https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

# TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964
2 2009
Số 380

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 46
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35144272, (04) 35121606
Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn Web: http://www.nxbgd.com.vn/toanhoctuoitre

CHÀO MỪNG 79 NĂM THÀNH LẬP
Đảng Cộng sản Việt Nam (3/2/1930 - 3/2/2009)

Xuân Kỷ Sửu
2009

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

# SỬ DỤNG CÔNG CỤ ĐẠI SỐ GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN HÌNH HỌC

HÀ VĂN NHÂN
(GV THCS Hoằng Xuân, Hoằng Hóa, Thanh Hóa)

Việc rèn luyện kĩ năng giải các dạng bài tập Toán cấp THCS là rất cần thiết, nhằm bồi dưỡng năng lực học tập môn Toán của học sinh. Hầu hết các em thường gặp khó khăn trước các bài tập hình học có nội dung tổng hợp, một phần do kiến thức và thời lượng truyền thụ ở nhà trường còn hạn chế. Bài viết này giới thiệu một số dạng toán hình học có thể giải được nhờ công cụ đại số.

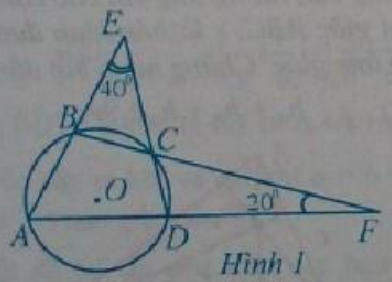
## I LẬP PHƯƠNG TRÌNH HOẶC HỆ PHƯƠNG TRÌNH

**Thí dụ 1.** *Tính các góc của tứ giác ABCD theo hình vẽ sau* (h. 1).

*(Bài tập 56 SGK Toán 9, Tập một, NXBGD)*

*Lời giải.* Đặt $x = \widehat{BCE} = \widehat{DCF}$.

Ta có $\widehat{ABC} = x + 40°$; $\widehat{ADC} = x + 20°$.




*Hình 1*

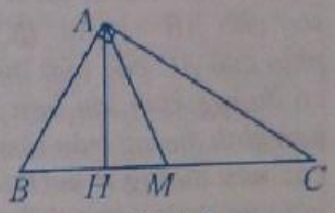
Vì tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn suy ra $180° = \widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 2x + 60° \Rightarrow x = 60°$.

Từ đó suy ra $\widehat{ABC} = 100°$; $\widehat{ADC} = 80°$; $\widehat{BCD} = 180° - x = 120°$; $\widehat{BAD} = 60°$. □

**Thí dụ 2.** *Tam giác ABC vuông tại A có chu vi 72cm, hiệu giữa trung tuyến AM và đường cao AH bằng 7cm. Tính diện tích tam giác ABC.*

*Lời giải.* (h.2)

Đặt $AM = x$, lúc đó ta có $BC = 2x$ và $AH = x - 7$.




*Hình 2*

Theo định lí Pythagore ta có

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 = 4x^2 \quad (1)$$

Mặt khác ta có

$$2S_{ABC} = AB.AC = AH.BC = 2x(x - 7) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $(AB + AC)^2 = 8x^2 - 28x$

$\Rightarrow (72 - 2x)^2 = 8x^2 - 28x \Leftrightarrow x^2 - 65x - 1296 = 0$.

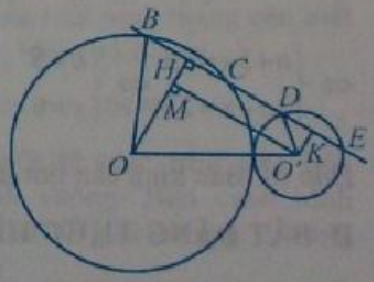
Giải PT bậc hai ẩn $x$ tìm được nghiệm dương $x = 16$. Suy ra $BC = 32$cm, $AH = 9$cm.

Từ đó ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2}.32.9 = 144(\text{cm}^2)$. □

**Thí dụ 3.** *Cho đường tròn tâm O bán kính 9 cm và đường tròn tâm O' bán kính 3cm tiếp xúc ngoài với nhau. Một đường thẳng (d) cắt hai đường tròn đó tạo thành ba đoạn thẳng bằng nhau. Tính độ dài mỗi đoạn thẳng đó.*

*Lời giải.* (h.3)

Theo giả thiết $BC = CD = DE$. Hạ $OH \perp BE$, $O'K \perp BE$ và $O'M \perp OH$. Đặt $x = BH = CH$, khi đó ta có $O'M = HK = 4x$,




*Hình 3*

và $DK = x \Rightarrow O'K = \sqrt{OD^2 - x^2} = \sqrt{9 - x^2}$.

Tương tự $OH = \sqrt{81 - x^2}$.

Từ $OM^2 + O'M^2 = OO'^2$, ta có

$(OH - MH)^2 + O'M^2 = OO'^2$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{18-x^2} - \sqrt{9-x^2}\right)^2 + 16x^2 = 144$

$\Leftrightarrow 7x^2 - 27 = \sqrt{729 - 90x^2 + x^4}$.

Bình phương hai vế (ĐK $7x^2 - 27 \geq 0$) rồi rút gọn ta được $48x^2(x^2 - 6) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{6}$.

*Đáp số.* $BC = CD = DE = 2\sqrt{6}$ (cm). ❐

**✪Thí dụ 4.** *Cho điểm B nằm giữa A và C sao cho AB =14cm, BC = 28cm. Vẽ về một phía của AC các nửa đường tròn tâm I, K, O có đường kính lần lượt là AB, BC, AC. Tính bán kính đường tròn tâm M tiếp xúc ngoài với các nửa đường tròn (I), (K) và tiếp xúc trong với nửa đường tròn (O).*

***Lời giải.*** (h.4)

Hạ $MH \perp AC$. Đặt $IH = a$, bán kính cần tìm là $x$. Ta có $MO^2 - OH^2 = MK^2 - HK^2 = MI^2 - IH^2 = MH^2$.

*Hình 4*

Hơn nữa,

$IK = 21$, $HK = 21 - a$, $OK = 7$, $OH = 14 - a$.

Từ đó suy ra $(21 - x)^2 - (14 - a)^2 = (14 + x)^2 - (21 - a)^2 = (x + 7)^2 - a^2$.

Giải HPT $\begin{cases}(21-x)^2-(14+x)^2=(14-a)^2-(21-a)^2\\(14+x)^2-(x+7)^2=(21-a)^2-a^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}a+5x=35\\3a+x=21\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=5\\x=6.\end{cases}$

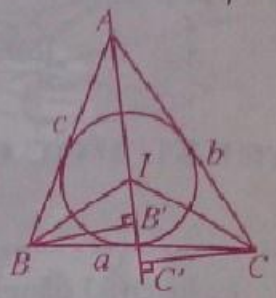
*Đáp số.* Bán kính cần tìm là $x = 6$cm. ❐

## II. BẤT ĐẲNG THỨC HÌNH HỌC

**✪Thí dụ 5.** *Cho đường tròn (I; r) nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng $IA + IB + IC \geq 6r$. Đẳng thức xảy ra khi nào?*

***Lời giải.*** (h.5) Đặt $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Gọi $B'$, $C'$ lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ $B$, $C$ xuống $AI$. Ta có $cr = IA.BB'$ và $br = IA.CC'$, do đó

$(b + c)r = IA.(BB' + CC') \leq IA.a \Rightarrow \dfrac{IA}{r} \geq \dfrac{b+c}{a}$.



*Hình 5*

Tương tự có

$\dfrac{IB}{r} \geq \dfrac{a+c}{b}$;

$\dfrac{IC}{r} = \dfrac{a+b}{c}$.

Cộng theo vế ba BĐT trên ta có

$$\frac{IA+IB+IC}{r} \geq \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right) \quad (*)$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương ta được

$\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a} \geq 2\sqrt{\dfrac{a}{b}.\dfrac{b}{a}} = 2$.

Tương tự có $\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{b} \geq 2$; $\dfrac{c}{a}+\dfrac{a}{c} \geq 2$.

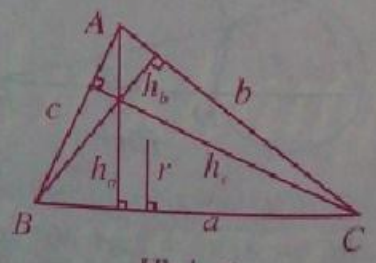
Kết hợp với (*) ta được $\dfrac{IA+IB+IC}{r} \geq 6$

$\Leftrightarrow IA + IB + IC \geq 6r$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$, lúc này $\Delta ABC$ là tam giác đều. ❐

**✪Thí dụ 6.** *Gọi $h_a$, $h_b$, $h_c$ lần lượt là độ dài các đường cao tương ứng với các cạnh a, b, c của tam giác ABC, r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác. Chứng minh bất đẳng thức*

$$h_a + h_b + h_c \geq 9r.$$



*Hình 6*

***Lời giải.*** (h. 6) Gọi $S$ là diện tích của tam giác $ABC$. Ta có $2S = (a+b+c)r = ah_a = bh_b = ch_c$ do đó

$h_a = \dfrac{a+b+c}{a}r$ ; $h_b = \dfrac{a+b+c}{b}.r$ ; $h_c = \dfrac{a+b+c}{c}r$.

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

# LỄ TRAO GIẢI CUỘC THI OLYMPIC TOÁN HÀ NỘI MỞ RỘNG và Olympic Toán Singapore mở rộng năm 2008

Ngày 18/01/2009 vừa qua, tại Hội trường nhà T1 của trường Đại học Khoa học Tự nhiên Hà Nội, Hội Toán học Hà Nội đã tổ chức Lễ tuyên dương khen thưởng cho học sinh đoạt giải hai cuộc thi : cuộc thi Olympic toán Hà Nội mở rộng (HMO 2008) và cuộc thi Olympic toán Singapore mở rộng năm 2008. Đến dự buổi lễ có GS. TSKH *Nguyễn Văn Mậu*, Chủ tịch Hội Toán học Hà Nội, các Uỷ viên ban chấp hành Hội, đại diện NXBGD tại TP. Hà Nội, Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, Tạp chí Toán Tuổi thơ, lãnh đạo các Sở giáo dục, các giáo viên và học sinh đoạt giải của Hà Nội, Vĩnh Phúc, Phú Thọ, Hải Dương, Thái Bình, Lào Cai, Bắc Ninh, Bắc Giang, Hòa Bình.

Kết quả cuộc thi HMO 2008 (tổ chức ngày 30/3/2008 tại trường đại học Khoa học Tự nhiên) dành cho độ tuổi Junior (sinh sau ngày 01/01/1994) có 2 giải Nhất, 4 giải Nhì, 4 giải Ba và 7 giải Khuyến khích; ở độ tuổi Senior (sinh sau ngày 01/01/1992) có 4 giải Nhất, 3 giải Nhì, 13 giải Ba và 10 giải Khuyến khích. Các em đều được tặng giấy khen; đối với các em đoạt từ giải Ba trở lên được tiền thưởng của Hội Toán học Hà Nội và được tham dự cuộc thi Olympic Singapore mở rộng tổ chức ngày 27/5/2008.

Đoàn học sinh Việt Nam có 37 học sinh dự thi Olympic Singapore mở rộng, trong đó có 36 em đã đoạt giải. Ở độ tuổi Junior có 2 giải Vàng, 12 giải Bạc, 2 giải Đồng và 2 giải Khuyến khích ở độ tuổi Senior có 17 giải Bạc và 1 giải Đồng. Các em đều được tặng Giấy chứng nhận và quà tặng. Đặc biệt ở độ tuổi Junior có em *Lê Trung Hiếu*, trường Hà Nội – Amsterdam vừa đoạt giải Nhất cuộc thi HMO vừa đoạt giải Vàng cuộc thi Olympic Toán Singapore mở rộng.

Các ý kiến phát biểu tại buổi lễ đều tỏ rõ lòng biết ơn sự hoạt động tích cực và có hiệu quả của Hội Toán học Hà Nội đã tạo ra một sân chơi hội nhập quốc tế về toán học cho học sinh và mong muốn cuộc thi này sẽ diễn ra thường niên với quy mô lớn hơn, có thêm nhiều tỉnh thành tham gia hơn. Góp phần nâng cao việc học Toán, Tiếng Anh trong nhà trường và bồi dưỡng nhân tài cho đất nước.

PV

Từ đó suy ra

$$h_a+h_b+h_c=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)r$$

$$=3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right).$$

Áp dụng BĐT Cauchy ta suy ra $h_a+h_b+h_c\geq 9r$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$, lúc này $\Delta ABC$ là tam giác đều. □

Qua một số thí dụ nêu trên các bạn có thể thấy công cụ đại số có thể sử dụng khá hiệu quả trong việc giải một số dạng bài hình học. Cuối cùng mời các bạn cùng luyện tập thông qua các bài tập dưới đây.

**1.** Tam giác $ABC$ có $AB=20$cm, $AC=28$cm, $BC=24$cm. Tiếp tuyến tại $A$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác cắt đường thẳng $BC$ tại $I$. Tính độ dài các đoạn $IA$, $IC$.

*Đáp số.* $IA=35$cm, $IC=49$cm.

**2.** Cho tam giác $ABC$ cân ở $A$ có ba đường phân giác cắt nhau tại $I$. Biết rằng $IA=2\sqrt{5}$ cm, $IB=3$cm. Tính độ dài cạnh $AB$.

*Đáp số* $AB=2\sqrt{11}$ cm.

**3.** Tính bán kính của đường tròn nội tiếp và đường tròn ngoại tiếp một hình thang cân biết độ dài hai đáy bằng 16cm và 64cm.

*Đáp số* $R=5\sqrt{41}$cm, $r=16$cm.

**4.** Bốn đỉnh của một tứ giác nằm trên bốn cạnh của một hình vuông. Biết cạnh hình vuông bằng 1, chu vi tứ giác bằng $p$. Chứng minh rằng $p\geq 2\sqrt{2}$.

**5.** Cho một đa giác lồi trên mặt phẳng toạ độ. Tổng các hình chiếu của các cạnh đa giác trên trục hoành và trên trục tung thứ tự bằng $2a$, $2b$. Gọi $p$ là chu vi của đa giác. Chứng minh rằng $p\geq\sqrt{2}(a+b)$.

# Lời giải đề thi vào lớp 10 chuyên toán

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU, NGHỆ AN

## NĂM HỌC 2008-2009

*(Đề thi đã đăng trên THTT số 378, tháng 12 năm 2008)*

**Câu 1.** Điều kiện: $1 \le x, y \le 9$ và $x, y$ nguyên

Ta có $\overline{xxyy} = \overline{xx}^2 + \overline{yy}^2$

$\Leftrightarrow 99x + x + y = 11^2(x^2 + y^2)$.

$\Rightarrow (x+y) \vdots 11 \Rightarrow x + y = 11$ (vì $2 \le x + y \le 18$).

Từ đó $(x ; y)$ chỉ có thể là (2; 9); (9; 2); (3; 8); (8; 3); (4; 7); (7; 4); (5; 6); (6; 5).

Thử lại ta thấy chỉ có $(x ; y) = (8 ; 3)$ thỏa mãn. Vậy số cần tìm là 83.

**Câu 2.** Với điều kiện $x \ge -1$, PT đã cho tương đương với $10\sqrt{x+1}\sqrt{x^2-x+1} = 3(x^2+2)$ (*)

Đặt $u = \sqrt{x+1}$, $v = \sqrt{x^2-x+1}$, (điều kiện $u \ge 0$, $v > 0$) khi đó PT (*) trở thành

$10uv = 3(u^2 + v^2) \Leftrightarrow (3u - v)(u - 3v) = 0$

$\Leftrightarrow u = 3v$ hoặc $3u = v$.

• Nếu $u = 3v$, ta có $\sqrt{x+1} = 3\sqrt{x^2-x+1}$

$\Leftrightarrow 9x^2 - 10x + 8 = 0$, PT này vô nghiệm.

• Nếu $3u = v$, ta có $3\sqrt{x+1} = \sqrt{x^2-x+1}$

$\Leftrightarrow 9x + 9 = x^2 - x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 10x - 8 = 0$

$\Leftrightarrow x = 5 + \sqrt{33}$ hoặc $x = 5 - \sqrt{33}$ (thỏa mãn).

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x = 5 - \sqrt{33}$ và $x = 5 + \sqrt{33}$.

**Câu 3.** Vì phương trình $f(x) = x$ vô nghiệm nên $f(x) > x, \forall x \in \mathbb{R}$ hoặc $f(x) < x, \forall x \in \mathbb{R}$.

• Nếu $f(x) > x, \forall x \in \mathbb{R}$ thì

$a[f(x)]^2 + bf(x) + c = f(f(x)) > f(x) > x, \forall x \in \mathbb{R}$.

• Tương tự, nếu $f(x) < x, \forall x \in \mathbb{R}$ thì

$a[f(x)]^2 + bf(x) + c = f(f(x)) < f(x) < x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy PT $a[f(x)]^2 + bf(x) + c = x$ vô nghiệm.

**Câu 4.** Ta có $xy + yz + zx = xyz \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

Đặt $a = \frac{1}{x}$, $b = \frac{1}{y}$, $c = \frac{1}{z}$, ta có $a, b, c > 0$ và

$$a + b + c = 1 \qquad (1)$$

Khi đó bất đẳng thức đã cho trở thành

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \ge 3(a^2 + b^2 + c^2) \qquad (2)$$

Vì $a + b + c = 1$ nên

$$(2) \Leftrightarrow \left(\frac{a^2}{b} - 2a + b\right) + \left(\frac{b^2}{c} - 2b + c\right) + \left(\frac{c^2}{a} - 2c + a\right)$$

$$\ge 3(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c)^2$$

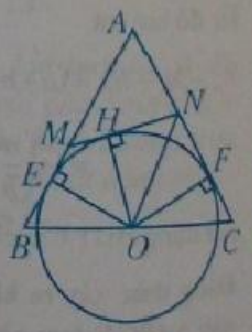
$$\Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{b} + \frac{(b-c)^2}{c} + \frac{(c-a)^2}{a} \ge (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{b} - 1\right)(a-b)^2 + \left(\frac{1}{c} - 1\right)(b-c)^2 + \left(\frac{1}{a} - 1\right)(c-a)^2 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+c)}{b}(a-b)^2 + \frac{(b+a)}{c}(b-c)^2 + \frac{(c+b)}{a}(c-a)^2 \ge 0.$$

BĐT này đúng vì $a, b, c > 0$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$ hay $x = y = z = 3$.

**Câu 5.** (h.1) Theo tính chất tiếp tuyến đường tròn ta có




*Hình 1*

$\widehat{MON} = \frac{1}{2}\widehat{EOF}$ và

$\widehat{OEA} = \widehat{OFA} = 90°$

$\Rightarrow \widehat{BAC} + \widehat{EOF} = 180°$

$\Rightarrow \widehat{MON} = \frac{180° - \widehat{BAC}}{2}$

$= \widehat{ABC} = \widehat{ACB}$

$\Rightarrow \widehat{MOB} = 180° - \widehat{BMO} - \widehat{ABC}$

$= 180° - \widehat{OMN} - \widehat{MON} = \widehat{ONM} = \widehat{ONC}$.

