TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

7 2017

Số 481

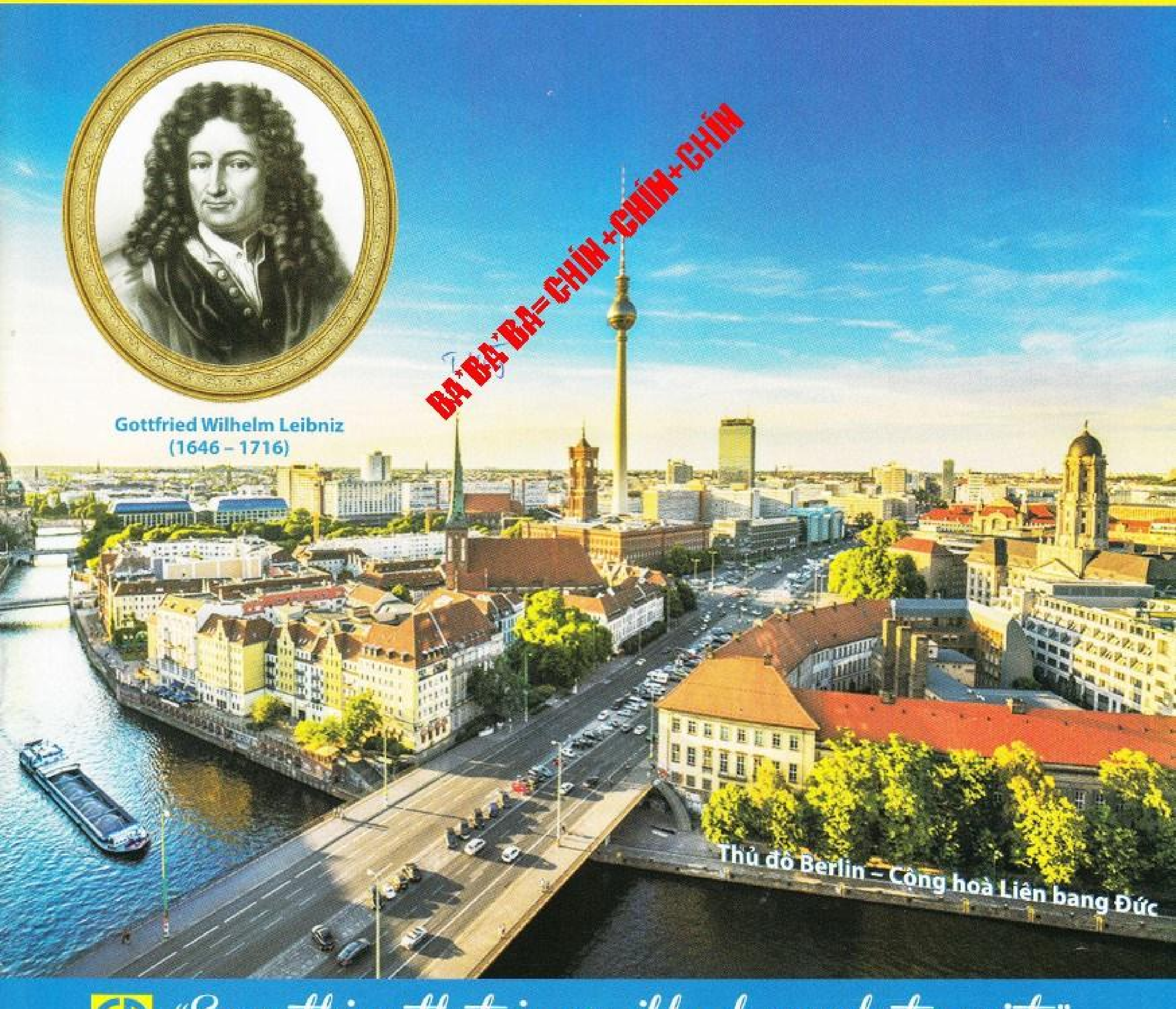
TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 54

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

ĐT Biên tập: (024)35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (024) 35121606

Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre



Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646 – 1716)

Thủ đô Berlin – Cộng hoà Liên bang Đức

"Everything that is possible demands to exist."

~ Gottfried Wilhelm Leibniz ~

VẬN DỤNG ĐỊNH LÍ VIÈTE VÀO VIỆC GIẢI CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP CÓ LIÊN QUAN ĐẾN PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

PHẠM TRỌNG THƯ
(GV THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, Đồng Tháp)

Trong các đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên, lớp 10 THPT cũng như đề thi chọn học sinh giỏi toán cấp THCS của những năm gần đây, chúng ta thường gặp những dạng toán liên quan đến phương trình bậc hai có vận dụng định lí Viète; chẳng hạn như: Tính giá trị của biểu thức, chứng minh bất đẳng thức, tìm giá trị lớn nhất (GTLN) và giá trị nhỏ nhất (GTNN) của biểu thức, giải hệ phương trình (HPT) hai ẩn... Không ít bạn học sinh còn nhiều lúng túng khi giải các dạng toán trên. Nhằm giúp các bạn học sinh làm tốt phần này để có được lời giải hay, ngắn gọn và dễ hiểu, bài viết xin giới thiệu nội dung trên.

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Để giải quyết tốt các dạng toán vừa nêu trên ngoài việc chúng ta cần có kĩ năng giải toán thật tốt; bên cạnh đó ta còn phải nắm chắc các tính chất và định lí liên quan với chúng, trong đó có định lí Viète.

Định lí Viète

Nếu phương trình $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$, $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$.

Ngược lại, nếu hai số u, v có tổng $u+v=S$ và tích $uv=P$ và $S^2\geq 4P$ thì u và v là các nghiệm của phương trình $X^2-SX+P=0$.

Ý nghĩa của Định lí Viète

+ Cho phép nhẩm nghiệm trong những trường hợp đơn giản.

+ Cho phép tính giá trị của biểu thức đối xứng của các nghiệm và xét dấu của các nghiệm không cần giải phương trình.

B. MỘT SỐ DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Dạng 1. Vận dụng định lí Viète vào một số bài toán tính giá trị của biểu thức.

Thí dụ 1. *Cho x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $x^2+2017x+1=0$ và x_3, x_4 là các nghiệm của phương trình $x^2+2018x+1=0$. Tính giá trị của biểu thức $M=(x_1+x_3)(x_2+x_3)(x_1-x_4)(x_2-x_4)$.*

Lời giải. Dễ thấy các PT đã cho luôn có hai nghiệm, nên theo định lí Viète ta có

$x_1+x_2=-2017;\ x_3+x_4=-2018;\ x_1x_2=x_3x_4=1.$

Do vậy

$$M=\left(x_1x_2+(x_1+x_2)x_3+x_3^2\right).\left(x_1x_2-(x_1+x_2)x_4+x_4^2\right)$$
$$=\left(1-2017x_3+x_3^2\right).\left(1+2017x_4+x_4^2\right)$$
$$=\left(x_3^2+2018x_3+1-4035x_3\right).\left(x_4^2+2018x_4+1-x_4\right)$$
$$=(-4035x_3)(-x_4)=4035x_3x_4=4035.$$

Nhận xét. Qua thí dụ vừa nêu trên, nếu các bạn HS giải trực tiếp hai PT bậc hai đã cho để tìm nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4; sau đó thay giá trị các nghiệm vừa tìm vào biểu thức M thì việc tính giá trị M sẽ trở nên phức tạp. Nếu khéo léo vận dụng định lí Viète thì lời giải bài toán sẽ ngắn gọn, dễ hiểu hơn.

Thí dụ 2. *Giả sử phương trình $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ có hai nghiệm x_1, x_2 và thỏa mãn $ax_1+bx_2+c=0$. Tính giá trị của biểu thức $M=a^2c+ac^2+b^3-3abc$. (Đề thi TS vào lớp 10 THPT chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương năm học 2005-2006).*

Lời giải. Từ $ax_1+bx_2+c=0\Rightarrow x_1+\dfrac{b}{a}x_2+\dfrac{c}{a}=0$ (*)

Theo định lí Viète ta có $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a};\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}$.

Nên (*) cho ta

$x_1-x_2(x_1+x_2)+x_1x_2=0\Leftrightarrow x_1-x_2^2=0\Rightarrow x_1=x_2^2.$

Do đó $M=a^3\left(\dfrac{c}{a}+\left(\dfrac{c}{a}\right)^2+\left(\dfrac{b}{a}\right)^3-3\cdot\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{c}{a}\right)$

$=a^3\left[x_2^3+x_2^6-(x_2^2+x_2)^3+3(x_2^2+x_2).x_2^3\right]=a^3.0=0.$

Dạng 2. Vận dụng định lí Viète vào bài toán tìm tham số để các nghiệm của phương trình đã cho thỏa mãn một hệ thức

Thí dụ 3. *Tìm m để phương trình*

$$(x^2-1)(x+4)(x+6)=m$$

có bốn nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ *thỏa mãn*

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=-\frac{2}{5}.$$

Lời giải. PT đã cho tương đương với

$$(x+1)(x+4)(x-1)(x+6)=m$$

$$\Leftrightarrow (x^2+5x+4)(x^2+5x-6)=m \qquad (1)$$

Đặt $t=x^2+5x+\frac{25}{4}=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2\ge 0$, khi đó (1) có dạng $(4t-9)(4t-49)=16m$, hay

$$16t^2-232t+441-16m=0 \qquad (2)$$

PT đã cho có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ PT(2) có hai nghiệm dương phân biệt $t_1,\ t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=256m+6400>0\\ S=\dfrac{29}{2}>0\\ P=\dfrac{441-16m}{16}>0\end{cases} \Leftrightarrow -25<m<\frac{441}{16} \qquad (3)$$

Gọi $x_1,\ x_2$ là nghiệm của PT

$$4x^2+20x+25-4t_1=0 \qquad (4)$$

Gọi $x_3,\ x_4$ là nghiệm của PT

$$4x^2+20x+25-4t_2=0 \qquad (5)$$

Áp dụng định lí Viète cho PT (4), (5) và (2) ta có

$$\begin{cases}x_1+x_2=x_3+x_4=-5\\ x_1x_2=\dfrac{25-4t_1}{4};\ x_3x_4=\dfrac{25-4t_2}{4}.\\ t_1+t_2=\dfrac{29}{2};\ t_1t_2=\dfrac{441-16m}{16}\end{cases}$$

Khi đó $-\frac{2}{5}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}+\frac{x_3+x_4}{x_3x_4}$

$$=-\frac{20}{25-4t_1}-\frac{20}{25-4t_2}$$

$$=-20\left(\frac{50-4(t_1+t_2)}{625-100(t_1+t_2)+16t_1t_2}\right)=\frac{10}{-24-m}.$$

Từ đó suy ra $m=1$ (thỏa mãn (3)).

Nhận xét. Với dạng toán này chúng ta thường không giải PT để đi tìm nghiệm mà biến đổi biểu thức đã cho theo tổng và tích các nghiệm, sau đó vận dụng định lí Viète. Biểu thức biến đổi thường gặp trong dạng toán này là

$$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2;$$

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2;$$

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2);$$

$$x_1^4+x_2^4=\left((x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right)^2-2x_1^2x_2^2,...$$

Dạng 3. Vận dụng định lí Viète vào một số bài toán chứng minh bất đẳng thức, tìm GTLN và GTNN

Thí dụ 4. *Giả sử cho ba số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện* $a>0,\ bc=3a^2,\ a+b+c=abc$. *Chứng minh rằng* $a\ge\sqrt{\dfrac{1+2\sqrt{3}}{3}}$.

Lời giải. Ta có $bc=3a^2,\ b+c=abc-a=3a^3-a$.

Theo định lí Viète đảo thì $b,\ c$ là nghiệm của PT

$$x^2-(3a^3-a)x+3a^2=0 \qquad (*)$$

PT(*) có nghiệm khi $\Delta=a^2(9a^4-6a^2-11)\ge 0$

$\Rightarrow a^2\ge\frac{1+2\sqrt{3}}{3}$, kết hợp $a>0$ được $a\ge\sqrt{\frac{1+2\sqrt{3}}{3}}$.

Thí dụ 5. *Cho a, b, c là ba số thực thỏa mãn* $a\ne 0$ *và* $4a+9b+24c=0$. *Tính khoảng cách (GTTĐ) nhỏ nhất của hai nghiệm của phương trình* $2ax^2+3bx+4c=0$.

Lời giải. Từ $4a+9b+24c=0\Rightarrow c=-\frac{4a+9b}{24}$.

PT đã cho có $\Delta'=9b^2-32ac=9b^2+32a\left(\frac{4a+9b}{24}\right)$

$=9\left(b+\frac{2a}{3}\right)^2+\frac{4a^2}{3}>0$ (do $a\ne 0$), nên PT đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$.

Theo định lí Viète, ta có

$$x_1+x_2=-\frac{3b}{2a};\ x_1x_2=\frac{2c}{a}=-\frac{4a+9b}{12a}.$$

Do đó khoảng cách giữa hai nghiệm của PT đã cho là $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$$=\sqrt{\left(\frac{3b}{2a}\right)^2+4\left(\frac{4a+9b}{12a}\right)}=\sqrt{\left(\frac{3b+2a}{2a}\right)^2+\frac{1}{3}}.$$

Suy ra $|x_1-x_2|\ge\frac{\sqrt{3}}{3}$. Vậy khoảng cách nhỏ nhất của hai nghiệm của PT đã cho là $\frac{\sqrt{3}}{3}$ khi và chỉ khi $2a=-3b=-24c$. Khi đó PT đã cho trở thành $6ax^2-6ax-a=0\Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{15}}{6}$.

Thí dụ 6. *Cho phương trình $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ có hai nghiệm m, n thỏa mãn $0\le m\le n\le 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{5a^2-6ab+b^2}{2a^2-2ab+ac}$.*

Lời giải. Từ giả thiết $0\le m\le n\le 1$ $\Rightarrow m^2\le mn$ và $n^2\le 1\Rightarrow (m+n)^2-2mn\le mn+1$

$$\Rightarrow (m+n)^2\le 3mn+1.$$

Theo định lí Viète có $m+n=-\frac{b}{a}$; $mn=\frac{c}{a}$. Do đó

$$P=\frac{5-\frac{6b}{a}+\left(\frac{b}{a}\right)^2}{2-\frac{2b}{a}+\frac{c}{a}}=\frac{5+6(m+n)+(m+n)^2}{2+2(m+n)+mn}$$

$$\le\frac{5+6(m+n)+3mn+1}{2+2(m+n)+mn}=3.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l}m=n=1\\ \begin{cases}m=0\\ n=1\end{cases}\end{array}\right.$ hay $\left[\begin{array}{l}2c=-b=2a\\ \begin{cases}b=-a\\ c=0\end{cases}\end{array}\right.$. Vậy $\max P=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2c=-b=2a\\ \begin{cases}b=-a\\ c=0\end{cases}\end{array}\right.$.

Nhận xét. Với dạng toán này chúng ta thường kết hợp BĐT cổ điển hay dùng (BĐT Cauchy, BĐT Bunyakovsky, BĐT tam giác, ...) hoặc các tính chất của BĐT cùng với việc vận dụng định lí Viète một cách nhuần nhuyễn sẽ giúp ta tìm ra được lời giải bài toán rất ngắn gọn, độc đáo và thú vị.

Dạng 4. Vận dụng định lí Viète vào một số bài toán số học

Thí dụ 7. *Cho phương trình $2x^2+mx+2n+8=0$ (x là ẩn số; m, n là các số nguyên). Giả sử phương trình có các nghiệm đều là số nguyên. Chứng minh rằng m^2+n^2 là hợp số. (Đề thi TS vào lớp 10 THPT chuyên TP. Hồ Chí Minh, năm học 2010 - 2011).*

Lời giải. Gọi x_1, $x_2\in\mathbb{Z}$ là hai nghiệm của PT.

Áp dụng định lí Viète vào PT đã cho, ta được $x_1+x_2=-\frac{m}{2}$; $x_1x_2=n+4$. Khi đó

$$m^2+n^2=(2x_1+2x_2)^2+(x_1x_2-4)^2$$
$$=4x_1^2+4x_2^2+x_1^2x_2^2+16=(x_1^2+4)(x_2^2+4)$$

là hợp số vì x_1^2+4 và x_2^2+4 là các số nguyên lớn hơn 1.

Thí dụ 8. *Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2-2(m-1)x+2m-6=0$. Tìm m nguyên dương để $A=\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2$ có giá trị nguyên.*

Lời giải. PT đã cho có $\Delta'=(m-1)^2-(2m-6)$ $=(m-2)^2+1>0$ $\forall m$, nên PT đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m. Ta có

$$A=\frac{x_1^4+x_2^4}{(x_1x_2)^2}=\frac{\left((x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right)^2-2(x_1x_2)^2}{(x_1x_2)^2}.$$

Áp dụng định lí Viète vào PT đã cho, ta được

$$x_1+x_2=2(m-1);\ x_1x_2=2m-6 \qquad (*)$$

Thay (*) vào A, sau đó khai triển và rút gọn lại ta được

$$A=\frac{\left(4m^2-12m+16\right)^2}{(2m-6)^2}-2=\left(2m+\frac{16}{2m-6}\right)^2-2.$$

Để A nguyên và $m\in\mathbb{Z}^+$ thì

$$\begin{cases}16\,\vdots\,(2m-6)\\ m\in\mathbb{Z}^+\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2m-6\in\{\pm1;\pm2;\pm4;\pm8;\pm16\}\\ m\in\mathbb{Z}^+\end{cases}$$

suy ra $m\in\{1;\ 2;\ 4;\ 5;\ 7;\ 11\}$.

Dạng 5. Vận dụng định lí Viète vào một số bài toán có liên quan hàm số $y=ax^2$ $(a\neq 0)$.

Trong chương trình Toán cuối cấp của THCS khi học phần đồ thị có một số bài tập liên quan đến giao điểm giữa đường thẳng $(d): y=kx+m$ và parabol $(P): y=ax^2$ $(a\neq 0)$. Nếu vận dụng định lí Viète vào giải toán một cách sáng tạo và linh hoạt thì lời giải sẽ ngắn gọn và hay.

Thí dụ 9. *Cho parabol $(P): y = 2x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2ax + 1$ $(a \neq 0)$. Tìm $a \in \mathbb{N}$ để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt M, N và độ dài đoạn thẳng $MN = \sqrt{15}$.*

Lời giải. PT hoành độ giao điểm của (P) và (d) là

$$2x^2 = 2ax + 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 2ax - 1 = 0 \qquad (*)$$

Ta thấy $\Delta' = a^2 + 2 > 0\ \forall a$ nên PT (*) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 hay (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt M, N.

Gọi $M\left(x_1;\ 2x_1^2\right)$, $N\left(x_2;\ 2x_2^2\right)$.

Ta có $MN = \sqrt{15} \Leftrightarrow MN^2 = 15$

$$\Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 + 4\left(x_2^2 - x_1^2\right)^2 = 15$$

$$\Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2\left(1 + 4(x_2 + x_1)^2\right) = 15$$

$$\Leftrightarrow \left((x_2 + x_1)^2 - 4x_2x_1\right)\left(1 + 4(x_2 + x_1)^2\right) = 15 \ (**)$$

Áp dụng định lí Viète cho PT (*) ta có

$$x_1 + x_2 = a;\ x_1x_2 = -\frac{1}{2}.$$

Thay vào (**), sau đó khai triển và rút gọn lại ta thu được $4a^4 + 9a^2 - 13 = 0$

$\Leftrightarrow a^2 = 1$ hoặc $a^2 = -\frac{13}{4} < 0$ (loại) $\Leftrightarrow a = \pm 1$.

Vì $a \in \mathbb{N}$ nên $a = 1$ là giá trị cần tìm.

Thí dụ 10. *Cho parabol $(P): y = 2ax^2 (a > 0)$ và đường thẳng $(d): 4x - y - 2a^2 = 0$. Tìm a để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt M, N có hoành độ x_M, x_N và $\frac{8}{x_M + x_N} + \frac{1}{2x_Mx_N}$ có giá trị nhỏ nhất.*

Lời giải. PT hoành độ giao điểm của (P) và (d) là

$$2ax^2 = 4x - 2a^2 \Leftrightarrow ax^2 - 2x + a^2 = 0 \qquad (*)$$

(d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt M, $N \Leftrightarrow$ PT(*) có 2 nghiệm phân biệt x_M, x_N

$\Leftrightarrow \Delta = 1 - a^3 > 0 \Leftrightarrow 0 < a < 1$ (do $a > 0$).

Áp dụng định lí Viète cho PT (*) ta có

$$x_M + x_N = \frac{2}{a};\ x_Mx_N = a \qquad (**)$$

Thay (**) vào $T = \frac{8}{x_M + x_N} + \frac{1}{2x_Mx_N}$ thu được $T = 4a + \frac{1}{2a}$. Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương $4a$ và $\frac{1}{2a}$ ta có $T \geq 2\sqrt{4a \cdot \frac{1}{2a}} = 2\sqrt{2}$. Ta thấy $\min T = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 4a = \frac{1}{2a}$ và $0 < a < 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Vậy giá trị cần tìm là $a = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Dạng 6. Vận dụng định lí Viète vào bài toán giải hệ phương trình hai ẩn

Thí dụ 11. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} 54x^2 - 78xy + 24y^2 = 0 \\ 3x + y + \dfrac{1}{3x - y} = 3 \end{cases}.$$

Lời giải. Điều kiện để HPT đã cho có nghĩa là $3x - y \neq 0$. HPT đã cho tương đương với

$$\begin{cases} (3x + y)^2 - 9(3x + y)(3x - y) + 14(3x - y)^2 = 0 \\ 3x + y + \dfrac{1}{3x - y} = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{3x + y}{3x - y}\right)^2 - 9\left(\dfrac{3x + y}{3x - y}\right) + 14 = 0 \\ 3x + y + \dfrac{1}{3x - y} = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{3x + y}{3x - y} = 7 \\ 3x + y + \dfrac{1}{3x - y} = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{3x + y}{3x - y} = 2 \\ 3x + y + \dfrac{1}{3x - y} = 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} (3x + y)\dfrac{1}{3x - y} = 7 \\ 3x + y + \dfrac{1}{3x - y} = 3 \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} (3x + y)\dfrac{1}{3x - y} = 2 \\ 3x + y + \dfrac{1}{3x - y} = 3 \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

Ta thấy HPT (1) vô nghiệm vì

$$\left(3x + y + \frac{1}{3x - y}\right)^2 - 4(3x + y)\frac{1}{3x - y} = 9 - 28 = -19 < 0.$$

Từ HPT (2) và theo định lí Viète đảo suy ra $3x + y$ và $\frac{1}{3x - y}$ là các nghiệm của phương trình

$X^2-3X+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X=1 \\ X=2 \end{array}\right.$. Từ đó

$$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x+y=1 \\ \dfrac{1}{3x-y}=2 \end{cases} \\ \begin{cases} 3x+y=2 \\ \dfrac{1}{3x-y}=1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\dfrac{1}{4} \\ y=\dfrac{1}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \text{ (thỏa mãn ĐK).}$$

Vậy HPT đã cho có hai nghiệm $(x;\ y)$ là

$$\left(\frac{1}{4};\ \frac{1}{4}\right),\ \left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right).$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Không giải phương trình, gọi $x_1,\ x_2\ (x_1>x_2)$ là các nghiệm của PT $x^2-\dfrac{\sqrt{83}}{4}x+\dfrac{19}{16}=0$.

Tính $x_1^3-x_2^3$.

2. Cho $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ là bốn nghiệm của phương trình $(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)=1$. Tính giá trị của biểu thức $x_1x_2x_3x_4$.

3. Cho phương trình $(x-1)(x-2)(x-4)(x-8)=m$, giả sử m nhận các giá trị sao cho phương trình có 4 nghiệm $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ đều khác 0. Chứng minh rằng biểu thức $T=\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}+\dfrac{1}{x_4}$ không phụ thuộc m.

4. Cho phương trình $x^2-2(m-1)x+2m+1=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $2x_2-x_1=8$.

5. Cho phương trình $2x^2-(3m-2)x-2=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ và $\dfrac{3}{2}(x_1-x_2)^2+2\left(\dfrac{x_1-x_2}{2}+\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_2}\right)^2$ có giá trị nhỏ nhất.

6. Cho hai phương trình $x^2+2ax+1=0$ và $x^2+2bx+31=0$ có nghiệm chung và $|a|+|b|$ nhỏ nhất. Tìm a và b.

7. Cho phương trình $x^2-4mx-2m=0$ (m là tham số) có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$. Tìm GTNN của biểu thức $P=\dfrac{m^2}{x_2^2+4mx_1+6m}+\dfrac{x_1^2+4mx_2+6m}{m^2}$.

8. Giả sử $a,\ b,\ c$ là các số thực thỏa mãn $|a(b-c)|>|b^2-ac|+|c^2-ab|$ và PT $ax^2+bx+c=0$ có nghiệm thực. Chứng minh phương trình trên có nghiệm thực dương nhỏ hơn $\sqrt{3}-1$. (*Bài toán kỷ niệm 35 năm Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ*).

9. Giả sử $x_1,\ x_2$ là các nghiệm của phương trình $x^2+2kx+6=0$. Tìm tất cả giá trị của k sao cho có bất đẳng thức $\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^2+\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^2\geq 5$.

10. Cho các số thực $x,\ y,\ z$ thỏa mãn điều kiện $x+y+z=5$ và $xy+yz+zx=8$. Chứng minh rằng

$$1\leq x\leq\frac{7}{3},\ 1\leq y\leq\frac{7}{3},\ 1\leq z\leq\frac{7}{3}.$$

11. Tìm tất cả $a\in\mathbb{N}$ để phương trình $x^2-a^2x+a+1=0$ có nghiệm nguyên.

12. Tìm tất cả các giá trị thực a để phương trình $2x^2-\left(4a+\dfrac{11}{2}\right)x+4a^2+7=0$ có nghiệm nguyên. (*Đề thi TS vào lớp 10 THPT chuyên Lê Quí Đôn, Bình Định, năm học* 2010-2011).

13. Tìm số nguyên lớn nhất không vượt quá $\left(4+\sqrt{15}\right)^7$. (*Đề thi TS vào lớp 10 chuyên Toán - Tin ĐHSP Hà Nội, năm học* 1998-1999).

14. Cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=-mx+m+2\ (m\neq 0)$. Tìm m sao cho (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A,\ B$ có hoành độ $x_A,\ x_B$ thỏa mãn $|x_A-x_B|=\sqrt{29}$.

15. Cho parabol $(P): y=\dfrac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $(d): y=-\dfrac{3}{m}x+3\ (m\neq 0)$. Chứng minh rằng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A,\ B$ với độ dài đoạn thẳng AB lớn hơn $2\sqrt{6}$.

16. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x^2-2x)(3x+4y)=6 \\ x^2+x+4y=5 \end{cases}$.

17. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x-4y-4=0 \\ x^2+y^2-3x-3y-22+m=0 \end{cases}$. Trong trường hợp hệ có hai nghiệm $(x_1;\ y_1)$ và $(x_2;\ y_2)$ hãy tìm m để $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=7$.

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN, ĐHQG HÀ NỘI

NĂM HỌC 2016 - 2017

VÒNG 1

(Dành cho tất cả các thí sinh; Thời gian làm bài: 120 phút)

Câu I (*3,5 điểm*). 1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+y^2-xy=1 \\ x+x^2y=2y^3 \end{cases}.$$

2. Giải phương trình

$$2(x+1)\sqrt{x+1}=\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\right)\left(2-\sqrt{1-x^2}\right).$$

Câu II (*2,5 điểm*). 1. Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên x, y thỏa mãn đẳng thức

$$12x^2+26xy+15y^2=4617.$$

2. Với a, b là các số thực dương, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M=(a+b)\left(\dfrac{1}{a^3+b}+\dfrac{1}{b^3+a}\right)-\dfrac{1}{ab}.$

Câu III (*3 điểm*). Cho hình thoi $ABCD$ với $\widehat{BAD}<90^\circ$. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABD tiếp xúc với BD, BA lần lượt tại J, L. Trên đường thẳng LJ lấy điểm K sao cho BK song song với ID.

1. Chứng minh rằng $\widehat{CBK}=\widehat{ABI}$.

2. Chứng minh rằng $KC \perp KB$.

3. Chứng minh rằng bốn điểm C, K, I, L cùng nằm trên một đường tròn.

Câu IV (*1 điểm*). Tìm hợp số nguyên dương n sao cho tồn tại một cách sắp xếp các số $1, 2, ..., n$ thành $a_1, a_2, ..., a_n$ mà khi chia các số $a_1, a_1a_2, a_1a_2a_3, ..., a_1a_2...a_n$ cho n ta được các số dư đôi một khác nhau.

VÒNG 2

(Dành cho thí sinh thi chuyên Toán - Tin; Thời gian làm bài: 150 phút)

Câu I (*3,5 điểm*). 1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y=\sqrt{x+3y} \\ x^2+y^2+xy=3 \end{cases}.$$

2. Với a, b là những số thực dương thỏa mãn $ab+a+b=1$, chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}=\frac{1+ab}{\sqrt{2\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)}}.$$

Câu II (*2,5 điểm*). 1. Giả sử p, q là hai số nguyên tố thỏa mãn đẳng thức $p(p-1)=q(q^2-1)$ (*)

a) Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương k sao cho $p-1=kq, q^2-1=kp$.

b) Tìm tất cả các số nguyên tố p, q thỏa mãn đẳng thức (*).

2. Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca+abc=2$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M=\dfrac{a+1}{a^2+2a+2}+\dfrac{b+1}{b^2+2b+2}+\dfrac{c+1}{c^2+2c+2}.$

Câu III (*3 điểm*). Cho tam giác ABC nhọn với $AB<AC$. E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh CA, AB. Trung trực của đoạn thẳng EF cắt BC tại D. Giả sử có điểm P nằm trong $\widehat{EAF}$ và nằm ngoài tam giác AEF sao cho $\widehat{PEC}=\widehat{DEF}$ và $\widehat{PFB}=\widehat{DFE}$. PA cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác PEF tại Q khác P.

1. Chứng minh rằng $\widehat{EQF}=\widehat{BAC}+\widehat{EDF}$.

2. Tiếp tuyến tại P của đường tròn ngoại tiếp tam giác PEF cắt các đường thẳng CA, AB lần lượt tại M, N. Chứng minh rằng bốn điểm C, M, B, N cùng nằm trên một đường tròn. Gọi đường tròn này là đường tròn (K).

3. Chứng minh rằng đường tròn (K) tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF.

Câu IV (*1 điểm*). Cho n là số nguyên dương, $n \geq 5$. Xét một đa giác lồi n cạnh. Người ta muốn kẻ một số đường chéo của đa giác mà các đường chéo này chia đa giác đã cho thành đúng k miền, mỗi miền là một ngũ giác lồi (hai miền bất kì không có điểm trong chung).

a) Chứng minh rằng ta có thể thực hiện được với $n=2018, k=672$.

b) Với $n=2017, k=672$ ta có thể thực hiện được không? Hãy giải thích.

NGUYỄN VŨ LƯƠNG – PHẠM VĂN HÙNG
(GV THPT chuyên KHTN – ĐHQG Hà Nội) ***Giới thiệu.***

Hướng dẫn giải ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐHSP TP. Hồ Chí Minh NĂM HỌC 2016 - 2017

(Đề thi đăng trên TH&TT số 480, tháng 6 năm 2017)

VÒNG 1

Câu 1. a) $\Delta' = m^2 + m + 1 = \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall m \in \mathbb{R}$. Vậy PT có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi $m \in \mathbb{R}$.

Theo hệ thức Viète ta có $x_1 + x_2 = 2m,\ x_1x_2 = -m-1$.

Vì x_1 là nghiệm của PT nên $x_1^2 - 2mx_1 - m - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x_1^2 = 2mx_1 + m + 1$. Do đó

$$x_1^2 + 2mx_2 - m = 2m(x_1 + x_2) + 1 = 4m^2 + 1.$$

Tương tự: $x_2^2 + 2mx_1 - m = 4m^2 + 1$.

Do đó $x_1^2 + 2mx_2 - m + \dfrac{1}{x_2^2 + 2mx_1 - m} = 2$

$\Leftrightarrow 4m^2 + 1 + \dfrac{1}{4m^2+1} = 2 \Leftrightarrow 4m^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow m = 0.$

b) $P = \dfrac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1};\ Q = 1 + \dfrac{3}{\sqrt{x} - 1}.$

Ta có $x \in \mathbb{Z}$ để $P \in \mathbb{Z}$ thì x là số chính phương và $\sqrt{x} - 1$ là ước của 3. Do đó $x \in \{0; 4; 16\}$.

Câu 2. a) HS tự vẽ (P) và (D).

PT hoành độ giao điểm của (P) và (D):

$x^2 = 3x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$ có nghiệm $x_1 = -1, x_2 = 4$.

Vậy giao điểm của (P) và (D) là $A(-1; 1)$, $B(4; 16)$.

b) PT (D') có dạng $y = ax + b$.

