)$	tỉ số kép của 4 đường thẳng SA, SB, SC, SD
$\text{dt}(ABC)$ hoặc S_{ABC}	diện tích tam giác ABC

Chương I

VECTƠ

§1. VECTƠ VÀ CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

1. Đại cương về vectơ

a) Vectơ

Vectơ là một đoạn thẳng mà ta đã chỉ rõ điểm mút nào là điểm đầu, điểm mút nào là điểm cuối.

Điểm đầu và điểm cuối của vectơ theo thứ tự được gọi là gốc và ngọn của vectơ.

Hướng từ gốc tới ngọn của vectơ được là gọi là hướng của vectơ.

Vectơ có gốc A, ngọn B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$.

Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$ chính là độ dài đoạn thẳng AB. Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$ được kí hiệu là $\left|\overrightarrow{AB}\right|$. Đương nhiên $\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB$.

Vectơ có gốc và ngọn trùng nhau được gọi là vectơ-không. Vectơ-không có độ dài bằng 0 và có hướng tuỳ ý.

Khi muốn chỉ rõ một vectơ nào đó có độ dài khác 0, ta dùng thuật ngữ "vectơ-khác không".

Khi muốn chỉ rõ một vectơ nào đó có độ dài bằng 1, ta dùng thuật ngữ "vectơ đơn vị".

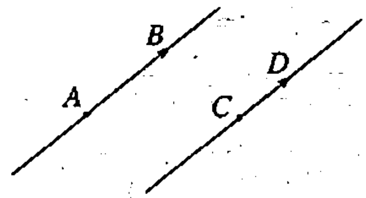
b) Hai vectơ bằng nhau

Giá của vectơ-khác không $\overrightarrow{AB}$ là đường thẳng AB. Giá của vectơ-không $\overrightarrow{AA}$ là đường thẳng bất kì đi qua A.

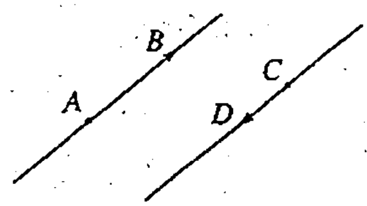
Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu giá của chúng hoặc song song hoặc trùng nhau. Đương nhiên, vectơ-không cùng phương với mọi vectơ. Để biểu thị hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng phương, ta viết : $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{CD}$.

Nếu giá của vectơ $\overrightarrow{AB}$ hoặc song song hoặc trùng với đường thẳng Δ thì ta cũng viết $\overrightarrow{AB} // \Delta$.

Hai vectơ cùng phương có thể cùng hướng, có thể ngược hướng.



Hình 1.1



Hình 1.2

Để biểu thị hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ cùng hướng, ta viết : $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$ (h.1.1).

Để biểu thị hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ ngược hướng, ta viết : $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$ (h.1.2).

Với hai vectơ-khác không $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$, ta có :

$$\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD} \\ \overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}. \end{array}\right.$$

Vectơ-không được quy ước là cùng hướng với mọi vectơ, ngược hướng với mọi vectơ.

Hai vectơ được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài.

Để biểu thị hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ bằng nhau, ta viết : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Đương nhiên tất cả các vectơ-không bằng nhau. Do đó, người ta dùng kí hiệu $\vec{0}$ để chỉ các vectơ-không.

Vậy, nếu A, B là hai điểm trùng nhau thì $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA} = \vec{0}$.

c) Vectơ tự do

Có rất nhiều vectơ cùng bằng một vectơ cho trước. Tập hợp các vectơ này được coi là một vectơ (vectơ tự do). Một vectơ tự do hoàn toàn xác định nếu ta biết hướng và độ dài của nó. Vectơ tự do thường được kí hiệu đơn giản là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ ...

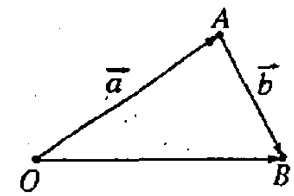
d) Phép dựng vectơ

Cho trước vectơ $\vec{a}$. Với mỗi điểm M, tồn tại duy nhất điểm N sao cho $\overrightarrow{MN} = \vec{a}$.

2. Các phép toán vectơ

a) Phép cộng hai vectơ

Tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một vectơ được xác định như sau :



Hình 1.3

Từ một điểm O tuỳ ý, dựng vectơ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, từ A, dựng vectơ $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$.

Vectơ $\overrightarrow{OB}$ được gọi là vectơ tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ và kí hiệu là $\vec{a} + \vec{b}$ (h.1.3).

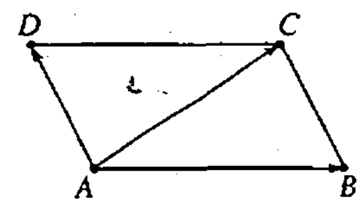
Từ định nghĩa phép cộng hai vectơ, ta có ngay các quy tắc quan trọng sau :

• *Quy tắc ba điểm* :

Với ba điểm A, B, C bất kì : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

• *Quy tắc hình bình hành* (h.1.4) :

Với hình bình hành $ABCD$: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.



Hình 1.4

Phép cộng vectơ có các tính chất sau :

• $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (giao hoán).

• $\vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c}$ (kết hợp).

• $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

Nhờ tính chất kết hợp :

– Các tổng $\vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$, $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c}$ được viết đơn giản là $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

– Quy tắc ba điểm được mở rộng thành quy tắc n điểm :

$$\overrightarrow{A_1A_n} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + ... + \overrightarrow{A_{n-1}A_n}.$$

b) Phép trừ hai vectơ

Vectơ $\vec{b}$ được gọi là vectơ đối của vectơ $\vec{a}$ khi và chỉ khi $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$ và $|\vec{b}| = |\vec{a}|$

Để biểu thị vectơ $\vec{b}$ là vectơ đối của vectơ $\vec{a}$, ta viết : $\vec{b} = -\vec{a}$.

Đương nhiên vectơ $\vec{b}$ là vectơ đối của vectơ $\vec{a}$ khi và chỉ khi vectơ $\vec{a}$ là vectơ đối của vectơ $\vec{b}$. Nói cách khác, $-(-\vec{a}) = \vec{a}$.

Vì lí do trên, khi $\vec{b} = -\vec{a} \Leftrightarrow \vec{a} = -\vec{b}$, ta nói : $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ đối nhau.

Dễ thấy, $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ đối nhau khi và chỉ khi $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$.

Hiệu của vectơ $\vec{a}$ và vectơ $\vec{b}$ là một vectơ, kí hiệu là $\vec{a} - \vec{b}$, xác định như sau : $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Hai quy tắc sau đây là quan trọng đối với phép trừ vectơ :

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ (O là điểm tuỳ ý).
- $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c} \Leftrightarrow \vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$ (quy tắc chuyển vế).

c) Phép nhân một vectơ với một số thực

Tích của số thực k với vectơ $\vec{a}$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, xác định như sau :

- Nếu $k = 0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$ thì $k\vec{a} = \vec{0}$.
- Nếu $k > 0$ và $\vec{a} \neq \vec{0}$ thì $k\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$ và $|k\vec{a}| = k|\vec{a}|$.
- Nếu $k < 0$ và $\vec{a} \neq \vec{0}$ thì $k\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$ và $|k\vec{a}| = -k|\vec{a}|$.

Từ định nghĩa trên, ta có ngay các hệ quả sau :

- Nếu $k\vec{a} = \vec{0}$ thì $k = 0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$.
- $|k\vec{a}| = |k||\vec{a}|$.

Phép nhân vectơ với số thực có các tính chất cơ bản sau :

- $1\vec{a} = \vec{a}$; $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$.
- $k(l\vec{a}) = (kl)\vec{a}$.
- $(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$.
- $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$; $k(\vec{a} - \vec{b}) = k\vec{a} - k\vec{b}$.

3. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC và điểm M. Chứng minh rằng : M là trung điểm của BC khi và chỉ khi $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

Giải. Ta có : M là trung điểm của BC khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}). \square$$

Ví dụ 2. Nếu M, N theo thứ tự là trung điểm của các đoạn AD, BC thì :

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}).$$

Giải. Chú ý rằng $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$; $\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$, ta có :

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{MN} &= (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}) + (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}) \\ &= (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD}) + (\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CN}) + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}) \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}. \end{aligned}$$

Suy ra : $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$. (1)

Tương tự : $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB})$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB})$. □

Ví dụ 3. Cho tứ giác $ABCD$. Các điểm M, N theo thứ tự thay đổi trên các cạnh AD, CB sao cho $\frac{AM}{AD} = \frac{CN}{CB}$. Tìm quỹ tích trung điểm I của MN.

Giải. (h.1.5) Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AC, BD.

Thuận. Giả sử I thoả mãn điều kiện đề bài.

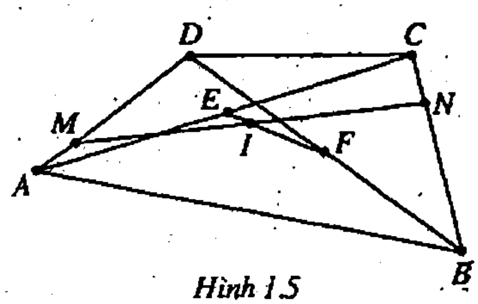
Đặt $\frac{AM}{AD} = \frac{CN}{CB} = k$. Đương nhiên $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CN} = k\overrightarrow{CB}$ (1)

và $0 \le k \le 1$ (2)

Từ (1), với chú ý rằng I, E, F theo thứ tự là trung điểm của MN, AC, BD, theo VD 2, ta có :

$$\overrightarrow{EI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CN})$$

$$= k.\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}) = k\overrightarrow{EF}. \quad (3)$$



Hình 1.5

Từ (2) và (3) suy ra I thuộc đoạn EF.

Đảo. Giả sử I thuộc đoạn EF.

Đặt $\frac{EI}{EF} = k$. Đương nhiên $0 \le k \le 1$ (1) và $\overrightarrow{EI} = k\overrightarrow{EF}$ (2).

Từ (1), dễ thấy tồn tại các điểm M, N theo thứ tự thuộc các đoạn AD, CB sao cho $\dfrac{AM}{AD} = \dfrac{CN}{CB} = k$. Ta có, $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CN} = k\overrightarrow{CB}$ (3).

Từ (2) và (3) suy ra :

$$\begin{cases} \overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{EA} + k\overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{IN} = \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{EC} + k\overrightarrow{CB} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = 2\overrightarrow{IE} + (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EC}) + k(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB})$$

$$= 2\overrightarrow{IE} + \vec{0} + k.2\overrightarrow{EF} = \vec{0}.$$

Điều đó có nghĩa I là trung điểm của đoạn MN.

Kết luận. Quỹ tích điểm I là đoạn EF.

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC và điểm G. Các mệnh đề sau tương đương :

a) G là trọng tâm của tam giác ABC.

b) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

c) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}\ \forall M$.

Giải.

($a \Rightarrow b$) Gọi A' là giao điểm của AG với BC. Ta có : $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GA'} = \vec{0}$ (1).

Mặt khác, vì A' là trung điểm của BC nên theo VD 1 : $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GA'}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

($b \Rightarrow a$) Gọi A', B' theo thứ tự là trung điểm của BC, CA.

Vì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ nên theo VD 1 : $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GA'} = \vec{0}$; $\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GB'} = \vec{0}$.

Suy ra : G thuộc AA' và BB'.

Do đó, G là trọng tâm của tam giác ABC.

($b \Leftrightarrow c$) Ta có :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MG} = \vec{0}\ \forall M$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}\ \forall M. \square$$

Ví dụ 5. Chứng minh rằng các tam giác ABC, $A'B'C'$ có cùng trọng tâm khi và chỉ khi $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.

Giải. Gọi G, G' theo thứ tự là trọng tâm của các tam giác ABC, $A'B'C'$.

Theo VD 4, $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$; $\overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'} = \vec{0}$.

Do đó :

$$3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'G'} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'G'} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'G'}$$

$$= (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) - (\overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'}) + (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'})$$

$$= \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}.$$

Vậy : Các tam giác ABC, $A'B'C'$ có cùng trọng tâm

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GG'} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}. \square$$

Ví dụ 6. Cho M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA của lục giác $ABCDEF$. Chứng minh rằng các tam giác MPR, NQS có cùng trọng tâm.

Giải.

Cách 1. Gọi G là trọng tâm của tam giác MPR.

Theo VD 4, ta có :

$$\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GR} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF}) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{GA}) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GQ} + \overrightarrow{GS} = \vec{0}.$$

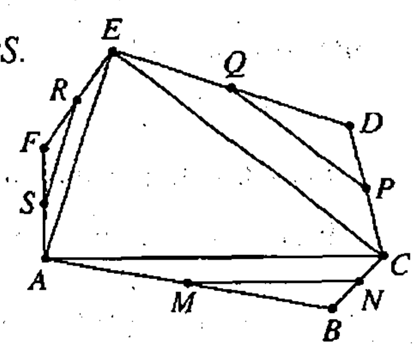
Từ đó, theo VD 4, G là trọng tâm của tam giác NQS.

Vậy, các tam giác MPR, NQS có cùng trọng tâm.

Cách 2. (h.1.6) Ta có :

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EA}$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EA}) = \vec{0}.$$



Hình 1.6

Vậy, theo VD 5, các tam giác MPR, NQS có cùng trọng tâm. $\square$

Ví dụ 7. Với ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bất kì, chứng minh rằng :

a) $|\vec{a} + \vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$.

b) $||\vec{a}| - |\vec{b}|| \le |\vec{a} - \vec{b}|$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$.

Giải.

a) Lấy các điểm A, B, C sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.

Theo định nghĩa phép cộng vectơ : $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$.

Vậy, theo bất đẳng thức tam giác, ta có :

$$|\vec{a} + \vec{b}| = AC \le AB + BC = |\vec{a}| + |\vec{b}|.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow B$ thuộc đoạn $AC \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$.

b) Theo câu a, ta có :

$$\begin{cases} |\vec{a}| = |(\vec{a} - \vec{b}) + \vec{b}| \le |\vec{a} - \vec{b}| + |\vec{b}| \\ |\vec{b}| = |(\vec{b} - \vec{a}) + \vec{a}| \le |\vec{b} - \vec{a}| + |\vec{a}| \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |\vec{a}| - |\vec{b}| \le |\vec{a} - \vec{b}| \\ |\vec{b}| - |\vec{a}| \le |\vec{b} - \vec{a}| \end{cases}$$

$$\Rightarrow ||\vec{a}| - |\vec{b}|| \le |\vec{a} - \vec{b}|.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (\vec{a} - \vec{b}) \uparrow\uparrow \vec{b} \\ (\vec{b} - \vec{a}) \uparrow\uparrow \vec{a} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}\ ; |\vec{a}| \ge |\vec{b}| \\ \vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}\ ; |\vec{b}| \ge |\vec{a}| \end{array}\right. \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$. □

Ví dụ 8. Cho hai đường tròn $(O_1 ; R_1)$, $(O_2 ; R_2)$. Các điểm M_1, M_2 theo thứ tự thay đổi trên $(O_1 ; R_1)$, $(O_2 ; R_2)$. Tìm quỹ tích trung điểm M của M_1M_2.

Giải. (h.1.7)

Thuận. Gọi O là trung điểm của O_1O_2.

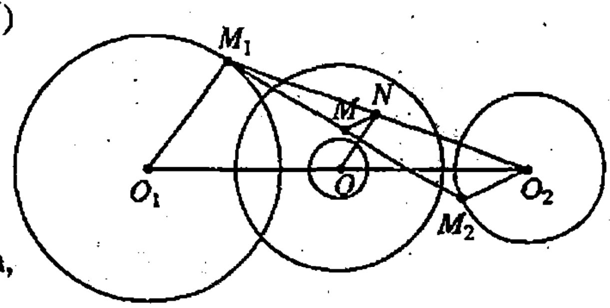
Giả sử M thoả mãn điều kiện đề bài.

Ta có : $\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{O_1M_1} + \overrightarrow{O_2M_2}) = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{O_1M_1} - \overrightarrow{M_2O_2})$.

Từ đó, theo VD 7 : $\dfrac{1}{2}\left(\left|\overrightarrow{O_1M_1}\right| + \left|\overrightarrow{O_2M_2}\right|\right) \ge \left|\overrightarrow{OM}\right| \ge \dfrac{1}{2}\left|\left|\overrightarrow{O_1M_1}\right| - \left|\overrightarrow{M_2O_2}\right|\right|$.

Do đó : $\frac{1}{2}(R_1 + R_2) \geq OM \geq \frac{1}{2}|R_1 - R_2|$.

Suy ra : M thuộc hình vành khăn $(\mathscr{K})$ xác định bởi hai đường tròn $\left(O ; \frac{1}{2}(R_1 + R_2)\right), \left(O ; \frac{1}{2}|R_1 - R_2|\right)$.



Hình 1.7

Đảo. Giả sử M thuộc $(\mathscr{K})$. Đương nhiên, $\frac{1}{2}(R_1 + R_2) \geq OM \geq \frac{1}{2}|R_1 - R_2|$. Do đó, các đường tròn $\left(O ; \frac{1}{2}R_1\right), \left(M ; \frac{1}{2}R_2\right)$ hoặc cắt nhau hoặc tiếp xúc với nhau.

Nếu các đường tròn $\left(O ; \frac{1}{2}R_1\right)$ và $\left(M ; \frac{1}{2}R_2\right)$ cắt nhau thì ta gọi một trong hai giao điểm của chúng là N. Nếu các đường tròn $\left(O ; \frac{1}{2}R_1\right)$ và $\left(M ; \frac{1}{2}R_2\right)$ tiếp xúc với nhau thì ta gọi tiếp điểm của chúng là N.

Trên tia O_2N lấy điểm M_1 sao cho N là trung điểm của của O_2M_1. Trên tia M_1M lấy M_2 sao cho M là trung điểm của M_1M_2. (1)

Vì ON là đường trung bình của tam giác $O_2M_1O_1$ nên $O_1M_1 = 2ON = R_1$ (vì N thuộc $\left(O ; \frac{1}{2}R_1\right)$). Suy ra M_1 thuộc $(O_1 ; R_1)$. (2)

Vì NM là đường trung bình của tam giác $M_1M_2O_2$ nên $O_2M_2 = 2NM = R_2$ (vì N thuộc $\left(M ; \frac{1}{2}R_2\right)$). Suy ra M_2 thuộc $(O_2 ; R_2)$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra M thoả mãn điều kiện đề bài.

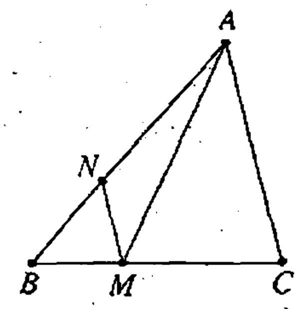
Kết luận. Quỹ tích M là hình vành khăn $(\mathscr{K})$. □

Ví dụ 9. Cho điểm M nằm trên cạnh BC của tam giác ABC. Chứng minh rằng :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{MC}{BC}\overrightarrow{AB} + \frac{MB}{BC}\overrightarrow{AC}.$$

Giải. (h.1.8). Gọi N là điểm trên cạnh AB sao cho $MN \parallel AC$. Ta có :

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NM} = \frac{AN}{AB}\overrightarrow{AB} + \frac{NM}{AC}\overrightarrow{AC}. \qquad (1)$$



Hình 1.8

Mặt khác, theo định lí Thales :

$$\frac{AN}{AB} = \frac{MC}{BC};\ \frac{NM}{AC} = \frac{MB}{BC}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $\overrightarrow{AM} = \dfrac{MC}{BC}\overrightarrow{AB} + \dfrac{MB}{BC}\overrightarrow{AC}$. □

Nhận xét. VD 9 là sự mở rộng của VD 1.

Ví dụ 10. Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC theo thứ tự tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tại D, E, F. Chứng minh rằng :

a) $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

b) $a\overrightarrow{ID} + b\overrightarrow{IE} + c\overrightarrow{IF} = \vec{0}$.

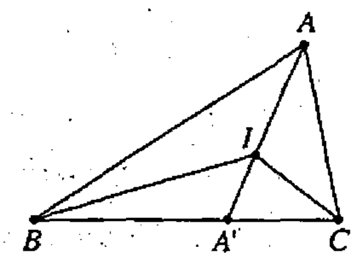
Giải.

a) (h.1.9) Gọi A' là giao điểm của AI và BC.

Theo tính chất của đường phân giác, ta có

$$\frac{A'C}{A'B} = \frac{b}{c}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{A'B}{c} = \frac{A'C}{b} = \frac{A'B + A'C}{b+c} = \frac{a}{b+c}. \qquad (1)$$



Hình 1.9

$$\text{và } \frac{IA'}{IA} = \frac{BA'}{BA} = \frac{\frac{ac}{b+c}}{c} = \frac{a}{b+c}. \qquad (2)$$

Trong tam giác IBC, theo VD 9 : $\overrightarrow{IA'} = \dfrac{A'C}{BC}\overrightarrow{IB} + \dfrac{A'B}{BC}\overrightarrow{IC}$.

Từ đó, chú ý tới (1), ta có : $\overrightarrow{IA'} = \dfrac{b}{b+c}\overrightarrow{IB} + \dfrac{c}{b+c}\overrightarrow{IC}$. (3)

Mặt khác : $\overrightarrow{IA'} = -\dfrac{IA'}{IA}\overrightarrow{IA}$.

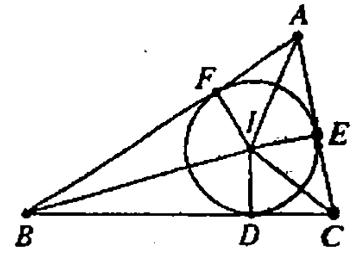
Từ đó, chú ý tới (2), ta có : $\overrightarrow{IA'} = -\dfrac{a}{b+c}\overrightarrow{IA}$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra : $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

b) (h.1.10) Đặt $AE = AF = x$; $BF = BD = y$; $CD = CE = z$.

Đương nhiên : $y + z = a, z + x = b, x + y = c$.

Trong các tam giác IBC, ICA, IAB, theo VD 9, ta có



Hình 1.10

$$\begin{cases} a\overrightarrow{ID} = z\overrightarrow{IB} + y\overrightarrow{IC} \\ b\overrightarrow{IE} = x\overrightarrow{IC} + z\overrightarrow{IA} \\ c\overrightarrow{IF} = y\overrightarrow{IA} + x\overrightarrow{IB} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad a\overrightarrow{ID} + b\overrightarrow{IE} + c\overrightarrow{IF} = (y+z)\overrightarrow{IA} + (z+x)\overrightarrow{IB} + (x+y)\overrightarrow{IC}$$

$$= a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC}.$$

Từ đó, chú ý tới câu a), ta có : $a\overrightarrow{ID} + b\overrightarrow{IE} + c\overrightarrow{IF} = \vec{0}$. □

Ví dụ 11. Cho đa giác lồi $A_1A_2 \ldots A_n$ và các vectơ đơn vị $\overrightarrow{e_i}$ $(1 \le i \le n)$ **theo** thứ tự vuông góc với $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ (xem $A_{n+1} \equiv A_1$), hướng ra phía ngoài đa giác. Chứng minh rằng :

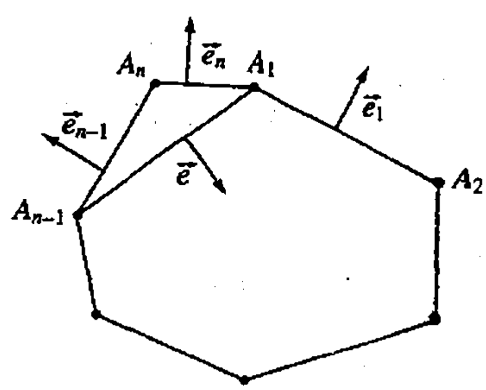
$$A_1A_2\overrightarrow{e_1} + A_2A_3\overrightarrow{e_2} + \ldots + A_nA_1\overrightarrow{e_n} = \vec{0} \text{ (định lí con nhím).}$$

Giải. (h.1.11) Từ câu b) trong VD 10, dễ thấy định lí con nhím đúng đối với tam giác (1).

Giả sử định lí con nhím đúng với $(n-1)$ – giác lồi $(n \ge 4)$ (2).

Dựng vectơ đơn vị $\vec{e}$ vuông góc với A_1A_{n-1}, hướng ra phía ngoài tam giác $A_1A_{n-1}A_n$.

Áp dụng (1), (2) tương ứng cho tam giác $A_1A_{n-1}A_n$ và $(n-1)$ – giác $A_1A_2 \ldots A_{n-1}$, ta có :



Hình 1.11

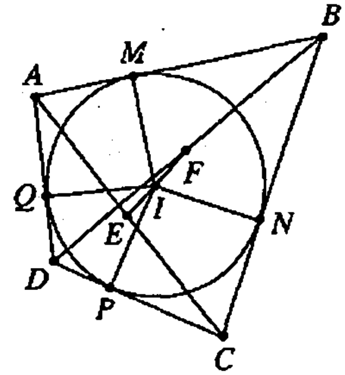
$$\begin{cases} A_{n-1}A_n\overrightarrow{e_{n-1}} + A_nA_1\overrightarrow{e_n} + A_1A_{n-1}\vec{e} = \vec{0} \\ A_1A_2\overrightarrow{e_1} + A_2A_3\overrightarrow{e_2} + \ldots + A_{n-1}A_1(-\vec{e}) = \vec{0}. \end{cases}$$

Suy ra : $A_1A_2\overrightarrow{e_1} + A_2A_3\overrightarrow{e_2} + \ldots + A_{n-1}A_n\overrightarrow{e_{n-1}} + A_nA_1\overrightarrow{e_n} = \vec{0}$.

Điều đó có nghĩa là định lí con nhím đúng với n-giác lồi.

Vậy, theo nguyên lí quy nạp, định lí con nhím đúng với mọi đa giác lồi.

Ví dụ 12. Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I). Hai điểm E, F theo thứ tự là trung điểm của AC, BD. Chứng minh rằng I, E, F cùng thuộc một đường thẳng.



Hình 1.12

Giải. (h.1.12). Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là tiếp điểm của (I) với AB, BC, CD, DA ; x, y, z, t là khoảng cách từ A, B, C, D tới các tiếp điểm tương ứng.

Theo định lí con nhím, ta có :

$$(x+y)\overrightarrow{IM}+(y+z)\overrightarrow{IN}+(z+t)\overrightarrow{IP}+(t+x)\overrightarrow{IQ}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow (y\overrightarrow{IA}+x\overrightarrow{IB})+(z\overrightarrow{IB}+y\overrightarrow{IC})+(t\overrightarrow{IC}+z\overrightarrow{ID})+(x\overrightarrow{ID}+t\overrightarrow{IA})=\vec{0}$$

$$\Rightarrow (y+t)(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC})+(x+z)(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{ID})=\vec{0}$$

$$\Rightarrow (y+t)\overrightarrow{IE}+(x+z)\overrightarrow{IF}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IE}\,//\,\overrightarrow{IF}.$$

Điều đó có nghĩa là I, E, F thẳng hàng. □

Ví dụ 13. Về phía ngoài tam giác ABC, ta dựng các tam giác đồng dạng XBC, YCA, ZAB. Chứng minh rằng các tam giác ABC, XYZ có cùng trọng tâm.

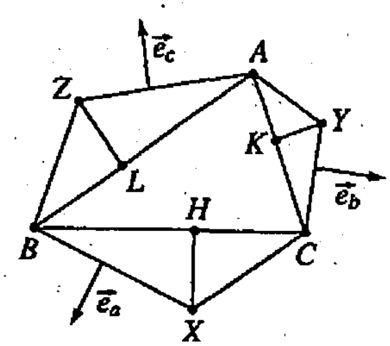
Giải. (h.1.13). Gọi H, K, L theo thứ tự là hình chiếu của X, Y, Z trên BC, CA, AB.

Gọi $\overrightarrow{e_a}$, $\overrightarrow{e_b}$, $\overrightarrow{e_c}$ là các vectơ đơn vị, hướng ra ngoài tam giác ABC và theo thứ tự vuông góc với BC, CA, AB.

Vì các tam giác XBC, YCA, ZAB đồng dạng nên :

$$\frac{BH}{BC}=\frac{CK}{CA}=\frac{AL}{AB}=m\ ; \qquad (1)$$

$$\frac{XH}{BC}=\frac{YK}{CA}=\frac{ZL}{AB}=n. \qquad (2)$$



Hình 1.13

Từ (1) và (2), ta có :

$$\overrightarrow{BX}+\overrightarrow{CY}+\overrightarrow{AZ}$$

$$=\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HX}+\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{KY}+\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{LZ}$$

$$=(\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{AL})+(\overrightarrow{HX}+\overrightarrow{KY}+\overrightarrow{LZ})$$

$$=m(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})+n(BC\overrightarrow{e_a}+CA\overrightarrow{e_b}+AB\overrightarrow{e_c})$$

$$=n(BC\overrightarrow{e_a}+CA\overrightarrow{e_b}+AB\overrightarrow{e_c}).$$

Từ đó, theo định lí con nhím, $\overrightarrow{BX} + \overrightarrow{CY} + \overrightarrow{AZ} = \vec{0}$.

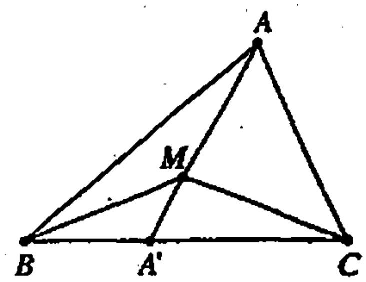
Vậy, theo VD 5, các tam giác ABC, XYZ có cùng trọng tâm. □

Ví dụ 14. Cho tam giác ABC và điểm M nằm trong tam giác. Gọi S_a, S_b, S_c theo thứ tự là diện tích các tam giác MBC, MCA, MAB. Chứng minh rằng :

$$S_a\overrightarrow{MA} + S_b\overrightarrow{MB} + S_c\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

Giải. (h.1.14)

Gọi A' là giao điểm của các đường thẳng AM, BC.



Hình 1.14

Trong tam giác MBC, theo VD 9 :

$$\overrightarrow{MA'} = \frac{A'C}{BC}\overrightarrow{MB} + \frac{A'B}{BC}\overrightarrow{MC}.$$

Chú ý rằng : $\dfrac{A'C}{A'B} = \dfrac{S_{MA'C}}{S_{MA'B}} = \dfrac{S_{MAC}}{S_{MAB}} = \dfrac{S_b}{S_c}$,

ta có : $\dfrac{A'C}{BC} = \dfrac{S_b}{S_b + S_c}$; $\dfrac{A'B}{BC} = \dfrac{S_c}{S_b + S_c}$.

Suy ra : $$\overrightarrow{MA'} = \frac{S_b}{S_b + S_c}\overrightarrow{MB} + \frac{S_c}{S_b + S_c}\overrightarrow{MC}. \quad (1)$$

Lại chú ý rằng : $\dfrac{MA'}{MA} = \dfrac{S_{MA'B}}{S_{MAB}} = \dfrac{S_{MA'C}}{S_{MAC}} = \dfrac{S_{MA'B} + S_{MA'C}}{S_{MAB} + S_{MAC}} = \dfrac{S_a}{S_b + S_c}$

và $\overrightarrow{MA'} \uparrow\downarrow \overrightarrow{MA}$, ta có :

$$\overrightarrow{MA'} = \frac{-S_a}{S_b + S_c}\overrightarrow{MA}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $S_a\overrightarrow{MA} + S_b\overrightarrow{MB} + S_c\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Nhận xét.

1. Cho M trùng với trọng tâm G hoặc tâm đường tròn nội tiếp I của tam giác ABC, ta nhận lại được các kết quả quen thuộc :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0};\ a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}.$$

2. Nếu M nằm ngoài tam giác ABC, ta có kết quả tương tự :

$-S_a\overrightarrow{MA} + S_b\overrightarrow{MB} + S_c\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ (khi M thuộc góc $\widehat{BAC}$ và góc đối đỉnh của nó).

$S_a\overrightarrow{MA} - S_b\overrightarrow{MB} + S_c\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ (khi M thuộc góc $\widehat{CBA}$ và góc đối đỉnh của nó).

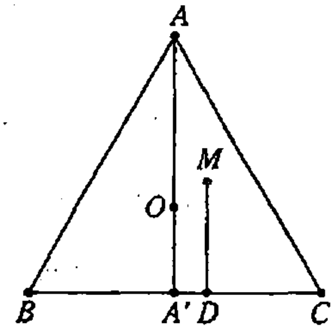
$S_a\overrightarrow{MA} + S_b\overrightarrow{MB} - S_c\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ (khi M thuộc góc $\widehat{ACB}$ và góc đối đỉnh của nó).

Ví dụ 15. Cho tam giác đều ABC tâm O. M là điểm bất kì trong tam giác. D, E, F lần lượt là hình chiếu của M trên BC, CA, AB. Chứng minh rằng :

$$\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}.$$

Giải.

Cách 1. (h.1.15). Gọi S, S_a, S_b, S_c tương ứng là diện tích các tam giác ABC, MBC, MCA, MAB. Gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu của A, B, C trên BC, CA, AB.



Hình 1.15

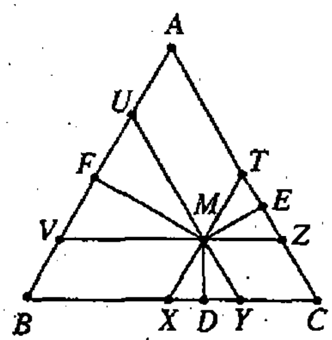
Ta có : $\overrightarrow{MD} = \dfrac{MD}{AA'}\overrightarrow{AA'} = \dfrac{S_a}{S}\overrightarrow{AA'} = \dfrac{3}{2}\dfrac{S_a}{S}\overrightarrow{AO}$.

Tương tự : $\overrightarrow{ME} = \dfrac{3}{2}\dfrac{S_b}{S}\overrightarrow{BO}$; $\overrightarrow{MF} = \dfrac{3}{2}\dfrac{S_c}{S}\overrightarrow{CO}$.

Từ đó, với chú ý rằng $S_a + S_b + S_c = S$; $S_a\overrightarrow{MA} + S_b\overrightarrow{MB} + S_c\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ (VD 14), ta có :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} &= \frac{3}{2S}(S_a\overrightarrow{AO} + S_b\overrightarrow{BO} + S_c\overrightarrow{CO})\\ &= \frac{3}{2S}(S_a(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MA}) + S_b(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MB}) + S_c(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MC}))\\ &= \frac{3}{2S}(S_a + S_b + S_c)\overrightarrow{MO} - \frac{3}{2S}(S_a\overrightarrow{MA} + S_b\overrightarrow{MB} + S_c\overrightarrow{MC})\\ &= \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}.\end{aligned}$$

Cách 2. (h.1.16). Qua M, kẻ các đường thẳng lần lượt song song với BC, CA, AB. Chúng tương ứng cắt các cặp đường thẳng AB, AC ; BC, BA ; CA, CB tại V, Z ; Y, U ; T, X.



Hình 1.16

Dễ thấy $MTAU$, $MVBX$, $MYCZ$ là các hình bình hành và các điểm D, E, F tương ứng là trung điểm của XY, ZT, UV.

Vậy, theo quy tắc hình bình hành và theo VD 1, ta có :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{MX} + \overrightarrow{MY}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{MZ} + \overrightarrow{MT}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{MU} + \overrightarrow{MV})\\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{MT} + \overrightarrow{MU}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{MV} + \overrightarrow{MX}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{MY} + \overrightarrow{MZ})\\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}. \square\end{aligned}$$

Ví dụ 16. Cho các điểm M, N theo thứ tự thuộc đoạn AD, BC sao cho $\dfrac{MA}{MD} = \dfrac{NB}{NC} = \dfrac{x}{y}$. Chứng minh rằng : $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{x+y}(y\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{DC})$.

Giải.

$$(x+y)\overrightarrow{MN} = x\overrightarrow{MN} + y\overrightarrow{MN}$$
$$= y(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}) + x(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN})$$
$$= (y\overrightarrow{MA} + x\overrightarrow{MD}) - (y\overrightarrow{NB} + x\overrightarrow{NC}) + (y\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{DC}). \quad (1)$$

Mặt khác, từ giả thiết dễ thấy : $y\overrightarrow{MA} + x\overrightarrow{MD} = \vec{0}$; $y\overrightarrow{NB} + x\overrightarrow{NC} = \vec{0}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{x+y}(y\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{DC})$. □

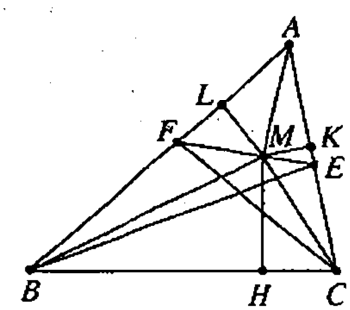
Nhận xét. VD 16 là sự mở rộng của VD 2.

Ví dụ 17. Cho tam giác ABC. Điểm M nằm trong tam giác. H, K, L tương ứng là hình chiếu của M trên BC, CA, AB. Tìm quỹ tích các điểm M sao cho $MH = MK + ML$.

Giải. Gọi BE; CF là các đường phân giác kẻ từ B, C của tam giác ABC.

Thuận. (h.1.17). Giả sử M thoả mãn điều kiện đề bài. Gọi S_a, S_b, S_c tương ứng là diện tích của các tam giác MBC, MCA, MAB. Theo VD 14, ta có :

$$S_a\overrightarrow{MA} + S_b\overrightarrow{MB} + S_c\overrightarrow{MC} = \vec{0}. \quad (1)$$



Hình 1.17

Đặt $BC = a$, $CA = b$; $AB = c$.

Vì $MH = MK + ML$ nên $\dfrac{S_a}{a} = \dfrac{S_b}{b} + \dfrac{S_c}{c}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra :

$$\left(\frac{aS_b}{b} + \frac{aS_c}{c}\right)\overrightarrow{MA} + S_b\overrightarrow{MB} + S_c\overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \frac{S_b}{b}(a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB}) + \frac{S_c}{c}(a\overrightarrow{MA} + c\overrightarrow{MC}) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \frac{S_b}{b}(a+b)\overrightarrow{MF} + \frac{S_b}{b}(a\overrightarrow{FA} + b\overrightarrow{FB}) + \frac{S_c}{c}(a+c)\overrightarrow{ME} + \frac{S_c}{c}(a\overrightarrow{EA} + c\overrightarrow{EC}) = \vec{0} \quad (3)$$

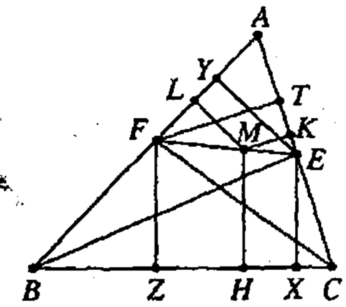
Mặt khác, theo tính chất của đường phân giác : $\dfrac{FA}{FB} = \dfrac{b}{a}$; $\dfrac{EA}{EC} = \dfrac{c}{a}$.

Suy ra : $a\overrightarrow{FA} + b\overrightarrow{FB} = \vec{0}$; $a\overrightarrow{EA} + c\overrightarrow{EC} = \vec{0}$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra : $\frac{S_b}{b}(a+b)\overrightarrow{MF} + \frac{S_c}{c}(a+c)\overrightarrow{ME} = \vec{0}$.

Từ đó, với chú ý rằng $\frac{S_b}{b}(a+b) > 0$; $\frac{S_c}{c}(a+c) > 0$, ta có : M thuộc đoạn EF.

Đảo. (h.1.18). Giả sử M thuộc đoạn EF. Gọi X, Y theo thứ tự là hình chiếu của E trên BC, BA ; Z, T theo thứ tự là hình chiếu của F trên CB, CA.



Hình 1.18

Dễ thấy : $EX = EY$; $FZ = FT$ (5).

Theo định lí Thales,

$$\frac{ME}{MF} = \frac{HX}{HZ};\ \frac{ME}{MF} = \frac{KE}{KT};\ \frac{ME}{MF} = \frac{LY}{LF}.$$

Đặt $\frac{ME}{MF} = \frac{HX}{HZ} = \frac{KE}{KT} = \frac{LY}{LF} = \frac{x}{y}$ $(x, y > 0)$, theo VD 16, ta có :

$$\overrightarrow{MH} = \frac{1}{x+y}(y\overrightarrow{EX} + x\overrightarrow{FZ});\ \overrightarrow{MK} = \frac{x}{x+y}\overrightarrow{FT};\ \overrightarrow{ML} = \frac{y}{x+y}\overrightarrow{EY}$$

$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{MH}\right| = \left|\frac{1}{x+y}(y\overrightarrow{EX} + x\overrightarrow{FZ})\right|;\ \left|\overrightarrow{MK}\right| = \left|\frac{x}{x+y}\overrightarrow{FT}\right|;\ \left|\overrightarrow{ML}\right| = \left|\frac{y}{x+y}\overrightarrow{EY}\right|.$$

Từ đó, với chú ý rằng $EX \uparrow\uparrow FZ$, ta có :

$$MH = \frac{1}{x+y}(yEX + xFZ);\ MK = \frac{x}{x+y}FT;\ ML = \frac{y}{x+y}EY. \quad (6)$$

Từ (5) và (6) suy ra : $MH = MK + ML$.

Kết luận. Quỹ tích các điểm M thoả mãn điều kiện đề bài là đoạn EF. □

Ví dụ 18. Cho hai điểm A, B phân biệt và hai số α, β thoả mãn điều kiện $\alpha + \beta \neq 0$. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất điểm M sao cho $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

Giải. Ta có :

$$\begin{aligned} \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \vec{0} &\Leftrightarrow -\alpha\overrightarrow{AM} + \beta(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}) = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow (\alpha+\beta)\overrightarrow{AM} = \beta\overrightarrow{AB} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}. \end{aligned}$$

Đẳng thức trên chứng tỏ sự tồn tại duy nhất của điểm M. □

Nhận xét. Khi $\alpha + \beta = 0$, không tồn tại điểm M sao cho $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

Ví dụ 19. Cho tam giác ABC và ba số α, β, γ thoả mãn điều kiện $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất điểm M sao cho

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

Giải.

Cách 1. Vì $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ nên $(\alpha + \beta) + (\beta + \gamma) + (\gamma + \alpha) \neq 0$. Do đó, một trong ba số $(\alpha + \beta), (\beta + \gamma), (\gamma + \alpha)$ khác không.

Không mất tính tổng quát giả sử, $\alpha + \beta \neq 0$. Theo VD 18, tồn tại duy nhất điểm E sao cho : $\alpha\overrightarrow{EA} + \beta\overrightarrow{EB}$.

Vậy, ta có :

$$\begin{aligned}\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \vec{0} &\Leftrightarrow \alpha(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EA}) + \beta(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EB}) + \gamma\overrightarrow{MC} = \vec{0}\\ &\Leftrightarrow (\alpha + \beta)\overrightarrow{ME} + (\alpha\overrightarrow{EA} + \beta\overrightarrow{EB}) + \gamma\overrightarrow{MC} = \vec{0}\\ &\Leftrightarrow (\alpha + \beta)\overrightarrow{ME} + \gamma\overrightarrow{MC} = \vec{0}.\end{aligned}$$

Vì $(\alpha + \beta) + \gamma \neq 0$ nên theo VD 18, tồn tại duy nhất điểm M thoả mãn đẳng thức $(\alpha + \beta)\overrightarrow{ME} + \gamma\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Điều đó có nghĩa là tồn tại duy nhất điểm M sao cho :

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

Cách 2. Lấy điểm O bất kì (nhưng đã xác định).

Chú ý rằng $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, ta có :

$$\begin{aligned}&\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \vec{0}\\ \Leftrightarrow\ &\alpha(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM}) + \beta(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}) + \gamma(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM}) = \vec{0}\\ \Leftrightarrow\ &(\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}\\ \Leftrightarrow\ &\overrightarrow{OM} = \frac{1}{\alpha + \beta + \gamma}(\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}).\end{aligned}$$

Đẳng thức trên chứng tỏ sự tồn tại và duy nhất của điểm M. □

Nhận xét.

1. Khi $\alpha + \beta + \gamma = 0$, không tồn tại điểm M sao cho

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

2. Trong khá nhiều trường hợp, lời giải 1 cho ta cách xác định điểm M rất hiệu quả.

3. Với các điểm $A_1, A_2,..., A_n$ và các số $\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_n$ thoả mãn điều kiện $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \neq 0$, ta có kết quả tổng quát sau :

Tồn tại duy nhất điểm M sao cho : $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i} = \vec{0}$.

Điểm M xác định như trên được gọi là *tâm tỉ cự của hệ điểm* $\{A_1, A_2,..., A_n\}$ với các hệ số tương ứng là $\{\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_n\}$.

Khi $\alpha_1 = \alpha_2 =...=\alpha_n$, thay cho cách nói "$M$ là tâm tỉ cự của hệ điểm $\{A_1, A_2,..., A_n\}$ với các hệ số tương ứng là $\{\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_n\}$", ta nói "$M$ là *trọng tâm của hệ điểm* $\{A_1, A_2,..., A_n\}$".

Nếu M là tâm tỉ cự của hệ điểm $\{A_1, A_2,..., A_n\}$ với các hệ số tương ứng là $\{\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_n\}$ thì :

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{OA_i} = (\sum_{i=1}^{n}\alpha_i)\overrightarrow{OM} \text{ với mọi điểm } O.$$

Đẳng thức trên được gọi là "công thức thu gọn", thường xuyên được sử dụng trong các bài toán liên quan tới tâm tỉ cự.

Khi $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 0$, hoặc không tồn tại điểm M sao cho $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i} = \vec{0}$, hoặc với mọi điểm M ta đều có $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i} = \vec{0}$. □

Ví dụ 20. Cho tam giác ABC, trọng tâm G và điểm M. Gọi A', B', C' theo thứ tự là điểm đối xứng với M qua trung điểm của các đoạn BC, CA, AB. Chứng minh rằng :

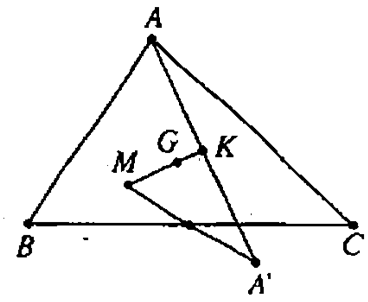
a) AA', BB', CC' đồng quy tại trung điểm của mỗi đoạn.

b) Điểm đồng quy nói trong câu a) thuộc MG.

Giải. (h.1.19)

a) Dễ thấy A', B', C' lần lượt là tâm tỉ cự của các hệ điểm $\{B, C, M\}$; $\{C, A, M\}$; $\{A, B, M\}$ với các hệ số tương ứng là $\{1, 1, -1\}$.

Gọi K là tâm tỉ cự của hệ điểm $\{A, B, C, M\}$ với các hệ số tương ứng là $\{1, 1, 1, -1\}$.



Hình 1.19

Từ đẳng thức $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}-\overrightarrow{KM}=\vec{0}$, chú ý rằng $\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{A'C}-\overrightarrow{A'M}=\vec{0}$, theo công thức thu gọn, ta có : $\overrightarrow{KA} + (1 + 1 - 1)\overrightarrow{KA'} = \vec{0}$.

Suy ra : $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KA'} = \vec{0}$.

Nói cách khác : K là trung điểm của AA'.

Tương tự : K là trung điểm của các đoạn BB', CC'.

Như vậy : AA', BB', CC' đồng quy tại trung điểm mỗi đoạn (điểm K).

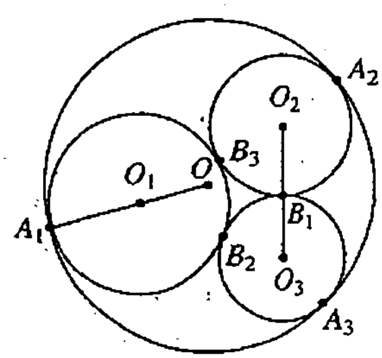
b) Từ đẳng thức $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} - \overrightarrow{KM} = \vec{0}$, chú ý rằng $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, theo công thức thu gọn, ta có : $(1 + 1 + 1)\overrightarrow{KG} - \overrightarrow{KM} = \vec{0}$.

Suy ra $3\overrightarrow{KG} - \overrightarrow{KM} = \vec{0}$.

Do đó K thuộc MG. □

Ví dụ 21. Cho đường tròn (O) và các đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) cùng tiếp xúc trong với (O) và đôi một tiếp xúc ngoài với nhau. Các điểm A_1, A_2, A_3 theo thứ tự là tiếp điểm của (O) với (O_1), (O_2), (O_3). Các điểm B_1, B_2, B_3 theo thứ tự là tiếp điểm của các cặp đường tròn (O_2), (O_3) ; (O_3), (O_1) ; (O_1), (O_2). Chứng minh rằng : A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 đồng quy.

Giải. (h.1.20)



Hình 1.20

Gọi R, R_1, R_2, R_3 theo thứ tự là bán kính của các đường tròn (O), (O_1), (O_2), (O_3).

Vì $R > R_1, R > R_2, R > R_3$ nên

$$-\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\neq 0.$$

Gọi K là tâm tỉ cự của hệ điểm $\{O, O_1, O_2, O_3\}$ với các hệ số tương ứng là $\left\{-\frac{1}{R}, \frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}, \frac{1}{R_3}\right\}$. (1)

Dễ thấy : $\begin{cases} -A_1O_1\overrightarrow{A_1O} + A_1O\overrightarrow{A_1O_1} = \vec{0} \\ B_1O_3\overrightarrow{B_1O_2} + B_1O_2\overrightarrow{B_1O_3} = \vec{0}. \end{cases}$

Suy ra : $\begin{cases} -R_1\overrightarrow{A_1O} + R\overrightarrow{A_1O_1} = \vec{0} \\ R_3\overrightarrow{B_1O_2} + R_2\overrightarrow{B_1O_3} = \vec{0}. \end{cases}$

Do đó : $\begin{cases} -\dfrac{1}{R}\overrightarrow{A_1O} + \dfrac{1}{R_1}\overrightarrow{A_1O_1} = \vec{0} \\ \dfrac{1}{R_2}\overrightarrow{B_1O_2} + \dfrac{1}{R_3}\overrightarrow{B_1O_3} = \vec{0}. \end{cases}$ (2)

Từ (1) suy ra : $-\dfrac{1}{R}\overrightarrow{KO} + \dfrac{1}{R_1}\overrightarrow{KO_1} + \dfrac{1}{R_2}\overrightarrow{KO_2} + \dfrac{1}{R_3}\overrightarrow{KO_3} = \vec{0}$.

Từ đó, chú ý tới (2), theo công thức thu gọn, ta có :

$$\left(-\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right)\overrightarrow{KA_1} + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)\overrightarrow{KB_1} = \vec{0}.$$

Vậy K thuộc A_1B_1.

Tương tự, K thuộc A_2B_2, A_3B_3.

Như vậy, A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 đồng quy (tại K). □

BÀI TẬP

1. Cho ngũ giác $ABCDE$. Các điểm M, N, P, Q, R, S theo thứ tự là trung điểm của các đoạn EA, AB, BC, CD, MP, NQ. Chứng minh rằng, $RS \parallel ED$ và $RS = \dfrac{1}{4}ED$.

2. Cho góc $\widehat{xOy}$. Các đoạn AB, CD có độ dài bằng nhau và theo thứ tự thuộc các tia Ox, Oy. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AC, BD. Chứng minh rằng IJ hoặc cùng phương hoặc vuông góc với phân giác của $\widehat{xOy}$.

3. Cho tứ giác $ABCD$ có $AD = BC$. Về phía ngoài tứ giác, ta dựng các tam giác bằng nhau ADE, BCF. Chứng minh rằng trung điểm của các đoạn AB, CD, EF cùng thuộc một đường thẳng.

4. Cho hai tam giác ABC, $A_1B_1C_1$. Gọi A_2, B_2, C_2 theo thứ tự là trọng tâm các tam giác A_1BC, B_1CA, C_1AB. G, G_1, G_2 theo thứ tự là trọng tâm các tam giác ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$. Chứng minh rằng G, G_1, G_2 thẳng hàng.

5. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi X, Y, Z, T theo thứ tự là trọng tâm các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC. Chứng minh rằng AX, BY, CZ, DT đồng quy tại một điểm và điểm đó chia mỗi đoạn theo cùng một tỉ số.

6. Cho tam giác ABC không cân. Các điểm M, N chạy trên đường gấp khúc khép kín $ABCA$ và chia đường gấp khúc này thành hai phần có độ dài bằng nhau. Tìm quỹ tích trung điểm I của MN.

7. Cho tứ giác $ABCD$ không phải là hình thang. Các điểm M, N, P, Q theo thứ tự thay đổi trên các cạnh AB, BC, CD, DA sao cho $MNPQ$ là hình bình hành. Tìm quỹ tích giao điểm I của MP, NQ.

8. Cho lục giác $ABCDEF$. Các điểm M, N, P, Q, R, S theo thứ tự thay đổi trên các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA sao cho :
$$\frac{AM}{AB} = \frac{BN}{BC} = \frac{CP}{CD} = \frac{DQ}{DE} = \frac{ER}{EF} = \frac{FS}{FA}.$$
Chứng minh rằng trọng tâm của các tam giác MPR, NQS luôn đối xứng với nhau qua một điểm cố định.

9. Cho tam giác ABC và điểm O nằm trong tam giác. Gọi A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là hình chiếu của O trên BC, CA, AB. Trên các tia OA_1, OB_1, OC_1 theo thứ tự lấy các điểm A_2, B_2, C_2 sao cho : $OA_2 = BC$; $OB_2 = CA$; $OC_2 = AB$. Chứng minh rằng O là trọng tâm của tam giác $A_2B_2C_2$.

10. Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 60°$ và I là tâm đường tròn nội tiếp. Trên các tia BA, CA theo thứ tự lấy các điểm E, F sao cho $BE = CF = BC$. Chứng minh rằng I, E, F thẳng hàng.

11. Cho tam giác ABC không đều. BC là cạnh nhỏ nhất. Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác theo thứ tự tiếp xúc với BC, CA, AB tại X, Y, Z. Gọi G là trọng tâm tam giác XYZ. Trên các tia BA, CA theo thứ tự lấy các điểm E, F sao cho $BE = CF = BC$. Chứng minh rằng $IG \perp EF$.

12. Cho lục giác $ABCDEF$ nội tiếp đường tròn $(O ; R)$ và $AB = CD = EF$. Về phía ngoài lục giác, ta dựng các tam giác đồng dạng MAB, NBC, PCD, QDE, REF, SFA theo thứ tự cân tại M, N, P, Q, R, S. Gọi O_1, O_2 theo thứ tự là trọng tâm các tam giác MPR, NQS. Chứng minh rằng : O, O_1, O_2 thẳng hàng.

13. Cho tam giác ABC và điểm M nằm trong tam giác. Chứng minh rằng :
$$MA + MB + MC + \min\{MA, MB, MC\} < BC + CA + AB.$$

14. Cho hai tam giác A_1BC, A_2BC. Gọi I_1, I_2 theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp của chúng. Chứng minh rằng : $I_1I_2 \leq A_1A_2$.

15. Cho đa giác lồi $A_1A_2 \ldots A_n$ và điểm M nằm trong đa giác. Đặt α_i bằng tổng các khoảng cách từ A_i đến các đỉnh của đa giác. Chứng minh rằng :

$$\sum_{1 \leq i \leq n} MA_i \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{\alpha_i\}.$$

16. Cho tam giác đều ABC và điểm M nằm trong tam giác. Các điểm A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là điểm đối xứng với M qua BC, CA, AB. Chứng minh rằng các tam giác ABC, $A_1B_1C_1$ có cùng trọng tâm.

17. Cho tứ giác $ABCD$ và các điểm M, N, P, Q ; các số khác không m, n, p, q thoả mãn điều kiện :

$$m\overrightarrow{MA} + n\overrightarrow{MB} = m\overrightarrow{ND} + n\overrightarrow{NC} = p\overrightarrow{PA} + q\overrightarrow{PD} = p\overrightarrow{QB} + q\overrightarrow{QC} = \vec{0}.$$

Giả sử MN và PQ giao nhau tại I. Chứng minh rằng :

$$p\overrightarrow{IM} + q\overrightarrow{IN} = m\overrightarrow{IP} + n\overrightarrow{IQ} = \vec{0}.$$

18. Cho tứ giác $ABCD$ và các cặp điểm M, N ; P, Q ; R, S ; U, V theo thứ tự thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA của tứ giác sao cho : $AM = MN = NB$; $BP = PQ = QC$; $CR = RS = SD$; $DU = UV = VA$. VP theo thứ tự cắt MS, NR tại X, Y. QU theo thứ tự cắt NR, MS tại Z, T. Chứng minh rằng diện tích tứ giác $XYZT$ bằng $\frac{1}{9}$ diện tích tứ giác $ABCD$.

19. Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC theo thứ tự tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tại X, Y, Z. Đặt $M = BY \cap XZ$; $N = CZ \cap XY$. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của MY, NZ. Chứng minh rằng AI, YF, ZE đồng quy.

20. Cho tam giác ABC và điểm M nằm trong tam giác. Các đường thẳng AM, BM, CM theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1. Gọi X, Y, Z, X_1, Y_1, Z_1 theo thứ tự là trung điểm của BC, CA, AB, B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1. Chứng minh rằng : XX_1, YY_1, ZZ_1 đồng quy.

21. Cho tam giác ABC và các đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) nằm trong tam giác, đôi một tiếp xúc ngoài với nhau, theo thứ tự tiếp xúc với hai cạnh của các góc $\widehat{BAC}$, $\widehat{CBA}$, $\widehat{ACB}$. Gọi T_1, T_2, T_3 theo thứ tự là tiếp điểm của các cặp đường tròn (O_2), (O_3) ; (O_3), (O_1) ; (O_1), (O_2). Chứng minh rằng : AT_1, BT_2, CT_3 đồng quy.

§2. SỰ BIỂU THỊ VECTƠ. PHÉP CHIẾU VECTƠ

I. Các định lí cơ bản về sự biểu thị vectơ

a) Định lí thứ nhất

Trong §1, ta đã định nghĩa hai vectơ cùng phương, cùng hướng, ngược hướng. Bây giờ, ta hãy xem xét kĩ hơn vấn đề này để thấy rõ hơn những ứng dụng quan trong của nó.

Định lí 1. Cho vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$, vectơ $\vec{b}$ tuỳ ý. Khi đó :

$$\vec{b} // \vec{a} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \vec{b} = k\vec{a}.$$

Số k xác định như trên là duy nhất.

Chứng minh. Giả sử $\vec{b} = k\vec{a}$. Theo định nghĩa phép nhân số thực với vectơ, ta có $\vec{b} // \vec{a}$.

Ngược lại, giả sử $\vec{b} // \vec{a}$. Có ba khả năng cần xem xét :

Khả năng 1. $\vec{b} = \vec{0}$. Chọn $k = 0$.

Khả năng 2. $\vec{b} \neq \vec{0}$ và $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$. Chọn $k = \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$.

Khả năng 3. $\vec{b} \neq \vec{0}$ và $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$. Chọn $k = -\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$.

Với cách chọn k như trên, dễ thấy trong cả ba khả năng, ta đều có : $\vec{b} = k\vec{a}$.

Giả sử k' là số thực thoả mãn điều kiện $\vec{b} = k'\vec{a}$.

Ta có : $(k' - k)\vec{a} = k'\vec{a} - k\vec{a} = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow k' - k = 0 \Rightarrow k' = k$.

Vậy số k nói trong định lí là duy nhất. □

Hệ quả 1. Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ tuỳ ý. Khi đó :

$\vec{b} // \vec{a} \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, không đồng thời bằng 0 sao cho : $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$.

Hệ quả 2. Nếu hai vectơ khác không $\vec{a}, \vec{b}$ thoả mãn các điều kiện :

$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$; $\alpha'\vec{a} + \beta'\vec{b} = \vec{0}$ thì $\exists k \in \mathbb{R} : \alpha = k\alpha'$; $\beta = k\beta'$.

Hệ quả 3. Cho ba điểm A, B, C đôi một phân biệt. Khi đó :

A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

Cụ thể hơn :

A hoặc thuộc tia đối của tia BC hoặc thuộc tia đối của tia CB

$$\Leftrightarrow \exists k > 0 : \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} ;$$

A thuộc đoạn $BC \Leftrightarrow \exists k < 0 : \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

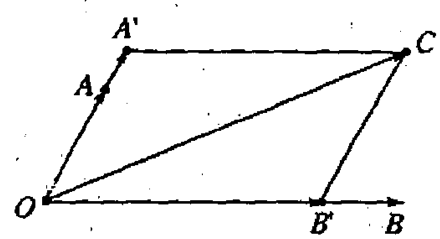
b) Định lí thứ hai

Với hai vectơ không cùng phương, định lí sau đây rất quan trọng.

Định lí 2. Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương và vectơ $\vec{c}$ bất kì. Khi đó : tồn tại duy nhất cặp số thực (m, n) sao cho : $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

Chứng minh. (h.1.21)

Từ điểm O nào đó, dựng các vectơ : $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$; $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Vì $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương nên các đường thẳng OA, OB không trùng nhau. Qua C, vẽ các đường thẳng song song với OA, OB. Các đường thẳng này theo thứ tự cắt các đường thẳng OB, OA tại B', A'.



Hình 1.21

Theo quy tắc hình bình hành : $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}$.

Mặt khác, vì $\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB'}$ theo thứ tự cùng phương với $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ nên theo định lí 1, tồn tại các số m, n sao cho : $\overrightarrow{OA'} = m\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OB'} = n\overrightarrow{OB}$.

Vậy $\overrightarrow{OC} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$.

Điều đó có nghĩa là : $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

Giả sử m', n' là các số thực thoả mãn điều kiện $\vec{c} = m'\vec{a} + n'\vec{b}$.

Ta có : $m'\vec{a} + n'\vec{b} = m\vec{a} + n\vec{b} \Rightarrow (m - m')\vec{a} + (n - n')\vec{b} = \vec{0}$.

Nếu trong hai số $m - m'$, $n - n'$ có một số khác 0, giả sử $m - m' \neq 0$ thì $\vec{a} = -\dfrac{n - n'}{m - m'}\vec{b}$. Theo định lí 1, $\vec{b} // \vec{a}$. Mâu thuẫn !

Vậy, cả hai số $m - m'$, $n - n'$ cùng bằng 0. Nói cách khác : $m = m'$; $n = n'$.

Tóm lại, hai số m, n xác định như trên là duy nhất. □

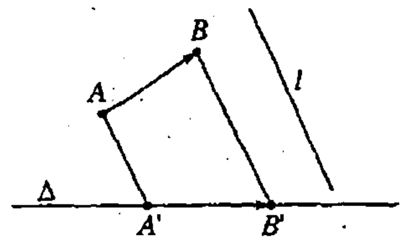
Hệ quả 1. Nếu hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương và thoả mãn điều kiện $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{0}$ thì $m = n = 0$.

Hệ quả 2. Nếu ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đôi một không cùng phương và thoả mãn các điều kiện : $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$; $\alpha'\vec{a} + \beta'\vec{b} + \gamma'\vec{c} = \vec{0}$ thì

$$\exists k \in \mathbb{R} : \alpha = k\alpha' ; \beta = k\beta' ; \gamma = k\gamma'.$$

2. Phép chiếu vectơ

a) Định nghĩa



Hình 1.22

Cho đường thẳng Δ và đường thẳng l không song song với Δ. Gọi V là tập hợp các vectơ trên mặt phẳng : $V(\Delta)$ là tập hợp các vectơ có giá hoặc song song hoặc trùng với Δ. Phép chiếu vectơ theo phương l xuống Δ là một ánh xạ, kí hiệu là $\mathrm{Ch}_l(\Delta)$, đi từ V tới $V(\Delta)$, xác định như sau : $\mathrm{Ch}_l(\Delta)(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'}$, trong đó : $\overrightarrow{AA'} // \overrightarrow{BB'} // l$ (h.1.22).

Vectơ $\overrightarrow{A'B'}$ được gọi là hình chiếu của vectơ $\overrightarrow{AB}$ qua phép chiếu vectơ theo phương l (phương chiếu) lên đường thẳng Δ (đường thẳng chiếu).

Khi phương chiếu l vuông góc với đường thẳng chiếu Δ, thay cho thuật ngữ "phép chiếu vectơ theo phương l xuống đường thẳng Δ", ta dùng thuật ngữ "phép chiếu vectơ xuống đường thẳng Δ" ; thay cho kí hiệu $\mathrm{Ch}_l\Delta$, ta dùng kí hiệu $\mathrm{Ch}\Delta$.

Từ định nghĩa trên, ta có ngay các hệ quả hiển nhiên sau :

- $\mathrm{Ch}_l\Delta(\vec{0}) = \vec{0}$.
- $\mathrm{Ch}_l\Delta(\vec{a}) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} // l$.
- $\mathrm{Ch}_l\Delta(\vec{a}) = \vec{a} \Leftrightarrow \vec{a} // \Delta$.

b) Tính chất

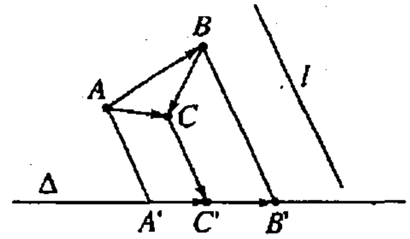
Với mọi vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ ta có :

a) $\mathrm{Ch}_l\Delta(\vec{a} + \vec{b}) = \mathrm{Ch}_l\Delta(\vec{a}) + \mathrm{Ch}_l\Delta(\vec{b})$.

b) $\mathrm{Ch}_l\Delta(k\vec{a}) = k\mathrm{Ch}_l\Delta(\vec{a})$.

Chứng minh.

a) (h.1.23). Lấy điểm A bất kì. Lấy các điểm B, C sao cho : $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$; $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. Lấy các điểm A', B', C' trên Δ sao cho : $\overrightarrow{AA'} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{BB'} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{CC'} \mathbin{/\!/} l$. Ta có :

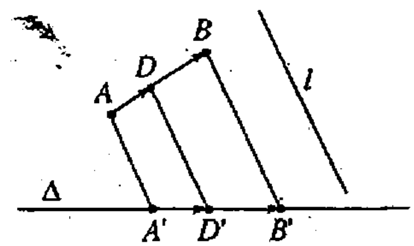


Hình 1.23

$$\mathrm{Ch}_l\Delta(\vec{a}+\vec{b}) = \mathrm{Ch}_l\Delta(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}) = \mathrm{Ch}_l\Delta(\overrightarrow{AC})$$

$$= \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'} = \mathrm{Ch}_l\Delta(\vec{a}) + \mathrm{Ch}_l\Delta(\vec{b}).$$

b) (h.1.24). Lấy điểm A bất kì. Lấy các điểm B, D sao cho : $\overrightarrow{AB}=a$; $\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{AB}=k\vec{a}$. Lấy các điểm A'. B'. D' trên Δ sao cho $\overrightarrow{AA'} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{BB'} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{DD'} \mathbin{/\!/} l$. Theo định lí Thales : $\overrightarrow{A'D'} = k\overrightarrow{A'B'}$. Vậy, ta có :



Hình 1.24

$$\mathrm{Ch}_l\Delta(k\vec{a}) = \mathrm{Ch}_l\Delta(k\overrightarrow{AB}) = \mathrm{Ch}_l\Delta(\overrightarrow{AD})$$

$$= \overrightarrow{A'D'} = k\overrightarrow{A'B'} = k\mathrm{Ch}_l\Delta(\vec{a}). \ \square$$

3. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC và điểm M. Chứng minh rằng M thuộc đường thẳng BC khi và chỉ khi tồn tại các số α, β sao cho :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}. \end{cases}$$

Giải. Ta có : M thuộc đường thẳng BC

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow \exists k : \overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{BC}$ (theo định lí 2.1)

$\Leftrightarrow \exists k : \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = k(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$.

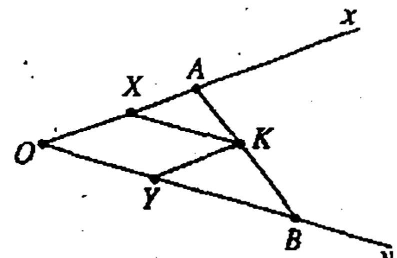
$\Leftrightarrow \exists k : \overrightarrow{AM} = (1-k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta : \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} \end{cases}$ (đặt $\alpha = 1 - k$; $\beta = k$). $\square$

Hệ quả. Cho tam giác ABC và điểm M thoả mãn điều kiện $x\overrightarrow{AM} = y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AC}$. Khi đó : M thuộc đường thẳng BC khi và chỉ khi $x = y + z$.

Ví dụ 2. Cho góc $\widehat{xOy}$ và hai số dương a, b. Các điểm A, B theo thứ tự thay đổi trên Ox, Oy sao cho : $\dfrac{a}{OA}+\dfrac{b}{OB}=1$. Chứng minh rằng đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định.

Giải. Trên Ox, Oy theo thứ tự lấy các điểm X, Y sao cho $OX = a$; $OY = b$. Dựng hình bình hành $OXKY$ (h.1.25).



Hình 1.25

Ta có :

$$\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OX}+\overrightarrow{OY}=\frac{OX}{OA}\overrightarrow{OA}+\frac{OY}{OB}\overrightarrow{OB}$$

$$=\frac{a}{OA}\overrightarrow{OA}+\frac{b}{OB}\overrightarrow{OB}.$$

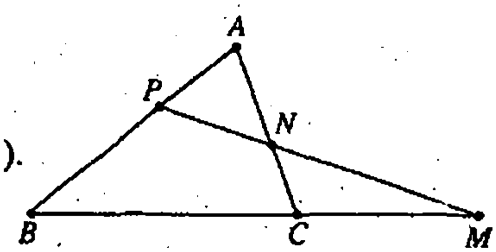
Vì $\dfrac{a}{OA}+\dfrac{b}{OB}=1$ nên theo VD 1, các điểm A, B, K thẳng hàng. Điều đó có nghĩa là đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định (điểm K). □

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC và các điểm M, N, P thoả mãn điều kiện :

$$\overrightarrow{MB}=\alpha\overrightarrow{MC}\ ;\ \overrightarrow{NC}=\beta\overrightarrow{NA}\ ;\ \overrightarrow{PA}=\gamma\overrightarrow{PB}\ (\alpha,\beta,\gamma\neq 0,1).$$

Chứng minh rằng M, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi $\alpha\beta\gamma=1$.

Giải. (h.1.26) Ta có :



Hình 1.26

$$\overrightarrow{MB}=\alpha\overrightarrow{MC}\Rightarrow\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM}=\alpha(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AM})$$

$$\Rightarrow(1-\alpha)\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}-\alpha\overrightarrow{AC}\quad(1).$$

$$\overrightarrow{NC}=\beta\overrightarrow{NA}\Rightarrow\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AN}=\beta\overrightarrow{NA}$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{AC}=(1-\beta)\overrightarrow{AN}\qquad(2).$$

$$\overrightarrow{PA}=\gamma\overrightarrow{PB}\Rightarrow\overrightarrow{PA}=\gamma(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})\Rightarrow\gamma\overrightarrow{AB}=(\gamma-1)\overrightarrow{AP}\qquad(3).$$

Từ (1), (2), (3) suy ra :

$$(1-\alpha)\overrightarrow{AM}=\frac{\gamma-1}{\gamma}\overrightarrow{AP}-\alpha(1-\beta)\overrightarrow{AN}.$$

Từ đó, theo hệ quả của VD 1 :

M, N, P thẳng hàng $\Leftrightarrow 1-\alpha=\dfrac{\gamma-1}{\gamma}-\alpha(1-\beta)\Leftrightarrow\alpha\beta\gamma=1$.

Nhận xét. Kết quả trên chính là dạng vectơ của định lí Menelaus. Trong mục 1, §3, ta sẽ gặp lại định lí này dưới dạng thông thường.

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC. Đường tròn nội tiếp (I) theo thứ tự tiếp xúc với BC, CA, AB tại D, E, F. Đường thẳng DI cắt EF tại N. Chứng minh rằng đường thẳng AN đi qua trung điểm của BC.

Giải. (h.1.27) Theo VD 9, §1 :

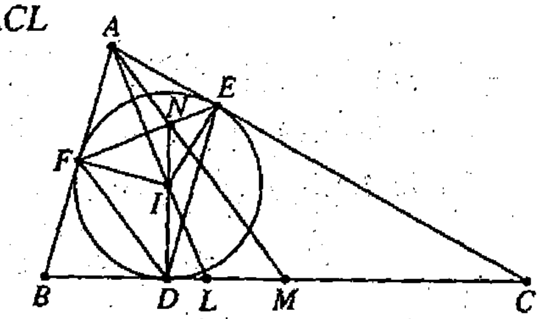
• $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ (1).

• $\overrightarrow{AN} = \frac{NE}{EF}\overrightarrow{AF} + \frac{NF}{EF}\overrightarrow{AE} = \frac{NE}{EF}\frac{AF}{AB}\overrightarrow{AB} + \frac{NF}{EF}\frac{AE}{AC}\overrightarrow{AC}$ (2).

Gọi L là giao của AI với BC.

Dễ thấy : $\begin{cases} \widehat{FIN} = \widehat{ABL} \\ \widehat{EIN} = \widehat{ACL} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta FIN \backsim \Delta ABL \\ \Delta EIN \backsim \Delta ACL \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{NF}{LA} = \dfrac{FI}{AB} \\ \dfrac{NE}{LA} = \dfrac{EI}{AC} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{NF}{NE} = \dfrac{AC}{AB}.$



Hình 1.27

Từ đó, với chú ý rằng $AE = AF$, ta có :

$$\frac{NE}{EF}\frac{AF}{AB} = \frac{NF}{EF}\frac{AE}{AC} = k \qquad (3).$$

Từ (1), (2), (3) suy ra : $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2k}\overrightarrow{AN}$.

Từ đó suy ra A, N, M thẳng hàng.

Nói cách khác, AN đi qua trung điểm của BC. □

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC với các trung tuyến AM, BN, CP và tam giác $A'B'C'$ với các trung tuyến $A'M'$, $B'N'$, $C'P'$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AB}$ theo thứ tự cùng phương với $\overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{C'A'}$, $\overrightarrow{A'B'}$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{CP}$ theo thứ tự cùng phương với $\overrightarrow{A'M'}$, $\overrightarrow{B'N'}$, $\overrightarrow{C'P'}$.

Giải. Chứng minh điều kiện cần.

Vì $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AB}$ theo thứ tự cùng phương với $\overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{C'A'}$, $\overrightarrow{A'B'}$ nên :

$$\overrightarrow{BC} = \alpha\overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{CA} = \beta\overrightarrow{C'A'}, \overrightarrow{AB} = \gamma\overrightarrow{A'B'}$$

Suy ra : $\alpha\overrightarrow{B'C'} + \beta\overrightarrow{C'A'} + \gamma\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$. (1)

Mặt khác : $\overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'A'} + \overrightarrow{A'B'} = \vec{0}$. (2)

Từ (1) và (2), chú ý rằng $\overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{C'A'}, \overrightarrow{A'B'}$ đôi một không cùng phương, theo hệ quả 2 của định lí 2 ta có : $\alpha = \beta = \gamma$.

Do đó :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}(\alpha\overrightarrow{A'B'} + \alpha\overrightarrow{A'C'}) = \alpha\overrightarrow{A'M'} \Rightarrow \overrightarrow{AM} \,//\, \overrightarrow{A'M'}.$$

Tương tự như vậy : $\overrightarrow{BN} \,//\, \overrightarrow{B'N'}, \overrightarrow{CP} \,//\, \overrightarrow{C'P'}$.

Chứng minh điều kiện đủ.

Gọi G, G' theo thứ tự là trọng tâm của các tam giác ABC, $A'B'C'$.

Vì $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}, \overrightarrow{CP}$ theo thứ tự cùng phương với $\overrightarrow{A'M'}, \overrightarrow{B'N'}, \overrightarrow{C'P'}$ nên $\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{BG}, \overrightarrow{CG}$ theo thứ tự cùng phương với $\overrightarrow{A'G'}, \overrightarrow{B'G'}, \overrightarrow{C'G'}$.

Do đó : $\overrightarrow{AG} = \alpha\overrightarrow{A'G'}$; $\overrightarrow{BG} = \beta\overrightarrow{B'G'}$; $\overrightarrow{CG} = \gamma\overrightarrow{C'G'}$

Suy ra : $\alpha\overrightarrow{A'G'} + \beta\overrightarrow{B'G'} + \gamma\overrightarrow{C'G'} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$. (1)

Mặt khác : $\overrightarrow{A'G'} + \overrightarrow{B'G'} + \overrightarrow{C'G'} = \vec{0}$ (2).

Từ (1) và (2), chú ý rằng $\overrightarrow{A'G'}, \overrightarrow{B'G'}, \overrightarrow{C'G'}$ đôi một không cùng phương, theo hệ quả 2 của định lí 2 ta có : $\alpha = \beta = \gamma$.

Do đó : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GB} = \alpha\overrightarrow{G'C'} - \alpha\overrightarrow{G'B'} = \alpha\overrightarrow{B'C'} \Rightarrow \overrightarrow{BC} \,//\, \overrightarrow{B'C'}$.

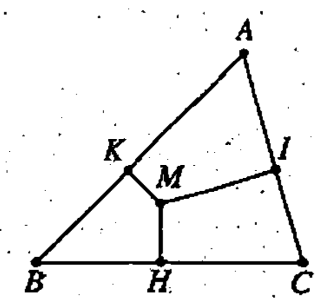
Tương tự như vậy : $\overrightarrow{CA} \,//\, \overrightarrow{C'A'}$; $\overrightarrow{AB} \,//\, \overrightarrow{A'B'}$. □

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC và điểm M nằm trong tam giác. Các điểm H, I, K theo thứ tự là hình chiếu của M trên các đường thẳng BC, CA, AB. Chứng minh rằng M là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi

$$a^2\overrightarrow{MH} + b^2\overrightarrow{MI} + c^2\overrightarrow{MK} = \vec{0}.$$

Giải. (h.1.28) Theo VD 14 và VD 11, §1, ta có :

- $S_a\overrightarrow{MA} + S_b\overrightarrow{MB} + S_c\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ (1)
- $\dfrac{a}{MH}\overrightarrow{MH} + \dfrac{b}{MI}\overrightarrow{MI} + \dfrac{c}{MK}\overrightarrow{MK} = \vec{0}$ (2)



Hình 1.28

Do đó, M là trọng tâm của tam giác ABC

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

$\Leftrightarrow S_a = S_b = S_c$ (theo (1) và hệ quả 2 của định lí 2)

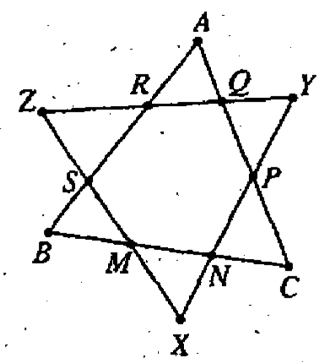
$$\Leftrightarrow a.MH = b.MI = c.MK$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{\frac{a}{MH}} = \frac{b^2}{\frac{b}{MI}} = \frac{c^2}{\frac{c}{MK}}$$

$\Leftrightarrow a^2\overrightarrow{MH} + b^2\overrightarrow{MI} + c^2\overrightarrow{MK} = \vec{0}$ (theo (2) và hệ quả 2 của định lí 2). □

Ví dụ 7. Cho hai tam giác ABC, XYZ. Đoạn BC theo thứ tự cắt các đoạn XZ, XY tại M, N ; đoạn CA theo thứ tự cắt các đoạn YX, YZ tại P, Q ; đoạn AB theo thứ tự cắt các đoạn ZY, ZX tại R, S. Giả sử $MN = NP = PQ = QR = RS = SM$. Chứng minh rằng tam giác ABC đều khi và chỉ khi tam giác XYZ đều.

Giải. (h.1.29) *Chứng minh điều kiện cần.*



Hình 1.29

Gọi $\overrightarrow{e_a}, \overrightarrow{e_z}, \overrightarrow{e_b}, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_c}, \overrightarrow{e_y}$ là các vectơ đơn vị hướng ra ngoài lục giác $MNPQRS$ và theo thứ tự vuông góc với MN, NP, PQ, QR, RS, SM.

Vì $MN = NP = PQ = QR = RS = SM$ nên theo định lí con nhím :

$$\overrightarrow{e_a} + \overrightarrow{e_z} + \overrightarrow{e_b} + \overrightarrow{e_x} + \overrightarrow{e_c} + \overrightarrow{e_y} = \vec{0}. \qquad (1)$$

Vì tam giác ABC đều nên theo định lí con nhím :

$$\overrightarrow{e_a} + \overrightarrow{e_b} + \overrightarrow{e_c} = \vec{0}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $\overrightarrow{e_x} + \overrightarrow{e_y} + \overrightarrow{e_z} = \vec{0}$. (3)

Áp dụng định lí con nhím cho tam giác XYZ, ta có :

$$YZ\overrightarrow{e_x} + ZX\overrightarrow{e_y} + XY\overrightarrow{e_z} = \vec{0}. \qquad (4)$$

Từ (3) và (4), ta có : $YZ = ZX = XY$.

Nói cách khác, tam giác XYZ đều.

Chứng minh điều kiện đủ:

Hoàn toàn tương tự phép chứng minh điều kiện cần.

Ví dụ 8. Cho tam giác ABC và điểm M. Chứng minh rằng M nằm trong tam giác ABC khi và chỉ khi tồn tại duy nhất bộ ba số (α, β, γ) sao cho :

$$\begin{cases} \alpha, \beta, \gamma > 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \vec{0}. \end{cases} \qquad (*)$$

Giải. Chứng minh điều kiện cần.

Giả sử M nằm trong tam giác ABC.

Theo VD 14, §1, ta có : $S_a\overrightarrow{MA} + S_b\overrightarrow{MB} + S_c\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Gọi S là diện tích tam giác ABC.

Đặt $\alpha = \dfrac{S_a}{S}$; $\beta = \dfrac{S_b}{S}$; $\gamma = \dfrac{S_c}{S}$.

Dễ thấy : α, β, γ thoả mãn (*).

Giả sử bộ ba số $(\alpha', \beta', \gamma')$ cũng thoả mãn điều kiện (*).

Từ các đẳng thức $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \vec{0}$; $\alpha'\overrightarrow{MA} + \beta'\overrightarrow{MB} + \gamma'\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ và chú ý rằng $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}$ đôi một không cùng phương, ta có :

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha' + \beta' + \gamma'} = \frac{1}{1} = 1.$$

Suy ra : $\alpha = \alpha'$; $\beta = \beta'$; $\gamma = \gamma'$.

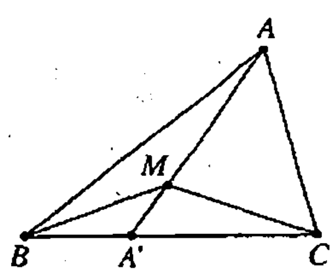
Tính duy nhất của bộ ba số (α, β, γ) đã được chứng minh.

Chứng minh điều kiện đủ (h.1.30).

Giả sử M thoả mãn điều kiện (*).

Lấy A' thoả mãn điều kiện $\beta\overrightarrow{A'B} + \gamma\overrightarrow{A'C} = \vec{0}$ (1).

Vì $\beta > 0$; $\gamma > 0$ nên A' thuộc đoạn BC (2).



Hình 1.30

Từ (1), với chú ý rằng $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \vec{0}$, ta có :

$$\alpha\overrightarrow{MA} + (\beta + \gamma)\overrightarrow{MA'} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA'}) + \gamma(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CA'})$$
$$= (\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}) - (\beta\overrightarrow{A'B} + \gamma\overrightarrow{A'C}) = \vec{0}.$$

Từ đó, do $\alpha > 0$; $\beta + \gamma > 0$, nên M thuộc đoạn AA' (3).

Từ (2) và (3) suy ra M nằm trong tam giác ABC. □

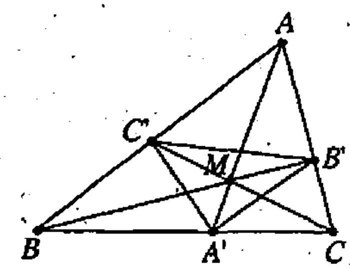
Nhận xét. Đôi khi kết quả trên được phát biểu đơn giản hơn :

M nằm trong tam giác $ABC \Leftrightarrow \exists\, \alpha, \beta, \gamma > 0 : \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Ví dụ 9. Cho tam giác ABC và điểm M nằm trong tam giác. AM, BM, CM theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại A', B', C'. Chứng minh rằng M là trọng tâm tam giác ABC khi và chỉ khi M là trọng tâm tam giác $A'B'C'$.

Giải (h.1.31) Vì M nằm trong tam giác ABC nên tồn tại các số α, β, γ khác không sao cho :

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \vec{0} \qquad (1).$$



Hình 1.31

Xét phép chiếu vectơ $\text{Ch}_{BC}AA'$, ta có :

$$\text{Ch}_{BC}AA'(\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}) = \text{Ch}_{BC}AA'(\vec{0})$$

$$\Rightarrow \quad \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MA'} + \gamma\overrightarrow{MA'} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{MA'} = -\frac{\alpha}{\beta + \gamma}\overrightarrow{MA}.$$

Tương tự : $\overrightarrow{MB'} = -\dfrac{\beta}{\gamma + \alpha}\overrightarrow{MB}$; $\overrightarrow{MC'} = -\dfrac{\gamma}{\alpha + \beta}\overrightarrow{MC}$.

Vậy : M là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta + \gamma}\overrightarrow{MA} + \frac{\beta}{\gamma + \alpha}\overrightarrow{MB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta}\overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{\frac{\alpha}{\beta + \gamma}} = \frac{\beta}{\frac{\beta}{\gamma + \alpha}} = \frac{\gamma}{\frac{\gamma}{\alpha + \beta}} \text{ (theo (1) và hệ quả 2 của định lí 2).}$$

$$\Leftrightarrow \beta + \gamma = \gamma + \alpha = \alpha + \beta$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma$$

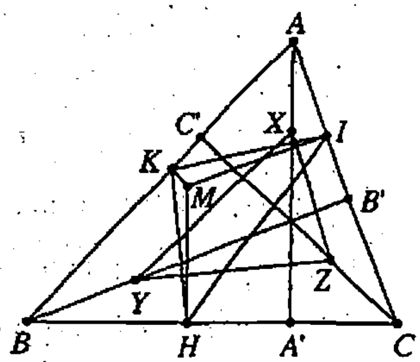
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \text{ (theo (1))}$$

$\Leftrightarrow$ M là trọng tâm của tam giác ABC. □

Ví dụ 10. Cho tam giác ABC và điểm M thay đổi trong tam giác. H, I, K theo tứ tự là hình chiếu của M trên các đường thẳng BC, CA, AB. Tìm quỹ tích trọng tâm G của tam giác HIK.

Giải. (h.1.32) Gọi AA', BB', CC' là các đường cao của tam giác ABC. Lấy các điểm X, Y, Z sao cho :

$2\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XA'} = 2\overrightarrow{YB} + \overrightarrow{YB'} = 2\overrightarrow{ZC} + \overrightarrow{ZC'} = \vec{0}$. (1)



Hình 1.32

Thuận. Giả sử G thoả mãn điều kiện đề bài. Vì M nằm trong tam giác ABC nên tồn tại các số $\alpha, \beta, \gamma > 0$ sao cho :

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

(theo nhận xét sau VD 8).

Từ đó, qua các phép chiếu vectơ $\mathrm{Ch}_{AA'}BC$, $\mathrm{Ch}_{BB'}CA$, $\mathrm{Ch}_{CC'}AB$ ta có :

$$\begin{cases} \alpha\overrightarrow{HA'} + \beta\overrightarrow{HB} + \gamma\overrightarrow{HC} = \vec{0} \\ \alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB'} + \gamma\overrightarrow{IC} = \vec{0} \\ \alpha\overrightarrow{KA} + \beta\overrightarrow{KB} + \gamma\overrightarrow{KC'} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha(\overrightarrow{HX} + \overrightarrow{XA'}) + \beta(\overrightarrow{HY} + \overrightarrow{YB}) + \gamma(\overrightarrow{HZ} + \overrightarrow{ZC}) = \vec{0} \\ \alpha(\overrightarrow{IX} + \overrightarrow{XA}) + \beta(\overrightarrow{IY} + \overrightarrow{YB'}) + \gamma(\overrightarrow{IZ} + \overrightarrow{ZC}) = \vec{0} \\ \alpha(\overrightarrow{KX} + \overrightarrow{XA}) + \beta(\overrightarrow{KY} + \overrightarrow{YB}) + \gamma(\overrightarrow{KZ} + \overrightarrow{ZC'}) = \vec{0} \end{cases}$$

Cộng vế với vế của ba đẳng thức trên và chú ý tới (1), ta có :

$$\alpha(\overrightarrow{HX} + \overrightarrow{IX} + \overrightarrow{KX}) + \beta(\overrightarrow{HY} + \overrightarrow{IY} + \overrightarrow{KY}) + \gamma(\overrightarrow{HZ} + \overrightarrow{IZ} + \overrightarrow{KZ}) = \vec{0}.$$

Từ đó, với chú ý rằng $\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GK} = \vec{0}$, theo công thức thu gọn, suy ra :

$$\alpha\overrightarrow{GX} + \beta\overrightarrow{GY} + \gamma\overrightarrow{GZ} = \vec{0} \qquad (2)$$

Từ (2), chú ý rằng $\alpha, \beta, \gamma > 0$, theo nhận xét sau VD 8, G nằm trong tam giác XYZ.

Đảo. Giả sử G nằm trong tam giác XYZ. Theo nhận xét sau VD 8, tồn tại các số $\alpha, \beta, \gamma > 0$ sao cho : $\alpha\overrightarrow{GX} + \beta\overrightarrow{GY} + \gamma\overrightarrow{GZ} = \vec{0}$.

Vì $\alpha, \beta, \gamma > 0$ nên $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$. Do đó, theo VD 19, §1, tồn tại điểm M sao cho : $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Lại vì $\alpha, \beta, \gamma > 0$ nên M nằm trong tam giác ABC (3).

Gọi H, I, K theo thứ tự là hình chiếu của M trên BC, CA, AB.

Gọi G' là trọng tâm của tam giác HIK.

Hoàn toàn như phép chứng minh phần thuận, ta có :

$$\alpha\overrightarrow{G'X} + \beta\overrightarrow{G'Y} + \gamma\overrightarrow{G'Z} = \vec{0}.$$

Lại theo VD 19, §1, ta có G trùng G'.

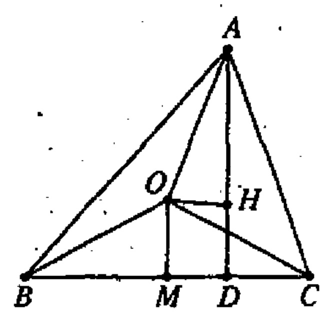
Do đó, G là trọng tâm của tam giác HIK (4).

Từ (3) và (4) suy ra G thoả mãn điều kiện đề bài.

Kết luận. Quỹ tích các điểm G thoả mãn điều kiện đề bài là miền tam giác XYZ. □

Ví dụ 11. Cho tam giác ABC. Gọi O, H theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp và trực tâm của tam giác. Chứng minh rằng :

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$



Hình 1.33

Giải. (h.1.33) Gọi D là giao điểm của AH với BC, M là hình chiếu của O trên BC.

Đặt $\vec{v} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OH}$.

Ta có : $\text{Ch}_{AH}BC(\vec{v}) = \text{Ch}_{AH}BC(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OH})$

$= \text{Ch}_{AH}BC(\overrightarrow{OA}) + \text{Ch}_{AH}BC(\overrightarrow{OB}) + \text{Ch}_{AH}BC(\overrightarrow{OC}) - \text{Ch}_{AH}BC(\overrightarrow{OH})$

$= \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MD} + \vec{0} - \overrightarrow{MD} = \vec{0}.$

Suy ra : $\vec{v} \,//\, \overrightarrow{AH}$. (1)

Tương tự : $\vec{v} \,//\, \overrightarrow{BH}$. (2)

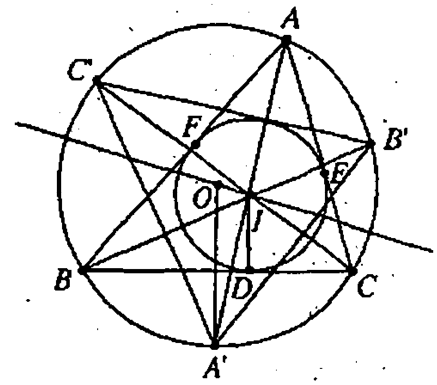
Từ (1) và (2) suy ra $\vec{v} = \vec{0}$. Điều đó có nghĩa là $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

Nhận xét. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, theo công thức thu gọn, ta suy ra $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$. Từ đó ta có kết quả quen thuộc sau : "*Trong một tam giác, tâm đường tròn ngoại tiếp, trực tâm, trọng tâm cùng thuộc một đường thẳng*" (***Đường thẳng Euler***).

Ví dụ 12. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), ngoại tiếp đường tròn (I). (I) theo thứ tự tiếp xúc với BC, CA, AB tại D, E, F. Chứng minh rằng OI là đường thẳng Euler của tam giác DEF.

Giải. (h.1.34) Trước hết xin phát biểu không chứng minh một bổ đề quen thuộc.

Bổ đề. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), ngoại tiếp đường tròn (I). Các đường thẳng AI, BI, CI theo thứ tự cắt lại (O) tại A', B', C'. Khi đó, I là trực tâm của tam giác $A'B'C'$.



Hình 1.34

Trở lại VD 12.

Gọi A', B', C' theo thứ tự là giao điểm thứ hai của AI, BI, CI với (O). Theo bổ đề trên, I là trực tâm của tam giác $A'B'C'$. (1)

Gọi R, r theo thứ tự là bán kính của (O), (I).

Dễ thấy $\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB'}, \overrightarrow{OC'}$ theo thứ tự bằng $\frac{R}{r}\overrightarrow{ID}, \frac{R}{r}\overrightarrow{IE}, \frac{R}{r}\overrightarrow{IF}$. (2)

Từ (1), theo VD 11, ta có : $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}$

$$= \frac{R}{r}(\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF}) \text{ (theo (2)).} \quad (3)$$

Gọi H là trọng tâm của tam giác DEF.

Từ (3), ta có : $\overrightarrow{OI} = \frac{3R}{r}\overrightarrow{IH}$.

Từ đó, với chú ý rằng IH chính là đường thẳng Euler của tam giác DEF, suy ra OI là đường thẳng Euler của tam giác DEF. □

Ví dụ 13. Cho tam giác ABC. Các điểm M, N, P (khác A, B, C) theo thứ tự thuộc các đường thẳng BC, CA, AB. Chứng minh rằng AM, BN, CP đồng quy tại tâm tỉ cự của hệ điểm $\{A, B, C\}$ với các hệ số $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma \neq 0 \\ \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \gamma\overrightarrow{NC} + \alpha\overrightarrow{NA} = \alpha\overrightarrow{PA} + \beta\overrightarrow{PB} = \vec{0}. \end{cases}$$

Giải. (h.1.35) *Chứng minh điều kiện cần.*

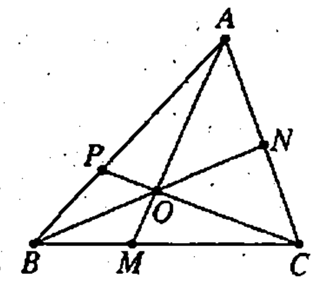
Gọi O là điểm đồng quy của AM, BN, CP.

Vì O là tâm tỉ cự của hệ điểm $\{A, B, C\}$ với các hệ số $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ nên $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ (theo định nghĩa tâm tỉ cự).

Mặt khác, từ đẳng thức $\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC} = \vec{0}$, qua các phép chiếu vectơ $\mathrm{Ch}_{AM}BC$, $\mathrm{Ch}_{BN}CA$, $\mathrm{Ch}_{CP}AB$, ta có :

$\beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \vec{0}$; $\gamma\overrightarrow{NC} + \alpha\overrightarrow{NA} = \vec{0}$;

$\alpha\overrightarrow{PA} + \beta\overrightarrow{PB} = \vec{0}$.



Hình 1.35

Chứng minh điều kiện đủ.

Vì $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ nên tồn tại tâm tỉ cự của hệ điểm $\{A, B, C\}$ với các hệ số $\{\alpha, \beta, \gamma\}$.

Gọi O là tâm tỉ cự của hệ điểm $\{A, B, C\}$ với các hệ số $\{\alpha, \beta, \gamma\}$.

Vì $\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC} = \vec{0}$ nên $\alpha\overrightarrow{OA} + \beta(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB}) + \gamma(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MC}) = \vec{0}$.

Do đó, $\alpha\overrightarrow{OA} + (\beta + \gamma)\overrightarrow{OM} + (\beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}) = \vec{0}$.

Từ đó, với chú ý rằng $\beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \vec{0}$, ta có : $\alpha\overrightarrow{OA} + (\beta + \gamma)\overrightarrow{OM} = \vec{0}$.

Suy ra A, O, M thẳng hàng.

Tương tự như trên, các bộ ba điểm (B, O, N), (C, O, P) thẳng hàng.

Tóm lại, AM, BN, CP đồng quy tại O, tâm tỉ cự của hệ điểm $\{A, B, C\}$ với các hệ số $\{\alpha, \beta, \gamma\}$. □

Nhận xét. Kết quả trên là dạng vectơ của định lí Ceva, trong §3, ta sẽ gặp lại nó dưới dạng thông thường.

Ví dụ 14. Cho tam giác ABC và điểm M nằm trong tam giác. Các đường thẳng AM, BM, CM theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1. Gọi A_2, B_2, C_2 theo thứ tự là trung điểm của B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1. Các đường thẳng MA_2, MB_2, MC_2 theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại A_3, B_3, C_3. Chứng minh rằng :

a) AA_3, BB_3, CC_3 đồng quy tại một điểm (kí hiệu là K).

b) MK đi qua trọng tâm của tam giác $A_1B_1C_1$.

Giải. (h.1.36) Theo VD 8, tồn tại các số dương α, β, γ sao cho :

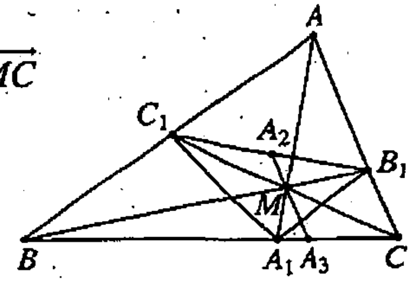
$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \vec{0}. \qquad (1)$$

a) Từ (1), qua các phép chiếu vectơ $\mathrm{Ch}_{AC}BB_1$, $\mathrm{Ch}_{AB}CC_1$ suy ra :

$$\begin{cases}\beta\overrightarrow{MB}+(\gamma+\alpha)\overrightarrow{MB_1}=\vec{0}\\ \gamma\overrightarrow{MC}+(\beta+\alpha)\overrightarrow{MC_1}=\vec{0}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{MB_1}=-\dfrac{\beta}{\gamma+\alpha}\overrightarrow{MB}\\ \overrightarrow{MC_1}=-\dfrac{\gamma}{\beta+\alpha}\overrightarrow{MC}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{MB_1}+\overrightarrow{MC_1}=-\frac{\beta}{\gamma+\alpha}\overrightarrow{MB}-\frac{\gamma}{\beta+\alpha}\overrightarrow{MC}$$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{MA_2}=-\frac{\beta}{\gamma+\alpha}\overrightarrow{MB}-\frac{\gamma}{\beta+\alpha}\overrightarrow{MC}.$$



Hình 1.36

Từ đó, qua phép chiếu vectơ $\mathrm{Ch}_{MA_3}BC$, ta có :

$$\frac{\beta}{\gamma+\alpha}\overrightarrow{A_3B}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta}\overrightarrow{A_3C}=\vec{0}.$$

Tương tự như trên :

$$\frac{\beta}{\gamma+\alpha}\overrightarrow{A_3B}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta}\overrightarrow{A_3C}=\frac{\gamma}{\alpha+\beta}\overrightarrow{B_3C}+\frac{\alpha}{\beta+\gamma}\overrightarrow{B_3A}$$

$$=\frac{\alpha}{\beta+\gamma}\overrightarrow{C_3A}+\frac{\beta}{\gamma+\alpha}\overrightarrow{C_3B}=\vec{0}.$$

Từ đó, theo VD 13, AA_3, BB_3, CC_3 đồng quy tại điểm K, tâm tỉ cự của hệ điểm $\{A,B,C\}$ với các hệ số $\left\{\dfrac{\alpha}{\beta+\gamma},\dfrac{\beta}{\gamma+\alpha},\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta}\right\}$. (2)

b) Từ (1), qua các phép chiếu vectơ $\mathrm{Ch}_{AM}BC$, $\mathrm{Ch}_{BM}CA$, $\mathrm{Ch}_{CM}AB$, ta có :

$$\beta\overrightarrow{A_1B}+\gamma\overrightarrow{A_1C}=\gamma\overrightarrow{B_1C}+\alpha\overrightarrow{B_1A}=\alpha\overrightarrow{C_1A}+\beta\overrightarrow{C_1B}=\vec{0}. \qquad (3)$$

Gọi G_1 là trọng tâm của tam giác $A_1B_1C_1$, đương nhiên :

$$\overrightarrow{G_1A_1}+\overrightarrow{G_1B_1}+\overrightarrow{G_1C_1}=\vec{0}.$$

Suy ra :

$$\frac{\beta}{\beta+\gamma}\overrightarrow{G_1A_1}+\frac{\gamma}{\beta+\gamma}\overrightarrow{G_1A_1}+\frac{\gamma}{\gamma+\alpha}\overrightarrow{G_1B_1}+\frac{\alpha}{\gamma+\alpha}\overrightarrow{G_1B_1}+\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{G_1C_1}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{G_1C_1}=\vec{0}.$$

Từ đó, chú ý tới (3), theo công thức thu gọn, ta có :

$$\frac{\beta}{\beta+\gamma}\overrightarrow{G_1B}+\frac{\gamma}{\beta+\gamma}\overrightarrow{G_1C}+\frac{\gamma}{\gamma+\alpha}\overrightarrow{G_1C}+\frac{\alpha}{\gamma+\alpha}\overrightarrow{G_1A}+\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{G_1A}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{G_1B}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{\alpha}{\beta+\gamma}\overrightarrow{G_1A}+\frac{\beta}{\gamma+\alpha}\overrightarrow{G_1B}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta}\overrightarrow{G_1C}\right)$$

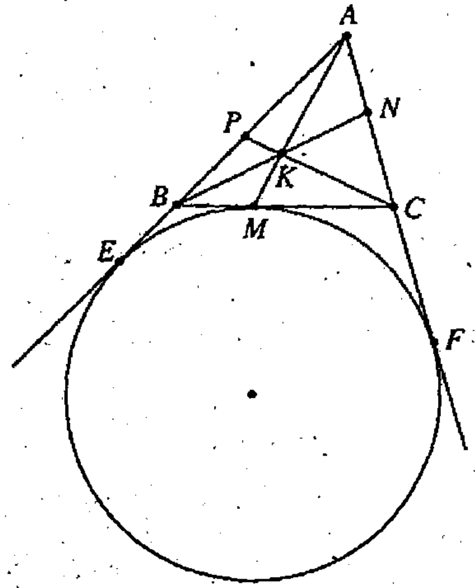
$$+\left(\frac{1}{\beta+\gamma}+\frac{1}{\gamma+\alpha}+\frac{1}{\alpha+\beta}\right)(\alpha\overrightarrow{G_1A}+\beta\overrightarrow{G_1B}+\gamma\overrightarrow{G_1C})=\vec{0}.$$

Từ đó, chú ý tới (1) và (2) theo công thức thu gọn, ta có :

$$-\left(\frac{\alpha}{\beta+\gamma}+\frac{\beta}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta}\right)\overrightarrow{G_1K}+\left(\frac{1}{\beta+\gamma}+\frac{1}{\gamma+\alpha}+\frac{1}{\alpha+\beta}\right)(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{G_1M}=\vec{0}.$$

Điều đó có nghĩa là MK đi qua trọng tâm G_1 của tam giác $A_1B_1C_1$. □

Ví dụ 15. Cho tam giác ABC không đều. Các đường tròn bàng tiếp góc A, B, C theo thứ tự tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tại M, N, P. Chứng minh rằng AM, BN, CP đồng quy tại một điểm thuộc đường thẳng nối tâm đường tròn nội tiếp và trọng tâm của tam giác ABC.



Hình 1.37

Giải. (h.1.37) Gọi E, F là tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp góc A với các tia AB, AC. Gọi I, G theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp và trọng tâm của tam giác ABC.

Ta có : $2AE = 2AF = AE + AF$

$= AB + BE + AC + CF$

$= AB + AC + (BM + CM)$

$= AB + AC + BC = 2p$.

Suy ra : $BM = BE = AE - AB = p - c$.

Tương tự : $BM = AN = p - c$;

$CN = BP = p - a$;

$AP = CM = p - b$.

Do đó : $(p-b)\overrightarrow{MB}+(p-c)\overrightarrow{MC}=(p-c)\overrightarrow{NC}+(p-a)\overrightarrow{NA}$

$$=(p-a)\overrightarrow{PA}+(p-b)\overrightarrow{PB}=\vec{0}.$$

Mặt khác : $(p-a)+(p-b)+(p-c)=p\neq 0$.

Vậy, theo VD 13, AM, BN, CP đồng quy tại điểm K thoả mãn điều kiện :

$$(p-a)\overrightarrow{KA}+(p-b)\overrightarrow{KB}+(p-c)\overrightarrow{KC}=\vec{0}.$$

Từ đó suy ra :

$$p(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC})-(a\overrightarrow{KA}+b\overrightarrow{KB}+c\overrightarrow{KC})=\vec{0}.$$

Nhờ các VD 4 và VD 10, §1, theo công thức thu gọn, ta có

$$3p\overrightarrow{KG}-(a+b+c)\overrightarrow{KI}=\vec{0}.$$

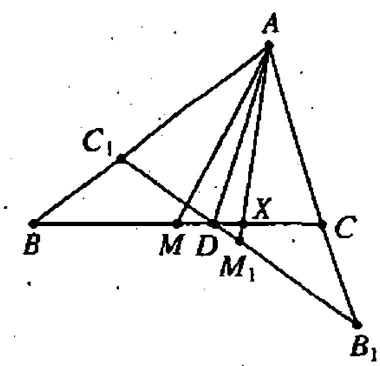
Do đó : $3p\overrightarrow{KG}-2p\overrightarrow{KI}=\vec{0}\Rightarrow 3\overrightarrow{KG}-2\overrightarrow{KI}=\vec{0}$.

Vậy K thuộc IG. □

Ví dụ 16. Cho tam giác ABC. Gọi AM, BN, CP theo thứ tự là các đường trung tuyến ; AD, BE, CF theo thứ tự là các đường phân giác của tam giác. Các điểm X, Y, Z theo thứ tự thuộc các cạnh BC, CA, AB sao cho : $\widehat{MAD}=\widehat{XAD}$; $\widehat{NBE}=\widehat{YBE}$; $\widehat{PCF}=\widehat{ZCF}$. Chứng minh rằng AX, BY, CZ đồng quy tại điểm L thoả mãn điều kiện $a^2\overrightarrow{LA}+b^2\overrightarrow{LB}+c^2\overrightarrow{LC}=\vec{0}$.

Giải. (h.1.38) Lấy C_1, B_1 tương ứng thuộc các tia AB, AC sao cho :

$$AC_1=AC\ ;\ AB_1=AB.$$



Hình 1.38

Gọi M_1 là giao của AX và B_1C_1. Bằng cách xét phép đối xứng qua trục AD, dễ thấy M_1 là trung điểm của B_1C_1.

Suy ra :

$$\overrightarrow{AM_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{AB_1})=\frac{1}{2}(\frac{AC_1}{AB}\overrightarrow{AB}+\frac{AB_1}{AC}\overrightarrow{AC})$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{b}{c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{b}\overrightarrow{AC}).$$

Từ đẳng thức trên, qua phép chiếu vectơ $\text{Ch}_{AM_1}BC$, ta có :

$$\vec{0}=\frac{1}{2}(\frac{b}{c}\overrightarrow{XB}+\frac{c}{b}\overrightarrow{XC})\Rightarrow b^2\overrightarrow{XB}+c^2\overrightarrow{XC}=\vec{0}.$$

Tương tự : $b^2\overrightarrow{XB}+c^2\overrightarrow{XC}=c^2\overrightarrow{YC}+a^2\overrightarrow{YA}=a^2\overrightarrow{ZA}+b^2\overrightarrow{ZB}=\vec{0}$.

Từ đó, với chú ý rằng $a^2+b^2+c^2\neq 0$, theo VD 13, ta có AX, BY, CZ đồng quy tại điểm L thoả mãn điều kiện $a^2\overrightarrow{LA}+b^2\overrightarrow{LB}+c^2\overrightarrow{LC}=\vec{0}$. □

Lưu ý.

1. AX, BY, CZ được gọi là các ***đường đối trung*** của tam giác ABC.
2. L được gọi là ***điểm Lemoine*** của tam giác ABC.

BÀI TẬP

22. Trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC theo thứ tự lấy các điểm A_1, B_1, C_1 sao cho $\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{B_1C}{B_1A} = \frac{C_1A}{C_1B} = k > 0$. Trên các cạnh B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 của tam giác $A_1B_1C_1$ theo thứ tự lấy các điểm A_2, B_2, C_2 sao cho

$$\frac{A_2B_1}{A_2C_1} = \frac{B_2C_1}{B_2A_1} = \frac{C_2A_1}{C_2B_1} = \frac{1}{k}.$$

Chứng minh rằng, các tam giác ABC và $A_2B_2C_2$ có các cạnh tương ứng song song.

23. Trên cạnh BC của tam giác ABC lấy điểm M. Đường thẳng Δ cắt các đoạn AB, AC, AM lần lượt tại B', C', M'. Chứng minh rằng :

$$BC.\frac{AM}{AM'} = MC.\frac{AB}{AB'} + MB.\frac{AC}{AC'}.$$

24. Cho góc $\widehat{xOy}$ và hai số dương a, b. Các điểm A, B theo thứ tự thay đổi trên các tia Ox, Oy sao cho $aOA + bOB = 1$. Chứng minh rằng trung điểm I của AB luôn chạy trên một đường thẳng cố định.

25. Cho tam giác ABC với các trung tuyến AM, BN, CP và tam giác $A'B'C'$ với các trung tuyến $A'M', B'N', C'P'$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}$ theo thứ tự cùng phương với $\overrightarrow{A'M'}, \overrightarrow{B'N'}, \overrightarrow{C'P'}$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{C'A'}, \overrightarrow{A'B'}$ theo thứ tự cùng phương với $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}, \overrightarrow{CP}$.

26. Về phía ngoài tam giác ABC, ta dựng các hình vuông $BCXY$, $CAZT$, $ABUV$. Đặt $A_1 = YU \cap XT$; $B_1 = XT \cap ZV$; $C_1 = ZV \cap YU$. Chứng minh rằng các trung tuyến của tam giác $A_1B_1C_1$ tương ứng vuông góc với các cạnh của tam giác ABC.

27. Cho tam giác ABC, I là tâm đường tròn nội tiếp. A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng I thuộc miền tam giác $A_1B_1C_1$ và :

$$\frac{S_{IB_1C_1}}{b+c-a} = \frac{S_{IC_1A_1}}{c+a-b} = \frac{S_{IA_1B_1}}{a+b-c}.$$

28. Các điểm M, N theo thứ tự thuộc các cạnh AB, AC của tam giác ABC sao cho $S_{AMN} = \frac{1}{2}S_{ABC}$. Chứng minh rằng trọng tâm tam giác ABC nằm trong tam giác AMN.

29. Cho tam giác ABC. Điểm M thuộc tam giác. AM, BM, CM theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại X, Y, Z. Tìm quỹ tích các điểm M sao cho :

$$S_{XMB} + S_{YMC} + S_{ZMA} = S_{XMC} + S_{YMA} + S_{ZMB}.$$

30. Cho tam giác ABC và điểm M nằm trong tam giác. AM, BM, CM theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1, theo thứ tự cắt B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 tại A_2, B_2, C_2. Chứng minh rằng :

a) $S_{A_1B_1C_1} \leq \frac{1}{4}S_{ABC}$.

b) $S_{A_1B_1C_1} \leq \sqrt{S_{ABC}S_{A_2B_2C_2}}$.

31. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). X, Y, Z, T theo thứ tự là trực tâm của các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC. Chứng minh rằng AX, BY, CZ, DT đồng quy tại trung điểm mỗi đoạn.

32. Cho đường tròn (O). Các điểm A, B, C thay đổi trên (O) sao cho tam giác ABC nhọn. Tìm quỹ tích trọng tâm G của tam giác ABC.

33. Cho tam giác ABC và các điểm X, Y, Z theo thứ tự chia các cạnh BC, CA, AB theo cùng một tỉ số. Giả sử rằng các tam giác ABC, XYZ có cùng trực tâm. Chứng minh tam giác ABC đều.

34. Cho tam giác ABC. Điểm M nằm trong tam giác. H, I, K lần lượt là hình chiếu của M trên BC, CA, AB. Chứng minh rằng M là trọng tâm tam giác HIK khi và chỉ khi M là điểm Lemoine của tam giác ABC (xem VD 16).

35. Cho tam giác ABC và điểm M. Gọi H, I, K theo thứ tự là hình chiếu của M trên các đường thẳng BC, CA, AB. Tìm vị trí của M sao cho $MH^2 + MI^2 + MK^2$ nhỏ nhất.

36. Cho tam giác ABC. Gọi X, Y, Z theo thứ tự là trung điểm của BC, CA, AB ; X', Y', Z' theo thứ tự là trung điểm của các đường phân giác AA', BB', CC'. Chứng minh rằng XX', YY', ZZ' đồng quy tại một điểm và điểm đó thuộc đường thẳng nối tâm đường tròn nội tiếp và điểm Lemoine của tam giác.

37. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I). Các đường tròn bàng tiếp góc A, B, C của tam giác tương ứng tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tại M, N, P. Ta đã biết rằng AM, BN, CP đồng quy tại một điểm. Chứng minh rằng điểm đồng quy nói trên thuộc (I) khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} b + c = 3a \\ c + a = 3b \\ a + b = 3c. \end{cases}$$

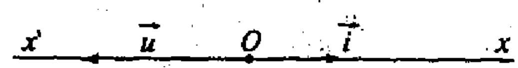
§3. TOẠ ĐỘ CỦA VECTƠ TRÊN TRỤC VÀ MỘT VÀI VẤN ĐỀ CÓ LIÊN QUAN

1. Toạ độ của vectơ trên trục

a) Trục

Một đường thẳng được gọi là trục (toạ độ) nếu trên đó đã chọn một điểm O và một vectơ đơn vị $\vec{i}$. Điểm O được gọi là gốc của trục, vectơ $\vec{i}$ được gọi là vectơ đơn vị của trục, hướng của $\vec{i}$ được gọi là hướng của trục.

Khi ta viết trục $x'Ox$ có nghĩa là đường thẳng $x'x$ đã được coi là một trục có gốc là O và hướng của vectơ đơn vị $\vec{i}$ của trục là hướng $x'x$ (h.3.1).