Từ đó suy ra $\Delta MOB \backsim \Delta ONC$ (g.g).

b) Do $\Delta MOB \backsim \Delta ONC$ nên $\frac{MB}{OC} = \frac{OB}{NC}$, do đó $BM.CN = OB.OC = \frac{BC^2}{4}$ (không đổi).

# ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

## TRƯỜNG THPT THỰC HÀNH SƯ PHẠM, ĐHSP TP. HỒ CHÍ MINH

### NĂM HỌC 2008 -2009

*(Thời gian làm bài: 150 phút)*

**Câu 1** (2 *điểm*). Giải phương trình

$$\sqrt{2x^2+5x+12}+\sqrt{2x^2+3x+2}=x+5.$$

**Câu 2** (2 *điểm*)

Xét một số tự nhiên $A$ gồm ít nhất 5 chữ số. Đổi chỗ các chữ số của $A$ theo một cách nào đó ta được số $B$. Giả sử rằng $|A-B| = 11\ldots1$ (số tự nhiên gồm $n$ chữ số 1, $n \in \mathbb{N}^*$).

Tìm giá trị nhỏ nhất có thể được của $n$ và chỉ rõ một cặp số tự nhiên $A$, $B$ để $n$ nhận giá trị nhỏ nhất đó.

**Câu 3** (2 *điểm*)

Cho số thực $a$ thoả mãn điều kiện $0 \le a \le 1$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức

$$T=\frac{a}{2-a}+\frac{1-a}{1+a}.$$

**Câu 4** (4 *điểm*)

1) Cho tam giác $ABC$. Trên cạnh $BC$ lấy điểm $D$ sao cho bán kính của các đường tròn nội tiếp hai tam giác $ABD$ và $ACD$ bằng nhau. Chứng minh rằng các đường tròn bàng tiếp góc $A$ của hai tam giác $ABD$ và $ACD$ cũng bằng nhau.

2) Cho nửa đường tròn tâm $O$ đường kính $AB$. Gọi $C$ là trung điểm cung $AB$. $D$ là điểm di động trên cung $BC$. Các đoạn thẳng $AD$ và $OC$ cắt nhau tại $E$. Tìm quỹ tích tâm $I$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác $CDE$.

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP. Hồ Chí Minh) *giới thiệu*

---

Mặt khác, $S_{AMN} = S_{ABC} - S_{BMNC}$ nên $S_{AMN}$ lớn nhất khi và chỉ khi $S_{BMNC}$ nhỏ nhất.

Ta có $S_{BMNC} = S_{BOM} + S_{MON} + S_{NOC}$

$= \frac{1}{2}R(BM+MN+CN)$

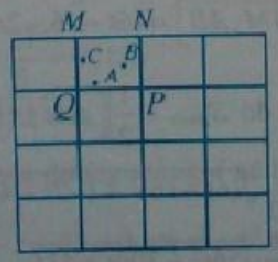
$= \frac{1}{2}R(BM+CN+BM-BE+CN-CF)$

$= R(BM + CN - BE)$ (do $BE = CF$)

$\ge R(2\sqrt{BM.CN}-BE) = R(BC - BE)$.

Vậy $S_{AMN}$ đạt giá trị lớn nhất bằng $R(BC - BE)$ khi $BM = CN$, lúc đó $H$ là điểm chính giữa của cung nhỏ $EF$.

**Câu 6.** (h. 2) Chia hình vuông đã cho thành 16 hình vuông đơn vị (các cạnh song song với các cạnh hình vuông đã cho và có độ dài bằng 1).




*Hình 2*

Do $33 > 16.2$ nên theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại ít nhất 3 điểm nằm trong hoặc trên cạnh của một hình vuông đơn vị. Giả sử đó là ba điểm $A$, $B$, $C$ ở trong hoặc nằm trên cạnh của hình vuông đơn vị $MNPQ$.

Ta có $MP = \sqrt{2}$ và với mọi điểm $E$ thuộc hình vuông $MNPQ$ thì $\sqrt{2} = MP \ge AE$. Từ đó hình tròn $(A\ ;\ \sqrt{2})$ phủ toàn bộ hình vuông $MNPQ$. Tương tự, các hình tròn $(B\ ;\ \sqrt{2})$, $(C\ ;\ \sqrt{2})$ phủ toàn bộ hình vuông $MNPQ$.

Vậy ba hình tròn $(A\ ;\ \sqrt{2})$, $(B\ ;\ \sqrt{2})$, $(C\ ;\ \sqrt{2})$ đều chứa hình vuông $MNPQ$ nên ba điểm $A$, $B$, $C$ nằm trong phần chung của ba hình tròn nói trên.

THÁI VIẾT THẢO
(*Sở GD&ĐT Nghệ An*)
giới thiệu

# Một số dạng toán CỰC TRỊ HÌNH HỌC

HOÀNG ĐỨC NGUYÊN
(GV khối THPT chuyên, ĐHSP Hà Nội)

Trong những năm gần đây, trong đề thi tuyển sinh vào Đại học và Cao đẳng, các bài toán cực trị trong không gian xuất hiện ngày càng nhiều và học sinh thường tỏ ra rất lúng túng khi giải dạng toán này. Bài viết này đưa ra một số bài toán cực trị với lời giải chi tiết nhằm giúp các em nắm bắt được cách giải dạng toán này. (Xin xem thêm THTT số 366, tháng 12/2007).

## I. BÀI TOÁN

*Trong không gian với hệ toạ độ Descartes vuông góc Oxyz, cho hai điểm $A(1;4;2)$ $B(-1;2;4)$ và đường thẳng*

$$d: \frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{2}.$$

**1)** *Tìm toạ độ điểm M thuộc đường thẳng d sao cho:*

a) $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|$ *nhỏ nhất;*

b) $MA^2+MB^2$ *nhỏ nhất;*

c) $MA+MB$ *nhỏ nhất;*

d) *Diện tích tam giác AMB nhỏ nhất.*

**2)** *Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d sao cho khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P) là lớn nhất.*

**3)** *Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng d và tạo với mặt phẳng (xOy) một góc nhỏ nhất.*

**4)** *Viết phương trình mặt phẳng (R) chứa đường thẳng d và tạo với trục Oy góc lớn nhất.*

**5)** *Trong số các đường thẳng đi qua A và cắt đường thẳng d, viết phương trình các đường thẳng sao cho khoảng cách từ B đến nó là lớn nhất? nhỏ nhất?*

**6)** *Cho đường thẳng* $d_1: \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{1}$. *Trong số các đường thẳng đi qua A và cắt đường thẳng d, viết phương trình đường thẳng sao cho khoảng cách giữa nó và $d_1$ là lớn nhất?*

### LỜI GIẢI

1) Gọi $M(1-t;-2+t;2t)\in d$.

a) Ta có $\overrightarrow{MA}=(t;6-t;2-2t)$, $\overrightarrow{MB}=(-2+t;4-t;4-2t)$ và $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=(-2+2t;10-2t;6-4t)$.

Suy ra

$$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\sqrt{(-2+2t)^2+(10-2t)^2+(6-4t)^2}$$
$$=\sqrt{24t^2-96t+140}=\sqrt{24(t-2)^2+44}.$$

Do đó $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất khi $t=2$ và lúc đó $M(-1;0;4)$.

b) Vì $MA^2+MB^2=(t^2+(6-t)^2+(2-2t)^2)$
$+((-2+t)^2+(4-t)^2+(4-2t)^2)$
$=12t^2-48t+76=12(t-2)^2+28$.

Vậy $MA^2+MB^2$ nhỏ nhất khi $t=2$ và khi đó $M(-1;0;4)$.

c) Xem Tạp chí THTT số 366, tháng 12/2007.

d) Ta có $\overrightarrow{AM}=(-t;-6+t;-2+2t)$;
$\overrightarrow{AB}=(-2;-2;2)$;
$\left[\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}\right]=(6t-16;-2t+4;4t-12)$.

Từ đó $S_{AMB}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}\right]\right|$
$=\frac{1}{2}\sqrt{(6t-16)^2+(-2t+4)^2+(4t-12)^2}$
$=\frac{1}{2}\sqrt{56t^2-304t+416}$.

Vì $56t^2 - 304t + 416$ là hàm số bậc hai nên $S_{AMB}$ nhỏ nhất khi $t = \frac{304}{112} = \frac{19}{7}$, lúc đó $M\left(-\frac{12}{7}; \frac{5}{7}; \frac{38}{7}\right)$.

2) Đường thẳng $d$ có PT $\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2y - z + 4 = 0. \end{cases}$

Vì mặt phẳng $(P)$ chứa đường thẳng $d$ nên nó có PT

$a(x + y + 1) + b(2y - z + 4) = 0$ với $a^2 + b^2 \neq 0$.

• Nếu $a = 0$ thì PT (P): $2y - z + 4 = 0$. Khi đó

$$d(A; (P)) = \frac{|2.4 - 2 + 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}.$$

• Nếu $a \neq 0$ ta có thể giả sử $a = 1$. Khi đó PT $(P)$: $x + (1 + 2b)y - bz + 1 + 4b = 0$. Từ đó

$$d(A;(P)) = \frac{|1 + (1+2b).4 - 2b + 1 + 4b|}{\sqrt{1^2 + (1+2b)^2 + (-b)^2}}$$

$$= \frac{|10b + 6|}{\sqrt{5b^2 + 4b + 2}}.$$

Xét hàm số $f(b) = \frac{(5b+3)^2}{5b^2 + 4b + 2}$.

Ta có $f'(b) = \frac{-50b^2 + 10b + 24}{(5b^2 + 4b + 2)^2} = 0$

$\Leftrightarrow b = \frac{4}{5}$ hoặc $b = -\frac{3}{5}$.

Dễ thấy $f\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{35}{6}$; $f\left(-\frac{3}{5}\right) = 0$; $\lim\limits_{b \to \pm\infty} f(b) = 5$.

Do đó $d(A; (P))$ lớn nhất bằng $2\sqrt{\frac{35}{6}}$.

So sánh hai trường hợp ta thấy $d(A; (P))$ lớn nhất bằng $2\sqrt{\frac{35}{6}}$ khi $b = \frac{4}{5}$, lúc đó PT $(P)$ có dạng $x + \frac{13}{5}y - \frac{4}{5}z + \frac{21}{5} = 0$, hay

$(P)$: $5x + 13y - 4z + 21 = 0$.

3) Mặt phẳng $(Q)$ chứa đường thẳng $d$ nên nó có PT

$a(x + y + 1) + b(2y - z + 4) = 0$ với $a^2 + b^2 \neq 0$.

Mặt phẳng $(xOy)$ có PT $z = 0$.

• Nếu $a = 0$ thì PT $(Q)$: $2y - z + 4 = 0$ và nếu gọi $\alpha$ là góc giữa mặt phẳng $(Q)$ và mặt phẳng $(xOy)$ thì $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

• Nếu $a \neq 0$ ta có thể giả sử $a = 1$. Khi đó mp$(Q)$ có PT: $x + (1 + 2b)y - bz + 1 + 4b = 0$.

Từ đó

$$\cos\alpha = \frac{|b|}{\sqrt{1^2 + (1+2b)^2 + (-b)^2}} = \frac{|b|}{\sqrt{5b^2 + 4b + 2}}.$$

Xét hàm số $g(b) = \frac{b^2}{5b^2 + 4b + 2}$. Ta có

$$g'(b) = \frac{4b^2 + 4b}{(5b^2 + 4b + 2)^2} = 0 \Leftrightarrow b = 0 \text{ hoặc } b = -1.$$

Dễ thấy $g(0) = 0$; $g(-1) = \frac{1}{3}$; $\lim\limits_{b \to \pm\infty} g(b) = \frac{1}{5}$.

Do đó $\cos\alpha$ lớn nhất bằng $\sqrt{\frac{1}{3}}$ khi $b = -1$.

So sánh hai trường hợp trên ta thấy $\cos\alpha$ lớn nhất hay mặt phẳng $(Q)$ tạo với mặt phẳng $(xOy)$ góc nhỏ nhất khi $b = -1$. Lúc đó mặt phẳng $(Q)$ có PT là $x - y + z - 3 = 0$.

4) Mặt phẳng $(R)$ chứa đường thẳng $d$ nên có PT:

$a(x + y + 1) + b(2y - z + 4) = 0$,

Trục $Oz$ có véc tơ chỉ phương $\vec{v}$ (0 ; 1 ; 0).

• Nếu $a = 0$ thì PT mặt phẳng $(R)$ có dạng $2y - z + 4 = 0$ và nếu gọi $\beta$ là góc giữa mặt phẳng $(Q)$ và trục $Oy$ thì $\sin\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

• Nếu $a \neq 0$ ta có thể giả sử $a = 1$. Khi đó PT $(R)$ có dạng $x + (1 + 2b)y - bz + 1 + 4b = 0$

$$\sin\beta = \frac{|1 + 2b|}{\sqrt{1^2 + (1+2b)^2 + (-b)^2}} = \frac{|1 + 2b|}{\sqrt{5b^2 + 4b + 2}}.$$

Nhận xét rằng, góc $\beta$ lớn nhất $\Leftrightarrow \sin\beta$ lớn nhất.

Xét hàm số $h(b) = \frac{b^2}{5b^2 + 4b + 2}$. Ta có

$$h'(b) = \frac{-4b^2 + 6b + 4}{(5b^2 + 4b + 2)^2} = 0 \Leftrightarrow b = 2 \text{ hoặc } b = -\frac{1}{2}.$$

(Xem tiếp trang 13)

# Thử sức TRƯỚC KÌ THI

## ĐỀ SỐ 2

*(Thời gian làm bài: 180 phút)*

### I. PHẦN CHUNG

**Câu 1** (2 *điểm*)

Cho hàm số $y = \dfrac{2x-4}{x+1}$ (C)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C).

2) Tìm trên đồ thị (C) hai điểm đối xứng nhau qua đường thẳng $MN$ biết $M(-3\,;\,0)$ và $N(-1\,;-1)$.

**Câu 2** (2 *điểm*)

1) Giải phương trình

$$4\cos^4 x - \cos 2x - \frac{1}{2}\cos 4x + \cos\frac{3x}{4} = \frac{7}{2}.$$

2) Giải phương trình $3^x.2x = 3^x + 2x + 1$.

**Câu 3** (1 *điểm*)

Tính tích phân

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right) e^x dx.$$

**Câu 4** (1 *điểm*)

Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ độ dài cạnh bên bằng l. Các mặt bên hợp với mặt phẳng đáy một góc $\alpha$. Tính thể tích hình cầu nội tiếp hình chóp $S.ABC$.

**Câu 5** (1 *điểm*)

Trong không gian với hệ tọa độ Descartes vuông góc $Oxyz$ cho đường thẳng $l$ có phương trình $\begin{cases} x = 2+3t \\ y = -2t \ (t \in \mathbb{R}) \\ z = 4+2t \end{cases}$

và hai điểm $A(1\,;\,2\,;-1)$, $B(7\,;-2\,;3)$.

Tìm trên đường thẳng $l$ những điểm sao cho tổng các khoảng cách từ đó đến $A$ và $B$ là nhỏ nhất.

### II. PHẦN RIÊNG *(Thí sinh chỉ làm một trong hai phần)*

*THEO CHƯƠNG TRÌNH CHUẨN*

**Câu 6a** (2 *điểm*)

1) Năm đoạn thẳng có độ dài 1 cm, 3 cm, 5 cm, 7 cm, 9 cm. Lấy ngẫu nhiên ba đoạn thẳng trong năm đoạn thẳng trên. Tìm xác suất để ba đoạn thẳng lấy ra lập thành một tam giác.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{x} - 8\sqrt{y} = \sqrt{x} + y\sqrt{y} \\ x - y = 5. \end{cases}$

**Câu 7a** (1 *điểm*)

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \frac{\cos x}{\sin^2 x(2\cos x - \sin x)}, \text{ với } 0 < x \le \frac{\pi}{3}.$$

*THEO CHƯƠNG TRÌNH NÂNG CAO*

**Câu 6b** (2 *điểm*)

1) Tìm các giá trị của $x$ trong khai triển nhị thức Newton: $(\sqrt{2^{\lg(10-3^x)}} + \sqrt[5]{2^{(x-2)\lg 3}})^n$ biết rằng số hạng thứ sáu của khai triển bằng 21 và $C_n^1 + C_n^3 = 2C_n^2$.

2) Cho $\alpha = 3\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$. Tìm các số phức $\beta$ sao cho $\beta^3 = \alpha$.

**Câu 7b** (1 *điểm*)

Gọi $a, b, c$ là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 2. Chứng minh rằng

$$\frac{52}{27} \le a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2.$$

HUỲNH DUY THỦY
*(GV THPT Tăng Bạt Hổ, Hoài Nhơn, Bình Định)*

# Hướng dẫn ôn tập môn Vật lí
# THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG NĂM 2009

NGUYỄN VĂN THUẬN
(GV trường ĐHSP Hà Nội)

Để giúp học sinh ôn thi vào các trường Đại học, Cao đẳng năm 2009, bắt đầu từ số báo này, Tạp chí THTT sẽ giới thiệu những nội dung kiến thức cơ bản của môn Vật lí lớp 12 theo cấu trúc đề thi tuyển sinh năm 2009 của Bộ Giáo dục và Đào tạo. Chúng tôi cũng đưa ra một số thí dụ về các câu trắc nghiệm có tính khái quát, tổng hợp dựa theo nội dung cấu trúc đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng năm 2009 và phương pháp để lựa chọn đáp án đúng.

Trong số báo này chúng tôi đề cập tới hai chủ đề nằm trong nội dung cấu trúc đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng năm 2009 thuộc phần chung cho tất cả thí sinh, đó là **Dao động cơ** và **Sóng cơ**.

Chủ đề **Dao động cơ** (7 câu) gồm các nội dung kiến thức: Dao động điều hoà; Con lắc lò xo; Con lắc đơn; Năng lượng của con lắc lò xo và con lắc đơn; Dao động tắt dần, dao động duy trì, dao động cưỡng bức; Hiện tượng cộng hưởng; Tổng hợp hai dao động điều hoà cùng phương, cùng tần số; Phương pháp giản đồ Fre-nen.

Chủ đề **Sóng cơ** (4 câu) gồm các nội dung kiến thức: Đại cương về sóng âm; Sự truyền sóng; Sóng âm; Giao thoa sóng; Phản xạ sóng và sóng dừng.

Các câu trắc nghiệm trong đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng chỉ ra dưới dạng câu lựa chọn (mỗi câu có 4 phương án lựa chọn, trong đó chỉ có 1 phương án đúng). Để làm dạng trắc nghiệm này, thí sinh cần phải đọc kĩ cả phần dẫn lẫn phần lựa chọn, sau đó vận dụng các kiến thức đã học để tìm được phương án đúng. Dưới đây là một số thí dụ về các câu trắc nghiệm thuộc nội dung hai chủ đề trên.

