

M

NGUYỄN NHẬT LỆ
NGUYỄN VĂN VƯỢNG

Lucky!

CƠ HỌC ỨNG DỤNG

PHẦN BÀI TẬP

CÓ HƯỚNG DẪN - GIẢI MẪU - TRẢ LỜI

Thu Viên DHKTCN-TN



MGT07034910



NHÀ XUẤT BẢN
KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

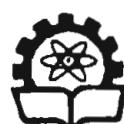
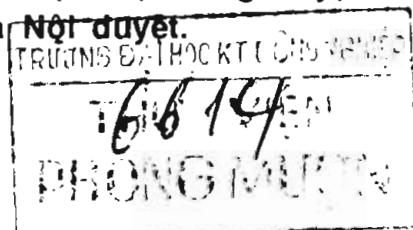
Pts. NGUYỄN NHẬT LÊ - Pgs. NGUYỄN VĂN VƯỢNG

CƠ HỌC ỨNG DỤNG

PHẦN BÀI TẬP

(CÓ HƯỚNG DẪN GIẢI MẪU - TRẢ LỜI)

Giáo trình đã được Hội đồng duyệt sách trường Đại học
Bách khoa Hà Nội duyệt.



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC KỸ THUẬT
HÀ NỘI - 1998

Chịu trách nhiệm xuất bản

Pgs., Pts. TÔ ĐĂNG HẢI

Biên tập và sửa chế bản

NGUYỄN THỊ DIỆU THÚY

Vẽ bìa

HƯƠNG LAN

Trình bày và làm chế bản

TRẦN VĂN CẨM

LỜI NÓI ĐẦU

Trong mỗi chương của quyển *CƠ HỌC ỨNG DỤNG - PHẦN BÀI TẬP* này đều có các phần *Cơ sở lý thuyết - Hướng dẫn áp dụng* *Những bài giải mẫu Bài tập*. Các bài tập đều có trả lời (trừ bài tập ôn thi). Ngoài ra trong quyển sách còn có phần bài tập cho mỗi kì thi.

Quyển này cùng với quyển *CƠ HỌC ỨNG DỤNG* phần lý thuyết của GS, TS. *DÔ Sanh* làm chùm biên tạo thành một bộ tài liệu học tập cho sinh viên đại học các ngành phi cơ khí và cao đẳng kỹ thuật. Nó cũng có thể làm tài liệu tham khảo cho sinh viên các ngành cơ khí, các ngành kỹ thuật khác của hệ tập trung và hê tại chức.

Chúng tôi chân thành cảm ơn Trường Đại học Bách khoa Hà Nội và Khoa Cơ học Ứng dụng của Trường đã góp ý kiến xây dựng và tạo điều kiện thuận lợi cho sự biên soạn quyển sách này.

Chúng tôi mong nhận được sự nhận xét của các ban đồng nghiệp và các bạn đọc để quyển sách được hoàn thiện hơn trong lần xuất bản sau.

Hà Nội – 1995

Các tác giả

MỤC LỤC

	Trang
Lời nói đầu	3
<i>Chương 1: Chuyển động của điểm</i>	5
<i>Chương 2: Chuyển động của vật rắn quanh trục cố định</i>	14
<i>Chương 3: Chuyển động song phẳng của vật rắn</i>	21
<i>Chương 4: Hợp chuyển động của điểm</i>	37
<i>Chương 5: Hợp chuyển động quay của vật rắn quanh các trục</i>	50
<i>Chương 6: Cân bằng của hệ lực phẳng</i>	57
<i>Chương 7: Cân bằng của hệ lực không gian</i>	77
Các bài tập ôn thi kỳ I	80
<i>Chương 8: Động lực học chất điểm</i>	87
<i>Chương 9: Đặc trưng hình học của vật rắn</i>	98
<i>Chương 10: Nguyên lý di chuyển khả dĩ - Nguyên lý Dalāmbe</i>	110
<i>Chương 11: Các định lý tổng quát của động lực học</i>	127
<i>Chương 12: Phương trình vi phân chuyển động của vật rắn và cơ hệ.</i>	151
<i>Chương 13: Kéo - Nén đúng tâm</i>	161
<i>Chương 14: Xoắn thuần túy thanh thẳng</i>	183
<i>Chương 15: Uốn phẳng</i>	203
<i>Chương 16: Tính thanh chịu lực phức tạp</i>	228
Các bài tập ôn thi kỳ II	247
Trả lời các bài tập	251
Tài liệu tham khảo	280

Chương I

CHUYỂN ĐỘNG CỦA ĐIỂM

§1-1. CƠ SỞ LÝ THUYẾT:

Để giải bài toán về chuyển động của điểm, ta thường dùng hai phương pháp: phương pháp tọa độ Đề Các và phương pháp tọa độ tự nhiên.

I- Phương pháp tọa độ Đề Các

Vị trí của điểm M được xác định bởi các tọa độ: x_M , y_M , z_M (hình 1-1).

1) Phương trình chuyển động biểu diễn sự liên hệ giữa tọa độ theo thời gian:

$$\begin{aligned}x_M &= x(t) \\y_M &= y(t) \\z_M &= z(t)\end{aligned}\tag{1-1}$$

Nếu khử thời gian t ở phương trình chuyển động và tìm quan hệ các tọa độ, ta nhận được phương trình quỹ đạo của điểm.

2) Vận tốc. Véc tơ vận tốc \vec{V} của điểm xác định qua các hình chiếu của nó trên các trục tọa độ:

$$V_x = \dot{x}; V_y = \dot{y}; V_z = \dot{z}$$

Ở đây $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$

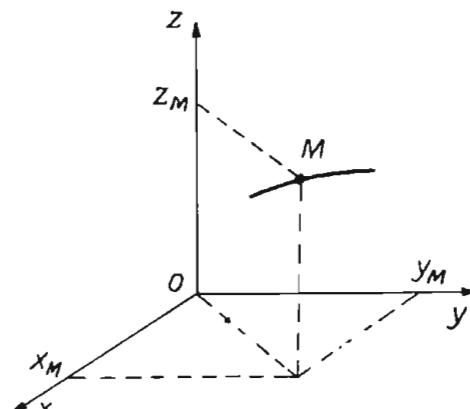
$$\text{Trị số: } V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \tag{1-2}$$

Các cosin chỉ phương:

$$\cos\alpha = V_x/V;$$

$$\cos\beta = V_y/V;$$

$$\cos\gamma = V_z/V$$



Hình 1-1

3) Gia tốc. Vectors gia tốc \vec{a} của điểm được xác định qua các hình chiếu của nó trên các trục tọa độ:

$$a_x = \ddot{x}; a_y = \ddot{y}; a_z = \ddot{z} \quad \text{Ở đây } \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Trị số $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ (1-3)

Các cosin chỉ phương: $\cos\alpha = a_x/a$; $\cos\beta = a_y/a$; $\cos\gamma = a_z/a$

d) Tính chất chuyển động: xét tích vô hướng $\vec{V} \cdot \vec{a}$:

$$\vec{V} \cdot \vec{a} = \dot{x} \ddot{x} + \dot{y} \ddot{y} + \dot{z} \ddot{z} \quad \left\{ \begin{array}{l} > 0: \text{chuyển động nhanh dần} \\ < 0: \text{chuyển động chậm dần.} \end{array} \right. \tag{1-4}$$

II- Phương pháp tọa độ tự nhiên

Khi biết quỹ đạo, chọn gốc O và chiều dương (+). Vị trí của điểm M được xác định bởi tọa độ cong của điểm trên quỹ đạo $S = OM$ (hình 1-2).

1. Phương trình chuyển động theo quỹ đạo

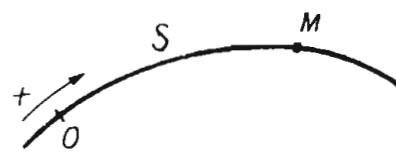
Biểu diễn sự liên hệ giữa tọa độ cong theo thời gian:

$$S = S(t) \quad (1-5)$$

2. Vận tốc. Vectơ vận tốc \vec{V} có phương tiếp tuyến với quỹ đạo, chiều phụ thuộc S:

$$\vec{V} = \dot{S} \cdot \vec{\tau} \begin{cases} \dot{S} > 0: \vec{V} \text{ hướng theo chiều dương của quỹ đạo.} \\ \dot{S} < 0: \vec{V} \text{ hướng theo chiều âm của quỹ đạo.} \end{cases} \quad (1-6)$$

Trị số $V = |\dot{S}|$ ở đây $\dot{S} = \frac{dS}{dt}$; $\vec{\tau}$ và \vec{n} là vectơ đơn vị của tiếp tuyến và pháp tuyến tại M.

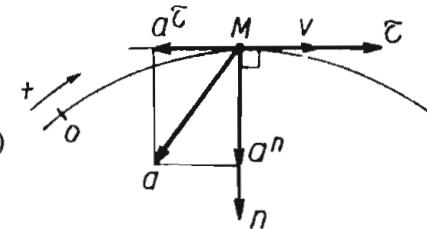


Hình 1-2

3. Gia tốc. Vectơ gia tốc \vec{a} có hai thành phần: gia tốc pháp tuyến \vec{a}^n và gia tốc tiếp tuyến \vec{a}^t (hình 1-3)

$$\vec{a} = \vec{a}^n + \vec{a}^t$$

$$\vec{a}^n = \frac{V^2}{\rho} \vec{n} \begin{cases} \text{hướng vào tâm cong của quỹ đạo} \\ \text{Trị số } a^n = \frac{V^2}{\rho} \end{cases} \quad (1-7)$$



ρ - bán kính cong của quỹ đạo tại M.

$$\vec{a}^t = \ddot{S} \cdot \vec{\tau} \begin{cases} \text{Típ tuyến với quỹ đạo tại M.} \\ \text{Cùng chiều hoặc ngược chiều với } \vec{\tau} \text{ phụ thuộc vào } \ddot{S} > 0 \text{ hoặc } \ddot{S} < 0. \\ \text{Trị số } a^t = |\ddot{S}|, \text{ ở đây } \ddot{S} = \frac{d^2S}{dt^2} \end{cases} \quad (1-8)$$

Hình 1-3

4) Tính chất chuyển động. Xét tích vô hướng $\vec{V} \cdot \vec{a}^t$

$$\vec{V} \cdot \vec{a}^t \begin{cases} > 0: \text{chuyển động nhanh dần.} \\ < 0: \text{chuyển động chậm dần.} \end{cases} \quad (1-9)$$

5) Các dạng chuyển động đặc biệt:

a) Chuyển động đều: $V = \text{const.}$

$$\text{Suy ra: } a^t = 0; S = V \cdot t \quad (1-10)$$

b) Chuyển động biến đổi đều: $a^t = \text{const}$

$$\text{Suy ra: } V = V_0 \pm a^t t; S = V_0 t \pm \frac{1}{2} a^t t^2 \quad (1-11)$$

trong đó: qui ước chọn gốc của quỹ đạo ở vị trí đầu; chiều dương của quỹ đạo theo chiều chuyển động ban đầu của điểm.

dấu +: ứng với chuyển động nhanh dần đều.

dấu -: ứng với chuyển động chậm dần đều.

§1-2. HƯỚNG DẪN ÁP DỤNG

Có hai loại bài toán:

I- Tìm phương trình chuyển động, tìm các đặc trưng của chuyển động như: quỹ đạo, vận tốc, tính chất chuyển động.

II- Bài toán tổng hợp dùng cả hai phương pháp (tọa độ Đề các và tọa độ tự nhiên) trong một bài toán.

Phương pháp giải bài toán:

1. Chọn phương pháp. Tùy đầu bài mà ta chọn phương pháp tọa độ Đề các hay tọa độ tự nhiên. Phương pháp tọa độ tự nhiên được dùng khi đã biết quỹ đạo của điểm.

2. Tìm phương trình chuyển động:

Xét điểm ở vị trí bất kì. Tìm quan hệ giữa các đại lượng định vị theo thời gian t.

Nếu biết gia tốc thì dùng phép tính tích phân, nhận được vận tốc, tích phân lần nữa ta nhận được phương trình chuyển động.

Nếu biết chuyển động là đều hay biến đổi đều ta viết được phương trình chuyển động dạng (1-10) hoặc (1-11).

3. Tìm quỹ đạo. Khử thời gian t khỏi phương trình chuyển động và tìm liên hệ giữa các tọa độ không còn chứa t nữa.

4. Tìm vận tốc và gia tốc:

Áp dụng (1-2) và (1-3) khi dùng phương pháp tọa độ Đề Các.

Áp dụng (1-6), (1-7) và (1-8) khi dùng phương pháp tọa độ tự nhiên.

5. Tìm tính chất của chuyển động:

Áp dụng (1-4) khi dùng phương pháp tọa độ Đề Các.

Áp dụng (1-9) khi dùng phương pháp tọa độ tự nhiên.

6. Tìm bán kính cong của quỹ đạo:

Áp dụng (1-7).

Nếu bài toán cho ở dạng tọa độ Đề Các, thì cần phải chuyển sang dạng tọa độ tự nhiên bằng cách đặt:

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}; \quad a^r = \frac{dV}{dt}$$

$$= \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} ; \quad a^n = \sqrt{a^2 - (a^t)^2} \quad (1-12)$$

§1-3. NHỮNG BÀI GIẢI MẪU.

I- Tìm phương trình chuyển động và các đặc trưng của chuyển động:

Thí dụ 1-1 (Phương pháp tọa độ Đề Các Bài toán thuận)

Cơ cấu tay quay - con trượt OAB có $OA = AB = 3b$. Tay quay OA quay quanh O theo luật $\varphi = kt$ làm cho con trượt B chuyển động theo rãnh ngang.

Tìm phương trình chuyển động, quỹ đạo, vận tốc, gia tốc của điểm B và điểm M; $MB=b$.
 Xét sự nhanh chậm của điểm B và M khi $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$

Bài giải

Xét điểm B

1. Phương trình chuyển động. Tìm $x_B(t)$

$$x_B = 6bcos\varphi = 6bcoskt$$

Quỹ đạo B là đoạn thẳng dọc trục x.

2. Vận tốc: $V_B = \dot{x}_B = -6bksinkt$. Vecto

\vec{V}_B hướng về O (và $0 < \varphi = kt < \frac{\pi}{2}$)

3. Gia tốc: $a_B = \ddot{x}_B = -6bk^2 \cos kt$. Vecto \vec{a}_B hướng về 0.

4. Xét nhanh chậm: $\vec{V}_B \cdot \vec{a}_B = 36b^2k^3 \sin kt \cos kt > 0$, do đó B chuyển động sang trái, nhanh dần.

Xét điểm M

1. Phương trình chuyển động. Tìm $x_M(t)$ và $y_M(t)$.

$$x_M = 5bcos\varphi = 5bcoskt$$

$$y_M = b \sin \varphi = b \sin kt$$

Tìm quiđạodiểm M. Rút sinkt và coskt từ phuong trình chuyển động, bình phuong hai vế rồi cộng lại:

$$\frac{x_M^2}{(5b)^2} + \frac{y_M^2}{b^2} = 1$$

Quỹ đạo M là đường elip, tâm O với các bán trục là $5b$ và b .

2. Vận tốc:

$$\vec{V}_M \left\{ \begin{array}{l} V_{Mx} = \dot{x}_M = -5bksinkt \\ V_{My} = \dot{y}_M = bkcosskt \end{array} \right.$$

$$V_M = \sqrt{V_{Mx}^2 + V_{My}^2} = b k \sqrt{25 \sin^2 kt + \cos^2 kt}$$

Vectơ \vec{V}_M tiếp tuyến với quỹ đạo elip.

3. Gia tốc:

$$\vec{a}_M = \begin{cases} a_{Mx} = \ddot{x}_M = -5bk^2 \cos kt = -k^2 x_M \\ a_{My} = \ddot{y}_M = -bk^2 \sin kt = k^2 y_M \end{cases}$$

$$a_M = \sqrt{a_{Mx}^2 + a_{My}^2} = bk^2 \sqrt{25 \cos^2 kt + \sin^2 kt}$$

\vec{a}_M có các hình chiếu tỷ lệ và ngược dấu với tọa độ, do đó \vec{a}_M hướng về tâm O.

4. Xét nhanh chậm: $\vec{V}_M \cdot \vec{a}_M > 0$ (vì góc $\alpha < \frac{\pi}{2}$) do đó điểm M đang chuyển động nhanh dần.

Có thể thấy: $\vec{V}_M \cdot \vec{a}_M = V_{Mx} a_{Mx} + V_{My} a_{My} > 0$

Thí dụ 1-2 (Phương pháp tọa độ Đề Cáp. Bài toán ngược).

Một điểm chuyển động trong mặt phẳng Oxy, gia tốc có hình chiếu $a_x = 4 \text{ cm/s}^2$; $a_y = 2t \text{ cm/s}^2$.

Tìm phương trình chuyển động của điểm, biết lúc $t = 2$ thì vectơ vận tốc của điểm tạo với trục x góc $\alpha = 45^\circ$ và trị số vận tốc $V = 12\sqrt{2} \text{ cm/s}$.

Bài giải

1. Xác định vận tốc của điểm:

$$\text{Vì } a_x = \frac{dV_x}{dt} ; \quad a_y = \frac{dV_y}{dt}$$

Suy ra:

$$dV_x = a_x dt = 4 dt$$

$$dV_y = a_y dt = 2t dt$$

Lúc $t = 2$ thì $V_x = V_y = 12\sqrt{2} \cos 45^\circ = 12 \text{ cm/s}$,

$$\text{do đó: } \int_{12}^{V_x} dV_x = \int_2^t 4 dt; \quad \int_{12}^{V_y} dV_y = \int_2^t 2t dt$$

ta được: $V_x = 4t + 4$

$$V_y = t^2 + 8$$

2. Xác định phương trình chuyển động:

$$\text{Vì } V_x = \frac{dx}{dt}; \quad V_y = \frac{dy}{dt}$$

Suy ra: $dx = V_x dt = (4t + 4) dt$; $dy = V_y dt = (t^2 + 8) dt$.