$A(-1;1) \in (D') \Rightarrow 1 = -a + b \Rightarrow b = a + 1 \Rightarrow (D'): y = ax + a + 1.$

PT hoành độ giao điểm của (P) và (D'):

$$x^2 = ax + a + 1 \Leftrightarrow x^2 - ax - a - 1 = 0 \qquad (*)$$

(D') tiếp xúc với $(P) \Leftrightarrow (*)$ có nghiệm kép

$\Leftrightarrow \Delta = a^2 + 4a + 4 = 0 \Leftrightarrow a = -2$. Suy ra $b = -1$.

Vậy $(D'): y = -2x - 1$.

Câu 3. a) $\begin{cases}(x+1)^2 = 2y+5\\(y+1)^2 = 2x+5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+1)^2 - (y+1)^2 = 2y - 2x\\(y+1)^2 = 2x+5\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-y)(x+y+4) = 0\\(y+1)^2 = 2x+5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x - y = 0 \text{ hoặc } x + y + 4 = 0\\(y+1)^2 = 2x+5\end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{cases}x = y, (y+1)^2 = 2y+5\\x = -y-4, (y+1)^2 = 2(-y-4)+5\end{cases}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{cases}x = 2, y = 2\\x = -2, y = -2\end{cases}\right.$.

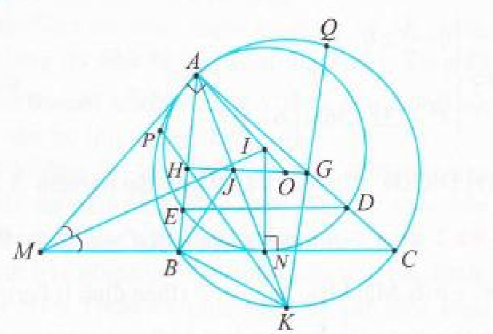
Vậy HPT có nghiệm $(x; y) \in \{(2; 2); (-2; -2)\}$.

b) Gọi thời gian 3 máy bơm cùng bơm xong công việc là x (ngày) ($x > 0$). Thời gian máy I, máy II, máy III bơm một mình xong công việc lần lượt là $x + 28$, $x + 48$, $2x$ (ngày). Trong 1 ngày, cả 3 máy bơm được $\frac{1}{x}$, máy I bơm được $\frac{1}{x+28}$, máy II bơm được $\frac{1}{x+48}$, máy III bơm được $\frac{1}{2x}$ (cánh đồng). Ta có PT: $\dfrac{1}{x+28} + \dfrac{1}{x+48} + \dfrac{1}{2x} = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow 3x^2 + 76x - 1344 = 0.$

PT có nghiệm: $x_1 = 12$ (nhận), $x_2 = -\dfrac{112}{3}$ (loại).

Vậy máy I bơm một mình xong công việc là 40 ngày, máy II bơm một mình xong công việc là 60 ngày, máy III bơm một mình xong công việc là 24 ngày.

Câu 4



a) Ta có $IN = IA$ (I thuộc phân giác của $\widehat{AMB}$), $BC \perp IN \Rightarrow BC$ tiếp xúc với đường tròn (I) tại N.

b) Ta có MA là tiếp tuyến của các đường tròn (I), (O)

$\Rightarrow \widehat{MAE} = \widehat{ADE},\ \widehat{MAE} = \widehat{MCA} \Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{MCA}$

mà $\widehat{ADE}$ và $\widehat{MCA}$ đồng vị $\Rightarrow ED \parallel BC$.

c) Ta có $ED // BC,\ IN \perp BC \Rightarrow IN \perp ED$. Do đó N là điểm chính giữa $\overset{\frown}{ED}$ của đường tròn (I)

$\Rightarrow \widehat{EAN} = \widehat{DAN} \Rightarrow AN$ là phân giác $\widehat{BAC}$. Mặt khác $\overset{\frown}{KB} = \overset{\frown}{KC} \Rightarrow \widehat{BAK} = \widehat{CAK} \Rightarrow AK$ là phân giác $\widehat{BAC}$. Do đó AN, AK trùng nhau suy ra A, N, K thẳng hàng.

Xét ΔKBN và ΔKAB có $\widehat{BKN}$ chung, $\widehat{KBN} = \widehat{KAB}$ ($\overset{\frown}{KC} = \overset{\frown}{KB}$). Do đó $\Delta KBN \backsim \Delta KAB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{KB}{KA} = \dfrac{KN}{KB}$.

Vậy $KA.KN = KB^2$.

d) Ta có $\widehat{JBA} = \widehat{JBC}$ (J là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC). Do đó $\widehat{KJB} = \widehat{JBA} + \widehat{KAB} = \widehat{JBC} + \widehat{KBN} = \widehat{KBJ}$

$\Rightarrow \Delta KBJ$ cân tại K. Mặt khác $\widehat{BKP} = \widehat{AKP}$ ($\overset{\frown}{PB} = \overset{\frown}{PA}$)

$\Rightarrow KP$ là đường trung trực của $BJ \Rightarrow HB = HJ$

$\Rightarrow \widehat{HJB} = \widehat{HBJ} \Rightarrow \widehat{HJB} = \widehat{JBC} \Rightarrow HJ // BC$. Tương tự $GJ // BC$. Do đó HJ, GJ trùng nhau. Vậy HG đi qua J.

VÒNG 2

Câu 1. a) Gọi vận tốc ban đầu của người đi xe đạp là x (km/h) $(x > 0)$. Thời gian dự định đi là $\dfrac{50}{x}$ (h).

Quãng đường người đó đi với vận tốc tăng thêm 2 km/h là $50 - 2x$ (km). Thời gian đi với vận tốc sau khi tăng thêm 2 km/h là: $\dfrac{50-2x}{x+2}$ (h). Ta có PT:

$$2 + \frac{1}{2} + \frac{50-2x}{x+2} = \frac{50}{x} \Leftrightarrow x^2 + 10x - 200 = 0.$$

PT có nghiệm: $x_1 = 10$ (nhận), $x_2 = -20$ (loại).

Vậy vận tốc ban đầu của người đi xe đạp là 10 km/h.

b) ĐKXĐ: $x \ge -4$.

$$\sqrt{x+4} + \sqrt{x+9} - \sqrt{x+25} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+4} + \sqrt{x+9} = \sqrt{x+25}$$

$$\Leftrightarrow 2x + 13 + 2\sqrt{(x+4)(x+9)} = x + 25 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+13x+36} = 6 - \frac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6 - \dfrac{x}{2} \ge 0 \\ x^2 + 13x + 36 = \left(6 - \dfrac{x}{2}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 12 \\ 3x^2 + 76x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

(vì ĐKXĐ $x \ge -4$). Vậy PT có tập nghiệm $S = \{0\}$.

Câu 2. a) $n^7 - n = n(n+1)(n-1)(n^4 + n^2 + 1)$. Suy ra $n^7 - n \vdots 6$. Mặt khác $n^7 - n \vdots 7$ (theo định lí Fermat nhỏ) mà $(6; 7) = 1$ nên $n^7 - n \vdots 42$.

b) $x \in \mathbb{Z}, \dfrac{x-3}{x^2+1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x - 3 \vdots x^2 + 1 \Rightarrow (x+3)(x-3) \vdots x^2 + 1$

$\Rightarrow 10 \vdots x^2 + 1 \Rightarrow x \in \{0; 1; -1; 2; -2; 3; -3\}$.

Thử lại, ta có $x \in \{0; 1; -1; -2; 3\}$.

Câu 3. a) Ta có $\sqrt{2(a^2+b^2)} = \sqrt{(a+b)^2 + (a-b)^2} \ge a + b$.

Tương tự: $\sqrt{2(b^2+c^2)} \ge b + c, \sqrt{2(c^2+a^2)} \ge c + a$.

Vậy $\sqrt{2(a^2+b^2)} + \sqrt{2(b^2+c^2)} + \sqrt{2(c^2+a^2)} \ge 2(a+b+c)$.

b) Áp dụng BĐT Cauchy ta được:

$$\frac{a+b}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b} = \frac{3(a+b)}{4\sqrt{ab}} + \left(\frac{a+b}{4\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b}\right) \ge \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}.$$

Câu 4. a) $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$

$\Rightarrow xy + yz + zx = 5$.

Ta có $(x+y)^2 \le 2(x^2+y^2) \Rightarrow (4-z)^2 \le 2(6-z^2)$

$$\Leftrightarrow (3z-2)(z-2) \le 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \le z \le 2.$$

b) Tương tự: $\dfrac{2}{3} \le x \le 2, \dfrac{2}{3} \le y \le 2$.

$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) = x^3+y^3+z^3-3xyz$

$\Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz + 4$.

Vì $x, y, z \le 2 \Rightarrow (x-2)(y-2)(z-2) \le 0$

$\Rightarrow xyz - 2(xy+yz+zx) + 4(x+y+z) - 8 \le 0 \Rightarrow xyz \le 2$.

Vậy Max$P = 10$ khi $x = 2, y = z = 1$.

Vì $x, y, z \ge \dfrac{2}{3} \Rightarrow \left(x - \dfrac{2}{3}\right)\left(y - \dfrac{2}{3}\right)\left(z - \dfrac{2}{3}\right) \ge 0$

$\Rightarrow xyz - \dfrac{2}{3}(xy+yz+zx) + \dfrac{4}{9}(x+y+z) - \dfrac{8}{27} \ge 0 \Rightarrow xyz \ge \dfrac{50}{27}$.

Vậy min$P = \dfrac{86}{9}$ khi $x = \dfrac{2}{3}, y = z = \dfrac{5}{3}$.

(Xem tiếp trang 26)

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 10

1C	2B	3A	4D	5B	6C	7D	8B	9D	10B	11B	12A	13C	14D	15C	16D	17C
18C	19B	20C	21B	22D	23B	24C	25B	26A	27B	28C	29D	30D	31C	32D	33B	34C
35A	36B	37D	38C	39B	40A	41D	42A	43C	44B	45C	46D	47C	48C	49B	50A	

Câu 5. Hàm số có miền xác định

$$D=\left(-\infty;\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)\setminus\{1\}.$$

Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+x-1}-x}{x^2-1}=\frac{1}{4}$, $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+x-1}-x}{x^2-1}$ không tồn tại nên đồ thị không có tiệm cận đứng.

Vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x^2+x-1}-x}{x^2-1}=0$ nên đồ thị có 1 tiệm cận ngang $y = 0$. Chọn B.

Câu 6. Ba điểm cực trị đó là $A(0; 1)$, $B(-1; 0)$, $C(1; 0)$ dễ thấy tạo thành một tam giác vuông cân. Chọn C.

Câu 7. Dễ dàng thấy đồ thị này cắt Ox tại 3 điểm nên không tiếp xúc Ox. Chọn D.

Câu 8. Để hàm số đồng biến trong $\mathbb{R}$ thì

$$y'=mx^2-2mx+1\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}.$$

Khi $m = 0 \Rightarrow y'=1>0,\forall x\in\mathbb{R}$. Khi $m\neq 0$, để

$$y'\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow\begin{cases}m>0\\ \Delta'_{y'}\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow 0<m\leq 1.$$ Chọn B.

Câu 9. Đặt $t=\sqrt{x}\geq 0$. Để PT có nghiệm thì PT $t^3+3t^2=a$ có nghiệm $t\geq 0$. Lập bảng biến thiên ta có kết quả. Chọn D.

Câu 10. Vì $f=\frac{1-x^2}{x+2}\Rightarrow f'=-\frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}\cdot$ Ta có $f'=0\Leftrightarrow x=\left(-2+\sqrt{3}\right)\in[-1;1]$. Tính $f(-1)$, $f(1)$, $f\left(-2+\sqrt{3}\right)\Rightarrow f_{\max}=f\left(-2+\sqrt{3}\right)=4-2\sqrt{3}.$ Chọn B.

Câu 11. Đặt $BC=a, BM=x\Rightarrow MA=\sqrt{40^2+x^2}$, $MC = a - x$, $(0 < x < a)$. Do đó thời gian chạy bộ từ C sang M là $\frac{a-x}{5}\cdot$ Thời gian bơi từ M sang A là $\frac{\sqrt{40^2+x^2}}{3}\cdot$ Vậy thời gian đi từ C sang A là

$$y=\frac{\sqrt{40^2+x^2}}{3}+\frac{a-x}{5}\Rightarrow y'=\frac{x}{3\sqrt{40^2+x^2}}-\frac{1}{5}\cdot$$

Khi $y' = 0 \Leftrightarrow 5x=3\sqrt{40^2+x^2}\Rightarrow x=30$. Lập bảng biến thiên ta có kết quả. Chọn B.

Câu 12. Ta có $a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}=1\Leftrightarrow\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)^2=1$

$\Leftrightarrow a+b+2\sqrt{ab}=1\Leftrightarrow a+b+\sqrt{ab}=1-\sqrt{ab}.$

$$T=\frac{(a-b)\left(1-\sqrt{ab}\right)}{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}=\frac{\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)\left(1-\sqrt{ab}\right)}{\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a+b+\sqrt{ab}\right)}$$

$$=\frac{\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\left(1-\sqrt{ab}\right)}{1-\sqrt{ab}}=a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}=1.$$ Chọn A.

Câu 13. Vì m không phải luôn là số nguyên dương nên $a=\sqrt[m]{b^n}$ sai. Chọn C.

Câu 15. Vì $\lg 2,25=\lg\frac{9}{4}=2(\lg 3-\lg 2)=2(a-b)\neq\frac{a}{b}\cdot$ Chọn C.

Câu 17. Ta có $y'=e^x+xe^x=e^x+y\Rightarrow y'-y=e^x$. Do đó $y^{(n+1)}-y^{(n)}=e^x$ (1), $y^{(n)}-y^{(n-1)}=e^x$ (2). Trừ theo vế (1) và (2) ta được $y^{(n+1)}+y^{(n-1)}=2y^{(n)}$. Khi $n = 2016$ thì thỏa mãn C. Chọn C.

Câu 18. $\left(3-\sqrt{8}\right)^{2x}\leq\left(3+\sqrt{8}\right)^{x^2}\Leftrightarrow\left(3+\sqrt{8}\right)^{-2x}\leq\left(3+\sqrt{8}\right)^{x^2}$

$\Leftrightarrow x^2+2x\geq 0\Leftrightarrow x\geq 0\vee x\leq -2$. Chọn C.

Câu 19. Hàm số xác định khi

$$\log_{0,5}\left(\log_2(x-1)\right)+1\geq 0$$
$$\Leftrightarrow\log_{0,5}\left(\log_2(x-1)\right)\geq -1$$
$$\Leftrightarrow 0<\log_2(x-1)\leq 2$$
$$\Leftrightarrow 1<x-1\leq 4\Leftrightarrow 2<x\leq 5.$$ Chọn B.

Câu 20. ĐK: $x > 0$.

Đặt $y = x^2 - 2\ln x \Rightarrow y' = 2x - \frac{2}{x} = 2\frac{\left(x^2-1\right)}{x}$. Lập bảng biến thiên ta có hàm số nhận $x = 1$ là điểm cực tiểu và có giá trị cực tiểu $y = 1$. Ta thấy đường thẳng $y = 2017 > 1$ cắt đường $y = x^2 - 2\ln x$ tại hai điểm nên phương trình có hai nghiệm. Chọn C.

Câu 21. Ta có $y' = \ln x + 1,\ y'' = \frac{1}{x}$. Điều kiện $x > 0$.

PT $y' - y'' = 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 = \frac{1}{x}$ có nghiệm $x = 1$. Mặt khác hàm số bên trái luôn đồng biến và hàm số bên phải luôn nghịch biến nên phương trình có nghiệm $x = 1$ là duy nhất. Chọn B.

Câu 23. Đặt $x = -t$, vì $f(x)$ là hàm chẵn nên

$$1 = \int_{-2}^{0} f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx \Rightarrow \int_{-1}^{2} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_0^2 f(x)dx$$

$\Rightarrow I = 2$. Chọn B.

Câu 24. Bạn 1, bạn 2 vi phạm miền xác định hàm số. Chọn C.

Câu 25. Hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ xác định trong $(0;+\infty)$ nên $a \in (0;+\infty)$.

$$\int_1^a \frac{\ln x}{x}dx = \int_1^a \ln x\, d(\ln x) = \frac{1}{2}\left[\ln^2 x\right]_1^a = \frac{1}{2}\ln^2 a$$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln^2 a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = e, a = \frac{1}{e}$. Chọn B.

Câu 26. Thời gian vật thay đổi vận tốc đến khi dừng $v(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{a}{20}$. Do đó ta có

$$\int_0^{\frac{a}{20}} (-20t + a)\,dt = 10 \Leftrightarrow \left[-10t^2 + at\right]_0^{\frac{a}{20}} = 10$$

$\Leftrightarrow \frac{a^2}{40} = 10 \Rightarrow a = 20$. Chọn A.

Câu 27. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^n x \sin 2x dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^{n+1} x\cos x dx$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^{n+1} x\, d(\sin x) = 2\left[\frac{\sin^{n+2} x}{n+2}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{(n+2)2^{n+1}}$$

$\Rightarrow \frac{1}{(n+2)2^{n+1}} = \frac{1}{32} \Rightarrow n = 2$. Chọn B.

Câu 28. I và II đúng. Chọn C.

Câu 29. Ba điểm $A(1;2), B(7;10), C(-3;5)$ tạo thành tam giác vuông. Chọn D.

Câu 30. $z^2 + (\bar z)^2 = 0, z^3 + (\bar z)^3 = -4, (z+\bar z)(z-\bar z) = 4i$,

$\frac{z-\bar z}{z+\bar z} z = \frac{2i}{2} z = -1 + i$. Chọn D.

Câu 31. Giải PT $z^2 - 2z + 1 + m^2 = 0$

$\Rightarrow z = 1 - mi, z = 1 + mi \Rightarrow |z| = \sqrt{1+m^2}$.

Để $|z| \le \sqrt{5} \Rightarrow -2 \le m \le 2$. Chọn C.

Câu 32. Gọi $z = a + bi\ (a, b \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow z - 1 = (a-1) + bi \Rightarrow |z-1|^2 = a^2 + b^2 - 2a + 1$.

Ta có $z.\bar z - z - \bar z + 1 = a^2 + b^2 - 2a + 1$. Chọn D.

Câu 33. Giả sử $z = a + bi\ (a, b \in \mathbb{R})$.

Ta có $|z| + |\bar z| = 2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow$ tập hợp là một đường tròn. $|z + \bar z| = |z - \bar z| \Leftrightarrow a = \pm b \Rightarrow$ tập hợp là đường thẳng. $|z| = 2|\bar z| \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2} = 2\sqrt{a^2+b^2}$

$\Rightarrow$ tập hợp là điểm $O(0 ; 0)$. $z.\bar z = |z| + |\bar z|$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 = 2\sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 4 \vee a = b = 0$

$\Rightarrow$ tập hợp là một đường tròn và điểm $O(0 ; 0)$. Chọn B.

Câu 34. Giả sử $z = a + bi\ (a, b \in \mathbb{R})$ suy ra $|z| = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1$.

$$|z+1+i| = \sqrt{(a+1)^2 + (b+1)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2 + 2(a+b)}$$
$$= \sqrt{3 + 2(a+b)} \le \sqrt{3 + 2\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}} = 1 + \sqrt{2}.$$

Chọn C.

Câu 37. Gọi x là cạnh đáy hình chóp ta có

$V = \frac{1}{3}x^2.SH = \frac{\sqrt{2}}{6}a^3 \Rightarrow x = a$

suy ra cạnh bên hình chóp cũng bằng a. Do đó 4 mặt bên hình chóp là tam giác đều cạnh bằng a, nên diện tích toàn phần của hình chóp bằng

$$S_{tp} = 4\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + a^2 = \left(1+\sqrt{3}\right)a^2 \Rightarrow r = \frac{3V}{S_{tp}} = \frac{a}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}.$$

Chọn D.

Câu 39. Thiết diện qua trục hình trụ cắt hình trụ và hình cầu lần lượt là hình vuông nội tiếp trong hình tròn. Gọi r là bán kính của hình trụ, suy ra bán kính đáy của hình cầu bằng $\sqrt{2}r$. Do đó

$$V_1 = 2\pi r^3, V_2 = \frac{8\sqrt{2}}{3}\pi r^3 \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{3\sqrt{2}}{8}.$$ Chọn B.

Câu 40. Giả sử hình chóp có cạnh bên $SA = a$ và đường cao hình chóp là SH, theo giả thiết thì $\widehat{SAH} = 30^0$. Gọi M là trung điểm SA, từ M dựng đường vuông góc với SH tại O thì bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là $R = OS$. Xét hai tam giác đồng dạng $\Delta SHA, \Delta SMO$

$$\Rightarrow \frac{SO}{SM} = \frac{SA}{SH} \Rightarrow R = SO = SM.\frac{SA}{SH} = a.$$ Chọn A.

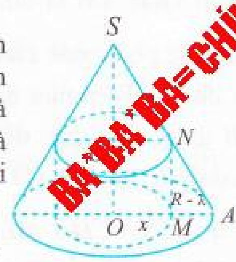
Câu 41. Cách làm như trên thì ta có

$$2V_{S.PQR} = V_{ABC} \Leftrightarrow 2.\frac{1}{3}SO'.S_{MNP} = \frac{1}{3}SO.S_{ABC}$$

$$\Leftrightarrow 2SO'.\frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = SO \Leftrightarrow 2SO'.\left(\frac{SO'}{SO}\right)^2 = SO$$

$$\Rightarrow \frac{SO'}{SO} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$ Chọn D.

Câu 42. Giả sử đường sinh SA của hình nón cắt đáy trên hình trụ tại N. Gọi O, O' là tâm của hai đáy hình trụ và OA cắt đường tròn đáy dưới hình trụ tại M. Đặt $OM = x$ $\Rightarrow AM = R - x, MN = R - x.$



Vậy thể tích hình trụ $V_T = \pi x^2(R - x)$.

Xét hàm số $f(x) = x^2(R - x) \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 2Rx.$

Lập bảng biến thiên , ta nhận được

$$f(x) \le f\left(\frac{2}{3}R\right), \forall x > 0.$$

Thể tích lớn nhất của hình trụ (T) bằng

$$V_T = \pi\left(\frac{2}{3}R\right)^2\left(R - \frac{2}{3}R\right) = \frac{4\pi}{27}R^3.$$ Chọn A.

Câu 44. Gọi h là khoảng cách từ A đến cạnh BC, ta có $S_{AMB} = 2S_{AMC} \Leftrightarrow \frac{h.MB}{2} = 2\frac{h.MB}{2}$.

Vì M thuộc cạnh BC nên ta có

$$\overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 - x = -2(3 - x) \\ -y = -2(1 - y) \\ 3 - z = -2(4 - z) \end{cases}$$

$$\Rightarrow M\left(\frac{5}{3};\frac{2}{3};\frac{11}{3}\right).$$ Chọn B.

Câu 47. Đường thẳng đó đi qua hai điểm $M(2;1;-3)$ và tâm $I(1;2;0)$ của mặt cầu (S), có phương trình $\begin{cases} x = t \\ y = 3 - t \\ z = 3 - 3t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$. Chọn C.

Câu 48. Véc tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = (1;2;1)$. Véc tơ chỉ phương của d là $\vec{v} = (1;0;-1)$. Ta có $\vec{n}\vec{v} = 0$ và điểm $M(1;-1;1) \in d$ nhưng $M(1;-1;1) \notin (P)$. Do đó $d // (P)$. Chọn C.

Câu 49. Trọng tâm tam giác ABC là $G(0;0;0)$. Gọi $M(x;y;z) \in (P)$. Ta có

$$\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right| = \left|3\overrightarrow{MG}\right| = 3\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$\ge \sqrt{3}(x + y + z) = 3\sqrt{3}.$$

Chọn B.

Câu 50. Gọi $G(x;y;z)$ là tọa độ trọng tâm tam giác ABC, ta có

$$\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{GM} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 = 3(1 - x) \\ 0 = 3(1 - y) \\ 0 = 3(-z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow G(2;1;0).$$

Gọi $I(x;y;z)$ là tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác, ta có

$$\overrightarrow{IH} = 3\overrightarrow{IG} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 - x = 3(2 - x) \\ 1 - y = 3(1 - y) \\ 0 - z = 3(0 - z) \end{cases} \Rightarrow I(-1;1;0).$$

Chọn A.

NGUYỄN LÁI
(GV THPT chuyên Lương Văn Chánh, Tuy Hòa, Phú Yên)

DIỄN ĐÀN DẠY HỌC TOÁN

KHAI THÁC VÀ PHÁT TRIỂN

MỘT BÀI TOÁN HÌNH HỌC HAY

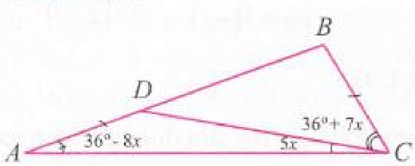
ĐẶNG THÀNH TRUNG *(Hà Nội)*

Có một người bạn đang sống ở Peru trao đổi với tôi một bài toán qua facebook. Thoạt nhìn, tôi cứ ngỡ đây là một bài toán khó khi đề bài không cho số đo góc cụ thể nhưng qua mò mẫm, dự đoán tôi đã đưa được nó về một bài toán mà tôi đã từng giải. Hóa ra từ bài toán mà tôi đã giải trước đó có thể khai thác sâu hơn và cho ra nhiều bài toán tương tự.

Hai hôm sau đó, tôi lại nhận được một lời đề nghị giải một bài toán hình học khác của một cô giáo ở tỉnh Vĩnh Phúc. Trong lúc bế tắc, thật bất ngờ tôi phát hiện ra trong hình vẽ của bài toán này có một tam giác cũng có tính chất đặc biệt giống như 2 bài toán đã nêu ở trên. Do đó tôi sưu tầm thêm 1 bài toán có chung "tính chất đặc biệt" đó rồi tổng hợp lại thành một bài viết để chia sẻ với các bạn đồng nghiệp cùng các em học sinh.

Bài toán tôi nhận được từ người bạn Peru:

Tam giác ABC có AD = BC và số đo các góc như hình vẽ. Tìm x.

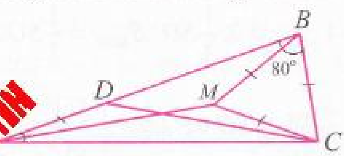


Trước khi đến với những phân tích và lời giải cho bài toán này, mời bạn đọc đến với bài toán mở đầu sau:

Bài toán 1. *Cho tam giác ABC cân tại A, có $\widehat{A}=20^0$, trên cạnh AB lấy điểm D sao cho AD = BC. Tính số đo góc $\widehat{ACD}$.*

Đây là bài toán không xa lạ với những ai nghiên cứu sâu về hình học phẳng ở THCS. Bài toán có xuất xứ từ Nga, trong tạp chí Kvant và đã xuất hiện nhiều trên tạp chí TH&TT. Có rất nhiều cách giải cho bài toán này nhưng tôi xin tóm tắt cách giải như sau:

Cách 1. Lấy điểm M nằm trong tam giác ABC sao cho tam giác BMC là tam giác đều.

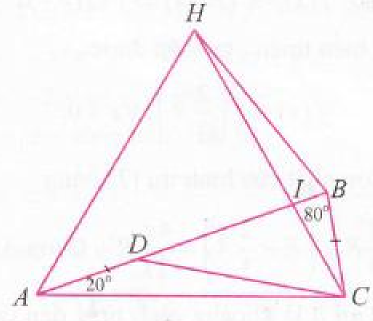


Dễ thấy $\Delta MCA=\Delta DAC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MAC}=\widehat{DCA}$.

Mặt khác AM là đường trung trực đồng thời là đường phân giác của $\Delta ABC \Rightarrow \widehat{MAC}=\widehat{ACD}=10^0$.

Cách 2. Trên nửa mặt phẳng bờ AC chứa điểm B dựng tam giác đều HAC. Gọi I là giao điểm của HC và AB. Ta có $\Delta CAD=\Delta HCB$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{ACD}=\widehat{CHB}=\alpha$. Ta lại có

$$\widehat{ABH}=180^0-\widehat{IHB}-\widehat{HIB}=180^0-\alpha-100^0$$
$$=80^0-\alpha \Rightarrow \widehat{AHB}=80^0-\alpha.$$



Ta có $\widehat{AHB}-\widehat{IHB}=\widehat{AHC}$

$\Rightarrow 80^0-\alpha-\alpha=60^0 \Rightarrow \alpha=10^0$.

Vậy $\widehat{ACD}=10^0$.

* Từ bài toán mở đầu, dễ chứng minh CD là phân giác của góc $\widehat{ACM}$, từ đó ta có hai bài toán mới:

1.1. *Cho tam giác ABC cân tại A có* $\widehat{A}=20^0$, *vẽ tam giác đều BMC nằm trong tam giác ABC. Tia phân giác của góc* $\widehat{ACM}$ *cắt AB lại D. Chứng minh* $AD=BC$.

1.2. *Cho tam giác ABC cân tại A có* $\widehat{A}=20^0$, *lấy điểm D thuộc cạnh AB sao cho* $AD=BC$, *vẽ tam giác đều BMC nằm trong tam giác ABC. Chứng minh CD là tia phân giác của góc* $\widehat{ACM}$.

* Ta có $\widehat{BDC}=30^0$, giả sử vẽ tia Cy sao cho $\widehat{ACy}=40^0$, Cy cắt AB tại $P \Rightarrow$ tam giác PDC cân tại P, từ đó ta có bài toán mới:

1.3. *Cho tam giác ABC cân tại A có* $\widehat{A}=20^0$, *lấy điểm D thuộc cạnh AB sao cho* $AD=BC$, *vẽ tia Cy sao cho* $\widehat{ACy}=40^0$, *Cy cắt AB tại P. Chứng minh tam giác PCD cân.*

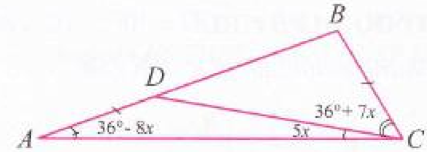
* Từ cách giải thứ 2 của bài toán thấy rằng tam giác AHB cân và có $\widehat{HAB}=40^0$, đảo lại giả thiết ta cũng có một bài toán mới như sau:

1.4. *Cho tam giác ABC cân tại A có* $\widehat{A}=40^0$, *trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa C dựng tam giác đều ABD, điểm E thuộc cạnh AC sao cho* $AE=CD$. *Tính số đo góc* $\widehat{ADE}$.

Bài toán 2 (*Bài toán đến từ người bạn Peru*). Sau những thời giờ bế tắc trong việc tìm lời giải, tôi quyết định mò mẫm, thấy rằng điều kiện để tồn tại số đo góc dương x là

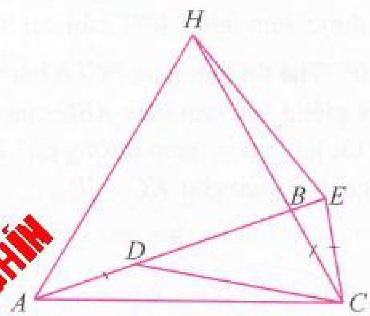
$$36-8x>0^0 \Rightarrow 0^0<x<\frac{9^0}{2}.$$

Thử với $x=2^0 \Rightarrow \widehat{CAB}=20^0$; $\widehat{ABC}=100^0$; $\widehat{ACB}=60^0$. Liệu có sự liên quan nào đến **Bài toán 1** không (vì $\widehat{CAB}=20^0$)? Nếu muốn có sự liên quan phải chăng ta cần tạo ra một tam giác cân ACE nào đó?



Theo dự đoán đó, trên cạnh AB kéo dài lấy điểm E sao cho tam giác ACE cân tại A (trong tam giác ABC, góc B lớn nhất, cạnh AC lớn nhất).

Nếu thêm điều kiện $AD=CE$ thì bài toán này có nét giống với **Bài toán 1**.



Để chứng minh $BC=CE$ ta sẽ chứng minh tam giác CBE cân tại C. Thật vậy:

$$\widehat{AEC}=\frac{180^0-36^0+8x}{2}=72^0+4x \quad (1)$$

$$\widehat{EBC}=\widehat{BAC}+\widehat{BCA}$$
$$=36^0-8x+5x+36^0+7x=72^0+4x \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra tam giác CBE cân tại C $\Rightarrow CE=AD=CB$.

Trên nửa mặt phẳng bờ AC chứa điểm B, dựng tam giác đều ACH.

Ta có $\Delta HCE=\Delta ACD$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{CHE}=\widehat{ACD}=5x$.

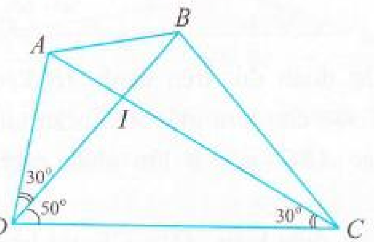
$$\widehat{HEA}=180^0-\widehat{HBE}-\widehat{EHB}$$
$$=180^0-\left(180^0-72^0-4x\right)-5x=72^0-x$$

$\Rightarrow \widehat{AHB}=72^0-x-5x$ hay $60^0=72^0-6x$.