Hình 1.39

b) Toạ độ của vectơ trên trục

Cho vectơ $\vec{u}$ nằm trên trục $x'Ox$ có vectơ đơn vị là $\vec{i}$ (h.1.39). Vì $\vec{u} // \vec{i}$ nên tồn tại duy nhất số x sao cho $\vec{u} = x\vec{i}$. Số x được gọi là toạ độ của vectơ $\vec{u}$. Để biểu thị vectơ $\vec{u}$ có toạ độ là x, hoặc ta viết $\vec{u} = (x)$ hoặc đơn giản hơn ta viết $\vec{u}(x)$.

Cho hai vectơ $\vec{u}(x)$, $\vec{u'}(x')$, ta có :

- $\vec{u} = \vec{u'} \Leftrightarrow x = x'$.
- $\alpha\vec{u} + \beta\vec{u'} = (\alpha x + \beta x')\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

c) Toạ độ của điểm trên trục

Cho điểm M thuộc trục $x'Ox$. Toạ độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$ được gọi là toạ độ của điểm M.

Để biểu thị điểm M có toạ độ là x, hoặc ta viết $M = (x)$ hoặc đơn giản hơn ta viết $M(x)$.

Đôi khi, để cho thuận tiện, ta dùng kí hiệu x_M để chỉ toạ độ điểm M. Đương nhiên

$$M = (x_M)\ ;\ M(x_M).$$

d) Độ dài đại số của vectơ

Toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ được gọi là độ dài đại số của vectơ $\overrightarrow{AB}$ và được kí hiệu là $\overline{AB}$.

Khi ta viết $\overline{AB}$ có nghĩa là đường thẳng AB đã được coi là một trục với một gốc O nào đó và một vectơ đơn vị $\vec{i}$ nào đó (trong khá nhiều trường hợp, ta không cần cụ thể hoá O là điểm nào, $\vec{i}$ là vectơ nào).

Đương nhiên :

- $|\overline{AB}| = AB$.
- $\overline{AB} = AB \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \vec{i}$.
- $\overline{AB} = -AB \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \vec{i}$.
- $\overline{AB} = -\overline{BA}$.
- $\overline{AB} = \overline{CB} - \overline{CA}$, C bất kì trên đường thẳng AB.
- $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$, C bất kì trên đường thẳng AB (hệ thức Chasles).

Dễ thấy : $\overline{AB} = x_B - x_A$.

Cho điểm O thuộc đường thẳng Δ. Với mỗi số k, tồn tại duy nhất điểm M sao cho $\overline{OM} = k$.

Với mỗi số k khác 1, tồn tại duy nhất điểm M thuộc đường thẳng AB sao cho $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = k$. Cụ thể hơn :

$k < 0 \Leftrightarrow M$ thuộc đoạn AB ;

$0 < k < 1 \Leftrightarrow M$ thuộc tia đối của tia AB.

$k > 1 \Leftrightarrow M$ thuộc tia đối của tia BA.

Chú ý rằng nếu ta thay đổi gốc của trục mà không thay đổi vectơ đơn vị của trục thì toạ độ của các điểm trên trục thay đổi nhưng độ dài đại số của các vectơ trên trục không thay đổi.

e) Định lí Thales dạng đại số

Định lí Thales là một trong những định lí quan trọng bậc nhất của hình học.

Trong chương trình hình học 8, khi chưa có khái niệm độ dài đại số, nó được phát biểu như sau.

Định lí 1. Cho các bộ ba điểm A, B, C và A', B', C' theo thứ tự thuộc các đường thẳng Δ và Δ'. Nếu AA', BB', CC' đôi một song song thì :

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}.$$

Trong khá nhiều trường hợp, định lí 1 đủ tốt cho việc làm toán. Nhưng, cũng trong khá nhiều trường hợp, định lí 1 không đủ tốt cho việc làm toán. Để giải quyết tình trạng này, dựa vào khái niệm độ dài đại số, người ta làm mạnh định lí 1 như sau.

Định lí 2. Cho các bộ ba điểm A, B, C và A', B', C' theo thứ tự thuộc các đường thẳng Δ và Δ'. Nếu các đường thẳng AA', BB', CC' đôi một song song thì :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}.$$

Đương nhiên định lí 1 là hệ quả trực tiếp của định lí 2.

Định lí 2 có chiều ngược lại.

Định lí 3. Cho các bộ ba điểm A, B, C và A', B', C' theo thứ tự thuộc các đường thẳng Δ và Δ'. Nếu $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$ và hai trong ba đường thẳng AA', BB', CC' song song thì cả ba đường thẳng AA', BB', CC' song song.

Xin chú ý rằng, định lí 1 không có chiều ngược lại.

Khi không cần phân biệt, các định lí 1, 2 đều được gọi là định lí Thales.

Khi cần phân biệt, định lí 1 được gọi là định lí Thales dạng hình học, định lí 2 được gọi là định lí Thales dạng đại số.

Định lí 3 được gọi là định lí Thales đảo.

Cũng như định lí Thales dạng hình học, định lí Thales dạng đại số có rất nhiều hệ quả. Dưới đây là một vài hệ quả của nó.

Hệ quả 1. Cho tam giác ABC và các điểm E, F khác A, B, C theo thứ tự thuộc các cạnh AB, AC. Khi đó :

$$EF \parallel BC \Leftrightarrow \frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AC}}.$$

Hệ quả 2. Cho tam giác ABC và đường thẳng Δ không đi qua A, song song với BC, cắt AB tại E. F thuộc Δ. Khi đó :

$$F \in AC \Leftrightarrow \frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{BC}}.$$

Chú ý. Trong hệ quả 2, các trục Δ, BC có các vectơ đơn vị cùng hướng. Nói rộng hơn, trong cùng một vấn đề, nếu có hai trục song song thì các vectơ đơn vị của các trục này cùng hướng.

Hệ quả 3. Cho ba đường thẳng a, b, c đồng quy tại O. Các đường thẳng Δ và Δ' không đi qua O, tương ứng cắt a, b, c tại A, B, C và A', B', C'. Khi đó :

$$\Delta \parallel \Delta' \Leftrightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}.$$

2. Ba định lí về sự đồng quy và sự thẳng hàng

a) Định lí Carnot

Định lí Carnot là định lí khá quan trọng của hình học phẳng, nó cho ta điều kiện cần và đủ để kiểm tra sự đồng quy của ba đường thẳng khi ba đường thẳng đó theo thứ tự vuông góc với ba cạnh của một tam giác.

Định lí 4. Cho tam giác ABC và các điểm M, N, P. Các đường thẳng Δ_A, Δ_B, Δ_C theo thứ tự qua M, N, P và theo thứ tự vuông góc với BC, CA, AB. Khi đó : Δ_A, Δ_B, Δ_C đồng quy khi và chỉ khi :

$$(MB^2 - MC^2) + (NC^2 - NA^2) + (PA^2 - PB^2) = 0.$$

Chứng minh. Để chứng minh định lí Carnot, ta cần có hai bổ đề.

Bổ đề 1. Cho hai điểm A, B phân biệt và một số k. Tồn tại duy nhất điểm H thuộc đường thẳng AB sao cho : $HA^2 - HB^2 = k$.

Chứng minh bổ đề 1. Gọi I là trung điểm của AB. Ta có :

$$HA^2 - HB^2 = k \Leftrightarrow \overline{HA}^2 - \overline{HB}^2 = k \Leftrightarrow (\overline{HA} - \overline{HB})(\overline{HA} + \overline{HB}) = k$$

$$\Leftrightarrow \overline{BA}(\overline{HI} + \overline{IA} + \overline{HI} + \overline{IB}) = k \Leftrightarrow 2\overline{BA}.\overline{HI} = k \Leftrightarrow \overline{IH} = \frac{k}{2\overline{AB}}.$$

Đẳng thức trên chứng tỏ sự tồn tại và duy nhất của điểm H.

Bổ đề 2. $CD \perp AB \Leftrightarrow CA^2 - CB^2 = DA^2 - DB^2$.

Chứng minh bổ đề 2. Gọi H, K theo thứ tự là hình chiếu của C, D trên AB. Theo định lí Pythagoras và theo bổ đề 1, ta có :

$$CA^2 - CB^2 = DA^2 - DB^2$$

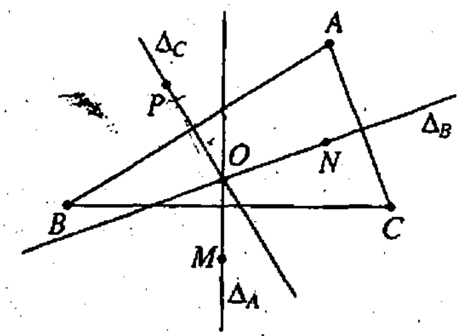
$$\Leftrightarrow (HA^2 + HC^2) - (HB^2 + HC^2) = (KA^2 + KD^2) - (KB^2 + KD^2)$$

$$\Leftrightarrow HA^2 - HB^2 = KA^2 - KB^2$$

$$\Leftrightarrow H \equiv K$$

$$\Leftrightarrow CD \perp AB.$$

Trở lại việc chứng minh định lí Carnot (h.1.40).



Hình 1.40

Theo giả thiết, Δ_A , Δ_B theo thứ tự vuông góc với BC, CA. Từ đó, với chú ý rằng BC, CA cắt nhau (tại C), ta có Δ_A , Δ_B cắt nhau. Gọi O là giao điểm của Δ_A và Δ_B. Theo bổ đề 2, ta có :

$$\Delta_A, \Delta_B, \Delta_C \text{ đồng quy} \Leftrightarrow O \in \Delta_C \Leftrightarrow PO \equiv \Delta_C \Leftrightarrow PO \perp AB$$

$$\Leftrightarrow PA^2 - PB^2 = OA^2 - OB^2 \Leftrightarrow (OB^2 - OA^2) + (PA^2 - PB^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (OB^2 - OC^2) + (OC^2 - OA^2) + (PA^2 - PB^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (MB^2 - MC^2) + (NC^2 - NA^2) + (PA^2 - PB^2) = 0. \quad \square$$

b) Định lí Ceva

Cũng như định lí Carnot, định lí Ceva cũng cho ta điều kiện cần và đủ để kiểm tra sự đồng quy của ba đường thẳng, nhưng, đó là ba đường thẳng theo thứ tự đi qua ba đỉnh của một tam giác.

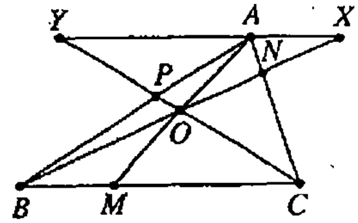
Định lí 5. Cho tam giác ABC và các điểm M, N, P khác A, B, C theo thứ tự thuộc các đường thẳng BC, CA, AB. Khi đó : các đường thẳng AM, BN, CP hoặc đồng quy hoặc đôi một song song khi và chỉ khi :

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -1.$$

Chứng minh.

Chứng minh điều kiện cần. Có hai trường hợp cần xem xét.

Trường hợp 1. AM, BN, CP đồng quy (h. 1.41).



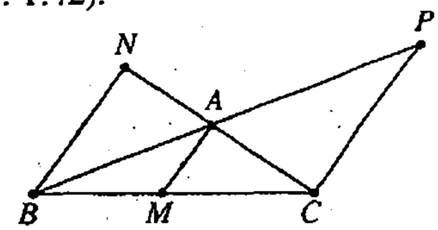
Hình 1.41

Giả sử AM, BN, CP đồng quy tại O. Qua A, vẽ đường thẳng song song với BC, đường thẳng này theo thứ tự cắt BN, CP tại X, Y. Theo các hệ quả 2 và 3 của định lí Thales dạng đại số :

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\cdot\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}\cdot\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=\frac{\overline{AX}}{\overline{AY}}\cdot\frac{\overline{BC}}{\overline{XA}}\cdot\frac{\overline{YA}}{\overline{CB}}$$

$$=\frac{\overline{AX}}{\overline{XA}}\cdot\frac{\overline{BC}}{\overline{CB}}\cdot\frac{\overline{YA}}{\overline{AY}}=(-1).(-1).(-1)=-1.$$

Trường hợp 2. AM, BN, CP đôi một song song (h. 1.42).



Hình 1.42

Theo hệ quả 1 của định lí Thales dạng đại số :

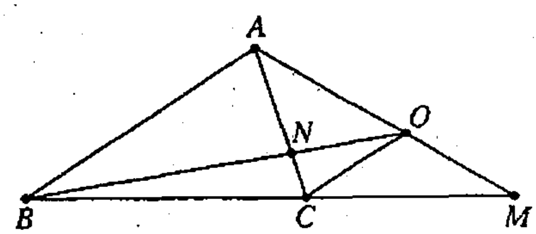
$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\cdot\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}\cdot\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\cdot\frac{\overline{BC}}{\overline{BM}}\cdot\frac{\overline{CM}}{\overline{CB}}$$

$$=\frac{\overline{MB}}{\overline{BM}}\cdot\frac{\overline{BC}}{\overline{CB}}\cdot\frac{\overline{CM}}{\overline{MC}}=(-1).(-1).(-1)=-1.$$

Tóm lại, trong cả hai trường hợp, ta đều có :

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\cdot\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}\cdot\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=-1.$$

Chứng minh điều kiện đủ. Ta chứng minh nếu ba đường AM, BN, CP không đôi một song song thì chúng phải đồng quy.



Hình 1.43

Giả sử AM, BN không song song. Đặt $O = AM \cap BN$. Khi đó, CO và AB không song song. Thật vậy, nếu CO song song với AB thì theo các hệ quả 1, 2 của định lí Thales dạng đại số, ta có (h.1.43) :

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{OC}}=-\frac{\overline{AB}}{\overline{CO}}=-\frac{\overline{NA}}{\overline{NC}}\Rightarrow\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\cdot\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}=-1.$$

Mặt khác, theo giả thiết : $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\cdot\dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}}\cdot\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=-1.$

Suy ra : $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=1\Rightarrow\overline{PA}=\overline{PB}\Rightarrow A\equiv B$, mâu thuẫn.

Vậy, CO không song song với AB. Đặt $P' = CO \cap AB$. Theo kết quả đạt được trong phép chứng minh điều kiện cần : $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}.\frac{\overline{P'A}}{\overline{P'B}} = -1$. Từ đó, với chú ý rằng $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}.\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -1$, ta có : $\frac{\overline{P'A}}{\overline{P'B}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \Rightarrow P' \equiv P$.

Tóm lại, AM, BN, CP đồng quy. □

Chú ý. Khi các điểm M, N, P thuộc các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC, định lí Ceva được phát biểu đơn giản như sau :

$$AM, BN, CP \text{ đồng quy khi và chỉ khi} \Leftrightarrow \frac{MB}{MC}.\frac{NC}{NA}.\frac{PA}{PB} = 1.$$

c) Định lí Menelaus

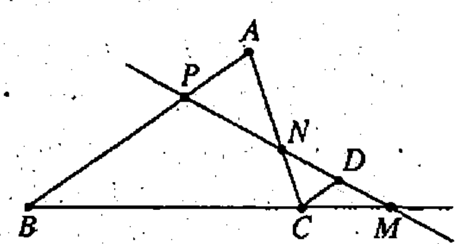
Khác với định lí Carnot và định lí Ceva, định lí Menelaus lại cho ta điều kiện cần và đủ để kiểm tra sự thẳng hàng của ba điểm khi ba điểm đó theo thứ tự thuộc ba đường thẳng chứa các cạnh của một tam giác.

Định lí 6. Cho tam giác ABC và các điểm M, N, P khác A, B, C, theo thứ tự thuộc các đường thẳng BC, CA, AB. Khi đó : M, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}.\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1.$$

Chứng minh

Chứng minh điều kiện cần. Giả sử M, N, P thẳng hàng. Qua C, vẽ đường thẳng song song với AB, đường thẳng này cắt đường thẳng qua M, N, P tại D. Theo hệ quả 2 của định lí Thales dạng đại số (h 1.44) :



Hình 1.44

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}.\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{DC}}.\frac{\overline{DC}}{\overline{PA}}.\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1.$$

Chứng minh điều kiện đủ. Tương tự như phép chứng minh điều kiện đủ của định lí 5, MN không song song với AB. Đặt $P' = MN \cap AB$. Lại tương tự như phép chứng minh điều kiện đủ của định lí 5, $P' \equiv P$. Suy ra M, N, P thẳng hàng. □

3. Tỉ số kép của hàng điểm

a) Hàng điểm và tỉ số kép của nó

Bộ bốn điểm đôi một khác nhau, có kể đến thứ tự, cùng thuộc một đường thẳng được gọi là hàng điểm. Đôi khi, để cho đơn giản, có thể thay thuật ngữ "*hàng điểm*" bởi thuật ngữ "*hàng*".

Đường thẳng nói trong định nghĩa trên được gọi là *giá của hàng.*

Tỉ số kép của hàng A, B, C, D là một số, kí hiệu là $(ABCD)$ và được xác định như sau : $(ABCD) = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$.

Rõ ràng nếu $A(a), B(b), C(c), D(d)$ thì : $(ABCD) = \dfrac{a-c}{b-c} : \dfrac{a-d}{b-d}$.

Dựa vào kết quả này, có thể dễ dàng chứng minh các tính chất sau của tỉ số kép.

b) Các tính chất của tỉ số kép.

- $(ABCD) = (CDAB) = (BADC) = (DCBA)$.
- $(ABCD) = \dfrac{1}{(BACD)} = \dfrac{1}{(ABDC)}$.
- $(ABCD) = 1 - (ACBD) = 1 - (DBCA)$.
- Nếu $(ABCD) = (ABCD')$ thì $D \equiv D'$.
- $(ABCD) \neq 1$.

c) Hàng điều hoà

Nếu $(ABCD) = -1$ thì hàng A, B, C, D được gọi là hàng điều hoà.

Nói cách khác, nếu $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$ thì A, B, C, D được gọi là hàng điều hoà.

Khi A, B, C, D là hàng điều hoà, hoặc ta nói : cặp điểm A, B chia điều hoà cặp điểm C, D ; hoặc ta nói : cặp điểm A, B và cặp điểm C, D là hai cặp điểm liên hợp điều hoà

Theo mục b), dễ thấy nếu $(ABCD) = -1$ thì

$$(CDAB) = (BADC) = (DCBA) = (BACD) = (ABDC) = -1.$$

d) Biểu thức toạ độ đối với hàng điều hoà

Nếu $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$ thì :

$$(ABCD) = -1 \Leftrightarrow 2(ab + cd) = (a + b)(c + d) \qquad (1)$$

Chọn A làm gốc của trục, từ (1), dễ thấy :

$$(ABCD) = -1 \Leftrightarrow \frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}} \text{ (\textit{hệ thức Descartes})}.$$

$$(ABCD) = -1 \Leftrightarrow \overline{IA}^2 = \overline{IC}.\overline{ID} \text{ (\textit{hệ thức Newton})}.$$

(I là trung điểm của AB)

Gọi J là trung điểm của CD, theo hệ thức Descartes, ta có :

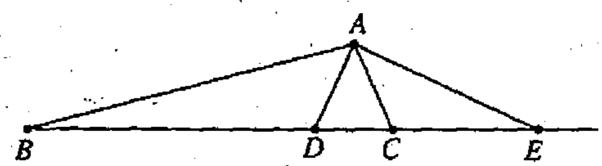
$$(ABCD) = -1 \Leftrightarrow \overline{AC}.\overline{AD} = \overline{AB}.\overline{AJ} \text{ (\textit{hệ thức Maclaurin})}.$$

e) Những hàng điều hoà cơ bản

Định lí 7. Nếu AD, AE theo thứ tự là phân giác trong và phân giác ngoài của tam giác ABC thì $(BCDE) = -1$.

Chứng minh. (h.1.45) Theo tính chất của phân giác trong và phân giác ngoài của tam giác :

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}; \frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}.$$



Hình 1.45

Từ đó, với chú ý rằng D nằm trong đoạn BC, E nằm ngoài đoạn BC, ta có :

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = -\frac{AB}{AC}; \frac{\overline{EB}}{\overline{EC}} = \frac{AB}{AC}.$$

Suy ra : $\dfrac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = -\dfrac{\overline{EB}}{\overline{EC}} \Rightarrow (BCDE) = -1.$

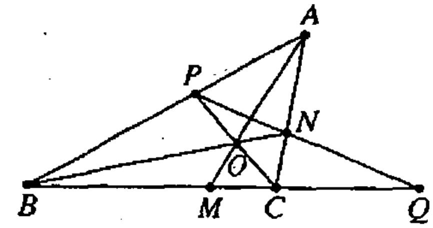
Định lí 8. Cho tam giác ABC và điểm O không thuộc các đường thẳng BC, CA, AB. Các đường thẳng AO, BO, CO theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại M, N, P. Hai đường thẳng BC, NP giao nhau tại Q. Khi đó, $(BCMQ) = -1$.

Chứng minh. (h.1.46). Áp dụng định lí Ceva cho tam giác ABC với sự đồng quy của AM, BN, CP, ta có

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}.\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -1.$$

Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác ABC với sự thẳng hàng Q, N, P, ta có :

$$\frac{\overline{QB}}{\overline{QC}}.\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}.\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=1.$$



Hình 1.46

Từ hai đẳng thức trên, dễ thấy : $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}}=-\dfrac{\overline{QB}}{\overline{QC}}$

hay $(BCMQ)=-1$. □

Định lí 9. Từ điểm S nằm ngoài đường tròn (O), ta kẻ tới (O) các tiếp tuyến SA, SB (A, B thuộc (O)). Một đường thẳng qua S cắt (O) tại M, N. Gọi I là giao điểm của AB và MN. Khi đó : $(SIMN)=-1$.

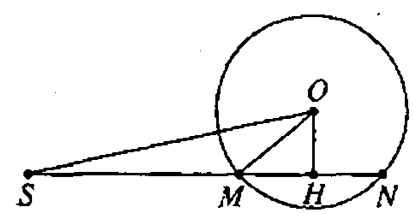
Chứng minh. Ta cần hai kết quả quan trọng là hệ quả trực tiếp của bổ đề sau.

Bổ đề. Qua điểm S không thuộc đường tròn (O), kẻ một đường thẳng cắt (O) tại M, N. Khi đó :

$$\overline{SM}.\overline{SN}=SO^2-R^2.$$

Chứng minh bổ đề. Gọi H là hình chiếu của O trên MN (h.1.47).

Đương nhiên, H là trung điểm của MN.



Hình 1.47

Theo bổ đề 2 trong phép chứng minh định lí 4, ta có :

$$SO^2-R^2=SO^2-MO^2=SH^2-MH^2=(\overline{SH}-\overline{MH})(\overline{SH}+\overline{MH})$$
$$=(\overline{SH}-\overline{MH})(\overline{SH}+\overline{HN})=\overline{SM}.\overline{SN}.$$

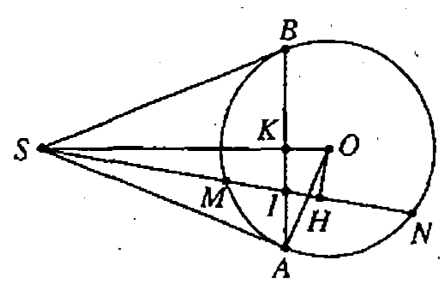
Hệ quả 1. Nếu các đường thẳng AB, CD cắt nhau tại S khác A, B, C, D thì : A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn khi và chỉ khi $\overline{SA}.\overline{SB}=\overline{SC}.\overline{SD}$.

Hệ quả 2. Nếu các đường thẳng AB, SC cắt nhau tại S khác A, B thì : đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tiếp xúc với SC khi và chỉ khi $\overline{SA}.\overline{SB}=\overline{SC}^2$.

Trở lại việc chứng minh định lí 9.

Gọi H là hình chiếu của O trên MN. Đặt $K=SO\cap AB$ (h.1.48).

Dễ thấy : $\widehat{IKO}=\widehat{IHO}$ (cùng bằng 90°). Suy ra tứ giác $OHIK$ nội tiếp.



Hình 1.48

Vậy, theo các hệ quả 1, 2 của bổ đề trên và theo hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có : $\overline{SM}.\overline{SN} = \overline{SA}^2 = \overline{SK}.\overline{SO} = \overline{SI}.\overline{SH}$. Từ đó, với chú ý rằng H là trung điểm của MN, theo hệ thức Maclaurin : $(SIMN) = -1$.

4. Tỉ số kép của chùm đường thẳng

a) Chùm đường thẳng và tỉ số kép của nó

Tập hợp các đường thẳng cùng đi qua một điểm được gọi là *một chùm đầy đủ đường thẳng.*

Điểm nói trong định nghĩa trên được gọi là tâm của chùm đầy đủ đường thẳng.

Bộ bốn đường thẳng đôi một khác nhau, có kể đến thứ tự, cùng thuộc một chùm đầy đủ đường thẳng được gọi là chùm đường thẳng. Đôi khi, để cho đơn giản, có thể thay thuật ngữ "chùm đường thẳng" bởi thuật ngữ "chùm".

Tâm của chùm đầy đủ đường thẳng nói trong định nghĩa trên được gọi là tâm của chùm.

Để đi đến khái niệm tỉ số kép của chùm, ta cần có hai định lí sau.

Định lí 10. Cho a, b, c, d là chùm đường thẳng tâm O. Đường thẳng Δ không đi qua O, theo thứ tự cắt a, b, c, d tại A, B, C, D. Đường thẳng Δ' không đi qua O, theo thứ tự cắt a, b, c tại A', B', C'. Khi đó : $\Delta' \,//\, d \Leftrightarrow (ABCD) = \dfrac{\overline{C'A'}}{\overline{C'B'}}$.

Chứng minh.

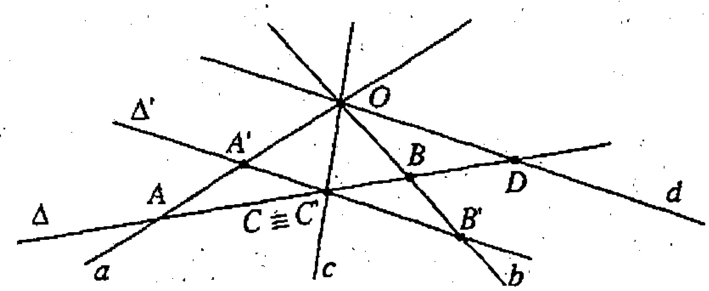
Chứng minh điều kiện cần. Không mất tính tổng quát, giả sử $C \equiv C'$ (h.1.49).

Theo hệ quả 2 của định lí Thales dạng đại số :

$$(ABCD) = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{DA}} . \frac{\overline{DB}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{C'A'}}{\overline{DO}} . \frac{\overline{DO}}{\overline{C'B'}} = \frac{\overline{C'A'}}{\overline{C'B'}}.$$

Chứng minh điều kiện đủ. Kẻ đường thẳng Δ'' song song với d, theo thứ tự cắt a, b, c tại A'', B'', C''. Theo kết quả đạt được trong phép chứng minh điều kiện cần :

$$(ABCD) = \frac{\overline{C''A''}}{\overline{C''B''}}.$$



Hình 1.49

Mặt khác, theo giả thiết : $(ABCD) = \dfrac{\overline{C'A'}}{\overline{C'B'}}$.

Suy ra : $\dfrac{\overline{C''A''}}{\overline{C''B''}} = \dfrac{\overline{C'A'}}{\overline{C'B'}}$.

Từ đó, theo hệ quả 3 của định lí Thales dạng đại số : $\Delta'' \parallel \Delta'$.

Vậy : $\Delta' \parallel d$. □

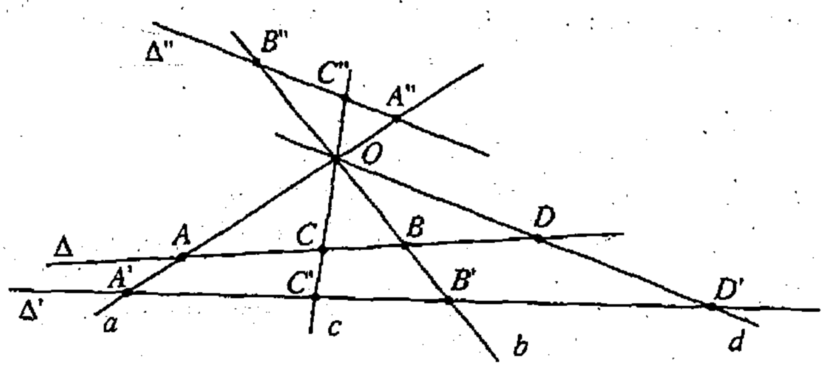
Chú ý. Khi ba điểm A, B, M thẳng hàng, tỉ số $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ được gọi là *tỉ số đơn* của A, B, M và được kí hiệu là (ABM).

Định lí 10 cho ta thấy mối liên hệ giữa tỉ số đơn và tỉ số kép :

$$(ABCD) = (A'B'C').$$

Định lí 11. Cho a, b, c, d là chùm đường thẳng tâm O. Đường thẳng Δ không đi qua O, Theo thứ tự cắt a, b, c, d tại A, B, C, D. Đường thẳng Δ' không đi qua O, theo thứ tự cắt a, b, c, d tại A', B', C', D'. Khi đó : $(ABCD) = (A'B'C'D')$.

Chứng minh. Kẻ đường thẳng Δ'' không đi qua O, song song với d, theo thứ tự cắt a, b, c tại A'', B'', C'' (h.1.50).



Hình 1.50

Theo bổ đề trên :

$$\begin{cases}(ABCD) = (A''B''C'') \\ (A'B'C'D') = (A''B''C'')\end{cases} \Rightarrow (ABCD) = (A'B'C'D'). \square$$

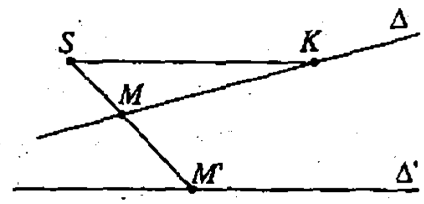
Theo định lí 10, khi Δ thay đổi, tỉ số kép $(ABCD)$ không đổi.

Số không đổi $(ABCD)$ nói trên được gọi là tỉ số kép của chùm a, b, c, d và được kí hiệu là $(abcd)$.

Từ này về sau, thay cho kí hiệu (OM, ON, OP, OQ) tỉ số kép của chùm (tâm O) OM, ON, OP, OQ được kí hiệu đơn giản là $O(MNPQ)$ (M, N, P, Q không buộc phải thẳng hàng).

b) Phép chiếu xuyên tâm và hai định lí cơ bản

Cho hai đường thẳng Δ, Δ' và điểm S không thuộc Δ, Δ'. Gọi K là điểm thuộc Δ sao cho $SK \parallel \Delta'$. Gọi f là ánh xạ đi từ tập hợp các điểm thuộc $\Delta \setminus \{K\}$ tới tập hợp các điểm thuộc Δ', xác định như sau : $f(M) = M'$ sao cho S, M, M' thẳng hàng (h.1.51).



Hình 1.51

Ánh xạ f được gọi là phép chiếu xuyên tâm đi từ $\Delta\setminus\{K\}$ tới Δ'. Điểm S được gọi là tâm của f.

Nhờ khái niệm phép chiếu xuyên tâm, định lí 11 được phát biểu đơn giản như sau.

Nếu phép chiếu xuyên tâm f biến hàng điểm A, B, C, D thành hàng điểm A', B', C', D' thì $(ABCD) = (A'B'C'D')$.

Đơn giản hơn nữa :

Phép chiếu xuyên tâm bảo toàn tỉ số kép.

Định lí 12. Cho hai đường thẳng Δ, Δ' cắt nhau tại O. Các điểm A, B, C thuộc Δ ; các điểm A', B', C' thuộc Δ'. Khi đó : AA', BB', CC' hoặc đồng quy hoặc đôi một song song khi và chỉ khi $(OABC) = (OA'B'C')$.

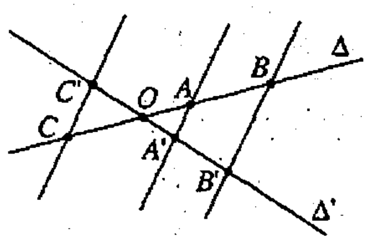
Chứng minh.

Chứng minh điều kiện cần. Có hai trường hợp cần xem xét.

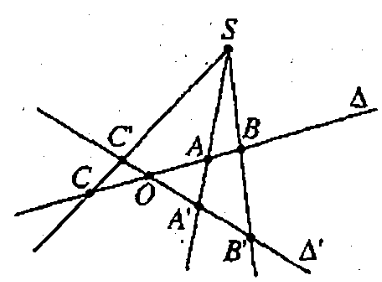
Trường hợp 1. AA', BB', CC' đôi một song song (h.1.52).

Vì AA', BB', CC' đôi một song song nên theo định lí Thales dạng đại số :

$$\begin{cases} \dfrac{\overline{BO}}{\overline{BA}} = \dfrac{\overline{B'O}}{\overline{B'A'}} \\[2mm] \dfrac{\overline{CO}}{\overline{CA}} = \dfrac{\overline{C'O}}{\overline{C'A'}} \end{cases} \Rightarrow \frac{\overline{BO}}{\overline{BA}} : \frac{\overline{CO}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{B'O}}{\overline{B'A'}} : \frac{\overline{C'O}}{\overline{C'A'}} \Rightarrow (OABC) = (OA'B'C').$$



Hình 1.52



Hình 1.53

Trường hợp 2. AA', BB', CC' đồng quy (h.1.53).

Gọi S là điểm đồng quy của AA', BB', CC'. Qua phép chiếu xuyên tâm S, hàng O, A, B, C biến thành hàng O, A', B', C'.

Vậy, theo định lí 11, $(OABC) = (OA'B'C')$.

Chứng minh điều kiện đủ.

Ta chứng minh nếu AA', BB', CC' không đôi một song song thì chúng phải đồng quy.

Thật vậy, vì AA', BB', CC' không đôi một song song nên trong ba đường AA', BB', CC' có hai đường cắt nhau. Không mất tính tổng quát, giả sử AA', BB' cắt nhau.

Đặt $S = AA' \cap BB'$; $C'' = SC \cap \Delta'$.

Nhờ kết quả đạt được trong phép chứng minh điều kiện cần, ta có

$$(OABC) = (OA'B'C'').$$

Theo giả thiết : $(OABC) = (OA'B'C')$.

Từ hai đẳng thức trên, theo tính chất của tỉ số kép (xem mục 3), $C'' \equiv C'$.

Vậy AA', BB', CC' đồng quy. □

Định lí 13. Cho hai chùm $O(ABCO')$ và $O'(ABCO)$. Khi đó : A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $O(ABCO') = O'(ABCO)$.

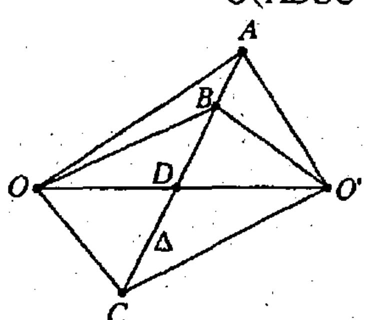
Chứng minh

Chứng minh điều kiện cần. Gọi Δ là đường thẳng chứa A, B, C. Có hai trường hợp cần xem xét.

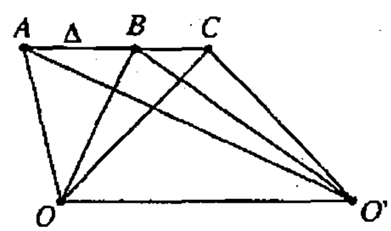
Trường hợp 1. Δ không song song với OO' (h.1.54).

Đặt $D = OO' \cap \Delta$. Theo định nghĩa tỉ số kép :

$$O(ABCO') = (ABCD) = O'(ABCO).$$



Hình 1.54



Hình 1.55

Trường hợp 2. Δ song song với OO' (h.1.55).

Vì Δ song song với OO' nên theo định lí 10 :

$$O(ABCO') = (ABC) = O'(ABCO).$$

Chứng minh điều kiện đủ. Có hai trường hợp cần xem xét.

Trường hợp 1. AB không song song với OO'.

Đặt $D = OO' \cap AB$. Nếu $OC // AB$ thì theo định lí 10 : $O(ABO'C) = (ABD)$. Suy ra : $O'(ABOC) = (ABD)$. Từ đó, lại theo định lí 10 : $O'C // AB$. Do đó : $OC // O'C$. Mâu thuẫn! Vậy OC không song song với Δ.

Tương tự : $O'C$ không song song với Δ.

Gọi C_1, C_1' theo thứ tự là giao của AB với OC, $O'C$. Theo định nghĩa tỉ số kép của một chùm và theo giả thiết :

$$(ABDC_1) = O(ABO'C) = O'(ABOC) = (ABDC_1').$$

Theo tính chất của tỉ số kép (xem mục 3), suy ra $C_1 \equiv C_1'$.

Do đó, $C_1 \equiv C_1' \equiv OC \cap O'C \equiv C$.

Điều đó có nghĩa là A, B, C thẳng hàng.

Trường hợp 2. AB song song với OO'.

Gọi C_1, C_1' theo thứ tự là giao của AB với OC, $O'C$. Theo định lí 10 và theo giả thiết : $(ABC_1) = O(ABCO') = O'(ABCO) = (ABC_1')$.

Suy ra $C_1 \equiv C_1'$. Do đó, $C_1 \equiv C_1' \equiv OC \cap O'C \equiv C$.

Điều đó có nghĩa là A, B, C thẳng hàng.

5. Chùm điều hoà

Chùm a, b, c, d được gọi là điều hoà nếu $(abcd) = -1$.

Khi chùm a, b, c, d là điều hoà, hoặc ta nói : cặp đường thẳng a, b chia điều hoà cặp đường thẳng c, d ; hoặc ta nói : a, b và c, d là hai cặp đường thẳng liên hợp điều hoà.

Định lí 15. Với chùm a, b, c, d các điều kiện sau là tương đương :

i) $(abcd) = -1$.

ii) Tồn tại một đường thẳng song song với một đường của chùm và định ra trên ba đường còn lại hai đoạn thẳng bằng nhau.

iii) Mọi đường thẳng song song với một đường của chùm định ra trên ba đường còn lại hai đoạn thẳng bằng nhau.

Chứng minh. Định lí 15 là hệ quả trực tiếp của định lí 10. □

Định lí 16 sau đây liên quan tới khái niệm đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng cắt nhau.

Cho hai đường thẳng xx', yy' cắt nhau tại O. Các tia Oz, Oz', Ot, Ot' theo thứ tự là phân giác của các góc $\widehat{xOy}$, $\widehat{x'Oy'}$, $\widehat{xOy'}$, $\widehat{x'Oy}$. Khi đó, các đường thẳng zz', tt' cùng được gọi là phân giác của các góc tạo bởi các đường thẳng xx', yy'.

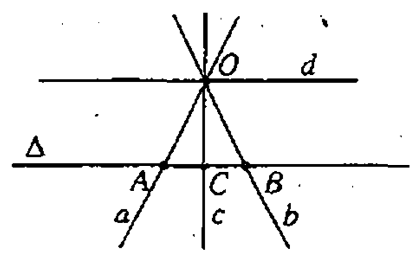
Định lí 16. Với chùm điều hoà $(abcd)$, các điều kiện sau là tương đương :

i) $c \perp d$.

ii) c là một phân giác của các góc tạo bởi a, b.

iii) d là một phân giác của các góc tạo bởi a, b.

Chứng minh. Gọi O là tâm của chùm a, b, c, d. Kẻ đường thẳng Δ song song với d. Gọi A, B, C theo thứ tự là giao của Δ với a, b, c (h. 1.56).



Hình 1.56

(i $\Rightarrow$ ii). Theo định lí 10, $CA = CB$.

Mặt khác, vì $c \perp d$ nên $AB \perp OC$.

Suy ra, tam giác OAB cân tại O. Do đó, $\widehat{AOC} = \widehat{BOC}$. Vậy c là phân giác của các góc tạo bởi a, b.

(ii$\Rightarrow$i). Theo định lí 10, $CA = CB$.

Mặt khác, vì c là một phân giác của các góc tạo bởi a, b nên $\widehat{AOC} = \widehat{BOC}$.

Suy ra tam giác OAB cân tại O. Do đó, $AB \perp OC$. Nói cách khác, $\Delta \perp c$. Từ đó, với chú ý rằng $\Delta \,//\, d$, ta có : $c \perp d$.

Hoàn toàn tương tự, ta chứng minh được (iii $\Leftrightarrow$ i). □

5. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho bốn điểm thẳng hàng A, B, C, M. Chứng minh rằng :

$$\overline{MA}.\overline{BC} + \overline{MB}.\overline{CA} + \overline{MC}.\overline{AB} = 0 \text{ (\textbf{\textit{hệ thức Euler}})}.$$

Giải

Cách 1. Giả sử $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $M(m)$. Ta có :

$$\overline{MA}.\overline{BC} + \overline{MB}.\overline{CA} + \overline{MC}.\overline{AB}$$
$$= (a-m)(c-b) + (b-m)(a-c) + (c-m)(b-a).$$

Khai triển và rút gọn, suy ra :

$$\overline{MA}.\overline{BC} + \overline{MB}.\overline{CA} + \overline{MC}.\overline{AB} = 0.$$

Cách 2.

$$\overline{MA}.\overline{BC} + \overline{MB}.\overline{CA} + \overline{MC}.\overline{AB}$$

$$= \overline{MA}.(\overline{MC} - \overline{MB}) + \overline{MB}.(\overline{MA} - \overline{MC}) + \overline{MC}.(\overline{MB} - \overline{MA})$$

$$= \overline{MA}.\overline{MC} - \overline{MA}.\overline{MB} + \overline{MB}.\overline{MA} - \overline{MB}.\overline{MC} + \overline{MC}.\overline{MB} - \overline{MC}.\overline{MA}$$

$$= 0. \square$$

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC và điểm M thuộc đường thẳng BC. Chứng minh rằng :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{\overline{MC}}{\overline{BC}}\overrightarrow{AB} - \frac{\overline{MB}}{\overline{BC}}\overrightarrow{AC}.$$

Giải

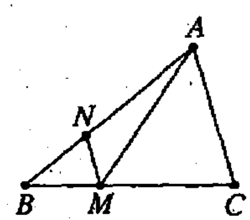
Cách 1. (h.1.57) Kẻ $MN \parallel AC$ ($N \in AB$). Gọi $\vec{i}, \vec{j}$ theo thứ tự là vectơ đơn vị của các trục AB, MN. Ta có :

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NM} = \overline{AN}.\vec{i} + \overline{NM}.\vec{j}$$

$$= \frac{\overline{AN}}{\overline{AB}}\overline{AB}.\vec{i} + \frac{\overline{NM}}{\overline{AC}}\overline{AC}.\vec{j} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AB}}\overrightarrow{AB} + \frac{\overline{NM}}{\overline{AC}}\overrightarrow{AC}. \qquad (1)$$

Mặt khác, theo hệ quả 1, 2 của định lí Thales dạng đại số :

$$\begin{cases} \dfrac{\overline{AN}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{CM}}{\overline{CB}} = \dfrac{\overline{MC}}{\overline{BC}} \\ \dfrac{\overline{NM}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{BM}}{\overline{BC}} = -\dfrac{\overline{MB}}{\overline{BC}}. \end{cases} \qquad (2)$$



Hình 1.57

Từ (1) và (2) suy ra :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{\overline{MC}}{\overline{BC}}\overrightarrow{AB} - \frac{\overline{MB}}{\overline{BC}}\overrightarrow{AC}.$$

Cách 2. Gọi $\vec{i}$ là vectơ đơn vị của trục BC. Ta có :

$$\begin{cases} \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} \\ \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{MC}.\overrightarrow{AM} = \overline{MC}.\overrightarrow{AB} + \overline{MC}.\overrightarrow{BM} \\ \overline{MB}.\overrightarrow{AM} = \overline{MB}.\overrightarrow{AC} + \overline{MB}.\overrightarrow{CM}. \end{cases}$$

Suy ra :

$$(\overline{MC} - \overline{MB})\overrightarrow{AM} = \overline{MC}.\overrightarrow{AB} - \overline{MB}.\overrightarrow{AC} + \overline{MC}.\overrightarrow{BM} - \overline{MB}.\overrightarrow{CM}$$

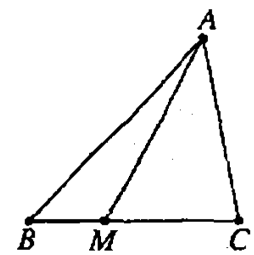
$$\Rightarrow \overline{BC}.\overrightarrow{AM} = \overline{MC}.\overrightarrow{AB} - \overline{MB}.\overrightarrow{AC} + \overline{MC}.(\overline{BM}.\vec{i}) - \overline{MB}.(\overline{CM}.\vec{i}).$$

Từ đó, với chú ý rằng

$\overline{MC}(\overline{BM}.\vec{i}) - \overline{MB}(\overline{CM}.\vec{i}) = (\overline{MC}.\overline{BM} - \overline{MB}.\overline{CM})\vec{i} = 0.\vec{i} = \vec{0}$, ta có :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{\overline{MC}}{\overline{BC}}\overrightarrow{AB} - \frac{\overline{MB}}{\overline{BC}}\overrightarrow{AC}. \ \square$$

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC, điểm M trên BC và vectơ $\vec{u} \,//\, \overrightarrow{AM}$. Biết rằng : $\vec{u} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$. Chứng minh rằng : $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = -\dfrac{\beta}{\alpha}$.



Hình 1.58

Giải. (h.1.58) Vì $\vec{u} \,//\, \overrightarrow{AM}$ nên $\vec{u} = k\overrightarrow{AM}$ $(k \in \mathbb{R})$.

Suy ra : $k\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$. (1)

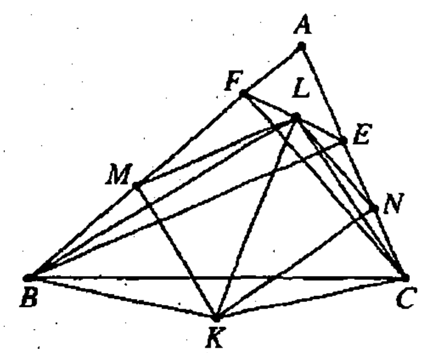
Mặt khác, theo VD 2 : $\overrightarrow{AM} = \dfrac{\overline{MC}}{\overline{BC}}\overrightarrow{AB} - \dfrac{\overline{MB}}{\overline{BC}}\overrightarrow{AC}$. (2)

Từ (1) và (2), với chú ý rằng $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM}$ đôi một không cùng phương, ta có :

$$\frac{\dfrac{\overline{MC}}{\overline{BC}}}{\alpha} = \frac{-\dfrac{\overline{MB}}{\overline{BC}}}{\beta} \Rightarrow \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = -\frac{\beta}{\alpha}. \ \square$$

Nhận xét. Đẳng thức $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = -\dfrac{\beta}{\alpha}$ cho ta cách tính tỉ số $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}}$ mà không cần vẽ điểm M.

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao BE, CF. Các điểm M, N, L theo thứ tự là trung điểm của BF, CE, EF. Đường thẳng qua M, vuông góc với BL và đường thẳng qua N, vuông góc với CL cắt nhau tại K. Chứng minh rằng : $KB = KC$.



Hình 1.59

Giải. (h.1.59) Theo giả thiết :

$$\begin{cases} MB = \dfrac{1}{2}FB;\ ML = \dfrac{1}{2}EB;\ NC = \dfrac{1}{2}EC;\ NL = \dfrac{1}{2}FC \\ KM \perp BL;\ KN \perp CL;\ BE \perp CA;\ CF \perp BA. \end{cases}$$

Vậy, theo bổ đề 2 trong phép chứng minh định lí Carnot, ta có :

$$KB^2 - KL^2 = MB^2 - ML^2 = \frac{1}{4}(FB^2 - EB^2)$$
$$= \frac{1}{4}\left[(BC^2 - FC^2) - (BC^2 - EC^2)\right]$$
$$= \frac{1}{4}(EC^2 - FC^2) = NC^2 - NL^2 = KC^2 - KL^2.$$

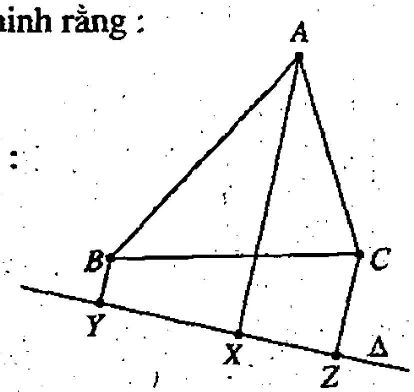
Suy ra : $KB = KC$. □

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC và đường thẳng Δ. Gọi X, Y, Z theo thứ tự là hình chiếu của A, B, C trên Δ. Các đường thẳng $\Delta_A, \Delta_B, \Delta_C$ theo thứ tự qua X, Y, Z và tương ứng vuông góc với BC, CA, AB. Chứng minh rằng :

$\Delta_A, \Delta_B, \Delta_C$ đồng quy.

Giải. (h.1.60). Vì AX, BY, CZ vuông góc với Δ nên :

$$(XB^2 - XC^2) + (YC^2 - YA^2) + (ZA^2 - ZB^2)$$
$$= (ZA^2 - YA^2) + (XB^2 - ZB^2) + (YC^2 - XC^2)$$
$$= (ZX^2 - YX^2) + (XY^2 - ZY^2) + (YZ^2 - XZ^2)$$
$$= 0.$$



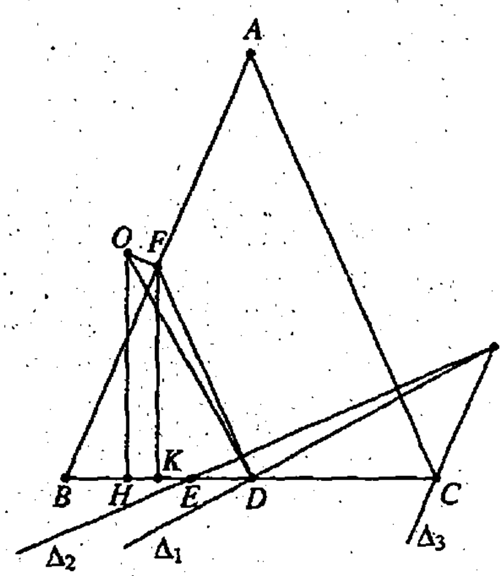
Hình 1.60

Vậy, theo định lí Carnot, $\Delta_A, \Delta_B, \Delta_C$ đồng quy. □

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC cân tại A. D là trung điểm của BC. E nằm trên đường thẳng BC. O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE. Đường thẳng Δ_1 qua D, vuông góc với OD. Đường thẳng Δ_2 qua E, vuông góc với AC. Đường thẳng Δ_3 qua C, song song với AB. Chứng minh rằng :

$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ đồng quy.

Giải. Gọi F là hình chiếu của O trên AB và H, K theo thứ tự là hình chiếu của O, F trên BC (h.1.61).



Hình 1.61

Coi BC là một trục. Giả sử : $D(0)$, $B(a)$, $E(x)$.

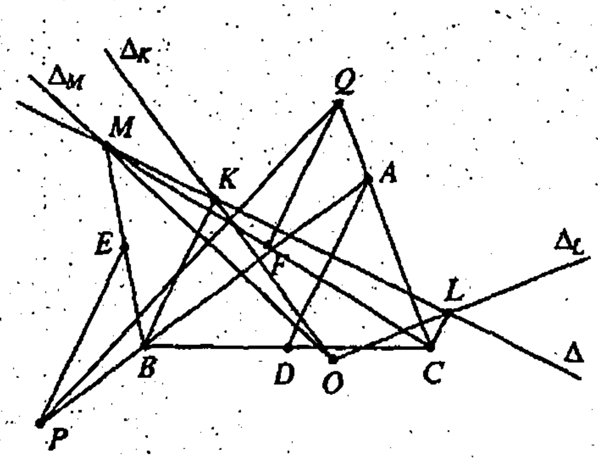
Dễ thấy : $C(-a)$, $K\left(\dfrac{a}{2}\right)$, $H\left(\dfrac{a+x}{2}\right)$. Từ đó, với chú ý rằng $OH \perp BC$, $FK \perp BC$, theo bổ đề 2 trong phép chứng minh định lí Carnot, ta có :

$$(DO^2 - DD^2) + (ED^2 - EF^2) + (CF^2 - CO^2)$$
$$= (DO^2 - CO^2) + (CF^2 - EF^2) + ED^2$$
$$= (DH^2 - CH^2) + (CK^2 - EK^2) + ED^2$$
$$= \left(\frac{a+x}{2} - 0\right)^2 - \left[\frac{a+x}{2} - (-a)\right]^2 + \left[\frac{a}{2} - (-a)\right]^2 - \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 + (0-x)^2.$$

Từ đó, với chú ý rằng Δ_1, Δ_2, Δ_3 lần lượt vuông góc với OD, DF, FO, áp dụng định lí Carnot cho tam giác FOD, ta có : Δ_1, Δ_2, Δ_3 đồng quy. □

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC, trung tuyến AD. Đường thẳng Δ vuông góc với AD. M chạy trên Δ. E, F theo thứ tự là trung điểm của MB, MC. Các điểm P, Q theo thứ tự thuộc AB, AC sao cho EP, FQ cùng vuông góc với Δ. Chứng minh rằng đường thẳng đi qua M và vuông góc với PQ luôn đi qua một điểm cố định.

Giải. Gọi K, L theo thứ tự là hình chiếu của B, C trên Δ. Gọi Δ_M, Δ_K, Δ_L là các đường thẳng theo thứ tự đi qua M, K, L và vuông góc với QP, PA, AQ (h.1.62).



Hình 1.62

Vì E, F, D theo thứ tự là trung điểm của MB, MC, BC nên PE, QF, AD theo thứ tự là trung trực của MK, ML, KL.

Do đó : $MP = KP$; $MQ = LQ$; $KA = LA$.

Suy ra :

$$(MQ^2 - MP^2) + (KP^2 - KA^2) + (LA^2 - LQ^2)$$
$$= (MQ^2 - LQ^2) + (KP^2 - MP^2) + (LA^2 - KA^2)$$
$$= 0.$$

Vậy, áp dụng định lí Carnot cho tam giác QPA, ta có Δ_M, Δ_K, Δ_L đồng quy. Điều đó có nghĩa là Δ_M luôn đi qua điểm cố định O (giao của Δ_K, Δ_L). □

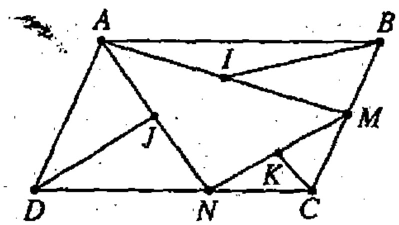
Ví dụ 8. Cho hình bình hành $ABCD$. Các điểm M, N theo thứ tự thuộc các cạnh BC, CD. Các điểm I, J, K theo thứ tự là trung điểm của AM, NA, MN. Chứng minh rằng BI, DJ, CK đồng quy.

Giải. (h.1.63) Giả sử $\overrightarrow{BM} = m\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{DN} = n\overrightarrow{DC}$.

Gọi X, Y, Z theo thứ tự là giao của BI, DJ, CK với DC, CB, BD.

Ta có : $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}) + \frac{m}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \frac{m-1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Từ đó, theo VD 3 : $\dfrac{\overline{XD}}{\overline{XC}} = -(m-1) = 1 - m$.



Hình 1.63

Tương tự : $\dfrac{\overline{YC}}{\overline{YB}} = -\dfrac{1}{n-1} = \dfrac{1}{1-n}$.

Lại có : $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CN}$

$$= \frac{1}{2}(1-m)\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}(1-n)\overrightarrow{CD}.$$

Từ đó, lại theo VD 3 : $\dfrac{\overline{ZB}}{\overline{ZD}} = \dfrac{n-1}{1-m}$.

Suy ra : $\dfrac{\overline{XD}}{\overline{XC}}.\dfrac{\overline{YC}}{\overline{YB}}.\dfrac{\overline{ZB}}{\overline{ZD}} = (1-m).\dfrac{1}{1-n}.\dfrac{n-1}{1-m} = -1$.

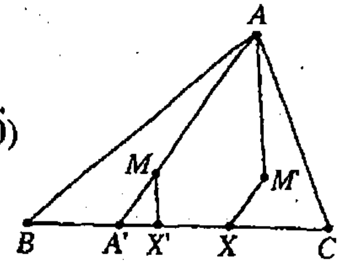
Áp dụng định lí Ceva cho tam giác BDC với chú ý rằng BI, DJ, CK không thể song song, ta có : BI, DJ, CK đồng quy. □

Ví dụ 9. Cho tam giác ABC và hai điểm M, M' nằm trong tam giác. Các điểm X, Y, Z tương ứng thuộc các cạnh BC, CA, AB sao cho $M'X$, $M'Y$, $M'Z$ theo thứ tự song song với MA, MB, MC. Các điểm X', Y', Z' tương ứng thuộc các cạnh BC, CA, AB sao cho MX', MY', MZ' theo thứ tự song song với $M'A$, $M'B$, $M'C$. Chứng minh rằng : AX, BY, CZ đồng quy khi và chỉ khi AX', BY', CZ' đồng quy.

Giải. Vì M, M' nằm trong tam giác ABC nên, theo VD 8, §2, tồn tại các số dương $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ sao cho :

$$\begin{cases} \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \vec{0} & (1) \\ \alpha'\overrightarrow{M'A} + \beta'\overrightarrow{M'B} + \gamma'\overrightarrow{M'C} = \vec{0}. & (2) \end{cases}$$

Gọi A' là giao điểm của AM' và BC (h.1.64).



Hình 1.64

Từ (1) suy ra :

$$\text{Ch}_{AM'}BC(\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}) = \text{Ch}_{AM'}BC(\vec{0})$$

$$\Rightarrow \alpha\overrightarrow{A'A'} + \beta\overrightarrow{A'B} + \gamma\overrightarrow{A'C} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \beta\overrightarrow{A'B} + \gamma\overrightarrow{A'C} = \vec{0}$$

$$\alpha'\overrightarrow{XA'} = \frac{\alpha'\beta}{\beta+\gamma}\overrightarrow{XB} + \frac{\alpha'\gamma}{\beta+\gamma}\overrightarrow{XC}. \qquad (3)$$

Từ (2) suy ra :

$$\text{Ch}_{AM'}BC(\alpha'\overrightarrow{M'A} + \beta'\overrightarrow{M'B} + \gamma'\overrightarrow{M'C}) = \text{Ch}_{AM'}BC(\vec{0})$$

$$\Rightarrow \alpha'\overrightarrow{XA'} + \beta'\overrightarrow{XB} + \gamma'\overrightarrow{XC} = \vec{0}. \qquad (4)$$

Thế (4) vào (3) và rút gọn, ta có :

$$(\alpha\beta' + \beta\beta' + \beta\gamma')\overrightarrow{XB} + (\alpha\gamma' + \gamma\gamma' + \gamma\beta')\overrightarrow{XC} = \vec{0}.$$

Tương tự như vậy :

$$\begin{cases}(\alpha\beta' + \beta\beta' + \beta\gamma')\overrightarrow{XB} + (\alpha\gamma' + \gamma\gamma' + \gamma\beta')\overrightarrow{XC} = \vec{0}\\(\beta\gamma' + \gamma\gamma' + \gamma\alpha')\overrightarrow{YC} + (\beta\alpha' + \alpha\alpha' + \alpha\gamma')\overrightarrow{YA} = \vec{0}\\(\gamma\alpha' + \alpha\alpha' + \alpha\beta')\overrightarrow{ZA} + (\gamma\beta' + \beta\beta' + \beta\alpha')\overrightarrow{ZB} = \vec{0}.\end{cases} \qquad (5)$$

Lại tương tự như vậy :

$$\begin{cases}(\alpha'\beta + \beta'\beta + \beta'\gamma)\overrightarrow{X'C} + (\alpha'\gamma + \gamma'\gamma + \gamma'\beta)\overrightarrow{X'A} = \vec{0}\\(\beta'\gamma + \gamma'\gamma + \gamma'\alpha)\overrightarrow{Y'C} + (\beta'\alpha + \alpha'\alpha + \alpha'\gamma)\overrightarrow{Y'A} = \vec{0}\\(\gamma'\alpha + \alpha'\alpha + \alpha'\beta)\overrightarrow{Z'A} + (\gamma'\beta + \beta'\beta + \beta'\alpha)\overrightarrow{Z'B} = \vec{0}.\end{cases} \qquad (6)$$

Vậy, từ (5) và (6), theo định lí Ceva, ta có : AX, BY, CZ đồng quy

$$\Leftrightarrow \frac{XB}{XC}\cdot\frac{YC}{YA}\cdot\frac{ZA}{ZB} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha\gamma' + \gamma\gamma' + \gamma\beta'}{\alpha\beta' + \beta\beta' + \beta\gamma'}\cdot\frac{\beta\alpha' + \alpha\alpha' + \alpha\gamma'}{\beta\gamma' + \gamma\gamma' + \gamma\alpha'}\cdot\frac{\gamma\beta' + \beta\beta' + \beta\alpha'}{\gamma\alpha' + \alpha\alpha' + \alpha\beta'} = 1$$

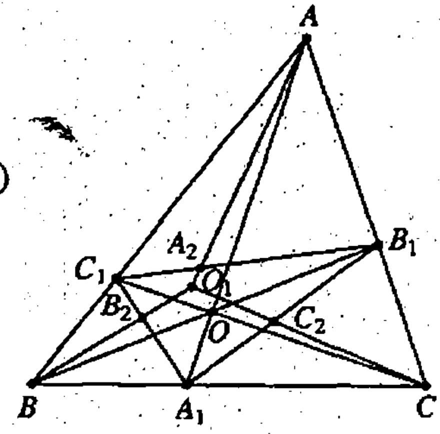
$$\Leftrightarrow \frac{\alpha'\gamma + \gamma'\gamma + \gamma'\beta}{\alpha'\beta + \beta'\beta + \beta'\gamma}\cdot\frac{\beta'\alpha + \alpha'\alpha + \alpha'\gamma}{\beta'\gamma + \gamma'\gamma + \gamma'\alpha}\cdot\frac{\gamma'\beta + \beta'\beta + \beta'\alpha}{\gamma'\alpha + \alpha'\alpha + \alpha'\beta} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{X'B}{X'C}\cdot\frac{Y'C}{Y'A}\cdot\frac{Z'A}{Z'B} = 1 \Leftrightarrow AX', BY', CZ' \text{ đồng quy. } \square$$

Bài toán trên còn có một lời giải khá hay bằng định lí Ceva dạng lượng giác (xem định lí 1, bài đọc thêm, chương II).

Ví dụ 10. Cho tam giác ABC và điểm O nằm trong tam giác. AO, BO, CO theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1. Điểm O_1 nằm trong tam giác $A_1B_1C_1$. Các đường thẳng AO_1, BO_1, CO_1 theo thứ tự cắt B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 tại A_2, B_2, C_2. Chứng minh rằng : A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 đồng quy.

Giải. (h.1.65).



Hình 1.65

Ta có :

$$\frac{\overline{A_2B_1}}{\overline{A_2C_1}}.\frac{\overline{B_2C_1}}{\overline{B_2A_1}}.\frac{\overline{C_2A_1}}{\overline{C_2B_1}} = (-\frac{A_2B_1}{A_2C_1}).(-\frac{B_2C_1}{B_2A_1}).(-\frac{C_2A_1}{C_2B_1})$$

$$= -\frac{A_2B_1}{A_2C_1}.\frac{B_2C_1}{B_2A_1}.\frac{C_2A_1}{C_2B_1}$$

$$= -\frac{S_{O_1AB_1}}{S_{O_1AC_1}}.\frac{S_{O_1BC_1}}{S_{O_1BA_1}}.\frac{S_{O_1CA_1}}{S_{O_1CB_1}}$$

$$= -\frac{S_{O_1CA_1}}{S_{O_1BA_1}}.\frac{S_{O_1AB_1}}{S_{O_1CB_1}}.\frac{S_{O_1BC_1}}{S_{O_1AC_1}} = -\frac{CA_1}{BA_1}.\frac{AB_1}{CB_1}.\frac{BC_1}{AC_1}$$

$$= -(-\frac{\overline{CA_1}}{\overline{BA_1}}).(-\frac{\overline{AB_1}}{\overline{CB_1}}).(-\frac{\overline{BC_1}}{\overline{AC_1}}) = \frac{\overline{CA_1}}{\overline{BA_1}}.\frac{\overline{AB_1}}{\overline{CB_1}}.\frac{\overline{BC_1}}{\overline{AC_1}}. \qquad (1)$$

Mặt khác, vì AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy nên

$$\frac{\overline{CA_1}}{\overline{BA_1}}.\frac{\overline{AB_1}}{\overline{CB_1}}.\frac{\overline{BC_1}}{\overline{AC_1}} = -1 \qquad (2) \qquad \text{(định lí Ceva trong tam giác } ABC\text{)}.$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{\overline{A_2B_1}}{\overline{A_2C_1}}.\frac{\overline{B_2C_1}}{\overline{B_2A_1}}.\frac{\overline{C_2A_1}}{\overline{C_2B_1}} = -1.$

Từ đó, áp dụng định lí Ceva cho tam giác $A_1B_1C_1$, với chú ý rằng A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 không thể đôi một song song, ta có : A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 đồng quy. □

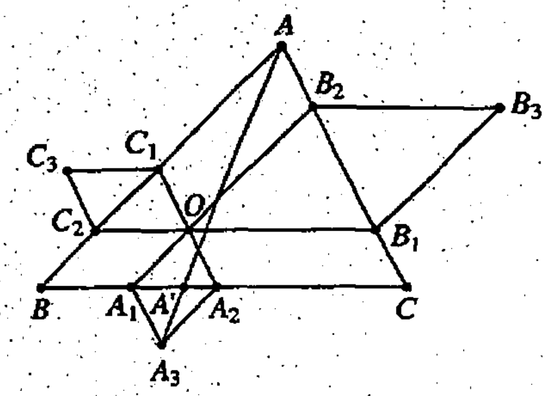
Ví dụ 11. Cho tam giác ABC và điểm O nằm trong tam giác. Đường thẳng qua O, song song với BC theo thứ tự cắt AB, AC tại C_2, B_1. Đường thẳng qua O, song song với CA theo thứ tự cắt BC, BA tại A_2, C_1. Đường thẳng qua O, song

song với AB theo thứ tự cắt CA, CB tại B_2, A_1. Vẽ các hình bình hành $OA_1A_3A_2$, $OB_1B_3B_2$, $OC_1C_3C_2$. Chứng minh rằng : AA_3, BB_3, CC_3 đồng quy.

Giải. Gọi A', B', C' theo thứ tự là giao của AA_3, BB_3, CC_3 với BC, CA, AB (h.1.66).

Đặt $x = C_2B_1$; $y = A_2C_1$; $z = B_2A_1$.

Theo quy tắc hình bình hành :



Hình 1.66

$$\overrightarrow{AA_3} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA_3}$$
$$= \overrightarrow{B_2O} + \overrightarrow{C_1O} + \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}$$
$$= \overrightarrow{B_2A_1} + \overrightarrow{C_1A_2}$$
$$= \frac{B_2A_1}{AB}\overrightarrow{AB} + \frac{C_1A_2}{AC}\overrightarrow{AC} = \frac{z}{c}\overrightarrow{AB} + \frac{y}{b}\overrightarrow{AC}.$$

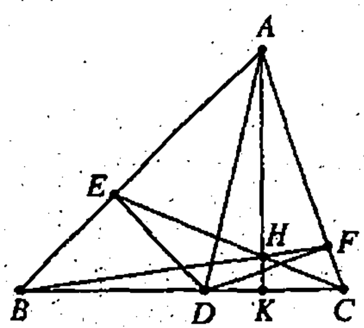
Từ đó, theo VD 3, ta có : $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = -\dfrac{y}{b} : \dfrac{z}{c} = -\dfrac{cy}{bz}$.

Tương tự như trên : $\dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = -\dfrac{az}{cx}$; $\dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -\dfrac{bx}{ay}$.

Suy ra : $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = (-\dfrac{cy}{bz})(-\dfrac{az}{cx})(-\dfrac{bx}{ay}) = -1$.

Vậy, theo định lí Ceva, với chú ý rằng AA_3, BB_3, CC_3 không thể đôi một song song, ta có : AA_3, BB_3, CC_3 đồng quy. □

Ví dụ 12. Cho tam giác nhọn ABC, phân giác AD. Gọi E, F theo thứ tự là hình chiếu của D trên AB, AC. $BF \cap CE = H$. Chứng minh rằng : $AH \perp BC$.



Hình 1.67

Giải. Gọi K là hình chiếu của A trên BC (h.1.67).

Vì K, F, E theo thứ tự thuộc các đoạn BC, CA, AB nên :

$$\frac{\overline{KB}}{\overline{KC}} \cdot \frac{\overline{FC}}{\overline{FA}} \cdot \frac{\overline{EA}}{\overline{EB}} = -\left(-\frac{\overline{KB}}{\overline{KC}}\right)\left(-\frac{\overline{FC}}{\overline{FA}}\right)\left(-\frac{\overline{EA}}{\overline{EB}}\right)$$
$$= -\frac{KB}{KC} \cdot \frac{FC}{FA} \cdot \frac{EA}{EB}.$$

Từ đó, với chú ý rằng $EA = FA$; $ED = FD$ ta có :

$$\frac{\overline{KB}}{\overline{KC}}.\frac{\overline{FC}}{\overline{FA}}.\frac{\overline{EA}}{\overline{EB}} = -\frac{KB}{KA}.\frac{KA}{KC}.\frac{FC}{FD}.\frac{ED}{EB} = -\cot B.\tan C.\cot C\tan B = -1.$$

Vậy, theo định lí Ceva, với chú ý rằng AK, BF, CE không thể đôi một song song, ta có AK, BF, CE đồng quy.

Điều đó có nghĩa là AK đi qua H.

Suy ra : $AH \perp BC$. □

Ví dụ 13. Cho tam giác ABC, đường tròn nội tiếp (I). Các đoạn AI, BI, CI theo thứ tự cắt (I) tại A_1, B_1, C_1. Gọi A_2, B_2, C_2 theo thứ tự là trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh rằng : A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 đồng quy.

Giải. Trước hết, ta phát biểu không chứng minh một bổ đề đơn giản.

Bổ đề. Cho hai tam giác ABC, $A'B'C'$.

Nếu $\left[\begin{array}{l}\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'} \\ \widehat{BAC} + \widehat{B'A'C'} = 180^\circ\end{array}\right.$ thì $\dfrac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \dfrac{AB.AC}{A'B'.A'C'}$.

Trở lại VD 13.

Đặt $A_0 = A_1A_2 \cap B_2C_2$; $B_0 = B_1B_2 \cap C_2A_2$; $C_0 = C_1C_2 \cap A_2B_2$. Gọi A_3, A_4 theo thứ tự là giao điểm của AB, AC với tiếp tuyến tại A_1 của (I) (h.1.68).

Ta có :

$$\overrightarrow{A_2A_1} = \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AA_2}$$

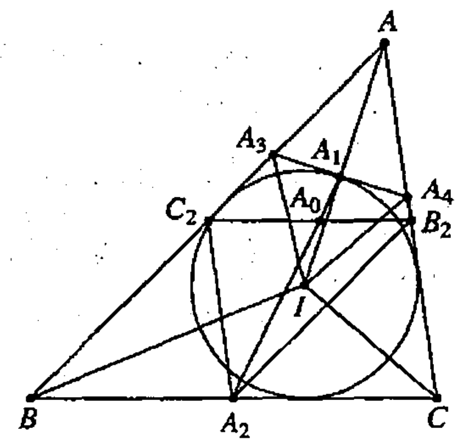
$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AA_3} + \overrightarrow{AA_4}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AA_3} - \overrightarrow{AB}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AA_4} - \overrightarrow{AC})$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BA_3} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA_4}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{BA_3}{BA}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\frac{CA_4}{CA}\overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{BA_3}{BA}\overrightarrow{A_2B_2} + \frac{CA_4}{CA}\overrightarrow{A_2C_2}.$$



Hình 1.68

Từ đó, áp dụng VD 3 cho tam giác $A_2B_2C_2$:

$$\frac{A_0B_2}{A_0C_2} = \frac{CA_4}{CA} : \frac{BA_3}{BA} = \frac{c}{b}.\frac{CA_4}{BA_3}. \qquad (1)$$

Vì các tam giác IBA_3, ICA_4 có độ dài các đường cao hạ từ I bằng nhau, ta có :

$$\frac{CA_4}{BA_3} = \frac{S_{ICA_4}}{S_{IBA_3}}. \qquad (2)$$

Vì tứ giác BCA_4A_3 ngoại tiếp nên dễ dàng suy ra : $\widehat{CIA_4} = 180^\circ - \widehat{BIA_3}$.

Từ đó, với chú ý rằng $IA_3 = IA_4$ theo bổ đề trên, ta có :

$$\frac{S_{ICA_4}}{S_{IBA_3}} = \frac{IC.IA_4}{IB.IA_3} = \frac{IC}{IB}. \qquad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra : $\dfrac{A_0B_2}{A_0C_2} = \dfrac{c}{b}.\dfrac{IC}{IB}$.

Tương tự : $\dfrac{B_0C_2}{B_0A_2} = \dfrac{a}{c}.\dfrac{IA}{IC}$; $\dfrac{C_0A_2}{C_0B_2} = \dfrac{b}{a}.\dfrac{IB}{IA}$.

Vậy : $\dfrac{A_0B_2}{A_0C_2}.\dfrac{B_0C_2}{B_0A_2}.\dfrac{C_0A_2}{C_0B_2} = \dfrac{c}{b}.\dfrac{IC}{IB}.\dfrac{a}{c}.\dfrac{IA}{IC}.\dfrac{b}{a}.\dfrac{IB}{IA} = 1$.

Từ đó, áp dụng định lí Ceva cho tam giác $A_2B_2C_2$, với chú ý rằng A_1, B_1, C_1 theo thứ tự thuộc các đoạn B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2, ta có : A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 đồng quy. □

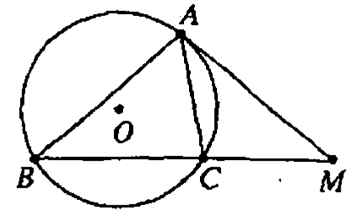
Ví dụ 14. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Các tiếp tuyến với (O) tại A, B, C theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại M, N, P. Chứng minh rằng : M, N, P thẳng hàng.

Giải. (h.1.69) Ta có :

$$\widehat{MBA} = \widehat{MAC} \left(= \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AC} \right)$$

$$\Rightarrow \Delta MBA \backsim \Delta MAC \quad \Rightarrow \frac{MB}{MA} = \frac{MA}{MC} = \frac{BA}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{MB}{MA}.\frac{MA}{MC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 \Rightarrow \frac{MB}{MC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2.$$



Hình 1.69

Từ đó, với chú ý rằng M nằm ngoài đoạn BC, suy ra : $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2$.

Tương tự như trên : $\dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = \left(\dfrac{BC}{BA}\right)^2$; $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \left(\dfrac{CA}{CB}\right)^2$.

Vậy : $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{BC}{BA}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{CA}{CB}\right)^2 = 1.$

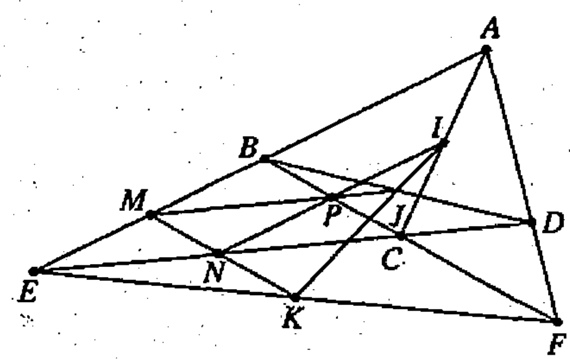
Từ đó, theo định lí Menelaus, ta có : M, N, P thẳng hàng. □

Ví dụ 15. Cho tứ giác $ABCD$. Đặt $E = AB \cap CD$; $F = AD \cap CB$. Gọi I, J, K theo thứ tự là trung điểm của AC, BD, EF. Chứng minh rằng : I, J, K thẳng hàng.

Giải. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của BE, EC, CB (h.1.70).

Dễ thấy, I, J, K theo thứ tự thuộc các đường thẳng NP, PM, MN.

Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác BEC với sự thẳng hàng A, D, F, ta có :



Hình 1.70

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} \cdot \frac{\overline{DE}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{FC}}{\overline{FB}} = 1 \Rightarrow \frac{2\overline{IP}}{2\overline{IN}} \cdot \frac{2\overline{JM}}{2\overline{JP}} \cdot \frac{2\overline{KN}}{2\overline{KM}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{IP}}{\overline{IN}} \cdot \frac{\overline{JM}}{\overline{JP}} \cdot \frac{\overline{KN}}{\overline{KM}} = 1.$$

Từ đó, áp dụng định lí Menelaus cho tam giác MNP, ta có : I, J, K thẳng hàng. □

Ví dụ 16. Cho tam giác ABC và điểm O. Phép đối xứng tâm O biến A, B, C theo thứ tự thành A_1, B_1, C_1. Các điểm A_2, B_2, C_2 theo thứ tự thuộc B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 sao cho AA_2, BB_2, CC_2 đôi một song song. Chứng minh rằng : A_2, B_2, C_2 thẳng hàng.

Giải. (h.1.71) Vẽ đường thẳng Δ không song song với AA_2, BB_2, CC_2.

Gọi f là phép chiếu song song phương AA_2 xuống đường thẳng Δ.

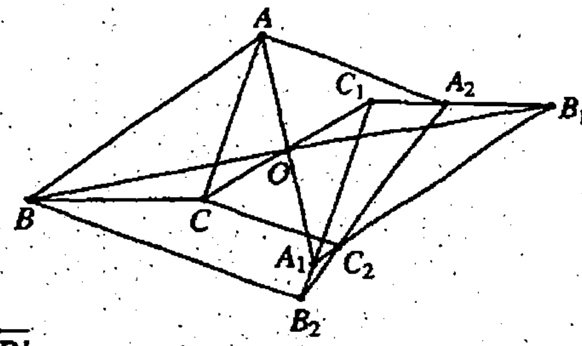
Qua f, A, A_2 biến thành A' ; B, B_2 biến thành B' ; C, C_2 biến thành C' ; A_1, B_1, C_1, O theo thứ tự biến thành A_1', B_1', C_1', O'.

Theo định lí Thales dạng đại số, ta có :

$$\frac{\overline{A_2B_1}}{\overline{A_2C_1}} = \frac{\overline{A'B_1'}}{\overline{A'C_1'}} = \frac{\overline{O'B_1'} - \overline{O'A'}}{\overline{O'C_1'} - \overline{O'A'}}.$$

Từ đó, với chú ý rằng O' là trung điểm của $B'B_1'$, $C'C_1'$, suy ra :

$$\frac{\overline{A_2B_1}}{\overline{A_2C_1}} = \frac{-\overline{O'B'} - \overline{O'A'}}{-\overline{O'C'} - \overline{O'A'}} = \frac{\overline{O'A'} + \overline{O'B'}}{\overline{O'A'} + \overline{O'C'}}.$$



Hình 1.71

Tương tự như trên :

$$\frac{\overline{B_2C_1}}{\overline{B_2A_1}} = \frac{\overline{O'B'} + \overline{O'C'}}{\overline{O'B'} + \overline{O'A'}};\ \frac{\overline{C_2A_1}}{\overline{C_2B_1}} = \frac{\overline{O'C'} + \overline{O'A'}}{\overline{O'C'} + \overline{O'B'}}.$$

Vậy, $\dfrac{\overline{A_2B_1}}{\overline{A_2C_1}}.\dfrac{\overline{B_2C_1}}{\overline{B_2A_1}}.\dfrac{\overline{C_2A_1}}{\overline{C_2B_1}} = \dfrac{\overline{O'A'} + \overline{O'B'}}{\overline{O'A'} + \overline{O'C'}}.\dfrac{\overline{O'B'} + \overline{O'C'}}{\overline{O'B'} + \overline{O'A'}}.\dfrac{\overline{O'C'} + \overline{O'A'}}{\overline{O'C'} + \overline{O'B'}} = 1.$

Từ đó, theo định lí Menelaus : A_2, B_2, C_2 thẳng hàng.

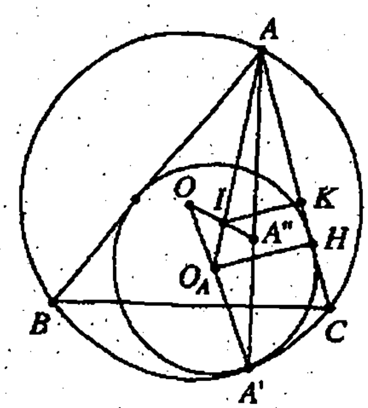
Ví dụ 17. Cho tam giác ABC không cân, nội tiếp đường tròn (O), ngoại tiếp đường tròn (I). Đường tròn (O_A) tiếp xúc với các cạnh AB, AC và tiếp xúc trong với (O) tại A'. Tương tự, ta xác định B', C'. Chứng minh rằng : AA', BB', CC' đồng quy tại một điểm thuộc OI.

Giải. Gọi A'', B'', C'' theo thứ tự là giao của AA', BB', CC' với OI (h.1.72).

Gọi R, r, R_A theo thứ tự là bán kính các đường tròn (O), (I), (O_A).

Dễ thấy : O, O_A, A' thẳng hàng.

Gọi H, K là hình chiếu của O_A, I trên AC.



Hình 1.72

Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác O_AOI với sự thẳng hàng A'', A, A', ta có :

$$\frac{\overline{A''O}}{\overline{A''I}}.\frac{\overline{AI}}{\overline{AO_A}}.\frac{\overline{A'O_A}}{\overline{A'O}} = 1. \quad (1)$$

Đương nhiên : $\dfrac{\overline{A'O_A}}{\overline{A'O}} = \dfrac{A'O_A}{A'O} = \dfrac{R_A}{R}$. $\quad$ (2)

Theo hệ quả 2 của định lí Thales dạng đại số :

$$\frac{\overline{AI}}{\overline{AO_A}} = \frac{\overline{KI}}{\overline{HO_A}} = \frac{KI}{HO_A} = \frac{r}{R_A}. \tag{3}$$

Từ (1), (2), (3) suy ra : $\dfrac{\overline{A''O}}{\overline{A''I}} = \dfrac{R}{r}$.

Tương tự : $\dfrac{\overline{B''O}}{\overline{B''I}} = \dfrac{R}{r}; \dfrac{\overline{C''O}}{\overline{C''I}} = \dfrac{R}{r}$.

Vậy : $\dfrac{\overline{A''O}}{\overline{A''I}} = \dfrac{\overline{B''O}}{\overline{B''I}} = \dfrac{\overline{C''O}}{\overline{C''I}}$. Do đó : A'', B'', C'' trùng nhau.

Nói cách khác : AA', BB', CC' đồng quy tại một điểm thuộc OI. □

Ví dụ 18. Cho tam giác ABC và điểm M nằm trong tam giác. AM, BM, CM theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại A', B', C'. Chứng minh rằng : M là trực tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi M là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác $A'B'C'$.

Giải. Trước hết, xin phát biểu và chứng minh một bổ đề.

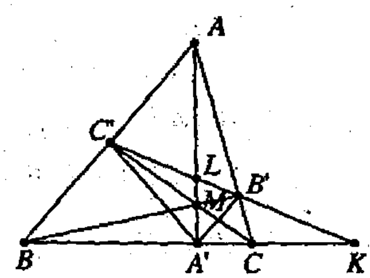
Bổ đề. Cho tam giác ABC và điểm M nằm trong tam giác. BM, CM theo thứ tự cắt CA, AB tại B', C'. Khi đó : $\widehat{AA'B'} = \widehat{AA'C'} \Leftrightarrow AM \perp BC$.

Chứng minh bổ đề. Ta bỏ qua trường hợp đơn giản : $B'C' \parallel BC$.

Đặt $K = BC \cap B'C'$; $L = AA' \cap B'C'$ (h.1.73).

Áp dụng định lí 8 cho tam giác ABC và điểm M, ta có : $(B'C'LK) = -1$.

Suy ra : $A'(B'C'LK) = -1$.



Hình 1.73

Từ đó, theo định lí 16 : $\widehat{AA'B'} = \widehat{AA'C'} \Leftrightarrow AM \perp BC$.

Trở lại V.D 17.

Ta thấy : M là trực tâm tam giác ABC

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AA' \perp BC \\ BB' \perp CA \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \widehat{AA'B'} = \widehat{AA'C'} \\ \widehat{BB'C'} = \widehat{BB'A'} \end{cases} \text{(theo bổ đề)}$$

$\Leftrightarrow M$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $A'B'C'$. □

Ví dụ 19. Cho tam giác ABC. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với AC, AB tại E, F. Đặt $K = BI \cap EF$. Chứng minh rằng : $\widehat{BKC} = 90°$.

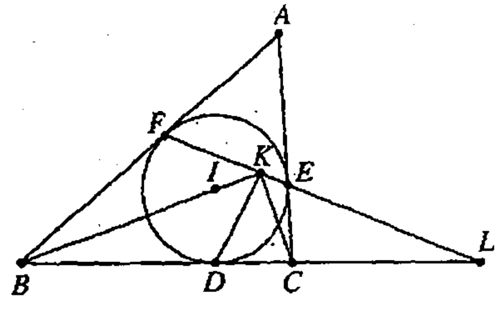
Giải. Ta bỏ qua trường hợp đơn giản : $EF \parallel BC$.

Đặt $L = EF \cap BC$. Gọi D là tiếp điểm của (I) và BC (h.1.74).

Ta có :

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}\cdot\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}}\cdot\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = \left(-\frac{DB}{DC}\right)\cdot\left(-\frac{EC}{EA}\right)\cdot\left(-\frac{FA}{FB}\right)$$

$$= -\frac{FA}{EA}\cdot\frac{DB}{FB}\cdot\frac{EC}{DC} = -1.$$



Hình 1.74

Từ đó, chú ý rằng AD, BE, CF không thể đôi một song song, theo định lí Ceva : AD, BE, CF đồng quy.

Vậy, theo định lí 8 : $(BCDL) = -1$.

Do đó : $K(BCDF) = -1$. (1)

Mặt khác, dễ thấy : $\Delta KBD = \Delta KBF$. Suy ra : $\widehat{BKD} = \widehat{BKF}$. (2)

Từ (1) và (2), theo định lí 16, ta có : $\widehat{BKC} = 90°$. □

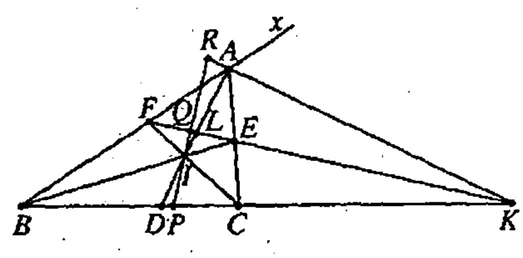
Ví dụ 20. Cho tam giác ABC. Các đường phân giác BE, CF cắt nhau tại I. Đường thẳng qua I, vuông góc với EF theo thứ tự cắt BC, EF tại P, Q. Giả sử $IP = 2\,IQ$. Tính góc $\widehat{BAC}$.

Giải. Ta bỏ qua trường hợp đơn giản : $EF \parallel BC$.

Đặt $K = EF \cap BC$; $R = AK \cap PQ$; $D = IA \cap BC$; $L = IA \cap EE$.

Gọi Ax là tia đối của tia AB (h. 1.75).

Áp dụng định lí 8 cho tam giác ABC và điểm I, ta có : $(CBKD) = -1$.



Hình 1.75

Từ đó, qua phép chiếu xuyên tâm E, theo định lí 11 : $(AILD) = -1$.

Qua phép chiếu xuyên tâm K, lại theo định lí 11 : $(RIQP) = -1$.

Suy ra : $\dfrac{RQ}{RP} = \dfrac{IQ}{IP}$.

Từ đó, với chú ý rằng $\frac{IQ}{IP} = \frac{1}{2}$, ta có : Q là trung điểm của PR.

Mặt khác, theo giả thiết, $PR \perp KQ$.

Vậy, tam giác KPR cân tại K. Do đó : $\widehat{AKE} = \widehat{BKE}$.

Kết hợp với $\widehat{ABE} = \widehat{KBE}$, ta có :

$$\widehat{BAC} = \widehat{KAC}. \qquad (1)$$

Áp dụng định lí 8 cho tam giác ABC và điểm I : $(BCDK) = -1$.

Suy ra : $A(BCDK) = -1$.

Từ đó, với chú ý rằng $\widehat{BAD} = \widehat{CAD}$, theo định lí 16, ta có :

$$\widehat{CAK} = \widehat{xAK}. \qquad (1)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $\widehat{BAC} = 60^o$. □

Ví dụ 21. Cho đoạn thẳng AB và số k dương. Tìm quỹ tích các điểm M sao cho

$$\frac{MA}{MB} = k.$$

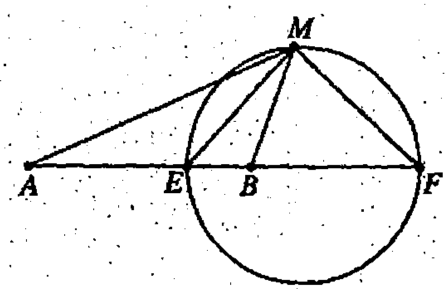
Giải. Có hai trường hợp cần xem xét.

Trường hợp 1. $k = 1$.

Dễ thấy quỹ tích cần tìm là đường trung trực của AB.

Trường hợp 2. $k \neq 1$.

Gọi E, F theo thứ tự là điểm chia trong, chia ngoài đoạn AB theo tỉ số k (h.1.76).



Hình 1.76

Thuận. Giả sử $\frac{MA}{MB} = k$. Có hai khả năng xảy ra.

Khả năng 1. M thuộc đường thẳng AB.

Vì $\frac{MA}{MB} = k$ nên $\left[\begin{array}{l} M \equiv E \\ M \equiv F. \end{array}\right.$

Do đó, M thuộc đường tròn đường kính EF.

Khả năng 2. M không thuộc đường thẳng AB.

Vì $\dfrac{MA}{MB} = k$ nên $\dfrac{MA}{MB} = -\dfrac{\overline{EA}}{\overline{EB}} = \dfrac{\overline{FA}}{\overline{FB}}$. Do đó, ME, MF theo thứ tự là đường phân giác trong, phân giác ngoài của tam giác MAB. Suy ra, $\widehat{EMF} = 90°$. Do đó, M thuộc đường tròn đường kính EF.

Đảo. Giả sử M thuộc đường tròn đường kính EF. Có hai khả năng xảy ra.

Khả năng 1. $M \equiv E$ hoặc $M \equiv F$.

Đương nhiên khi đó $\dfrac{MA}{MB} = k$.

Khả năng 2. $M \neq E$ và $M \neq F$.

Vì các điểm E, F theo thứ tự chia trong, chia ngoài đoạn AB theo tỉ số k nên $(ABEF) = -1$.

Do đó, $M(ABEF) = -1$ (1)

Mặt khác, vì M thuộc đường tròn đường kính EF nên $\widehat{EMF} = 90°$. (2)

Từ (1) và (2), theo định lí 16 : ME là phân giác của góc $\widehat{AMB}$.

Vậy, theo tính chất của đường phân giác, $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{EA}{EB} = k$.

Kết luận. Quỹ tích các điểm M thoả mãn điều kiện đề bài là đường tròn đường kính EF. □

Chú ý. Đường tròn đường kính EF được gọi là *đường tròn Apollonius* xác định bởi đoạn AB và số k.

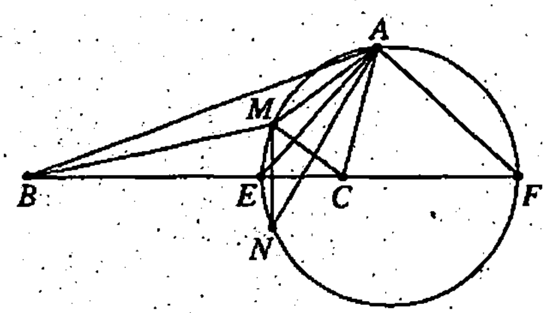
Ví dụ 22. Cho tam giác ABC và điểm M nằm trong tam giác sao cho $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{AB}{AC}$. N là điểm đối xứng với M qua BC. Chứng minh rằng : $\widehat{MAB} = \widehat{NAC}$.

Giải. Ta bỏ qua trường hợp đơn giản : $AB = AC$.

Khi $AB \neq AC$, không mất tính tổng quát, giả sử $AB > AC$.

Gọi AE, AF theo thứ tự là phân giác trong và phân giác ngoài của tam giác ABC (h.1.77).

Theo giả thiết và theo tính chất của các đường phân giác, ta có :



Hình 1.77

$$\frac{NB}{NC} = \frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC} = \frac{EB}{EC} = \frac{FB}{FC} = k \neq 1.$$

Do đó các điểm M, N, A, E, F cùng thuộc đường tròn Apollonius xác định bởi đoạn BC và số k.

Vì M, N đối xứng với nhau qua BC nên M, N đối xứng với nhau qua đường kính EF của đường tròn nói trên. Do đó, $\widehat{MAE} = \widehat{NAE}$ (1)

Mặt khác, vì AE là phân giác của góc $\widehat{BAC}$ nên $\widehat{BAE} = \widehat{CAE}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $\widehat{MAB} = \widehat{NAC}$. □

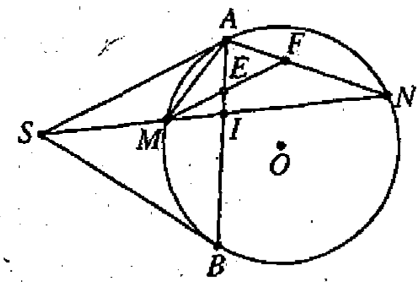
Ví dụ 23. Từ điểm S nằm ngoài đường tròn (O), kẻ tới (O) các tiếp tuyến SA, SB (A, B, thuộc (O)). Một đường thẳng qua S, cắt (O) tại hai điểm M, N. Đường thẳng qua M, song song với SA theo thứ tự cắt AB, AN tại E, F. Chứng minh rằng : $EM = EF$.

Giải. Đặt $I = AB \cap MN$ (h.1.78).

Theo định lí 9, $(SIMN) = -1$.

Do đó, $A(SBMN) = -1$.

Từ đó, với chú ý rằng $MF \parallel SA$, theo định lí 15, ta có : $EM = EF$. □



Hình 1.78

Ví dụ 24. Cho tam giác ABC. Trung truyến AM cắt đường tròn nội tiếp (I) tại X, Y. Các điểm Z, T thuộc (I) sao cho $XZ \parallel YT \parallel BC$. AZ, AT theo thứ tự cắt BC tại P, Q. Chứng minh rằng : $BP = CQ$.

Giải. Gọi D, E, F theo thứ tự là tiếp điểm của (I) với BC, CA, AB.

Đặt $N = DI \cap EF$ (h.1.79).

Theo VD 4, N thuộc XY.

Từ đó, với chú ý rằng $XZYT$ là hình thang cân và DI là trục đối xứng của $XZYT$, suy ra : N thuộc ZT.

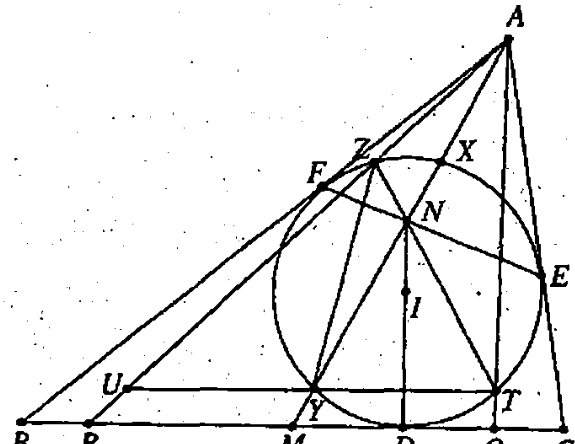
Theo định lí 9, $(ANXY) = -1$.

Suy ra, $Z(UTXY) = Z(ANXY) = -1$.

Từ đó, với chú ý rằng, $UT \parallel ZX$, theo định lí 15, ta có : $YU = YT$.

Do đó, theo định lí Thales, $MP = MQ$.

Điều đó có nghĩa là $BP = CQ$. □

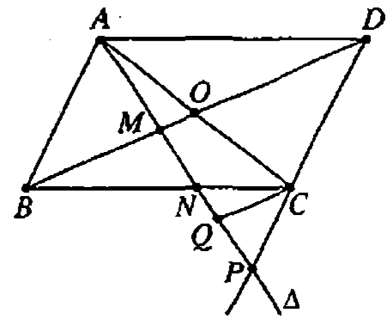


Hình 1.79

Ví dụ 25. Đường thẳng Δ đi qua đỉnh A của hình bình hành $ABCD$, theo thứ tự cắt các đường thẳng BD, BC tại M, N. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{\overline{AM}} = \frac{1}{\overline{AN}} + \frac{1}{\overline{AP}}.$$

Giải. Đặt $O = AC \cap BD$. Trên Δ lấy Q sao cho $CQ \parallel BD$ (h.1.80).



Hình 1.80

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $OB = OD$.

Từ đó với chú ý rằng $CQ \parallel BD$, theo định lí 15, ta có : $C(AQBD) = -1$.

Do đó, $(AQNP) = -1$.

Vậy, theo hệ thức Descartes : $\dfrac{2}{\overline{AQ}} = \dfrac{1}{\overline{AN}} + \dfrac{1}{\overline{AP}}$. (1)

Mặt khác, cũng vì $ABCD$ là hình bình hành nên $OA = OC$.

Từ đó, với chú ý rằng $CQ \parallel BD$, ta có : $\overline{AQ} = 2\overline{AM}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $\dfrac{1}{\overline{AM}} = \dfrac{1}{\overline{AN}} + \dfrac{1}{\overline{AP}}$. □

Ví dụ 26. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). D là điểm đối xứng với A qua O. Tiếp tuyến với (O) tại D cắt BC tại E. OE theo thứ tự cắt AB, AC tại M, N. Chứng minh rằng : $OM = ON$.

Giải. Gọi K, L theo thứ tự là giao điểm của AB, AC với DE.

Trên DE lấy F sao cho $AF \parallel EO$ (h.1.81).

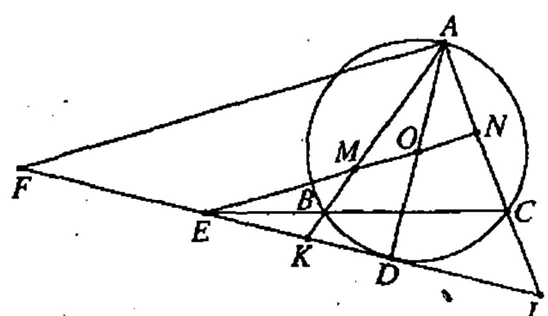
Ta thấy,

$$\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AC} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{ACD} - \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{CD} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{ABD} - \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{CD} = \widehat{CLD}.$$

Do đó, tứ giác $BKLC$ nội tiếp.

Từ đó, theo các hệ quả 1, 2 của bổ đề trong phép chứng minh định lí 9, suy ra :

$$\overline{ED}^2 = \overline{EB}.\overline{EC} = \overline{EK}.\overline{EL}.$$



Hình 1.81

Mặt khác, vì O là trung điểm của AD và vì $AF \parallel OE$ nên E là trung điểm của FD.

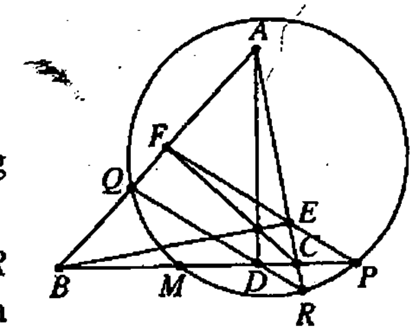
Vậy, theo hệ thức Newton, $(FDKL) = -1$.

Suy ra, $A(FOMN) = -1$.

Từ đó, với chú ý rằng $AF \,//\, MN$, theo định lí 15, ta có : $OM = ON$. □

Ví dụ 27. AD, BE, CF là các đường cao của tam giác nhọn ABC. Đặt $P = BC \cap EF$. Đường thẳng qua D, song song với EF theo thứ tự cắt AB, AC tại Q, R. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp của tam giác PQR đi qua trung điểm của BC.

Giải. Gọi M là trung điểm của BC (h.1.82).



Hình 1.82

Theo giả thiết, $\widehat{BEC} = 90^0 = \widehat{BFC}$.

Do đó, bốn điểm B, C, E, F cùng thuộc một đường tròn.

Từ đó, với chú ý rằng $QR \,//\, FE$, suy ra : B, C, Q, R cùng thuộc một đường tròn. Vậy, theo hệ quả 1 của bổ đề trong phép chứng minh định lí 9 :

$$\overline{DQ}.\overline{DR} = \overline{DB}.\overline{DC} \qquad (1)$$

Mặt khác, theo định lí 8 $(DPBC) = -1$.

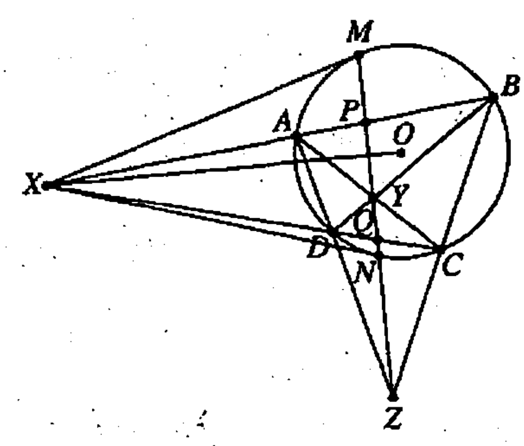
Từ đó, với chú ý rằng $MB = MC$, theo hệ thức Maclaurin :

$$\overline{DP}.\overline{DM} = \overline{DB}.\overline{DC} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), theo hệ quả 1 của bổ đề trong phép chứng minh định lí 9, suy ra đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR đi qua M. □

Ví dụ 28. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). AB, AC, AD theo thứ tự cắt CD, DB, BC tại X, Y, Z. Chứng minh rằng : O là trực tâm của tam giác XYZ.

Giải. Qua X, kẻ tới (O) các tiếp tuyến XM, XN (h.1.83).



Hình 1.83

Gọi P, Q là giao điểm của MN với AB, CD.

Theo định lí 9 : $(XPAB) = -1 = (XQDC)$. Từ đó, theo định lí 12 : AD, BC, PQ đồng quy. Do đó, Z thuộc PN. (1)

Theo định lí 9 và theo tính chất của hàng điều hoà : $(XPAB) = -1 = (XQCD)$. Từ đó, theo định lí 12 : AC, BD, PQ đồng quy.

Do đó, Y thuộc PN (2).

Từ (1) và (2) suy ra : MN trùng YZ.

Từ đó, với chú ý rằng $OX \perp MN$, ta có : $OX \perp YZ$.

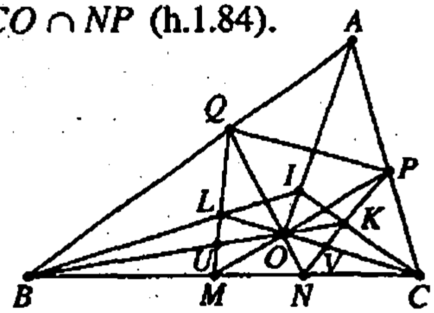
Tương tự như trên, $OZ \perp YX$.

Vậy O là trực tâm của tam giác XYZ. □

Ví dụ 29. Cho tam giác ABC. Các điểm M, N thuộc BC. Các điểm P, Q theo thứ tự thuộc AC, AB. Đặt $O = MP \cap NQ$; $K = BO \cap NP$; $L = CO \cap MQ$

Chứng minh rằng : AO, BL, CK đồng quy.

Giải. Đặt $I = BL \cap CK$; $U = BO \cap MQ$; $V = CO \cap NP$ (h.1.84).



Hình 1.84

Ta có : $B(ALOC) = (QLUM)$

$= (MULQ)$ (theo tính chất của tỉ số kép của hàng)

$= (PKVN)$ (xét phép chiếu xuyên tâm O)

$= C(AKOB)$.

Từ đó, theo định lí 13 : A, I, O thẳng hàng.

Nói cách khác : AO, BL, CK đồng quy. □

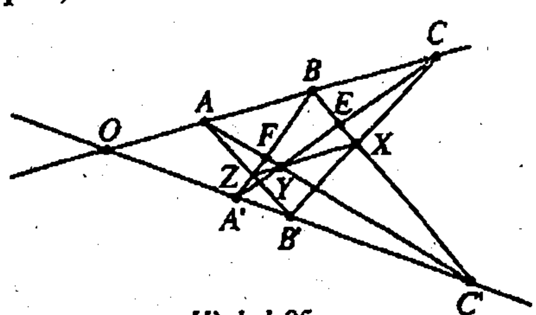
Ví dụ 30. Cho hai đường thẳng Δ và Δ'. Các điểm A, B, C thuộc Δ. Các điểm A', B', C' thuộc Δ'. $X = BC' \cap B'C$; $Y = CA' \cap C'A$; $Z = AB' \cap A'B$. Chứng minh rằng : X, Y, Z thẳng hàng (***định lí Pappus***).

Giải. Ta bỏ qua trường hợp đơn giản $\Delta // \Delta'$.

Đặt $O = \Delta \cap \Delta'$;

$E = BC' \cap CA'$;

$F = AC' \cap BA'$ (h.1.85).



Hình 1.85

Ta có :

$(BEXC') = (OA'B'C')$ (xét phép chiếu xuyên tâm C)

$= (BA'ZF)$ (xét phép chiếu xuyên tâm A).

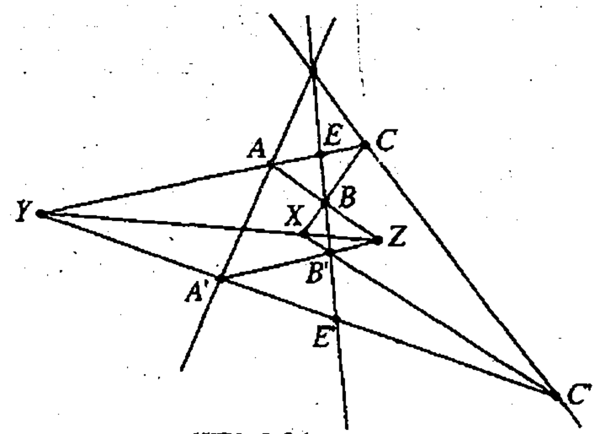
Từ đó, theo định lí 12 : EA', XZ, $C'F$ đồng quy.

Điều đó có nghĩa là X, Y, Z thẳng hàng. □

Ví dụ 31. Cho các tam giác ABC và $A'B'C'$. Đặt $X = BC \cap B'C'$; $Y = CA \cap C'A'$; $Z = AB \cap A'B'$. Chứng minh rằng : X, Y, Z thẳng hàng khi và chỉ AA', BB', CC' hoặc đồng quy hoặc đôi một song song (***định lí Desargues***).

Giải. Ta bỏ qua trường hợp đơn giản : $\left[\begin{array}{l} BB' \,//\, AC \\ BB' \,//\, A'C'. \end{array}\right.$

Gọi E, E' theo thứ tự là giao điểm của BB' với AC, $A'C'$ (h.1.86).



Hình 1.86

Ta có : X, Y, Z thẳng hàng

$\Leftrightarrow$ $B(AB'CY) = B'(A'BC'Y)$ (theo định lí 13)

$\Leftrightarrow$ $(AECY) = (A'E'C'Y)$

$\Leftrightarrow$ AA', EE', CC' hoặc đồng quy hoặc đôi một song song (theo định lí 12)

$\Leftrightarrow$ AA', BB', CC' hoặc đồng quy hoặc đôi một song song. □

BÀI TẬP

38. Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng và điểm M. Chứng minh rằng :

$$MA^2.\overline{BC} + MB^2.\overline{CA} + MC^2.\overline{AB} + \overline{BC}.\overline{CA}.\overline{AB} = 0 \text{ (\textit{hệ thức Stewart})}.$$

39. Cho năm điểm A, B, C, M, N cùng thuộc một đường thẳng. Chứng minh rằng :

$$\frac{\overline{AM}.\overline{AN}}{\overline{AB}.\overline{AC}} + \frac{\overline{BM}.\overline{BN}}{\overline{BC}.\overline{BA}} + \frac{\overline{CM}.\overline{CN}}{\overline{CA}.\overline{CB}} = 1.$$

40. Tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I) và có góc $\widehat{DAB} = 90°$. Các đường thẳng BI, DI theo thứ tự cắt các đường thẳng AD, AB tại M, N. Chứng minh rằng : $AC \perp MN$.

41. Cho tam giác ABC và điểm M nằm trong tam giác. H, I, K theo thứ tự là hình chiếu của M trên BC, CA, AB. Δ_A, Δ_B, Δ_C theo thứ tự qua A, B, C và lần lượt vuông góc với IK, KH, HI. Chứng minh rằng : Δ_A, Δ_B, Δ_C đồng quy.

42. Cho tam giác ABC. Dựng các tam giác BCA_1, CAB_1, ABC_1 theo thứ tự cân tại A_1, B_1, C_1. Các điểm X, Y, Z theo thứ tự là trung điểm của BC, CA, AB. Các đường thẳng Δ_X, Δ_Y, Δ_Z theo thứ tự đi qua X, Y, Z và lần lượt vuông góc với B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1. Chứng minh rằng : Δ_X, Δ_Y, Δ_Z đồng quy.

43. Cho tam giác ABC, I là tâm đường tròn nội tiếp. Các đường tròn bàng tiếp góc A, B, C theo thứ tự tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tại M, N, P. Các đường thẳng Δ_A, Δ_B, Δ_C theo thứ tự qua M, N, P và theo thứ tự song song với AI, BI, CI. Chứng minh rằng : Δ_A, Δ_B, Δ_C đồng quy.

44. Cho hình bình hành $ABCD$. Các điểm X, Y, Z, T theo thứ tự thuộc các cạnh DA, AB, BC, CD sao cho : $\dfrac{\overline{AX}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{BY}}{\overline{BA}} = \dfrac{\overline{CZ}}{\overline{CB}} = \dfrac{\overline{DT}}{\overline{DC}}$. Các đường thẳng Δ_1, Δ_2, Δ_3 theo thứ tự qua A, B, C và theo thứ tự song song với XT, YT, ZT. Chứng minh rằng : Δ_1, Δ_2, Δ_3 đồng quy.

45. Cho tam giác ABC và điểm O nằm trong tam giác. AO, BO, CO theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1. Điểm O_1 nằm trong tam giác $A_1B_1C_1$. Các đường thẳng A_1O_1, B_1O_1, C_1O_1 theo thứ tự cắt B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 tại A_2, B_2, C_2. Chứng minh rằng : AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy.

46. Cho lục giác $ABCDEF$ có các cặp cạnh đối song song. M, N, P, Q, R, S theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA. Chứng minh rằng : MQ, PS, RN đồng quy.

47. Cho tam giác nhọn ABC. Hình vuông $A_1A_2A_3A_4$ có các đỉnh A_1, A_2 thuộc cạnh BC và các đỉnh A_3, A_4 theo thứ tự thuộc các cạnh CA, AB. $A_0 = A_1A_3 \cap A_2A_4$. Tương tự, ta xác định các điểm B_0, C_0. Chứng minh rằng : AA_0, BB_0, CC_0 đồng quy.

48. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và điểm M nằm trong tam giác. AM, BM, CM theo thứ tự cắt lại (O) tại A_1, B_1, C_1. Các tiếp tuyến với (O) tại A_1, B_1, C_1 theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại A_2, B_2, C_2. Chứng minh rằng : A_2, B_2, C_2 thẳng hàng.

49. Cho tam giác ABC và điểm M nằm trong tam giác. AM, BM, CM theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1. BC, CA, AB theo thứ tự cắt B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 tại A_2, B_2, C_2. A_3, B_3, C_3 theo thứ tự là trung điểm của A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2. Chứng minh rằng : A_3, B_3, C_3 thẳng hàng.

50. Cho tam giác ABC, trọng tâm G và điểm M nằm trong tam giác. AM, BM, CM theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1. A_2, B_2, C_2 theo thứ tự là điểm đối xứng của M qua trung điểm của B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1. Chứng minh rằng AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy tại một điểm thuộc MG.

51. Cho tam giác ABC không cân, nội tiếp đường tròn (O), ngoại tiếp đường tròn (I). Đường tròn (J_A) tiếp xúc với các tia AB, AC và tiếp xúc ngoài với (O) tại A_1. A_2 là điểm chính giữa cung $\widehat{BAC}$. Tương tự ta xác định : B_1, B_2 ; C_1, C_2. Chứng minh rằng : A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 đồng quy tại một điểm thuộc OI.

52. Cho tam giác ABC không cân, O là tâm đường tròn ngoại tiếp. A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là ảnh của A, B, C qua các phép đối xứng trục mà trục đối xứng là BC, CA, AB. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác OAA_1, OBB_1, OCC_1 cùng đi qua một điểm khác O.

53. Cho tam giác ABC và điểm O nằm trong tam giác. BO, CO theo thứ tự cắt AC, AB tại E, F. $I = AO \cap EF$. H là hình chiếu của I trên BC. Chứng minh rằng : $\widehat{AHE} = \widehat{OHF}$.

54. Cho tam giác ABC. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC, CA, AB tại D, E, F. H là hình chiếu của D trên EF. Chứng minh rằng : $\widehat{BHD} = \widehat{CHD}$.

55. Cho tam giác ABC. AA', BB', CC' là các đường phân giác. Chứng minh rằng : $\widehat{BAC} = 120° \Leftrightarrow \widehat{B'A'C'} = 90°$.

56. Cho hai đường thẳng a, b cắt nhau tại O ; điểm M không thuộc a, b và không thuộc các đường phân giác của các góc tạo bởi a, b. Hai điểm A, B theo thứ tự thay đổi trên a, b sao $\widehat{OMA} = \widehat{OMB}$. Chứng minh rằng đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định.

57. Các đường chéo của tứ giác $ABCD$ cắt nhau tại O. M, N, P, Q theo thứ tự là hình chiếu của O trên AB, BC, CD, DA. Giả sử $OM = ON$; $OP = OQ$. Chứng minh rằng $ABCD$ là hình bình hành.

58. Cho tứ giác $ABCD$ có các cặp cạnh đối không song song. O là giao của các đường chéo. Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác OAB, OCD cắt nhau tại X khác O. Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác OAD, OCB cắt nhau tại Y khác O. Các đường tròn đường kính AC, BD cắt nhau tại Z, T. Chứng minh rằng, hoặc X, Y, Z, T cùng thuộc một đường tròn hoặc X, Y, Z, T cùng thuộc một đường thẳng.

59. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $BC = BD$. Đường thẳng đối xứng với CA qua CD theo thứ tự cắt AD, BD tại E, F. Chứng minh rằng : $EC = EF$.

60. Cho tam giác ABC. Đường tròn nội tiếp (I) theo thứ tự tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tại D, E, F. Gọi K là giao điểm của AI và EF. Chứng minh rằng : $\widehat{KDE} = \widehat{ADF}$.

61. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Đặt $I = AC \cap BD$. Đường thẳng Δ đi qua I, theo thứ tự cắt các đoạn AB, CD tại M, N và cắt (O) tại P, Q (M, N theo thứ tự thuộc các đoạn IQ, IP). Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{IM} + \frac{1}{IP} = \frac{1}{IN} + \frac{1}{IQ}.$$

62. Cho tứ giác $ABCD$ có $AB.CD = AD.CB$. Chứng minh rằng :

$$\widehat{ABD} + \widehat{ACB} = \widehat{ADB} + \widehat{ACD}.$$

63. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp. M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, CD. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABN cắt lại CD tại P. Đường tròn ngoại tiếp tam giác CDM cắt lại AB tại Q. Chứng minh rằng : AC, BD, PQ đồng quy.

64. Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp. Các tia BA, CD cắt nhau tại P. Các tia BC, AD cắt nhau tại Q. Gọi H là hình chiếu của D trên PQ. Chứng minh rằng H nhìn các đường tròn nội tiếp các tam giác ADP, CDQ dưới cùng một góc.

65. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) $(\widehat{BAC} \neq 90^\circ)$. Điểm E chạy trên (O) (E khác B, C). AE theo thứ tự cắt các tiếp tuyến với (O) tại B, C ở M, N. $F = BN \cap CM$. Chứng minh rằng EF luôn đi qua một điểm cố định.

66. Các tam giác ABE, ACF đồng dạng, theo thứ tự có trực tâm là H, K và được dựng về phía ngoài của tam giác ABC. $BF \cap CE = O$. Chứng minh rằng : $AO \perp HK$.

67. Cho tam giác ABC, I là tâm đường tròn nội tiếp. Đường tròn $(\mathscr{C}_1)$ qua I, cắt đoạn AI, tiếp xúc với các tia AB, AC. Đường tròn $(\mathscr{C}_2)$ qua I, cắt đoạn BI, tiếp xúc với các tia BC, BA. Đường tròn $(\mathscr{C}_3)$ qua I, cắt đoạn CI, tiếp xúc với các tia CA, CB. Gọi X, Y, Z theo thứ tự là giao điểm khác I của các cặp đường tròn $(\mathscr{C}_2)$, $(\mathscr{C}_3)$; $(\mathscr{C}_3)$, $(\mathscr{C}_1)$; $(\mathscr{C}_1)$, $(\mathscr{C}_2)$. Chứng minh rằng, tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác IAX, IBY, ICZ thẳng hàng.

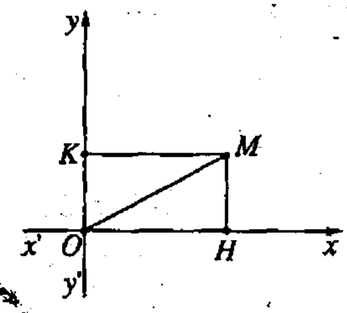
68. Cho tứ giác $ABCD$. $AB \cap CD = E$; $AD \cap CB = F$. Phân giác của các góc $\widehat{BAD}$, $\widehat{BCD}$ cắt nhau tại X. Phân giác của các góc $\widehat{ABC}$, $\widehat{ADC}$ cắt nhau tại Y. Phân giác ngoài của các góc $\widehat{AED}$, $\widehat{CFD}$ cắt nhau tại Z. Chứng minh rằng : X, Y, Z thẳng hàng.

§4. TOẠ ĐỘ TRÊN MẶT PHẲNG

1. Hệ trục toạ độ Descartes vuông góc

Hệ hai trục $x'Ox$, $y'Oy$ vuông góc với nhau tại gốc chung O được gọi là *hệ trục toạ độ Oxy* (hệ trục toạ độ Descartes vuông góc). $x'Ox$ được gọi là trục hoành ; $y'Oy$ được gọi là trục tung ; O được gọi là gốc của hệ trục (gốc toạ độ).

Mặt phẳng có gắn hệ trục toạ độ được gọi là *mặt phẳng toạ độ* (h.1.87).



Hình 1.87

2. Toạ độ của vectơ

Cho mặt phẳng toạ độ Oxy với các vectơ đơn vị của trục hoành và trục tung theo thứ tự là $\vec{i}, \vec{j}$. Vì $\vec{i}$ và $\vec{j}$ không cùng phương nên với mỗi vectơ trên mặt phẳng Oxy, tồn tại duy nhất cặp số $(x\,;\,y)$ sao cho $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Cặp số $(x\,;\,y)$ được gọi là *toạ độ của vectơ* $\vec{u}$ (x là *hoành độ*, y là *tung độ*). Để biểu thị $\vec{u}$ có toạ độ $(x\,;\,y)$, hoặc ta viết $\vec{u} = (x;y)$ hoặc ta viết $\vec{u}(x;y)$.

Cho $\vec{u} = (x;y); \overrightarrow{u'} = (x',y')$, ta có :

$$\vec{u} = \overrightarrow{u'} \Leftrightarrow x = x', y = y'.$$

$$\alpha\vec{u} + \beta\overrightarrow{u'} = (\alpha x + \beta x'; \alpha y + \beta y')\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

3. Toạ độ của điểm

Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, toạ độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$ được gọi là *toạ độ của điểm* M. Để biểu thị M có toạ độ $(x\,;\,y)$ (x là hoành độ, y là tung độ), hoặc ta viết $M = (x;y)$ hoặc ta viết $M(x;y)$.

Đôi khi, để cho đơn giản, hoành độ, tung độ của M theo thứ tự được kí hiệu là x_M, y_M. Đương nhiên $M = (x_M, y_M)$; $M(x_M, y_M)$.

– Gọi H, K theo thứ tự là hình chiếu của M trên trục hoành, trục tung, theo quy tắc hình bình hành, ta có (h.1.87) :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OK} \Rightarrow x_M\vec{i} + y_M\vec{j} = \overline{OH}\,\vec{i} + \overline{OK}\,\vec{j}.$$

Từ đó ta có : $x_M = \overline{OH}$; $y_M = \overline{OK}$.

– Cách phân tích trên cho ta thấy sự thống nhất trong hai cách định nghĩa mặt phẳng toạ độ : cách định nghĩa trong chương trình đại số lớp 8 và cách định nghĩa vừa được giới thiệu ở trên.

– Với hai điểm A, B trên mặt phẳng tọa độ, ta có :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_B - x_A, y_B - y_A).$$

Ví dụ 1. Với hai điểm phân biệt A, B trong mặt phẳng tọa độ, xét điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$ ($k \in \mathbb{R}, k \neq 1$), tức là điểm M sao cho $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB}}{1-k}$, thì M có tọa độ là

$$x_M = \frac{x_A - kx_B}{1-k},\ y_M = \frac{y_A - ky_B}{1-k}.$$

(Ta cũng nói M là điểm chia đoạn thẳng AB theo tỉ số k : nó là điểm thuộc đường thẳng AB sao cho tỉ số đơn $(ABM) = \dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = k$).

Đặc biệt, khi $k = -1$, ta được tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB là

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2},\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Ví dụ 2. Với ba điểm A, B, C trong mặt phẳng tọa độ, xét tâm tỉ cự M của hệ điểm $\{A, B, C\}$ với các hệ số $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ $(\alpha + \beta + \gamma \neq 0)$, tức là điểm M sao cho $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ (*), thì M có tọa độ là

$$x_M = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma},\ y_M = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma}.$$

Điều đó suy ra từ sự tương đương của (*) với $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}}{\alpha + \beta + \gamma}$ (xem ví dụ 19, §1).

Đặc biệt, tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC $(\alpha = \beta = \gamma = 1)$ là

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3},\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng tọa độ cho hệ n điểm $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$, $A_i = (x_i; y_i)$ $(i = 1,2,...,n)$ với các hệ số $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ $(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0)$.

Xét tâm tỉ cự M của hệ điểm đó với các hệ số đã cho thì M có tọa độ

$$x_M = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}, \; y_M = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}.$$

(xem nhận xét sau ví dụ 19).

Ví dụ 4. Trong mặt phẳng tọa độ, ánh xạ đặt ứng với mỗi điểm $M(x\,;\,y)$ một điểm $M'(x'\,;\,y')$ với $x' = x$, $y' = 0$ chính là phép chiếu (vuông góc) từ mặt phẳng lên trục hoành Ox. Phép chiếu đó biến tâm tỉ cự của họ điểm $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ với các hệ số $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ thành tâm tỉ cự của họ điểm $\{A_1', A_2', ..., A_n'\}$ với các hệ số $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$, nói tắt là phép chiếu đó bảo tồn khái niệm tâm tỉ cự.

Thật vậy, tâm tỉ cự M của họ điểm $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ với các hệ số $\{\alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_n\}$ có tọa độ như trong ví dụ 3, còn các điểm A_i' có tọa độ $(x_i, 0)$ $(i = 1,...,n)$, tâm tỉ cự M' của họ điểm $\{A_1', A_2', ..., A_n'\}$ với các hệ số $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ có tọa độ

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}, 0 \right).$$

Rõ ràng tâm tỉ cự M' là ảnh của M qua phép chiếu đang xét.

Chú ý. Hệ tọa độ trên đây còn được gọi là hệ tọa độ Descartes vuông góc. Người ta còn dùng hệ tọa độ afin trong đó trục hoành và trục tung không buộc phải vuông góc và các "vectơ đơn vị" trên hai trục không buộc phải có độ dài bằng nhau ; nhiều kết quả trên đây vẫn đúng trong hệ tọa độ đó.

Sau đây chúng ta đề cập đến khái niệm tọa độ trọng tâm gắn với nhiều bài tập trong các phần trước.

Cho tam giác ABC. *Tọa độ trọng tâm* (còn gọi là *tọa độ tỉ cự*) của điểm M đối với tam giác đó là bộ ba số (α, β, γ) thỏa mãn

$$\begin{cases} \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \vec{0} \\ \alpha + \beta + \gamma = 1. \end{cases}$$

Nói cách khác, (α, β, γ) là bộ ba số mà $\alpha + \beta + \gamma = 1$ và M là tâm tỉ cự của hệ ba điểm $\{A, B, C\}$ với họ hệ số $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ đó.

Từ sự tương đương của các đẳng thức vectơ :

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = x(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) + y(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC})$$

$$\Leftrightarrow (1 - x - y)\overrightarrow{MA} + x\overrightarrow{MB} + y\overrightarrow{MC} = \vec{0},$$

ta suy ra rằng khi cho trước M thì tồn tại và duy nhất các số α, β, γ để $\alpha + \beta + \gamma = 1$, $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ và ngược lại, khi cho α, β, γ mà $\alpha + \beta + \gamma = 1$ thì có điểm M duy nhất sao cho $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ (việc tồn tại M đã được nói đến trong ví dụ 19, §1).

Sau đây, khi nói đến tọa độ trọng tâm của điểm M đối với tam giác ABC, ta cũng viết $M(\alpha, \beta, \gamma)$ hay $M = (\alpha, \beta, \gamma)$.

Ví dụ 5.

a) Rõ ràng $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (0, 0, 1)$.

b) Điểm $M = (\alpha, \beta, \gamma)$ thuộc đường thẳng BC khi và chỉ khi $\alpha = 0$ (cũng tức là $\beta + \gamma = 1$) vì $\alpha = 0 \Leftrightarrow \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ với $\beta + \gamma = 1$.

Khi đó nếu M khác C thì tỉ số đơn $(BCM) = \dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = -\dfrac{\gamma}{\beta}$ (xem lại ví dụ 18, §1).

c) Điểm $M = (\alpha, \beta, \gamma)$ thuộc đường thẳng đi qua A song song với BC khi và chỉ khi $\alpha = 1$ (cũng tức là $\beta + \gamma = 1$) vì $\alpha = 1 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = -\beta(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = \beta\overrightarrow{BC}$.

d) Nếu $M = (\alpha, \beta, \gamma)$ với $\alpha \neq 1$ thì đường thẳng AM cắt đường thẳng BC tại điểm M' sao cho tỉ số đơn $(MAM') = \dfrac{\overline{M'M}}{\overline{M'A}} = \alpha$ và M' có tọa độ trọng tâm $\left(0, \dfrac{\beta}{\beta + \gamma}, \dfrac{\gamma}{\beta + \gamma}\right)$.

Thật vậy, ta có :

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow\ \alpha(\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'A}) + \beta(\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'B}) + \gamma(\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'C}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow\ (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MM'} + \alpha\overrightarrow{M'A} + \beta\overrightarrow{M'B} + \gamma\overrightarrow{M'C} = \vec{0}.$$

Do các vectơ $\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{M'A}$ cùng phương nhưng khác phương với $\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'C}$ (hai vectơ này cùng phương), ta có

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MM'} + \alpha\overrightarrow{M'A} = \vec{0} & (1) \\ \beta\overrightarrow{M'B} + \gamma\overrightarrow{M'C} = \vec{0}. & (2) \end{cases}$$

Đẳng thức (1) chứng tỏ tỉ số đơn $(MAM') = \alpha$.

Đẳng thức (2) chứng tỏ M' có tọa độ trọng tâm $\left(0, \dfrac{\beta}{\beta+\gamma}, \dfrac{\gamma}{\beta+\gamma}\right)$.

Hệ quả.

– Các điểm M có tọa độ trọng tâm (α, β, γ) mà α không đổi chạy trên một đường thẳng song song hay trùng với đường thẳng BC.

– Nếu $M = (\alpha, \beta, \gamma)$ với $\alpha \neq 1$ thì mọi điểm trên đường thẳng AM có tọa độ trọng tâm $(\alpha', \beta', \gamma')$ với (β', γ') tỉ lệ với (β, γ) (tức có số t để $\beta' = t\beta$, $\gamma' = t\gamma$).

Chú ý. Với mỗi điểm $M(\alpha, \beta, \gamma)$ của mặt phẳng, kí hiệu

$$\overline{S_{MBC}} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } M, B, C \text{ thẳng hàng} \\ S_{MBC} & \text{nếu } M, A \text{ cùng phía đối với } BC \\ -S_{MBC} & \text{nếu } M, A \text{ khác phía đối với } BC \end{cases}$$

thì ta có $\alpha = \dfrac{\overline{S_{MBC}}}{S_{ABC}}$ (S_{ABC} là diện tích tam giác ABC).

Thực vậy, rõ ràng :

- $\alpha = 0 \Leftrightarrow M, B, C$ thẳng hàng $\Leftrightarrow \overline{S_{MBC}} = 0$;
- $\alpha = 1 \Leftrightarrow M$ thuộc đường thẳng qua A song song với $BC \Leftrightarrow \overline{S_{MBC}} = S_{ABC}$.
- $\alpha \neq 1, \alpha \neq 0, MA$ cắt BC ở M' thì $\alpha = (MAM') = \dfrac{\overline{M'M}}{\overline{M'A}} = \dfrac{\overline{S_{MBC}}}{S_{ABC}}$

(xem lại ví dụ 14, §1).

Từ đó, dễ dàng suy ra : tọa độ trọng tâm của trọng tâm G của tam giác ABC là $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, của tâm I đường tròn nội tiếp tam giác ABC là $\left(\frac{a}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c}, \frac{c}{a+b+c}\right)$ (a, b, c là độ dài ba cạnh BC, CA, AB). (xem lại ví dụ 10. §1).

BÀI TẬP

69. Trong mặt phẳng tọa độ, xét ánh xạ f biến mỗi điểm $M(x\,;y)$ thành điểm $f(M) = M'(x'\,;y')$ sao cho

$$\begin{cases} x' = ax + by + p \\ y' = cx + dy + q \end{cases}$$

trong đó a, b, c, d, p, q là sáu số cho trước, $ad - bc \neq 0$.

1) Chứng minh rằng nếu $f(M_1) = f(M_2)$ thì $M_1 = M_2$.

2) Chứng minh rằng với mọi điểm N cho trước, có điểm M sao cho $f(M) = N$.

3) Xét tâm tỉ cự G của họ điểm A_i với họ hệ số $\alpha_i (i = 1,\ldots,n, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0)$.

Chứng minh rằng $f(G)$ là tâm tỉ cự của họ điểm $f(A_i)$ với họ hệ số α_i. (nói vắn tắt : f bảo tồn khái niệm tâm tỉ cự).

4) Chứng minh rằng f biến tập các điểm thuộc đoạn thẳng AB thành tập các điểm thuộc đoạn thẳng $A'B'$ $(A' = f(A), B' = f(B))$ và nếu điểm D chia đoạn thẳng AB theo tỉ số k thì $f(D)$ chia đoạn thẳng $A'B'$ theo tỉ số k (nói vắn tắt : f bảo tồn tỉ số đơn).

5) Chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ thì $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$

$$(A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C), D' = f(D)).$$

6) $\mathcal{H}$ là một hình (tập hợp con) trong mặt phẳng tọa độ, kí hiệu $\mathcal{H}' = f(\mathcal{H}) = \{f(M) \mid M \in \mathcal{H}\}$. Chứng minh rằng nếu $\mathcal{H}$ có tâm đối xứng thì $\mathcal{H}'$ có tâm đối xứng.

70. Trong mặt phẳng tọa độ, xét ánh xạ f biến mỗi điểm $M(x\,;y)$ thành điểm $f(M) = M'(x'\,;y')$ sao cho

$$\begin{cases} x' = x + ky \\ y' = y \end{cases}$$

(k là một số cho trước, $k \neq 0$).

1) Tìm các điểm M sao cho M trùng với $M' = f(M)$ (điểm M như thế gọi là một điểm bất động của f).

2) Xét tam giác OAB (O là gốc tọa độ). Chứng minh rằng diện tích tam giác $OA'B'$ ($A' = f(A)$, $B' = f(B)$) bằng diện tích tam giác OAB.

71. Xét tọa độ trọng tâm đối với tam giác ABC

1) Gọi $d_a(M)$ là khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng BC và kí hiệu

$$\overline{d_a(M)} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } M \text{ thuộc đường thẳng } BC \\ d_a(M) & \text{nếu } M, A \text{ cùng phía đối với đường thẳng } BC \\ -d_a(M) & \text{nếu } M, A \text{ khác phía đối với đường thẳng } BC. \end{cases}$$

Gọi h_a là chiều cao AH của tam giác ABC.

Chứng minh rằng nếu tọa độ trọng tâm của điểm M là (α, β, γ) thì $\alpha = \dfrac{\overline{d_a(M)}}{h_a}$.

2) Chứng minh rằng ba đường thẳng BC, CA, AB chia tập hợp các điểm còn lại của mặt phẳng thành 7 miền, mỗi miền gồm tất cả các điểm $M(\alpha, \beta, \gamma)$ $(\alpha\beta\gamma \neq 0)$ mà mỗi tọa độ α, β, γ giữ dấu không đổi. Chỉ rõ trên hình các miền đó (chẳng hạn miền trong của tam giác : $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$).

3) Tìm tọa độ trọng tâm của tâm J đường tròn bàng tiếp tam giác ABC ở trong góc $\widehat{BAC}$ (xem lại ví dụ 10, §1).

4) Tìm tọa độ trọng tâm của trực tâm của tam giác nhọn ABC.

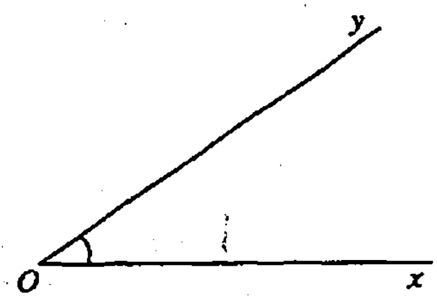
Chương II

TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ VÀ ỨNG DỤNG

§1. GÓC VÀ CUNG LƯỢNG GIÁC

Cho hai tia Ox và Oy có chung đỉnh O. Ta biết rằng lúc đó xác định được góc $\widehat{xOy}$ và số đo của nó trong phạm vi từ 0° đến 180°. Cách xác định này đôi khi còn được gọi là góc hình học và số đo của góc hình học $\widehat{xOy}$.

Đối với góc lượng giác giữa hai tia, để xác định được đầy đủ, ta cần biết thứ tự giữa hai tia đó và góc quay cụ thể từ tia đầu cho đến tia cuối.

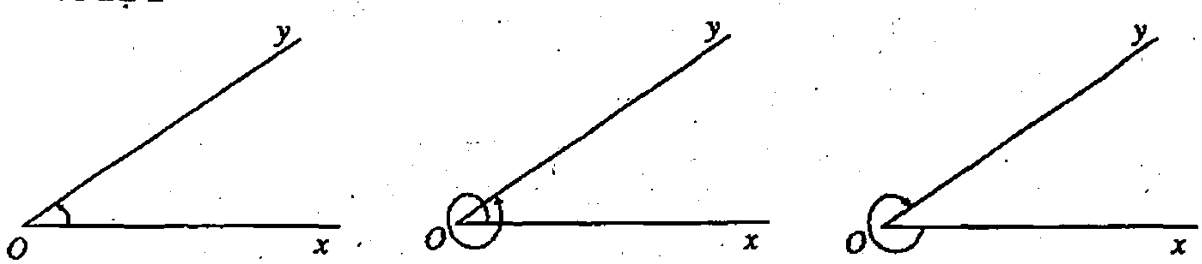


Hình 2.1

1. Góc lượng giác giữa hai tia

Cho hai tia Ox và Oy. Góc lượng giác từ Ox đến Oy, ký hiệu (Ox, Oy), chỉ được xác định khi ta biết được chuyển động quay từ Ox đến Oy. Ox được gọi là tia đầu và Oy được gọi là tia cuối. Do có nhiều chuyển động quay như vậy nên có nhiều góc lượng giác khác nhau từ tia đầu Ox đến tia cuối Oy.

Ví dụ 1



$(Ox, Oy)_1$ a) $(Ox, Oy)_2$ b) $(Ox, Oy)_3$ c)

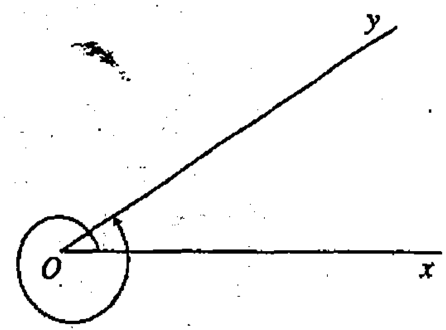
Hình 2.2

Trên các hình vẽ 2.2, ta có ba góc lượng giác khác nhau $(Ox, Oy)_1$, $(Ox, Oy)_2$ và $(Ox, Oy)_3$ ứng với ba chuyển động quay khác nhau từ Ox đến Oy với tia đầu Ox và tia cuối Oy cho trước.

Rõ ràng việc xác định một góc lượng giác là phức tạp hơn một góc hình học. Bù lại, các góc lượng giác cho chúng ta thông tin đầy đủ về chuyển động giữa hai tia nên rất thích hợp trong việc xem xét và trình bày các bài toán thực tế. Dưới đây, ta sẽ thấy góc lượng giác cho phép định nghĩa các giá trị lượng giác một cách chặt chẽ và tiện lợi.

2. Số đo của góc lượng giác

Cho góc lượng giác (Ox, Oy). Xét chuyển động quay tương ứng của nó từ tia đầu Ox đến tia cuối Oy. Lúc đó số đo của (Ox, Oy) là số thực α được xác định theo chuyển động quay này như sau :



Hình 2.3

+ α là số dương nếu chuyển động quay đã cho của (Ox, Oy) ngược chiều với chiều quay của kim đồng hồ ; α là số âm nếu chuyển động đó cùng chiều với chiều quay của kim đồng hồ.

+ Độ lớn của α (tức $|\alpha|$) bằng độ lớn của góc quay được thực hiện trong chuyển động quay đã cho từ Ox đến Oy (nghĩa là bằng số đo của góc mà tia Ox phải quét để đi đến vị trí của tia Oy trong chuyển động quay đó).

Ta nói rằng số đo của góc lượng giác (Ox, Oy) bằng α và kí hiệu :

$$\text{sđ}(Ox, Oy) = \alpha.$$

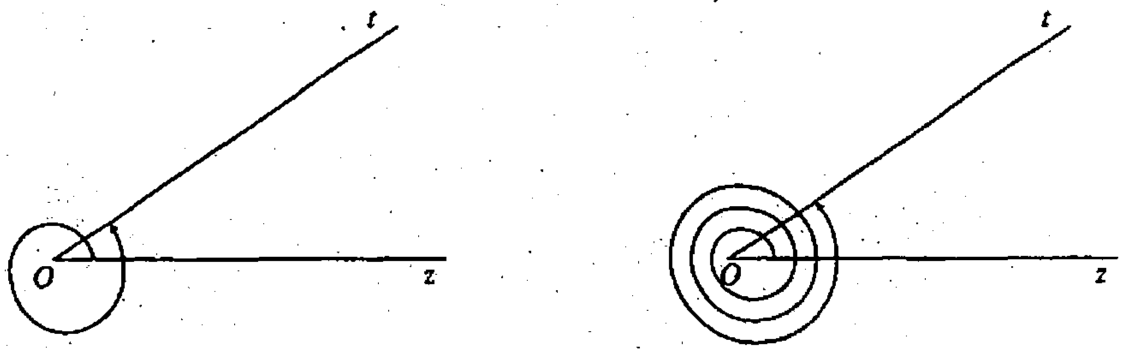
Ví dụ 2. Xét các góc lượng giác $(Ox, Oy)_1$, $(Ox, Oy)_2$ và $(Ox, Oy)_3$ cho ở ví dụ 1, ta có thể thấy :

$$\text{sđ}(Ox, Oy)_1 = 45^\circ,$$

$$\text{sđ}(Ox, Oy)_2 = 405^\circ,$$

$$\text{sđ}(Ox, Oy)_3 = -315^\circ.$$

Như vậy, khác với góc hình học, số đo của hai góc lượng giác $(Oz, Ot)_1$ và $(Oz, Ot)_2$ có cùng tia đầu Oz và tia cuối Ot nói chung là không bằng nhau. Nhưng rõ ràng là hai chuyển động quay tương ứng của chúng chỉ khác biệt nhau một số vòng quay kín nên ta có : $\text{sđ}(Oz, Ot)_2 = \text{sđ}(Oz, Ot)_1 + k360^\circ$, với k là số nguyên.

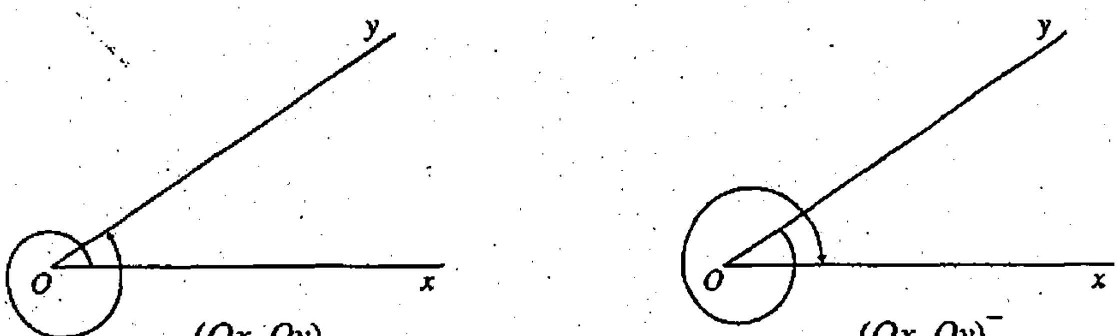


$(Oz, Ot)_1$ $(Oz, Ot)_2$

Hình 2.4

3. Góc lượng giác đối và hệ thức Chasles

Cho góc lượng giác (Ox, Oy). Góc lượng giác đối của (Ox, Oy), kí hiệu $(Ox, Oy)^-$, là góc lượng giác từ Oy đến Ox với chuyển động quay tương ứng là chuyển động ngược của (Ox, Oy).



(Ox, Oy) $(Ox, Oy)^-$

Hình 2.5

Rõ ràng là : sđ$(Ox, Oy)^-$ = –sđ(Ox, Oy).

Như vậy đối với góc lượng giác đối $(Ox, Oy)^-$, Oy trở thành tia đầu còn Ox trở thành tia cuối. Do đó, với hai góc (Ox, Oy) và (Oy, Ox) bất kì cho trước, ta có :

sđ(Oy, Ox) = sđ$(Ox, Oy)^-$ + k360^o

⇒ sđ(Oy, Ox) = –sđ(Ox, Oy) + k360^o, với k là số nguyên.

Bây giờ ta phát biểu và chứng minh một hệ thức quan trọng về các góc lượng giác. Hệ thức này đối với các góc lượng giác có ý nghĩa và vai trò cũng như là hệ thức Chasles đã được học đối với độ dài đại số các đoạn thẳng : $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$. Do đó nó thường được gọi là hệ thức Chasles đối với các góc lượng giác.

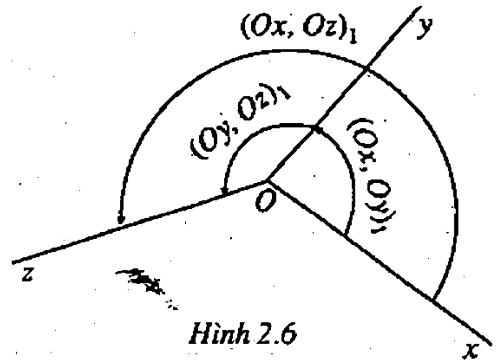
Định lí (Hệ thức Chasles). Giả sử (Ox, Oy), (Oy, Oz) và (Ox, Oz) là ba góc lượng giác cho trước. Lúc đó ta có :

$$\text{sđ}(Ox, Oz) = \text{sđ}(Ox, Oy) + \text{sđ}(Oy, Oz) + k360^\circ.$$

Chứng minh. Quay tia Ox theo chiều dương (ngược chiều kim đồng hồ) cho đến khi gặp tia Oz lần đầu. Có hai khả năng sau xảy ra :

i) Tia Ox sẽ gặp tia Oy trước hoặc cùng lúc với khi gặp tia Oz (h. 2.6)

Lúc này kí hiệu $(Ox, Oy)_1$ là góc lượng giác tương ứng với chuyển động quay vừa thực hiện từ Ox đến Oy.



Hình 2.6

Tương tự xác định các góc lượng giác $(Oy, Oz)_1$ và $(Ox, Oz)_1$. Ta có :

$$\text{sđ}(Ox, Oz)_1 = \text{sđ}(Ox, Oy)_1 + \text{sđ}(Oy, Oz)_1,$$

mà $\text{sđ}(Ox, Oz)_1 = \text{sđ}(Ox, Oz) + h360^\circ$

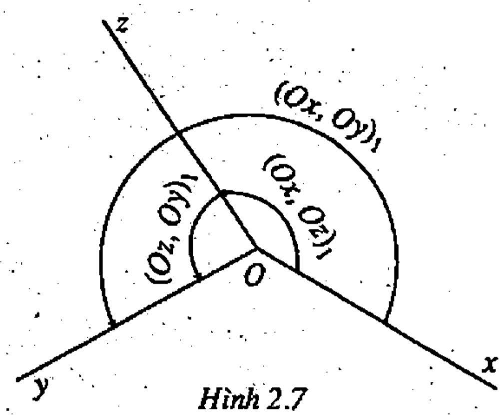
$$\text{sđ}(Ox, Oy)_1 = \text{sđ}(Ox, Oy) + l360^\circ$$

$$\text{sđ}(Oy, Oz)_1 = \text{sđ}(Oy, Oz) + t360^\circ$$

nên ta được : $\text{sđ}(Ox, Oz) = \text{sđ}(Ox, Oy) + \text{sđ}(Oy, Oz) + k360^\circ$, với $k \in \mathbb{Z}$.

ii) Tia Ox sẽ gặp tia Oy sau khi gặp tia Oz (h. 2.7)

Lúc này ta quay tiếp tia Ox sau khi đã gặp tia Oz cho đến khi gặp tia Oy lần đầu. Kí hiệu $(Ox, Oz)_1$, $(Oz, Oy)_1$ và $(Ox, Oy)_1$ là các góc lượng giác tương ứng với các chuyển động quay vừa được thực hiện. Ta có :



Hình 2.7

$$\text{sđ}(Ox, Oy)_1 = \text{sđ}(Ox, Oz)_1 + \text{sđ}(Oz, Oy)_1$$

$$\Rightarrow \text{sđ}(Ox, Oz)_1 = \text{sđ}(Ox, Oy)_1 - \text{sđ}(Oz, Oy)_1$$

mà $\text{sđ}(Ox, Oz)_1 = \text{sđ}(Ox, Oz) + h360^\circ$,

$$\text{sđ}(Ox, Oy)_1 = \text{sđ}(Ox, Oy) + l360^\circ$$

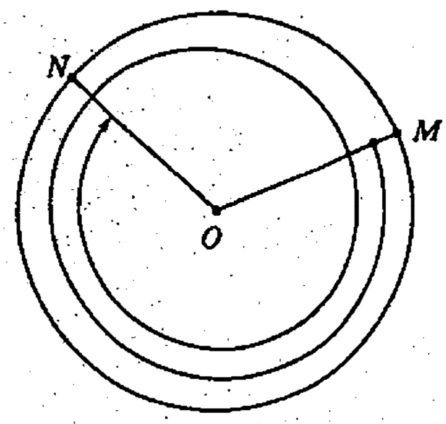
còn $\text{sđ}(Oz, Oy)_1 = -\text{sđ}(Oy, Oz) + t360^\circ$

nên ta được : $\text{sđ}(Ox, Oz) = \text{sđ}(Ox, Oy) + \text{sđ}(Oy, Oz) + k360^\circ$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Định lí được chứng minh. □

4. Cung lượng giác

Cho đường tròn (O) tâm O và hai điểm M, N trên (O). Tương tự như góc lượng giác, cung lượng giác từ M đến N, kí hiệu $\overset{\frown}{MN}$, chỉ được xác định khi biết được chuyển động từ điểm M đến điểm N trên đường tròn (O). Điểm M được gọi là điểm đầu còn điểm N được gọi là điểm cuối của cung lượng giác $\overset{\frown}{MN}$.



Hình 2.8

Rõ ràng mỗi cung lượng giác $\overset{\frown}{MN}$ sẽ tương ứng duy nhất với một góc lượng giác (OM, ON) (chuyển động từ điểm M đến điểm N tương ứng với chuyển động quay từ tia OM đến tia ON).

Do đó số đo của cung lượng giác $\overset{\frown}{MN}$ có thể xác định bằng số đo của góc lượng giác (OM, ON) tương ứng với nó :

$$\text{sđ}\,\overset{\frown}{MN} = \text{sđ}(OM, ON).$$

5. Rađian

Trước đây ta đo các góc và cung bằng độ. Đối với các góc và cung lượng giác, khi mà số vòng quay trong chuyển động tương ứng từ tia đầu đến tia cuối là khá lớn thì số đo của chúng tính bằng độ sẽ trở nên cồng kềnh. Do đó, bên cạnh việc đo bằng độ, người ta còn sử dụng đơn vị bằng rađian để làm cho số đo các góc và cung lượng giác được gọn gàng hơn. Đơn vị rađian còn có ý nghĩa hình học khá đơn giản và rất tiện lợi trong việc tính độ dài các cung tròn cũng như trong việc xét các hàm số lượng giác sau này.

Đơn vị Rađian

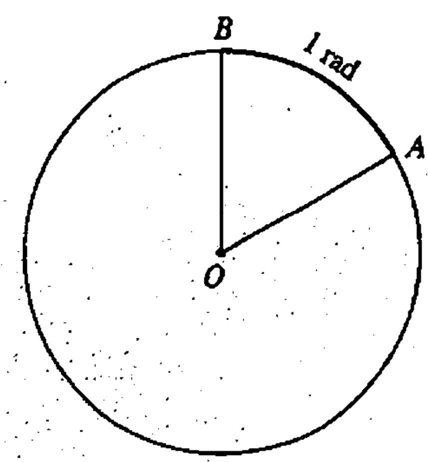
Cho đường tròn (O) tâm O, bán kính R và một cung $\overset{\frown}{AB}$ trên (O).

Ta nói cung $\overset{\frown}{AB}$ có số đo bằng 1 rađian nếu độ dài của nó đúng bằng bán kính R và viết :

$$\text{sđ}\,\overset{\frown}{AB} = 1 \text{ rad}.$$

Lúc đó ta cũng nói rằng số đo góc $\widehat{AOB}$ bằng 1 rađian và viết :

$$\widehat{AOB} = 1 \text{ rad}.$$



Hình 2.9

Liên hệ giữa rađian và độ

Do đường tròn có độ dài bằng $2\pi R$ và có số đo là 360^o nên ta có :

$$360^o = 2\pi \text{ rad}.$$

Suy ra $1^o = \dfrac{\pi}{180}$ rad. Đây là công thức đổi từ độ sang rađian.

Ngược lại ta có : $1 \text{ rad} = \left(\dfrac{180}{\pi}\right)^o$. Đây là công thức đổi rađian sang độ.

Đối với số đo của cung lượng giác, góc lượng giác (có thể là số âm), ta cũng có thể đổi từ số đo độ sang số đo rađian và ngược lại.

Ví dụ 3. Đổi từ độ sang rađian các số đo sau :

$$30^o, -75^o, 270^o, -1200^o.$$

Giải. Ta có :

$$30^o = 30.\frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{\pi}{6} \text{ rad},$$

$$-75^o = -75.\frac{\pi}{180} \text{ rad} = -\frac{5}{12}\pi \text{ rad},$$

$$270^o = 270.\frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{3}{2}\pi \text{ rad},$$

$$-1200^o = -1200.\frac{\pi}{180} \text{ rad} = -\frac{20}{3}\pi \text{ rad}. \square$$

Từ nay ta quy ước không ghi rad đằng sau các số đo tính bằng rađian, chẳng hạn viết $30^o = \dfrac{\pi}{6}$ thay cho $30^o = \dfrac{\pi}{6}$ rad.

Ví dụ 4. Đổi từ rađian sang độ các số đo sau :

$$\frac{\pi}{8}, -\frac{3\pi}{5}, \frac{7\pi}{3}, -\frac{40}{9}\pi.$$

Giải. Ta có :

$$\frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{8}.\left(\frac{180}{\pi}\right)^o = 22{,}5^o,$$

$$-\frac{3\pi}{5} = -\frac{3\pi}{5}.\left(\frac{180}{\pi}\right)^o = -108^o,$$

$$\frac{7\pi}{3} = \frac{7\pi}{3}.\left(\frac{180}{\pi}\right)^o = 420^o.$$

$$-\frac{40\pi}{9} = -\frac{40\pi}{9}.\left(\frac{180}{\pi}\right)^o = -800^o. \square$$

Dưới đây là bảng tương ứng giữa số đo bằng độ và rađian của các góc (cung) đặc biệt trong phạm vi từ 0° đến 180°.

Số đo bằng độ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Số đo bằng rađian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Độ dài cung tròn

Cho đường tròn (O) bán kính R. Để ý rằng một cung tròn trên (O) với số đo bằng 1 (rad) sẽ có độ dài đúng bằng bán kính R. Thành thử nếu cung $\overset{\frown}{MN}$ có số đo bằng α (rad) thì độ dài l của nó sẽ là : $l = \alpha.R$

Công thức này cho phép ta dễ dàng tính được độ dài của một cung tròn theo số đo của nó bằng rađian.

Ví dụ 5. Cho hình tròn tâm O bán kính $R = 10$cm và một điểm A trên biên của nó. Người ta quay hình tròn quanh điểm O một góc bằng $\frac{4\pi}{5}$.

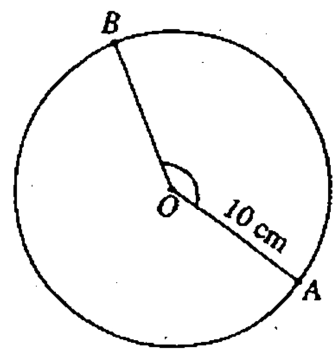
Hỏi độ dài cung tròn mà điểm A đã thực hiện trong phép quay này ?

Giải. Gọi $\overset{\frown}{AB}$ là cung tròn mà điểm A đã thực hiện trong phép quay nói trên, ta có :

$$\text{sđ}\,\overset{\frown}{AB} = \frac{4\pi}{5}.$$

Suy ra độ dài l của cung $\overset{\frown}{AB}$ bằng :

$$l = \frac{4\pi}{5}.R = \frac{4\pi}{5}.10(\text{cm}) = 8\pi(\text{cm}). \square$$



Hình 2.10

BÀI TẬP

1. Cho Ox, Oy là trục hoành và trục tung của hệ tọa độ Oxy. Tìm số đo các góc lượng giác (Ox, Oy) thỏa mãn :

$$0^\circ \le \text{sđ}(Ox, Oy) \le 500^\circ.$$

2. Cho hai tia Ox, Oy. Biết rằng các góc lượng giác (Ox, Oy) có số đo dạng : $\text{sđ}(Ox, Oy) = 60^\circ + k360^\circ$ $(k \in \mathbb{Z})$, tìm số đo các góc lượng giác (Ox, Oy) thỏa mãn :

$$-360^\circ \le \text{sđ}(Ox, Oy) \le 360^\circ.$$

3. Cho hai tia Ox, Oy với $\widehat{xOy} = 70^\circ$. Tìm số đo các góc lượng giác (Ox, Oy) thỏa mãn :

$$-100^\circ \leq \text{sđ}(Ox, Oy) \leq 300^\circ.$$

4. Cho các góc lượng giác (Ox, Oy) và (Ox, Oz) với sđ$(Ox, Oy) = \alpha^\circ$ và sđ$(Ox, Oz) = \beta^\circ$. Tìm số đo các góc lượng giác (Oy, Oz).

5. Cho các góc lượng giác (Ot, Ox), (Ot, Oy) và (Ot, Oz). Chứng minh các tia Ox và Oy đối xứng nhau qua Oz khi và chỉ khi :

$$\text{sđ}(Ot, Ox) + \text{sđ}(Ot, Oy) = 2\text{sđ}(Ot, Oz) + k360^\circ \ (k \in \mathbb{Z}).$$

6. Cho hai điểm A, B cùng chuyển động đều trên đường tròn (O) có tâm O. Biết rằng mỗi phút tia OA quét được một góc bằng 60°, tia OB quét được một góc bằng 90° và ở thời điểm đầu tiên của chuyển động, các điểm A và B đối xứng nhau qua điểm O.

   a) Hỏi cần bao nhiêu thời gian để các điểm A và B gặp nhau lần đầu nếu A và B chuyển động cùng chiều ?

   b) Hỏi cần ít nhất bao nhiêu thời gian để các điểm A và B lại đối xứng qua O sau khi bắt đầu chuyển động nếu A và B chuyển động ngược chiều ?

7. Cho hai tia Ox, Oy cùng quay đều quanh điểm O. Tia Ox quay với vận tốc góc 40°/phút, tia Oy quay với vận tốc góc -20°/phút. Biết rằng ở thời điểm đầu tiên của chuyển động, Ox và Oy nằm ở vị trí sao cho các góc lượng giác (Ox, Oy) có số đo dạng :

$$\text{sđ}(Ox, Oy) = -120^\circ + k360^\circ \ (k \in \mathbb{Z}).$$

   a) Hỏi cần bao nhiêu thời gian để các tia Ox và Oy gặp nhau lần đầu ?

   b) Hỏi cần bao nhiêu thời gian để các tia Ox và Oy gặp nhau lần thứ n với n là số nguyên dương cho trước ?

   c) Câu hỏi tương tự như câu b) để các tia Ox và Oy nằm trên cùng một đường thẳng và ngược chiều nhau lần thứ n.

   (Vận tốc góc một tia Ot quay đều là α°/phút, nếu sau mỗi phút, Ot quay đến vị trí tia Oz sao cho sđ$(Ot, Oz) = \alpha^\circ$).

8. a) Đổi ra rađian các số đo sau :

$$72^\circ ; -40^\circ ; 112^\circ30', -253^\circ20' ; 2028^\circ.$$

   b) Đổi ra độ các số đo sau :

$$\frac{4\pi}{9} ; -\frac{7\pi}{15} ; \frac{17\pi}{12} ; -\frac{51\pi}{20} ; \frac{97\pi}{8}.$$

9. Một hình tròn bán kính $R = 10\text{cm}$ quay đều xung quanh tâm của nó với vận tốc góc bằng 16 rad/phút.

a) Tính độ dài đoạn đường mà một điểm A trên biên hình tròn thực hiện được trong chuyển động nói trên với thời gian là 3 phút.

b) Câu hỏi tương tự đối với một điểm B trên hình tròn và cách tâm một khoảng cách 4cm với thời gian là 5 phút.

10. Một chiếc xe hai bánh có bán kính bánh trước là 50cm và bán kính bánh sau là 80cm chuyển động với vận tốc không đổi trên một đoạn đường thẳng. Biết rằng vận tốc góc của bánh sau trong chuyển động này là 500 rad/phút.

a) Tính vận tốc của chiếc xe (đơn vị km/giờ).

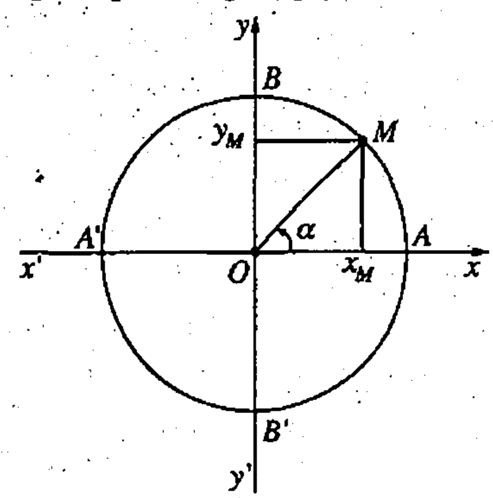
b) Tính vận tốc góc của bánh trước trong chuyển động trên (đơn vị rad/phút).

§2. CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC (CUNG)

Trước đây, các giá trị lượng giác $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\tan\alpha$ và $\cot\alpha$ đã được xét đối với góc nhọn α. Bây giờ chúng ta sẽ mở rộng các giá trị này cho góc lượng giác α (tức là với một số thực α bất kì). Việc mở rộng như vậy sẽ cho phép chúng ta thiết lập một số công thức lượng giác quan trọng và qua đó, giải quyết rất hiệu quả nhiều vấn đề tính toán khác nhau trong hình học và đại số.

Ở đây ta sử dụng số đo của góc lượng giác α bằng đơn vị radian. Điều này giúp cho việc viết các số đo có phần nào ngắn gọn hơn.

Cho đường tròn (O) tâm O, bán kính $R = 1$. Đường tròn (O) thường được gọi là đường tròn đơn vị hay đường tròn lượng giác. Tên gọi này có được là do ở trên (O), ta có thể biểu diễn các góc (cung) lượng giác khác nhau và định nghĩa một cách trực quan các giá trị lượng giác của chúng.



Hình 2.11

1. Định nghĩa côsin và sin của một góc (cung) lượng giác

Cho một góc lượng giác (hoặc một cung lượng giác) có số đo α, tức α rad.

Kí hiệu A, A' là các giao điểm của trục Ox với đường tròn (O), B, B' là các giao điểm của trục Oy với đường tròn (O) (xem hình 2.11). Lấy điểm M trên

(O) sao cho : sđ$(OA, OM) = \alpha$ (hoặc sđ $\overset{\frown}{AM} = \alpha$). Góc lượng giác (OA, OM) được gọi là *góc biểu diễn* của α (tương tự, cung lượng giác $\overset{\frown}{AM}$ được gọi là *cung biểu diễn* của α) trên đường tròn lượng giác. Điểm M được gọi là *điểm biểu diễn* của α trên đường tròn lượng giác.

Các giá trị $\cos\alpha$ và $\sin\alpha$ được định nghĩa như sau :

> $\cos\alpha$ là hoành độ của điểm biểu diễn M : $\cos\alpha = x_M$,
> $\sin\alpha$ là tung độ của điểm biểu diễn M : $\sin\alpha = y_M$.

Rõ ràng $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ được xác định với mọi giá trị thực α và chúng chỉ nhận các giá trị trong phạm vi từ -1 đến 1. Ngoài ra, để ý rằng các góc lượng giác với số đo $\alpha + 2k\pi$, với k là số nguyên, sẽ có cùng điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác giống như α. Do đó, ta có :

$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha \quad \text{và} \quad \sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha.$$

Trong trường hợp $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (tức α là số đo một góc nhọn), có thể thấy ngay rằng các giá trị $\cos\alpha$ và $\sin\alpha$ vừa được định nghĩa ở trên là hoàn toàn trùng hợp với các tỉ số lượng giác $\cos\alpha$ và $\sin\alpha$ đã được xét trước đây trong tam giác vuông. Dưới đây là bảng các giá trị lượng giác côsin và sin của một số góc đặc biệt trong phạm vi từ 0 đến π.

GTLG \ α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Ví dụ 1. Tìm tất cả các góc α sao cho $\cos\alpha = 0$.

Giải. Gọi M là điểm biểu diễn của α trên đường tròn lượng giác (O).

Ta có : $\cos\alpha = 0 \Leftrightarrow x_M = 0$

$\Leftrightarrow M$ trùng với một trong hai điểm B hoặc B' trên (O)

$\Leftrightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{2} + 2h\pi$

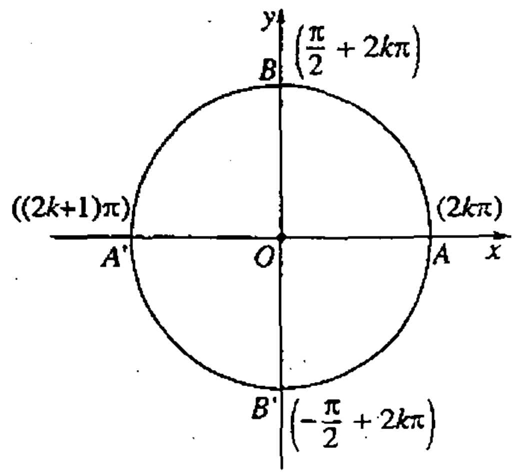
hoặc $\alpha = -\dfrac{\pi}{2} + 2l\pi$ $(h, l \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. □

Chú ý 1. Tương tự, với phương trình $\sin\alpha = 0$, ta được các giá trị α sau :

$$\alpha = 2h\pi \text{ hoặc } \alpha = \pi + 2l\pi \ (h, l \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \alpha = k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$



Hình 2.12

2. Định nghĩa tang và côtang của một góc (cung) lượng giác

Dựa vào các giá trị $\cos\alpha$ và $\sin\alpha$ của góc lượng giác α, ta có các định nghĩa sau :

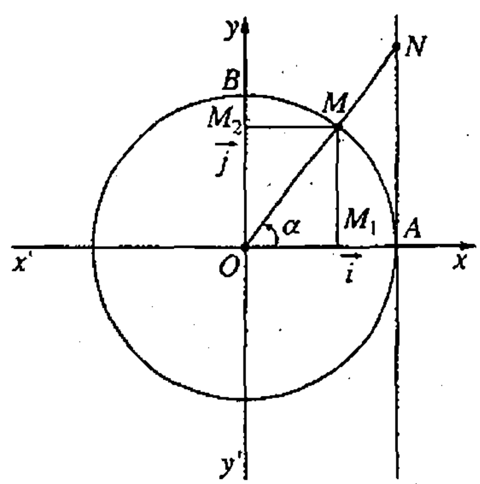
$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad (\alpha \neq k\pi).$$

Bài toán. Cho góc $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$. Gọi M là điểm biểu diễn của α trên đường tròn lượng giác (O). Gọi N là giao điểm của đường thẳng OM với tiếp tuyến của đường tròn (O) tại điểm A.

Chứng minh rằng : $\overline{AN} = \tan\alpha$.

(Ở đây $\overline{AN}$ là độ dài đại số của vectơ $\overrightarrow{AN}$ trên trục là đường thẳng tiếp tuyến của (O) tại A với vectơ đơn vị bằng vectơ $\vec{j}$ của trục $y'Oy$).



Hình 2.13

Chứng minh. Gọi M_1, M_2 lần lượt là các hình chiếu vuông góc của M trên Ox, Oy.

Ta có : $\dfrac{\overline{AN}}{\overline{M_1M}} = \dfrac{\overline{OA}}{\overline{OM_1}} \Rightarrow \dfrac{\overline{AN}}{\overline{OM_2}} = \dfrac{\overline{OA}}{\overline{OM_1}}$

mà $\overline{OA} = 1$ nên ta được : $\overline{AN} = \dfrac{\overline{OM_2}}{\overline{OM_1}} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$. □

Chú ý 2.

• Đẳng thức $\tan\alpha = \overline{AN}$ cho ta ý nghĩa hình học của giá trị $\tan\alpha$. Nó còn cho thấy rằng $\tan\alpha$ có thể nhận tất cả mọi giá trị thực. Ngoài ra, do các góc $\alpha + k\pi$, với k là số nguyên, sẽ có cùng điểm cắt trên đường thẳng tiếp tuyến tại A (điểm N) giống như α nên ta có : $\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha$.

• Nếu thay tiếp tuyến của đường tròn lượng giác tại điểm A bằng tiếp tuyến tại điểm B, ta sẽ thu được ý nghĩa hình học của giá trị $\cot\alpha$ và cả những tính chất tương tự như của $\tan\alpha$ vừa nêu ra ở trên.

3. Hệ thức liên hệ giữa các giá trị lượng giác

Từ các định nghĩa ở trên, ta có ngay các công thức sau :

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$
$$\tan\alpha.\cot\alpha = 1,$$
$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = \tan^2\alpha + 1,$$
$$\frac{1}{\sin^2\alpha} = \cot^2\alpha + 1,$$

với α là góc sao cho các giá trị lượng giác trong công thức được xác định.

Các hệ thức này cho phép ta khi biết một giá trị lượng giác, có thể suy ra các giá trị lượng giác còn lại của một góc.

Ví dụ 2. Biết $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ với $0 \le \alpha \le \pi$. Tìm các giá trị lượng giác còn lại của góc α.

Giải. Ta có $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$.

Do $0 \le \alpha \le \pi$ nên $\sin\alpha \ge 0$, suy ra $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$ và

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{4}{3}$, $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha} = \dfrac{3}{4}$. □

4. Giá trị lượng giác của các góc (cung) liên kết

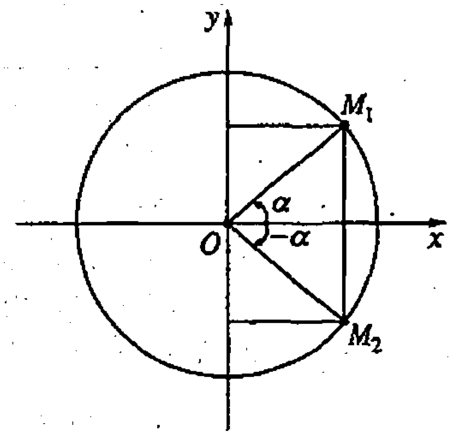
Trong quá trình tính toán, ta thường gặp các góc đối nhau, bù nhau, phụ nhau, ... Các góc như vậy thường được gọi là các góc liên kết và việc vận dụng các mối liên hệ giữa các giá trị lượng giác của chúng sẽ giúp cho các bước tính toán được dễ dàng hơn.

a) Giá trị lượng giác của hai góc đối

Cho hai góc lượng giác đối nhau α và $-\alpha$. Gọi M_1 và M_2 lần lượt là các điểm biểu diễn của α và $-\alpha$ trên đường tròn lượng giác. Không khó để thấy rằng M_1 và M_2 đối xứng nhau qua đường thẳng Ox nên :

$$\begin{cases} x_{M_2} = x_{M_1} \\ y_{M_2} = -y_{M_1}. \end{cases}$$

Suy ra $\begin{cases} \cos(-\alpha) = \cos\alpha \\ \sin(-\alpha) = -\sin\alpha \end{cases}$ và $\begin{cases} \tan(-\alpha) = -\tan\alpha \\ \cot(-\alpha) = -\cot\alpha. \end{cases}$



Hình 2.14

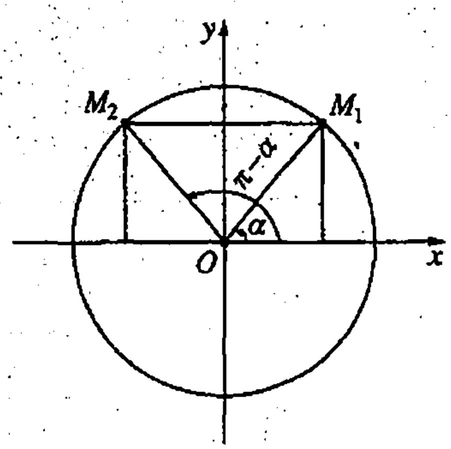
b) Giá trị lượng giác của hai góc bù nhau

Cho hai góc lượng giác bù nhau α và $\pi - \alpha$. Gọi M_1 và M_2 lần lượt là các điểm biểu diễn của α và $\pi - \alpha$ trên đường tròn lượng giác. Không khó để thấy rằng M_1 và M_2 đối xứng với nhau qua đường thẳng Oy nên :

$$\begin{cases} x_{M_2} = -x_{M_1} \\ y_{M_2} = y_{M_1}. \end{cases}$$

Suy ra $\begin{cases} \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha \\ \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha \end{cases}$

và $\begin{cases} \tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha \\ \cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha. \end{cases}$

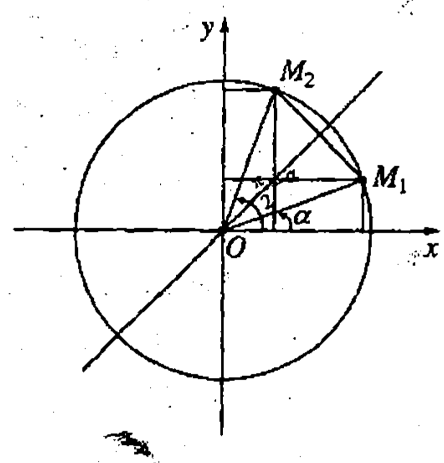


Hình 2.15

c) Giá trị lượng giác của hai góc phụ nhau

Cho hai góc lượng giác phụ nhau α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Không khó để thấy rằng các điểm M_1 và M_2, biểu diễn của hai góc đó trên đường tròn lượng giác, đối xứng với nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất (góc xOy) nên :

$$\begin{cases} x_{M_2} = y_{M_1} \\ y_{M_2} = x_{M_1}. \end{cases}$$



Hình 2.16

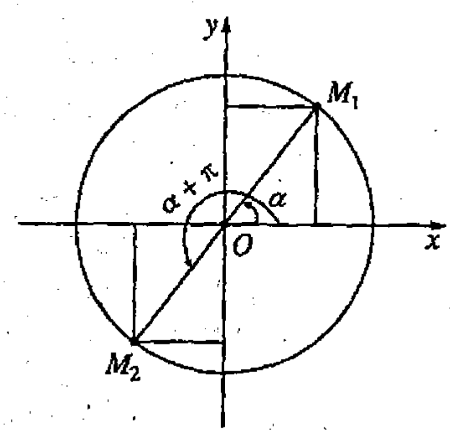
Suy ra $\begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha \end{cases}$

và $\begin{cases} \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha \\ \cot\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha. \end{cases}$

d) Giá trị lượng giác của các góc hơn kém π

Cho hai góc lượng giác α và $\alpha + \pi$. Do các điểm biểu diễn M_1 và M_2 của chúng trên đường tròn lượng giác đối xứng nhau qua gốc toạ độ O nên :

$$\begin{cases} x_{M_2} = -x_{M_1} \\ y_{M_2} = -y_{M_1}. \end{cases}$$



Hình 2.17

Suy ra $\begin{cases} \cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha \\ \sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha \end{cases}$

và $\begin{cases} \tan(\alpha + \pi) = \tan\alpha \\ \cot(\alpha + \pi) = \cot\alpha. \end{cases}$

e) Giá trị lượng giác của các góc hơn kém $\dfrac{\pi}{2}$

Cho hai góc lượng giác α và $\alpha + \dfrac{\pi}{2}$. Để ý rằng $\alpha + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} - (-\alpha)$ nên theo các hệ thức của các góc phụ nhau và góc đối, ta có :

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha \text{ và } \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha.$$

Vậy : $\begin{cases} \cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha \\ \sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha \end{cases}$ và $\begin{cases} \tan\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\cot\alpha \\ \cot\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\tan\alpha. \end{cases}$

Ví dụ 3. Tính $A = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) + \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right)$.

Giải. Ta có

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) \text{ (góc phụ)}$$

$$\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) \text{ (góc bù)}$$

$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) \text{ (góc hơn kém } \frac{\pi}{2}\text{)}$$

Suy ra $A = \cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) + \sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = 1$. □

BÀI TẬP

11. Cho $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ và $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$. Tính $\cos\alpha$, $\tan\alpha$.

12. Cho $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$ và $-\pi \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$. Tính $\sin\alpha$, $\cot\alpha$.

13. Cho $\tan\alpha = -3$ và $0 \le \alpha \le \pi$. Tính $\cos\alpha$, $\frac{\cos\alpha - 2\sin\alpha}{2\cos\alpha + \sin\alpha}$.

14. Giải các phương trình sau :

a) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1$

b) $\sin^{11} x + \cos^{11} x = 1$

c) $\sin^{19} x + \cos^{91} x = -1$.

15. Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc x :

a) $A = 2(\sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x\cos^2 x)^2 - (\sin^8 x + \cos^8 x)$

b) $B = 3(\sin^8 x - \cos^8 x) + 4(\cos^6 x - 2\sin^6 x) + 6\sin^4 x$.

16. Tính giá trị của các biểu thức sau :

a) $A = \dfrac{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{1 + \sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)} - \tan\left(\frac{3\pi}{4} - x\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

b) $B = \dfrac{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right)}{1 + \sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)} - \dfrac{\sin\left(x + \dfrac{5\pi}{6}\right)\left(1 + \cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)\right)}{\cos\left(x + \dfrac{4\pi}{3}\right)}$.

17. Sử dụng ý nghĩa hình học của $\cos\alpha$, chứng minh các đẳng thức sau :

a) $\cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{4\pi}{7} + \cos\dfrac{6\pi}{7} = -\dfrac{1}{2}$.

b) $\cos\dfrac{\pi}{9} + \cos\dfrac{3\pi}{9} + \cos\dfrac{5\pi}{9} + \cos\dfrac{7\pi}{9} = \dfrac{1}{2}$.

18. Tìm GTLN và GTNN của các biểu thức sau :

a) $A = \sin^6 x + \cos^6 x$

b) $B = \sqrt{1 + 2\sin^2 x} + \sqrt{1 + 2\cos^2 x}$.

19. a) Cho $a, b > 0$. Biết $\dfrac{\sin^4 x}{a} + \dfrac{\cos^4 x}{b} = \dfrac{1}{a + b}$, tính $\dfrac{\sin^8 x}{a^3} + \dfrac{\cos^8 x}{b^3}$.

b) Câu hỏi như trên với a, b là các số thực tùy ý thỏa mãn a, b và $a + b$ khác 0.

20. Chứng minh $\left|\dfrac{\sin x - \sin y}{1 - \sin x \sin y}\right| \leq 1$ với mọi x, y để biểu thức có nghĩa.

21. Cho $a, b, c, d > 0$. Chứng minh :

$$\frac{a + b}{c + d} \leq \frac{a\sin^4 x + b\cos^4 y}{c\sin^2 x + d\cos^2 y} + \frac{a\cos^4 x + b\sin^4 y}{c\cos^2 x + d\sin^2 y} \leq \frac{a}{c} + \frac{b}{d}.$$

với mọi x, y để biểu thức có nghĩa.

§3. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

1. Góc định hướng

Ở phần trước chúng ta đã định nghĩa đầy đủ các giá trị lượng giác của một góc. Để việc trình bày được chặt chẽ, chúng ta đã sử dụng khái niệm các góc lượng giác và số đo của chúng. Những góc như vậy, như ta đã thấy, chỉ được xác định chừng nào chúng ta biết rõ chuyển động quay từ tia đầu đến tia cuối.

Tuy nhiên trong các bài toán hình học, nơi mà chúng ta thường chỉ quan tâm đến vị trí tương đối giữa hai tia thì sẽ thuận lợi và đơn giản hơn nếu một góc được xác định hoàn toàn khi cho trước hai tia của nó và định ra đâu là tia đầu, còn đâu là tia cuối.

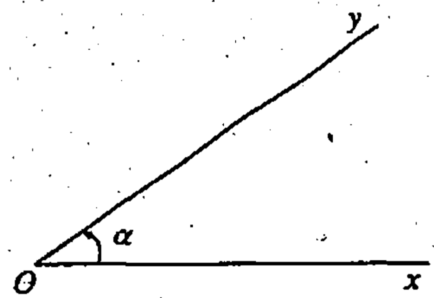
Điều này sẽ dẫn đến khái niệm góc định hướng giữa hai tia. Như vậy, tuy cùng phân biệt tia đầu và tia cuối nhưng khác với góc lượng giác, góc định hướng giữa hai tia sẽ được xác định khi cho trước hai tia này mà không cần cho chuyển động quay cụ thể giữa chúng. Nói một cách khác, góc định hướng chính là góc hình học có sự phân biệt tia đầu và tia cuối.

Ta hãy xem xét cụ thể khái niệm góc định hướng giữa hai tia và số đo của nó.

Góc định hướng giữa hai tia

Góc định hướng giữa hai tia Ox và Oy, kí hiệu (Ox, Oy), với tia đầu Ox và tia cuối Oy được xác định nếu cho trước hai tia Ox và Oy.

Số đo của góc định hướng (Ox, Oy), kí hiệu sđ(Ox, Oy) bằng số đo của một góc lượng giác bất kì từ Ox đến Oy.



Hình 2.18

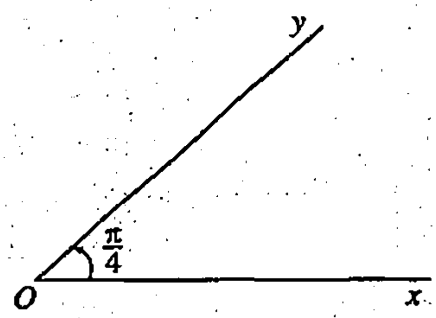
Do có vô số các góc lượng giác như vậy (tương ứng với vô số cách quay từ tia đầu Ox đến tia cuối Oy) và các số đo của chúng chỉ khác nhau một bội của 2π nên số đo của một góc định hướng có thể chọn một giá trị bất kì trong tất cả các giá trị đó.

Ví dụ 1. Góc định hướng (Ox, Oy) ở hình 2.19 có số đo là một giá trị bất kì trong các giá trị $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, với k là số nguyên. Ta viết :

$$\text{sđ}(Ox, Oy) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

hoặc đơn giản hơn là :

$$(Ox, Oy) = \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}. \ \square$$



Hình 2.19

Giá trị chính của một góc định hướng

Với một góc định hướng (Ox, Oy) cho trước (tức là với hai tia đầu và cuối Ox và Oy cho trước), ta thấy rằng luôn tìm được một góc lượng giác (Ox, Oy) với số đo α trong đó : $-\pi < \alpha \le \pi$.

Lúc đó số đo của góc định hướng (Ox, Oy) sẽ là một trong các giá trị dạng $\alpha + 2k\pi$, thành thử ta có thể viết :

$$\text{sđ}(Ox, Oy) = \alpha + 2k\pi$$

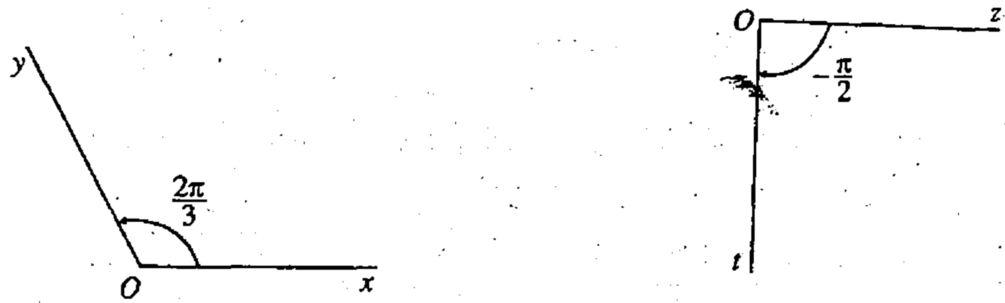
hoặc đơn giản hơn là

$$(Ox, Oy) = \alpha \ (\text{mod } 2\pi).$$

Giá trị α được gọi là *giá trị chính* của góc định hướng (Ox, Oy) và thông thường ta viết số đo của một góc định hướng (Ox, Oy) dưới dạng :

$$(Ox, Oy) = \alpha \ (\text{mod } 2\pi), \text{ với } \alpha \text{ là giá trị chính.}$$

Ví dụ 2. Đối với các góc định hướng (Ox, Oy) và (Oz, Ot) ở hình 2.20, ta có :



$(Ox, Oy) = \dfrac{2\pi}{3} \ (\text{mod } 2\pi)$ (giá trị chính là $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$)

$(Oz, Ot) = -\dfrac{\pi}{2} \ (\text{mod } 2\pi)$ (giá trị chính là $\alpha = -\dfrac{\pi}{2}$).

Hình 2.20

Chú ý 1. Để biểu diễn góc lượng giác và góc định hướng giữa tia đầu Ox và tia cuối Oy, ta đều dùng kí hiệu (Ox, Oy). Điều này thường cũng không thể gây ra nhầm lẫn giữa chúng vì để cho một góc lượng giác, ta cần phải nói rõ chuyển động cụ thể giữa tia đầu và tia cuối. Mặc dầu vậy, tốt hơn cả là mỗi khi bắt đầu xét một góc nào đó, cũng nên cho biết đó là góc lượng giác (Ox, Oy) hay là góc định hướng (Ox, Oy).

Nếu số đo của các góc định hướng (Ox, Oy) và (Oz, Ot) chỉ sai khác nhau một bội của 2π, tức là :

$$\text{sđ}(Ox, Oy) = \text{sđ}(Oz, Ot) + 2k\pi$$

hoặc $\quad (Ox, Oy) = (Oz, Ot) \ (\text{mod } 2\pi)$

thì ta nói hai góc đó bằng nhau.

Không khó thấy rằng từ hệ thức Chasles đối với các góc lượng giác và cách xác định số đo của góc định hướng vừa nêu ở trên, ta được hệ thức Chasles đối với các góc định hướng như sau :

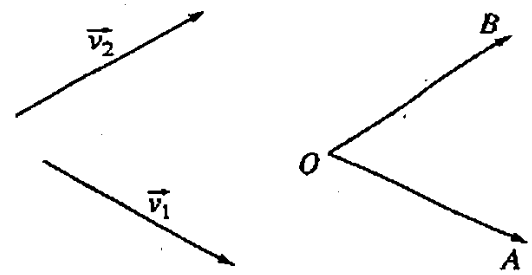
$$\text{sđ}(Ox, Oz) = \text{sđ}(Ox, Oy) + \text{sđ}(Oy, Oz) + 2k\pi$$

hoặc $\quad (Ox, Oz) = (Ox, Oy) + (Oy, Oz) \ (\text{mod } 2\pi).$

Góc định hướng giữa hai vectơ

Cho hai vectơ $\vec{v}_1$ và $\vec{v}_2$. Góc định hướng giữa hai vectơ $\vec{v}_1$ và $\vec{v}_2$, với vectơ đầu $\vec{v}_1$ và vectơ cuối $\vec{v}_2$ được xác định như sau :

Cố định một điểm O và dựng các điểm A, B sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{v}_1$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}_2$.



Hình 2.21

Góc định hướng giữa vectơ đầu $\vec{v}_1$ và vectơ cuối $\vec{v}_2$ chính là góc định hướng giữa tia đầu OA và tia cuối OB.

Số đo của góc định hướng giữa $\vec{v}_1$ và $\vec{v}_2$, kí hiệu sđ$(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ hoặc đơn giản là $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$, chính là số đo của góc định hướng (OA, OB).

Ta viết : $(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = (OA, OB) \pmod{2\pi}$.

Trong trường hợp có ít nhất một trong hai vectơ bằng vectơ $\vec{0}$, góc định hướng $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ có thể xem là một góc định hướng bất kì.

Trường hợp $(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \pm\dfrac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ (lúc đó phương của các vectơ $\vec{v}_1$ và $\vec{v}_2$ vuông góc với nhau), ta nói rằng các vectơ $\vec{v}_1$ và $\vec{v}_2$ vuông góc với nhau và kí hiệu : $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$.

Vì số đo (rađian) của góc định hướng (giữa hai tia, giữa hai vectơ) xác định sai khác $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) nên có thể nói đến các giá trị lượng giác sin, côsin, tang, côtang của góc đó. Chẳng hạn :

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}.$$

Ngoài ra, với số đo xác định của góc định hướng, vẫn có thể sử dụng được các công thức lượng giác nói mục 4, §2.

2. Định nghĩa tích vô hướng của hai vectơ

Bây giờ chúng ta định nghĩa một phép toán quan trọng, đó là tích vô hướng của hai vectơ. Nó không chỉ cho phép mở rộng mối quan hệ giữa các vectơ mà còn có thể được vận dụng hết sức hiệu quả vào việc giải quyết nhiều bài toán hình học khác nhau.

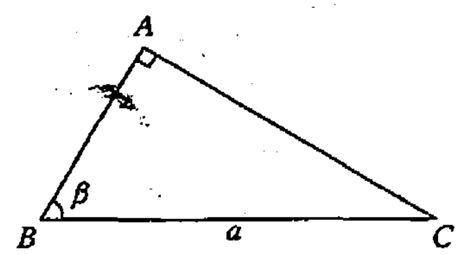
Cho hai vectơ $\vec{v}_1$ và $\vec{v}_2$. Tích vô hướng của $\vec{v}_1$ và $\vec{v}_2$, kí hiệu $\vec{v}_1 . \vec{v}_2$ được định nghĩa như sau :

$$\boxed{\vec{v}_1 . \vec{v}_2 = |\vec{v}_1| . |\vec{v}_2| \cos(\vec{v}_1, \vec{v}_2)}$$

Trong đó $|\vec{v}_1|$, $|\vec{v}_2|$ là độ dài các vectơ $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, còn $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ là góc định hướng giữa hai vectơ $\vec{v}_1$ và $\vec{v}_2$.

Định nghĩa này cho thấy rằng : khác với các phép cộng, phép trừ hai vectơ mà kết quả là một vectơ, tích vô hướng của hai vectơ lại cho kết quả là một số thực.

Ví dụ 3. Cho tam giác *ABC* vuông tại *A* có góc $B = \beta$, cạnh $BC = a$. Tính các giá trị : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.



Hình 2.22

Giải. Ta có :

$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = 0$ (do $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$).

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = a.a\cos\beta.\cos\beta = a^2\cos^2\beta$

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = a\sin\beta.a.\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \beta\right) = a^2\sin^2\beta$. □

***Chú ý* 2.** Từ định nghĩa, có thể thấy rằng nếu $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$ thì $\vec{v}_1.\vec{v}_2 = 0$. Ngược lại, nếu $\vec{v}_1.\vec{v}_2 = 0$ thì hoặc ít nhất một trong hai vectơ $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ là vectơ không (do $|\vec{v}_1| = 0$ hoặc $|\vec{v}_2| = 0$), hoặc $(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \pm\dfrac{\pi}{2}$ (mod 2π) (do $\cos(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = 0$). Như vậy, trong mọi trường hợp ta đều được $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$ (xem quy ước về góc định hướng trong trường hợp có ít nhất một vectơ bằng vectơ $\vec{0}$ ở trên). Tóm lại ta có :

$$\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2 \Leftrightarrow \vec{v}_1.\vec{v}_2 = 0.$$

Tính chất này cho chúng ta một phương pháp chứng minh khá tiện lợi sự vuông góc của hai đường thẳng.

Bài toán 1. Cho hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$. Kí hiệu C', D' là hình chiếu của C, D trên đường thẳng *AB* (giả sử $A \neq B$). Chứng minh rằng :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overline{AB}.\overline{C'D'},$$

trong đó $\overline{AB}$, $\overline{C'D'}$ là độ dài đại số của các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{C'D'}$ trên trục *AB*.

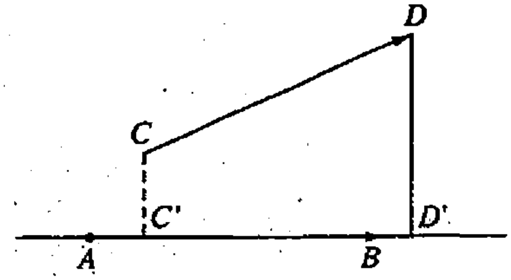
Chứng minh. Gọi α là giá trị chính của góc định hướng $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$, $-\pi < \alpha \leq \pi$. Xét hai trường hợp sau :

Trường hợp 1 : $-\dfrac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \dfrac{\pi}{2}$.

Lúc này $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{C'D'}$ cùng hướng trên trục AB nên :

$$\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{CD} = AB \,.\, CD \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$$

$$= AB \,.\, C'D' = \overline{AB} \,.\, \overline{C'D'}.$$



Hình 2.23

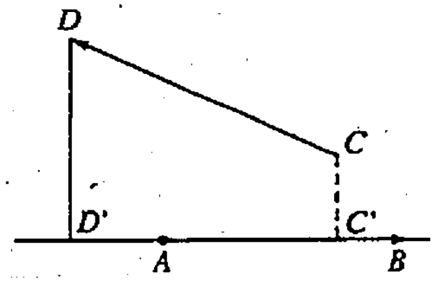
Trường hợp 2 : $\alpha < -\dfrac{\pi}{2}$ hoặc $\alpha > \dfrac{\pi}{2}$.

Lúc này $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{C'D'}$ ngược hướng nên :

$$\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{CD} = AB \,.\, CD \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$$

$$= AB \,.\, (-C'D')$$

$$= \overline{AB} \,.\, \overline{C'D'}. \ \square$$



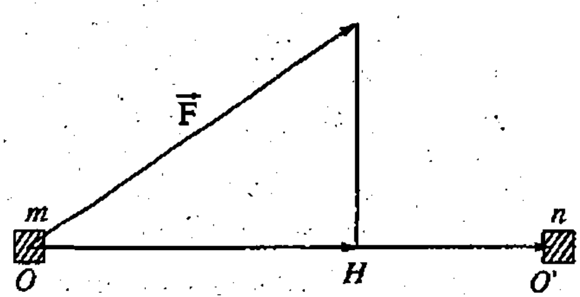
Hình 2.24

Nhận xét. Đẳng thức vừa chứng minh cho ta ý nghĩa hình học của tích vô hướng của hai vectơ : đó là tích độ dài đại số của một vectơ với độ dài đại số hình chiếu của vectơ còn lại trên trục của vectơ đầu.

Ý nghĩa vật lí của tích vô hướng

Thật ra khái niệm tích vô hướng vừa được định nghĩa ở trên mang ý nghĩa vật lí cụ thể, đó là "công sinh ra trong một chuyển động bởi một lực". Ta thử làm rõ thêm ý này.

Xét một vật thể m chuyển động từ điểm O đến điểm O' dưới tác động của một lực $\vec{F}$.



Hình 2.25

Lúc đó lực $\vec{F}$ đã sinh ra một công A và A được tính bằng tích độ dài đại số của vectơ chuyển động $\overrightarrow{OO'}$ với độ dài đại số hình chiếu của lực $\vec{F}$ trên trục đường thẳng OO' của chuyển động : $A = \overline{OO'} \,.\, \overline{OH}$ (xem h. 2.25)

Theo nhận xét ở trên, A bằng tích vô hướng của các vectơ $\overrightarrow{OO'}$ và $\vec{F}$. Vậy tích vô hướng $\overrightarrow{OO'} \,.\, \vec{F}$ chính là công sinh ra trong chuyển động $\overrightarrow{OO'}$ dưới tác động của lực $\vec{F}$.

3. Tính chất của tích vô hướng

Trước hết, không khó để chứng minh các tính chất sau của tích vô hướng :

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (tính giao hoán)

b) $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b}) = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$, k là số thực

c) $\vec{a}.(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (tính phân phối đối với phép cộng).

Các tính chất a), b) suy ra trực tiếp từ định nghĩa, còn tính chất c) được chứng minh bằng cách áp dụng nhận xét ở sau bài toán 1 về ý nghĩa hình học của tích vô hướng và để ý rằng hình chiếu của tổng các vectơ bằng tổng các vectơ hình chiếu.

Từ các tính chất này, tương tự như đối với các số thực, có thể nhận được các hằng đẳng thức bậc 2 quen thuộc sau đây :

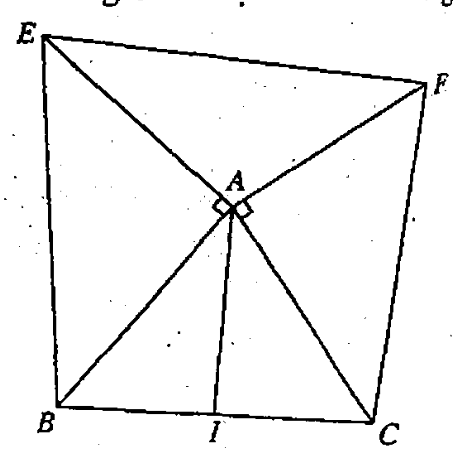
d) $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}$

e) $(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$

f) $\vec{a}^2 - \vec{b}^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$.

Ở đây $\vec{v}^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2$ còn được gọi là *bình phương vô hướng* của vectơ $\vec{v}$.

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC. Trên các cạnh AB, AC, dựng ra phía ngoài các tam giác ABE, ACF vuông cân tại A. Gọi I là trung điểm cạnh BC. Chứng minh rằng $AI \perp EF$.



Hình 2.26

Chứng minh. Ta chứng minh $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{EF} = 0$.

Thật vậy, ta có : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$,

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE}$$

và để ý rằng : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AF} = 0$

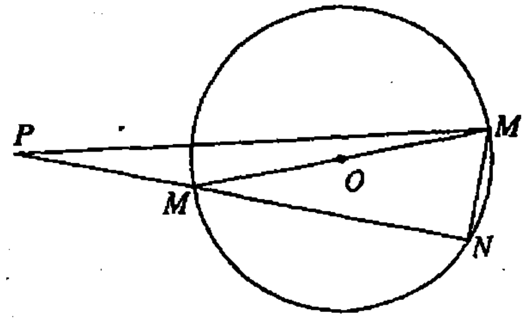
nên : $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AF} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AE}$.

Mặt khác ta lại có :

$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AE}|$, $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AF}|$ và $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}) = (\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AC})$ (mod 2π).

Suy ra : $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{EF} = 0$. Vậy $AI \perp EF$. □

Bài toán 2. Cho đường tròn (O) tâm O bán kính R và một điểm P. Một đường thẳng Δ thay đổi đi qua P và cắt đường tròn (O) tại hai điểm M, N. Chứng minh rằng tích $\overline{PM} \,.\, \overline{PN}$ không đổi.



Hình 2.27

Chứng minh. Đặt $d = OP$. Gọi M' là điểm đối xứng với M qua tâm O, ta có $M'N \perp PN$ nên theo nhận xét về ý nghĩa hình học của tích vô hướng ở trên :

$$\overline{PM} \,.\, \overline{PN} = \overrightarrow{PM} \,.\, \overrightarrow{PM'} = (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM}) \,.\, (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM'})$$

$$= (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM})(\overrightarrow{PO} - \overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{PO}^2 - \overrightarrow{OM}^2 = d^2 - R^2 \text{ không đổi.} \ \square$$

Nhận xét

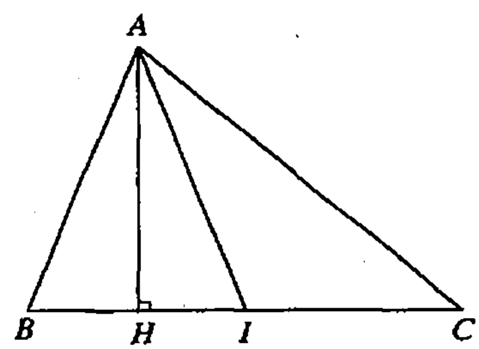
1) Từ kết quả bài toán, ta thấy rằng khi đường thẳng Δ thay đổi, giá trị của tích $\overline{PM} \,.\, \overline{PN}$ chỉ phụ thuộc vào vị trí tương đối của điểm P đối với đường tròn (O). Giá trị này được gọi là *phương tích* của điểm P đối với đường tròn (O).

2) Từ chứng minh trên, ta còn thấy rằng khi đường kính MM' thay đổi trên đường tròn (O), tích vô hướng $\overrightarrow{PM} \,.\, \overrightarrow{PM'}$ cũng không đổi và bằng phương tích của điểm P đối với (O).

Bài toán 3. Cho tam giác ABC. Gọi I là trung điểm cạnh BC và H là hình chiếu vuông góc của đỉnh A trên BC. Chứng minh các hệ thức :

a) $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$.

b) $AB^2 - AC^2 = 2\overline{BC} \,.\, \overline{IH}$.



Hình 2.28

Chứng minh

a) Ta có :

$$\overrightarrow{CB}^2 = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})^2$$

$$= \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{AC}.$$

mà $2\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{AC} = 2(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}).(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC})$

$$= 2(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}).(\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB}) = 2(\overrightarrow{AI}^2 - \overrightarrow{IB}^2) = 2AI^2 - \frac{1}{2}BC^2.$$

Suy ra $BC^2 = AB^2 + AC^2 - \left(2AI^2 - \frac{1}{2}BC^2\right)$.

Vậy $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$.

b) Ta có :

$$\overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AC}^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = 2\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CB} = 2\overline{CB}.\overline{HI}$$

Vậy $AB^2 - AC^2 = 2\overline{BC}.\overline{IH}$. □

Chú ý 3.

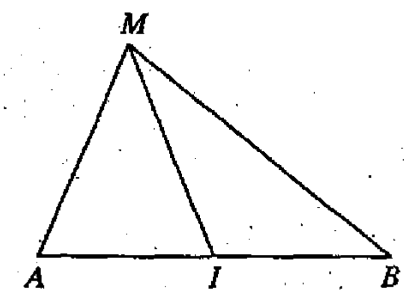
1) Hệ thức a) cho phép tính độ dài đường trung tuyến AI theo độ dài các cạnh của tam giác nên thường được gọi là *công thức trung tuyến.*

2) Hệ thức b) cho phép tính khoảng cách giữa trung điểm I và chân đường cao H hạ từ đỉnh A xuống cạnh BC và thường được gọi là *công thức hiệu bình phương hai cạnh* của tam giác.

Bây giờ ta hãy áp dụng các hệ thức này để giải quyết hai bài toán quỹ tích quan trọng sau :

Bài toán quỹ tích 1. Cho hai điểm A, B phân biệt. Tìm quỹ tích các điểm M thoả mãn :

$MA^2 + MB^2 = k^2$, với k là số dương cho trước.



Hình 2.29

Giải. Gọi I là trung điểm của AB. Ta có :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2,$$

suy ra : $MI^2 = \dfrac{2k^2 - AB^2}{4}$.

Từ đây ta có thể kết luận :

– Nếu $k \geq \dfrac{AB}{\sqrt{2}}$ thì quỹ tích M là đường tròn tâm I, bán kính $R = \dfrac{\sqrt{2k^2 - AB^2}}{2}$.

– Nếu $k < \dfrac{AB}{\sqrt{2}}$ thì quỹ tích là tập rỗng. □

Bài toán quỹ tích 2. Cho hai điểm A, B phân biệt. Tìm quỹ tích các điểm M thoả mãn : $MA^2 - MB^2 = k$, với k là số thực cho trước.

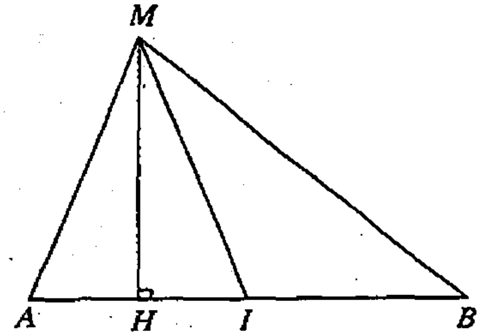
Giải. Gọi I là trung điểm của AB, H là hình chiếu của M trên AB. Ta có :

$$MA^2 - MB^2 = 2\overline{AB}.\overline{IH}$$

suy ra : $\overline{IH} = \dfrac{k}{2AB}$ nên điểm H cố định.

Vậy M thuộc đường thẳng d vuông góc với AB tại điểm H sao cho $\overline{IH} = \dfrac{k}{2AB}$.

Đảo lại, lấy điểm M bất kì trên d, ta có $\overline{IH} = \dfrac{k}{2AB}$ và do đó : $MA^2 - MB^2 = k$.



Hình 2.30

Tóm lại quỹ tích M là đường thẳng d xác định như trên. □

4. Biểu thức toạ độ của tích vô hướng

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{v}_1(a_1\,;\,b_1)$ và $\vec{v}_2(a_2\,;\,b_2)$.

Ta có : $\vec{v}_1 = a_1\vec{i} + b_1\vec{j}$ và $\vec{v}_2 = a_2\vec{i} + b_2\vec{j}$, với $\vec{i}, \vec{j}$ là các vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy.

Suy ra : $\vec{v}_1 \,.\, \vec{v}_2 = a_1a_2\vec{i}^2 + a_1b_2\vec{i}\,.\,\vec{j} + b_1a_2\vec{j}\,.\,\vec{i} + b_1b_2\vec{j}^2$

$$= a_1a_2 + b_1b_2 \text{ (do } \vec{i}^2 = \vec{j}^2 = 1, \vec{i}\,.\,\vec{j} = \vec{j}\,.\,\vec{i} = 0).$$

Công thức $\vec{v}_1 . \vec{v}_2 = a_1a_2 + b_1b_2$ được gọi là *biểu thức toạ độ của tích vô hướng*.

Trong trường hợp $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{v}(a\,;\,b)$, công thức trở thành :

$$\vec{v}^2 = a^2 + b^2$$

và ta được : $\quad |\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Đây là *công thức độ dài của vectơ*.

Từ định nghĩa và các công thức trên, suy ra :

$$\cos(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \frac{\vec{v}_1 \,.\, \vec{v}_2}{|\vec{v}_1| \,.\, |\vec{v}_2|} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \,.\, \sqrt{a_2^2 + b_2^2}} (\vec{v}_1 \neq \vec{0}, \vec{v}_2 \neq \vec{0}).$$

Công thức này còn được gọi là *biểu thức toạ độ của côsin* góc giữa hai vectơ.

Ví dụ 5. Ta hãy áp dụng các công thức trên để chứng minh bất đẳng thức Bunyakovsky cho 4 số thực a_1, a_2, b_1, b_2 tuỳ ý :

$$|a_1a_2 + b_1b_2| \leq \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \,.\, \sqrt{a_2^2 + b_2^2}.$$

Giải. Xét các vectơ $\vec{v}_1(a_1\ ;\ b_1)$, $\vec{v}_2(a_2\ ;\ b_2)$.

Để ý rằng $\left|\vec{v}_1.\vec{v}_2\right| \le \left|\vec{v}_1\right|.\left|\vec{v}_2\right|$ (do $\left|\cos(\vec{v}_1,\ \vec{v}_2)\right| \le 1$) nên từ các công thức ở trên, ta được :

$$\left|a_1a_2 + b_1b_2\right| \le \sqrt{a_1^2 + b_1^2}\ \sqrt{a_2^2 + b_2^2}.$$

Dấu đẳng thức chỉ xảy ra khi $\left|\cos(\vec{v}_1,\ \vec{v}_2)\right| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(\vec{v}_1,\ \vec{v}_2) = 0\\ (\vec{v}_1,\ \vec{v}_2) = \pi\end{array}\right.$ (mod 2π)

$\Leftrightarrow \vec{v}_1$ cùng phương với $\vec{v}_2 \Leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 = 0$. □

5. Một số công thức lượng giác

a) Dùng hệ thức Chasles và biểu thức toạ độ của tích vô hướng, có thể chứng minh rằng với mọi góc lượng giác α, β ta có :

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Từ đó thay α bằng $\alpha + \frac{\pi}{2}$, theo các công thức ở mục 4e), §2, suy ra :

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta,$$

rồi thay β bằng $-\beta$ trong hai công thức đó, sử dụng các công thức ở mục 4a), §2, suy ra

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Bốn công thức đó gọi là *công thức cộng*.

Hai công thức sau đây được suy ra dễ dàng từ các công thức trên

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$
$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta},$$

(khi các biểu thức có nghĩa) cũng được gọi là *công thức cộng*.

b) Trong các công thức cộng, đặt $\beta = \alpha$, suy ra các *công thức nhân đôi* :

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$ (khi biểu thức có nghĩa).

c) Từ công thức nhân đôi, suy ra *công thức hạ bậc*

$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2},\ \sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}.$$

d) Từ các công thức cộng còn suy ra các *công thức biến đổi tổng thành tích* :

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

và các công thức biến đổi ngược lại gọi là *công thức biến đổi tích thành tổng.*

BÀI TẬP

22. Chứng minh với bốn điểm A, B, C, D tùy ý :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0.$$

23. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm O và M là một điểm tùy ý. Chứng minh :

a) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}$

b) $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MO}$.

24. Cho tam giác ABC đều cạnh a. Gọi D là điểm đối xứng với điểm A qua BC và M là một điểm thay đổi.

a) Chứng minh : $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AM}^2$ không đổi.

b) Tìm quỹ tích điểm M thỏa mãn : $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD} = k$ (k là số thực cho trước).

25. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A, B có các đáy $AD = a$, $BC = 3a$ và cạnh $AB = 2a$.

a) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$.

b) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD. Hạ II', JJ' vuông góc với AC. Tính $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{IJ}$ và độ dài $I'J'$.

26. Cho tứ giác $ABCD$ có E là giao điểm của các đường chéo AC và BD. Gọi I, J là trung điểm của BC, AD và H, K là trực tâm của các tam giác ABE, CDE.

a) Chứng minh $\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$

b) Chứng minh $HK \perp IJ$.

27. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có G là trọng tâm. Gọi F là giao điểm của AG với (O) và M, N là trung điểm của AB, AC.

a) Chứng minh $3\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{AF} = AB^2 + AC^2$.

b) Chứng minh A, G, M, N cùng thuộc một đường tròn khi và chỉ khi

$$AB^2 + AC^2 = 2BC^2.$$

28. Cho tam giác ABC có B, C cố định còn A thay đổi. Gọi I là trung điểm của BC và H là trực tâm tam giác ABC.

a) Chứng minh $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IH}$ không đổi.

b) Xác định điểm A để $IA + IH$ nhỏ nhất.

29. Cho tam giác ABC và G là điểm thỏa mãn : $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

a) Chứng minh với M là điểm tùy ý :

$$MA^2 + 2MB^2 - MC^2 = 2MG^2 + GA^2 + 2GB^2 - GC^2.$$

b) Giả thiết ABC là tam giác đều cạnh a. Tìm GTNN của $MA^2 + 2MB^2 - MC^2$.

30. Cho tam giác ABC. Tìm quỹ tích điểm M thỏa mãn :

a) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AB} = k$.

b) $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM} - 2\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = k$ (k là số thực cho trước).

31. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ và G là trọng tâm tam giác.

a) Chứng minh với M là điểm tùy ý :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}.$$

b) Gọi O là tâm và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh :

$$OG^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}.$$

32. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) tâm O, bán kính R.

a) Chứng minh với M là điểm tùy ý :

$$MA^2 + 2MB^2 - 3MC^2 = 2\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}).$$

b) Tìm quỹ tích điểm M thỏa mãn :

$$MA^2 + 2MB^2 - 3MC^2 = k \text{ (}k\text{ là số thực cho trước).}$$

33. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) bán kính R. Chứng minh :

$$AB^2 + AC^2 - BC^2 \geq -R^2.$$

Khi nào dấu bằng xảy ra ?

34. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) bán kính R. Chứng minh

$$AB^2 + AC^2 + AD^2 - BC^2 - CD^2 - DB^2 > -4R^2.$$

35. Cho tam giác ABC và một đường thẳng Δ. d là một đường thẳng thay đổi luôn song song với Δ. Kí hiệu d_1, d_2, d_3 là các khoảng cách từ A, B, C đến đường thẳng d. Xác định d để $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$ nhỏ nhất.

36. Cho ngũ giác đều $A_1A_2A_3A_4A_5$ nội tiếp đường tròn (O) bán kính R và một đường thẳng d thay đổi. Kí hiệu d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 là các khoảng cách từ A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 đến đường thẳng d. Xác định d để $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + d_5^2$ nhỏ nhất và tính giá trị nhỏ nhất đó.

§4. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

Ta biết rằng một tam giác hoàn toàn xác định nếu biết được độ dài ba cạnh. Tuy nhiên việc tính toán các yếu tố của một tam giác nói chung sẽ rất phức tạp nếu chỉ dựa chủ yếu vào các cạnh mà thôi. Việc liên hệ độ dài của các cạnh với giá trị lượng giác của các góc sẽ làm cho quá trình tính toán trở nên đơn giản và thuận lợi hơn. Một trong những mối liên hệ cần thiết đó chính là định lí côsin.

Dưới đây ta kí hiệu a, b, c là độ dài các cạnh BC, CA, AB còn A, B, C là số đo các góc ở đỉnh A, B, C của tam giác ABC.

1. Định lí côsin

Định lí 1 *(Định lí côsin)*

> Trong tam giác ABC, ta có :
>
> $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

Đây là định lí côsin đối với góc A. Tương tự có thể phát biểu định lí đối với các góc B, C.

Chứng minh. Bình phương hai vế đẳng thức : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, ta được :

$$\overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}.$$

Theo định nghĩa tích vô hướng, ta suy ra : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$. Định lí được chứng minh. □

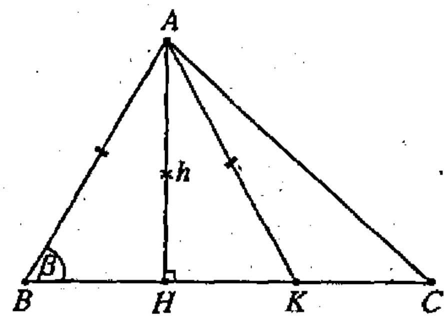
Định lí côsin cho phép ta tính một cạnh của tam giác khi biết hai cạnh còn lại và góc giữa hai cạnh đó.

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có đường cao AH bằng h, góc B bằng β. Gọi K là điểm trên cạnh BC sao cho $BK = 2CK$.

Biết rằng $AK = AB$. Tính các cạnh của tam giác ABC.

Giải. Ta có

$$AB = \frac{AH}{\sin B} \Rightarrow AB = \frac{h}{\sin\beta}.$$



Hình 2.31

Theo giả thiết $AK = AB$ nên H là trung điểm của BK, suy ra :

$BC = 3BH = 3AH\cot B = 3h\cot\beta$.

Áp dụng định lí côsin đối với góc β trong tam giác ABC, ta được :

$$CA^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB.BC\cos B$$

$$= \frac{h^2}{\sin^2\beta} + 9h^2\cot^2\beta - 6h^2\frac{\cot\beta.\cos\beta}{\sin\beta}$$

$$= h^2(1+\cot^2\beta) + 9h^2\cot^2\beta - 6h^2\cot^2\beta = h^2(1+4\cot^2\beta).$$

$$\Rightarrow CA = h\sqrt{1+4\cot^2\beta}.\ \square$$

Ví dụ 2. Cho x, y là các số thực thoả mãn $x, y \geq 1$.

Đặt $a = x^2 + 1,\ b = y^2 + 1,\ c = x^2 + y^2 + 1.$

Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có độ dài ba cạnh là a, b, c và tam giác đó là tam giác tù.

Chứng minh. Trước hết nhận xét rằng $a, b, c > 0$ và $a < b + c$, $b < c + a$, $c < a + b$ nên tồn tại một tam giác ABC sao cho $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.

Bây giờ ta chứng minh rằng $C > 90^\circ$.

Áp dụng định lí côsin đối với góc C, ta được : $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

mà $a^2 + b^2 - c^2 = (x^2 + 1)^2 + (y^2 + 1)^2 - (x^2 + y^2 + 1)^2$

$= x^4 + y^4 + 2x^2 + 2y^2 + 2 - (x^4 + y^4 + 1 + 2x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2)$

$= 1 - 2x^2y^2 < 0$ do $x, y \geq 1$,

nên $\cos C < 0$, suy ra $C > 90^\circ$. Vậy tam giác ABC là tam giác tù. □

Chú ý 1. Từ ví dụ trên, có thể thấy rằng để chứng minh góc A trong tam giác ABC là nhọn, vuông hay tù, ta có thể sử dụng các kết quả sau :

– Góc A nhọn $\Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2$

– Góc A vuông $\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$

– Góc A tù $\Leftrightarrow a^2 > b^2 + c^2$.

2. Định lí sin

Ta biết rằng trong một tam giác, góc càng lớn thì cạnh đối diện càng lớn và ngược lại. Quy luật này được phát biểu cụ thể như sau :

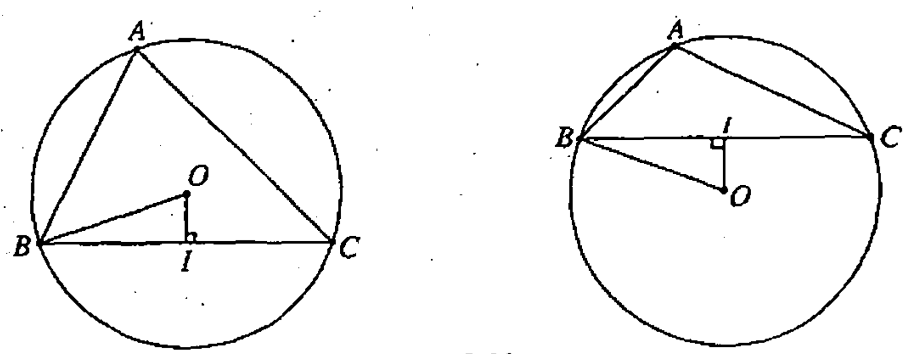
Định lí 2 *(Định lí sin)*

> Trong tam giác ABC, ta có :
>
> $$a = 2R\sin A$$
>
> trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp.

Chứng minh. Kí hiệu O là tâm đường tròn ngoại tiếp, I là trung điểm của BC. Xét hai trường hợp sau :

i) $A \leq 90^\circ$

Ta có $BC = 2BI = 2BO\sin\widehat{BOI} = 2R\sin A$.



Hình 2.32

ii) $A > 90^\circ$

Ta có $BC = 2BI = 2BO\sin\widehat{BOI} = 2R\sin(180^\circ - A) = 2R\sin A$. □

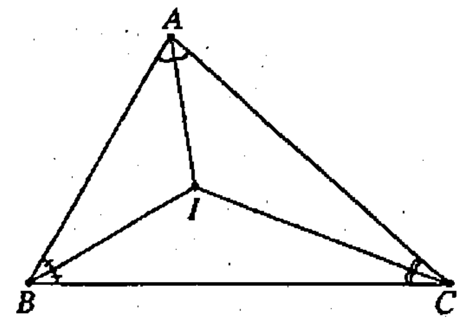
Các định lí sin đối với ba góc trong tam giác có thể liên kết lại dưới dạng sau :

$$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R}$$

Chúng thường được sử dụng để tính bán kính đường tròn ngoại tiếp hoặc để tính cạnh của một tam giác nếu biết trước một cạnh và hai góc trong tam giác đó.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $A = \alpha$, $B = \beta$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác IBC, ICA, IAB.

Giải. Kí hiệu R_1, R_2, R_3 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác IBC, ICA, IAB.



Hình 2.33

Áp dụng định lí sin cho tam giác IBC, ta được :

$$\frac{BC}{\sin\widehat{BIC}} = 2R_1.$$

Mà $BC = a$, $\widehat{BIC} = 180^\circ - \frac{B}{2} - \frac{C}{2} = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$.

Suy ra $2R_1 = \dfrac{a}{\sin\left(\dfrac{\alpha}{2} + 90^\circ\right)} \Rightarrow R_1 = \dfrac{a}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}$

Áp dụng định lí sin cho tam giác ICA, ta được : $\dfrac{CA}{\sin\widehat{CIA}} = 2R_2$.

Mà $\dfrac{CA}{\sin B} = \dfrac{BC}{\sin A}$ nên $CA = \dfrac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$.

Mặt khác : $\widehat{CIA} = 180^\circ - \dfrac{C}{2} - \dfrac{A}{2} = 90^\circ + \dfrac{\beta}{2}$.

Suy ra $R_2 = \dfrac{a\sin\beta}{2\sin\alpha\sin\left(\dfrac{\beta}{2} + 90^\circ\right)} = \dfrac{2a\sin\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}}{2\sin\alpha\cos\dfrac{\beta}{2}} = \dfrac{a\sin\dfrac{\beta}{2}}{\sin\alpha}$.

Áp dụng định lí sin cho tam giác IAB, ta được :

$$\frac{AB}{\sin\widehat{AIB}} = 2R_3.$$

Mà $\dfrac{AB}{\sin C} = \dfrac{BC}{\sin A}$ nên $AB = \dfrac{a\sin(180^\circ - \alpha - \beta)}{\sin\alpha} = \dfrac{a\sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha}$.

Mặt khác : $\widehat{AIB} = 180^\circ - \dfrac{A}{2} - \dfrac{B}{2}$ nên $\sin\widehat{AIB} = \sin\left(\dfrac{\alpha + \beta}{2}\right)$.

Suy ra :

$$R_3 = \frac{\dfrac{a\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}}{2\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)} = \frac{2a\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)}{2\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\alpha} = \frac{a\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\sin\alpha}. \ \square$$

Chú ý 2. Cách viết định lí sin dưới dạng : $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$ còn cho ta thấy rằng tỉ số giữa độ dài mỗi cạnh và sin góc đối diện trong một tam giác là không đổi (tức không phụ thuộc vào cạnh nào trong tam giác). Cách viết này có thể phổ biến cho một số hệ thức liên quan đến bán kính các đường tròn nội tiếp và bàng tiếp như sau :

$$(p-a)\tan\frac{A}{2} = (p-b)\tan\frac{B}{2} = (p-c)\tan\frac{C}{2} = r$$

$$r_a\cot\frac{A}{2} = r_b\cot\frac{B}{2} = r_c\cot\frac{C}{2} = p$$

trong đó, $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi, r là bán kính đường tròn nội tiếp, còn r_a, r_b, r_c là bán kính các đường tròn bàng tiếp góc A, B, C trong tam giác ABC.

Các công thức này có thể được chứng minh không mấy khó khăn và chúng có thể giúp ích trong việc tính bán kính đường tròn nội tiếp hoặc bàng tiếp trong một tam giác.

Công thức diện tích

Ta biết rằng diện tích S của tam giác ABC được tính bằng một nửa tích của độ dài một cạnh với độ dài đường cao đi qua đỉnh đối diện :

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$$

ở đây h_a, h_b, h_c lần lượt là độ dài các đường cao đi qua các đỉnh A, B, C.

Ngoài ra diện tích còn có thể được tính bằng nhiều cách khác.

Dưới đây là một số công thức diện tích quan trọng cần biết :

a) $S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$

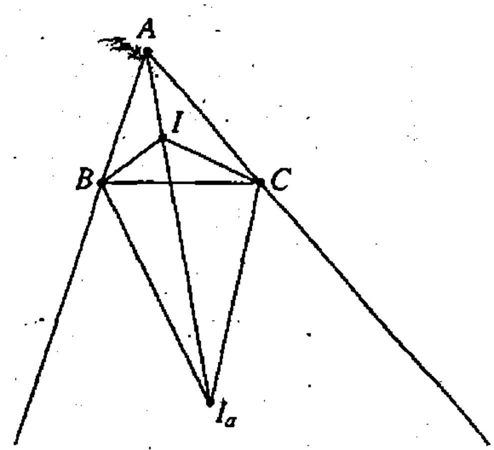
b) $S = \frac{abc}{4R}$

c) $S = pr = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c$

d) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Chứng minh. Công thức $S = \frac{1}{2}bc\sin A$ ở a) được suy ra từ công thức $S = \frac{1}{2}bh_b$ và nhận xét rằng $h_b = c\sin A$.

Công thức $S = \frac{abc}{4R}$ ở b) là hệ quả trực tiếp của công thức $S = \frac{1}{2}bc\sin A$ và định lí sin : $\sin A = \frac{a}{2R}$.



Hình 2.34

Các công thức $S = pr$ và $S = (p-a)r_a$ ở c) được suy ra từ các đẳng thức hiển nhiên :

$$S = S_{IBC} + S_{ICA} + S_{IAB} \text{ và } S = S_{I_aBA} + S_{I_aAC} - S_{I_aBC}$$

với I, I_a lần lượt là tâm các đường tròn nội tiếp, bàng tiếp góc A.

Cuối cùng ta chứng minh công thức $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ở d).

Trước hết ta chứng tỏ rằng : $\sin A = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{bc}$

Thật vậy, áp dụng định lí côsin đối với góc A, ta được :

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2}$$

$$= \frac{(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)}{4b^2c^2}$$

$$= \frac{((b+c)^2-a^2)(a^2-(b-c)^2)}{4b^2c^2} = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2c^2}$$

Do $\sin A \geq 0$, suy ra $\sin A = \dfrac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{bc}$.

Thế vào công thức $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A$, ta được : $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. □

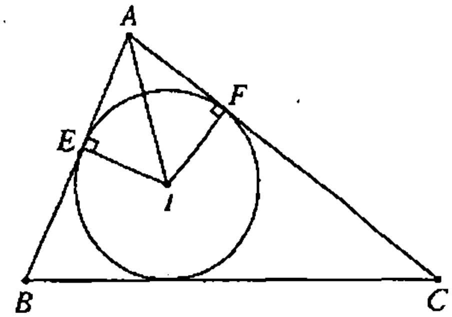
Công thức này thường được gọi là *công thức Heron*.

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC có góc $A = 60°$, bán kính đường tròn ngoại tiếp $R = 8$ và bán kính đường tròn nội tiếp $r = 3$.

Tính diện tích S của tam giác.

Giải. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp và E, F lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn này với các cạnh AB, AC. Ta có :

$$AE = AF = p - a.$$



Hình 2.35

mà $\widehat{IAE} = 30°$

nên $AE = AF = r\cot 30° = 3\sqrt{3} \Rightarrow p - a = 3\sqrt{3}$.

Mặt khác $a = 2R\sin A = 16.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$

Suy ra : $p = 3\sqrt{3} + 8\sqrt{3} = 11\sqrt{3}$.

Áp dụng công thức $S = pr$, ta được diện tích tam giác ABC bằng :

$$S = 11\sqrt{3}.3 = 33\sqrt{3}.\ \square$$

Ví dụ 5. Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC theo độ dài các cạnh $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.

Giải. Từ các công thức diện tích ở trên, ta có :

$$S = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Suy ra $r = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$. □

4. Phương pháp diện tích trong hình học

Các ví dụ vừa xét cho thấy rằng ngoài việc tính diện tích, các công thức ở trên còn có thể được sử dụng để thu được những mối liên hệ giữa các đại lượng khác trong một tam giác. Việc sử dụng các công thức tính diện tích hoặc các đẳng thức về diện tích để rút ra từ đó những hệ thức liên quan đến các cạnh, các góc hoặc để chứng minh các tính chất hình học khác nhau được gọi là phương pháp diện tích trong hình học. Ta hãy xem một số ví dụ minh hoạ.

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}.$$

Giải. Theo các công thức diện tích ở c) ta có :

$$\frac{S}{r}=p,\ \frac{S}{r_a}=p-a,\ \frac{S}{r_b}=p-b,\ \frac{S}{r_c}=p-c$$

$$\Rightarrow\ \frac{S}{r_a}+\frac{S}{r_b}+\frac{S}{r_c}=p=\frac{S}{r}.$$

Vậy $\frac{1}{r}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}$. □

Chú ý 3. Hoàn toàn tương tự, có thể chứng minh được :

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c},$$

với h_a, h_b, h_c là độ dài các đường cao tương ứng đi qua các đỉnh A, B, C.

Ví dụ 7. (*Công thức độ dài phân giác*)

Cho tam giác ABC. Kí hiệu l_a là độ dài đường phân giác trong góc A. Chứng minh rằng :

$$l_a=\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}.$$

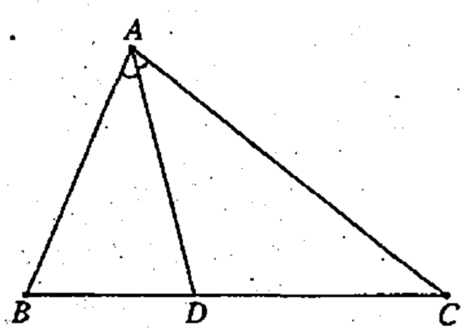
Chứng minh. Gọi D là chân đường phân giác trong đỉnh A. Ta có :

$$S_{ABC}=S_{ABD}+S_{ACD}.$$

Do $S_{ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A,$

$$S_{ABD}=\frac{1}{2}l_a c\sin\frac{A}{2},$$

$$S_{ACD}=\frac{1}{2}l_a b\sin\frac{A}{2},$$

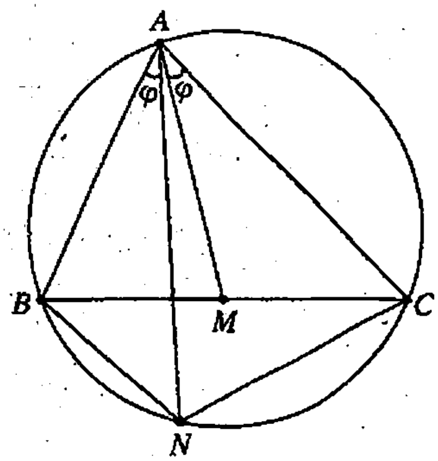


Hình 2.36

suy ra : $\frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}l_a(b+c)\sin\frac{A}{2}$

$$\Rightarrow l_a = \frac{bc\sin A}{(b+c)\sin\frac{A}{2}} = \frac{2bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{(b+c)\sin\frac{A}{2}} = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}. \square$$

Ví dụ 8. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có AM là trung tuyến đỉnh A. Đường thẳng qua A và đối xứng với AM qua phân giác trong góc A cắt (O) tại điểm N. Chứng minh rằng : $AB.NC = AC.NB$.



Hình 2.37

Chứng minh. Kí hiệu R là bán kính đường tròn (O).

Đặt $\widehat{CAM} = \varphi$ thì theo giả thiết :

$$\widehat{BAN} = \widehat{CAM} = \varphi.$$

Theo định lí hàm sin :

$AB = 2R\sin C,\ AC = 2R\sin B,\ NB = 2R\sin\varphi,\ NC = 2R\sin(A-\varphi)$

Do đó đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$\sin C\sin(A-\varphi) = \sin B.\sin\varphi$$

Ta có : $S_{ABM} = S_{ACM}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}AB.AM\sin(A-\varphi) = \frac{1}{2}AC.AM\sin\varphi$

$\Rightarrow R.AM\sin C\sin(A-\varphi) = R.AM\sin B\sin\varphi$

$\Rightarrow \sin C\sin(A-\varphi) = \sin B\sin\varphi$ (đpcm).

Chú ý 4. Tứ giác nội tiếp $ABNC$ trong ví dụ trên có tích các cặp cạnh đối bằng nhau. Những tứ giác như vậy được gọi là *tứ giác điều hoà* (xem bài đọc thêm cuối chương).

BÀI TẬP

7. Cho tam giác ABC có các trung tuyến BM và CN cắt nhau tại điểm G. Biết $BM = \frac{3}{2}$; $CN = 3$ và $\widehat{BGC} = 120^\circ$, tính độ dài các cạnh tam giác.