Lúc $t = 0$ thì $x = y = 0$, do đó:

$$\int_0^x dx = \int_0^t (4t + 4) dt; \quad \int_0^y dy = \int_0^t (t^2 + 8) dt$$

ta được phương trình chuyển động của điểm:

$$y = \frac{1}{3} t^3 + 8t$$

II- Bài toán tổng hợp:

Thí dụ 1-3 (Dùng cả hai phương pháp: tọa độ Đề Các và tọa độ tự nhiên).

Điểm M chuyển động trên đường tròn, bán kính $R = 8\text{ m}$, tâm C có tọa độ $(8\text{m}; 0)$. Vị trí của M được xác định bởi góc giữa bán kính CM và trục x (hình 1-5):

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} t$$

1. Lập phương trình chuyển động của điểm ở dạng tọa độ tự nhiên. Xác định vận tốc, gia tốc của điểm lúc hướng chuyển động thay đổi.

2. Lập phương trình chuyển động của điểm ở dạng tọa độ Đề Các và viết phương trình quỹ đạo của điểm.

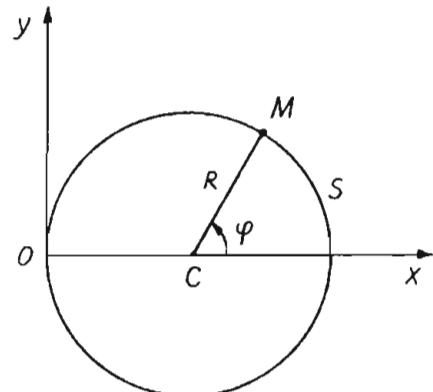
Bài giải

1. Dùng phương pháp tọa độ tự nhiên:

Phương trình chuyển động theo quỹ đạo:

$$S = R\varphi = 8 \cdot \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} t = 4\pi \sin \frac{\pi}{2} t (\text{m})$$

$$\text{Vận tốc: } V = \dot{S} = 2\pi^2 \cos \frac{\pi}{2} t (\text{m/s})$$



Hình 1-5

$$\text{Gia tốc: } \text{gia tốc pháp tuyến } a^n = \frac{V^2}{R} = \frac{\pi^4}{2} \cos^2 \frac{\pi}{2} t$$

$$\text{Gia tốc tiếp tuyến } a^t = \ddot{S} = \pi^3 \sin \frac{\pi}{2} t$$

Tìm lúc chuyển động đổi hướng:

$$\vec{V} \cdot \vec{a}^t = -2\pi^2 \cos \frac{\pi}{2} t \cdot \pi^3 \sin \frac{\pi}{2} t = -\pi^5 \sin \pi t$$

$$\begin{cases} = 0 \text{ khi } t = 1 \\ < 0 \text{ khi } t < 1 \\ > 0 \text{ khi } t > 1 \end{cases}$$

Khi $t = 1$ thì vectơ \vec{V} đổi hướng, lúc đó:

$$V = 0; a^n = \frac{\pi^4}{2}; a^t = 0; a = a^n = \frac{\pi^4}{2} (\text{m/s}^2)$$

2. Dùng phương pháp tọa độ Đề Các:

Phương trình chuyển động:

$$x_M = R + R \cos \varphi = 8 + 8 \cos\left(\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} t\right)$$

$$y_M = R \sin \varphi = 8 \sin \varphi = 8 \sin\left(\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} t\right)$$

Quí đạo: Rút $\cos(\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} t)$ và $\sin(\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} t)$ từ hai phương trình trên, bình phương hai vế rồi cộng lại, ta được phương trình quí đạo:

$$\frac{(x_M - 8)^2}{8^2} + \frac{y_M^2}{8^2} = 1$$

Đó chính là đường tròn có bán kính $R = 8$ và tâm $C(8; 0)$.

Thí dụ 1-4. (Dùng cả hai phương pháp: tọa độ Đề Các và tọa độ tự nhiên)

Biết phương trình chuyển động của một điểm có dạng:

$x = a_1 \cos t$; $y = a_1 \sin t$; $z = b_1 t$; a_1 và b_1 là các hằng số.

Tìm phương trình chuyển động theo quí đạo và bán kính cong của quí đạo.

Bài giải

1. Dùng phương pháp tọa độ Đề Các:

Vận tốc.

$$\vec{V} = \begin{cases} V_x = \dot{x} = -a_1 \sin t \\ V_y = \dot{y} = a_1 \cos t; \\ V_z = \dot{z} = b_1 \end{cases} \quad V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \text{const}$$

Gia tốc:

$$\vec{a} = \begin{cases} a_x = \ddot{x} = -a_1 \cos t \\ a_y = \ddot{y} = -a_1 \sin t; \\ a_z = \ddot{z} = 0 \end{cases} \quad = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} = a_1 = \text{const}$$

2. Dùng phương pháp tọa độ tự nhiên:

Phương trình chuyển động theo quí đạo:

$$S = \int_0^t V dt = \int_0^t \sqrt{a_1^2 + b_1^2} dt = t \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$$

Gia tốc:

$$\text{gia tốc tiếp tuyến } a^t = \frac{dV}{dt} = 0$$

$$\text{gia tốc pháp tuyến: } a^n = \sqrt{a^2 - (a^t)^2} = a_1 = \text{const}$$

Bán kính cong của quí đạo:

$$\rho = \frac{V^2}{a^n} = \frac{a_1^2 + b_1^2}{a_1} = \text{const}$$

§1-4. BÀI TẬP

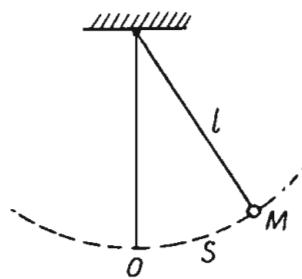
I- Tìm phương trình chuyển động, tìm các đặc trưng chuyển động

1-1. Xác định quỹ đạo, vận tốc, gia tốc của điểm, nếu phương trình chuyển động của điểm đã cho như sau (x , y , z tính bằng cm, t tính bằng giây):

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & = t^3 + 2 & \text{b)} & \epsilon = 10 \cos \frac{2\pi}{5} t; & \text{c)} & = \frac{4}{t+1} \\ & y = 3 - t^3 & & & & \\ & & \text{y} = 10 \sin \frac{2\pi}{5} t & & \text{y} = -4t - 4 & \\ & & & & & = 2t + 2 \end{array}$$

1-2. Một điểm chuyển động trên vòng tròn bán kính R theo luật:

$$S = V_0 t - \frac{1}{2} a_1 t^2$$



Hình bài 1-3

a) Xác định trị số giá tốc của điểm.

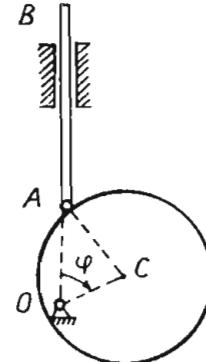
b) Xác định thời điểm t mà trị số giá tốc bằng a_1 và số vòng N mà điểm chuyển động được lúc đạt đến giá tốc đó.

1-3. Con lắc chuyển động theo vòng tròn bán kính l theo luật $S = b \sin kt$, trong đó b và k là các hằng số (hình bài 1-3). Xác định vận tốc, giá tốc tiếp, giá tốc pháp của con lắc và các vị trí, tại đó các đại lượng này bằng không.

1-4. Cơ cấu cam như hình bài 1-4, cam là đĩa tròn có bán kính r , trục quay O cách tâm C một đoạn $OC = d$, cam quay quanh O theo luật $\varphi = \omega t$. Tìm phương trình chuyển động và vận tốc của thanh AB . Trục x hướng dọc thanh, gốc ở O .

1-5. Cơ cấu tay quay thanh truyền như hình bài 1-5. Biết $\varphi = \omega_0 t$ và coi

$$\lambda = \frac{AO}{AB} = \frac{AO}{l} \text{ là rất nhỏ}$$



Hình bài 1-4

a) Tìm phương trình chuyển động, vận tốc, giá tốc điểm B .

b) Tìm phương trình chuyển động, vận tốc, giá tốc trung điểm M của thanh AB .

1-6. Con chạy chuyển động thẳng với giá tốc

$$a_x = -\pi^2 \sin \frac{\pi}{2} t \text{ m/s}^2$$

Tìm phương trình chuyển động, biết vận tốc đầu của con chạy là $V_{ox} = 2\pi$ (m/s) và vị trí ban đầu của nó trùng với gốc tọa độ. Vẽ đường biểu diễn khoảng cách, vận tốc, giá tốc của nó theo thời gian t .

1-7. Một điểm chuyển động từ gốc tọa độ, giá tốc có các hình chiếu là $a_x = -a$; $a_y = a$.

Ban đầu vận tốc có các hình chiếu: $V_{Ox} = V_O$, $V_{Oy} = 0$. Xác định quỹ đạo, trị số nhỏ nhất của vận tốc.

II- Bài toán tổng hợp

1-8. Một điểm chuyển động trong mặt phẳng thẳng đứng theo luật:

$$x = 300 \text{ t}$$

$$y = 400 \text{ t} - 5t^2$$

(t: tính bằng giây, và y tính bằng mét).

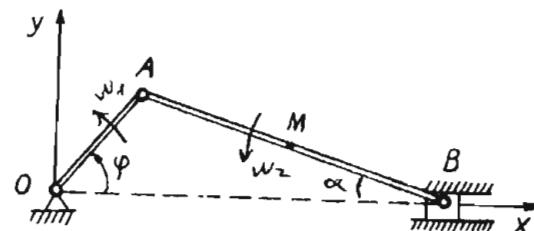
Tìm: a) Vận tốc và giá tốc của điểm ở thời điểm đầu.

b) Độ cao và độ xa của điểm

c) Bán kính cong của quỹ đạo ở điểm đầu và điểm cao nhất.

1-9. Một điểm chuyển động theo đường định ốc có phương trình: $x = \cos 4t$, $y = 2\sin 4t$, $= 2t$ (đơn vị là mét). Tính bán kính cong quỹ đạo.

1-10. Điểm M trên thanh truyền của cơ cấu tay quay thanh truyền OAB với $OA = AB = l = 60 \text{ cm}$; $MB = \frac{1}{3}l$; $\varphi = 4\pi t$ (t tính bằng giây). Tìm quỹ đạo của M. Tính vận tốc, giá tốc và bán kính cong của quỹ đạo tại vị trí $\varphi = 0$.



Hình bài I-5

Chương 2

CHUYỂN ĐỘNG QUAY CỦA VẬT RẮN QUANH TRỤC CỐ ĐỊNH

§2-1. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

Đối với một vật rắn quay quanh trục cố định, ta phải xét chuyển động toàn vật và chuyển động từng điểm thuộc vật. Sau đó ta xét sự truyền chuyển động quay giữa các vật.

I- Xét chuyển động toàn vật

Chọn chiều quay dương quanh trục (nhìn từ chiều dương trục z thấy vật quay ngược chiều kim đồng hồ),

Vị trí của vật được xác định bởi góc định hướng φ giữa mặt phẳng cố định và mặt phẳng gắn cứng với vật cũng qua trục quay (hình 2-1).

1. Phương trình chuyển động của vật:

$$\varphi = \varphi(t) \quad (2-1)$$

2. Vận tốc góc của vật là lượng đại số biểu thị tốc độ và chiều quay của vật, ω đo bằng rad/s (radian/giây):

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad \begin{cases} \bar{\omega} > 0: \text{vật quay theo chiều dương đã chọn để tính } \varphi \\ \bar{\omega} < 0: \text{vật quay theo chiều âm.} \end{cases} \quad (2-2)$$

Gọi n là số vòng/phút thì trị số của vận tốc góc:

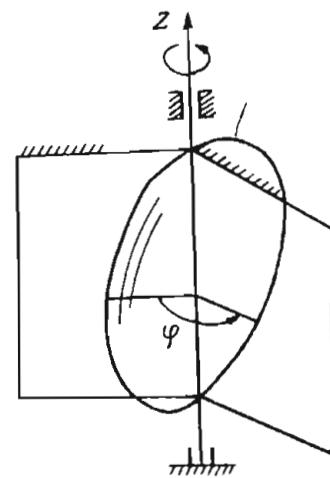
$$\omega = \frac{\pi n}{30} \text{ rad/s} \quad (2-3)$$

3. Gia tốc góc của vật là lượng đại số biểu thị sự biến thiên của $\bar{\omega}$ về trị số và dấu; đo bằng rad/s² (radian/giây²).

$$\bar{\epsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad (2-4)$$

4. Tính chất của chuyển động

$$\text{Xét } \bar{\omega}\bar{\epsilon} \quad \begin{cases} > 0: \text{Vật quay nhanh dần} \\ < 0: \text{Vật quay chậm dần} \end{cases} \quad (2-5)$$



Hình 2-1

5. Chuyển động quay đặc biệt:

Quay đều: $\omega = \omega_0$ suy ra: $\epsilon = 0; \varphi = \omega_0 t$ (2-6)

Quay biến đổi đều: chọn chiều quay ban đầu làm chiều dương và vị trí đầu làm gốc:

$$\epsilon = \text{const}$$

Suy ra: $\omega = \omega_0 \pm \epsilon t$ (2-7)

$$\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\epsilon t^2}{2}$$

(Dấu +: chuyển động nhanh dần đều. Dấu -: chậm dần đều)

II. Xét chuyển động của điểm thuộc vật quay:

1. Phương trình chuyển động của điểm (hình 2-2)

$$S = OM = R\varphi(t) \quad (2-8)$$

2. Vận tốc của điểm:

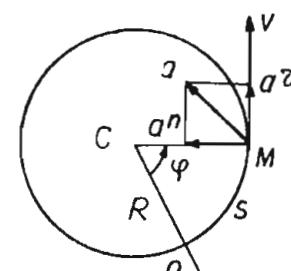
$$\vec{V} = \begin{cases} \perp CM \\ \text{Theo chiều quay} \\ + \text{Trị số } V = R\omega \end{cases} \quad (2-9)$$

3. Gia tốc của điểm có thành phần pháp tuyến và tiếp tuyến:

$$\vec{a} = \vec{a}^n + \vec{a}^t \quad a = \sqrt{(a^n)^2 + (a^t)^2}$$

$$\text{Gia tốc pháp tuyến } \vec{a}^n: \begin{cases} - \text{Hướng vào trục quay} \\ - \text{Trị số } a^n = R\omega^2 \end{cases} \quad (2-10)$$

$$\text{Gia tốc tiếp tuyến } \vec{a}^t: \begin{cases} - \text{Cùng phương với } \vec{V} \\ - \text{Chiều: phù hợp } \epsilon \\ - \text{Trị số } a^t = R\epsilon \end{cases} \quad (2-11)$$



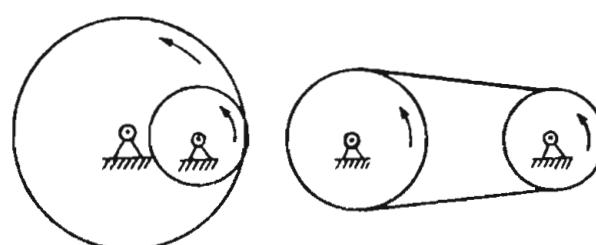
Hình 2-2

II- Truyền chuyển động quay quanh hai trục cố định:

Tỷ số vận tốc góc giữa hai bánh:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1} \quad (2-12)$$

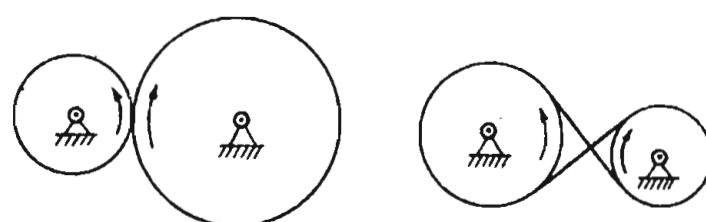
r_i : bán kính; z_i : số răng.



Hình 2-3a

Truyền chuyển động quay cùng chiều
(hình 2-3a).

Truyền chuyển động quay ngược chiều
(hình 2-3b).



Hình 2-3b

§2-2. HƯỚNG DẪN ÁP DỤNG

Các loại bài toán

Đối với vật rắn quay quanh trục cố định, khi biết chuyển động của vật thì hoàn toàn xác định được chuyển động của điểm thuộc vật và ngược lại. Có hai bài toán:

- I. Biết chuyển động của vật (hoặc của điểm thuộc vật), tìm các đặc trưng khác của chuyển động.
- II. Truyền chuyển động quay quanh các trục cố định. Tìm quan hệ chuyển động giữa trục dẫn và trục bị dẫn.

Phương pháp giải bài toán.

Tìm ω, ϵ : áp dụng các công thức (2-2), (2-3), (2-4) hoặc suy từ (2-9), (2-10).

Trường hợp vật quay biến đổi đều áp dụng công thức (2-7).

Tìm tính chất của chuyển động: áp dụng công thức (2-5), (2-6), (2-7).

Tìm vận tốc, gia tốc của điểm thuộc vật: áp dụng các công thức (2-9), (2-10), (2-11).

* Tìm sự liên hệ về chuyển động quay quanh các trục cố định: áp dụng (2-12)

§2-3. NHỮNG BÀI GIẢI MẪU

I- Biết chuyển động của vật (hoặc của điểm thuộc vật), tìm các đặc trưng khác của chuyển động

Thí dụ 2-1. Một trục máy đang quay với vận tốc góc $n = 600$ vòng/phút thì tắt máy và sau 20 giây thì ngừng hẳn. Tìm gia tốc góc và số vòng mà trục còn quay được sau khi tắt máy, giả sử trong quá trình đó trục máy quay biến đổi đều.

Bài giải

Sau khi tắt máy, trục máy quay chậm dần đều. Vì vậy theo (2-7):

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_0 - \epsilon t \\ \varphi &= \omega_0 t - \frac{1}{2} \epsilon t^2\end{aligned}$$

trong đó $\omega_0 = \frac{\pi \cdot n}{30} = 20\pi$ rad/s. Lúc $t = 20$ s thì $\omega = 0, \varphi = \varphi_1$. Vậy thay vào hệ phương trình trên, ta có:

$$0 = 20\pi - \epsilon \cdot 20$$

$$\varphi_1 = 20\pi \cdot 20 - \epsilon \frac{20^2}{2}$$

Giải hệ phương trình này ta được:

$$\epsilon = \pi \text{ rad/s}^2 \quad \varphi_1 = 200\pi \text{ rad.}$$

Vậy số vòng trục máy còn quay được là:

$$N = \frac{\varphi_1}{2\pi} = 100 \text{ vòng}$$

Thí dụ 2-2. Thanh OA quay quanh trục O theo luật $\varphi = \frac{\pi}{6} t^3$. Tìm tính chất chuyển động của thanh OA và vận tốc, gia tốc của điểm A lúc thanh quay được 18 vòng.