★**Thí dụ 1.** *Một con lắc lò xo gồm vật có khối lượng m và lò xo có độ cứng k, dao động điều hoà. Nếu tăng độ cứng k lên 2 lần và giảm khối lượng m đi 8 lần thì tần số dao động sẽ*

**A.** *giảm 4 lần.* **B.** *giảm 2 lần.*
**C.** *tăng 4 lần.* **D.** *tăng 2 lần.*

***Hướng dẫn.*** Tần số dao động của con lắc lò xo được tính theo công thức $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$, khi tăng độ cứng $k$ lên 2 lần và giảm khối lượng $m$ đi 8 lần thì tần số dao động của con lắc là

$$f' = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2k}{m:8}} = \frac{4}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = 4f.$$

Vậy tần số tăng lên 4 lần. Đáp án C đúng.

**Chọn C.** ❐

★**Thí dụ 2.** *Phát biểu nào sau đây là sai khi nói về dao động cơ?*

**A.** *Dao động tắt dần có biên độ giảm dần theo thời gian.*

**B.** *Dao động tắt dần có cơ năng không đổi theo thời gian.*

**C.** *Tần số của dao động cưỡng bức bằng tần số của ngoại lực cưỡng bức.*

**D.** *Khi tần số của ngoại lực cưỡng bức bằng tần số dao động riêng của hệ dao động thì xảy ra cộng hưởng.*

***Hướng dẫn.*** Cơ năng của dao động cơ tỉ lệ với bình phương của biên độ dao động. Đối với dao động tắt dần thì biên độ của nó giảm dần theo thời gian. Vì vậy, cơ năng của dao động tắt dần giảm dần theo thời gian. Đáp án B sai.

**Chọn B.** ❐

★**Thí dụ 3.** *Một con lắc lò xo gồm lò xo có độ cứng 20 N/m và viên bi có khối lượng 0,2kg dao động điều hoà. Tại thời điểm t, vận tốc và gia tốc của viên bi lần lượt là 20 cm/s và $2\sqrt{3}m/s^2$. Biên độ dao động của viên bi là*

**A.** 4 cm. **B.** 16 cm.
**C.** $10\sqrt{3}$ cm. **D.** $4\sqrt{3}$ cm.

***Hướng dẫn.*** Phương trình dao động của con lắc

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) \quad (1)$$

Vận tốc $v = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \varphi)$ (2)

Gia tốc $a = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$ (3)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{x^2}{A^2}+\frac{v^2}{\omega^2A^2}=1$;

Từ (3) ta được $\frac{a^2}{\omega^4A^2}+\frac{v^2}{\omega^2A^2}=1$ hay

$A=\frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{a^2}{\omega^2}+v^2}$, trong đó $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{20}{0,2}}=10$.

Thay số $A=\frac{1}{10}\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3}}{10}\right)^2+0,2^2}=0,04\text{m}=4\text{cm}$.

Đáp án A đúng.

**Chọn A.** ❐

★**Thí dụ 4.** *Để khảo sát giao thoa sóng cơ, người ta bố trí trên mặt nước nằm ngang hai nguồn kết hợp $S_1$ và $S_2$. Hai nguồn này dao động điều hoà theo phương thẳng đứng, cùng pha. Xem biên độ sóng không thay đổi trong quá trình truyền sóng. Các điểm thuộc mặt nước và nằm trên đường trung trực của đoạn $S_1S_2$ sẽ*

**A.** *dao động với biên độ cực tiểu.*

**B.** *không dao động.*

**C.** *dao động với biên độ cực đại.*

**D.** *dao động với biên độ bằng nửa biên độ cực đại.*

***Hướng dẫn.*** Xét các điểm thuộc mặt nước và nằm trên đường trung trực của $S_1S_2$, cách đều $S_1$ và $S_2$. Mỗi điểm đó đồng thời nhận được từ $S_1$ và $S_2$ hai dao động cùng pha nên hai dao động đó tăng cường lẫn nhau làm cho dao động tổng hợp tại điểm đó có biên độ cực đại. Như vậy, tất cả các điểm thuộc mặt nước và nằm trên đường trung trực của đoạn $S_1S_2$ sẽ dao động với biên độ cực đại. Đáp án C đúng.

**Chọn C.** ❐

★**Thí dụ 5.** *Trên một sợi dây dài 2m đang có sóng dừng với tần số 100Hz, người ta thấy ngoài hai đầu dây cố định còn có ba điểm khác đứng yên. Vận tốc truyền sóng trên dây là*

**A.** 40 m/s. **B.** 100 m/s.
**C.** 60 m/s. **D.** 80 m/s.

***Hướng dẫn.*** Trên dây có 3 + 2 = 5 nút sóng, tức là có 5 – 1 = 4 múi sóng.

Mỗi múi sóng có độ dài $\frac{\lambda}{2}=\frac{2}{4}=0,5\,(\text{m})$, suy ra $\lambda=1\,\text{m}$.

Vận tốc $v=\frac{\lambda}{T}=\lambda f=100\,(\text{m/s})$. Đáp án B đúng.

**Chọn B.** ❐

*Sau đây là một số câu trắc nghiệm thuộc nội dung hai chủ đề **Dao động cơ** và **Sóng cơ** để các bạn tự làm. Chúng tôi sẽ đưa ra đáp án ở số báo sau.*

**Câu 1.** Một chất điểm dao động điều hoà theo phương trình $x=3\sin\left(5\pi t+\frac{\pi}{6}\right)$. ($x$ tính bằng centimet và $t$ tính bằng giây). Trong một giây đầu tiên từ thời điểm $t=0$, chất điểm đi qua vị trí có li độ $x=+1$ cm.

**A.** 4 lần. **B.** 7 lần. **C.** 5 lần. **D.** 6 lần.

**Câu 2.** Một con lắc đơn gồm sợi dây có khối lượng không đáng kể, không dãn, có chiều dài $l$, và viên bi nhỏ có khối lượng $m$. Kích thích cho con lắc dao động điều hoà ở nơi có gia tốc trọng trường $g$. Nếu chọn mốc thế năng tại vị trí cân bằng thì thế năng của con lắc này ở li độ góc $\alpha$ có biểu thức là

**A.** $mgl(1-\sin\alpha)$. **B.** $mgl(1+\cos\alpha)$.
**C.** $mgl(1-\cos\alpha)$. **D.** $mgl(1+\sin\alpha)$.

**Câu 3.** Khi nói về dao động điều hoà của một chất điểm, điều nào sau đây là đúng?

**A.** Khi chất điểm đi qua vị trí biên, nó có độ lớn vận tốc cực tiểu, độ lớn gia tốc cực tiểu.

**B.** Khi chất điểm đi qua vị trí cân bằng, nó có độ lớn vận tốc cực đại, độ lớn gia tốc cực đại.

**C.** Khi chất điểm đi qua vị trí biên, nó có độ lớn vận tốc cực đại, độ lớn gia tốc cực đại.

**D.** Khi chất điểm đi qua vị trí cân bằng, nó có độ lớn vận tốc cực đại, độ lớn gia tốc cực tiểu.

**Câu 4.** Một sóng cơ lan truyền trên một đường thẳng từ điểm $O$ đến điểm $M$ cách $O$ một đoạn $d$. Biết tần số $f$, bước sóng $\lambda$ và biên độ $A$ của sóng không đổi trong quá trình sóng truyền. Nếu phương trình dao động của phần tử vật chất tại điểm $M$ có dạng $u_M(t)=A\sin(2\pi ft)$ thì phương trình dao động của phần tử vật chất tại $O$ là

**A.** $u_O(t)=A\sin\pi\left(ft-\frac{d}{\lambda}\right)$. **B.** $u_O(t)=A\sin\pi\left(ft+\frac{d}{\lambda}\right)$

**C.** $u_O(t)=A\sin2\pi\left(ft+\frac{d}{\lambda}\right)$ **D.** $u_O(t)=A\sin2\pi\left(ft-\frac{d}{\lambda}\right)$

**Câu 5.** Sóng cơ truyền trong môi trường dọc theo trục $Ox$ với phương trình $u=\sin(20t-4x)$ (cm), ($x$ tính bằng mét, $t$ tính bằng giây). Vận tốc truyền sóng này trong môi trường trên bằng

**A.** 50 cm/s. **B.** 4 m/s. **C.** 40 cm/s. **D.** 5 m/s.

DIỄN ĐÀN DẠY HỌC TOÁN

Trong chương trình môn toán THPT, qua các kì thi, kiểm tra ở lớp 12 chúng ta thường gặp bài toán: *Tìm điều kiện của tham số m để hàm số y = f(x, m) đồng biến hay nghịch biến trên khoảng I* (trong đó *I* là một trong các khoảng $(-\infty ; a)$, $(b ; +\infty)$ hay $(a ; b)$). Việc giải bài toán này thường dẫn đến phải so sánh một số với nghiệm của một tam thức bậc hai.

Trước đây, ta thường sử dụng *Định lí đảo về dấu của tam thức bậc hai* để so sánh một số với các nghiệm của tam thức bậc hai. Hiện nay trong chương trình THPT không đưa *Định lí đảo về dấu của tam thức bậc hai* vào nữa. Bài viết này sẽ đề cập đến cách giải quyết bài toán trên mà không sử dụng đến Định lí đảo về dấu của tam thức bậc hai.

# Suy nghĩ về loại toán TÌM ĐIỀU KIỆN để hàm số đơn điệu trong một khoảng

LÊ VIẾT HÒA
*(GV THPT Vinh Xuân, Phú Vang, Thừa Thiên - Huế)*

## 1. CƠ SỞ LÍ THUYẾT

**• Định lí Viète**

Nếu phương trình bậc hai

$$ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0) \qquad \text{(A)}$$

có hai nghiệm $x_1, x_2$ thì

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a},\ P = x_1.x_2 = \frac{c}{a}.$$

**• Hệ quả**

1) PT (A) có hai nghiệm trái dấu

$$x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow P < 0.$$

2) PT (A) có hai nghiệm cùng dấu

$$x_1 \leq x_2 < 0 \text{ (hoặc } 0 < x_1 \leq x_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0. \end{cases}$$

3) PT (A) có hai nghiệm cùng âm

$$x_1 \leq x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S < 0 \\ P > 0. \end{cases}$$

4) PT (A) có hai nghiệm cùng dương

$$0 < x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S > 0 \\ P > 0. \end{cases}$$

**• Nhận xét.** Đặt $f(x) = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$.

1) $f(x) = 0$ có hai nghiệm $x_1, x_2$ thỏa mãn $x_1 < \alpha < x_2$ tức là $x_1 - \alpha < 0 < x_2 - \alpha$.

Đặt $t = x - \alpha$, $g(t) = f(t + \alpha)$. Dẫn đến $g(t) = 0$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow P_g < 0$.

2) $f(x) = 0$ có hai nghiệm $x_1, x_2$ thỏa mãn $x_1 \leq x_2 < \alpha$ tức là $x_1 - \alpha \leq x_2 - \alpha < 0$

$$\Leftrightarrow g(t) = 0 \text{ có hai nghiệm cùng âm} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_g \geq 0 \\ S_g < 0 \\ P_g > 0 \end{cases}$$

3) $f(x) = 0$ có hai nghiệm $x_1, x_2$ thỏa mãn $\alpha < x_1 \leq x_2$ tức là $0 < x_1 - \alpha \leq x_2 - \alpha$

$\Leftrightarrow g(t) = 0$ có hai nghiệm cùng dương $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_g \geq 0 \\ S_g > 0 \\ P_g > 0. \end{cases}$

## 2. THÍ DỤ MINH HỌA

**★Thí dụ 1.** *Tìm m để hàm số* $y = \dfrac{x^2 + mx - 1}{x - 1}$ (1) *đồng biến trên khoảng* $(1 ; +\infty)$.

***Lời giải.*** TXĐ : $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có $y' = \dfrac{x^2 - 2x - m + 1}{(x-1)^2}$.

Đặt $f(x) = x^2 - 2x - m + 1$. Hàm số (1) đồng biến trên $(1; +\infty) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (1; +\infty)$
$\Leftrightarrow f(x) \geq 0, \forall x \in (1; \infty)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta'_f = m < 0 \\ f(x) = 0 \text{ có hai nghiệm thỏa mãn } x_1 \leq x_2 < 1 (*) \end{array}\right.$$

Đặt $t = x - 1$, $g(t) = f(t + 1)$. Áp dụng nhận xét 2 ĐK (*) tương đương với $g(t) = t^2 - m$ có hai nghiệm không dương.

Tức là $\begin{cases} \Delta'_g = m \geq 0 \\ S_g = 0 \leq 0 \\ P_g = -m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$

Vậy với $m \in (-\infty; 0]$ thì hàm số (1) đồng biến trên $(1; +\infty)$.

**★Thí dụ 2.** *Tìm m để hàm số*

$$y = \frac{1}{3}(m-2)^2 x^3 - \frac{3}{2}(m-6)x^2 - (m+1)x \quad (2)$$

*nghịch biến trên* $(-1 ; 0)$.

***Lời giải.*** TXĐ : $D = \mathbb{R}$. Ta có
$y' = f(x) = (m-2)^2 x^2 - 3(m-6)x - (m+1)$.

Hàm số (2) nghịch biến trên $(-1 ; 0) \Leftrightarrow y' \leq 0$, $\forall x \in (-1 ; 0)$.

+ Khi $m = 2$, ta có $y' = 12x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \dfrac{1}{12}$ tức là $y' \leq 0, \forall x \in (-1 ; 0)$.

+ Khi $m \neq 2 \Rightarrow (m-2)^2 > 0$ nên ta có $y' \leq 0, \forall x \in (-1 ; 0) \Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm $x_1, x_2$ thỏa mãn $\begin{cases} x_1 \leq -1 \leq x_2 & \text{(a)} \\ x_1 \leq 0 \leq x_2 & \text{(b)} \end{cases}$

* Xét trường hợp (a): Đặt $t = x + 1$; $g(t) = f(t - 1)$ theo nhận xét 1 có $y' = f(x) = 0$ có hai nghiệm $x_1, x_2$ thỏa mãn $x_1 \leq -1 \leq x_2$

$\Leftrightarrow g(t) = (m-2)^2 t^2 - (2m^2 - 5m - 10)t + m^2 - 2m - 15 = 0$

có hai nghiệm $t_1, t_2$ thỏa mãn $t_1 \leq 0 \leq t_2$.

$$\Leftrightarrow \frac{m^2 - 2m - 15}{(m-2)^2} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \in [-3; 5] \\ m \neq 2. \end{cases}$$

* Xét trường hợp (b), tương tự dẫn đến

$$\frac{-(m+1)}{(m-2)^2} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ m \neq 2. \end{cases}$$

Kết hợp các trường hợp, ta có $m \in [-1 ; 5]$ thì hàm số (2) nghịch biến trên $(-1 ; 0)$.

**★Thí dụ 3.** *Tìm m để hàm số*

$$y = -\frac{1}{3}mx^3 + (m-1)x^2 + 3(2-m)x - \frac{1}{3} \quad (3)$$

*nghịch biến trên* $(-\infty ; -2]$.

***Lời giải.*** TXĐ : $D = \mathbb{R}$. Ta có
$y' = f(x) = -mx^2 + 2(m-1)x + 3(2-m)$.

Hàm số (3) nghịch biến trên $(-\infty ; -2] \Leftrightarrow y' \leq 0$, $\forall x \in (-\infty ; -2]$.

+ Khi $m = 0$, ta có $y' = -2x + 6 \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$ tức là $\forall x \in (-\infty ; -2]$ không thỏa mãn $y' \leq 0$ (loại).

+ Khi $m \neq 0$, ta có $y' \leq 0, \forall x \in (-\infty ; -2]$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} m > 0 \\ \Delta' = -2m^2 + 4m + 1 \leq 0 \end{cases} & \text{(a)} \\ \begin{cases} m > 0 \\ y' = 0 \text{ có hai nghiệm thỏa mãn } -2 \leq x_1 \leq x_2 \end{cases} & \text{(b)} \end{array}\right.$$

*Xét trường hợp (a) dẫn đến $m \geq \dfrac{2 + \sqrt{6}}{2}$.

*Xét trường hợp (b). Đặt $t = x + 2$, $g(t) = f(t - 2)$, theo nhận xét 3 có

$$\begin{cases} m > 0 \\ g(t) = -m^2 + 2(3m-1) + 10 - 11m = 0 \\ \text{có hai nghiệm } 0 \le t_1 \le t_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \Delta'_g = -2m^2 + 4m + 1 > 0 \\ S_g = \dfrac{2(3m-1)}{m} > 0 \\ P_g = \dfrac{11m-10}{m} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{10}{11} \le m < \frac{2+\sqrt{6}}{2}.$$

Kết hợp với các trường hợp, ta có $m \in \left[\frac{10}{11}; +\infty\right)$ thì hàm số (3) nghịch biến trên $(-\infty; -2]$.

Cuối cùng mời các bạn luyện tập phương pháp trên bằng cách giải các bài tập sau đây.

### 3. BÀI TẬP

1) Tìm $a$ để hàm số

$$y = -\frac{1}{3}x^3 + (a-1)x^2 + (a+3)x - 4$$

đồng biến trên khoảng $(0; 3)$.

2) Tìm $m$ để hàm số $y = \dfrac{x^2 - 2mx + 3m^2}{x - 2m}$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

3) Tìm $m$ để hàm số

$$y = x^3 - 3(2m+1)x^2 + (12m+5)x + 2$$

đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(2; +\infty)$.

## MỘT SỐ DẠNG TOÁN...

(*Tiếp trang 7*)

Dễ thấy $h(2) = \frac{5}{6}; h(-\frac{1}{2}) = 0; \lim\limits_{b \to \pm\infty} h(b) = \frac{4}{5}$.

Do đó $\sin\beta$ lớn nhất bằng $\frac{5}{6}$, khi $b = 2$.

So sánh hai trường hợp ta thấy $\sin\beta$ lớn nhất khi $b = 2$. Lúc đó mặt phẳng $(R)$ có PT

$$x + 5y - 2z + 9 = 0.$$

**5)** Giả sử $d_2$ là đường thẳng bất kì đi qua $A$ và cắt $d$ tại $M(1-t; -2+t; 2t)$. Khi đó

$$d(B; d_2) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{AM}\right|} = \frac{\sqrt{56t^2 - 304t + 416}}{\sqrt{6t^2 - 20t + 40}}$$

$$= \sqrt{\frac{28t^2 - 152t + 208}{3t^2 - 10t + 20}}.$$

Xét hàm số $u(t) = \dfrac{28t^2 - 152t + 208}{3t^2 - 10t + 20}$. Ta có

$u'(t) = \dfrac{16(11t^2 - 8t - 60)}{(3t^2 - 10t + 20)^2} = 0 \Leftrightarrow t = -2$ hoặc $t = \dfrac{30}{11}$. Dễ thấy rằng $u(-2) = 48$; $u\left(\dfrac{30}{11}\right) = \dfrac{4}{35}$; $\lim\limits_{t \to \pm\infty} u(t) = \dfrac{28}{3}$.

Vậy khoảng cách từ $B$ đến $d_2$ lớn nhất bằng 48 khi $t = -2$ và nhỏ nhất bằng $\frac{4}{35}$ khi $t = \frac{30}{11}$.