38. Cho tam giác ABC có $AC = b$, $AB = c$ và $\widehat{A} = \alpha$. Gọi M là trung điểm của BC và N là điểm trên cạnh AB sao cho $\dfrac{NA}{NB} = \dfrac{3}{2}$. Tính MN.

39. Cho tam giác ABC có $BC = 10$. Gọi (I) là đường tròn có tâm I thuộc cạnh BC và tiếp xúc với các cạnh AB, AC.

a) Biết $IA = 3$ và $2IB = 3IC$, tính độ dài các cạnh AB, AC.

b) Biết (I) có bán kính bằng 3 và $2IB = 3IC$, tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và các cạnh AB, AC.

40. Cho hình thang $ABCD$ ngoại tiếp được có các đáy $BC = b$, $DA = d$ ($b < d$) và góc giữa hai cạnh bên bằng α. Tính bán kính đường tròn nội tiếp.

41. Cho hình thang cân $ABCD$ với đáy lớn AB ngoại tiếp một đường tròn bán kính r.

a) Đặt $\widehat{BAD} = \alpha$. Tính độ dài các cạnh đáy và đường chéo theo r, α.

b) Kí hiệu R là bán kính đường tròn ngoại tiếp hình thang. Biết $\dfrac{R}{r} = \dfrac{2}{3}\sqrt{7}$, tính góc $\widehat{BAD}$.

42. Chứng minh trong tam giác ABC :

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}, \tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

43. Ba số thực x, y, z được gọi là lập thành *cấp số cộng* nếu $x + z = 2y$. Lúc đó giá trị $d = y - x = z - y$ được gọi là *công sai* của cấp số cộng. Chứng minh ba cạnh a, b, c của tam giác ABC lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi $\tan\dfrac{A}{2}.\tan\dfrac{C}{2} = \dfrac{1}{3}$. Chứng minh lúc đó công sai của cấp số cộng này là $d = \dfrac{3}{2}r\left(\tan\dfrac{C}{2} - \tan\dfrac{A}{2}\right)$, ($r$ là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác).

44. Chứng minh trong tam giác ABC :

a) $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$ lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi $\cot\dfrac{A}{2}$, $\cot\dfrac{B}{2}$, $\cot\dfrac{C}{2}$ lập thành cấp số cộng.

b) $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi $\tan\dfrac{A}{2}$, $\tan\dfrac{B}{2}$, $\tan\dfrac{C}{2}$ lập thành cấp số cộng.

45. Cho tam giác ABC và điểm M thay đổi trên cạnh BC. Kí hiệu r_1, r_2 là bán kính đường tròn nội tiếp và ρ_1, ρ_2 là bán kính đường tròn bàng tiếp góc A của các tam giác ABM, ACM. Chứng minh $\frac{r_1}{\rho_1}.\frac{r_2}{\rho_2}$ không đổi.

46. Cho tam giác ABC và các điểm M, N trên cạnh BC sao cho $\widehat{BAM} = \widehat{CAN}$. Gọi P, Q là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp các tam giác BAM, CAN với cạnh BC. Chứng minh

$$\frac{1}{PB} + \frac{1}{PM} = \frac{1}{QC} + \frac{1}{QN}.$$

47. Cho đường tròn (O) tâm O bán kính R và một điểm A bên ngoài (O). Một đường thẳng thay đổi qua A cắt đường tròn (O) tại hai điểm B, C. Đặt $\widehat{BOA} = \alpha$, $\widehat{COA} = \beta$. Chứng minh $\tan\frac{\alpha}{2}.\tan\frac{\beta}{2}$ không đổi.

48. Cho tam giác ABC có diện tích bằng S.

a) Chứng minh $\cot A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$.

b) Gọi M là trung điểm của BC, đặt $\widehat{AMB} = \varphi$. Chứng minh

$$\cot C - \cot B = 2\cot\varphi.$$

c) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Đặt $\widehat{BGC} = \alpha$. Chứng minh :

$$\cot\alpha = \frac{5bc\cos A - 2(b^2 + c^2)}{3bc\sin A}.$$

49. Chứng minh trong tam giác ABC :

a) $b^2 + c^2 = 2a^2 \Leftrightarrow \cot B + \cot C = 2\cot A$

b) $b^4 + c^4 = a^4 \Leftrightarrow \tan B.\tan C = 2\sin^2 A$.

50. Cho tam giác ABC có BM, CN là các trung tuyến.

a) Chứng minh $BM \perp CN \Leftrightarrow \cot B + \cot C = \frac{1}{2}\cot A$.

b) Chứng minh nếu tam giác ABC không cân tại A thì :

$$\frac{BM}{CN} = \frac{BA}{CA} \Leftrightarrow \cot B + \cot C = 2\cot A.$$

51. Cho hình chữ nhật $ABCD$ và M là một điểm tùy ý. Chứng minh :

$$\frac{\tan\widehat{AMC}}{\tan\widehat{BMD}} = \frac{S_{AMC}}{S_{BMD}}.$$

52. Cho tam giác ABC có $B > C$ và O, I, O_1 là tâm đường tròn ngoại tiếp, đường tròn nội tiếp và đường tròn bàng tiếp góc A. Chứng minh

$$\tan\widehat{IOO_1} = \frac{2(\sin B - \sin C)}{2\cos A - 1}.$$

53. Cho hình bình hành có a, b là độ dài các cạnh và m, n là độ dài các đường chéo ($a > b$, $m > n$). Kí hiệu α là góc nhọn của hình bình hành và φ là góc giữa hai đường chéo.

a) Chứng minh $\cos\alpha\cos\varphi = \dfrac{(a^2 - b^2)(m^2 - n^2)}{4abmn}$.

b) Chứng minh $\tan\varphi = \dfrac{2ab\sin\alpha}{a^2 - b^2}$.

54. Cho tam giác ABC có H là trực tâm và các đường cao $BB' = \sqrt{5}$, $CC' = 2$.

a) Biết $\cos\widehat{BHC} = -\dfrac{2}{3}$. Tính diện tích tam giác.

b) Biết $\cos\widehat{CBB'} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$. Tính diện tích tam giác.

55. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N là các giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC với AD, CD.

a) Biết khoảng cách từ M đến B, C, D là b, c, d. Tính diện tích tam giác BMN.

b) Biết góc nhọn của hình bình hành bằng α và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng R. Tính diện tích tam giác BMN.

56. Cho tam giác ABC có O, I, G lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, tâm đường tròn nội tiếp và trọng tâm.

a) Chứng minh $IA \perp IG \Leftrightarrow \dfrac{a+b+c}{3} = 2\dfrac{bc}{b+c}$.

b) Chứng minh $IA \perp IO \Leftrightarrow b + c = 2a$.

c) Gọi M, N là trung điểm AB, AC. Chứng minh A, I, M, N cùng thuộc một đường tròn khi và chỉ khi $b + c = 2a$.

57. Cho tam giác ABC và D, E là các điểm trên cạnh BC sao cho

$$BD = DE = EC = \frac{BC}{3}.$$

Đặt $\widehat{BAD} = \alpha$, $\widehat{DAE} = \beta$, $\widehat{EAC} = \gamma$. Chứng minh

$$(\cot\alpha + \cot\beta)(\cot\beta + \cot\gamma) = 4(1 + \cot^2\beta).$$

58. Cho tam giác ABC có $B > C$ và AM, AD lần lượt là trung tuyến và phân giác trong góc A. Đặt $\widehat{MAD} = \alpha$.

a) Chứng minh $\tan\alpha = \tan^2\dfrac{A}{2}.\tan\dfrac{B-C}{2}$.

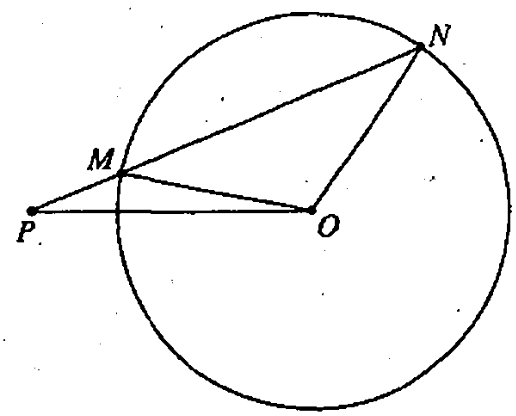
b) Đặt $\dfrac{AD}{AM} = k$. Chứng minh $\cos\alpha = \dfrac{k}{2}\sin^2\dfrac{A}{2} + \sqrt{\dfrac{k^2}{4}\sin^4\dfrac{A}{2} + \cos^2\dfrac{A}{2}}$.

§5. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG ĐƯỜNG TRÒN

1. Phương tích của một điểm đối với một đường tròn

Trong phần tích vô hướng §3, ta đã chứng minh được :

Định lí 1. Cho đường tròn (O) bán kính R và một điểm P. Một đường thẳng l thay đổi đi qua P và cắt (O) tại hai điểm M, N. Lúc đó tích $\overline{PM}.\overline{PN}$ không đổi và bằng $d^2 - R^2$ (d là khoảng cách từ điểm P đến tâm O).



Hình 2.38

Vậy khi đường thẳng l thay đổi, giá trị của tích này chỉ phụ thuộc vào vị trí tương đối của điểm P đối với đường tròn (O) và đây chính là cơ sở để ta định nghĩa khái niệm phương tích của một điểm đối với một đường tròn như sau :

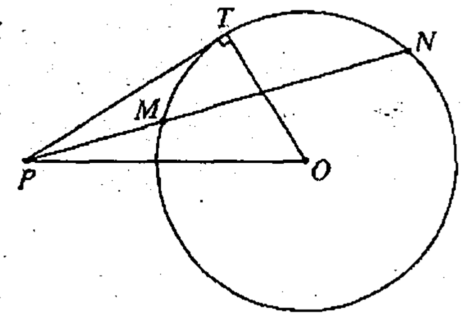
Phương tích của điểm P đối với đường tròn (O), kí hiệu $\mathcal{P}_{P/(O)}$, được định nghĩa là giá trị $\mathcal{P}_{P/(O)} = d^2 - R^2$.

Nhận xét

a) Từ định nghĩa có thể thấy rằng giá trị của phương tích $\mathcal{P}_{P/(O)}$ âm hay dương tuỳ thuộc vào điểm P nằm trong hay ngoài đường tròn (O). Cụ thể ta có :

- $\mathcal{P}_{P/(O)} < 0 \Leftrightarrow P$ nằm trong (O)
- $\mathcal{P}_{P/(O)} = 0 \Leftrightarrow P$ nằm trên (O)
- $\mathcal{P}_{P/(O)} > 0 \Leftrightarrow P$ nằm ngoài (O).

b) Xét điểm P nằm ngoài đường tròn (O). Từ P kẻ tiếp tuyến PT đến (O) (T là tiếp điểm). Có thể xem tiếp tuyến PT chính là vị trí đặc biệt của đường thẳng l trong định lí 1 khi các giao điểm M và N trùng nhau.



Hình 2.39

Từ định nghĩa phương tích, ta có :

$$\mathcal{P}_{P/(O)} = OP^2 - R^2 = PT^2.$$

c) Cho AB là một đường kính bất kì của đường tròn (O), cũng ở phần tích vô hướng §3, ta đã có : $\mathcal{P}_{P/(O)} = \overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB}$.

Bây giờ ta thử đi tính phương tích của một vài điểm quan trọng trong một tam giác đối với đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

Ví dụ 1. (*Phương tích của trọng tâm*)

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tính phương tích của trọng tâm G đối với (O) theo các cạnh $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.

Giải. Do G là trọng tâm tam giác ABC nên ta có : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$.

Bình phương vô hướng hai vế, ta được :

$$\overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OC}^2 + 2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA} = 9\overrightarrow{OG}^2.$$

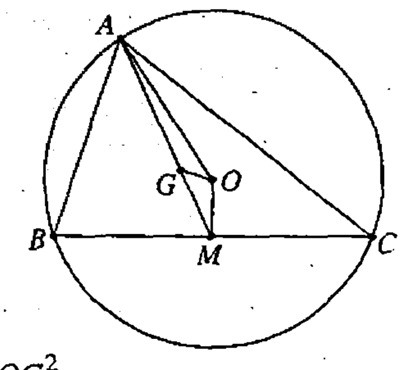
Để ý rằng $\overrightarrow{OA}^2 = \overrightarrow{OB}^2 = \overrightarrow{OC}^2 = R^2$ (R là bán kính đường tròn (O)),

còn $2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 - \overrightarrow{AB}^2$

$$= 2R^2 - c^2 \text{ (xem định lí côsin)}$$

và tương tự : $2\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} = 2R^2 - a^2$,

$$2\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA} = 2R^2 - b^2.$$



Hình 2.40

Suy ra đẳng thức :

$$3R^2 + 2R^2 - c^2 + 2R^2 - a^2 + 2R^2 - b^2 = 9OG^2$$

$$\Rightarrow \quad 9R^2 - a^2 - b^2 - c^2 = 9OG^2.$$

Vậy $\mathcal{P}_{G/(O)} = OG^2 - R^2 = -\frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$. □

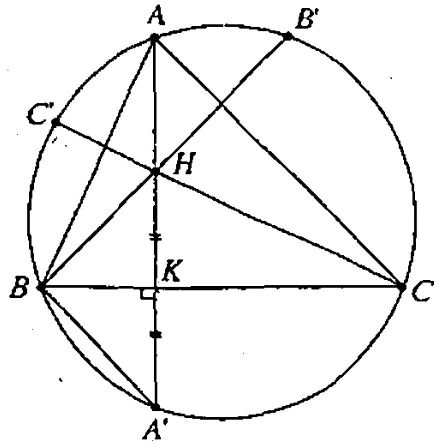
Ví dụ 2. (*Phương tích của trực tâm*)

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) bán kính R. Tính phương tích của trực tâm H đối với (O) theo R và các góc A, B, C.

Giải. Trước tiên xét trường hợp tam giác ABC nhọn. Kí hiệu K, A' là các giao điểm của AH với BC và đường tròn (O). Áp dụng định lí sin đối với tam giác AHB, ta có :

$$\frac{AH}{\sin\widehat{ABH}} = \frac{AB}{\sin\widehat{AHB}} \Rightarrow \frac{HA}{\cos A} = \frac{AB}{\sin C}$$

$$\Rightarrow HA = \frac{AB\cos A}{\sin C} = 2R\cos A.$$



Hình 2.41

Tương tự ta cũng có : $HB = 2R\cos B$.

Mặt khác, để ý rằng tam giác BHA' cân tại B $(\widehat{BHA'} = \widehat{C} = \widehat{BA'H})$,

do đó : $KH = KA' \Rightarrow HA' = 2KH = 2HB\cos\widehat{BHA'}$
$$= 2.2R\cos B.\cos C = 4R\cos B\cos C.$$

Từ đây suy ra : $HA.HA' = 8R^2\cos A\cos B\cos C$.

Do tam giác ABC nhọn nên :

$$\mathcal{P}_{H/(O)} = \overline{HA}.\overline{HA'} = -HA.HA' = -8R^2\cos A\cos B\cos C.$$

Lập luận tương tự, ta cũng được kết quả trên cho trường hợp tam giác ABC vuông hoặc tù. □

Chú ý 1. Cách tính phương tích điểm H mà không thông qua việc tính khoảng cách OH ở trên cho phép ta nhận được một công thức tính OH.

Thật vậy, từ kết quả : $\mathcal{P}_{H/(O)} = OH^2 - R^2 = -8R^2\cos A\cos B\cos C$

ta được : $OH^2 = R^2(1 - 8\cos A\cos B\cos C)$.

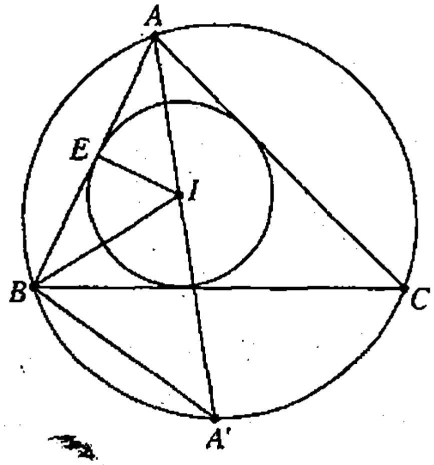
Bây giờ ta hãy tính phương tích của tâm I của đường tròn nội tiếp đối với đường tròn ngoại tiếp (O) và từ đó rút ra một hệ thức khá đặc biệt cho phép biểu diễn khoảng cách OI theo các bán kính.

Ví dụ 3. (*Hệ thức Euler*)

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) bán kính R và ngoại tiếp đường tròn (I) bán kính r. Đặt $OI = d$, chứng minh rằng :

$$d^2 = R^2 - 2Rr.$$

Chứng minh. Trước hết ta tính phương tích của điểm I đối với đường tròn (O) theo các bán kính R, r. Gọi E là tiếp điểm của đường tròn (I) với cạnh AB, A' là giao điểm của AI với (O).



Hình 2.42

Ta có $IA = \dfrac{IE}{\sin\widehat{IAE}} = \dfrac{r}{\sin\dfrac{A}{2}}$.

Mặt khác, để ý rằng tam giác $A'BI$ cân tại A' $\left(\text{do } \widehat{A'BI} = \dfrac{A}{2} + \dfrac{B}{2} = \widehat{A'IB}\right)$ nên : $IA' = BA'$.

Mà theo định lí sin đối với tam giác ABA' thì $BA' = 2R\sin\widehat{BAA'} = 2R\sin\dfrac{A}{2}$,

suy ra $IA' = 2R\sin\dfrac{A}{2}$.

Do điểm I nằm trong đường tròn (O), suy ra :

$$\mathcal{P}_{I/(O)} = \overline{IA}.\overline{IA'} = -IA.IA' = -\frac{r}{\sin\dfrac{A}{2}}.2R\sin\frac{A}{2} = -2Rr.$$

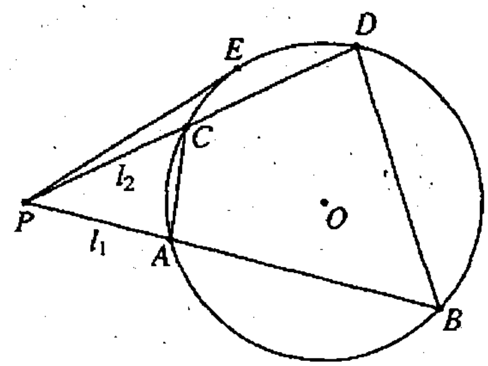
Vậy $d^2 - R^2 = -2Rr \Rightarrow d^2 = R^2 - 2Rr$ □

Bên cạnh việc tính khoảng cách, phương tích còn được sử dụng để chứng minh một số bài toán liên quan đến các đường tròn. Các chứng minh này thông thường dựa vào định lí sau :

Định lí 2. Cho đường tròn (O) và một điểm P. l_1 và l_2 là hai đường thẳng bất kì đi qua P và cắt (O) lần lượt ở A, B và C, D. Lúc đó ta có : $\overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PC}.\overline{PD}$.

Trong trường hợp nếu l_2 tiếp xúc với (O) tại điểm E thì ta có : $\overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PE}^2$.

Rõ ràng các tích ở trên đều bằng phương tích $\mathcal{P}_{P/(O)}$ nên định lí 2 là hiển nhiên.



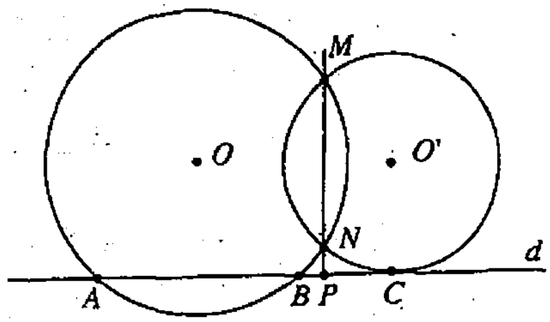
Hình 2.43

Ví dụ 4. Trên đường thẳng d cho ba điểm A, B, C (B nằm giữa A, C). Gọi (O) là một đường tròn thay đổi đi qua A, B và (O') là một đường tròn thay đổi nhưng luôn tiếp xúc với d tại điểm C. Giả sử (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm M, N. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Giải. Trước hết nhận xét rằng các đường thẳng MN và d phải cắt nhau. Thật vậy, nếu ngược lại :

$$MN \parallel d \Rightarrow OO' \perp d,$$

suy ra O, O', C thẳng hàng $\Rightarrow$ vô lí.



Hình 2.44

Gọi P là giao điểm của MN với d, ta có :

$$\mathcal{P}_{P/(O)} = \overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PM}.\overline{PN}$$

$$\mathcal{P}_{P/(O')} = \overline{PC}^2 = \overline{PM}.\overline{PN}$$

$$\Rightarrow \overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PC}^2$$

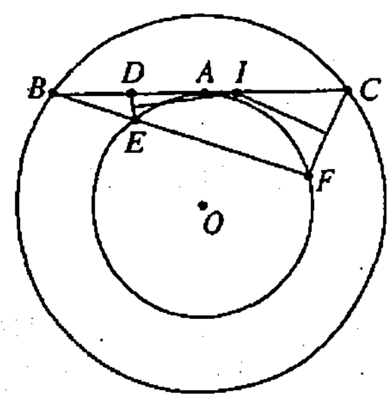
$$\Rightarrow (\overline{PC} + \overline{CA}).(\overline{PC} + \overline{CB}) = \overline{PC}^2$$

$$\Rightarrow \overline{PC}(\overline{CA} + \overline{CB}) + \overline{CA}.\overline{CB} = 0$$

$$\Rightarrow \overline{PC} = -\frac{\overline{CA}.\overline{CB}}{\overline{CA} + \overline{CB}} \text{ nên } P \text{ cố định.}$$

Vậy đường thẳng MN luôn đi qua điểm P cố định. □

Ví dụ 5. Cho hai đường tròn $\mathscr{C}_1$ và $\mathscr{C}_2$ có cùng tâm ($\mathscr{C}_2$ chứa $\mathscr{C}_1$) và một điểm A trên $\mathscr{C}_1$. Tiếp tuyến tại A của đường tròn $\mathscr{C}_1$ cắt đường tròn $\mathscr{C}_2$ tại hai điểm B, C. Gọi D là trung điểm của AB. Một đường thẳng đi qua B và cắt $\mathscr{C}_1$ tại hai điểm E, F. Biết rằng các đường trung trực của DE và CF cắt nhau tại một điểm I trên đường thẳng BC. Tính tỉ số $\frac{IB}{IC}$.



Hình 2.45

Giải. Ta có $\mathcal{P}_{B/\mathscr{C}_1} = \overline{BA}^2 = \overline{BE}.\overline{BF}$.

Mặt khác lại có : $\overline{BA}^2 = 2\overline{BD}.\frac{\overline{BC}}{2} = \overline{BD}.\overline{BC}$ nên $\overline{BE}.\overline{BF} = \overline{BD}.\overline{BC}$.

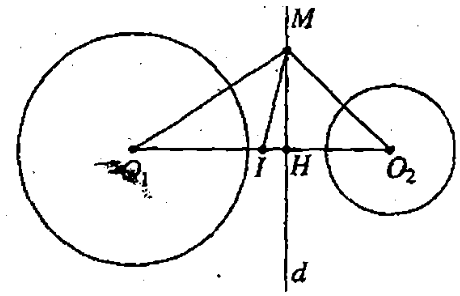
Hai tam giác BDE và BFC có góc ở B chung và $\frac{BD}{BE} = \frac{BF}{BC}$ nên đồng dạng, suy ra : $\widehat{BDE} = \widehat{BFC}$. Vậy tứ giác $DEFC$ nội tiếp một đường tròn. Để ý rằng giao điểm I của các trung trực của DE và CF chính là tâm đường tròn này, mà I lại thuộc đường thẳng CD nên I phải là trung điểm của CD. Từ đây ta được

$$DB = \frac{1}{3}DC \text{ và } \frac{IB}{IC} = \frac{ID + DB}{IC} = \frac{ID}{IC} + \frac{DB}{IC} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}. \square$$

2. Trục đẳng phương, tâm đẳng phương

Xét bài toán sau đây :

Bài toán 1. Cho hai đường tròn phân biệt (O_1) và (O_2) có các bán kính R_1 và R_2. Tìm quỹ tích các điểm M có cùng phương tích đối với hai đường tròn này.



Giải. Từ điều kiện $\mathcal{P}_{M/(O_1)} = \mathcal{P}_{M/(O_2)}$ ta có :

$$MO_1^2 - R_1^2 = MO_2^2 - R_2^2 \Leftrightarrow MO_1^2 - MO_2^2 = R_1^2 - R_2^2.$$

Hình 2.46

Trường hợp O_1 và O_2 trùng nhau, lúc đó $R_1 \neq R_2$ nên không có điểm M nào thoả mãn.

Xét trường hợp O_1 và O_2 phân biệt. Đặt $k = R_1^2 - R_2^2$, theo bài toán quỹ tích ở §3, ta thấy quỹ tích của M chính là đường thẳng d vuông góc với O_1O_2 tại điểm H trên trục đường thẳng O_1O_2 thoả mãn : $\overline{IH} = \dfrac{k}{2O_1O_2}$ (I là trung điểm của O_1O_2). $\square$

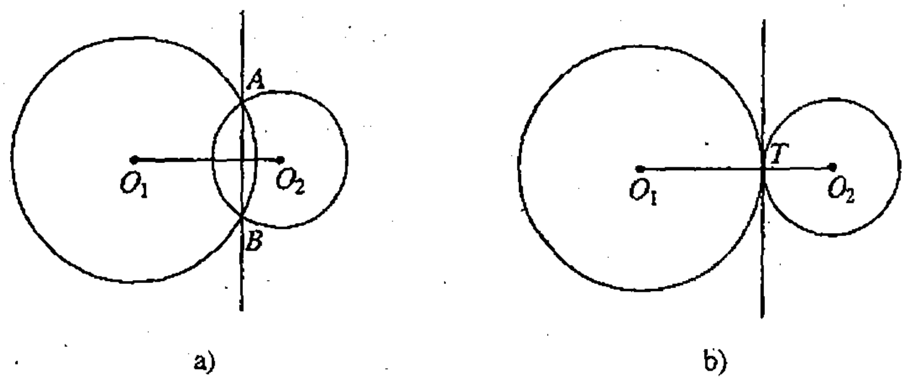
Từ kết quả bài toán này, ta có :

Định nghĩa trục đẳng phương của hai đường tròn

Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) không cùng tâm. Lúc đó quỹ tích các điểm có cùng phương tích đối với chúng là một đường thẳng vuông góc với đường nối tâm O_1O_2. Đường thẳng đó được gọi là *trục đẳng phương* của (O_1) và (O_2).

Chú ý 2. Trên thực tế, việc xác định trục đẳng phương đôi khi có thể rất đơn giản. Xét các trường hợp sau :

a) Nếu hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại hai điểm A, B. Lúc đó A, B đều có cùng phương tích bằng 0 đối với (O_1) và (O_2). Suy ra trục đẳng phương của (O_1) và (O_2) phải đi qua A và B nên nó chính là đường thẳng AB.



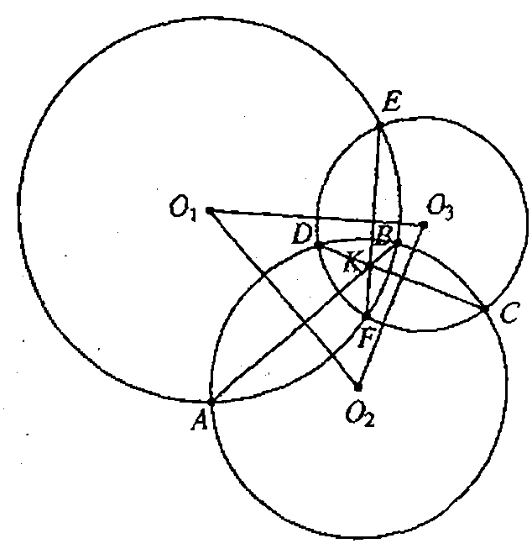
Hình 2.47

b) Nếu hai đường tròn (O_1) và (O_2) tiếp xúc nhau tại điểm T. Lúc đó T có cùng phương tích bằng 0 đối với (O_1) và (O_2). Suy ra trục đẳng phương của (O_1) và (O_2) phải đi qua T và vuông góc với O_1O_2 nên nó chính là tiếp tuyến chung của (O_1) và (O_2) tại điểm T.

Dựa vào các nhận xét trên, có thể áp dụng khái niệm trục đẳng phương để giải một số bài toán liên quan đến tiếp tuyến chung hoặc đường thẳng đi qua các giao điểm của hai đường tròn. Ta thử xem các ví dụ sau :

Ví dụ 6. Cho ba đường tròn (O_1), (O_2) và (O_3) có các tâm O_1, O_2 và O_3 không cùng thuộc một đường thẳng. Giả sử (O_1) cắt (O_2) tại hai điểm A, B, (O_2) cắt (O_3) tại hai điểm C, D và (O_3) cắt (O_1) tại hai điểm E, F. Chứng minh rằng các đường thẳng AB, CD và EF đồng quy.

Chứng minh. Theo giả thiết O_1, O_2, O_3 không thẳng hàng nên các đường thẳng AB, CD và EF đôi một cắt nhau. Gọi K là giao điểm của AB và CD. Theo nhận xét ở trên, AB là trục đẳng phương của (O_1) và (O_2) còn CD là trục đẳng phương của (O_2) và (O_3) nên K sẽ có cùng phương tích đối với cả ba đường tròn (O_1), (O_2) và (O_3). Suy ra K cũng thuộc trục đẳng phương EF của (O_1) và (O_3). Vậy các đường thẳng AB, CD và EF đồng quy tại K. □



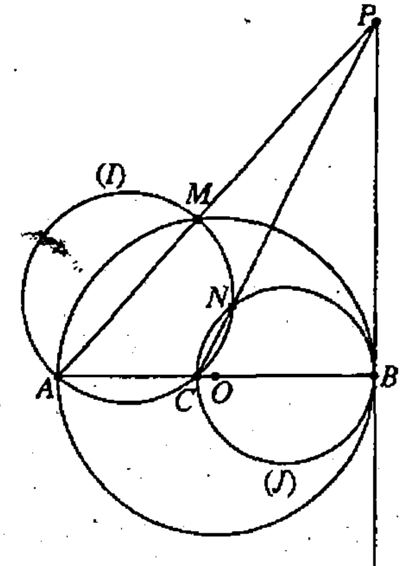
Hình 2.48

Ví dụ 7. Cho đường tròn (O) đường kính AB và một điểm C thay đổi trên đường thẳng AB. Gọi (I) là một đường tròn thay đổi đi qua A và C. Đường tròn (I) cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai M và cắt đường tròn (J) đường kính BC tại điểm thứ hai N. Gọi P là giao điểm của AM và CN. Chứng minh rằng P luôn thuộc một đường thẳng cố định.

Chứng minh. Do AM là trục đẳng phương của (O) và (I) còn CN là trục đẳng phương của (I) và (J) nên giao điểm P của chúng phải có cùng phương tích đối với cả ba đường tròn (O), (I) và (J). Vậy P thuộc trục đẳng phương của (O) và (J).

Để ý rằng (O) và (J) tiếp xúc nhau tại điểm B nên trục đẳng phương của chúng chính là tiếp tuyến chung tại điểm B. Tiếp tuyến này đi qua B và vuông góc với AB nên cố định.

Vậy P luôn thuộc đường thẳng cố định đi qua B và vuông góc với AB. □



Hình 2.49

Các ví dụ trên cho thấy rằng đối với ba đường tròn phân biệt, nói chung sẽ tồn tại một điểm có cùng phương tích đối với chúng. Lập luận hoàn toàn tương tự như trong các ví dụ trên, ta có thể đi đến định nghĩa sau :

Định nghĩa tâm đẳng phương của ba đường tròn

Cho ba đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) có các tâm O_1, O_2, O_3 không cùng thuộc một đường thẳng. Gọi d_1, d_2, d_3 lần lượt là trục đẳng phương của (O_2) và (O_3), của (O_3) và (O_1), của (O_1) và (O_2).

Lúc đó các đường thẳng d_1, d_2, d_3 đồng quy tại một điểm K. K là điểm duy nhất có cùng phương tích đối với (O_1), (O_2), (O_3) và được gọi là *tâm đẳng phương* của ba đường tròn này.

Trong định nghĩa vừa nêu, điều kiện tâm của các đường tròn (O_1), (O_2) và (O_3) không cùng thuộc một đường thẳng cho phép kết luận rằng tâm đẳng phương tồn tại và duy nhất. Trong trường hợp các tâm O_1, O_2 và O_3 cùng thuộc một đường thẳng, các trục đẳng phương d_1, d_2 và d_3 đều vuông góc với đường thẳng chứa O_1, O_2 và O_3.

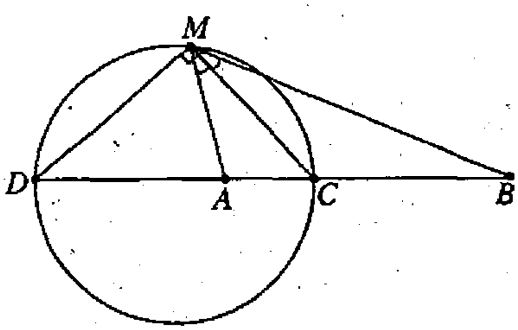
– Nếu d_1, d_2 và d_3 đôi một song song, lúc đó không tồn tại điểm nào có cùng phương tích đối với cả ba đường tròn.

– Nếu có hai trong ba đường d_1, d_2 và d_3 trùng nhau, lúc đó tất cả chúng đều phải trùng nhau và đường thẳng này sẽ là tập hợp tất cả các điểm có cùng phương tích đối với cả ba đường tròn. Trong trường hợp này, ta nói rằng các đường tròn (O_1), (O_2) và (O_3) có một trục đẳng phương chung.

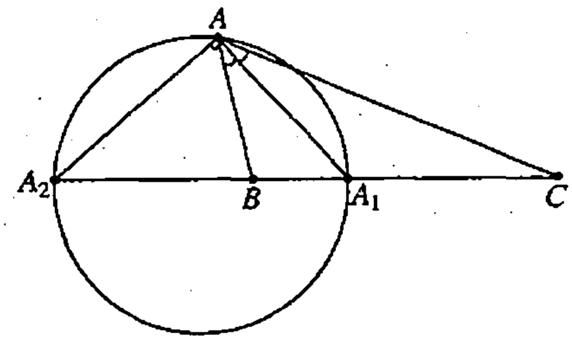
Một trong những ví dụ của ba đường tròn có trục đẳng phương chung chính là ba đường tròn Apollonius của một tam giác không cân.

Ta nhớ lại rằng (xem VD21, §3, chương 1) đường tròn Apollonius của hai điểm A, B ứng với tỉ số k ($k \neq 1$) là quỹ tích những điểm M sao cho $\dfrac{MA}{MB} = k$.

Đó chính là đường tròn đường kính CD với C và D lần lượt là điểm chia trong và điểm chia ngoài đoạn AB theo tỉ số k (tức là $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -k$, $\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = k$) (xem hình 2.50).



Hình 2.50



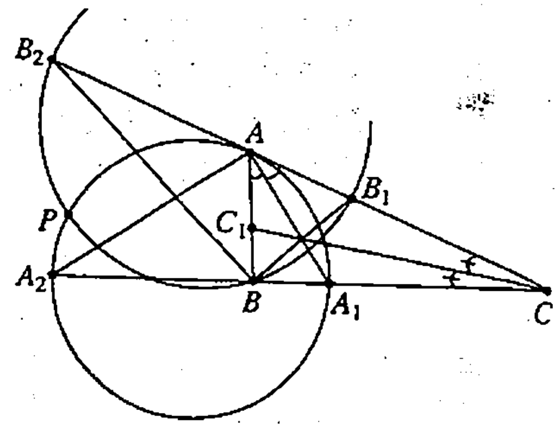
Hình 2.51

Bây giờ, ta xét tam giác không cân ABC. Gọi A_1, A_2 lần lượt là chân đường phân giác trong và ngoài góc A trên đường thẳng BC. Dễ thấy đường tròn đường kính A_1A_2 chính là đường tròn Apollonius của hai điểm B, C ứng với tỉ số $k = \dfrac{AB}{AC}$ (h. 2.51). Đường tròn này hiển nhiên đi qua điểm A và thường được gọi là đường tròn Apollonius của tam giác ABC ứng với đỉnh A. Tương tự xác định các đường tròn Apollonius ứng với các đỉnh B, C. Không khó thấy rằng các đường tròn này đôi một phân biệt và mỗi đường chỉ đi qua đúng một đỉnh của tam giác ABC (ví dụ đường tròn Apollonius ứng với điểm A chỉ đi qua A mà không đi qua B và C).

Bài toán 2. Cho tam giác không cân ABC.

Chứng minh rằng các đường tròn Apollonius ứng với các đỉnh A, B, C có một trục đẳng phương chung.

Chứng minh. Gọi $(O_1), (O_2), (O_3)$ lần lượt là các đường tròn Apollonius ứng với các đỉnh A, B, C. Ta chứng minh rằng $(O_1), (O_2), (O_3)$ đều đi qua hai điểm P và Q, từ đó suy ra rằng chúng có một trục đẳng phương chung là đường thẳng PQ.



Hình 2.52

Gọi A_1, A_2 là chân các đường phân giác trong và ngoài góc A. Không mất tính tổng quát, giả thiết rằng $AB < AC$. Lúc đó ta thấy B nằm giữa, còn C nằm ngoài hai điểm A_1 và A_2 trên đường thẳng A_1A_2. Suy ra điểm C nằm ngoài đường tròn (O_1), còn điểm C_1 là chân đường phân giác trong góc C lại nằm trong (O_1) (do B nằm trong (O_1)).

Như vậy đường tròn Apollonius ứng với đỉnh C là (O_3) vừa chứa điểm nằm ngoài (O_1) (điểm C), vừa chứa điểm nằm trong (O_1) (điểm C_1) nên (O_3) và (O_1) phải cắt nhau tại hai điểm P và Q.

Theo tính chất của (O_3) và (O_1) ta có :

$$\frac{PA}{PB} = \frac{QA}{QB} = \frac{CA}{CB} \text{ và } \frac{PB}{PC} = \frac{QB}{QC} = \frac{AB}{AC}.$$

Nhân các đẳng thức trên theo vế, ta được : $\dfrac{PA}{PC} = \dfrac{QA}{QC} = \dfrac{BA}{BC}$ nên P và Q cũng thuộc đường tròn (O_2). Vậy cả ba đường tròn (O_1), (O_2) và (O_3) có một trục đẳng phương chung là đường thẳng PQ. □

BÀI TẬP

59. Cho đường tròn (O) và hai điểm A, B. Gọi I là trung điểm của AB. Biết phương tích của A, B và I đối với (O) bằng p_1, p_2 và p_3, tính độ dài AB.

60. Cho nửa đường tròn đường kính AB và hai điểm M, N thay đổi trên đó. Gọi P là giao điểm của AM và BN. Kí hiệu (O_1), (O_2) là đường tròn ngoại tiếp các tam giác BMP và ANP. Chứng minh : $\mathcal{P}_{A/(O_1)} + \mathcal{P}_{B/(O_2)}$ không đổi.

61. Cho hai đường tròn (O_1), (O_2) có tâm $O_1 \neq O_2$ và M là một điểm tùy ý. Kí hiệu d là trục đẳng phương của (O_1) và (O_2), H là hình chiếu vuông góc của M trên đường thẳng d.

Chứng minh $\mathcal{P}_{M/(O_1)} - \mathcal{P}_{M/(O_2)} = -2\overline{O_1O_2}.\overline{MH}$.

62. Cho bốn điểm A, B, C, D theo thứ tự đó nằm trên một đường thẳng. (O_1) và (O_2) là các đường tròn thay đổi qua A, C và B, D. Gọi M, N là các giao điểm của (O_1) và (O_2). Các tiếp tuyến chung của (O_1) và (O_2) tiếp xúc với (O_1) tại P_1, Q_1 và với (O_2) tại P_2, Q_2. Gọi I, J là trung điểm của P_1P_2, Q_1Q_2.

a) Chứng minh M, N, I, J thẳng hàng.

b) Chứng minh đường thẳng IJ luôn đi qua một điểm cố định.

63. Cho đường tròn (O), điểm A cố định ($A \neq O$) và điểm M thay đổi trên (O). Gọi N là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác OAM với đường tròn (O). Chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

64. Cho đường tròn (O) và một điểm A ngoài (O). (I) là đường tròn thay đổi qua A và cắt (O) tại hai điểm M, N. Gọi K là giao điểm của MN với tiếp tuyến của (I) tại điểm A.

a) Chứng minh K luôn thuộc một đường thẳng cố định.

b) Cho đường tròn (I) thay đổi qua A và đồng thời tâm I thuộc đường tròn (O). Chứng minh đường thẳng MN luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

65. Cho hình thang $ABCD$ có đáy nhỏ AB và một điểm M thay đổi bên trong hình thang. Gọi E, F là giao điểm của MC, MD với AB. Đường tròn ngoại tiếp các tam giác AME và BMF cắt nhau tại điểm thứ hai N. Chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

66. Cho bốn điểm A, B, C, D theo thứ tự đó nằm trên một đường thẳng. Gọi E, F là các giao điểm của hai đường tròn : đường tròn (O_1) đường kính AC, đường tròn (O_2) đường kính BD. Lấy P là một điểm bất kì trên đường thẳng EF. CP cắt (O_1) tại M và BP cắt (O_2) tại N. Chứng minh AM, DN và EF đồng quy.

67. Cho tam giác ABC có H là trực tâm và D, E là các điểm tùy ý trên các cạnh AB, AC. Giả sử các đường tròn đường kính BE và CD cắt nhau tại hai điểm F, G. Chứng minh F, G, H thẳng hàng.

68. Cho tam giác ABC nhọn và một đường tròn thay đổi qua B, C cắt AB, AC tại M, N. Gọi P là giao điểm của BN và CM và Q, T là giao điểm của AP, MN với BC. Đường thẳng qua Q và song song với MN cắt AB, AC tại R, S.

a) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác RST luôn đi qua một điểm cố định.

b) Gọi K là trực tâm tam giác AMN, a là độ dài cạnh BC và d là khoảng cách từ A đến đường thẳng PK. Chứng minh $d \leq a\cot A$.

69. Cho tứ giác lồi $ABCD$ có E và F là giao điểm của AB với CD và AD với BC. Chứng minh các đường tròn đường kính AC, BD và EF có trục đẳng phương chung.

70. Cho tam giác ABC không cân có O là tâm đường tròn ngoại tiếp và A', B', C' là các hình chiếu vuông góc của A, B, C trên BC, CA, AB. Kí hiệu (O_1) là đường tròn qua A, A' và tiếp xúc với OA tại A, (O_2) là đường tròn qua B, B' và tiếp xúc với OB tại B, (O_3) là đường tròn qua C, C' và tiếp xúc với OC tại C. Chứng minh các đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) có trục đẳng phương chung.

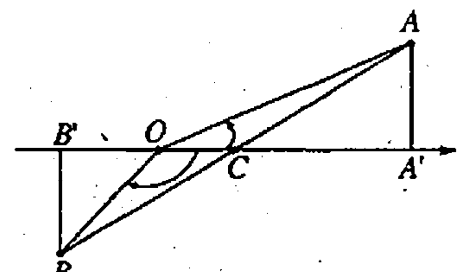
71. Cho tam giác ABC không cân có O là tâm đường tròn ngoại tiếp, D, E, F là chân các đường phân giác trong góc A, B, C. Gọi K là trực tâm tam giác DEF. Chứng minh đường thẳng OK là trục đẳng phương chung của các đường tròn Apollonius của tam giác ABC.

Bài đọc thêm

TỈ SỐ KÉP VỚI GÓC ĐỊNH HƯỚNG. TỈ SỐ KÉP CỦA BỐN ĐIỂM TRÊN ĐƯỜNG TRÒN

1. Định lí Ceva dạng lượng giác

Bổ đề : Ba điểm phân biệt A, B, C nằm trên đường thẳng d không đi qua điểm O thì $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \dfrac{OA\sin\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}\right)}{OB\sin\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}\right)}$.



Hình 2.53

Chứng minh. Gọi hình chiếu vuông góc của A, B trên đường thẳng OC theo thứ tự là A', B'. Coi tia OC là tia Ox trục hoành để xác định sin của góc định hướng thì dễ thấy (hình 2.53) :

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{A'A}}{\overline{B'B}} = \frac{OA\sin\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}\right)}{OB\sin\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}\right)}.$$

Định lí 1 (*Định lí Ceva dạng lượng giác*). Cho tam giác ABC và các điểm M, N, P theo thứ tự thuộc các đường thẳng BC, CA, AB (nhưng không phải là đỉnh của tam giác). Khi đó AM, BN, CP đồng quy hoặc đôi một song song nếu và chỉ nếu :

$$\frac{\sin\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}\right)} \cdot \frac{\sin\left(\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{BC}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{BA}\right)} \cdot \frac{\sin\left(\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CA}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CB}\right)} = -1.$$

Chứng minh. Theo bổ đề, ta có $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \dfrac{AB}{AC} \dfrac{\sin\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}\right)}$,

$$\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = \frac{BC}{BA} \frac{\sin\left(\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{BC}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{BA}\right)},$$

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{CA}{CB} \frac{\sin\left(\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CA}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CB}\right)}.$$

Vậy $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \dfrac{\sin\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}\right)} \cdot \dfrac{\sin\left(\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{BC}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{BA}\right)} \cdot \dfrac{\sin\left(\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CA}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CB}\right)}$.

Từ đó định lí Ceva dạng $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -1$ tương đương định lí Ceva dạng lượng giác.

Hệ quả. Khi M, N, P theo thứ tự thuộc các đoạn BC, CA, AB (không trùng với mút các đoạn này) thì : AM, BN, CP đồng quy khi và chỉ khi

$$\frac{\sin \widehat{MAB}}{\sin \widehat{MAC}} \cdot \frac{\sin \widehat{NBC}}{\sin \widehat{NBA}} \cdot \frac{\sin \widehat{PCA}}{\sin \widehat{PCB}} = 1.$$

Tỉ số kép của một chùm

Định lí 2. Với mọi chùm $O(ABCD)$, ta có

$$O(ABCD) = \frac{\sin\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}\right)} : \frac{\sin\left(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OA}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB}\right)}.$$

Chứng minh. Cắt chùm bởi một đường thẳng không đi qua O để được bốn điểm phân biệt mà ta có thể coi là A, B, C, D. Theo bổ đề, ta có

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{OA\sin\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}\right)}{OB\sin\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}\right)} \text{ và } \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{OA\sin\left(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OA}\right)}{OB\sin\left(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB}\right)}.$$

Từ đó

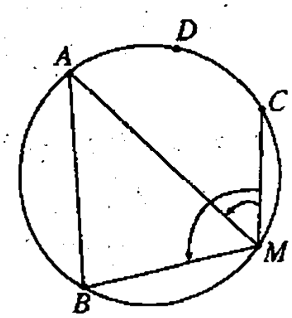
$$O(ABCD) = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{\sin\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}\right)} : \frac{\sin\left(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OA}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB}\right)}.$$

Chú ý 1. Định lí 2 còn có thể được phát biểu dạng : gọi $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}$ là vectơ chỉ phương theo thứ tự của 4 đường thẳng phân biệt d_1, d_2, d_3, d_4 cùng đi qua một điểm O thì tỉ số kép $\left(d_1, d_2, d_3, d_4\right) = \dfrac{\sin\left(\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_1}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_2}\right)} : \dfrac{\sin\left(\overrightarrow{e_4}, \overrightarrow{e_1}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{e_4}, \overrightarrow{e_2}\right)}$.

(chỉ cần để ý rằng $\sin(-\vec{u}, \vec{v}) = \sin(\pi + (\vec{u}, \vec{v})) = -\sin(\vec{u}, \vec{v})$ và tương tự, $\sin(\vec{u}, -\vec{v}) = -\sin(\vec{u}, \vec{v})$.

Định lí 3. Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D cố định trên đường tròn (O) và điểm M thay đổi trên (O) thì $M(ABCD)$ không đổi. (Khi M trùng với A, B, C hay D thì MA, MB, MC, MD tương ứng được coi là tiếp tuyến của (O) tại A, B, C hay D.)

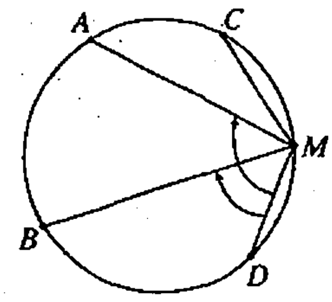
Chứng minh. Khi M thay đổi trên (O), góc nội tiếp $\widehat{AMC}$ chẳng hạn có số đo không đổi hoặc trở thành bù với nó (kể cả khi chẳng hạn MA là tiếp tuyến của (O) tại A) nên $\left|\sin\left(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}\right)\right|$ không đổi. Dùng định lí 2, lập luận đó chứng tỏ $|M(ABCD)|$ không đổi. Vậy chỉ còn cần chứng minh dấu của $\dfrac{\sin\left(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MB}\right)} : \dfrac{\sin\left(\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MA}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MB}\right)}$ (*) không đổi khi M thay đổi trên (O).



Hình 2.54

Không mất tính tổng quát, có thể coi C, D ở cùng phía đối với đường thẳng AB và chứng minh rằng khi đó biểu thức (*) nói trên luôn dương.

Khi $M \in (O)$ khác A, B, C, D thì dễ dàng thấy $\left(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}\right)$, $\left(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MB}\right)$ cùng hướng $\Leftrightarrow A, B$ ở cùng phía đối với đường thẳng MC (h.2.54), $\left(\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MA}\right)$, $\left(\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MB}\right)$ cùng hướng $\Leftrightarrow A, B$ ở cùng phía đối với đường thẳng MD. (h.2.55).

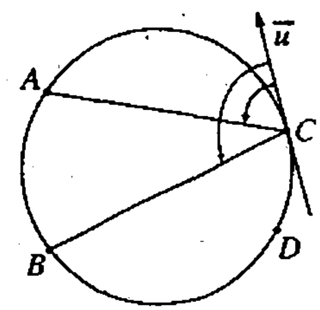


Hình 2.55

Vậy do C, D ở cùng phía đối với đường thẳng AB nên khi M, C (do đó M, D) ở cùng phía đối với đường thẳng AB thì mỗi tỉ số ở biểu thức (*) đều dương còn khi M, C (do đó M, D) ở khác phía đối với đường thẳng AB thì mỗi tỉ số ở biểu thức (*) đều âm. Vậy (*) luôn dương.

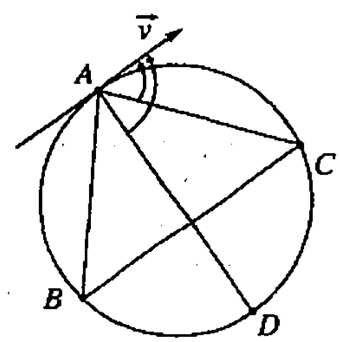
Vì mọi điểm của đường tròn (O) nằm về một phía đối với mỗi tiếp tuyến của nó (trừ tiếp điểm) nên :

• Khi M trùng với C, thay $\overrightarrow{MC}$ bằng một vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của tiếp tuyến của (O) tại C, lập luận trên chứng tỏ các tỉ số $\dfrac{\sin\left(\vec{u}, \overrightarrow{CA}\right)}{\sin\left(\vec{u}, \overrightarrow{CB}\right)}$, $\dfrac{\sin\left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CA}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}\right)}$ đều dương (h.2.56) (lí luận tương tự cho trường hợp M trùng với D) ;



Hình 2.56

• Khi M trùng với A, thay $\overrightarrow{MA}$ bằng một vectơ chỉ phương $\vec{v}$ của tiếp tuyến của (O) tại A thì $\dfrac{\sin\left(\overrightarrow{AC}, \vec{v}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{AD}, \vec{v}\right)}$, $\dfrac{\sin\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}\right)}$ đều dương (h.2.57) (lí luận tương tự cho trường hợp M trùng với B).



Hình 2.57

Vậy trong mọi trường hợp của M trên (O), biểu thức (*) luôn dương.

Chú ý 2. Vì tỉ số kép $M(ABCD)$ không phụ thuộc vào điểm M trên (O) nên nó còn được gọi là *tỉ số kép của bốn điểm phân biệt trên đường tròn* và còn được kí hiệu đơn giản là $(ABCD)$.

• Cũng từ lập luận của chứng minh trên suy ra $(ABCD) < 0$ khi và chỉ khi C, D ở khác phía đối với đường thẳng AB.

Từ công thức $AB = 2R\sin\widehat{AMB}$ cho mọi dây cung AB của đường tròn bán kính R (M là một điểm thuộc đường tròn đó) suy ra tỉ số kép $(ABCD)$ của bốn điểm phân biệt trên đường tròn (O) thoả mãn :

$$|(ABCD)| = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB},$$

$$(ABCD) = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} \text{ khi } C, D \text{ ở cùng phía đối với đường thẳng } AB.$$

$$(ABCD) = -\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} \text{ khi } C, D \text{ ở khác phía đối với đường thẳng } AB.$$

Định lí 4. Nếu các đường thẳng MA, MB, MC, MD theo thứ tự vuông góc với các đường thẳng $M'A', M'B', M'C', M'D'$ thì $M(ABCD) = M'(A'B'C'D')$.

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, giả sử :

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{M'A'}) = (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{M'B'}) = (\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{M'C'}) = (\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{M'D'}) = \frac{\pi}{2}.$$

Từ đó, theo hệ thức Chasles cho góc lượng giác giữa hai vectơ, ta có :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{M'C'}, \overrightarrow{M'A'}) &\equiv (\overrightarrow{M'C'}, \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{M'A'}) \pmod{2\pi}\\ &\equiv -\frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}) + \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}\\ &\equiv (\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}) \pmod{2\pi}.\end{aligned}$$

Suy ra : $\sin(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}) = \sin(\overrightarrow{M'C'}, \overrightarrow{M'A'})$.

Tương tự :

$$\sin(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MB}) = \sin(\overrightarrow{M'C'}, \overrightarrow{M'B'})\,;$$

$$\sin(\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MA}) = \sin(\overrightarrow{M'D'}, \overrightarrow{M'A'})\,;$$

$$\sin(\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MB}) = \sin(\overrightarrow{M'D'}, \overrightarrow{M'B'}).$$

Từ đó, suy ra :

$$\frac{\sin(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA})}{\sin(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MB})} : \frac{\sin(\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MA})}{\sin(\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MB})} = \frac{\sin(\overrightarrow{M'C'}, \overrightarrow{M'A'})}{\sin(\overrightarrow{M'C'}, \overrightarrow{M'B'})} : \frac{\sin(\overrightarrow{M'D'}, \overrightarrow{M'A'})}{\sin(\overrightarrow{M'D'}, \overrightarrow{M'B'})}.$$

Vậy theo định lí 2 : $M(ABCD) = M'(A'B'C'D')$. □

Tứ giác điều hoà

Tứ giác nội tiếp $ABCD$ được gọi là điều hoà nếu tồn tại điểm M thuộc đường tròn ngoại tiếp tứ giác sao cho $M(ACBD) = -1$, cũng tức là $(ABCD) = -1$.

Theo định lí 3, đương nhiên nếu tứ giác $ABCD$ là điều hoà thì $M(ACBD) = -1$ với mọi điểm M thuộc đường tròn ngoại tiếp tứ giác.

Định lí sau đây cho ta một cách mô tả đẹp tứ giác điều hoà.

Định lí 5. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi Δ_A, Δ_B, Δ_C, Δ_D theo thứ tự là tiếp tuyến với (O) tại A, B, C, D. Khi đó, các điều kiện sau là tương đương :

a) Tứ giác $ABCD$ điều hoà.

b) $AB.CD = AD.CB$.

c) Δ_A, Δ_C, BD hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.

d) Δ_B, Δ_D, AC hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.

Chứng minh. ($a \Leftrightarrow b$) Lấy M bất kì trên (O). Ta thấy : $ABCD$ điều hoà

$\Leftrightarrow M(ACBD) = -1$ (theo định nghĩa tứ giác điều hoà)

$$\Leftrightarrow \frac{\sin(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA})}{\sin(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC})} : \frac{\sin(\overrightarrow{MD},\overrightarrow{MA})}{\sin(\overrightarrow{MD},\overrightarrow{MC})} = -1 \text{ (theo định lí 2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{BA}{BC} = \frac{DA}{DC} \text{ (theo định lí hàm số sin)}$$

$\Leftrightarrow AB.CD = AD.CB$.

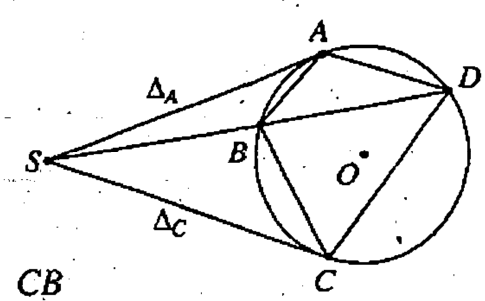
($c \Rightarrow b$) Có hai trường hợp cần xem xét.

Trường hợp 1. Δ_A, Δ_C, BD đồng quy (h. 2.58).

Gọi S là điểm đồng quy của Δ_A, Δ_C, BD.

Dễ thấy : $\Delta SAB \backsim \Delta SDA$; $\Delta SCB \backsim \Delta SDC$

Suy ra : $\dfrac{AB}{DA} = \dfrac{SA}{SD}; \dfrac{CB}{DC} = \dfrac{SC}{SD}$.



Hình 2.58

Từ đó, với chú ý rằng $SA = SC$, ta có : $\dfrac{AB}{DA} = \dfrac{CB}{DC}$.

Do đó : $AB.CD = AD.CB$.

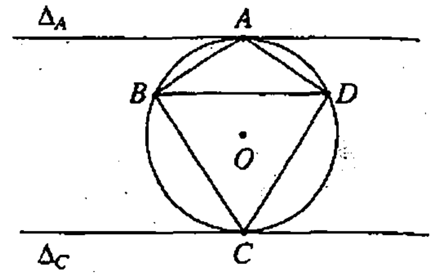
Trường hợp 2. Δ_A, Δ_C, BD đôi một song song (h.2.59).

Dễ thấy $AB = AD$, $CD = CB$.

Do đó $AB.CD = AD.CB$.

($b \Rightarrow c$) Vì $AB.CD = AD.CB$ nên

$$\frac{AB}{CB} = \frac{AD}{CD}. \qquad (1)$$



Hình 2.59

Nếu B, D cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ AC thì $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra các tam giác ABC, ADC đồng dạng.

Do đó $\widehat{BAC} = \widehat{DAC}$.

Điều đó có nghĩa là các tia AB, AD trùng nhau. Suy ra các điểm B, D trùng nhau. Mâu thuẫn!

Vậy B, D thuộc các nửa mặt phẳng khác nhau bờ AC.

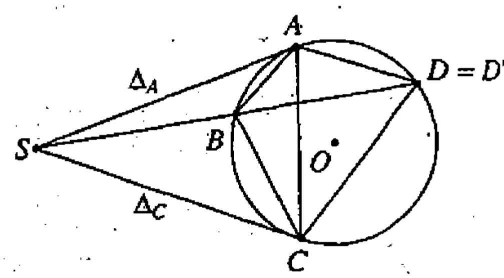
Có hai trường hợp cần xem xét.

Trường hợp 1. Δ_A, Δ_C cắt nhau (h.2.60).

Gọi S là giao điểm của Δ_A và Δ_C.

Gọi D' là giao điểm của tia SB và cung $\overset{\frown}{AC}$ (chứa D) của đường tròn (O).

Đương nhiên Δ_A, Δ_C, BD' đồng quy (tại S). Do đó, theo ($c \Rightarrow b$), ta có :



Hình 2.60

$$AB.CD' = AD'.CB.$$

Mặt khác, theo b), $AB.CD = AD.CB$.

Suy ra : $$\frac{CD'}{CD} = \frac{AD'}{AD}.$$

Mặt khác, vì D' và D cùng thuộc cung $\overset{\frown}{AC}$ (không chứa B) nên $\widehat{AD'C} = \widehat{ADC}$.

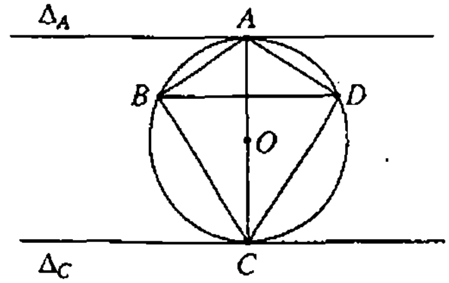
Do đó các tam giác $AD'C$, ADC đồng dạng.

Từ đó, tương tự như trên, ta có D' trùng D. Vậy S, B, D thẳng hàng.

Nói cách khác, Δ_A, Δ_C, BD đồng quy.

Trường hợp 2. Δ_A, Δ_C song song (h.2.61).

Dễ thấy AC là đường kính của (O). Do đó, $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$ $(= 90°)$. Từ đó, với chú ý rằng $\frac{AB}{CB} = \frac{AD}{CD}$, ta có các tam giác ABC, ADC đồng dạng. Suy ra $\Delta ABC = \Delta ADC$. Vậy $AB = AD$. Từ đó, dễ dàng suy ra $BD \parallel \Delta_A \parallel \Delta_C$.



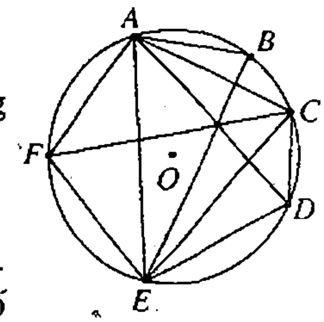
Hình 2.61

Hoàn toàn tương tự, ta chứng minh được $(d \Rightarrow b)$ và $(b \Rightarrow d)$.

Tóm lại, định lí 5 đã được chứng minh. □

4. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho lục giác $ABCDEF$ nội tiếp. Chứng minh rằng AD, BE, CF đồng quy khi và chỉ khi $\frac{AB.CD.EF}{BC.DE.FA} = 1$.



Hình 2.62

Giải. (h.2.62) Xét tam giác AEC và các điểm D, B, F. Theo định lí Ceva dạng lượng giác và theo định lí hàm số sin, ta có :

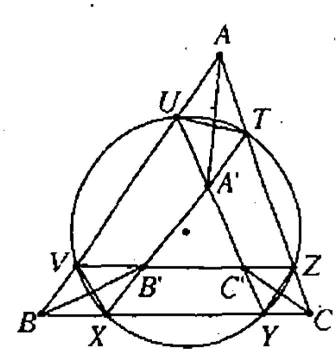
$$AD, EB, CF \text{ đồng quy} \Leftrightarrow \frac{\sin\widehat{DAE}}{\sin\widehat{DAC}}.\frac{\sin\widehat{BEC}}{\sin\widehat{BEA}}.\frac{\sin\widehat{FCA}}{\sin\widehat{FCE}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{DE}{DC}.\frac{BC}{BA}.\frac{FA}{FC} = 1 \Leftrightarrow AB.CD.EF = BC.DE.FA. \ \square$$

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC. Đường tròn (O) cắt cạnh BC tại X, Y; cắt cạnh CA tại Z, T; cắt cạnh AB tại U, V sao cho $XYZTUV$ là các đỉnh của một lục giác lồi. $XT \cap YU = A'$; $ZV \cap TX = B'$; $UY \cap VZ = C'$. Chứng minh rằng AA', BB', CC' đồng quy.

Giải (h.2.63). Áp dụng định lí Ceva dạng lượng giác lần lượt cho các tam giác AUT, BXV, CZY với các sự đồng quy tương ứng là AA', UA', TA'; BB', XB', VB'; CC', ZC', YC', ta có :

$$\begin{cases} \frac{\sin\widehat{A'AU}}{\sin\widehat{A'AT}}.\frac{\sin\widehat{A'UT}}{\sin\widehat{A'UA}}.\frac{\sin\widehat{A'TA}}{\sin\widehat{A'TU}} = 1 \\ \frac{\sin\widehat{B'BX}}{\sin\widehat{B'BV}}.\frac{\sin\widehat{B'XV}}{\sin\widehat{B'XB}}.\frac{\sin\widehat{B'VB}}{\sin\widehat{B'VX}} = 1 \\ \frac{\sin\widehat{C'CZ}}{\sin\widehat{C'CY}}.\frac{\sin\widehat{C'ZY}}{\sin\widehat{C'ZC}}.\frac{\sin\widehat{C'YC}}{\sin\widehat{C'YZ}} = 1. \end{cases} \quad (1)$$



Hình 2.63

Mặt khác, ta có :

$$\begin{cases}\widehat{A'UT}+\widehat{B'XB}=\pi\ ;\ \widehat{A'TA}+\widehat{B'VX}=\pi\\ \widehat{B'XV}+\widehat{C'ZC}=\pi\ ;\ \widehat{B'VB}+\widehat{C'YZ}=\pi\\ \widehat{C'ZY}+\widehat{A'UA}=\pi\ ;\ \widehat{C'YC}+\widehat{A'TU}=\pi.\end{cases}\qquad (2)$$

Nhân vế với vế của ba đẳng thức trong (1), chú ý tới (2) và để ý rằng sin của hai góc bù nhau thì bằng nhau, suy ra :

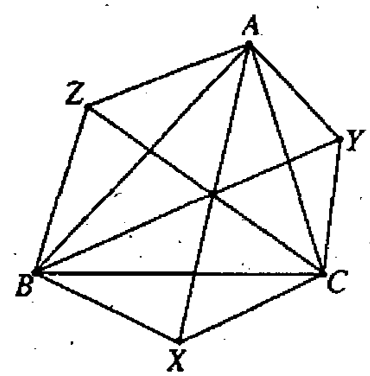
$$\frac{\sin\widehat{A'AU}}{\sin\widehat{A'AT}}\cdot\frac{\sin\widehat{B'BX}}{\sin\widehat{B'BV}}\cdot\frac{\sin\widehat{C'CZ}}{\sin\widehat{C'CY}}=1.$$

Vậy theo định lí Ceva dạng lượng giác, với chú ý rằng AA', BB', CC' không thể đôi một song song, ta có : AA', BB', CC' đồng quy. □

Ví dụ 3. Về phía ngoài tam giác ABC, ta dựng các tam giác XBC, YCA, ZAB theo thứ tự cân tại X, Y, Z và $\widehat{BXC}=\widehat{CYA}=\widehat{AZB}$. Chứng minh rằng AX, BY, CZ đồng quy.

Giải (h.2.64). Áp dụng định lí Ceva dạng lượng giác cho tam giác ABC với các sự đồng quy AX, BX, CX ; BY, CY, AY và CZ, AZ, BZ, ta có :

$$\begin{cases}\dfrac{\sin\widehat{XAB}}{\sin\widehat{XAC}}\cdot\dfrac{\sin\widehat{XBC}}{\sin\widehat{XBA}}\cdot\dfrac{\sin\widehat{XCA}}{\sin\widehat{XCB}}=1\\ \dfrac{\sin\widehat{YBC}}{\sin\widehat{YBA}}\cdot\dfrac{\sin\widehat{YCA}}{\sin\widehat{YCB}}\cdot\dfrac{\sin\widehat{YAB}}{\sin\widehat{YAC}}=1\\ \dfrac{\sin\widehat{ZCA}}{\sin\widehat{ZCB}}\cdot\dfrac{\sin\widehat{ZAB}}{\sin\widehat{ZAC}}\cdot\dfrac{\sin\widehat{ZBC}}{\sin\widehat{ZBA}}=1.\end{cases}$$



Hình 2.64

Mặt khác, vì $\widehat{BXC}=\widehat{CYA}=\widehat{AZB}$ nên :

$\widehat{XBC}=\widehat{XCB}=\widehat{YCA}=\widehat{YAC}=\widehat{ZAB}=\widehat{ZBA}=\alpha.$

Suy ra :

$$\begin{cases}\dfrac{\sin\widehat{XAB}}{\sin\widehat{XAC}}\cdot\dfrac{\sin\alpha}{\sin(B+\alpha)}\cdot\dfrac{\sin(C+\alpha)}{\sin\alpha}=1\\ \dfrac{\sin\widehat{YBC}}{\sin\widehat{YBA}}\cdot\dfrac{\sin\alpha}{\sin(C+\alpha)}\cdot\dfrac{\sin(A+\alpha)}{\sin\alpha}=1\\ \dfrac{\sin\widehat{ZCA}}{\sin\widehat{ZCB}}\cdot\dfrac{\sin\alpha}{\sin(A+\alpha)}\cdot\dfrac{\sin(B+\alpha)}{\sin\alpha}=1.\end{cases}$$

Do đó :

$$\frac{\sin\widehat{XAB}}{\sin\widehat{XAC}}.\frac{\sin\widehat{YBC}}{\sin\widehat{YBA}}.\frac{\sin\widehat{ZCA}}{\sin\widehat{ZCB}} = 1.$$

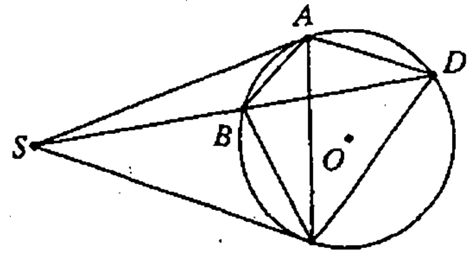
Vậy, theo định lí Ceva dạng lượng giác, ta có : AX, BY, CZ đồng quy. □

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại A_1, B_1, C_1. Điểm M nằm trong (I). Các đường thẳng A_1M, B_1M, C_1M theo thứ tự cắt lại (I) tại A_2, B_2, C_2. Chứng minh rằng AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy.

Giải. Trước hết, xin giới thiệu và chứng minh một bổ đề.

Bổ đề. Cho tứ giác điều hoà $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O), BD và các tiếp tuyến với (O) tại A, C đồng quy tại S. Ta có :

$$\frac{\sin\widehat{ASB}}{\sin\widehat{CSB}} = \frac{AB^2}{CB^2} = \frac{AD^2}{CD^2} = \frac{AB.AD}{CB.CD}.$$



Hình 2.65

Chứng minh bổ đề. (h.2.65).

Dễ thấy : $\widehat{SAB} = \widehat{ADB}$, $\widehat{SCB} = \widehat{CDB}$.

Suy ra : $\dfrac{\sin\widehat{ASB}}{\sin\widehat{CSB}} = \dfrac{\sin\widehat{ASB}}{\sin\widehat{SAB}}.\dfrac{\sin\widehat{ADB}}{\sin\widehat{CDB}}.\dfrac{\sin\widehat{SCB}}{\sin\widehat{CSB}}.$

Từ đó, theo định lí hàm số sin và theo định lí 5, ta có :

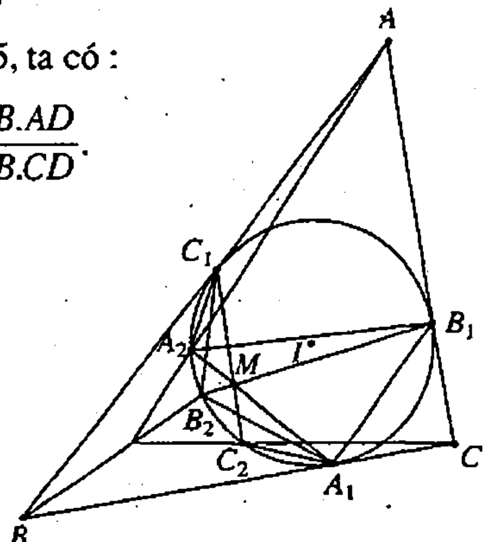
$$\frac{\sin\widehat{ASB}}{\sin\widehat{CSB}} = \frac{AB}{SB}.\frac{AB}{CB}.\frac{SB}{CB} = \frac{AB^2}{CB^2} = \frac{AD^2}{CD^2} = \frac{AB.AD}{CB.CD}.$$

Trở lại VD 4 (h.2.66).

Theo bổ đề, ta có :

$$\frac{\sin\widehat{A_2AB}}{\sin\widehat{A_2AC}}.\frac{\sin\widehat{B_2BC}}{\sin\widehat{B_2BA}}.\frac{\sin\widehat{C_2CA}}{\sin\widehat{C_2CB}}$$

$$= \frac{A_2C_1^{\ 2}}{A_2B_1^{\ 2}}.\frac{B_2A_1^{\ 2}}{B_2C_1^{\ 2}}.\frac{C_2B_1^{\ 2}}{C_2A_1^{\ 2}}.$$



Hình 2.66

Mặt khác, dễ thấy các tam giác MB_1C_2, MC_1A_2, MA_1B_2 theo thứ tự đồng dạng với các tam giác MC_1B_2, MA_1C_2, MB_1A_2.

Do đó :

$$\frac{C_2B_1}{B_2C_1} = \frac{MB_1}{MC_1};\ \frac{A_2C_1}{C_2A_1} = \frac{MC_1}{MA_1};\ \frac{B_2A_1}{A_2B_1} = \frac{MA_1}{MB_1}.$$

Suy ra : $$\frac{A_2C_1^{\,2}}{A_2B_1^{\,2}}.\frac{B_2A_1^{\,2}}{B_2C_1^{\,2}}.\frac{C_2B_1^{\,2}}{C_2A_1^{\,2}} = 1.$$

Vậy $$\frac{\sin\widehat{A_2AB}}{\sin\widehat{A_2AC}}.\frac{\sin\widehat{B_2BC}}{\sin\widehat{B_2BA}}.\frac{\sin\widehat{C_2CA}}{\sin\widehat{C_2CB}} = 1.$$

Tóm lại, theo định lí Ceva dạng lượng giác AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy. □

Ví dụ 5. Cho sáu điểm A, B, C, A', B', C' cùng thuộc một đường tròn. $BC' \cap CB' = X$; $CA' \cap AC' = Y$; $AB' \cap BA' = Z$. Chứng minh rằng X, Y, Z thẳng hàng (***Định lí Pascal***).

Chứng minh. Đặt $E = BC' \cap CA'$; $F = AC' \cap BA'$ (h.2.67). Ta có :

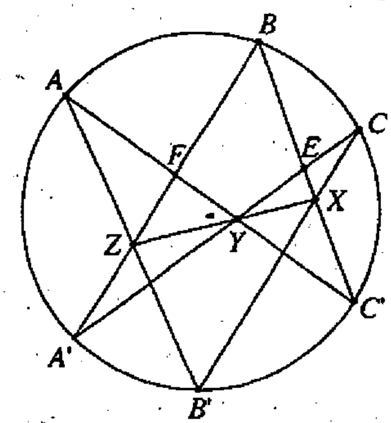
$(BEXC') = C(BA'B'C')$ (xét phép chiếu xuyên tâm C)

$= A(BA'B'C')$ (theo định lí 3)

$= (BA'ZF)$ (xét phép chiếu xuyên tâm A).

Từ đó, theo định lí 12, §3, chương I, EA', XZ, $C'F$ đồng quy.

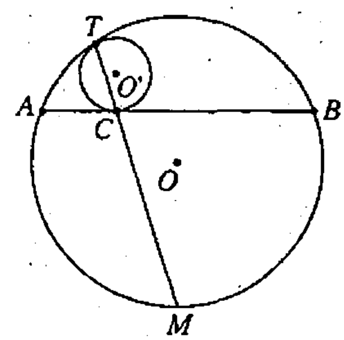
Điều đó có nghĩa là X, Y, Z thẳng hàng. □



Hình 2.67

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (J_a) tiếp xúc trong với (O) và theo thứ tự tiếp xúc với các cạnh AB, AC tại A_b, A_c. Tương tự như vậy, ta xác định các điểm : B_c, B_a; C_a, C_b. Chứng minh rằng A_bA_c, B_cB_a, C_aC_b đồng quy.

Giải. Trước hết, xin phát biểu không chứng minh một bổ đề đơn giản.



Hình 2.68

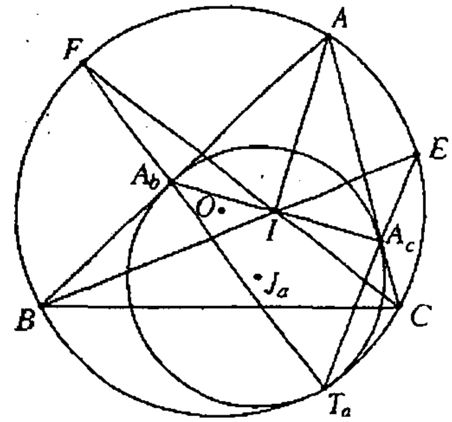
Bổ đề. Nếu đường tròn (O') tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại T và tiếp xúc với dây AB của đường tròn (O) tại C thì TC đi qua trung điểm M của cung $\widehat{AB}$ không chứa T của đường tròn (O) (h.2.68).

Trở lại VD 6 (h.2.69).

Gọi T_a là tiếp điểm của (J_a) với (O).

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Các đường thẳng BI, CI theo thứ tự cắt lại (O) tại E, F. Đương nhiên E, F theo thứ tự là trung điểm của các cung $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{AB}$ không chứa T_a của (O).

Theo bổ đề, T_aE, T_aF theo thứ tự đi qua A_c, A_b.



Hình 2.69

Từ đó, áp dụng định lí Pascal (ví dụ 5) cho sáu điểm F, A, E, C, T_a, B, ta có A_b, A_c, I thẳng hàng.

Vậy A_bA_c đi qua I.

Tương tự như vậy, B_cB_a, C_aC_b cũng đi qua I.

Tóm lại, A_bA_c, B_cB_a, C_aC_b đồng quy (tại I). □

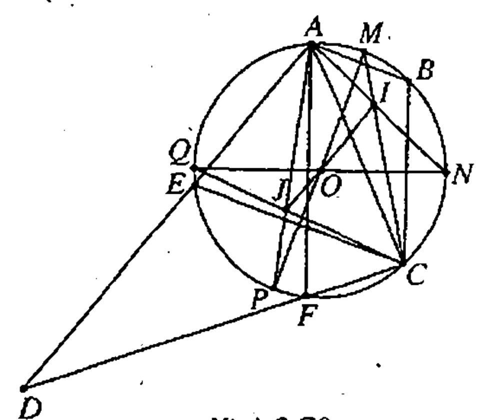
Ví dụ 7. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{DAB} = \widehat{ABC} = \widehat{BCD}$. Gọi I, J theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác ABC, ADC. Chứng minh rằng IJ đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC.

Giải. Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Gọi E, F theo thứ tự là giao điểm thứ hai của AD, CD với (O).

AI, AJ, CI, CJ theo thứ tự cắt lại (O) tại N, P, M, Q (h.2.70).

Vì $\widehat{DAB} = \widehat{ABC} = \widehat{BCD}$ nên dễ dàng suy ra $ABCE$, $ABCF$ là các hình thang cân ($AB \parallel EC$; $BC \parallel AF$). Chú ý rằng M, P, N, Q theo thứ tự là trung điểm của các cung $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{CE}$; $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{FA}$, suy ra : MP, NQ cùng đi qua O.



Hình 2.70

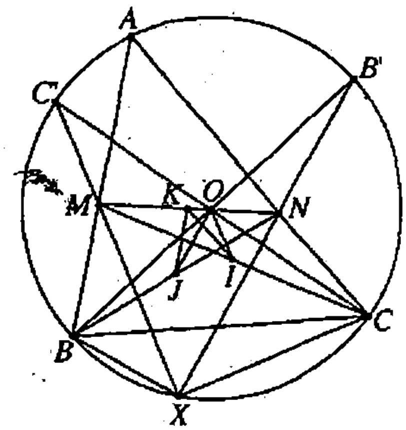
Từ đó, áp dụng định lí Pascal (ví dụ 5) cho sáu điểm A, M, N, C, P, Q, ta có I, O, J thẳng hàng. □

Ví dụ 8. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Các điểm M, N theo thứ tự thuộc AB, AC sao cho MN đi qua O. Gọi I, J, K theo thứ tự là trung điểm của MC, NB, MN. Chứng minh rằng O, I, J, K cùng thuộc một đường tròn.

Giải. Gọi B', C' theo thứ tự là điểm đối xứng của B, C qua O.

Đặt $X = B'N \cap C'M$ (h.2.71).

Áp dụng định lí Pascal cho sáu điểm B', A, C', C, X, B với chú ý rằng M, N, O thẳng hàng, ta có X thuộc (O).



Hình 2.71

Suy ra :

$$\widehat{JOI} = \widehat{B'XC'} \text{ (vì } OJ \,//\, XB';\ OI \,//\, XC')$$

$$= \frac{1}{2}\widehat{B'OC'} = \frac{1}{2}\widehat{BOC} = \widehat{BAC}$$

$$= \widehat{JKI} \text{ (vì } KJ \,//\, AB;\ KI \,//\, AC).$$

Do đó O, I, J, K cùng thuộc một đường tròn. □

Ví dụ 9. Cho tam giác ABC và điểm M. Các điểm A_0, B_0, C_0 theo thứ tự thuộc các đường thẳng BC, CA, AB sao cho các góc $\widehat{AMA_0}$, $\widehat{BMB_0}$, $\widehat{CMC_0}$ đều vuông. Chứng minh rằng A_0, B_0, C_0 thẳng hàng.

Giải. (h.2.72).

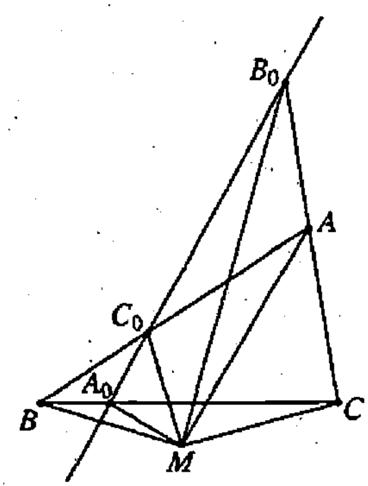
Ta có : $M(AA_0B_0C_0) = M(A_0ABC)$ (vì MA, MA_0, MB_0, MC_0 tương ứng vuông góc với MA_0, MA, MB, MC)

$= A(A_0MBC)$ (vì A_0, B, C thẳng hàng)

$= A(MA_0CB)$ (theo tính chất của tỉ số kép)

$= A(MA_0B_0C_0)$ (vì AC, AB trùng với AB_0, AC_0).

Từ đó, theo định lí 13, §3, chương I, A_0, B_0, C_0 thẳng hàng. □



Hình 2.72

Ví dụ 10. Cho tam giác ABC và điểm M. Các đường thẳng AM, BM, CM theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại D, E, F. Lấy X thuộc BC sao cho $\widehat{AMX} = 90°$. Y, Z theo thứ tự là điểm đối xứng của M qua DE, DF. Chứng minh rằng X, Y, Z thẳng hàng.

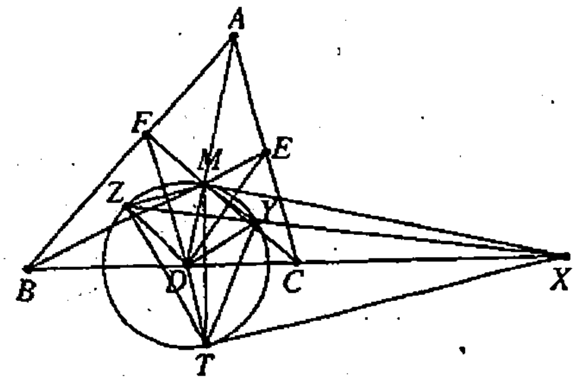
Giải: Gọi T là điểm đối xứng của M qua BC (h.2.73).

Ta có $DY = DZ = DT$ (cùng bằng DM).

Do đó Y, Z, T, M cùng thuộc một đường tròn tâm D, kí hiệu là (D).

Mặt khác, vì $\widehat{AMX} = 90^\circ$ nên XM tiếp xúc với (D) (tại M).

Từ đó, với chú ý rằng T và M đối xứng với nhau qua XD, ta có XT tiếp xúc với (D) (tại T).



Hình 2.73

Theo giả thiết và theo cách dựng điểm T, MX, MT, MY, MZ theo thứ tự vuông góc với DM, DX, DE, DF.

Từ đó, với chú ý $D(MXEF) = -1$, ta có : $M(XTYZ) = -1$.

Suy ra: $M(MTYZ) = -1$.

Điều đó có nghĩa là tứ giác $MYTZ$ điều hoà.

Vậy, theo định lí 5, X, Y, Z thẳng hàng. □

Ví dụ 11. Cho tam giác ABC và điểm M. Các đường thẳng AM, BM, CM theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1. Gọi A_2, B_2, C_2 theo thứ tự là điểm đối xứng của M qua B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1. Chứng minh rằng AA_2, BB_2, CC_2 hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.

Giải. Lấy các điểm A_3, B_3, C_3 theo thứ tự thuộc BC, CA, AB sao cho

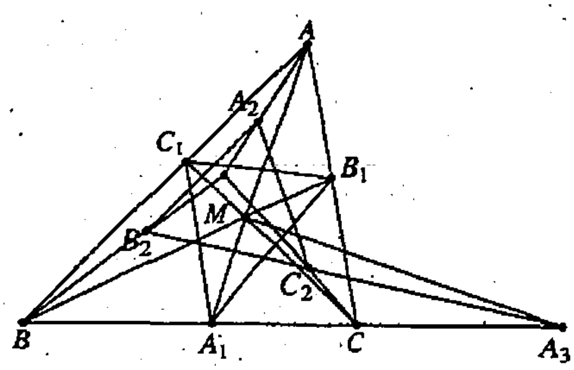
$\widehat{AMA_3} = \widehat{BMB_3} = \widehat{CMC_3} = 90^\circ$ (h.2.74).

Theo VD 10, $BC \cap B_2C_2 = A_3$;

$CA \cap C_2A_2 = B_3$;

$AB \cap A_2B_2 = C_3$.

Theo VD 9, A_3, B_3, C_3 thẳng hàng.



Hình 2.74

Từ đó, áp dụng định lí Desargues cho hai tam giác ABC, $A_2B_2C_2$, ta có : AA_2, BB_2, CC_2 hoặc đồng quy hoặc đôi một song song. □

Ví dụ 12. Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là tiếp điểm của (I) với AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng AC, BD, MP, NQ đồng quy.

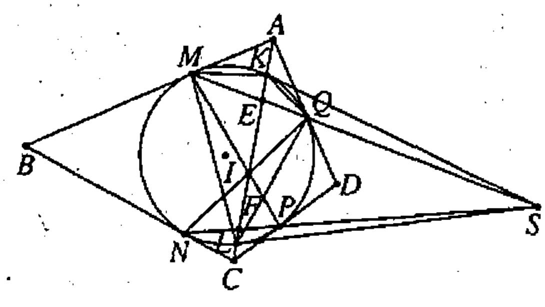
Giải. Có hai trường hợp cần xem xét.

Trường hợp 1 : Hoặc AC hoặc BD đi qua I.

Dễ thấy AC, BD, MP, NQ đồng quy.

Trường hợp 2 : AC và BD không đi qua I.

Gọi K, L là giao điểm của đoạn AC và (I) $(AK < AL < AC)$. Vì AC không đi qua I nên KL không đi qua I. Do đó, các tiếp tuyến với (I) tại K, L cắt nhau, gọi S là giao điểm của chúng (h.2.75).



Hình 2.75

Theo định lí 5, tứ giác $MKQL$ điều hoà.

Suy ra, cũng theo định lí 5, MQ đi qua S.

Tương tự, NP đi qua S.

Đặt $E = MQ \cap AC$; $F = NP \cap AC$.

Theo định lí 9, §3, chương I, ta có : $(SEMQ) = -1 = (SFPN)$.

Từ đó, theo định lí Pappus, EF, MP, QN đồng quy.

Điều đó có nghĩa là AC, MP, NQ đồng quy (1).

Tương tự, BD, MP, NQ đồng quy (2).

Từ (1) và (2) suy ra AC, BD, MP, NQ đồng quy.

Nhận xét. $A(SCBD) = A(SEMQ) = -1 = C(SFNP) = C(SABD)$.

Từ đó, theo định lí 13, §3, chương I, ta có B, D, S thẳng hàng. □

Ví dụ 13. Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi M, N theo thứ tự là tiếp điểm của (I) với DA, BC. MB, ND theo thứ tự cắt lại (I) tại E, F. Chứng minh rằng BD, MN, EF đồng quy.

Giải.

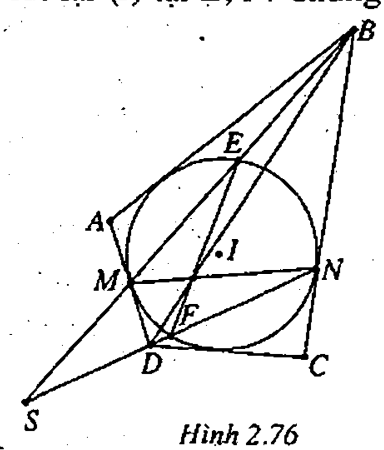
Cách 1. (h.2.76).

Ta bỏ qua trường hợp đơn giản : $BM \parallel DN$.

Đặt $S = BM \cap DN$.

Theo định lí 3 và theo tính chất của tỉ số kép, ta có :

$$(SMEB) = N(SMEB) = N(FMEN) = M(FMEN)$$
$$= M(ENFM) = M(SNFD) = (SNFD).$$



Hình 2.76

Từ đó, theo định lí 12, §3, chương I, BD, MN, EF đồng quy.

Cách 2. (h.2.77)

Gọi P, Q theo thứ tự là tiếp điểm của (I) với AB, CD.

Theo VD 12, AC, BD, MN, PQ đồng quy. (1)

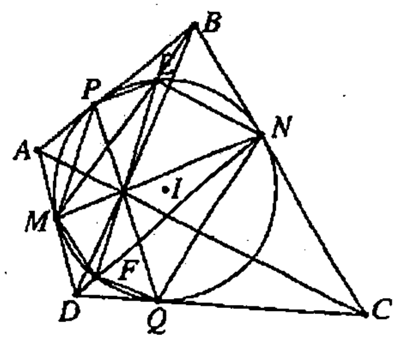
Mặt khác, theo định lí 5, các tứ giác $MPEN$, $NQFM$ điều hoà.

Do đó :

$$\frac{MP}{EP} = \frac{MN}{EN}; \frac{QF}{QN} = \frac{MF}{MN}.$$

Suy ra :

$$\frac{MP.EN.QF}{PE.NQ.FM} = \frac{MP}{EP}.\frac{QF}{QN}.\frac{EN}{FM} = \frac{MN}{EN}.\frac{MF}{MN}.\frac{EN}{FM} = 1.$$



Hình 2.77

Từ đó, theo VD 1, MN, PQ, EF đồng quy. (2)

Từ (1) và (2) suy ra BD, MN, EF đồng quy. □

Ví dụ 14. Cho tam giác ABC. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC tại D. AD cắt lại (I) tại X; BX, CX theo thứ tự cắt lại (I) tại Y, Z. Chứng minh rằng AX, BZ, CY đồng quy.

Giải. Ta bỏ qua trường hợp đơn giản : $AB = AC$.

Đặt $S = BC \cap EF$ (h.2.78).

Theo định lí 5, đương nhiên, $XEDF$ là tứ giác điều hoà.

Từ đó, lại theo định lí 5, SX tiếp xúc với (I). (1)

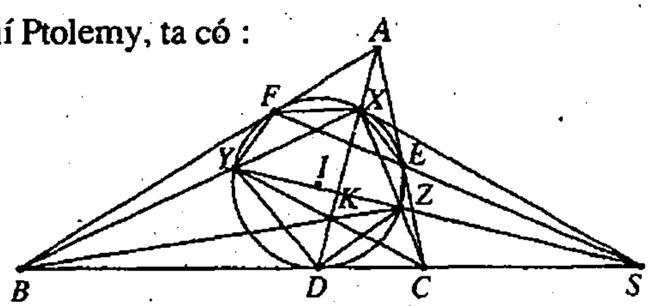
Mặt khác, theo định lí 5, các tứ giác $DYFX$, $DZEX$ điều hoà.

Từ đó, theo định lí 5 và theo định lí Ptolemy, ta có :

$$DY.FX = DX.FY = \frac{1}{2}DF.XY \ ;$$

$$DZ.EX = DX.EZ = \frac{1}{2}DE.XZ.$$

Suy ra : $\dfrac{DY}{DZ}.\dfrac{FX}{EX} = \dfrac{DF}{DE}.\dfrac{XY}{XZ}.$



Hình 2.78

Từ đó, với chú ý rằng $DFXE$ là tứ giác điều hoà, ta có : $\dfrac{DY}{DZ} = \dfrac{XY}{XZ}$.

Do đó, theo định lí 5, $DYXZ$ là tứ giác điều hoà. (2)

Từ (1) và (2) suy ra S, Y, Z thẳng hàng. (3)

Đặt $K = BZ \cap CY$. Từ (3), theo định lí 8, §3, chương I, $X(KSBC) = -1$.

Mặt khác, theo định lí Ceva, dễ thấy AD, BE, CF đồng quy. (4)

Từ (4), theo định lí 8, §3, chương I, $X(DSBC) = -1$ (5)

Từ (3) và (5) suy ra : $X(KSBC) = X(DSBC)$.

Do đó XK trùng XD.

Nói cách khác, AX, BZ, CY đồng quy. □

Nhận xét. Kết quả "$DYXZ$ là tứ giác điều hoà" có thể được chứng minh như sau :

$$(BCDS) = -1 \Rightarrow X(BCDS) = -1 \Rightarrow X(YZDX) = -1 \Rightarrow DYXZ \text{ điều hoà.}$$

Ví dụ 15. Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$. Đặt $E = AC \cap BD$; $F = AD \cap BC$. M là trung điểm của CD. EF cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác MAB tại N (M, N thuộc hai nửa mặt phẳng khác nhau bờ AB).

Chứng minh rằng $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{NA}{NB}$.

Giải. Gọi (O') là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM.

Đặt $J = EF \cap AB$; $I = EF \cap CD$; $K = AB \cap CD$ (h.2.79).

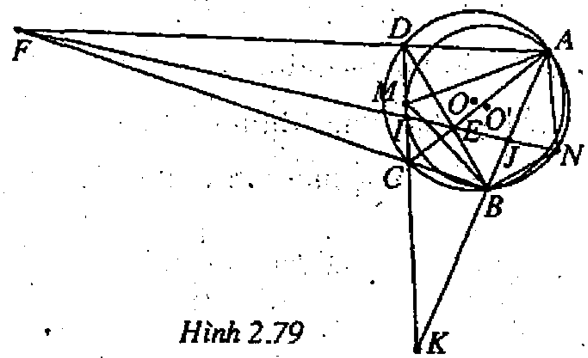
Theo định lí 8, §3, chương I, $(KJAB) = -1 \Rightarrow (KIDC) = -1$ (xét phép chiếu xuyên tâm F).

Từ đó, với chú ý rằng M là trung điểm của CD, theo hệ thức Maclaurin :

$$\overline{KM}.\overline{KI} = \overline{KC}.\overline{KD}. \quad (1)$$

Mặt khác, theo định lí 2. §5 :

$$\overline{KC}.\overline{KD} = \overline{KA}.\overline{KB}. \quad (2)$$



Hình 2.79

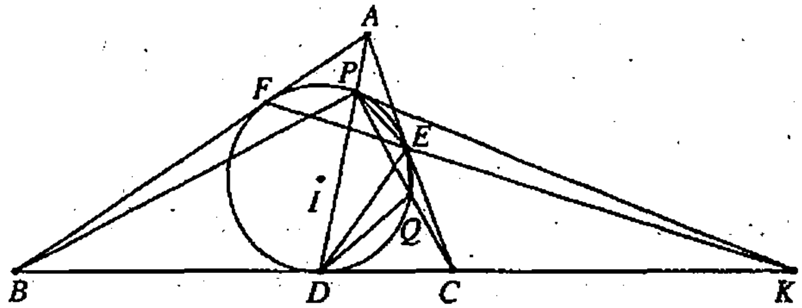
Từ (1) và (2) suy ra : I thuộc (O').

Từ đó, với chú ý rằng $I(MNAB) = I(KJAB) = -1$, suy ra $AMBN$ là tứ giác điều hoà. Do đó, theo định lí 5, $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{NA}{NB}$. □

Ví dụ 16. Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC theo thứ tự tiếp xúc với BC, CA tại D, E. AD cắt lại (I) tại P. Giả sử $\widehat{BPC} = 90°$. Chứng minh rằng

$$EA + AP = PD.$$

Giải. Ta bỏ qua trường hợp đơn giản : $AB = AC$.



Hình 2.80

Đặt $K = BC \cap EF$; $Q = PC \cap (I)$ $(Q \neq P)$ (h.2.80).

Tương tự như VD 14, $(BCDK) = -1 \Rightarrow P(BQDK) = -1$.

Từ đó, với chú ý rằng $\widehat{BPC} = 90^o$, theo định lí 16, §3, chương I, ta có :

$$\widehat{QPK} = \widehat{QPD} \Rightarrow \widehat{QDP} = \widehat{QPD} \Rightarrow QP = QD. \qquad (1)$$

Mặt khác, theo định lí 5, tứ giác $PDQE$ điều hoà.

Từ đó, theo định lí Ptolemy, ta có :

$$2PE.DQ = DE.PQ. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $2PE = DE$.

Từ đó, với chú ý rằng các tam giác AEP, ADE đồng dạng, ta có :

$$2AE = AD\,;\, 2AP = AE.$$

Suy ra : $EA + AP = 2AP + AP = 4AP - AP = AD - AP = PD$. □

BÀI TẬP

72. Cho tam giác ABC. Đường tròn (O) cắt cạnh BC tại X, Y ; cắt cạnh CA tại Z, T ; cắt cạnh AB tại U, V sao cho $XYZTUV$ là các đỉnh của một lục giác lồi. Đặt $XZ \cap YV = A'$; $ZU \cap TY = B'$; $UX \cap VT = C'$. Chứng minh rằng AA', BB', CC' đồng quy.

73. Về phía ngoài tam giác ABC, ta dựng các tam giác đồng dạng XBC, AYC, ABZ. Chứng minh rằng AX, BY, CZ đồng quy.

74. Cho lục giác $ABCDEF$ ngoại tiếp. Chứng minh rằng AD, BE, CF đồng quy (***Định lí Brianchon***).

75. Chứng minh rằng ABC là tam giác cân nếu điều kiện sau được thoả mãn :

$$\cos\widehat{BA'C'}.\cos\widehat{CB'A'}.\cos\widehat{AC'B'} = \cos\widehat{CA'B'}.\cos\widehat{AB'C'}.\cos\widehat{BC'A'}$$

trong đó, AA', BB', CC' là các đường phân giác của tam giác ABC.

76. Cho hai tam giác ABC, DEF cùng nội tiếp một đường tròn sao cho phần giao của chúng là một lục giác mà ta kí hiệu là $MNPQRS$. Chứng minh rằng MQ, NR, PS đồng quy.

77. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường thẳng Δ đi qua O, theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1. Chứng minh rằng các đường tròn đường kính AA_1, BB_1, CC_1 có hai điểm chung và một trong hai điểm chung đó thuộc (O).

78. Cho tam giác ABC. Điểm O thuộc đoạn BC. Các điểm M, N theo thứ tự thuộc các tia AB, AC sao cho $\widehat{AMC} = \frac{1}{2}\widehat{AOC}$; $\widehat{ANB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN. Chứng minh rằng $OI \perp BC$.

79. Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I). Δ_1, Δ_2 là hai tiếp tuyến phân biệt của (I). Gọi A_1, B_1, C_1, D_1 theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của A, B, C, D trên Δ_1 ; A_2, B_2, C_2, D_2 theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của A, B, C, D trên Δ_2. Chứng minh rằng :

$$\frac{\overline{AA_1}.\overline{CC_1}}{\overline{BB_1}.\overline{DD_1}} = \frac{\overline{AA_2}.\overline{CC_2}}{\overline{BB_2}.\overline{DD_2}}.$$

80. Cho đường tròn (O) và đường thẳng Δ cắt (O) tại X, Y. Các điểm A, B, C thuộc Δ, khác X, Y và $\overline{BA}.\overline{BC} \neq \overline{BX}.\overline{BY}$. Điểm M chạy trên (O). AM cắt lại (O) tại N; BN cắt lại (O) tại P; CP cắt lại (O) tại Q. Chứng minh rằng MQ luôn đi qua một điểm cố định.

81. Cho tam giác ABC không vuông có trực tâm H. Điểm M thuộc đường thẳng BC và khác B, C. Đường thẳng qua H, vuông góc với HM theo thứ tự cắt AB, AC tại P, Q. Chứng minh rằng $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \dfrac{\overline{HP}}{\overline{HQ}}$.

82. Cho tam giác ABC không vuông có trực tâm H. Các đường thẳng Δ_1, Δ_2 cùng đi qua H và vuông góc với nhau. Δ_1 theo thứ tự cắt AC, AB tại B_1, C_1 ; Δ_2 theo thứ tự cắt AC, AB tại B_2, C_2. Chứng minh rằng $\dfrac{\overline{BC_1}}{\overline{BC_2}} = \dfrac{\overline{CB_1}}{\overline{CB_2}}$.

83. Cho tam giác ABC không vuông có trực tâm H. Các đường thẳng Δ_1, Δ_2 cùng đi qua H và vuông góc với nhau. Δ_1 theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1 ;

Δ_2 theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại A_2, B_2, C_2. Chứng minh rằng trung điểm của các đoạn A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 cùng thuộc một đường thẳng.

84. Cho tam giác ABC không cân tại A. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC tại D. Điểm M thuộc đoạn AD. Các đường thẳng MB, MC theo thứ tự cắt lại (I) tại B_1, B_2 ; C_1, C_2 ($BB_1 < BB_2$; $CC_1 < CC_2$). Chứng minh rằng BC, B_1C_1, B_2C_2 đồng quy.

85. Cho tam giác ABC. Đường tròn nội tiếp (I) theo thứ tự tiếp xúc với BC, CA, AB tại D, E, F. AD cắt lại (I) tại X ; BX, CX theo thứ tự cắt lại (I) tại Y, Z ; AY, AZ theo thứ tự cắt lại (I) tại R, S. Chứng minh rằng AD, ES, FR đồng quy.

86. Cho tam giác ABC không cân tại A, nội tiếp đường tròn (O). M là trung điểm của BC. Các điểm N, P thuộc đoạn BC sao cho $MN = MP$. Các đường thẳng AM, AN, AP theo thứ tự cắt lại (O) tại X, Y, Z. Chứng minh rằng BC, YZ và tiếp tuyến với (O) tại X đồng quy.

87. Cho tam giác ABC, đường cao AH, K là trung điểm của AH. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC tại D. DK cắt lại (I) tại T. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác TBC tiếp xúc với (I).

Chương III

PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

§1. PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ CỦA ĐƯỜNG THẲNG

1. Định nghĩa. *Vectơ $\vec{u}$ khác $\vec{0}$ có giá song song hoặc trùng với đường thẳng Δ gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ.*

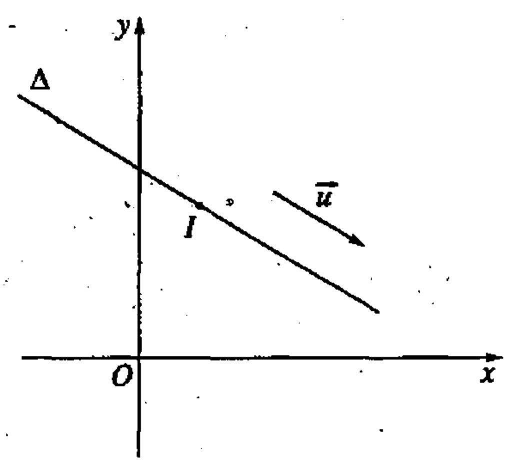
Từ định nghĩa đó ta suy ra :

– Mỗi đường thẳng có nhiều vectơ chỉ phương, chúng cùng phương với nhau.

– Một đường thẳng được xác định khi biết một điểm thuộc nó và một vectơ chỉ phương của nó.

2. Phương trình tham số của đường thẳng

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, xét đường thẳng Δ đi qua điểm $I(x_0 ; y_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(a ; b)$. Khi đó, điều kiện cần và đủ để điểm $M(x ; y)$ nằm trên Δ là vectơ $\overrightarrow{IM}$ cùng phương với vectơ $\vec{u}$, tức là có số $t \in \mathbb{R}$ sao cho $\overrightarrow{IM} = t\vec{u}$ (h.3.1).



Từ đó ta có :

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \quad (a^2 + b^2 \neq 0, t \in \mathbb{R}). \qquad (1)$$

Hình 3.1

Hệ phương trình (1) được gọi là *phương trình tham số* của đường thẳng Δ, với tham số t.

Chú ý :

1) Với mỗi giá trị của tham số t, ta tính được x và y từ công thức (1), và được điểm $M(x\,;\,y)$ nằm trên Δ. Ngược lại, nếu điểm M nằm trên Δ thì phải có một số t sao cho toạ độ của điểm M thoả mãn hệ phương trình (1).

2) Nếu cho trước hệ phương trình dạng (1) thì có duy nhất một đường thẳng nhận hệ đó làm phương trình tham số. Đó chính là đường thẳng đi qua điểm $I(x_0\,;\,y_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(a\,;\,b)$.

3) Nếu trong phương trình (1), các hệ số a và b đều khác 0 thì bằng cách khử t từ hai phương trình của (1), ta đi đến phương trình :

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}. \qquad (2)$$

Phương trình (2) gọi là *phương trình chính tắc* của đường thẳng.

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d đi qua hai điểm $A(1\,;\,2)$ và $B(3\,;\,-4)$.

a) Viết phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng d.

b) Tìm tọa độ điểm M nằm trên d sao cho $OM = 5$.

c) Tìm tọa độ điểm H nằm trên đường thẳng AB sao cho $OH \perp AB$.

Giải

a) Vì $\overrightarrow{AB} = (2\,;\,-6)$ nên $\vec{u}(1\,;\,-3)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng d. Vậy d có phương trình tham số là

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 3t \end{cases}$$

và có phương trình chính tắc là $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-3}$.

b) Điểm M nằm trên d nên có tọa độ $x_M = 1 + t$, $y_M = 2 - 3t$. Vì $OM = 5$ nên $x_M^2 + y_M^2 = 25$ hay $(1+t)^2 + (2-3t)^2 = 25 \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0$.

Vậy $t = -1$ hoặc $t = 2$.

Khi $t = -1$ ta được điểm $M(0\,;\,5)$. Khi $t = 2$ ta được điểm $M(3\,;\,-4)$, đó chính là điểm B.

c) Điểm H nằm trên đường thẳng AB nên có tọa độ : $H = (1 + t\,;\, 2 - 3t)$. Khi đó ta có $\overrightarrow{OH} = (1 + t\,;\, 2 - 3t)$. Vì $OH \perp AB$ nên $\overrightarrow{OH}.\vec{u} = 0$ hay $(1 + t) - 3(2 - 3t) = 0$, suy ra $t = \dfrac{1}{2}$ và do đó $H = \left(\dfrac{3}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$. □

3. Phương trình của tia và đoạn thẳng

• Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm phân biệt $A(x_1\,;\,y_1)$ và $B(x_2\,;\,y_2)$. Khi đó đường thẳng AB đi qua A và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1\,;\, y_2 - y_1)$ nên nó có phương trình tham số :

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

• Bây giờ xét tia AB, tức tia có gốc là A và có chứa điểm B. Hiển nhiên tia đó gồm những điểm M sao cho $\overrightarrow{AM}$ cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{AB}$, tức là $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$ với điều kiện $t \geq 0$. Vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ gọi là *vectơ chỉ hướng* của tia AB. Vậy phương trình của tia AB là

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases} \quad t \in [0, \infty).$$

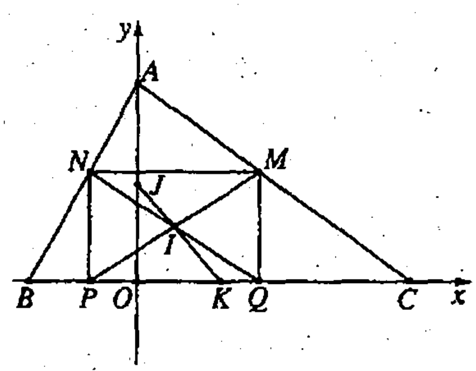
• Đoạn thẳng AB gồm những điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$ với điều kiện $0 \leq t \leq 1$. Vậy phương trình của đoạn thẳng AB là

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases} \quad t \in [0, 1].$$

Ví dụ 2. Cho tam giác nhọn ABC, một hình chữ nhật $PQMN$ thay đổi, có hai đỉnh P, Q nằm trên cạnh BC, đỉnh M và N lần lượt nằm trên hai cạnh AC và AB. Tìm quỹ tích tâm hình chữ nhật đó.

Giải (h.3.2)

Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho Ox là đường thẳng BC, Oy là đường cao đi qua đỉnh A của tam giác ABC.



Hình 3.2

Giả sử $A = (0 ; a)$, $B = (b ; 0)$, $C(c ; 0)$. Các đoạn thẳng AC và AB (không kể các đầu mút) có phương trình lần lượt là

$$\begin{cases} x = ct \\ y = a - at \end{cases} \quad 0 < t < 1 \quad \text{và} \quad \begin{cases} x = bt' \\ y = a - at' \end{cases} \quad 0 < t' < 1.$$

Các điểm M, N lần lượt nằm trên các đoạn thẳng đó nên $M = (ct_0 ; a - at_0)$ và $N = (bt'_0 ; a - at'_0)$, với $0 < t_0 < 1$, $0 < t'_0 < 1$. Vì $MN // Ox$ nên tung độ của M và N bằng nhau, tức là $a - at_0 = a - at'_0$ hay $t_0 = t'_0$ (do $a \neq 0$). Vì vậy $N = (bt_0 ; a - at_0)$.

Vì $NP // Oy$ nên $P(bt_0 ; 0)$. Tâm I của hình chữ nhật $PQMN$ là trung điểm của đoạn thẳng MP nên nếu $I = (x ; y)$ thì

$$\begin{cases} x = \dfrac{b + c}{2} t_0 \\ y = \dfrac{a}{2} - \dfrac{a}{2} t_0 \end{cases} \quad 0 < t_0 < 1.$$

Khi $t_0 = 0$, ta được điểm $J\left(0 ; \dfrac{a}{2}\right)$ là trung điểm của đoạn thẳng AO ; khi $t_0 = 1$, ta được điểm $K\left(\dfrac{b + c}{2} ; 0\right)$ là trung điểm của đoạn thẳng BC.

Trở lại bài toán, ta đi đến kết luận : Quỹ tích tâm hình chữ nhật $PQMN$ là đoạn thẳng nối trung điểm đường cao AO và trung điểm cạnh BC của tam giác ABC (không kể hai đầu mút của đoạn thẳng đó). □

Ví dụ 3. Cho bốn điểm $A(-2 ; 0)$, $B(-1 ; 1)$, $C(2 ; 1)$, $D(1 ; -1)$.

a) Tìm tọa độ giao điểm của hai tia AB và CD nếu có.

b) Tìm tọa độ giao điểm của hai tia CB và DA nếu có.

c) Chứng tỏ rằng $ABCD$ là một tứ giác lồi.

Giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (1 ; 1)$, $\overrightarrow{CD} = (-1 ; -2)$ nên hai tia AB và CD có phương trình lần lượt là :

$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = t \end{cases} \quad t \geq 0 \quad \text{và} \quad \begin{cases} x = 2 - t' \\ y = 1 - 2t' \end{cases} \quad t' \geq 0.$$

Giao điểm của hai tia đó có tọa độ $(x ; y)$ thỏa mãn cả hai hệ phương trình trên nên :

$$\begin{cases} -2 + t = 2 - t' \\ t = 1 - 2t' \end{cases}$$

suy ra $t = 7$; $t' = -3$.

Vì $t' = -3 < 0$ nên không có giao điểm.

b) Ta có $\overrightarrow{CB} = (-3 ; 0)$, $\overrightarrow{DA} = (-3 ; 1)$ nên hai tia CB và DA có phương trình lần lượt là :

$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 \end{cases} \quad t \geq 0 \quad \text{và} \quad \begin{cases} x = 1 - 3t' \\ y = -1 + t' \end{cases} \quad t' \geq 0.$$

Giao điểm của hai tia đó có tọa độ $(x ; y)$ thỏa mãn cả hai hệ phương trình trên nên :

$$\begin{cases} 2 - 3t = 1 - 3t' \\ 1 = -1 + t' \end{cases}$$

suy ra $t = \dfrac{7}{3}$; $t' = 2$.

Vì $t > 0$, $t' > 0$ nên hai tia đó có giao điểm là $M(-5 ; 1)$.

c) $ABCD$ là tứ giác lồi khi và chỉ khi hai đoạn thẳng AC và BD cắt nhau tại một điểm không trùng với một trong bốn điểm A, B, C, D.

Các đoạn thẳng AC và BD lần lượt có phương trình :

$$\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad \text{và} \quad \begin{cases} x = -1 + t' \\ y = 1 - t' \end{cases} \quad 0 \leq t' \leq 1.$$

Giải hệ các phương trình trên, ta được $t = \dfrac{2}{5} \in (0, 1)$ và $t' = \dfrac{3}{5} \in (0, 1)$. Bởi vậy hai đoạn thẳng AC và BD cắt nhau tại điểm $I\left(-\dfrac{2}{5} ; \dfrac{2}{5}\right)$ và do đó $ABCD$ là tứ giác lồi. □

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC với $A(3 ; 1)$, $B(6 ; 4)$, $C(0 ; 5)$.

a) Viết phương trình tham số của tia phân giác trong của góc A.

b) Viết phương trình tham số của đường thẳng chứa phân giác ngoài của góc A.

Giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (3 ; 3)$, $AB = 3\sqrt{2}$, $\overrightarrow{AC} = (-3 : 4)$, $AC = 5$.

Đặt $\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{AB} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ và $\vec{v} = \dfrac{\overrightarrow{AC}}{AC} = \left(-\dfrac{3}{5}; \dfrac{4}{5}\right)$ thì $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là những vectơ đơn vị và lần lượt là các vectơ chỉ hướng của tia AB và tia AC. Tia phân giác trong của góc A là tia có gốc A và có vectơ chỉ hướng là

$$\vec{u} + \vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{5}; \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{4}{5}\right) = \left(\frac{5 - 3\sqrt{2}}{5\sqrt{2}}; \frac{5 + 4\sqrt{2}}{5\sqrt{2}}\right).$$

Vậy nó có phương trình tham số là :

$$\begin{cases} x = 3 + \left(5 - 3\sqrt{2}\right)t \\ y = 1 + \left(5 + 4\sqrt{2}\right)t \end{cases} \quad t \geq 0.$$

b) Đường phân giác ngoài của góc A có vectơ chỉ phương là $\vec{u} - \vec{v}$, bởi vậy nó có phương trình tham số là :

$$\begin{cases} x = 3 + \left(5 + 3\sqrt{2}\right)t \\ y = 1 + \left(5 - 4\sqrt{2}\right)t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}. \square$$

BÀI TẬP

Cho hai điểm phân biệt $A(x_1 ; y_1)$ và $B(x_2 ; y_2)$ trong đó : $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$. Viết phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng trong mỗi trường hợp sau đây :

a) Đường thẳng đi qua hai điểm A và B.

b) Đường thẳng đi qua điểm $M(x_0 ; y_0)$ và song song với AB.

c) Đường thẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng AB.

d) Đường trung trực của đoạn thẳng AB.

Cho hai đường thẳng :

$$\begin{cases} x = x_1 + a_1t \\ y = y_1 + b_1t \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x = x_2 + a_2t \\ y = y_2 + b_2t. \end{cases}$$

Tìm điều kiện cần và đủ để hai đường thẳng đó :

a) cắt nhau ; b) song song ; c) trùng nhau.