Biết OA = l = 20 cm (hình 2-4).

Bài giải

1) Trước hết ta cần tìm vận tốc góc và gia tốc của thanh. Theo (2-2) và (2-4):

$$\bar{\omega} = \dot{\varphi} = \frac{\pi}{2} t^2$$

$$\bar{\varepsilon} = \ddot{\varphi} = \pi t$$

Gọi t_1 là thời điểm mà thanh quay được 18 vòng, tức là quay được góc $\varphi_1 = 18 \cdot 2\pi = 36\pi$. Từ phương trình chuyển động ta có:

$$36\pi = \frac{\pi}{6} t^3$$

Rút ra: $t_1 = \sqrt[3]{36 \cdot 6} = 6 \text{ s.}$

Üng với lúc đó: $\bar{\omega}_1 = \frac{\pi}{2} \cdot 6^2 = 18\pi \text{ rad/s}$

$$\bar{\varepsilon}_1 = 6\pi \text{ rad/s}^2$$

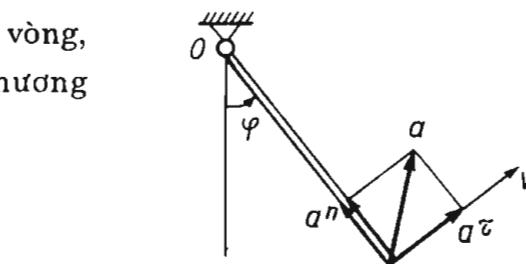
$\bar{\omega}_1, \bar{\varepsilon}_1 > 0$: vật quay nhanh dần.

2) Tìm vận tốc, gia tốc điểm A. Theo (2-9), (2-10) và (2-11):

$$V = l\bar{\omega}_1 = 0,2 \cdot 18\pi = 11,3 \text{ m/s}$$

$$a^\tau = l\bar{\varepsilon}_1 = 0,2 \cdot 6\pi = 3,8 \text{ m/s}^2$$

$$a^n = l\bar{\omega}_1^2 = 0,2 \cdot (18\pi)^2 = 648 \text{ m/s}^2$$



Hình 2-4

Các vectơ vẽ ở hình 2-4.

II- Truyền chuyển động quay:

Thí dụ 2-3. Cơ cấu tời như hình 2-5. Do hám bị hỏng, nên vật M rơi xuống với qui luật:

$$x = 3t^2$$

(x tính bằng m; t tính bằng giây).

Tìm vận tốc và gia tốc mút A của tay quay lúc $t = 2$ giây. Biết đường kính của trống là $d = 40 \text{ cm}$, độ dài tay quay $l = 40 \text{ cm}$, số răng của bánh 1 và 2 là $z_1 = 72$; $z_2 = 24$ (hình 2-5).

Bài giải

1) Trước hết xét vật M.

$$\text{Vận tốc } V_M = \dot{x} = 6t \text{ cm/s}$$

Gia tốc $a_M = \ddot{x} = 6 \text{ cm/s}^2$

2) Bánh 1 chuyển động được nhờ dây cuốn quanh trống. Gọi N là điểm trên vành trống, ta có:

$$V_N = V_M = 6t \text{ cm/s}$$

$$a_N^t = a_M = 6 \text{ cm/s}^2$$

$$\text{Suy ra vận tốc góc: } \omega_1 = \frac{V_N}{d/2} = \frac{6t}{20} = 0,3t \text{ rad/s}$$

$$\text{Gia tốc góc: } \epsilon_1 = \frac{a_N^t}{d/2} = \frac{6}{20} = 0,3 \text{ rad/s}^2$$

Chiều của $\bar{\omega}_1, \bar{\epsilon}_1$ như hình 2-5.

3) Bánh 2 quay được nhờ ăn khớp với bánh 1.

Trị số vận tốc góc của bánh 2 tính theo công thức:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\epsilon_1}{z_2}; \quad \omega_2 = \frac{\epsilon_1}{z_2} \omega_1 = \frac{72}{24} = 0,3t = 0,9 \text{ t rad/s}$$

Suy ra gia tốc góc: $\epsilon_2 = 0,9 \text{ rad/s}^2$

Lúc $t = 2s$ thì $\omega_2 = 1,8 \text{ rad/s}, \epsilon_2 = 0,9 \text{ rad/s}^2$

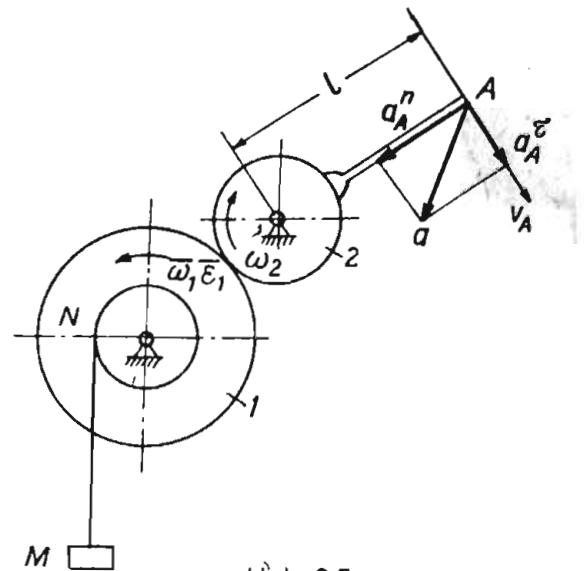
4) Biết chuyển động của bánh 2, xác định được chuyển động điểm A:

$$\text{Vận tốc } V_A = l\omega_2 = 40 \cdot 1,8 = 72 \text{ cm/s}$$

$$\text{Gia tốc tiếp tuyến } a_A^t = l\epsilon_2 = 40 \cdot 0,9 = 36 \text{ cm/s}^2$$

$$\text{Gia tốc pháp tuyến } a_A^n = l\omega_2^2 = 40 \cdot (1,8)^2 = 130 \text{ cm/s}^2$$

$$\text{Gia tốc } a_A = \sqrt{(36)^2 + (130)^2} = 135 \text{ cm/s}^2$$



Hình 2-5

§2-4. BÀI TẬP

I- Biết chuyển động của vật (hoặc điểm thuộc vật), tìm các đặc trưng khác của chuyển động

2-1) Rôto của tuabin quay nhanh đều, ở thời điểm t_1 và t_2 có vận tốc tương ứng là $n_1 = 1300 \text{ vòng/phút}$ và $n_2 = 4000 \text{ vòng/phút}$. Xác định gia tốc góc ϵ và số vòng quay mà rôto quay được trong thời gian $t = t_2 - t_1 = 30s$.

2-2) Một trục máy đang quay với tốc độ $n = 1200 \text{ vòng/phút}$ thì hãm. Sau khi hãm trục máy quay được 80 vòng thì dừng hẳn.

Tìm thời gian hãm, biết rằng trục quay chậm dần đều.

2-3. Vật quay quanh trục cố định theo phương trình

$$\varphi = 1,5 t^2 - 4t \quad (\varphi \text{ - radian, } t \text{ - giây})$$

Xác định:

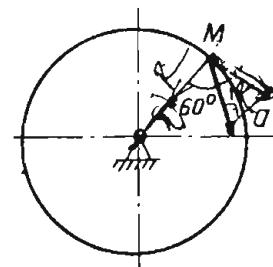
- 1) Tính chất của chuyển động ở các thời điểm $t_1 = 1s$; $t_2 = 2s$
- 2) Vận tốc và gia tốc của điểm cách trục quay một khoảng $r = 0,2 m$ ở những thời điểm trên.

2-4. Quả cầu A treo ở đầu một sợi dây có chiều dài $l = 398 cm$, dao động trong mặt phẳng thẳng đứng theo luật:

$$\varphi = \frac{\pi}{8} \sin \frac{\pi t}{2}, (\varphi - \text{radian}, t - \text{giây})$$

Xác định:

- 1) Thời điểm đầu tiên từ khi bắt đầu chuyển động để gia tốc pháp của quả cầu bằng không.



Hình bài 2-6

- 2) Thời điểm đầu tiên để gia tốc tiếp bằng không.
- 3) Gia tốc toàn phần lúc $t = 2s$.

2-5. Một vật quay nhanh dần đều từ trạng thái nghỉ. Lúc $t = 1s$, điểm cách trục quay một khoảng $R_1 = 2m$, có gia tốc $a = 2\sqrt{2} m/s^2$. Tìm gia tốc của điểm cách trục quay một khoảng $R = 4 m$, lúc $t = 2 s$.

2-6. Gia tốc một điểm trên vành vô lăng làm với bán kính góc 60° . Gia tốc tiếp của điểm ấy ở thời điểm khảo sát là $a^t = 10\sqrt{3} m/s^2$ (hình bài 2-6). Tìm gia tốc pháp của điểm cách trục quay một khoảng $r = 0,5 m$. Bán kính vô lăng $R = 1 m$.

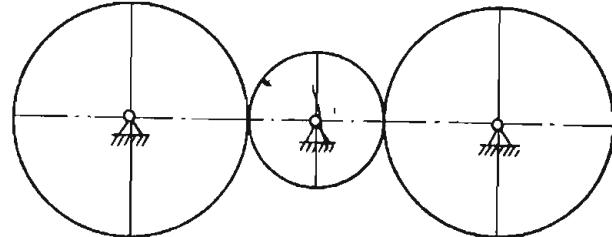
II- Truyền chuyển động quay quanh các trục cố định

2-7. Ba bánh răng ăn khớp với nhau (hình bài 2-7). Bán kính các bánh là $r_1 = 20 cm$, $r_2 = 12 cm$, $r_3 = 15 cm$. Bánh đầu quay với vận tốc góc $n_1 = 90$ vòng/phút. Tìm vận tốc góc thứ ba.

2-8. Cơ cấu như hình bài 2-8. Chuyển động từ thanh 1 truyền vào bánh răng 2, bánh răng 3 lắp cứng cùng trục với bánh răng 2 và ăn khớp với bánh răng 4 có mang kim (hình vẽ).

Xác định vận tốc góc của kim nếu thanh 1 chuyển động theo phương trình:

$$x = dsinkt$$



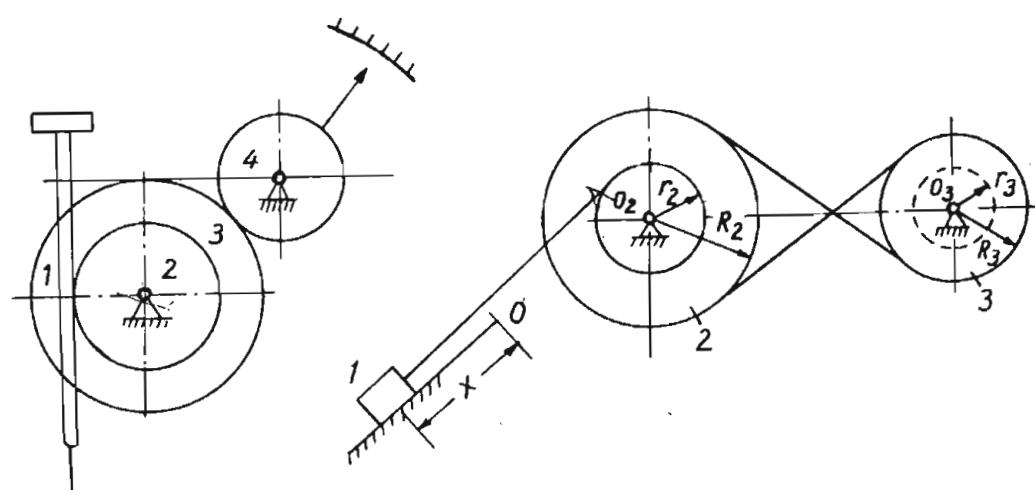
Hình bài 2-7

bán kính các bánh răng tương ứng là r_2 , r_3 và r_4 .

2-9. Cơ cấu như hình bài 2-9. Vật 1 chuyển động theo luật $x = 2 + 70t^2$ (x tính bằng cm; t giây); $R_2 = 50 cm$; $r_2 = 30 cm$; $R_3 = 60 cm$. Tính vận tốc góc, gia tốc góc của bánh 3 và vận tốc, gia tốc điểm M cách trục quay 1 khoảng $r_3 = 40 cm$ lúc vật nặng 1 di chuyển được một đoạn bằng 40 cm.

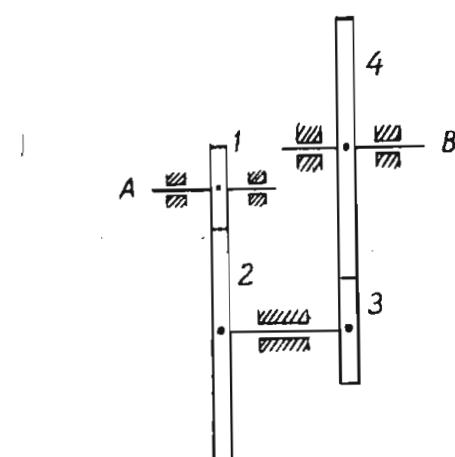
2-10. Hộp biến tốc có các bánh răng với số răng tương ứng là $z_1 = 10$; $z_2 = 60$; $z_3 = 12$; $z_4 = 70$.

Tìm tỷ số truyền động của hai trục A và B.



Hình bài 2-8

Hình bài 2-9.



Hình bài 2-10.

Chương 3

CHUYỂN ĐỘNG SONG PHẲNG CỦA VẬT RẮN

§ 3-1. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

Chuyển động song phẳng của vật rắn là chuyển động mà mỗi điểm thuộc vật chỉ chuyển động trong một mặt phẳng song song với mặt phẳng cố định.

I- Phân tích chuyển động song phẳng

1. Chuyển động song phẳng có thể phân tích thành chuyển động tịnh tiến cùng với diểm cực A và chuyển động quay xung quanh cực đó (hình 3-1).

2. Phương trình chuyển động:

$$\begin{aligned} X_a &= x_1(t) \\ Y_A &= y_1(t) \\ \varphi &= \varphi(t) \end{aligned} \quad (3-1)$$

AB là đoạn thẳng bất kỳ thuộc vật.

3. Các yếu tố đặc trưng cho chuyển động song phẳng là: vận tốc, gia tốc cực A và vận tốc góc, gia tốc góc của vật.

$$\vec{V}_A(\dot{x}_1, \dot{y}_1); \vec{a}_A(\ddot{x}_1, \ddot{y}_1); \bar{\omega}_s = \dot{\varphi}; \bar{\epsilon}_s = \ddot{\varphi}$$

trong đó $\bar{\omega}_s, \bar{\epsilon}_s$ không phụ thuộc vào việc chọn điểm cực.

II- Vận tốc của điểm thuộc vật.

1. Quan hệ vận tốc hai điểm thể hiện bằng công thức:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA} \quad (3-2)$$

trong đó $\vec{V}_{BA} \perp BA$, chiều của \vec{V}_{BA} phụ thuộc $\bar{\omega}_s$, trị số $V_{BA} = BA \cdot \bar{\omega}_s$ (hình 3-2).

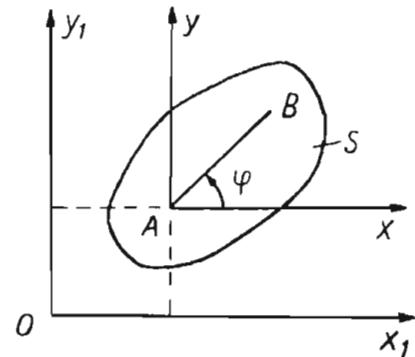
2. Công thức hình chiếu vận tốc.