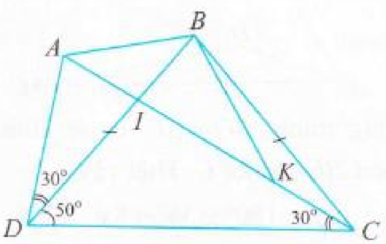
Suy ra $x=2^0$.

Chú ý: Nếu dựng tam giác đều MEC nằm trong tam giác ABC thì bài toán sẽ bế tắc vì ta chưa chứng minh được $\widehat{MCA}=\widehat{BAC}$.

Bài toán 3 *(Đến từ cô giáo ở Vĩnh Phúc). Cho hình vẽ sau, biết tam giác BDC cân tại B,* $\widehat{BDC}=50^0$, $\widehat{ADB}=\widehat{ACD}=30^0$, *AC cắt BD tại I. Chứng minh tam giác AIB cân.*



Cũng phải mất khá nhiều thời gian tôi mới phát hiện ra được tam giác BIC cân tại C và có $\widehat{BCI}=20^0$. Thế thì tam giác BCI ở bài toán này lại có nét giống với tam giác ABC của bài toán mở đầu, tôi lại "ngựa quen đường cũ" lấy điểm K thuộc cạnh IC sao cho $KC=IB$.



Theo bài toán 1, có $\widehat{CBK}=10^0$

$$\Rightarrow \widehat{IKB}=\widehat{CBK}+\widehat{KCB}=30^0=\widehat{IDA}.$$

Vì $BD=BC=CI$ và $IB=KC \Rightarrow DI=IK$.

Xét ΔAID và ΔBIK có $ID=IK$ (cmt),

$\widehat{ADI}=\widehat{BKI}$ (cmt), $\widehat{AID}=\widehat{BIK}$ (đối đỉnh)

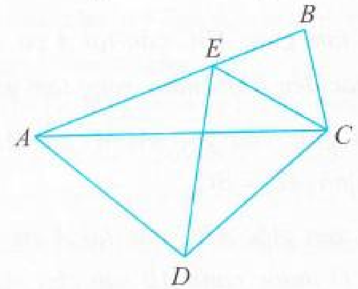
$\Rightarrow \Delta AID=\Delta BIK$ (g.c.g).

Suy ra $IA=IB$ hay tam giác IAB cân tại I.

Bài toán 4 *(Sưu tầm). Cho tam giác cân ABC* $(AB=AC; \hat{A}=20^0)$. *Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa B lấy D sao cho* $DA=DC$ *và* $\widehat{ADC}=100^0$. *Chứng minh* $AB=BC+CD$.

Ở bài toán này, tôi đã lấy điểm M thuộc AB sao cho $AM=BC$ giống như các bài toán trước nhưng lại gặp khó khăn khi chứng minh $MB=CD$. Khi phát hiện ra góc $\widehat{DAB}=60^0$ thì tôi nghĩ ra ngay phương án lấy điểm E thuộc cạnh AB sao cho $AE=DA$ (điểm E luôn dựng được vì $AD<AC=AB$). ΔDEA có $\widehat{DAE}=60^0$ và $AE=DA \Rightarrow DEA$ là tam giác đều

$\Rightarrow DE=DC$ hay DEC là tam giác cân.



$$\widehat{EDC}=40^0 \Rightarrow \widehat{DEC}=\widehat{ECD}=70^0$$

$$\Rightarrow \widehat{BEC}=180^0-\widehat{AED}-\widehat{CED}$$
$$=180^0-60^0-70^0=50^0,$$

$$\widehat{ECB}=\widehat{BCD}-\widehat{ECD}=120^0-70^0=50^0$$

$\Rightarrow \Delta ECB$ cân tại $B \Rightarrow BE=BC$.

Vậy $CD+BC=AE+EB=AB$.

Điểm thú vị của bài toán này là ta có thể sử dụng kết quả chứng minh để khai thác thành nhiều bài toán hoặc chứng minh bài toán khác.

Bài toán vẫn đúng khi D nằm cùng phía với B.

4.1. Cho tam giác cân ABC $(AB=AC; \hat{A}=20^0)$. Trên nửa mặt phẳng bờ AC chứa B lấy D sao cho $DA=DC$ và $\widehat{ADC}=100^0$. Chứng minh $AB=BC+CD$.

** Giả sử lấy F thuộc AC sao cho* $AF=BC$. *Ta suy ra được* $CF=CD$. *Khai thác kết quả này ta có bài toán:*

4.2. Cho tam giác cân ABC $(AB=AC; \hat{A}=20^0)$. Trên nửa mặt phẳng bờ AC chứa B lấy D sao cho $DA=DC$ và $\widehat{ADC}=100^0$. Trên cạnh AC lấy F sao cho $AF=BC$. Chứng minh tam giác CFD cân.

**Cũng sử dụng kết quả của bài toán 4, ta có bài toán mới:*

4.3. Cho tam giác ABC có $AB=AC$, $\widehat{BAC}=20^0$. Trên nửa mặt phẳng bờ AC chứa B lấy D sao cho $DA=DC$ và $\widehat{CDA}=100^0$. F thuộc AB sao cho $AF=BC$. Chứng minh tứ giác $DBCF$ là hình thang cân.

MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH TRONG SỐ HỌC

PHẠM ĐỨC HIỆP
(GV ĐH Giáo Dục, ĐHQG Hà Nội)

Số học là một trong những chuyên ngành lâu đời và quan trọng nhất của Toán học. Những bài toán số học thường thu hút được sự quan tâm của nhiều người, và để giải một bài toán số học trong chương trình toán học phổ thông, chúng ta thường sử dụng những kiến thức trong nội tại chuyên ngành này. Tuy nhiên, có những bài toán số học nếu chỉ sử dụng những kiến thức thuần túy như vậy chúng ta có thể sẽ gặp khó khăn trong cách tiếp cận, nhưng nếu chúng ta khéo léo sử dụng kiến thức trong các chuyên ngành khác của toán học thì lại có thể thu được những lời giải khá thú vị. Thậm chí trong nhiều trường hợp, ta có thể tổng quát bài toán đã cho bằng chính phương pháp đó. Bài viết này sẽ đề cập đến một số ứng dụng như vậy của đại số và giải tích trong số học.

Phần 1. Ứng dụng của đại số trong số học

Trong mục này chúng ta sẽ sử dụng một số phép biến đổi, tỉ lệ thức cũng như các đồng nhất thức đại số cơ bản để nhận được một số kết quả khá thú vị trong số học. Ta bắt đầu bằng ví dụ đơn giản sau:

Thí dụ 1. *Cho x, y, z, t là các số nguyên dương thỏa mãn $xy = zt$. Chứng minh rằng*

$$x^n + y^n + z^n + t^n$$

là hợp số với mọi số tự nhiên n.

Chứng minh. Giả sử phản chứng tồn tại số tự nhiên n sao cho $x^n + y^n + z^n + t^n = p$ là số nguyên tố. Vì $xy = zt$ nên

$$x^n y^n = (xy)^n = (zt)^n = z^n t^n.$$

Từ đây, ta có $pt^n = (x^n + y^n + z^n + t^n)t^n$

$= x^n t^n + y^n t^n + z^n t^n + t^{2n}$

$= x^n t^n + y^n t^n + x^n y^n + t^{2n}$

$= (x^n y^n + x^n t^n) + (y^n t^n + t^{2n})$

$= x^n (y^n + t^n) + t^n (y^n + t^n) = (x^n + t^n)(y^n + t^n).$

Điều này dẫn đến $x^n + t^n$ hoặc $y^n + t^n$ chia hết cho p. Nhưng rõ ràng cả hai trường hợp này đều không thể xảy ra vì

$$0 < x^n + t^n,\ y^n + t^n < x^n + y^n + z^n + t^n = p.$$

Vậy $x^n + y^n + z^n + t^n$ phải là hợp số. Bài toán được chứng minh.

Thí dụ 2. *Cho p là một số nguyên tố và m, n là các số nguyên dương. Giả sử tồn tại các số nguyên dương a, b, c, d sao cho $p = ma^2 + nb^2 = mc^2 + nd^2$. Chứng minh rằng*
1) nếu $m > 1$ hoặc $n > 1$ thì $a = c$ và $b = d$;
2) nếu $m = n = 1$ thì (a, b) là một hoán vị của (c, d).

Chứng minh. Trước hết, ta có các đồng nhất thức quen thuộc $(ma^2 + nb^2)(mc^2 + nd^2)$

$$= (mac + nbd)^2 + mn(ad - bc)^2$$
$$= (mac - nbd)^2 + mn(ad + bc)^2$$

và đẳng thức $(mac + nbd)(ad + bc)$

$$= (ma^2 + nb^2)cd + (mc^2 + nd^2)ab.$$

Vậy từ giả thiết ta nhận được

$$p^2 = (mac + nbd)^2 + mn(ad - bc)^2$$
$$= (mac - nbd)^2 + mn(ad + bc)^2 \quad (1)$$

và $p(ab + cd) = (mac + nbd)(ad + bc)$.

Nói riêng, $p \mid mac + nbd$ hoặc $p \mid ad + bc$.

Nếu $m > 1$ hoặc $n > 1$ thì $mn > 1$, vậy từ (1) ta có $p^2 \geq mn(ad + bc)^2 > (ad + bc)^2$.

Suy ra $p > ad + bc$, nói riêng $p \nmid ad + bc$. Vậy $p \mid mac + nbd$, suy ra $(mac + nbd)^2 \geq p^2$. Theo (1), điều này dẫn đến $mn(ad - bc)^2 = 0$, hay tương đương với $ad - bc = 0$, nghĩa là $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$.

Từ đây áp dụng tính chất của tỉ lệ thức, ta nhận được $\dfrac{ma^2}{mc^2} = \dfrac{nb^2}{nd^2} = \dfrac{ma^2 + nb^2}{mc^2 + nd^2} = \dfrac{p}{p} = 1.$

Vậy $a=c$ và $b=d$.

Nếu $m=n=1$, nghĩa là $p\,|\,ac+bd$ hoặc $p\,|\,ad+bc$. Ta nhận thấy trường hợp $p\,|\,ac+bd$ là một trường hợp riêng ở trên và do đó $a=c$ và $b=d$. Xét trường hợp $p\,|\,ad+bc$, ta có $(ad+bc)^2 \ge p^2$. Lại theo (1), điều này dẫn đến $ac=bd$, từ đây cũng theo tính chất tỉ lệ thức ta nhận được $a=d$ và $b=c$. Bài toán được chứng minh.

Nhận xét. Ta cũng có thể sử dụng đồng dư thức để tiếp cận bài toán trong ví dụ trên như sau. Từ giả thiết $p=ma^2+nb^2=mc^2+nd^2$, ta có $ma^2 \equiv -nb^2 \pmod p$ và $mc^2 \equiv -nd^2 \pmod p$.

Điều này dẫn đến $(mac)^2 \equiv (nbd)^2 \pmod p$, hay tương đương

$$p\,|\,(mac)^2-(nbd)^2=(mac-nbd)(mac+nbd).$$

Vậy $p\,|\,mac-nbd$ hoặc $p\,|\,mac+nbd$.

Nếu $p\,|\,mac-nbd$, thì $p^2\,|\,(mac-nbd)^2$. Theo (1), ta suy ra $p^2\,|\,mn(ad+bc)^2$. Nhưng lại có $p^2 \ge mn(ad+bc)$, vậy $p^2=mn(ad+bc)^2$. Điều này rõ ràng chỉ xảy ra khi $m=n=1$ và $ad+bc=p$. Từ đó ta nhận lại được chứng minh như trên.

Thí dụ 3. *Cho n là một số nguyên dương và $\overline{abc}$ là một số có ba chữ số thỏa mãn các số $\overline{abc}, \overline{bca}$ và $\overline{cab}$ đều chia hết cho n. Chứng minh rằng $n\,|\,a^3+b^3+c^3-3abc$.*

Chứng minh. Từ giả thiết ta có $n\,|\,100a+10b+c$, $n\,|\,100b+10c+a$, $n\,|\,100c+10a+b$. Ta suy ra

$$n\,|\,(100a+10b+c)(c^2-ab),$$
$$n\,|\,(100b+10c+a)(a^2-bc),$$
$$n\,|\,(100c+10a+b)(b^2-ca).$$

Cộng lại ta được n là ước của

$$\begin{aligned}&(100a+10b+c)(c^2-ab)\\&\quad+(100b+10c+a)(a^2-bc)\\&\quad\quad+(100c+10a+b)(b^2-ca)\\&=100[a(c^2-ab)+b(a^2-bc)+c(b^2-ca)]\\&\quad+10[b(c^2-ab)+c(a^2-bc)+a(b^2-ca)]\\&\quad+[c(c^2-ab)+a(a^2-bc)+b(b^2-ca)].\end{aligned}$$

Hiển nhiên rằng $a(c^2-ab)+b(a^2-bc)+c(b^2-ac)$
$=ac^2-a^2b+ba^2-b^2c+cb^2-ac^2=0$,
$b(c^2-ab)+c(a^2-bc)+a(b^2-ac)$
$=bc^2-ab^2+ca^2-bc^2+ab^2-ca^2=0$
và $c(c^2-ab)+a(a^2-bc)+b(b^2-ca)$
$=c^3-abc+a^3-abc+b^3-abc=a^3+b^3+c^3-3abc$.

Do đó $n\,|\,a^3+b^3+c^3-3abc$.

Nhận xét. 1) Bài toán này có thể giải bằng cách thuần túy số học dựa vào

$$n\,\big|\,\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}=111(a+b+c)$$

và đẳng thức $a^3+b^3+c^3-3abc$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$.

Sau đó xét các trường hợp của $(n,111)$, tuy nhiên cách giải này khá dài dòng.

2) Cách giải sử dụng đại số như trên ngoài việc ngắn gọn hơn còn giúp chúng ta mở rộng được bài toán đã cho. Cụ thể ta chứng minh được bài toán sau:

Cho n, a, b, c, k, l là các số nguyên thỏa mãn các số $ka+lb+c, kb+lc+a$ và $kc+la+b$ đều chia hết cho n. Khi đó $n\,|\,a^3+b^3+c^3-3abc$.

Lưu ý. Những đẳng thức đại số trên thực chất là ứng dụng của định thức (determinant) đối với các ma trận vuông (square matrix) cấp 3 trong đại số tuyến tính (linear algebra), một chuyên ngành nằm trong toán học cao cấp (advanced mathematics).

Phần 2. Ứng dụng của giải tích trong số học

Trong mục này, ta sẽ xét một số ứng dụng của giới hạn đối với dãy số nguyên và đa thức. Ta bắt đầu bằng các bổ đề quen thuộc sau đây (chứng minh các bổ đề này như một bài tập dành cho bạn đọc).

Bổ đề 1. Cho $(a_n)_{n\ge1}$ là dãy các số nguyên có giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a,\ a\in\mathbb{R}$.

Khi đó tồn tại số nguyên dương n_0 sao cho với mọi số nguyên dương $n\ge n_0$ ta có $a_n=a$. Nói riêng a phải là một số nguyên.

Bổ đề 2. Cho $f(x)=a_dx^d+a_{d-1}x^{d-1}+\dots+a_1x+a_0$ là đa thức một biến x bậc $d\ge0$ với hệ số thực.

Khi đó $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^d}=a_d$.

Ta sẽ sử dụng các bổ đề trên để giải một số bài toán số học sau.

Thí dụ 4. *Cho a, b là các số thực thỏa mãn $2^n a+b$ là số chính phương (bình phương của một số tự nhiên) với mọi số nguyên dương n. Chứng minh rằng $a=0$.*

Chứng minh. Giả sử $a\neq 0$, từ giả thiết ta suy ra $a>0$ (vì nếu không, với n đủ lớn thì $2^n a+b<0$, do đó không thể là số chính phương), và tồn tại dãy các số tự nhiên $(x_n)_{n\geq 1}$ sao cho $x_n^2=2^n a+b$. Ta có

$$(x_{n+2}-2x_n)(x_{n+2}+2x_n)$$
$$=x_{n+2}^2-4x_n^2=(2^{n+2}a+b)-4(2^n a+b)=-3b.$$

Vì $a>0$ nên hiển nhiên $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$, vậy

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+2}-2x_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-3b}{x_{n+2}+2x_n}\right)=0.$$

Áp dụng bổ đề 1, ta suy ra tồn tại số nguyên dương n_0 sao cho với mọi số nguyên dương $n\geq n_0$ ta có $2x_n=x_{n+2}$, và do đó $b=0$. Nói riêng, a và $2a$ đồng thời là số chính phương, điều này rõ ràng chỉ xảy ra khi $a=0$, mâu thuẫn với giả sử ở trên. Vậy $a=0$, bài toán được chứng minh.

Thí dụ 5. *Cho $f(x)=ax^2+bx+c$ là đa thức hệ số thực bậc hai thỏa mãn $f(n)$ là số chính phương với mọi số nguyên dương n. Chứng minh rằng $f(x)$ là bình phương của một đa thức bậc nhất với hệ số nguyên.*

Chứng minh. Theo giả thiết, tồn tại dãy số tự nhiên $(a_n)_{n\geq 1}$ sao cho $f(n)=a_n^2$ với mọi số nguyên dương n. Theo bổ đề 2,

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{n^2}\geq 0.$$

Vậy $a>0$ (vì $a\neq 0$). Điều này cũng chỉ ra rằng tồn tại số nguyên dương n_0 sao cho $a_n>0$ với mọi số nguyên dương $n\geq n_0$.

Ta có

$$a_{n+1}-a_n=\frac{a_{n+1}^2-a_n^2}{a_{n+1}+a_n}=\frac{f(n+1)-f(n)}{\sqrt{f(n+1)}+\sqrt{f(n)}}\ (\forall n\geq n_0).$$

Vì $f(n+1)-f(n)$

$$=a(n+1)^2+b(n+1)+c-(an^2+bn+c)=2an+a+b,$$

vậy $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n+1)-f(n)}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2an+a+b}{n}=2a.$

Hơn nữa, $a=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n)}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n+1)}{(n+1)^2}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{f(n+1)}{n^2}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(n+1)}{n^2}.$$

Do đó ta nhận được $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{f(n+1)-f(n)}{n}}{\sqrt{\dfrac{f(n+1)}{n^2}}+\sqrt{\dfrac{f(n)}{n^2}}}=\frac{2a}{2\sqrt{a}}=\sqrt{a}.$$

Theo bổ đề 1, ta suy ra tồn tại số nguyên dương $n_1\geq n_0$ sao cho với mọi số nguyên dương $n\geq n_1$ ta có $a_{n+1}-a_n=\sqrt{a}$ và $\sqrt{a}$ là một số nguyên dương. Đặt $\sqrt{a}=A$, vậy $a_{n+1}-a_n=A$ với mọi số nguyên dương $n\geq n_1$. Điều này dẫn đến $a_{n_1+k}=a_{n_1}+kA$, và do $f(n_1+k)=a_{n_1+k}^2$ $=(a_{n_1}+kA)^2=[(n_1+k)A+(a_{n_1}-n_1A)]^2,\ \forall k\in\mathbb{N}.$

Đặt $B=a_{n_1}-n_1A\in\mathbb{Z}$, từ trên ta suy ra n_1+k là nghiệm của đa thức $f(x)-(Ax+B)^2$ với mọi số tự nhiên k, và rõ ràng điều này chỉ xảy ra khi $f(x)=(Ax+B)^2$, bài toán được chứng minh.

Nhận xét. Bằng phương pháp chứng minh hoàn toàn tương tự như trên, ta nhận được kết quả tổng quát sau:

Cho $f(x)$ là đa thức hệ số thực bậc $k\geq 1$ thỏa mãn $f(n)$ là lũy thừa bậc k của một số tự nhiên với mỗi số nguyên dương n. Khi đó $f(x)$ là lũy thừa bậc k của một đa thức bậc nhất với hệ số nguyên.

Thí dụ 6. *Tìm tất cả các đa thức một biến hệ số nguyên $f(x)$ sao cho với mỗi số nguyên tố p và với mỗi số nguyên dương n, tồn tại số nguyên tố q và số nguyên dương m thỏa mãn $f(p^n)=q^m$.*

Chứng minh. Giả sử $f(x)$ là một đa thức thỏa mãn điều kiện bài toán. Hiển nhiên $f(x)\neq 0$. Gọi d là bậc của $f(x)$.

Nếu $d=0$, trong trường hợp này đa thức $f(x)$ là lũy thừa của một số nguyên tố với số mũ nguyên dương.

Nếu $d\geq 1$, lấy p là một số nguyên tố bất kì, theo giả thiết tồn tại số nguyên tố q và số nguyên dương m sao cho $f(p)=q^m$. Với mọi số tự nhiên k, ta có $p^{k(q-1)+1}-p=p(p^{k(q-1)}-1)$ chia hết cho $p(p^{q-1}-1)$. Theo định lí Fermat bé, $p(p^{q-1}-1)=p^q-p$ chia hết cho q. Mặt khác, theo định lí Bézout

$$p^{k(q-1)+1}-p \,\big|\, f(p^{k(q-1)+1})-f(p).$$

Từ đó ta nhận được $q \,\big|\, f(p^{k(q-1)+1})-f(p)$, dẫn đến $q \,\big|\, f(p^{k(q-1)+1})$ với mọi $k \in \mathbb{N}$. Kết hợp điều này với giả thiết, ta suy ra tồn tại số nguyên dương m_k sao cho

$$f(p^{k(q-1)+1})=q^{m_k}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Mặt khác, theo bổ đề 2, ta thấy

$$\lim_{k\to\infty}\frac{f(p^{(k+1)(q-1)+1})}{(p^{(k+1)(q-1)+1})^d}=\lim_{k\to\infty}\frac{f(p^{k(q-1)+1})}{(p^{k(q-1)+1})^d}=a_d$$

với a_d là hệ số bậc cao nhất của $f(x)$.

Do đó

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\dfrac{f(p^{(k+1)(q-1)+1})}{(p^{(k+1)(q-1)+1})^d}}{\dfrac{f(p^{k(q-1)+1})}{(p^{k(q-1)+1})^d}}=\frac{\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{f(p^{(k+1)(q-1)+1})}{(p^{(k+1)(q-1)+1})^d}}{\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{f(p^{k(q-1)+1})}{(p^{k(q-1)+1})^d}}=\frac{a_d}{a_d}=1,$$

vậy $p^{(q-1)d}=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{f(p^{(k+1)(q-1)+1})}{f(p^{k(q-1)+1})}=\lim\limits_{k\to\infty}q^{m_{k+1}-m_k}$.

Từ đây, theo bổ đề 1, tồn tại số nguyên dương k_0 và số nguyên M sao cho $m_{k+1}-m_k=M$ với mọi số nguyên dương $k \ge k_0$. Do đó $p^{(q-1)d}=q^M$.

Điều này dẫn đến $q=p$. Nói cách khác, ta đã chứng minh được rằng với mỗi số nguyên tố p, tồn tại số nguyên dương M_p sao cho $f(p)=p^{M_p}$. Gọi $(p_k)_{k\ge1}$ là dãy tất cả các số nguyên tố theo thứ tự tăng dần bắt đầu từ $p_1=2$. Lại theo bổ đề 2, ta có

$$a_d=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^d}=\lim_{k\to\infty}\frac{f(p_k)}{p_k^d}=\lim_{k\to\infty}p_k^{M_{pk}-d}.$$

Nói riêng a_d không âm và do đó $a_d \ge 1$ (vì $a_d \ne 0$). Vậy tồn tại số nguyên dương k_1 sao cho với mọi số nguyên dương $k \ge k_1$ ta có $M_{pk}-d \ge 0$. Nói cách khác, dãy $(p_k^{M_{pk}-d})_{k\ge k_1}$ là dãy số tự nhiên có giới hạn là a_d. Áp dụng bổ đề 1 lần nữa, ta nhận được tồn tại số nguyên dương $k_2 \ge k_1$ sao cho $p_k^{M_{pk}-d}=a_d$ với mọi số nguyên dương $k \ge k_2$. Điều này rõ ràng chỉ xảy ra khi $M_{pk}-d=0$ (khi đó $a_d=1$).

Nghĩa là, $f(p_k)=p_k^{M_{pk}}=p_k^d, \forall k \ge k_2$.

Từ đây ta suy ra $f(x)=x^d$ và dễ thấy khi đó $f(x)$ thỏa mãn điều kiện bài toán. Vậy đáp số của bài toán là $f(x)=q^m$ với số nguyên tố q và số nguyên dương m hoặc $f(x)=x^d$ với số nguyên dương d.

Cuối cùng là một số bài tập dành cho bạn đọc.

Bài 1 [Iranian Mathematical Olympiad 2010]. Cho a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $a>b$. Giả sử

$$(a-b, ab+1)=(a+b, ab-1)=1.$$

Chứng minh rằng $(a-b)^2+(ab+1)^2$ không là số chính phương.

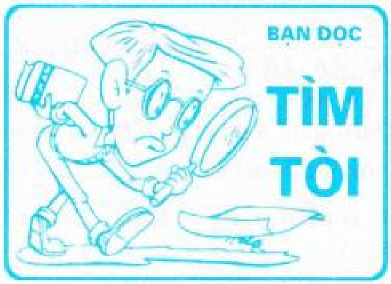
Bài 2 [USA Mathematical Olympiad 2015]. Cho a, b, c, d, e là các số nguyên dương đôi một khác nhau thỏa mãn $a^4+b^4=c^4+d^4=e^5$. Chứng minh rằng $ac+bd$ là một hợp số.

Bài 3 [Bulgarian Mathematical Olympiad 20[illegible]]. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số nguyên sao cho với mỗi số nguyên dương n thì phương trình $P(x)=2^n$ có nghiệm nguyên.

Bài 4 [Canadian Mathematical Olympiad 2010]. Cho $P(x)$ và $Q(x) \not\equiv 0$ là hai đa thức với hệ số nguyên. Giả sử $a_n=n!+n$. Chứng minh rằng nếu $P(a_n)/Q(a_n)$ là số nguyên với mọi n thỏa mãn $Q(a_n) \ne 0$ thì $P(n)/Q(n)$ là số nguyên với mọi số nguyên n thỏa mãn $Q(n) \ne 0$.

LỜI CẢM ƠN

Bài viết này được dựa trên một phần nội dung bài giảng của tác giả trong Trường hè Toán học năm 2016 dành cho học sinh chuyên toán THPT (tại Trường ĐH Giáo dục, ĐHQG Hà Nội và THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Quảng Nam) được tài trợ bởi Viện nghiên cứu cao cấp về toán (VIASM). Qua đây, tác giả xin gửi lời cảm ơn đến Ban tổ chức trường hè và Viện nghiên cứu cao cấp về toán. Tác giả cũng xin cảm ơn Ths.Trịnh Hoài Dương (Trường THCS Giảng Võ, Ba Đình, Hà Nội) đã đặt câu hỏi liên quan đến vấn đề về biểu diễn của số nguyên tố, qua đó tác giả đã tổng quát câu hỏi này thành thí dụ 2 trong bài viết.



VỀ MỘT BÀI TOÁN HAY TỪ TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

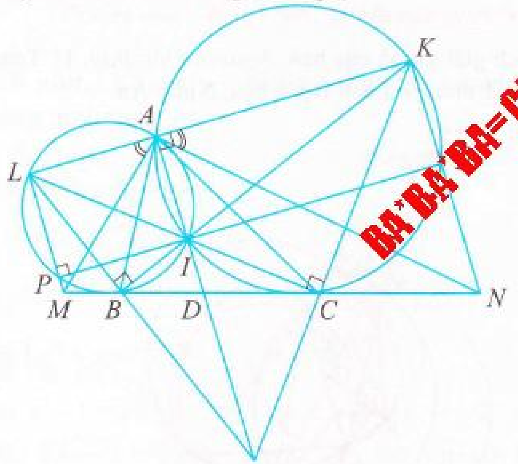
TRẦN QUANG HÙNG
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Tóm tắt. Bài viết đưa ra các lời giải khác nhau đồng thời phát triển và mở rộng một đề toán hay trên Tạp chí TH&TT dùng các công cụ hình học thuần túy và hàng điểm điều hòa.

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ số 471 có đăng một đề toán hay (Bài T12/471) của thầy *Nguyễn Xuân Hùng* và sau đó đáp án có trên Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ số 475 [1]. Tôi xin viết lại đề bài cho phù hợp hơn với bài viết.

Bài toán 1. *Cho tam giác ABC có tâm đường tròn nội tiếp I. Gọi AP, AQ là đường kính của các đường tròn $(AIB), (AIC)$. M, N thuộc BC sao cho $PM \parallel QN \parallel AI$. Chứng minh rằng $\widehat{MAB} = \widehat{NAC}$.*

Lời giải đầu tiên do tác giả đề nghị.

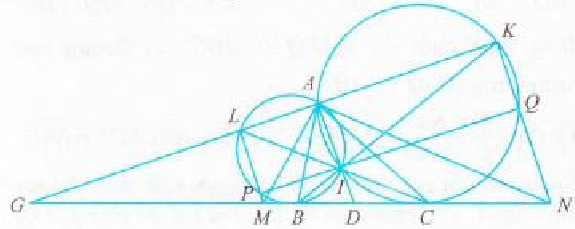


Hình 1

Lời giải thứ nhất. (h.1) Gọi J, K, L lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp góc A, B, C của ΔABC và AI cắt BC tại D. Dễ thấy L, P, M thẳng hàng và K, Q, N thẳng hàng.

Từ đó $\dfrac{LM}{KN} = \dfrac{LM}{DJ}.\dfrac{DJ}{KN} = \dfrac{BL}{BJ}.\dfrac{CJ}{CK} = \dfrac{AL}{AK}$, đẳng thức cuối có do định lý Ceva. Từ đó $\Delta ALM \backsim \Delta AKN$ nên $\widehat{MAL} = \widehat{NAK}$, hay $\widehat{MAB} = \widehat{NAC}$.

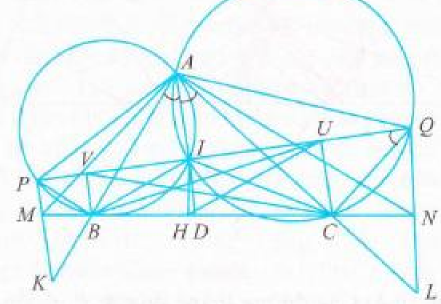
Lời giải tiếp theo sử dụng đáp án trên Tạp chí TH&TT số 475 tháng 1/2017.



Hình 2

Lời giải thứ hai. (h.2) Gọi K, L lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp góc B, C của ΔABC. AI cắt BC tại D, KL cắt BC tại G. Dễ thấy L, P, M thẳng hàng và K, Q, N thẳng hàng. Do CK, LB, AD đồng quy nên $(KL, AG) = -1$ chiếu song song xuống BC suy ra hàng $(MN, DG) = -1$ mà $AD \perp AG$ nên AD là phân giác của $\widehat{MAN}$. Từ đó $\widehat{MAB} = \widehat{NAC}$.

Lời giải tiếp theo sử dụng hướng tiếp cận theo tam giác đồng dạng của bạn *Hoàng Nhật Tuấn*, 12 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình** được tác giả làm lại không sử dụng lượng giác.



Hình 3

Lời giải thứ ba. (h.3) Giả sử AB, AC lần lượt cắt MP, NQ tại K, L. Dễ thấy $\widehat{K} = \widehat{BAI} = \widehat{CAI} = \widehat{L}$. Ta chứng minh $\Delta MKA \backsim \Delta NLA$. Thật vậy, gọi U, V lần lượt là hình chiếu của B, C trên P, Q. Dễ thấy $\widehat{BPV} = \widehat{BAI} = \widehat{CAI} = \widehat{CQU}$ nên $\Delta BPV \backsim \Delta CQU$.