Hai đường thẳng $d_2$ tương ứng có PT là

$$d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{-4} = \frac{z-2}{-3} \text{ và } d_2: \frac{x-1}{15} = \frac{y-4}{18} = \frac{z-2}{-19}.$$

**6)** Dành cho bạn đọc xem như bài tập

### II. MỘT SỐ BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 1.** (Đề thi Đại học và Cao đẳng khối A – 2008)

Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(2; 3; 5)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-2}{2}$.

a) Tìm toạ độ hình chiếu vuông góc của $A$ trên đường thẳng $d$.

b) Viết phương trình mặt phẳng $(P)$ chứa $d$ sao cho khoảng cách từ $A$ đến $(P)$ lớn nhất.

**Bài 2.** (Đại học An Giang, khối B – 2001)

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng 1. Các cạnh bên là $AA'$, $BB'$, $CC'$, $DD'$. Đặt hệ trục toạ độ $Oxyz$ sao cho $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $D(0; 1; 0)$, $A'(0; 0; 1)$.

a) Viết phương trình chùm mặt phẳng chứa đường thẳng $CD'$.

b) Giả sử $(P)$ là một mặt phẳng bất kì chứa đường thẳng $CD'$ còn $\alpha$ là góc giữa mặt phẳng $(P)$ và mặt phẳng $BB'D'D$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của số đo góc $\alpha$.

TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC SƠ CẤP

# VỀ NHỮNG DÃY SỐ *sinh bởi hàm số*

KIỀU ĐÌNH MINH
*(GV THPT Thanh Ba, Phú Thọ)*

Trên tạp chí THTT số 368 (tháng 2 năm 2008) và số 361 (tháng 8 năm 2007) có đăng hai bài: *Về những dãy số xác định bởi dãy các phương trình* và *Dãy con và sự hội tụ của dãy số*. Đó là những bài viết khá thú vị về giới hạn của dãy số. Để làm phong phú hơn về phần giới hạn của dãy số, trong bài viết này tác giả muốn trao đổi thêm về những dãy số sinh bởi hàm số.

Chúng ta bắt đầu bằng bài toán thi chọn học sinh giỏi Quốc gia THPT năm 1988.

★**Thí dụ 1.** *Xét dãy số $(x_n)$ $(n = 1, 2, ...)$ bị chặn và thỏa mãn điều kiện: $x_n + x_{n+1} \geq 2x_{n+2}$ với mọi $n = 1, 2, ...$ Chứng minh rằng dãy số $(x_n)$ $(n = 1, 2, ...)$ có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.*

***Lời giải.*** Gọi $B$ là cận dưới của dãy đã cho và xét dãy $(A_n)$ xác định bởi $A_n = \max\{x_n, x_{n+1}\}$ thì dãy $(A_n)$ bị chặn dưới bởi $B$.

Do $A_n = \max\{x_n, x_{n+1}\} = \max\left\{x_n, x_{n+1}, \dfrac{x_n + x_{n+1}}{2}\right\}$

$\geq \max\left\{x_{n+1}, \dfrac{x_n + x_{n+1}}{2}\right\} \geq \max\{x_{n+1}, x_{n+2}\} = A_{n+1}$

nên $(A_n)$ là dãy đơn điệu giảm. Vậy dãy $(A_n)$ hội tụ và $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = B$.

Ta chứng minh dãy $(x_n)$ cũng có giới hạn là $B$. Theo định nghĩa thì $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = B \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists N_0 \in N$ sao cho $\forall n \geq N_0$ ta có

$$B - \frac{\varepsilon}{3} < A_n < B + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Với các chỉ số $m > N_0$ thì ta có $x_{m-1} \leq A_{m-1} < B + \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Ta xét hai trường hợp sau:

1) Nếu $x_m > B - \dfrac{\varepsilon}{3}$ thì

$$B - \frac{\varepsilon}{3} < x_m \leq A_m < B + \frac{\varepsilon}{3} \qquad (1)$$

2) Nếu $x_m \leq B - \dfrac{\varepsilon}{3}$ thì từ định nghĩa dãy $(A_n)$ ta có $x_{m+1} > B - \dfrac{\varepsilon}{3}$. Từ đó

$$x_m \geq 2x_{m+1} - x_{m-1} > 2\left(B - \frac{\varepsilon}{3}\right) - \left(B + \frac{\varepsilon}{3}\right) = B - \varepsilon,$$

dẫn đến $B - \varepsilon < x_m \leq B - \dfrac{\varepsilon}{3} < B + \varepsilon$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\forall m > N_0$ ta đều có $B - \varepsilon < x_m \leq B + \varepsilon$, tức là $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = B$. ❐

**Bài tập tương tự**

Cho $(x_n)$ $(n = 1, 2, ...)$ là một dãy số bị chặn trên và thỏa mãn điều kiện $x_{n+2} \geq \dfrac{1}{4}x_{n+1} + \dfrac{3}{4}x_n$, với mọi $n = 1, 2, ...$ Chứng minh rằng dãy số $(x_n)$ $(n = 1, 2, ...)$ có giới hạn và tìm giới hạn đó.

(THTT – T11/365)

★**Thí dụ 2.** *Cho dãy số $(x_n)$ $(n = 1, 2, ...)$ được xác định như sau: $x_1, x_2$ là các số dương cho trước và $x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1}} + \sqrt{x_n}$, với mọi $n = 1, 2, ...$ Chứng minh rằng dãy $(x_n)$ $(n = 1, 2, ...)$ hội tụ. Tìm giới hạn của dãy đó.*

***Lời giải.*** Xét các dãy số $(a_n)$ và $(b_n)$ được xác định như sau:

$$\begin{cases} a_1 = \max\{x_1, x_2, 4\} \\ a_{n+1} = 2\sqrt{a_n},\ n = 1, 2, ... \end{cases}$$

và $\begin{cases} b_1 = \min\{x_1, x_2, 4\} \\ b_{n+1} = 2\sqrt{b_n},\ n = 1, 2, ... \end{cases}$

Ta thấy dãy $(a_n)$ giảm dần về 4, còn dãy $(b_n)$ tăng dần về 4, tức là $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 4$ (1)

Bằng quy nạp, ta chứng minh được các bất đẳng thức $a_n \geq \max\{x_{2n}, x_{2n+1}\}$ và

$b_n \leq \min\{x_{2n}, x_{2n+1}\}$ với mọi $n = 1, 2, ...$ (2)

Từ (1) và (2), theo định lí kẹp ta có

$\lim\limits_{n\to+\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} x_{2n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 4$.

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 4$. □

**Bài tập tương tự**

Cho dãy số $(x_n)$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ được xác định như sau: $x_0, x_1, x_2$ là các số dương cho trước và $x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1}} + \sqrt{x_n} + \sqrt{x_{n-1}}$, với mọi $n = 1, 2, ...$ Chứng minh rằng dãy số $(x_n)$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ hội tụ và tìm giới hạn của dãy.

(THTT – T8/357)

**LỜI BÌNH.** Với hai Thí dụ trên các bạn có thể tổng quát các bài toán theo nhiều hướng khác nhau. Qua đó các bạn đã thấy được ý tưởng của những dãy sinh bởi các hàm số sơ cấp. Cuối cùng, ta xét bài toán tổng quát sau:

✪**Bài toán.** *Giả sử* $f : \mathbb{R}_+^k \to \mathbb{R}$ là hàm tăng theo từng biến và tồn tại số thực dương $a > 0$ sao cho

$f(x, x, ..., x) > x$, với $0 < x < a$

và $f(x, x, ..., x) < x$, với $x > a$.

Cho $x_1, x_2, ..., x_k$ là các số dương. Định nghĩa dãy truy hồi $(x_n)$ như sau: $x_n = f(x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_{n-k})$ với $n > k$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$.

***Lời giải.*** Ta có thể chỉ ra hàm số $f$ liên tục tại điểm $(a, a, ..., a)$ và $f(a, a, ..., a) = a$.

Xét các dãy số $(a_n)$ và $(b_n)$ được xác định như sau:

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = ... = a_k = \min\{x_1, x_2, ..., x_k\} \\ a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_{n-k}), n > k \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1 = b_2 = ... = b_k = \max\{x_1, x_2, ..., x_k\} \\ b_n = f(b_{n-1}, b_{n-2}, ..., b_{n-k}), n > k. \end{cases}$$

Nếu $\min\{x_1, x_2, ...x_k\} > a$ thì $(a_n)$ là dãy giảm và bị chặn dưới bởi $a$.

Nếu $\min\{x_1, x_2, x_k\} < a$ thì $(a_n)$ là dãy tăng và bị chặn trên bởi $a$.

Như vậy ta luôn có $(a_n)$ hội tụ và $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$.

Hơn nữa, do hàm $f$ tăng theo từng biến nên $x_n \leq a_n$, $\forall n = 1, 2...$

Tương tự với dãy $(b_n)$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = a$ và $b_n \leq x_n$, với mọi $n = 1, 2, ...$ Theo định lí kẹp, suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$. □

**Kiến thức bổ sung.** Ở đây các bạn cần biết thêm khái niệm hàm số nhiều biến.

Đặt $\mathbb{R}^k = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times...\times\mathbb{R}$
$= \{(x_1, x_2, ..., x_k) / x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, ..., k\}$.

• Một quy tắc $f$ đặt tương ứng với mỗi điểm $x = (x_1, x_2, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k$ với một số thực duy nhất $y \in \mathbb{R}$ được gọi là hàm số $k$ biến $x_1, x_2, ..., x_k$ và kí hiệu là $y = f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_k)$.

***Thí dụ.*** $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$x = (x_1, x_2, x_3) \mapsto f(x) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3}$.

• Hàm số $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ gọi là tăng theo biến $x_i$ nếu với mọi $x_{i_1} < x_{i_2}$ thì

$f(x_1, x_2, ..., x_{i_1}, ..., x_k) < f(x_1, x_2, ..., x_{i_2}, ..., x_k)$.

• Ta nói $f$: $A \to \mathbb{R}$ với $A \subset \mathbb{R}^k$ có giới hạn $l$ tại $x^0 \in A$ nếu $\forall\ \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$: $|f(x) - l| < \varepsilon$, $\forall x \in A$, $0 < |x_i - x_i^0| < \delta$, $\forall i = 1, 2, ..., k$ và viết là $\lim\limits_{x\to x^0} f(x) = l$.

Hàm số $f : A \to \mathbb{R}$ với $A \subset \mathbb{R}^k$ liên tục tại $x^0 \in A$ nếu $\lim\limits_{x\to x^0} f(x) = f(x^0)$.

ĐẶT MUA TẠP CHÍ TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ DÀI HẠN
VÀ CÁC ẤN PHẨM CỦA TẠP CHÍ TẠI CÁC CƠ SỞ BƯU ĐIỆN TRONG CẢ NƯỚC

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

## CÁC LỚP THCS

**Bài T1/380. (Lớp 6)** Cho

$$A=\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{17}-\frac{1}{31}+\frac{1}{65}-\frac{1}{127}.$$

Hãy so sánh $A$ với $\frac{1}{6}$.

CAO THI LÀNH
*(GV THCS Nam Đào, Nam Trực, Nam Định)*

**Bài T2/380. (Lớp 7)** Cho tam giác $ABC$ cân tại $C$ có $\widehat{ACB}=100^0$. Điểm $M$ thuộc tia $CA$ sao cho $CM = AB$. Tìm số đo của góc $\widehat{CMB}$.

NGUYỄN THANH HẢI
*(GV THCS Nam Cường, Nam Trực, Nam Định)*

**Bài T3/380.** Tìm tất cả các bộ ba số nguyên $(x, y, z)$ thoả mãn

$$\begin{cases} y^3 = x^3 + 2x^2 + 1 \\ xy = z^2 + 2. \end{cases}$$

ĐINH NGỌC THUẦN
*(GV THPT Thái Phiên, Hải Phòng)*

**Bài T4/380.** Tìm hai số $x$, $y$ thoả mãn các điều kiện sau:

$x>1,\ 0<y<1,\ x+y\le\sqrt{5},$

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\le\sqrt{5},\ \frac{x}{x+1}+\frac{y}{1-y}\le\sqrt{5}.$

TRƯƠNG QUANG AN
*(Khoa Toán – Tin 32, ĐH Phạm Văn Đồng)*

**Bài T5/380.** Cho hình thang cân $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn $(O_1 ; R)$ và ngoại tiếp đường tròn $(O_2 ; r)$. Gọi $d = O_1O_2$. Chứng minh bất đẳng thức $\frac{1}{r^2}\ge\frac{2}{R^2+d^2}$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

HUỲNH QUANG LÂU
*(GV THCS Ngô Mây, Phù Cát, Bình Định)*

## CÁC LỚP THPT

**Bài T6/380.** Chứng minh rằng với mọi tam giác $ABC$ ta có

$$\frac{\cot A.\cot B.\cot C}{\sin A.\sin B.\sin C}\le\left(\frac{2}{3}\right)^3.$$

TÔN THẤT HIỆP
*(GV THPT Phan Đăng Lưu, Phú Vang, Thừa Thiên – Huế)*

**Bài T7/380.** Xung quanh một bờ hồ hình tròn có 17 cây cau cảnh. Người ta dự định chặt bớt 4 cây sao cho không có hai cây nào kề nhau bị chặt. Hỏi có bao nhiêu cách thực hiện khác nhau?

ĐỖ THANH HẢN
*(GV THPT chuyên Bạc Liêu)*

**Bài T8/380.** Giải và biện luận (theo tham số $a$) hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x(y^2+a^2)=y(y^2+9a^2) \\ 2y(z^2+a^2)=z(z^2+9a^2) \\ 2z(x^2+a^2)=x(x^2+9a^2). \end{cases}$$

NGUYỄN DUY THÁI SƠN
*(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng)*

## TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

**Bài T9/380.** Dãy số $(x_n)$ với $n = 0, 1, 2, \ldots$ được xác định như sau:

$x_0 = a,\ x_{n+1} = x_n + \sin x + 2\pi$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ với $a, x\in\mathbb{R}$. Chứng minh rằng, tồn tại giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_1+\ldots+x_n}{n^2}$ và tìm giới hạn đó.

NGUYỄN VĂN HẠNH
*(SV K23, ĐH Sư phạm Huế)*

**Bài T10/380.** Chứng minh rằng

a) $\sum\limits_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=\frac{x(1-x)}{n},\ \forall x\in\mathbb{R}$

b) $\sum\limits_{k=0}^{n}\left|\frac{k}{n}-x\right| C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\le\frac{1}{2\sqrt{n}},\ \forall x\in[0;1].$

DƯƠNG VIỆT THÔNG
*(HV Cao học 06-08, ĐHKHTN Hà Nội)*

**Bài T11/380.** Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(n^2) = f(m+n)f(n-m) + m^2, \forall m, n \in \mathbb{R}.$$

VÕ QUỐC BÁ CẨN
*(SV lớp YY0647A1, khóa 32, ĐH Y Dược Cần Thơ)*

**Bài T12/380.** Trên mặt phẳng cho điểm $A$ ở ngoài đường tròn tâm $O$, bán kính $R$. $MN$ là dây cung có độ dài không đổi di động trên đường tròn sao cho hai đoạn thẳng $MN$ và $OA$ luôn cắt nhau. Xác định vị trí $M$ và $N$ sao cho tổng $AM + AN$

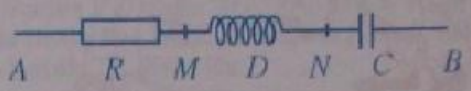
a) là lớn nhất.

b) là nhỏ nhất.

LỤC BÌNH
*(GV THPT Nguyễn Huệ, TX.Quảng Trị, Quảng Trị)*

## CÁC ĐỀ VẬT LÍ

**Bài L1/380.** Một mạch điện xoay chiều gồm một điện trở $R$, cuộn dây $D$ có độ tự cảm $L$ và điện trở thuần $r$, tụ điện có điện dung $C$ mắc nối tiếp nhau như hình vẽ. Cho $U_{AB} = U = 25V$, $U_{AM} = U_R = 13V$, $U_{MN} = U_D = 9,9V$, $U_{NB} = U_C = 22V$. Dòng điện trong mạch có cường độ hiệu dụng $I = 2A$. Hãy tính điện trở $r$ và cảm kháng $Z_L$ của cuộn dây $D$.




NGUYỄN QUANG HẬU
*(Hà Nội)*

**Bài L2/380.** $N$ quả bi da giống hệt nhau được bố trí trên bàn phẳng. Một quả được thúc và qua một số lần va chạm với các quả khác nó dừng lại tại điểm mà từ đó nó bắt đầu chuyển động. Hỏi $N$ nhỏ nhất bằng bao nhiêu thì điều đó có thể xảy ra? Coi các va chạm là tuyệt đối đàn hồi.

TRẦN KHÁNH HẢI
*(GV THPT Quốc học Huế)*

# PROBLEMS IN THIS ISSUE

## FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

**T1/380. (For 6th grade)** Compare the number

$$A = \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{17} - \frac{1}{31} + \frac{1}{65} - \frac{1}{127}$$

with $\frac{1}{6}$.

**T2/380. (For 7th grade)** Let $ABC$ be an isosceles triangle (at vertex $C$) with $\widehat{ACB} = 100^\circ$. $M$ is a point chosen on the ray $CA$ such that $CM = AB$. Find the measure of the angle $\widehat{CMB}$.

**T3/380.** Find all triple $(x, y, z)$ of integers such that

$$\begin{cases} y^3 = x^3 + 2x^2 + 1 \\ xy = z^2 + 2. \end{cases}$$

**T4/380.** Find all pair of numbers $x$ and $y$ such that the following conditions hold:

$x > 1$, $0 < y < 1$, $x + y \le \sqrt{5}$,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \le \sqrt{5}, \quad \frac{x}{x+1} + \frac{y}{1-y} \le \sqrt{5}.$$

**T5/380.** Let $ABCD$ be an isosceles trapezoid inscribed inside a circle $(O_1 ; R)$ and circumscribes the circle $(O_2 ; r)$. Let $d = O_1O_2$. Prove that $\frac{1}{r^2} \ge \frac{2}{R^2 + d^2}$. When does equality occur?

## FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

**T6/380.** Prove that in any triangle $ABC$, the following inequality holds

$$\frac{\cot A . \cot B . \cot C}{\sin A . \sin B . \sin C} \le \left(\frac{2}{3}\right)^3.$$

**T7/380.** There are 17 ornament betel-nut trees around a circular pond. How many ways are there to chopped off 4 trees with the condition that no two consecutive trees be removed?

*(Xem tiếp trang 28)*

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

★ **Bài T1/376.** *Trong hệ thập phân, khi ta viết hai số $8^{2008}$ và $125^{2008}$ liền nhau thì nhận được một số có bao nhiêu chữ số?*

***Lời giải.*** Trong hệ thập phân, giả sử số $8^{2008} = 2^{6024}$ có $m$ chữ số và số $125^{2008} = 5^{6024}$ có $n$ chữ số thì

$$10^{m-1} < 2^{6024} < 10^m \quad (1)$$

$$10^{n-1} < 5^{6024} < 10^n \quad (2)$$

Nhân theo từng vế các bất đẳng thức (1) và (2) ta được

$$10^{m+n-2} < 10^{6024} < 10^{m+n}.$$

Suy ra $m+n-2 < 6024 < m+n.$.