3. Cho đường thẳng d có phương trình tham số :

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 + 4t. \end{cases}$$

a) Trong các điểm sau đây, điểm nào nằm trên đường thẳng d : $A(5\,;-5)$, $B(3\,;1)$, $C(-1\,;5)$, $D(3\,;-1)$, $E(103\,;-201)$?

b) Tìm tọa độ các giao điểm của đường thẳng d với các trục tọa độ.

c) Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng d và đường tròn tâm $I(1\,;2)$ bán kính bằng 5.

4. Cho hai đường thẳng d và d' lần lượt có phương trình :

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - t \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x = -2t \\ y = 2 + t. \end{cases}$$

a) Tìm tọa độ giao điểm I của hai đường thẳng đó.

b) Tìm tọa độ điểm $A \in d$ và điểm $B \in d'$ sao cho $AB \,//\, Ox$ và $AB = 4$.

c) Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua $M(1\,;1)$ tạo với d và d' một tam giác cân có đỉnh là I.

5. Cho tam giác ABC với $A(4\,;4)$, $B(-6\,;-1)$, $C(-2\,;-4)$.

a) Viết phương trình tham số và chính tắc của các đường thẳng chứa các cạnh của tam giác.

b) Viết phương trình đường trung tuyến BM của tam giác.

c) Viết phương trình đường phân giác trong của góc C.

6. Cho tứ giác $ABCD$ với $A(-3\,;1)$, $B(4\,;5)$, $C(2\,;0)$, $D(-1\,;0)$.

a) Tứ giác đó có phải là tứ giác lồi ?

b) Tìm tọa độ giao điểm I của hai đường chéo AC và BD.

c) Đường thẳng d : $x - 3 = \dfrac{y-5}{5}$ cắt những cạnh nào của tứ giác $ABCD$? Tìm tọa độ các giao điểm (nếu có).

7. Cho tam giác ABC với $A(1\,;2)$, $B(2\,;-4)$, $C(-1\,;0)$. Trên hai tia AC và BC lần lượt lấy các điểm A', B' thay đổi sao cho $AA' = BB'$. Tìm quỹ tích trung điểm các đoạn thẳng $A'B'$.

§2. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA ĐƯỜNG THẲNG

Định nghĩa

Vectơ $\vec{n}$ khác $\vec{0}$, có giá vuông góc với đường thẳng Δ gọi là vectơ pháp tuyến của đường thẳng Δ.

Từ định nghĩa đó ta suy ra :

– Mỗi đường thẳng có nhiều vectơ pháp tuyến, chúng cùng phương với nhau.

– Vectơ pháp tuyến và vectơ chỉ phương của một đường thẳng luôn luôn vuông góc với nhau.

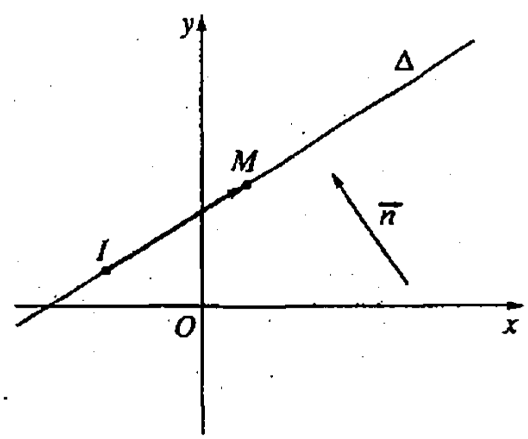
– Một đường thẳng được xác định khi biết một điểm thuộc nó và một vectơ pháp tuyến của nó.

Phương trình tổng quát của đường thẳng

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng Δ đi qua điểm $I(x_0\,;y_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(a\,;b)$ (h.3.3). Khi đó, điều kiện cần và đủ để điểm $M(x\,;y)$ nằm trên đường thẳng Δ là $\overrightarrow{IM} \perp \vec{n}$ hay $\overrightarrow{IM}.\vec{n} = 0$, tức

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0. \qquad (*)$$

Nếu ta đặt $c = -(ax_0 + by_0)$ thì phương trình (*) trở thành :



Hình 3.3

$$ax + by + c = 0, \text{ với } a^2 + b^2 \neq 0. \qquad (1)$$

Phương trình (1) gọi là *phương trình tổng quát của đường thẳng* Δ (với ý nghĩa rằng điểm M nằm trên Δ khi và chỉ khi tọa độ x, y của M thỏa mãn phương trình (1)).

Ta chứng minh điều ngược lại : *Mọi phương trình dạng*

$$ax + by + c = 0 \text{ với } a^2 + b^2 \neq 0 \qquad (1)$$

đều là phương trình tổng quát của một đường thẳng.

Thật vậy, ta hãy lấy cặp số $(x_0 ; y_0)$ là một nghiệm của phương trình (1) và xét đường thẳng d đi qua điểm $I(x_0 ; y_0)$, có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(a ; b)$. Khi đó, phương trình tổng quát của d chính là phương trình (1).

Chú ý : Từ nay, thay cho cách nói : "cho đường thẳng có phương trình $ax + by + c = 0$", ta thường nói gọn : "cho đường thẳng $ax + by + c = 0$".

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC với $A(1 ; 2)$, $B(-2 ; 3)$, $C(0 ; 4)$.

a) Viết phương trình tổng quát và phương trình tham số của đường cao AA' của tam giác ABC.

b) Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC.

Giải

a) Đường cao AA' đi qua điểm $A(1 ; 2)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \overrightarrow{BC} = (2 ; 1)$. Vậy AA' có phương trình tổng quát là :

$$2(x - 1) + 1(y - 2) = 0 \text{ hay } 2x + y - 4 = 0.$$

Vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của AA' phải vuông góc với vectơ pháp tuyến $\vec{n}(2 ; 1)$ nên có thể chọn $\vec{u} = (1;-2)$ và ta có phương trình tham số của AA' là :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t. \end{cases}$$

b) Trực tâm H của tam giác ABC phải nằm trên đường cao AA' nên H có tọa độ là $H(1 + t ; 2 - 2t)$. Mặt khác, ta phải có $BH \perp AC$ hay $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0$. Ta có $\overrightarrow{AC} = (-1 ; 2)$ và $\overrightarrow{BH} = (3 + t ; -1 - 2t)$ nên

$$\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = -(3 + t) + 2(-1 - 2t) = 0,$$

suy ra $t = -1$. Vậy $H = (0 ; 4)$. □

Ví dụ 2. Cho tam giác vuông cân OAB đỉnh O. Tìm quỹ tích những điểm M sao cho :

$$MA^2 + MB^2 = 2OM^2. \qquad (1)$$

Giải

Chọn hệ trục tọa độ sao cho Ox là OA, Oy là OB.

Vì $OA = OB$ nên ta có thể giả sử $A = (1 ; 0)$, $B = (0 ; 1)$. Khi đó ta có :

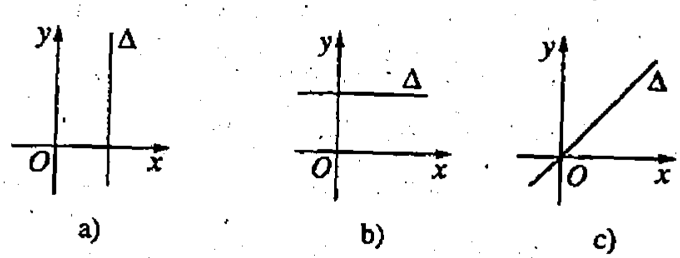
$$(1) \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 + x^2 + (y-1)^2 = 2(x^2 + y^2)$$

$$\Leftrightarrow x + y - 1 = 0 \Leftrightarrow M \text{ thuộc đường thẳng } AB.$$

Vậy quỹ tích các điểm M là đường thẳng AB. □

3. Các dạng đặc biệt của phương trình đường thẳng

- *Đường thẳng $ax + c = 0$ vuông góc với trục Ox* (h. 3.4a)
- *Đường thẳng $by + c = 0$ vuông góc với trục Oy* (h. 3.4b)
- *Đường thẳng $ax + by = 0$ đi qua gốc toạ độ* (h. 3.4c).



Hình 3.4

- *Xét đường thẳng $ax + by + c = 0$ với các hệ số a, b, c đều khác 0.* Khi đó phương trình của nó có thể viết dưới dạng :

$$\frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} = 1 \qquad (1)$$

trong đó $a' = -\frac{c}{a}$, $b' = -\frac{c}{b}$.

Phương trình dạng (1) gọi là *phương trình đường thẳng theo đoạn chắn.*

4. Giao của hai đường thẳng

Trong mặt phẳng toạ độ cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 có phương trình

$$\Delta_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$\Delta_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Điểm M nằm trên cả hai đường thẳng đó khi và chỉ khi tọa độ $(x ;y)$ của nó là nghiệm của hệ gồm hai phương trình trên. Ta suy ra :

a) Hai đường thẳng cắt nhau khi và chỉ khi

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

b) Hai đường thẳng song song khi và chỉ khi

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \text{ và ít nhất một trong hai số } \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} \text{ khác } 0.$$

c) Hai đường thẳng trùng nhau khi và chỉ khi

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} = 0.$$

d) Hai đường thẳng vuông góc với nhau khi và chỉ khi $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$.

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng tọa độ cho ba điểm phân biệt A_1, A_2, A_3 nằm trên trục Ox nhưng khác với O, ba điểm phân biệt B_1, B_2, B_3 nằm trên trục Oy nhưng khác với O. Gọi C_1, C_2, C_3 lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng : A_2B_3 và A_3B_2, A_3B_1 và A_1B_3, A_1B_2 và A_2B_1. Chứng minh rằng ba điểm C_1, C_2, C_3 thẳng hàng.

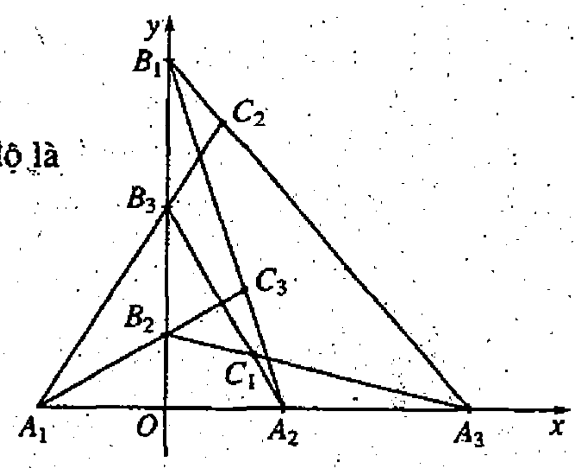
Giải. (h. 3.5)

Ta có thể gọi các điểm đã cho có tọa độ là

$$A_1 = \left(\frac{1}{a_1}; 0\right),\ A_2 = \left(\frac{1}{a_2}; 0\right),$$

$$A_3\left(\frac{1}{a_3}; 0\right),\ B_1\left(0; \frac{1}{b_1}\right),$$

$$B_2\left(0; \frac{1}{b_2}\right),\ B_3\left(0; \frac{1}{b_3}\right).$$



Hình 3.5

Khi đó, theo giả thiết ta có $a_1 \neq a_2 \neq a_3 \neq 0$ và $b_1 \neq b_2 \neq b_3 \neq 0$.

Ta tìm tọa độ giao điểm C_1 của hai đường thẳng A_2B_3 và A_3B_2. Phương trình hai đường thẳng đó (theo đoạn chắn) lần lượt là :

$$a_2x + b_3y = 1 \text{ và } a_3x + b_2y = 1.$$

Giải hệ hai phương trình trên, ta tìm được tọa độ $(x_1 ; y_1)$ của C_1 là :

$$x_1 = \frac{b_2 - b_3}{a_2b_2 - a_3b_3};\ y_1 = \frac{a_2 - a_3}{a_2b_2 - a_3b_3}.$$

Hoàn toàn tương tự, nếu gọi $(x_2\,;y_2)$ là tọa độ của C_2 và $(x_3\,;y_3)$ là tọa độ của C_3 thì :

$$x_2=\frac{b_3-b_1}{a_3b_3-a_1b_1}\,;\ y_2=\frac{a_3-a_1}{a_3b_3-a_1b_1}\,;\ x_3=\frac{b_1-b_2}{a_1b_1-a_2b_2}\,;\ y_3=\frac{a_1-a_2}{a_1b_1-a_2b_2}.$$

Từ đó ta có :

$$\begin{aligned}x_1-x_2&=\frac{b_2-b_3}{a_2b_2-a_3b_3}-\frac{b_3-b_1}{a_3b_3-a_1b_1}\\&=\frac{(b_2-b_3)(a_3b_3-a_1b_1)-(b_3-b_1)(a_2b_2-a_3b_3)}{(a_2b_2-a_3b_3)(a_3b_3-a_1b_1)}\\&=\frac{a_1b_1(b_3-b_2)+a_2b_2(b_1-b_3)+a_3b_3(b_2-b_1)}{(a_2b_2-a_3b_3)(a_3b_3-a_1b_1)}.\end{aligned}$$

Để tìm hiệu số y_1-y_2, ta chỉ cần trong biểu thức của x_1-x_2 ở đâu có a thì thay bằng b và ở đâu có b thì thay bằng a. Ta được :

$$y_1-y_2=\frac{a_1b_1(a_3-a_2)+a_2b_2(a_1-a_3)+a_3b_3(a_2-a_1)}{(a_2b_2-a_3b_3)(a_3b_3-a_1b_1)}.$$

Như vậy ta có $\dfrac{x_1-x_2}{y_1-y_2}=\dfrac{a_1b_1(b_3-b_2)+a_2b_2(b_1-b_3)+a_3b_3(b_2-b_1)}{a_1b_1(a_3-a_2)+a_2b_2(a_1-a_3)+a_3b_3(a_2-a_1)}$. (*)

Tương tự, để tính tỉ số $\dfrac{x_2-x_3}{y_2-y_3}$ thì trong biểu thức (*), ta thay các chỉ số 1, 2, 3 lần lượt bằng các chỉ số 2, 3, 1. Ta được :

$$\frac{x_2-x_3}{y_2-y_3}=\frac{a_2b_2(b_1-b_3)+a_3b_3(b_2-b_1)+a_1b_1(b_3-b_2)}{a_2b_2(a_1-a_3)+a_3b_3(a_2-a_1)+a_1b_1(a_3-a_2)}.\qquad(**)$$

So sánh (*) và (**), ta có :

$$\frac{x_1-x_2}{y_1-y_2}=\frac{x_2-x_3}{y_2-y_3}.$$

Từ đó suy ra ba điểm C_1, C_2, C_3 thẳng hàng. □

Ví dụ 4. Cho hình vuông $ABCD$, I là trung điểm cạnh AB. Một điểm M chạy trên đường thẳng DI. Gọi A' là giao điểm (nếu có) của hai đường thẳng AM và CD, C' là giao điểm (nếu có) của hai đường thẳng CM và AD. Chứng minh rằng đường thẳng $A'C'$ luôn đi qua một điểm cố định.

Giải. Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho trục Ox là DC, trục Oy là DA, $DC = 1$ (h.3.6). Ta có

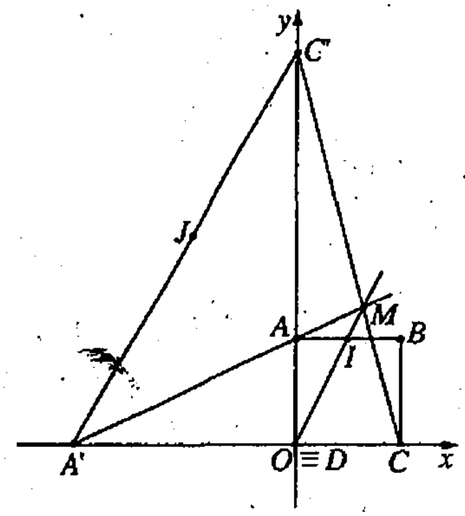
$$D \equiv O(0\,;0),\ C = (1\,;0).$$

$$A(0\,;1), B(1\,;1),\ I = \left(\frac{1}{2}\,;1\right).$$

và đường thẳng DI có phương trình

$$2x - y = 0.$$

Vì M chạy trên đường thẳng DI nên tọa độ của M có dạng $M(a\,;2a)$.



Hình 3.6

Đường thẳng AM có phương trình :
$(1-2a)x + a(y-1) = 0$, nó cắt đường thẳng CD (trục Ox) tại điểm $A' = \left(\dfrac{a}{1-2a}\,;0\right)$ nếu $a \neq \dfrac{1}{2}$.

Đường thẳng CM có phương trình : $2a(x-1) + (1-a)y = 0$, nó cắt đường thẳng AD (trục Oy) tại điểm $C' = \left(0\,;\dfrac{2a}{1-a}\right)$, nếu $a \neq 1$.

Khi đó $\overrightarrow{A'C'} = \left(-\dfrac{a}{1-2a}\,;\dfrac{2a}{1-a}\right)$. Vậy nếu $a \neq 0$ thì đường thẳng $A'C'$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}\left(\dfrac{2a}{1-a}\,;\dfrac{a}{1-2a}\right)$, và do đó $A'C'$ có phương trình :

$$\frac{2a}{1-a}\left(x - \frac{a}{1-2a}\right) + \frac{a}{1-2a}y = 0$$

hay $$2a(1-2a)x + a(1-a)y - 2a^2 = 0 \qquad (*)$$

với $a \notin \left\{0, \dfrac{1}{2}, 1\right\}$.

Ta chứng minh rằng khi a thay đổi các đường thẳng (*) luôn đi qua một điểm cố định. Nếu gọi điểm cố định đó là $J(x_0;y_0)$ thì khi a thay đổi, ta luôn luôn có

$$2a(1-2a)x_0 + a(1-a)y_0 - 2a^2 = 0$$

hay $$-(4x_0 + y_0 + 2)a^2 + (2x_0 + y_0)a = 0.$$

Điều đó xảy ra khi và chỉ khi $4x_0 + y_0 + 2 = 0$ và $2x_0 + y_0 = 0$.

Suy ra $x_0 = -1$, $y_0 = 2$.

Vậy các đường thẳng $A'C'$ luôn luôn đi qua điểm cố định $J(-1 ; 2)$. Chú ý rằng J là điểm đối xứng với C qua A. □

Chùm đường thẳng

Định nghĩa. Tập hợp các đường thẳng cùng đi qua một điểm cố định gọi là *chùm đường thẳng*; điểm cố định đó gọi là *tâm* của chùm đường thẳng.

Chùm đường thẳng được hoàn toàn xác định nếu biết tâm của nó hoặc biết hai đường thẳng phân biệt nào đó của chùm.

Định lí. *Giả sử hai đường thẳng phân biệt Δ_1, Δ_2 của một chùm có phương trình :*

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \qquad (1)$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0. \qquad (2)$$

Khi đó điều kiện cần và đủ để một đường thẳng thuộc chùm là phương trình của nó có dạng :

$$\lambda\left(a_1x + b_1y + c_1\right) + \mu\left(a_2x + b_2y + c_2\right) = 0 \ (*) \text{ với } \lambda^2 + \mu^2 \neq 0.$$

Chứng minh. Phương trình (*) tương đương với :

$$\left(\lambda a_1 + \mu a_2\right)x + \left(\lambda b_1 + \mu b_2\right)y + \lambda c_1 + \mu c_2 = 0. \qquad (3)$$

Trước hết ta nhận thấy hệ số của x và y trong phương trình (3) không đồng thời bằng 0. Thật vậy, giả sử chúng đồng thời bằng 0 :

$$\begin{cases} a_1\lambda + a_2\mu = 0 \\ b_1\lambda + b_2\mu = 0 \end{cases}$$

thì từ hệ phương trình trên với điều kiện $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ (điều kiện để hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 cắt nhau), ta suy ra $\lambda = \mu = 0$, trái giả thiết. Vậy (3) là phương trình của một đường thẳng Δ. Nếu ta gọi $I(x_0 ; y_0)$ là tâm của chùm, tức cặp số (x_0, y_0) là nghiệm của các phương trình (1) và (2) thì hiển nhiên nó cũng là nghiệm của (*). Vậy đường thẳng Δ cũng đi qua điểm I, do đó Δ thuộc chùm.

Ngược lại, gọi Δ là một đường thẳng nào đó của chùm. Lấy một điểm $I_1(x_1\ ;\ y_1)$ nằm trên Δ và khác với điểm I rồi đặt

$$\lambda = a_2x_1 + b_2y_1 + c_2,\ \mu = -\left(a_1x_1 + b_1y_1 + c_1\right)$$

thì λ và μ không đồng thời bằng 0 (vì I_1 khác với I). Khi đó phương trình $\lambda\left(a_1x + b_1y + c_1\right) + \mu\left(a_2x + b_2y + c_2\right) = 0$ chính là phương trình đường thẳng Δ vì tọa độ của I và I_1 đều là nghiệm của phương trình đó. □

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC biết rằng các đường thẳng AB, BC, CA lần lượt có phương trình : $5x - 3y + 1 = 0$, $x - 2y + 7 = 0$, $2x + 3y - 1 = 0$. Viết phương trình đường cao AH của tam giác đó.

Giải

Đường cao AH thuộc chùm đường thẳng tâm A xác định bởi hai đường thẳng AB và CA nên AH có phương trình :

$$\lambda(5x - 3y + 1) + \mu(2x + 3y - 1) = 0.$$

Ta cần tìm λ và μ sao cho AH vuông góc với BC. Vectơ pháp tuyến của BC là $\overrightarrow{n_1}(1\ ;\ -2)$ và của AH là $\overrightarrow{n_2}(5\lambda + 2\mu\ ;\ -3\lambda + 3\mu)$. Hai vectơ đó vuông góc nên :

$$(5\lambda + 2\mu) - 2(-3\lambda + 3\mu) = 0 \Leftrightarrow 11\lambda - 4\mu = 0.$$

Ta có thể lấy $\lambda = 4$, $\mu = 11$ và được phương trình của AH là

$$4(5x - 3y + 1) + 11(2x + 3y - 1) = 0 \text{ hay } 42x + 21y - 7 = 0. \ \square$$

6. Nửa mặt phẳng

Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng Δ có phương trình

$$f(x,y) = ax + by + c = 0$$

và hai điểm phân biệt $A(x_1\ ;\ y_1)$, $B(x_2\ ;\ y_2)$ không nằm trên Δ, tức là

$$f(x_1, y_1) = ax_1 + by_1 + c \neq 0 \text{ và } f(x_2, y_2) = ax_2 + by_2 + c \neq 0.$$

Ta hãy tìm điều kiện cần và đủ để hai điểm A và B nằm về hai phía đối với đường thẳng Δ. Đó là điều kiện để đoạn thẳng AB và đường thẳng Δ có điểm chung. Nếu ta gọi điểm chung đó là $M(x_0\ ;\ y_0)$ thì vì M thuộc đoạn thẳng AB nên phải có số t sao cho :

$$\begin{cases} x_0 = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y_0 = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases} \qquad t \in [0 ; 1].$$

Mặt khác M phải nằm trên Δ nên :

$$f(x_0, y_0) = ax_0 + by_0 + c = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a\left[x_1 + (x_2 - x_1)t\right] + b\left[y_1 + (y_2 - y_1)t\right] + c = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - t)\left(ax_1 + by_1 + c\right) + t(ax_2 + by_2 + c) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (1 - t)f(x_1, y_1) + tf(x_2, y_2). \qquad (*)$$

Chú ý rằng hai số $f(x_1, y_1)$ và $f(x_2, y_2)$ đều khác không, còn hai số $1 - t$ và t đều dương nên điều kiện cần và đủ để có số t thỏa mãn (*) là

$\Leftrightarrow f(x_1, y_1)f(x_2, y_2) < 0$ hay $\left(ax_1 + by_1 + c\right)(ax_2 + by_2 + c) < 0$.

Từ đó ta suy ra :

Đường thẳng $ax + by + c = 0$ xác định hai nửa mặt phẳng (có bờ là đường thẳng đó), mỗi nửa mặt phẳng gồm những điểm có tọa độ $(x ; y)$ thỏa mãn một trong hai bất đẳng thức sau đây :

$$ax + by + c \geq 0 \text{ hoặc } ax + by + c \leq 0.$$

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC với $A(-1 ; 1)$, $B(1 ; 2)$, $C(3 ; 0)$. Tìm điều kiện cần và đủ của cặp số $(x ; y)$ để :

a) Điểm $M(x ; y)$ nằm cùng phía với điểm A đối với đường thẳng BC.

b) Điểm $M(x ; y)$ thuộc nửa mặt phẳng bờ BC và có chứa điểm A.

c) Điểm $M(x ; y)$ nằm góc BAC.

d) Điểm $M(x ; y)$ thuộc miền tam giác ABC.

Giải

a) Đường thẳng BC có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{BC} = (2 ; -2)$ nên nó có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}(1 ; 1)$. Vậy phương trình của BC là

$$f(x, y) = x + y - 3 = 0.$$

Thay tọa độ điểm A vào phương trình đó, ta được $f(-1,1) = -1 + 1 - 3 = -3 < 0$. Vậy điểm $M(x ; y)$ nằm cùng phía với A đối với đường thẳng BC khi và chỉ khi $f(x, y) = x + y - 3 < 0$.

b) Nửa mặt phẳng bờ BC có chứa điểm A gồm những điểm $M(x ; y)$ nằm cùng phía với A đối với đường thẳng BC và những điểm $M(x ; y)$ nằm trên đường thẳng BC, suy ra điều kiện cần và đủ là :

$$f(x, y) = x + y - 3 \leq 0. \qquad (1)$$

c) Vì $\overrightarrow{AB} = (2 ; 1)$ nên đường thẳng AB có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{AB} = (1 ; -2)$. Phương trình đường thẳng AB là $x + 1 - 2(y - 1) = 0$ hay $x - 2y + 3 = 0$. Suy ra điểm $M(x ; y)$ nằm trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa điểm C khi và chỉ khi :

$$x - 2y + 3 \geq 0. \qquad (2)$$

Vì $\overrightarrow{AC} = (4 ; -1)$ nên đường thẳng AC có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{AC} = (1 ; 4)$. Phương trình đường thẳng AC là $x + 1 + 4(y - 1) = 0$ hay $x + 4y - 3 = 0$. Suy ra điểm $M(x ; y)$ nằm trên nửa mặt phẳng bờ AC có chứa điểm B khi và chỉ khi :

$$x + 4y - 3 \geq 0. \qquad (3)$$

Điểm $M(x ; y)$ thuộc góc BAC khi và chỉ khi hai điều kiện (2) và (3) thỏa mãn :

$$\begin{cases} x - 2y + 3 \geq 0 \\ x + 4y - 3 \geq 0. \end{cases}$$

d) Điểm $M(x ; y)$ thuộc miền tam giác ABC khi và chỉ khi cả ba điều kiện (1), (2), (3) đều thỏa mãn, tức là

$$\begin{cases} x + y - 3 \leq 0 \\ x - 2y + 3 \geq 0 \\ x + 4y - 3 \geq 0. \end{cases}$$

BÀI TẬP

8. Tìm tập hợp X những điểm M có tọa độ $(x ; y)$ thỏa mãn một trong các phương trình sau đây :

a) $x^2 + 4y^2 + 4xy - 1 = 0$; b) $2x^2 + 3y^2 + 7xy + x - 2y - 1 = 0$.

9. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua điểm $M(2\,;-1)$ sao cho nó cắt hai trục tọa độ tại hai điểm A, B mà M là trung điểm của đoạn thẳng AB.

10. Hai cạnh của một tam giác có phương trình lần lượt là $2x-y=0$ và $5x-y=0$. Một trong các đường trung tuyến của tam giác đó có phương trình : $3x-y=0$. Cạnh thứ ba của tam giác đó đi qua điểm $M(3\,;9)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác đó và viết phương trình đường thẳng chứa cạnh thứ ba.

11. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(4\,;-3)$ sao cho tam giác tạo bởi đường thẳng đó và hai trục tọa độ có diện tích bằng 3.

12. Một cạnh của tam giác có phương trình là $x-2y+7=0$, hai đường trung tuyến ứng với hai cạnh còn lại có phương trình lần lượt là $x+y-5=0$ và $2x+y-11=0$. Viết phương trình hai cạnh còn lại.

13. Cho tam giác ABC, các đường thẳng AB và AC lần lượt có phương trình : $3x-2y+1=0$ và $x-y+1=0$. Đường trung tuyến CM có phương trình : $2x-y-1=0$. Viết phương trình đường thẳng BC.

14. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm (giao điểm hai đường chéo) là $I(1\,;6)$.

Các đường thẳng AB, BC, CD, DA lần lượt đi qua các điểm $P(3\,;0)$, $Q(6\,;6)$, $R(5\,;9)$, $S(-5\,;4)$. Viết phương trình các đường thẳng đó.

15. Cho hai đường thẳng song song : $ax+by+c=0$ và $ax+by+d=0$. Tìm điều kiện để điểm $M(x_0\,;y_0)$ nằm trong phần mặt phẳng giới hạn bởi hai đường thẳng đó.

16. Cho tam giác ABC với $A(3\,;1)$, $B(-2\,;4)$, $C(1\,;0)$ và đường thẳng $x-7y+5=0$. Đường thẳng đó cắt các cạnh nào của tam giác ?

17. Cho hai đường thẳng cắt nhau $d: 2x-y+1=0$ và $d': 3x+y-1=0$, chúng tạo thành 4 góc trong đó có một góc chứa điểm $I(1\,;2)$.

a) Tìm điều kiện cần và đủ để điểm $M(x\,;y)$ nằm trong góc có chứa điểm I.

b) Tìm điều kiện cần và đủ để điểm $M(x\,;y)$ nằm trong góc có chứa điểm I hoặc góc đối đỉnh với góc đó.

c) Góc có chứa điểm I là góc nhọn hay tù ?

18. Cho tam giác ABC, I là trung điểm cạnh AB. Một đường thẳng thay đổi đi qua I cắt AC và BC lần lượt tại A' và B'. Tìm quỹ tích giao điểm của AB' và BA'.

§3. KHOẢNG CÁCH VÀ GÓC

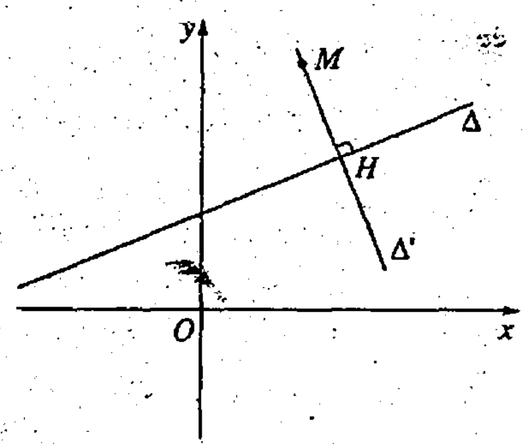
1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Cho điểm $M(x_0\,;\,y_0)$ và đường thẳng Δ có phương trình $ax + by + c = 0$. (1)

Ta hãy tìm khoảng cách $d(M, \Delta)$ từ điểm M tới Δ.

Gọi Δ' là đường thẳng đi qua M và vuông góc với Δ (h.3.7) thì Δ' có phương trình :

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt. \end{cases} \qquad (2)$$



Hình 3.7

Giao điểm H của Δ và Δ' có tọa độ thỏa mãn hệ phương trình (1) và (2), tức là H ứng với giá trị t_H thỏa mãn phương trình :

$$a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c = 0.$$

Suy ra $t_H = -\dfrac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}$.

Vậy $H = (x_0 + at_H\,;\,y_0 + bt_H)$.

Khoảng cách $d(M, \Delta)$ cần tìm chính là độ dài đoạn thẳng MH, tức là

$$d(M, \Delta) = MH = \sqrt{a^2t_H^2 + b^2t_H^2} = |t_H|\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Tóm lại ta có

$$\boxed{d(M, \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}.$$

Ví dụ 1. Viết phương trình đường thẳng song song và cách đều hai đường thẳng song song : $ax + by + c = 0$ và $ax + by + d = 0$.

Giải

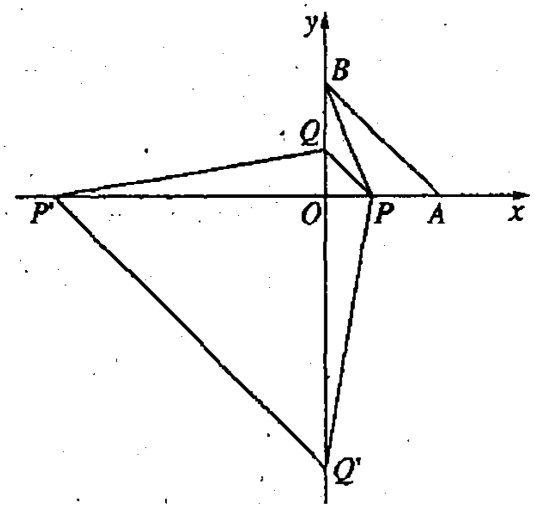
Đường thẳng cần tìm là tập hợp những điểm $M(x;y)$ cách đều hai đường thẳng đã cho, tức là

$$\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax + by + d|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow ax + by + c = \pm(ax + by + d).$$

Vì $c \neq d$ nên dấu "+" không thích hợp, ta phải lấy dấu "−". Như vậy ta được phương trình đường thẳng :

$$ax + by + \frac{c+d}{2} = 0. \square$$

Ví dụ 2. Cho tam giác vuông cân OAB đỉnh O. Tìm tập hợp các điểm M sao cho tổng khoảng cách từ nó tới hai đường thẳng OA và OB bằng khoảng cách từ nó tới đường thẳng AB.



Hình 3.8

Giải (h.3.8)

Chọn hệ tọa độ Oxy sao cho OA là trục Ox và OB là trục Oy. Giả sử $A = (1 ; 0)$, $B = (0 ; 1)$. Khi đó đường thẳng AB có phương trình $x + y - 1 = 0$.

Điểm $M(x ; y)$ thỏa mãn điều kiện của bài toán khi và chỉ khi :

$$|x| + |y| = \frac{|x+y-1|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{2}\left(|x| + |y|\right) = |x + y - 1|$$

$$\Leftrightarrow 2\left(|x| + |y|\right)^2 = \left(x + y - 1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4|xy| - 2xy + 2x + 2y - 1 = 0. \qquad (*)$$

1) Nếu $xy \geq 0$: $(*) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2(y+1)x + y^2 + 2y - 1 = 0. \qquad (1)$$

Xem (1) là phương trình bậc hai đối với x, ta có

$$\Delta' = (y+1)^2 - (y^2 + 2y - 1) = 2.$$

Phương trình (1) có hai nghiệm : $x = -y - 1 \pm \sqrt{2}$. Vậy (1) tương đương với :

$$\left[\begin{array}{l} x + y + 1 - \sqrt{2} = 0 \\ x + y + 1 + \sqrt{2} = 0. \end{array}\right.$$

Với điều kiện $xy \geq 0$, hai phương trình trên cho ta hai đoạn thẳng PQ và $P'Q'$ với $P = \left(\sqrt{2} - 1 ; 0\right)$, $Q = \left(0 ; \sqrt{2} - 1\right)$, $P' = \left(-\sqrt{2} - 1 ; 0\right)$, $Q' = \left(0 ; -\sqrt{2} - 1\right)$.

2) Nếu $xy \le 0$: $(*) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6xy + 2x + 2y - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2(3y-1)x + y^2 + 2y - 1 = 0. \qquad (2)$$

Xem đó là phương trình bậc hai đối với x, ta có :

$$\Delta' = (3y-1)^2 - (y^2 + 2y - 1) = 2(4y^2 - 4y + 1) = 2(2y-1)^2.$$

Phương trình (2) có hai nghiệm :

$$x = 3y - 1 \pm \sqrt{2}(2y-1) = \left(3 \pm 2\sqrt{2}\right)y - 1 \mp \sqrt{2}.$$

Vậy (2) tương đương với :

$$\left[\begin{array}{l} x - \left(3+2\sqrt{2}\right)y + 1 + \sqrt{2} = 0 \\ x - \left(3-2\sqrt{2}\right)y + 1 - \sqrt{2} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\sqrt{2}-1\right)x - \left(\sqrt{2}+1\right)y + 1 = 0 \\ \left(\sqrt{2}+1\right)x - \left(\sqrt{2}-1\right)y - 1 = 0. \end{array}\right.$$

Với điều kiện $xy \le 0$, hai phương trình trên cho ta hai đoạn thẳng $P'Q$ và PQ' với $P = \left(\sqrt{2}-1\,;0\right)$, $Q = \left(0\,;\sqrt{2}-1\right)$, $P' = \left(-\sqrt{2}-1\,;0\right)$, $Q' = \left(0\,;-\sqrt{2}-1\right)$.

Tóm lại, quỹ tích các điểm M là bốn cạnh của hình thang cân $PQP'Q'$.

Ta chú ý rằng hai điểm P và P' là chân các đường phân giác trong và phân giác ngoài của góc B, còn Q và Q' là chân các đường phân giác trong và phân giác ngoài của góc A. □

2. Đường phân giác

Cho hai đường thẳng cắt nhau Δ và Δ' lần lượt có phương trình :

$$ax + by + c = 0 \text{ và } a'x + b'y + c' = 0.$$

Hai đường thẳng đó cắt nhau tạo thành bốn góc mà các tia phân giác của bốn góc đó hợp thành hai đường thẳng vuông góc với nhau, và được gọi là *hai đường phân giác của các góc tạo thành bởi* Δ *và* Δ'.

Điểm $M(x\,;y)$ thuộc một trong hai đường phân giác nói trên khi và chỉ khi khoảng cách từ M tới Δ và Δ' bằng nhau, tức là :

$$\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|a'x+b'y+c'|}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$$

hay
$$\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}} \pm \frac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}} = 0. \qquad (*)$$

(*) chính là phương trình hai đường phân giác của các góc tạo thành bởi Δ và Δ'.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC với ba đường thẳng AB, BC, CA lần lượt có phương trình :

$$AB : 2x + y - 1 = 0 \ ; \quad BC : x - y + 1 = 0 \ ; \quad CA : 3x - 4y + 5 = 0.$$

Viết phương trình đường thẳng chứa đường phân giác trong của góc A.

Giải

Góc A của tam giác ABC là một trong các góc tạo thành bởi hai đường thẳng AB và CA. Hai đường phân giác của các góc tạo thành bởi hai đường thẳng đó có phương trình :

$$\frac{2x + y - 1}{\sqrt{2^2 + 1^2}} \pm \frac{3x - 4y + 5}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 0,$$

hay là : $\quad \left(3 + 2\sqrt{5}\right)x + \left(-4 + \sqrt{5}\right)y + 5 - \sqrt{5} = 0 \quad$ (*)

hoặc $\quad \left(3 - 2\sqrt{5}\right)x - \left(4 - \sqrt{5}\right)y + 5 + \sqrt{5} = 0. \quad$ (**)

Ta phải xét xem trong hai đường thẳng (*) và (**), đường nào chứa phân giác trong của góc A.

Bằng cách giải hệ phương trình, ta tìm thấy tọa độ của các điểm B và C là $B = (0 ; 1)$, $C = (1 ; 2)$.

Thay tọa độ của B vào vế trái của (*), ta được $\left(-4 + \sqrt{5}\right) + 5 - \sqrt{5} = 1 > 0$

Thay tọa độ của C vào vế trái của (*), ta được

$$\left(3 + 2\sqrt{5}\right) + 2\left(-4 + \sqrt{5}\right) + 5 - \sqrt{5} = 3\sqrt{5} > 0.$$

Như vậy ta được hai số cùng dấu, tức là B và C nằm cùng phía đối với đường thẳng (*). Suy ra đường thẳng đó là đường phân giác ngoài. Vậy (**) là phương trình đường thẳng chứa phân giác trong của góc A. □

3. Góc giữa hai đường thẳng

Định nghĩa. Hai đường thẳng a và b cắt nhau tạo thành bốn góc. Số đo nhỏ nhất trong các số đo của bốn góc đó được gọi là *góc giữa hai đường thẳng a, b* (hay *góc hợp bởi hai đường thẳng a và b*).

Khi a và b song song hoặc trùng nhau, ta nói rằng góc giữa chúng bằng 0°.

Góc giữa hai đường thẳng a và b được kí hiệu là (a,b).

Từ định nghĩa trên ta suy ra :

1) Góc giữa hai đường thẳng bé nhất bằng 0° và lớn nhất bằng 90° (khi hai đường thẳng vuông góc với nhau.

2) Nếu hai đường thẳng có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u}$ và $\vec{u'}$ thì

$$\cos(a,b) = \left|\cos\left(\vec{u};\vec{u'}\right)\right| = \frac{\left|\vec{u}.\vec{u'}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{u'}\right|}.$$

3) Nếu hai đường thẳng có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}$ và $\vec{n'}$ thì

$$\cos(a,b) = \left|\cos\left(\vec{n};\vec{n'}\right)\right| = \frac{\left|\vec{n}.\vec{n'}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{n'}\right|}.$$

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC có $A(-2\ ;\ 0)$, $B(2\ ;\ 0)$, góc giữa hai đường thẳng AC và AB bằng 30°, góc giữa hai đường thẳng BC và AB bằng 60°. Tìm tọa độ đỉnh C.

Giải

Giả sử $C(x\ ;\ y)$, khi đó

$$\overrightarrow{AC} = (x+2\ ;\ y),\ \overrightarrow{BC} = (x-2\ ;\ y),\ \overrightarrow{AB} = (4\ ;\ 0).$$

Theo giả thiết : $\cos 30^\circ = \left|\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)\right|$ và $\cos 60^\circ = \left|\cos\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AB}\right)\right|$, hay

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{|4(x+2)|}{4.\sqrt{(x+2)^2+y^2}} \quad (1) \qquad \text{và} \qquad \frac{1}{2} = \frac{|4(x-2)|}{4\sqrt{(x-2)^2+y^2}}. \qquad (2)$$

$(1) \Leftrightarrow 3\left[(x+2)^2 + y^2\right] = 4(x+2)^2 \Leftrightarrow 3y^2 = (x+2)^2$.

$(2) \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 4(x-2)^2 \Leftrightarrow y^2 = 3(x-2)^2$.

Từ đó suy ra $(x+2)^2 = 9(x-2)^2 \Leftrightarrow x+2 = \pm 3(x-2) \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 4$.

Khi $x = 1$ thì $y = \pm\sqrt{3}$ và khi $x = 4$ thì $y = \pm 2\sqrt{3}$.

Vậy ta có bốn đỉnh C :

$$C_1\left(1\ ;\ \sqrt{3}\right), C_2\left(1\ ;\ -\sqrt{3}\right), C_3\left(4\ ;\ 2\sqrt{3}\right), C_4\left(4\ ;\ -2\sqrt{3}\right). \ \square$$

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC với $A(5\ ;\ 6)$, $B(1\ ;\ 2)$, đường phân giác của góc A song song với trục tung, góc C bằng 60°. Tìm tọa độ đỉnh C.

Giải

Đường phân giác của góc A là đường thẳng $x = 5$, gọi B' là điểm đối xứng với B qua đường thẳng đó thì $B' = (9\ ;\ 2)$ và đỉnh C nằm trên tia AB'. Ta có $\overrightarrow{AB'} = (4\ ;\ -4)$ nên có thể lấy vectơ $\vec{u} = (1\ ;\ -1)$ là vectơ chỉ hướng của tia AB' và phương trình của tia AB' là

$$\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 6 - t \end{cases} \quad t \geq 0.$$

Tọa độ đỉnh C là $C = (5 + t\ ;\ 6 - t)$, $t > 0$.

Khi đó $\overrightarrow{CA} = (-t\ ;\ t)$, $\overrightarrow{CB} = (-4 - t\ ;\ -4 + t)$

$$\cos\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = \frac{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}}{CA.CB} = \frac{t(4+t) + t(-4+t)}{\sqrt{2t^2}\sqrt{(4+t)^2 + (-4+t)^2}}$$

$$= \frac{2t}{\sqrt{2}\sqrt{2t^2 + 32}} = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 16}}.$$

Vì $C = 60^{\circ}$ nên $\cos\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = \cos 60^{\circ} = \frac{1}{2}$, do đó $\frac{t}{\sqrt{t^2 + 16}} = \frac{1}{2}$ hay

$3t^2 = 16$. Vì $t > 0$ nên $t = \frac{4}{\sqrt{3}}$. Vậy $C = \left(5 + \frac{4\sqrt{3}}{3}; 6 - \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$. □

BÀI TẬP

19. Tìm tập hợp các điểm cách đường thẳng $ax + by + c = 0$ một khoảng bằng d.

20. Cho đường tròn $(\mathscr{C})$ có tâm $I(1\ ;\ 1)$ và có bán kính bằng 2.

a) Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(\mathscr{C})$ song song với đường thẳng $5x - 12y + 1 = 0$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(\mathscr{C})$ đi qua điểm $P(7\ ;\ -1)$.

c) Viết phương trình tiếp tuyến chung của đường tròn $(\mathscr{C})$ và đường tròn $(\mathscr{C}')$ có tâm $I'(2\ ;\ 3)$ và bán kính bằng 4.

d) Viết phương trình các cạnh của hình vuông nội tiếp đường tròn $(\mathscr{C})$, biết rằng một đường chéo của hình vuông đó song song với đường thẳng $x + y = 0$.

21. Cho hai đường thẳng cắt nhau $x + 7y = 0$ và $x - y - 4 = 0$. Viết phương trình đường thẳng chứa đường phân giác của góc tạo thành bởi hai đường thẳng đó, mà trong góc đó có chứa điểm $I(1 ; 1)$.

22. Cho hai đường thẳng cắt nhau $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ và một điểm $M(x_0 ; y_0)$ không nằm trên chúng. Viết phương trình đường phân giác của góc tạo thành bởi hai đường thẳng đó, mà trong góc đó có chứa điểm $M(x_0 ; y_0)$.

23. Tìm tọa độ tâm và bán kính của đường tròn đi qua điểm $M(6 ; 2)$ và tiếp xúc với cả hai đường thẳng $4x - 3y = 0$ và trục Ox.

24. Tìm tọa độ tâm và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC biết

$$A(2 ;-14),\ B(-2 ;14),\ C(-5 ; -7).$$

25. Cho hai đường thẳng cắt nhau nhưng không vuông góc với nhau, lần lượt có phương trình $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Viết phương trình đường phân giác của các góc nhọn tạo thành bởi hai đường thẳng đó.

26. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Tìm quỹ tích những điểm M sao cho

$$MA + MC = MB + MD.$$

27. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2a$, $BC = 2b$, $a > b$. Tìm quỹ tích những điểm M mà tổng khoảng cách từ nó tới hai đường thẳng AB và CD bằng tổng khoảng cách từ nó tới hai đường thẳng AD và BC.

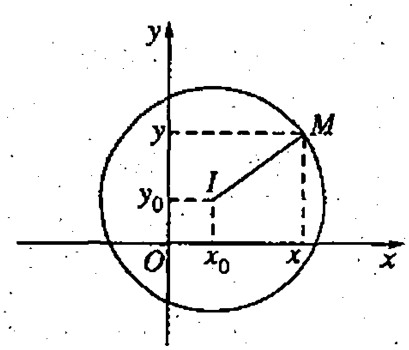
28. Cho hình vuông $ABCD$ với M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và CD. Tìm quỹ tích những điểm I mà tổng khoảng cách từ nó tới hai đường thẳng AB và CD bằng hai lần khoảng cách từ nó tới đường thẳng MN.

§4. ĐƯỜNG TRÒN

1. Phương trình đường tròn

+ Trên mặt phẳng toạ độ, cho đường tròn $(\mathscr{C})$ có tâm $I(x_0 ; y_0)$ và bán kính bằng R (h.3.9). Điểm $M(x ; y)$ thuộc đường tròn $(\mathscr{C})$ khi và chỉ khi $IM = R$, hay là :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \qquad (1)$$



Hình 3.9

Phương trình (1) có thể viết :

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - R^2 = 0. \qquad (2)$$

Phương trình (1) hoặc (2) đều được gọi là *phương trình của đường tròn* ($\mathscr{C}$) đã cho.

+ Ngược lại, ta hãy tìm tập hợp những điểm $M(x ; y)$ có tọa độ thỏa mãn phương trình bậc hai dạng :

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0. \qquad (*)$$

Ta có (*) $\Leftrightarrow (x + a)^2 + (y + b)^2 = a^2 + b^2 - c$.

Ta gọi I là điểm có tọa độ $I(-a ; -b)$ thì vế trái của đẳng thức trên chính là IM^2. Bởi vậy :

– Nếu $a^2 + b^2 - c > 0$ thì $IM = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$. Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn có tâm $I(-a ; -b)$ và có bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

– Nếu $a^2 + b^2 - c = 0$ thì $IM = 0$, hay $M \equiv I$. Tập hợp các điểm M chỉ có một điểm duy nhất I.

– Nếu $a^2 + b^2 - c < 0$, ta được một tập rỗng, tức là không có điểm M nào.

Như vậy ta có kết luận :

Phương trình $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$, *với điều kiện* $a^2 + b^2 > c$, *là phương trình của đường tròn tâm* $I(-a ; -b)$, *bán kính* $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

Ví dụ 1. Viết phương trình đường tròn đi qua ba điểm $P(4 ; 6)$, $Q(-3 ; 5)$, $R(-4 ; 2)$. Tìm tọa độ tâm và tính bán kính đường tròn đó.

Giải

Cách 1. Giả sử phương trình đường tròn cần tìm là

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0.$$

Vì nó đi qua các điểm P, Q, R nên :

$$\begin{cases} 4^2 + 6^2 + 8a + 12b + c = 0 \\ 3^2 + 5^2 - 6a + 10b + c = 0 \\ 4^2 + 2^2 - 8a + 4b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 18 + 14a + 2b = 0 \\ 14 + 2a + 6b = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = -1 ; b = -2 ; c = -20.$$

Vậy đường tròn có phương trình : $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$. Đường tròn đó có tâm $I(1 ; 2)$ và có bán kính $R = 5$.

Cách 2. Gọi $I(x ; y)$ là tâm đường tròn thì I phải cách đều ba điểm P, Q, R nên :

$$\begin{cases} IP = IQ \\ IQ = IR \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)^2 + (y-6)^2 = (x+3)^2 + (y-5)^2 \\ (x+3)^2 + (y-5)^2 = (x+4)^2 + (y-2)^2 \end{cases}$$

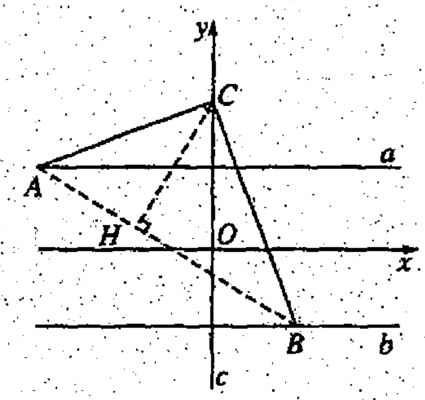
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -18 + 14x + 2y = 0 \\ -14 + 2x + 6y = 0. \end{cases}$$

Từ đó suy ra $x = 1$, $y = 2$. Vậy tâm của đường tròn là $I(1 ; 2)$, bán kính $R = 5$. Phương trình đường tròn là $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$. □

Ví dụ 2. Cho hai đường thẳng song song a và b, một đường thẳng c vuông góc với chúng. Ba điểm A, B, C lần lượt thay đổi trên các đường thẳng a, b, c sao cho tam giác ABC vuông tại C. Tìm quỹ tích chân đường cao H hạ từ đỉnh C.

Giải (h.3.10)

Chọn hệ trục Oxy sao cho trục Ox là đường thẳng song song cách đều hai đường thẳng a và b, còn trục Oy là đường thẳng c. Giả sử khi đó a và b có phương trình lần lượt là $y - 1 = 0$ và $y + 1 = 0$. Theo giả thiết, tọa độ của A, B, C lần lượt là $A(m ; 1)$, $B(n ; -1)$ và $C(0 ; p)$.



Hình 3.10

Vì $\overrightarrow{CA} = (m ; 1 - p)$ và $\overrightarrow{CB} = (n ; -1 - p)$ nên

$CA \perp CB \Leftrightarrow mn + p^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow p^2 = 1 - mn$. (*)

Đường thẳng AB có phương trình : $2x + (n - m)y - m - n = 0$. Đường cao hạ từ C có phương trình : $(n - m)x - 2y + 2p = 0$. Vậy tọa độ của H là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 2x + (n-m)y = n + m \\ (n-m)x - 2y = -2p. \end{cases}$$

Bình phương hai vế của phương trình thứ nhất và thứ hai rồi cộng vế với vế ta được :

$$\left[4+(n-m)^2\right](x^2+y^2)=(n+m)^2+4p^2. \qquad (1)$$

Chú ý tới (*) ta có $(n+m)^2+4p^2=(n+m)^2+4-4mn=4+(n-m)^2$.

Bởi vậy đẳng thức (1) tương đương với $x^2+y^2=1$. Vậy H nằm trên đường tròn tâm $O(0\,;0)$ và có bán kính bằng 1.

Trở về bài toán ban đầu, ta kết luận : Nếu gọi P và Q lần lượt là giao điểm của c với hai đường thẳng a và b thì quỹ tích chân đường cao H là đường tròn đường kính PQ. □

2. Phương tích của một điểm đối với một đường tròn. Trục đẳng phương

+ Trong hệ tọa độ Oxy cho đường tròn $(\mathscr{C})$ có phương trình :

$$f(x,y)=x^2+y^2+2ax+2by+c=0,\ a^2+b^2-c>0$$

và điểm $M_0(x_0\,;y_0)$. Ta hãy tìm hiểu ý nghĩa hình học của $f(x_0,y_0)$:

$$\begin{aligned}f(x_0,y_0)&=x_0^2+y_0^2+2ax_0+2by_0+c\\&=(x_0+a)^2+(y_0+b)^2-\left(a^2+b^2-c\right).\end{aligned}$$

Vì đường tròn $(\mathscr{C})$ có tâm là điểm $I(-a\,;-b)$ và có bán kính là $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$ nên từ đẳng trên ta suy ra $f(x_0,y_0)=IM_0^2-R^2$. Vậy :

Giá trị $f(x_0,y_0)$ bằng phương tích của điểm $M_0(x_0\,;y_0)$ đối với đường tròn $(\mathscr{C})$.

Từ đó ta có :

Điểm $M_0(x_0\,;y_0)$ nằm trên đường tròn $(\mathscr{C})$ khi và chỉ khi $f(x_0,y_0)=0$.

Điểm $M_0(x_0\,;y_0)$ nằm ngoài đường tròn $(\mathscr{C})$ khi và chỉ khi $f(x_0,y_0)>0$.

Điểm $M_0(x_0\,;y_0)$ nằm trong đường tròn $(\mathscr{C})$ khi và chỉ khi $f(x_0,y_0)<0$.

+ Cho hai đường tròn $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$ không cùng tâm, có phương trình lần lượt là

$$f_1(x,y)=x^2+y^2+2a_1x+2b_1y+c_1=0,\ a_1^2+b_1^2-c_1>0$$

$$f_2(x,y)=x^2+y^2+2a_2x+2b_2y+c_2=0,\ a_2^2+b_2^2-c_2>0.$$

Điều kiện cần và đủ để điểm $M(x ; y)$ có cùng phương tích đối với hai đường tròn $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$ là $f_1(x, y) = f_2(x, y)$ hay

$$2(a_1 - a_2)x + 2(b_1 - b_2)y + c_1 - c_2 = 0. \qquad (1)$$

Vì hai đường tròn đó không cùng tâm nên hai số $a_1 - a_2$ và $b_1 - b_2$ không đồng thời bằng 0, và do đó (1) là phương trình của một đường thẳng, đường thẳng đó được gọi là *trục đẳng phương của hai đường tròn* $(\mathscr{C}_1)$ *và* $(\mathscr{C}_2)$.

3. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn

Cho đường tròn $(\mathscr{C})$ có phương trình :

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0,\ a^2 + b^2 - c > 0$$

và điểm $M_0(x_0 ; y_0)$ nằm trên đường tròn $(\mathscr{C})$. Ta hãy viết phương trình tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ tại điểm M_0.

Đường tròn $(\mathscr{C})$ có tâm là điểm $I(-a ; -b)$. Ta biết rằng tiếp tuyến tại M_0 là đường thẳng đi qua M_0 và có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{IM_0} = (x_0 + a ; y_0 + b)$, bởi vậy tiếp tuyến đó có phương trình :

$$(x_0 + a)(x - x_0) + (y_0 + b)(y - y_0) = 0 \text{ hay}$$

$$(x_0 + a)x + (y_0 + b)y - (x_0^2 + y_0^2 + ax_0 + by_0) = 0. \qquad (1)$$

Vì $M_0(x_0 ; y_0)$ nằm trên $(\mathscr{C})$ nên $x_0^2 + y_0^2 + 2ax_0 + 2by_0 + c = 0$, bởi vậy

$$x_0^2 + y_0^2 + ax_0 + by_0 = -(ax_0 + by_0 + c).$$

Từ đó suy ra (1) tương đương với :

$$(x_0 + a)x + (y_0 + b)y + ax_0 + by_0 + c = 0.$$

Chú ý. 1) Phương trình đường tròn $(\mathscr{C})$ có thể viết dưới dạng :

$$xx + yy + a(x + x) + b(y + y) + c = 0,$$

còn tiếp tuyến tại $M_0(x_0 ; y_0)$ có thể viết dưới dạng :

$$x_0x + y_0y + a(x_0 + x) + b(y_0 + y) + c = 0.$$

Từ đó ta có thể nhận ra một "quy tắc dễ nhớ" để viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn.

2) Trong trường hợp tổng quát; bài toán đặt ra như sau : *Viết phương trình tiếp tuyến của một đường tròn đã cho biết rằng tiếp tuyến đó thỏa mãn một điều kiện nào đấy.*

Để giải bài toán này, ta chỉ cần nhớ rằng : *Một đường thẳng là tiếp tuyến của đường tròn đã cho khi và chỉ khi khoảng cách từ tâm đường tròn tới đường thẳng đó bằng bán kính đường tròn.*

Ví dụ 3. Với mỗi giá trị $m \in \mathbb{R}$, xét đường thẳng Δ_m có phương trình :

$$2mx + (1 - m^2)y + 2 = 0.$$

Chứng tỏ rằng với mọi m, đường thẳng Δ_m tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Giải

Ta phải tìm một điểm I có tọa độ $(x_0 ; y_0)$ sao cho khoảng cách từ I tới Δ_m bằng một số R không đổi, tức là :

$$\frac{\left|2mx_0 + (1 - m^2)y_0 + 2\right|}{\sqrt{4m^2 + (1 - m^2)^2}} = R \Leftrightarrow \frac{\left|2mx_0 + (1 - m^2)y_0 + 2\right|}{1 + m^2} = R$$

$$\Leftrightarrow 2mx_0 + (1 - m^2)y_0 + 2 \pm R(1 + m^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (-y_0 \pm R)m^2 + 2mx_0 + y_0 + 2 \pm R = 0.$$

Đẳng thức cuối cùng đúng với mọi m khi và chỉ khi

$$-y_0 \pm R = x_0 = y_0 + 2 \pm R = 0.$$

Từ đó ta suy ra $y_0 = -1$ và $R = \pm 1$, nhưng vì $R > 0$ nên chỉ có thể lấy $R = 1$. Vậy các đường thẳng Δ_m đều tiếp xúc với đường tròn tâm $I(0 ; -1)$, bán kính bằng 1.

Ví dụ 4. Cho đường tròn $(\mathscr{C})$ tiếp xúc với trục Ox tại điểm $P(1 ; 0)$ và tiếp xúc với trục Oy tại điểm $Q(0 ; 1)$. Một tiếp tuyến của đường tròn tại M cắt đường thẳng PQ tại điểm C. Gọi A là giao điểm của MQ và trục Ox, B là giao điểm của MP và trục Oy. Chứng minh rằng ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Giải (h. 3.11)

Đường tròn $(\mathscr{C})$ phải có tâm $I(1 ; 1)$ và có bán kính $R = 1$ nên có phương trình $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ hay $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$. Giả sử điểm

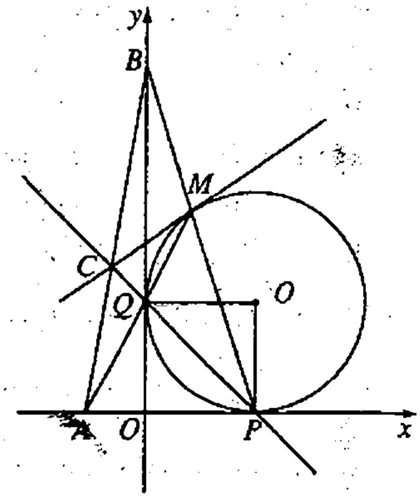
$M(x_0 ; y_0)$ nằm trên đường tròn, tức là $x_0^2 + y_0^2 - 2x_0 - 2y_0 + 1 = 0$. Tiếp tuyến Δ tại M có phương trình :

$x_0x + y_0y - (x_0 + x) - (y_0 + y) + 1 = 0$ hay

$(x_0 - 1)x + (y_0 - 1)y + 1 - x_0 - y_0 = 0$. (*)

Đường thẳng PQ có phương trình $x + y - 1 = 0$, nó cắt tiếp tuyến Δ tại điểm

$$C = \left(\frac{x_0}{x_0 - y_0} ; \frac{-y_0}{x_0 - y_0}\right).$$



Hình 3.11

Đường thẳng MQ có phương trình $(1 - y_0)x + x_0y - x_0 = 0$ nên

$$A = \left(\frac{x_0}{1 - y_0} ; 0\right).$$

Đường thẳng MP có phương trình $y_0x + (1 - x_0)y - y_0 = 0$ nên

$$B = \left(0 ; \frac{y_0}{1 - x_0}\right).$$

Ta có $\overrightarrow{AC} = \left(\dfrac{x_0(1 - x_0)}{(x_0 - y_0)(1 - y_0)} ; \dfrac{-y_0}{x_0 - y_0}\right)$

và $\overrightarrow{BC} = \left(\dfrac{x_0}{x_0 - y_0} ; \dfrac{-y_0(1 - y_0)}{(x_0 - y_0)(1 - x_0)}\right)$.

Từ đó suy ra $\overrightarrow{AC} = \dfrac{1 - x_0}{1 - y_0}\overrightarrow{BC}$ và do đó ba điểm A, B, C thẳng hàng. □

4. Giao của hai đường tròn

Cho hai đường tròn $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$ có phương trình lần lượt là

$$f_1(x, y) = x^2 + y^2 + 2a_1x + 2b_1y + c_1 = 0,\ a_1^2 + b_1^2 - c_1 > 0$$

$$f_2(x, y) = x^2 + y^2 + 2a_2x + 2b_2y + c_2 = 0,\ a_2^2 + b_2^2 - c_2 > 0.$$

Giao điểm của hai đường tròn đó có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2a_1x + 2b_1y + c_1 = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 + 2a_2x + 2b_2y + c_2 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 2a_1x + 2b_1y + c_1 = 0 \\ 2(a_1 - a_2)x + 2(b_1 - b_2)y + c_1 - c_2 = 0. & (3) \end{cases}$$

Chú ý rằng (3) chính là phương trình trục đẳng phương của hai đường tròn đã cho. Vậy giao điểm của hai đường đã cho chính là giao điểm một trong hai đường tròn đó và trục đẳng phương của chúng.

Vậy hai đường tròn cắt nhau khi và chỉ khi một trong chúng cắt trục đẳng phương của hai đường tròn, tiếp xúc với nhau khi và chỉ khi một trong chúng tiếp với trục đẳng phương của hai đường tròn, và không cắt nhau khi và chỉ khi một trong chúng không cắt trục đẳng phương của hai đường tròn.

Ví dụ 5. Viết phương trình đường tròn $(\mathscr{C}')$ đi qua hai điểm $P(2 ; 0)$, $Q(0 ; 2)$ và tiếp xúc với đường tròn $(\mathscr{C})$ có phương trình $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Giải

Giả sử đường tròn $(\mathscr{C}')$ cần tìm có phương trình $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$, nó đi qua hai điểm P và Q nên : $4 + 4a + c = 0$ và $4 + 4b + c = 0$. Suy ra

$$b = a \quad \text{và} \quad c = -4a - 4 = 0.$$

Vậy mọi đường tròn $(\mathscr{C}')$ đi qua P và Q đều có phương trình dạng :

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2ay - 4a - 4 = 0.$$

Trục đẳng phương Δ của hai đường tròn $(\mathscr{C})$ và $(\mathscr{C}')$ là đường thẳng :

$$x^2 + y^2 - 1 = x^2 + y^2 + 2ax + 2ay - 4a - 4 = 0 \text{ , hay}$$

$$2ax + 2ay - 4a - 3 = 0.$$

Để $(\mathscr{C})$ và $(\mathscr{C}')$ tiếp xúc với nhau, điều kiện cần và đủ là $(\mathscr{C})$ tiếp xúc với Δ, tức là khoảng cách từ điểm $O(0 ; 0)$ (tâm đường tròn $(\mathscr{C})$) tới Δ bằng 1 (bán kính đường tròn $(\mathscr{C})$) :

$$\frac{|4a + 3|}{\sqrt{4a^2 + 4a^2}} = 1 \Leftrightarrow (4a + 3)^2 = 8a^2 \Leftrightarrow 8a^2 + 24a + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{-6 \pm 3\sqrt{2}}{4}.$$

Ta có hai đường tròn thỏa mãn điều kiện của bài toán :

$$x^2 + y^2 - \frac{6-3\sqrt{2}}{2}x - \frac{6-3\sqrt{2}}{2}y + 2 - 3\sqrt{2} = 0$$

$$x^2 + y^2 - \frac{6+3\sqrt{2}}{2}x - \frac{6+3\sqrt{2}}{2}y + 2 + 3\sqrt{2} = 0. \square$$

BÀI TẬP

29. Cho ba điểm $A(1\,;-2)$, $B(3\,;4)$, $C(-1\,;0)$

a) Viết phương trình đường tròn đi qua A, B, C.

b) Viết phương trình đường tròn đi qua A, B có bán kính bằng 5.

c) Viết phương trình đường tròn đi qua A, B và tiếp xúc với đường thẳng AC.

d) Viết phương trình đường tròn đi qua B và tiếp xúc với các trục tọa độ.

30. Cho hai điểm $A(1\,;-3)$ và $B(2\,;5)$.Tìm quỹ tích các điểm M thỏa mãn một trong các điều kiện sau đây (k là một số không đổi) :

a) $MA^2 + MB^2 = k^2$

b) $MA^2 - MB^2 = k^2$.

31. Cho ba điểm A, O, B cố định, điểm O nằm giữa hai điểm A và B. $OA = a, OB = b$, $a > b > 0$. Tìm quỹ tích những điểm M sao cho hai góc $\widehat{OMA}$ và $\widehat{OMB}$ bằng nhau.

32. Cho điểm O cố định và một số k không đổi khác 0. Với mỗi điểm M khác điểm O, lấy điểm M' nằm trên tia OM sao cho $OM.OM' = k$, trong đó k là số dương không đổi. Tìm quỹ tích các điểm M' trong các trường hợp sau :

a) Điểm M thay đổi trên một đường thẳng d không đi qua O.

b) Điểm M thay đổi trên một đường thẳng đi qua O.

c) Điểm M thay đổi trên một đường tròn không đi qua O.

33. Cho đường tròn có phương trình : $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 1 = 0$.

a) Viết phương trình đường thẳng đi qua gốc tọa độ và tiếp xúc với đường tròn.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn sao cho nó cùng với các trục tọa độ tạo thành một tam giác cân.

34. Cho hai đường tròn $(\mathscr{C})$ và $(\mathscr{C}')$ lần lượt có phương trình :

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad \text{và} \quad x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0.$$

a) Tìm tọa độ giao điểm của hai đường tròn đó.

b) Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn.

35. Cho đường tròn có phương trình : $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ và điểm $M(x_0 \,;\, y_0)$ nằm ngoài đường tròn. Gọi MT_1 và MT_2 là các tiếp tuyến vẽ từ M của đường tròn (T_1 và T_2 là các tiếp điểm). Viết phương trình đường thẳng T_1T_2.

36. Cho đường tròn $(\mathscr{C})$ đi qua ba điểm $A(2 \,;\, -2)$, $B(0 \,;\, 2)$, $C(0 \,;\, -2)$. Tiếp tuyến tại A của $(\mathscr{C})$ cắt trục tung tại P, tiếp tuyến tại B của $(\mathscr{C})$ cắt AC tại Q, tiếp tuyến tại C của $(\mathscr{C})$ cắt AB tại R. Chứng minh rằng ba điểm P, Q , R thẳng hàng.

37. Cho đường tròn tâm O, hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của OA và OB. Đường thẳng CM cắt đường tròn tại E. Chứng minh rằng tam giác CEN không phải là tam giác vuông.

38. Cho hai đường tròn cắt nhau $(\mathscr{C})$ và $(\mathscr{C}')$ lần lượt có phương trình :

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0 \ (1) \quad \text{và} \quad x^2 + y^2 + 2a'x + 2b'y + c' = 0 \ (2)$$

Gọi P và Q là hai giao điểm của chúng. Chứng minh rằng

a) Mọi phương trình dạng :

$$\lambda(x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c) + \mu(x^2 + y^2 + 2a'x + 2b'y + c') = 0 \quad (*)$$

với $\lambda + \mu \neq 0$ đều là phương trình của một đường tròn đi qua hai điểm P và Q.

Nếu $\lambda + \mu = 0$ thì điều gì xảy ra ?

b) Mọi đường tròn đi qua hai điểm P và Q đều có phương trình dạng

$$\lambda(x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c) + \mu(x^2 + y^2 + 2a'x + 2b'y + c') = 0$$

với $\lambda + \mu \neq 0$.

39. Cho hai đường tròn $(\mathscr{C})$ và $(\mathscr{C}')$ lần lượt có phương trình :

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0 \text{ và } x^2 + y^2 - 6x - 8y - 9 = 0.$$

a) Chứng minh rằng hai đường tròn đó cắt nhau. Gọi A và B là các giao điểm.

b) Viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm A, B và điểm $P(3 \,;\, 3)$.

c) Viết phương trình đường tròn đi qua A, B và tiếp xúc với trục hoành.

d) Viết phương trình đường tròn đi qua A, B và tiếp xúc với trục tung.

40. Cho hai đường tròn $(\mathscr{C})$ và $(\mathscr{C}')$ lần lượt có phương trình :

$$x^2 + y^2 - 10x + 24 = 0 \text{ và } x^2 + y^2 - 14x + 24 = 0.$$

Gọi I là một điểm thay đổi trên trục đẳng phương của hai đường tròn đó và $(I ; R)$ là đường tròn tâm I có bán kính R bằng đoạn thẳng tiếp tuyến vẽ từ I tới đường tròn $(\mathscr{C})$. Chứng minh rằng các đường tròn $(I ; R)$ luôn luôn đi qua hai điểm cố định.

41. Cho phương trình $x^2 + y^2 + 2mx + (4m + 5)y - 5(2m + 3) = 0.$ (1)

a) Với giá trị nào của m thì phương trình (1) là phương trình của một đường tròn ?

b) Khi m thay đổi, tìm quỹ tích tâm các đường tròn (1).

c) Chứng minh rằng các đường tròn (1) luôn luôn đi qua hai điểm cố định.

42. Cho phương trình $x^2 + y^2 - 2mx + 2m = 0$ (1), trong đó $m \in \mathbb{R}$.

a) Với giá trị nào của m thì (1) là phương trình của một đường tròn ? Ta kí hiệu đường tròn ứng với giá trị m là $(\mathscr{C}_m)$. Tìm tọa độ tâm và tính bán kính của $(\mathscr{C}_m)$.

b) Chứng minh rằng các đường tròn $(\mathscr{C}_m)$ có chung một trục đẳng phương Δ, tìm phương trình của trục đẳng phương đó.

c) Chứng minh rằng với $m \neq m'$, hai đường tròn $(\mathscr{C}_m)$ và $(\mathscr{C}_{m'})$ không cắt nhau.

d) Cho điểm $(x_0 ; y_0)$ không nằm trên trục đẳng phương Δ, khác với điểm $O(0 ; 0)$ và $A(2 ; 0)$. Hãy tìm m để đường tròn $(\mathscr{C}_m)$ đi qua I.

e) Chứng minh rằng nếu lấy một điểm M thay đổi trên đường tròn $(\mathscr{C}_m)$ thì tỉ số $MO : MA$ không đổi.

§5. ĐƯỜNG ELIP

1. Định nghĩa và phương trình chính tắc của đường elip

a) **Định nghĩa.** Cho hai điểm cố định F_1 và F_2, $F_1F_2 = 2c$, và một số không đổi $a > c$.

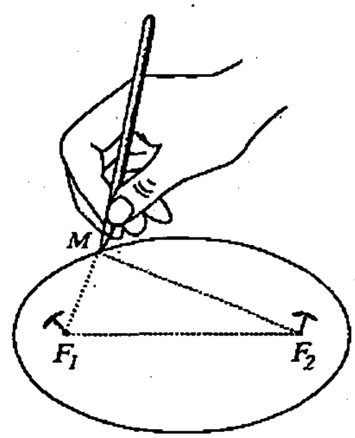
Tập hợp những điểm M sao cho $MF_1 + MF_2 = 2a$ gọi là đường elip (hoặc elip).

Hai điểm F_1 và F_2 gọi là *hai tiêu điểm* của elip, khoảng cách $F_1F_2 = 2c$ gọi là *tiêu cự* của elip. Các đoạn thẳng MF_1 và MF_2 gọi là các *bán kính qua tiêu* của điểm M.

Cách vẽ đường elip

Hãy đóng hai chiếc đinh lên mặt bảng tại hai điểm F_1 và F_2 (h 3.12). Lấy một vòng dây kín không đàn hồi có độ dài lớn hơn hai lần khoảng cách F_1F_2. Quàng sợi dây qua hai chiếc đinh, đặt đầu bút chì vào trong vòng dây rồi căng ra để vòng dây tạo thành một tam giác có hai đỉnh là F_1 và F_2, đỉnh thứ ba là đầu bút chì.

Ta di chuyển đầu bút chì sao cho dây luôn căng và luôn áp sát mặt bảng. Khi đó đầu bút chì sẽ vạch ra một đường elip.



Hình 3.12

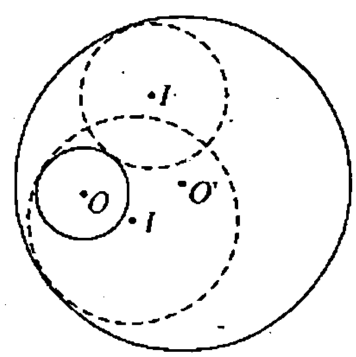
Ví dụ 1. Cho đường tròn $(O\ ;R)$ nằm trong đường tròn $(O'\ ;R')$. Tìm quỹ tích tâm I của những đường tròn tiếp xúc với cả hai đường tròn đó.

Giải.(h 3.13)

Đường tròn $(I\ ;r)$ nếu tiếp xúc với hai đường tròn đã cho thì phải tiếp xúc trong với đường tròn lớn $(O'\ ;R')$, do đó phải có $IO' = R' - r$.

Nếu$(I\ ;r)$ tiếp xúc ngoài với đường tròn $(O\ ;R)$ thì $IO = R' + r$, bởi vậy $IO + IO' = R + R'$. Khi đó quỹ tích I là đường elip với các tiêu điểm là O, O' và $2a = R + R'$.

Nếu $(I\ ;r)$ tiếp xúc trong với đường tròn $(O\ ;R)$ thì $IO = r - R$, bởi vậy $IO + IO' = R' - R$. Khi đó quỹ tích I là đường elip với hai tiêu điểm là O và O', với $2a = R' - R$. □



Hình 3.13

b) Phương trình chính tắc của đường elip

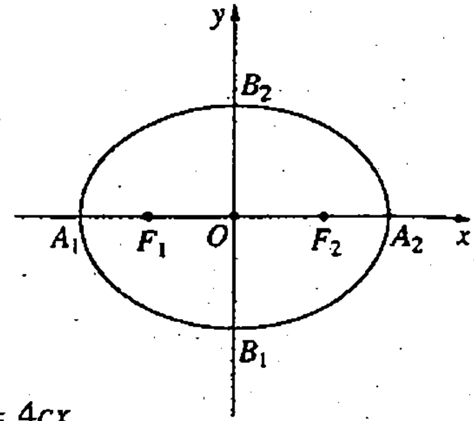
Cho elip (E) như trong định nghĩa. Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho Ox là đường thẳng F_1F_2 (F_2 nằm trên tia Ox), Oy là đường trung trực của đoạn thẳng F_1F_2. (h 3.14).

Khi đó $F_1 = (-c\,;0)$ và $F_2 = (c\,;0)$.

Với điểm $M(x\,;y)$, ta có

$$MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

và $\quad MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$.



Hình 3.14

Suy ra :

$$\left(MF_1 + MF_2\right)\left(MF_1 - MF_2\right) = MF_1^{\,2} - MF_2^{\,2} = 4cx.$$

Điểm M nằm trên elip (E) khi và chỉ khi

$MF_1 + MF_2 = 2a$, do đó $MF_1 - MF_2 = \dfrac{2cx}{a}$.

Từ đó ta tính được các bán kính qua tiêu :

$$\boxed{MF_1 = a + \frac{cx}{a}} \text{ và } \boxed{MF_2 = a - \frac{cx}{a}}.$$

Ta có : $MF_1 = a + \dfrac{cx}{a} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ nên $\left(a + \dfrac{cx}{a}\right)^2 = (x+c)^2 + y^2$.

Rút gọn đẳng thức trên, ta được :

$$\left(\frac{a^2 - c^2}{a^2}\right)x^2 + y^2 = a^2 - c^2 \text{ hay } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Vì $a^2 - c^2 > 0$ nên có thể chọn số $b > 0$ sao cho $a^2 - c^2 = b^2$ và ta được :

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > b > 0)} \qquad (1)$$

Ngược lại, có thể chứng minh được rằng nếu $M(x\,;y)$ thoả mãn (1) thì

$$MF_1 = a + \frac{cx}{a}\,;\ MF_2 = a - \frac{cx}{a} \Rightarrow MF_1 + MF_2 = 2a \Rightarrow M \in (E).$$

Phương trình (1) gọi là *phương trình chính tắc* của đường elip (E).

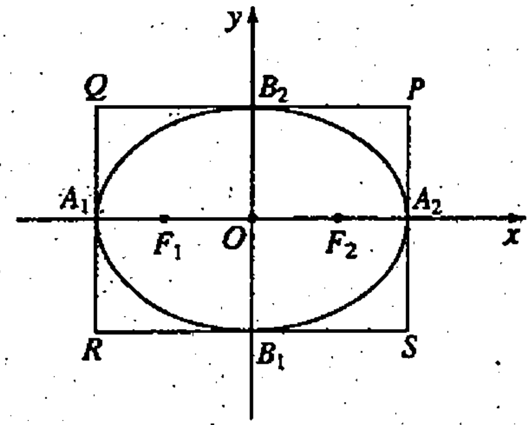
c) Hình dạng đường elip

Từ phương trình (1) của đường elip ta suy ra (xem h. 3.15) :

– Đường elip có hai trục đối xứng : đó là đường thẳng F_1F_2 đi qua hai tiêu điểm F_1, F_2 và đường thẳng trung trực của đoạn thẳng F_1F_2.

– Đường elip có tâm đối xứng là giao điểm O của hai trục đối xứng.

– Trục Ox cắt elip tại hai điểm $A_1(-a\,;0)$ và $A_2(a\,;0)$, trục Oy cắt elip tại hai điểm $B_1(0\,;-b)$ và $B_2(0\,;b)$. Các điểm đó gọi là *đỉnh* của elip. Độ dài đoạn thẳng $A_1A_2 = 2a$ gọi là *trục lớn* của elip. Độ dài đoạn thẳng $B_1B_2 = 2b$ gọi là *trục bé* của elip. Chú ý rằng $b^2 = a^2 - c^2$.



Hình 3.15

– Nếu ta lấy các điểm $P(a\,;b)$, $Q(-a\,;b)$, $R(-a\,;-b)$, $S(a\,;-b)$ thì bốn điểm đó là bốn đỉnh của một hình chữ nhật, gọi là hình *chữ nhật cơ sở* của elip.

Chú ý rằng nếu điểm $M(x\,;y)$ thuộc elip thì $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Suy ra $-a \le x \le a$ và $-b \le y \le b$. Bởi vậy toàn bộ đường elip, trừ các đỉnh, đều nằm trong hình chữ nhật cơ sở *PQRS*. Các đỉnh của elip là trung điểm các cạnh của hình chữ nhật cơ sở.

d) Tâm sai của elip

Định nghĩa. Tỉ số giữa tiêu cự và độ dài trục lớn của elip gọi là *tâm sai* của elip và kí hiệu là e. Vậy $e = \dfrac{c}{a}$.

Vì $a > c$ nên $0 < e < 1$. Hơn thế, do $\dfrac{b}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} = \sqrt{1 - e^2}$, suy ra :

– Nếu tâm sai e càng bé (tức là càng gần 0) thì b càng gần a, nghĩa là hình chữ nhật cơ sở của elip càng gần với hình vuông. Do đó đường elip càng "béo".

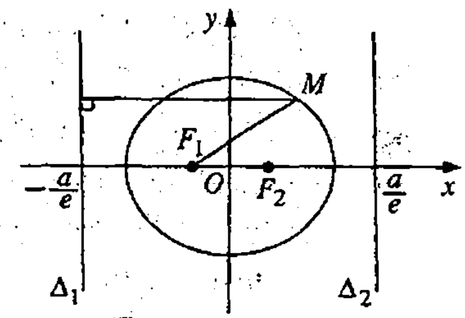
– Nếu tâm sai e càng lớn (tức là càng gần 1) thì tỉ số $\dfrac{b}{a}$ càng bé, nghĩa là hình chữ nhật cơ sở của elip càng "dẹt". Do đó đường elip càng "gầy".

Đường chuẩn của elip

Định nghĩa. Cho elip có phương trình $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$. Đường thẳng Δ_1 có phương trình $x + \dfrac{a}{e} = 0$ gọi là *đường chuẩn của elip ứng với tiêu điểm* F_1, còn đường thẳng Δ_2 có phương trình $x - \dfrac{a}{e} = 0$ gọi là *đường chuẩn của elip ứng với tiêu điểm* F_2.

Định lí 1. *Nếu M nằm trên đường elip thì tỉ số khoảng cách từ M tới tiêu điểm và từ M tới đường chuẩn tương ứng luôn bằng tâm sai e của elip :*

$$\frac{MF_1}{d(M,\Delta_1)} = \frac{MF_2}{d(M,\Delta_2)} = e$$



Hình 3.16

Chứng minh (h. 3.16). Điểm $M(x\,;\,y)$ nằm trên elip thì $MF_1 = a + \frac{c}{a}x = a + ex$ và

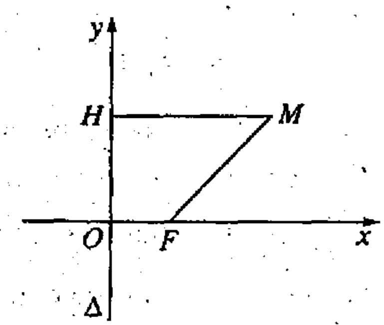
$$d(M,\Delta_1) = \left|x + \frac{a}{e}\right| = \frac{|a + ex|}{e} = \frac{a + ex}{e}.$$

Bởi vậy $\frac{MF_1}{d(M,\Delta_1)} = e$. Phần còn lại chứng minh tương tự. □

Ngược lại ta có :

Định lí 2. *Cho điểm F không nằm trên đường thẳng Δ. Tập hợp các điểm M sao cho tỉ số khoảng cách từ M tới F và từ M tới đường thẳng Δ bằng một số không đổi e < 1 là một đường elip.*

Chứng minh. Ta chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho Oy là Δ và Ox đi qua F (h.3.17) Giả sử $F(p\,;\,0)$. Với điểm $M(x\,;\,y)$, ta có $MF = \sqrt{(x-p)^2 + y^2}$ và $d(M,\Delta) = |x|$.



Hình 3.17

Vậy : $\frac{MF}{d(M,\Delta)} = e \Leftrightarrow (x-p)^2 + y^2 = e^2x^2$

$$\Leftrightarrow (1-e^2)x^2 - 2px + p^2 + y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2\frac{p}{1-e^2}x + \frac{y^2 + p^2}{1-e^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{p}{1-e^2}\right)^2 - \frac{p^2}{(1-e^2)^2} + \frac{y^2 + p^2}{1-e^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{p}{1-e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{e^2p^2}{(1-e^2)^2}. \qquad (*)$$

Đặt $a = \frac{|ep|}{1-e^2}$ và $b = a\sqrt{1-e^2}$ thì $a > 0$, $b > 0$ và (*) trở thành :

$$\frac{1}{a^2}\left(x - \frac{p}{1-e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Dùng phép tịnh tiến hệ trục tọa độ : $X = x - \dfrac{p}{1-e^2}$, $Y = y$ thì trong hệ trục tọa độ mới ta có $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$, đó là phương trình của đường elip. □

3. Giao của elip và đường thẳng. Tiếp tuyến của elip

a) Giao của elip và đường thẳng

Cho elip (E) có phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

và cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(\alpha; \beta)$. Phương trình tham số của Δ là :

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t. \end{cases} \qquad (2)$$

Để tìm tọa độ giao điểm của Δ và (E), ta giải hệ phương trình (1) và (2). Thay x và y cho bởi (2) vào phương trình (1), ta được :

$$\frac{(x_0 + \alpha t)^2}{a^2} + \frac{(y_0 + \beta t)^2}{b^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2}\right)t^2 + 2\left(\frac{\alpha x_0}{a^2} + \frac{\beta y_0}{b^2}\right)t + \frac{{x_0}^2}{a^2} + \frac{{y_0}^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Vậy ta được phương trình $Pt^2 + 2Qt + R = 0$ (*), trong đó :

$$P = \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2},\ Q = \frac{\alpha x_0}{a^2} + \frac{\beta y_0}{b^2},\ R = \frac{{x_0}^2}{a^2} + \frac{{y_0}^2}{b^2} - 1.$$

Vì $P > 0$ nên (*) là một phương trình bậc hai đối với t. Bởi vậy :

Nếu $Q^2 - PR > 0$ thì phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt, do đó Δ cắt (E) tại hai điểm phân biệt.

– Nếu $Q^2 - PR = 0$ thì phương trình (*) có một nghiệm kép, do đó Δ cắt (E) tại một điểm duy nhất. Khi đó ta nói rằng Δ là *tiếp tuyến* của (E).

– Nếu $Q^2 - PR < 0$ thì phương trình (*) vô nghiệm, do đó Δ không cắt (E).

Chú ý :

– Nếu $\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} < 1$ thì phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt, tức là mọi đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0\,;\,y_0)$ đều cắt elip (E) tại hai điểm. Ta gọi những điểm M_0 như thế là điểm *nằm trong* elip (E).

– Nếu $\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} > 1$ thì điểm $M_0(x_0\,;\,y_0)$ gọi là *nằm ngoài* elip (E).

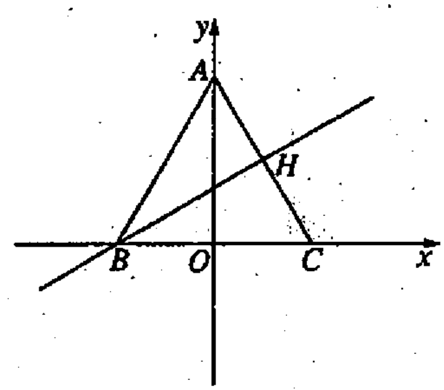
Ví dụ 2. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a và đường cao BH. Chứng minh rằng trên đường thẳng chứa đường cao BH có hai điểm M và N sao cho chu vi ba tam giác MBC, NBC và ABC bằng nhau. Tính độ dài đoạn thẳng MN.

Giải (h. 3.18)

Chọn hệ trục tọa độ sao cho Ox là BC, Oy đường thẳng chứa đường cao AO. Ta có

$$A = \left(0\,;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right),\; B = \left(-\frac{a}{2}\,;0\right),$$

$$C = \left(\frac{a}{2}\,;0\right),\; H = \left(\frac{a}{4}\,;\frac{a\sqrt{3}}{4}\right).$$



Hình 3.18

Điểm M và N phải có điều kiện $MB + MC = NB + NC = AB + AC = 2a$ nên M và N phải nằm trên đường elip có tiêu điểm là B, C, tiêu cự là $2c = a$, nửa trục lớn là a, nửa trục bé là $b = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{4}} = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4}}$. Vậy elip đó có phương trình :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\frac{3a^2}{4}} = 1 \quad \text{hay} \quad 3x^2 + 4y^2 - 3a^2 = 0. \qquad (1)$$

Vì $\overrightarrow{BH} = \left(\frac{3a}{4} ; \frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$ nên có thể lấy vectơ chỉ phương của đường thẳng BH là $\vec{u}\left(\sqrt{3} ; 1\right)$ và đường thẳng BH có phương trình tham số : $x = -\frac{a}{2} + \sqrt{3}t$ và $y = t$. Thay vào phương trình (1) ta có :

$$3\left(-\frac{a}{2} + \sqrt{3}t\right)^2 + 4t^2 - 3a^2 = 0 \text{ hay } 13t^2 - 3\sqrt{3}at - \frac{9a^2}{4} = 0.$$

Phương trình này có hai nghiệm $t_{1,2} = \frac{3\left(\sqrt{3} \pm 4\right)a}{26}$. Vậy đường thẳng BH cắt elip tại hai điểm M và N với

$$M = \left(-\frac{a}{2} + \frac{3\sqrt{3}\left(\sqrt{3} + 4\right)a}{26} ; \frac{3\left(\sqrt{3} + 4\right)a}{26}\right)$$

$$N = \left(-\frac{a}{2} + \frac{3\sqrt{3}\left(\sqrt{3} - 4\right)a}{26} ; \frac{3\left(\sqrt{3} - 4\right)a}{26}\right).$$

Từ đó ta có $MN^2 = \left(\frac{432}{169} + \frac{144}{169}\right)a^2 = \frac{576}{169}a^2$. Vậy $MN = \frac{24a}{13}$. □

b) Phương trình tiếp tuyến của elip

Cho đường elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Gọi $M_0(x_0 ; y_0)$ là một điểm nằm trên elip. Ta hãy tìm phương trình tiếp tuyến của elip tại điểm M.

Gọi Δ là đường thẳng đi qua M_0 có vectơ chỉ phương $\vec{u}(\alpha ; \beta)$ thì để tìm giao điểm của Δ với elip, ta giải phương trình đã biết

$$Pt^2 + 2Qt + R = 0. \qquad (*)$$

Trong trường hợp này, vì $M_0(x_0 ; y_0)$ nằm trên elip nên $R = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1 = 0$, vậy phương trình (*) trở thành $Pt^2 + 2Qt = 0$. Đường thẳng Δ tiếp xúc với elip khi phương trình đó có nghiệm kép, tức là $Q = \frac{\alpha x_0}{a^2} + \frac{\beta y_0}{b^2} = 0$. Ta có thể lấy $\alpha = \frac{y_0}{b^2}$, $\beta = -\frac{x_0}{a^2}$ và do đó, Δ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = \left(\frac{x_0}{a^2} ; \frac{y_0}{b^2}\right)$, và phương trình tiếp tuyến tại M_0 là :

$$\frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) = 0 \text{ hay } \boxed{\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1}.$$

Ví dụ 3. Cho elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ và điểm $M_0(x_0 ; y_0)$ nằm ngoài elip. Hai tiếp tuyến của elip vẽ từ M_0 có các tiếp điểm là M_1 và M_2. Hãy viết phương trình đường thẳng đi qua M_1 và M_2.

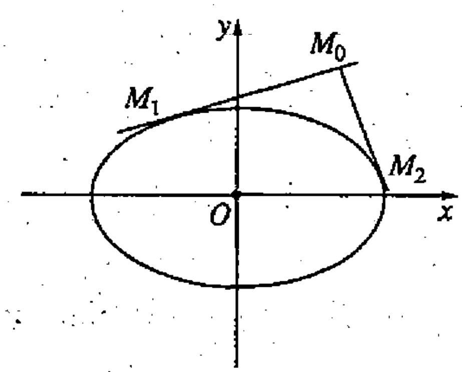
Giải (h. 3.19)

Giả sử tọa độ các tiếp điểm là $M_1(x_1 ; y_1)$ và $M_2(x_2 ; y_2)$. Khi đó tiếp tuyến tại M_1 và M_2 có phương trình lần lượt là :

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1 \text{ và } \frac{x_2 x}{a^2} + \frac{y_2 y}{b^2} = 1.$$

Nhưng vì hai tiếp tuyến đó cùng đi qua điểm $M_0(x_0 ; y_0)$ nên :

$$\frac{x_1 x_0}{a^2} + \frac{y_1 y_0}{b^2} = 1 \text{ và } \frac{x_2 x_0}{a^2} + \frac{y_2 y_0}{b^2} = 1.$$



Hình 3.19

Điều đó chứng tỏ rằng $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$ là phương trình của đường thẳng đi qua hai tiếp điểm M_1 và M_2. □

c) Một tính chất của tiếp tuyến

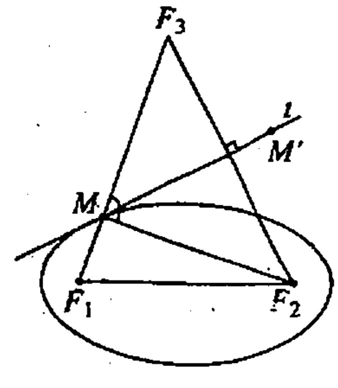
Tính chất. *Nếu điểm M nằm trên elip với hai tiêu điểm F_1, F_2 (và không thẳng hàng với hai tiêu điểm đó) thì phân giác ngoài của tam giác MF_1F_2 ở đỉnh M chính là tiếp tuyến của elip tại M.*

Chứng minh. Giả sử Mt là phân giác ngoài của tam giác MF_1F_2 (h. 3.20). Lấy điểm F_3 đối xứng với F_2 qua đường thẳng Mt thì ba điểm F_1, M, F_3 thẳng hàng và

$$F_1F_3 = MF_1 + MF_3 = MF_1 + MF_2 = 2a.$$

Nếu M' là một điểm nằm trên Mt và khác với điểm M thì

$$M'F_1 + M'F_2 = M'F_1 + M'F_3 > F_1F_3 = 2a.$$



Hình 3.20

Do đó M' không nằm trên elip, tức là đường thẳng Mt chỉ cắt elip tại một điểm M duy nhất. □

d) Điều kiện để đường thẳng tiếp xúc với elip

Định lí 3. *Đường thẳng* Δ: $Ax + By + C = 0$ *tiếp xúc với elip (E)* : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *khi và chỉ khi*

$$a^2A^2 + b^2B^2 = C^2 \ (C \neq 0).$$

Chứng minh. Δ là tiếp tuyến của (E) khi và chỉ khi phương trình $Ax + By + C = 0$ tương đương với phương trình

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} - 1 = 0 \ \left(\text{trong đó } \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1\right).$$

Điều đó xảy ra khi có số $k \neq 0$ sao cho $A = k\dfrac{x_0}{a^2}$, $B = k\dfrac{y_0}{b^2}$, $C = -k$ hay :

$$x_0 = \frac{a^2A}{k} = -\frac{a^2A}{C}, \ y_0 = \frac{b^2B}{k} = -\frac{b^2B}{C}.$$

Từ đó :

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{a^4A^2}{a^2C^2} + \frac{b^4B^2}{b^2C^2} = 1 \Leftrightarrow a^2A^2 + b^2B^2 = C^2 \ (C \neq 0).$$

BÀI TẬP

43. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi C' và D' là các điểm sao cho $\overrightarrow{DC'} = k\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD'} = k\overrightarrow{AD}$ và M là giao điểm của AC' và BD'. Tìm quỹ tích các điểm M khi k thay đổi.

44. Cho điểm M thay đổi trên đường tròn $(O\,;R)$ đường kính AB, H là hình chiếu vuông góc của M trên AB, M' là điểm sao cho $\overrightarrow{HM'} = k\overrightarrow{HM}$, trong đó k là một số không đổi khác không. Tìm quỹ tích điểm M'.

45. Cho hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau, hai điểm A, B lần lượt thay đổi trên a và b sao cho độ dài $AB = d$ không đổi, tìm quỹ tích những điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$, trong đó k là một số không đổi.

46. Cho điểm O cố định nằm trên đường thẳng d cố định, một tia Ot thay đổi. Trên tia Ot lấy hai điểm A và B sao cho $OA = a$, $OB = b$, a và b là những số dương không đổi, $a > b$. Đường thẳng đi qua A vuông góc với d cắt đường thẳng đi qua B song song với d tại điểm M. Tìm quỹ tích các điểm M.

47. Viết phương trình chính tắc của elip (E) trong mỗi trường hợp sau :

a) (E) đi qua điểm $(2\,;2)$ và $(3\,;1)$.

b) (E) có một đỉnh là $A(0\,;-2)$ và có một tiêu điểm là $F(1\,;0)$.

c) (E) đi qua điểm $M(-2\,;12)$ và có một tiêu điểm là $F(-7\,;0)$.

d) (E) có tiêu cự bằng 6 và tâm sai bằng 0,6.

e) (E) có một đường chuẩn là $x - 10 = 0$, một tiêu điểm là $(-3\,;0)$.

48. Viết phương trình đường elip có các tiêu điểm là $F(0\,;1)$ và $F'(1\,;0)$, có độ dài trục lớn bằng 2.

49. Cho elip (E) có phương trình $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b)$ và điểm $I(x_0;y_0)$ nằm trong (E), tức là $\dfrac{x_0^{\,2}}{a^2} + \dfrac{y_0^{\,2}}{b^2} < 1$.

a) Chứng minh rằng mọi đường thẳng d đi qua I đều cắt (E) tại hai điểm phân biệt.

b) Viết phương trình đường thẳng d đi qua I cắt (E) tại hai điểm A, B sao cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB.

c) Viết phương trình đường thẳng d đi qua I sao cho tích $IA.IB$ có giá trị nhỏ nhất hoặc lớn nhất.

d) Gọi d và d' là hai đường thẳng đi qua I và vuông góc với nhau, d cắt (E) tại A và B, d' cắt (E) tại A' và B'. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{IA.IB} + \dfrac{1}{IA'.IB'}$ có giá trị không đổi.

e) Nếu M, N là hai điểm nằm trên (E) sao cho OMN là tam giác vuông tại O. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

50. Tìm quỹ tích những điểm M sao cho từ đó có thể vẽ hai tiếp tuyến vuông góc tới một đường elip (E) đã cho.

51. Cho elip có phương trình $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{18} = 1$.

a) Viết phương trình tiếp tuyến của elip tại điểm M có hoành độ bằng 4.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của elip biết rằng tiếp tuyến đó đi qua điểm $(12 ; -3)$.

c) Viết phương trình tiếp tuyến song song với đường thẳng $x + y = 0$.

52. Cho hai đường thẳng Δ và Δ' vuông góc với nhau. Một elip (E) có trục lớn $2a$ và trục nhỏ $2b$ không đổi luôn luôn tiếp xúc với Δ và Δ'. Tìm quỹ tích tâm của elip (E).

53. Cho đường tròn $(O ; R)$ tiếp xúc với hai đường thẳng song song a và b lần lượt tại A, B. Một tiếp tuyến thay đổi của đường tròn cắt a và b lần lượt tại A' và B'. Tìm quỹ tích giao điểm của AB' và BA'.

54. a) Cho hai điểm phân biệt A, B nằm trên elip (E) và cách đều tâm O của elip. Chứng minh rằng khi đó, hai điểm A, B đối xứng với nhau qua tâm O hoặc đối xứng với nhau qua một trục đối xứng của elip.

b) Chứng minh rằng nếu một hình chữ nhật nội tiếp một elip (E) thì các cạnh của nó phải song song với các trục đối xứng của elip đó.

c) Tìm diện tích lớn nhất của hình chữ nhật nội tiếp elip có trục lớn và trục nhỏ là $2a$ và $2b$.

55. Cho elip (E) và một đường thẳng l cố định. Một đường thẳng d thay đổi song song (hoặc trùng) với l cắt (E) tại A và B. Tìm quỹ tích trung điểm I của đoạn thẳng AB.

56. Chứng minh rằng :

a) Nếu hai dây cung AB và CD của elip song song với nhau thì đường thẳng đi qua trung điểm của AB và CD cũng đi qua tâm của elip đó.

b) Nếu một hình bình hành có bốn đỉnh nằm trên một elip thì tâm của hình bình hành trùng với tâm của elip.

57. Cho elip (E) có hai đỉnh trên trục lớn là A_1 và A_2. Gọi Δ_1 và Δ_2 lần lượt là các tiếp tuyến của (E) tại A_1 và A_2. Một tiếp tuyến tại điểm M của (E) cắt đường thẳng Δ_1 và Δ_2 lần lượt tại các điểm B_1 và B_2.

a) Tìm quỹ tích giao điểm M' của hai đường thẳng A_1B_2 và A_2B_1 khi M thay đổi trên (E).

b) Chứng minh rằng đường thẳng $M'M$ song song với đường thẳng A_1B_1.

c) Gọi P là giao điểm của A_1A_2 và B_1B_2, Q là giao điểm của A_1M và Δ_2, R là giao điểm của A_2M và Δ_1. Chứng minh rằng ba điểm P, Q, R thẳng hàng.

58. Cho elip (E). Chứng minh rằng :

a) Nếu một hình bình hành ngoại tiếp (E) (tức là bốn cạnh của hình bình hành đó đều tiếp xúc với (E)) thì tâm của hình bình hành trùng với tâm của (E).

b) Nếu một hình thoi ngoại tiếp (E) thì các đỉnh của nó phải nằm trên các trục đối xứng của (E).

c) Tính diện tích bé nhất của hình thoi ngoại tiếp một elip (E) đã cho.

§6. ĐƯỜNG HYPEBOL

1. Định nghĩa và phương trình chính tắc

a) **Định nghĩa.** Cho hai điểm cố định F_1 và F_2, $F_1F_2 = 2c$, và một số không đổi $a < c$.

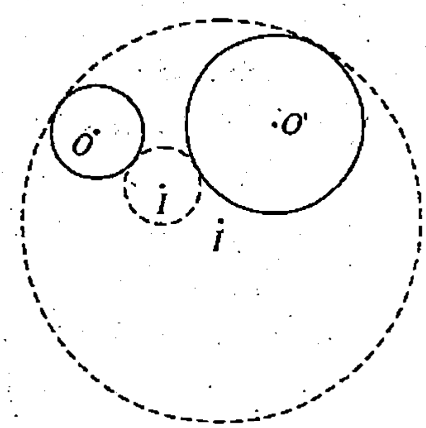
Tập hợp những điểm M sao cho $|MF_1 - MF_2| = 2a$ gọi là đường hypebol (hoặc *hypebol*).

Hai điểm F_1 và F_2 gọi là *hai tiêu điểm* của hypebol, khoảng cách $F_1F_2 = 2c$ gọi là *tiêu cự* của hypebol. Các đoạn thẳng MF_1 và MF_2 gọi là các *bán kính qua tiêu* của điểm M.

Ví dụ 1. Cho đường tròn $(O\,;R)$ nằm ngoài đường tròn $(O'\,;R')$. Tìm quỹ tích tâm I của những đường tròn cùng tiếp xúc ngoài hoặc cùng tiếp xúc trong với cả hai đường tròn đó.

Giải (h.3.21)

Nếu đường tròn $(I\,;r)$ tiếp xúc ngoài với cả hai đường tròn đã cho thì $IO = R + r$ và



Hình 3.21

$IO' = R' + r$ nên $IO - IO' = R - R'$. Nếu đường tròn $(I\,;\,r)$ tiếp xúc trong với cả hai đường tròn đã cho thì $IO = r - R$ và $IO' = r - R'$ nên $IO - IO' = R' - R$.

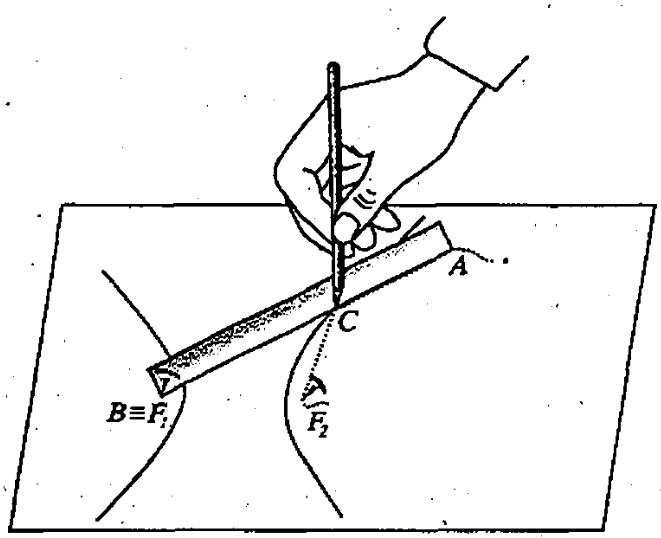
Vậy trong cả hai trường hợp ta có $|IO - IO'| = |R - R'|$. Suy ra :

– Nếu $R = R'$ thì $IO = IO'$ và quỹ tích I là đường trung trực của đoạn thẳng OO'.

– Nếu $R \neq R'$ thì quỹ tích I là đường hypebol với hai tiêu điểm là O, O' và $2a = |R - R'|$. □

Có thể vẽ hypebol như sau (h. 3.22) : Lấy một thước thẳng có mép AB và một sợi dây không đàn hồi có chiều dài l nhỏ hơn chiều dài AB của thước và $l > AB - F_1F_2$. Đóng hai chiếc đinh lên mặt một bảng gỗ tại F_1, F_2. đính một đầu dây vào điểm A và đầu dây kia vào F_2. Đặt thước sao cho điểm B trùng với F_1 và lấy đầu bút chì tì sát sợi dây vào thước thẳng sao cho sợi dây luôn bị căng rồi cho thước quanh quanh F_1, mép thước luôn áp sát mặt gỗ. Khi đó, đầu bút chì C sẽ vạch nên một đường cong. Ta sẽ chứng tỏ đường cong đó là một phần của đường hypebol. Thật vậy, ta có

$$CF_1 - CF_2 = (CF_1 + CA) - (CF_2 + CA) = AB - l \text{ không đổi.}$$



Hình 3.22

b) Phương trình chính tắc của đường hypebol

Cho đường hypebol (H) như trong định nghĩa.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho Ox là đường thẳng F_1F_2, Oy là đường trung trực của đoạn thẳng F_1F_2 (h 3.23). Khi đó $F_1 = (-c\,;\,0)$ và $F_2 = (c\,;\,0)$.

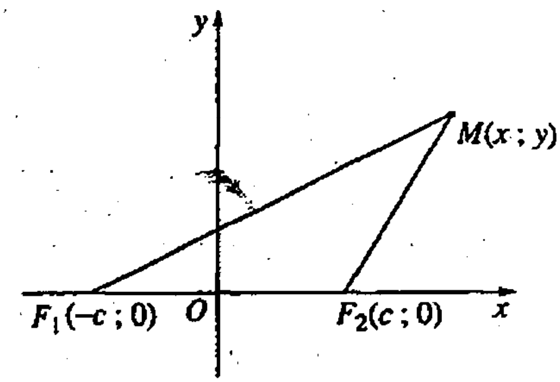
Với điểm $M(x\,;y)$ ta có $MF_1 = \sqrt{(x+c)^2+y^2}$ và $MF_2 = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$.

Suy ra :

$$(MF_1 + MF_2)(MF_1 - MF_2) = MF_1^2 - MF_2^2 = 4cx.$$

Điểm M nằm trên hypebol (H) khi và chỉ khi

$$|MF_1 - MF_2| = 2a.$$



Hình 3.23

Nếu $MF_1 > MF_2$ thì $MF_1 - MF_2 = 2a$

và do đó $MF_1 + MF_2 = \dfrac{2cx}{a}$. Vậy

$$MF_1 = a + \frac{cx}{a} \text{ và } MF_2 = -a + \frac{cx}{a}.$$

Nếu $MF_1 < MF_2$ thì $MF_1 - MF_2 = -2a$

và do đó $MF_1 + MF_2 = -\dfrac{2cx}{a}$. Vậy

$$MF_1 = -\left(a + \frac{cx}{a}\right) \text{ và } MF_2 = a - \frac{cx}{a}.$$

Như vậy trong mọi trường hợp, ta có các công thức để tính bán kính qua tiêu :

$$\boxed{MF_1 = \left|a + \frac{cx}{a}\right|} \text{ và } \boxed{MF_2 = \left|a - \frac{cx}{a}\right|}$$

Ta có : $MF_1 = \left|a + \dfrac{cx}{a}\right| = \sqrt{(x+c)^2+y^2}$ nên $\left(a + \dfrac{cx}{a}\right)^2 = (x+c)^2 + y^2$.

Rút gọn đẳng thức trên ta được :

$$\left(\frac{a^2-c^2}{a^2}\right)x^2 + y^2 = a^2 - c^2 \text{ hay } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1.$$

Vì $a^2 - c^2 < 0$ nên có thể chọn số $b > 0$ sao cho $a^2 - c^2 = -b^2$ và ta được :

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad a > 0, b > 0. \ (1)$$

Ngược lại, có thể chứng minh được rằng nếu $M(x\,;y)$ thoả mãn (1) thì

$$MF_1 = \left|a + \frac{cx}{a}\right|,\ MF_2 = \left|a - \frac{cx}{a}\right| \Rightarrow |MF_1 - MF_2| = 2a \Rightarrow M \in (H).$$

Phương trình (1) gọi là *phương trình chính tắc* của đường hypebol (H).

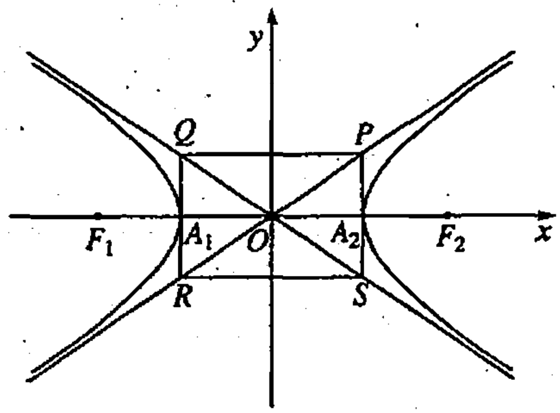
c) Hình dạng đường hypebol

Từ phương trình (1) của đường hypebol ta suy ra (h. 3.24) :

– Đường hypebol có hai trục đối xứng : đó là đường thẳng F_1F_2 đi qua hai tiêu điểm F_1, F_2 và đường thẳng trung trực của đoạn thẳng F_1F_2.

– Đường hypebol có tâm đối xứng là giao điểm O của hai trục đối xứng.

– Trục Ox cắt hypebol tại hai điểm $A_1(-a\,;0)$ và $A_2(a\,;0)$, nó gọi là *trục thực* của hypebol. Hai điểm A_1 và A_2 gọi là *đỉnh* của hypebol. Độ dài đoạn thẳng $A_1A_2 = 2a$ gọi là *độ dài trục thực* của hypebol. Trục Oy không cắt hypebol, nó gọi là *trục ảo* của hypebol. Độ dài $2b$ gọi là *độ dài trục ảo*.



Hình 3.24

– Nếu ta lấy các điểm $P(a\,;b)$, $Q(-a\,;b)$, $R(-a\,;-b)$, $S(a\,;-b)$ thì bốn điểm đó là bốn đỉnh của một hình chữ nhật, gọi là *hình chữ nhật cơ sở* của hypebol.

– Từ phương trình hypebol $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, ta có $x^2=a^2\left(1+\frac{y^2}{b^2}\right)$, suy ra $x^2 \geq a^2$, hay $x \geq a$ hoặc $x \leq -a$. Như vậy đường hypebol gồm có hai nhánh, một nhánh gồm những điểm $M(x;y)$ với $x \geq a$, gọi là *nhánh phải*, một nhánh gồm những điểm $M(x;y)$ với $x \leq -a$, gọi là *nhánh trái*.

– Tỉ số $e=\frac{c}{a}$ gọi là *tâm sai* của hypebol. Vì $c > a$ nên $e > 1$.

d) Đường tiệm cận của hypebol

Định nghĩa. *Hai đường thẳng chứa hai đường chéo của hình chữ nhật cơ sở của hypebol (H) gọi là hai đường tiệm cận của hypebol đó.*

Từ định nghĩa đó suy ra nếu hypebol (H) có phương trình :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0,\, b>0).$$

thì hai đường tiệm cận có phương trình $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$ và $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$.

Chú ý rằng hai đường tiệm cận đó là tập hợp các điểm thỏa mãn phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

Tính chất. *Cho điểm $M_0(x_0\,;\,y_0)$ thay đổi trên hypebol $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Khi đó khoảng cách từ điểm M_0 tới một trong hai đường tiệm cận càng bé nếu $|x_0|$ càng lớn.*

Chứng minh. Gọi d là khoảng cách từ điểm $M_0(x_0\,;\,y_0)$ tới đường tiệm cận $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ thì

$$d = \frac{\left|\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{\left|\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}\right| \cdot \left|\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}\right|}{\left|\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}\right|} = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{1}{\left|\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}\right|}.$$

Tương tự, nếu d' là khoảng cách từ điểm $M_0(x_0;y_0)$ tới đường tiệm cận $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ thì

$$d' = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{1}{\left|\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}\right|}.$$

Bởi vậy :

– Nếu $x_0.y_0 > 0$ và $|x_0|$ càng lớn thì khoảng cách d càng bé, tức là điểm M_0 càng gần sát với đường tiệm cận $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$.

– Nếu $x_0.y_0 > 0$ và $|x_0|$ càng lớn thì khoảng cách d' càng bé, tức là điểm M_0 càng gần sát với đường tiệm cận $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$. □

2. Đường chuẩn của hypebol

Định nghĩa. Cho hypebol có phương trình $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0, b > 0)$.

Đường thẳng Δ_1 có phương trình $x + \frac{a}{e} = 0$ gọi là *đường chuẩn của hypebol* *ứng với tiêu điểm* F_1, còn đường thẳng Δ_2 có phương trình $x - \frac{a}{e} = 0$ gọi là *đường chuẩn của hypebol ứng với tiêu điểm* F_2.

Định lí 1. *Nếu M nằm trên đường hypebol thì tỉ số khoảng cách từ M tới tiêu điểm và từ M tới đường chuẩn tương ứng luôn bằng tâm sai e của hypebol :*

$$\frac{MF_1}{d(M,\Delta_1)} = \frac{MF_2}{d(M,\Delta_2)} = e.$$

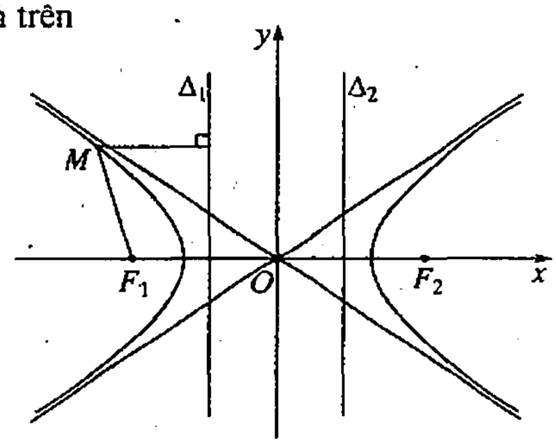
Chứng minh (h. 3.25). Điểm $M(x ; y)$ nằm trên hypebol thì

$$MF_1 = \left|a + \frac{c}{a}x\right| = |a + ex|$$

và $d(M,\Delta_1) = \left|x + \frac{a}{e}\right| = \dfrac{|a + ex|}{e}$.