Ta thấy $\dfrac{MK}{NL}=\dfrac{MK}{AD}.\dfrac{AD}{NL}=\dfrac{MB}{DB}.\dfrac{DC}{NC}$

$$=\frac{PV}{QU}.\frac{DC}{DB}=\frac{BV}{CU}.\frac{IU}{IV}=\frac{S_{IBU}}{S_{ICV}}.$$

Gọi H là hình chiếu của I trên BC ta thấy tứ giác $IHCU$ nội tiếp nên $\widehat{UHC}=\widehat{UIC}=\widehat{ACI}-90^0-\widehat{IBC}$ nên $HU\,//\,BI$. Từ đó $S_{IBU}=S_{IBH}$, tương tự $S_{IVC}=S_{ICH}$, vậy $\dfrac{MK}{NL}=\dfrac{S_{IBH}}{S_{ICH}}=\dfrac{HB}{HC}$. Lại có

$\dfrac{KA}{MD}=\dfrac{DB}{AB}=\dfrac{DC}{AC}=\dfrac{LA}{ND}$ do đó $\dfrac{KA}{LA}=\dfrac{DM}{DN}=\dfrac{IP}{IQ}=\dfrac{HB}{HC}$

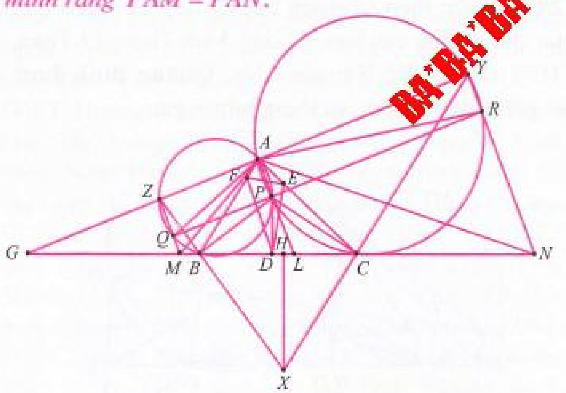
đẳng thức cuối do $\Delta APQ \backsim \Delta IBC$ có đường cao tương ứng là AI và IH.

Từ đó $\dfrac{MK}{NL}=\dfrac{KA}{LA}\Rightarrow \Delta MKA \backsim \Delta NLA$ nên $\widehat{MAK}=\widehat{NAL}$.

Nhận xét. Lời giải thứ nhất chỉ dùng tới kiến thức chương trình lớp 8. Tuy nhiên với lời giải thứ hai thì chúng ta có thể mở rộng bài toán. Lời giải thứ ba khá kỹ thuật nhưng hướng tiếp cận thì lại khá tự nhiên.

Bài toán 1 là một bài toán đẹp có nhiều phát triển, sau đây là hai hướng phát triển khác nhau cho bài toán

Bài toán 2. *Cho ΔABC và P nằm trong tam giác sao cho nếu D, E, F là hình chiếu của P trên BC, CA, AB thì AD, BE, CF đồng quy. Gọi AQ, AR lần lượt là đường kính của hai đường tròn $(APB), (APC)$. Lấy M, N trên BC sao cho $QM\,//\,RN\,//\,AP$. Chứng minh rằng $\widehat{PAM}=\widehat{PAN}$.*



Hình 4

Lời giải. (h.4) Các đường thẳng qua A, B, C lần lượt vuông góc với PA, PB, PC cắt nhau tạo thành ΔXYZ. Gọi H là hình chiếu của X trên BC. Ta dễ thấy $\Delta PBD \backsim \Delta BXH$ và $\Delta PCD \backsim \Delta CXH$, do đó

$$\frac{XC}{XB}=\frac{XC}{XH}.\frac{XH}{XB}=\frac{PD}{DC}.\frac{DB}{PD}=\frac{DB}{DC}.$$

Tương tự cũng có $\dfrac{ZB}{ZA}=\dfrac{FA}{FB}$ và $\dfrac{YA}{YC}=\dfrac{EC}{EA}$.

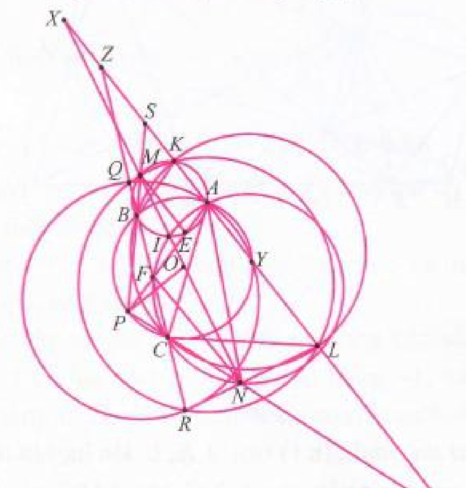
Từ đó do AD, BE, CF đồng quy, nên

$\dfrac{XC}{XB}.\dfrac{ZB}{ZA}.\dfrac{YA}{YC}=\dfrac{DB}{DC}.\dfrac{EC}{EA}.\dfrac{FA}{FB}=1$ suy ra AX, BY, CZ đồng quy. Từ đó nếu gọi $G=YZ\cap BC$ thì $(YZ, AG)=-1$. Chiếu song song xuống BC ta được $(MN, LG)=-1$ với AP cắt BC tại L. Lại có $AG\perp AL$ nên AL là phân giác của $\widehat{MAN}$. Ta hoàn thành chứng minh.

Nhận xét. Cách làm này giống với cách làm ở lời giải 2 là chiếu song song một hàng điều hòa lên đường thẳng BC. Cách chứng minh AX, BY, CZ đồng quy dựa theo ý tưởng của bạn *Trương Trần Minh Trí*, 10 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG **Hà Nội**. Chúng ta có thể chứng minh AX, BY, CZ đồng quy bằng cách khác dựa trên định lý Ceva. Từ bài toán 1 ta thấy các đường tròn (AMN) và đường tròn (ABC) tiếp xúc nhau tại A. Cách phát biểu này cũng là cách phát biểu gốc từ đề bài trên Tạp chí TH&TT số 471. Dựa trên cách phát biểu này ta có thể đưa ra một mở rộng khác khác thú vị như sau:

Bài toán 3. *Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O), tâm đường tròn nội tiếp là I và điểm P nằm trên cung BC không chứa A. PB, PC lần lượt cắt các đường tròn $(AIB), (AIC)$ tại M, N khác B, C. Q, R thuộc BC sao cho MQ, NR cùng vuông góc với MN. Chứng minh rằng tâm đường tròn (AQR) nằm trên PO.*

Cách giải sau là của bạn *Nguyễn Đức Bảo*, 11 Toán, THPT chuyên Phan Bội Châu, **Nghệ An**.



Hình 5

Lời giải thứ nhất. (h.5) Dễ thấy M, I, N thẳng hàng, ta có $\widehat{PMA}=180^0-\widehat{AIB}$

$=\dfrac{1}{2}(\hat{A}+\hat{B})=90^0-\dfrac{1}{2}\hat{C}=90^0-\dfrac{1}{2}\widehat{MPA}$ nên ΔMPA

cân suy ra $\overline{PA}=\overline{PM}$. Tương tự $\overline{PA}=\overline{PN}$ suy ra P là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔAMN. Gọi E, F lần lượt là giao điểm của AP với các đường tròn (AIB) và (AIC). Do $\widehat{AEM}=\widehat{ABM}=\widehat{ACP}$ nên $ME \perp OP$. Tương tự $NF \perp OP$ $\Rightarrow ME // NF$. Gọi S, T lần lượt là giao điểm của PB, PC với đường thẳng qua A vuông góc với PO. Do $ST // ME // NF$ nên theo định lí Thales $\dfrac{\overline{SM}}{\overline{SP}}=\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AP}}, \dfrac{\overline{TP}}{\overline{TN}}=\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AF}}$

$\Rightarrow \dfrac{\overline{SM}}{\overline{SP}} \cdot \dfrac{\overline{TP}}{\overline{TN}}=\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AF}}$. Mặt khác do các tam giác APM và APN cân tại P nên $BE // AM, CF // AN$ suy ra $\overline{AE}=\overline{MB}, \overline{AF}=\overline{NC}$. Do đó $\overline{AE}:\overline{AF}=\overline{MB}:\overline{NC}$. Gọi X là giao điểm của MN với ST. Áp dụng định lí Menelaus cho ΔSPT, cát tuyến M, N, X ta có

$$\frac{\overline{SM}}{\overline{SP}} \cdot \frac{\overline{TP}}{\overline{TN}} \cdot \frac{\overline{XN}}{\overline{XM}}=1 \Rightarrow \frac{\overline{AE}}{\overline{AF}}=\frac{\overline{XM}}{\overline{XN}} \Rightarrow \frac{\overline{MB}}{\overline{NC}}=\frac{\overline{XM}}{\overline{XN}}.$$

Gọi K, L lần lượt là giao điểm của MQ, NR với đường thẳng ST. Theo định lí Thales

$$\frac{\overline{KM}}{\overline{LN}}=\frac{\overline{XM}}{\overline{XN}} \Rightarrow \frac{\overline{KM}}{\overline{LN}}=\frac{\overline{MB}}{\overline{NC}}.$$

Do $\overline{PM}=\overline{PN}$ nên ΔMPN cân tại P suy ra $\widehat{MNP}=\widehat{NMP}$ $\Rightarrow \widehat{KMB}=\widehat{LNC}$. Từ đó $\Delta KMB \backsim \Delta LNC$ (c.g.c) suy ra $\widehat{KBM}=\widehat{LCN}$.

Do đó $\widehat{AKB}=\widehat{KSB}+\widehat{KBS}=90^0-\widehat{OPB}+\widehat{LCN}$ $=\widehat{BCP}+\widehat{LCN}=180^0-\widehat{BCL}$ suy ra tứ giác $KBCL$ nội tiếp. Gọi Z là giao điểm của ST với BC, theo tính chất phương tích có $\overline{ZK}.\overline{ZL}=\overline{ZB}.\overline{ZC}$. Lại do

$\widehat{MKA}=180^0-(\widehat{PO, MN})=180^0-(\widehat{BMI}+\widehat{BPO})$

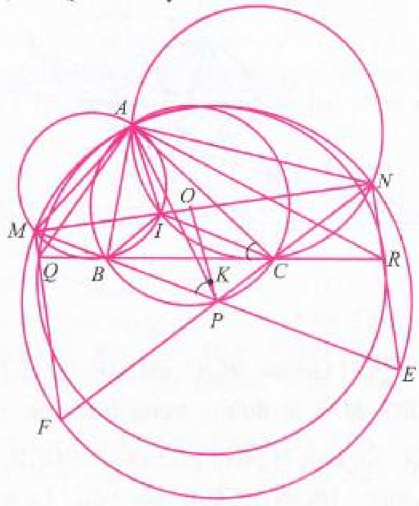
$=180^0-\left(\dfrac{1}{2}\widehat{A}+\widehat{BPO}\right)=90^0+\widehat{BAP}-\dfrac{1}{2}\widehat{A}$

$=90^0+\dfrac{1}{2}\widehat{A}-\widehat{PBC}=180^0-\left(90^0-\dfrac{1}{2}\widehat{A}\right)-\widehat{MBQ}$

$=\widehat{BQM}$.

Từ đó tứ giác $KLRQ$ nội tiếp suy ra $\overline{ZK} \cdot \overline{ZL}=\overline{ZQ} \cdot \overline{ZR}$ $\Rightarrow \overline{ZB} \cdot \overline{ZC}=\overline{ZQ} \cdot \overline{ZR}$ nên Z thuộc trục đẳng phương của đường tròn (O) và đường tròn (AQR) suy ra AZ là trục đẳng phương của (O) và (AQR), từ đó tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AQR thuộc OP, do $OP \perp AZ$.

Lời giải sau sử dụng tính chất về tỷ số phương tích của bạn *Hoàng Trung Dũng*, 12 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG **Hà Nội**.



Hình 6

Lời giải thứ hai. (h.6) Ta thấy $\widehat{MPA}=\widehat{ACB}=2\widehat{AIB}-180^0$ $=2(180^0-\widehat{AMP})-180^0=180^0-2\widehat{AMP}$.

Từ đó ΔAMP cân tại P nên $PM=PA$. Tương tự $PN=PA$. Vậy P là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔAMN. Ta sẽ chứng minh các đường tròn $(AMN), (AQR), (ABC)$ đồng trục thì ba tâm thẳng hàng. Gọi ME, NF là đường kính của (P). Ta thấy

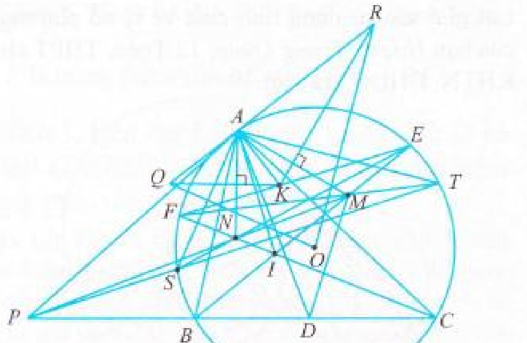
$$\frac{\mathcal{P}_{Q/(AMN)}}{\mathcal{P}_{R/(AMN)}}=\frac{\overline{QM}.\overline{QF}}{\overline{RN}.\overline{RE}}=\frac{\overline{QM}}{\overline{RE}} \cdot \frac{\overline{QF}}{\overline{RN}}$$
$$=\frac{\overline{BQ}}{\overline{BR}} \cdot \frac{\overline{CQ}}{\overline{CR}}=\frac{\overline{QB}.\overline{QC}}{\overline{RB}.\overline{RC}}=\frac{\mathcal{P}_{Q/(ABC)}}{\mathcal{P}_{R/(ABC)}}.$$

Đến đây ta chú ý các đường tròn đã có chung điểm A nên theo tính chất tỷ số phương tích bằng nhau thì các đường tròn này đồng trục. Do đó P, K, O thẳng hàng.

Nhận xét. Bài toán 3 là bài toán hay có nhiều giá trị ứng dụng khác nhau. Khi nghịch đảo bài toán 3 theo cực A phương tích bất kỳ ta thu được bài toán sau:

Bài toán 4. *Cho ΔABC có tâm đường tròn ngoại tiếp O và tâm đường tròn nội tiếp I. D là một điểm bất kỳ trên BC. IB, IC cắt đường trung trực của AD tại M, N tương ứng, K là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔAMN. Trung trực của AN, AM lần lượt cắt đường thẳng qua A vuông góc AK tại Q, R. S, T đối xứng với A qua OQ, OR. ST cắt BC tại P. Chứng minh rằng $PA=PD$.*

Bài toán có lời giải trực tiếp không dùng nghịch đảo được đề nghị bởi bạn *Trương Mạnh Tuấn*, 11 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG **Hà Nội**.



Hình 7

Lời giải. (h.7) Giả sử IB, IC cắt (O) tại E, F khác B, C. Do MN là đường trung trực của AD và BM, CN lần lượt là phân giác của $\widehat{ABD}, \widehat{ACD}$ nên các tứ giác $ABDM, ACDN$ nội tiếp. Ta thấy Q nằm trên các đường trung trực của AN, AS nên Q là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔANS.

Từ đó $\widehat{ASN} = \frac{1}{2}\widehat{AQN} = \widehat{AQK} = \widehat{NAK} = 90^0 - \widehat{NMA}$

$= \widehat{MAD} = \widehat{MBD} = \widehat{ABE} = \widehat{ASE}$.

Từ đó S, N, E thẳng hàng, tương tự T, M, F thẳng hàng. Áp dụng định lý Pascal cho bộ $\begin{pmatrix} S & B & F \\ C & T & E \end{pmatrix}$ suy ra P, M, N thẳng hàng. Lại có MN là trung trực của AD nên $PA = PD$.

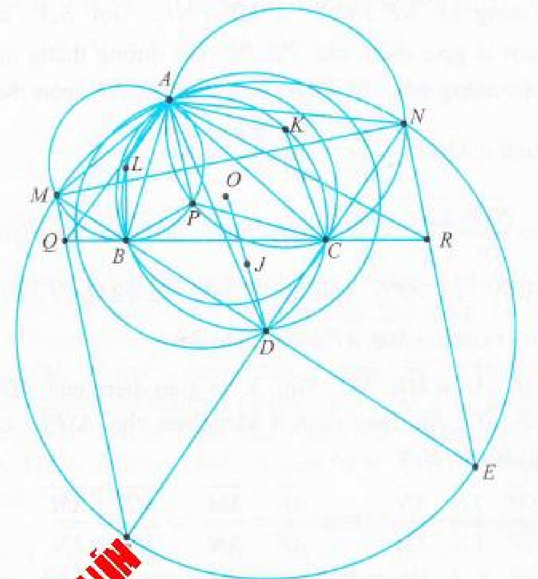
Lời giải bài toán trên cũng có thể coi là lời giải khác cho bài toán 3 sử dụng phép nghịch đảo. Dựa vào lời giải thứ hai của bài toán 3, chúng ta có thể đưa ra một mở rộng hơn nữa và phát biểu bài toán như sau:

Bài toán 5. *Cho ΔABC có P là điểm bất kỳ. $(K), (L)$ lần lượt đường tròn ngoại tiếp các tam giác PCA, PAB. Đường tròn (KCA) và (LAB) cắt nhau tại D khác A. DC, DB lần lượt cắt $(K), (L)$ tại N, M khác C, B. Q, R thuộc BC sao cho MQ, NR cùng vuông góc với MN. Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔAQR. Chứng minh rằng đường thẳng DJ luôn đi qua một điểm cố định khi P thay đổi.*

Lời giải. (h.8) Ta có $\widehat{ADB} = 180^0 - \widehat{ALB} = 180^0 - 2\widehat{AMB}$ suy ra ΔDAM cân tại D. Tương tự ΔDAN cân tại D nên $DM = DA = DN$, do đó D là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔAMN. Gọi ME, NF là đường kính của đường tròn (D) ngoại tiếp ΔAMN thì E, F nằm trên RN, QM. Xét tỷ số phương tích

$$\frac{\mathcal{P}_{Q/(AMN)}}{\mathcal{P}_{R/(AMN)}} = \frac{\overline{QM}\cdot\overline{QF}}{\overline{RN}\cdot\overline{RE}} = \frac{\overline{QM}}{\overline{RE}}\cdot\frac{\overline{QF}}{\overline{RN}}$$

$$= \frac{\overline{BQ}}{\overline{BR}}\cdot\frac{\overline{CQ}}{\overline{CR}} = \frac{\overline{QB}\cdot\overline{QC}}{\overline{RB}\cdot\overline{RC}} = \frac{\mathcal{P}_{Q/(ABC)}}{\mathcal{P}_{R/(ABC)}}.$$



Hình 8

Chú ý các đường tròn $(AMN), (AQR), (ABC)$ có chung điểm A nên theo tính chất tỷ số phương tích bằng nhau thì các đường tròn này đồng trục. Do đó DJ đi qua tâm O đường tròn ngoại tiếp ΔABC cố định. Sử dụng phép nghịch đảo ta đi tới một mở rộng tiếp cho bài toán 4 như sau:

Bài toán 6. *Cho ΔABC với P là điểm bất kỳ. E, F đối xứng với A lần lượt qua PB, PC. BE cắt CF tại D. PB, PC lần lượt cắt các đường tròn $(DAB), (DCA)$ tại M, N khác B, C. Tiếp tuyến qua A của đường tròn (K) ngoại tiếp tam giác AMN cắt trung trực của AM, AN tại Q, R. S, T đối xứng với A qua OR, OQ. Chứng minh rằng MN, ST, BC đồng quy.*

Một bài tập ứng dụng của bài toán 3:

Bài toán 7. *Cho ΔABC nhọn với $AB < AC$ có tâm đường tròn nội tiếp là I và phân giác trong AD. H là trực tâm ΔABC. P đối xứng với H qua BC. Trên AP lấy Q sao cho $\widehat{PQI} = \widehat{ADB}$. K, L lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp góc B, C của ΔABC. M, N thuộc BC sao cho KN, LM vuông góc với QI. R là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔPMN. Chứng minh rằng $\widehat{RHC} = \widehat{PHB}$.*

Các bạn hãy thử làm hai bài toán 6, 7 trên như các bài luyện tập nhé!

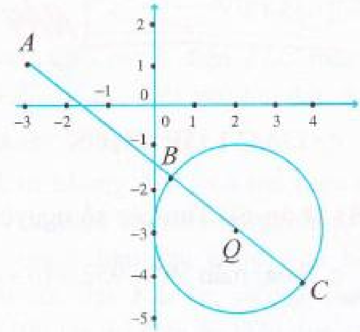
TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 22

Problem. *Let S be the set of all complex numbers satisfying* $|z-2+3i|=2$ (1)

Find the minimal and maximal values the of the expression $P(z)=|z+3-i|, z\in S$ (2)

Solution. We solve this problem geometrically. Let $A(-3; 1)$ and $Q(2; -3)$ represent the complex numbers $2 - 3i$ and $-3 + i$ respectively. Let $M(a; b)$ correspond to the complex number z. Then (1) means that the distance MQ always equals to 2 when M varies. Equivalently, the geometric picture of the set S is the circle $(Q; 2)$. The problem now becomes finding the smallest and biggest distances AM when M is moving on the circle $(Q; 2)$. Suppose that the line which goes through A and Q intersects the circle $(Q; 2)$ at B and C where B is closer to A than C. It's not difficult to see that AM obtains its smallest (resp. biggest) value when M is at B (resp. C). Thus the minimal value of the expression $P(z)=|z+3-i|, z\in S$ is AB and equals to $AQ-QB=\sqrt{41}-2$. Similarly the maximal value of the expression $P(z)=|z+3-i|$, $z\in S$ is AC and equals to $AQ+QC=\sqrt{41}+2$.



TỪ VỰNG

complex number : số phức

correspond to : tương ứng với

NGUYỄN PHỤ HOÀNG LÂN

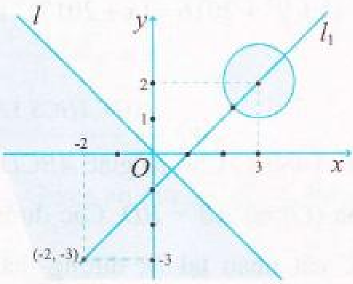
(*Trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội*)

BÀI DỊCH SỐ 19

Bài toán. *Tìm tập hợp (diện tích) các số phức w và z thỏa mãn* $|w+2+3i|\le|w-3-2i|$ *và* $|z-3-2i|\le 1$. *Với mỗi w và z, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của* $|z-w|$.

Lời giải. Chúng ta đồng nhất số phức $a+bi$ với điểm có tọa độ $(a;b)$. Theo định nghĩa, $|w+2+3i|$ là khoảng cách từ w đến $w_1=-2-3i$ và $|w-3-2i|$ là khoảng cách từ w đến $w_2=3+2i$.

Do đó, tập hợp các số phức w thỏa mãn $|w+2+3i|\le|w-3-2i|$ là nửa mặt phẳng chứa w_1 xác định bởi đường trung trực l của w_1 và w_2 (hình vẽ). Tương tự, $|z-3-2i|$ là khoảng cách từ z đến $w_2=3+2i$. Vì vậy tập hợp các số phức z thỏa mãn $|z-3-2i|\le 1$ là đĩa tròn, kể cả biên có tâm là $w_2=3+2i$ bán kính bằng 1.



Dễ thấy rằng đường thẳng đi qua w_1 và w_2, gọi là l_1, vuông góc với l đồng thời cắt l tại điểm $\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$. Từ đó $|z-w|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $w=\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ và z là giao điểm phía dưới của l_1 và đường tròn $|z-3-2i|=1$. Và giá trị nhỏ nhất là

$$\sqrt{\left(3-\frac{1}{2}\right)^2+\left(2+\frac{1}{2}\right)^2}-1=\frac{5}{2}\sqrt{2}-1.$$

Nhận xét. Các bạn sau có bài dịch tốt hơn cả: **Hà Nội:** *Nguyễn Hương Giang*, 10A13, THPT Ngọc Tảo, Phúc Thọ; **Yên Bái:** *Nguyễn Khánh Linh*, 10A1, THPT Hoàng Văn Thụ, Lục Yên; **Vĩnh Long:** *Huỳnh Lý Vân Anh*, *Lê Minh Quân*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, TP. Vĩnh Long.

HỒ HẢI (*Hà Nội*)

CÁC LỚP THCS

Bài T1/481 (Lớp 6). Tìm các số nguyên không âm a, b, c thỏa mãn $9^a+952=(b+41)^2$ và $a=2^b.c$.

NGUYỄN ĐỨC TẤN (*TP. Hồ Chí Minh*)

Bài T2/481 (Lớp 7). Chứng minh rằng:

$$A=\frac{1}{1000}+\frac{1}{1002}+...+\frac{1}{2000}<\frac{1}{2}$$

LƯU LÝ TƯỞNG

(*GV THCS Văn Lang, Việt Trì, Phú Thọ*)

Bài T3/481. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$x^5+y^5+2016=(x+2017)^5+(y-2018)^5.$$

MINH HIẾU

(*GV THCS Yên Lạc, Vĩnh Phúc*)

Bài T4/481. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) có $AB = BD$. Các đường thẳng AB và DC cắt nhau tại N; đường thẳng CB cắt tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) tại M. Chứng minh $\widehat{AMN}=\widehat{ABD}$.

TÔ MINH THƯƠNG

(*GV THCS Kỳ Tân, Kỳ Anh, Hà Tĩnh*)

Bài T5/481. Giải phương trình

$$(1-2x)\sqrt{2-x^2}=x-1.$$

TRẦN VĂN HẠNH

(*GV ĐH Phạm Văn Đồng, Quảng Ngãi*)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/481. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}\dfrac{x+\sqrt{1+x^2}}{1+\sqrt{1+y^2}}=x^2y\\[2mm] 1+y^4-\dfrac{4y}{x}+\dfrac{3}{x^4}=0\end{cases}.$$

NGUYỄN VĂN NHO

(*GV THPT Nguyễn Duy Trinh, Nghi Lộc, Nghệ An*)

Bài T7/481. Cho số nguyên dương $n>1$. Chứng minh rằng: $\dfrac{2^{2n}}{2\sqrt{n}}<C_{2n}^n<\dfrac{2^{2n}}{\sqrt{2n+1}}$.

NGUYỄN TUẤN NGỌC

(*GV THPT chuyên Tiền Giang, TP. Mỹ Tho, Tiền Giang*)

Bài T8/481. Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (O). E, F, G theo thứ tự là giao điểm của các cặp đường thẳng (AB, CD), (AD, CB), (AC, BD). K là giao điểm của EF và OG. Chứng minh rằng $\widehat{AKG}=\widehat{CKG}; \widehat{BKG}=\widehat{DKG}$.

NGUYỄN HỮU TÂM

(*GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định*)

Bài T9/481. Cho ba số thực không âm x, y, z thỏa mãn $2^x+4^y+8^z=4$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $S=\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{2}$.

NGUYỄN VĂN XÁ

(*GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh*)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/481. Tìm tất cả các cặp số tự nhiên (m, n) sao cho $2^m.3^n-1$ là số chính phương.

VŨ VĂN LIÊM

(*Cẩm Xá, Mỹ Hào, Hưng Yên*)

Bài T11/481. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn

$$\begin{cases}u_1=0\\ \log_{\frac{1}{4}}u_{n+1}=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{u_n}, \forall n\in\mathbb{N}^*\end{cases}.$$

Chứng minh rằng dãy số có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó khi n dần đến vô cực.

NGUYỄN LÁI

(*GV THPT chuyên Lương Văn Chánh, Tuy Hòa, Phú Yên*)

Bài T12/481. Cho tam giác ABC, (O) là đường tròn ngoại tiếp, (O_B), (O_C) theo thứ tự là các đường tròn mixtilinear ứng với các đỉnh B, C (đường tròn mixtilinear ứng với đỉnh B là đường tròn tiếp xúc với hai cạnh BA, BC đồng thời tiếp xúc trong với đường tròn (O)). M, N theo thứ tự là tiếp điểm của (O) và (O_B), (O_C). (M), (N) theo thứ tự là các đường tròn có tâm là M, N và tiếp xúc với AC, AB. Chứng minh rằng tâm vị tự ngoài của (M), (N) thuộc BC.

TRẦN VIỆT HÙNG (*Sóc Trăng*)

Bài L1/481. Hai vật nhỏ có khối lượng lần lượt là m_1 và m_2 với $m_1 = 3m_2$ đang dao động điều hòa cùng biên độ 10 cm trên hai đường thẳng cùng song song với trục Ox và có hình chiếu của vị trí cân bằng lên trục Ox trùng với O. Thời điểm ban đầu, vật m_1 có li độ $5\sqrt{3}$ cm và đang chuyển động nhanh dần còn vật m_2 đi qua vị trí cân bằng theo chiều âm. Biết hình chiếu của chúng lên trục Ox gặp nhau lần đầu ở vị trí có tọa độ -5 cm và đang chuyển động ngược chiều nhau. Tính tỉ số giữa động năng của vật m_1 và của vật m_2 tại thời điểm hình chiếu của chúng trên trục Ox gặp nhau lần thứ 2017.

VIỆT CƯƠNG (*Hà Nội*)

Bài L2/481. Cho mạch điện RLC mắc nối tiếp, trong đó $R^2C < 2L$. Đặt vào hai đầu đoạn mạch điện áp xoay chiều $u = U\sqrt{2}\cos 2\pi ft$, trong đó U có giá trị không đổi, f có thể thay đổi được. Khi $f = f_1$ thì điện áp hiệu dụng trên tụ có giá trị cực đại, mạch tiêu thụ công suất bằng 75% công suất cực đại. Khi tần số của dòng điện là $f_2 = f_1 + 100$ Hz thì điện áp hiệu dụng trên cuộn cảm thuần có giá trị cực đại. Để điện áp hiệu dụng trên điện trở đạt cực đại thì tần số của dòng điện phải bằng bao nhiêu?

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH (*Hà Nội*)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/481 (For 6th grade). Find natural numbers a, b, c satisfying $9^a + 952 = (b+41)^2$ and $a = 2^b.c$.

Problem T2/481 (For 7th grade). Prove that

$$A = \frac{1}{1000} + \frac{1}{1002} + \ldots + \frac{1}{2000} < \frac{1}{2}.$$

Problem T3/481. Find positive integral solutions of the equation

$$x^5 + y^5 + 2016 = (x+2017)^5 + (y-2018)^5.$$

Problem T4/481. Given a quadrilateral $ABCD$ inscribed in a circle (O) with $AB = BD$. The lines AB and DC intersect at N. The line CB and the tangent line of the circle (O) at the point A intersect at M. Prove that $\widehat{AMN} = \widehat{ABD}$.

Problem T5/481. Solve the equation

$$(1-2x)\sqrt{2-x^2} = x-1.$$

FOR HIGHSCHOOL

Problem T6/481. Solve the system of equations

$$\begin{cases} \dfrac{x+\sqrt{1+x^2}}{1+\sqrt{1+y^2}} = x^2 y \\ 1 + y^4 - \dfrac{4y}{x} + \dfrac{3}{x^4} = 0 \end{cases}.$$

Problem T7/481. Given an integer $n > 1$. Prove that $\dfrac{2^{2n}}{2\sqrt{n}} < C_{2n}^{n} < \dfrac{2^{2n}}{\sqrt{2n+1}}$.

Problem T8/481. Given a quadrilateral $ABCD$ circumsribing a circle (O). Let E, F, and G respectivly be the intersections of three pairs of lines (AB, CD), (AD, CB), and (AC, BD). Let K be the intersection between EF and OG. Prove that $\widehat{AKG} = \widehat{CKG}$; $\widehat{BKG} = \widehat{DKG}$.

Problem T9/481. Given three nonnegative numbers x, y, z such that $2^x + 4^y + 8^z = 4$. Find the maximum and minimum values of the expression $S=\frac{x}{6}+\frac{y}{3}+\frac{z}{2}$.

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/481. Find all pairs of natural numbers (m, n) so that $2^m.3^n-1$ is a perfect square.

Problem T11/481. Let (u_n) be a sequence defined as follows

$$\begin{cases} u_1=0 \\ \log_{\frac{1}{4}} u_{n+1}=\left(\frac{1}{4}\right)^{u_n}, \forall n\in\mathbb{N}^*. \end{cases}$$

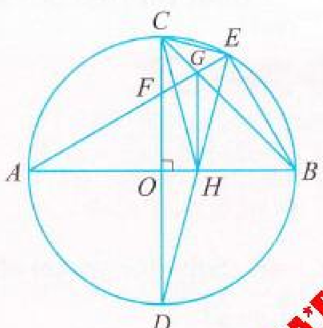
Prove that the sequence has a finite limit and find that limit.

Problem T12/481. Given a triangle ABC and its circumcircle (O). Let (O_B) and (O_C) respectivly be the mixtilinear incircles corresponding to B and C (recall that a mixtilinear incircle corresponding to B is the circle which is internally tangent to BA, BC and the circumcircle (O)). Let M (resp. N) be the tangent point between (O) and (O_B) (resp. (O_C)). Let (M) and (N) be the circles with centers at M and N and are tangent to AC and AB respectively. Prove that the center of dilation of (M) and (N) belongs to BC.

Translated by **NGUYEN PHU HOANG LAN**
(College of Science-Vietnam National University, Hanoi)

HƯỚNG DẪN GIẢI ... (Tiếp theo trang 8)

Câu 5



a) Ta có $AB\perp CD \Rightarrow \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AD} \Rightarrow \widehat{CEA}=\widehat{DEA}$

$\Rightarrow AE$ là phân giác $\widehat{CED}$. $\widehat{FOB}=\widehat{BEF}=90^0$

$\Rightarrow FOBE$ nội tiếp.

b) $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AD} \Rightarrow \widehat{HBG}=\widehat{HEG} \Rightarrow GEBH$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{GHO}=\widehat{GEB}=90^0 \Rightarrow GH\perp AB$ mà

$CD\perp AB \Rightarrow GH // CD$.

c) $GH // CD \Rightarrow \widehat{GHE}=\widehat{CDH}, \widehat{CHG}=\widehat{DCH}$ mà $\widehat{CDH}=\widehat{DCH} \Rightarrow \widehat{GHE}=\widehat{CHG} \Rightarrow HG$ là phân giác $\widehat{CHE}$. ΔCHE có EG, HG là phân giác $\Rightarrow G$ là tâm đường tròn nội tiếp.