Do đó $m+n-1 = 6024$ hay $m+n = 6025$.

Vậy trong hệ thập phân khi viết hai số $8^{2008}$ và $125^{2008}$ liền nhau thì nhận được một số có $m+n = 6025$ chữ số. ❐

**Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải đúng:

**Phú Thọ:** *Dương Mạnh Tùng*, 6A1, THCS Lâm Thao, *Bùi Hữu Lợi*, 6C, THCS Tiên Kiên; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Văn Hải* (A), *Nguyễn Thành Công*, 6A1, THCS Yên Lạc, *Nguyễn Quỳnh An, Lê Trần Minh Anh, Nguyễn Thị Ngọc Ánh, Trần Lê Lan Chi, Phạm Hoàng Dũng, Hoàng Hải Đăng, Lê Thị Việt Hà, Nguyễn Thu Hằng, Nguyễn Thùy Linh, Đỗ Thị Thùy Linh, Trần Long, Nguyễn Minh Phương*, 6A1, THCS Hai Bà Trưng, TX Phúc Yên; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Cường*, 6D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** *Thân Ngọc Phương Chi, Bùi Linh Giang, Trần Ngọc Tùng Dương, Nguyễn Thị Hương Giang, Võ Thị Hồng Nhung*, 6A, *Trần Thọ Lưu*, 6A1, *Phạm Tiến Minh Đức, Trần Huy Hoàng, Lê Văn Minh, Lê Quang Trung*, 6B, THCS BC Xuân Diệu, Can Lộc; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Bảo Trâm*, 6A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành.

VIỆT HẢI

★ **Bài T2/376.** *Tìm phân số $\frac{a}{b}$ thỏa mãn ba điều kiện sau:*

i) $-\frac{1}{2} < \frac{a}{b} < -\frac{2}{5}$ (1)

ii) $11a + 5b = 26$ (2)

iii) $200 < |a| + |b| < 230$ (3)

***Lời giải.*** Từ điều kiện (1) ta suy ra

$$-\frac{11}{2} < \frac{11a}{b} < -\frac{22}{5} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < \frac{11a+5b}{b} = \frac{26}{b} < \frac{3}{5}$$

Cũng từ (1) suy ra $a$ và $b$ trái dấu. Từ (2) ta có $a$ chia cho 5 dư 1. Đặt $a = 5k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$) thì $5b = 26 - 11(5k+1) = 15 - 55k \Rightarrow b = -11k + 3$.

• Nếu $a < 0$, $b > 0$ từ $\frac{26}{b} < \frac{3}{5} \Rightarrow b > \frac{26.5}{3} > 43$ $\Rightarrow -11k + 3 > 43 \Rightarrow k < -3$.

Lúc này, $|a| + |b| = -16k + 2$. Kết hợp với (3) ta có

$200 < -16k + 2 < 230 \Leftrightarrow -14{,}2 < k < -12{,}4$ $\Leftrightarrow k \in \{-13; -14\}$.

• Nếu $a > 0$; $b < 0$ thì từ $-\frac{1}{2} < \frac{26}{b} \Rightarrow -b > 26.2 = 52 \Leftrightarrow -11k + 3 < -52 \Leftrightarrow k > 5$.

Lúc này, $|a| + |b| = 16k - 2$. Kết hợp với (3) ta có $200 < 16k - 2 < 230 \Leftrightarrow -14{,}2 < k < 14{,}5$ $\Leftrightarrow k \in \{13; 14\}$.

Bài toán có 4 nghiệm tương ứng với 4 giá trị của $k$:

$$\frac{a}{b} \in \left\{\frac{-64}{146}; \frac{-69}{157}; \frac{66}{-140}; \frac{71}{-151}\right\}. ❐$$

**Nhận xét.** 1) Bài toán này yêu cầu lời giải phải chi tiết, cặn kẽ. Nhiều bạn xét thiếu trường hợp hoặc kiểm tra điều kiện sai nên đáp số chưa đầy đủ.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

**Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Mai Phương B*, 7A1, THCS Hai Bà Trưng, TX. Phúc Yên; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Hữu Dũng*, 7A, THCS Hàn Thuyên, Lương Tài; **Hà Nội:** *Trần Quang Toàn*, 7A, trường BC Lương Thế Vinh, Q. Cầu Giấy; **Hải Dương:** *Trần Xuân Thắng*, 7/1, THCS Lê Quý Đôn, TP. Hải Dương; **Quảng Trị:** *Vũ Hoàng*

*Minh*, 7A, THCS Nguyễn Du, Đông Hà; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Bảo Trâm*, 7A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★**Bài T3/376.** *Tìm tất cả các số tự nhiên n khác 0 sao cho số* $A=\dfrac{1.3.5.7...(2n-1)}{n^n}$ *là một số nguyên, trong đó tử số của A là tích của n số tự nhiên lẻ đầu tiên.*

***Lời giải***

• Với $n = 1$ thì $A = 1$ là số nguyên.

• Với $n > 1$, ta sẽ chứng tỏ $A$ không là số nguyên.

*Cách 1.* Biến đổi như sau

$$A = \frac{1.3...(2n-1).2.4...2n}{n^n.2.4...2n}$$
$$= \frac{1.2.3...n(n+1)(n+2)...(2n-1).(2n)}{(2n)^n.1.2...n}$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)...(2n-1)}{(2n)^{n-1}}.$$

Do $(n+1)(n+2)...(2n-1) < \underbrace{2n.2n...2n}_{n-1 \text{ thừa số}} = (2n)^{n-1}$

nên $0 < A < 1$.

*Cách 2.* Áp dụng BĐT $ab \le \dfrac{(a+b)^2}{4}$ (Đẳng thức xảy ra khi $a = b$). Với $n > 1$ ta có

$$0 < 1.(2n-1) < n^2$$
$$0 < 3.(2n-3) \le n^2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$0 < (2n-3).3 \le n^2$$
$$0 < (2n-1).1 < n^2.$$

Nhân theo vế $n$ BĐT trên ta được

$$0 < (1.3.(2n-3)(2n-1))^2 < (n^n)^2$$

dẫn đến $1.3...(2n-3)(2n-1) < n^n$.

Suy ra $0 < A < 1$.

Vậy $n = 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. ❐

**Nhận xét.** 1) Nhiều bạn đã sử dụng BĐT Cauchy cho $n$ số để giải bài này. Tuy nhiên trong khuôn khổ của cấp THCS ta không nên dùng nó.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

**Hà Nội:** *Trần Quang Toàn*, 7A0, trường Lương Thế Vinh, *Lê Minh Phúc*, 8A5, THCS Giảng Võ; **Vĩnh Phúc:** *Phạm Thị Khánh Linh*, *Đỗ Thị Thu Uyên*, 7A1, THCS Yên Lạc; **Phú Thọ:** *Đinh Anh Hoàng*, 8A3, THCS Lâm Thao; **Nghệ An:** *Hoàng Trọng Đường*, 9B, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Quảng Trị:** *Nguyễn Kim*, 7A, THCS Phan Đình Phùng; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Bảo Trâm*, 7A, *Hồ Tấn Vũ*, 8A, *Nguyễn Tấn Kỳ*, *Nguyễn Thị Diễm My*, 9A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; **Bạc Liêu:** *Trần Quang Minh*, 8/4, THCS Trần Huỳnh, TX. Bạc Liêu.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★**Bài T4/376.** *Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \ge \frac{3}{2}(a+b+c-1) \qquad (1)$$

*trong đó a, b, c là các số thực dương thoả mãn điều kiện abc = 1. Đẳng thức xảy ra khi nào ?*

***Lời giải.*** Vì $a$, $b$, $c$ là các số thực dương và $abc = 1$ nên ta có thể đặt $a=\dfrac{x}{z}$, $b=\dfrac{y}{x}$, $c=\dfrac{z}{y}$ với $x, y, z$ là các số thực dương.

Khi đó BĐT (1) trở thành

$$\frac{x^2}{yz}+\frac{y^2}{zx}+\frac{z^2}{xy} \ge \frac{3}{2}\left(\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}-1\right) \qquad (2)$$

Do (2) không đổi trong phép hoán vị vòng quanh $x, y, z$ nên không mất tính tổng quát có thể giả thiết rằng $z = \min(x, y, z)$.

Ta có

$$(2) \Leftrightarrow 2(x^3+y^3+z^3)+3xyz \ge 3(x^2y+y^2z+z^2x)$$
$$\Leftrightarrow (2x^2+yz)(x-y)+(2y^2+xz)(y-z) + (2z^2+xy)(z-x) \ge 0$$
$$\Leftrightarrow (2x^2+yz)(x-y)-(2y^2+xz)((x-y)+(z-x)) +(2z^2+xy)(z-x)) \ge 0$$
$$\Leftrightarrow (x-y)(2(x-y)(x+y)-z(x-y)) + (z-x)(2(z-y)(z+y)-x(z-y)) \ge 0$$
$$\Leftrightarrow (x-y)^2(2x+2y-z)+(z-x)(z-y)(2z+2y-x) \ge 0 \quad (3)$$

• Nếu $2z + 2y \ge x$ thì BĐT (3) đúng.

• Nếu $2z + 2y < x$ thì BĐT (3) tương đương với $(x-y)^2(x-z)+(x-y)^2(x+2y)+(z-x)(z-y)(y-x) + (z-x)(z-y)(2z+y) \ge 0$.

Rõ ràng BĐT cuối cùng đúng nên BĐT (3) đúng. Vậy BĐT (2) đúng, do đó BĐT (1) đúng. Đẳng thức trong (2) xảy ra khi $x = y = z$, do đó đẳng thức trong (1) xảy ra khi $a = b = c = 1$. □

**Nhận xét.** 1) Có thể chứng minh BĐT (1) bằng cách sau: Nếu đặt $a = \frac{x}{y}$, $b = \frac{y}{z}$, $c = \frac{z}{x}$ ($x, y, z$ là các số dương) thì (1) trở thành: $\frac{xz}{y^2} + \frac{xy}{z^2} + \frac{yz}{x^2} \geq \frac{3}{2}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} - 1\right)$

$\Leftrightarrow 2(x^3z^3 + x^3y^3 + y^3z^3) + 3x^2y^2z^2 \geq 3(x^3yz^2 + y^3zx^2 + z^3xy^2)$ (4)

Áp dụng BĐT

$m^3 + n^3 + p^3 + 3mnp \geq mn(m+n) + np(n+p) + pm(p+m)$ (5)

trong đó $m, n, p$ là các số thực không âm, ta có:

$x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3 + 3x^2y^2z^2$

$\geq y^2xz(xy + yz) + z^2xy(yz + zx) + x^2yz(zx + xy)$

$\Leftrightarrow x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3 + 3x^2y^2z^2$

$\geq y^3x^2z + y^3z^2x + z^3y^2x + z^3x^2y + x^3z^2y + x^3y^2z$ (6)

Ta có $x^3y^3 + y^3xz^2 \geq 2x^2y^3z$ (7)

$y^3z^3 + z^3yx^2 \geq 2y^2z^3x$ (8)

$z^3x^3 + x^3zy^2 \geq 2z^2x^3y$ (9)

Cộng theo vế các bất đẳng thức (6), (7), (8), (9) ta sẽ được (4). Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$ hay $a = b = c = 1$. Chú ý rằng: bất đẳng thức (5) là trường hợp riêng (khi $k = 1$) của bất đẳng thức Schur sau:

Nếu $m, n, p$ là các số thực không âm và $k \geq 1$, $k \in \mathbb{R}$, thì ta luôn có:

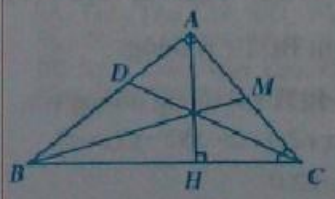
$m^k(m-n)(m-p) + n^k(n-m)(n-p) + p^k(p-m)(p-n) \geq 0$

Đẳng thức xảy ra khi ba số $m, n, p$ bằng nhau hoặc hai trong ba số bằng nhau, số còn lại bằng 0.

2) Bài toán khá khó. Có ít bạn tham gia giải bài này. Phần lớn các lời giải không chính xác. Có 2 bạn giải đúng là: *Nguyễn Văn Thắng*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**; *Lương Hải Đăng*, 9B, THCS Đa Tốn, Gia Lâm, **Hà Nội**.

TRẦN HỮU NAM

**★ Bài T5/376.** *Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH, trung tuyến BM, phân giác CD đồng quy. Tính tỉ số* $\frac{AB}{AC}$.




***Lời giải.*** Vì $AH$, $BM$, $CD$ đồng quy nên theo định lí Ceva, ta có

$$\frac{AD}{DB}.\frac{BH}{HC}.\frac{CM}{MA} = 1 \qquad (*)$$

Lại có $\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{BC}$ (do $CD$ là phân giác),

$\frac{BH}{HC} = \frac{BH.BC}{HC.BC} = \frac{AB^2}{AC^2}$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông $ABC$), $\frac{CM}{MA} = 1$ (do $BM$ là trung tuyến).

Thay các đẳng thức này vào (*), suy ra

$$\frac{AC}{BC}.\frac{AB^2}{AC^2} = 1 \Rightarrow \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BC}{AC}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{AB}{AC}\right)^4 = \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{AB^2 + AC^2}{AC^2} = 1 + \left(\frac{AB}{AC}\right)^2.$$

Đặt $\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = t$ $(t > 0)$ thì ta được phương trình bậc hai: $t^2 - t - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Vậy $\frac{AB}{AC} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$. □

**Nhận xét.** 1) Những bạn không sử dụng định lí Ceva thì dùng đường phụ $MN // BC$ ($N$ nằm trên $AH$) để đi đến kết quả $BH = AC$. Từ kết quả $\frac{AC}{BC}.\frac{AB^2}{AC^2} = 1$ hoặc $BH = AC$, nhiều bạn sử dụng công thức lượng giác trong các tam giác vuông để đi đến kết quả.

2) Bạn *Cao Xuân Thắng*, $9A_7$, THCS Hoài Đức, Hoài Nhơn, **Bình Định** đặt vấn đề ngược lại như sau: "*Nếu tam giác ABC vuông tại A có* $\frac{AB}{AC} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ *thì đường cao AH, trung tuyến BM và phân giác CD đồng quy*".

3) Nếu các bạn để ý rằng $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ là *tỉ số vàng* thì ở bài toán này, $\frac{BH}{HC}\left(= \frac{BC}{AC} = \frac{AB^2}{AC^2}\right)$ chính là *tỉ số vàng*. Điều đó thực là thú vị.

4) Ngoài bạn *Thắng*, các bạn sau đây có lời giải ngắn gọn hơn cả:

**Khánh Hòa:** *Vũ Ngọc Cương*, $8^6$, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh; **Phú Thọ:** *Hà Thị Huyền*

*Nhung*, 9A$^1$, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Lê Văn Tú*, 9A$^1$, *Hoàng Minh Phương*, *Nguyễn Thu Hường*, 7A$^1$, THCS Yên Lạc; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Thị Hương Lý*, 7A$^1$, THCS Đông Thọ, Yên Phong; **Nghệ An:** *Võ Duy Văn*, *Hoàng Danh Thắng*, 9A, *Lê Ngọc Nguyên*, 7A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, *Nguyễn Văn Thắng*, *Hoàng Văn Đông*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Trương Thị Minh Nguyệt*, 9B, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, Nguyễn Thị Anh Tú, 9C, THCS Lê Hồng Phong, Hưng Nguyên, **Quảng Trị:** *Vũ Hoàng Minh*, 7A, THCS Nguyễn Du, Đông Hà; **Ninh Thuận:** *Tô Đình Tân*, 24/2 Thống Nhất, TP. Phan Rang - Tháp Chàm; **Thanh Hóa:** *Hoàng Tiến Dũng*, 9A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc; **Bình Định:** *Nguyễn Hoàng Linh*, 9A$_1$, THCS Mỹ Đức, Phù Mỹ; *Lê Trung Vinh*, 8A$_1$, THCS Bồng Sơn, Hoài Nhơn.

PHAN THỊ MINH NGUYỆT

**★Bài T6/376.** *Giải phương trình*

$$\sqrt[3]{x+6}+\sqrt{x-1}=x^2-1.$$

***Lời giải.*** Điều kiện $x \ge 1$.

Phương trình trong đầu bài tương đương với

$$\left(\sqrt[3]{x+6}-2\right)+\left(\sqrt{x-1}-1\right)=x^2-4$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+6)-8}{\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{x+6}+4}+\frac{(x-1)-1}{\sqrt{x-1}+1}$$

$$=(x-2)(x+2)$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{1}{\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{x+6}+4}+\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}-(x+2)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{x+6}+4}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1}-(x+2)=0 \quad (1) \end{array}\right.$$

Ta có

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{x+6}+4}+\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}$$

$$=x+2 \qquad (2)$$

Vì $x \ge 1$ nên

$$VT(2)=\frac{1}{\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{x+6}+4}+\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}$$

$$\le \frac{1}{\sqrt[3]{49}+2\sqrt[3]{7}+4}+1<2;$$

$$VP(2)=x+2>2>VT(2).$$

Do đó phương trình (2) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=2$. □

**Nhận xét.** Có rất nhiều bạn tham gia giải và hầu hết làm theo cách trên. Các bạn sau đây có lời giải tốt : **Vĩnh Phúc:** *Bùi Văn Toàn*, 9A1, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; *Nguyễn Hữu Dũng*, 7A, THCS Hàn Thuyên, Lương Tài, *Đàm Thị Thanh Hương*, 9B, THCS Từ Sơn, Từ Sơn; **Thanh Hoá:** *Ngọ Văn Dũng*, 10T, THPT chuyên Lam Sơn, TP Thanh Hoá; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Thắng*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** *Đinh Thị Thuỳ Dung*, 9B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ; **Quảng Trị:** *Nguyễn Văn Hải Như*, 8I, THCS Thành Cổ, TX Quảng Trị; **Bình Định:** *Nguyễn Hùng Cường*, 10A2, THPT An Nhơn II, An Nhơn, *Lê Anh Tú*, *Phạm Lê Định*, *Mai Văn Hiếu*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP Quy Nhơn, *Nguyễn Hoàng Linh*, 9A2, THCS Mỹ Đức, Phù Mỹ; **Bến Tre:** *Vũ Hữu Bình*, 10/3, THPT Nguyễn Đình Chiểu, TX Bến Tre; **Kon Tum:** *Trịnh Thị Hải Ly*, 10A1, THPT chuyên Kon Tum.

NGUYỄN ANH DŨNG

**★Bài T7/376.** *Cho tam giác ABC có diện tích bằng S. Đặt BC = a, CA = b, AB = c. Chứng minh bất đẳng thức*

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \ge$$

$$16S^2+\frac{1}{2}a^2(b-c)^2+\frac{1}{2}b^2(c-a)^2+\frac{1}{2}c^2(a-b)^2.$$

*Đẳng thức xảy ra khi nào ?*

***Lời giải.*** Khai triển và rút gọn hai vế ta có BĐT cần chứng minh tương đương với

$$abc(a+b+c) \ge 16S^2 \qquad (1)$$

Sử dụng công thức Heron

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

với $p$ là nửa chu vi tam giác $ABC$, ta suy ra

$$16S^2=(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c).$$

Vậy $(1) \Leftrightarrow abc \ge (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$ (2)

Đặt $b+c-a=x$, $c+a-b=y$, $a+b-c=z$, theo BĐT trong tam giác ta có $x>0$, $y>0$, $z>0$. Hơn nữa, $2a=y+z$, $2b=z+x$, $2c=x+y$.