Chiếu hai véc của (3-2) lên phương AB, ta có:

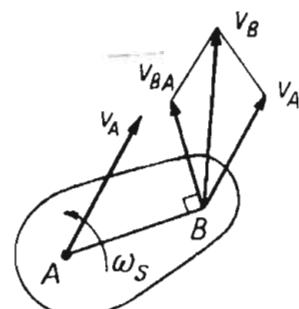
$$H.ch_{AB} \vec{V}_B = H.ch_{AB} \cdot \vec{V}_A \quad (3-3)$$

3. Tâm vận tốc tức thời P

Tại mỗi thời điểm hình phẳng có một điểm P, tại đó $V_p = 0$ vận tốc mọi điểm phân bố giống như hình phẳng đang quay quanh P với vận tốc góc ω_s :



Hình 3-1

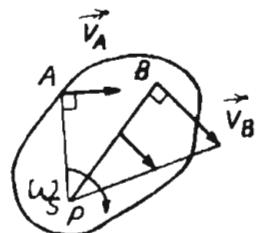


Hình 3-2

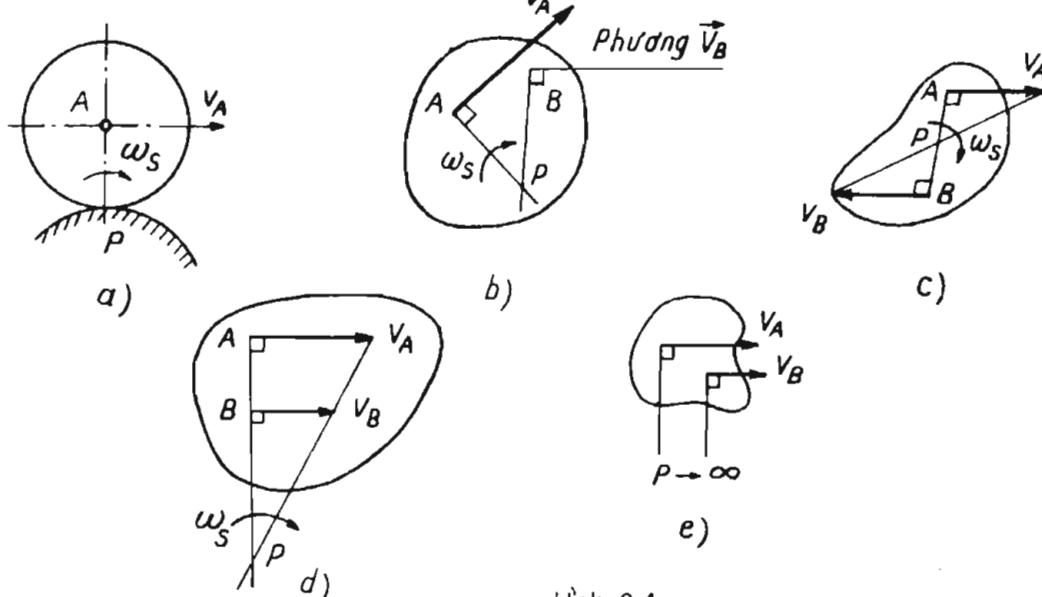
$$V_B = PB \cdot \omega_s; V_A = PA \cdot \omega_s \text{ (hình 3-3)}$$

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{PB}{PA} \quad (3-4)$$

* Phương pháp xác định P:
(xem hình 3-4)



Hình 3-3



Hình 3-4

III. Gia tốc của điểm thuộc vật.

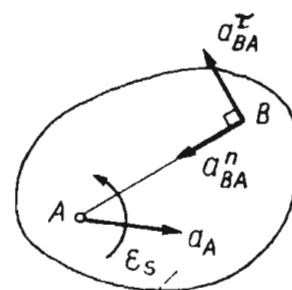
1. Quan hệ gia tốc hai điểm thể hiện bằng công thức:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau \quad (3-5)$$

trong đó:

$$\vec{a}_{BA}^n \left\{ \begin{array}{l} \text{hướng từ B đến A} \\ \vec{a}_{BA}^n = BA \cdot \omega_s^2 \end{array} \right.$$

$$\vec{a}_{BA}^\tau \left\{ \begin{array}{l} \perp BA \\ \text{chiều: phù hợp } \varepsilon_s, \text{ hoặc giả thiết} \\ \vec{a}_{BA}^\tau = BA \cdot \varepsilon_s \text{ (hình 3-5)} \end{array} \right.$$



Hình 3-5

2. Chú ý

* Nếu quỹ đạo của A và B là cong, thì tiếp tục phân tích:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_B^n + \vec{a}_B^\tau; \vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau \quad (3-6)$$

* Đối với đĩa phẳng (bánh xe, bánh răng, ròng rọc động), gia tốc góc của đĩa tìm được bằng cách lấy đạo hàm vận tốc góc của đĩa theo thời gian:

$$\dot{\varepsilon}_s = \frac{d\omega_s}{dt} \quad (3-7)$$

Đặc biệt đối với đĩa phẳng lăn không trượt (hình 3-4a) ở dây AP = R = const:

$$\dot{\epsilon}_s = \frac{a_A^\tau}{R} \quad (3-8)$$

Vì khi này: $\omega_s = \frac{V_A}{PA} = \frac{V_B}{R}$ nên:

$$\dot{\epsilon}_s = \frac{d\omega_s}{dt} = \frac{1}{R} \frac{dV_A}{dt} = \frac{a_A^\tau}{R}$$

§3-2. HƯỚNG DẪN ÁP DỤNG

Các loại bài toán.

Có 3 loại bài toán. Trong mỗi loại thường phải tìm ω_s , ϵ_s , \vec{V}_B , \vec{a}_B . Ở đây B là điểm bất kỳ trên hình phẳng.

I. Biết vận tốc, gia tốc điểm A và tâm vận tốc P với AP = const.

Loại này thường gặp ở cơ cấu đĩa phẳng - thí dụ hình 3-6a.

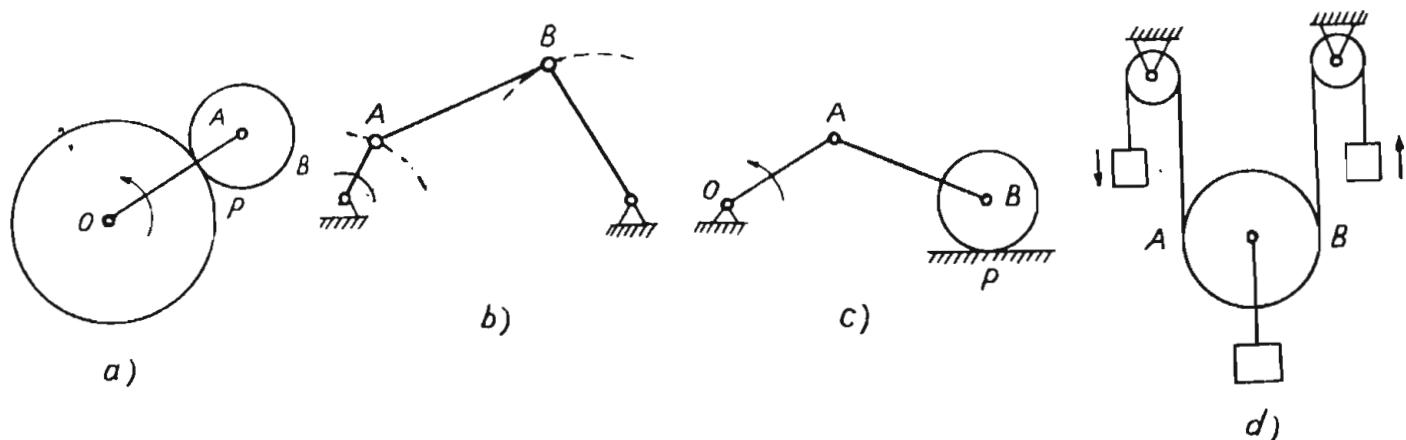
II. Biết vận tốc, gia tốc một điểm và quỹ đạo điểm khác.

Loại này thường gặp ở cơ cấu thanh - thí dụ hình 3-6b.

III. Bài toán hỗn hợp

Biết đặc trưng chuyển động của hai điểm:

Loại này thường gặp ở cơ cấu hỗn hợp gồm thanh và đĩa lăn không trượt, hoặc tấm, đĩa chuyển động song phẳng, thí dụ hình 3-6c, 3-6d.



Hình 3-6

Phương pháp giải bài toán

1. Phân tích chuyển động các khâu của cơ cấu (tịnh tiến; quay; song phẳng). Trong mỗi khâu song phẳng cần biết đặc trưng chuyển động (vận tốc, gia tốc, quỹ đạo) của hai điểm.
2. Vận tốc. Cần phải xác định vận tốc góc các khâu và vận tốc điểm bất kỳ, dựa vào một trong ba cách sau:

a) Tâm vận tốc tức thời P: xác định như ở hình 3-4 và công thức (3-4).

b) Hình chiếu vận tốc: áp dụng công thức (3-3).

c) Quan hệ vận tốc: áp dụng công thức (3-2).

3. Gia tốc. Cần phải xác định gia tốc góc các khâu và gia tốc điểm bất kỳ. Theo trình tự: chọn 1 điểm làm cực và viết biểu thức gia tốc (3-5) với chú ý (3-6), (3-7), (3-8).

Vẽ các vectơ gia tốc.

Trường hợp có hai vectơ nào đó chỉ biết phương thì chiếu của chúng được giả thiết.

Trường hợp có một vectơ chưa biết phương thì phân tích vectơ đó ra hai thành phần vuông góc, chiếu của chúng được giả thiết.

Tính trị số gia tốc chưa biết bằng cách chiếu hai vế của (3-5) lên hai trục tùy ý sao cho triệt tiêu bớt một ẩn.

Chú ý. Đối với đĩa phẳng: tìm gia tốc góc của đĩa từ (3-7), đối với đĩa phẳng lăn không trượt từ (3-8). Đối với hình phẳng khác, tìm gia tốc góc của hình từ thành phần \vec{a}_{BA}^r trong (3-5).

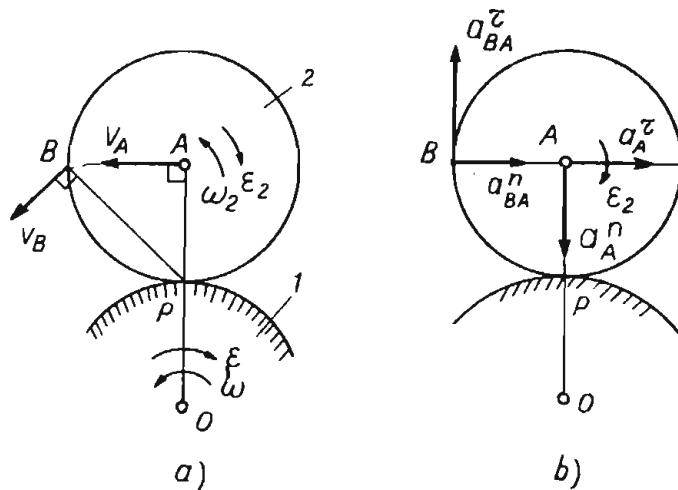
§3-3. NHỮNG BÀI GIẢI MẪU

I- Viết vận tốc, gia tốc điểm A và tâm vận tốc P với $AP = \text{const}$ (cơ cấu đĩa lăn không trượt).

Thí dụ 3-1. Tay quay OA quay xung quanh trục O làm bánh 2 lăn không trượt theo vành bánh 1 cố định (hình 3-7). Biết $r_2 = 0,2$ m và $r_1 = 0,3$ m. Tại thời điểm tay quay có vận tốc góc $\omega = 1$ rad/s và gia tốc góc $\varepsilon = 4$ rad/s². Hãy tìm:

Vận tốc góc bánh 2 và vận tốc điểm B trên vành bánh 2 ($AB \perp OA$).

Gia tốc góc bánh 2 và gia tốc điểm B.



Hình 3-7

Bài giải

1. Phân tích chuyển động các khâu

Tay quay OA chuyển động quay, bánh 2 chuyển động song phẳng, điểm tiếp xúc chính là tâm vận tốc tức thời P. Đối với bánh 2 ta biết \vec{V}_A , \vec{a}_A và P với $AP = \text{const}$.

2. Vận tốc

Dùng phương pháp tâm vận tốc tức thời.

Xác định tâm vận tốc: điểm tiếp xúc giữa hai bánh là tâm vận tốc P.

Xác định vận tốc góc của bánh và vận tốc điểm B:

$$\text{Vận tốc gó/ bánh 2: } \omega_2 = \frac{V_A}{PA} = \frac{OA \cdot \omega}{r_2} = \frac{(r_1 + r_2)}{r_2} \omega = 2,5 \text{ rad/s}$$

$\bar{\omega}_2$ ngược chiều kim đồng hồ.

$$\text{Vận tốc điểm B: } V_B = BP \cdot \omega_2 = r_2 \sqrt{2} \omega_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ m/s}$$

V_B có chiều như hình 3-7a.

3. Gia tốc

Vì $AP = \text{const}$ (cơ cấu bánh lăn không trượt) nên theo (3-8) ta có gia tốc góc bánh 2:

$$\epsilon_2 = \frac{a_A^t}{AP} = \frac{OA \cdot \epsilon}{AP} = \frac{(r_1 + r_2)\epsilon}{r_2} = 10 \text{ rad/s}^2$$

$\bar{\epsilon}_2$ thuận chiều kim đồng hồ.

Chọn điểm A làm cực, biểu thức gia tốc:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^t + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^t \quad (\text{a})$$

\vec{a}_A^n hướng về O, $a_A^n = OA \cdot \omega^2 = 0,5 \text{ m/s}^2$

$\vec{a}_A^t \perp OA$, chiều phù hợp $\bar{\epsilon}_2$; $a_A^t = OA \cdot \epsilon = 2 \text{ m/s}^2$

\vec{a}_{BA}^n hướng từ B về A; $a_{BA}^n = BA \cdot \omega_2^2 = 1,25 \text{ m/s}^2$

$\vec{a}_{BA}^t \perp BA$ chiều phù hợp $\bar{\epsilon}_2$; $a_{BA}^t = BA \cdot \epsilon_2 = 2 \text{ m/s}^2$

Vẽ các vectơ gia tốc như hình 3-7b.

Tính a_B : \vec{a}_B chưa biết phương chiều, được phân tích làm hai thành phần vuông góc. Trị số tìm được bằng cách chiếu hai vế của (a) lên hai trục vuông góc:

$$a_{Bx} = a_A^t + a_{BA}^n = 3,25 \text{ m/s}^2$$

$$a_{By} = -a_A^n + a_{BA}^t = 1,5 \text{ m/s}^2$$

$$a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2} = 3,58 \text{ m/s}^2$$

II- Biết vận tốc, gia tốc một điểm và quí đạo điểm khác (Cơ cấu thanh)

Thí dụ 3-2. Có cơ cấu bốn khâu như hình 3-8. Cho: $OA = r$, $AB = 2r$; $O_1B = 2r\sqrt{3}$. Tại thời điểm thanh OA thẳng đứng, các điểm O, B, O_1 cùng nằm trên đường ngang, khi đó tay quay có vận tốc góc ω_0 và gia tốc góc $\epsilon_0 = \omega_0^2 \sqrt{3}$. Hãy xác định vận tốc góc và gia tốc góc của thanh AB lúc đó.

Bài giải

1. Phân tích chuyển động.

Thanh OA và O_1B quay xung quanh các trục cố định. Thanh AB chuyển động song phẳng. Đối với thanh này, ta biết được đặc trưng chuyển động của hai điểm: \vec{V}_A , \vec{a}_A và quí đạo B.

2. Vận tốc.

Có thể dùng các phương pháp tính vận tốc sau:

a) Tâm vận tốc tức thời: Xác định tâm P, biết $\vec{V}_A \perp OA$; $\vec{V}_B \perp O_1B$, do đó từ A và B kẻ các đường tương ứng vuông góc với \vec{V}_A và \vec{V}_B , giao điểm của hai đường này là tâm vận tốc tức thời P, ở đây P trùng với O (hình 3-8).

Xác định vận tốc góc các khâu và vận tốc các điểm:

Điểm A thuộc OA nên: $V_A = r\omega_0$

Mặt khác A thuộc AB nên: $V_A = PA \cdot \omega_{AB}$

Do đó vận tốc góc khâu AB là:

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{PA} = \frac{r\omega_0}{r} = \omega_0$$

Điểm B thuộc AB nên:

$$V_B = PB \quad \omega_{AB} = r\sqrt{3}\omega_0$$

Mặt khác, B thuộc BO₁ nên: $V_B = BO_1 \cdot \omega_{BO_1}$

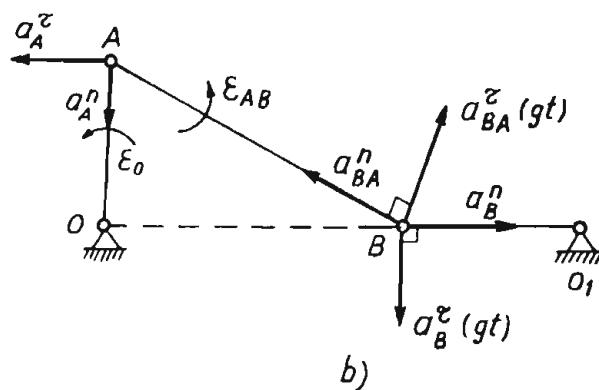
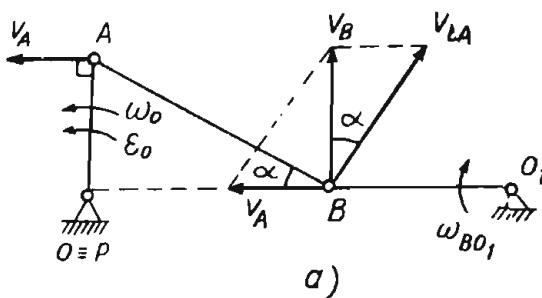
Do đó vận tốc góc khâu BO₁ là:

$$\omega_{BO_1} = \frac{V_B}{BO_1} = \frac{r\sqrt{3}\omega_0}{2r\sqrt{3}} = \frac{\omega_0}{2}$$

b) Có thể dùng quan hệ vận tốc hai điểm:

Chọn điểm A có chuyển động đã biết làm điểm cực.

Hình 3-8



Biểu thức vận tốc là:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA} \quad (a)$$

$$\vec{V}_A \perp OA, V_A = r\omega_0$$

$$\vec{V}_{BA} \perp AB, V_{BA} = AB \cdot \omega_{AB} \text{ chưa biết.}$$

$$\vec{V}_B \perp O_1B, V_B = BO_1 \cdot \omega_{BO_1} \text{ chưa biết.}$$

Vẽ các vectơ vận tốc, đưa vectơ \vec{V}_A về B (hình 3-8a).

Tìm trị số V_{BA} và V_B : trị số V_A , V_{BA} , V_B là độ dài ba cạnh của tam giác vuông ($\alpha = 30^\circ$) nên:

$$V_{BA} = \frac{V_A}{\sin\alpha} = 2r\omega_0; \quad V_B = \frac{V_A}{\tan\alpha} = r\sqrt{3}\omega_0$$

$$\text{Suy ra: } \omega_{AB} = \frac{V_{BA}}{AB} = \omega_0; \quad \omega_{BO_1} = \frac{V_B}{BO_1} = \frac{\omega_0}{2}$$

c) Có thể dùng công thức hình chiếu vận tốc để tìm \vec{V}_B :

Ta có: $H.ch_{AB} \vec{V}_B = H.ch_{AB} \vec{V}_A$ hay là: $V_B \cos 60^\circ = V_A \cos 30^\circ$

$$\text{Suy ra: } V_B = r\sqrt{3} \cdot \omega_0$$

3. Gia tốc

Chọn điểm A làm cực, ta có biểu thức gia tốc: $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^t$

Do quỹ đạo của A và B là tròn nên:

$$\vec{a}_B^n + \vec{a}_B^t = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^t + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^t \quad (b)$$

$$\vec{a}_B^n \text{ hướng về } O_1, a_B^n = BO_1 \cdot \omega_{BO_1}^2 = \frac{r\sqrt{3}}{2} \omega_0^2$$

$$\vec{a}_A^n \text{ hướng về } O, a_A^n = OA \cdot \omega_0^2 = r\omega_0$$

$$\vec{a}_{BA}^n \text{ hướng từ B về A; } a_{BA}^n = AB \cdot \omega_{AB}^2 = 2r\omega_0^2.$$

$\vec{a}_B^t \perp O_1B$, chiều giả thiết, $a_B^t = BO_1 \cdot \varepsilon_{BO_1}$ chưa biết

$\vec{a}_{BA}^t \perp BA$, chiều giả thiết, $a_{BA}^t = BA \cdot \varepsilon_{AB}$ chưa biết.