Câu 6. a) Ta có $\frac{AE}{AB}=\frac{CE}{BC}=\frac{AC}{AB+BC}$

$\Rightarrow AE=\frac{AB.AC}{AB+BC}$. Tương tự: $AF=\frac{AB.AC}{AC+BC}$.

Vì $AB<AC \Rightarrow AE>AF$.

ΔAEF có $AE>AF \Rightarrow \widehat{AFE}>\widehat{AEF}$ (1)

Vẽ $FL // BC$ $(L\in AC) \Rightarrow \frac{LC}{LA}=\frac{FB}{FA}=\frac{BC}{AC}<\frac{BC}{AB}=\frac{EC}{EA}$

$\Rightarrow \frac{LC}{LA}<\frac{EC}{EA} \Rightarrow \frac{AC}{LA}<\frac{AC}{EA} \Rightarrow LA>EA \Rightarrow E$ giữa A, L $\Rightarrow \widehat{AFE}<\widehat{AFL}=\widehat{ABC}<90^0$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow \widehat{AEF}<\widehat{AFE}<90^0$.

Mặt khác $\widehat{EAF}<90^0$. Vậy ΔAEF có ba góc nhọn.

b) Gọi N, V lần lượt là hình chiếu của E trên BC, AB. G, J lần lượt là hình chiếu của F trên BC, AC. P là giao điểm của MH và NF. Ta có $EN=EV$, $FJ=FG$.

$$\frac{MD}{FJ}=\frac{EM}{EF}=\frac{NP}{NF}=\frac{PH}{FG} \Rightarrow MD=PH.$$

$$\frac{MK}{EV}=\frac{FM}{FE}=\frac{MP}{EN} \Rightarrow MK=MP.$$

Do đó $MH=PH+MP=MD+MK$.

Câu 7. Đặt $M=(a-b)(b-c)(c-d)(d-a)(a-c)(b-d)$.

Các số a, b, c, d chia cho 3 có số dư là 0, 1 hoặc 2 $\Rightarrow$ tồn tại 2 số có hiệu chia hết cho 3 $\Rightarrow M \vdots 3$.

Các số a, b, c, d xảy ra 2 trường hợp:

– Có 2 số chẵn (chẳng hạn a và b) và 2 số lẻ (c và d). Ta có $a-b \vdots 2, c-d \vdots 2 \Rightarrow M \vdots 4$.

– Có 3 số chẵn hoặc 3 số lẻ (chẳng hạn a, b, c). Ta có $a-b \vdots 2, b-c \vdots 2 \Rightarrow M \vdots 4$.

Vì $(3; 4)=1 \Rightarrow M \vdots 12$.

NGUYỄN ĐỨC TẤN *(TP. Hồ Chí Minh)*

Bài T1/477. *Xét tổng S gồm 20 số hạng:*

$$S=\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{2.3.4.5}+\ldots+\frac{1}{20.21.22.23}.$$

Hãy so sánh S với $\frac{1}{18}$.

Lời giải. Dựa vào hệ thức $\frac{1}{m(m+1)(m+2)(m+3)}$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{m(m+1)(m+2)}-\frac{1}{(m+1)(m+2)(m+3)}\right)$$

với m là số nguyên dương tùy ý, ta có

$$3S=\frac{3}{1.2.3.4}+\frac{3}{2.3.4.5}+\ldots+\frac{3}{19.20.21.22}+\frac{3}{20.21.22.23}$$

$$=\left(\frac{1}{1.2.3}-\frac{1}{2.3.4}\right)+\left(\frac{1}{2.3.4}-\frac{1}{3.4.5}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{19.20.21}-\frac{1}{20.21.22}\right)+\left(\frac{1}{20.21.22}-\frac{1}{21.22.23}\right)$$

$$=\frac{1}{1.2.3}-\frac{1}{21.22.23}=\frac{1}{6}-\frac{1}{10626}<\frac{1}{6}.$$

Từ đó $S<\frac{1}{18}$. ❒

➢***Nhận xét.*** 1) *Cách khác*: Dựa vào hệ thức $\frac{1}{m(m+k)}=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+k}\right)$ với m, k là các số nguyên dương tùy ý thì với n là số nguyên dương tùy ý ta có

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+3)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right)-\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right).$$

Áp dụng hệ thức trên với n lần lượt lấy các giá trị 1, 2, 3,..., 19, 20 rồi giản ước hiệu hai phân số giống nhau ta được

$$S=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{21}\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{22}\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{23}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{22}\right)$$

$$=\frac{295}{5313}<\frac{295}{5310}=\frac{1}{18}.$$ Vậy $S<\frac{1}{18}$.

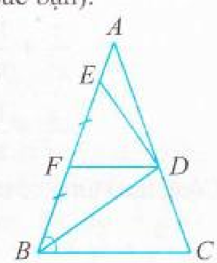
2) Các bạn sau có lời giải đúng: **Phú Thọ:** *Trần Thị Yến Khanh, Bùi Thị Bích Ngọc, Nguyễn Phạm Thanh Nga, Trần Như Quỳnh, Trần Quang Đạt, Vũ Tiến Đạt, Nguyễn Công Thành*, 6A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Tạ Kim Nam Tuấn*, 6A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Hà Nội:** *Hoàng Lê Bích Ngọc*, 6A, THCS Thái Thịnh, Q. Đống Đa; **Nghệ An:** *Đặng Hữu Khanh*, 6A, *Đào Danh Hào, Chu Thế Phong*, 6D, *Võ Đình Hưng*, 6C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Phú Yên:** *Nguyễn Huỳnh Ngọc Anh*, 6A, THCS Nguyễn Chí Thanh, Đông Hòa.

VIỆT HẢI

Bài T2/477. *Cho tam giác ABC cân tại A, đường phân giác BD. Trên tia BA lấy điểm E sao cho* $BE=2CD$. *Chứng minh rằng* $\widehat{EDB}=90^0$.

Lời giải. *Cách* 1 (Của đa số các bạn).

Gọi F là trung điểm của BE thì $FB=CD$ (cùng bằng $\frac{1}{2}BE$). Mà $AB=AC$ (tam giác ABC cân tại A) nên $AF=AD$. Suy ra tam giác AFD cân tại A.



Từ đó $\widehat{AFD}=\widehat{ABC}$ (cùng bằng $\frac{180^0-\widehat{BAC}}{2}$).

Suy ra $DF\ //\ BC$ (hai góc đồng vị bằng nhau), nên $\widehat{FBD}=\widehat{FDB}$ (cùng bằng $\widehat{DBC}$). Điều này dẫn đến tam giác FBD cân tại F, hay

$$FD=FB=\frac{1}{2}BE.$$

Tam giác BDE có DF là trung tuyến ứng với cạnh BE và $DF=\frac{1}{2}BE$ nên tam giác BDE vuông tại D hay $\widehat{EDB}=90^0$ (đpcm).

HD Cách 2. Từ D kẻ $DF \parallel BC$ $(F \in AB)$. Chứng minh F là trung điểm của BE và $DF = \dfrac{1}{2}BE$.

HD Cách 3. Kéo dài ED cắt BC tại M. Từ D kẻ $DI \parallel AB$ $(I \in BC)$. Chứng minh D là trung điểm của EM. ❐

➢***Nhận xét.*** Đây là bài toán có nhiều cách giải và đều phải vẽ thêm đường phụ. Việc lấy thêm điểm F là trung điểm của EB theo cách 1 được nảy sinh một cách tự nhiên từ giả thiết $EB = 2DC$. Các bạn sau đây có lời giải tốt: **Vĩnh Phúc:** *Tạ Kim Nam Tuấn*, 6A2, THCS Yên Lạc; **Phú Thọ:** *Trần Hoàng Anh Tuấn*, 7A1, *Đào Nhân Độ, Nguyễn Công Hải, Nguyễn Sơn Tùng, Hà Minh Nhật*, 7A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Nghệ An:** *Lê Thùy Linh, Lê Văn Mạnh, Lê Văn Quang Trung, Nguyễn Thiên Phúc Anh*, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Thị Hà Chi, Nguyễn Hải Đăng, Lê Huyền Linh*, 7B, *Ngô Đức Hoàng*, 7A, THCS Xuân Diệu, Can Lộc.

NGUYỄN THỊ QUỲNH ANH

Bài T3/477. *Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện x + y + z = xyz. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $S = \dfrac{x}{y^2} + \dfrac{y}{z^2} + \dfrac{z}{x^2}$.

Lời giải. *Cách* 1. Theo BĐT Cauchy ta có:

$$\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x} \ge 2\sqrt{\frac{x}{y^2}.\frac{1}{x}} = \frac{2}{y};$$

$$\frac{y}{z^2} + \frac{1}{y} \ge 2\sqrt{\frac{y}{z^2}.\frac{1}{y}} = \frac{2}{z};$$

$$\frac{z}{x^2} + \frac{1}{z} \ge 2\sqrt{\frac{z}{x^2}.\frac{1}{z}} = \frac{2}{x}$$

Cộng theo từng vế các BĐT trên ta có:

$$\frac{x}{y^2} + \frac{y}{z^2} + \frac{z}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \ge 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$$

hay $S \ge \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$. Do đó

$$S^2 \ge \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + 2\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}\right)$$

$$\ge 3\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}\right) = 3.\frac{x+y+z}{xyz} = 3$$

$\Rightarrow S \ge \sqrt{3}$; $S = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = y = z = \sqrt{3}$.

Vậy $\min S = \sqrt{3}$.

Cách 2 (của bạn *Tạ Kim Thanh Hiền*, 8A4, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**)

Ta có: $x + y + z = xyz \Leftrightarrow \dfrac{1}{xy} + \dfrac{1}{yz} + \dfrac{1}{zx} = 1$.

Đặt $\dfrac{1}{x} = a$, $\dfrac{1}{y} = b$, $\dfrac{1}{z} = c$ thì a, b, c dương và $ab + bc + ca = 1$. Theo BĐT Bunyakovsky ta có:

$$(a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca) = 3$$

$\Rightarrow a + b + c \ge \sqrt{3}$. Áp dụng BĐT Schwarz ta có:

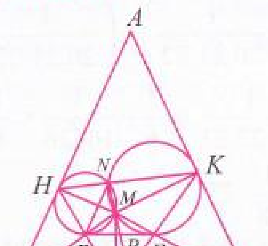
$$S = \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b} + \frac{a^2}{c} \ge \frac{(a+b+c)^2}{a+b+c} = a+b+c \ge \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \min S = \sqrt{3} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = y = z = \sqrt{3}.$$ ❐

➢***Nhận xét.*** Không nhiều các bạn tham giải bài này, các lời giải đều tương tự như một trong hai cách trên. Ngoài bạn *Hiền*, các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội:** *Nguyễn Đặng Nhật Minh*, 8C2, THCS Archimedes Acadamy. **Thanh Hóa:** *Đỗ Cao Bách Tùng*, 8B, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa. **Hà Tĩnh:** *Hoàng Quốc Khánh*, 9A, THCS Đồng Lạng, Đức Thọ.

TRẦN HỮU NAM

Bài T4/477. *Cho ΔABC cân tại A và M là một điểm nằm trong tam giác đó sao cho $\widehat{ABM} = \widehat{BCM}$. Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên AB, BC, CA. Gọi E là giao điểm của MB và IH, F là giao điểm của MC và IK. Giả sử hai đường tròn ngoại tiếp của các tam giác MEH và MFK cắt nhau tại $N \neq M$. Chứng minh rằng đường thẳng NM đi qua trung điểm của BC.*



Lời giải. Dễ thấy các tứ giác $HBIM$, $KCIM$ nội tiếp, suy ra $\widehat{HIM} = \widehat{ABM} = \widehat{BCM}$;

$$\widehat{KIM} = \widehat{ACM} = \widehat{CBM}.$$

Do đó $\widehat{EMF} + \widehat{EIF} = \widehat{EMF} + \widehat{HIM} + \widehat{KIM}$

$$= \widehat{BMC} + \widehat{BCM} + \widehat{CBM} = 180°.$$

Vậy tứ giác $EMFI$ nội tiếp, ta có

$$\widehat{MFE} = \widehat{MIE} = \widehat{MBH} = \widehat{BCM}.$$

Suy ra $EF \parallel BC$ (1). Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của MN với EF và BC. Ta có

$\widehat{PNE} = \widehat{MHE}$ (vì tứ giác $MEHN$ nội tiếp)

$= \widehat{MBC}$ (vì tứ giác $MHBI$ nội tiếp)

$= \widehat{MEP}$ (vì $EF \parallel BC$).

Suy ra $\Delta PNE \backsim \Delta PEM$, nên

$$\frac{PN}{PE} = \frac{PE}{PM} \Leftrightarrow PM.PN = PE^2 \qquad (2)$$

Tương tự, $PM.PN = PF^2$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra $PE = PF$ (4)

Từ (1) và (4), suy ra $QB = QC$ (hệ quả của định lí Thales), tức là đường thẳng MN đi qua trung điểm của BC. ❒

➤***Nhận xét.*** 1) Để ý $\widehat{MNH} + \widehat{MNK} = \widehat{MEI} + \widehat{MFI} = 180^0$ nên H, N, K thẳng hàng.

2) Từ giả thiết nhận thấy đường tròn (BCM) tiếp xúc với AB và AC tại B, C tương ứng.

3) Chỉ có hai bạn tham gia giải và đều làm theo cách trình bày ở trên là các bạn *Nguyễn Đặng Nhật Minh*, 8C2, THCS Archimedes Academy, **Hà Nội**, và bạn *Hoàng Quốc Khánh*, 9A, THCS Đồng Lạng, Đức Thọ, **Hà Tĩnh.**

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/477. *Giải phương trình:*

$$(x^2+x+1).(\sqrt[3]{(3x-2)^2}+\sqrt[3]{3x-2}+1)=9.$$

Lời giải. *Cách* 1. + Nhận thấy $x = 1$ nghiệm đúng phương trình.

+ Xét $x \neq 1$ thì $\sqrt[3]{3x-2}-1 \neq 0$, phương trình đã cho tương đương với

$$\left(x^2+x+1\right).\left(\sqrt[3]{(3x-2)^2}+\sqrt[3]{3x-2}+1\right)$$
$$\times\left(\sqrt[3]{3x-2}-1\right)=9\left(\sqrt[3]{3x-2}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+x+1\right)\left(x-1\right)=3\left(\sqrt[3]{3x-2}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow x^3-1=3\sqrt[3]{3x-2}-3 \Leftrightarrow x^3=3\sqrt[3]{3x-2}-2 \qquad (*)$$

Đặt $\sqrt[3]{3x-2}=y$ thì $y^3=3x-2$, kết hợp với (*) ta có hệ phương trình $\begin{cases} x^3=3y-2 & (1) \\ y^3=3x-2 & (2) \end{cases}$

Trừ theo vế của (1) cho (2) ta được

$$x^3-y^3=3(y-x) \Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2+3)=0.$$

Do $x^2+xy+y^2+3=\left(x+\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2+3>0$

nên suy ra $x-y=0 \Leftrightarrow x=y$.

Thay $y=x$ vào (1) ta có

$$x^3=3x-2 \Leftrightarrow (x-1)^2(x+2)=0.$$

Vì $x \neq 1$ nên $(x-1)^2 \neq 0$, suy ra $x+2=0$ $\Leftrightarrow x=-2$. Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=1$ và $x=-2$.

Cách 2. Phương trình đã cho tương đương với

$$\left(x^2+x-2\right)\left(\sqrt[3]{(3x-2)^2}+\sqrt[3]{3x-2}+1\right)+$$
$$+3\left(\sqrt[3]{(3x-2)^2}+\sqrt[3]{3x-2}+1\right)=9$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+2)\left(\sqrt[3]{(3x-2)^2}+\sqrt[3]{3x-2}+1\right)+$$
$$+3\left(\sqrt[3]{(3x-2)^2}+\sqrt[3]{3x-2}-2\right)=0 \quad (3)$$

Nhận thấy $\sqrt[3]{(3x-2)^2}+\sqrt[3]{3x-2}-2$

$$=\left(\sqrt[3]{3x-2}+2\right)\left(\sqrt[3]{3x-2}-1\right)$$

$$=\frac{9(x-1)(x+2)}{\left(\sqrt[3]{(3x-2)^2}-2\sqrt[3]{3x-2}+4\right)\left(\sqrt[3]{(3x-2)^2}+\sqrt[3]{3x-2}+1\right)}$$

nên PT (3) trở thành

$$(x-1)(x+2)\left(\sqrt[3]{(3x-2)^2}+\sqrt[3]{3x-2}+1\right.$$
$$\left.+\frac{27}{\left(\sqrt[3]{(3x-2)^2}-2\sqrt[3]{3x-2}+4\right)\left(\sqrt[3]{(3x-2)^2}+\sqrt[3]{3x-2}+1\right)}\right)=0$$

Do $y^2+y+1=\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$;

$y^2-2y+4=(y-1)^2+3>0$ với $y=\sqrt[3]{3x-2}$, nên biểu thức trong dấu ngoặc luôn dương với mọi x. Suy ra (3) $\Leftrightarrow (x-1)(x+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

➤***Nhận xét.*** Đây là bài toán giải phương trình có chứa căn thức bậc ba, ta cần đặt ẩn phụ (cách 1) hoặc nhân biểu thức căn liên hợp chuyển về phương trình tích (cách 2) để đưa về giải phương trình không chứa căn. Đa số các bạn gửi bài đều giải theo một trong hai cách trên. Tuy nhiên có một số bạn khi nhân thêm biểu thức đã không đặt điều kiện cho biểu thức đó khác 0. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt: **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Công Hải, Hà Minh Nhật,* 7A3, THCS Lâm Thao; **Hà Tĩnh:** *Hoàng Quốc Khánh,* 9A THCS Đồng Lạng, Đức Thọ; **Vĩnh Long:** *Nguyễn Xuân Quang,* 9/1,THCS Cao Thắng, TP. Vĩnh Long; **Bến Tre**: *Ngô Quốc Bảo,* 7/1, THCS Mỹ Hóa, TP. Bến Tre;

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T6/477. *Giả sử phương trình*

$$x^3-ax^2+bx-c=0$$

có 3 nghiệm thực dương. Chứng minh rằng nếu

$$2a^3+3a^2-7ab+9c-6b-3a+2=0$$

thì $1 \le a \le 2$.

Lời giải. (Của bạn *Nguyễn Khánh Linh*, 10A1, THPT Hoàng Văn Thụ, Lục Yên, **Yên Bái**). Giả sử x_1, x_2, x_3 là 3 nghiệm dương của PT đã cho. Áp dụng định lý Viète ta được:

$x_1+x_2+x_3=a; x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=b; x_1x_2x_3=c.$

Ta có:

$$(x_1+x_2)(x_1-x_2)^2+(x_2+x_3)(x_2-x_3)^2 +(x_3+x_1)(x_3-x_1)^2\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x_1+x_2+x_3)^3-7(x_1+x_2+x_3) \times(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)+9x_1x_2x_3\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 2a^3-7ab+9c\ge 0 \quad (1)$$

Ta lại có: $(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2\ge 0$

$$\Rightarrow 2(x_1+x_2+x_3)^2-6(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)\ge 0$$

$\Rightarrow 2a^2-6b\ge 0$ (2). Theo giả thiết:

$$2a^3+3a^2-7ab+9c-6b-3a+2=0$$

$$\Rightarrow(2a^3-7ab+9c)+(2a^2-6b)+a^2-3a+2=0 \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $a^2-3a+2\le 0$.

Vậy $1\le a\le 2$. □

➢***Nhận xét.*** Nhiều bạn tham gia giải bài và đều giải đúng. Một số bạn giải theo cách trên. Đa số các bạn áp dụng các dạng khác nhau của bất đẳng thức Schur. Các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội:** *Hoàng Tùng*, 11 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội, *Nguyễn Văn Dũng*, 11A14, THPT Ngọc Tảo, H. Phúc Thọ; **Lào Cai:** *Vũ Lê Mai, Hoàng Hải Ngân, Nguyễn Thành Đạt,* 10 Toán, THPT chuyên Lào Cai; **Yên Bái:** *Nguyễn Khánh Linh,* 10A1, THPT Hoàng Văn Thụ, H. Lục Yên; **Vĩnh Phúc:** *Kim Thị Hồng Lĩnh,* 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Nam Định:** *Lê Tiến Đạt, Trần Minh Hiếu, Vũ Thị Diệp,* 11 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Nam Định, *Nguyễn Hùng Sơn,* 10A2, THPT Lê Quý Đôn, H. Trực Ninh; **Nghệ An:** *Trần Tiến Mạnh,* 11A1, THPT chuyên Đại học Vinh, *Võ Việt Anh, Nguyễn Hữu Thắng, Phạm Trần Anh,* 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, *Bạch Quang Hiệu,* 11A1, THPT Cửa Lò; **Hà Tĩnh:** *Hoàng Quốc Khánh,* 9A, THCS Đồng Lạng, H. Đức Thọ; **Quảng Bình:** *Hồ Anh,* 10 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Thừa Thiên Huế:** *Phan Hoàng Minh Đức,* 11 Toán 2, THPT chuyên Quốc Học Huế; **Quảng Nam:** *Nguyễn Lê Thanh Hằng, Huỳnh Minh Trí,* 10/1, *Trương Nhật Nguyên Bảo,* 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, TP. Tam Kỳ, *Phạm Lý Nhật Duy,* 10/1, THPT chuyên Lê Thánh Tông, TP. Hội An; **Bình Phước:** *Nguyễn Hoàng Đức, Nguyễn Tấn Tài, Trịnh Hoàng Hiệp,* 11A, THPT chuyên Quang Trung; **Vĩnh Long:** *Trần Lĩnh,* 10T1, *Trịnh Thế Chương, Châu Minh Khánh,* 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Bến Tre:** *Phạm Nhật Minh,* 10T, THPT chuyên Bến Tre; **Tiền Giang:** *Lê Hoàng Bảo,* 11 Toán, THPT chuyên Tiền Giang.

NGUYỄN HIỆP

Bài T7/477. *Cho a, b, c, d, e là các số thực thỏa mãn:* $\begin{cases}\sin a+\sin b+\sin c+\sin d+\sin e=0\\ \cos 2a+\cos 2b+\cos 2c+\cos 2d+\cos 2e=-3\end{cases}$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\cos a+2\cos 2b+3\cos 3c$.

Lời giải. Để cho gọn ta kí hiệu $x=\sin a, y=\sin b$, $z=\sin c, t=\sin d$, $s=\sin e$. Ta có $1\ge|x|,|y|,|z|$, $|t|,|s|$ và theo giả thiết $x+y+z+t+e=0$,

$-3=\cos 2a+\cos 2b+\cos 2c+\cos 2d+\cos 2e$

$=(1-2x^2)+(1-2y^2)+(1-2z^2)+(1-2t^2)+(1-2s^2)$.

Suy ra $x^2+y^2+z^2+t^2+s^2=4$.

Các số thực được chia thành hai nhóm: Các số không âm và các số âm. Theo nguyên lí Dirichlet trong 5 số x, y, z, t, s có ít nhất ba số thuộc cùng một nhóm, không mất tính tổng quát giả sử đó là các số x, y, z (do vai trò của x, y, z, t, s trong giả thiết là như nhau).

Do đó $2\ge|t|+|s|\ge|t+s|=|-x-y-z|$

$$=|x|+|y|+|z|\ge x^2+y^2+z^2.$$

Kết hợp với $2\ge t^2+s^2$, suy ra

$$4\ge x^2+y^2+z^2+t^2+s^2.$$

$x^2+y^2+z^2+t^2+s^2=4$ khi và chỉ khi:

hoặc $t=s=1$, trong ba số x, y, z có hai số bằng -1, một số bằng 0;

hoặc $t=s=-1$, trong ba số x, y, z có hai số bằng 1, một số bằng 0.

Như vậy từ giả thiết ta suy ra trong các số x, y, z, t, s có hai số bằng 1, hai số bằng -1, và một số bằng 0. Suy ra trong 5 số $\cos a, \cos b, \cos c, \cos d, \cos e$ có 4 số bằng 0, 1 số bằng ± 1. Chú ý các công thức $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$,

$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha,$$

ta có bảng

$\cos\varphi$	0	1	-1
$\cos 2\varphi$	-1	1	1
$\cos 3\varphi$	0	1	-1

Bởi vậy ta có

$\cos a$	0	1	-1	0	0	0
$\cos b$	0	0	1	± 1	0	0
$\cos c$	0	0	0	0	1	-1
$P = \cos a$ $+ 2\cos 2b$ $+ 3\cos 3c$	-2	-1	1	2	1	-5

Kết luận:

+ Giá trị lớn nhất của P bằng 2, đạt được khi $\cos b = \pm 1, \cos a = \cos c = \cos d = \cos e = 0$.

+ Giá trị nhỏ nhất của P bằng -5, đạt được khi $\cos c = -1, \cos a = \cos b = \cos d = \cos e = 0$. ❒

➢***Nhận xét.*** Rất tiếc Tòa soạn đã không nhận được lời giải nào của các bạn học sinh.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T8/477. *Cho điểm H ở miền trong tam giác ABC. Gọi K là trực tâm tam giác ABH. Đường thẳng qua H, vuông góc với BC cắt AK tại E. Đường thẳng qua H vuông góc với AC cắt BK tại F. Chứng minh rằng $CH \perp EF$.*

Lời giải. *Cách* 1 (*Theo đa số các bạn*).

Bổ đề. Cho 4 điểm A, B, C, D. Khi đó

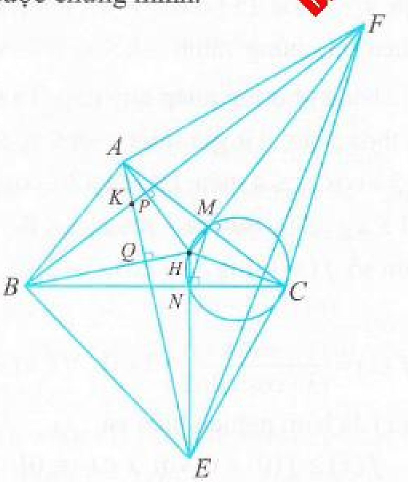
$$AC \perp BD \Leftrightarrow AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2.$$

Chứng minh. Gọi J là trung điểm của BD. Ta thấy: $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$

$\Leftrightarrow \ (\overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AD}^2) + (\overrightarrow{CD}^2 - \overrightarrow{CB}^2) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{CJ} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{CA} = 0 \Leftrightarrow AC \perp BD$

Bổ đề được chứng minh.



Áp dụng bổ đề trên ta được:

$EH^2 + AB^2 = BE^2 + AH^2$; $CF^2 + AH^2 = AF^2 + CH^2$;

$AF^2 + BH^2 = FH^2 + AB^2$; $CH^2 + BE^2 = CE^2 + BH^2$.

Cộng theo vế 4 BĐT trên ta có:

$CF^2 + EH^2 = FH^2 + CE^2$, suy ra $CH \perp EF$.

Cách 2 (Của bạn *Nguyễn Văn Dũng*, 11A14, THPT Ngọc Tảo, Phúc Thọ, **Hà Nội**).

Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên CA, BC; P, Q lần lượt là giao điểm của BF với AH, AE với BH. Lúc đó:

$$\overline{HM}.\overline{HF} = \overline{HP}.\overline{HA} = \overline{HQ}.\overline{HB} = \overline{HN}.\overline{HE} = k.$$

Xét phép nghịch đảo f cực H, phương tích k ta thấy: $f(H,k)$: $EF \mapsto (NMH)$;

$CH \mapsto CH$

(kí hiệu (NMH) là đường tròn đi qua ba điểm N, M, H). Vì phép nghịch đảo có tính bảo giác, và CH là đường kính của (NMH) nên $CH \perp EF$. ❒

➢***Nhận xét.*** Số lời giải gửi về Tòa soạn khá nhiều, tất cả đều giải đúng. Sau đây là danh sách các bạn có lời giải tốt (ngoài bạn *Dũng*): **Hà Nội:** *Hoàng Tùng*, 11 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Vĩnh Phúc:** *Kim Thị Hồng Lĩnh*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hưng Yên:** *Nguyễn Lê Huy*, 10A1, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; **Nam Định:** *Trần Minh Hiếu, Vũ Thị Diệp, Lê Tiến Đạt*, 11T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Nghệ An:** *Trần Tiến Mạnh*, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh, *Nguyễn Xuân Mạnh* [illegible], 10A1, *Nguyễn Hữu Thắng, Phạm Trần Anh, Võ Việt Anh*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; *Bạch Quang Hiệu*, 11A1, THPT Cửa Lò ; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Đình Nhật*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Trị :** *Nguyễn Thị Phương Linh*, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Thừa Thiên Huế:** *Hồ Thị Hải Yến*, 11 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế; **Quảng Nam:** *Trần Văn Tình, Phan Tam Li Na, Phạm Thị Hồng Mỹ, Nguyễn Thanh Hùng, Huỳnh Minh Trí, Đặng Thị Trà My, Lê Thảo Huyền, Phan Văn Chính*, 10/1; *Trương Nhật Nguyên Bảo, Nguyễn Huy Hải*, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; *Phạm Lý Nhật Duy*, 10/1, THPT chuyên Lê Thánh Tông; **Đăk Nông:** *Nguyễn Tuấn Hải*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Chí Thanh; **Phú Yên:** *Phạm Minh Chiến*, 10T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh, TP. Tuy Hòa; **Bến Tre:** *Phan Thanh Đại Dương*, 10 Toán, THPT chuyên Bến Tre ; **Tiền Giang:** *Lê Hoàng Bảo*, 11 Toán, THPT chuyên Tiền Giang; **Vĩnh Long:** *Trịnh Thế Chương, Châu Minh Khánh*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, TP. Vĩnh Long.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/477. *Với $n \in \mathbb{N}^*$, gọi $S_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$. Ký hiệu $\{S_n\}$ là phần lẻ của S_n. Chứng minh rằng : Với mỗi $\varepsilon \in (0,1)$, luôn tồn tại $n \in \mathbb{N}^*$ để $\{S_n\} \le \varepsilon$.*

Lời giải. Với $\varepsilon\in(0,1)$ tồn tại $k\in\mathbb{N}^*$ để $\dfrac{1}{k+1}<\varepsilon.$

Xét dãy (S_n) với $n\geq k.$ Ta có

$$S_k<S_{k+1}<...<... \text{ và } \lim S_n=+\infty.$$

Tồn tại $m\in\mathbb{N}^*$ để $S_k<m.$ Tồn tại $n\in\mathbb{N}^*, n\geq k$ sao cho $S_n<m<S_{n+1}.$ Khi đó $[S_{n+1}]\geq m>S_n.$ Vậy $\{S_{n+1}\}=S_{n+1}-[S_{n+1}]$

$$\leq S_{n+1}-S_n=\frac{1}{n+1}\leq\frac{1}{k+1}<\varepsilon. \;\square$$

➢***Nhận xét.*** 1) Có ít bạn tham gia giải bài toán này. Các lời giải gửi đến đều chưa chặt chẽ chính xác.

2) Bạn *Trương Nguyên Nhật Bảo*, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Quảng Nam**, nhận xét rằng khẳng định của bài toán đúng cho mọi dãy tăng (S_n) thỏa mãn điều kiện $\lim S_n=+\infty$ và $\lim(S_{n+1}-S_n)=0.$

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T10/477. *Tìm số màu k nhỏ nhất để có thể tô màu các số 1, 2, …, 20 (mỗi số một màu, hai số khác nhau có thể được tô cùng màu) sao cho không có 3 số nào cùng màu lập thành một cấp số cộng.*

Lời giải. Số màu nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện đầu bài là $k=3.$ Thực vậy, cách tô màu sau thỏa mãn điều kiện bài toán:

Màu 1 : 1, 2, 6,7,9,18,20 ,

Màu 2 : 3,4,11,12,15,16 và

Màu 3 : 5,8,10,13,14,17,19.

Bây giờ ta chứng minh rằng trong mọi cách tô màu các số bởi 2 màu, luôn có 3 số cùng màu lập thành cấp số cộng. Giả sử ngược lại ta có một cách tô các số từ 1 đến 20 sao cho không có 3 số nào cùng màu lập thành cấp số cộng. Ta nhận xét là trong 3 số liên tiếp luôn có 2 số khác màu nhau, và nếu a,b cùng màu thì $2a-b, 2b-a$ khác màu với chúng. Xét 3 số liên tiếp là 9, 10 và 11. Chỉ có 2 khả năng xảy ra:

1) Số 10 khác màu với số 9 và số 11. Khi đó số 2.9 – 11 = 7 và 2.11 – 9 = 13 cùng màu với số 10. Ta gặp mâu thuẫn vì 7, 10 và 13 lập thành cấp số cộng.