Từ đó, $(2) \Leftrightarrow (x+y)(y+z)(z+x) \ge 8xyz$ (3)

Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương ta có $x+y \ge 2\sqrt{xy}$, $y+z \ge 2\sqrt{yz}$, $z+x \ge 2\sqrt{zx}$.

Nhân theo vế ba BĐT trên ta được (3). Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$x = y = z \Leftrightarrow a = b = c.$$

Lúc này $\Delta ABC$ là tam giác đều.

**Nhận xét.** 1) Đây là một bài toán tương đối đơn giản nên có rất nhiều bạn tham gia giải và đều cho lời giải đúng. Mấu chốt của bài toán là sử dụng công thức Heron tính diện tích tam giác. Một số bạn sử dụng định lí sin trong tam giác đưa BĐT (1) về chứng minh BĐT lượng giác quen thuộc: $\sin A.\sin B.\sin C \le \frac{1}{8}$.

2) Các bạn nhỏ tuổi có lời giải tốt là:

**Bình Định:** *Nguyễn Quang Hải*, 8A1, THCS Hoài Tân, Hoài Nhơn; *Nguyễn Thị Bạch Tuyết*, 9A6, THCS Phước Hưng, Tuy Phước; **Quảng Trị:** *Nguyễn Hữu Ánh*, 9I, THCS Thành Cổ, TX Quảng Trị; *Võ Trần Tâm*, 8E, THCS Thị Trấn Gia Lính; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Cường*, 6D, *Nguyễn Văn Thắng*, *Phan Phú Nguyên*, *Trương Đình Đức*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Cao Xuân Bang*, 9B, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; *Lê Ngọc Nguyên*, 8A1, THCS Hồ xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Hà Tĩnh:** *Lâm Hoài Anh*, 6A, THCS Sơn Lộc, Can Lộc; **Thanh Hoá:** *Lê Viết Nghĩa*, 8A, THCS Hoằng Minh, Hoằng Hoá; **Nam Định:** *Phùng Mạnh Linh*, 9A4, THCS Trần Đăng Ninh; **Hà Nam:** *Trần Minh Hải*, 9B, THCS Trần Phú, TP. Phủ Lý; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Mạnh Hùng*, *Lê Văn Tú*, *Nguyễn Thế Bảo*, 9A1, THCS Yên Lạc; *Bùi Minh Thi*, 9C, THCS Vĩnh Yên; *Hà Quang Nhận*, 8B, THCS Như Thuỵ, Lập Thạch; *Đặng Quang Tuấn*, 8C, THCS Vĩnh Tường; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Văn Thanh*, 9A, THCS Yên Phong; *Bùi Thị Hoà*, 9A, THCS Đồng Giao, TX Tam Điệp; *Nguyễn Hữu Dũng*, 7A, THCS Hàn Thuyên, Lương Tài; **Phú Thọ:** *Hà Thị Huyền Nhung*, 9A1, THCS Lâm Thao.

NGUYỄN THANH HỒNG

**★Bài T8/376.** *Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh BC = a, AC = b, AB = c thoả mãn điều kiện a + c = 2b. Gọi $h_a$, $h_c$ theo thứ tự là độ dài đường cao xuất phát từ đỉnh A, C; $r_a$, $r_c$ theo thứ tự là bán kính các đường tròn bàng tiếp tương ứng với các đỉnh A, C. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_c}.$$

***Lời giải.*** Gọi $S$, $p$ theo thứ tự là diện tích, nửa chu vi của tam giác $ABC$. Áp dụng các hệ thức quen thuộc

$S = (p-a)r_a = (p-c)r_c = \frac{a.h_a}{2} = \frac{c.h_c}{2}$, ta có

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_c}=\frac{a+c}{2S} \qquad (1)$$

Từ giả thiết $a + c = 2b$, ta nhận thấy

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_c}=\frac{p-a}{S}+\frac{p-c}{S}=\frac{b}{S}=\frac{a+c}{2S} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_c}$. □

**Nhận xét.** 1) Đây là một bài tập không khó, có rất nhiều bạn giải đúng bài toán này. Bạn *Nguyễn Văn Quý*, 10A1 Toán, khối THPT chuyên, ĐHKHTN, ĐHQG **Hà Nội** còn đề xuất và giải thêm bài toán sau. *Với giả thiết của bài T8/376 ta có bất đẳng thức $r_a + r_c \ge h_a + h_c$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\Delta ABC$ đều.*

2) Ngoài bạn *Quý*, các bạn sau có lời giải tốt hơn cả:

**Hà Nội:** *Lê Thế Đường*, 10A1, khối THPT chuyên, ĐHKHTN ĐHQG Hà Nội; *Mai Anh Bằng*, *Đỗ Vũ Thạch*, 10T1, *Nguyễn Đăng Hiếu*, 10T2, khối THPT chuyên, ĐHSP Hà Nội; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Thế Bảo*, *Lê Văn Tú*, 9A1, THCS Yên Lạc, *Lý Duy Cương*, *Lê Anh Chúc*, *Nguyễn Mạnh Quân*, *Lê Tuấn Tú*, 10A1, *Phạm Hữu Đức*, 10A10, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Văn Quý*, 10 Toán, THPT chuyên Bắc Ninh, *Nguyễn Thế Nam Huy*, 10A10, THPT Yên Phong I; **Phú Thọ:** *Hoàng Tuấn Anh*, *Hạ Hồng Việt*, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương; **Hải Dương:** *Nguyễn Tuấn Dũng*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Thái Bình:** *Nguyễn Thị Lệ Dung*, 10 Toán, THPT chuyên Thái Bình; **Nam Định:** *Trần Trọng Huy*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thanh Hóa:** *La Hồng Quân*, *Trịnh Đăng Sơn*, 10T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Cường*, 6D, *Phan Phú Nguyên*, *Nguyễn Văn Thắng*, *Hoàng Văn Đông*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Nguyễn Quang Huy*, *Nguyễn Xuân Hội*, *Nguyễn Hoàng Anh*, 10A1, khối THPT chuyên ĐH Vinh, *Doãn Văn Hùng*, *Lê Trung Hiếu*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Mận Dũng*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Trị:** *Nguyễn Đức Lâm*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đà Nẵng:** *Phan Văn Hoàng Vỹ*, 10A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Phú Yên:** *Lê Cao Thăng*, 10A1, THPT Phan Chu Trinh, Sông Cầu, *Lê Thái Sơn*, 10 Toán 2 THPT Lương Văn Chánh, TP. Tuy Hòa; **Bình Định:** *Nguyễn Quang Hải*, 8A1, THCS Hoài Tân, Hoài Nhơn, *Mai Văn Hiếu*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Quy Nhơn; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn*

*Lâm Minh*, 10CT, THPT chuyên Lê Hồng Phong, *Nguyễn Trung Trường Khanh*, 10A6, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa.

HỒ QUANG VINH

**★ Bài T9/376.** *Xét các số dương a, b, c, x, y, z thoả mãn hệ điều kiện*

$$\begin{cases} cy+bz=a \\ az+cx=b \\ bx+ay=c. \end{cases}$$

*Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P=\frac{x^2}{1+x}+\frac{y^2}{1+y}+\frac{z^2}{1+z}.$$

***Lời giải.*** Do $a, b, c, x, y, z$ là các số thực dương, ta có

$$\begin{cases} cy+bz=a \\ az+cx=b \\ bx+ay=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} cay+abz=a^2 \\ abz+bcx=b^2 \\ bcx+cay=c^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} cay+abz=a^2 \\ abz+bcx=b^2 \\ bcx+cay+abz=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} bcx=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2} \\ cay=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2} \\ abz=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ y=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca} \\ z=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \end{cases} \quad (1)$$

Do đó

$$1+x=1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{1+x}=\frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{2bc((b+c)^2-a^2)}.$$

Tương tự

$$\frac{y^2}{1+y}=\frac{(c^2+a^2-b^2)^2}{2ca((c+a)^2-b^2)},$$

$$\frac{z^2}{1+z}=\frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{2ab((a+b)^2-c^2)}.$$

Bởi vậy

$$P=\frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{2bc((b+c)^2-a^2)}+\frac{(c^2+a^2-b^2)^2}{2ca((c+a)^2-b^2)}+\frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{2ab((a+b)^2-c^2)}.$$

Kí hiệu $F=bc((b+c)^2-a^2)+ca((c+a)^2-b^2)+ab((a+b)^2-c^2)$.

Từ (1) ta có $(b+c)^2>b^2+c^2>a^2$, $(c+a)^2>c^2+a^2>b^2$, $ab((a+b)^2-c^2)$.

Một mặt, áp dụng bất đẳng thức Bunyakovski ta nhận được

$$F.P\geq\frac{1}{2}\left((b^2+c^2-a^2)+(c^2+a^2-b^2)+(a^2+b^2-c^2)\right)$$

$$=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)^2 \quad (2)$$

Mặt khác

$$(a^2+b^2+c^2)^2-F=a^4+b^4+c^4+abc(a+b+c)-(b^3c+bc^3+c^3a+ca^3+a^3b+ab^3)$$

$$=a^2(a^2+bc-ab-ca)+b^2(b^2+ca-ab-bc)+c^2(c^2+ab-bc-ca)$$

$$=a^2(a-b)(a-c)+b^2(b-c)(b-a)+c^2(c-a)(c-b)\geq 0 \quad (3)$$

(đây là một trường hợp của bất đẳng thức Schur, xem THTT số 348, trang 9, tháng 6.2006).

Từ (2) và (3) suy ra $P\geq\frac{1}{2}.\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{F}\geq\frac{1}{2}$, $P=\frac{1}{2}$ khi và chỉ khi $a=b=c$ (khi đó $x=y=z=\frac{1}{2}$).

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P$ bằng $\frac{1}{2}$.□

**Nhận xét.** 1) Cách giải trên chỉ sử dụng kiến thức bậc THCS. Có thể giải bằng cách khác như sau: từ (1) ta suy ra $a, b, c$ là độ dài ba cạnh của một tam giác nhọn, kí hiệu $\Delta ABC$. Khi đó theo định lí Côsin: $x=\cos A$, $y=\cos B$, $z=\cos C$, ta có thể chứng minh

$$P=\frac{\cos^2 A}{1+\cos A}+\frac{\cos^2 B}{1+\cos B}+\frac{\cos^2 C}{1+\cos C}\geq\frac{1}{2}$$

bằng biến đổi lượng giác, hoặc bằng cách dùng bất đẳng thức Jensen cho hàm số lồi.

2) Các bạn lớp 9, lớp 10 sau có lời giải tốt:

**Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Thế Bảo, Lê Văn Tú*, 9A1, THCS Yên Lạc, *Lê Anh Chúc, Phạm Hữu Đức, Đinh Tiến*

*Dũng, Nguyễn Mạnh Quân, Nguyễn Minh Thuận*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Nội:** *Bùi Văn Kiên*, 10A1, THPT Đan Phượng, *Nguyễn Đăng Hiếu*, 10T2, *Đỗ Vũ Thạch*, 10T1, khối THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, *Trần Minh Vương*, 10A2 Toán, *Nguyễn Văn Quý*, 10A1 Toán, khối THPT chuyên, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; **Hải Dương:** *Nguyễn Văn Dương, Nguyễn Văn Hoạt*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Thanh Hóa:** *Ngọ Văn Dũng*, 10T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** *Lê Trung Hiếu, Doãn Văn Hùng, Nguyễn Văn Minh, Đậu Thế Vũ, Phạm Tú Tài*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Tú Khải, Nguyễn Anh Khoa*, 10T, THPT chuyên Lê Khiết; **Phú Yên:** *Phạm Đức Hưng*, 10T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh.

NGUYỄN MINH ĐỨC

**★Bài T10/376.** *Cho hàm số $f$ liên tục trên $\mathbb{R}$, thoả mãn hai điều kiện*

*$f(2010) = 2009$ và $f(x).f_4(x) = 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, trong đó kí hiệu $f_4(x) = f(f(f(f(x))))$.*

*Hãy tính $f(2008)$.*

***Lời giải.*** (Theo đa số các bạn).

Kí hiệu $f_2(x) = f(f(x))$, $f_3(x) = f(f_2(x))$. Gọi $D_f$ là tập giá trị của hàm số $f(x)$. Theo giả thiết thì $2009 \in D_f$. Từ $f(x)f_4(x) = 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, suy ra $f_4(2010) = \dfrac{1}{2009} \in D_f$ và $xf_3(x) = 1, \forall x \in D_f$. Do $f$ liên tục trên $D := \left[\dfrac{1}{2009}; 2009\right] \subset D_f$ nên $f_3(x) = \dfrac{1}{x}, \forall x \in D$.

Từ đây suy ra $f$ là đơn ánh trên $D$ và do $f$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ nên suy ra $f$ là hàm nghịch biến trên $D$.

Giả sử tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) > \dfrac{1}{x_0}$. Do $f$ là hàm nghịch biến nên $f_2(x_0) < f\left(\dfrac{1}{x_0}\right)$ (1)

và $\dfrac{1}{x_0} = f_3(x_0) > f_2\left(\dfrac{1}{x_0}\right)$. Từ đây suy ra

$$f\left(\frac{1}{x_0}\right) < f_3\left(\frac{1}{x_0}\right) = x_0 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $x_0 > f_2(x_0)$ hay $f(x_0) < f_3(x_0) = \dfrac{1}{x_0}$, mâu thuẫn với điều đã giả thiết. Vậy không tồn tại $x_0 \in D$ để $f(x_0) > \dfrac{1}{x_0}$.

Lập luận tương tự, ta cũng chứng minh được không tồn tại $x_0 \in D$ để $f(x_0) < \dfrac{1}{x_0}$.

Vậy nên $f(x) = \dfrac{1}{x}, \forall x \in D$. Mặt khác, do $2008 \in D$ nên suy ra $f(2008) = \dfrac{1}{2008}$. ❐

**Nhận xét.** 1) Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Vĩnh Phúc:** *Hà Văn Hiên*, 11A1 THPT Ngô Gia Tự, Vĩnh Phúc; **Hải Dương:** *Lê Văn Huỳnh*, 12T1, *Vũ Minh Hải*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Thanh Hóa:** *Lê Xuân Thắng*, 12A1 THPT Triệu Sơn 3; **Hà Tĩnh:** *Thiều Đăng Ba, Nguyễn Tâm Đăng, Tăng Hồ Phát*, 12T2, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Đà Nẵng:** *Nguyễn Đăng Thành, Hoàng Bùi Khánh*, 11A1 THPT Chuyên Lê Quý Đôn; **Đăk Lăk:** *Lê Quang Hiếu*, 11CT, THPT chuyên Nguyễn Du; **Quảng Trị:** *Trần Tiến Minh, Lê Dương Trường Giang, Trần Trung Hiếu*, 10T THPT Chuyên Lê Quý Đôn; **Cần Thơ:** *Nguyễn Việt Khánh*, 11A1, *Huỳnh Thúy Ngân*, 12A1 THPT chuyên Lý Tự Trọng; **Bến Tre:** *Lê Phúc Lữ*, 12T, THPT chuyên Bến Tre; **Phú Yên:** *Phan Minh Trí*, 10T, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Bình Định:** *Lê Hoàng Tín*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

NGUYỄN VĂN MẬU

**★Bài T11/376.** *Cho dãy số dương $u_1, u_2, \ldots, u_n$ $(n > 2)$ thoả mãn hai điều kiện sau:*

*i) $\dfrac{1004}{k} = u_1 \geq u_2 \geq \ldots \geq u_n$ với số nguyên dương $k$ nào đó;*

*ii) $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = 2008$.*

*Chứng minh rằng trong dãy số $(u_n)$ có thể chọn ra $k$ số hạng sao cho trong $k$ số đó thì số nhỏ nhất lớn hơn một nửa số lớn nhất.*

***Lời giải.*** (Theo bạn *La Hồng Quân*, 10T, THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hóa**).

Giả sử ngược lại, trong mọi nhóm gồm $k$ số hạng thì số nhỏ nhất không lớn hơn một nửa số lớn nhất.

Xét các nhóm gồm $k$ số hạng sau $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$; $(u_2, u_3, \ldots, u_{k+1})$ ; ... ; $(u_{n-k+1}, u_{n-k+2}, \ldots, u_n)$. Khi đó ta có

$$\begin{cases} u_k \le \dfrac{u_1}{2} \\ u_{k+1} \le \dfrac{u_2}{2} \\ \dots \\ u_n \le \dfrac{u_{n-k+1}}{2}. \end{cases}$$

Suy ra $2(u_k + u_{k+1} + \dots + u_n) \le u_1 + u_2 + \dots + u_{n-k+1}$ $\le \sum_{i=1}^{n} u_i = 2008 \Rightarrow u_k + u_{k+1} + \dots + u_n \le 1004$. Suy ra $u_1 + u_2 + \dots + u_{k-1} \ge 1004$ (1)

Mặt khác, vì $u_{k-1} \le u_{k-2} \le \dots \le u_1 = \dfrac{1004}{k}$ nên

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{k-1} \le (k-1)u_1$$
$$= (k-1).\frac{1004}{k} < 1004 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta thấy có mâu thuẫn. Vậy điều giả sử của ta là sai, do đó bài toán được chứng minh. ❐

**Nhận xét.** 1) Bạn *Lê Trần Tú*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, Vĩnh Phúc đã xét các nhóm gồm $k$ số hạng sau:

$(u_1, u_2, \dots, u_k); (u_{k+1}, \dots, u_{2k}); \dots; (u_{(m-1)k+1}, \dots, u_{mk})$ trong đó $m = \left[\dfrac{n}{k}\right]$ và cũng dẫn đến mâu thuẫn.

2) Tất cả các lời giải gửi đến đều sử dụng phương pháp chứng minh bằng phản chứng.

3) Bạn *Lê Chí Tôn*, 11 Toán, THPT Quốc học Huế, **Thừa Thiên – Huế** đã chứng minh kết quả mạnh hơn: Trong dãy $(u_n)$ có thể chọn ra $k + 1$ số hạng sao cho trong $k + 1$ số đó thì số nhỏ nhất lớn hơn một nửa số lớn nhất.