Vẽ các vectơ gia tốc như hình 3-8b.

Tính a_{BA}^t : chiếu hai véc tơ của (b) lên trục OO_1 ta được

$$a_B^n = -a_A^t \quad a_{BA}^n \cos 30^\circ + a_{BA}^t \cos 60^\circ$$

$$\text{giải ra: } a_{BA}^t = 5\sqrt{3} r\omega_0^2 > 0.$$

\vec{a}_{BA}^t chọn đúng chiều, từ đó tìm được gia tốc góc thanh AB:

$$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{BA}^t}{AB} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \omega_0^2$$

$\bar{\varepsilon}_{AB}$ ngược chiều kim đồng hồ.

Nếu chiếu (b) lên trục vuông góc với O_1B ($\perp O_1B$) ta sẽ tìm được a_B^t và do đó tìm được gia tốc góc thanh O_1B :

$$\varepsilon_{O_1B} = \frac{a_B^t}{O_1B}$$

III- BÀI TOÁN HỒN HỢP (cơ cấu loại đĩa và thanh).

Thí dụ 3-3. Tay quay OA quay đều quanh trục O với vận tốc góc ω_0 làm bánh 1 lăn không trượt theo vành ngoài bánh 2 cố định. Hai bánh cùng bán kính r. Thanh truyền BD và cản lắc DC cùng độ dài l. Khi $BD \perp OA$, góc $\widehat{BDC} = 45^\circ$ (hình 3-9). Xác định:

Các vận tốc góc $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_{BD}, \bar{\omega}_{DC}$.

Gia tốc điểm B.

Bài giải.

1. Phân tích chuyển động.

Các thanh OA và CD chuyển động quay quanh trục cố định. Bánh 1 và thanh BD chuyển động song phẳng.

2. Vận tốc.

Dùng phương pháp tâm vận tốc tức thời.

a) Xét bánh 1 (bánh lăn không trượt).

Xác định tâm vận tốc: điểm tiếp xúc giữa hai bánh là tâm vận tốc tức thời P_1 của bánh 1.

Xác định vận tốc góc bánh 1 và vận tốc điểm B:

Vận tốc góc bánh 1:

$$\omega_1 = \frac{V_A}{P_1 A} = \frac{2r\omega_0}{P_1 A} = 2\omega_0$$

$\bar{\omega}_1$ thuận chiều kim đồng hồ.

Vận tốc điểm B:

$$V_B = P_1 B \cdot \omega_1 = 2r\sqrt{2} \omega_0;$$

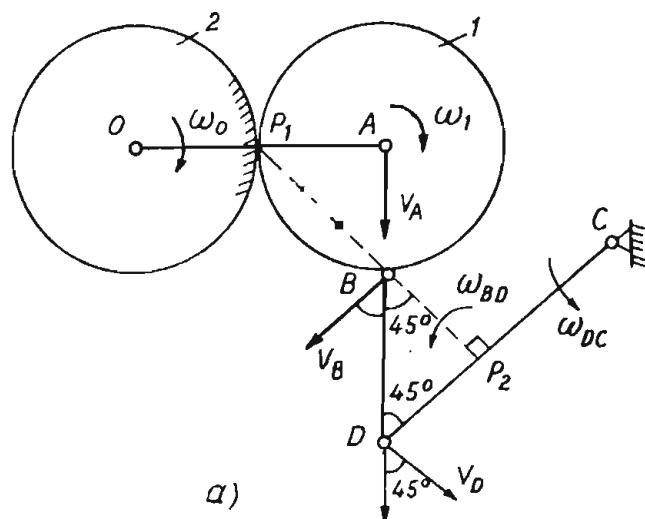
$\vec{V}_B \perp P_1 B$, chiều phù hợp $\bar{\omega}_1$.

b) Xét thanh BD, biết \vec{V}_B và quỹ đạo D (vòng tròn tâm C).

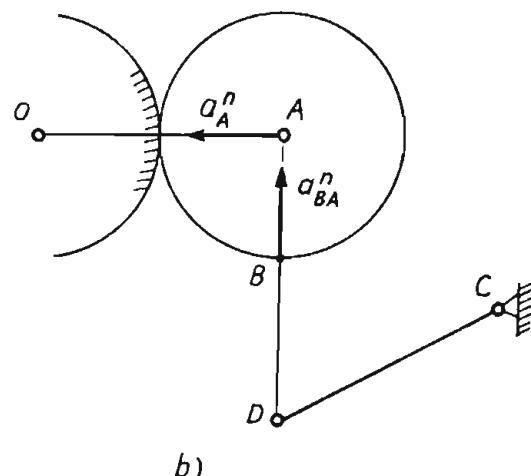
Xác định tâm vận tốc tức thời.

Từ B và D kẻ các đường tương ứng vuông góc với \vec{V}_B và \vec{V}_D , giao điểm của hai đường đó là tâm vận tốc tức thời P_2 của thanh DB. Ở đây $BP_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}l$.

a)



b)



Hình 3-9

Xác định vận tốc góc của thanh BD và vận tốc điểm D:

Vận tốc góc thanh BD: $\omega_{BD} = \frac{V_B}{P_2 B} = \frac{4r}{l} \omega_0$; $\bar{\omega}_{BD}$ ngược chiều kim đồng hồ.

Áp dụng hệ quả hình chiếu tìm V_D :

$$H.ch_{DB} \vec{V}_B = H.ch_{DB} \vec{V}_D$$

$$\text{hay: } V_B \cos 45^\circ = V_D \cos 45^\circ$$

$$V_D = V_B = 2r \sqrt{2} \omega_0; \vec{V}_D \text{ có chiều như ở hình 3-9a.}$$

Suy ra vận tốc góc thanh DC:

$$\omega_{DC} = \frac{V_D}{DC} = \frac{2r\sqrt{2}}{l} \omega_0; \bar{\omega}_{DC} \text{ ngược chiều kim đồng hồ.}$$

3. Gia tốc. Xét bánh 1:

Vì $AP_1 = \text{const}$ (cơ cấu bánh lăn không trượt) nên theo (3-8) ta có giá tốc góc bánh 1:

$$\epsilon_1 = \frac{\vec{a}_A^\tau}{r} = 0; (\text{OA quay đều})$$

Chọn điểm A làm cực, ta có biểu thức giá tốc:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^n + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau \quad (\text{a})$$

\vec{a}_A^n hướng từ A đến O; $a_A^n = OA\omega_0^2 = 2r\omega_0^2$

\vec{a}_{BA}^n hướng từ B đến A; $a_{BA}^n = BA\cdot\omega_1^2 = 4r\cdot\omega_0^2$

$\vec{a}_{BA}^\tau \perp BA$; $a_{BA}^\tau = BA \cdot \epsilon_1 = 0$

Vẽ các vectơ giá tốc: (hình 3-9b).

Tính a_B : Vì $\vec{a}_A^n \perp \vec{a}_{BA}^n$ nên:

$$a_B = \sqrt{(a_A^n)^2 + (a_{BA}^n)^2} = 2\sqrt{5} r\omega_0^2$$

Chú ý: Muốn tìm ϵ_{DB} và ϵ_{DC} ta xét thanh DB và chọn điểm B làm cực:

$$\vec{a}_D^n + \vec{a}_D^\tau = \vec{a}_B + \vec{a}_{DB}^n + \vec{a}_{DB}^\tau$$

trong đó: $a_{DB}^n = DB \cdot \epsilon_{DB}$; $a_D^\tau = DC \cdot \epsilon_{DC}$

Thí dụ 3-4. Hệ ròng rọc như hình 3-10. Ở thời điểm khảo sát, vật I được nâng lên với vận tốc \vec{V}_1 , vật II hạ xuống với vận tốc \vec{V}_2 , gia tốc \vec{a}_1 . Tìm vận tốc góc, vận tốc và giá tốc tâm C của ròng rọc di động bán kính R và giá tốc điểm B trên vành của ròng rọc di động.

Bài giải

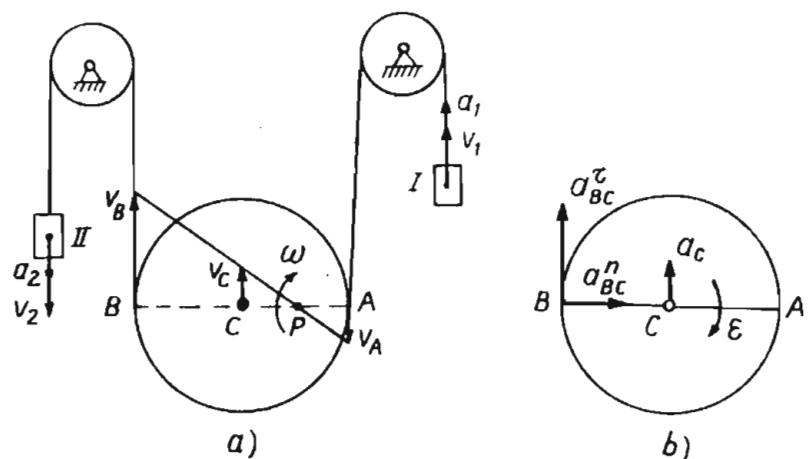
1. Phân tích chuyển động.

Vật I và II chuyển động tịnh tiến, hai ròng rọc quay xung quanh trục cố định. Ròng rọc di động chuyển động song phẳng. Khi không có trượt giữa dây và ròng rọc thì trị số vận tốc của vật nặng bằng trị số vận tốc điểm tiếp xúc; trị số giá tốc vật nặng bằng trị số giá tốc tiếp của điểm tiếp xúc, nghĩa là:

$$V_1 = V_a; a_1 = a_A^\tau;$$

$$V_2 = V_B; a_2 = a_B^\tau$$

2. Vận tốc. Trên ròng rọc động ta biết vận tốc hai điểm do đó xác định được tâm vận tốc tức thời P (hình 3-10a).



Hình 3-10

Vận tốc góc của ròng rọc là:

$$\omega = \frac{V_B}{PB} = \frac{V_A}{PA} = \frac{V_B + V_A}{PB + PA} = \frac{V_1 + V_2}{2R} \quad (\text{a})$$

Vận tốc tâm C. Do tính chất đồng dạng (hình 3-10a) ta có:

$$V_C = \frac{V_B - V_A}{2} = \frac{V_2 - V_1}{2} \quad (b)$$

Nếu $V_2 > V_1$, tâm C đang được nâng lên; nếu $V_2 < V_1$ thì tâm C sẽ hạ xuống, nếu $V_2 = V_1$ thì $V_C = 0$

3. Gia tốc

Biểu thức (a) đúng cho bất kỳ thời điểm nào, nên theo (3-7) ta có gia tốc góc của ròng rọc:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2R} \frac{d}{dt} (V_1 + V_2) = \frac{a_1 + a_2}{2R}$$

$\bar{\epsilon}$ thuận chiều kim đồng hồ.

Vì C chuyển động thẳng nên gia tốc cùng phương với vận tốc, từ biểu thức (b) ta có:

$$a_C = \frac{d}{dt} V_C = \frac{d}{dt} \left(\frac{V_2 - V_1}{2} \right) = \frac{a_1 - a_2}{2}$$

Nếu $a_2 > a_1$ thì \vec{a}_C hướng lên.

Chọn điểm C làm cực, ta có gia tốc điểm B:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_C + \vec{a}_{BC}^n + \vec{a}_{BC}^\tau \quad (c)$$

\vec{a}_{BC}^n hướng từ B đến C;

$$a_{BC}^n = BC \cdot \omega^2 = R \cdot \left(\frac{V_1 + V_2}{2R} \right)^2 = \frac{(V_1 + V_2)^2}{4R}$$

$\vec{a}_{BC}^\tau \perp BC$, chiều phù hợp $\bar{\epsilon}$;

$$a_{BC}^\tau = BC \cdot \frac{a_1 + a_2}{2}$$

Các vectơ được vẽ như hình 3-10b.

Tính trị số a_B . Chiếu hai vế của (c) lên hai trục vuông góc:

$$a_{Bx} = a_{BC}^n = \frac{(V_1 + V_2)^2}{4R}$$

$$a_{By} = a_C + a_{BC}^\tau = \frac{a_2 - a_1}{2} + \frac{a_1 + a_2}{2} = a_2$$

Gia tốc điểm B: $a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2}$

§3-4. BÀI TẬP.

I- Biết vận tốc và gia tốc điểm A và tâm vận tốc tức thời P với $AP = \text{const}$ (cơ cấu đĩa phẳng)

3-1. Đĩa phẳng có bán kính $R = 0,5$ m lăn không trượt theo mặt phẳng nghiêng. Tại

thời điểm khảo sát tâm của đĩa có vận tốc $v_A = 1 \text{ m/s}$ và gia tốc $a_A = 3 \text{ m/s}^2$.

Tìm: Vận tốc góc của đĩa, vận tốc các điểm C, D, E.

Gia tốc góc của đĩa, gia tốc các điểm B, C. Biết $BD \perp CE$; CE song song với mặt phẳng nghiêng.

3-2) Cơ cấu hành tinh có tay quay OA quay với vận tốc góc $\omega_0 = \text{const}$ làm cho bánh I bán kính r lăn không trượt theo vành trong của bánh cố định, bán kính $R = 3r$.

Tìm: - Vận tốc các điểm C, D, E thuộc bánh I.

Gia tốc các điểm B, C. Cho $BD \perp CE$.

3-3) Một đĩa phẳng được cuốn bằng sợi dây có một đầu B cố định. Đĩa có bán kính r rơi xuống không vận tốc đầu và mở dần dây ra.

Tâm của đĩa có vận tốc

$$v = \frac{2}{3} \sqrt{3gh}$$

trong đó, h là khoảng cách của tâm đĩa từ vị trí đầu đến vị trí khảo sát.

Tìm vận tốc, gia tốc của các điểm D và E. Biết $DE \perp CH$.

3-4) Con lăn hai tầng, bán kính $R = 20 \text{ cm}$ và $r = 10 \text{ cm}$ lăn không trượt theo mặt phẳng ngang. Tầng trong được cuốn dây và buộc vào vật M. Tìm gia tốc điểm cao nhất A lúc $t = 1 \text{ s}$ khi vật M rơi xuống với vận tốc $v = 3t \text{ m/s}$.

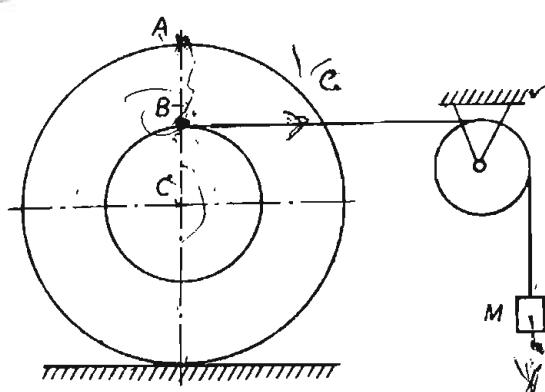
3-5. Hệ ròng rọc như hình bài 3-5. Các ròng rọc 1 và 4 cùng bán kính R, các ròng rọc 2 và 3 cùng bán kính r. Lúc khảo sát, vật M đang chuyển động lên với vận tốc v và gia tốc a.

Tìm: Vận tốc đầu dây A.

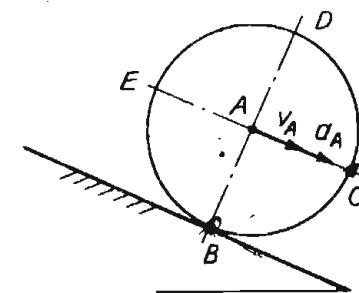
Gia tốc góc của các ròng rọc 3 và 4 (coi các dây tiếp xúc với ròng rọc ở hai đầu của đường kính ngang).

3-6. Vật M rơi xuống theo luật $x = 2t^2 \text{ m}$ làm chuyển động ròng

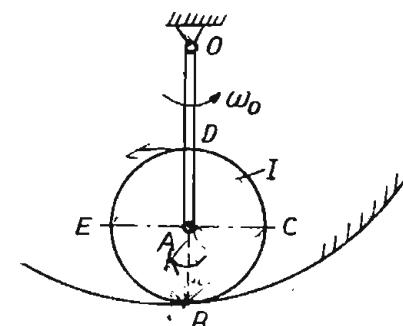
rọc cố định 2, ròng rọc động 1. Ròng rọc 1 có bán kính bằng $0,2 \text{ m}$. Tìm gia tốc các điểm C, B và D ở trên vành của ròng rọc 1 lúc $t = 0,5 \text{ s}$; $OB \perp CD$ (hình bài 3-6).



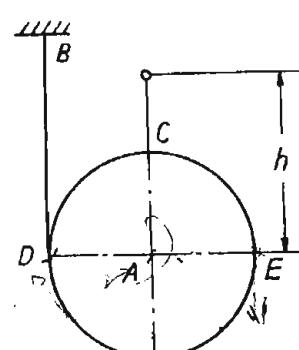
Hình bài 3-4



Hình bài 3-1



Hình bài 3-2



Hình bài 3-3

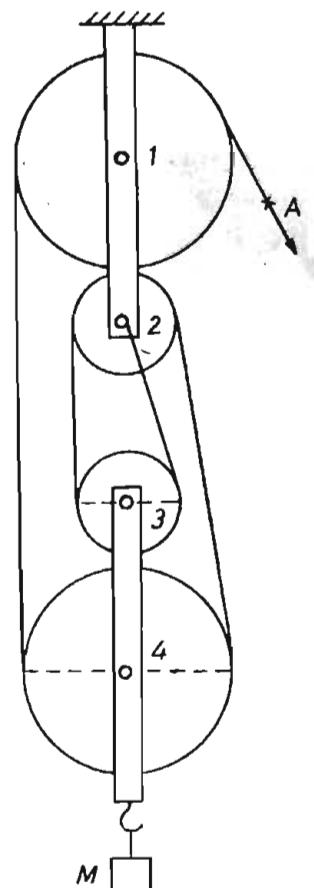
3-7) Tay quay OA quay với gia tốc $\epsilon_0 = 8 \text{ rad/s}^2$, lúc khảo sát có vận tốc góc $\omega_0 = 2 \text{ rad/s}$. Bánh II lăn không trượt theo vành của bánh I cố định. Hai bánh có cùng bán kính $R = 12 \text{ cm}$.