2) Số 10 cùng màu với số 9 và khác màu với số 11 (tương tự số 10 cùng màu với số 11). Khi đó 2.9 – 10 = 8 cùng màu với số 11.

Do đó, 2.8 –11 = 5 và 2.11 – 8 = 14 cùng màu với 9 và 10. Tương tự thì 2.5 – 9 = 1 và 2.10 – 14 = 6 cùng màu với 11, mâu thuẫn vì 1, 11 và 6 lập thành cấp số cộng. ❒

➢***Nhận xét.*** Có bạn giải sai bài toán này, tìm ra số màu $k=2.$ Có vài bạn có lời giải đánh máy y hệt nhau (tuy chỉ có khác con số). Những bạn sau đây có lời giải tốt: **Quảng Trị:** *Nguyễn Thị Phương Linh*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Vĩnh Long**: *Châu Minh Khánh*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm TP Vĩnh Long; **Phú Yên:** *Lê Thành Lâm*, THPT chuyên Lương Văn Chánh TP. Tuy Hòa; **Đăk Nông:** *Nguyễn Tuấn Hải*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Chí Thanh; **Quảng Nam:** *Phạm Lý Nhật Duy*, 10/1 THPT chuyên Lê Thánh Tông, TP. Hội An; *Trương Nhật Nguyên Bảo*, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T11/477. *Cho dãy số (x_n) thỏa mãn điều kiện*

$$\begin{cases} x_1=-\pi, x_2=-1 \\ x_{n+2}=x_{n+1}+\log_2\dfrac{9+3(\cos x_{n+1}-\cos x_n)-\cos x_{n+1}\cos x_n}{8+\sin^2 x_n}, \\ \hfill n=1,2,3,... \end{cases}$$

Chứng minh dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn khi n dần đến vô cùng và tính giới hạn đó.

Lời giải. (*Theo đa số các bạn*). Nhận xét rằng

$8+\sin^2 x_n=9-\cos^2 x_n$ và

$$9+3(\cos x_{n+1}-\cos x_n)-\cos x_{n+1}\cos x_n$$
$$=(3+\cos x_{n+1})(3-\cos x_n)$$

nên $x_{n+2}=x_{n+1}+\log_2\dfrac{(3+\cos x_{n+1})(3-\cos x_n)}{9-\cos^2 x_n}$

$$=x_{n+1}+\log_2(3+\cos x_{n+1})-\log_2(3+\cos x_n),$$

$n=1,2,\ldots$ Suy ra

$$x_{n+2}-\log_2(3+\cos x_{n+1})=x_{n+1}-\log_2(3+\cos x_n)=$$
$$\ldots=x_2-\log_2(3+\cos x_1)=-2$$

dẫn đến $x_{n+1}=\log_2(3+\cos x_n)-2,\; n=1,2,\ldots$ (1)

Tiếp theo, ta chứng minh $-\pi\leq x_n\leq 0$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$, bằng phương pháp quy nạp. Ta thấy x_1 và x_2 thỏa mãn. Từ giả thiết $-\pi\leq x_n\leq 0$ suy ra $2<3+\cos x_n\leq 4$ nên $1\leq\log_2(3+\cos x_n)\leq 2$ hay $-1\leq x_{n+1}\leq 0.$ Suy ra $-\pi\leq x_{n+1}\leq 0.$

Xét hàm số $f(x)=\log_2(3+\cos x)-2-x,$

$$x\in(-\pi,0]$$

ta có $f'(x)=\dfrac{-\sin x}{(3+\cos x)\ln 2}-1<0,\;\forall x\in(-\pi,0]$

nên $f(x)$ là hàm nghịch biến và

$$f(x)\geq f(0)=0 \text{ với } x\in(-\pi,0].$$

Suy ra $\log_2(3+\cos x)-2\geq x,\; x\in(-\pi,0],$

và $x_{n+1}=\log_2(3+\cos x_n)-2\geq x_n,\;\forall n\in\mathbb{N}^*$; tức (x_n) là dãy tăng và bị chặn trên bởi 0 nên có giới hạn hữu hạn khi n dần đến vô cùng. Giả sử giới hạn đó là a thì từ giả thiết (1), ta thu được

$a=\log_2(3+\cos a)-2 \Leftrightarrow f(a)=0$

$\Leftrightarrow f(a)=f(0) \Leftrightarrow a=0$. Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$. ❒

➤***Nhận xét.*** Đây là dạng toán cơ bản về dãy sinh bởi hàm số đơn điệu. Các bạn sau đây có lời giải đúng. **Bình Phước:** *Nguyễn Hoàng Đức, Trịnh Hoàng Hiệp*, 11A, THPT chuyên Quang Trung; **Hà Nội:** *Nguyễn Văn Dũng*, 11A14, THPT Ngọc Tảo, Phúc Thọ; **Nghệ An:** *Trần Tiến Mạnh*, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh, *Võ Việt Anh, Nguyễn Hữu Thắng*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Quảng Nam:** *Trương Nhật Nguyên Bảo*, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Quảng Trị:** *Nguyễn Thị Phương Linh*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/477. *Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Phân giác ngoài của các góc $\widehat{DAB}, \widehat{ABC}, \widehat{BCD}, \widehat{CDA}$ theo thứ thứ cắt phân giác ngoài của các góc $\widehat{ABC}, \widehat{BCD}, \widehat{CDA}, \widehat{DAB}$ tại X, Y, Z, T. E, F theo thứ tự là trung điểm của XZ, YT. Chứng minh rằng:*

1) Tứ giác XYZT nội tiếp và $XZ \perp YT$.

2) O, E, F thẳng hàng.

Lời giải. *Bổ đề*. Cho tứ giác $ABCD$. E, F theo thứ tự là trung điểm của AC, BD. Các điểm M, N theo thứ tự thuộc các đoạn AB, CD sao cho $\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{CN}{CD}$. Khi đó trung điểm của MN thuộc đoạn EF. Phép chứng minh bổ đề trên rất đơn giản, không trình bày ở đây.

Trở lại bài toán. Trong lời giải này kí hiệu $d(X, AB)$ chỉ khoảng cách từ điểm X tới đường thẳng AB. Gọi $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ theo thứ tự là số đo của các góc $\widehat{DAB}, \widehat{ABC}, \widehat{BCD}, \widehat{CDA}$.

1) Gọi K là giao điểm của phân giác trong các góc $\widehat{DAB}, \widehat{CBA}$; I là giao điểm của XZ và YT.

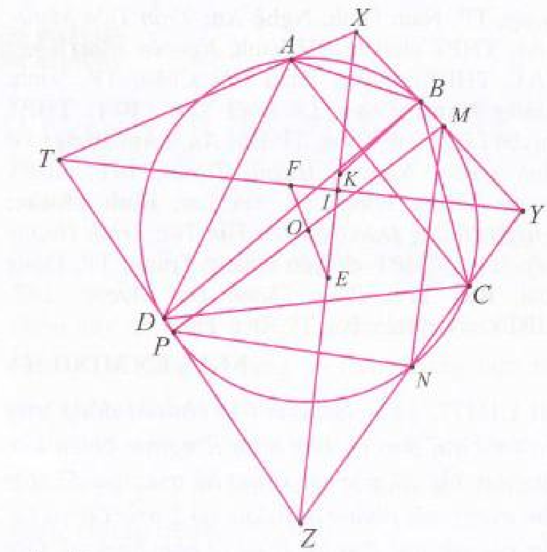
Dễ thấy $\widehat{XAB}=\dfrac{180°-\alpha}{2}$; $\widehat{XBA}=\dfrac{180°-\beta}{2}$.

Do đó $\widehat{TXY}=\widehat{AXB}=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

Tương tự $\widehat{TZY}=\widehat{DZC}=\dfrac{\gamma+\delta}{2}$. Vậy

$\widehat{TXY}+\widehat{TZY}=\dfrac{\alpha+\beta}{2}+\dfrac{\gamma+\delta}{2}=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}=\dfrac{360°}{2}=180°$.

Điều đó có nghĩa là tứ giác $XYZT$ nội tiếp.



Dễ thấy

$$d(X,AD)=d(X,AB)=d(X,BC);$$
$$d(K,AD)=d(K,AB)=d(K,BC);$$
$$d(Z,AD)=d(Z,CD)=d(Z,BC).$$

Do đó X, K, Z thẳng hàng.

Dễ thấy $\widehat{XAK}=90°=\widehat{XBK}$. Do đó tứ giác $XAKB$ nội tiếp. Vậy $\widehat{IXY}=\widehat{KXB}=\widehat{KAB}=\dfrac{\alpha}{2}$. Tương tự $\widehat{IYX}=\dfrac{\gamma}{2}$. Tóm lại $\widehat{IXY}+\widehat{IYX}=\dfrac{\alpha+\gamma}{2}=\dfrac{180°}{2}=90°$.

Điều đó có nghĩa là $XZ \perp YT$.

2) Gọi M, N, P theo thứ tự là giao điểm thứ hai của (O) và XY, YZ, ZT.

Vì XY, ZT theo thứ tự là phân giác ngoài của các góc $\widehat{ABC}, \widehat{CDA}$ nên M, P theo thứ tự là trung điểm của các cung $\overset{\frown}{ABC}, \overset{\frown}{CDA}$. Do đó MP là đường kính của (O). Nói cách khác O là trung điểm của MP (1). Vì YZ là phân giác ngoài của góc $\widehat{BCD}$ nên N là trung điểm của cung $\overset{\frown}{BCD}$. Từ tứ giác $XAKB$ nội tiếp, suy ra $\widehat{YMN}=\widehat{BAN}=\widehat{BAK}=\widehat{BXK}=\widehat{BXZ}$. Điều đó có nghĩa là $MN \parallel XZ$. Tương tự $NP \parallel YT$. Theo định lí Thales, $\dfrac{XM}{XY}=\dfrac{ZN}{ZY}=\dfrac{ZP}{ZT}$ (2). Từ (1) và (2), theo bổ đề trên, suy ra O thuộc EF. ❒

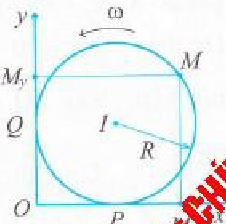
➤***Nhận xét.*** 1) Số bạn tham gia giải khá nhiều, một số bạn phải dùng định lí sin.

2) Xin nêu tên tất cả các bạn: **Vĩnh Phúc:** *Bùi Nam Sơn*, THPT chuyên Vĩnh Phúc, TP Vĩnh Yên; **Nam Định:** *Vũ Thị Diệp*, 11T2, THPT chuyên Lê Hồng

Phong, TP. Nam Định; **Nghệ An:** *Trần Tiến Mạnh*, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh, *Nguyễn HữuThắng*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; **Quảng Nam:** *Phạm Lý Nhật Duy*, 10/1, THPT chuyên Lê Thánh Tông, TP Hội An; **Lâm Đồng:** *Võ Minh Quân*, *Nguyễn Huỳnh Tuyên*, 10T, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Bình Phước:** *Nguyễn Hoàng Đức*, *Nguyễn Tấn Tài*; *Trịnh Hoàng Hiệp*, 11A, THPT chuyên Quang Trung, TP. Đồng Xoài; **Bến Tre:** *Phan Thanh Đại Dương*, 10T, THPT chuyên Bến Tre, TP. Bến Tre.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/477. *Một chất điểm M chuyển động tròn đều trên quĩ đạo có bán kính R ngược chiều kim đồng hồ, tốc độ góc ω. Chọn hệ trục tọa độ xOy nằm trong mặt phẳng quỹ đạo, có 2 trục Ox và Oy tiếp xúc với quĩ đạo tại P và Q như hình vẽ. Gọi M_x, M_y lần lượt là hình chiếu của M trên 2 trục Ox và Oy. Chọn gốc thời gian t = 0 là lúc chất điểm đi qua P. Tìm thời điểm đầu tiên để khoảng cách giữa M_x và M_y là lớn nhất, nhỏ nhất. Tính các khoảng cách đó?*



Lời giải. Sau thời gian t, chất điểm M quay được một góc $\alpha = \omega.t$ và có tọa độ: $x = R(1+\sin\alpha)$;

$y = R(1-\cos\alpha)$.

Khoảng cách giữa hai hình chiếu của M ở thời điểm t:

$$M_xM_y = \sqrt{x^2+y^2} = R\sqrt{3+2(\sin\alpha-\cos\alpha)} \quad (1)$$

Áp dụng BĐT Bunyakovsky:

$$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2 \le [1^2+(-1)^2](\sin^2\alpha+\cos^2\alpha) = 2.$$

Suy ra: $-\sqrt{2} \le \sin\alpha - \cos\alpha \le \sqrt{2}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có:

- $\text{Max}M_xM_y = R\sqrt{3+2\sqrt{2}}$, xảy ra khi

$\alpha = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi = \dfrac{3\pi}{4}$ (chọn $k=0$)nên $t = \dfrac{3\pi}{4\omega}$.

- $\text{Min}M_xM_y = R\sqrt{3-2\sqrt{2}}$, xảy ra khi

$\alpha = \dfrac{-\pi}{4} + 2k\pi = \dfrac{7\pi}{4}$ (chọn $k=1$) nên $t = \dfrac{7\pi}{4\omega}$.

➢***Nhận xét.*** Danh sách các bạn giải đúng bài này là: **Nghệ An:** *Nguyễn Mạnh Hùng*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Long An:** *Nguyễn Phùng Hải Đăng*, 10T1, *Nguyễn Đức Quân Kiện*, 11T1, THPT chuyên Long An.

NGUYỄN XUÂN QUANG

Bài L2/477. *Cho hai thấu kính hội tụ L_1 và L_2 đặt đồng trục có tiêu cự lần lượt là f_1 = 20cm và f_2 = 30cm. Hai quang tâm của chúng cách nhau $L = O_1O_2$ = 100cm. Hỏi phải đặt vật sáng AB ở cách thấu kính trước L_1 bao nhiêu cm để ảnh cuối cùng A_2B_2 tạo bởi hệ L_1, L_2 là ảnh thật và có độ lớn $A_2B_2 = \dfrac{3}{8}AB$?*

Lời giải. Sơ đồ tạo ảnh :

$$AB \xrightarrow[d_1 \qquad d_1']{(O_1)} A_1B_1 \xrightarrow[d_2 \qquad d_2']{(O_2)} A_2B_2$$

(L)

Ta có: $d_1' = \dfrac{d_1f_1}{d_1-f_1} = \dfrac{20d_1}{d_1-20}$

$$d_2 = L - d_1' = 100 - \frac{20d_1}{d_1-20} = \frac{80d_1-2000}{d_1-20}$$

$$d_2' = \frac{d_2f_2}{d_2-f_2} = \frac{(80d_1-2000).30}{(d_1-20)\left(\dfrac{80d_1-2000}{d_1-20}-30\right)}$$

$= \dfrac{48d_1-1200}{d_1-28}$. Do A_2B_2 là ảnh thật, nên $d_2' > 0$

$\Rightarrow 0 < d_1 < 25$ cm ($d_1 \neq 20$ cm) hoặc $d_1 > 28$ cm.

$$K = K_1K_2 = \frac{d_1'}{d_1}.\frac{d_2'}{d_2} = \frac{20}{d_1-20}.\frac{30}{d_2-30}$$

$$= \frac{600}{(d_1-20)\left(\dfrac{80d_1-2000}{d_1-20}-30\right)} = \frac{12}{d_1-28}.$$

$$\text{Để } |K| = \frac{3}{8} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{12}{d_1-28} = \dfrac{3}{8} \\ \dfrac{12}{d_1-28} = -\dfrac{3}{8} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} d_1 = 60 \text{ cm (chọn)} \\ d_1 = -4 \text{ cm (loại)} \end{array}\right..$$

Kết luận: Để ảnh cuối cùng A_2B_2 tạo bởi hệ L_1, L_2 là ảnh thật và có độ lớn $A_2B_2 = \dfrac{3}{8}AB$, thì phải đặt vật sáng AB ở trước và cách thấu kính L_1 60 cm. ❐

➢***Nhận xét.*** Chúc mừng các bạn đã có lời giải đúng đề ra kì này: **Tiền Giang:** *Lê Hoàng Bảo*, 11 Toán, THPT chuyên Tiền Giang; **Nam Định:** *Vũ Thị Diệp*, 11 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Long An:** *Nguyễn Phùng Hải Đăng*, 10 T1, THPT chuyên Long An; **Bạc Liêu:** *Tạ Việt Hoàng*, 11 T, THPT chuyên Bạc Liêu; **Nghệ An:** *Bạch Quang Hiệu*, 11 A1, THPT Cửa Lò, *Trần Tiến Mạnh*, 11 A1, THPT chuyên ĐH Vinh; **Lào Cai:** *Lý Nhật Linh*, 10 toán, THPT chuyên Lào Cai.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

PHƯƠNG TRÌNH PYTHAGORAS

NGUYỄN NGỌC TRUNG
(Nguyên HS THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)

Một trong những phương trình nghiệm nguyên nổi tiếng nhất trong lý thuyết số là phương trình Pythagoras $x^2 + y^2 = z^2$ (x, y, z là các số nguyên dương.) Phương trình đã được người Babylon biết tới từ lâu, nhưng chỉ được giải quyết hoàn chỉnh bởi Pythagoras khi ông nghiên cứu định lý Pythagoras nổi tiếng trong hình học.

Bộ ba số (x, y, z) như trên được gọi là bộ ba số Pythagoras. Dễ thấy nếu (x, y, z) là bộ ba số Pythagoras thì bộ ba số (tx, ty, tz) cũng là bộ ba số Pythagoras với mọi t nguyên dương. Do đó ta chỉ xét các nghiệm của phương trình với các bộ ba số Pythagoras nguyên thủy, hay các bộ (x, y, z) thỏa mãn $(x, y, z) = 1$.

Bổ đề 1. *(x, y, z) là bộ ba số Pythagoras nguyên thủy thì $(x, y) = (y, z) = (z, x) = 1$.*

Giả sử $(x, y) > 1$. Khi đó tồn tại số nguyên tố p sao cho $p \mid (x, y)$. Suy ra $p^2 \mid (x^2; y^2) \Rightarrow p \mid x^2 + y^2 = z^2$ nên $p \mid z$, vô lý vì $(x, y, z) = 1$.

Bổ đề 2. *(x, y, z) là bộ ba số Pythagoras nguyên thủy thì x chẵn, y lẻ hoặc ngược lại.*

Vì $(x, y) = 1$ nên x, y không cùng chẵn. Giả sử x, y cùng lẻ thì $z^2 = x^2 + y^2 \equiv 2 \pmod 4$, vô lý.

Bổ đề 3. *$r, s \in \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn $(r, s) = 1, rs = t^2$. Khi đó tồn tại $h, l \in \mathbb{Z}$ sao cho $r = l^2, s = h^2$.*

Bây giờ ta có thể mô tả tất cả các bộ Pythagoras nguyên thủy.

Định lý 1. *a) Giả sử (x, y, z) là bộ ba số Pythagoras nguyên thủy, x chẵn, y lẻ. Khi đó (x, y, z) có dạng $\begin{cases} x = 2mn \\ y = m^2 - n^2 \\ z = m^2 + n^2 \end{cases}$ với m, n nguyên dương; $(m, n) = 1; m > n; m, n$ khác tính chẵn lẻ.*

b) Đảo lại, với m, n nguyên dương $(m, n) = 1$; $m > n; m, n$ khác tính chẵn lẻ thì bộ ba số xác định như trên là bộ ba số Pythagoras nguyên thủy.

Chứng minh. a) $x^2 = z^2 - y^2 = (z - y)(z + y)$.

Vì y, z lẻ, x chẵn nên $\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{z-y}{2} \cdot \frac{z+y}{2}$ với $\frac{x}{2}, \frac{z-y}{2}, \frac{z+y}{2} \in \mathbb{Z}$. Lại có $(y, z) = 1$ (bổ đề 1) suy ra $\left(\frac{z-y}{2}, \frac{z+y}{2}\right) = 1$ nên $\frac{z-y}{2} = n^2, \frac{z+y}{2} = m^2$ (bổ đề 3). Suy ra: $\begin{cases} x = 2mn \\ y = m^2 - n^2 \\ z = m^2 + n^2 \end{cases}$.

Ta có $(m, n) = 1$ vì mọi ước chung của m, n cũng là ước chung của $x = 2mn, y = m^2 - n^2, z = m^2 + n^2$ và $(x, y, z) = 1$.

Lại do m, n không cùng là hai số lẻ nên m, n khác tính chẵn lẻ. Như vậy, mỗi bộ số Pythagoras đều có dạng như trên.

b) Dễ thấy bộ ba số như trên là bộ ba số Pythagoras. Ta chỉ cần chứng minh đó là bộ ba số Pythagoras nguyên thủy. Thật vậy, giả sử $d = (y, z)$. Dễ thấy d lẻ. Ta có $d \mid y + z = 2m^2$ nên $d \mid m^2$. Tương tự $d \mid n^2$. Mặt khác $(m, n) = 1$ nên $d = 1$. Từ đó $(x, y, z) = 1$.

Hệ quả. *Mọi nghiệm của phương trình Pythagoras đều có dạng $\begin{cases} x = 2kmn, \\ y = k(m^2 - n^2) \\ z = k(m^2 + n^2) \end{cases}$ với $m, n, k \in \mathbb{Z}^+$; $(m, n) = 1; m > n; m, n$ khác tính chẵn lẻ.*

Sau đây là hai ứng dụng của định lý 1.

Thí dụ 1. *Không tồn tại hai số nguyên dương x và y để tổng các bình phương và hiệu các bình phương của chúng đều là các số chính phương.*

Lời giải. Giả sử tồn tại các số nguyên dương x, y thỏa mãn. Trong các cặp số (x, y) thỏa mãn ta chọn (x_0, y_0) là cặp số thỏa mãn $x_0{}^2 + y_0{}^2$ nhỏ nhất. Giả sử $\begin{cases} x_0{}^2 + y_0{}^2 = z_0{}^2 \\ x_0{}^2 - y_0{}^2 = t_0{}^2 \end{cases}$. Ta có $(x_0, y_0) = 1$. Thật vậy, giả sử $d = (x_0, y_0)$ thì $d \mid z_0, d \mid t_0$.

Dễ thấy $\left(\frac{x_0}{d}, \frac{y_0}{d}\right)$ thỏa mãn tính chất trên.

Do đó $(x_0, y_0) = 1$. Dễ thấy $2x_0^2 = z_0^2 + t_0^2$ nên $x_0^2 = \frac{(z_0+t_0)^2}{4} + \frac{(z_0-t_0)^2}{4}$.

Đặt $u = \frac{z_0+t_0}{2}, v = \frac{z_0-t_0}{2}$. Khi đó $u+v = z_0, u-v = t_0$ và $u^2+v^2 = x_0^2$. Ta có $(u,v)=1$, vì nếu $(u,v)=d$ thì $d \mid x_0, d \mid z_0$. Suy ra $d \mid y_0$ nên $d=1$.

Theo định lý 1, do (u, v, x_0) là bộ ba số Pythagoras nguyên thủy nên tồn tại các số nguyên dương m, n nguyên tố cùng nhau; $m > n$; m, n khác tính chẵn lẻ sao cho: $u = 2mn, v = m^2 - n^2$

hoặc $u = m^2 - n^2, v = 2mn$.

Vậy $uv = 2mn(m^2-n^2)$. Lại có $2y_0^2 = z_0^2 - t_0^2$

$= (u+v)^2 - (u-v)^2 = 4uv = 8mn(m^2-n^2)$

$\Rightarrow y_0 = 2k \Rightarrow mn(m^2-n^2) = k^2$. Vì $(m,n)=1$ nên $(m, m^2-n^2) = (n, m^2-n^2) = 1$. Suy ra theo bổ đề 3, tồn tại các số nguyên a, b, c sao cho $m = a^2$, $n = b^2$, $m^2 - n^2 = c^2$.

Lại vì $(m,n)=1$ và m, n khác tính chẵn lẻ nên $(m+n, m-n)=1$. Theo bổ đề 3, tồn tại các số nguyên r, s để $\begin{cases} m-n = r^2 \\ m+n = s^2 \end{cases}$. Khi đó dễ thấy cặp (a,b) thỏa mãn tính chất đề bài.

Mặt khác $a^2 + b^2 = m + n < 2m \le 2mn = v$

$$< u = \frac{z_0+t_0}{2} < z_0 \le z_0^2 = x_0^2 + y_0^2,$$

mâu thuẫn với cách chọn (x_0, y_0) của ta.

Nhận xét. Tương tự ta dễ dàng chứng minh phương trình $x^4 - y^4 = z^2$ không có nghiệm nguyên dương.

Thí dụ 2. *Chứng minh phương trình $x^4 + y^4 = z^2$ không có nghiệm nguyên dương.*

Lời giải. Giả sử phương trình có nghiệm nguyên dương. Gọi (x_0, y_0) là cặp nghiệm thỏa mãn $x_0^4 + y_0^4$ nhỏ nhất. Tương tự Thí dụ 1, ta có $(x_0, y_0) = 1$. Như vậy (x_0^2, y_0^2, z_0) là bộ ba số Pythagoras nguyên thủy. Giả sử y_0 lẻ. Khi đó theo định lý 1 tồn tại m, n nguyên tố cùng nhau, khác tính chẵn lẻ sao cho:

$$x_0^2 = 2mn, y_0^2 = m^2 - n^2, z_0 = m^2 + n^2.$$

Vì m, n nguyên tố cùng nhau nên (m, n, y_0) là bộ ba số Pythagoras nguyên thủy. Do đó tồn tại a, b với $(a,b)=1$ sao cho: $n = 2ab, y_0 = a^2 - b^2, m = a^2 + b^2$.

Khi đó $x_0^2 = 2mn = 4abm$.

Vì $(a,b) = (a,m) = (b,m) = 1$ nên theo bổ đề 3, $a = c^2, b = d^2, m = e^2$. Suy ra $e^2 = c^4 + d^4$. Mặt khác $c^4 + d^4 = e^2 = m < m^2 + n^2 = z_0 \le z_0^2 = x_0^4 + y_0^4$ trái với cách chọn (x_0, y_0) là cặp nghiệm thỏa mãn $x_0^4 + y_0^4$ nhỏ nhất.

Nhận xét. Qua lời giải 2 thí dụ trên, ta nhận thấy hiệu quả của phương pháp suy tàn của Fermat: Để chứng minh một phương trình không có nghiệm nguyên, ta giả sử phương trình có nghiệm và khi đó phương trình có một nghiệm nhỏ nhất (theo một nghĩa nào đó). Ta tìm cách chỉ ra một nghiệm nhỏ hơn nghiệm nói trên và dẫn đến mâu thuẫn.

Thí dụ 3. *Chứng minh không tồn tại tam giác vuông với độ dài các cạnh là những số nguyên mà diện tích của nó là số chính phương.*

Lời giải. Giả sử tồn tại tam giác vuông thỏa mãn với các cạnh góc vuông a, b và cạnh huyền là c. Khi đó $a^2 + b^2 = c^2$ và $ab = 2d^2$. Suy ra $c^2 + 2ab = (a+b)^2$ hay $c^2 + (2d)^2 = (a+b)^2$.

Tương tự $c^2 - (2d)^2 = (a-b)^2$. Trái với Thí dụ 1.

Thí dụ 4. *Giải phương trình nghiệm nguyên dương: $x^{-2} + y^{-2} = z^{-2}$.*

Lời giải. Phương trình tương đương với $x^2 + y^2 = \left(\frac{xy}{z}\right)^2$. Do đó $z \mid xy$ nên $xy = zt, t \in \mathbb{Z}^+$.

Phương trình trở thành $x^2 + y^2 = t^2$. Đặt $d = (x, y, t), x = ad, y = bd, t = cd \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 \\ (a,b,c) = 1 \end{cases}$.

Ta có $xy = zt \Rightarrow z = \frac{xy}{t} = \frac{abd}{c} \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow c \mid d \Rightarrow d = kc$.

Theo định lý 1, tồn tại các số nguyên dương m, n thỏa mãn $a = m^2 - n^2, b = 2mn, c = m^2 + n^2$.

Suy ra $x = k(m^4 - n^4), y = 2kmn(m^2+n^2)$,

$$z = 2kmn(m^2 - n^2), k, m, n \in \mathbb{Z}^+.$$

Nhận xét. Nếu $x, y, z \in \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn $x^{-2} + y^{-2} = z^{-2}$ thì $x^4 + y^4 + z^4$ là số chính phương. Thật vậy

$(xz)^2+(yz)^2=(xy)^2 \Rightarrow x^4+y^4+z^4=x^4+y^4+z^4$
$+2(xy)^2-2(xz)^2-2(yz)^2=(x^2+y^2-z^2)^2$.

Thí dụ 5. *Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình:* $x(x+1)=2y^4$.

Lời giải. Dễ thấy $(x,y)=(1,1)$ là một nghiệm. Ta chứng minh phương trình không có nghiệm $x>1$.
Thật vậy, vì $(x,x+1)=1$ nên có hai trường hợp:

TH1: $\begin{cases} x=a^4 \\ x+1=2b^4 \end{cases}$. Suy ra $2b^4-1=a^4$ nên

$b^8-a^4=(b^4-1)^2$. Vì $x>1$ nên $b>1$, vô lý vì phương trình $x^4-y^4=z^2$ không có nghiệm nguyên dương.

TH2: $\begin{cases} x=2a^4 \\ x+1=b^4 \end{cases}$. Suy ra $2a^4+1=b^4$ nên $a^8+b^4=(a^4+1)^2$, vô lý vì phương trình $x^4+y^4=z^2$ không có nghiệm nguyên dương.

Thí dụ 6. *Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình:* $x(x^2+4)=y^2$.

TH1: x lẻ. Dễ thấy $(x,x^2+4)=1$ nên $x=a^2$, $x^2+4=b^2$. Suy ra $b^2-x^2=4$. Điều này không xảy ra.
TH2: $x=2k$ $(k>0)$. Thay vào PT ta có:
$2k(4k^2+4)=y^2 \Rightarrow y^2 \vdots 8 \Rightarrow y \vdots 4 \Rightarrow k(k^2+1)=y_1^2$,
với $y=4y_1 \Rightarrow \begin{cases} k=2a^2 \\ k^2+1=b^2 \end{cases}$ (I) hoặc $\begin{cases} k=a^2 \\ k^2+1=2b^2 \end{cases}$ (II).
Dễ thấy hệ (I) có nghiệm khi $k=0$, loại.
Xét hệ (II), ta có $b^4-a^4=(b^2-1)^2$. Do phương trình $x^4-y^4=z^2$ không có nghiệm nguyên dương nên phương trình $b^4-a^4=(b^2-1)^2$ chỉ có nghiệm khi $b=1$. Từ đó $k=1$ và $(x,y)=(2,4)$.

Thí dụ 7 (Bulgaria 1998). *Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình:* $x^2+y^2=1997(x-y)$.

Lời giải. Phương trình tương đương với
$$2(x^2+y^2)=2.1997(x-y).$$
Suy ra $(x+y)^2+(1997-x+y)^2=1997^2$.
Vì x,y là các số nguyên dương, $1997>x+y>0$; $1997-x+y>0$ nên ta quy về xét phương trình nghiệm nguyên dương $a^2+b^2=1997^2$. Vì 1997 là số nguyên tố nên $(a,b)=1$. Do đó $(a,b,1997)$ là bộ ba số Pythagoras nguyên thủy nên tồn tại m,n sao cho $1997=m^2+n^2 (m>n)$.
Dễ thấy $31<m<45$. Ta có: $1997\equiv 2(mod 3)$ nên $m\equiv n\equiv \pm 1(mod 3)$. Tương tự $m\equiv n\equiv \pm 1(mod 5)$.
Suy ra $m\in\{34,41,44\}$. Thử lại ta có $(m,n)=(34,29)$. Do đó $(a,b)=(1972,315)$. Từ đó ta dễ dàng tìm được nghiệm của phương trình.

Thí dụ 8. *Chứng minh phương trình:* $x^2+y^2=(a^2+b^2)z^2, a, b$ *là các số nguyên dương cho trước, luôn có vô hạn nghiệm nguyên dương* (x,y,z).

Lời giải. Đặt $x=au+bv, y=bu-av$. Khi đó
$$x^2+y^2=(a^2+b^2)(u^2+v^2).$$
Phương trình trở thành $u^2+v^2=z^2$. Theo định lý 1, $u=k(m^2-n^2), v=2kmn, z=k(m^2+n^2)$. Suy ra $x=k(am^2+2bmn-an^2), y=k(bm^2-2amn-bn^2)$, $z=k(m^2+n^2)$.