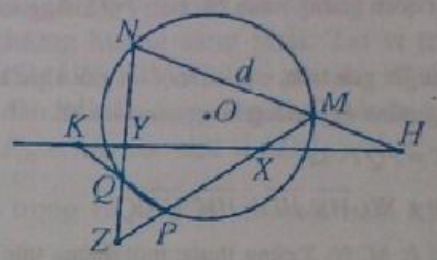
4) Ngoài bạn *Quân, Tú, Tôn*, các bạn sau đây có lời giải tốt: **Vĩnh Phúc:** *Phan Quốc Khánh*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Nam:** *Trần Trung Kiên*, 11 Toán, THPT chuyên Hà Nam; **Nam Định:** *Trần Trọng Huy*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Thái Hoàn, Đinh Quang Lộc*, lớp A3, THPT Hậu Lộc; **Nghệ An:** *Vũ Thị Thu Hà*, 10A1, khối THPT chuyên ĐH Vinh, *Nguyễn Văn Minh*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

**★Bài T12/376.** *Cho đường tròn (O); các điểm X, Y, H thẳng hàng không nằm trên đường tròn (O) và thoả mãn điều kiện $\overline{HX}.\overline{HY} \ne \mathcal{P}_{H/(O)}$. Đường thẳng d đi qua H cắt đường tròn (O) tại các điểm M, N. Các đường thẳng MX, NY theo thứ tự cắt (O) lần nữa tại P, Q. Chứng minh rằng đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi đường thẳng d di động nhưng luôn đi qua H.*

***Lời giải.*** Giả sử $PQ$ song song với $XY$. Ta có $(XM, XY) \equiv (PM, PQ) \equiv (NM, NQ) \equiv (NM, NY) \pmod{\pi}$. Suy ra, tứ giác $XYNM$ nội tiếp. Do đó $\overline{HX}.\overline{HY} = \overline{HM}.\overline{HN} = \mathcal{P}_{H/(O)}$. Mâu thuẫn! Vậy $PQ$ không song song với $XY$. Đặt $K = PQ \cap XY$. Có hai trường hợp cần xem xét:

*Trường hợp 1.* $MX, NY$ không song song (h. 1).



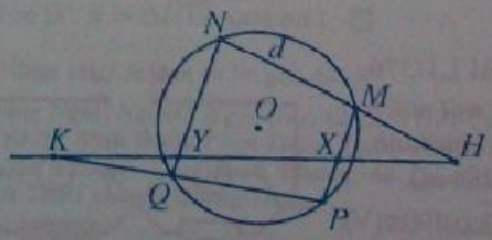

*Hình 1*

Đặt $Z = MX \cap NY$. Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác $XYZ$ với các sự thẳng hàng $K, P, Q$; $H, M, N$ ta có

$$\begin{cases} \dfrac{\overline{KX}}{\overline{KY}}.\dfrac{\overline{QY}}{\overline{QZ}}.\dfrac{\overline{PZ}}{\overline{PX}} = 1 \\ \dfrac{\overline{HX}}{\overline{HY}}.\dfrac{\overline{NY}}{\overline{NZ}}.\dfrac{\overline{MZ}}{\overline{MX}} = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{\overline{KX}}{\overline{KY}}.\frac{\overline{HX}}{\overline{HY}}.\frac{\mathcal{P}_{N/(O)}.\mathcal{P}_{Z/(O)}}{\mathcal{P}_{Z/(O)}.\mathcal{P}_{X/(O)}} = 1.$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{KX}}{\overline{KY}} = \frac{\overline{HY}}{\overline{HX}}.\frac{\mathcal{P}_{X/(O)}}{\mathcal{P}_{Y/(O)}}.$$

*Trường hợp 2.* $MX, NY$ song song (h. 2).




*Hình 2*

Theo định lí Thales, ta có

$$\frac{\overline{KX}}{\overline{KY}}.\frac{\overline{HX}}{\overline{HY}}=\frac{\overline{PX}}{\overline{QY}}.\frac{\overline{MX}}{\overline{NY}}=\frac{\mathcal{P}_{X/(O)}}{\mathcal{P}_{Y/(O)}}.$$

Suy ra $\frac{\overline{KX}}{\overline{KY}}=\frac{\overline{HY}}{\overline{HX}}.\frac{\mathcal{P}_{X/(O)}}{\mathcal{P}_{Y/(O)}}$.

Tóm lại, trong cả hai trường hợp, ta đều có $\frac{\overline{KX}}{\overline{KY}}=\frac{\overline{HY}}{\overline{HX}}.\frac{\mathcal{P}_{X/(O)}}{\mathcal{P}_{Y/(O)}}$ không đổi. Do đó, $K$ cố định. Vậy, đường thẳng $d$ luôn đi qua điểm cố định $K$. ❐

**Nhận xét.** 1) Bài toán này không quá khó nhưng để có một lời giải hoàn chỉnh, ta phải sử dụng tốt hai khái niệm: độ dài đại số; góc định hướng.

2) Khác nhiều bạn tham gia giải, tuy nhiên đa số các bạn đều quên chứng minh chi tiết: $PQ$ không song song với $XY$.

3) Ngoài lời giải trên, còn có một lời giải khác khá hay.

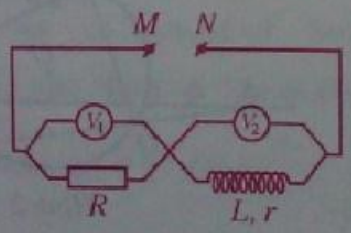
- Chứng minh $PQ$ không song song với $XY$.
- Đặt $K = PQ \cap XY$.
- Lấy $L \in XY$: $\overline{HX}.\overline{HL}=\overline{HM}.\overline{HN}$.
- Ta có $L, M, N, X$ cùng thuộc một đường tròn và $L$ cố định.
- Chứng minh $K, L, N, Q$ cùng thuộc một đường tròn.
- Suy ra $\overline{YK}=\frac{\mathcal{P}_{Y/(O)}}{YL}$ không đổi.
- Vậy $K$ cố định.

4) Xin nêu tên một số bạn có lời giải tương đối tốt:

**Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Mạnh Quân*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Bắc Ninh:** *Trần Tuấn Lãnh*, 11T, THPT chuyên Bắc Ninh; *Trần Anh Tuấn*, 11A1, *Nguyễn Thị Hoàng Yến*, 10A4, THPT Thuận Thành 1; **Thừa Thiên – Huế:** *Võ Thành Văn*, 12T, Khối THPT chuyên, ĐHKH Huế; **Quảng Nam:** *Nguyễn Hồng Sơn*, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Cần Thơ:** *Hồ Diên Tuấn Anh*, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng; **Vĩnh Long:** *Châu Tuấn Kiệt*, 12T, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

NGUYỄN MINH HÀ

**★Bài L1/376.** *Cho một mạch điện như hình vẽ. Biết $u_{MN}=40\sqrt{2}\cos100\pi t$(V), $R=5\Omega$, vôn kế $V_1$ chỉ 15V, vôn kế $V_2$ chỉ 35V. Điện trở các vôn kế vô cùng lớn.*



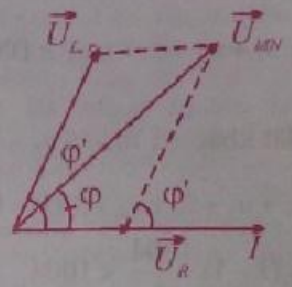

*1) Tính hệ số công suất của mạch điện và của cuộn dây.*

*2) Viết biểu thức của cường độ dòng điện trong mạch điện.*

*3) Tính r, L.*

*4) Tính công suất tiêu thụ của cuộn dây, của điện trở và của toàn mạch.*

***Lời giải.***




1) Theo đầu bài thì $U_{MN}$ = 40V, $U_1 = U_R$ = 15V, $U_2 = U_{L,r}$ = 35V. Từ giản đồ vectơ Fre-nen, ta có

$$U_{L,r}^2=U_{MN}^2+U_R^2-2U_{MN}U_R\cos\varphi.$$

Suy ra $\cos\varphi=\frac{U_{MN}^2+U_R^2-U_{L,r}^2}{2U_{MN}U_R}=\frac{1}{2}$.

Hệ số công suất của mạch điện $\cos\varphi=\frac{1}{2}$.

Ta lại có

$$U_{MN}^2=U_R^2+U_{L,r}^2-2U_RU_{L,r}\cos(180^0-\varphi').$$

Thay số ta được $\cos(180^0-\varphi')=-\frac{1}{7}$, suy ra $\cos\varphi'=\frac{1}{7}$.

Hệ số công suất của cuộn dây $\cos\varphi'=\frac{1}{7}$.

2) Cường độ dòng điện hiệu dụng trong mạch $I=\frac{U_R}{R}=\frac{15}{5}=3$ (A).

Dòng điện trong mạch $i$ trễ pha $\frac{\pi}{3}$ so với hiệu điện thế $u_{MN}$. Ta có biểu thức của cường độ dòng điện $i$ là $i=3\sqrt{2}\cos\left(100\pi t-\frac{\pi}{3}\right)$.

3) Dễ dàng tìm được trở kháng của cuộn dây: $Z_{L,r} = \frac{35}{3}\Omega$.

Ta có $\cos\varphi' = \frac{r}{Z_{L,r}} \Rightarrow r = \cos\varphi'.Z_{L,r}$, do đó $r = \frac{1}{7}.\frac{35}{3} = \frac{5}{3}(\Omega)$. Ta có $Z_L^2 = Z_{L,r}^2 - r^2$; $Z_L = L\omega$; Vậy $(L\omega)^2 = Z_{L,r}^2 - r^2$.

Thay số ta được $L = \frac{\sqrt{3}}{15\pi}$ H.

4) Công suất của cuộn dây

$$P_{cd} = rI^2 = \frac{5}{3}.9 = 15\,(W).$$

Công suất của điện trở $R$: $P_R = RI^2 = 5.9 = 45(W)$.

Công suất toàn mạch:

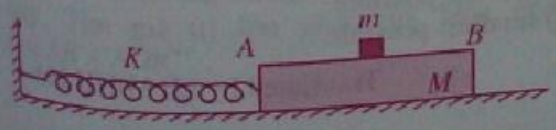
$$P_{tm} = (r+R)I^2 = \left(\frac{5}{3}+5\right).9 = 60\,(W).\ \square$$

**Nhận xét.** 1) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

**Phú Thọ**: *Trần Trung Thế*, 11A1, THPT Thanh Thuỷ; **Vĩnh Phúc**: *Nguyễn Văn Đông*, 12A1, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch, *Dương Quang Thắng*, 11A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Bắc Giang**: *Ngô Hồng Công*, 12A1, THPT Tân Yên 2; **Hà Nội**: *Nguyễn Mạnh Thảo*,12A2, THPT Trần Đăng Ninh, *Nguyễn Văn Phong*, 12T4, THPT Ứng Hoà A: **Hải Dương**: *Nguyễn Văn Nguyên*, *Phạm Đình Tuấn*,12A1, THPT Kẻ Sặt; **Thanh Hoá**: *Vũ Thị Thu Thảo*, 12A6, THPT Đào Duy Từ, *Lê Văn Giang*, 12F, THPT Lam Sơn, *Đinh Thế Tiến*, 12A1, THPT Lương Đắc Bằng, Hoằng Hoá, *Lê Thanh Minh*, 12C12, THPT Lê Văn Hưu, Thiệu Hoá; **Nghệ An**: *Nguyễn Đình Nhâm*, 11A4, K48, Khối THPT chuyên Đại học Vinh; **Quảng Nam**: *Nguyễn Đỗ Chiêu*, 11/2, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Quảng Ngãi**: *Nguyễn Ngọc Duy*, 12Lí, *Nguyễn Tấn Đông*, 11Lí, THPT chuyên Lê Khiết; **Đăk Lăk**: *Trương Công Thành*, 12T1, THPT Ngô Gia Tự, Eakar; **Vĩnh Long**: *Đinh Thanh Nhân*,12L, *Tăng Hồ Phát*, 12T2, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Bình Định**: *Nguyễn Tấn An*, 12Lí, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

NGUYỄN VĂN THUẬN

★**Bài L2/376.** *Một lò xo nhẹ có độ cứng K, một đầu gắn vào giá cố định, đầu kia mắc vào một khối gỗ hình hộp khối lượng M, trên khối gỗ đặt vật nhỏ khối lượng m (hình vẽ).*




*Khối gỗ có thể chuyển động không ma sát trên mặt bàn nằm ngang còn vật m có thể chuyển động không ma sát trên mặt nằm ngang AB của khối gỗ. Tại thời điểm t = 0 người ta đưa khối gỗ đến vị trí lò xo giãn Δl (theo phương trục lò xo) rồi thả nhẹ. Viết phương trình chuyển động của*

*1) Khối gỗ trong hệ quy chiếu gắn với bàn.*

*2) Vật nhỏ m trong :*

*a) Hệ quy chiếu gắn với bàn,*

*b) Hệ quy chiếu gắn với khối gỗ.*

*Giả sử trong quá trình chuyển động vật m không rơi khỏi khối gỗ.*

***Lời giải.*** Trong hệ quy chiếu (HQC) gắn với mặt bàn: chọn gốc toạ độ trùng với khối tâm của khối gỗ tại vị trí lò xo không biến dạng, chiều dương hướng sang phải. Tại vị trí khối tâm khối gỗ có li độ $X$, theo phương ngang chỉ có lực đàn hồi tác dụng lên khối gỗ, ta có:

$$F_{dh} = Ma \Leftrightarrow -kX = MX''.$$

Suy ra trong HQC gắn với mặt bàn, khối gỗ dao động điều hoà với tần số góc $\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$.

Dựa vào điều kiện ban đầu dễ dàng tìm được phương trình dao động có dạng $X = \Delta l\cos\omega t$.

2) a) Trong HQC gắn với mặt bàn, theo phương ngang không có lực tác dụng lên vật $m$ và vận tốc ban đầu của nó bằng không nên vật $m$ sẽ đứng yên.

b) Trong HQC gắn với khối gỗ, chọn trục $Ox$ có gốc $O$ là vị trí của vật m lúc khối gỗ bắt đầu dao động và chiều dương hướng sang phải. Trong HQC này chỉ có lực quán tính tác dụng lên vật và lực quán tính đóng vai trò lực hồi phục nên vật $m$ cũng dao động điều hoà với tần số $\omega$. Phương trình chuyển động của vật $m$ là $x = \Delta l(1-\cos\omega t)$. $\square$

**Nhận xét.** Các bạn có lời giải đúng:

**Quảng Ngãi**: *Nguyễn Ngọc Duy*, 12 Lí, THPT Chuyên Lê Khiết; **Bình Định**: *Phan Thành Luân*, 11 Lí, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bình Phước**: *Lê Quang Sáng*, 12 A THPT chuyên Quang Trung.

NGUYỄN XUÂN QUANG

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath


# Công ti cổ phần Sách Dân tộc khai trương PHÒNG TRƯNG BÀY SÁCH

Nhân đầu xuân Kỷ Sửu, ngày 02/02/2009, tại 25 Hàn Thuyên Hà Nội, Công ti CP Sách Dân tộc, NXBGD đã khai trương Phòng trưng bày và giới thiệu các sản phẩm sách giáo dục, bao gồm: sách cho học sinh dân tộc, sách mầm non (sách dùng cho cô - sách dùng cho trò), tủ sách giáo dục đạo đức và giáo dục pháp luật, sách tham khảo cho học sinh từ bậc Tiểu học đến bậc THPT,... Tham dự buổi khai trương có Vụ trưởng Vụ Giáo dục Dân tộc Bộ GD & ĐT *Mông Kỷ Slay*, Phó Tổng giám đốc kiêm Tổng biên tập NXBGD *Nguyễn Quý Thao*, Giám đốc Công ti *Cấn Hữu Hải* cùng với toàn thể cán bộ Công ti. Việc khai trương phòng trưng bày, giới thiệu và bán phục vụ bạn đọc là một cố gắng lớn của Công ti. Công ti rất mong nhận được sự hợp tác, giúp đỡ của các cơ quan, các tổ chức trong và ngoài nước để biên soạn, xuất bản sách cho các em học sinh dân tộc và miền núi.

Vụ trưởng Vụ Giáo dục Dân tộc, Bộ GD & ĐT *Mông Kỷ Slay* (đứng bên phải) và Giám đốc Công ti CP Sách Dân tộc *Cấn Hữu Hải* tham quan Phòng Trưng bày Sách.

Mọi liên hệ xin gửi về địa chỉ:
CÔNG TI CP SÁCH DÂN TỘC, NXB GIÁO DỤC
25 Hàn Thuyên, Hai Bà Trưng, Hà Nội
ĐT: (04)38246923 - 38264972 - 39725583
Fax: (04)38246923
Email: sales@sachdantoc.vn
Website: http://www.sachdantoc.com.vn


## PROBLEMS... (*Tiếp trang 17*)

**T8/380.** Solve the following system of equations with parameter $a$

$$\begin{cases} 2x(y^2+a^2)=y(y^2+9a^2) \\ 2y(z^2+a^2)=z(z^2+9a^2) \\ 2z(x^2+a^2)=x(x^2+9a^2). \end{cases}$$

### TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

**T9/379** Let $(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ be a sequence given by the following recursive formula:

$x_0 = a$, $x_{n+1} = x_n + \sin x + 2\pi$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, where $a, x \in \mathbb{R}$. Prove that the limit $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_1+\ldots+x_n}{n^2}$ exists and find its exact value.

**T10/380.** Prove that

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 C_n^k x^k(1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}, \forall x\in\mathbb{R}$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{k}{n}-x\right| C_n^k x^k(1-x)^{n-k} \le \frac{1}{2\sqrt{n}}, \forall x\in[0;1]$.

**T11/380.** Find all functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ such that $f(n^2)=f(m+n)f(n-m)+m^2$, $\forall m,n\in\mathbb{R}$.

**T12/380.** On a given plane, choose a point $A$ outside a circle whose center is at a point $O$ and whose radius equals $R$. A chord $MN$ with constant length moves on the circle such that the two line segments $MN$ and $OA$ always intersect.

Determine the positions of $M$ and $N$ such that the sum $AM + AN$ is

a) greatest possible.

b) smallest possible.

Translated by LE MINH HA

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

# KÌ THI OLYMPIC ĐỒNG BẰNG SÔNG CỬU LONG
## lần thứ XVI – năm 2009

CAO MINH QUANG
(GV THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long)

*Kì thi Olympic Đồng bằng Sông Cửu Long lần thứ XVI đã được tổ chức tại trường THPT Nguyễn Đình Chiểu, Thành phố Mỹ Tho, Tỉnh Tiền Giang vào các ngày 3, 4, 5 tháng 1 năm 2009.*

*Tham dự kì thi này có tất cả 402 thí sinh thuộc 9 bộ môn: Toán, Lí, Hóa, Sinh, Văn, Sử, Địa, Anh Văn, Tin học. Mỗi môn có 45 thí sinh dự thi, riêng môn Tin học chỉ có 42 thí sinh dự thi.*

*Các bài thi trong đề thi được tuyển chọn từ những đề thi đề nghị của các Tỉnh, Thành phố tham dự. Yêu cầu các thí sinh dự thi không được sử dụng máy tính bỏ túi để hỗ trợ. Công tác coi thi, chấm thi và tổ chức kì thi diễn ra rất nghiêm túc.*

*Kết quả, Ban tổ chức kì thi đã trao 27 Huy chương (9 Vàng, 9 Bạc, 9 Đồng) cho 27 thí sinh trong tổng số 402 thí sinh tham dự.*

*Kì thi Olympic Đồng bằng Sông Cửu Long lần thứ XVII năm 2010 sẽ được tổ chức tại tỉnh Long An.*

*Dưới đây là đề thi môn Toán lớp 12 với thời gian 180 phút.*

**Câu 1.** (3 *điểm*)

Giải phương trình

$$32x^5+32x^4-16x^3-16x^2+2x+1=0.$$

**Câu 2.** (3 *điểm*)

Cho tam giác $ABC$. Gọi $A', B', C'$ là các điểm bất kì lần lượt trên các cạnh $BC, CA, AB$ sao cho các đường thẳng $AA', BB', CC'$ đồng quy. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = AB'.CA'.BC'$.