Bởi vậy $\dfrac{MF_1}{d(M,\Delta_1)} = e$.

Phần còn lại chứng minh tương tự. □



Hình 3.25

Ngược lại ta có :

Định lí 2. *Cho điểm F không nằm trên đường thẳng* Δ. *Tập hợp các điểm M sao cho tỉ số khoảng cách từ M tới F và từ M tới đường thẳng* Δ *bằng một số không đổi* $e > 1$ *là một đường hypebol.*

Chứng minh (h.3.26). Ta chọn hệ trục tọa độ sao cho Oy là Δ và Ox đi qua F. Giả sử $F = (p ; 0)$. Với điểm $M(x ; y)$, ta có

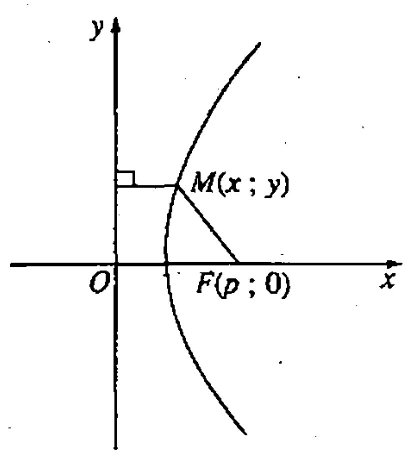
$$MF = \sqrt{(x-p)^2 + y^2} \text{ và } d(M,\Delta) = |x|.$$

Vậy :

$$\frac{MF}{d(M,\Delta)} = e \Leftrightarrow (x-p)^2 + y^2 = e^2x^2$$

$$\Leftrightarrow (1 - e^2)x^2 - 2px + p^2 + y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2\frac{p}{1-e^2}x + \frac{y^2 + p^2}{1-e^2} = 0$$



Hình 3.26

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{p}{1-e^2}\right)^2 - \frac{p^2}{(1-e^2)^2} + \frac{y^2+p^2}{1-e^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{p}{1-e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{e^2p^2}{(1-e^2)^2}. \qquad (*)$$

Đặt $a = \left|\frac{ep}{1-e^2}\right|$ và $b = a\sqrt{e^2-1}$ thì $a > 0$, $b > 0$ và (*) trở thành :

$$\frac{1}{a^2}\left(x - \frac{p}{1-e^2}\right)^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Dùng phép tịnh tiến hệ trục tọa độ $X = x - \frac{p}{1-e^2}$, $Y = y$ thì trong hệ trục tọa độ mới, ta có

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1,$$

đó là phương trình của đường hypebol. □

3. Giao của hypebol và đường thẳng. Tiếp tuyến của hypebol

a) Giao của hypebol và đường thẳng

Cho hypebol (H) có phương trình $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (1) và cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0\,;\,y_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(\alpha\,;\,\beta)$. Phương trình tham số của Δ là :

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases} \qquad (2)$$

Để tìm tọa độ giao điểm của Δ và (H), ta giải hệ phương trình (1) và (2). Thay x và y cho bởi (2) vào phương trình (1), ta được :

$$\frac{(x_0+\alpha t)^2}{a^2} - \frac{(y_0+\beta t)^2}{b^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2}\right)t^2 + 2\left(\frac{\alpha x_0}{a^2} - \frac{\beta y_0}{b^2}\right)t + \frac{x_0{}^2}{a^2} - \frac{y_0{}^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Vậy ta được phương trình $Pt^2 + 2Qt + R = 0$ (*) , trong đó :

$$P = \frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2}, Q = \frac{\alpha x_0}{a^2} - \frac{\beta y_0}{b^2}, R = \frac{x_0^{\ 2}}{a^2} - \frac{y_0^{\ 2}}{b^2} - 1.$$

a) Xét trường hợp $P = \dfrac{\alpha^2}{a^2} - \dfrac{\beta^2}{b^2} = 0$, tức là $\dfrac{\alpha}{a} = \pm\dfrac{\beta}{b}$. Khi đó nếu lấy $\alpha = \dfrac{1}{b}$ thì $\beta = \pm\dfrac{1}{a}$, có nghĩa là đường thẳng Δ song song (hoặc trùng) với một trong hai đường tiệm cận. Trong trường hợp này phương trình (*) trở thành $2Qt + R = 0$ (1), trong đó :

$$Q = \frac{\alpha x_0}{a^2} - \frac{\beta y_0}{b^2} = \frac{x_0}{ba^2} \mp \frac{y_0}{ab^2} = \frac{1}{ab}\left(\frac{x_0}{a} \mp \frac{y_0}{b}\right).$$

Bởi vậy :

– Nếu $Q = 0$ thì $\dfrac{x_0}{a} \pm \dfrac{y_0}{b} = 0$, do đó điểm M_0 nằm trên ít nhất là một trong hai đường tiệm cận. Khi đó $R = -1$ và phương trình (1) vô nghiệm. Như vậy *nếu Δ trùng với một trong hai đường tiệm cận thì nó không cắt hypebol (H).*

– Nếu $Q \neq 0$ thì phương trình (1) có nghiệm duy nhất. Vậy *nếu Δ song song với một trong hai đường tiệm cận thì nó cắt hypebol tại đúng một điểm.*

b) Xét trường hợp $P = \dfrac{\alpha^2}{a^2} - \dfrac{\beta^2}{b^2} \neq 0$, tức là Δ không song song với đường tiệm cận nào thì (*) là một phương trình bậc hai đối với t. Bởi vậy :

– Nếu $Q^2 - PR > 0$ thì phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt, do đó Δ cắt (H) tại hai điểm phân biệt.

– Nếu $Q^2 - PR = 0$ thì phương trình (*) có một nghiệm kép, do đó Δ cắt (H) tại một điểm (kép). Khi đó ta nói rằng Δ là *tiếp tuyến* của (H).

– Nếu $Q^2 - PR < 0$ thì phương trình (*) vô nghiệm, do đó Δ không cắt (H).

Ví dụ 2. Cho hypebol (H) có phương trình $\dfrac{x^2}{3} - \dfrac{y^2}{2} = 1$ và điểm $I(1;2)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua I và cắt (H) tại hai điểm A, B sao cho I là trung điểm của AB.

Giải

Gọi $\vec{u}(\alpha ; \beta)$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ. Khi đó phương trình của Δ là :

$$\begin{cases} x = 1 + \alpha t \\ y = 2 + \beta t. \end{cases}$$

Thay các giá trị x và y vào phương trình của (H) ta được :

$$\frac{(1 + \alpha t)^2}{3} - \frac{(2 + \beta t)^2}{2} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha^2}{3} - \frac{\beta^2}{2}\right)t^2 + 2\left(\frac{\alpha}{3} - \beta\right)t - \frac{8}{3} = 0. \qquad (1)$$

Vì I là trung điểm của AB nên phương trình (1) phải có hai nghiệm đối nhau. Vậy :

$$\frac{\alpha}{3} - \beta = 0 \text{ và } \frac{\alpha^2}{3} - \frac{\beta^2}{2} > 0.$$

Ta có thể lấy $\alpha = 3$, $\beta = 1$ và được phương trình của đường thẳng Δ :

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + t. \end{cases}$$

b) Phương trình tiếp tuyến của hypebol

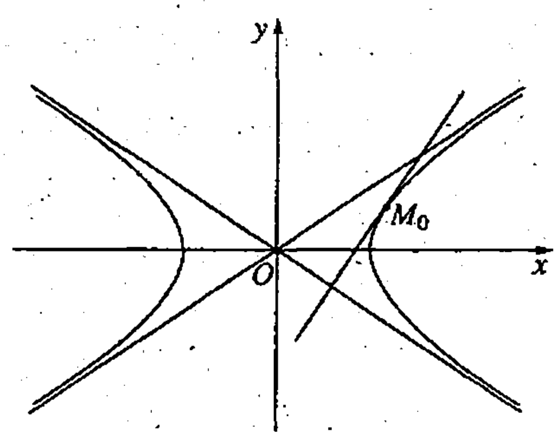
Cho đường hypebol (H) có phương trình $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Gọi $M_0(x_0 ; y_0)$ là một điểm nằm trên hypebol. Ta hãy tìm phương trình tiếp tuyến của hypebol tại điểm M_0 (h. 3.27).

Gọi Δ là đường thẳng đi qua M_0 và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(\alpha ; \beta)$ thì để tìm giao điểm của Δ với hypebol, ta giải phương trình đã biết

$$Pt^2 + 2Qt + R = 0 \qquad (*).$$

Trong trường hợp này, vì $M_0(x_0 ; y_0)$ nằm trên hypebol nên

$$R = \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} - 1 = 0,$$



Hình 3.27

vậy phương trình (*) trở thành $Pt^2 + 2Qt = 0$. Đường thẳng Δ tiếp xúc với hypebol khi phương trình đó có nghiệm kép, tức là $Q = \frac{\alpha x_0}{a^2} - \frac{\beta y_0}{b^2} = 0$. Ta có thể lấy $\alpha = \frac{y_0}{b^2}$, $\beta = \frac{x_0}{a^2}$ và do đó Δ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = \left(\frac{x_0}{a^2} ; -\frac{y_0}{b^2}\right)$ và phương trình tiếp tuyến tại M_0 là :

$$\frac{x_0}{a^2}(x - x_0) - \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) = 0 \text{ hay } \boxed{\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1}$$

Ví dụ 3. Cho hypebol $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ và điểm $M_0(x_0 ; y_0)$ sao cho qua M_0 có thể vẽ được hai tiếp tuyến của hypebol với các tiếp điểm là M_1 và M_2. Hãy viết phương trình đường thẳng đi qua M_1 và M_2.

Giải

Giả sử tọa độ các tiếp điểm là $M_1(x_1 ; y_1)$ và $M_2(x_2 ; y_2)$. Khi đó tiếp tuyến tại M_1 và M_2 có phương trình lần lượt là :

$$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} - 1 = 0 \text{ và } \frac{x_2 x}{a^2} - \frac{y_2 y}{b^2} - 1 = 0.$$

Nhưng vì hai tiếp tuyến đó cùng đi qua điểm $M_0(x_0 ; y_0)$ nên :

$$\frac{x_1 x_0}{a^2} - \frac{y_1 y_0}{b^2} - 1 = 0 \text{ và } \frac{x_2 x_0}{a^2} - \frac{y_2 y_0}{b^2} - 1 = 0.$$

Điều đó chứng tỏ rằng $\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} - 1 = 0$ là phương trình của đường thẳng đi qua hai tiếp điểm M_1 và M_2. □

c) Tính chất của tiếp tuyến

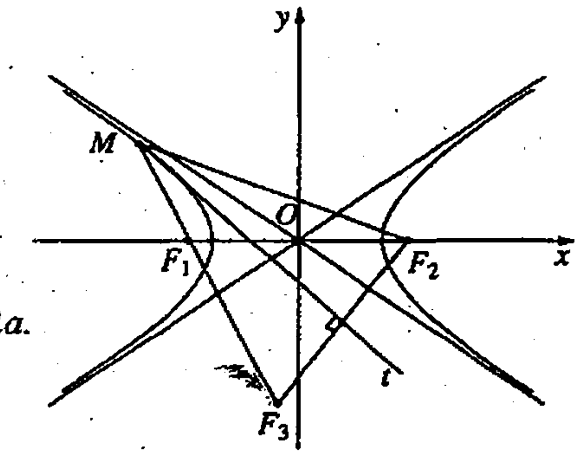
Tính chất. *Nếu điểm M nằm trên hypebol với hai tiêu điểm F_1, F_2 (và không thẳng hàng với hai tiêu điểm đó) thì phân giác trong của tam giác MF_1F_2 ở đỉnh M chính là tiếp tuyến của hypebol tại M.*

Chứng minh (h. 3.28). Giả sử Mt là phân giác trong của tam giác MF_1F_2. Lấy điểm F_3 đối xứng với F_2 qua đường thẳng Mt thì ba điểm F_1, M, F_3 thẳng hàng và M nằm ngoài đoạn thẳng F_1F_3, do đó

$$F_1F_3 = |MF_1 - MF_3| = |MF_1 - MF_2| = 2a.$$

Nếu M' là một điểm nằm trên Mt và khác với điểm M thì

$$|M'F_1 - M'F_2| = |M'F_1 - M'F_3| < F_1F_3 = 2a.$$



Hình 3.28

Do đó M' không nằm trên hypebol, tức là đường thẳng Mt chỉ cắt hypebol tại một điểm M duy nhất. □

d) Điều kiện để đường thẳng tiếp xúc với hypebol

Định lí 3. *Đường thẳng* $\Delta : Ax + By + C = 0$ *tiếp xúc với hypebol (H) :* $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *khi và chỉ khi*

$$a^2A^2 - b^2B^2 = C^2 \ (C \neq 0).$$

Chứng minh. Δ là tiếp tuyến của (H) khi và chỉ khi phương trình $Ax + By + C = 0$ tương đương với phương trình $\dfrac{x_0x}{a^2} - \dfrac{y_0y}{b^2} - 1 = 0$ (trong đó $\dfrac{x_0^2}{a^2} - \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1$). Điều đó xảy ra khi có số $k \neq 0$ sao cho $A = k\dfrac{x_0}{a^2}$, $B = -k\dfrac{y_0}{b^2}$, $C = -k$ hay :

$$x_0 = \frac{a^2A}{k} = -\frac{a^2A}{C},\ y_0 = -\frac{b^2B}{k} = \frac{b^2B}{C}.$$

Từ đó :

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{a^4A^2}{a^2C^2} - \frac{b^4B^2}{b^2C^2} = 1 \Leftrightarrow a^2A^2 - b^2B^2 = C^2 \ (C \neq 0).\ \square$$

BÀI TẬP

59. Cho hai đường thẳng cắt nhau. Tìm quỹ tích những điểm M mà tích khoảng cách từ nó tới hai đường thẳng đó bằng một số không đổi.

60. Cho hai đường thẳng d và d' vuông góc với nhau. Tìm quỹ tích tâm các đường tròn cắt d và d' theo các dây cung có độ dài lần lượt bằng $2a$ và $2a'$.

61. Cho hai điểm A, B cố định. Một đường tròn $(\mathscr{C})$ thay đổi luôn luôn đi qua A và B. Gọi MN là đường kính của $(\mathscr{C})$ mà $MN \parallel AB$. Tìm quỹ tích các điểm M và N.

62. Viết phương trình chính tắc của hypebol trong các trường hợp sau :

a) Trục thực bằng 8, tiêu cự bằng 10.

b) Tiêu cự bằng 6, một tiệm cận là $2x - 3y = 0$.

c) Tâm sai bằng $\sqrt{5}$ và hypebol đi qua điểm $(\sqrt{10}\,;6)$.

d) Có tiêu điểm $(1\,;0)$ và có hai đường tiệm cận vuông góc với nhau.

63. Cho hypebol (H) với hai đường tiệm cận là d và d'. Chứng minh rằng :

a) Nếu một đường thẳng cắt (H) tại A và B, cắt d và d' tại A' và B' thì $AA' = BB'$.

b) Nếu một đường thẳng tiếp xúc với (H) tại I và cắt d, d' tại A' và B' thì I là trung điểm của $A'B'$.

64. Cho hypebol (H) có phương trình $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (H) trong mỗi trường hợp sau :

a) Tiếp điểm có tung độ bằng 4.

b) Δ đi qua điểm $(1\,;0)$.

c) Δ đi qua điểm $(3\,;1)$.

d) Δ song song với đường thẳng $2x + y = 0$.

65. Cho hypebol (H) có phương trình : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

a) Tính độ dài đoạn thẳng của một đường tiệm cận nằm giữa hai đường chuẩn.

b) Tính khoảng cách từ tiêu điểm đến đường tiệm cận.

c) Chứng tỏ rằng chân đường vuông góc kẻ từ tiêu điểm đến một đường tiệm cận nằm trên đường chuẩn tương ứng với tiêu điểm đó.

d) Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ một điểm M nằm trên (H) tới hai đường tiệm cận là một số không đổi.

66. Tìm quỹ tích những điểm từ đó có thể vẽ được hai tiếp tuyến của một hypebol cho trước sao cho hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau.

67. Cho đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ và hypebol $x^2 - y^2 = 4$.

a) Viết phương trình tiếp tuyến chung của đường tròn và hypebol.

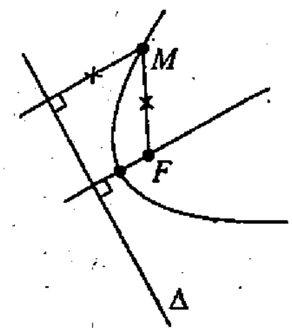
b) Một tiếp tuyến thay đổi của đường tròn cắt hypebol tại hai điểm A, B. Tìm quỹ tích trung điểm của AB.

68. Cho hypebol (H) : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Tìm tập hợp các điểm M sao cho mọi đường thẳng đi qua M mà không song song với các đường tiệm cận thì đều cắt (H) tại hai điểm phân biệt. Những điểm như vậy gọi là *nằm trong* hypebol (H).

§7. ĐƯỜNG PARABOL

1. Định nghĩa và phương trình chính tắc

a) Định nghĩa. *Cho điểm F cố định và một đường thẳng Δ cố định không đi qua F. Tập hợp các điểm M cách đều F và Δ gọi là một đường parabol (hoặc parabol).*



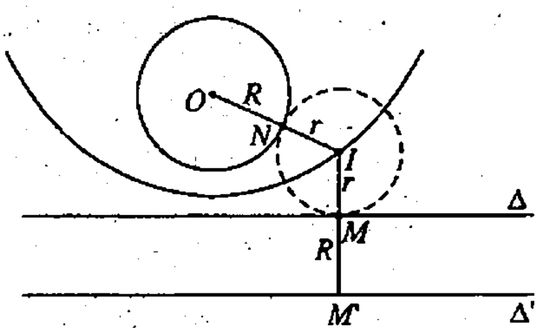
Hình 3.29

Điểm F gọi là *tiêu điểm* của parabol, đường thẳng Δ gọi là *đường chuẩn* của parabol. Khoảng cách từ F tới Δ gọi là *tham số tiêu* của parabol.

Ví dụ 1. Cho đường tròn $(O\,;R)$ và đường thẳng Δ không cắt đường tròn. Tìm quỹ tích tâm các đường tròn tiếp xúc với Δ và tiếp xúc ngoài với $(O\,;R)$.

Giải (h. 3.30)

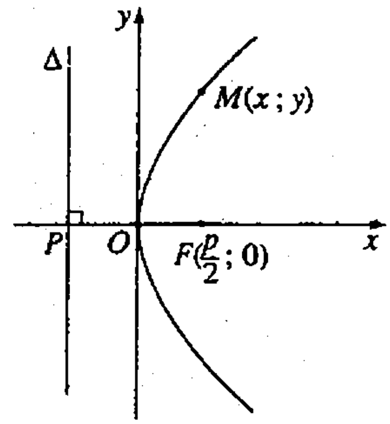
Gọi $(I\,;r)$ là một đường tròn tiếp xúc với Δ tại điểm M và tiếp xúc ngoài với $(O\,;R)$ tại điểm N. Khi đó ta có $IO = R + r$ và $IM = r$. Trên tia IM lấy điểm M' sao cho $MM' = R$ và gọi Δ' là đường thẳng đi qua M' và song song với Δ. Khi đó Δ' là đường thẳng cố định và $IO = IM'$. Quỹ tích các điểm I là parabol có tiêu điểm O và đường chuẩn Δ'.



Hình 3.30

b) Phương trình chính tắc của parabol

Cho parabol (P) với tiêu điểm F và đường chuẩn Δ. Gọi P là chân đường vuông góc vẽ từ F tới Δ. Đặt $FP = p$ (p là tham số tiêu). Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho O là trung điểm của PF và F nằm trên tia Ox (h. 3.31).



Hình 3.31

Khi đó ta có $F = \left(\frac{p}{2}; 0\right)$, $P = \left(-\frac{p}{2}; 0\right)$ và đường thẳng Δ có phương trình $x + \frac{p}{2} = 0$.

Điểm $M(x ; y)$ nằm trên parabol (P) khi và chỉ khi khoảng cách từ M tới F bằng khoảng cách từ M tới Δ, tức là :

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right| \Leftrightarrow \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \text{ hay :}$$

$$\boxed{y^2 = 2px \ (p > 0)} \qquad (1)$$

Phương trình (1) gọi là *phương trình chính tắc* của parabol (P).

Từ phương trình trên ta suy ra các tính chất của parabol :

– Đường thẳng đi qua tiêu điểm và vuông góc với đường chuẩn là trục đối xứng của parabol.

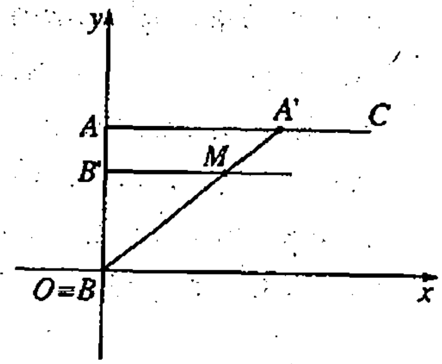
– Trục đối xứng cắt parabol tại điểm O gọi là *đỉnh* của parabol.

– Parabol nằm trong nửa mặt phẳng chứa điểm F và có bờ là trung trực của đoạn thẳng FP.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC vuông tại A, với $AC = b$, $AB = c$. Lấy hai điểm A' và B' sao cho $\overrightarrow{AA'} = k\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BB'} = k\overrightarrow{BA}$. Đường thẳng đi qua B' song song với AC cắt đường thẳng BA' tại điểm M. Tìm quỹ tích điểm M khi k thay đổi.

Giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho Ox là đường thẳng đi qua B và song song với AC, Oy là đường thẳng BA (h.3.32). Khi đó $B = (0 ; 0)$, $A = (0 ; c)$, $C = (b ; c)$, $A' = (kb ; c)$, $B' = (0 ; kc)$. Đường thẳng đi qua B' và song song với AC có phương trình $y = kc$. Đường thẳng BA' có phương trình $cx - kby = 0$. Hai đường thẳng đó cắt nhau tại điểm M có tọa độ $(x ; y)$ thỏa mãn hệ $\begin{cases} y = kc \\ cx - kby = 0. \end{cases}$



Hình 3.32

Khử k từ hai phương trình đó, ta được $cx = \dfrac{by^2}{c}$ hay $y^2 = \dfrac{c^2}{b}x$. Vậy quỹ tích M là đường parabol có tiêu điểm $F\left(\dfrac{c^2}{4b} ; 0\right)$ và đường chuẩn $x + \dfrac{c^2}{4b} = 0$. □

2. Giao của parabol và đường thẳng. Tiếp tuyến của parabol

a) Giao của parabol và đường thẳng

Cho parabol (P) có phương trình chính tắc $y^2 = 2px$ và cho đường thẳng d đi qua điểm $I(x_0 ; y_0)$, có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a ; b)$, tức là có phương trình :

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt. \end{cases}$$

Để tìm giao điểm của (P) và d, ta giải phương trình : $(y_0 + bt)^2 = 2p(x_0 + at)$ hay

$$b^2t^2 + 2(by_0 - pa)t + y_0^2 - 2px_0 = 0. \quad (1)$$

Nếu $b = 0$ tức đường thẳng d song song (hoặc trùng) với trục hoành thì phương trình (1) trở thành $-2pat + y_0^2 - 2px_0 = 0$. Vì $a > 0$, $p > 0$ nên phương trình có một nghiệm, tức là đường thẳng d cắt (P) tại một điểm.

Nếu $b \neq 0$ tức đường thẳng d không song song (và không trùng) với trục hoành thì phương trình (1) có hai nghiệm, nghiệm kép hoặc vô nghiệm, do đó đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm phân biệt, tại một điểm (kép) hoặc không cắt (P).

Trong trường hợp d cắt (P) tại một điểm (kép), ta nói rằng d *tiếp xúc* với (P) tại điểm đó hoặc d là *tiếp tuyến* của (P) với điểm đó là *tiếp điểm*.

b) Phương trình tiếp tuyến của parabol

Cho parabol (P) có phương trình $y^2 = 2px$. Ta hãy viết phương trình tiếp tuyến d của (P) tại điểm $M_0(x_0 ; y_0)$ nằm trên (P).

Nếu tiếp tuyến d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a ; b)$ thì phương trình $b^2t^2 + 2(by_0 - pa)t + y_0^2 - 2px_0 = 0$ phải có nghiệm kép. Vì điểm M_0 nằm trên (P) nên $y_0^2 - 2px_0 = 0$, do đó phương trình trên trở thành $b^2t^2 + 2(by_0 - pa)t = 0$. Để phương trình này có nghiệm kép, điều kiện cần và đủ là $b \neq 0$ và $by_0 - pa = 0$. Vậy ta có thể lấy $a = y_0$, $b = p$ và $\vec{u} = (y_0 ; p)$. Khi đó d có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (-p ; y_0)$ và do đó có phương trình

$$-p(x - x_0) + y_0(y - y_0) = 0 \text{ hay } y_0y - y_0^2 = px - px_0.$$

Chú ý rằng $y_0^2 - 2px_0 = 0$, ta đi đến phương trình tiếp tuyến là

$$\boxed{y_0y = p(x_0 + x)}$$

c) Tính chất của tiếp tuyến

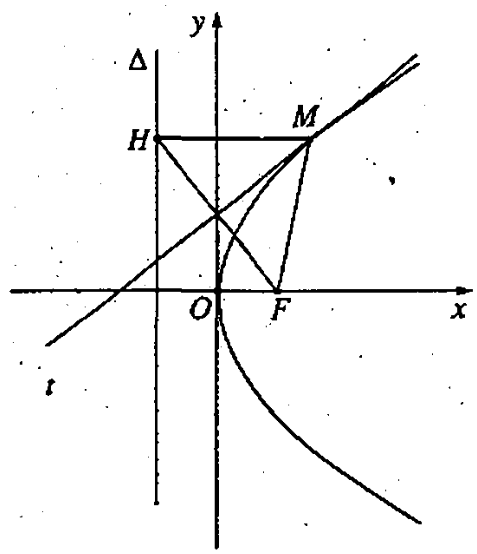
Tính chất. *Cho parabol (P) với tiêu điểm F và đường chuẩn Δ. Gọi M là một điểm trên (P) và H là chân đường vuông góc hạ từ M tới Δ. Khi đó tiếp tuyến Mt của (P) tại M là phân giác của góc FMH.*

Chứng minh (h.3.33). Nếu $M = (x_0 ; y_0)$ thì tiếp tuyến Mt có phương trình

$$y_0y = p(x_0 + x).$$

Ta có

$$H = \left(-\frac{p}{2} ; y_0\right),\ F = \left(\frac{p}{2} ; 0\right),\ \overrightarrow{HF} = (p ; -y_0).$$



Hình 3.33

Từ đó suy ra $Mt \perp HF$. Nhưng vì $MH = MF$ nên tam giác FMH là tam giác cân đỉnh M. Suy ra Mt là phân giác của góc FMH.

d) Điều kiện để đường thẳng tiếp xúc với parabol

Định lí. *Để đường thẳng $\Delta : Ax + By + C = 0$ tiếp với parabol $(P) : y^2 = 2px$, điều kiện cần và đủ là : $pB^2 = 2AC$.*

Chứng minh. Δ là tiếp tuyến của (P) khi và chỉ khi phương trình $Ax + By + C = 0$ tương đương với phương trình $y_0 y = p(x_0 + x)$ hay $px - y_0 y + px_0 = 0$. Điều đó xảy ra khi có số $k \neq 0$ sao cho $A = kp$, $B = -ky_0$, $C = kpx_0$ hay : $x_0 = \frac{C}{kp} = \frac{C}{A}$, $y_0 = -\frac{B}{k} = -\frac{Bp}{A}$. Từ đó :

$$y_0^2 = 2px_0 \Leftrightarrow \frac{B^2p^2}{A^2} = 2p.\frac{C}{A} \Leftrightarrow pB^2 = 2AC. \square$$

3. Đường cônic

Định nghĩa. *Cho đường thẳng Δ và một điểm F không nằm trên nó. Tập hợp những điểm M sao cho tỉ số khoảng cách từ M đến điểm F và từ M đến đường thẳng Δ luôn bằng một số e dương không đổi gọi là một đường cônic với tiêu điểm F, đường chuẩn Δ và tâm sai e.*

Từ các tính chất về đường chuẩn của elip, hypebol và parabol ta suy ra :

Elip là đường cônic có tâm sai bé hơn 1.

Hypebol là đường cônic có tâm sai lớn hơn 1.

Parabol là đường cônic có tâm sai bằng 1.

Khoảng thế kỉ thứ ba trước công nguyên, nhà toán học Apollonius đã chứng minh được rằng : Cắt một mặt nón tròn xoay bởi một mặt phẳng không đi qua đỉnh của nó thì giao tuyến là một đường elip, đường hypebol hoặc đường parabol. Chính vì vậy các giao tuyến đó có tên gọi là đường cônic (vì trong tiếng Anh, mặt nón gọi là *cone*).

BÀI TẬP

69. Chứng minh rằng đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) là một đường parabol. Tìm tọa độ tiêu điểm và phương trình đường chuẩn của parabol đó.

70. Viết phương trình chính tắc của đường parabol (P) trong mỗi trường hợp sau :

a) Tiêu điểm có tọa độ $(1 ; 0)$.

b) Đường chuẩn có phương trình $x + 4 = 0$

c) Đi qua điểm $(3 ; -6)$.

d) Tiếp xúc với đường thẳng $x - y + 1 = 0$.

71. Viết phương trình của parabol (P) trong mỗi trường hợp sau :

a) Có tiêu điểm là $O(0\,;\,0)$ và đường chuẩn Δ có phương trình $x + y + 1 = 0$.

b) Có đỉnh là điểm $I(1\,;\,2)$ và tiêu điểm có tọa độ $F(4\,;\,1)$.

c) (P) đi qua hai điểm $\left(-\frac{1}{2}\,;\,-\frac{1}{2}\right)$, $(0\,;\,1)$ và có trục đối xứng là đường thẳng $x + y + 1 = 0$. Xác định tọa độ tiêu điểm và phương trình đường chuẩn của (P).

72. Cho parabol (P) có phương trình $y^2 = 4x$. Viết phương trình tiếp tuyến của (P) trong mỗi trường hợp sau đây :

a) Tiếp tuyến đi qua điểm $(1\,;-2)$

b) Tiếp tuyến đi qua điểm $(2\,;\,3)$

c) Tiếp tuyến đi qua điểm $(1\,;\,-1)$.

73. Cho parabol (P) có phương trình $y^2 = 2px$.

a) Tính độ dài cạnh của tam giác đều có ba đỉnh nằm trên (P), một trong chúng là đỉnh của (P).

b) Tìm bán kính lớn nhất của đường tròn nằm trong (P) sao cho nó chỉ có một điểm chung với (P) là đỉnh của (P).

c) Một đường thẳng thay đổi luôn luôn đi qua tiêu điểm F cắt (P) tại A và B. Chứng minh rằng đường tròn đường kính AB luôn luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định.

d) Gọi I là điểm cố định nằm trên trục đối xứng của (P) và khác với O, Δ là đường thẳng thay đổi cắt (P) tại A và B. Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ A và B tới trục đối xứng của (P) có giá trị không đổi.

e) Tìm quỹ tích các điểm M qua đó có thể kẻ được hai tiếp tuyến của (P) vuông góc với nhau.

74. Cho đồ thị (C) của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ và parabol (P) có phương trình $y^2 = 2px$ $(p \neq 0)$. Chứng minh rằng nếu (C) cắt (P) tại bốn điểm phân biệt thì bốn điểm đó nằm trên một đường tròn.

75. Viết phương trình tiếp tuyến chung của parabol $y^2 = 2x$ và elip $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

Chương IV

CÁC PHÉP BIẾN HÌNH TRONG MẶT PHẲNG

§1. ĐẠI CƯƠNG VỀ PHÉP BIẾN HÌNH TRONG MẶT PHẲNG

1. Định nghĩa

Nếu với mỗi điểm M thuộc mặt phẳng, bằng một quy tắc f, ta tìm được điểm duy nhất M' thuộc mặt phẳng ấy thì f được gọi là phép biến hình trong mặt phẳng. Khi đó ta nói f biến điểm M thành điểm M' và kí hiệu $f : M \mapsto M'$ hoặc $f(M) = M'$. Điểm M' được gọi là ảnh của điểm M qua phép biến đổi f và điểm M là tạo ảnh của M'.

2. Quan niệm về một hình hình học

Vì phép biến đổi f được thiết lập trên đối tượng là điểm nên khi tiến hành khảo sát các hình hình học bằng phép biến đổi f, ta coi hình gồm các điểm hợp thành. Tóm lại hình là một tập hợp điểm. Đôi khi người ta coi giữa hình và tập hợp điểm khác nhau ở chỗ : hình là tập hợp điểm đã được định nghĩa và khi nói tới hình, ta có thể hình dung ngay hình dạng của tập hợp này. Chẳng hạn đoạn thẳng, đường tròn, tam giác ... là những tập hợp điểm đã được định nghĩa ứng với các tên gọi riêng nên các tập hợp này là hình.

3. Ảnh của hình qua phép biến đổi

Cho một tập hợp điểm $\mathcal{H}$ và phép biến đổi f. Tập hợp ảnh của mọi điểm thuộc $\mathcal{H}$ qua phép biến đổi đó lập thành một tập hợp điểm $\mathcal{H}'$ được gọi là ảnh của $\mathcal{H}$. Nếu $\mathcal{H}$ là một hình và $\mathcal{H}'$ là hình, thì ta nói hình $\mathcal{H}$ biến thành $\mathcal{H}'$ hoặc hình $\mathcal{H}'$ là ảnh của $\mathcal{H}$. Nếu $\mathcal{H}'$ là tập hợp chưa có định nghĩa thì ta có thể cho $\mathcal{H}'$ một định nghĩa.

4. Phép biến đổi 1 – 1 và phép biến đổi ngược

Giả sử f là phép biến đổi biến điểm M thành điểm M'. Đương nhiên có thể có nhiều điểm M có cùng một ảnh M' qua phép biến đổi đó. Chẳng hạn, phép chiếu vuông góc lên một đường thẳng ; nếu M' là hình chiếu của M trên một đường thẳng d thì ngoài M còn có vô số các điểm khác M có cùng hình chiếu M'. Nếu M' chỉ ứng với điểm M duy nhất thì ta nói f là phép biến đổi 1 – 1. Tóm lại, f là phép biến đổi 1 – 1 nếu mọi ảnh M' của M qua phép biến đổi đó ứng với duy nhất điểm M. Nếu f là phép biến đổi 1 – 1 biến điểm M thành M' thì tồn tại một phép biến đổi biến M' thành điểm M. Phép biến đổi như vậy gọi là phép biến đổi ngược của f và được kí hiệu f^{-1}. Có trường hợp f^{-1} lại là f, khi đó ta nói f có tính đối hợp. Chẳng hạn phép đối xứng qua tâm hoặc qua trục có tính chất đối hợp. Một phép biến đổi biến mọi điểm M thành chính nó được gọi là phép đồng nhất.

5. Tập hợp bất biến và điểm bất động

Cho tập hợp điểm $\mathcal{H}$ và phép biến đổi f. Nếu ảnh của mọi điểm thuộc $\mathcal{H}$ qua phép biến đổi đã cho cũng thuộc $\mathcal{H}$ thì $\mathcal{H}$ được gọi là **tập hợp bất biến** qua phép biến đổi đó.

Ta nói điểm M là bất động qua phép biến đổi f nếu $f(M) = M$. Tập hợp điểm $\mathcal{H}$ được gọi là bất động qua f nếu $\mathcal{H}$ gồm toàn thể các điểm bất động qua f. Chẳng hạn trục đối xứng là đường thẳng bất động qua phép đối xứng với trục đó.

6. Hai phép biến đổi trùng nhau

Cho hai phép biến đổi f và g xác định trên toàn mặt phẳng. Ta nói f và g trùng nhau hoặc f và g chỉ là một nếu ảnh của mọi điểm M qua hai phép biến đổi đó trùng nhau. Tức là $f(M) = g(M)$.

Rõ ràng f là một phép biến đổi đồng nhất nếu mọi điểm thuộc mặt phẳng là điểm bất động của f, nghĩa là $f(M) = M \ \forall M$.

7. Tích của hai phép biến hình

Cho hai phép biến hình f và g. Với mỗi điểm M, giả sử $f : M \mapsto M_1$ và $g : M_1 \mapsto M_2$. Như vậy tồn tại một quy tắc để từ điểm M, ta tìm được điểm duy nhất M_2. Quy tắc đó được gọi là tích của hai phép biến hình f, g và được kí hiệu là $g \circ f$. Trong cách kí hiệu này, f được thực hiện trước và g được thực hiện sau. Nói chung $g \circ f$ khác $f \circ g$, nghĩa là ảnh của điểm M qua phép biến đổi $g \circ f$ khác với ảnh của M qua phép biến đổi $f \circ g$.

§2. PHÉP ĐỐI XỨNG QUA TÂM

1. Định nghĩa

Cho trước điểm O. Phép biến đổi $Đ_0$ biến O thành O và biến mọi điểm M khác O thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$ được gọi là phép đối xứng qua tâm. Điểm O được gọi là tâm của phép đối xứng hoặc là tâm đối xứng.

Cho hình $\mathcal{H}$. Tập hợp ảnh của mọi điểm thuộc $\mathcal{H}$ qua phép đối xứng tâm $Đ_O$ lập thành một hình $\mathcal{H}'$ được gọi là ảnh của hình $\mathcal{H}$. Nếu $\mathcal{H}'$ trùng với $\mathcal{H}$ thì ta nói $\mathcal{H}$ là hình có tâm đối xứng.

2. Tính chất

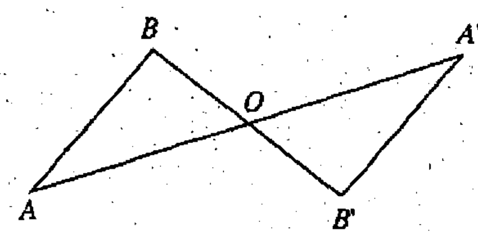
• ***Tính chất 1.*** Phép đối xứng tâm $Đ_O$ có một điểm bất động duy nhất.

Chứng minh. Nếu O' là một điểm bất động của $Đ_O$, nghĩa là $Đ_O : O' \mapsto O'$ thì $\overrightarrow{OO'} = -\overrightarrow{OO'} \Rightarrow 2\overrightarrow{OO'} = \vec{0} \Rightarrow O' \equiv O$. □

• ***Tính chất 2.*** Nếu A' và B' là ảnh của hai điểm A và B qua phép đối xứng tâm $Đ_O$ thì $\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB}$.

Chứng minh (h. 4.1). Theo định nghĩa ta có $\overrightarrow{OA'} = -\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB'} = -\overrightarrow{OB}$. Suy ra :

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'}$$
$$= -\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}$$
$$= -\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) = -\overrightarrow{AB}.$$



Hình 4.1

Đó là điều cần chứng minh. □

• ***Tính chất 3.*** Phép đối xứng tâm $Đ_O$ là phép biến hình 1 – 1.

Chứng minh. Thật vậy, nếu điểm A' là ảnh của các điểm A và B qua phép đối xứng tâm $Đ_O$ thì ta có $\overrightarrow{OA'} = -\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OA'} = -\overrightarrow{OB}$, suy ra $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} \Rightarrow A \equiv B$. □

Tính chất 3 cho ta thấy phép đối xứng tâm $Đ_O$ có phép biến đổi ngược và phép biến đổi ngược cũng chính là $Đ_O$.

• ***Tính chất 4.*** Phép đối xứng tâm $Đ_O$ biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng.

Chứng minh. Giả sử A', B', C' là ảnh của các điểm A, B, C qua phép đối xứng tâm $Đ_O$. Theo tính chất 2, ta có $\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B'C'} = -\overrightarrow{BC}$. Vì A, B, C thẳng hàng nên $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \exists k$ sao cho $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC}$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{B'C'} \Leftrightarrow \overrightarrow{A'B'}$ cùng phương với $\overrightarrow{B'C'}$. Điều đó chứng tỏ A', B', C' thẳng hàng. □

Hệ quả. Phép đối xứng tâm $Đ_O$ biến :

i) Đường thẳng d thành đường thẳng d' và $d // d'$ hoặc $d \equiv d'$.

ii) Tia Sx thành tia $S'x'$ ngược chiều với Sx.

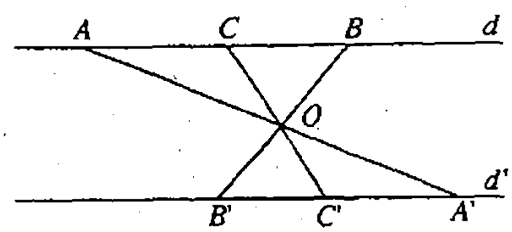
iii) Đoạn AB thành đoạn $A'B'$ và $A'B' = AB$.

iv) Góc $\widehat{xSy}$ thành góc $\widehat{x'S'y'}$ và $\widehat{xSy} = \widehat{x'S'y'}$.

v) Đường tròn $(I\,;R)$ thành đường tròn $(I'\,;R)$.

Chứng minh

i) (h. 4.2) Lấy trên d hai điểm A và B phân biệt. Gọi A' và B' lần lượt là ảnh của A và B qua phép đối xứng tâm $Đ_O$. Nếu C là điểm bất kì thuộc d và C' là ảnh của C qua $Đ_O$ thì A', B', C' thẳng hàng. Điều đó chứng tỏ C' thuộc đường thẳng $A'B'$ hay C' thuộc d'.

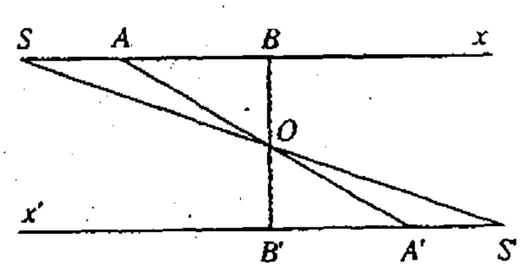


Hình 4.2

Đảo lại, nếu C' thuộc đường thẳng $A'B'$ thì ta chọn điểm C là ảnh của C' qua $Đ_O$. Vì A, B là ảnh của A', B' qua $Đ_O$ nên C thuộc đường thẳng AB hay C thuộc d. Như vậy, tồn tại điểm C trên d sao cho C' là ảnh của C.

Theo tính chất 2, nếu A' không thuộc d thì $d' // d$; nếu A' thuộc d thì $d' \equiv d$.

ii) (h. 4.3) Lấy trên tia Sx điểm A khác S. Phép đối xứng tâm $Đ_O$ biến S thành S', A thành A' thì biến $\overrightarrow{SA}$ thành $\overrightarrow{S'A'}$ và



Hình 4.3

$\overrightarrow{SA} = -\overrightarrow{S'A'}$. Nếu B là điểm bất kì thuộc tia Sx thì tồn tại số $m > 0$ sao cho $\overrightarrow{SB} = m\overrightarrow{SA}$. Gọi B' là ảnh của B, khi đó

$$\overrightarrow{S'B'} = -\overrightarrow{SB} = -m\overrightarrow{SA} = m\overrightarrow{S'A'}.$$

Điều đó chứng tỏ điểm B' thuộc tia $S'A'$.

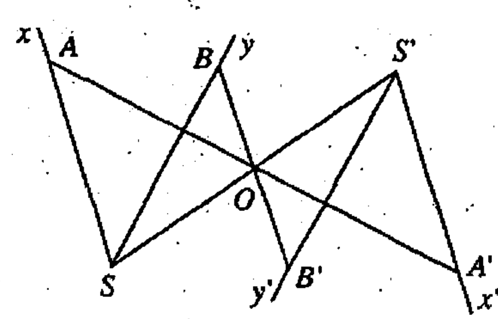
Đảo lại, nếu B' thuộc tia $S'A'$ thì phép đối xứng tâm $Đ_O$ biến S' thành S, A' thành A, B' thành B. Lập luận tương tự, ta suy ra B thuộc tia Sx. Như vậy tồn tại điểm B trên tia Sx nhận B' là ảnh.

iii) Chứng minh tương tự như trường hợp tia.

iv) (h. 4.4) Lấy trên hai cạnh góc xSy các điểm A và B (khác S). Gọi A', B', S' lần lượt là ảnh của A, B, S qua $Đ_O$. Khi đó ta có

$\overrightarrow{S'A'} = -\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{S'B'} = -\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB}$.

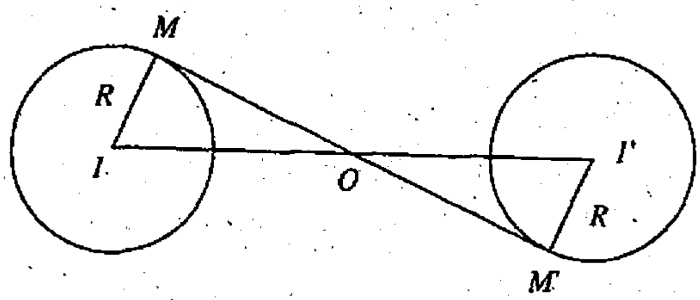
Vậy $\Delta SAB = \Delta S'A'B'$, suy ra $\widehat{A'S'B'} = \widehat{ASB}$. Theo hệ quả iii, $S'A'$ và $S'B'$ lần lượt là ảnh của SA và SB. Từ đó ta có điều cần chứng minh.



Hình 4.4

v) (h. 4.5) Nếu M là điểm bất kì thuộc $(I\,;R)$ và I', M' lần lượt là ảnh của I, M qua $Đ_O$ thì $\overrightarrow{I'M'} = -\overrightarrow{IM} \Rightarrow I'M' = IM = R$ không đổi. Điều đó chứng tỏ M' thuộc $(I'\,;R)$.

Đảo lại, nếu M' là điểm thuộc $(I'\,;R)$ thì ảnh M và I của M' và I' qua $Đ_O$ thoả mãn điều kiện $I'M' = IM = R$. Điều đó chứng tỏ tồn tại điểm M thuộc $(I\,;R)$ nhận M' là ảnh. □



Hình 4.5

• ***Tính chất 5.*** Tích của ba phép đối xứng tâm với ba tâm đối xứng phân biệt là một phép đối xứng tâm.

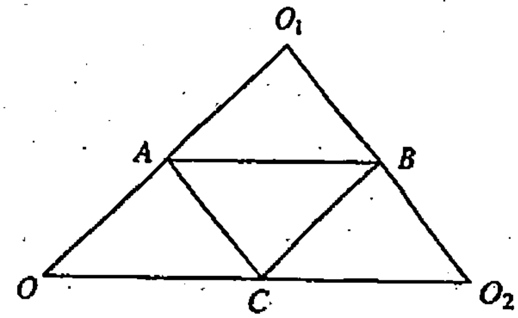
Chứng minh (h. 4.6). Gọi A, B, C là ba tâm đối xứng của các phép đối xứng tâm $Đ_A, Đ_B, Đ_C$ và đặt $Đ = Đ_C \circ Đ_B \circ Đ_A$. Trước hết ta cần chứng tỏ rằng

$Đ$ có một điểm bất động duy nhất. Thật vậy, giả sử O là điểm bất động của $Đ$. Theo định nghĩa ta có

$Đ_A : O \mapsto O_1$ và $\overrightarrow{AO_1} = -\overrightarrow{AO}$;

$Đ_B : O_1 \mapsto O_2$ và $\overrightarrow{BO_2} = -\overrightarrow{BO_1}$;

$Đ_C : O_2 \mapsto O$ và $\overrightarrow{CO} = -\overrightarrow{CO_2}$.



Hình 4.6

Từ các kết quả trên ta suy ra $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$. (*)

Hệ thức (*) chứng tỏ O là điểm bất động duy nhất của $Đ$.

Bây giờ ta chứng minh rằng $Đ$ là phép đối xứng tâm O. Giả sử M là một điểm bất kì và M' là ảnh của M qua $Đ$. Ta cần chỉ ra rằng $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$. Thật vậy, ta có

$Đ_A : M \mapsto M_1,\ O \mapsto O_1$ và $\overrightarrow{O_1M_1} = -\overrightarrow{OM}$; (1)

$Đ_B : M_1 \mapsto M_2,\ O_1 \mapsto O_2$ và $\overrightarrow{O_2M_2} = -\overrightarrow{O_1M_1}$; (2)

$Đ_C : M_2 \mapsto M',\ O_2 \mapsto O$ và $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{O_2M_2}$. (3)

Từ các kết quả (1), (2), (3) ta suy ra $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$.

Tóm lại phép biến hình $Đ$ là phép đối xứng tâm O, trong đó O được xác định bởi hệ thức (*).□

3. Ứng dụng của phép đối xứng qua tâm

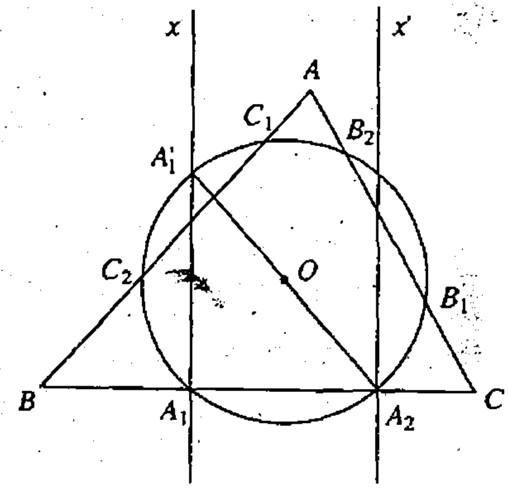
Dạng 1. CHỨNG MINH TÍNH CHẤT HÌNH HỌC

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC. Trên các cạnh BC, CA, AB, ta lấy lần lượt các cặp điểm A_1 và A_2, B_1 và B_2, C_1 và C_2 sao cho 6 điểm đó nằm trên cùng một đường tròn. Chứng minh rằng nếu các đường thẳng đi qua A_1 và vuông góc với BC, đi qua B_1 và vuông góc với CA, đi qua C_1 và vuông góc với AB đồng quy, thì các đường thẳng đi qua A_2 và vuông góc với BC, đi qua B_2 và vuông góc với CA, đi qua C_2 và vuông góc với AB cũng đồng quy.

Giải (h. 4.7)

Ta kí hiệu x là đường thẳng đi qua A_1 và vuông góc với BC, (γ) là đường tròn đi qua 6 điểm đã nêu trong bài toán, O là tâm của (γ). Gọi A_1' là giao điểm thứ hai của x với (γ). Rõ ràng $A_1'A_2$ là đường kính của (γ), vì vậy phép đối xứng $Đ_O$ biến A_1' thành A_2, do đó nó biến đường thẳng x thành đường thẳng x' đi qua A_2 và $x' // x$ hay $x' \perp BC$.

Tương tự, $Đ_O$ biến đường thẳng y thành đường thẳng y' đi qua B_2 và vuông góc với AC, biến đường thẳng z thành đường thẳng z' đi qua C_2 và vuông góc với AB (kí hiệu y, z lần lượt là các đường thẳng đi qua B_1 và vuông góc với AC, đi qua C_1 và vuông góc với AB). Vậy nếu S là điểm chung của x, y, z thì ảnh S' của S qua phép đối xứng tâm $Đ_O$ cũng là điểm chung của x', y', z'. □



Hình 4.7

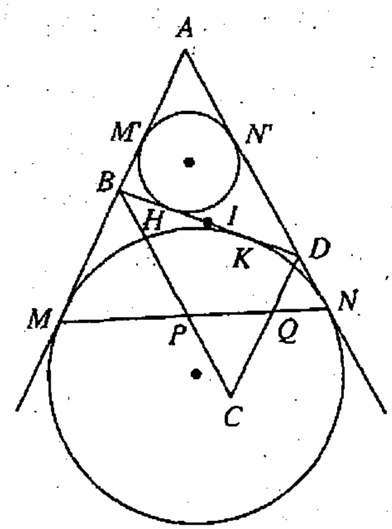
Ví dụ 2. Cho hình bình hành $ABCD$ và đường tròn bàng tiếp (γ) của tam giác ABD tiếp xúc với phần kéo dài của AB và AD tương ứng tại các điểm M và N. Đoạn thẳng MN cắt BC và DC tương ứng tại các điểm P và Q. Chứng minh rằng đường tròn nội tiếp tam giác BCD tiếp xúc với các cạnh BC và DC tại P và Q.

Giải (h. 4.8)

Gọi K là tiếp điểm của (γ) với BD ; (ρ) là đường tròn nội tiếp tam giác ABD, tiếp xúc với AB tại M', với AD tại N' và với BD tại H ; I là trung điểm của BD.

Từ $MM' = NN'$ và $MM' = BH + BK$, $NN' = DK + DH$, suy ra $BH = DK$. Rõ ràng phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến B thành D, H thành K.

Tam giác AMN cân tại A và vì $DQ // AM$ nên tam giác DQN cân tại D, suy ra $DQ = DN = DK = BH = BM'$. Thế thì Q là ảnh của M' qua $Đ_I$. Tương tự, P là ảnh



Hình 4.8

của N' qua $Đ_I$. Vậy $Đ_I$ biến (ρ) thành đường tròn (ρ') đi qua ba điểm K, Q, P. Vì M', N', H là điểm chung duy nhất của (ρ) với AB, AD và BD, do đó K, Q, P cũng là điểm chung duy nhất của (ρ') với BD, CD, CB. □

Dạng 2. DỰNG HÌNH

Ví dụ 3. Cho đường tròn (O), một điểm P và một đường thẳng d không có điểm chung với (O). Hãy dựng một hình bình hành có hai đỉnh liên tiếp nằm trên d, hai đỉnh còn lại nằm trên (O) và nhận P là giao điểm các đường chéo. Hãy xác định vị trí của P để hai đỉnh của hình bình hành trên d cách xa nhau nhất.

Giải (h. 4.9)

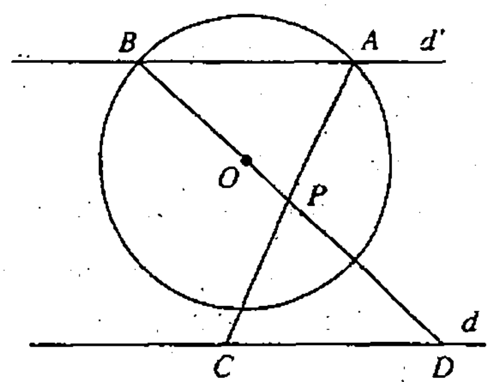
Giả sử $ABCD$ là hình bình hành đã được dựng sao cho C, D thuộc d và P là giao điểm các đường chéo. Rõ ràng phép đối xứng tâm $Đ_P$ biến C thành A và biến D thành B. Ta kí hiệu d' là ảnh của d qua $Đ_P$. Thế thì $d' // d$ và d' đi qua A, B. Từ đó ta có cách dựng sau :

– Dựng đường thẳng d' là ảnh của d qua $Đ_P$. Gọi A và B là giao điểm của d' với đường tròn (O).

– Dựng các giao điểm của AP và BP với d.

$ABCD$ là hình cần dựng.

Bài toán chỉ có nghiệm khi đường thẳng d' cắt (O) và nghiệm đó là duy nhất. Bài toán vô nghiệm khi d' không cắt (O).



Hình 4.9

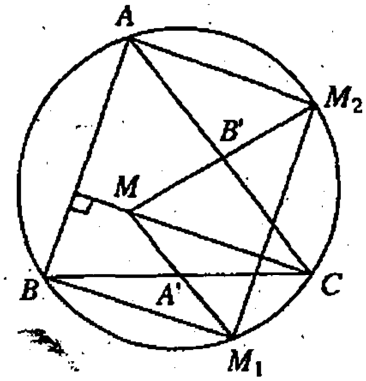
Để CD lớn nhất thì AB phải là đường kính của (O). Trong trường hợp này, ảnh của tâm O qua phép đối xứng tâm $Đ_P$ phải thuộc d. Gọi O' là giao điểm của OP với d thì P là trung điểm của OO'. □

Dạng 3. TÌM TẬP HỢP ĐIỂM

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC. Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Tìm tập hợp điểm M trong tam giác sao cho ảnh của M qua các phép đối xứng tâm $Đ_{A'}$, $Đ_{B'}$, $Đ_{C'}$ đều nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác.

Giải (h. 4.10)

Ta kí hiệu M_1 là ảnh của M qua phép đối xứng tâm $Đ_{A'}$; M_2 là ảnh của M qua phép đối xứng tâm $Đ_{B'}$. Khi đó $\overrightarrow{CM} = -\overrightarrow{AM_2} = -\overrightarrow{BM_1}$, vì vậy tứ giác ABM_1M_2 là hình chữ nhật và $CM \perp AB$. Tương tự, ta có $BM \perp AC$. Vậy M là giao điểm của ba đường cao của tam giác.



Hình 4.10

Như vậy, nếu ABC là tam giác nhọn thì tập hợp điểm M gồm 1 điểm và là trực tâm tam giác ABC ; nếu ABC là tam giác không nhọn thì tập hợp điểm M là tập rỗng. ☐

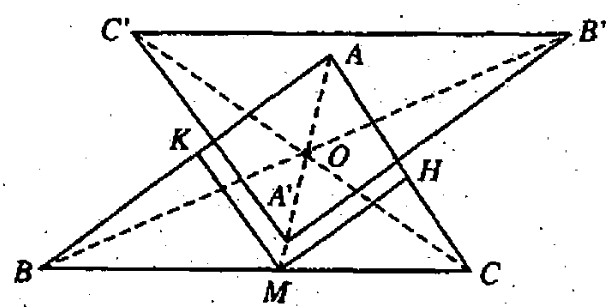
Dạng 4. BÀI TOÁN CỰC TRỊ

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC và điểm O nằm trong tam giác. Gọi $A'B'C'$ là ảnh của ABC qua phép đối xứng tâm $Đ_O$. T là một đa giác được tạo bởi phần chung của hai tam giác ABC và $A'B'C'$. Tìm vị trí của O sao cho T có diện tích lớn nhất.

Giải

• Ta xét trường hợp ảnh A' của A qua $Đ_O$ nằm trong tam giác ABC (h. 4.11). Trường hợp này T là hình bình hành có hai cạnh liên tiếp nằm trên AB, AC và một đường chéo là AA'.

Gọi M là giao điểm của AA' với cạnh BC và dựng hình bình hành $AKMH$ có $MK \parallel AC$ và $MH \parallel AB$ ($K \in AB$, $H \in AC$). Rõ ràng T bị chứa trong hình bình hành $AKMH$, do đó :



Hình 4.11

$$dt(T) \le dt(AKMH).$$

Mặt khác, ta chứng minh được : $dt(AKMH) \le \frac{1}{2} dt(ABC)$.

Thật vậy, ta có : $\dfrac{dt(AHK)}{dt(ABC)} = \dfrac{AK}{AB} \cdot \dfrac{AH}{AC}$.

Do $MK \parallel AC$ và $MH \parallel AB$, nên

$$\frac{AK}{AB} = \frac{CM}{BC}, \ \frac{AH}{AC} = \frac{BM}{BC} \text{ và do đó } \frac{AK}{AB} + \frac{AH}{AC} = 1.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có $\frac{AK}{AB} \cdot \frac{AH}{AC} \le \frac{1}{4}\left(\frac{AK}{AB} + \frac{AH}{AC}\right)^2 = \frac{1}{4}$, suy ra

$$dt(AHK) \le \frac{1}{4} dt(ABC) \Leftrightarrow dt(AKMH) \le \frac{1}{2} dt(ABC).$$

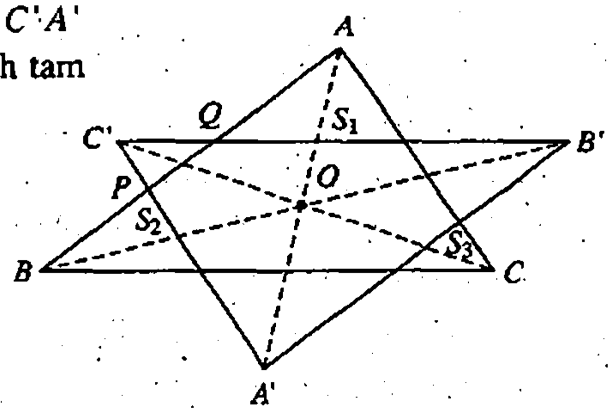
Vậy $dt(T)$ lớn nhất bằng $\frac{1}{2} dt(ABC)$, dấu = xảy ra khi O là trung điểm của trung tuyến AM.

- Trường hợp các đỉnh A', B', C' nằm ngoài tam giác ABC. Trong trường hợp đó, T là một lục giác có các cặp cạnh đối song song và bằng nhau. Ta kí hiệu S_1, S_2, S_3 là diện tích các tam giác nhỏ bị cắt ra từ tam giác ABC bởi các đường thẳng $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ (xem hình 4.12).

Ta kí hiệu P, Q là các giao điểm của $C'A'$ và $C'B'$ với cạnh AB ; S là diện tích tam giác ABC. Ta có :

$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{AQ}{AB}\right)^2, \ \frac{S_2}{S} = \left(\frac{BP}{AB}\right)^2,$$

$$\frac{S_3}{S} = \left(\frac{PQ}{AB}\right)^2,$$



Hình 4.12

suy ra :

$$S_1 + S_2 + S_3 = S.\left[\left(\frac{AQ}{AB}\right)^2 + \left(\frac{BP}{AB}\right)^2 + \left(\frac{PQ}{AB}\right)^2\right].$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta được

$$S_1 + S_2 + S_3 \ge \frac{S}{3}\left(\frac{AQ}{AB} + \frac{QP}{AB} + \frac{PB}{AB}\right)^2 = \frac{S}{3}.$$

Vậy $\min(S_1 + S_2 + S_3) = \frac{S}{3}$, xảy ra khi $\frac{AQ}{AB} = \frac{QP}{AB} = \frac{PB}{AB}$ hay O là trọng tâm tam giác ABC.

Ta xét diện tích của T. Rõ ràng $dt(T)$ lớn nhất khi $S_1 + S_2 + S_3$ nhỏ nhất. Vậy $\max dt(T) = \frac{2}{3}S$.

Đối chiếu các trường hợp đã xét, ta thấy diện tích của T lớn nhất khi O là trọng tâm tam giác ABC. □

BÀI TẬP

CHỨNG MINH TÍNH CHẤT HÌNH HỌC CỦA TẬP HỢP ĐIỂM

1. Cho 4 điểm A, B, C, D theo thứ tự nằm trên một đường thẳng và thoả mãn điều kiện $AB = CD$. Chứng minh rằng với điểm M bất kì, ta có $MA + MD \geq MB + MC$.
2. Cho đường tròn $(O\,;\,1)$ và tập hợp n điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ $(n > 2)$. Chứng minh rằng luôn tìm được điểm M trên đường tròn $(O\,;\,1)$ sao cho $\sum_{i=1}^{n} MA_i \geq n$.
3. Chứng minh rằng nếu một đa giác có tâm đối xứng thì số cạnh là chẵn.

DỰNG HÌNH

4. Cho 4 đường thẳng trong đó không có hai đường nào song song và một điểm O không nằm trên các đường thẳng đó. Hãy dựng một hình bình hành mà 4 đỉnh nằm trên 4 đường thẳng và nhận O làm giao điểm các đường chéo.
5. Dựng tam giác ABC, biết độ dài các trung tuyến kẻ từ các đỉnh A, B và góc C.
6. Cho hai đường tròn cắt nhau tại các điểm A, B và số $a > 0$. Hãy dựng một đường thẳng d đi qua A và cắt hai đường tròn thành hai dây cung mà hiệu độ dài bằng a.

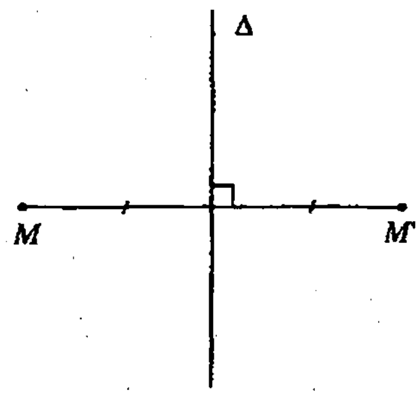
TÌM TẬP HỢP ĐIỂM

7. Cho đường tròn (O) và ba điểm A, B, C phân biệt. Với mỗi điểm P thuộc đường tròn, ta xác định P_1 là ảnh của P trong phép đối xứng $Đ_A$; P_2 là ảnh của P_1 trong phép đối xứng $Đ_B$; P' là ảnh của P_2 trong phép đối xứng $Đ_C$. Tìm tập hợp các điểm P' khi P biến thiên trên đường tròn (O).
8. Cho tam giác ABC và đường tròn (O). Trên cạnh AB ta lấy điểm E sao cho $BE = 2AE$, F là trung điểm cạnh AC và I là đỉnh thứ 4 của hình bình hành $AEIF$. Với mỗi điểm P trên đường tròn (O), ta dựng điểm Q sao cho $\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PC} = 6\overrightarrow{IQ}$. Tìm tập hợp điểm Q khi P thay đổi.

§3. PHÉP ĐỐI XỨNG QUA ĐƯỜNG THẲNG

1. Định nghĩa

Cho một đường thẳng Δ. Phép biến hình biến mỗi điểm $X \in \Delta$ thành điểm X và biến điểm $M \notin \Delta$ thành điểm M' sao cho Δ là đường trung trực của đoạn thẳng MM' được gọi là phép đối xứng qua đường thẳng Δ và được kí hiệu là $Đ_\Delta$. Phép đối xứng qua đường thẳng còn được gọi đơn giản là phép đối xứng trục. Đường thẳng Δ được gọi là trục đối xứng và là đường thẳng bất động của phép đối xứng trục $Đ_\Delta$.



Hình 4.13

Cho trước một hình $\mathcal{H}$. Tập hợp ảnh của mọi điểm thuộc $\mathcal{H}$ qua phép đối xứng trục $Đ_\Delta$ lập thành một hình $\mathcal{H}'$ được gọi là hình đối xứng với $\mathcal{H}$ qua Δ. Nếu $\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}'$ thì ta nói $\mathcal{H}$ là hình có trục đối xứng.

2. Tính chất

• ***Tính chất 1.*** Phép đối xứng trục $Đ_\Delta$ có duy nhất một đường thẳng bất động.

Chứng minh. Thật vậy, nếu Δ' là một đường thẳng bất động thứ hai của $Đ_\Delta$, thì với điểm X bất kì thuộc Δ', ảnh của X qua $Đ_\Delta$ là X. Như vậy, Δ là đường trung trực của đoạn thẳng XX, nghĩa là X thuộc Δ. Điều đó chứng tỏ Δ' và Δ trùng nhau.

• ***Tính chất 2.*** Phép đối xứng trục $Đ_\Delta$ là phép biến hình là $1-1$ và có phép biến hình ngược chính là $Đ_\Delta$.

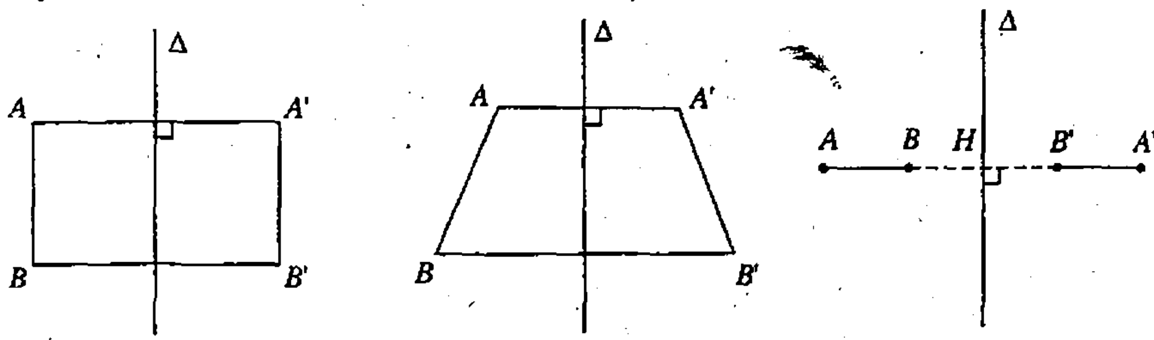
Chứng minh. Rõ ràng nếu $Đ_\Delta(M) = M'$ thì $Đ_\Delta(M') = M$. Từ đó suy ra $Đ_\Delta$ là phép biến hình 1-1 và có phép biến hình ngược chính là $Đ_\Delta$.

• ***Tính chất 3.*** Nếu A', B' là ảnh của hai điểm phân biệt A, B qua phép đối xứng trục $Đ_\Delta$ thì $A'B' = AB$.

Chứng minh. Ta xét các trường hợp sau :

– Trường hợp AB không vuông góc với Δ, khi đó tứ giác lập bởi các điểm A, B, B', A' hoặc là hình chữ nhật mà một cặp cạnh song song là AA' và BB' (h. 4.14a) hoặc là hình thang cân với hai đáy AA' và BB' (h. 4.14b). Do đó $A'B' = AB$.

– Trường hợp $AB \perp \Delta$, khi đó Δ là đường trung trực chung của hai đoạn AA' và BB' (h. 4.14c). Gọi H là giao điểm của AA' với Δ, khi đó phép đối xứng tâm $Đ_H$ biến A thành A', B thành B'. Theo tính chất của phép đối xứng tâm, ta suy ra $A'B' = AB$. □



a) b) c)

Hình 4.14

• ***Tính chất 4.*** Phép đối xứng trục $Đ_\Delta$ biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo tồn thứ tự của chúng.

Chứng minh. Giả sử A, B, C là 3 điểm thẳng hàng, B nằm giữa A và C. Gọi A', B', C' tương ứng là ảnh của A, B, C qua phép đối xứng trục $Đ_\Delta$. Theo tính chất 3, ta có : $A'B' + B'C' = AB + BC = AC = A'C'$. Điều đó chứng tỏ A', B', C' thẳng hàng và B' nằm giữa A', C'. □

Hệ quả. Phép đối xứng trục $Đ_\Delta$ biến :

i) Đường thẳng d thành đường thẳng d'. Nếu hai đường thẳng d và d' cắt nhau thì giao điểm của chúng thuộc Δ.

ii) Tia Sx thành tia $S'x'$.

iii) Đoạn thẳng AB thành đoạn thẳng $A'B'$ và $AB = A'B'$.

iv) Góc $\widehat{xSy}$ thành góc $\widehat{x'S'y'}$ và hai góc đó bằng nhau.

v) Đường tròn $(O ; R)$ thành đường tròn $(O' ; R)$.

Chứng minh

i) Lấy trên d hai điểm phân biệt A, B. Gọi A', B' là ảnh của A, B qua phép đối xứng trục $Đ_\Delta$ và nếu X là một điểm bất kì thuộc d, X' là ảnh của X qua $Đ_\Delta$ thì X' thuộc đường thẳng $A'B'$. Đảo lại, nếu X' thuộc đường thẳng $A'B'$

thì phép đối xứng trục $Đ_\Delta$ biến X', A', B' thành các điểm X, A, B thuộc d. Điều đó chứng tỏ tồn tại điểm X thuộc d nhận X' là ảnh.

ii) Lấy trên tia Sx điểm A (khác S) và gọi A' là ảnh của A. Nếu B là điểm bất kì thuộc tia SA và coi B nằm giữa S và A thì ảnh B' của B thẳng hàng với S', A' và B' nằm giữa S' và A'. Tương tự đối với trường hợp A nằm giữa S và B. Điều đó chứng tỏ B' thuộc tia $S'A'$. Ngược lại, nếu B' thuộc tia $S'A'$ thì phép đối xứng $Đ_\Delta$ biến S', A', B' thành các điểm tương ứng S, A, B thuộc tia SA. Vậy tồn tại điểm B thuộc tia SA nhận B' trên tia $S'A'$ là ảnh.

iii) Suy ra trực tiếp từ tính chất 4.

iv) Lấy trên hai cạnh Sx và Sy của góc $\widehat{xSy}$ hai điểm A, B (khác S). Gọi A', B' là ảnh của A, B trong phép đối xứng trục $Đ_\Delta$, khi đó A' và B' thuộc các tia $S'x'$ và $S'y'$. Xét hai tam giác SAB và $S'A'B'$, chúng có các cạnh bằng nhau nên hai tam giác đó bằng nhau. Từ đó suy ra $\widehat{A'S'B'} = \widehat{ASB}$.

v) Nếu O' là ảnh của O trong phép đối xứng trục $Đ_\Delta$ và M là điểm bất kì thuộc đường tròn $(O ; R)$ thì ảnh M' của M trong phép đối xứng trục $Đ_\Delta$ cách O' một khoảng R (là một số không đổi). Như vậy tập hợp ảnh của mọi điểm thuộc đường tròn $(O ; R)$ là đường tròn tâm O' bán kính R. □

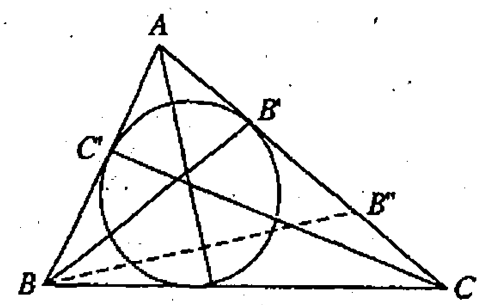
3. Ứng dụng của phép đối xứng qua đường thẳng

Dạng 1. CHỨNG MINH TÍNH CHẤT HÌNH HỌC

Ví dụ 1. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AB và AC tương ứng tại các điểm C' và B'. Chứng minh rằng nếu $AC > AB$ thì $CC' > BB'$.

Giải (h. 4.15)

Gọi B'' là điểm đối xứng với B qua phân giác góc A. Khi đó B'' nằm trên cạnh AC và $AB = AB''$.



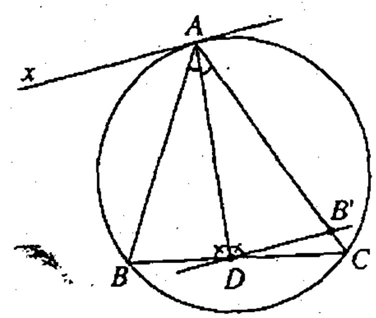
Hình 4.15

Tam giác ABB'' cân tại A, do đó $\widehat{AB''B}$ nhọn và $\widehat{BB''C}$ tù. Mặt khác, tia $B''C'$ nằm ngoài góc $\widehat{BB''C}$ nên $\widehat{C'B''C}$ là góc tù, đối diện với góc đó là cạnh CC'. Vì vậy $CC' > B''C'$ hay $CC' > BB'$. □

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Kí hiệu Ax là tiếp tuyến của (O) tại A. Phép đối xứng qua đường phân giác của góc $\widehat{BAC}$ biến đường thẳng BC thành đường thẳng Δ. Chứng minh rằng $\Delta // Ax$.

Giải (h. 4.16)

Gọi AD là phân giác của góc $\widehat{BAC}$ $(D \in BC)$ và B' là giao điểm của Δ với AC.



Hình 4.16

- Nếu $AB = AC$ thì Δ trùng với BC và AD đi qua O. Vậy $\Delta \perp AD$ và $Ax \perp AD$, suy ra $\Delta // Ax$.
- Nếu $AB \neq AC$, giả sử $AB < AC$, ta có :

$\widehat{xAB} + \widehat{BAD} = \widehat{ACB} + \widehat{CAD} = \widehat{ADB}$.

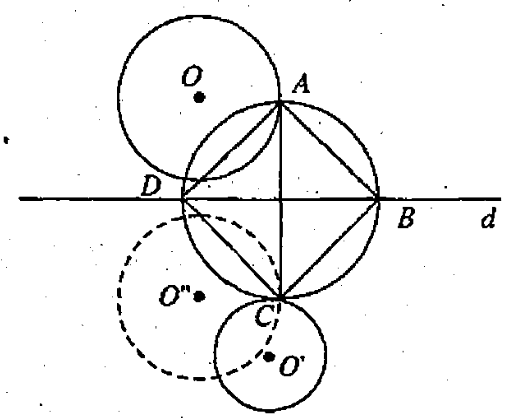
Mặt khác Δ là ảnh của BC qua phép đối xứng trục $Đ_{AD}$ nên $\widehat{ADB'} = \widehat{ADB}$. Suy ra $\widehat{xAD} = \widehat{ADB'}$, tức là $Ax // DB'$ hay $Ax // \Delta$. □

Dạng 2. DỰNG HÌNH

Ví dụ 3. Cho đường thẳng d và hai đường tròn (O), (O') nằm về hai phía đối với d. Hãy dựng hình vuông $ABCĐ$ sao cho đường chéo BD nằm trên d, đỉnh A nằm trên đường tròn (O), đỉnh C nằm trên đường tròn (O').

Giải (h.4.17)

Phân tích : Giả sử $ABCD$ là hình vuông đã dựng. Phép đối xứng trục $Đ_d$ biến A thành C và biến đường tròn (O) thành đường tròn (O'') đi qua C. Vì vậy C là điểm chung của hai đường tròn (O') và (O''). Mặt khác, AC là đường kính của đường tròn ngoại tiếp hình vuông, do đó đường tròn đường kính AC đi qua B và D.



Hình 4.17

Cách dựng :

– Dựng ảnh (O'') của (O) qua phép đối xứng trục $Đ_d$. Gọi C là điểm chung của (O'') và (O').

– Dựng ảnh của C qua phép đối xứng trục $Đ_d$. Đó chính là đỉnh A.

– Dựng đường tròn đường kính AC. Gọi B, D là giao điểm của đường tròn đó với d, $ABCD$ là hình vuông phải dựng.

Chứng minh : Theo cách dựng, C thuộc (O'') nên ảnh A của C qua phép đối xứng trục $Đ_d$ thuộc (O). Tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo bằng nhau, vuông góc với nhau tại trung điểm mỗi đường, do đó $ABCD$ là hình vuông.

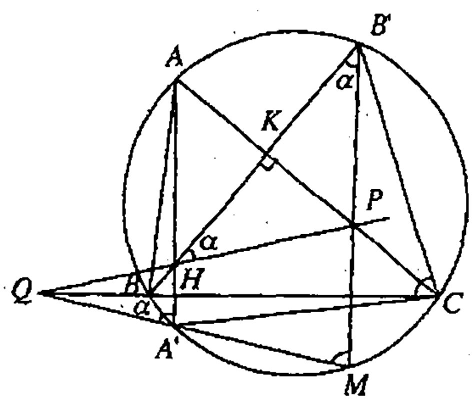
Biện luận : Số nghiệm hình bằng số giao điểm của (O'') và (O'). Nếu hai đường tròn đó trùng nhau thì bài toán có vô số nghiệm. □

Dạng 3. TÌM TẬP HỢP ĐIỂM

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Gọi H là trực tâm tam giác, K là giao điểm của BH và AC. Xét một đường thẳng d đi qua H và cắt đoạn thẳng CK. Phép đối xứng qua BC và AC biến d thành các đường thẳng d_1 và d_2. Tìm quỹ tích giao điểm M của d_1 và d_2 khi d thay đổi và cắt đoạn KC.

Giải

Kí hiệu A', B' là giao điểm thứ hai của AH và BH với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Phép đối xứng qua BC và AC biến H thành các điểm A' và B'. Vì vậy d_1 đi qua A' và d_2 đi qua B'. Giả sử d không song song với BC. Gọi P là giao điểm của d với đoạn thẳng KC và Q là giao điểm của d với đường thẳng BC. Vì ABC là tam giác nhọn nên H nằm trong tam giác, tức là H nằm trên đoạn BK. Trong tam giác BKC, đường thẳng d cắt hai cạnh KB và KC nên d phải cắt phần kéo dài của cạnh BC. Ta xét trường hợp B nằm giữa hai điểm Q và C (h.4.18a).

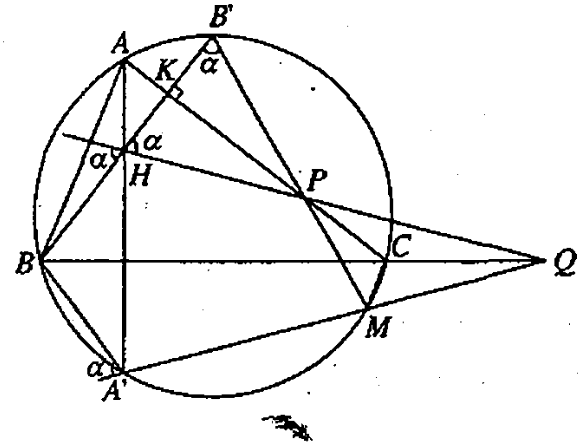


Hình 4.18a

Kí hiệu α là số đo của góc $\widehat{PHB'}$. Theo tính chất của phép đối xứng qua AC và BC, ta có $\widehat{PB'H} = \widehat{PHB'} = \widehat{QHB} = \widehat{QA'B} = \alpha$.

Nếu A' nằm trên đoạn thẳng QM thì tứ giác $BB'MA'$ là lồi có tổng hai góc tại các đỉnh A' và B' bằng 180^o. Do đó tứ giác này nội tiếp. Đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BB'MA'$ và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có ba điểm chung là A', B', B, do đó chúng trùng nhau. Tức là M nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Mặt khác $\widehat{A'BB'} = 180^o - 2\widehat{C}$ nên $\widehat{A'MB'} = 2\widehat{C} = \widehat{A'CB'}$. Điều này chứng tỏ M nằm trên cung $\overset{\frown}{CA'}$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Nếu M nằm trên đoạn thẳng QA' thì các điểm A' và B' cùng nhìn đoạn thẳng BM dưới cùng một góc α, tức là tứ giác $BB'A'M$ nội tiếp B'. Vì vậy M nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và $\overset{\frown}{A'MB'} = \overset{\frown}{A'BB'} = 180^o - 2\widehat{C}$. Đẳng thức này chứng tỏ M nằm trên cung $\overset{\frown}{BA'}$ của đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Trường hợp C nằm trên đoạn QB (h.4.18b).



Hình 4.18b

Bằng cách lí luận như trường hợp trên, ta suy ra rằng M hoặc nằm trên cung CA' hoặc nằm trên cung BA'.

Trường hợp $d \parallel BC$, ta dễ dàng suy ra M nằm trên cung $\overset{\frown}{BA'C}$.

Tóm lại trong mọi trường hợp, quỹ tích M thuộc cung $\overset{\frown}{BA'C}$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (trừ B, C và A').

Đảo lại, nếu M là điểm bất kì thuộc cung $\overset{\frown}{BA'C}$ trừ A' và hai đầu mút của cung thì MB' cắt đoạn thẳng KC tại P. Rõ ràng đường thẳng PH đối xứng với MB' qua AC và MA' qua BC. □

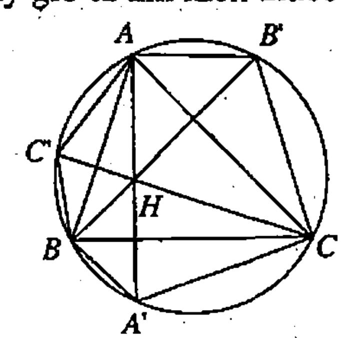
Dạng 4. BÀI TOÁN CỰC TRỊ

Ví dụ 5. Cho đường tròn $(O\,;R)$ và tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp trong đường tròn. Gọi A', B', C' lần lượt là giao điểm thứ hai của các đường cao tam giác kẻ từ A, B, C với đường tròn. Hãy xác định kích thước ba cạnh của tam giác ABC để diện tích của lục giác $AB'CA'BC'$ lớn nhất.

Giải (h.4.19)

Gọi H là trực tâm tam giác ABC, vì ΔABC có 3 góc nhọn nên H nằm trong tam giác. Rõ ràng ảnh của H trong các phép đối xứng qua các cạnh tam giác là các giao điểm A', B', C'. Vì vậy $dt(AB'CA'BC') = 2S$ (S là diện tích tam giác ABC). Diện tích lục giác này lớn nhất khi S lớn nhất. Bây giờ ta tìm kích thước các cạnh của tam giác ABC để S đạt giá trị lớn nhất.

Từ các bất đẳng thức $S \le \dfrac{a^2+b^2+c^2}{4\sqrt{3}}$ và $a^2+b^2+c^2 \le 9R^2$, ta suy ra S đạt max khi dấu bằng trong cả hai bất đẳng thức xảy ra đồng thời (a, b, c là độ dài 3 cạnh của tam giác ABC). Từ đó ta suy ra ABC là tam giác đều mà độ dài cạnh bằng $R\sqrt{3}$. □



Hình 4.19

BÀI TẬP

CHỨNG MINH TÍNH CHẤT HÌNH HỌC

9. Cho hai đường thẳng cắt nhau a, b. Với điểm M không trùng với giao điểm của a và b, ta dựng điểm M_1 đối xứng với M qua a, M_2 đối xứng với M_1 qua b và M_3 đối xứng với M_2 qua a. Gọi M_4 là điểm đối xứng với M qua b và M_5 đối xứng với M_4 qua a. Chứng minh rằng nếu M_5 đối xứng với M_3 qua b thì góc giữa hai đường thẳng a, b bằng 60^o.

10. Chứng minh rằng trong tam giác ABC, bất đẳng thức sau đây là đúng

$$h_a \leq \sqrt{p(p-a)}$$

trong đó, h_a là độ dài đường cao kẻ từ đỉnh A, $BC = a$, $2p = a + b + c$.

11. Đường tròn tâm I nội tiếp trong một tam giác không cân ABC, tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại A_1, B_1, C_1. Gọi A_2 là điểm đối xứng với A_1 qua AI, B_2 là điểm đối xứng với B_1 qua BI, C_2 là điểm đối xứng với C_1 qua CI. Chứng minh rằng tam giác $A_2B_2C_2$ có các cạnh song song với các cạnh của tam giác ABC.

12. Tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Đường phân giác trong của góc BAC cắt đường tròn (O) tại D. Chứng minh rằng

$$2AD > AB + AC.$$

(Vô địch Toán Mat-xcơ-va lần thứ XIX)

DỰNG HÌNH

13. Cho hai điểm A, B và đường thẳng d. Hãy dựng tam giác có hai đỉnh là hai điểm đã cho và d là đường phân giác của góc thuộc đỉnh thứ ba.

14. Cho hai điểm phân biệt M, N và đường thẳng d. Hãy dựng tam giác ABC mà M, N là trung điểm của hai cạnh AB, BC của tam giác và d là phân giác của góc thuộc đỉnh C.

15. Dựng tam giác ABC, biết các điểm M, N, P là ảnh của trực tâm H của tam giác trong các phép đối xứng qua các cạnh tam giác đó.

TOÁN CỰC TRỊ

16. Cho tam giác ABC và một đường thẳng d. Hãy tìm trên đường thẳng d điểm M sao cho :

a) $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| + 2|\overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất.

b) $|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}| + |4\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA}|$ nhỏ nhất.

17. Cho tam giác nhọn ABC. Gọi A' là chân đường cao của tam giác kẻ từ đỉnh A. Hãy tìm trên các cạnh AB, AC các điểm C' và B' tương ứng sao cho chu vi tam giác $A'B'C'$ nhỏ nhất.

QUỸ TÍCH

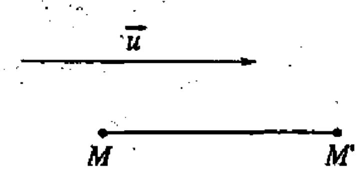
18. Cho hai điểm cố định A và B. Với mỗi đường thẳng x đi qua B, ta dựng điểm A' đối xứng với A qua x. Tìm tập hợp các điểm A' khi x quay quanh B.

19. Cho tam giác cân ABC ($AB = AC$). Với mỗi điểm M trên cạnh BC, ta dựng hình bình hành $APMQ$ (P thuộc cạnh AB và Q thuộc cạnh AC). Tìm tập hợp ảnh của điểm M trong phép đối xứng qua đường thẳng PQ.

§4. PHÉP TỊNH TIẾN

1. Định nghĩa

Cho trước vectơ $\vec{u}$. Với mỗi điểm M trong mặt phẳng, ta dựng điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$. Khi đó ta nói M' là ảnh của M qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ và kí hiệu $T_{\vec{u}} : M \mapsto M'$; $\vec{u}$ được gọi là vectơ tịnh tiến.



Hình 4.20

Cho hình $\mathcal{H}$. Tập hợp ảnh của mọi điểm thuộc $\mathcal{H}$ qua phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ lập thành một hình $\mathcal{H}'$ được gọi là ảnh của $\mathcal{H}$ qua phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ và kí hiệu $T_{\vec{u}} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}'$.

Rõ ràng phép tịnh tiến $T_{\vec{0}}$ chính là phép đồng nhất.

2. Tính chất

• ***Tính chất 1.*** Phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ với $\vec{u} \neq \vec{0}$ không có điểm bất động.

Chứng minh. Thật vậy, nếu O là điểm bất động của phép tịnh tiến đó thì theo định nghĩa, ta có $\overrightarrow{OO} = \vec{u}$. Điều đó mâu thuẫn với giả thiết $\vec{u} \neq \vec{0}$.

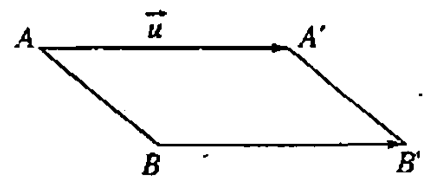
• ***Tính chất 2.*** Phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ là phép biến hình 1 – 1 và có phép biến hình ngược. Đó là phép tịnh tiến $T_{-\vec{u}}$.

Chứng minh. Thật vậy, nếu M_1 và M_2 có cùng một ảnh M' qua phép tịnh tiến đó thì

$$\overrightarrow{M_1M'} = \overrightarrow{M_2M'} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_1M'} + \overrightarrow{M'M_2} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_1M_2} = \vec{0} \Leftrightarrow M_1 \equiv M_2.$$

Từ chứng minh đó ra suy ra rằng phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ có phép biến hình ngược và dễ thấy phép biến hình đó là $T_{-\vec{u}}$.

• ***Tính chất 3.*** Nếu A', B' lần lượt là ảnh của hai điểm A, B qua phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ thì $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$.



Hình 4.21

Chứng minh (h .4.21). Theo định nghĩa, từ $T_{\vec{u}}$: $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$, ta suy ra $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \vec{u}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{A'B'} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$. Đó là điều phải chứng minh.

• ***Tính chất 4.*** Phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng.

Chứng minh. Kí hiệu A, B, C là 3 điểm thẳng hàng. Gọi A', B', C' là ảnh của A, B, C qua phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$. Theo Tính chất 3, ta có $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC}$. Vì A, B, C thẳng hàng nên $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\overrightarrow{AC}$ hay tồn tại số k sao cho $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$. Vì vậy $\overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{A'B'}$. Hệ thức đó chứng tỏ $\overrightarrow{A'B'}$ cùng phương với $\overrightarrow{A'C'}$ hay A', B', C' thẳng hàng.

Hệ quả. Phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ với $\vec{u} \neq \vec{0}$ biến :

i) Đường thẳng d thành đường thẳng d' và $d' // d$ hoặc $d' \equiv d$.

ii) Tia Ox thành tia $O'x'$.

iii) Đoạn AB thành đoạn $A'B'$ và $AB = A'B'$.

iv) Góc $\widehat{xOy}$ thành góc $\widehat{x'O'y'}$ và $\widehat{xOy} = \widehat{x'O'y'}$.

v) Đường tròn $(I; R)$ thành đường tròn $(I'; R)$ trong đó $\overrightarrow{II'} = \vec{u}$.

Chứng minh

i) Lấy trên d hai điểm A, B phân biệt và gọi A', B' là ảnh của chúng qua phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$. Với điểm C bất kì thuộc d, ảnh C' của C thuộc đường thẳng

$A'B'$ (theo Tính chất 3). Đảo lại, nếu C' là điểm bất kì thuộc $A'B'$ thì ảnh của C' trong phép tịnh tiến $T_{-\vec{u}}$ thuộc đường thẳng AB (vì A, B cũng là ảnh của A', B' qua $T_{-\vec{u}}$), nghĩa là tồn tại trên d điểm C nhận C' là ảnh. Hiển nhiện nếu A' nằm trên d thì d và d' trùng nhau. Nếu A' không thuộc d thì $d \parallel d'$.

ii) Lấy trên tia Ox điểm A (khác O) và kí hiệu O', A' là ảnh của O và A trong phép tịnh tiến. Nếu C thuộc tia Ox thì $\overrightarrow{OC}$ cùng phương với $\overrightarrow{OA}$, nghĩa là $\exists k > 0$ sao cho $\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OA}$. Gọi C' là ảnh của C trong phép biến đổi đó, ta có $\overrightarrow{O'C'} = \overrightarrow{OC}$ và $\overrightarrow{O'A'} = \overrightarrow{OA}$, suy ra $\overrightarrow{O'C'} = k\overrightarrow{O'A'}$. Điều đó chứng tỏ rằng $\overrightarrow{O'C'}$ cùng phương với $\overrightarrow{O'A'}$, tức là C' thuộc tia $O'A'$. Đảo lại, nếu C' là điểm bất kì thuộc tia $O'A'$ thì tồn tại số $m > 0$ sao cho $\overrightarrow{O'C'} = m\overrightarrow{O'A'}$. Phép tịnh tiến $T_{-\vec{u}}$ biến : O' thành O, A' thành A, C' thành C và ta có $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{O'A'}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{O'C'}$. Vì vậy $\overrightarrow{OC} = m\overrightarrow{OA}$. Điều đó chứng tỏ C thuộc tia OA. Tóm lại ảnh của mọi điểm thuộc tia OA là tia $O'A'$ hay tia $O'x'$.

iii) Suy ra trực tiếp từ tính chất 3.

iv) Lấy trên hai cạnh của góc $\widehat{xOy}$ hai điểm A, B. Gọi O', A', B' là ảnh của O, A, B qua phép tịnh tiến. Ta có $O'A' = OA$, $O'B' = OB$ và $A'B' = AB$. Vì vậy $\Delta O'A'B' = \Delta OAB$. Suy ra điều cần chứng minh.

v) Gọi M là điểm bất kì thuộc (I, R) ; I', M' theo thứ tự là ảnh của I, M qua phép tịnh tiến. Ta có $I'M' = IM = R$. Điều đó chứng tỏ M' thuộc đường tròn (I', R). Đảo lại, nếu M' thuộc (I', R) thì phép tịnh tiến $T_{-\vec{u}} : I' \mapsto I$ $M' \mapsto M$ và $IM = I'M' = R$, nghĩa là tồn tại điểm M thuộc (I, R) nhận M' là ảnh.

• ***Tính chất 5.*** Tích của hai phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ và $T_{\vec{u'}}$ là một phép tịnh tiến mà vectơ tịnh tiến bằng $\vec{u} + \vec{u'}$.

Chứng minh. Ta đặt $T = T_{\vec{u'}} \circ T_{\vec{u}}$. Với điểm M bất kì :

$$T_{\vec{u}} : M \mapsto M_1 \text{ và } \overrightarrow{MM_1} = \vec{u}$$

$$T_{\vec{u'}} : M_1 \mapsto M' \text{ và } \overrightarrow{M_1M'} = \vec{u'}.$$

Thế thì ta có : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'} = \vec{u} + \vec{u'}$. Điều đó chứng tỏ $T : M \mapsto M'$ thoả mãn điều kiện $\overrightarrow{MM'} = \vec{u} + \vec{u'}$. Theo định nghĩa, T là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = \vec{u} + \vec{u'}$.

• ***Tính chất 6.*** Tích của hai phép đối xứng tâm với hai tâm phân biệt là một phép tịnh tiến.

Chứng minh. Ta kí hiệu $Đ_A$ và $Đ_B$ là hai phép đối xứng tâm với tâm là A và B ($A \neq B$). Ta đặt $T = Đ_B \circ Đ_A$. Với mỗi điểm M bất kì, ta có

$$Đ_A : M \mapsto M_1 \text{ và } \overrightarrow{AM_1} = -\overrightarrow{AM},$$

$$Đ_B : M_1 \mapsto M' \text{ và } \overrightarrow{BM'} = -\overrightarrow{BM_1}.$$

Rõ ràng $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM'}$

$$= \overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{M_1B} = 2\overrightarrow{AB}.$$

Đẳng thức đó chứng tỏ T biến M thành M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{AB}$. Theo định nghĩa, T là phép tịnh tiến theo vectơ $2\overrightarrow{AB}$.

• ***Tính chất 7.*** Tích của hai phép đối xứng qua hai đường thẳng song song là một phép tịnh tiến. Vectơ tịnh tiến $\vec{u}$ của phép tịnh tiến đó được xác định bởi hệ thức $\vec{u} = 2\vec{v}$, trong đó $\vec{v}$ là vectơ tịnh tiến của phép tịnh tiến biến một trong hai trục đối xứng thành trục đối xứng còn lại.

Chứng minh. Ta kí hiệu x, y là hai đường thẳng song song. Ta cần chứng minh rằng phép biến đổi $T = Đ_y \circ Đ_x$ là một phép tịnh tiến. Thật vậy, với điểm M bất kì, $Đ_x : M \mapsto M'$, $Đ_y : M' \mapsto M''$. Theo định nghĩa, x vuông góc với MM' tại trung điểm H của MM' và $\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{HM'}$, y vuông góc với $M'M''$ tại trung điểm K của $M'M''$ và $\overrightarrow{M'K} = \overrightarrow{KM''}$. Rõ ràng phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{HK}}$ biến H thành K, do đó biến x thành y.

Từ $\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HM'} + \overrightarrow{M'K} + \overrightarrow{KM''} = 2(\overrightarrow{HM'} + \overrightarrow{M'K}) = 2\overrightarrow{HK}$, ta suy ra M'' là ảnh của M trong phép tịnh tiến $T_{2\overrightarrow{HK}}$.

3. Ứng dụng của phép tịnh tiến

Dạng 1. CHỨNG MINH TÍNH CHẤT HÌNH HỌC

Ví dụ 1. Cho hình bình hành $ABCD$. Từ B và D, ta kẻ các tia Bx và Dy nằm ngoài hình bình hành sao cho hai tia đó cắt nhau tại điểm M nằm khác phía với A đối với đường thẳng BD, bên trong góc $\widehat{BMD}$ chứa đỉnh C và $\widehat{CBM} = \widehat{CDM}$.

Chứng minh rằng $\widehat{AMB} = \widehat{CMD}$ và $\widehat{CMB} = \widehat{AMD}$.

Giải (h.4.22)

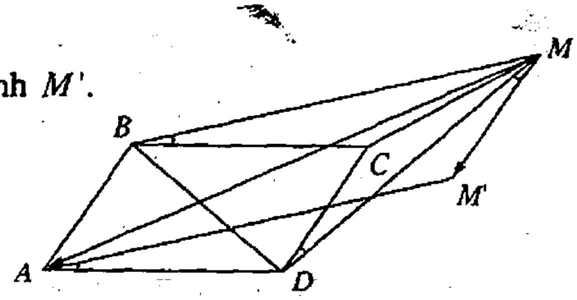
Ta xét phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{CD}}$ biến M thành M'.

Khi đó

$\widehat{DMM'} = \widehat{CDM} = \widehat{CBM}$.

Vì $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM'}$ và $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

nên $\widehat{CBM} = \widehat{DAM'}$.



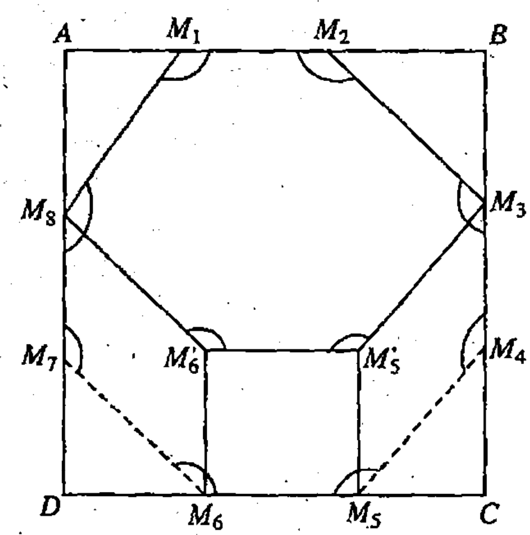
Hình 4.22

Từ các kết quả trên, ta suy ra $\widehat{DAM'} = \widehat{DMM'}$ và tứ giác $AMM'D$ nội tiếp trong đường tròn. Rõ ràng $\widehat{AMB} = \widehat{MAM'}$ (so le trong), $\widehat{MAM'} = \widehat{MDM'}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{MM'}$), $\widehat{MDM'} = \widehat{CMD}$ (so le trong). Bởi vậy $\widehat{AMB} = \widehat{CMD}$. Ta có $\widehat{AMD} = \widehat{AM'D}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{AD}$). Từ $\overrightarrow{M'A} = \overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{M'D} = \overrightarrow{MC}$, ta suy ra $\widehat{AM'D} = \widehat{BMC}$. Suy ra $\widehat{AMD} = \widehat{BMC}$ (điều phải chứng minh).

Ví dụ 2. Cho một bát giác lồi $M_1M_2M_3M_4M_5M_6M_7M_8$ nội tiếp hình vuông $ABCD$ có 8 cạnh bằng nhau. Các cạnh M_1M_2 nằm trên AB, M_3M_4 trên BC, M_5M_6 trên CD, M_7M_8 trên DA. Chứng minh rằng

$\widehat{M_1} = \widehat{M_5}$, $\widehat{M_2} = \widehat{M_6}$,

$\widehat{M_3} = \widehat{M_7}$, $\widehat{M_4} = \widehat{M_8}$.



Hình 4.23

Giải (h.4.23)

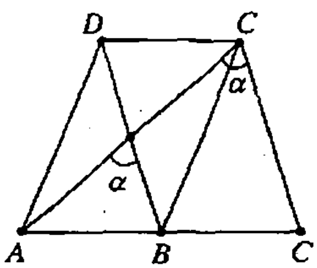
Giả sử phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{M_4M_3}$ biến M_5, M_6 thành M'_5 và M'_6, khi đó lục giác $M_1M_2M_3M'_5M'_6M_8$ là một lục giác có 6 cạnh bằng nhau. Tứ giác $M_1M_2M'_5M'_6$ là hình bình hành nên $M_1M'_6 = M_2M'_5$. Hai tam giác cân $M_8M_1M'_6$ và $M_3M_2M_5$ bằng nhau do có các cạnh bằng nhau. Từ các kết quả đó, ta được các góc tại các đỉnh M_1 và M'_5, M_2 và M'_6, M_3 và M_8 của lục giác bằng nhau. Các góc của bát giác tại các đỉnh M_1 và M_5, M_2 và M_6 bằng nhau, suy ra $M_4M_5 \,//\, M_1M_8$, $M_6M_7 \,//\, M_2M_3$. Từ đó suy ra các góc tại M_3 và M_7, M_4 và M_8 bằng nhau.

Dạng 2. DỰNG HÌNH

Ví dụ 3. Dựng hình bình hành cho biết hai cạnh liên tiếp và góc tạo bởi hai đường chéo.

Giải (h.4.24)

Phân tích. Giả sử $ABCD$ là hình bình hành đã dựng có $AB = a$, $BC = b$ và $(\widehat{AC, BD}) = \alpha$ (a, b, α là các số cho trước). Gọi C' là ảnh của B qua phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{AB}}$. Trong tam giác ACC' ta biết $AC' = 2a$, $BC = b$ là trung tuyến kẻ từ C và $\widehat{AC'C} = \alpha$. Từ đó ta suy ra cách dựng.



Hình 4.24

Cách dựng. Dựng $AC' = 2a$, trung điểm B của AC', cung chứa góc d trên dây AC', cung tròn tâm B, bán kính b. Gọi C là điểm chung của hai cung tròn đã dựng. Dựng D là ảnh của C trong phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{BA}}$.

Biện luận. Bài toán có nghiệm khi hai cung tròn có điểm chung.

Dạng 3. TOÁN CỰC TRỊ

Ví dụ 4. Trong số các tứ giác lồi có độ dài hai đường chéo bằng m, n và góc tạo bởi hai đường chéo đó bằng α (m, n, α là các đại lượng cho trước), tứ giác nào có chu vi nhỏ nhất ?

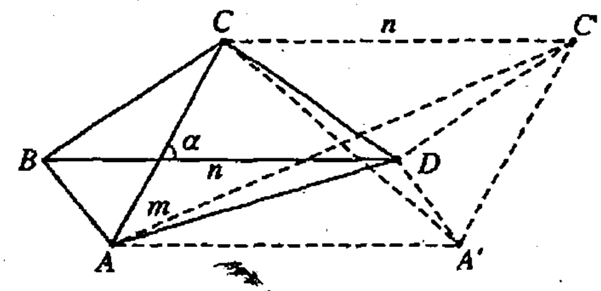
Giải (h.4.25)

Kí hiệu $ABCD$ là tứ giác lồi thoả mãn điều kiện bài toán. Thực hiện phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{BD}} : A \mapsto A'$, $C \mapsto C'$, khi đó $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'D}$ và $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DC'}$. Ta có :

$AB + BC + CD + DA = DA + DC' + DC + DA' \geq AC' + A'C$

$= \sqrt{m^2 + n^2 - 2mn\cos\alpha} + \sqrt{m^2 + n^2 + 2mn\cos\alpha}$ không đổi.

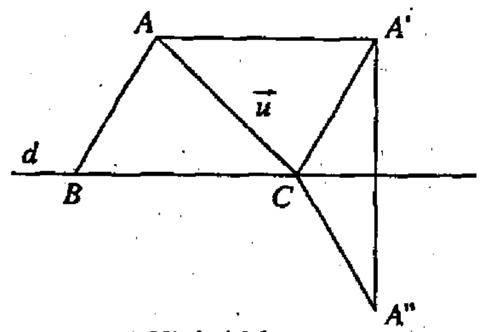
Dấu bằng trong bất đẳng thức xảy ra khi D là giao điểm của các đường thẳng AC' và $A'C$. Trường hợp đó tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.



Hình 4.25

Tóm lại trong số các tứ giác thoả mãn điều kiện bài toán, hình bình hành có chu vi nhỏ nhất.

Ví dụ 5. Cho trước một điểm A và một đường thẳng d không đi qua A. Trên d ta đặt một đoạn thẳng $BC = a$ (a là độ dài cho trước). Tìm vị trí của đoạn BC để $AB + AC$ nhỏ nhất.



Hình 4.26

Giải (h.4.26)

Ta thực hiện phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$, phương của vectơ $\vec{u}$ song song với d và $|\vec{u}| = a$. Phép tịnh tiến này biến A thành A', B thành C. Khi đó A' là điểm cố định khác A và $AB = CA'$. Rõ ràng $AB + AC = CA + CA'$.

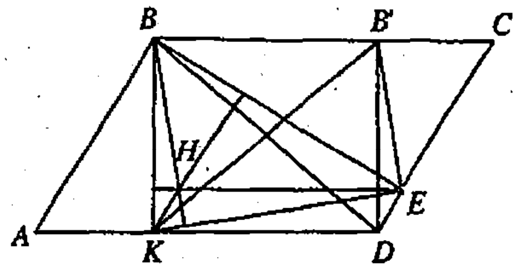
Thực hiện phép đối xứng trục $Đ_d$ biến A' thành A'', khi đó A'' cố định và $AA'' = q$ là một số không đổi. Ta có $CA + CA' = CA + CA'' \geq q$. Dấu bằng trong bất đẳng thức xảy ra khi C là giao điểm của d với AA''. Vậy $AB + AC$ nhỏ nhất khi C là giao điểm của d và AA''. B là ảnh của C qua phép tịnh tiến $T_{-\vec{u}}$.

Dạng 4. TÍNH ĐẠI LƯỢNG HÌNH HỌC

Ví dụ 6. Cho hình bình hành $ABCD$. Từ B ta kẻ các đường thẳng $BE \perp CD$ và $BK \perp AD$ ($E \in CD$, $K \in AD$), biết $KE = a$ và $BD = b$ ($b > a$). Tính khoảng cách từ B đến trực tâm tam giác BEK.

Giải (h. 4.27)

Gọi H là trực tâm tam giác BEK. Vì $EH \perp BK$ và $KH \perp BE$ nên $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{KH}$ và $\overrightarrow{KD} = \overrightarrow{HE}$. Phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{KD}}$: $K \mapsto D$, $H \mapsto E$, $B \mapsto B'$, suy ra $T_{\overrightarrow{KD}}$: $\overrightarrow{BH} \mapsto \overrightarrow{B'E}$. Vì $BH \perp EK$ nên $B'E \perp KE$. Trong tam giác $B'EK$ vuông tại E, ta có $B'E^2 = B'K^2 - KE^2$. Mặt khác, $B'K = BD$ (tứ giác $BB'DK$ là hình chữ nhật), do đó $B'K = b$. Vậy $B'E = BH = \sqrt{b^2 - a^2}$.



Hình 4.27

BÀI TẬP

CHỨNG MINH TÍNH CHẤT HÌNH HỌC

20. Hai đường tròn (O_1) và (O_2) bằng nhau và tiếp xúc với nhau tại K. Trên đường tròn (O_1) lấy điểm A, trên (O_2) lấy điểm B sao cho $\widehat{AKB} = 90^\circ$. Chứng minh rằng độ dài $AB = O_1O_2$.

21. Bên trong một hình vuông cạnh bằng 1, ta đặt một hình F mà khoảng cách giữa hai điểm bất kì thuộc F khác 0,001. Chứng minh rằng diện tích của F không lớn hơn 0,34.

22. Trên cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, ta lấy điểm D (khác B, C). Phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{DA}$ biến B thành B', C thành C'. Chứng minh rằng trực tâm $\Delta AB'C'$ nằm trên một đường thẳng cố định khi D thay đổi trên cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A.

23. Cho hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O). Trên cạnh AB ta lấy điểm M. Đường thẳng vuông góc với AB tại M cắt cạnh CD tại N và đường tròn (O) tại các điểm K và L (L nằm trên cung AB, K nằm trên cung CD). Đường thẳng đi qua K và song song với CD cắt các đường thẳng AD và BC tương ứng tại P và Q.

a) Chứng minh rằng tồn tại một phép tịnh tiến biến tam giác LCD thành tam giác MPQ.

b) Chứng minh rằng N là trực tâm của tam giác MPQ.

24. Trên các cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC về phía ngoài tam giác, ta dựng các hình vuông ABB_1A_2, BCC_1B_2, CAA_1C_2. Chứng minh rằng các đường trung trực của các đoạn thẳng A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 đồng quy.

DỰNG HÌNH

25. Dựng hình thang, biết độ dài hai đường chéo, góc tạo bởi hai đường chéo và độ dài một cạnh bên.

26. Dựng hình thang, biết độ dài hai đường chéo, góc tạo bởi hai đường chéo và hiệu độ dài hai đáy.

27. Cho hai đường tròn (O), (O') và đường thẳng d. Hãy dựng đường thẳng $x \parallel d$ và cắt đồng thời hai đường tròn thành hai dây cung bằng nhau.

TÌM TẬP HỢP ĐIỂM

28. Cho hình bình hành $ABCD$ có cạnh AB cố định, cạnh CD thay đổi sao cho $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{BD}{AD}$. Tìm tập hợp các đỉnh C và D.

TOÁN CỰC TRỊ

29. Cho hai đường thẳng song song x, y và điểm M nằm cùng phía với x đối với y và nằm cùng phía với y đối với x. Trên x ta đặt một đoạn thẳng $AB = a$, trên y ta đặt một đoạn thẳng $CD = b$ (a, b là các độ dài cho trước). Tìm vị trí các đoạn AB và CD để $MA + MB + MC + MD$ nhỏ nhất.

30. Cho hình thang $ABCD$ có độ dài hai đáy $AB = a$, $CD = b$. Đáy CD cố định. Đáy AB trượt trên một đường thẳng cố định x. Tìm vị trí của AB để tổng độ dài hai đường chéo AC và BD đạt giá trị nhỏ nhất.

31. Cho đường thẳng d và hai điểm A, B nằm về hai phía đối với d. Một đoạn thẳng $CD = a$ (a là độ dài cho trước) trượt trên d. Tìm vị trí của đoạn thẳng đó để độ dài đường gấp khúc $ACDB$ ngắn nhất. Hãy giải bài toán trong trường hợp A, B nằm cùng phía với d.

TÍNH ĐẠI LƯỢNG HÌNH HỌC

32. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. Gọi M là giao điểm của các đường phân giác góc A và D ; N là giao điểm của các phân giác góc B và C. Tính độ dài MN.

33. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có các đường chéo $AC = 5$, $BD = 3$ và đoạn thẳng nối trung điểm hai đáy bằng 2. Tính diện tích hình thang.

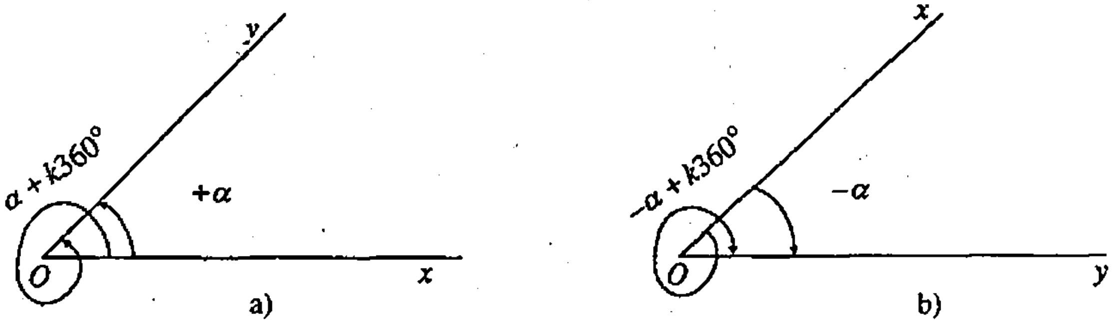
§5. PHÉP QUAY QUANH MỘT ĐIỂM

1. Góc định hướng giữa hai tia

Để thuận tiện, sau đây ta nhắc lại một số điều về góc định hướng đã được trình bày trong chương II.

Trong hình học, hình tạo bởi hai tia Ox và Oy được gọi là góc tạo bởi hai tia đó và được kí hiệu bởi $\widehat{xOy}$. Số đo của góc $\widehat{xOy}$ nằm trong khoảng từ 0^o đến 180^o (hoặc từ 0 đến π radian). Khi ta viết $\widehat{xOy}$ hoặc $\widehat{yOx}$, ta đều hiểu rằng hai góc đó chỉ là một mà thôi.