Tìm vận tốc điểm M và điểm N của bánh II; M là điểm tiếp xúc, N là điểm đầu của đường kính MN (hình bài 30-7).

3-8. Cơ cấu dùng để quay nhanh bánh 1 như hình bài 3-8, khi tay quay với vận tốc góc ω_0 thì bánh 2 lăn không trượt trong bánh 3 cố định làm cho bánh 1 quay xung quanh trục O.

Tìm: Quan hệ về vận tốc góc và quan hệ về vận tốc góc giữa bánh 1 và tay quay.

$$\text{Bán kính } r_1 \text{ theo } r_3 \text{ để cho } \frac{\omega_1}{\omega_2} = 12$$

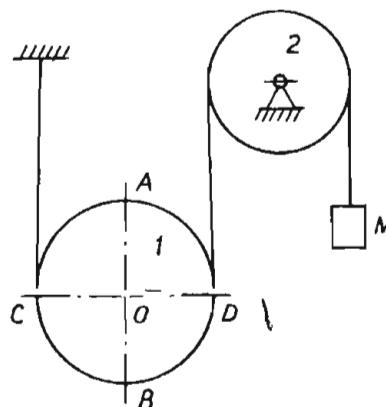


Hình bài 3-5.

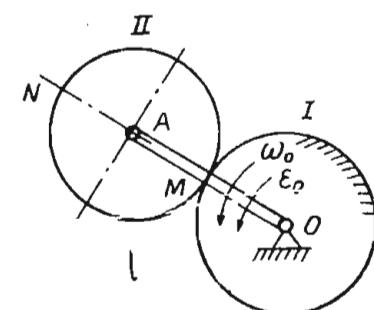
II- Biết vận tốc, vận tốc một điểm và quỹ đạo điểm khác (cơ cấu thanh)

3-9. Tay quay OA dài 20 cm, quay đều với vận tốc góc $\omega_0 = 10$ rad/s, thanh truyền AB dài 100 cm, con chạy B chuyển động theo phương thẳng đứng. Tìm vận tốc góc, vận tốc/của thanh truyền và vận tốc con chạy B tại thời điểm tay quay và thanh truyền vuông góc với nhau, góc $\alpha = 45^\circ$ (hình bài 3-9).

3-10. Cơ cấu bốn khâu như hình bài 3-10. Tay quay OA quay



Hình bài 3-6

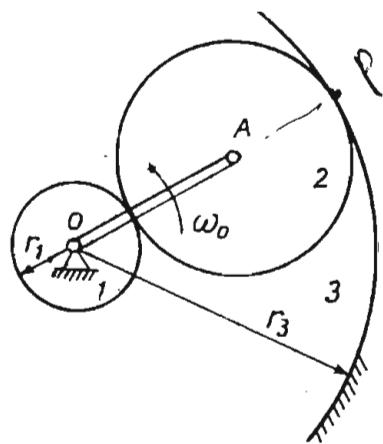


Hình bài 3-7.

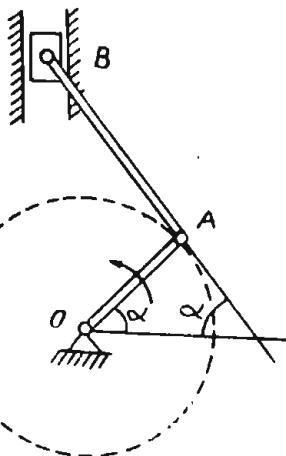
đều với vận tốc góc $\omega_0 = 4$ rad/s; $OA = r = 0,5$ m; $AB = 2r$; $BC = r\sqrt{2}$. Tại thời điểm $\widehat{OAB} = 90^\circ$; $\widehat{ABC} = 45^\circ$, hãy tìm vận tốc góc, vận tốc thanh AB và BC.

3-11. Cơ cấu bốn khâu như hình bài 3-11. Các thanh AB và CD cùng độ dài 40 cm. Thanh BC dài 20 cm, khoảng cách AD bằng 20 cm. Tay quay AB quay đều với vận tốc góc ω_0 . Tìm vận tốc góc và vận tốc của thanh BC lúc góc $\widehat{ADC} = 90^\circ$.

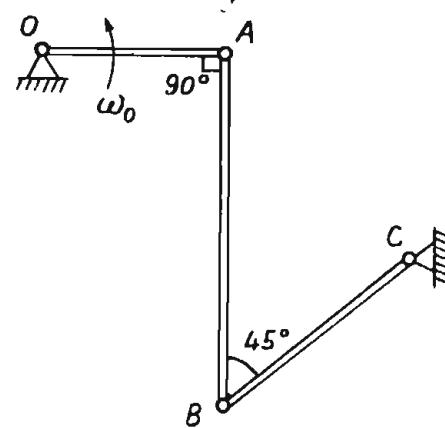
3-12. Tay quay OA quay đều với vận tốc góc ω_0 làm chuyển động thanh truyền AB gắn cứng với bánh L bán kính r . Bánh L làm chuyển động bánh K cũng có bán kính r và lắp trọn trên trục O (hình bài 3-12).



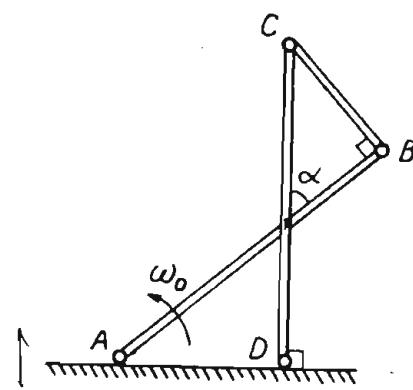
Hình bài 3-8.



Hình bài 3-9



Hình bài 3-10



Hình bài 3-11

Tìm vận tốc góc và gia tốc góc của bánh K tại vị trí OA thẳng đứng và nằm ngang. Cho $AB = 1$.

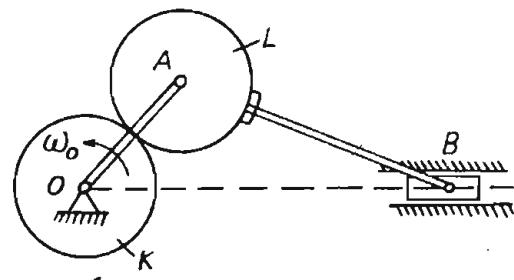
3-13. Tay quay OA quay với vận tốc góc không đổi $\epsilon_0 = 5 \text{ rad/s}^2$ và tại thời điểm khảo sát có vận tốc góc $\omega_0 = 10 \text{ rad/s}$; Biết $OA = r = 20 \text{ cm}$; $O_1B = R = 100 \text{ cm}$; $AB = l = 120 \text{ cm}$.

Tìm vận tốc điểm B, điểm C và gia tốc (tiếp và pháp) của điểm B khi OA và O_1B thẳng đứng (hình bài 3-13).

3-14. Tay quay OA quay đều với vận tốc góc $\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$. Biết $OA = 20 \text{ cm}$; $AB = 50 \text{ cm}$; $BC = 24 \text{ cm}$. Khi cơ cấu có vị trí như hình bài 3-14, tìm:

Vận tốc con chạy B, con chạy C, vận tốc góc thanh BC.

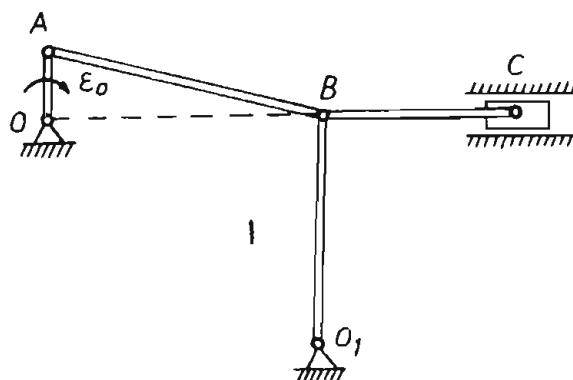
Gia tốc con chạy B.



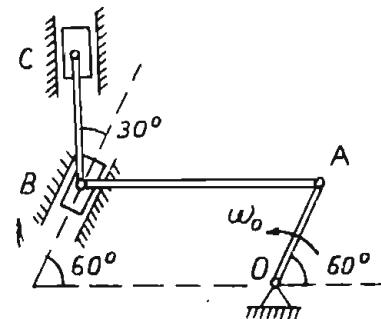
Hình bài 3-12

3-15. Tay quay OA quay đều với vận tốc góc $\omega = 8 \text{ rad/s}$. Biết $OA = 25 \text{ cm}$; $CA = CB = 50 \text{ cm}$; $DE = 100 \text{ cm}$. Ở thời điểm khảo sát $\widehat{CDE} = 90^\circ$; $\widehat{DEB} = 30^\circ$; OA và AB thẳng hàng, vuông góc với BE (hình bài 3-15).

Tìm: Vận tốc góc các thanh AB và DE.



Hình bài 3-13



Hình bài 3-14

Gia tốc các điểm B và C.

3-16. Cơ cấu hình bài 3-16. Biết: $AB = EF = KD = 10 \text{ cm}$; $BC = 25 \text{ cm}$; $DC = CE$. Thanh AB có vận tốc góc $\omega_{AB} = 10 \text{ rad/s}$. Lúc $\varphi = 90^\circ$; $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 90^\circ$, hãy tìm vận tốc hóc và gia tốc góc thành EF.

3-17. Thanh OA dao động theo luật $\varphi = \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{2} t \text{ (rad)}$ làm cho đĩa K quay quanh trục O₁. Cho biết $OA = 2O_1B = 24 \text{ cm}$ và lúc $t = 4 \text{ s}$ thanh OA và O₁B nằm ngang; $\alpha = 60^\circ$, tìm:

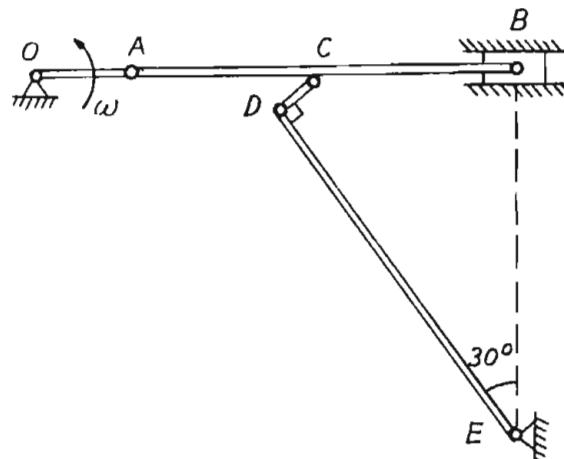
Vận tốc góc và gia tốc góc của đĩa.

Vận tốc và gia tốc của trung điểm M của thanh AB (hình bài 3-17).

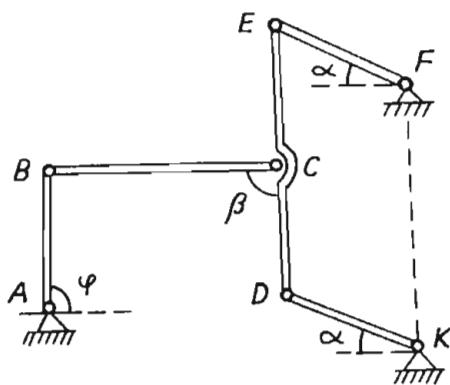
3-18. Pittông D của máy ép thủy lực được truyền chuyển động từ đòn OL. Lúc cơ cấu có vị trí như hình bài 3-18, đòn OL có vận tốc góc $\omega = 2 \text{ rad/s}$ và gia tốc góc $\varepsilon = \text{rad/s}^2$. Tìm:

Vận tốc pittông D, vận tốc thanh AB.

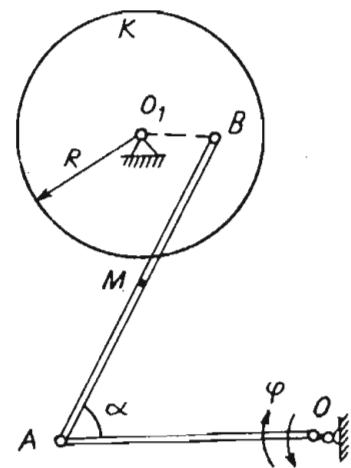
Gia tốc pittông D, gia tốc góc thanh AB.



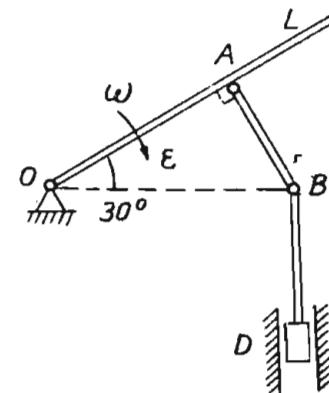
Hình bài 3-15



Hình bài 3.16



Hình bài 3.17



Hình bài 3.18

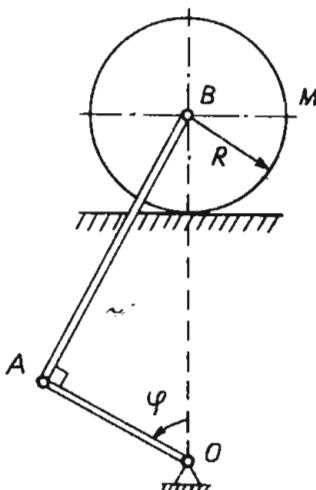
III- BÀI TOÁN HỐN HỢP

(Cơ cấu thanh và đĩa lăn không trượt. Hình phẳng bất kỳ)

3-19. Tay quay OA quay đều với vận tốc góc $\omega_o = \sqrt{3} \text{ rad/s}$ làm cho đĩa lăn không trượt lên đường ngang. Cho $OA = \sqrt{3} \text{ m}$; $R = 1 \text{ m}$. Lúc $\varphi = 60^\circ$; $OAB = 90^\circ$, tìm vận tốc các điểm B, M và gia tốc của chúng (hình bài 3-19).

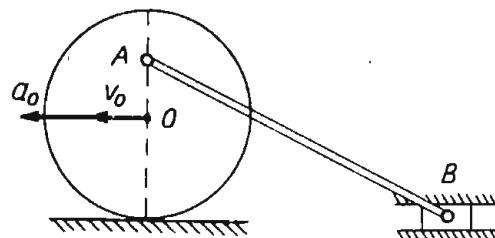
3-20. Đĩa bán kính R lăn không trượt trên đường ngang làm cho con chạy B trượt trong rãnh ngang. Thanh AB dài l, khi đầu A ở vị trí cao nhất, tâm O có vận tốc \vec{v}_o và gia tốc \vec{a}_o . Tìm gia tốc điểm A, điểm B và gia tốc góc của thanh AB lúc đó, biết $OA = \frac{R}{2}$ (hình bài 3-20).

$$\text{lúc đó, biết } OA = \frac{R}{2} \text{ (hình bài 3-20).}$$



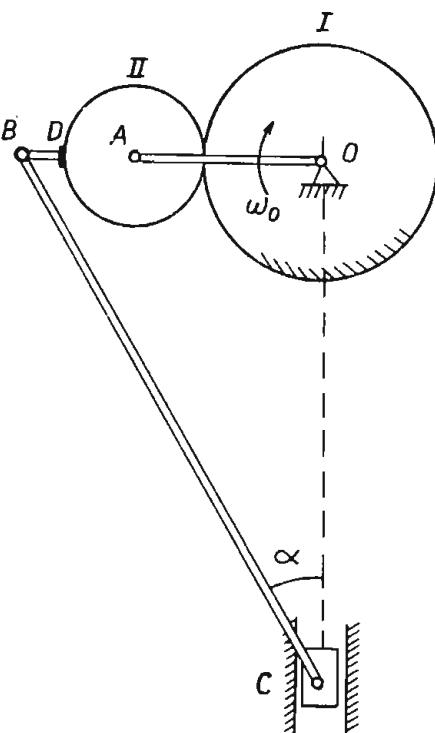
Hình bài 3-19

3-21. Tay quay OA quay đều với vận tốc góc ω_0 làm cho bánh II bán kính r lăn không trượt theo vành bánh I cố định, bán kính $R = 2r$. Thanh BD dài r gắn cứng với bánh II, thanh BC nối với con chay C. Tìm gia tốc điểm B, điểm C và gia tốc góc của thanh BC lúc $\alpha = 30^\circ$, lúc đó OA và DB nằm ngang (hình bài 3-21).

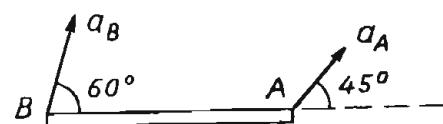


Hình bài 3-20

3-22. Thanh AB dài 0,2 m chuyển động trong mặt phẳng (hình bài 3-22). Vectơ gia tốc đầu A và đầu B tạo với phương BA góc 45° và 60° , trị số $a_A = 2 \text{ m/s}^2$; $a_B = 4,2 \text{ m/s}^2$. Tìm vận tốc góc, gia tốc góc của thanh và gia tốc điểm giữa C của AB (hình bài 3-22).



Hình bài 3-21



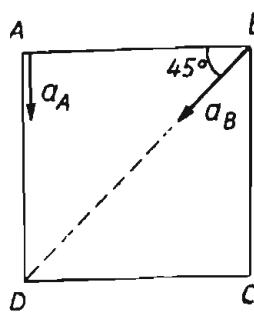
Hình bài 3-22

3-23. Hình vuông ABCD có cạnh $a = 2 \text{ cm}$ chuyển động trong mặt phẳng của hình vẽ. Lúc khảo sát điểm A và điểm B có vectơ gia tốc như trên hình bài 3-23, trị số $a_A = 2 \text{ cm/s}^2$; $a_B = 4\sqrt{2} \text{ cm/s}^2$. Tìm vận tốc góc, gia tốc góc và gia tốc điểm C lúc đó (hình bài 3-23).