**Câu 3.** (2 *điểm*)

Giải phương trình trong tập hợp các số nguyên dương $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{2009}}$.

**Câu 4.** (3 *điểm*)

Cho dãy số $(u_n)$ thỏa mãn điều kiện $0<u_n<1$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ và $u_n(1-u_{n-1})>\frac{1}{4}, \forall n\geq 2$. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

**Câu 5.** (3 *điểm*)

Cho hình hộp chữ nhật có độ dài ba kích thước là các số tự nhiên. Các mặt của hình hộp được sơn màu xanh. Chia hình hộp này thành các khối lập phương đơn vị bằng các mặt phẳng song song với các mặt của hình hộp. Tìm các kích thước của hình hộp, biết rằng số các khối lập phương đơn vị không có mặt nào màu xanh bằng $\frac{1}{3}$ tổng số các khối lập phương đơn vị.

**Câu 6.** (3 *điểm*)

Cho $x, y, z$ là các dương thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F=\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}$.

**Câu 7.** (3 *điểm*)

Cho khối tứ diện $SABC$. $M$ là điểm bất kì nằm trong tứ diện đó. Một mặt phẳng $(\alpha)$ tùy ý qua $M$ cắt các cạnh $SA, SB, SC$ lần lượt tại $A', B', C'$. Đặt $V, V_A, V_B, V_C$ lần lượt là thể tích của các tứ diện $SABC$, $SMBC$, $SMCA$, $SMAB$. Chứng minh rằng $V=\frac{V_A}{SA'}+\frac{V_B}{SB'}+\frac{V_C}{SC'}$.

BẠN CÓ BIẾT ?

# Google™ là gì?

Thoạt tiên mới nhìn qua, ai cũng có thể trả lời được câu hỏi này, nhất là những người tìm kiếm thông tin trên mạng. Đó là bộ máy tìm kiếm hiệu quả hàng đầu trên thế giới, đó là một công ti giàu có bậc nhất trong công nghệ thông tin. Ở đó tập hợp các nhà toán học và tin học để lập ra những thuật toán siêu đẳng về tìm kiếm và có ứng dụng cao.

Nhưng tại sao là Google, mà không phải là một từ khác như Fast Search (tìm kiếm nhanh), Optimality (tối ưu)...! Tra từ điển chẳng thấy Google đâu cả.

Thật ra từ Google xuất phát từ một từ trong toán học. Chúng ta hãy theo dõi câu chuyện sau :

Trong cuốn sách *Mathematics and Imginations* (Toán học và sự tưởng tượng – xuất bản năm 1940) Nhà Toán học Edward Kasner đang suy nghĩ về một con số thật lớn, $10^{100}$, và muốn đặt tên cho con số này. Thật bất ngờ đứa cháu trai đi theo ông, Milton Sirotta, đề nghị từ Googon. Thế là từ Googon ra đời, có nghĩa là số 10 mũ 100. Từ Googon không có nghĩa cụ thể nào trong toán học, nhưng nó được dùng để so sánh với một lượng vô cùng lớn.

Năm 1996, Larry Page đang nghiên cứu một đề tài toán học *Khám phá những tính chất toán học về những liên kết trên mạng lưới*, ở đó mỗi máy tính được xem như một nút, mạng internet xem như là một đồ thị (graph). Để thực hiện được điều này anh ta phải thực hiện một bài toán phụ. Đó là viết một chương trình phân tích những liên kết trả về trên mạng Internet. Không ngờ Page nhận ra rằng bài toán này có thể trở thành một công cụ lớn để tìm kiếm, tối ưu hơn các công cụ khác hiện thời. Ngay lập tức anh ta kết hợp với một nghiên cứu sinh khác là Sergey Brin thực hiện dự án này. Công cụ này có tên đầu tiên là Back Rub.

Để phát triển thành một cái tên thương mại. Họ phải nghĩ ra một cái tên độc đáo. Làm sao diễn tả ước muốn rằng trong giải thuật tìm kiếm của họ, một con số thật lớn lượng thông tin được truy cập và sắp xếp tối ưu trong một thời gian thật nhanh. Bất ngờ họ nghĩ đến cái tên Google. Thực ra phải là Googon mới đúng. Nhưng cuối cùng tên Google được chọn. Lí do là *goo* đi với *gle* đẹp hơn.

Trên con đường đi tìm ý nghĩa của từ Google tôi đã biết thêm được nhiều điều bổ ích. Nếu Larry Page và Sergey Brin không đi theo con đường doanh nghiệp thì họ chắc cũng lấy được bằng Tiến sĩ. Nhưng người đời đánh giá công lao của họ rất to lớn với nhân loại, vì nhờ Google thúc đẩy cho công nghệ thông tin phát triển vượt bậc, mà nắm được thông tin là nắm được chìa khoá của thành công.

NGUYỄN ĐẶNG TRÍ TÍN
*(NXBGD tại TP. Hồ Chí Minh)*

# MỘT NƯỚC DÙNG ĐẾN... 100 LOẠI LỊCH!

Nước dùng lịch hàng ngày có đến 100 loại khác nhau, là nước Ấn Độ. Hầu như mỗi bang của nước này có một loại lịch riêng!
Các loại lịch khác nhau về ngày đầu năm, về số lượng tháng, ngày; và còn khác cả tên gọi của chúng!

Chính quyền Trung ương của nước này từ lâu đã cố gắng để cả nước dùng một loại lịch thống nhất. Song, truyền thống và thói quen của nhân dân Ấn Độ đã làm cho mọi cố gắng của Chính quyền đều không thu được kết quả mong muốn.

NGUYỄN TIẾN BÌNH
*(102A, phố Chợ Khâm Thiên, Hà Nội)*

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

# Toán học và đường đi của quả BI-DA

Bi-da là một trò chơi thể thao tốn ít năng lượng cơ bắp nhất, nhưng tốn nhiều năng lượng trí tuệ (như đánh cờ), và đòi hỏi sự khéo léo như một nghệ sĩ xiếc.

Trò chơi bi-da gồm có bàn bi-da và các quả cầu; bàn bi-da thông thường là hình chữ nhật phẳng, nhưng nói chung là một đa giác phẳng có tường bao quanh. Về phương diện toán học quả cầu là "điểm động" (không kích thước, không gây ma sát lên bàn) ; quả cầu chạy trên mặt bàn với vận tốc không đổi, quỹ đạo là đường thẳng, khi đập vào tường bao của bàn thì bật ngược lại theo định luật phản xạ ánh sáng, nghĩa là "góc phản xạ bằng góc tới".

Cơ thủ (người chơi bi-da) quan tâm đến vấn đề đẩy quả bi-da như thế nào để nó đến được một điểm cho trước sau khi chạm hoặc không chạm vào cạnh của bàn. Còn nhà toán học lại quan tâm đến khả năng khác của quả bi-da : Có hay không có "những quỹ đạo tuần hoàn", nghĩa là những cách đẩy quả bóng sao cho quỹ đạo của nó là một đường khép kín ? Lúc đó quả cầu cứ chạy mãi trên một quỹ đạo khép kín vô hạn lần. Điều này phụ thuộc vào hình dạng của bàn bi-da.

Có những bàn bi-da mà người ta đã chứng minh được sự tồn tại của "quỹ đạo tuần hoàn". Đơn giản nhất là trường hợp bàn bi-da vuông. Có thể chứng minh rằng dù quả bi-da để ở đâu cũng có nhiều hướng đẩy nó để tạo ra một "quỹ đạo tuần hoàn" (Bài toán hình học này dành cho bạn đọc, vì chỉ đòi hỏi kiến thức hình học lớp 7). Vấn đề trở nên phức tạp khi hình dạng của bàn bi-da không phải là hình chữ nhật mà là hình đa giác bất kì.

Từ năm 1998, các công trình của Michael Boshernitzan ở Đại học Rice ở Texas và các đồng nghiệp Đức ở Đại học Bielefeld đã khẳng định rằng có một số quỹ đạo tuần hoàn cho mọi bàn bi-da "đa giác hữu tỉ", nghĩa là đa giác mà góc $A$ tạo bởi hai cạnh kề có dạng $A = k.180^0$, trong đó $k$ là một số hữu tỉ. Hơn nữa, ông còn chứng minh rằng đối với loại bàn đó, có rất nhiều quỹ đạo tuần hoàn.

Một vấn đề đặt ra là phải chăng có ít nhất một quỹ đạo tuần hoàn cho mọi bàn bi-da có dạng đa giác bất kì? Vấn đề này , theo Benoit Rittaud, đã có một lời giải đáp bộ phận.

Việc nghiên cứu "bàn bi-da tuần hoàn" có ích lợi gì trong thực tế không? Vấn đề tưởng là thuần túy toán học đó không ngờ lại có liên hệ đến những lĩnh vực khác ngoài toán học. Đó là lĩnh vực nghiên cứu hệ động, tức là quá trình phát triển của một tình huống, có liên quan đến Vật lí và Sinh học.

PHAN THANH QUANG
(Theo *Benoit Rittaud* trong *Recherche* số 9/2005)

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 380(2.2009)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.35121607
ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35144272, 04.35121606
Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN
GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG
TS. NGUYỄN VĂN VỌNG
GS. ĐOÀN QUỲNH
PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Quản trị kiêm
Tổng Giám đốc NXB Giáo dục
NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc kiêm
Tổng biên tập NXB Giáo dục
NGUYỄN QUÝ THAO

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : PGS. TS. PHAN DOÃN THOẠI Phó Tổng biên tập : TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS .TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KHIẾT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. TRẦN HỮU NAM, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHẤT, PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG, ThS. HỒ QUANG VINH.

## TRONG SỐ NÀY

1 **Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary School**
*Hà Văn Nhân* – Sử dụng công cụ đại số giải một số bài toán hình học.

3 Lễ trao giải cuộc thi Olympic toán Hà Nội mở rộng và Olympic toán Singapore mở rộng năm 2008.

4 Lời giải đề thi vào lớp 10 chuyên toán trường THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An năm học 2008 – 2009.

5 Đề thi vào lớp 10 chuyên toán trường THPT Thực hành Sư phạm, ĐHSP TP. Hồ Chí Minh.

6 **Chuẩn bị thi vào đại học – University Entrance Preparation**
*Hoàng Đức Nguyên* – Một số dạng toán cực trị hình học.

8 **Thử sức trước kì thi**
*Huỳnh Duy Thủy* – Đề số 2.

9 *Nguyễn Văn Thuận* – Hướng dẫn ôn tập môn Vật lí thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng năm 2009.

11 **Diễn đàn dạy học toán – Math Teaching Forum**
*Lê Viết Hòa* – Suy nghĩ về loại toán tìm điều kiện để hàm số đơn điệu trong một khoảng.

14 **Tìm hiểu sâu thêm Toán học sơ cấp – Advanced Elementary Mathematics**
*Kiều Đình Minh* – Về những dãy số sinh bởi hàm số.

16 **Đề ra kì này – Problems in This Issue**
T1/380, ..., T12/380, L1/380, L2/380.

18 **Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems**
Giải các bài của số 376.

29 Kì thi Olympic Đồng bằng Sông Cửu Long lần thứ XVI – năm 2009.

30 **Bạn có biết? – Do you know?**
*Nguyễn Đặng Trí Tín* – *Google* là gì?
*Nguyễn Tiến Bình* – Một nước dùng đến... 100 loại lịch.

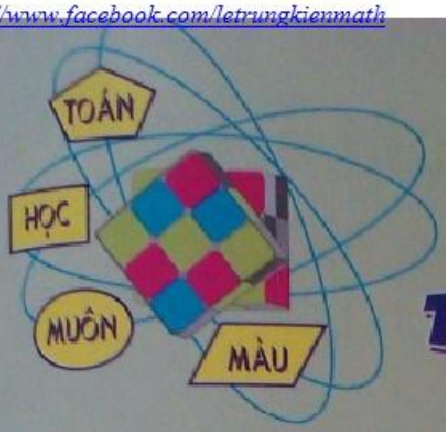
31 **Toán học & đời sống – Math and Life**
*Phan Thanh Quang* – Toán học và đường đi của quả Bi-da.

**Bìa 3. Toán học muôn màu – Multifarious Mathematics**

**Bìa 4. Câu lạc bộ – Math Club**

*Biên tập :* NGUYỄN THANH HỒNG, HỒ QUANG VINH.
*Trị sự, phát hành :* HOÀNG THÀNH ĐỨC, VŨ ANH THƯ
*Mĩ thuật :* MINH THƠ
*Chế bản :* NGUYỄN THỊ OANH

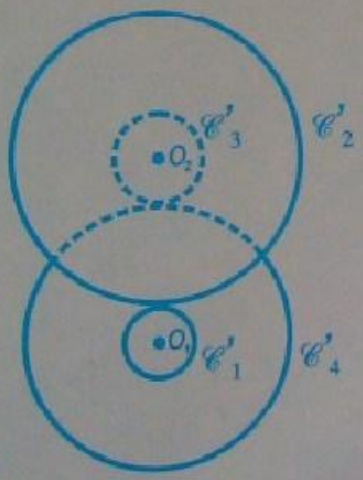
https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath




# Bánh xe răng cưa TRONG ĐỒNG HỒ

Trong đồng hồ cơ học để bàn người ta dùng các bánh xe răng cưa để truyền chuyển động từ kim giây sang kim phút và từ kim phút sang kim giờ.

Bánh xe răng cưa $\mathscr{C}_1$ (tâm $O_1$) gắn với đuôi của kim phút. Bánh xe răng cưa $\mathscr{C}_1$ ăn khớp với bánh xe răng cưa $\mathscr{C}_2$ (tâm $O_2$), nghĩa là $\mathscr{C}_1$ quay được bao nhiêu răng thì $\mathscr{C}_2$ cũng quay được bấy nhiêu răng. Hai bánh xe răng cưa $\mathscr{C}_2$ và $\mathscr{C}_3$ đồng tâm và gắn cố định với nhau, nghĩa là $\mathscr{C}_2$ quay được góc nào thì $\mathscr{C}_3$ cũng quay được góc như thế. Bánh xe răng cưa $\mathscr{C}_3$ ăn khớp với bánh xe răng cưa $\mathscr{C}_4$, còn tâm của bánh xe $\mathscr{C}_4$ gắn với đuôi của kim giờ.




Nếu coi mỗi răng cưa như một tam giác cân (hoặc hình thang cân) với đáy là đoạn nối hai chân của một răng cưa thì đường tròn $\mathscr{C}'_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) ứng với mỗi bánh xe $\mathscr{C}_i$ đi qua trung điểm các cạnh bên của các tam giác cân đó (hình vẽ). Biết rằng để thuận tiện người ta thường làm số răng cưa của mỗi bánh xe là bội của 8 và nằm trong khoảng từ 16 đến 80 răng.

**1)** Biết số răng cưa của các bánh xe $\mathscr{C}_1$ và $\mathscr{C}_2$ tương ứng là 16 và 64. Hỏi số răng của các bánh xe $\mathscr{C}_3$ và $\mathscr{C}_4$ có thể là bao nhiêu? Biết khoảng cách $O_1O_2$ là 1cm. Tính bán kính của các đường tròn $\mathscr{C}'_1, \mathscr{C}'_2, \mathscr{C}'_3, \mathscr{C}'_4$.

**2)** Người ta đặt bánh xe $\mathscr{C}_5$ (tâm $O_5$) đồng tâm với bánh xe $\mathscr{C}_1$ và gắn chúng cố định với nhau, còn bánh xe $\mathscr{C}_6$ (tâm $O_6$) ăn khớp với bánh xe $\mathscr{C}_5$ với số răng của $\mathscr{C}_5$ và $\mathscr{C}_6$ tương ứng là 72 và 24. Khoảng cách giữa hai tâm $O_5O_6$ là 1cm. Bạn cần đặt thêm các bánh xe như thế nào, trong đó có tâm một bánh xe gắn với đuôi kim giây, để truyền chuyển động giữa kim phút và kim giây?

PHI PHI

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

# MỜI ĐỐI
## nhân dịp Tết Kỷ Sửu

Toán Tuổi Trẻ tròn bốn lăm,
càng thêm tuổi, toán càng thêm trẻ.

NGỌC THẢO
(Hà Nội)

## XUÂN VÀ TOÁN

*Em chỉ muốn phương trình có nghiệm*
*Lộc đầu xuân sẽ đến tự nhiên*
*Cho dù thực, ảo còn nguyên*
*Niềm vui xác định trong miền liên thông.*

*Mừng báo Toán bốn lăm năm tuổi*
*Đạo hàm riêng kết nối tình chung*
*Đường đi khi thẳng, khi cong*
*Hoa xuân em xếp theo vòng đồng tâm.*

NGUYỄN ANH DŨNG
(Hà Nội)

## Họa bài "Mừng xuân Kỷ Sửu"

(Bài thơ của tác giả Đào Tam đã đăng trong THTT tháng 1/2009)

**Đã qua năm Chuột, đến năm Trâu.**
**Chúc bạn gần xa vui, khỏe, giàu.**
**Tạp chí vừa hay, vừa hấp dẫn,**
**Bài đăng có ích, có chiều sâu.**
**Đề tài biên tập luôn phong phú,**
**Số lượng bản in hẳn dần đầu.**
**Tuổi trẻ Việt Nam thêm giỏi Toán**
**Sánh cùng bè bạn khắp năm châu.**

LÝ VĂN TOÁN
(Hà Nội)

## Xuân ca Kỷ Sửu 2009

Hai nghìn linh tám trời xao động,
Khủng hoảng lung lay cả địa cầu.
Bão có hoành hành khắp bốn biển,
Ta càng hội nhập với năm châu.
Giáo khoa, chiến dịch đã hoàn tất,
Tham khảo, khúc ca mới dạo đầu.
Chớp lấy thời cơ, vượt thách thức,
Thổi bùng "Khí thế nuốt sao **Ngưu**".

NGUYỄN KHẮC PHI
(NXB Giáo dục)

*Chú thích.* Cụm từ "Khí thôn Ngưu" ở trong bài *Thuật hoài* của danh tướng Phạm Ngũ Lão đời Trần. Có hai cách giải thích cụm từ này đều có cơ sở và ý nghĩa:

1) "Khí thế nuốt sao Ngưu" (sao Ngưu Lang là một ngôi sao rất sáng trên bầu trời);

2) "Khí thế nuốt trôi trâu".

Với nghĩa sau, câu cuối có thể chuyển thành:

Thổi bùng "Khí thế nuốt trôi trâu".

ISSN : 0866-8035 Giấy phép XB số 67/GP-BVHTT cấp ngày 15.6.2004
Chỉ số : 12884 In tại Công ty CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ, Hà Nội Giá : 6000 đồng