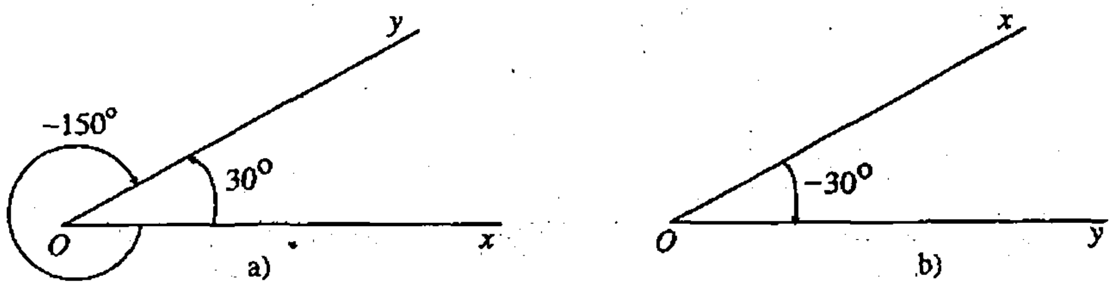
Nếu thứ tự của hai cạnh góc $\widehat{xOy}$ được xét đến, tức là hai góc $\widehat{xOy}$ và $\widehat{yOx}$ khác nhau thì ta nói $\widehat{xOy}$ đã được định hướng và được kí hiệu bởi $(Ox;Oy)$. Trong kí hiệu này, Ox là cạnh đầu và Oy là cạnh cuối của góc. Ta xét tia Om di động quanh O (vai trò như kim phút của chiếc đồng hồ) từ vị trí Ox đến trùng với tia Oy. Tia Om có thể di động theo cùng chiều với chiều kim đồng hồ hoặc ngược với chiều kim đồng hồ. Ta quy định hướng của góc $(Ox;Oy)$ là dương nếu tia Om nằm trong góc $\widehat{xOy}$ di động ngược chiều kim đồng hồ từ vị trí đầu Ox đến vị trí cuối Oy, là âm khi Om di động theo chiều ngược lại. Nếu α là số đo của góc hình học $\widehat{xOy}$ thì số đo của góc định hướng tương ứng là $\pm\alpha + k.360^0$ (hoặc $\pm\alpha + 2k\pi$), với k nguyên bất kì, tuỳ thuộc vào số vòng quay của Om và viết $(Ox;Oy) = \pm\alpha \pmod{360^o}$ hoặc $(Ox;Oy) = \pm\alpha \pmod{2\pi}$ (dấu + và – để chỉ số đo của góc định hướng dương hoặc âm).



Hình 4.28

Ví dụ 1. Cho góc hình học $\widehat{xOy} = 30^o$. Xét góc định hướng với Ox là tia đầu, Oy là tia cuối. Khi đó, số đo của góc định hướng $(Ox;Oy)$ là phần tử của tập hợp $\{30^o + k.360^o \mid k \in \mathbb{Z}\}$ (hình 4.29a) hoặc là phần tử của tập hợp $\{-30^o + k.360^o \mid k \in \mathbb{Z}\}$ (hình 4.29b)

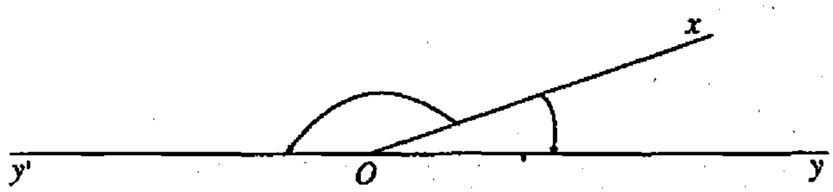
Như vậy, nếu $(Ox; Oy) = 30^{\circ}$ thì ta cũng cần hiểu rằng nó cũng nhận các số đo là 390°, ... hoặc -150°, -510°, ... □



Hình 4.29

Tóm lại góc định hướng giữa hai tia là góc tạo bởi hai tia đó có xét một thứ tự xác định. Nếu α là một trong các số đo của góc thoả mãn điều kiện $-\pi < \alpha \leq \pi$ thì số đo của góc bằng $\alpha + 2k\pi$ với k nguyên tuỳ ý. α được gọi là giá trị chính của góc. Rõ ràng góc định hướng $(Ox; Oy)$ có hướng dương nếu $180^{\circ} > \alpha > 0^{\circ}$, có hướng âm nếu $-180^{\circ} < \alpha < 0^{\circ}$. Khi nói tới số đo của góc định hướng, ta hiểu rằng chúng sai khác nhau một bội 2π. Ta viết $(Ox ; Oy) = \alpha \pmod{2\pi}$ và để cho gọn, ta chỉ cần viết $(Ox; Oy) = \alpha$. Góc định hướng có tia đầu Ox và tia cuối Oy trùng nhau được gọi là góc định hướng không và được kí hiệu $(Ox; Ox)$ hoặc $(Oy; Oy)$. Số đo của góc đó bằng $2k\pi$ với k nguyên tuỳ ý, nghĩa là $(Ox; Ox) = 0 \pmod{2\pi}$. Hướng của nó không xác định. Nếu $(Ox; Oy) = \pm\pi$ thì hai tia Ox và Oy lập thành một trục. Hướng của góc đó cũng không xác định.

Giả sử Oy' là tia đối của tia Oy, khi đó $(Ox; Oy)$ và $(Ox; Oy')$ ngược hướng.



Hình 4.30

Hai góc định hướng được gọi là bằng nhau nếu số đo của chúng bằng nhau.

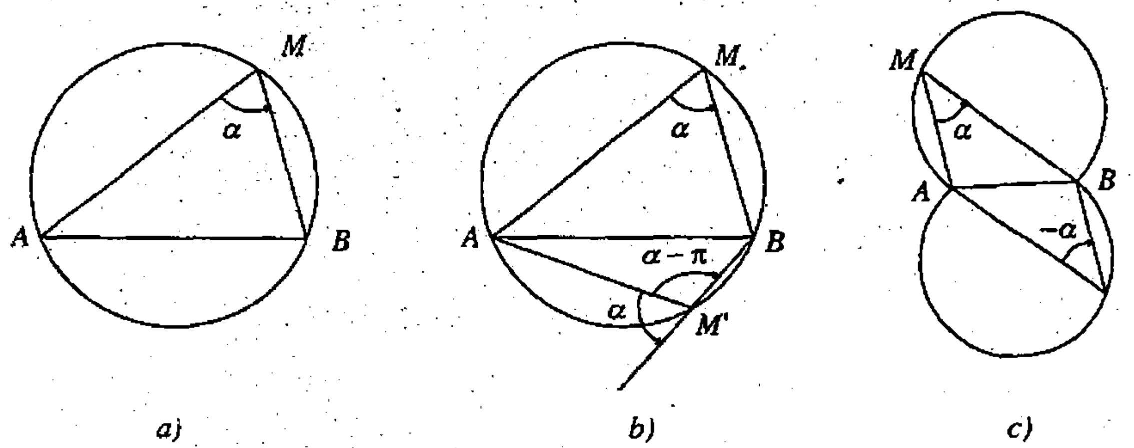
Hai góc định hướng được gọi là đối nhau nếu số đo của chúng đối nhau.

Nếu A và B là hai điểm phân biệt và O, A, B không thẳng hàng thì hai góc định hướng $(OA ; OB)$ và $(O'A ; O'B)$ cùng hướng khi và chỉ khi các điểm O và O' nằm cùng phía đối với đường thẳng AB. Hai góc đó ngược hướng khi và chỉ khi O và O' nằm khác phía đối với đường thẳng AB.

Một kết quả sau đây thường được dùng trong các chứng minh hình học.

Bổ đề 1. Cho hai điểm A, B cố định phân biệt và một góc α với $0 < \alpha < \pi$ (hoặc $-\pi < \alpha < 0$). Tập hợp các điểm M khác A, B sao cho $(MA; MB) = \alpha$ là một cung chứa góc được dựng trên dây AB (trừ A, B).

Nếu đổi α thành $-\alpha$ thì tập hợp M là cung đối xứng với cung trên qua đường thẳng AB. Nếu $(MA; MB) = \alpha - \pi$ thì tập hợp M là cung còn lại của đường tròn chứa cung trên.



Hình 4.31

Cho hai góc định hướng có các số đo là α và β. Tổng của hai góc đó là một góc định hướng mà số đo bằng $\alpha + \beta$. Hiệu của góc có số đo α với góc có số đo β là một góc định hướng mà số đo bằng $\alpha - \beta$ hoặc $\alpha + (-\beta)$. Nếu m là một số nguyên cho trước thì tích của m với góc có số đo α là một góc định hướng mà số đo bằng $m.\alpha$. □

Từ định nghĩa trên, ta có hệ thức Chasles :

Nếu $(Ox ; Oy) = \alpha$, $(Oy ; Oz) = \beta$, $(Ox ; Oz) = \gamma$ thì $\alpha + \beta = \gamma$, tức là

$$(Ox ; Oy) + (Oy ; Oz) = (Ox ; Oz).$$

Góc định hướng giữa hai tia khác gốc

Cho hai tia Ax và By có các gốc A, B khác nhau. Lấy một điểm O tuỳ ý và gọi Ox, Oy là hai tia theo thứ tự cùng hướng với Ax, By. Khi đó ta nói góc định hướng tạo bởi Ox và Oy bằng góc định hướng tạo bởi hai tia Ax và By và viết

$$(Ax ; By) = (Ox ; Oy).$$

Rõ ràng nếu $Ax \parallel By$ thì $(Ax ; By) = 0 \pmod{2\pi}$

hoặc $$(Ax ; By) = \pm\pi \pmod{2\pi}.$$

Góc tạo bởi hai vectơ

Cho hai vectơ khác không $\vec{u}$, $\vec{v}$. Ta biết rằng mỗi vectơ đó xác định một tia cùng hướng với nó. Vậy ta nói góc định hướng giữa hai vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ là góc định hướng giữa hai tia cùng hướng với hai vectơ đó và kí hiệu là $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$. Các kết quả của góc định hướng giữa hai tia vẫn còn hiệu lực đối với góc định hướng giữa hai vectơ.

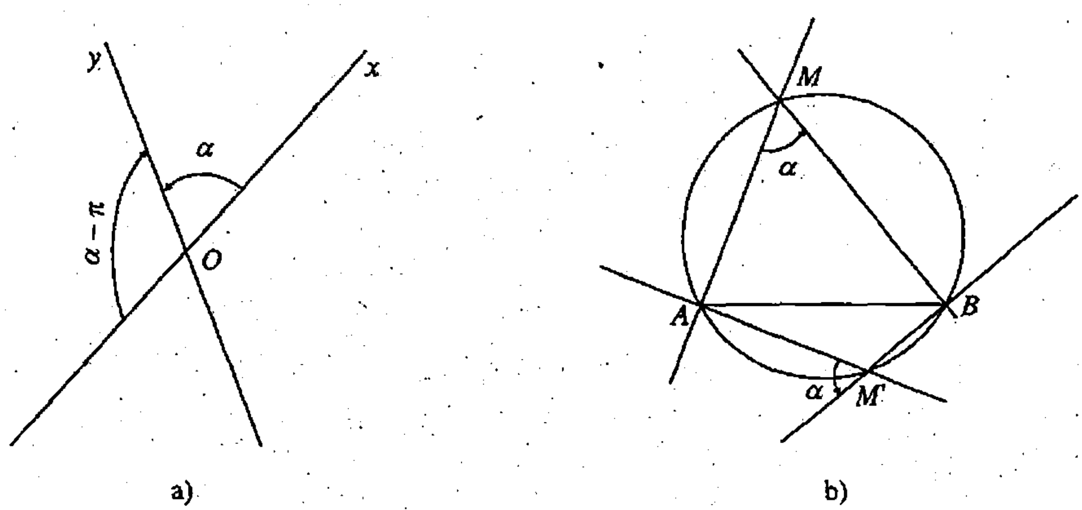
2. Góc định hướng giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng cắt nhau x và y. Ta biết rằng hai đường thẳng đó lập thành 4 góc mà mỗi góc có số đo nằm trong khoảng từ 0^o đến 180^o (hoặc từ 0 đến π). Góc có số đo nhỏ nhất trong bốn góc đó được gọi là góc giữa hai đường thẳng x, y và được kí hiệu bởi (x, y) hoặc (y, x).

Tuy nhiên, nếu có xét thứ tự giữa x và y thì góc giữa x và y đã được định hướng. Ta kí hiệu góc định hướng giữa hai đường thẳng x và y là $\overline{(x,y)}$, trong đó x là cạnh đầu và y là cạnh cuối. Từ định nghĩa này, ta suy ra rằng nếu α là số đo của góc giữa hai tia nằm trên x và y thì số đo của góc định hướng giữa x và y là $\overline{(x,y)} = \alpha + k.\pi$ với k nguyên bất kì và viết $\overline{(x,y)} = \alpha \pmod{\pi}$.

Đối với góc giữa hai đường thẳng định hướng, ta có hệ thức Chasles

$$\overline{(x,y)} + \overline{(y,z)} = \overline{(x,z)} \pmod{\pi}.$$



Hình 4.32

Một kết quả sau đây hay được dùng trong các chứng minh hình học.

Bổ đề 2. Cho hai điểm phân biệt A, B và góc α (khác 0 và π). Tập hợp các giao điểm M của hai đường thẳng x và y lần lượt đi qua A và B sao cho $\overline{(x,y)} = \alpha \pmod \pi$ là một đường tròn đi qua A và B (trừ A, B).

Trường hợp $x \,//\, y$ thì góc định hướng $\overline{(x,y)} = 0 \pmod \pi$.

3. Phép quay quanh một điểm

a) Định nghĩa

Cho điểm O và góc định hướng α. Phép quay $Q_{(O\,;\,\alpha)}$ tâm O, góc quay α là phép biến hình biến O thành O và biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho

$$OM = OM' \text{ và } (OM\,;\,OM') = \alpha.$$

Khi đó ta nói M' là ảnh của M qua phép quay tâm O với góc quay α và kí hiệu $Q_{(O,\,\alpha)} : M \mapsto M'$.

b) Tính chất

Rõ ràng phép quay với góc quay 0 chính là phép đồng nhất. Các tính chất của phép quay được phát biểu và chứng minh dưới đây áp dụng cho phép quay với góc quay khác 0.

a) $Q_{(O,\,\alpha)}$ là phép biến hình 1−1 và O là điểm bất động duy nhất của phép biến hình đó.

Chứng minh. Giả sử M_1 và M_2 là các tạo ảnh của M' qua phép quay $Q_{(O,\,\alpha)}$. Theo định nghĩa, ta có $OM_1 = OM' = OM_2$ và $(OM_1\,;\,OM') = (OM_2\,;\,OM') = \alpha$. Điều đó chứng tỏ rằng M_1 và M_2 nằm trên cùng một tia và cách O một khoảng bằng nhau. Vì vậy M_1 trùng với M_2. Nếu O' là điểm bất động khác O của phép quay thì theo định nghĩa ta có $(OO'\,;\,OO') = \alpha$. Đẳng thức này không thể xảy ra. Vì vậy O và O' trùng nhau. □

b) Nếu $Q_{(O,\,\alpha)} : A \mapsto A',\ B \mapsto B'$ thì $A'B' = AB$ và góc định hướng giữa hai tia AB, $A'B'$ (giả sử $A \neq B$) bằng góc quay : $(AB\,;\,A'B') = \alpha$.

Chứng minh

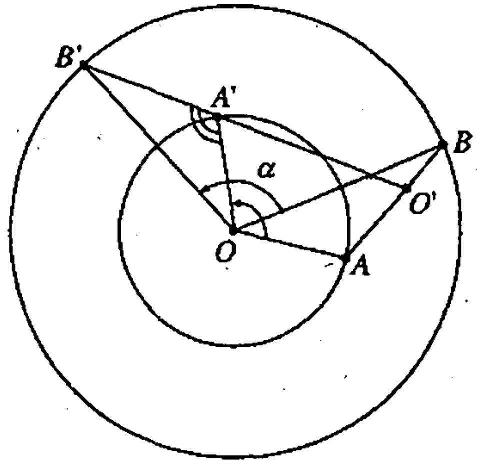
Trường hợp điểm O nằm trên đường thẳng AB. Trường hợp này được suy ra từ định nghĩa.

Trường hợp O không nằm trên đường thẳng AB. Theo định nghĩa phép quay, ta có $(OA;OA') = (OB;OB') = \alpha$ và $OA = OA'$, $OB = OB'$. Theo hệ thức Chasles, ta có $(OA;OA') = (OA;OB) + (OB;OA')$

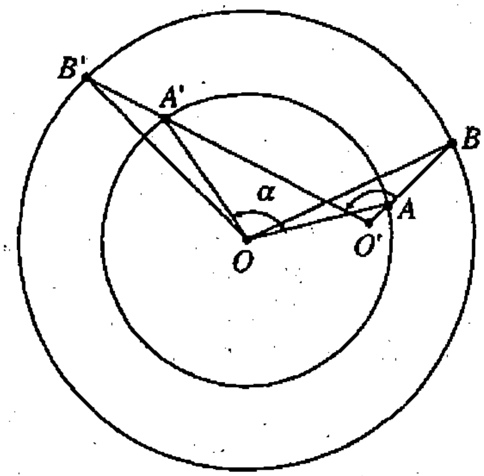
và $\quad (OB;OB') = (OB;OA') + (OA';OB') \Rightarrow (OA;OB) = (OA';OB')$.

Từ các kết quả trên ta suy ra $AB = A'B'$.

Để kiểm chứng góc định hướng giữa hai tia AB và $A'B'$ bằng góc quay, ta có thể giả thiết $OA < OB$ và xét trường hợp $0 < \alpha < \pi$. Gọi O' là giao điểm của các đường thẳng AB và $A'B'$. Có thể xảy ra hai trường hợp sau (xem hình 4.33)



a)



b)

Hình 4.33

Trên hình 4.33a, các điểm O và O' nằm khác phía đối với đường thẳng AA'. Trên hình 4.33b, O và O' nằm cùng phía đối với AA'. Trong cả hai trường hợp, ta đều suy ra góc định hướng giữa hai tia AB và $A'B'$ bằng α. □

Hệ quả. Phép quay $Q_{(O,\alpha)}$ biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng, biến đường thẳng d thành đường thẳng d' và góc định hướng $\overline{(d;d')} = \alpha \pmod{\pi}$, biến tia thành tia và góc định hướng giữa tia và tia ảnh bằng góc quay, biến đoạn AB thành đoạn $A'B'$ và $AB = A'B'$, biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$ và các góc định hướng tại các đỉnh tương ứng bằng nhau, đường tròn $(I;R)$ thành đường tròn $(I';R)$ và $(OI;OI') = \alpha$.

I. Ứng dụng của phép quay

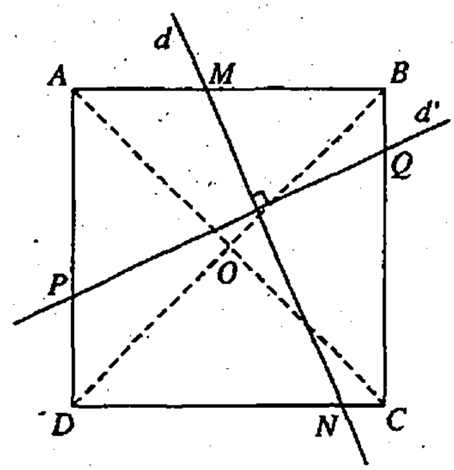
Những bài toán hình học mà trong giả thiết xuất hiện các góc đặc biệt như góc vuông, góc 30°, 60°, ... và các độ dài bằng nhau thường gợi cho ta ý tưởng dùng phép quay.

Dạng 1. CHỨNG MINH CÁC TÍNH CHẤT HÌNH HỌC

Ví dụ 2. Cho hình vuông $ABCD$. Một đường thẳng d cắt các đường thẳng AB và CD tương ứng tại các điểm M, N. Một đường thẳng d' vuông góc với d cắt các đường thẳng AD và BC tương ứng tại các điểm P và Q. Chứng minh rằng $MN = PQ$.

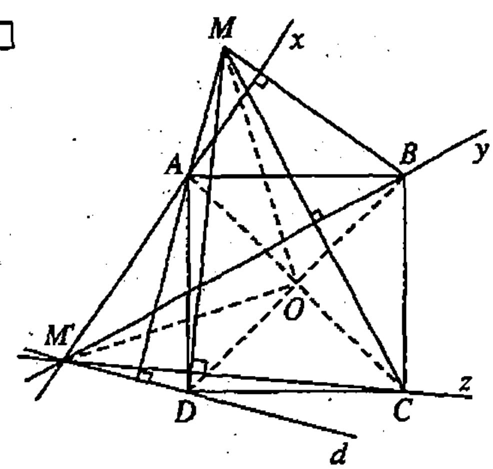
Giải

Ta gọi O là tâm hình vuông (xem hình 4.34). Phép quay $Q_{(O,\,90^{\circ})} : B \mapsto A,\ A \mapsto D$, do đó biến đường thẳng BA thành đường thẳng AD và biến M thành $M' \in AD$, biến N thành N'. Cũng qua phép quay đó, C biến thành B ; D biến thành C, do đó đường thẳng CD biến thành đường thẳng BC và N biến thành N'. Theo tính chất của phép quay, ta có $MN = M'N'$ và $MN \perp M'N'$. Theo giả thiết $MN \perp PQ$, vì vậy hoặc $PQ \,//\, M'N'$ hoặc $PQ \equiv M'N'$. Trong bất kì trường hợp nào ta cũng suy ra $MN = PQ$. □



Hình 4.34

Ví dụ 3. Cho hình vuông $ABCD$ và một điểm M bất kì. Kí hiệu x là đường thẳng đi qua A vuông góc với MB ; y là đường thẳng đi qua B vuông góc với MC ; z là đường thẳng đi qua C vuông góc với MD ; d là đường thẳng đi qua D vuông góc với MA. Chứng minh rằng bốn đường thẳng x, y, z, d đồng quy.



Hình 4.35

Giải (h.4.35)

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

- Phép quay $Q_{(O,90^\circ)}: B \mapsto A$, $M \mapsto M'$ do đó BM biến thành AM' và $AM' \perp BM$, suy ra AM' chính là x hay x đi qua M'. Tương tự y, z, d là các đường thẳng cùng đi qua M'. □

Ví dụ 4. Tìm tất cả các phép quay của mặt phẳng biến hình vuông $ABCD$ thành chính nó.

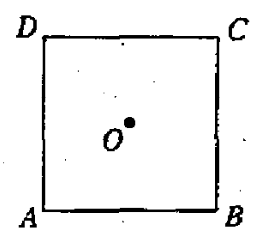
Giải (h. 4.36)

Phép quay biến $ABCD$ thành chính nó khi và chỉ khi ảnh của bốn đỉnh A, B, C, D phải là một hoán vị của bốn đỉnh đó.

Khi đó, tâm O của hình vuông $ABCD$ phải biến thành điểm cách đều cả bốn đỉnh A, B, C, D, tức là biến thành O. Vậy O phải là điểm bất động của phép quay cần tìm.

Khi góc quay $\varphi \neq 0$, do cạnh góc vuông phải biến thành cạnh góc vuông nên φ chỉ có thể là π, $\frac{\pi}{2}$ hoặc $-\frac{\pi}{2}$ (modulo 2π).

Phép quay $Q_{(O,\pi)}$ là phép đối xứng tâm O biến 4 đỉnh A, B, C, D theo thứ tự thành C, D, A, B.



Hình 4.36

Phép quay $Q_{\left(O,\frac{\pi}{2}\right)}$ biến 4 đỉnh A, B, C, D theo thứ tự thành B, C, D, A.

Phép quay $Q_{\left(O,-\frac{\pi}{2}\right)}$ biến 4 đỉnh A, B, C, D theo thứ tự thành D, A, B, C.

Vậy có tất cả bốn phép quay (kể cả biến đổi đồng nhất) biến hình vuông $ABCD$ thành chính nó. □

Dạng 2. DỰNG HÌNH

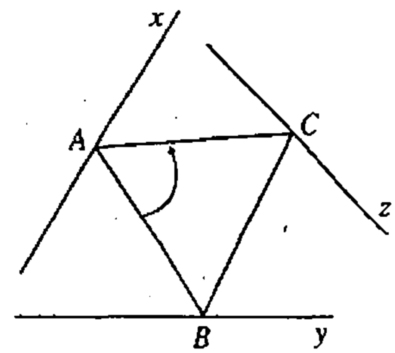
Ví dụ 5. Cho ba đường thẳng x, y, z đôi một cắt nhau. Hãy dựng tam giác đều có các đỉnh nằm trên ba đường thẳng đã cho.

Giải (h.4.37)

Phân tích. Giả sử ABC là tam giác đều đã dựng có $A \in x$, $B \in y$, $C \in z$. Xét phép quay tâm A góc quay 60° biến B thành C, do đó y biến thành y' đi qua C, C là điểm chung của y' và z.

Cách dựng. Lấy một điểm $A \in x$. Dựng ảnh y' của y qua phép quay $Q_{(A, 60^\circ)}$. y' và z cắt nhau tại C. Dựng ảnh B của C qua phép quay $Q_{(A, -60^\circ)}$. ABC là tam giác đều phải dựng.

Chứng minh. Giả sử y' phải cắt z tại C. Phép quay $Q_{(A, -60^\circ)}$ biến y' thành y, do đó B thuộc y. Tam giác ABC có $AB = AC$ và $\widehat{BAC} = 60^\circ$, do đó ABC là tam giác đều. □



Hình 4.37

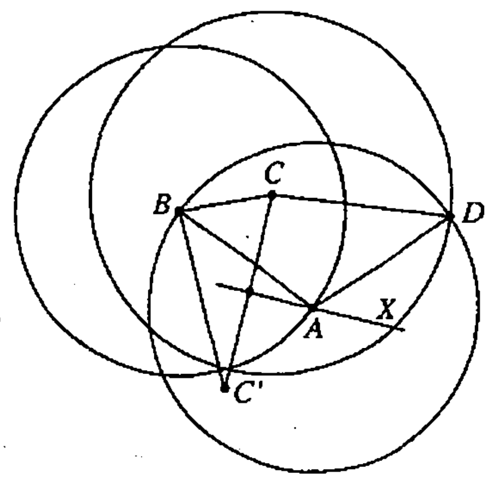
Ví dụ 6. Dựng tứ giác $ABCD$, biết $AB = AD = a$, $BC = b$, $CD = c$, tổng số đo hai góc B và D bằng α.

Giải (h.4.38)

Phân tích. Giả sử tứ giác $ABCD$ đã dựng. Phép quay tâm A biến D thành B sẽ biến C thành C' và ta có

$$\widehat{ABC'} = \widehat{ADC},\ BC' = CD = c.$$

Xét góc $\widehat{CBC'}$. Góc đó có số đo hoặc bằng α hoặc bằng $360^\circ - \alpha$ mà ta kí hiệu là φ. Tam giác BCC' hoàn toàn xác định (nếu $\varphi = 180^\circ$ tam giác đó suy biến thành đoạn thẳng).



Hình 4.38

Cách dựng

– Dựng tam giác BCC' (c.g.c).

– Dựng đường trung trực x của đoạn CC'.

– Dựng đường tròn tâm B, bán kính a. Giao điểm của đường tròn đó với x là A.

– Dựng đường tròn tâm A, bán kính a và đường tròn tâm C bán kính c. Điểm chung của hai đường tròn đó là D (Chọn D để có tứ giác $ABCD$).

Biện luận. Bài toán chỉ có nghiệm khi x và đường tròn tâm B có điểm chung và các đường tròn tâm C, bán kính c và tâm A, bán kính a có điểm chung. Số nghiệm có được phụ thuộc vào số các điểm chung đó. □

Dạng 3. TÌM TẬP HỢP ĐIỂM

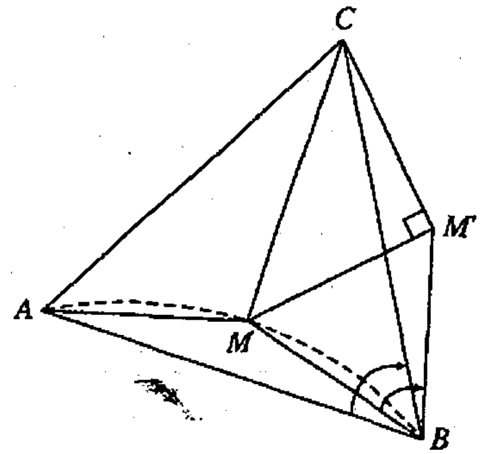
Ví dụ 7. Cho tam giác đều ABC. Tìm tập hợp các điểm M nằm trong tam giác sao cho

$$MA^2 + MB^2 = MC^2.$$

Giải (h.4.39)

Phép quay $Q_{(B,-60^\circ)} : M \mapsto M'$, $A \mapsto C$, do đó $MA = M'C$, $MB = MM'$. Tam giác $MM'C$ vuông tại M' vì

$$M'C^2 + M'M^2 = MA^2 + MB^2 = MC^2.$$



Hình 4.39

Từ đó ta suy ra $\widehat{BM'C} = 150^\circ$.

Mặt khác, từ $\Delta AMB = \Delta CM'B$, suy ra $\widehat{AMB} = 150^\circ$. Chứng tỏ M thuộc cung chứa góc 150° dựng trên dây AB. Tập hợp các điểm M là cung 150° nằm trong tam giác ABC dựng trên dây AB, trừ hai điểm A, B.

Đảo lại, nếu M là điểm thuộc cung đó, thì phép quay $Q_{(B,-60^\circ)}$ biến M thành M' và cung $\overset{\frown}{AMB}$ thành cung $\overset{\frown}{CM'B}$ có số đo 150°.

Vì tam giác BMM' đều, do đó $\widehat{MM'C} = 150^\circ - 60^\circ = 90^\circ$. Tam giác $MM'C$ vuông tại M', do đó $M'M^2 + M'C^2 = MC^2$. Do $MA = M'C$, $MM' = MB$ nên $MA^2 + MB^2 = MC^2$. □

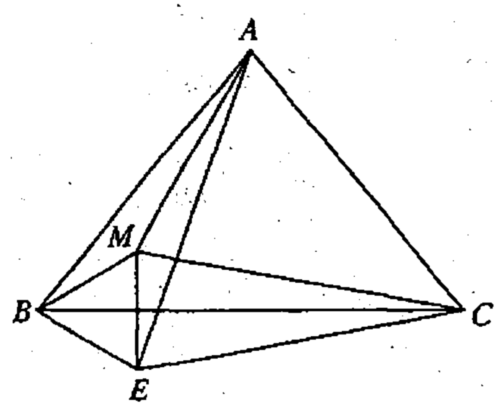
Dạng 4. TÍNH CÁC ĐẠI LƯỢNG HÌNH HỌC

Ví dụ 8. Cho tam giác cân ABC ($AB = AC$) có $\widehat{BAC} = 80^\circ$. Bên trong tam giác ta lấy điểm M sao cho $\widehat{MBC} = 30^\circ$, $\widehat{MCB} = 10^\circ$. Tính $\widehat{MAC}$.

Giải (h.4.40)

Thực hiện phép quay $Q_{(A,-60^\circ)} : C \mapsto E$ và $\widehat{CAE} = 60^\circ$.

Tia AE nằm trong góc $\widehat{BAC}$ (xem hình vẽ). Tam giác ACE là đều, do đó $\widehat{ACE} = 60^\circ$. Vì $\widehat{ACB} = 50^\circ$, do đó



Hình 4.40

$\widehat{BCE} = 10^o$. Ta thấy rằng ba điểm B, E, C cùng nằm trên đường tròn tâm A nên $\widehat{EBC} = 30^o$.

$\Delta BMC = \Delta BEC$ (g.c.g), do đó $CE = CM = CA$. Các điểm E, M, A cùng nằm trên đường tròn tâm C nên $2\widehat{MAE} = \widehat{MCE} = 20^o$. Vậy $\widehat{MAE} = 10^o$. Suy ra $\widehat{MAC} = 70^o$. □

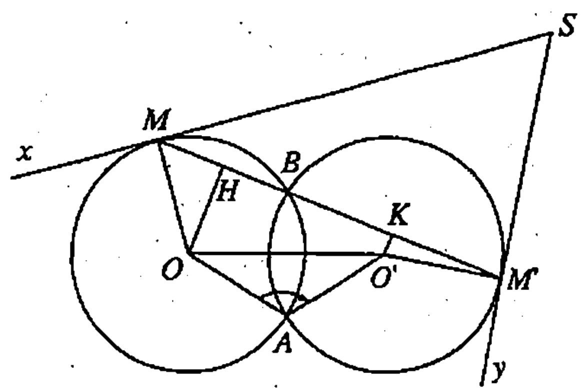
Dạng 5. BÀI TOÁN CỰC TRỊ

Ví dụ 9. Hai đường tròn bằng nhau $(O ; R)$ và $(O' ; R)$ cắt nhau tại hai điểm A, B sao cho $\widehat{OAO'} = 120^o$. Trên đường tròn $(O ; R)$ ta lấy điểm M, trên $(O' ; R)$ ta lấy điểm M' sao cho M và M' nằm ngoài đối với đường tròn còn lại và MM' đi qua điểm B. Gọi S là giao điểm các tiếp tuyến của hai đường tròn tại M và M'. Xác định vị trí hai điểm M và M' để bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác SMM' lớn nhất.

Giải

Giả sử $\widehat{AOM} = \alpha$ $(0^o < \alpha < 180^o)$. Phép quay $Q_{(A,-120^o)} : O \mapsto O'$ (xem hình 4.41), do đó $M \mapsto M''$ thuộc đường tròn $(O' ; R)$ và $\widehat{AO'M''} = \alpha$. Rõ ràng $2\widehat{ABM''} = \alpha$, do đó

$$\widehat{ABM''} + \widehat{ABM} = 180^o.$$



Hình 4.41

Vậy MM'' đi qua B và điểm M'' trùng với điểm M'. Ta gọi x là tiếp tuyến của $(O ; R)$ tại M, y là tiếp tuyến của $(O' ; R)$ tại M'. Phép quay $Q_{(A,-120^o)} : x \mapsto y$, do đó $\overline{(x, y)} = 60^o \pmod{180^o}$, tức là $\widehat{MSM'} = 60^o$ hoặc $\widehat{MSM'} = 120^o$.

Theo định lí hàm sin áp dụng cho tam giác SMM', ta có

$$R = \frac{MM'}{2\sin 60^o} = \frac{MM'}{\sqrt{3}}$$ (R là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\Delta SMM'$).

R lớn nhất khi MM' lớn nhất. Gọi H và K là trung điểm của các dây BM, BM', khi đó KH là hình chiếu của đoạn thẳng OO' trên MM' nên ta có $MM' = 2KH \le 2OO'$. Như vậy MM' lớn nhất khi $MM' // OO'$. □

BÀI TẬP

• CHỨNG MINH TÍNH CHẤT HÌNH HỌC

34. Cho góc vuông $\widehat{xOy}$ và hai tia Om, On tuỳ ý trong góc đó. Trên cạnh Ox ta lấy điểm A, trên cạnh Oy lấy điểm B sao cho $OA = OB$. Gọi A' và A'' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên Om và On ; B' và B'' lần lượt là hình chiếu vuông góc của B trên Om và On. Chứng minh rằng $A'A'' = B'B''$ và $A'A'' \perp B'B''$.

35. Cho một đường tròn (O) và điểm A thuộc đường tròn. Phép quay $Q_{(A,\alpha)}$ biến đường tròn (O) thành một đường tròn (O') và điểm M bất kì thuộc (O) thành điểm M' thuộc (O'). Chứng minh rằng đường thẳng MM' đi qua điểm chung thứ hai của hai đường tròn (O) và (O').

36. Cho tam giác ABC nội tiếp trong một đường tròn (O) và góc nhọn α. Trên đường tròn (O) ta lấy điểm S. Phép quay $Q_{(S,\alpha)}$ biến A thành A', B thành B', C thành C'. Phép quay $Q_{(S,-\alpha)}$ biến A thành A'', B thành B'', C thành C''. Chứng minh rằng các đường thẳng $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ đồng quy.

37. Hai đoạn thẳng AB và $A'B'$ bằng nhau. Phép quay với tâm quay M biến A thành A', B thành B'. Phép quay với tâm quay N biến A thành B', B thành A'. Gọi S là trung điểm của đoạn AB. Chứng minh rằng $SM \perp SN$.

38. Trên đoạn thẳng AC ta lấy điểm B và dựng các hình vuông $ABMN$, $BCEF$ nằm về một phía đối với đường thẳng AC. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng CM, AF. Chứng minh rằng tam giác BPQ là vuông cân.

39. Cho tam giác vuông cân ABC ($CA = CB$). Trên các cạnh CA và CB, ta lấy các điểm tương ứng D và E sao cho $CD = CE$. Các đường vuông góc hạ từ C và D xuống AE cắt AB lần lượt tại K và H. Chứng minh rằng K là trung điểm của đoạn HB.

TOÁN CỰC TRỊ

40. Khoảng cách từ một điểm P cố định đến hai đỉnh A và B của một tam giác đều ABC lần lượt bằng 2 và 3. Xác định khoảng cách lớn nhất từ P đến đỉnh C.

41. Cho góc $\widehat{xOy}$ và điểm M nằm trong góc đó. Tìm trên các cạnh Ox, Oy các điểm A, B sao cho $OA = OB$ và $MA + MB$ nhỏ nhất.

DỰNG HÌNH

42. Cho hai đường tròn đồng tâm. Hãy dựng một hình vuông sao cho hai đỉnh liên tiếp của nó nằm trên một đường tròn, hai đỉnh còn lại nằm trên đường tròn thứ hai.

43. Dựng tứ giác $ABCD$, biết $AB = a$, $AD = b$, $\widehat{B} = \alpha$, $\widehat{D} = \beta$ và tứ giác đó có tổng các cặp cạnh đối bằng nhau.

TÌM TẬP HỢP ĐIỂM

44. Cho đường tròn (O), một điểm A cố định và một góc α. Với mỗi điểm B thuộc đường tròn, ta dựng tam giác cân ABC có $\widehat{A} = \alpha$. Tìm tập hợp đỉnh C khi B thay đổi.

45. Cho phép quay $Q_{(O,\alpha)}$ và điểm S cố định khác O. Tìm tập hợp điểm A mà phép quay đó biến A thành A' sao cho AA' đi qua S.

TÍNH ĐẠI LƯỢNG HÌNH HỌC

46. Điểm P nằm trong hình vuông $ABCD$ và thoả mãn điều kiện

$$PA : PB : PC = 1 : 2 : 3.$$

Tính $\widehat{APB}$.

47. Cho tam giác cân ABC ($AB = AC$) có $\widehat{A} = 20^\circ$. Trên cạnh AB, ta lấy điểm M sao cho $AM = BC$. Tính $\widehat{BMC}$.

§6. PHÉP DỜI HÌNH

1. Phép dời hình trong mặt phẳng

Trong các tiết trước, chúng ta đã xét các phép biến hình : đối xứng tâm, đối xứng trục, phép tịnh tiến và phép quay quanh một điểm. Các phép biến đổi đó đều có chung hai tính chất cơ bản, đó là tính chất 1-1 và tính chất bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm. Ta gọi phép biến hình có tính chất như vậy là phép dời hình. Các phép đối xứng tâm, đối xứng trục, tịnh tiến và phép quay quanh một điểm là những phép dời hình. Ta có thể chứng minh rằng tích của một số hữu hạn các phép dời hình là một phép dời hình và mọi phép dời hình thực chất là tích của một số hữu hạn các phép dời hình mà chúng ta đã đề cập trong các tiết trước đây. Vì vậy phép đối xứng tâm, đối xứng trục, tịnh tiến và phép quay quanh một điểm được coi như các phép dời hình cơ bản. Sau đây là một số kết quả về tích của hai phép dời hình cơ bản và ứng dụng của chúng.

Định lí 1. *Cho điểm A và một vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}$. Đặt $Z = Đ_A \circ T_{\vec{u}}$ và $Z' = T_{\vec{u}} \circ Đ_A$. Khi đó Z và Z' là các phép đối xứng lần lượt qua điểm O và O' được xác định bởi các công thức $\overrightarrow{AO} = -\frac{1}{2}\vec{u}$, $\overrightarrow{AO'} = \frac{1}{2}\vec{u}$.*

Chứng minh. Ta chứng minh rằng Z có điểm bất động. Thật vậy, nếu O là điểm bất động thì

$$T_{\vec{u}} : O \mapsto O' \text{ và } \overrightarrow{OO'} = \vec{u},$$

$$Đ_A : O' \mapsto O \text{ và } \overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{AO'}.$$

Từ các điều kiện đó ta suy ra $2\overrightarrow{AO} = -\vec{u}$. Đẳng thức đó chứng tỏ O tồn tại và duy nhất.

Bây giờ ta chứng minh rằng Z biến mọi điểm M khác O thành điểm M_1 sao cho $\overrightarrow{OM_1} = -\overrightarrow{OM}$. Thật vậy, ta có

$$T_{\vec{u}} : M \mapsto M',\ O \mapsto O' \text{ và } \overrightarrow{O'M'} = \overrightarrow{OM},$$

$$Đ_A : M' \mapsto M_1,\ O' \mapsto O \text{ và } \overrightarrow{OM_1} = -\overrightarrow{O'M'}.$$

Từ các kết quả đó ta suy ra điều cần chứng minh.

Tương tự, ta cũng chứng minh được $Z' \equiv Đ_{O'}$ với $\overrightarrow{AO'} = \frac{1}{2}\vec{u}$. □

Ví dụ 1. Cho đa giác $A_1A_2A_3...A_k...A_n$ và điểm O. Phép đối xứng qua O biến đa giác đã cho thành đa giác $B_1B_2B_3...B_k...B_n$ (B_k là ảnh của A_k). Tịnh tiến $B_1B_2B_3...B_k B_n$ theo vectơ $\overrightarrow{B_1B_k}$, ta nhận được đa giác $C_1C_2C_3...C_k...C_n$ (C_k là ảnh của B_k). Chứng minh rằng các đường thẳng A_1C_1, A_2C_2, ..., A_nC_n đồng quy.

Giải

Ta kí hiệu $Đ_O$ là phép đối xứng tâm O, $T_{\overrightarrow{B_1K_k}}$ là phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{B_1B_k}$. Theo điều kiện bài toán thì

$$Đ_O : A_1A_2\ldots A_k\ldots A_n \mapsto B_1B_2\ldots B_k\ldots B_n,$$

$$T_{\overline{B_1B_k}} : B_1B_2\ldots B_k\ldots B_n \mapsto C_1C_2\ldots C_k\ldots C_n.$$

Theo tính chất 7, phép biến đổi

$$Z = T_{\overline{B_1B_k}} \circ Đ_O : A_1A_2\ldots A_k\ldots A_n \mapsto C_1C_2\ldots C_k\ldots C_n$$

là một phép đối xứng tâm S. Vì vậy các đoạn thẳng A_1C_1, $A_2C_2, \ldots, A_nC_n$ nhận S là trung điểm. Đó là điều phải chứng minh. □

Định lí 2. Cho hai đường thẳng x, y cắt nhau tại một điểm O với $\overline{(x ; y)} = \varphi$. Khi đó tích của hai phép đối xứng lần lượt qua x và y là một phép quay $Q_{(O, 2\varphi)}$, nghĩa là

$$Đ_y \circ Đ_x = Q_{(O, 2\varphi)}.$$

Chứng minh. Ta vẽ tia Ox' trên x và tia Oy' trên y sao cho $(\widehat{Ox', Oy'}) = \varphi$. Với điểm M bất kì, gọi M' là ảnh của M qua phép đối xứng trục $Đ_x$, M'' là ảnh của M' qua phép đối xứng trục $Đ_y$. Theo tính chất của góc định hướng đối xứng qua một đường thẳng, ta có

$$(\widehat{OM, Ox'}) = -(\widehat{OM', Ox'}) = (\widehat{Ox', OM'}), \; (\widehat{OM', Oy'}) = -(\widehat{OM'', Oy'}).$$

Theo hệ thức Chasles về góc định hướng ta có :

$$\begin{aligned}(\widehat{OM, OM''}) &= (\widehat{OM, Ox'}) + (\widehat{Ox', OM'}) + (\widehat{OM', Oy'}) + (\widehat{Oy', OM''})\\ &= 2(\widehat{Ox', OM'}) + 2(\widehat{OM', Oy'})\\ &= 2(\widehat{Ox', Oy'}) = 2\varphi.\end{aligned}$$

Ngoài ra dễ thấy $OM'' = OM$ nên ta có $Đ_y \circ Đ_x = Q_{(O, 2\varphi)}$. Chú ý rằng $Q_{(O, \varphi)}$ biến x thành y. □

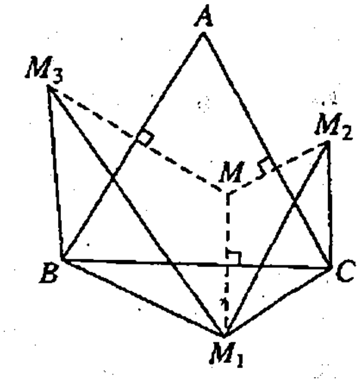
Ví dụ 2. Cho tam giác đều ABC. Với điểm M bất kì không trùng với các đỉnh tam giác, ta kí hiệu M_1 là ảnh của M trong phép đối xứng qua BC, M_2 là ảnh của M trong phép đối xứng qua CA, M_3 là ảnh của M trong phép đối xứng qua AB. Chứng minh rằng các tam giác BM_1M_3 và CM_1M_2 đồng dạng.

Giải (h.4.42)

Ta kí hiệu $Đ_d$ là phép đối xứng qua đường thẳng d. Theo giả thiết :

$$Đ_{BC} : M_1 \mapsto M \text{ và } Đ_{CA} : M \mapsto M_2,$$

do đó phép quay $Q_{(C,-120^\circ)} : M_1 \mapsto M_2$. Vậy tam giác CM_1M_2 cân tại C và $\widehat{M_1CM_2} = 120^\circ$. Tương tự, tam giác BM_1M_3 cân tại B và $\widehat{M_1BM_3} = 120^\circ$. Hiển nhiên hai tam giác cân CM_1M_2 và BM_1M_3 có góc ở đỉnh bằng nhau nên chúng đồng dạng. □



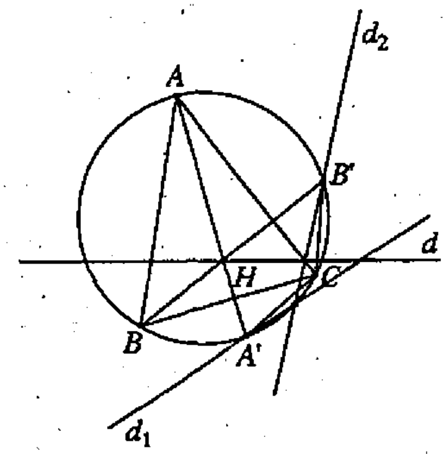
Hình 4.42

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Kí hiệu d là một đường thẳng đi qua trực tâm của tam giác. Các đường thẳng d_1, d_2 là ảnh của d trong các phép đối xứng qua BC và AC. Chứng minh rằng giao điểm của d_1 và d_2 nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Giải (h.4.43)

Gọi H là trực tâm tam giác ABC. Các đường thẳng AH và BH cắt lại đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại A' và B'. Vì $Đ_{BC}$ biến H thành A' nên d_1 đi qua A'. $Đ_{AC}$ biến H thành B' nên d_2 đi qua B'.

Ta thấy rằng $Đ_{BC}$ biến d_1 thành d và $Đ_{AC}$ biến d thành d_2, do đó tích của hai phép đối xứng đó biến d_1 thành d_2. Theo định lí 2, tích của hai phép đối xứng này là một phép quay với tâm quay C và góc quay $\alpha = 2(\overline{CB\,;CA})$. Tức là $\left(\overline{d_1;d_2}\right) = \left(\overline{CA';CB'}\right)$. Điều này chứng tỏ rằng giao điểm của d_1 và d_2 nằm trên đường tròn đi qua A', B', C, tức là đường tròn ngoại tiếp ABC. □



Hình 4.43

Định lí 3. Cho hai điểm phân biệt O_1, O_2 và các góc định hướng α, β thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases} 0 < \alpha \le \pi \\ 0 < \beta \le \pi \\ \dfrac{\alpha + \beta}{2} \neq \pi. \end{cases}$$

Khi đó phép biến đổi $Q = Q_{(O_2,\beta)} \circ Q_{(O_1,\alpha)}$ là một phép quay với góc quay $\varphi = \alpha + \beta$ và tâm quay O được xác định như sau : $Q\left(O_1 ; -\dfrac{\alpha}{2}\right)$ biến đường thẳng O_1O_2 thành đường thẳng x, $Q\left(O_2, \dfrac{\beta}{2}\right)$ biến đường thẳng O_2O_1 thành đường thẳng y ; O là giao điểm của x và y.

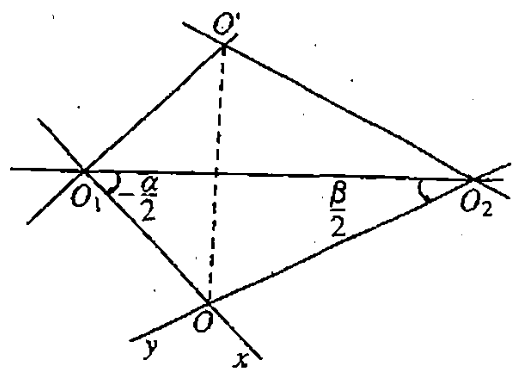
Nếu $\varphi = 2\pi$ thì Q là phép tịnh tiến.

Chú ý rằng định lí trên vẫn còn đúng khi các phép quay đó có góc quay âm.

Chứng minh. (h.4.44) Trước hết ta chứng minh rằng Q có điểm bất động. Thật vậy, nếu O là điểm bất động của Q thì từ $Q_{(O_1,\alpha)} : O \mapsto O'$ và $Q_{(O_2,\beta)} : O' \mapsto O$, ta có

$$O_1O' = O_1O,\ O_2O' = O_2O \text{ và } \left(\overline{O_1O, O_1O'}\right) = \alpha,\ \left(\overline{O_2O', O_2O}\right) = \beta.$$

Rõ ràng $\Delta O_1O_2O = \Delta O_1O_2O'$ (c.c.c), do đó O_1O_2 là tia phân giác của các góc $\widehat{OO_1O'}$ và $\widehat{OO_2O'}$. Ta coi phép quay $Q_{\left(O_1 ; -\frac{\alpha}{2}\right)}$ biến O_1O_2 thành x và phép quay $Q_{\left(O_2, \frac{\beta}{2}\right)}$ biến O_2O_1 thành y. Theo điều kiện $\dfrac{\alpha + \beta}{2} \neq \pi$, điểm chung O của hai đường thẳng x, y tồn tại và duy nhất.



Hình 4.44

Giả sử M là điểm bất kì khác O, phép quay $Q_{(O_1,\alpha)} : O \mapsto O'$, $M \mapsto M'$, khi đó $OM = O'M'$ và $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O'M'}\right) = \alpha$. Phép quay $Q_{(O_2,\beta)} : O' \mapsto O$, $M' \mapsto M''$, khi đó ta có $O'M' = OM''$ và $\left(\overrightarrow{O'M'}, \overrightarrow{OM''}\right) = \beta$.

Từ các kết quả trên ta suy ra $OM = OM''$ và

$$\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM''}\right) = \left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O'M'}\right) + \left(\overrightarrow{O'M'}, \overrightarrow{OM''}\right) = \alpha + \beta.$$

Ta xét thêm trường hợp $\varphi = 2\pi$

Giả sử A, B là hai điểm bất kì.

$$Q_{(O_1,\alpha)} : A \mapsto A_1,\ B \mapsto B_1 \text{ và } \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A_1B_1}\right) = \alpha\ ;$$

$$Q_{(O_2,\beta)} : A_1 \mapsto A',\ B_1 \mapsto B' \text{ và } \left(\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A'B'}\right) = \beta .$$

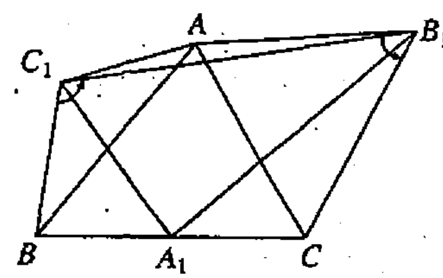
Từ các điều kiện đó ta suy ra $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right) = \alpha + \beta = 2\pi$, nghĩa là $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{A'B'}$.

Vậy phép biến đổi $Q : \overrightarrow{AB} \mapsto \overrightarrow{A'B'}$ và $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$. Đó là điều cần chứng minh. □

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC. Trên các cạnh AB và AC về phía ngoài tam giác, ta dựng tam giác cân ABC_1 sao cho số đo của góc tại đỉnh C_1 bằng $120°$ và tam giác đều ACB_1. Gọi A_1 là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh rằng tam giác $A_1B_1C_1$ vuông tại A_1.

Giải (h.4.45)

Ta quy định các đỉnh của tam giác ABC được sắp xếp như hình vẽ trên, khi đó phép quay $Q_{(C_1;120°)}$ biến B thành A và phép quay $Q_{(B_1;60°)}$ biến A thành C. Vậy thì tích của hai phép quay này biến B thành C. Theo định lí 3, tích hai phép quay đó lại là một phép quay với góc quay bằng $180°$. Điều này chứng tỏ B và C đối xứng với nhau qua tâm quay, như vậy tâm quay là A_1. Theo cách dựng tâm quay của tích hai phép quay thì A_1 là giao điểm của hai đường thẳng C_1x và B_1y, trong đó C_1x tạo với C_1B_1 một góc $60°$, B_1y tạo với B_1C_1 một góc $30°$. Từ đó suy ra tam giác $A_1B_1C_1$ vuông tại A_1.



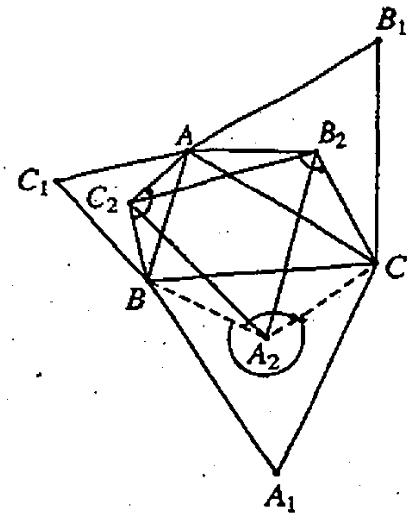
Hình 4.45

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC. Trên các cạnh và về phía ngoài tam giác, ta dựng các tam giác đều BCA_1, CAB_1, ABC_1. Chứng minh rằng trọng tâm của các tam giác vừa dựng là các đỉnh của một tam giác đều.

Giải (h.4.46).

Kí hiệu A_2, B_2, C_2 lần lượt là trọng tâm các tam giác BCA_1, CAB_1, ABC_1. Phép quay $Q_{(C_2;120°)}$ biến B thành A. Phép quay $Q_{(B_2;120°)}$ biến A thành C

như hình 4.46. Tích của hai phép quay đó biến B thành C. Theo định lí 3, góc quay của tích hai phép quay bằng 240° hoặc bằng -120°. Tâm của phép quay được dựng như sau : Phép quay $Q_{(C_2;-60^\circ)}$ biến đường thẳng C_2B_2 thành đường thẳng C_2x. Phép quay $Q_{(B_2;60^\circ)}$ biến đường thẳng B_2C_2 thành đường thẳng B_2y. Kí hiệu M là giao điểm của hai đường thẳng C_2x và B_2y. Vậy phép quay $Q_{(M;-120^\circ)}$ biến B thành C. Mặt khác phép quay $Q_{(A_2;-120^\circ)}$ cũng biến B thành C. Từ đó suy ra hai phép quay trùng nhau, tức là M trùng với A_2. Tam giác $A_2B_2C_2$ có các góc tại đỉnh C_2 và B_2 bằng 60° nên tam giác này là đều. □

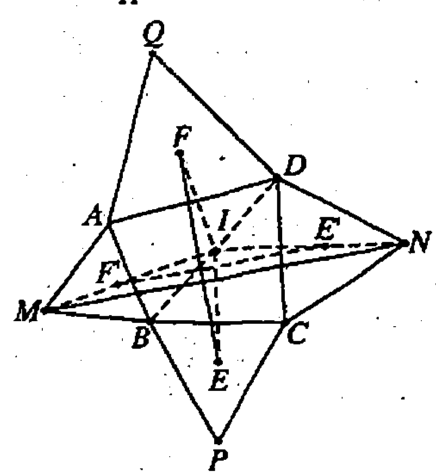


Hình 4.46

Ví dụ 6. Trên các cạnh của một tứ giác lồi $ABCD$ và về phía ngoài tứ giác, ta dựng các tam giác đều ABM, BCP, CDN, DAQ. Gọi E và F lần lượt là trọng tâm các tam giác đều BCP và DAQ. Chứng minh rằng MN vuông góc với EF và $\dfrac{MN}{EF} = \sqrt{3}$.

Giải (h.4.47)

Gọi I là trung điểm của đường chéo BD, theo ví dụ 4 ta có tam giác INE vuông tại I và $\dfrac{IN}{IE} = \sqrt{3}$. Tam giác IMF vuông tại I và $\dfrac{IM}{IF} = \sqrt{3}$. Phép quay tâm I với góc quay 90° biến E thành E' nằm trên đoạn IN, khi đó F thành F' nằm trên đoạn IM và $IE' = IE$, $IF = IF'$, EF vuông góc với $E'F'$. Vì $\dfrac{IE'}{IN} = \dfrac{IF'}{IM} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ nên $E'F' // MN$ và $\dfrac{E'F'}{MN} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Tức là EF vuông góc với MN và $\dfrac{MN}{EF} = \sqrt{3}$. □



Hình 4.47

2. Phép dời hình trong hệ toạ độ Descartes vuông góc

a) Phép đối xứng tâm

Tìm ảnh của một điểm

Trong mặt phẳng toạ độ cho điểm $I(a\ ;b)$. Với mỗi điểm $M(x\ ;y)$, phép đối xứng qua I biến M thành $M'(x'\ ;y')$. Theo định nghĩa, toạ độ của M' được xác định bởi hệ phương trình

$$\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y. \end{cases}$$

Trường hợp I là gốc toạ độ thì ta có $x' = -x$, $y' = -y$.

Ví dụ 1. Tìm ảnh của đường thẳng $2x + y - 2 = 0$ trong phép đối xứng qua điểm $I(3\ ;4)$.

Giải.

Nếu $M(x\ ;y)$ là điểm bất kì trên đường thẳng và $M'(x'\ ;y')$ là ảnh của M thì ta có $x' = 6 - x$, $y' = 8 - y$. Thay các đẳng thức này vào phương trình đường thẳng đã cho, ta được $2(6 - x') + (8 - y') - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x' + y' - 18 = 0$. Toạ độ điểm M' là nghiệm của phương trình $2x + y - 18 = 0$. Đây là phương trình ảnh của đường thẳng đã cho. □

Ví dụ 2. Cho hai đường thẳng d_1, d_2 có các phương trình $x + y + 1 = 0$ và $2x - y + 3 = 0$. Tìm phương trình đường thẳng đi qua gốc toạ độ và cắt d_1, d_2 tại các điểm A, B sao cho gốc toạ độ là trung điểm của đoạn AB.

Giải.

Nếu $A = (x_1\ ;y_1)$ và $B = (x_2\ ;y_2)$ thì ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ y_1 = -y_2 \\ x_1 + y_1 = -1 \\ 2x_2 - y_2 = -3. \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được $x_2 = -\dfrac{2}{3}$, $y_2 = \dfrac{5}{3}$. Phương trình đường thẳng AB là $5x + 2y = 0$. □

Ví dụ 3. Cho đường cong $y = x^3 + 2x + 1$ và điểm $I(1\ ;\ 2)$. Tìm trên đường cong hai điểm A, B sao cho I là trung điểm của đoạn AB.

Giải.

Nếu $A(x\ ;\ y)$ thuộc đường cong $B(x'\ ;\ y')$ đối xứng với A qua I thì ta có $x' = 2 - x$, $y' = 4 - y$. Vì B cũng thuộc đường cong nên

$$y' = x'^3 + 2x' + 1$$
$$\Leftrightarrow\ 4 - y = (2 - x)^3 + 2(2 - x) + 1$$
$$\Leftrightarrow\ -y = -x^3 + 6x^2 - 14x + 9\ .$$

Toạ độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + 2x + 1 = y \\ -x^3 + 6x^2 - 14x + 9 = -y. \end{cases}$$

Hệ trên vô nghiệm. Do đó không tồn tại các điểm A và B thoả mãn yêu cầu của bài toán. □

Ví dụ 4. Cho đường tròn $(\mathscr{C})$: $x^2 + y^2 = 4$, đường thẳng $d : x + y = 8$ và điểm $I(3\ ;\ 0)$. Tìm trên đường tròn điểm A, trên đường thẳng điểm B sao cho I là trung điểm của đoạn AB.

Giải.

Nếu $A(x\ ;\ y)$ thuộc đường tròn $B(x'\ ;\ y')$ đối xứng với A qua I thì $x' = 6 - x$, $y' = -y$.

Vì B thuộc đường thẳng d, nên $(6 - x) - y = 8 \Leftrightarrow x + y = -2$. Toạ độ của A là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x + y = -2. \end{cases}$$

Giải hệ trên ta tìm được $x = 0$, $y = -2$ hoặc $x = -2$, $y = 0$.

Nếu $A = (0\ ;\ -2)$ thì $B = (6\ ;\ 2)$.

Nếu $A = (-2\ ;\ 0)$ thì $B = (8\ ;\ 0)$. □

b) Phép đối xứng trục

• ***Tìm ảnh của một điểm***

Cho đường thẳng d có phương trình $ax + by = c$ và điểm $M(x_1\ ;\ y_1)$. Gọi $M'(x_2\ ;\ y_2)$ là điểm đối xứng với M qua d. Ta sẽ thiết lập quan hệ giữa toạ độ của M và M'. Đường thẳng d' đi qua M và vuông góc với d có phương trình tham số là

$$\begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt. \end{cases}$$

Gọi $I(x_0\,;\,y_0)$ là giao điểm của d và d', khi đó toạ độ của I là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ ax + by = c. \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được $x_0 = x_1 + \dfrac{a(c-c_1)}{a^2+b^2}$, $y_0 = y_1 + \dfrac{b(c-c_1)}{a^2+b^2}$ với $c_1 = ax_1 + by_1$.

Vì M' và M đối xứng với nhau qua I nên ta có

$$\begin{cases} x_2 = 2x_0 - x_1 \\ y_2 = 2y_0 - y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 + 2\dfrac{a(c-c_1)}{a^2+b^2} \\ y_2 = y_1 + 2\dfrac{b(c-c_1)}{a^2+b^2}. \end{cases} \qquad (*)$$

(*) là biểu thức để tìm toạ độ điểm M' khi biết điểm M và trục đối xứng d.

Nếu d trùng với Ox thì $b = 1$, $a = c = 0$, $c_1 = y_1$ và khi đó $x_2 = x_1$, $y_2 = -y_1$.

Nếu d trùng với trục Oy thì $a = 1$, $b = c = 0$, $c_1 = x_1$ và khi đó $x_2 = -x_1$, $y_2 = y_1$.

Ví dụ 5. Tìm điểm đối xứng với điểm $M(2\,;\,-1)$ qua đường thẳng $3x + 4y = 6$.

Giải

Ta có $x_1 = 2$, $y_1 = -1$, $a = 3$, $b = 4$, $c = 6$, $c_1 = 2$. Nếu $M'(x'; y')$ là ảnh của M trong phép đối xứng qua đường thẳng đã cho, theo công thức (*), ta tìm được $x' = \dfrac{74}{25}$, $y' = \dfrac{7}{25}$. □

Tìm ảnh của một vectơ

Bài toán. Cho đường thẳng $d : ax + by = c$ và vectơ $\vec{u}(p\,;\,q)$. Tìm ảnh của $\vec{u}$ trong phép đối xứng qua d.

Giải.

Kí hiệu $\vec{v}(p' ; q')$ là ảnh của $\vec{u}$ và $\vec{n}(-b ; a)$ là vectơ chỉ phương của d. Từ tính chất của phép đối xứng qua d, ta suy ra $\left(\vec{v} ; \vec{n}\right) = \left(\vec{u} ; \vec{n}\right) + 2k\pi$ (k là số nguyên) và $\left|\vec{u}\right| = \left|\vec{v}\right|$. Từ các điều kiện đó, ta có hệ phương trình sau đây để tìm toạ độ của $\vec{v}$

$$\begin{cases} -bp' + aq' = -bp + aq \\ p'^2 + q'^2 = p^2 + q^2. \end{cases} \qquad (**)$$

Đặc biệt nếu d song song hoặc trùng với trục Ox thì $b = 1$, $a = 0$, do đó $\vec{v} = (p ; -q)$. Nếu d song song hoặc trùng với trục Oy thì $a = 1$, $b = 0$, do đó $\vec{v} = (-p ; q)$. □

Ví dụ 6. Tìm ảnh của vectơ $\vec{u}(2 ; -1)$ trong phép đối xứng qua đường thẳng $x - 2y = 5$.

Giải.

Kí hiệu $\vec{v}(p' ; q')$ là ảnh của $\vec{u}$, ta có $p = 2$, $q = -1$, $a = 1$, $b = -2$. Theo (**) ta có hệ phương trình để tìm (p', q') sau đây

$$\begin{cases} 2p' + q' = 3 \\ p'^2 + q'^2 = 5. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta được $\vec{v}\left(\frac{2}{5} ; \frac{11}{5}\right)$. □

Ví dụ 7. Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 có các phương trình tương ứng $x + y = 1$ và $2x - y = 2$. Viết phương trình đường thẳng d_3 đối xứng với d_2 qua d_1.

Giải.

Kí hiệu M là giao điểm của d_1 và d_2, khi đó toạ độ của M là $(1 ; 0)$. Vì d_3 đối xứng với d_2 qua d_1 nên d_3 đi qua M và vectơ pháp tuyến của nó đối xứng với vectơ pháp tuyến của d_2. Nếu $\vec{n}(p' ; q')$ là vectơ pháp tuyến của d_3 thì theo (**), ta có hệ phương trình sau đây

$$\begin{cases} -p' + q' = -3 \\ p'^2 + q'^2 = 5. \end{cases}$$

Nghiệm của hệ là $p' = 1, q' = -2$. Phương trình d_3 là $x - 2y - 1 = 0$. □

c) Phép tịnh tiến

Tìm ảnh của một điểm

Cho điểm $M(x; y)$ và vectơ $\vec{n}(p\,;q)$ $(p^2 + q^2 > 0)$. Phép tịnh tiến $T_{\vec{n}}$ biến M thành $M'(x'\,;y')$, theo định nghĩa ta có

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = p \\ y' - y = q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + p \\ y' = y + q. \end{cases} \quad (1)$$

Ví dụ 8. Tìm ảnh của điểm $M(4\,;-2)$ trong phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{n}(-1\,;5)$.

Giải.

Nếu $M'(x'\,;y')$ là ảnh của M, theo công thức (1), ta tìm được $x' = 3$, $y' = 3$. □

Tìm ảnh của một vectơ

Cho hai vectơ $\vec{u}(a\,;b)$ và $\vec{n}(p\,;q)$ $(p^2 + q^2 > 0)$. Phép tịnh tiến $T_{\vec{n}}$ biến $\vec{u}$ thành $\vec{v}(a'\,;b')$, theo tính chất của phép tịnh tiến ta có $\vec{v} = \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} a' = a \\ b' = b. \end{cases}$

d) Phép quay

Tìm ảnh của một điểm

Cho điểm $I(a\,;b)$ và góc α. Nếu $M(x\,;y)$ là điểm bất kì và $M'(x'\,;y')$ là ảnh của M trong phép quay tâm I với góc α thì ta có $IM = IM'$ và $(IM\,;IM') = \alpha$. Từ điều kiện này ta có hệ phương trình xác định toạ độ của M':

$$\begin{cases} (x' - a)^2 + (y' - b)^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 \\ \cos\alpha = \dfrac{(x' - a)(x - a) + (y' - b)(y - b)}{(x - a)^2 + (y - b)^2}. \end{cases}$$

Nói chung kết quả là hai điểm ứng với α và $-\alpha$, kiểm tra lại điểm nào ứng với α.

Trường hợp I là gốc toạ độ thì ta có

$$\begin{cases} x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2 \\ \cos\alpha = \dfrac{x'x + y'y}{x^2 + y^2}. \end{cases}$$

Ví dụ 9. Tìm ảnh của điểm $M(1\ ;\ 1)$ trong phép quay tâm $I(-1\ ;\ 0)$ với góc quay $\alpha = 60^\circ$.

Giải.

Nếu $M'(x'\ ;\ y')$ là ảnh của M thì ta có

$$\begin{cases} (x'+1)^2 + y'^2 = 5 \\ \cos 60^\circ = \dfrac{2(x'+1) + y'}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x'+1)^2 + y'^2 = 5 \\ 2(x'+1) + y' = \dfrac{5}{2}. \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được

$$(x'\ ;\ y') = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} ; \frac{1}{2} - \sqrt{3}\right), \ \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} ; \frac{1}{2} + \sqrt{3}\right).$$

Vì $\alpha = 60^\circ$ nên dễ thấy $M' = \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} ; \dfrac{1}{2} + \sqrt{3}\right)$.

BÀI TẬP TỔNG HỢP VỀ DỜI HÌNH

48. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi K là chân đường vuông góc hạ từ B xuống AC, M là trung điểm của đoạn AK và N là trung điểm của cạnh CD. Chứng minh rằng $MB \perp MN$.

49. Cho đường tròn $(O\ ;\ R)$ và một hình vuông có hai đỉnh liên tiếp nằm trên đường tròn đó. Hai đỉnh còn lại cách tâm đường tròn một khoảng lớn nhất bằng bao nhiêu ?

50. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Hãy tìm trên các cạnh AB, BC, CA của tam giác các điểm tương ứng M, N, P sao cho chu vi tam giác MNP nhỏ nhất.

51. Cho tam giác $A_1A_2A_3$ và A_4 là trực tâm của tam giác đó. Ta kí hiệu O_1, O_2, O_3, O_4 lần lượt là tâm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác

$A_2A_3A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_2A_3$. Chứng minh rằng tồn tại một phép đối xứng tâm biến các điểm O_1, O_2, O_3, O_4 thành A_1, A_2, A_3, A_4.

52. Dựng tứ giác $ABCD$, biết $\widehat{C} = \widehat{D}$, $AB = a$, $CD = b$, $BC + AD = c$ và khoảng cách từ A đến CD bằng h.

53. Dựng tứ giác $ABCD$, biết $AB = a$, $CD = b$, $BC + AD = c$ và khoảng cách từ các điểm A và B đến CD bằng p và q.

54. Cho ba đường thẳng x, y, z và ba điểm A, B, C tương ứng thuộc các đường thẳng đó. Hãy dựng một đường thẳng d cắt đồng thời các đường thẳng đã cho lần lượt tại P, Q, R sao cho $AP = BQ = CR$.

55. Cho hai đường tròn (O_1), (O_2) và một điểm A. Hãy dựng một đường thẳng d đi qua A và cắt hai đường tròn đã cho theo hai dây cung bằng nhau.

56. Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 song song với nhau. Trên d_1 ta lấy hai điểm cố định A và B. Gọi M và M' là hai điểm tuỳ ý trên d_1 đối xứng với nhau qua A. Ta dựng đường tròn (O) đi qua hai điểm B, M và tiếp xúc với d_2 tại N ; (O') là đường tròn đi qua hai điểm B, M' và tiếp xúc với d_2 tại N'. Gọi C là giao điểm thứ hai của các đường tròn (O) và (O'). Chứng minh rằng khi các điểm M và M' thay đổi thì :

a) Hai đường thẳng MN và $M'N'$ cắt nhau tại một điểm cố định

b) Đường thẳng BC đi qua một điểm cố định.

57. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn và d là một đường thẳng bất kì. Gọi x, y, z lần lượt là ảnh của d trong các phép đối xứng qua các đường thẳng BC, CA, AB và T là tam giác tạo bởi các đường thẳng x, y, z.

a) Chứng minh rằng sin các góc của T không phụ thuộc vị trí của đường thẳng d.

b) Chứng minh rằng nếu d đi qua trực tâm H của tam giác ABC và cắt các cạnh AB, AC thì các đường thẳng y, z và đường thẳng AH đồng quy.

58. Giả sử phép quay $Q_{(M\,;\,\alpha)}$ biến các điểm A thành A_1 và B thành B_1. Phép quay $Q_{(N\,;\,\beta)}$ biến các điểm A thành B và A_1 thành B_1. Chứng minh rằng M trùng với N.

§7. PHÉP VỊ TỰ

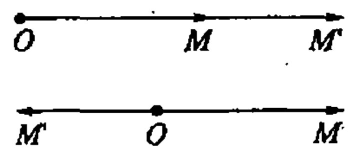
1. Định nghĩa

Cho trước một điểm O và số thực $k \neq 0$. Phép biến hình biến mọi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ được gọi là phép vị tự tâm O tỉ số k và được kí hiệu là $V_{(O,k)}$. Điểm M' được gọi là ảnh của M, M được gọi là tạo ảnh của M', O là tâm của phép vị tự, k là tỉ số vị tự.

Nếu $k > 0$ thì $V_{(O,k)}$ được gọi là phép vị tự dương.

Nếu $k < 0$ thì $V_{(O,k)}$ được gọi là phép vị tự âm.

Rõ ràng $V_{(O,1)}$ là phép đồng nhất và $V_{(O,-1)}$ là phép đối xứng tâm O.



Hình 4.48

Cho một hình $\mathcal{H}$. Tập hợp ảnh của mọi điểm thuộc $\mathcal{H}$ qua phép vị tự $V_{(O,k)}$ lập thành một hình $\mathcal{H}'$ được gọi là hình vị tự của $\mathcal{H}$ qua phép vị tự đó và được kí hiệu $V_{(O,k)} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}'$.

2. Tính chất

• ***Tính chất 1.*** Phép vị tự $V_{(O,k)}$ với $k \neq 1$ có một điểm bất động duy nhất, đó là điểm O.

Chứng minh. Giả sử O' là điểm bất động thứ hai của $V_{(O,k)}$ thì $V_{(O,k)} : O' \mapsto O'$ và ta có

$$\overrightarrow{OO'} = k\overrightarrow{OO'} \Leftrightarrow (1-k)\overrightarrow{OO'} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OO'} = \vec{0}.$$

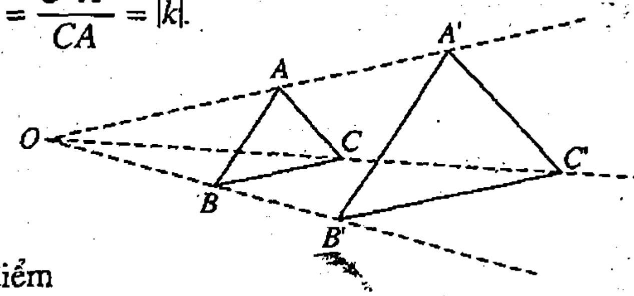
Hệ thức đó chứng tỏ O và O' trùng nhau. □

• ***Tính chất 2.*** Nếu điểm M' là ảnh của điểm M qua phép vị tự $V_{(O,k)}$ thì ba điểm O, M, M' thẳng hàng.

Chứng minh. Theo định nghĩa $V_{(O,k)} : M \mapsto M' \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$. Hệ thức đó chứng tỏ $\overrightarrow{OM}$ cùng phương với $\overrightarrow{OM'}$. Vì các vectơ $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{OM'}$ chung gốc O nên $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{OM'}$ cùng nằm trên một đường thẳng. □

iv) (h. 4.51) Nếu A', B', C' lần lượt là ảnh của A, B, C qua phép vị tự thì ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{B'C'} = k\overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{C'A'} = k\overrightarrow{CA} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = |k|.$$

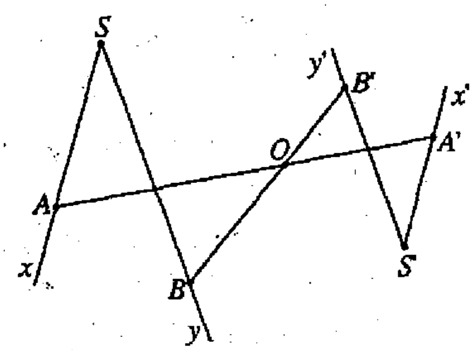


Hình 4.51

Vậy $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$, tỉ số đồng dạng là $|k|$.

v) (h. 4.52) Lấy trên Sx, Sy hai điểm A, B (khác S). Gọi A', B' là ảnh của A, B. Tam giác $S'A'B'$ là ảnh của tam giác SAB, theo Hệ quả iv), tam giác SAB đồng dạng với tam giác $S'A'B'$, do đó các góc tương ứng của hai tam giác bằng nhau.

Vậy $\widehat{xSy} = \widehat{x'S'y'}$.



Hình 4.52

vi) (h. 4.53 a, b) Lấy điểm M bất kì thuộc đường tròn $(I\,;R)$ và gọi M' là ảnh của M, theo Tính chất 3 ta có

$$\overrightarrow{I'M'} = k\overrightarrow{IM} \Rightarrow I'M' = |k|IM.$$

Đẳng thức đó chứng tỏ M' nằm trên đường tròn $(I'\,;|k|R)$.

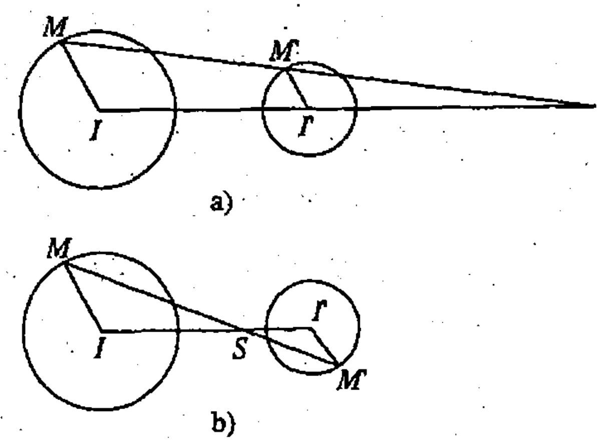
Đảo lại, nếu M' thuộc $(I'\,;|k|R)$ thì ảnh M của M' trong phép vị tự $V_{\left(O,\frac{1}{k}\right)}$ thuộc đường tròn $(I\,;R)$.

Thật vậy,

$$V_{\left(O,\frac{1}{k}\right)} : I' \mapsto I,\ M' \mapsto M,$$

do đó $\overrightarrow{IM} = \frac{1}{k}\overrightarrow{I'M'}$

$$\Rightarrow IM = \frac{1}{|k|}I'M' = \frac{1}{|k|}|k|R = R. \ \square$$



Hình 4.53

• ***Tính chất 6.*** Cho hai phép vị tự $V_{(O,k)}$ và $V_{(O',k')}$ với các tâm vị tự phân biệt, các hệ số vị tự k, k' khác 0, khác 1 và $k.k' \neq 1$. Khi đó phép biến đổi $V = V_{(O',k')} \circ V_{(O,k)}$ hoặc $V^* = V_{(O,k)} \circ V_{(O',k')}$ là phép vị tự.

Chứng minh. Ta chứng minh $V = V_{(O',k')} \circ V_{(O,k)}$ là phép vị tự. Trước hết, ta cần chứng tỏ V có điểm bất động duy nhất. Gọi S là điểm bất động của V, khi đó :

$$V_{(O,k)} : S \mapsto S' \text{ và } \overrightarrow{OS'} = k\overrightarrow{OS} \ ;$$

$$V_{(O',k')} : S' \mapsto S \text{ và } \overrightarrow{O'S} = k'\overrightarrow{O'S'}.$$

Từ các kết quả trên ta suy ra $\overrightarrow{OS} = \lambda\overrightarrow{OO'}$, trong đó $\lambda = \dfrac{1-k'}{1-k.k'}$.

Nếu M là điểm bất kì khác S, theo định nghĩa ta có

$$V_{(O,k)} : S \mapsto S' \text{ và } M \mapsto M' \Rightarrow \overrightarrow{S'M'} = k\overrightarrow{SM} \ ;$$

$$V_{(O',k')} : S' \mapsto S \text{ và } M' \mapsto M'' \Rightarrow \overrightarrow{SM''} = k'\overrightarrow{S'M'}.$$

Từ các kết quả trên ta suy ra $\overrightarrow{SM''} = k.k'\overrightarrow{SM}$. Đó là điều phải chứng minh.

Với phép biến đổi V^*, cách chứng minh tương tự. □

Chú ý. Tích của một phép vị tự tỉ số k với một phép dời hình (hay một phép dời hình với một phép vị tự tỉ số k) gọi là một *phép đồng dạng tỉ số* $|k|$.

Khi đó dễ thấy phép đồng dạng tỉ số $|k|$ cũng có các hệ quả iii), iv), v), vi).

3. Ứng dụng của phép vị tự

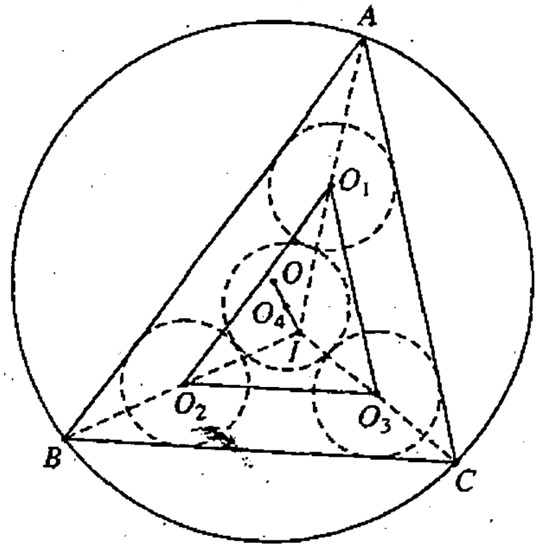
Dạng 1. CHỨNG MINH TÍNH CHẤT HÌNH HỌC

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC. Bên trong tam giác ta dựng bốn đường tròn (O_1), (O_2), (O_3), (O_4) bằng nhau sao cho 3 đường tròn đầu tiên cùng tiếp xúc với đường tròn (O_4) và mỗi đường tròn đó còn tiếp xúc với hai cạnh tam giác. Chứng minh rằng tâm các đường tròn nội, ngoại tiếp tam giác ABC và tâm đường tròn (O_4) thẳng hàng.

Giải

Gọi I, O lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp tam giác ABC. Từ giả thiết của bài toán ta suy ra IA, IB, IC chứa các điểm O_1, O_2, O_3 và $O_1O_2 \,//\, AB$, $O_2O_3 \,//\, BC$, $O_3O_1 \,//\, CA$ (xem hình 4.54).

Phép vị tự tâm I biến O_1 thành A thì biến O_2 thành B và biến O_3 thành C, do đó biến đường tròn ngoại tiếp tam giác $O_1O_2O_3$ thành đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Mặt khác, các đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) tiếp xúc ngoài với (O_4) và có bán kính bằng bán kính của (O_4) nên điểm O_4 cách đều các đỉnh của tam giác $O_1O_2O_3$ và như vậy, O_4 là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $O_1O_2O_3$. Tóm lại phép vị tự tâm I biến O_4 thành O, do đó I, O_4, O thẳng hàng. □



Hình 4.54

Dạng 2. TÌM TẬP HỢP ĐIỂM

Ví dụ 2. Cho đường tròn $(O\,;R)$ và điểm A cố định thuộc đường tròn. Với mỗi điểm M nằm ngoài đường tròn $(O\,;R)$, ta kẻ từ đó tới đường tròn $(O\,;R)$ tiếp tuyến MT (T là tiếp điểm). Tìm tập hợp điểm M sao cho $MT = kMA$, trong đó k là một số dương cho trước.

Giải

Ta kí hiệu A' là điểm chung thứ hai của đường thẳng MA với đường tròn $(O\,;R)$. Ta có

$$MT^2 = MA.MA' \Leftrightarrow MA.MA' = k^2.MA^2$$

$$\Leftrightarrow MA(MA' - k^2.MA) = 0 \Leftrightarrow MA' = k^2.MA$$

(vì MA khác không với mọi M không trùng với A)

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA'} = k^2.\overrightarrow{MA} \text{ (do } \overrightarrow{MA} \uparrow\uparrow \overrightarrow{MA'})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AA'} = k^2.\overrightarrow{MA} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = (1 - k^2)\overrightarrow{AM}.$$

Nếu $k = 1$ thì $\overrightarrow{AA'} = \vec{0}$, A' và A trùng nhau và tập hợp M là tiếp tuyến của (O) tại A (bỏ đi điểm A).

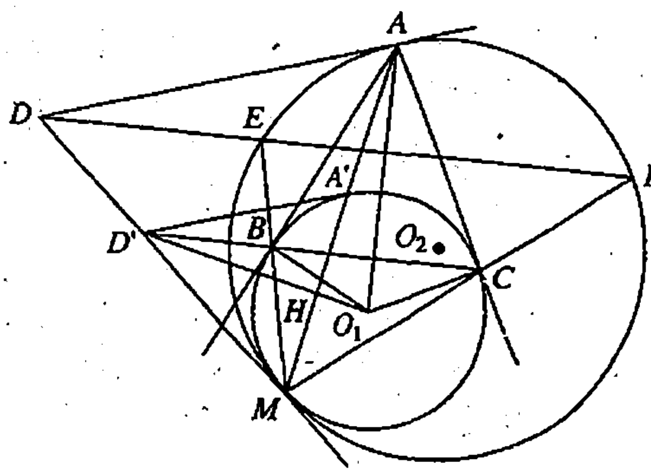
Nếu $k \neq 1$ thì $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{1-k^2}\overrightarrow{AA'}$, khi đó M là ảnh của A' qua phép vị tự $V_{\left(A,\frac{1}{1-k^2}\right)}$. Tập hợp M trong trường hợp này là đường tròn ảnh của đường tròn (O) trong phép vị tự đó (bỏ đi điểm A). □

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng, cho hai đường tròn cố định $(O_1\,;R_1)$ và $(O_2\,;R_2)$ $(R_1 > R_2)$ tiếp xúc trong với nhau tại điểm M. Xét điểm A nằm trên đường tròn $(O_2\,;R_2)$ sao cho ba điểm A, O_1, O_2 không thẳng hàng. Từ A kẻ các tiếp tuyến AB và AC tới đường tròn $(O_1\,;R_1)$ (B, C là các tiếp điểm). Các đường thẳng MB và MC lần thứ hai cắt đường tròn $(O_2\,;R_2)$ tương ứng tại các điểm E và F. Gọi D là giao điểm của đường thẳng EF với tiếp tuyến tại A của đường tròn $(O_2\,;R_2)$. Chứng minh rằng điểm D di động trên một đường thẳng cố định khi A di động trên đường tròn $(O_2\,;R_2)$ sao cho ba điểm A, O_1, O_2 không thẳng hàng.

(Đề thi chọn học sinh giỏi toàn quốc môn Toán, 03 – 2003)

Giải (h.4.55)

Từ giả thiết ta suy ra tứ giác ABO_1C nội tiếp trong đường tròn (O_3). Gọi A' là giao điểm thứ hai của AM với đường tròn $(O_1\,;R_1)$, D' là giao điểm của hai tiếp tuyến tại M và A' của đường tròn $(O_1\,;R_1)$. Khi đó D' thuộc trục đẳng phương BC của hai đường tròn (O_1, R_1) và (O_3).



Hình 4.55

Thật vậy, gọi H là giao điểm thứ hai của (O_3) với AM, khi đó O_1H vuông góc với AM nên H là trung điểm của dây cung MA'. Tam giác $D'MA'$ cân tại D', do đó $D'H$ vuông góc với $A'M$ và $D'O_1$ đi qua H. Từ $\overrightarrow{D'H}.\overrightarrow{D'O_1} = \overrightarrow{D'M}^2$, ta suy ra D' cùng phương tích đối với hai đường tròn (O_1, R_1) và (O_3).

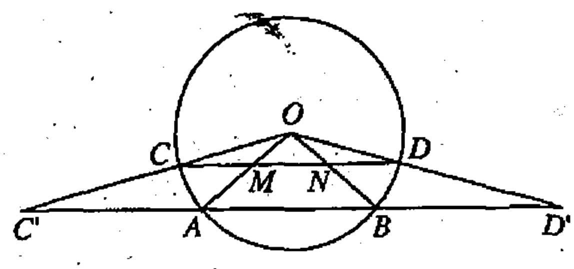
Như vậy D' di động trên tiếp tuyến của đường tròn $(O_1\,;R_1)$ tại M và tiếp tuyến đó cố định. Xét phép vị tự tâm M biến đường tròn $(O_1\,;R_1)$ thành đường tròn (O_2, R_2), ta có đường thẳng BC biến thành đường thẳng EF, tiếp tuyến tại A' biến thành tiếp tuyến tại A và do đó, D' biến thành D. Như vậy điểm D luôn nằm trên đường thẳng MD' là tiếp tuyến của $(O_1\,;R_1)$ tại M. □

Dạng 3. DỰNG HÌNH

Ví dụ 4. Cho đường tròn (O) và dây cung AB khác đường kính. Hãy dựng một dây cung CD của đường tròn đó sao cho các bán kính OA, OB cắt nó thành 3 phần bằng nhau.

Giải (h. 4.56)

• *Phân tích.* Giả sử CD là dây đã dựng. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của OA, OB với CD. Theo giả thiết, ta có $CM = MN = ND$, vì vậy $\Delta OMC = \Delta OND$ và $OM = ON$. Trong tam giác OAB, ta có $\dfrac{OA}{OM} = \dfrac{OB}{ON} = k$. Ta xét phép vị tự tâm O, tỉ số k biến M thành A, khi đó N biến thành B, C biến thành C', D biến thành D' và $C'A = AB = BD'$.



Hình 4.56

• *Cách dựng.*

– Dựng điểm C' đối xứng với B qua A ; D' đối xứng với A qua B.

– Dựng giao điểm C và D của các đoạn thẳng OC' và OD' với đường tròn (O). Dây CD là dây phải dựng.

• *Chứng minh.* (Dành cho bạn đọc).

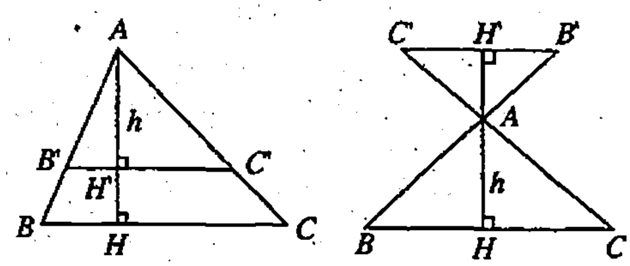
• *Biện luận.* Bài toán luôn có nghiệm và chỉ có một nghiệm. □

Ví dụ 5.

Dựng tam giác ABC biết $\widehat{A} = \alpha$, độ dài đường cao hạ từ đỉnh A bằng h và tỉ số $\dfrac{AC}{AB} = k$.

Giải (h. 4.57)

• *Phân tích.* Giả sử ABC là tam giác đã dựng. Trên AB ta lấy điểm B' sao cho $AB' = 1$. Xét phép vị tự tâm A biến điểm B thành B', khi đó điểm C biến thành C', H biến thành H' (H là chân đường cao kẻ từ A xuống BC) và ΔABC biến thành $\Delta AB'C'$. Từ sự đồng dạng của hai tam giác đó, ta suy ra $AC' = kAB' = k$. Tam giác $AB'C'$ hoàn toàn được xác định.



Hình 4.57

• *Cách dựng.*

– Dựng tam giác $AB'C'$, biết $\widehat{A} = \alpha$, $AB' = 1$, $AC' = k$.

– Dựng đường thẳng $d \,//\, B'C'$ và cách A một khoảng h.

– Dựng giao điểm của d với AB' và AC' rồi kí hiệu là B và C. ΔABC là tam giác cần dựng.

• *Chứng minh.* (Dành cho bạn đọc).

• *Biện luận.* Bài toán luôn có nghiệm. □

Dạng 4. TÍNH ĐẠI LƯỢNG HÌNH HỌC

Ví dụ 6. Tứ giác lồi $ABCD$ có diện tích S. Gọi A_1, B_1, C_1, D_1 lần lượt là trọng tâm của các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC. Tính diện tích tứ giác $A_1B_1C_1D_1$.

Giải

Gọi G là trọng tâm tứ giác $ABCD$. Từ các hệ thức $3\overrightarrow{GA_1} = -\overrightarrow{GA}$, $3\overrightarrow{GB_1} = -\overrightarrow{GB}$, $3\overrightarrow{GC_1} = -\overrightarrow{GC}$, $3\overrightarrow{GD_1} = -\overrightarrow{GD}$, ta suy ra rằng tứ giác $A_1B_1C_1D_1$ là ảnh của tứ giác $ABCD$ qua phép vị tự $V_{\left(G,\, -\frac{1}{3}\right)}$.

Rõ ràng tứ giác $A_1B_1C_1D_1$ lồi, do đó :

$$dt(A_1B_1C_1D_1) = dt(A_1B_1D_1) + dt(C_1B_1D_1) = \frac{1}{9}dt(ABD) + \frac{1}{9}dt(CBD) = \frac{1}{9}S. \ \square$$

BÀI TẬP

CHỨNG MINH TÍNH CHẤT HÌNH HỌC

59. Kí hiệu R, r lần lượt là bán kính các đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác ABC. Chứng minh rằng $R \geq r$.

60. Trên các cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC, ta lấy các điểm tương ứng C_1, A_1, B_1 sao cho $\dfrac{AC_1}{C_1B} = \dfrac{BA_1}{A_1C} = \dfrac{CB_1}{B_1A} = k$. Trên các đoạn A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1, ta lấy lần lượt các điểm C_2, A_2, B_2 sao cho $\dfrac{A_1C_2}{C_2B_1} = \dfrac{B_1A_2}{A_2C_1} = \dfrac{C_1B_2}{B_2A_1} = \dfrac{1}{k}$. Chứng minh rằng tồn tại một phép vị tự biến tam giác ABC thành tam giác $A_2B_2C_2$.

61. Cho tam giác ABC. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác tiếp xúc với BC tại M. Gọi N là điểm đối xứng với M qua I, K là giao điểm của AN với BC. Ta kí hiệu H là điểm đối xứng với tiếp điểm của (I) trên AC qua trung điểm cạnh AC ; L là điểm đối xứng với tiếp điểm của (I) trên AB qua trung điểm cạnh AB, P là giao điểm của BH và CL, G là trọng tâm tam giác MNP. Chứng minh rằng các điểm P, G, I thẳng hàng.

62. Đường tròn tâm O nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại các điểm A_1, B_1, C_1. Gọi A_2 là điểm đối xứng với A_1 qua AO ; B_2 là điểm đối xứng với B_1 qua BO ; C_2 là điểm đối xứng với C_1 qua CO. Chứng minh rằng tam giác $A_2B_2C_2$ vị tự với tam giác ABC.

63. Cho ngũ giác lồi $A_1A_2A_3A_4A_5$. Tịnh tiến ngũ giác đó theo các vectơ $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$, $\overrightarrow{A_1A_5}$, ta nhận được các ngũ giác P_1, P_2, P_3, P_4. Chứng minh rằng trong các hình ngũ giác P_1, P_2, P_3, P_4 và $A_1A_2A_3A_4A_5$ có ít nhất hai ngũ giác có điểm chung trong.

DỰNG HÌNH

64. Cho hai đường thẳng x, y và điểm A không nằm trên hai đường thẳng đó. Hãy dựng một đường tròn đi qua A và tiếp xúc với x và y.

65. Cho đường tròn (O), một điểm A thuộc đường tròn và một đường thẳng x. Hãy dựng một đường tròn (O') tiếp xúc với (O) tại A và tiếp xúc với x.

66. Cho góc $\widehat{xOy}$ và một điểm A nằm trong góc đó. Hãy dựng một đường thẳng d đi qua A và cắt hai cạnh của góc thành một tam giác có chu vi nhỏ nhất.

67. Cho tam giác ABC và một đường thẳng d. Hãy dựng một đường thẳng song song với d và cắt tam giác ABC thành hai phần có diện tích bằng nhau.

68. Dựng tam giác ABC, biết $\widehat{A} = \alpha$, $BC = a$, $\dfrac{AC}{AB} = k$.

69. Dựng tam giác ABC, biết $\widehat{A} = \alpha$, $BC = a$, $\dfrac{BH}{AC} = k$ (BH là đường cao của tam giác).

70. Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O). Trên cạnh AD ta lấy điểm P. Đường thẳng BP cắt đường thẳng CD tại M. Tiếp tuyến với đường tròn (O) tại D cắt đường thẳng MA tại Q. Chứng minh rằng phép vị tự tâm M biến B thành P thì nó biến C thành D và A thành Q.

TÌM TẬP HỢP ĐIỂM

71. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc với nhau tại M. k là một số thực khác không cho trước. Một đường thẳng d thay đổi đi qua M cắt các đường tròn (O), (O') tương ứng tại A và A' (khác M). Tìm tập hợp điểm P trên d sao cho $\overrightarrow{PA} = k\overrightarrow{PA'}$.

72. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc trong với nhau tại A ((O') nằm trong (O)). BC là một dây cung của (O) tiếp xúc với (O'). Tìm tập hợp tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC khi dây BC thay đổi.

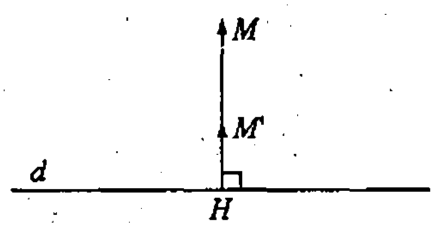
73. Cho hai đường thẳng d và d' song song với nhau. Trên đường thẳng d ta lấy điểm M, trên d' ta lấy điểm N. Tìm tập hợp điểm P sao cho $\overrightarrow{PN} = k.\overrightarrow{PM}$ (k là một số dương cho trước) khi các điểm M, N thay đổi trên d, d' và MN đi qua một điểm cố định.

§8. PHÉP CO – DÃN

1. Định nghĩa

Cho một đường thẳng d và một số $k \neq 0$. Với mỗi điểm M bất kì không thuộc d, ta dựng điểm M' sao cho $\overrightarrow{HM'} = k\overrightarrow{HM}$ trong đó H là chân đường vuông góc hạ từ M xuống d. Khi đó M' được gọi là ảnh của điểm M qua phép co (dãn) về trục d với hệ số k và được kí hiệu

$$\Gamma_{(d,k)} : M \mapsto M'.$$



Hình 4.58

Đường thẳng d được gọi là trục co, số $k \neq 0$ được gọi là hệ số co (dãn). Nếu $|k| > 1$ thì $\Gamma_{(d,k)}$ là phép dãn. Nếu $|k| < 1$ thì $\Gamma_{(d,k)}$ là phép co. Để thuận tiện, khi chưa biết k thì gọi chung $\Gamma_{(d,k)}$ là phép co dãn.

Trường hợp M thuộc d thì M' trùng với M.

Cho một hình $\mathcal{H}$. Tập hợp ảnh của mọi điểm thuộc $\mathcal{H}$ qua phép co dãn $\Gamma_{(d,k)}$ lập thành một hình $\mathcal{H}'$ được gọi là hình co dãn của hình $\mathcal{H}$.

Khi $k = 1$ thì $\Gamma_{(d,k)}$ là phép đồng nhất.

2. Tính chất

• ***Tính chất 1.*** Phép co dãn $\Gamma_{(d,k)}$ là phép biến hình 1 – 1.

Chứng minh. Thật vậy, nếu M_1, M_2 có cùng một ảnh M' thì M_1, M_2, M', H thẳng hàng (H là chân đường vuông góc hạ từ M_1 xuống d) và $\overrightarrow{HM'} = k\overrightarrow{HM_1} = k\overrightarrow{HM_2} \Rightarrow \overrightarrow{HM_1} = \overrightarrow{HM_2} \Rightarrow M_1 \equiv M_2$. □

• ***Tính chất 2.*** Phép hợp thành $\Gamma = \Gamma_{\left(d,\frac{1}{k}\right)} \circ \Gamma_{(d,k)}$ là một phép đồng nhất.

Chứng minh. Thật vậy, nếu M là một điểm bất kì không thuộc d thì

$$\Gamma_{(d,k)} : M \mapsto M' \text{ và } \overrightarrow{HM'} = k\overrightarrow{HM}, \qquad (*)$$

trong đó H là chân đường vuông góc hạ từ M xuống d ;

$$\Gamma_{\left(d,\frac{1}{k}\right)} : M' \mapsto M'' \text{ và } \overrightarrow{H'M''} = \frac{1}{k}\overrightarrow{H'M'}, \qquad (**)$$

trong đó H' là chân đường vuông góc hạ từ M' xuống d. Vì H cũng là chân đường vuông góc hạ từ M' xuống d nên H' trùng với H. Hệ thức (**) được viết lại

$$\overrightarrow{HM''} = \frac{1}{k}\overrightarrow{HM'}. \qquad (***)$$

Từ (*) và (***) ta suy ra $\overrightarrow{HM''} = \overrightarrow{HM}$, nghĩa là M và M'' trùng nhau. □

• ***Tính chất 3.*** Phép co dãn $\Gamma_{(d,k)}$ biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng.

Chứng minh. Gọi A, B, C là ba điểm thẳng hàng, B nằm giữa A và C. Ta chọn hệ toạ độ Oxy sao cho trục co d của phép co dãn trùng với Ox và trong hệ toạ độ đó, $(x_1 ; y_1)$, $(x_2 ; y_2)$, $(x_3 ; y_3)$ tương ứng là toạ độ của các điểm A, B, C. Kí hiệu A', B', C' lần lượt là ảnh của A, B, C trong phép co dãn đang xét, khi đó $A' = (x_1, ky_1)$, $B' = (x_2, ky_2)$, $C' = (x_3, ky_3)$.

Các điểm A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \dfrac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \dfrac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \dfrac{ky_2 - ky_1}{ky_3 - ky_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{A'B'}$ cùng phương với $\overrightarrow{A'C'}$. Điều đó chứng tỏ A', B', C' thẳng hàng. □

Hệ quả. Phép co dãn $\Gamma_{(d,k)}$ biến

i) Đường thẳng d thành đường thẳng d'.

ii) Hai vectơ cùng phương thành hai vectơ cùng phương và tỉ số độ dài của hai vectơ ảnh bằng tỉ số độ dài hai vectơ tạo ảnh tương ứng.

• ***Tính chất 4.*** Nếu ABC là tam giác có diện tích S thì ảnh của tam giác đó qua phép co dãn $\Gamma_{(d,k)}$ là tam giác $A'B'C'$ có diện tích $S' = |k|\, S$.

Chứng minh. Ta chọn hệ toạ độ Oxy sao cho d trùng với Ox. Trong hệ toạ độ này, $A = (x_1;y_1)$, $B = (x_2;y_2)$, $C = (x_3;y_3)$. Diện tích tam giác ABC được cho bằng công thức $S = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2AC^2 - \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$. Kí hiệu A', B', C' là ảnh của các điểm A, B, C qua phép co dãn với hệ số k, khi đó $A' = (x_1;ky_1)$, $B' = (x_2;ky_2)$, $C' = (x_3;ky_3)$ và diện tích S' của tam giác $\Delta A'B'C'$ được cho bởi công thức

$$S' = \frac{1}{2}\sqrt{A'B'^2.A'C'^2 - \left(\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{A'C'}\right)^2},$$

trong đó $\overrightarrow{A'B'} = \left(x_2 - x_1;k(y_2 - y_1)\right)$, $\overrightarrow{A'C'} = \left(x_3 - x_1;k(y_3 - y_1)\right)$.

Đặt $a = x_2 - x_1$, $b = y_2 - y_1$, $a' = x_3 - x_1$, $b' = y_3 - y_1$. Khi đó ta tính được $S = \frac{1}{2}|a.b' - b.a'|$ và $S' = \frac{1}{2}|k(a.b' - b.a')| = \frac{|k|}{2}|a.b' - b.a'|$. Từ các kết quả đó ta suy ra điều cần chứng minh. □

Hệ quả. Cho một đa giác F có diện tích S. Gọi F' là ảnh của F qua phép co dãn $\Gamma_{(d,k)}$ và diện tích của F' bằng S', khi đó $S' = kS$.

• ***Tính chất 5.*** Phép co dãn $\Gamma_{(d,k)}$ biến một đường tròn thành một elip và tiếp tuyến với đường tròn thành tiếp tuyến với elip.

Chứng minh. Ta chọn hệ toạ độ Oxy sao cho d trùng với Ox. Giả sử đường tròn trong hệ toạ độ này có phương trình $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$. Với mỗi điểm $M(x;y)$ thuộc đường tròn, phép co dãn $\Gamma_{(d,k)}$ biến M thành $M'(x';y')$ và tâm $I(a;b)$ của đường tròn thành điểm $I'(a';b')$. Theo định nghĩa, ta có $x' = x$, $y' = ky$, $a' = a$, $b' = kb$. Thay các đẳng thức đó vào phương trình đường tròn, ta được

$$(x'-a')^2+\frac{1}{k^2}(y'-b')^2=R^2 \Leftrightarrow \frac{(x'-a')^2}{R^2}+\frac{(y'-b')^2}{k^2R^2}=1.$$

Phương trình trên xác định một elip với tâm đối xứng là điểm (a',b') và các trục đối xứng song song với các trục toạ độ.

Phép co dãn $(x;y)\mapsto(x;ky)$ trong Oxy biến đường tròn (C) :

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

thành elip (E) : $(x-a)^2+(\frac{y}{k}-b)^2=R^2$, tức là $\frac{(x-a)^2}{R^2}+\frac{(y-kb)^2}{k^2R^2}=1$.

Đường thẳng Δ : $A(x-a)+B(y-kb)+C=0$ là ảnh của đường thẳng d : $A(x-a)+Bk(y-b)+C=0$ qua phép co dãn đó.

d là tiếp tuyến của $(C)\Leftrightarrow C^2=R^2(A^2+k^2B^2)$.

Nhớ lại rằng trong toạ độ Descartes vuông góc IXY, đường thẳng $\alpha X+\beta Y+\gamma=0$ là tiếp tuyến của elip $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$ khi và chỉ khi $\alpha^2a^2+\beta^2b^2=\gamma^2$, từ đó đường thẳng Δ là tiếp tuyến của (E) khi và chỉ khi $A^2.R^2+B^2k^2R^2=C^2$, tức là $C^2=R^2(A^2+k^2B^2)$.

Vậy phép co dãn biến tiếp tuyến của đường tròn (C) thành tiếp tuyến của elip (E). □

• ***Tính chất 6.*** Phép co dãn $\Gamma\left(Ox;\frac{a}{b}\right)$ biến elip $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ thành đường tròn $x^2+y^2=a^2$ và biến tiếp tuyến của elip thành tiếp tuyến của đường tròn.

Phép co dãn $\Gamma\left(Oy;\frac{b}{a}\right)$ biến elip $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ thành đường tròn $x^2+y^2=b^2$.

Chứng minh. Với mọi điểm $M(x;y)$ thuộc elip, phép co dãn $\Gamma\left(Ox;\frac{a}{b}\right)$ biến $M(x;y)$ thành $M'(x';y')$ được xác định bởi điều kiện $x'=x$, $y'=\frac{a}{b}y$. Thay các kết quả này vào phương trình elip, ta được

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{\left(\frac{b}{a}y'\right)^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow x'^2+y'^2=a^2.$$

Vậy toạ độ của M' là nghiệm của phương trình $x^2+y^2=a^2$. Đây là phương trình của một đường tròn.

Xét tiếp tuyến với elip tại điểm $M_0(x_0;y_0)$ có phương trình $\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y=1$.

Gọi $M'_0(x'_0, y'_0)$ là ảnh của M_0 qua $\Gamma\left(0x;\frac{a}{b}\right)$ thì $x'_0=x_0$; $y'_0=\frac{a}{b}y_0$. Thay các kết quả đó vào phương trình tiếp tuyến, ta được

$$\frac{x'_0}{a^2}x'+\frac{\frac{b^2}{a^2}y'_0}{b^2}y'=1 \Leftrightarrow x'_0x'+y'_0y'=a^2.$$

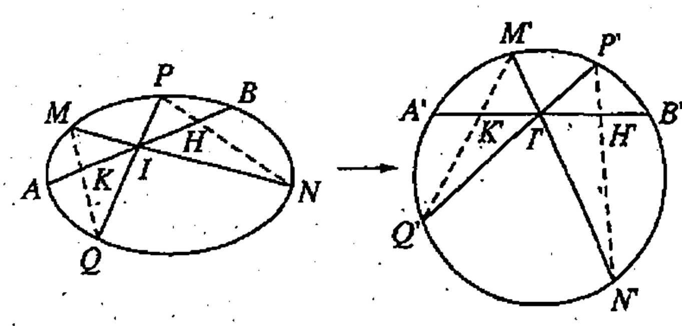
Đây là phương trình tiếp tuyến của đường tròn. □

3. Ứng dụng của phép co – dãn

Dạng 1. CHỨNG MINH TÍNH CHẤT HÌNH HỌC

Ví dụ 1. Trên đường elip (E), ta lấy hai điểm A, B. Gọi I là trung điểm của đoạn AB, MN và PQ là các dây cung của (E) đi qua I (M và P nằm cùng phía với AB). Các dây cung MQ và NP cắt AB tương ứng tại K và H. Chứng minh rằng $IK=IH$.

Giải (h.4.59)



Hình 4.59

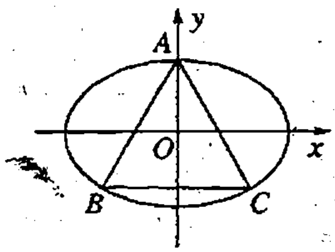
Theo Tính chất 6, tồn tại một phép dãn biến (E) thành đường tròn (E'), dây AB thành dây $A'B'$, I thành I' là trung điểm của $A'B'$ (Hệ quả ii) của Tính chất 3), các điểm K thành K', H thành H' và các dây MN thành $M'N'$, PQ thành $P'Q'$. Ta đã chứng minh rằng trong đường tròn (E'), các đoạn $I'K'=I'H'$. Vì vậy $IK=IH$ (Hệ quả ii) của Tính chất 3). □

Dạng 2. BÀI TOÁN CỰC TRỊ

Ví dụ 2. Trong số các tam giác nội tiếp một elip (E) cho trước (3 đỉnh tam giác thuộc (E)), hãy chỉ ra một tam giác có diện tích lớn nhất.

Giải (h.4.60)

Ta xét elip (E) trong hệ toạ độ vuông góc có phương trình $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b)$ và ABC là tam giác nội tiếp trong (E). Theo Tính chất 6, tồn tại phép dãn hệ số $\dfrac{a}{b}$ biến (E) thành đường tròn (E') có phương trình $x^2+y^2=a^2$ và biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$ nội tiếp trong (E'). Ta đã biết rằng trong số các tam giác $A'B'C'$ nội tiếp đường tròn bán kính a, tam giác đều có diện tích lớn nhất và diện tích đó bằng $\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.



Hình 4.60

Ta kí hiệu S là diện tích tam giác ABC, S' là diện tích tam giác $A'B'C'$ thì theo Tính chất 4 ta có

$$S'=\frac{a}{b}S\Rightarrow S=\frac{b}{a}S'\le\frac{b}{a}.\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3ab\sqrt{3}}{4}.$$

Vậy $\max S=\dfrac{3ab\sqrt{3}}{4}$, khi ta chọn $A(0,b)$, $B\left(\dfrac{-a\sqrt{3}}{2},\dfrac{-b}{2}\right)$, $C\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2},\dfrac{-b}{2}\right)$. □

BÀI TẬP

BÀI TOÁN CỰC TRỊ

74. Trong số các tam giác ABC ngoại tiếp một elip (E) cho trước (các cạnh của tam giác tiếp xúc với (E)), hãy chỉ ra một tam giác có diện tích nhỏ nhất.

75. Trong số các tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp một elip (E) cho trước (các cạnh của tứ giác tiếp xúc với (E)), hãy chỉ ra một tứ giác có diện tích nhỏ nhất.

CHỨNG MINH TÍNH CHẤT HÌNH HỌC

76. Tam giác ABC ngoại tiếp một elip (E). Ta kí hiệu A', B', C' là các tiếp điểm của BC, CA, AB với đường cong (E). Chứng minh rằng các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy.

77. Cho ba đường thẳng d, d_1, d_2, trong đó $\tan\overline{(d, d_1)} = a_1$, $\tan\overline{(d, d_2)} = a_2$. Gọi d_1' và d_2' là ảnh của d_1 và d_2 trong phép biến đổi $\Gamma_{(d,k)}$, φ là góc định hướng giữa d_1' và d_2'. Chứng minh rằng

$$\tan\varphi = \frac{k(a_2 - a_1)}{1 + k^2 a_1 a_2}.$$

78. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng tồn tại hai phép co dãn Γ_1 và Γ_2 sao cho $\Gamma = \Gamma_2 \circ \Gamma_1$ biến tam giác ABC thành một tam giác vuông cân $A'B'C'$.

79. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng tồn tại hai phép co dãn Γ_1 và Γ_2 sao cho $\Gamma = \Gamma_2 \circ \Gamma_1$ biến tam giác ABC thành một tam giác đều $A'B'C'$.

80. Cho tam giác ABC và tam giác MNP. Chứng minh rằng tồn tại hai phép co dãn Γ_1 và Γ_2 sao cho $\Gamma = \Gamma_2 \circ \Gamma_1$ biến tam giác ABC thành một tam giác $A'B'C'$ đồng dạng với tam giác MNP.

81. Cho hình bình hành $ABCD$. Chứng minh rằng tồn tại hai phép co dãn Γ_1 và Γ_2 sao cho $\Gamma = \Gamma_2 \circ \Gamma_1$ biến hình bình hành $ABCD$ thành hình vuông $A'B'C'D'$.

82. Cho hình thang $ABCD$. Chứng minh rằng tồn tại một phép co dãn biến nó thành một hình thang cân.

Chuyên đề

HÌNH HỌC PHẲNG

Hình học phẳng là một chủ đề quan trọng trong chương trình toán trung học cơ sở. Nắm vững các kiến thức và kĩ năng giải toán ở cấp độ này, học sinh sẽ có một sức bật tốt để có một nền tảng vững vàng về hình học ở cấp phổ thông trung học. Chuyên đề này điểm qua các định lí và bài toán quan trọng nhất trong chương trình hình học cấp trung học cơ sở. Vì đây là chuyên đề nâng cao nên chúng tôi sẽ không trình bày các định lí cơ bản như định lí Thales, định lí Pythagoras, định lí, tính chất của phân giác,...

Dưới đây là các chủ đề sẽ được đề cập. Ngoài ra, một số định lí, công thức, bài toán khác sẽ được trình bày dưới dạng hệ quả hay bài tập.

– Đường thẳng Euler

– Đường tròn Euler

– Đường thẳng Simson

– Đường thẳng Steiner

– Định lí Ptolemy

– Bất đẳng thức Ptolemy

– Tứ giác toàn phần

– Đường thẳng Newton

– Định lí Ceva, Menelaus, định lí Desargues

– Đường tròn Apollonius

– Bài toán con bướm

– Định lí Euler về tam giác pedal

– Một số quỹ tích cơ bản.

– Một số bài toán dựng hình bằng thước và compa.

§1. ĐỊNH LÍ ĐƯỜNG TRÒN 9-ĐIỂM *EULER*. ĐƯỜNG THẲNG *EULER* TRONG TAM GIÁC

Bài toán đường tròn 9-điểm *Euler* được nhà toán học *EULER (1707–1783)* đưa ra và chứng minh cho sáu điểm ban đầu, đó là trung điểm của các cạnh của tam giác và hình chiếu của các đỉnh của tam giác lên các cạnh đối diện của chúng cùng nằm trên một đường tròn. Đến năm 1820, *BRIANCHON (1783–1864)* và *PONCELET (1778–1876)* chứng minh thêm rằng đường tròn đi qua sáu điểm nói trên cũng đi qua trung điểm của các đoạn nối từ trực tâm đến các đỉnh của tam giác. Tên gọi "*Đường tròn 9–điểm*" được giới thiệu bởi *TERQUEM* năm 1842.