Thí dụ 9 (Mathematical Excalibur). *Chứng minh phương trình* $(xy)^2=z^2(z^2-x^2-y^2)$ *không có nghiệm nguyên dương.*

Lời giải. Giả sử PT có nghiệm. Viết PT dưới dạng trùng phương ẩn z thì biệt số Δ của PT bậc hai trung gian là số chính phương hay
$\exists t:(x^2+y^2)^2+4x^2y^2=t^2$. Mặt khác:
$(x^2+y^2)^2-4x^2y^2=(x^2-y^2)^2$, vô lý theo Thí dụ 1.

Thí dụ 10. *Giải phương trình nghiệm tự nhiên:*
$$x^4+y^4=2z^2.$$

Lời giải. Dễ thấy $x=y, z=x^2$ là nghiệm của phương trình. Giả sử $x>y$. Khi đó x,y cùng tính chẵn lẻ nên $a=\frac{x^2+y^2}{2}, b=\frac{x^2-y^2}{2}$ là các số nguyên dương.
Suy ra $x^2=a+b, y^2=a-b, 2z^2=2(a^2+b^2)$. Lại có $a^2-b^2=x^2y^2$, mâu thuẫn với Thí dụ 1.

Thí dụ 11. *Tìm tất cả các số hữu tỉ* r *sao cho* r^2+2, r^2-2 *là bình phương các số hữu tỉ.*

Lời giải. Giả sử $r=\frac{p}{q},(p,q)=1$. Khi đó ta có hệ sau:

$\begin{cases} p^2+2q^2=x^2 \\ p^2-2q^2=y^2 \end{cases}$. Suy ra $2p^2=x^2+y^2, 4q^2=x^2-y^2$.
Vậy $(2p)^2=(x+y)^2+(x-y)^2$

$\Rightarrow \left[2p(x-y)\right]^2 = \left(x^2-y^2\right)^2 + (x-y)^4 = (2q)^4 + (x-y)^4,$ mâu thuẫn theo Thí dụ 2.

Thí dụ 12. *Chứng minh hai mệnh đề sau tương đương:*
(i) Tồn tại các số nguyên dương a, b, c, d, e, f, g thỏa mãn $a^2+b^2=e^2, b^2+c^2=f^2, a^2+c^2=g^2, a^2+b^2+c^2=d^2$.
(ii) Tồn tại các số hữu tỷ $x, y, z > 1$ thỏa mãn

$$\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^2 + \left(\frac{y}{y^2+1}\right)^2 = \left(\frac{z}{z^2+1}\right)^2.$$

Lời giải. (i)$\Rightarrow$(ii). Giả sử $(a,b,c,d)=1$. Dễ thấy d lẻ, đúng một trong các số a, b, c lẻ, giả sử là a. Theo định lý 1, tồn tại các số nguyên dương d_i, m_i, n_i $(i=1,2,3)$ sao cho đẳng thức

$a = d_1\left(m_1^2 - n_1^2\right), b = d_2 2m_2n_2,\ c = d_3 2m_3n_3,$

$d = d_i\left(m_i^2 + n_i^2\right)$. $a^2+b^2+c^2=d^2$ trở thành

$$(d_2m_2n_2)^2 + (d_3m_3n_3)^2 = (d_1m_1n_1)^2.$$

Chia cả hai vế cho $d^2 = d_i^2\left(m_i^2+n_i^2\right)^2$, ta được (ii) với $x = \frac{m_2}{n_2} > 1, y = \frac{m_3}{n_3} > 1, z = \frac{m_1}{n_1} > 1.$

(ii)$\Rightarrow$(i). Giả sử $x = \frac{m_2}{n_2} > 1, y = \frac{m_3}{n_3} > 1, z = \frac{m_1}{n_1} > 1$.

Đặt $a = d_1\left(m_1^2 - n_1^2\right), b = d_2 2m_2n_2, c = d_3 2m_3n_3,$
$e = d_3\left(m_3^2 - n_3^2\right), f = d_1 2m_1n_1, g = d_2\left(m_2^2 - n_2^2\right),$

$d = \prod_{i=1}^{3}\left(m_i^2 + n_i^2\right)$ thỏa mãn (i).

Thí dụ 13. *Giải phương trình nghiệm nguyên dương: $x^4 - x^2y^2 + y^4 = z^2$.*

Lời giải. Trước hết xin giới thiệu một bổ đề quen thuộc: a, b, c, d là các số nguyên dương thỏa mãn $ab = cd$. Khi đó tồn tại các số nguyên dương x, y, z, t sao cho $a = xy, b = zt, c = yz, d = tx$, $(x,z)=1$. Giả sử $x \neq y, (x,y)=1$. Trong tất cả các nghiệm (x,y,z) này xét nghiệm có tích xy nhỏ nhất. Xét trường hợp xy chẵn, giả sử y chẵn. Phương trình tương đương $\left(x^2-y^2\right)^2 + (xy)^2 = z^2$.

Vì $(x,y)=1$ nên $\left(x^2-y^2, xy\right)=1$. Theo định lý 1, tồn tại các số tự nhiên m, n thỏa mãn $(m,n)=1, mn$ chẵn sao cho $x^2-y^2 = m^2-n^2$, $xy = 2mn$. Đặt $y = 2y_0$, ta có $xy_0 = mn$, $(x, y_0) = (m,n) = 1$. Theo bổ đề tồn tại các số nguyên dương a, b, c, d thỏa mãn $x = ac, y_0 = bd$, $m = ad, n = bc, (c,d)=1$. Vì $(x, y_0) = (m,n) = 1$ nên a, b, c, d đôi một nguyên tố cùng nhau. Do x, m lẻ nên a, c, d lẻ, b chẵn. Từ $x^2-y^2 = m^2-n^2$, ta có $\left(a^2+b^2\right)c^2 = \left(a^2+4b^2\right)d^2$.

Đặt $e = \left(a^2+b^2, a^2+4b^2\right) \Rightarrow e \mid 3b^2, e \mid 3a^2$.

Vì $(a,b)=1$ nên $e \mid 3 \Rightarrow e=1$ (nếu $e = 3 \mid a^2+b^2$ thì $3 \mid (a,b)$, vô lý). Suy ra $a^2+b^2 \mid d$.
Mặt khác $(c,d)=1$ nên $d^2 \mid a^2+b^2$.
Vậy $d^2 = a^2+b^2, a^2+4b^2 = c^2$. Theo định lý 1, tồn tại các số tự nhiên $x_1, y_1, (x_1, y_1) = 1, x_1y_1$ chẵn sao cho $a = x_1^2 - y_1^2, 2b = 2x_1y_1$.
Do đó $x_1^4 - x_1^2y_1^2 + y_1^4 = d^2$, vô lý vì $x_1y_1 = b < 2bd = y \le xy$, trái với giả thiết ban đầu về nghiệm x

Xét trường hợp xy lẻ. Từ $\left(x^2-y^2\right)^2 + (xy)^2 = z^2$, theo định lý 1 tồn tại các số tự nhiên m, n thỏa mãn $(m,n)=1, mn$ lẻ sao cho $x^2-y^2 = 2mn,\ xy = m^2-n^2$. Từ đó

$$m^4 - m^2n^2 + n^4 = \left(m^2-n^2\right)^2 + m^2n^2 = \left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2,$$

vô lý như trường hợp trên. Vậy phương trình chỉ có nghiệm $x = y, z = x^2$.
Cuối cùng là hệ quả nổi tiếng của Thí dụ 13, bài toán của Fermat.

Thí dụ 14. *Không tồn tại bốn bình phương khác nhau tạo thành một cấp số cộng.*

Lời giải. Giả sử x^2, y^2, z^2, w^2 tạo thành cấp số cộng thì $2y^2 = x^2+z^2, 2z^2 = y^2+w^2$. Suy ra

$$2y^2w^2 = x^2w^2 + z^2w^2, 2z^2x^2 = y^2x^2 + w^2x^2$$

$\Rightarrow 2z^2x^2 - 2y^2w^2 = y^2x^2 - z^2w^2.$

Từ đó xy, zw cùng tính chẵn lẻ.

Đặt $u = xz, v = yw, r = \frac{xy+zw}{2}$, $s = \frac{xy-zw}{2}$ là các số tự nhiên. Dễ thấy $u^2-v^2 = 2rs, uv = r^2-s^2$. Suy ra $u^4 - u^2v^2 + v^4 = (u^2-v^2)^2 + u^2v^2 = \left(r^2+s^2\right)^2$.

Theo Thí dụ 13, $xz = u = v = yw$. Mặt khác x^2, y^2, z^2, w^2 là cấp số cộng có công sai $d \neq 0$ nên $xz < yw$, vô lý.

ĐÔI NÉT VỀ NHÀ TOÁN HỌC VIỆT NAM ĐẦU THẾ KỈ XIX

Ý TRAI NGUYỄN HỮU THẬN VÀ CUỐN SÁCH Ý TRAI TOÁN PHÁP NHẤT ĐẮC LỤC CỦA ÔNG

TẠ DUY PHƯỢNG - ĐOÀN THỊ LỆ
CUNG THỊ KIM THÀNH - PHAN ÁNH TUYẾT *(Hà Nội)*

Bài viết giới thiệu thân thế sự nghiệp nhà toán học Việt Nam đầu thế kỉ XIX, Ý Trai Nguyễn Hữu Thận, sơ bộ giới thiệu và đánh giá nội dung cuốn sách Ý Trai toán pháp nhất đắc lục *của Ông, là cuốn sách toán có nhiều giá trị trong di sản sách toán viết bằng chữ Hán và chữ Nôm.*

1. Sơ lược về sự nghiệp và di sản toán học-lịch pháp của Ý Trai Nguyễn Hữu Thận

1.1. Tiểu sử Ý Trai Nguyễn Hữu Thận

Nguyễn Hữu Thận tự *Chân Nguyên*, hiệu *Ý Trai*. Ông sinh tháng 3 năm Đinh Sửu (1757), quê làng Đại Hòa, tổng An Dã, huyện Hải Lăng, phủ Triệu Phong, nay là xã Triệu Đại, huyện Triệu Phong, tỉnh Quảng Trị. Thân phụ *Nguyễn Hữu Thận* là *Nguyễn Phú Điêu*, làm Huấn đạo, say mê toán pháp và thiên văn, lịch pháp. Điều này ảnh hưởng rất nhiều đến thiên hướng nghiên cứu lịch pháp và toán học của Ông.

Ý trai *Nguyễn Hữu Thận* (1757-1831)

Trong bài Tựa *Ý Trai toán pháp nhất đắc lục*, *Nguyễn Hữu Thận* viết ([3], Quyển 1, trang 1): *Ta thuở nhỏ, sớm đã được nghe giảng và thuộc lòng cửu chương, dần hiểu "bố toán chi tung hoành". Năm Kỉ Dậu niên hiệu Cảnh Hưng, cha ta mời Cổ Trai lão tiên sinh, húy Nhậm, cùng tìm hiểu phép lịch đại thống, ta thường đứng hầu bên cạnh, mỗi lần được nghe bàn chuyện như thế, thì lòng cảm thấy sự học chưa đủ, càng cần dốc lòng cần cù, chăm chỉ suy cứu, tìm tòi, hi vọng đạt đến chỗ uẩn áo, sâu xa.*

Năm 1786, *Nguyễn Hữu Thận* ra làm quan cho nhà Tây Sơn, dần thăng đến Hữu thị lang bộ Hộ.

Năm 1802, Ông ra làm quan cho triều Gia Long. Ban đầu được bổ làm Chế cáo ở Viện Hàn lâm, rồi Thiêm sự bộ Lại và Cai bạ Quảng Nghĩa. Đầu năm Kỷ Tị (1809), ông được điều về kinh làm Tham tri bộ Lại. Tháng 3 (âm lịch) năm đó, ông được cử làm Chánh sứ sang nhà Thanh. Thời gian ở Yên Kinh (Bắc Kinh), ông chịu khó học hỏi và tìm mua được nhiều sách quý về lịch số và toán học. Ông viết ([3], Quyển 1, trang 1): *Năm Kỉ Tị niên hiệu Gia Long, ta được làm bang giao cống bộ chính sứ, nhân đó, liền thực hiện ý muốn hỏi han, tìm kiếm sách vở, không trù trừ đem tiền của của mình để mua sách, ghi chép lại thành một quyển. Lúc công việc sứ bộ nhàn rỗi, ta lại đem sách ra dịch ở công quán. Đến khi lên thuyền trở về, vẫn mở sách xem xét, suy tìm toán pháp không mệt mỏi, thế mới biết cái uyên thâm của đạo học, những ghi chép/sách vở này đủ để tin được về sự kì diệu của toán pháp.*

Tháng 4 (âm lịch) năm Canh Ngọ (1810), về nước, Ông được thuyên chuyển làm Tham tri bộ Hộ. Tháng Giêng năm Nhâm Thân (1812), Ông được cử làm Phó quản lí Khâm Thiên giám.

Năm Bính Tí 1816, Ông được điều làm Hộ tào Bắc Thành, rồi làm Thượng thư bộ Lại, nên người dân Quảng Trị gọi Cụ là *Cụ Thượng Đại Hòa*. Năm Canh Thìn (1820), Vua Minh Mạng đổi Ông làm Thượng thư bộ Hộ. Năm Nhâm Ngọ (1822), Ông kiêm quản Khâm thiên giám.

Năm 1828, Ông về trí sĩ, dốc tâm hoàn thiện cuốn sách *Ý Trai toán pháp nhất đắc lục* (Một điều tâm đắc về toán học của Ý Trai).

Ngày 5 tháng 7 (âm lịch) năm Tân Mão (12 tháng 8 năm 1831), *Nguyễn Hữu Thận* mất, thọ 74 tuổi.

1.2. Di sản toán học lịch pháp của Ý Trai *Nguyễn Hữu Thận*

Nguyễn Hữu Thận ham mê toán học và thiên văn, lịch pháp từ nhỏ. Ông học có phân tích, phê phán. Ông viết ([3], Quyển 1, bài *Tựa*): *Khi đã khôn lớn, thì ta tìm tòi đến tận gốc rễ của phép lịch đại* *thống, nghiệm xem lâu ngày, bắt đầu nhận ra nhiều chỗ sai sót, bèn xem xét, kê cứu lại những điều ghi chép trong sách vở xưa, thì nhận thấy cuối đời nhà Minh, đầu đời nhà Thanh, lịch pháp đã sửa lại theo phép tính lịch của phương Tây. Người đời có được những sách này, đều để tự truyền dạy trong nhà, còn ta, nhờ những lần tìm thấy nơi bằng hữu sao chép lại mà có được sách.*

Trong thời gian đi sứ (1809-1810), *Nguyễn Hữu Thận* đã tiếp thu lịch mới của nhà Thanh. Về nước, Ông dâng lên Vua Gia Long quyển *Đại lịch tượng khảo thành thư* và tâu: *Lịch Vạn Toàn nước ta và sách Đại Thanh Thời Hiến bên Tàu, đều theo lịch Đại Thống nhà Minh, hơn 300 năm chưa hề sửa lại, càng lâu lại càng sai lắm. Đời Khang Hy nước Tàu, mới tham dùng phép lịch Thái Tây, làm ra quyển lịch này, mà sách này suy xét góc độ số tinh tường hơn sách Đại Thống, phép tam tuyến bát giác lại tinh xảo lắm. Xin giao học trò Khâm thiên giám theo lịch này để khảo cứu làm phép lịch, thời biết đúng độ số trời mà nhằm tiết hậu.*

Khi làm Phó quản lí Khâm Thiên giám (1812), Ông đã tâu xin làm lịch Hiệp Kỉ thay cho lịch Vạn Toàn. Lịch Hiệp Kỉ được triều đình ban bố vào năm 1813. Ông viết ([3], Quyển 1): *Trở về triều là năm Quí Dậu niên hiệu Gia Long, ta được nhậm chức quản lí khâm thiên giám sự vụ, lưu hành Hiệp Kỉ lịch, và từ đây bắt đầu định ra toán pháp.*

So với lịch cũ, lịch *Hiệp Kỉ* có những cải tiến lớn: ngày tiết được báo chính xác hơn; các giờ mặt trời mọc và lặn được căn cứ vào kinh độ và vĩ độ nơi quan sát ở Việt Nam nên phù hợp hơn, đáp ứng được yêu cầu phục vụ thời vụ cho nông dân. Lịch *Hiệp Kỉ* do ông chỉ đạo biên soạn được sử dụng cho tới năm 1945. Ông đã được Vua Gia Long đánh giá là: *Thiên văn gia vô xuất kì hữu* (nhà thiên văn không ai sánh kịp).

Năm 1820, dưới thời Minh Mạng, ông có thêm một đóng góp đáng kể là tâu xin *định tiết khí thời hậu ở kinh đô Phú Xuân, Gia Định và Bắc thành; theo kinh độ ở địa lí mà tính giờ mọc, lặn của mặt trời và ngày đêm dài ngắn* (xem: Phan Trúc Trực, *Quốc sử di biên*).

Nguyễn Hữu Thận để lại *Ý Trai toán pháp nhất đắc lục*, cuốn sách toán được Ông biên soạn trong nhiều năm và hoàn thành năm 1829. *Hoàng Xuân Hãn* đánh giá: *Nguyễn Hữu Thận là một người nước ta, trước thời Pháp thuộc, có trình độ toán học khá cao. Ta biết vậy, qua không những áp dụng phép lịch Hiệp Kỉ, mà còn qua một toán thư mà ông để lại: Ý Trai toán pháp* ([2], trang 918).

2. Giới thiệu nội dung cơ bản của *Ý trai toán pháp nhất đắc lục*

Ý trai toán pháp nhất đắc lục của *Nguyễn Hữu Thận* gồm 8 Quyển.

Đầu **Quyển 1** là bài *Tựa* của chính tác giả, nói về lòng ham mê tìm tòi toán học của Ông và quá trình viết *Ý trai toán pháp nhất đắc lục*.

Trong các trang 5-16, *Nguyễn Hữu Thận* viết về *Bảng Cửu chương*. Khác với các sách toán Hán Nôm khác, *Nguyễn Hữu Thận* không chỉ trình bày *Bảng Cửu chương* như một bảng nhân, Ông còn phân tích quan hệ và ý nghĩa của các số.

Cuối Quyển 1, *Nguyễn Hữu Thận* trình bày cách lập ma phương bậc 3×3, 4×4 và 8×8. *Hoàng Xuân Hãn* đã nhận xét: *Lần đầu tiên, một nhà toán học Việt Nam là ông bàn tới ma phương. Hoàng Xuân Hãn* cũng đã sử dụng phương pháp của Ông để lập ma phương ([2], trang 1097-1110).

Quyển 2 PHƯƠNG ĐIỀN PHÁP dành cho bài toán tính diện tích các hình. Đầu tiên là các đơn vị về diện tích và cách đổi các đơn vị. Ông cũng lưu ý đến cách tính đơn vị diện tích khác nhau ở các địa phương khác nhau. Cuối cùng là các đơn vị đo diện tích của Trung Quốc và Xiêm La.

Tiếp theo, sách trình bày cách tính diện tích các hình vuông, hình chữ nhật, hình tam giác, diện tích các hình cong (hình tròn và các phần của hình tròn). Ông cũng đã sử dụng công thức Heron trong tính diện tích.

Quyển 3 nói về PHÉP SAI PHÂN, gồm Bình phân (phép chia đều) và nhiều dạng sai phân (chia theo tỉ lệ hoặc chia theo cấp số cộng,…).

Trong **Quyển 4**, PHÉP KHAI PHƯƠNG, *Nguyễn Hữu Thận* trình bày phép khai căn bậc hai và các bài toán liên quan. Ông đã sử dụng gần đúng căn bậc hai đến 8 chữ số. Rất nhiều bài toán đố và những bài toán áp dụng định lí Pythagoras dẫn đến giải phương trình, hệ phương trình bậc hai đã được trình bày.

Quyển 5, CÂU CỔ PHÁP, được dành cho việc áp dụng định lí Pythagoras (với *câu* và *cổ* là hai cạnh góc vuông, *huyền* là cạnh huyền) vào các bài toán hình học: Hơn 60 bài giải tam giác vuông (bằng phương pháp lập hệ phương trình bậc hai) khi biết hai yếu tố, thí dụ, *biết tích của câu và cổ và tổng* *của huyền với hiệu của câu và cổ, tìm các cạnh và diện tích*. Chương này cũng trình bày một số ứng dụng của định lí Pythagoras kết hợp với tam giác đồng dạng để giải các bài toán thực tế: đo chiều cao của cây,…

Đầu **Quyển 6** trình bày cách tính diện tích và thể tích các hình (hộp, nón, cầu, nón cụt,…). Mặc dù chưa có khái niệm rõ ràng về số vô tỉ, *Nguyễn Hữu Thận* đã sử dụng gần đúng các số vô tỷ đến 8 chữ số thập phân, Ông chọn $\pi = 3{,}14159265$. Các sách toán Hán Nôm khác thường dùng $\pi = 3{,}14$, thậm chí $\pi = 3$. Như vậy, Ông đã vượt trước các nhà toán học Việt Nam cùng thời hoặc sau Ông. Có được sự tiến bộ này là do *Nguyễn Hữu Thận* đã đọc các sách toán mới nhất của của Trung Hoa. Ông viết: *Vào năm Kỉ Tị đời Gia Long, tôi mua được cuốn sách* Khâm định số lí tinh uẩn *và* Mai thị tùng thư. *Hai cuốn sách này, bên trong có vẽ hình, tính diện tích, thể tích. Suy từ việc đo đạc để lập phép tính. Tất cả đều suy đến tận cùng nguồn gốc, lần lượt phân tích từng mục, rất là kĩ lưỡng. Nay tôi chọn những điều tổng quát, cốt yếu, ghi chép rõ ràng để tiện dùng.*

Trong Quyển 6, dựa theo các sách toán Trung Hoa, *Nguyễn Hữu Thận* cũng trình bày cách tính gần đúng chu vi hình tròn bằng cách gấp đôi số cạnh của hình vuông nội và ngoại tiếp hình tròn. Phần tiếp theo của Quyển 6 trình bày dạng *toán chuyển động*, toán *vận chuyển* (Quân thâu), dạng toán *lập và giải phương trình, hệ phương trình*. Thí dụ, bài toán trong trang 6 (Quyển 6), được chọn từ sách toán Trung Hoa: *Giả sử có gà và thỏ nhốt chung lồng, chỉ biết tổng số đầu là 36, tổng số chân là 100, hỏi số gà và thỏ mỗi con là bao nhiêu.* Bài toán này thường được viết trong sách toán hiện nay dưới dạng bài thơ: *Vừa gà vừa chó,…*

Trong một số bài toán dẫn đến hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn, *Nguyễn Hữu Thận* đã sử dụng *phương pháp cộng đại số* để giải.

Phần cuối của Quyển 6 là *toán đồng dư* (Định lí thặng dư Trung Hoa). Ông đã mở rộng quy tắc đồng dư cho các trường hợp khác khó hơn.

Quyển 7 dành cho các bài toán tổng hợp và các bài toán khó. Đặc biệt là *Phương pháp phân bổ có trọng* (sai phân pháp). Các bài toán này trong *Ý trai toán pháp nhất đắc lục* đã được *A. Volkov* phân tích tương đối kĩ trong [4].

Quyển 8 (quyển cuối) trình bày phép khai căn bậc ba và một số bài toán hình học dẫn đến giải phương trình bậc ba.

3. Một số đánh giá ban đầu về giá trị của *Ý Trai toán pháp nhất đắc lục*

Cần thời gian và cần nhiều nghiên cứu chuyên sâu để đánh giá đúng và đủ giá trị của *Ý Trai toán pháp nhất đắc lục*: Nội dung toán học, tính sư phạm, tính thời sự, sự kế thừa và phát triển toán học Trung Hoa, ảnh hưởng của *Ý Trai toán pháp nhất đắc lục* đến toán học Việt Nam, những sáng tạo toán học trong *Ý Trai toán pháp nhất đắc lục*,... Dưới đây chúng tôi trình bày một số đánh giá ban đầu về *Ý Trai toán pháp nhất đắc lục* trong quá trình tìm hiểu cuốn sách này.

Giá trị toán học của *Ý Trai toán pháp nhất đắc lục*

Theo chúng tôi, *Nguyễn Hữu Thận* là *nhà nghiên cứu toán học số 1 Việt Nam* đầu thế kỉ XIX. Căn cứ theo các sách toán Hán Nôm hiện tồn và tư liệu lịch sử, thậm chí có thể đánh giá Ông là *nhà nghiên cứu toán học số 1 Việt Nam* thời Trung đại (thế kỉ XV-XIX), mặc dù Ông, do bận công việc hành chính, đã không thể tập trung nhiều thời gian cho toán học.

Ở Ông, nổi trội rõ đặc tính của một *nhà nghiên cứu chuyên nghiệp*: Ông thường đặt và giải quyết bài toán, Ông không hài lòng với những cái *biết nửa vời*, mà luôn tìm tòi đến tận cùng lời giải. Điều này có thể minh họa qua những trình bày của Ông về số vô tỉ, toán đồng dư, khai căn và giải hệ phương trình, ma phương, ...

Mặc dù chưa có khái niệm rõ ràng về số vô tỉ, nhưng Ông đã gần đi đến khái niệm này. Ông đã dùng giá trị của $\sqrt{2}$ và π gần đúng đến 8 chữ số, là một tiến bộ lớn ở thời đại Ông.

Ông đã không chỉ trình bày bài toán đồng dư, mà đã đi sâu nghiên cứu, tổng quát hóa bài toán này cho những trường hợp phức tạp hơn.

Khi trình bày phương pháp tính diện tích các hình, *Nguyễn Hữu Thận* đã phần nào đi gần đến khái niệm diện tích và tích phân hiện đại.

Ông không bằng lòng với những hiểu biết của mình về khai căn bậc ba và phương trình bậc ba, mà suốt đời tìm hiểu nó để trình bày sao cho dễ hiểu. Ông viết: *Lập phương* (*căn bậc ba*) *trong toán thuật so với căn bậc hai có phần hơi khó...Ta từ nhỏ cũng học lập phương nhưng mới biết đại khái về nó. Nay soạn cuốn sách mới từ* *các bản thảo cũ còn lưu lại. Tự ngẫm dù tổn hao tâm lực, cũng không nỡ bỏ sót. Nay bổ sung hệ thống lại để được rõ ràng, đầy đủ*...([3], Quyển 8).

Với *ma phương*, Ông đã đưa ra cách tìm ma phương bậc 8×8 bằng cách lấy đối xứng, sau này được *Hoàng Xuân Hãn* tham khảo để viết bài báo (xem [2], trang 1097-1110).

Khác với một số cuốn sách toán Hán Nôm khác mang tính giáo khoa, *Ý Trai toán pháp nhất đắc lục* là một cuốn sách nghiên cứu chuyên sâu về toán, chứ không đơn thuần là một quyển sách luyện thi hoặc giáo khoa toán. Đây cũng chính là mục đích viết sách của Ông.

Giá trị sư phạm của *Ý Trai toán pháp nhất đắc lục*

Mặc dù kiến thức toán học trong *Ý Trai toán pháp nhất đắc lục* là rất rộng, nhưng được trình bày tương đối dễ hiểu, bởi vì tác giả không chỉ là nhà toán học, nhà khoa học, dịch học và lí học uyên thâm, mà còn là nhà sư phạm toán đích thực, mặc dù Ông không làm nghề dạy học.

Phần đầu mỗi Chương bao giờ *Nguyễn Hữu Thận* cũng nêu ý nghĩa, mục đích của vấn đề nghiên cứu. Ông thường trình bày đại cương vấn đề và phương pháp giải quyết vấn đề. Sau đó là chuỗi bài toán từ dễ đến khó. Các dạng toán (câu cổ pháp, sai phân pháp, hệ phương trình,...) đã được *Nguyễn Hữu Thận* trình bày tỉ mỉ, từ đơn giản đến phức tạp, bao quát gần như toàn bộ nội dung có thể có trong dạng toán được trình bày.

Cũng chính vì vậy, *Ý Trai toán pháp nhất đắc lục* cho tới nay vẫn còn giá trị sư phạm và tính thời sự cao. Nhiều dạng toán (phép câu cổ, hệ phương trình,...), nếu viết lại dưới ngôn ngữ hiện đại, vẫn còn nguyên giá trị về nội dung.

Theo Lương An [1], *Nguyễn Hữu Thận* đã sáng tác khá nhiều bài *toán thơ Nôm* được lưu truyền ở vùng Quảng Trị. Có thể nói, đây cũng là một nét sư phạm đặc biệt của *Nguyễn Hữu Thận* nói riêng và toán học Việt Nam nói chung.

4. Lời kết

Trên đây chỉ là đôi nét phác thảo *Ý Trai toán pháp nhất đắc lục* của *Nguyễn Hữu Thận*. Cuốn sách của Ông còn gợi ra rất nhiều vấn đề cần nghiên cứu tiếp tục. Cùng với những đóng góp của Ông trong cải cách lịch, Ông thật xứng đáng với đánh giá của *Hoàng Xuân Hãn* khi so sánh Ông với *Từ Quang Khải*, nhà toán học và lịch pháp nổi tiếng của Trung Hoa (xem [2], trang 918): *Hữu Thận thật là một người nước ta,...có trình độ toán học khá cao....Chỉ tiếc rằng Nguyễn Hữu Thận đã không gây được sự nghiệp truyền bá toán học ở nước ta như Từ Quang Khải ở Trung Quốc, tuy rằng phong thái và phẩm chất hai người ngang nhau.*

Đường *Nguyễn Hữu Thận* (thành phố Huế)

Những cống hiến của *Nguyễn Hữu Thận* đã được đánh giá cao, mặc dù còn ít người biết *Nguyễn Hữu Thận* như một nhà nghiên cứu toán học.

Hiện nay đã có 5 thành phố có phố mang tên *Nguyễn Hữu Thận* và một trường Trung học phổ thông mang tên Ông (các ảnh trong bài do *Tạ Duy Phượng* chụp).

Tài liệu dẫn

[1] Lương An, *Nguyễn Hữu Thận* (1757–1831), trong *Danh nhân Bình Trị Thiên*, tập I, Nhà xuất bản Thuận Hóa, Huế, 1986, trang 106–126.

[2] *La Sơn Yên Hồ Hoàng Xuân Hãn*, Nhà xuất bản Giáo dục, 1998.

[3] Nguyễn Hữu Thận, 意齋算法一得錄, *Ý trai toán pháp nhất đắc lục*, 1829.

[4] A. Volkov, *Didactical dimensions of mathematical problems: 'weighted distribution' in a Vietnamese mathematical treatise*. In: Alain Bernard and Christine Proust (eds.), *Scientific Sources and Teaching Contexts Throughout History: Problems and Perspectives* Dordrecht etc: Springer, pp. 247-272.

NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

***LTS.** Trên sách báo thường chỉ ghi lời giải bài toán nên học sinh không biết tại sao lại làm như thế và nên làm như thế nào, đặc biệt là các bài toán phức tạp, phải qua nhiều bước biến đổi mới đến kết quả. Việc chỉ ra **định hướng** giải toán cùng với **các cách giải** sẽ giải đáp điều đó, đồng thời giúp rèn luyện, tích lũy những kinh nghiệm giải các loại toán. Vì thế và theo ý kiến của nhiều bạn đọc, tạp chí TH&TT tiếp tục đăng các bài viết của chuyên mục **Nhiều cách giải cho một bài toán**. Tòa soạn mong được nhiều bạn đọc hưởng ứng, gửi đề bài kèm theo các cách giải. Các bạn đọc gửi bài giải có những cách giải hay sẽ được nêu tên trên tạp chí. Dưới đây trình bày hai bài toán minh họa.*

✪ BÀI TOÁN 1. *Cho các số a, x, y thỏa mãn $x + y \geq a > 0$. Chứng minh rằng $x^4 + y^4 \geq \frac{a^4}{8}$.*

Đẳng thức $x^4 + y^4 = \frac{a^4}{8}$ xảy ra khi nào ?

Lời giải. Có thể chứng minh bất đẳng thức (BĐT) tương đương là $8(x^4 + y^4) \geq a^4$.

ĐỊNH HƯỚNG 1. Từ $x + y \geq a$ và sử dụng BĐT $u^2 + v^2 \geq 2uv$ để đánh giá tổng $x^4 + y^4$.

Cách giải 1. Tính lũy thừa bậc bốn của $x + y$ được $((x + y)^2)^2 = (x^2 + y^2 + 2xy)^2$

$= x^4 + y^4 + 4x^2y^2 + 2x^2y^2 + 4x^3y + 4xy^3$

$= x^4 + y^4 + 6x^2y^2 + 4xy(x^2 + y^2)$

$\leq x^4 + y^4 + 3(x^4 + y^4) + 2(x^2 + y^2)^2$

$= 4(x^4 + y^4) + 2(x^4 + y^4 + 2x^2y^2)$

$= 6(x^4 + y^4) + 4x^2y^2 \leq 6(x^4 + y^4) + 2(x^4 + y^4)$

$= 8(x^4 + y^4)$, từ đó $a^4 \leq ((x + y)^2)^2 \leq 8(x^4 + y^4)$.