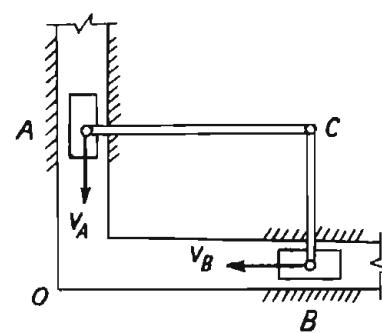
3-24. Hai con chay A và B chuyển động có gia tốc dọc theo hai phương vuông góc, cùng hướng vào O. Tìm vận tốc và gia tốc của điểm C lúc hai thanh AC và BC vuông góc với hai phương chuyển động của con chay. Biết rằng lúc đó các con chay có vận tốc tương ứng là v_A và v_B ; $CA = a$, $CB = b$ (hình bài 3-24).

3-25. Bánh răng bán kính r kẹp giữa hai thanh răng song song chuyển động nhanh dần, về cùng một phía. Lúc khảo sát các thanh có vận tốc \vec{V}_1 , \vec{V}_2 và gia tốc \vec{a}_1 , \vec{a}_2 .

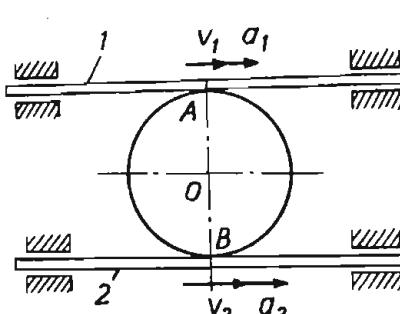
Tìm vận tốc, gia tốc tâm O và gia tốc điểm A của bánh răng tiếp xúc với thanh 1 (hình bài 3-25).



Hình bài 3-23



Hình bài 3-24



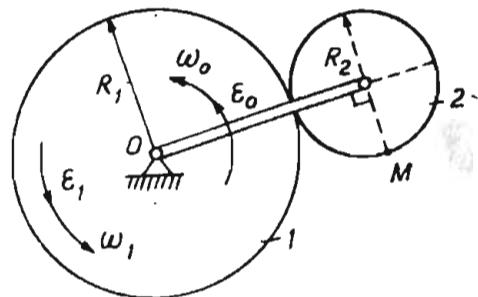
Hình bài 3-25

3-26. Cơ cấu vi sai (hình bài 3-26) tay quay OA có vận tốc góc ω_o , gia tốc góc ε_o ; đĩa 1 quay cùng chiều tay quay với vận tốc góc $\omega_1 = 3\omega_o$, gia tốc góc $\varepsilon_1 = 3\varepsilon_o$; các bán kính $R_1 = 2R_2 = 2r$.

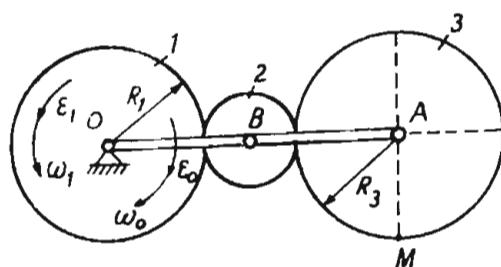
Tìm vận tốc góc, gia tốc góc đĩa 2 và gia tốc điểm M trên vòng đĩa 2; $AM \perp OA$.

3-27. Cơ cấu vi sai (hình bài 3-27), tay quay OA = $3R$ có vận tốc góc ω_o , gia tốc góc ε_o ; đĩa 1 quay ngược chiều tay quay với vận tốc góc $\omega_1 = \omega_o$, gia tốc góc $\varepsilon_1 = \varepsilon_o$; các bán kính $R_1 = R_3 = R$.

Tìm vận tốc và gia tốc điểm M trên vòng đĩa 3; $AM \perp OA$.



Hình bài 3-26



Hình bài 3-27

Chương 4

HỢP CHUYỂN ĐỘNG CỦA ĐIỂM

§4-1. CƠ SỞ LÝ THUYẾT.

I/- Định nghĩa

Điểm M chuyển động đối với vật A, vật A chuyển động đối với vật B cố định. Gắn vào A một hệ tọa độ - gọi là hệ động. Gắn vào B một hệ tọa độ - gọi là hệ cố định. Ta có các định nghĩa (xem hình 4-1) sau:

Chuyển động của điểm M đối với hệ cố định là chuyển động tuyệt đối. Vận tốc và gia tốc của điểm M trong chuyển động này là vận tốc tuyệt đối và gia tốc tuyệt đối. Ký hiệu \vec{V}_a , \vec{a}_a .

Chuyển động của điểm M đối với hệ động là chuyển động tương đối. Vận tốc và gia tốc của điểm M trong chuyển động này là vận tốc tương đối và gia tốc tương đối. Ký hiệu \vec{V}_r , \vec{a}_r .

Chuyển động của hệ động đối với hệ cố định là chuyển động theo.

Gọi *trung điểm* của M là một điểm M^* thuộc hệ động, tại thời điểm khảo sát M^* trùng với M.

Vận tốc và gia tốc của trung điểm M^* là vận tốc theo và gia tốc theo của M. Ký hiệu \vec{V}_e , \vec{a}_e :

$$\vec{V}_e = \vec{V}_{M^*}, \quad \vec{a}_e = \vec{a}_{M^*}$$

Như vậy, chuyển động tuyệt đối, chuyển động tương đối là chuyển động của điểm. Đó là những chuyển động: thẳng, cong, tròn. Chuyển động theo là chuyển động của vật. Đó là những chuyển động: tịnh tiến, quay xung quanh trục cố định, sóng phẳng, ...

II/- Định lý hợp vận tốc thể hiện bằng công thức:

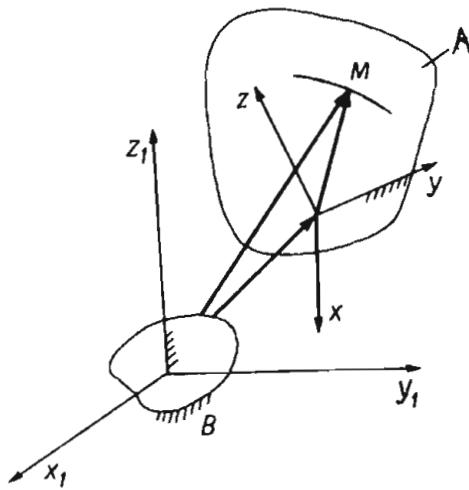
$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e \quad (4-1)$$

III/- Định lý hợp gia tốc thể hiện bằng các công thức sau:

a) Nếu hệ động chuyển động tịnh tiến:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e \quad (4-2)$$

b) Nếu hệ động quay xung quanh trục cố định:



Hình 4-1

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^t + \vec{a}_c \quad (4-3)$$

trong đó: $a_e^n = R \omega_e^2$; $a_e^t = R \cdot \varepsilon_e$

$$\text{Gia tốc Côriôlit: } \vec{a}_c = 2\vec{\omega}_e \wedge \vec{V}_r \quad (4-4)$$

($\vec{\omega}_e, \vec{\epsilon}_e$ vận tốc góc, gia tốc góc của hệ qui chiếu động; R - khoảng cách giữa trục quay đến trung điểm M*).

Chú ý. Trong (4-2) và (4-3), nếu chuyển động tuyệt đối và chuyển động tương đối là cong thì tiếp tục phân tích chúng thành hai thành phần: tiếp và pháp:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_a^n + \vec{a}_a^t \quad (4-5)$$

$$\vec{a}_r = \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^t \quad (4-6)$$

Phương pháp xác định gia tốc Côriôlit \vec{a}_c .

Dùng qui tắc tích vectơ để tính (4-4) hoặc dùng quy tắc thực hành sau:

Đối với bài toán phẳng ($\vec{\omega}_e \perp \vec{V}_r$).

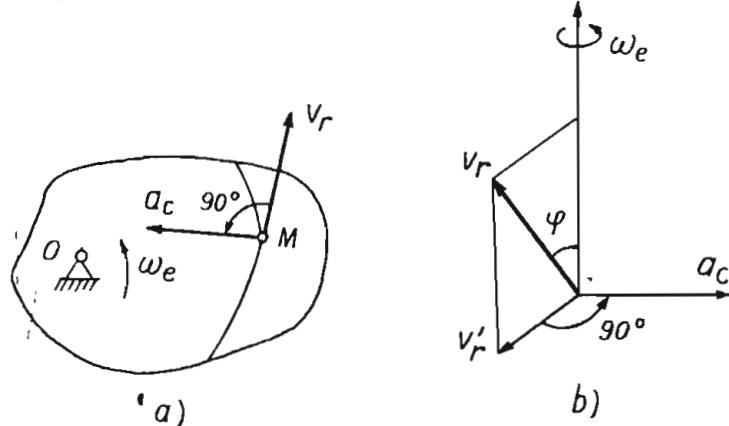
Quay \vec{V}_r đi một góc 90° theo chiều quay của hệ động, ta nhận được vectơ biểu diễn phương, chiều \vec{a}_c ; còn trị số bằng (hình 4-2a):

$$a_c = 2 \omega_e V_r \quad (4-7a)$$

Đối với bài toán không gian ($\vec{\omega}_e$ tạo với \vec{V}_r góc φ):

Chiều \vec{V}_r xuống mặt phẳng \perp trục quay, nhận được \vec{V}'_r ; quay \vec{V}'_r đi góc 90° theo chiều quay của hệ động, nhận được \vec{a}_c (hình 4-2b); trị số:

$$a_c = 2 \omega_e V_r \sin \varphi \quad (4-7b)$$



Hình 4-2

§4-2. HƯỚNG DẪN ÁP DỤNG.

I/- Bài toán phân tích chuyển động của điểm.

Biết một chuyển động (tuyệt đối hoặc theo) và phương vận tốc, gia tốc của hai chuyển động còn lại. Tìm các giá trị vận tốc và gia tốc đó.

II/- Bài toán tổng hợp chuyển động của điểm.

Biết các chuyển động tương đối và theo. Tìm vận tốc, gia tốc tuyệt đối.

**Phương pháp giải bài toán.*

Khi thấy trong bài toán có một điểm M (tự do hoặc thuộc một vật nào đó) chuyển động đối với vật A, vật A chuyển động đối với vật B cố định thì đó là bài toán tổng hợp chuyển động của điểm. Khi giải các bài toán kỹ thuật, ta thường chọn vật cố định là giá đỡ nối liền với mặt đất và qua các bước sau:

1. Phân tích chuyển động.

Chuyển động tuyệt đối là chuyển động của điểm M đối với vật cố định B. Đó là chuyển động thẳng, cong, tròn, hoặc chưa biết.

Chuyển động tương đối là chuyển động của điểm M đối với vật chuyển động A. Đó là chuyển động thẳng, cong, tròn, hoặc chưa biết.

Chuyển động theo là chuyển động của vật A đối với vật B. Đó là chuyển động tịnh tiến, quay, song phẳng.

2. Tìm vận tốc.

Viết biểu thức vận tốc (4-1). Xác định phương, chiều, trị số các vận tốc.

Vẽ các vectơ vận tốc.

Tìm trị số vận tốc chưa biết bằng phương pháp hình học (tính tam giác) hoặc chiếu cả hai véc tơ (4-1) lên hai trục vuông góc.

3. Tìm gia tốc.

Viết biểu thức gia tốc (nếu chuyển động theo là tịnh tiến, viết (4-2); nếu là quay xung quanh trục cố định, viết (4-3)). Chú ý đến (4-5) và (4-6). Sau đó xác định phương, chiều, trị số các gia tốc.

Vẽ các vectơ gia tốc:

Trường hợp có hai vectơ nào đó chỉ biết phương (bài toán phân tích) thì chiếu của chúng được giả thiết.

Trường hợp có một vectơ chưa biết phương (bài toán tổng hợp), thì phân tích vectơ đó ra các thành phần theo các trục tọa độ Đề Các, chiếu của chúng được giả thiết.

Tìm trị số gia tốc chưa biết bằng cách chiếu hai véc tơ của biểu thức gia tốc lên các trục tùy ý sao cho triệt tiêu bớt ẩn số.

Như vậy, đối với bài toán phẳng, ta nhận được hai phương trình hình chiếu, do đó xác định được hai trị số gia tốc nào đó. Nếu trị số là dương thì chiếu giả thiết là đúng, nếu là âm thì chiếu giả thiết là sai. (Đối với bài toán không gian, nhận được ba phương trình hình chiếu).

§4-3. NHỮNG BÀI GIẢI MẪU.

I- Bài toán phân tích chuyển động của điểm

Thí dụ 4-1. Cơ cấu culit như hình vẽ (hình 4-3). Tay quay OA quay với vận tốc góc ω_0 không đổi.

Tìm vận tốc trượt và gia tốc trượt của con chạy A trên culit K và vận tốc, gia tốc của culit K.

Biết $OA = l$ và thời điểm khảo sát $\varphi = 60^\circ$

Bài giải

1. Phân tích chuyển động điểm A.

Điểm A chuyển động đối với culit K, culit K chuyển động đối với giá cố định. Vì vậy ta chọn culit K làm hệ động.

Chuyển động tuyệt đối là chuyển động của A

đối với giá cố định. Đó là chuyển động tròn đều, tâm O, bán kính OA.

Chuyển động tương đối là chuyển động của A đối với culit K. Đó là chuyển động thẳng dọc theo nhánh trên của K.

Chuyển động theo là chuyển động của K đối với giá. Đó là chuyển động tịnh tiến.

2. Vận tốc

$$\text{Biểu thức vận tốc: } \vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_e \quad (\text{a})$$

Trong đó: \vec{V}_a có phương chiều đã biết, trị số $V_a = l\omega_0$. Còn \vec{V}_r và $\vec{V}_e = \vec{V}_{A^*}$ chỉ biết phương (trùng điểm A^* là điểm thuộc culit).

Căn cứ vào (a) có thể vẽ được các vectơ vận tốc (hình 4-3a).

Tính V_r và V_e . Từ hình 4-3a, ta có:

$$V_r = V_a \cos 60^\circ = \frac{1}{2} l\omega_0; \quad V_e = V_a \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} l\omega_0$$

\vec{V}_r là vận tốc trượt của A trên culit, \vec{V}_e là vận tốc của culit tại thời điểm khảo sát.

3. Gia tốc

- Biểu thức gia tốc: vì chuyển động theo là tịnh tiến, chuyển động tuyệt đối tròn đều, nên:

$$\vec{a}_a^n = \vec{a}_r + \vec{a}_e \quad (\text{b})$$

Dựa vào phân tích chuyển động ta thấy: \vec{a}_a^n hướng về 0, trị số $a_a^n = l\omega_0^2$.

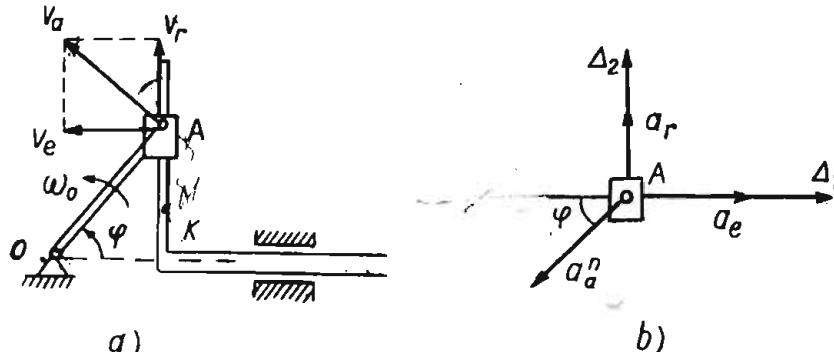
Còn \vec{a}_r và $\vec{a}_e = \vec{a}_{A^*}$ chỉ biết phương, chiều được giả thiết.

Các vectơ được vẽ ở hình 4-3b.

Tính a_r và a_e : chiều cả hai vẽ của (b) lên hai trục Δ_1 và Δ_2 , ta được:

$$a_a^n \cdot \cos 60^\circ = a_e; \quad a_a^n \cdot \sin 60^\circ = a_r$$

Suy ra: $a_e = \frac{1}{2} l\omega_0^2$; $a_r = \frac{\sqrt{3}}{2} l\omega_0^2$. Vectơ \vec{a}_e và \vec{a}_r cùng giả thiết sai chiều. Vậy ở thời điểm khảo sát con chạy A trượt chậm dần về phía trên, culit K tịnh tiến nhanh dần về bên trái.



Hình 4-3

Thí dụ 4-2. Cơ cấu tay quay culit (hình 4-4). Tay quay OA = l = 10cm quay đều với vận tốc góc $\omega_0 = 6$ rad/s làm con chạy A trượt theo culit O₁B ở thời điểm CA nằm ngang $\varphi = 30^\circ$.

- 1) Tìm vận tốc trượt của A theo culit, vận tốc góc ω_1 của culit O₁B.
- 2) Tìm gia tốc trượt của A và gia tốc góc ε_1 của culit.

Bài giải

1. Phân tích chuyển động điểm A: điểm A chuyển động dọc O₁B, O₁B quay quanh O₁. Vì vậy chọn O₁B làm hệ động.

Chuyển động tuyệt đối là chuyển động của A đối với giá cố định. Đó là chuyển động tròn đều, tâm O, bán kính OA.

Chuyển động tương đối là chuyển động của A đối với O₁B. Đó là chuyển động thẳng dọc O₁B.

Chuyển động theo là chuyển động của O₁B đối với giá cố định. Đó là chuyển động quay quanh trục cố định O₁.

2. Vận tốc

$$\text{Biểu thức vận tốc: } \vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e \quad (\text{a})$$

$\vec{V}_a \perp OA$, phù hợp chiều quay ω_0 ; $V_a = l \omega_0 = 60 \text{ cm/s}$.

\vec{V}_r có phương dọc O₁B, trị số V_r chưa biết.

$\vec{V}_e = \vec{V}_A$ (A^* thuộc O₁B và trùng với A), do đó $\vec{V}_e \perp O_1B$, trị số V_e chưa biết.

Dựa vào (a) và cơ cấu, vẽ được các vectơ vận tốc (hình 4-4a).