Việc phát hiện ra đường tròn *Euler* không chỉ đi qua trung điểm của các cạnh của một tam giác mà còn đi qua sáu điểm còn lại là một trong những kho tàng quý báu của hình học sơ cấp hiện đại.

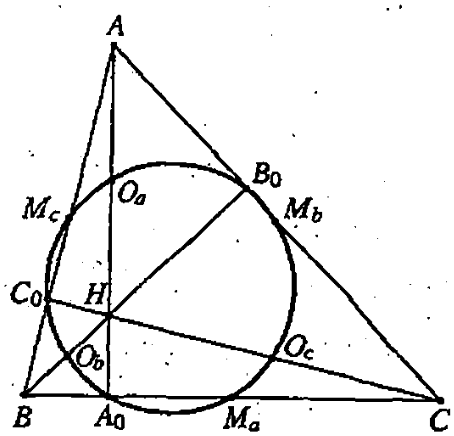
I. Đường tròn 9-điểm *Euler*

Bài toán 1. Cho tam giác ABC có H là trực tâm. Khi đó trung điểm các cạnh của tam giác ; chân đường cao hạ từ A, B, C tương ứng xuống BC, CA, AB ; trung điểm của HA, HB, HC cùng thuộc một đường tròn. Đường tròn này gọi là đường tròn 9-điểm Euler của tam giác ABC.

Trước khi đi vào việc chứng minh chi tiết, ta xét bổ đề sau :

Bổ đề. Cho tam giác ABC có H là trực tâm. Gọi A_0, B_0, C_0 lần lượt là hình chiếu của A, B, C tương ứng trên BC, CA, AB. Gọi M_a là trung điểm của BC ; O_a là trung điểm của HA. Chứng minh rằng : M_a, O_a nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_0B_0C_0$.

Chứng minh (h.5.1). Thật vậy, ta có $BB_0 \perp AC$ tại $B_0 \Rightarrow \widehat{BB_0C} = 90^\circ$. Hoàn toàn tương tự, ta cũng có $\widehat{BC_0C} = 90^\circ$. Từ đó suy ra được B, C, B_0, C_0 cùng thuộc đường tròn đường kính BC, hơn nữa M_a còn là tâm của đường tròn đó. Lập luận tương tự, ta cũng chứng minh được các tứ giác sau đây nội tiếp đường tròn : tứ giác C_0HA_0B, HB_0CA_0, AC_0HB_0, trong đó O_a là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác AC_0HB_0.



Hình 5.1

Khi ấy, ta được $\widehat{B_0M_aC_0} = 2.\widehat{C_0CB_0} = 2.\widehat{C_0BB_0} = 2.\widehat{C_0A_0H} = 2.\widehat{HA_0B_0}$

$$\Rightarrow \widehat{B_0M_aC_0} = \widehat{C_0A_0B_0}.$$

Suy ra $C_0A_0M_aB_0$ nội tiếp, tức là $M_a \in (A_0B_0C_0)$. (1)

Ta lại có $\widehat{O_aB_0H} = \widehat{O_aHB_0} = \widehat{B_0CA_0} = \widehat{B_0CB} \Rightarrow O_aB_0$ là tiếp tuyến từ O_a đến đường tròn $\left(M_a, \dfrac{BC}{2}\right)$, lập luận tương tự cho O_aC_0.

Suy ra $\widehat{O_aC_0M_a} = \widehat{O_aB_0M_a} = 90^\circ \Rightarrow C_0O_aB_0M_a$ nội tiếp đường tròn. (2)

Từ (1) & (2) suy ra đ.p.c.m. □

Trở lại bài toán ban đầu.

Ta gọi O_b, O_c lần lượt là trung điểm của HB, HC ; M_b, M_c lần lượt là trung điểm của CA, AB. Khi đó, lập luận tương tự bài toán 1, ta có : O_b, M_b, O_c, M_c thuộc $(A_0B_0C_0)$. Do vậy O_a, O_b, O_c, M_a, M_b, M_c, A_0, B_0, C_0 là *9 điểm cùng thuộc một đường tròn*. Đây chính là đường tròn *Euler* của tam giác ABC. □

Nhận xét (h.5.2) :

Nếu ta gọi A_1 là điểm đối xứng của H qua BC ; N_a là điểm đối xứng của H qua M_a. Khi ấy, ta có :

$\widehat{A_1BA_0} = \widehat{HBA_0} = \widehat{B_0BA_0}$.

Nhưng $\widehat{B_0BA_0} = \widehat{A_0AC} = \widehat{A_1AC}$.

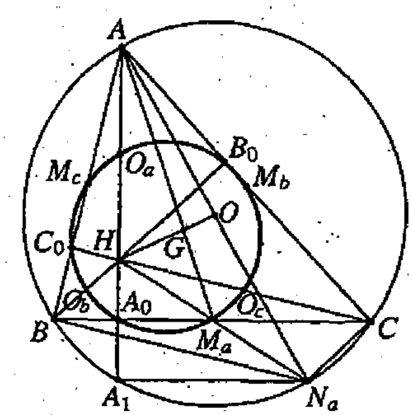
Do vậy $\widehat{A_1BC} = \widehat{A_1BA_0} = \widehat{A_1AC}$.

Suy ra $A_1 \in (ABC)$.

Mặt khác dễ thấy HBN_aC là hình bình hành.

Do đó

$\widehat{BN_aC} = \widehat{BHC} = \widehat{C_0HB_0} = 180^\circ - \widehat{C_0AB_0} = 180^\circ - \widehat{BAC}$,



Hình 5.2

điều này chứng tỏ $N_a \in (ABC)$.

A_0M_a giờ đây đóng vai trò là đường trung bình của tam giác HA_1N_a. Suy ra $A_0M_a \parallel A_1N_a$. Nhưng $A_0M_a \equiv BC \perp AA_1$. Suy ra $A_1N_a \perp AA_1 \Rightarrow \widehat{AA_1N_a} = 90^\circ$. Do vậy A, N_a sẽ là hai điểm đối xứng nhau qua tâm O của (ABC), dẫn đến A, O, N_a thẳng hàng.

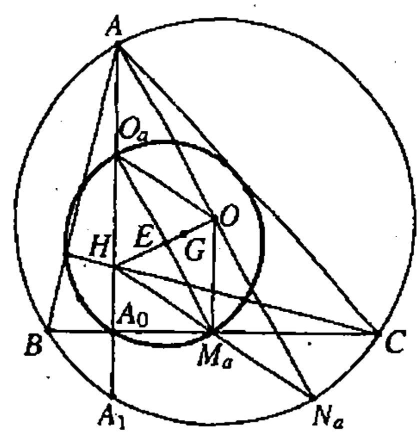
Xét trong tam giác AHN_a, gọi G là trọng tâm của tam giác. Khi đó $G \in AM_a$ và $\dfrac{AG}{AM_a} = \dfrac{2}{3}$. Suy ra G cũng là trọng tâm của tam giác ABC. Mặt khác HO là một trung tuyến từ H của tam giác AHN_a. Suy ra $G \in HO$.

2. Đường thẳng Euler của tam giác

Từ nhận xét trên, ta có được nội dung của bài toán *đường thẳng Euler* của tam giác.

Bài toán 2. Cho tam giác ABC có H, G, O lần lượt là trực tâm, trọng tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác. Khi ấy H, O, G thẳng hàng. Đường thẳng chứa H, O, G được gọi là đường thẳng Euler của tam giác ABC.

Hơn nữa tâm *đường tròn 9-điểm Euler* của tam giác ABC còn nằm trên *đường thẳng Euler* của tam giác ABC và là trung điểm của HO.



Hình 5.3

Thật vậy, ta có

$$OM_a \,//\, O_aH, \quad OM_a = \frac{1}{2}.AH = HO_a.$$

Suy ra O_aOM_aH là hình bình hành. Do vậy, nếu gọi $E \equiv M_aO_a \cap OH$ thì E là trung điểm của O_aM_a. Mặt khác tam giác $M_aO_aA_0$ là một tam giác vuông tại A_0 nội tiếp *đường tròn 9−điểm Euler* của tam giác ABC. Suy ra E là tâm của *đường tròn Euler* của tam giác ABC. Điểm E chính là trung điểm của HO.

Đường thẳng Euler có nhiều tính chất thú vị mà cho đến gần đây người ta vẫn còn tiếp tục tìm ra. Vào năm 2006, một kiến trúc sư người Hy Lạp *Rostas Vittasko* có đưa ra một bài toán thú vị như sau

Giả sử ABCD là một tứ giác nội tiếp có các đường chéo cắt nhau tại P. Chứng minh rằng các đường thẳng Euler của các tam giác PAB, PBC, PCD, PDA đồng quy tại một điểm.

BÀI TẬP

1. (*VMO 2009*) Trong mặt phẳng cho hai điểm cố định A, B (A khác B). Một điểm C di động trên mặt phẳng sao cho $\widehat{ACB} = \alpha = \text{const}$ $(0^\circ < \alpha < 180^\circ)$. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC và tiếp xúc với AB, BC, CA lần lượt tại D, E, F. Các đường thẳng AI, BI cắt EF lần lượt tại M, N.

a) Chứng minh rằng MN có độ dài không đổi.

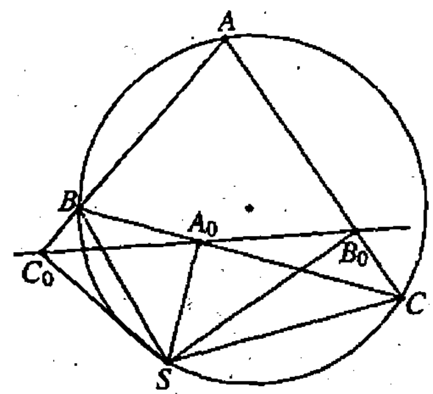
b) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN luôn đi qua một điểm cố định khi C lưu động.

2. Cho tam giác ABC nhọn có các đường cao AA', BB', CC'. Chứng minh rằng các đường thẳng Euler của các tam giác $AB'C'$, $CA'B'$ và $BA'C'$ đồng quy tại một điểm.

3. Cho tam giác ABC với góc A không vuông. Gọi D là một điểm sao cho
$$\widehat{DBA} = \widehat{BAC} = \widehat{DCA}.$$
Chứng minh rằng đường thẳng Euler của tam giác ABC đi qua D.

§2. ĐƯỜNG THẲNG SIMSON VÀ ĐƯỜNG THẲNG STEINER

Bài toán. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Giả sử S là một điểm nằm trên (O) sao cho S không trùng với các đỉnh A, B, C của tam giác. Giả sử A_0, B_0, C_0 là hình chiếu của S tương ứng trên các cạnh BC, CA, AB. Khi đó A_0, B_0, C_0 thẳng hàng. Đường thẳng chứa A_0, B_0, C_0 được gọi là *đường thẳng Simson của S đối với tam giác ABC*.



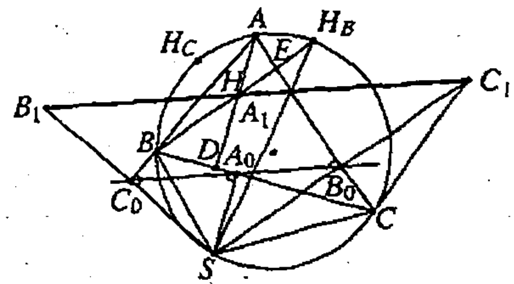
Hình 5.4

Bài toán đường thẳng Simson có thể xem như một hệ quả khá hiển nhiên của định lí Euler về tam giác pedal (xem §10 trong chuyên đề này). Song việc dùng một định lí mạnh để chứng minh định lí về đường thẳng Simson không phải là một phương án hay. Đường thẳng Simson có thể được chứng minh khá đơn giản bằng phương pháp biến đổi góc thông thường. Thật vậy, ta có $\widehat{CB_0S} = \widehat{CA_0S} = 90^\circ$, suy ra tứ giác A_0B_0CS là tứ giác nội tiếp, suy ra $\widehat{B_0A_0C} = \widehat{B_0SC}$. Mặt khác, vì $ABSC$ nội tiếp nên $\widehat{C_0BS} = \widehat{ACS} = \widehat{B_0CS} \Rightarrow \Delta SC_0B \backsim \Delta SB_0C$ (g.g) $\Rightarrow \widehat{BSC_0} = \widehat{CSB_0}$ $\Rightarrow \widehat{BSC_0} = \widehat{B_0A_0C}$. Nhưng vì A_0BC_0S là tứ giác nội tiếp $(\widehat{BA_0S} = \widehat{BC_0S} = 90^\circ)$ nên $\widehat{BSC_0} = \widehat{BA_0C_0} \Rightarrow \widehat{B_0A_0C} = \widehat{BA_0C_0} \Rightarrow C_0, A_0, B_0$ thẳng hàng. □

Điều ngược lại của bài toán đường thẳng Simson cũng đúng. Cụ thể là "*Nếu M là điểm chạy trong mặt phẳng của tam giác ABC sao cho M không trùng với các đỉnh của tam giác và hình chiếu của nó xuống các cạnh của tam giác nằm trên một đường thẳng. Khi đó M nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC*".

Phép chứng minh mệnh đề đảo xin được dành cho bạn đọc.

Lưu ý : Nếu gọi B_1, A_1 và C_1 lần lượt là điểm đối xứng của S qua AB, BC và CA. Dễ thấy A_1, B_1, C_1 thẳng hàng. Tuy nhiên, điều đặc biệt của đường thẳng chứa A_1, B_1, C_1 là nó đi qua trực tâm H của tam giác ABC. Thật vậy, ở §1 ta đã biết rằng nếu gọi H_C, H_B lần lượt là các điểm đối xứng của H qua AB, AC tương ứng thì khi đó H_B, H_C thuộc (O). Lưu ý tính chất này, bây giờ ta được : $\widehat{HC_1C} = \widehat{H_BSC}$ (tính chất đối xứng trục). Mặt khác, vì $H_B \in (O)$ nên $\widehat{H_BSC} = \widehat{H_BBC} = \widehat{DAC} = \widehat{HAC}$ (vì $AEDB$ là tứ giác nội tiếp, trong đó D, E lần lượt là hình chiếu của H trên BC, CA) $\Rightarrow \widehat{HC_1C} = \widehat{HAC} \Rightarrow HAC_1C$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{C_1HC} = \widehat{C_1AC} = \widehat{SAC}$ (tính chất đối xứng trục) $= \widehat{SH_CC} = \widehat{SH_CH} = \widehat{B_1HH_C}$ (tính chất đối xứng trục) $\Rightarrow \widehat{CHC_1} = \widehat{H_CHB_1} \Rightarrow$ B_1, H, C_1 thẳng hàng, suy ra A_1, B_1, C_1, H thẳng hàng. Vậy H thuộc đường thẳng đi qua A_1, B_1, C_1.



Hình 5.5

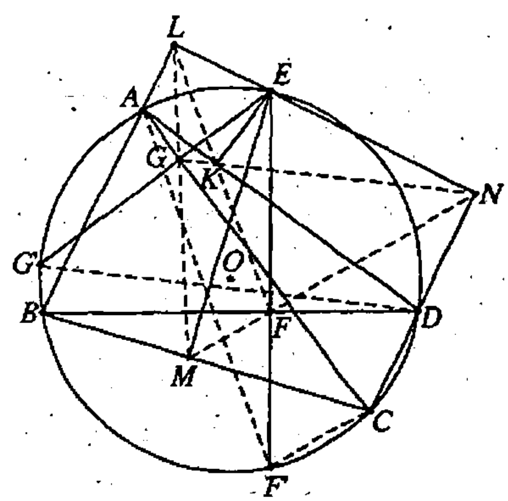
Đường thẳng này được gọi là ***đường thẳng Steiner của S đối với tam giác ABC.***

Để thấy rõ hơn ứng dụng của đường thẳng Simson và đường thẳng Steiner, ta xét các ví dụ sau

Ví dụ 1. *(Đề chọn đội tuyển dự JBMO của Rumani, 2001)*

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. Với E là một điểm bất kỳ nằm trên (O), ta gọi K, L, M, N lần lượt là hình chiếu của E trên DA, AB, BC, CD. Chứng minh rằng N là trực tâm của tam giác KLM khi và chỉ khi $ABCD$ là hình chữ nhật.

Giải (h. 5.6). Gọi G và F lần lượt là hình chiếu của E lên AC và BD. Theo định lí đường thẳng Simson, ta có ngay các bộ ba điểm sau thẳng hàng (K, L, F), (M, N, F), (K, G, N), (M, L, G). Gọi G', F' là giao điểm



Hình 5.6

thứ hai của EG và EF với (O). Ta thấy rằng $KL \parallel AF'$, $MG \parallel BG'$, $G'D \parallel KN$, $F'C \parallel MN$. Do đó N là trực tâm tam giác KLM khi và chỉ khi

$$KF \perp MN \Leftrightarrow AF' \perp F'C \text{ và } MG \perp KN \Leftrightarrow BG' \perp G'D.$$

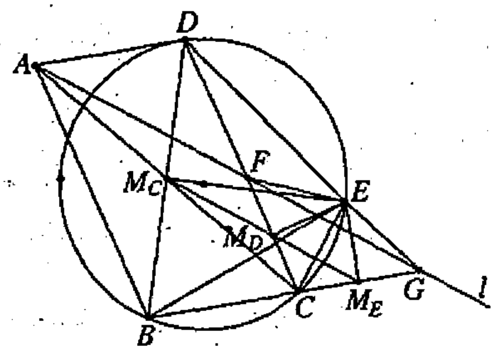
Mặt khác $AF' \perp F'C \Leftrightarrow \widehat{AF'C} = 90^\circ \Leftrightarrow O \in AC$.

Tương tự $BG' \perp G'D \Leftrightarrow O \in BD$. Do đó N là trực tâm của tam giác $KLM \Rightarrow O$ là giao điểm của AC và $BD \Leftrightarrow ABCD$ là hình chữ nhật.

Ngược lại, giả sử ta đã có $ABCD$ là hình chữ nhật, dễ thấy rằng với mọi điểm E di động trên (O) thì N là trực tâm của tam giác KLM. □

Ví dụ 2. (*IMO 2007*). Xét 5 điểm A, B, C, D, E sao cho $ABCD$ là hình bình hành và bốn điểm B, C, D, E cùng nằm trên một đường tròn. Gọi l là một đường thẳng qua A. Giả sử l cắt đoạn DC ở F và BC ở G. Giả sử $EF = EG = EC$. Chứng minh rằng l là phân giác góc DAB.

Giải (h. 5.7). Gọi M_E; M_D, M_C lần lượt là hình chiếu của E lên CB, CD, BD. Ta có theo giả thiết ban đầu thì E thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD, suy ra M_C, M_D, M_E thẳng hàng (đường thẳng Simson). Mặt khác $EG = EC = EF$ nên E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $GCF \Rightarrow M_E$, M_D là trung điểm của CG, $CF \Rightarrow M_EM_D$ là đường trung bình của tam giác



Hình 5.7

$CGF \Rightarrow (M_EM_DM_C) \parallel (AF) \equiv (GF) \Rightarrow M_C$ là trung điểm của CA cũng đồng thời là trung điểm của BD. Ta có trong tam giác EBD, EM_C là đường cao đồng thời cũng là đường trung tuyến $\Rightarrow$ tam giác EBD cân ở $E \Rightarrow EB = ED$. Mặt khác $\widehat{EBC} = \widehat{EDC} \Rightarrow$ tam giác EBM_E và tam giác EDM_D bằng nhau $\Rightarrow EM_E = EM_D \Rightarrow GC = CF \Rightarrow$ tam giác CFG cân ở $C \Rightarrow \widehat{CGF} = \widehat{CFG}$. Mà $\widehat{BAF} = \widehat{GFC}$, $\widehat{FAD} = \widehat{FGC} \Rightarrow \widehat{BAF} = \widehat{FAD} \Rightarrow FA$ là phân giác góc $\widehat{BAD}$ hay l là phân giác $\widehat{BAD}$. □

BÀI TẬP

1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). S_1, S_2 là hai điểm di động trên (O) và đối xứng nhau qua O. Gọi Δ_1, Δ_2 tương ứng là đường thẳng Simson của S_1,

S_2 đối với tam giác ABC. Chứng minh rằng Δ_1 vuông góc với Δ_2 và giao điểm của Δ_1, Δ_2 chạy trên một đường tròn cố định.

5. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi d_A, d_B, d_C, d_D là các đường thẳng Simson của A, B, C, D tương ứng đối với các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC. Chứng minh rằng d_A, d_B, d_C, d_D đồng quy.

6. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) và M là một điểm nằm trên mặt phẳng tứ giác. Gọi X, Y, Z, T, U, V theo thứ tự là hình chiếu của M xuống AB, BC, CD, DA, AC, BD. Gọi N, P, Q lần lượt là trung điểm của XZ, YT, UV. Chứng minh rằng nếu M thuộc (O) thì N, P, Q thẳng hàng. Bài toán còn đúng không nếu M là một điểm bất kì trong mặt phẳng ?

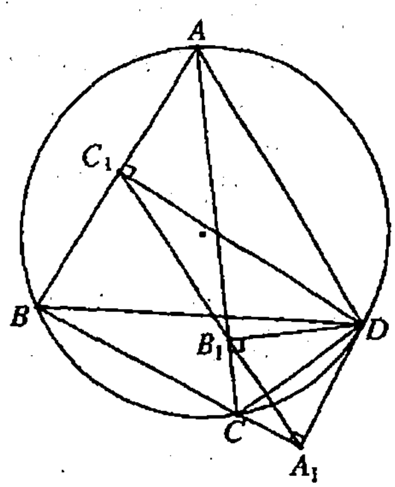
§3. ĐỊNH LÍ PTOLEMY

Định lí Ptolemy là một trong những định lí đẹp của hình học sơ cấp, có rất nhiều ứng dụng trong việc giải các bài toán hình học. Định lí này có một phát biểu hết sức đơn giản :

Định lí Ptolemy. Tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp một đường tròn khi và chỉ khi tổng của tích các cặp cạnh đối bằng tích hai đường chéo, nghĩa là

$$AB.CD + AD.BC = AC.BD.$$

Có nhiều cách khác nhau để chứng minh định lí này. Một số chứng minh sẽ được trình bày trong phần bất đẳng thức Ptolemy. Dưới đây ta trình bày một chứng minh sử dụng đường thẳng Simson.



Hình 5.8

Hạ DA_1 vuông góc với BC, DB_1 vuông góc với AC và DC_1 vuông góc với AB thì B_1, A_1, C_1 thẳng hàng và $A_1B_1 + B_1C_1 = A_1C_1$ (1).

Áp dụng định lí hàm số sin cho các đường tròn đường kính DC, DB, DA và các dây cung A_1B_1, A_1C_1 và B_1C_1 tương ứng, ta có

$$A_1B_1 = DC.\sin\widehat{ACB},\ A_1C_1 = DB.\sin\widehat{ABC},\ B_1C_1 = AD.\sin\widehat{BAC}$$

Lại áp dụng định lí hàm số sin cho tam giác ABC, ta có

$$\sin C = \frac{AB}{2R},\ \sin B = \frac{AC}{2R},\ \sin A = \frac{BC}{2R}.$$

Thay vào đẳng thức (1) và rút gọn, ta thu được

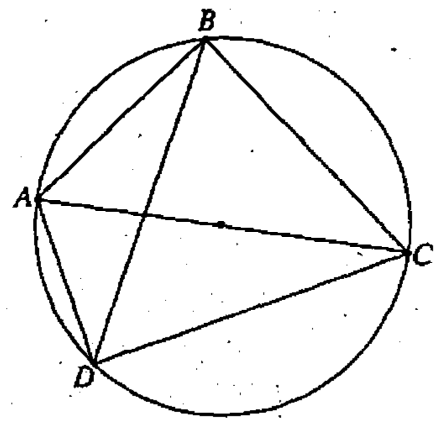
$$AB.CD + AD.BC = AC.BD. \square$$

Định lí Ptolemy có nhiều ứng dụng trong việc giải các bài toán hình học liên quan đến chứng minh và tính toán. Sau đây, ta sẽ xem xét một số ứng dụng của định lí Ptolemy về tứ giác nội tiếp trong việc chứng minh một số công thức lượng giác và hình học.

Công thức tính $\sin(\alpha+\beta)$

Với α, β là các góc nhọn, dựng đường tròn đường kính AC và chọn các điểm B và D nằm trên hai nửa đường tròn, sao cho $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{DAC} = \beta$. Áp dụng định lí Ptolemy, ta có

$$AB.CD + AD.BC = AC.BD. \qquad (2)$$



Hình 5.9

Mặt khác, áp dụng định nghĩa của hàm số lượng giác, ta có

$AB = AC.\cos\alpha$, $BC = AC.\sin\alpha$,

$CD = AC.\sin\beta$, $DA = AC.\cos\beta$.

Cuối cùng, áp dụng định lí hàm số sin cho tam giác ABD, ta được

$$BD = AC.\sin(\alpha+\beta).$$

Thay vào (2), ta được

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha.\cos\beta + \sin\beta.\cos\alpha. \square$$

Định lí Pythagoras

Xét hình chữ nhật $ABCD$. Rõ ràng đây là một tứ giác nội tiếp. Vì thế ta có

$$AB.CD + AD.BC = AC.BD.$$

Do $AB = CD$, $AD = BC$ nên từ đây suy ra

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \square$$

Định lí hàm số côsin

Xét tam giác ABC với các cạnh $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Dựng điểm D trên đường tròn ngoại tiếp tam giác sao cho $AD = BC$ và $AC = BD$ (D chính là điểm đối xứng của C qua trung trực của AB). Gọi E và F lần lượt là hình chiếu của C và D trên AB. Áp dụng định lí Ptolemy cho tứ giác nội tiếp $ABCD$ ta có

$$AB.CD + AD.BC = AC.BD. \qquad (3)$$

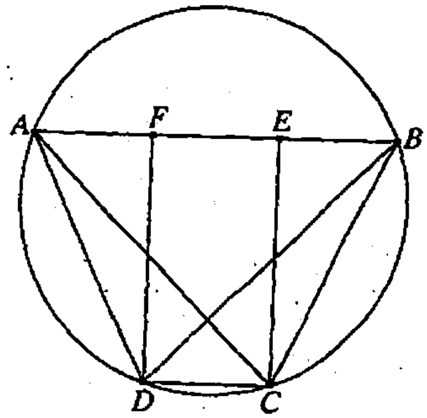
Mặt khác,

$$CD = AB - AF - BE = AB - 2BC\cos B.$$

Thay $CD = AB - 2BC\cos B$, $AD = BC$, $BD = AC$ vào (3), ta có

$$AB^2 - 2AB.BC.\cos B + BC^2 = AC^2$$

hay $\quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B.$ □



Hình 5.10

Hệ thức Feuerbach

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong một đường tròn, khi đó

$$BD^2.S_{ACD} = CD^2.S_{ABD} + AD^2.S_{BCD}. \qquad (4)$$

Chứng minh. Theo công thức tính diện tích thì

$$S_{ACD} = \frac{AC.AD.CD}{4R},\ S_{ABD} = \frac{AB.AD.BD}{4R},\ S_{BCD} = \frac{BC.BD.CD}{4R}.$$

Do đó (4) tương đương với

$$BD^2.AC.AD.CD = CD^2.AB.AD.BD + AD^2.BC.BD.CD$$

hay là

$$AC.BD = AB.CD + AD.BC.\ \square$$

Như vậy, có thể thấy định lí Ptolemy tương đương với hệ thức Feuerbach.

Định lí Carnot

Xét tam giác nhọn ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R. Gọi x, y, z là các khoảng cách từ O đến BC, CA, AB tương ứng. Khi đó

$$x + y + z = R + r$$

trong đó r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.

Chứng minh (h. 5.11). Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Áp dụng định lí Ptolemy cho tứ giác nội tiếp $AEOF$, ta được

$$AF.OE + AE.OF = AO.EF \Leftrightarrow c.y + b.z = R.a.$$

Tương tự

$$c.x + az = R.b, ay + bx = R.c.$$

Cộng các đẳng thức vế theo vế, ta được

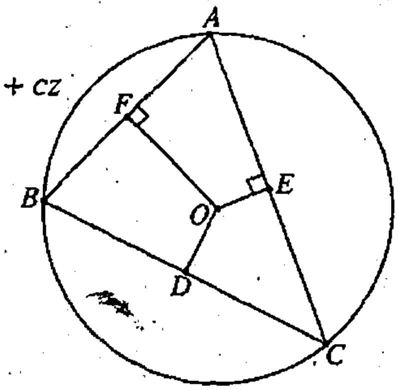
$(b + c)x + (c + a)y + (a + b)z = R(a + b + c)$

$\Leftrightarrow\ (a + b + c)(x + y + z) = R(a + b + c) + ax + by + cz$

$\Leftrightarrow x + y + z = R + r$

(Vì $ax + by + cz = 2S_{OBC} + 2S_{OCA} + 2S_{OAB}$

$= 2S_{ABC}$ và $r = \dfrac{S}{p}$) $\square$



Hình 5.11

Viết dưới dạng lượng giác, định lí Carnot chính là hệ thức

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}.$$

Chú ý hệ thức này đúng với mọi tam giác. Với hệ thức hình học, định lí Carnot vẫn đúng trong trường hợp tam giác tù, nhưng nếu chẳng hạn A tù thì ta có $-x + y + z = R + r$.

BÀI TẬP

7. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) và $AC = 2AB$. Các đường thẳng tiếp xúc với đường tròn (O) tại A, C cắt nhau tại P. Chứng minh rằng BP đi qua điểm chính giữa của cung $\overset{\frown}{BAC}$.

8. Cho tam giác ABC có I là tâm đường tròn nội tiếp, O là tâm đường tròn ngoại tiếp và G là trọng tâm. Giả sử rằng $\widehat{OIA} = 90^{\circ}$. Chứng minh rằng IG song song với BC.

9. (*IMO Shortlist*) Giả sử M, N là các điểm nằm trong tam giác ABC sao cho $\widehat{MAB} = \widehat{NAC}$, $\widehat{MBA} = \widehat{NBC}$. Chứng minh rằng :

$$\frac{AM.AN}{AB.AC} + \frac{BM.BN}{BA.BC} + \frac{CM.CN}{CA.CB} = 1.$$

10. (*VMO 1997*) Trong mặt phẳng, cho đường tròn tâm O bán kính R và điểm P nằm trong đường tròn ($OP = d < R$). Trong tất cả các tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O) và có hai đường chéo AC, BD vuông góc và cắt nhau tại P, hãy tìm tứ giác có chu vi lớn nhất và tứ giác có chu vi nhỏ nhất. Tính các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất này theo R và d.

§4. BẤT ĐẲNG THỨC PTOLEMY

Định lí Ptolemy có nhiều mở rộng khác nhau, trong đó một mở rộng thú vị và có nhiều ứng dụng chính là bất đẳng thức Ptolemy.

Bất đẳng thức Ptolemy. Với 4 điểm A, B, C, D bất kỳ trên mặt phẳng, ta có

$$AB.CD + AD.BC \geq AC.BD. \qquad (1)$$

Rất thú vị là bất đẳng thức tam giác ($AB + BC \geq AC$ với ba điểm A, B, C bất kỳ) là một trường hợp đặc biệt của bất đẳng thức Ptolemy. Thật vậy

Chia hai vế của (1) cho BD, ta được

$$AB\frac{CD}{BD} + BC\frac{AD}{BD} \geq AC.$$

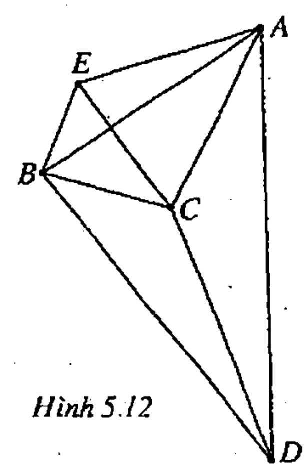
Nếu chọn D "đủ xa" thì từ đây ta sẽ suy ra $AB + BC \geq AC$.

Điều này nghe cũng ngạc nhiên, tuy nhiên lợi ích đem lại của sự đặc biệt hoá này không nhiều, vì chẳng lẽ lại dùng bất đẳng thức Ptolemy cao siêu để chứng minh bất đẳng thức tam giác vốn được coi như tiên đề.

Tuy nhiên, một lôgic rất tự nhiên dẫn chúng ta đến một ý tưởng hữu ích hơn : Như vậy bất đẳng thức Ptolemy có liên quan đến bất đẳng thức tam giác. Vậy là bất đẳng thức Ptolemy có thể được chứng minh nhờ vào bất đẳng thức tam giác ? Quả là như vậy. Phép chứng minh dưới đây sẽ minh chứng cho luận điểm này :

Dựng điểm E sao cho tam giác BCD đồng dạng với tam giác BEA. Khi đó, theo tính chất của tam giác đồng dạng, ta có

$$\frac{BA}{EA} = \frac{BD}{CD}$$



Hình 5.12

Suy ra $\quad BA.CD = EA.BD \qquad (2)$

Mặt khác, hai tam giác EBC và ABD cũng đồng dạng,

do có $\quad \dfrac{BA}{BD} = \dfrac{BE}{BC}$ và $\widehat{EBC} = \widehat{ABD}$.

Từ đó $\quad \dfrac{EC}{BC} = \dfrac{AD}{BD}$.

Suy ra $\quad AD.BC = EC.BD. \qquad (3)$

Cộng (2) và (3) ta suy ra

$$AB.CD + AD.BC = BD.(EA + EC).$$

Áp dụng bất đẳng thức tam giác, ta suy ra $AB.CD + AD.BC \geq AC.BD$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi A, E, C thẳng hàng, tức là khi A và D cùng nhìn BC dưới một góc bằng nhau, và khi đó tứ giác $ABCD$ nội tiếp. □

Bất đẳng thức Ptolemy có nhiều ứng dụng trong các bài toán bất đẳng thức hình học, đặc biệt là trong các bài toán so sánh độ dài các đoạn thẳng. Trước hết ta xem xét ứng dụng của bất đẳng thức Ptolemy trong việc chứng minh một số kết quả kinh điển của hình học phẳng.

Điểm Torricelli. Xét bài toán "*Cho tam giác ABC bất kỳ. Hãy tìm điểm M trong mặt phẳng tam giác sao cho MA + MB + MC đạt giá trị nhỏ nhất*".

Điểm M tìm được được gọi là điểm Torricelli của tam giác ABC. Có thể giải ngắn gọn bài toán này bằng cách sử dụng bất đẳng thức Ptolemy như sau :

Trên cạnh BC, dựng ra phía ngoài tam giác đều BCA'. Áp dụng bất đẳng thức Ptolemy cho tứ giác $MBA'C$ ta có

$$BM.CA' + CM.BA' \geq BC.MA'.$$

Từ đó, do $CA' = BA' = BC$ nên ta được

$$BM + CM \geq MA'.$$

Như thế

$$AM + BM + CM \geq MA + MA' \geq AA'.$$

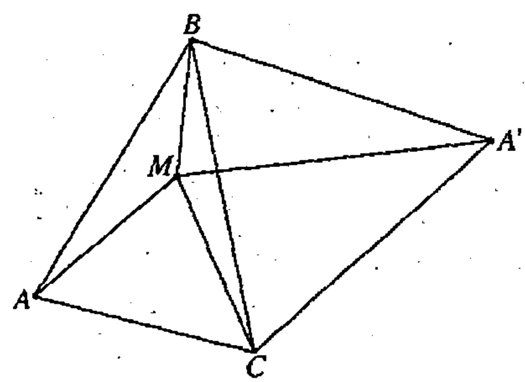
Tức là

$$AM + BM + CM \geq AA' \text{ (là hằng số).}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

i) Tứ giác $BMCA'$ nội tiếp ;

ii) M nằm giữa A và A'.



Hình 5.13

Dễ thấy ta có thể tìm được điểm M thoả mãn cả hai điều kiện này khi và chỉ khi tất cả các góc của tam giác ABC đều không lớn hơn 120°.

Nếu chẳng hạn góc $A > 120^\circ$ thì điểm M cần tìm sẽ chính là điểm A (bạn đọc tự chứng minh!). □

Rõ ràng phương pháp nói trên có thể áp dụng cho bài toán tổng quát hơn : "*Cho tam giác ABC và các số thực dương m, n, p. Hãy tìm điểm M trong mặt phẳng tam giác sao cho m.MA + n.MB + p.MC đạt giá trị nhỏ nhất*".

Tất nhiên, chúng ta cũng sẽ gặp phải tình huống tương tự như tình huống tam giác ABC có một góc lớn hơn 120° như ở trên.

Bất đẳng thức Erdos-Mordell. Cho tam giác ABC. M là một điểm bất kỳ nằm trong tam giác. Đặt $x_1 = MA$, $x_2 = MB$, $x_3 = MC$; p_1, p_2, p_3 lần lượt là khoảng cách từ M đến BC, CA, AB. Khi đó ta có bất đẳng thức

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 2(p_1 + p_2 + p_3).$$

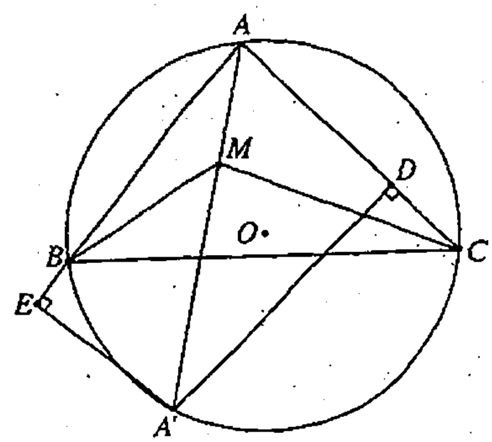
Có rất nhiều cách chứng minh kết quả kinh điển này. Sau đây chúng ta trình bày phương pháp chứng minh sử dụng định lí Ptolemy.

Nối dài AM cắt đường tròn nội tiếp tam giác tại A'. Áp dụng định lí Ptolemy cho tứ giác nội tiếp $ABA'C$, ta có

$$AB.CA' + AC.BA' = BC.AA'.$$

Hạ $A'D$ vuông góc với AC và $A'E$ vuông góc với AB thì rõ ràng

$$A'B \geq A'E, A'C \geq A'D.$$



Hình 5.14

Do đó $a.AA' \geq c.A'D + b.A'E$

hay $1 \geq \dfrac{A'D}{AA'}.\dfrac{c}{a} + \dfrac{A'E}{AA'}.\dfrac{b}{a}$.

Nhưng $\dfrac{A'D}{AA'} = \dfrac{p_2}{x_1}$ và $\dfrac{A'E}{AA'} = \dfrac{p_3}{x_1}$ nên từ đó :

$$x_1 \geq p_2.\frac{c}{a} + p_3.\frac{b}{a}.$$

Tương tự ta có các đánh giá cho x_2, x_3, từ đó

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq p_1\left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right) + p_2\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) + p_3\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) \geq 2(p_1 + p_2 + p_3).$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều và M trùng với tâm O của tam giác. □

Phép chứng minh bất đẳng thức Ptolemy cũng như cách từ bất đẳng thức Ptolemy suy ra bất đẳng thức tam giác cho thấy bất đẳng thức này có thể áp dụng để đánh giá độ dài các đoạn thẳng. Việc dựng tam giác đều BCA' ra phía ngoài trong lời giải bài toán Torricelli chính là một cách làm mẫu mực để áp dụng được bất đẳng thức Ptolemy.

Ý tưởng chung là : Để đánh giá tổng $p.MA + q.MB$, ta có thể dựng điểm N sao cho $p.NA = q.NB$. Sau đó áp dụng bất đẳng thức Ptolemy thì được

$$NA.MB + NB.MA \geq AB.MN.$$

Từ đó $\quad pNA.MB + p.NB.MA \geq AB.MN$

$$\Leftrightarrow qNB.MB + p.NB.MA \geq AB.MN$$

$$\Leftrightarrow p.MA + q.MB \geq AB.\frac{MN}{NB}.$$

Chú ý rằng điểm N là cố định, như thế $p.MA + q.MB$ đã được đánh giá thông qua MN.

Ý tưởng này là chìa khoá để giải hàng loạt các bài toán cực trị hình học. Ta xem xét một số ví dụ :

Ví dụ 1. Cho điểm M nằm trong góc nhọn xOy. Hai điểm A, B lần lượt thay đổi trên Ox, Oy sao cho $2OA = 3OB$. Tìm vị trí của A, B sao cho $2MA + 3MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải. Áp dụng bất đẳng thức Ptolemy cho tứ giác $OAMB$, ta có

$$OA.MB + OB.MA \geq OM.AB.$$

Từ đó $\quad 2OA.MB + 2.OB.MA \geq 2.OM.AB$

$$\Leftrightarrow 3OB.MB + 2.OB.MA \geq 2.OM.AB$$

$$\Leftrightarrow 2MA + 3MB \geq 2.OM.\left(\frac{AB}{OB}\right).$$

Vì tam giác OAB luôn đồng dạng với chính nó nên $\frac{AB}{OB}$ là một đại lượng không đổi. Từ đó suy ra $2MA + 3MB$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $2.OM.\left(\frac{AB}{OB}\right)$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tứ giác $OAMB$ nội tiếp. □

Ví dụ 2. Một lục giác có độ dài 6 cạnh đều bằng 1. Chứng minh rằng lục giác đó có ít nhất một đường chéo chính nhỏ hơn hay bằng 2. (Đường chéo chính là đường chéo chia lục giác thành hai tứ giác).

Giải. Không ngờ gợi ý cho lời giải bài toán này lại là một đẳng thức lớp một : "..."1 với 1 là 2"...". Và để thực hiện phép cộng hai cạnh thành ra đường chéo đó, ta sẽ áp dụng bất đẳng thức Ptolemy.

Xét lục giác $ABCDEF$. Xét tam giác ACE. Không mất tính tổng quát, có thể giả sử CE là cạnh lớn nhất trong tam giác. áp dụng bất đẳng thức Ptolemy cho tứ giác $ACDE$, ta có

$$AC.DE + AE.CD \geq AD.CE$$

Từ đó, do $CD = DE = 1$ và $CE \geq AC$, $CE \geq AE$ nên ta suy ra $AD \leq 2$. □

BÀI TẬP

11. (*IMO SL 1997*) Cho lục giác lồi $ABCDEF$ có $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$. Chứng minh rằng $\dfrac{BC}{BE} + \dfrac{DE}{DA} + \dfrac{FA}{FC} \geq \dfrac{3}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi nào ?

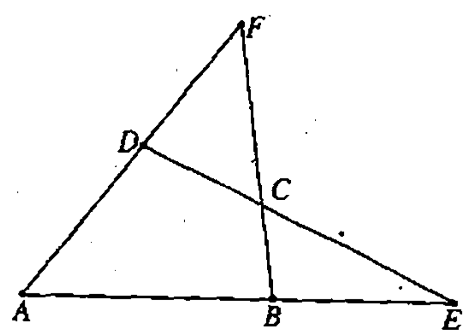
12. *(IMO 2001)* Cho tam giác ABC với trọng tâm G và độ dài các cạnh $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Tìm điểm P trên mặt phẳng tam giác sao cho đại lượng $AP.AG + BP.BG + CP.CG$ đạt giá trị nhỏ nhất và tìm giá trị nhỏ nhất đó theo a, b, c.

13. Cho đường tròn (O) và dây cung BC khác đường kính. Tìm điểm A thuộc cung lớn BC của đường tròn để $AB + 2AC$ đạt giá trị lớn nhất.

14. Lục giác lồi $ABCDEF$ có ABF là tam giác vuông cân tại A, $BCEF$ là hình bình hành, $AD = 3$, $BC = 1$, $CD + DE = 2\sqrt{2}$. Tính diện tích lục giác.

§5. TỨ GIÁC TOÀN PHẦN

Hình gồm tứ giác $ABCD$ có AB cắt CD tại E, AD cắt BC tại F được gọi là *tứ giác toàn phần* (h. 5.15).



Hình 5.15

Tứ giác toàn phần có một số tính chất sau :

Tính chất 1. Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác BCE, CDF, ADE, ABF cùng đi qua một điểm. Điểm này gọi là điểm Miquel của tứ giác toàn phần.

Chứng minh (h. 5.16). Gọi M là giao điểm của hai đường tròn (ABF) và (CDF).

Ta có : $\overline{(MC, MB)} = \overline{(MC, MF)} + \overline{(MF, MB)}$

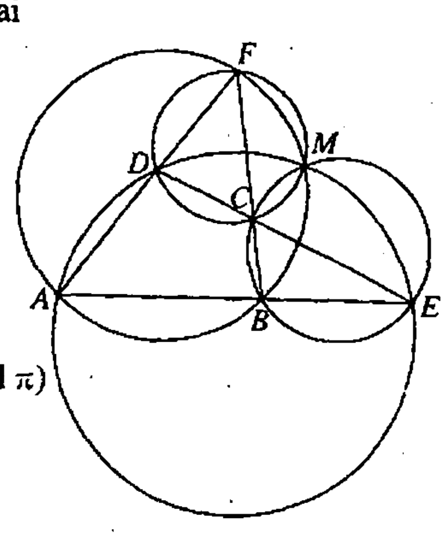
$$= \overline{(DC, DF)} + \overline{(AF, AB)}$$

$$= \overline{(DE, AD)} + \overline{(AD, AE)}$$

$$= \overline{(DE, AE)} = \overline{(EC, EB)} \pmod{\pi}$$

$\Rightarrow M \in (BCE)$.

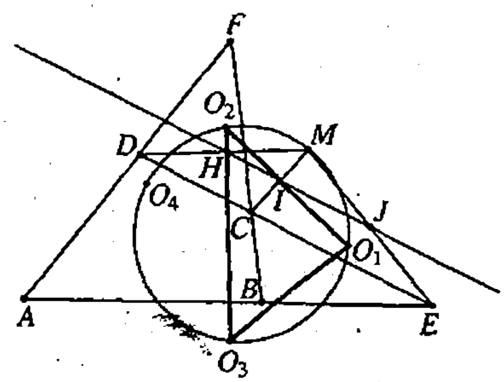
Chứng minh tương tự ta có $M \in (ADE)$. □



Hình 5.16

Tính chất 2. Gọi O_1, O_2, O_3, O_4 lần lượt là tâm của các đường tròn (BCE), (CDF), (ADE), (ABF). Khi đó O_1, O_2, O_3, O_4 , điểm Miquel M cùng thuộc một đường tròn.

Chứng minh (h.5.17). Ta có O_1O_2, O_2O_3, O_3O_1 lần lượt là các trung trực của MC, MD, ME. Vì thế các hình chiếu của M lên các đường thẳng này là trung điểm của MC, MD, ME nên chúng thẳng hàng. Từ đó suy ra $M \in (O_1O_2O_3)$ (định lí đảo của định lí về đường thẳng Simson) .



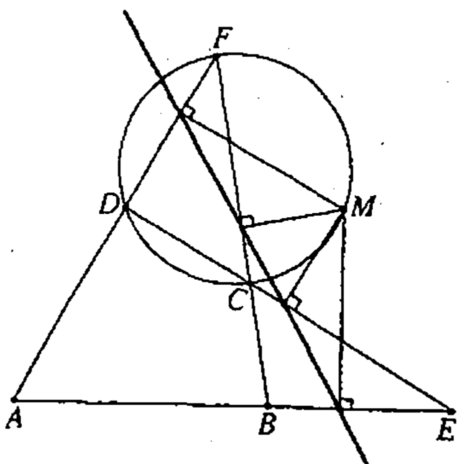
Chứng minh tương tự, ta cũng có $M \in (O_1O_2O_4)$ □

Hình 5.17

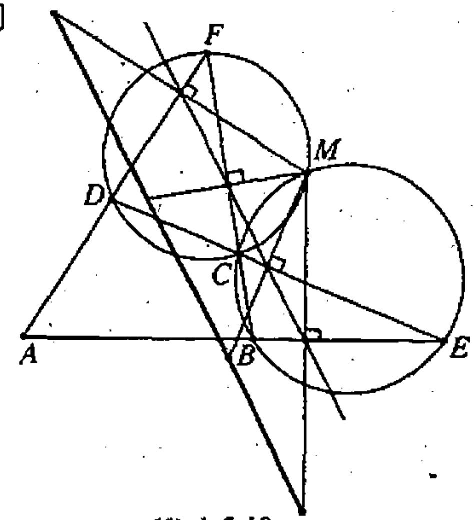
Tính chất 3. Chân các đường vuông góc hạ từ điểm Miquel M lên các đường thẳng AB, BC, CD, DA cùng nằm trên một đường thẳng (đường thẳng Simson).

Chứng minh (h. 5.18). Do $M \in (CDF)$ nên các hình chiếu của nó lên CD, DF, FC thẳng hàng (đường thẳng Simson)

Chứng minh tương tự cho các điểm còn lại. □



Hình 5.18



Hình 5.19

Tính chất 4. Các trực tâm của các tam giác BCE, CDF, ADE, ABF cùng nằm trên một đường thẳng (***Đường thẳng Steiner của tứ giác***).

Chứng minh (h. 5.19). Gọi M là điểm Miquel của tứ giác toàn phần. Phép vị tự tâm M, tỉ số 2 biến đường thẳng Simson của mỗi tam giác BCE, CDF, ADE, ABF thành đường thẳng Steiner của tam giác đó, đi qua trực tâm tam giác (xem §2). Từ tính chất 3 suy ra các đường thẳng Steiner của bốn tam giác trên trùng nhau và đường thẳng đó đi qua trực tâm của bốn tam giác. □

Nhận xét. Hai đường thẳng Simson và Steiner song song với nhau.

Tính chất 5. Các trung điểm của các đoạn AC, BD, EF cùng nằm trên một đường thẳng (***Đường thẳng Gauss***).

Chứng minh (h 5.20). Gọi H, I, J, K, L, G lần lượt là trung điểm của AC, BD, EF, BE, EC, CB.

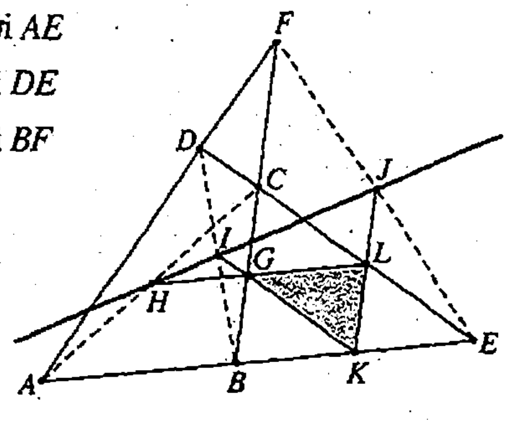
Ta có :

H, G, L nằm trên đường thẳng song song với AE

I, G, K nằm trên đường thẳng song song với DE

J, L, K nằm trên đường thẳng song song với BF

$$\Rightarrow \frac{HG}{HL} \cdot \frac{JL}{JK} \cdot \frac{IK}{IG} = \frac{AB}{AE} \cdot \frac{FC}{FB} \cdot \frac{DE}{DC}.$$



Hình 5.20

Áp dụng định lí Menelaus đối với tam giác BCE và đường thẳng ADF, ta có

$$\frac{AB}{AE} \cdot \frac{FC}{FB} \cdot \frac{DE}{DC} = 1$$

$\Rightarrow \dfrac{HG}{HL} \cdot \dfrac{JL}{JK} \cdot \dfrac{IK}{IG} = 1 \Rightarrow H, I, J$ thẳng hàng (định lí Menelaus đảo đối với tam giác GKL). □

Tính chất 6. Đường thẳng Steiner và đường thẳng Gauss vuông góc với nhau.

Chứng minh (h. 5.21). Gọi H, K lần lượt là trực tâm của các tam giác CDF, CBE.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn BD, EF.

Khi đó HK, MN lần lượt là các đường thẳng Steiner và Gauss của tứ giác toàn phần.

Ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EN}$

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FN}$

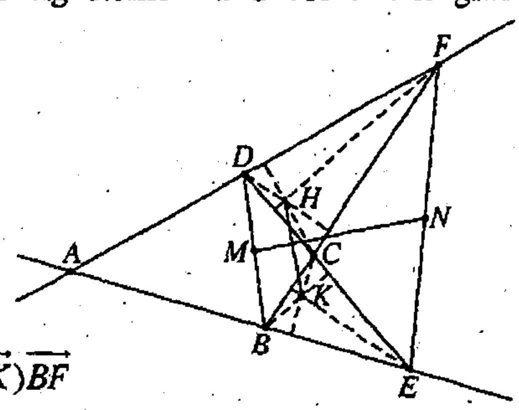
$\Rightarrow \quad 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BF}.$

$\overrightarrow{HK}.2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{HK}.\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{HK}.\overrightarrow{BF}$

$= (\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BK})\overrightarrow{DE} + (\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EK})\overrightarrow{BF}$

$= \overrightarrow{HF}.\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{FB}.\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BK}.\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{HD}.\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DE}.\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{EK}.\overrightarrow{BF}$

$= \overrightarrow{FB}.\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DE}.\overrightarrow{BF} = 0.$



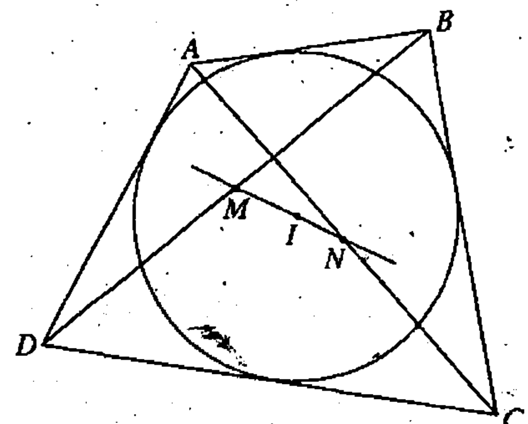
Hình 5.21

Vậy $HK \perp MN$. □

§6. ĐƯỜNG THẲNG NEWTON

Bài toán 1. Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn tâm I. Gọi N và M là trung điểm của các đường chéo AC và BD. Khi đó M, I, N cùng nằm trên một đường thẳng.

Đường thẳng này được gọi là ***đường thẳng Newton*** của tứ giác ngoại tiếp $ABCD$.



Hình 5.22

Chứng minh (h. 5.22). Nối dài DA và CB cắt nhau tại P. Trên (DA) lấy điểm D' sao cho $PD' = AD$ và trên (BC) lấy điểm C' sao cho $PC' = BC$.

Để ý rằng do M và N là trung điểm của BD và AC nên ta có

$$\mathrm{dt}(MAD) + \mathrm{dt}(MBC) = \mathrm{dt}(MAB) + \mathrm{dt}(MCD) = \frac{1}{2}\mathrm{dt}(ABCD)$$

$$\mathrm{dt}(NAD) + \mathrm{dt}(NBC) = \mathrm{dt}(NAB) + \mathrm{dt}(NCD) = \frac{1}{2}\mathrm{dt}(ABCD).$$

Theo cách dựng điểm D' và C' và hai đẳng thức trên, ta có

$$\mathrm{dt}(MPD') + \mathrm{dt}(MPC') = \mathrm{dt}(NPD') + \mathrm{dt}(NPC')$$

$$\Rightarrow \mathrm{dt}(MD'PC') = \mathrm{dt}(ND'PC')$$

$$\Rightarrow \mathrm{dt}(MD'C') = \mathrm{dt}(ND'C')$$

$$\Rightarrow MN \parallel D'C'. \qquad (1)$$

Mặt khác do tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn nên ta có $AD + BC = AB + CD$. Từ đó

$$\mathrm{dt}(IAD) + \mathrm{dt}(IBC) = \mathrm{dt}(IAB) + \mathrm{dt}(ICD) = \frac{1}{2}\mathrm{dt}(ABCD)$$

Lí luận tương tự như trên ta cũng có

$$IM \parallel D'C'. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra M, I, N thẳng hàng. □

Đường thẳng Newton có một trường hợp đặc biệt khá đẹp là bài toán sau :

Bài toán 2. Cho tam giác ABC. Đường tròn nội tiếp tâm I của tam giác tiếp xúc với cạnh BC tại D. Gọi M là trung điểm của BC và N là trung điểm của AD. Chứng minh rằng M, I, N thẳng hàng.

Ở đây tứ giác $ABCD$ biến thành tứ giác suy biến $ABDC$ với góc $BDC = 180^o$. Tất nhiên là các cách giải nêu trên vẫn tỏ ra hiệu quả. Ngoài ra, do tính chất đặc biệt của nó, bài toán còn có nhiều cách giải khác. Xin được dành cho bạn đọc phần tìm kiếm thêm các lời giải này.

BÀI TẬP

15. Cho đường tròn (O) đường kính AB. M là điểm tùy ý nằm trong (O). Đường phân giác từ M của tam giác AMB cắt (O) tại N. Phân giác ngoài góc AMB cắt NA, NB lần lượt tại P, Q. AM cắt đường tròn đường kính NQ tại điểm thứ hai R, BM cắt đường tròn đường kính NP tại điểm thứ hai S. Chứng minh đường trung tuyến kẻ từ N của tam giác NSR đi qua một điểm cố định.

§7. ĐỊNH LÍ CEVA, ĐỊNH LÍ MENELAUS VÀ ĐỊNH LÍ DESARGUES

Bài toán đồng quy và thẳng hàng là những bài toán phổ biến trong hình học và có nhiều cách để chứng minh. Trong bài này, chúng tôi xin nêu ra các định lí cổ điển và được xem như là các tiêu chuẩn để chứng minh 3 đường thẳng đồng quy hay 3 điểm thẳng hàng.

1. Định lí Ceva

Trong chương trình lớp 7, ta đã biết rằng trong một tam giác thì các đường trung tuyến, các đường phân giác, các đường cao đồng quy. Thực ra đó chỉ là trường hợp đặc biệt của những bộ ba đường thẳng đồng quy được xác định trong định lí sau đây.

Định lí Ceva. Cho tam giác ABC và các điểm A_1, B_1, C_1 lần lượt thuộc các cạnh BC, CA, AB. Khi đó AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy khi và chỉ khi :

$$\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{C_1A}{C_1B} = 1. \qquad (1)$$

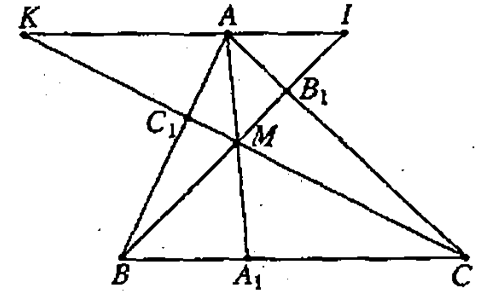
Chứng minh (h. 5.23). ($\Rightarrow$) Cho AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy, ta chứng minh (1)

Giả sử BB_1, CC_1 cắt đường thẳng qua A song song với BC lần lượt là I và K. Áp dụng định lí Thales ta có :

$$\frac{B_1C}{B_1A} = \frac{BC}{AI};\frac{C_1A}{C_1B} = \frac{AK}{BC}. \qquad (2)$$

Hơn nữa ta có :

$$\frac{AI}{A_1B} = \frac{AM}{MA_1} = \frac{AK}{A_1C} \Rightarrow \frac{A_1B}{A_1C} = \frac{AI}{AK} \qquad (3)$$



Từ (2) và (3) ta có $\frac{A_1B}{A_1C}.\frac{B_1C}{B_1A}.\frac{C_1A}{C_1B} = \frac{AI}{AK}.\frac{BC}{AI}.\frac{AK}{BC} = 1.$

Hình 5.23

($\Leftarrow$) Giả sử ta có hệ thức (1), ta cần chứng minh AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy.

Gọi P là giao điểm của AA_1 và BB_1, C' là giao điểm của CP và AB. Khi đó áp dụng phần trên ta có

$$\frac{A_1B}{A_1C}.\frac{B_1C}{B_1A}.\frac{C'A}{C'B} = 1. \qquad (4)$$

Từ (1) và (4) ta có $\frac{C_1A}{C_1B} = \frac{C'A}{C'B} \Rightarrow C_1 \equiv C'$ (Do C_1 và C' cùng thuộc cạnh AB).

Vậy AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại P. □

Bộ ba đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy như trên được gọi là *bộ ba đường thẳng Ceva* và các đoạn thẳng AA_1, BB_1 và CC_1 gọi là *bộ ba đoạn thẳng Ceva.*

Định lí Ceva là định lí cơ bản nhất dùng để chứng minh các đường thẳng đồng quy, ta có thể xét một vài ví dụ sau đây.

Ví dụ 1. Chứng minh rằng trong một tam giác :

a) Ba đường trung tuyến đồng quy ;

b) Ba đường phân giác đồng quy ;

c) Ba đường cao đồng quy ;

d) Ba đường trung trực đồng quy.

Chứng minh. Xét tam giác ABC.

a) Ba đường trung tuyến AM, BN và CP đồng quy.

Thật vậy ta có $\frac{MB}{MC}.\frac{NC}{NA}.\frac{PA}{PB} = 1.1.1 = 1$. Theo định lí Ceva, AM, BN và CP đồng quy tại G (G là trọng tâm của tam giác).

b) Ba đường phân giác AD, BE và CF đồng quy.

Áp dụng tính chất đường phân giác ta có $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC};\frac{EC}{EA} = \frac{BC}{BA}$ và $\frac{FA}{FB} = \frac{CA}{CB}$.

Do đó $\dfrac{DB}{DC}\cdot\dfrac{EC}{EA}\cdot\dfrac{FA}{FB} = \dfrac{AB}{AC}\cdot\dfrac{BC}{BA}\cdot\dfrac{CA}{CB} = 1$, theo định lí Ceva ta có AD, BE và CF đồng quy tại I (I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC).

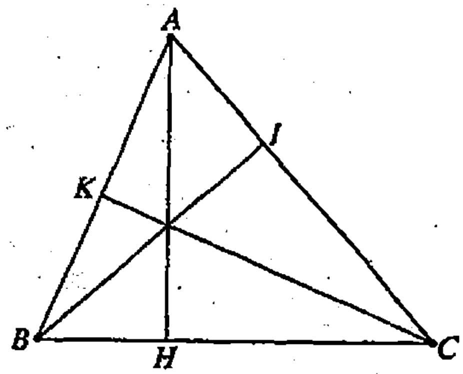
c) Ba đường cao AH, BI và CK đồng quy.

Trường hợp ΔABC nhọn (h. 5.24)

Ta có $\Delta AKC \backsim \Delta AIB \Rightarrow \dfrac{AK}{AI} = \dfrac{AC}{AB}$

$\Delta ABH \backsim \Delta CBK \Rightarrow \dfrac{BH}{BK} = \dfrac{AB}{BC}$

$\Delta BCI \backsim \Delta ACH \Rightarrow \dfrac{CI}{CH} = \dfrac{BC}{AC}$.



Hình 5.24

Do đó $\dfrac{HB}{HC}\cdot\dfrac{IC}{IA}\cdot\dfrac{KA}{KB} = 1$, theo định lí Ceva thì 3 đường thẳng AH, BI và CK đồng quy tại một điểm được gọi là trực tâm của tam giác.

Trường hợp ΔABC tù tại A.

Gọi O là giao điểm của BI và CK. Khi đó A là trực tâm của tam giác OBC nên $OA \perp BC$, suy ra $O \in AH$.

d) Ba đường trung trực d_a, d_b, d_c đồng quy.

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, AC và AB. Khi đó d_a, d_b, d_c là ba đường cao của tam giác MNP nên đồng quy. □

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC và đường tròn tâm I nội tiếp tam giác tiếp xúc với các cạnh BC, AC và AB lần lượt tại D, E, F. Khi đó các đường thẳng AD, BE và CF đồng quy tại một điểm.

Chứng minh. Ta có $BD = BF$, $CD = CE$ và $AE = AF$. Suy ra $\dfrac{DB}{DC}\cdot\dfrac{EC}{EA}\cdot\dfrac{FA}{FB} = 1$, theo định lí Ceva thì các đường thẳng AD, BE và CF đồng quy tại một điểm J (J được gọi là ***điểm Gergonne*** của tam giác ABC). □

2. Định lí Menelaus

Phần trên chúng ta đã thấy một tiêu chuẩn để 3 đường thẳng đồng quy, trong phần này ta sẽ xét một tiêu chuẩn để 3 điểm thẳng hàng thông qua định lí sau :

Định lí Menelaus. Cho tam giác ABC và ba điểm A', B' và C' trên các đường thẳng BC, AC và AB sao cho : hoặc cả ba điểm A', B', C' đều nằm trên phần kéo dài của ba cạnh, hoặc một trong ba điểm trên nằm trên phần kéo dài của một cạnh còn hai điểm còn lại nằm trên hai cạnh của tam giác (*). Điều kiện cần và đủ để A', B', C' thẳng hàng là

$$\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B} = 1. \quad (5)$$

Chứng minh (h.5.25)

($\Rightarrow$) Cho A', B', C' thẳng hàng, ta chứng minh (5)

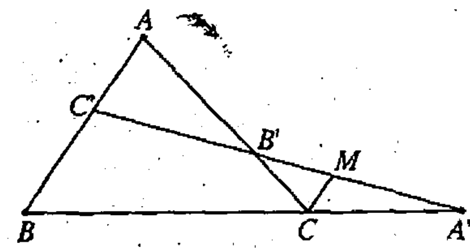
Từ C vẽ đường thẳng song song với AB cắt $A'C'$ tại M.

Áp dụng định lí Thales ta có :

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{A'C'}{A'M};\ \frac{B'C}{B'A} = \frac{B'M}{B'C'}.$$

Mặt khác ta có

$$\frac{CM}{C'A} = \frac{B'M}{B'C'} \text{ và } \frac{CM}{C'B} = \frac{A'M}{A'C'},$$



Hình 5.25

suy ra $\frac{C'A}{C'B} = \frac{(A'M.B'C')}{(A'C'.B'M)}$.

Do đó ta có $\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B} = \frac{A'C'}{A'M}.\frac{B'M}{B'C'}.\left(\frac{A'M.B'C'}{A'C'.B'M}\right) = 1.$

($\Leftarrow$) Cho các điểm A', B', C' thoả mãn (*) và (5), ta chứng minh A', B', C' thẳng hàng.

Giả sử B', C' nằm trên 2 cạnh của tam giác và A' thuộc phần kéo dài của cạnh còn lại. Gọi B'' là giao điểm của $A'C'$ và AC.

Khi đó, theo chứng minh trên ta có $\frac{A'B}{A'C}.\frac{B''C}{B''A}.\frac{C'A}{C'B} = 1.$ (6)

Từ (6) và (5) ta có $\frac{B''C}{B''A} = \frac{B'C}{B'A} \Rightarrow B' \equiv B''$ (vì đều thuộc cạnh AC).

Vậy A', B', C' thẳng hàng.

Trong trường hợp 3 điểm A', B' và C' cùng thuộc phần kéo dài của các cạnh thì chứng minh tương tự. □

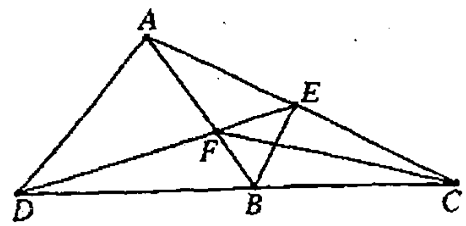
Nhận xét. Hệ thức (1) và (5) là giống nhau, tuy nhiên vị trí của các điểm trên các cạnh là khác nhau.

Ta xét một vài ví dụ ứng dụng định lí Menelaus để chứng minh ba điểm thẳng hàng.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng trong một tam giác, chân đường phân giác trong của hai góc và chân đường phân giác ngoài của góc thứ 3 là thẳng hàng.

Chứng minh (h. 5.26). Cho tam giác ABC, gọi BE, CF là hai đường phân giác trong và AD là phân giác ngoài. ($E \in AC$, $F \in AB$ và $D \in BC$).

Trước hết ta thấy 3 điểm E, F và D thỏa điều kiện (*) (E, F thuộc cạnh AC và AB còn D nằm ngoài đoạn BC).



Hình 5.26

Mặt khác, theo tính chất đường phân giác (trong hoặc ngoài), ta có

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}, \qquad \frac{EC}{EA} = \frac{BC}{BA}, \qquad \frac{FA}{FB} = \frac{CA}{CB}.$$

Suy ra $\dfrac{DB}{DC}\cdot\dfrac{EC}{EA}\cdot\dfrac{FA}{FB} = \dfrac{AB}{AC}\cdot\dfrac{BC}{BA}\cdot\dfrac{CA}{CB} = 1.$ □

Ví dụ 4. Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I), gọi M, N, P, Q lần lượt là các tiếp điểm của (I) với AB, BC, CD và AD. Chứng minh rằng NP, MQ và BD đồng quy.

Chứng minh (h. 5.27). Theo giả thiết ta có : $AQ = AM$, $BM = BN$, $CN = CP$, $DP = DQ$.

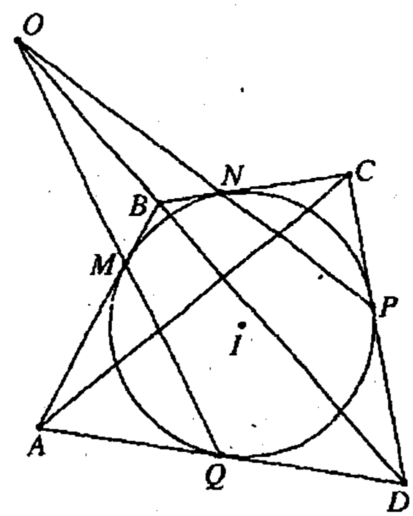
Gọi O là giao điểm của NP và BD. Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác BCD ta có

$$\frac{OB}{OD}\cdot\frac{PD}{PC}\cdot\frac{NC}{NB} = 1 \Rightarrow \frac{OB}{OD} = \frac{NB}{PD}.$$

Khi đó ta có : $\dfrac{OB}{OD}\cdot\dfrac{QD}{QA}\cdot\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{NB}{PD}\cdot\dfrac{QD}{MB} = 1,$

áp dụng định lí Menelaus cho tam giác ABD thì O, M, Q thẳng hàng.

Vậy NP, BD và MQ đồng quy. □



Hình 5.27

3. Định lí Desargues

Định lí Menelaus cho ta một tiêu chuẩn để chứng minh ba điểm thẳng hàng, và sau đây chúng tôi xin giới thiệu một định lí cũng được xem như là tiêu chuẩn để chứng minh ba điểm thẳng hàng.

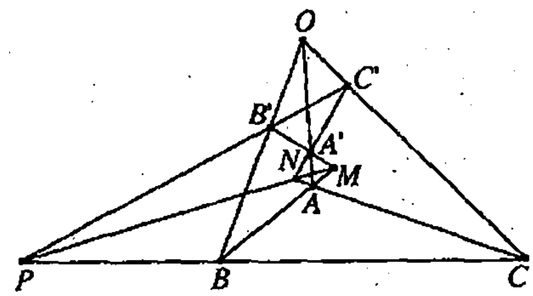
Định lí Desargues. Cho hai tam giác ABC và $A'B'C'$. Gọi M là giao điểm của AB và $A'B'$, N là giao điểm của AC và $A'C'$, P là giao điểm của BC và $B'C'$. Khi đó M, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi AA', BB' và CC' đồng quy.

Chứng minh (h. 5.28).

(⇐) Cho AA', BB', CC' đồng quy tại O. Ta chứng minh M, N, P thẳng hàng.

Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác OAC với ba điểm N, A' và C', ta có :

$$\frac{NA}{NC}\cdot\frac{C'C}{C'O}\cdot\frac{A'O}{A'A}=1. \quad (1)$$



Hình 5.28

Tương tự ta có : $\frac{PC}{PB}\cdot\frac{B'B}{B'O}\cdot\frac{C'O}{C'C}=1.$ (2)

và $$\frac{MB}{MA}\cdot\frac{A'A}{A'O}\cdot\frac{B'O}{B'B}=1. \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta có $\frac{NA}{NC}\cdot\frac{PC}{PB}\cdot\frac{MB}{MA}=1$, do đó, áp dụng định lí Menelaus cho tam giác ABC, ta có M, N, P thẳng hàng.

(⇒) Cho M, N, P thẳng hàng, ta chứng minh AA', BB', CC' đồng quy.

Xét hai tam giác MBB' và NCC' có MN, BC, $B'C'$ đồng quy tại P.

Ta có O là giao của BB' và CC'. Hơn nữa A là giao của MB và NC, A' là giao của MB' và NC'. Do đó theo chứng minh phần trên, ta có O, A và A' thẳng hàng, hay AA', BB' và CC' đồng quy. □

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC và AD, BE, CF là bộ ba đường thẳng Ceva. Gọi P là giao của DE và AB, N là giao của DF và AC, M là giao điểm của EF và BC. Chứng minh rằng M, N, P thẳng hàng.

Chứng minh. Xét hai tam giác ABC và DEF có AD, BE, CF đồng quy. Áp dụng định lí Desargues ta có ngay điều cần chứng minh. □

BÀI TẬP

16. Chứng minh rằng trong một tam giác, ba đường thẳng nối trung điểm của mỗi cạnh với trung điểm của đoạn thẳng Ceva bất kì xuất phát từ đỉnh đối diện của cạnh đó đồng quy.

17. Cho tam giác ABC và đường tròn tâm I nội tiếp tam giác tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi D', E', F' lần lượt là điểm đối xứng của D, E, F qua I. Chứng minh rằng AD', BE' và CF' đồng quy.

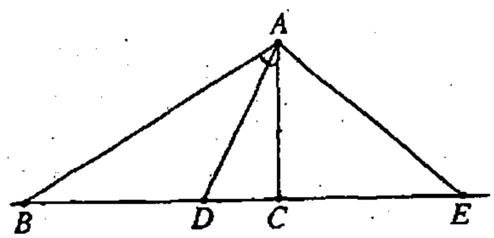
18. Trên các cạnh AB, AC của tam giác ABC vuông tại A, người ta dựng các hình vuông $ABEF$ và $ACGI$ ở bên ngoài tam giác. GB cắt đường cao AH tại O. Chứng minh rằng ba điểm C, E, O thẳng hàng.

19. Cho 3 đường tròn có bán kính khác nhau trong đó không đường tròn nào chứa đường tròn khác. Từng cặp đường tròn có các đường tiếp tuyến chung ngoài cắt nhau tại một điểm. Chứng minh rằng 3 điểm đó thẳng hàng.

§8. ĐƯỜNG TRÒN APOLLONIUS

Chúng ta nhắc lại tính chất của đường phân giác trong tam giác : chân các đường phân giác xuất phát từ một đỉnh của tam giác chia cạnh đối diện thành hai đoạn tỉ lệ với hai cạnh kề với hai đoạn ấy. Cụ thể ở hình vẽ 5.29 :

$$\frac{DB}{DC} = \frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}.$$

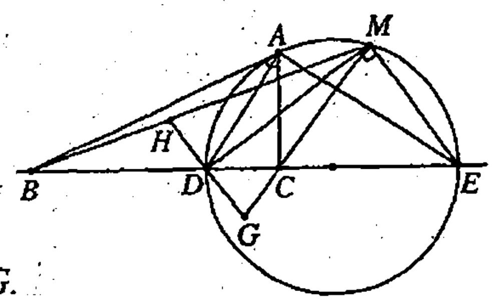


Hình 5.29

Vấn đề đặt ra là liệu có còn những điểm nào khác D và E cũng có tính chất như vậy, chẳng hạn điểm M nào đó trong mặt phẳng có tính chất $\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}$.

Câu trả lời là có. Ta vẽ đường tròn có đường kính là DE và lấy một điểm M bất kì trên đường tròn này (h. 5.30).

Từ D kẻ đường thẳng song song với EM cắt MB, MC lần lượt tại H, G.



Hình 5.30

Ta có : $\frac{DH}{EM} = \frac{BD}{BE}; \frac{DG}{EM} = \frac{CD}{CE}$

mà $\frac{BD}{BE} = \frac{CD}{CE}$ nên $\frac{DH}{EM} = \frac{DG}{EM} \Rightarrow DH = DG.$

Mặt khác $MD \perp HG$ nên MHG là tam giác cân tại $M \Rightarrow MD$ là phân giác của góc $\widehat{BMC} \Rightarrow \frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}\left(= \frac{DB}{DC}\right)$. □

Bây giờ ta sẽ mở rộng bài toán trên bằng cách thay tỉ số $\frac{AB}{AC}$ bởi một số dương k bất kì.

Bài toán. Cho hai điểm A, B cố định và số thực dương k. Tìm tập hợp tất cả những điểm M sao cho $\dfrac{MA}{MB} = k$.

Giải. Ta xét hai trường hợp sau

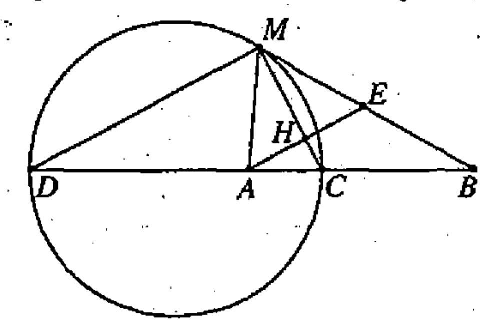
Trường hợp 1 : $k = 1$.

Khi đó $MA = MB$. Quỹ tích những điểm M là đường trung trực của AB.

Trường hợp 2 : $k \neq 1$. Ta tìm lời giải trong trường hợp $k < 1$.

Gọi C, D là điểm chia trong, chia ngoài đoạn thẳng AB theo tỉ số k, tức là $\dfrac{CA}{CB} = \dfrac{DA}{DB} = k$ (C nằm giữa A, B và D nằm ngoài đoạn AB). Khi đó $M \equiv C$, $M \equiv D$ thỏa mãn bài toán. Nếu M khác C và D. Ta có $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{CA}{CB} = \dfrac{DA}{DB}$ nên MC, MD lần lượt là phân giác trong và phân giác ngoài của $\widehat{AMB}$. Do đó $\widehat{CMD} = 90^\circ$. Suy ra M thuộc đường tròn đường kính CD.

Đảo lại. Lấy M bất kì thuộc đường tròn đường kính CD. Ta cần chứng minh $\dfrac{MA}{MB} = k$.



Hình 5.31

Nếu M trùng C hoặc D thì hiển nhiên.

Nếu M khác C và D, qua A vẽ đường thẳng vuông góc với MC cắt MB tại E và cắt MC tại H.

Ta có $\dfrac{AE}{DM} = \dfrac{BA}{BD} = 1 - k$

và $\dfrac{AH}{DM} = \dfrac{AC}{CD} = \dfrac{1-k}{2}$ (vì $k = \dfrac{DA}{DB} = \dfrac{CA}{BC} = \dfrac{DC - 2AC}{DB - BC} = 1 - 2\dfrac{CA}{CD}$).

Do đó $AE = 2AH$, suy ra H là trung điểm AE, suy ra $ME = MA$.

Từ đó ta có $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{ME}{MB} = \dfrac{DA}{DB} = k$.

(Chú ý : Nếu dùng độ dài đại số thì ta không phải xét $k > 1$ hay $k < 1$).

Vậy với $k \neq 1$, quỹ tích những điểm M thỏa mãn $\dfrac{MA}{MB} = k$ là đường tròn đường kính CD. □

Người ta gọi đường tròn này *là **đường tròn Apollonius tỉ số k (≠1) dựng trên đoạn AB**.*

Trên đây là đường tròn Apollonius của đoạn thẳng, ngoài ra đối với tam giác, ta còn có các đường tròn Apollonius được xác định như sau :

Đối với một tam giác bất kì, ta có đường tròn Apollonius liên kết với mỗi đỉnh được xác định như sau : Đó là đường tròn có đường kính là chân các đường phân giác trong và ngoài xuất phát từ đỉnh đó. Ta có 3 đường tròn Apollonius tương ứng liên kết với 3 đỉnh của tam giác.

Ta có các định lí sau :

***Định lí 1** : Trong một tam giác, mỗi đường tròn Apollonius liết kết với một đỉnh thì trực giao với đường tròn có đường kính là cạnh đối diện với đỉnh đó.*

***Định lí 2** : Ba đường tròn Apollonius của một tam giác cùng đi qua 2 điểm.*

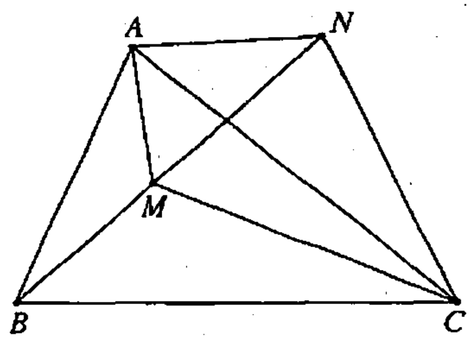
***Định lí 3** : Mỗi đường tròn Apollonius thì trực giao với đường tròn ngoại tiếp tam giác. Đường thẳng đi qua hai giao điểm của các đường tròn Apollonius đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác.*

Sau đây chúng ta xét một vài ví dụ liên quan đến đường tròn Apollonius.

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC không cân. Điểm M thay đổi trong tam giác sao cho $\widehat{AMC} - \widehat{B} = \widehat{AMB} - \widehat{C}$. Chứng minh rằng M thuộc một đường tròn cố định.

Giải (h. 5.32). Dựng ra phía ngoài tam giác ABC một điểm N sao cho $\Delta ANC \backsim \Delta AMB$. Khi đó

$$\frac{AN}{AM} = \frac{AC}{AB} \text{ và } \widehat{BAC} = \widehat{MAN}$$



Hình 5.32

Suy ra $\Delta AMN \backsim \Delta ABC$, do đó $\widehat{AMN} = \widehat{ABC}$, suy ra

$\widehat{AMC} - \widehat{ABC} = \widehat{AMC} - \widehat{AMN} = \widehat{CMN}$. (1)

Mặt khác $\widehat{ANC} = \widehat{AMB}$ và $\widehat{ANM} = \widehat{ACB}$.

Suy ra $\widehat{AMB} - \widehat{ACB} = \widehat{ANC} - \widehat{ANM} = \widehat{MNC}$. (2)

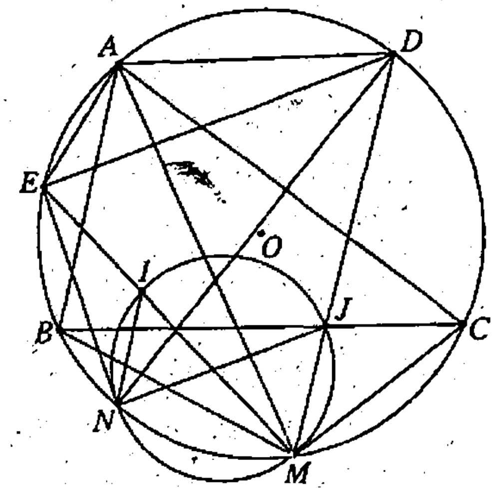
Từ (1) và (2) kết hợp với giả thiết ta có $\widehat{CMN} = \widehat{CNM}$, suy ra $CN = CM$.

Do đó $\frac{MB}{AB} = \frac{CN}{AC} = \frac{CM}{AC}$, suy ra $\frac{BM}{CM} = \frac{AB}{AC}$ không đổi. Vậy M thuộc đường tròn Apollonius dựng trên đoạn BC tỉ số là $\frac{AB}{AC}$. □

Ví dụ 2 (*Iran 1997*). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Điểm M thay đổi trên cung BC (không chứa A) của đường tròn (O) (M khác B và C). Gọi I, J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABM và ACM. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác MIJ luôn đi qua một điểm cố định.

Giải. Gọi N là giao điểm của (MIJ) và (O).

MI cắt (O) tại E, MJ cắt (O) tại D. Suy ra E, D lần lượt là điểm chính giữa các cung AB, AC nên cố định. Hơn nữa ta có $EA = EI = EB$ và $DA = DJ = DC$.



Hình 5.33

Xét tam giác NIE và tam giác NJD có

$\widehat{NEI} = \widehat{NDJ}$ (cùng chắn cung MN),

$\widehat{EIN} = \widehat{DJN}$ (cùng bù với hai góc bằng nhau là $\widehat{NIM}$ và $\widehat{NJM}$).

Suy ra $\Delta NIE \backsim \Delta NJD$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{NE}{ND} = \dfrac{EI}{DJ} = \dfrac{AE}{AD}$ không đổi.

Do đó N thuộc đường tròn Apollonius dựng trên đoạn ED tỉ số $\dfrac{AE}{AD}$.

Vậy N là giao điểm của đường tròn trên và (O) nên cố định (A là giao điểm còn lại của hai đường tròn trên). □

BÀI TẬP

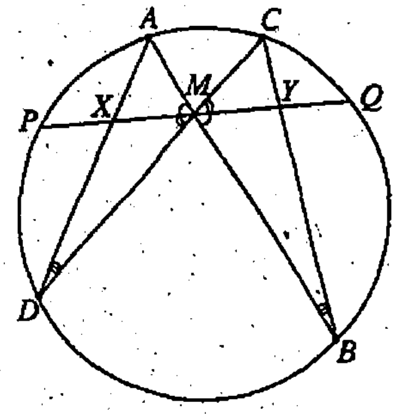
20. Cho bốn điểm A, B, C, D thẳng hàng theo thứ tự đó, $AB \neq CD$. Điểm M thay đổi sao cho $\widehat{AMB} = \widehat{CMD}$, M không thuộc AB. Chứng minh rằng M thuộc một đường tròn cố định.

21. Cho tam giác ABC không cân. Gọi I, J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp và bàng tiếp góc A của tam giác ABC. Chứng minh rằng IJ là một tiếp tuyến của hai đường tròn Apollonius dựng trên đoạn BC theo các tỉ số là $\dfrac{IB}{IC}$ và $\dfrac{JB}{JC}$.

22. Cho tam giác ABC. Hai điểm phân biệt M, N thay đổi sao cho $\dfrac{MA}{NA} = \dfrac{MB}{NB} = \dfrac{MC}{NC} \neq 1$. Chứng minh rằng đường thẳng MN đi qua một điểm cố định.

§9. ĐỊNH LÍ CON BƯỚM

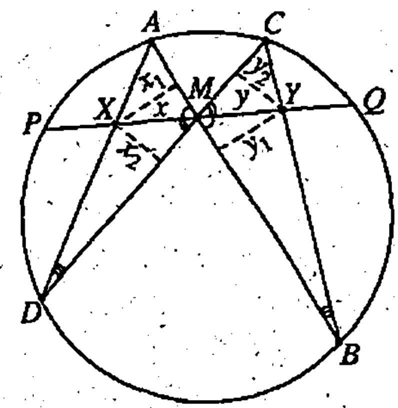
Định lí (Bài toán con bướm). Cho dây cung PQ của một đường tròn. Vẽ hai dây cung AB và CD khác của đường tròn đi qua trung điểm M của PQ. Gọi giao điểm của AD và BC với PQ là X và Y. Khi đó M cũng là trung điểm của XY.



Hình 5.34

Chứng minh. Có nhiều cách chứng minh chứng minh cho định lí này, dưới đây trình bày cách chứng minh của Coxeter và Greitzer.

Kẻ các đường vuông góc x_1, y_1 từ X, Y xuống AB và x_2, y_2 từ X, Y xuống CD. Đặt $a = PM = MQ$, $MX = x$, $MY = y$. Áp dụng tính chất của tam giác đồng dạng, ta có



Hình 5.35

$$\frac{x}{y} = \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} \qquad (1)$$

$$\frac{x_1}{y_2} = \frac{AX}{CY} \qquad (2)$$

$$\frac{x_2}{y_1} = \frac{XD}{YB}. \qquad (3)$$

Từ đó suy ra

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{x_1}{y_1}.\frac{x_2}{y_2} = \frac{x_1}{y_2}.\frac{x_2}{y_1} = \frac{AX}{CY}.\frac{XD}{YB} = \frac{PX.XQ}{PY.YQ}$$

$$= \frac{(a-x)(a+x)}{(a+y)(a-y)} = \frac{a^2-x^2}{a^2-y^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1.$$

Suy ra $x = y$.

Trong chứng minh trên, ta sử dụng tính chất $AX.XD = PX.XQ$ và $CY.YB = PY.YQ$ suy ra từ các cặp tam giác đồng dạng $PXD \backsim AXQ$ và $CYQ \backsim PYB$.

Có 1 cách chứng minh khác cho định lí trên như sau : Gọi O là tâm đường tròn và I, J lần lượt là trung điểm của BC và AD.

Do tứ giác $OMYI$ nội tiếp nên ta có

$$\widehat{MOY} = \widehat{MIY}. \qquad (4)$$

Tương tự ta có

$$\widehat{MOX} = \widehat{MJX}. \quad (5)$$

Mặt khác, do hai tam giác MCB và MAD đồng dạng và MI, MJ là các trung tuyến tương ứng nên

$$\widehat{MIY} = \widehat{MJX}. \quad (6)$$

Từ (4), (5), (6) suy ra $\widehat{MOY} = \widehat{MOX}$, suy ra tam giác OXY cân vì có OM vừa là đường cao vừa là đường phân giác, từ đó $MX = MY$. □

Chú ý là định lí con bướm vẫn đúng nếu ta nối AC và BD kéo dài cắt PQ tại X và Y (đây được gọi là con bướm ngoài).

Ngoài hai cách chứng minh trên đây, định lí con bướm còn có nhiều cách chứng minh khác và có nhiều mở rộng thú vị. Bạn đọc có thể tham khảo thêm ở trang web : http ://www.cut-the-knot.org/pythagoras/Butterfly.shtml

§10. ĐỊNH LÍ EULER VỀ TAM GIÁC PEDAL

Cho tam giác ABC và một điểm M bất kỳ trong mặt phẳng tam giác. Hạ MX, MY, MZ lần lượt vuông góc với BC, CA, AB. Khi đó XYZ được gọi là *tam giác pedal* (hoặc *tam giác bàn đạp*) của tam giác ABC ứng với điểm M. Tam giác pedal có nhiều tính chất thú vị, chẳng hạn

Định lí 1 (*Định lí Euler*). Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R. M là một điểm bất kì nằm trong mặt phẳng tam giác. Hạ MX, MY, MZ lần lượt vuông góc với BC, CA, AB. Khi đó diện tích tam giác XYZ có thể tính theo diện tích tam giác ABC và khoảng cách MO theo công thức sau

$$S_{XYZ} = \frac{1}{4}S_{ABC}\left|1 - \frac{MO^2}{R^2}\right|.$$

Chứng minh : Ta kí hiệu $S_{XYZ} = S_1$, $S_{ABC} = S$.

Nối dài AM, BM, CM cắt đường tròn ngoại tiếp tại các điểm X', Y', Z' tương ứng. Ta có $\widehat{ZXM} = \widehat{MBZ}$ (tứ giác $BZMX$ nội tiếp)

$\widehat{MBZ} = \widehat{ABY'}$ (B, Z, A thẳng hàng và B, M, Y' thẳng hàng)

$\widehat{ABY'} = \widehat{AX'Y'}$ (cùng chắn cung AY').

Từ đó suy ra $\widehat{ZXM} = \widehat{AX'Y'}$. Tương tự $\widehat{YXM} = \widehat{AX'Z'}$.

Từ đó suy ra $\widehat{ZXY} = \widehat{Z'X'Y'}$. Ta sẽ kí hiệu hai góc này tương ứng là X và X'.

Ta có

$$S_1 = \frac{1}{2}XY.XZ.\sin X$$

$$= \frac{1}{2}MC.\sin C.MB.\sin B.\sin X \qquad \text{(định lí hàm số sin)}$$

$$= \frac{1}{2}MB.MY'.\frac{MC}{MY'}.\sin B.\sin C.\sin X$$

$$= \frac{1}{2}|MO^2 - R^2|\frac{BC}{Z'Y'}.\sin B.\sin C.\sin X \qquad (\text{phương tích}, \Delta MBC \backsim \Delta MZ'Y')$$

$$= \frac{1}{2}|MO^2 - R^2|.BC.\sin C.\sin B.\frac{\sin X'}{Y'Z'}$$

$$= \frac{1}{8}\left|1 - \frac{MO^2}{R^2}\right|AC.BC.\sin C \quad \left(\sin B = \frac{AC}{2R}, \ \frac{\sin X'}{Y'Z'} = \frac{1}{2R}\right)$$

$$= \frac{1}{4}S\left|1 - \frac{MO^2}{R^2}\right|. \ \square$$

Định lí Euler là một kết quả thú vị và sâu sắc của hình học trong tam giác. Định lí này có nhiều hệ quả hay. Chúng ta sẽ xem xét một số hệ quả đó :

Đường thẳng Simson. Từ kết quả của định lí Euler, ta thấy nếu M nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, tức là nếu $OM = R$ thì diện tích tam giác pedal bằng 0. Điều đó có nghĩa là tam giác XYZ suy biến thành đường thẳng. Và như vậy, ta đã chứng minh được một kết quả quen thuộc sau đây :

Định lí 2 (*Đường thẳng Simson*). Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). M là một điểm bất kỳ trên (O). Hạ MX, MY, MZ lần lượt vuông góc với BC, CA, AB. Khi đó X, Y, Z cùng nằm trên một đường thẳng.

Đường thẳng đi qua X, Y, Z được gọi là đường thẳng Simson ứng với điểm M. Tính chất thú vị này có thể chứng minh khá dễ dàng mà không cần thông qua định lí Euler, sử dụng tính chất của tứ giác nội tiếp (xem thêm ở §2).

Công thức Euler. Khi M trùng với I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác thì XYZ là tam giác nội tiếp trong đường tròn tâm I bán kính r, có các góc X, Y, Z tương ứng bằng $90^\circ - \frac{A}{2}$, $90^\circ - \frac{B}{2}$, $90^\circ - \frac{C}{2}$ nên ta có

$$S_{XYZ} = 2r^2\sin X\sin Y\sin Z = 2r^2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = S.\frac{r}{2R}$$

Từ đó, thay vào định lí Euler, ta được

$$S\frac{r}{2R} = \frac{1}{4}S\left(1 - \frac{IO^2}{R^2}\right) \Leftrightarrow 2Rr = R^2 - IO^2$$

$$\Leftrightarrow IO^2 = R^2 - 2Rr.$$

Ta thu được một kết quả đẹp mắt khác của hình học phẳng (được gọi là công thức Euler)

Định lí 3. (*Công thức Euler*) Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R và ngoại tiếp đường tròn tâm I bán kính r. Khi đó khoảng cách IO có thể tính theo công thức sau :

$$IO^2 = R^2 - 2Rr.$$

Sau đây, chúng ta sẽ làm quen với định lí qua một số ví dụ cơ bản.

Ví dụ 1. Cho đường tròn $(O ; R)$ và điểm M cố định. Trên (O) lấy các điểm A, B, C sao cho tam giác ABC đều và đặt $AM = x$, $BM = y$, $CM = z$. Chứng minh rằng tam giác mà độ dài các cạnh là x, y, z có diện tích không đổi khi A, B, C thay đổi.

Giải. Gọi (T) là tam giác có độ dài các cạnh là x, y, z. Dựng D, E, F lần lượt là hình chiếu của M trên các cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC.

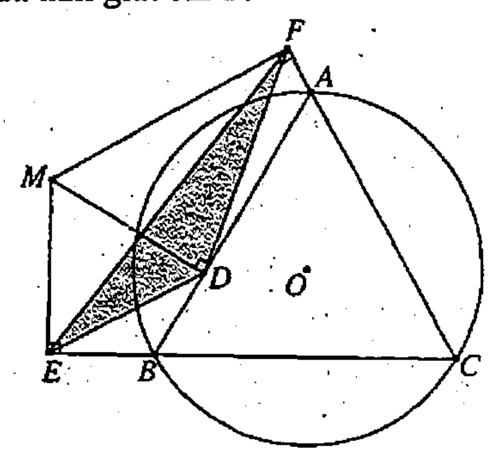
Theo định lí sin ta dễ dàng có được :

$$\frac{DE}{MB} = \frac{DF}{MA} = \frac{EF}{MC} = \sin 60^\circ.$$

$$\Leftrightarrow \frac{DE}{y} = \frac{DF}{x} = \frac{EF}{z} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Suy ra : ΔDEF đồng dạng với (T) theo tỉ số đồng dạng là $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\Rightarrow \frac{S_{DEF}}{S_{(T)}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow S_{(T)} = \frac{4}{3}.S_{DEF}$$



Hình 5.36

Do DEF là tam giác pedal dựng từ điểm M của tam giác ABC nên theo định lí Euler, ta có được : $S_{DEF} = \frac{\left|R^2 - OM^2\right|}{4R^2}.S_{ABC}$.

Mà đường tròn $(O\ ;\ R)$ và điểm M cố định, ΔABC đều nên S_{ABC} cố định $\Rightarrow S_{DEF} = const$ □

Ví dụ 2. Cho tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn tâm O (với O nằm bên trong tứ giác). Gọi $MNPQ$ là tứ giác mà các đỉnh lần lượt là hình chiếu của giao điểm 2 đường chéo của tứ giác $ABCD$ đến các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng :

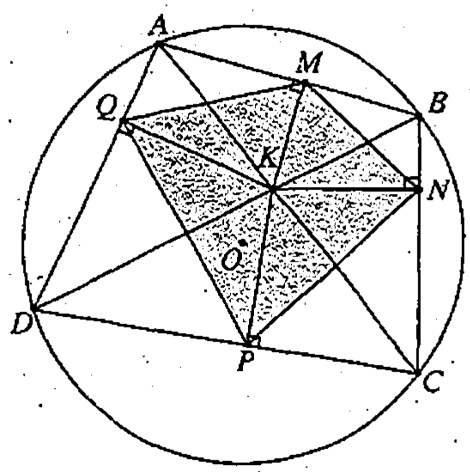
$$S_{MNPQ} \leq \frac{S_{ABCD}}{2}.$$

Giải (h.5.37). Gọi K là giao điểm 2 đường chéo AC và BD của tứ giác $ABCD$.

Dễ thấy KMN là tam giác pedal dựng từ điểm K của tam giác ABC, do đó áp dụng định lí Euler ta được :

$$\frac{S_{KMN}}{S_{ABC}} = \frac{\left|R^2 - OK^2\right|}{4R^2} = \frac{R^2 - OK^2}{4R^2}$$ (vì K ở trong tứ giác)

$$\Rightarrow S_{KMN} = \frac{(R^2 - OK^2)}{4R^2}.S_{ABC}.$$



Hình 5.37

Làm tương tự cho các tam giác KNP, KPQ, KQM và cộng các kết quả lại :

$$S_{KMN} + S_{KNP} + S_{KPQ} + S_{KQM} = \frac{R^2 - OK^2}{4R^2}.(S_{ABC} + S_{BCD} + S_{CDA} + S_{DAB})$$

$$\Rightarrow S_{MNPQ} = \frac{R^2 - OK^2}{2R^2}.S_{ABCD} \leq \frac{R^2 - 0}{2R^2}.S_{ABCD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow OK^2 = 0 \Leftrightarrow OK = 0 \Leftrightarrow K \equiv O$. □

BÀI TẬP

23. Cho tam giác ABC, M là một điểm bất kì trong mặt phẳng tam giác, XYZ là tam giác pedal của tam giác ABC ứng với điểm M. Các đường đối xứng qua các đường phân giác cùng đỉnh (còn gọi là *đường đối phân giác*) của AM, BM, CM đồng quy tại một điểm M_1, $X_1Y_1Z_1$ là tam giác pedal của tam giác ABC

ứng với điểm M_1. Chứng minh rằng 6 điểm X, Y, Z, X_1, Y_1, Z_1 cùng nằm trên một đường tròn (gọi là *đường tròn pedal* ứng với điểm M cũng như ứng với điểm M_1).

24. Cho 4 điểm trong mặt phẳng, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng các đường tròn pedal của 1 điểm tuỳ ý trong chúng ứng với tam giác tạo bởi 3 đỉnh còn lại đồng quy tại một điểm.

25. (*Serbia and Montenegro 2003*) Cho tam giác ABC có trực tâm H. Gọi D, E, F lần lượt là chân các đường cao hạ từ các đỉnh A, B, C. Gọi P là điểm đối xứng với A qua BC, Q là điểm đối xứng với B qua CA, R là điểm đối xứng với C qua AB. Chứng minh rằng nếu $S_{DEF} = S_{PQR} = T$ thì ta có $T = \frac{3}{5}S$ hoặc $T = S$ (với S là diện tích tam giác ABC).

§11. MỘT SỐ QUỸ TÍCH CƠ BẢN

Bài toán quỹ tích là dạng toán thường gặp trong chương trình toán phổ thông. Để đoán nhận quỹ tích, chúng ta cần có kiến thức về một số quỹ tích cơ bản. Ngoài ra cần có khả năng dự đoán quỹ tích qua suy luận cũng như qua các phép dựng hình chính xác.

Các quỹ tích cơ bản

1) Tập hợp các điểm cách đều hai điểm cố định cho trước là đường trung trực của đoạn thẳng nối hai điểm đó.

2) Tập hợp các điểm cách đều hai cạnh của một góc là đường phân giác của góc đó.

3) Tập hợp các điểm cách đường thẳng cho trước một khoảng không đổi là hai đường thẳng song song với đường thẳng đó.

4) Tập hợp các điểm cách đều hai đường thẳng song song là một đường thẳng song song với hai đường thẳng đó (đi qua trung điểm của đoạn thẳng bất kì có hai đầu mút lần lượt nằm trên hai đường thẳng song song đó)

5) Tập hợp các điểm cách đều một điểm cho trước một khoảng không đổi là một đường tròn.

6) Tập hợp các điểm có cùng phương tích đối với hai đường tròn là trục đẳng phương của hai đường tròn đó.

7) Tập hợp các điểm có tổng khoảng cách đến hai điểm cho trước không đổi là một elip.

8) Tập hợp các điểm có giá trị tuyệt đối của hiệu các khoảng cách từ điểm đó đến hai điểm cho trước không đổi là một hypebol.

9) Tập hợp các điểm điểm cách đều một điểm cho trước và một đường thẳng cho trước là một parabol.

10) Tập hợp các điểm có tỉ số khoảng cách từ điểm đó đến một điểm cho trước và đến một đường thẳng cho trước không đổi là một đường cônic.

Các dạng quỹ tích thường gặp

Dạng 1. Cho đoạn thẳng AB và số $k > 0$. Tìm tập hợp các điểm M sao cho

$$MA^2 + MB^2 = k.$$

Giải. Gọi I là trung điểm của AB, ta có

$$MA^2 + MB^2 = k \Leftrightarrow 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = k \Leftrightarrow MI^2 = \frac{2k - AB^2}{4}.$$

Nếu $2k < AB^2$ thì không tồn tại điểm M.

Nếu $2k = AB^2$ thì điểm M chính là điểm I.

Nếu $2k > AB^2$ thì tập hợp các điểm M là đường tròn tâm I bán kính $\dfrac{\sqrt{2k - AB^2}}{2}$. □

Dạng 2. Cho đoạn thẳng AB và số thực k. Tìm tập hợp những điểm M sao cho $MA^2 - MB^2 = k$.

Giải. Gọi I là trung điểm của AB và H là hình chiếu của M trên đường thẳng AB. Ta có

$$\mathrm{MA}^2 - \mathrm{MB}^2 = \mathrm{k} \Leftrightarrow \overline{HA}^2 - \overline{HB}^2 = k \Leftrightarrow (\overline{HA} + \overline{HB})(\overline{HA} - \overline{HB}) = k$$

$$\Leftrightarrow 2\overline{HI}.\overline{BA} = k \Leftrightarrow \overline{IH} = \frac{k}{2\overline{AB}}.$$ Suy ra H là điểm cố định.

Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng vuông góc với AB tại H. □

Dạng 3. Cho đoạn thẳng AB và các số thực a, b, c $(ab \neq 0)$. Tìm tập hợp những điểm M sao cho $aMA^2 + bMB^2 = c$.

Giải.

Nếu $a + b = 0$ thì $aMA^2 + bMB^2 = c \Leftrightarrow MA^2 - MB^2 = \dfrac{c}{a}$ (đã giải quyết ở dạng 2)

Trường hợp $a + b \neq 0$:

Gọi I là điểm sao cho $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{O}$ (I cố định). Khi đó

$$aMA^2 + bMB^2 = c \Leftrightarrow a\overrightarrow{MA}^2 + b\overrightarrow{MB}^2 = c$$

$$\Leftrightarrow a(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + b(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = c$$

$$\Leftrightarrow (a + b)\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.(a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB}) + aIA^2 + bIB^2 = c$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = \frac{c(a + b) - abAB^2}{(a + b)^2} = d$$

Nếu $d < 0$ thì không tồn tại M.

Nếu $d = 0$ thì M trùng I.

Nếu $d > 0$ thì M thuộc đường tròn tâm I bán kính $\sqrt{d}$. □

Dạng 4. Cho đoạn thẳng AB và số thực $k > 0, k \neq 1$. Tìm tập hợp các điểm M sao cho $\dfrac{MA}{MB} = k$.

Kết quả : Tập hợp các điểm M sao cho $\dfrac{MA}{MB} = k$ $(k > 0,\ k \neq 1)$ là một đường tròn và đường tròn này được gọi là đường tròn Apollonius (xem §8. Đường tròn Apollonius).

BÀI TẬP

26. Cho tam giác ABC có BC cố định còn đỉnh A thay đổi sao cho $\widehat{BAC} = \alpha$ không đổi. Hãy tìm quỹ tích trọng tâm G, trực tâm H, tâm đường tròn nội tiếp I của tam giác ABC khi A thay đổi.

27. Cho hình vuông $ABCD$. M là một điểm thay đổi trên BC. Nối AM, DM cắt DC, AB tương ứng tại P và Q. Nối BP, CQ cắt nhau tại K. Tìm quỹ tích điểm K khi M di chuyển trên BC.

28. Hai đường tròn tâm O và O' cắt nhau tại hai điểm A và B. Một cát tuyến thay đổi qua A cắt đường tròn tâm O tại điểm E và cắt đường tròn tâm O' tại điểm F. Hai đường thẳng OE và $O'F$ cắt nhau tại điểm M. Tìm tập hợp các điểm M.

29. Cho một góc nhọn Oxy và một điểm M nằm trong góc ấy. Từ M ta kẻ các đường vuông góc MH xuống cạnh Ox và MK xuống cạnh Oy. Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn điều kiện $MH + MK = l$, trong đó l là một độ dài cho trước.

§12. MỘT SỐ BÀI TOÁN DỰNG HÌNH BẰNG THƯỚC VÀ COMPA

Trong hình học, dựng hình là một vấn đề quan trọng. Bài toán dựng hình cũng giúp chúng ta phát triển được nhiều kĩ năng, hỗ trợ cho các bài toán chứng minh, quỹ tích và tính toán. Nhưng hiện nay dựng hình rất ít được các giáo viên và học sinh quan tâm, phần lớn các em học sinh chỉ làm các bài toán chứng minh, tính toán, tìm quỹ tích. Đành rằng đối với những bài toán chứng minh thì không cần vẽ hình thật chính xác nhưng đôi khi gặp phải những bài toán nhất thiết phải vẽ chính xác thì hầu hết phải bó tay (chẳng hạn những bài toán đảo trong quỹ tích, dựng một hình vuông có diện tích bằng diện tích tam giác cho trước...).

Một bài toán dựng hình đầy đủ gồm 4 bước, đó là

Phân tích : Giả sử bài toán đã dựng được, kết nối các yếu tố để suy ra cách dựng.

Cách dựng : Nêu các bước dựng hình thoả mãn yêu cầu của bài toán.

Chứng minh : Chứng minh tính đúng đắn của phép dựng đã nêu ra.

Biện luận : Biện luận số nghiệm của bài toán, tìm các điều kiện để bài toán có nghiệm.

Sau đây là những bài toán cơ bản về dựng hình bằng hai công cụ thước thẳng và compa.

a) Các bài toán cơ bản về dựng hình

1) Chia đôi một góc.

2) Gấp đôi một góc.

3) Dựng một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

4) Dựng một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và song song với một đường thẳng cho trước.

5) Chia một đoạn thẳng thành n phần bằng nhau.

6) Dựng tâm của một đường tròn cho trước.

7) Dựng tiếp tuyến của một đường tròn tại điểm nằm trên đường tròn.

8) Dựng tiếp tuyến của một đường tròn đi qua một điểm nằm ngoài đường tròn.

9) Dựng cung chứa góc trên một đoạn cho trước.

10) Dựng tiếp tuyến chung của hai đường tròn.

11) Qua một điểm đã cho dựng một đường tròn tiếp xúc với hai đường thẳng song song.

12) Dựng một đường tròn tiếp xúc với một đường tròn đã cho và một đường thẳng a tại một điểm A cho trước.

13) Dựng một đường tròn tiếp xúc với một đường tròn đã cho tại một điểm đã cho và một đường thẳng đã cho.

14) Dựng một đường tròn tiếp xúc với hai đường tròn đã cho, đối với một trong hai đường tròn đó thì tiếp xúc tại một điểm đã cho.

15) Dựng một điểm chia một đoạn thẳng cho trước theo một tỉ số cho trước.

b) Một số bài tập dựng hình cơ bản

1) Cho trước đoạn thẳng có độ dài 1. Hãy dựng các đoạn thẳng có độ dài

i) 2 ii) $\frac{1}{2}$ iii) $\frac{1}{3}$ iv) $\sqrt{5}$ v) $\sqrt[4]{5}$.

Hướng dẫn :

iii) Dùng định lí Thales.

iv) Dùng định lí Pythagoras.

v) Dùng tính chất của tam giác vuông : Tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH thì $AH^2 = BH.CH$.

2) Dựng tam giác ABC biết a, b và m_c.

Hướng dẫn : Giả sử dựng được tam giác ABC. Nối dài trung tuyến CP một đoạn $PC' = CP$ thì được tam giác CAC' có $CA = b$, $AC' = a$ và $CC' = 2m_c$.

3) Dựng tam giác ABC biết b, $a + c$ và C.

Hướng dẫn : Giả sử tam giác ABC đã dựng được. Nối dài CB về phía B tới điểm D sao cho $BD = BA$. Khi đó tam giác ACD có góc C đã cho, $AC = b$ và $CD = a + c$ nên hoàn toàn xác định. Đỉnh B là đỉnh của tam giác cân BDA, do đó là giao điểm của trung trực đoạn AD với CD.

4) Dựng tam giác ABC biết m_a, m_b, m_c.

Hướng dẫn : Giả sử tam giác ABC đã dựng xong. Trung tuyến AM, BN, CP cắt nhau tại G. Gọi D là trung điểm của AG thì tam giác GDN có $GD = \frac{m_a}{3}$, $GN = \frac{m_b}{3}$ và $DN = \frac{m_c}{3}$ hoàn toàn xác định. Từ đó tiếp tục xác định A, B và C.

5) Dựng tam giác ABC biết h_a, h_b, h_c.

Hướng dẫn : Sử dụng $ah_a = bh_b = ch_c = 2S$.

BÀI TẬP

30. Dựng một tam giác biết cạnh đáy a, góc ở đỉnh A và điểm D là giao điểm của cạnh đáy với phân giác của góc trong ở đỉnh A.

31. Qua điểm A, hãy dựng một đường tròn bán kính R sao cho tiếp tuyến từ một điểm B cho trước tới nó có độ dài cho trước.

32. Dựng một hình bình hành biết một cạnh và hai chiều cao.

33. Dựng một hình bình hành biết đáy, chiều cao và góc giữa hai đường chéo.

34. Dựng một tam giác biết đáy, góc đối diện và chiều cao thuộc một cạnh bên nào đó.

35. Dựng tam giác ABC biết a, A và m_a.

36. Dựng tam giác ABC có chu vi $2p$, góc A và chiều cao h_a.

37. Dựng tam giác ABC biết góc B, góc C và trung tuyến m_a.

38. Dựng tam giác ABC biết góc A, h_b và m_a.

39. Dựng tam giác ABC biết đáy a, góc A và trung tuyến m_b.

40. Dựng tam giác ABC biết góc A, đáy a và bán kính r của đường tròn nội tiếp.

41. Dựng tam giác ABC biết các bán kính R, r và một góc của tam giác.

42. Trong một đường tròn đã cho, dựng một dây sao cho nó được nhìn từ ba điểm đã cho dưới những góc bằng nhau.

43. Trong một đường tròn đã cho, nội tiếp một hình chữ nhật sao cho hai cạnh của nó đi qua hai điểm đã cho.

44. Trong một đường tròn đã cho, nội tiếp một tam giác vuông biết một góc nhọn và một điểm mà một trong các cạnh góc vuông đi qua.

45. Trong một đường tròn đã cho, nội tiếp một tam giác có một góc đã biết sao cho hai cạnh của nó đi qua hai điểm đã cho.

46. Cho một điểm ở trong đường tròn. Dựng qua điểm đó một dây sao cho hiệu các đoạn thẳng được chia bởi điểm đó bằng một độ dài cho trước.

47. Dựng một hình bình hành sao cho hai đỉnh liên tiếp ở tại hai điểm đã cho và hai đỉnh khác nằm trên một đường tròn đã cho.

48. Qua hai điểm cho trước trên một đường tròn, dựng hai dây song song sao cho tổng của chúng bằng một đoạn thẳng đã cho.

49. Dựng một hình bình hành có độ dài đường chéo đã cho và có cùng diện tích với một tứ giác đã cho.

50. Dựng một hình chữ nhật có độ dài đường chéo đã cho và có cùng diện tích với một tam giác đã cho.

51. Dựng một tam giác biết a, h_a và $b^2 + c^2$.

52. Dựng một tam giác biết a, h_a và $b^2 - c^2$.

53. Dựng một tam giác biết a, A và $b^2 - c^2$.

54. Dựng một tam giác biết a, A và tỉ số hai cạnh b và c.

55. Dựng một tam giác biết a, h_a và tỉ số hai cạnh b và c.

56. Dựng một tam giác ABC biết phân giác BD và các đoạn thẳng AD, DC mà nó chia cạnh đối diện.

57. Dựng một tam giác biết đáy và các giao điểm của đáy với phân giác và đường cao.

58. Dựng tam giác ABC biết a, b, m_a.

59. Dựng tam giác ABC biết B, $a + b$, C.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Trần Văn Tấn (chủ biên), *Các chuyên đề hình học bồi dưỡng HSG THCS*, NXB Giáo dục,

[2] Nguyễn Văn Ban, Hoàng Chúng, *Hình học của tam giác*, NXB Giáo dục, 1996.

[3] Lê Quốc Hán, *Ẩn sau định lí Ptô-lê-mê*, NBX Giáo dục, 2007.

[4] O.Bottema, *Topics in Elemetary Geometry*, Springer Verlag.

[5] Ross Honsberger, *Episodes in nineteenth and twentieth century Euclidean Geometry*, MAA.

[6] I.F.Sharyghin, *Các bài toán hình học phẳng*, NXB "Nauka", Moscow 1986 (tiếng Nga).

[7] Po-Shen Loh, *Collinearity and Concurrence*, Internet resources.

[8] Internet, *Ptolemy's Theorem*, http ://en.wikipedia.org/wiki/Ptolemy's-theorem.

[9] Internet, *Simson's Line and Its Applications*,
http ://www.math.uci.edu/~mathcirc/math194/lectures/inscribed/node2.html.

[10] Internet, các website www.mathlinks.ro, diendantoanhoc.net và mathscope.org

[11] Internet, The MacTutor History of Mathematics archive.

MỤC LỤC