Đẳng thức xảy ra khi $x = y$ và $x^2 = y^2$ với $x + y = a$, tức là khi $x = y = \frac{a}{2}$. ❐

Cách giải 2. Bình phương hai vế $x + y \geq a$ (đều dương) được $x^2 + y^2 + 2xy \geq a^2$. Áp dụng BĐT $x^2 + y^2 \geq 2xy$ được $2(x^2 + y^2) \geq a^2$, bình phương hai vế lần nữa được $4(x^4 + y^4 + 2x^2y^2) \geq a^4$ (1)

Từ $(x^2 - y^2)^2 \geq 0$ có $4(x^4 + y^4 - 2x^2y^2) \geq 0$ (2)

Cộng theo từng vế của (1) và (2) được

$$8(x^4 + y^4) \geq a^4.$$

Xét đẳng thức xảy ra như ở cách giải 1.❐

ĐỊNH HƯỚNG 2. Đánh giá tổng $x^4 + y^4$ qua $x + y$ dựa vào BĐT $\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 \leq \frac{u^2+v^2}{2}$ (3)

Cách giải 3. Trước hết ta chứng minh BĐT (3). Từ $(u - v)^2 \geq 0$ có $u^2 + v^2 \geq 2uv$, do đó $(u + v)^2 = u^2 + v^2 + 2uv \leq 2(u^2 + v^2) = \frac{4(u^2 + v^2)}{2}$, suy ra BĐT (3). Đẳng thức xảy ra khi $u = v$.

Áp dụng BĐT (3) có $\frac{a^2}{4} \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \leq \frac{x^2+y^2}{2}$.

Áp dụng BĐT (3) lần nữa được

$\frac{a^4}{16} = \left(\frac{a^2}{4}\right)^2 \leq \left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2 \leq \frac{x^4+y^4}{2}$, suy ra $\frac{a^4}{8} \leq x^4 + y^4$.

Xét đẳng thức xảy ra như ở cách giải 1.❐

ĐỊNH HƯỚNG 3. Từ giả thiết $x + y \geq a$ ta đặt $x = \frac{a}{2} + u$ và $y = \frac{a}{2} - v$ với $u - v \geq 0$, rồi tính tổng $x^4 + y^4$.

Cách giải 4. Khi đặt $x = \frac{a}{2} + u$ và $y = \frac{a}{2} - v$ với $u - v \geq 0$ thì $x + y = a + u - v \geq a$. Lúc đó $2x = a + 2u$ và $2y = a - 2v$.

Từ đó $4x^2 = (a + 2u)^2 = a^2 + 4u^2 + 4au$ và

$4y^2 = (a - 2v)^2 = a^2 + 4v^2 - 4av$.

Tính tiếp được $16x^4 = (a^2 + 4u^2 + 4au)^2$

$= a^4 + 16u^4 + 24a^2u^2 + 8a^3u + 32au^3$ và

$16y^4 = (a^2 + 4v^2 - 4av)^2$

$= a^4 + 16v^4 + 24a^2v^2 - 8a^3v - 32av^3$.

Cộng theo từng vế của hai đẳng thức trên được

$16(x^4 + y^4) = 2a^4 + 16(u^4 + v^4) + 24a^2(u^2 + v^2) + 8a^3(u - v) + 32a(u^3 - v^3)$.

Do $u - v \geq 0$ và $u^3 - v^3 = (u - v)(u^2 + uv + v^2) \geq 0$ nên $8(x^4 + y^4) \geq a^4$.

Đẳng thức xảy ra khi $u = v = 0$, dẫn đến kết quả như ở cách giải 1.□

✪ BÀI TOÁN 2. *Cho tam giác ABC với $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ và $a + b + c = 2p$. Gọi độ dài ba đường cao của tam giác tương ứng với các đỉnh A, B, C là h_A, h_B, h_C. Chứng minh rằng $h_A + h_B + h_C \leq \sqrt{3}\,p$.*

Lời giải. Bạn đọc tự vẽ hình.

ĐỊNH HƯỚNG 1. Sử dụng công thức *Héron* dạng $ah_A = 2S_{ABC} = 2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ có thể tính được chiều cao ứng với mỗi đỉnh, từ đó đánh giá tổng ba chiều cao của tam giác.

Cách giải 1. Từ công thức *Héron* có

$$ah_A = 2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Ta tính $a = 2p - b - c = p - b + p - c$

$$\geq 2\sqrt{(p-b)(p-c)}$$

nên $2ah_A = 4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$\leq 2a\sqrt{p(p-a)}$, suy ra $h_A \leq \sqrt{p(p-a)}$ (4).

Tương tự có $h_B \leq \sqrt{p(p-b)}$ và

$$h_C \leq \sqrt{p(p-c)}.$$

Cộng theo từng vế ba BĐT trên được

$h_A + h_B + h_C \leq \sqrt{p}\,(\sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c})$.

Áp dụng BĐT *Bunyakovsky* có

$(1.\sqrt{p-a} + 1.\sqrt{p-b} + 1.\sqrt{p-c})^2$

$$\leq (1 + 1 + 1)(p - a + p - b + p - c) = 3p.$$

Thay vào BĐT trên được

$$h_A + h_B + h_C \leq \sqrt{p}\,.\sqrt{3p} = \sqrt{3}\,p.$$

Đẳng thức xảy ra khi $p - b = p - c = p - a$, hay là $a = b = c$.□

ĐỊNH HƯỚNG 2. Từ tính chất vuông góc của đường cao ta tạo ra tam giác vuông để áp dụng định lý *Pythagoras* rồi tính tổng ba chiều cao.

Cách giải 2. Qua đỉnh A vẽ đường thẳng $d \,//\, BC$. Lấy D là điểm đối xứng với điểm B qua trục d thì tam giác DBC vuông tại B. Áp dụng định lý *Pythagoras* có

$$BD^2 + BC^2 = CD^2 \leq (AD + AC)^2,$$

suy ra $4h_A{}^2 + a^2 \leq (c + b)^2$, do đó có

$4h_A{}^2 \leq (c + b)^2 - a^2 = (a + b + c)(c + b - a)$

$= 2p(2p - 2a) = 4p(p - a)$, hay là $h_A{}^2 \leq p(p - a)$, suy ra BĐT (4). Từ đó lập luận tiếp tục như cách giải 1.□

ĐỊNH HƯỚNG 3. Từ các công thức diện tích tam giác $ah_A = 2S_{ABC} = \dfrac{abc}{2R}$ tính được h_A theo bc và R, từ đó tính $h_A + h_B + h_C$ theo $ab + bc + ca$ và R rồi xét BĐT chứa $a + b + c$ và R.

Cách giải 3. Từ các công thức diện tích tam giác $ah_A = 2S_{ABC} = \dfrac{abc}{2R}$ có $2Rh_A = bc$. Tương tự có $4Rh_B = ac$ và $4Rh_C = ba$.

Do đó có $2R(h_A + h_B + h_C) = ab + bc + ca$.

Từ $3(ab + bc + ca) = ab + bc + ca + 2ab + 2bc + 2ca \leq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = (a + b + c)^2$, suy ra $6R(h_A + h_B + h_C) \leq (a + b + c)^2$ (5).

Ta cần xét BĐT chứa $a + b + c$ và R.

Từ $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$ có $a + b + c = 2R(\sin A + \sin B + \sin C)$ mà $\sin A + \sin B + \sin C \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ (bạn đọc tự chứng minh BĐT này) nên có $a + b + c \leq 3\sqrt{3}R$.

Thay vào BĐT (5) được $6R(h_A + h_B + h_C) \leq 3\sqrt{3}R\,(a + b + c)$, hay là $h_A + h_B + h_C \leq \sqrt{3}\,p$.□

NGUYỄN VIỆT HẢI *(Hà Nội)*

Mời các bạn gửi lời giải của **BÀI TOÁN 3** sau đây về Tòa soạn TH&TT trước ngày 30.8.2017.

BÀI TOÁN 3. *Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = x + 2y$, trong đó x, y là hai số thực thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 = x + y$.*

TRẦN VĂN HẠNH

(GV trường ĐH Phạm Văn Đồng, Quảng Ngãi)

DU LỊCH THẾ GIỚI QUA CÁC BÀI TOÁN HAY

LTS. Bắt đầu từ số 481 (tháng 7.2017) Tạp chí TH&TT xin giới thiệu chuyên mục mới: ***Du lịch thế giới qua các bài toán hay****. Mỗi số sẽ đăng 2 bài toán kèm theo 2 bài tập đề nghị là các bài toán hay được lựa chọn trong các đề thi học sinh giỏi Toán, Olympic Toán của các nước, Khu vực và Quốc tế. Rất mong các thầy cô giáo, bạn đọc yêu toán tham gia sưu tầm, lựa chọn những bài toán hay trong các đề thi nói trên, gửi bài cho Tạp chí, mỗi bài toán kèm theo lời giải cùng với xuất xứ của bài toán đó. Các bạn học sinh tham gia giải các bài toán ở phần* ***Bài tập đề nghị****. Trong phần lời giải nên có những nhận xét, phân tích, bình luận những vấn đề hay xung quanh bài toán đó. Đáp án của các bài toán trong phần* ***Bài tập đề nghị*** *sẽ được đăng cách một số kể từ khi ra đề. Những bạn tham gia giải bài và có lời giải hay (khác đáp án) sẽ được khen, được tặng một tờ Tạp chí và những lời giải hay, độc đáo sẽ được đăng trên Tạp chí.*

Tạp chí số 481, tháng 7 này xin giới thiệu với các bạn hai bài toán thi vô địch quốc gia của CHLB Đức và của CHLB Áo cùng lời giải của chúng.

Bài 1 *(CHLB Đức, 2005, vòng thứ nhất HSG Quốc gia, bài 1).*

Số nguyên a có tính chất là $3a$ có thể biểu diễn dưới dạng tổng x^2+2y^2 với x, y là các số nguyên. Hãy chứng tỏ rằng a cũng biểu diễn được dưới dạng tổng m^2+2n^2, với m và n là các số nguyên.

Lời giải. Dễ dàng thấy vì x^2+2y^2 chia hết cho 3, cho nên nếu $x \neq y \pmod 3$ thì cả x và y đều không chia hết cho 3, và khi đó phải có một số chia 3 dư 1 và số còn lại chia 3 dư 2, tức là khi đó $x+y \equiv 0 \pmod 3$. Ta xét 2 trường hợp xảy ra:

a) $x \equiv y \pmod 3$. Trong trường hợp này $x-y \equiv x+2y \pmod 3$ và $m=\dfrac{x+2y}{3}$, $n=\dfrac{x-y}{3}$ đều là các số nguyên. Ta có

$$m^2+2n^2=\frac{(x+2y)^2}{9}+\frac{2(x-y)^2}{9}=\frac{3x^2+6y^2}{9}=a$$

là dạng biểu diễn theo yêu cầu đầu bài.

b) $x+y \equiv 0 \pmod 3$. Trong trường hợp này $x+y \equiv x-2y \equiv 0 \pmod 3$. Ta đặt $m=\dfrac{x-2y}{3}$, $n=\dfrac{x+y}{3}$ thì m, n là các số nguyên và khi đó ta có:

$$m^2+2n^2=\frac{(x-2y)^2}{9}+\frac{2(x+y)^2}{9}=\frac{3x^2+6y^2}{9}=a.$$

Trong cả hai trường hợp, a luôn biểu diễn được thành dạng m^2+2n^2 với m và n là các số nguyên.

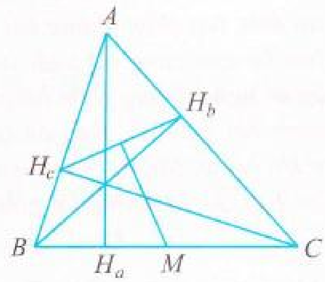
Nhận xét. Có nhiều bài toán dạng này, cùng loại với bài toán khá quen biết là "*Nếu một số biểu diễn thành tổng 2 chính phương thì bình phương của nó cũng biểu diễn được dưới dạng tổng hai chính phương*". Lời giải bài toán số học này cũng là một phương pháp khá phổ biến trong số học: phương pháp biểu diễn một cách hình thức. Tuy cũng dùng phương pháp biểu diễn hình thức, nhưng bài toán trên ngoắt nghéo hơn trong phương pháp, cần lập luận và phân chia trường hợp cho đúng.

Bài 2 *(Áo, 2012, vòng thi tỉnh, bài 4). Trong tam giác ABC, H_a, H_b, H_c là chân các đường cao* *hạ từ các đỉnh tương ứng A, B, C xuống các cạnh đối diện. Trong tam giác ABC nào thì hai trong các đoạn thẳng H_aH_b, H_bH_c và H_aH_c bằng nhau?*

Lời giải. • Ta xét trường hợp không tam giác ABC không phải tam giác tù.

- Nếu tam giác ABC có một góc vuông, chẳng hạn vuông tại A, thì hiển nhiên $H_b \equiv H_c$ và ta có $H_aH_b = H_aH_c$. Như vậy mọi tam giác vuông có tính chất đầu bài yêu cầu.

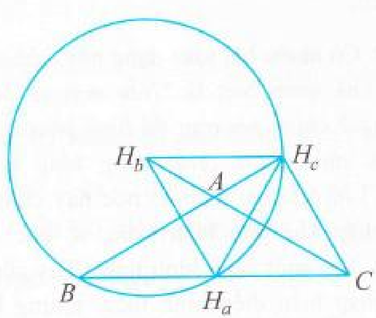
- Bây giờ ta xét trường hợp tam giác ABC nhọn và giả sử là $H_aH_b = H_aH_c$. Gọi M là trung điểm cạnh BC.



Ta có

$MH_b = MH_c \left(= \dfrac{1}{2} BC\right)$, do đó trung trực cạnh H_cH_b cắt BC tại M. Do $H_aH_b = H_aH_c$, cho nên H_a là giao của trung trực cạnh H_cH_b và BC. Suy ra $H_a \equiv M$ và tam giác ABC có đường cao tại A cũng là trung tuyến cho nên cân tại A.

• Bây giờ giả sử tam giác ABC tù tại đỉnh A. Nếu $H_aH_b = H_aH_c$ thì tương tự như trên, ta có tam giác ABC cân tại đỉnh A.



Trường hợp $H_aH_b = H_bH_c$ và trường hợp $H_aH_c = H_aH_b$ tương tự nhau nên ta chỉ cần xét trường hợp $H_aH_b = H_bH_c$. Trong trường hợp này H_b nằm trên trung trực đoạn thẳng H_aH_c và trung điểm cạnh AC cũng nằm trên trung trực đoạn thẳng H_aH_c và từ đó suy ra là cạnh AC là trung trực đoạn thẳng H_aH_c.

Từ đó dễ dàng suy ra là $\widehat{ACB} = \widehat{ACH_c}$ và do đó $\widehat{CAB} = \widehat{ACB} + 90^0$. Đảo lại, nếu trong tam giác ABC ta có $\widehat{CAB} = \widehat{ACB} + 90^0$. Khi đó tam giác ABC tù tại đỉnh A và khi hạ đường cao từ các đỉnh của tam giác, ta có $\widehat{ACB} = \widehat{ACH_c}$ (vì $\widehat{CAB} = \widehat{ACH_c} + 90^0$). Từ đó, ta có hai tam giác vuông AH_aC và AH_cC bằng nhau. Suy ra $AH_a = AH_c, CH_a = CH_c$. Do đó AC là trung trực của H_aH_c và vì vậy $H_aH_b = H_bH_c$.

Tóm lại, tất cả các tam giác thỏa mãn điều kiện đầu bài là tam giác vuông, tam giác cân và tam giác có 2 góc hơn nhau 90^0.

Nhận xét. Đây là một bài toán hình khá đơn giản về mặt kỹ thuật, nhưng làm đúng cũng không dễ. Cái hay của bài toán là nó không phải sản phẩm chế biến làm phức tạp lên của bài toán hình có sẵn, mà nó thật sự đề cập đến một tính chất toán học. Tuy là một tính chất nhỏ và đơn giản, nhưng nó là bài toán dùng để luyện tập cách làm toán và phát hiện các vấn đề toán học của cuộc sống quanh ta một cách đơn giản và thú vị.

Mời các bạn tìm thêm những lời giải khác cho hai bài toán trên.

Sau đây là hai bài tập đề nghị. Các bạn hãy thử sức giải chúng với nhiều lời giải nhất có thể và gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 30.8.2017.

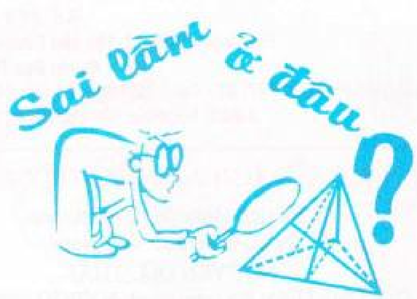
BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 3. Giải bất phương trình

$$\begin{cases} \sin x + \cos y \geq \sqrt{2} \\ \sin y + \cos z \geq \sqrt{2} \\ \sin z + \cos x \geq \sqrt{2} \end{cases}.$$

Bài 4. Cho biết $\sqrt{x} - \dfrac{1}{y} = \sqrt{y} - \dfrac{1}{z} = \sqrt{z} - \dfrac{1}{x}$. Hãy chứng minh rằng $x = y = z$.

VŨ ĐÌNH HÒA
(GV Khoa Công nghệ Thông tin, ĐHSP Hà Nội)



GIẢI ĐÁP: ĐÁP ÁN NÀO !

(*Đề đăng trên TH&TT số 477, tháng 3 năm 2017*)

Phân tích. 1) Sai lầm thứ nhất là đề bài đã ghi nhầm:

… nghịch biến trên khoảng $t \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$!

Đúng ra là … *nghịch biến trên khoảng* $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

2) Sai lầm thứ hai là ở trong lời giải:

- Sai ở bước khẳng định: "… *Khi đó m cần tìm thỏa mãn* $\begin{cases} m \notin (0;1) \\ y = \dfrac{\cos x - 2}{\cos x - m} < 0 \end{cases}$". Sai lầm ở đây là ta đang xét tính đơn điệu của hàm số thì phải xét dấu y' chứ không phải dấu của y, và $y' \le 0$ chứ không chỉ $y' < 0$ (vì $y' = 0$ nhiều nhất có hữu hạn nghiệm hoặc vô hạn đếm được nghiệm trên khoảng đang xét), như vậy phải là: $\begin{cases} m \notin (0;1) \\ y' = \left(\dfrac{\cos x - 2}{\cos x - m}\right)' \le 0 \end{cases}$.

3) Tuy nhiên nếu như hai sai lầm trên được sửa thì lời giải vẫn bị sai vì lí do sau:

Đặt $t = \cos x$, do $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ nên $t \in (0;1)$, nhưng hàm số $t = \cos x$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ nên việc chuyển sang xét bài toán tương đương theo biến t là không đúng. Việc chuyển xét đó là đúng nếu t và x cùng đồng biến hoặc cùng nghịch biến.

Xét một lời giải đúng như sau:

• Với $m = 2$ thì hàm số trở thành $y = 1$ là hàm hằng nên $m = 2$ không thỏa mãn bài toán.

• Với $m \ne 2$ ta có

$$y' = \frac{-\sin x(\cos x - m) + \sin x(\cos x - 2)}{(\cos x - m)^2} = \frac{(m-2)\sin x}{(\cos x - m)^2}.$$

Hàm số $y = \dfrac{\cos x - 2}{\cos x - m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ $\Leftrightarrow y$ xác định trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ và $y' \le 0,\ \forall x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ (*).

Với mọi $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ ta có $\sin x > 0$ và $0 < \cos x < 1$ nên

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} m \notin (0;1) \\ y' = \dfrac{(m-2)\sin x}{(\cos x - m)^2} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ 1 \le m < 2 \end{array}\right. \text{ (do } m \ne 2).$$

Vậy ta chọn đáp án *A*.

Nhận xét. Chỉ có bạn *Trương Xuân Như Ngọc*, 11 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế** đã phát hiện được sai lầm và đưa ra cách giải đúng.

KIHIVI

GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH !

Trong giờ bài tập Thầy giáo gọi bạn *Đông* lên giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 = 3y^2 - 3x & (1) \\ y^3 = 3x^2 - 3y & (2) \end{cases}$.

Sau đây là lời giải của bạn *Đông*:

Trừ theo vế các phương trình (1), (2) suy ra

$$x^3 - y^3 = 3(y^2 - x^2) + 3(y - x)$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2 + 3x + 3y + 3) = 0 \ (3).$$

• Xét $x = y$, thay vào phương trình (1) ta có:

$$x^3 - 3x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Do đó hệ có nghiệm $(x, y) = (0, 0)$.

• Xét $x^2 + xy + y^2 + 3x + 3y + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + (3 + y)x + y^2 + 3y + 3 = 0.$$

Ta có: $\Delta_x = (3 + y)^2 - 4(y^2 + 3y + 3) = -3(y + 1)^2 \le 0$

Phương trình có nghiệm khi $\Delta_x = 0 \Leftrightarrow y = -1$. Khi đó phương trình trở thành: $x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(-1;-1)$.

Kết luận: HPT đã cho có nghiệm: $(0\ ;\ 0)$ và $(-1;-1)$.

Từ dưới lớp bạn *Bắc* xin phát biểu: "*Thưa Thầy* $(-1\ ;\ -1)$ *không phải là nghiệm của hệ phương trình, vì thay vào hệ phương trình không thỏa mãn*".

Các bạn trong lớp đang băn khoăn về lời giải của *Đông*!

Bạn cho biết lời giải của *Đông* sai ở đâu, theo bạn nên giải thế nào cho đúng!

VÕ HỮU HÀ

(GV THPT Cẩm Xuyên, Hà Tĩnh)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 481 (7.2017)
Tòa soạn : Tầng 12, Tòa nhà Diamond Flower, Số 1, Hoàng Đạo Thúy, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.35121607, ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

1 **Dành cho Trung học Cơ sở**
For Lower Secondary School
Phạm Trọng Thư – Vận dụng định lí Viète vào việc giải các dạng toán thường gặp có liên quan đến phương trình bậc hai.

6 Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 Trường THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội, năm học 2016 – 2017.

7 Hướng dẫn giải Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên ĐHSP TP. Hồ Chí Minh, năm học 2016 – 2017.

9 Đáp án và hướng dẫn giải đề số 10.

12 **Diễn đàn dạy học toán**
Đặng Thành Trung – Khai thác và phát triển một bài toán hình học hay.

15 **Phương pháp giải toán**
Phạm Đức Hiệp – Một số ứng dụng của đại số và giải tích trong số học.

19 **Bạn đọc tìm tòi**
Trần Quang Hùng – Về một bài toán hay từ Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ.

23 **Tiếng Anh qua các bài toán** - *Bài số* 22.
Bài dịch số 19 - Tiếng Anh qua các bài toán.

24 **Đề ra kỳ này**
Problems in This Issue
T1/481, ..., T12/481, L1/481, L2/481.

27 **Giải bài kỳ trước**
Solutions to Previous Problems

35 *Nguyễn Ngọc Trung* – Phương trình Pythagoras.

39 **Lịch sử Toán học**
Tạ Duy Phượng - Đoàn Thị Lê - Cung Thị Kim Thành - Phan Ánh Tuyết – Đôi nét về nhà Toán học Việt Nam đầu thế kỉ XIX Ý Trai Nguyễn Hữu Thận và cuốn sách ***Ý Trai Toán pháp nhất đắc lục*** của ông.

43 **Nhiều cách giải cho một bài toán**

45 **Du lịch Thế giới qua các Bài toán hay**

47 **Sai lầm ở đâu?**
Giải đáp: **Đáp án nào?**
Võ Hữu Hà – Giải hệ phương trình!

Biên tập: LÊ MAI - NGUYỄN HIỆP ***Mĩ thuật:*** QUỐC HIỆP, THANH LONG
Trị sự, phát hành: NGUYỄN KHOA ĐIỀM, NGUYỄN THỊ THU HUYỀN ***Thiết kế, chế bản:*** MAI ANH

Giải trí toán học

MỐI LƯƠNG DUYÊN GIỮA TOÁN VÀ THƠ

Lê Quốc Hán (*Khoa Toán, ĐH Vinh*)

1. Ngày còn nhỏ, trong chúng ta ai chẳng thuộc những "câu văn vần" về công thức toán học chỉ đọc vài lần là thuộc:

Muốn tìm diện tích hình thang
đáy lớn đáy bé ta mang cộng vào
rồi đem nhân với chiều cao
chia đôi lấy nửa thế nào cũng ra

Hay: *Muốn tìm diện tích hình tròn*
bán kính nhân nó ta còn nhân pi
còn như muốn tìm chu vi
số pi đường kính ta thì nhân ngay.

Ta cũng đã giải nhiều bài toán bằng "thơ" được lưu truyền từ thế hệ này sang thế hệ khác:

Một đoàn em bé tắm bên sông
tranh cãi với nhau việc chơi bòng
một bé ba bòng thừa bảy bé
một bòng ba bé bốn bòng không.
Ai ơi xin tính cho nhanh nhé
có mấy bé chơi có mấy bòng"...

Lớn lên, kiến thức toán học phong phú hơn, tinh vi hơn và bản thân người học toán dạy toán cũng từng trải hơn nên thơ họ cũng trừu tượng hơn, biến ảo hơn:

Vô đề

Tặng Đỗ Thị Căn

Ai đặt tên em sao khéo thế
đau lòng vạn vạn kẻ thư sinh
nghe tên thì đúng là vô tỷ
mà nết xem ra rất hữu tình

Đặng Hấn

Và đôi khi cũng sâu sắc hơn day dứt với đời hơn

Đường tròn

Điểm đầu và điểm cuối
vô tận và mênh mông
Khi không còn tâm nữa
đường tròn thành số không

Phạm Quý Hùng

2. Tuy nhiên, đặc điểm chung thơ của các tác giả gốc toán là trong sáng, cô đọng, dễ thuộc và dễ nhớ:

Toán và hoa

Em đặt lọ hoa ở trên bàn
cho đời làm toán bớt khô khan
Em ơi trong toán nhiều công thức
cũng đẹp như hoa lại chẳng tàn

Văn Như Cương

Dẫu nhiều khi họ nói quanh co mênh mông trời đất vẫn không giấu được đặc điểm chung ấy:

Dấu vô cùng*

Khi chưa yêu hai đứa
trống rỗng có gì đâu
niềm vui đã không có
không cả nỗi âu sầu
Yêu rồi thành vô hạn
trời đất hóa mênh mông
một tiếng chim nho nhỏ
cũng vang lừng không trung
Hai số không kết lại
tạo nên dấu vô cùng!
(*: $00 \to \infty$)

Đặng Hấn

Thi thoảng, những vui buồn ngấm vào tâm hồn họ, và họ mượn các khái niệm công thức định lý toán học để gửi gắm niềm tâm sự kín đáo của mình

E mũ x**

Thầy đã dạy hình lập phương sáu mặt
Nhưng con người chỉ có một mặt thôi
(Mặt tráo trở chỉ là chiếc bóng
Con đã nghe và day dứt đến bây giờ)
Thầy đã dạy hình Sin là hình sóng
Nhưng sóng ở trên đời không phải hình Sin
Ai bảo cong là mềm mại
Những quanh co con lại thấy trên đời
Và Parabol là đường con đi
Tiểu, đại, âm, dương xoay vần hệ số
Những đường thẳng cắt nhau đau nhức
Nhưng với cuộc đời con không thể song song
Sự thật phải là số thực
Mà số ảo kia vẫn lơ lửng trên đầu
Hằng số là chân lý
Nhưng qua đạo hàm lại hoá hư không
Con đã cho biết bao đẳng thức
Lại nhận về mình những ký tự mũi tên
Những phương trình với dấu bằng ám ảnh
Cả đời con chưa thấy nghiệm bao giờ
Và trong giấc đêm nao
Cơn mơ số đổ vào con vô cực
Con thảng thốt giai thừa
Con chập chờn số mũ
May gặp được thầy con nhận chữ Lim
....
Biết bao điều trăn trở thầy ơi
Dẫu chưa trọn cũng gọi là đáp số
Để con được trở về tháng ngày xưa cũ
Như e mũ ích ngày nào thầy thường đùa bảo:
"Dẫu thế nào nó cũng cứ trơ trơ".
(**: e^x)

Nguyễn Minh Đức

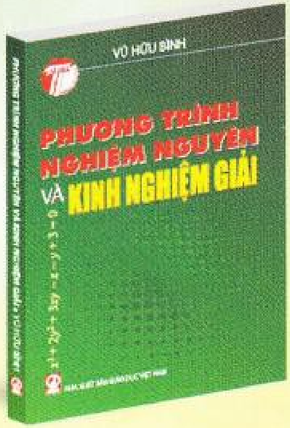
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Cuốn sách

PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN VÀ KINH NGHIỆM GIẢI

(Tái bản lần thứ nhất, có chỉnh lí, bổ sung) Của tác giả NGND. VŨ HỮU BÌNH
Sách dày 224 trang, khổ 17 x 24 cm, giá bìa 42000 đồng



Nội dung của sách trình bày các phương pháp giải phương trình với nghiệm nguyên, vốn là một đề tài lý thú của Số học và Đại số, từ các học sinh nhỏ với những bài toán như *Trăm trâu trăm cỏ* đến các chuyên gia toán học với những bài toán như *định lí lớn Fermat*.

Sách gồm 5 chương:

Chương I giới thiệu các phương pháp thường dùng để giải phương trình nghiệm nguyên.

Chương II giới thiệu những phương trình nghiệm nguyên được sắp xếp theo từng ngày.

Chương III giới thiệu những bài toán đưa về giải phương trình nghiệm nguyên, trong đó có những bài toán vui, bài toán thực tế.

Chương IV giới thiệu một số phương trình nghiệm nguyên mang tên các nhà toán học như *Pell, Pythagore, Fermat, Diophante*, ...

Chương V giới thiệu những phương trình nghiệm nguyên chưa được giải quyết và những bước tiến của Toán học trong giải những phương trình nghiệm nguyên, trong đó có những đóng góp của *Andrew Wiles* chứng minh định lí lớn Fermat và Giáo sư *Ngô Bảo Châu* chứng minh Bổ đề cơ bản trong *chương trình Langlands*.

Phương trình nghiệm nguyên có số phương trình ít hơn số ẩn nên đòi hỏi người giải toán phải vận dụng kiến thức sáng tạo, vì thế phương trình nghiệm nguyên thường có mặt trong các đề thi học sinh giỏi từ bậc tiểu học, trung học cơ sở đến trung học phổ thông. Cuốn sách dành một phần thích đáng nêu những kinh nghiệm giải toán về phương trình nghiệm nguyên như cách phân tích bài toán, cách suy luận để tìm hướng giải, cách phân chia bài toán thành những bài toán nhỏ dễ giải quyết hơn, cách "*đưa khó về dễ, đưa lạ về quen*", cách liên hệ tình huống đang giải quyết với những vấn đề mới, cách chọn hướng đi phù hợp với từng bài toán đặt ra ...tất cả những điều đó đều là những kĩ năng mà mỗi người cần có trong học tập, trong nghiên cứu và trong cuộc sống.

Trong lần tái bản này, cuốn sách bổ sung thêm những kinh nghiệm giải toán, bổ sung thêm một số thí dụ, cập nhật thêm một số sự kiện liên quan đến tiểu sử các nhà toán học, bổ sung thêm một số cách giải.

Với những câu thơ ở đầu mỗi chương, với cách trình bày rõ ràng, dễ hiểu, tươi mát, với những thông tin cập nhật, với những kinh nghiệm thực tế trong bồi dưỡng học sinh giỏi và viết sách, tác giả cuốn sách, NGND *Vũ Hữu Bình* sẽ đem đến cho bạn đọc những kiến thức hệ thống và những kinh nghiệm giải toán giúp giải quyết một loại toán khó ở bậc phổ thông.

Tin rằng cuốn sách không chỉ hữu ích cho học sinh và thầy cô giáo, mà còn là tài liệu tham khảo tốt cho sinh viên và giảng viên các trường Đại học và Cao đẳng ngành Toán, cùng các phụ huynh có nguyện vọng giúp con em mình học Toán tốt hơn.

Bạn đọc có thể đặt mua ấn phẩm trên tại: Tòa soạn Tạp chí TH&TT; Các cơ sở Bưu điện; Các Công ty Sách - Thiết bị trường học ở các địa phương; Các Cửa hàng sách của NXB Giáo dục Việt Nam; Siêu thị trực tuyến www.sachtoan24h.com (hotline: 0973472803, 0912920591).

Mọi chi tiết xin liên hệ:
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội
- Điện thoại biên tập: 04.35121607
- Điện thoại Fax- phát hành: 04. 35121606
- Số tài khoản: 111000002173, tại Ngân hàng Thương mại Cổ phần Công thương Việt Nam - chi nhánh Hoàn Kiếm, Hà Nội.

ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT7M7
Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 7 năm 2017
Giá: 15.000 đồng
Mười hai nghìn năm trăm đồng