Tính V_e và V_r : từ hình 4-4a, ta có:

$$V_e = V_a \sin 60^\circ = 30 \text{ cm/s} ; \quad V_r = V_a \cos 60^\circ = 30\sqrt{3} \text{ cm/s}$$

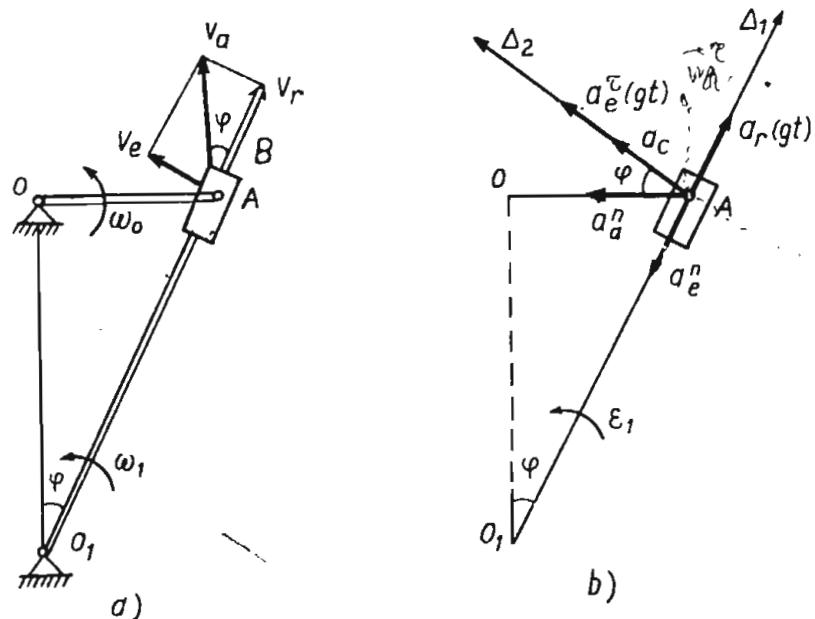
Vì $V_e = V_A = O_1A \cdot \omega_1$, nên vận tốc góc của culit O₁B là:

$$\omega_1 = \frac{V_e}{O_1A} = \frac{30}{2l} = \frac{3}{2} \text{ rad/s}$$

Căn cứ chiều của \vec{V}_e , ω_1 có chiều ngược kim đồng hồ.

3. Gia tốc

Biểu thức gia tốc.



Hình 4-4

Vì chuyển động theo là quay, chuyển động tuyệt đối tròn đều nên:

$$\vec{a}_a^n = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^r + \vec{a}_r + \vec{a}_c \quad (b)$$

\vec{a}_a^n hướng vào O, $a_a^n = l\omega_o^2 = 360 \text{ cm/s}^2$.

$\vec{a}_e^n = \vec{a}_{A^*}^n$ hướng vào O₁; $a_e^n = O_1 A \omega_1^2 = 2l\omega_1^2 = 45 \text{ cm?s}^2$

\vec{a}_c xác định theo quy tắc đã biết (quay \vec{V}_r đi một góc 90° theo chiều quay của hệ động); $a_c = 2\omega_1 \cdot V_r = 90\sqrt{3} \text{ cm/s}^2$.

$\vec{a}_e^r \perp O_1 B$, chiều giả thiết, trị số chưa biết.

\vec{a}_r dọc O₁B, chiều giả thiết, trị số chưa biết.

Dựa vào cơ cấu, vẽ được các vectơ gia tốc (hình 4-4b).

Xác định a_e^r và a_r : chiều hai vẽ của (b) lên hai trục Δ_1 và Δ_2 , ta được hai phương trình:

$$a_a^n \sin\varphi = -a_e^n + a_r$$

$$a_a^n \cos\varphi = a_e^r + a_c$$

$$\text{Giải được } a_r = a_e^n - a_a^n \sin\varphi = -135 \text{ cm/s}^2$$

$$a_e^r = a_a^n \cos\varphi - a_c = 90\sqrt{3} \text{ cm/s}^2$$

Kết quả chứng tỏ \vec{a}_r ngược chiều giả thiết, \vec{a}_e^r có chiều đúng. Vì $a_e^r = O_1 A^* \cdot \varepsilon_1$, do đó

gia tốc của culit O₁B là:

$$\varepsilon_1 = \frac{a_e^r}{O_1 A} = \frac{9}{2}\sqrt{3} \text{ rad/s}^2$$

Căn cứ \vec{a}_e^r , nhận được chiều $\vec{\varepsilon}_1$ như hình 4-4b.

Như vậy tại thời điểm khảo sát, con chạy chuyển động chậm dần dọc O₁B (vì $\vec{V}_r \cdot \vec{a}_r < 0$), còn culit O₁B quay nhanh dần ($\bar{\omega}_1 \cdot \bar{\varepsilon}_1 > 0$).

II- Bài toán tổng hợp chuyển động.

Thí dụ 4-3. Cơ cấu bốn khâu có dạng hình bình hành ($O_1 O_2 = AB$, $O_1 A = O_2 B$). Tay quay O₁A dài 0,5 m, quay với vận tốc góc $\omega_1 = 2t \text{ rad/s}$. Dọc theo AB có con chạy M chuyển động theo phương trình: $AM = S = 5t^2$ (S tính bằng mét m ; t tính bằng giây s).

Tìm vận tốc và gia tốc tuyệt đối của con chạy lúc $t = 2s$. Biết lúc đó $\varphi = 30^\circ$ (hình 4-5).

Bài giải

1. Phân tích chuyển động điểm M: điểm M chuyển động dọc AB, thanh AB chuyển động tịnh tiến. Vì vậy chọn AB làm hệ động.

Chuyển động tương đối là chuyển động của M đối với AB. Đó là chuyển động thẳng dọc AB.

Chuyển động theo là chuyển động của AB đối với giá. Đó là chuyển động tịnh tiến.

Chuyển động tuyệt đối là chuyển động của M đối với giá. Đó là chuyển động cần phải tìm.

2. Vận tốc

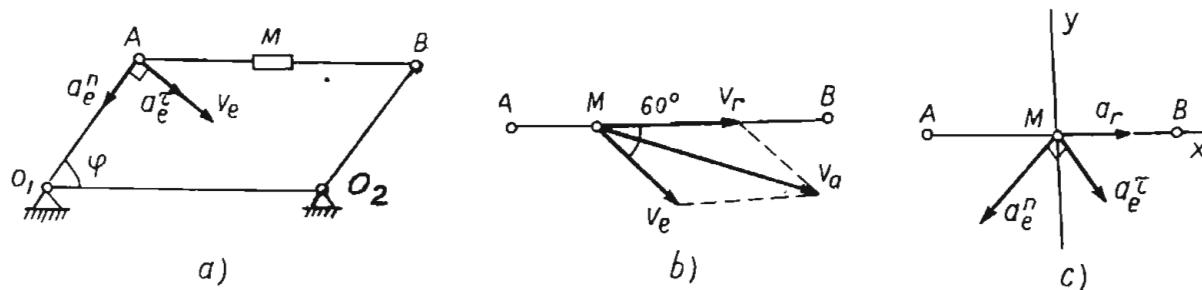
Biểu thức vận tốc: $\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e$ (a)

\vec{V}_r hướng dọc AB, $V_r = |\dot{S}| = 10 \text{ m/s}$. Lúc $t = 2\text{s}$; $V_r = 20 \text{ m/s}$.

$\vec{V}_e = \vec{V}_{M^*} = \vec{V}_A$ (thanh AB tịnh tiến; M^* thuộc AB, trùng với M).

Do đó $\vec{V}_e \perp O_1A$, $V_e = O_1A \cdot \omega = 1t$. Lúc $t = 2\text{s}$; $V_e = 2 \text{ m/s}$. \vec{V}_a chưa xác định.

Các vectơ vận tốc được vẽ như hình 4-5b.



Hình 4-5

Tính trị số V_a : V_a là đường chéo hình bình hành, các cạnh là V_e và V_r nên:

$$V_a = \sqrt{V_e^2 + V_r^2 + 2V_e \cdot V_r \cos 60^\circ} = 21,07 \text{ m/s}$$

(Có thể chiếu (a) lên hai trục vuông góc, tìm được $V_{ax} = 21 \text{ m/s}$, $V_{ay} = \sqrt{3} \text{ m/s}$; $V_a^2 = V_{ax}^2 + V_{ay}^2$).

3. Gia tốc

Vì chuyển động theo là tịnh tiến, nên $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e$. Trung điểm M^* có gia tốc bằng gia tốc điểm A nên: $\vec{a}_e = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^t$, do đó biểu thức gia tốc là:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^t \quad (b)$$

Dựa vào phân tích chuyển động, ta thấy:

\vec{a}_r hướng dọc AB, trị số $a_r = |\ddot{S}| = 10 \text{ m/s}^2$

\vec{a}_e^n hướng về O_1 , trị số $a_e^n = O_1A \cdot \omega_1^2 = 0,5 (2t)^2 = 8 \text{ m/s}^2$.

$\vec{a}_e^t \perp O_1A$, trị số $a_e^t = O_1A \cdot \varepsilon_1 = O_1A \cdot \frac{d\omega_1}{dt} = 0,5 \cdot 2 = 1 \text{ m/s}^2$

\vec{a}_a hoàn toàn chưa xác định, được phân tích thành a_{ax} và a_{ay} :

Các vectơ vẽ bên phải của (b) được vẽ như ở hình 4-5c.

Xác định \vec{a}_a : chiếu hai vẽ của (b) lên hai trục x và y:

$$a_x = a_e^t \cos 60^\circ - a_e^n \cos 30^\circ + a_r = 1 - \frac{1}{2} - 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 10 = 3,58 \text{ m/s}^2$$

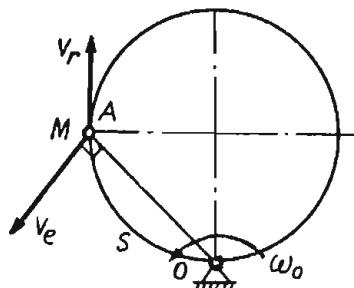
$$a_{ay} = a_e^t \sin 60^\circ - a_e^n \sin 30^\circ = -\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 4\right) \text{ m/s}^2$$

Từ đó, gia tốc tuyệt đối của điểm M là:

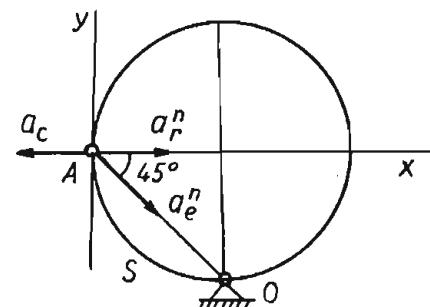
$$a_a = \sqrt{(3,58)^2 + (4 + \frac{\sqrt{3}}{2})^2} = 6,1 \text{ m/s}^2$$

Thí dụ 4-4. Vành tròn bán kính $R = 20 \text{ cm}$ quay trong mặt phẳng của nó quanh trục O với vận tốc góc $\omega_0 = 3 \text{ rad/s}$. Một điểm M chuyển động trên vành theo luật $S = OM = 5\pi t \text{ (cm)}$.

Tìm vận tốc và gia tốc tuyệt đối của M lúc $t = 2 \text{ giây}$ (hình 4-6).



a)



b)

Hình 4-6.

Bài giải

1. Phân tích chuyển động của điểm M: điểm M chuyển động theo vành, vành quay quanh O, vì vậy chọn vành làm hệ động.

Chuyển động tương đối là chuyển động của M đối với vành. Đó là chuyển động tròn theo vành.

Chuyển động theo là chuyển động của vành. Đó là chuyển động quay đều quanh O.

Chuyển động tuyệt đối là chuyển động của M đối với giá cố định ta chưa biết.

2. Vận tốc

Biểu thức vận tốc: $\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e$ (a)

Khi $t = 2 \text{ s}$ thì $S = 10\pi = R \cdot \frac{\pi}{2} = OA$, điểm M chuyển động đến A.

Khi đó: \vec{V}_r hướng tiếp tuyến với vành, trị số $V_r = |S| = 5\pi \text{ cm/s} = \text{const}$. Trung điểm A^* là điểm thuộc vành, $\vec{V}_e = \vec{V}_{A^*}$, nên $\vec{V}_e \perp OA$, trị số:

$$V_e = \omega_0 \cdot OA = \omega \cdot R \sqrt{2} = 60 \sqrt{2} \text{ cm/s}$$

Vectơ \vec{V}_r và \vec{V}_e được vẽ như ở hình 4-6a.

Tính V_a : chiếu hai vẽ của (a) lên hai trục tọa độ Dề Các.

$$V_{ax} = V_e \cos 45^\circ = -60 \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -60 \text{ cm/s}$$

$$V_{ay} = -V_e \sin 45^\circ + V_r = -60\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 5\pi = 44,3 \text{ cm/s}$$

$$V_a = \sqrt{60^2 + (44,3)^2} = 74,6 \text{ cm/s.}$$

3. Gia tốc.

Biểu thức gia tốc: vì chuyển động theo là quay đều và chuyển động tương đối là tròn đều, nên:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e^n + \vec{a}_r^n + \vec{a}_c \quad (b)$$

Dựa vào phân tích chuyển động ta thấy: $\vec{a}_e^n = \vec{a}_{A'}^n$ (A' là điểm thuộc vành), nên \vec{a}_e^n hướng vào O, trị số $a_e^n = OA \cdot \omega_0^2 = R \sqrt{2} \cdot \omega_0^2 = 180 \sqrt{2} \text{ cm/s}^2$.

$$\text{Vecto} \vec{a}_r^n \text{ hướng về tâm của vành, trị số } a_r^n = \frac{(V_r^2)}{R} = \frac{(5\pi)^2}{20} = \frac{5\pi^2}{4}$$

Vecto \vec{a}_c được xác định theo qui tắc đã biết (quay \vec{V}_r đi một góc 90° theo chiều quay của hệ động). Trị số $a_c = 2 \omega_0 V_r = 2 \cdot 3 \cdot 5\pi = 30\pi \text{ cm/s}^2$.

Vecto \vec{a}_a hoàn toàn chưa xác định, được phân tích thành a_{ax} và a_{ay} .

Vẽ các vecto vẽ phải của (b) (hình 4-6b).

Tìm a_a : chiều hai vẽ của (b) lên hai trục Đè Cá, ta có:

$$a_{ax} = a_e^n \cos 45^\circ + a_r^n - a_c = 180 \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{5\pi^2}{4} = 30 = 98,25 \text{ cm/s}^2$$

$$a_{ay} = -a_e^n \sin 45^\circ = -180 \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -180 \text{ cm/s}^2$$

Gia tốc tuyệt đối của M là:

$$a_a = \sqrt{(98,25)^2 + (100)^2} = 182,6 \text{ cm/s}^2$$

Thí dụ 4-5. Nửa đĩa tròn bán kính $R = 40 \text{ cm}$ quay đều với vận tốc góc $\omega_0 = 0,5 \text{ rad/s}$ quanh đường kính AB. Điểm M chuyển động theo vành đĩa với vận tốc không đổi $= 10 \text{ cm/s}$. Xác định gia tốc tuyệt đối của điểm lúc nó nằm ở C. Cho biết $\widehat{AOC} = 45^\circ$ (hình 4-7).

Bài giải

1. Phân tích chuyển động điểm. Điểm M chuyển động theo vành, vành quay quanh trục cố định. Vì vậy chọn vành làm hệ động, ta có:

Chuyển động tương đối là chuyển động của M đối với vành. Đó là chuyển động tròn tâm O, bán kính R.

Chuyển động theo là chuyển động của vành đối với giá. Đó là chuyển động quay quanh trục cố định AB.

Chuyển động tuyệt đối là chuyển động của M đối với giá cố định, ta chưa biết.

2. Vận tốc

Biểu thức vận tốc:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r \quad (a)$$

trong đó: \vec{V}_r hướng tiếp tuyến với vành tại C, trị số $V_r = 10 \text{ cm/s}$.

Trung điểm của M là điểm C thuộc vành, nên $\vec{V}_e = \vec{V}_C \perp$ mặt phẳng hình vẽ và hướng vào phía trong (ký hiệu \otimes là nhìn thấy mũi tên từ phía đuôi), trị số $V_e = \omega_0 R \sin 45^\circ = 10\sqrt{2} \text{ cm/s}$.

Vecto \vec{V}_e và \vec{V}_r được vẽ như ở hình 4-7a.

Tìm \vec{V}_a : ở đây $\vec{V}_c \perp \vec{V}_r$ nên:

$$V_a = \sqrt{V_c^2 + V_r^2} = \sqrt{(10\sqrt{2})^2 + 10^2} = 10\sqrt{3} \text{ cm/s.}$$

3. Gia tốc

Chuyển động theo là quay đều và chuyển động tương đối tròn đều, nên biểu thức gia tốc là:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e^n + \vec{a}_r^n + \vec{a}_c \quad (\text{b})$$

Dựa vào phân tích chuyển động, ta thấy:

Vectơ \vec{a}_r^n hướng vào O, trị số

$$a_r^n = \frac{u^2}{R} = \frac{10^2}{40} = \frac{5}{2} \text{ cm/s}^2$$

Vectơ \vec{a}_e^n hướng vào trục quay, trị số

$$a_e^n = \omega_0^2 R \sin 45^\circ = (0,5)^2 \cdot 40 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} \text{ cm/s}^2$$

Vectơ \vec{a}_c được xác định theo qui tắc đã biết (quay \vec{V}_r đi một góc 90° theo chiều quay của hệ động), trị số

$$a_c = 2\omega_e V_r = 2\omega_0 \cdot u \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} \text{ cm/s}^2$$

Vectơ \vec{a}_a hoàn toàn chưa xác định, được phân tích làm ba thành phần (bài toán không gian).

- Chiều các vectơ vẽ phải của (b) lên ba trục Đề Cá, ta có:

$$a_{ax} = -a_c = -5\sqrt{2} \text{ cm/s}^2$$

$$a_{ay} = -a_e^n - a_r^n \cos 45^\circ = -5\sqrt{2} - \frac{5\sqrt{2}}{2} = -15 \frac{2}{4} \text{ cm/s}^2$$

$$a_{az} = a_r^n \sin 45^\circ = \frac{5}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{4} \text{ cm/s}^2$$

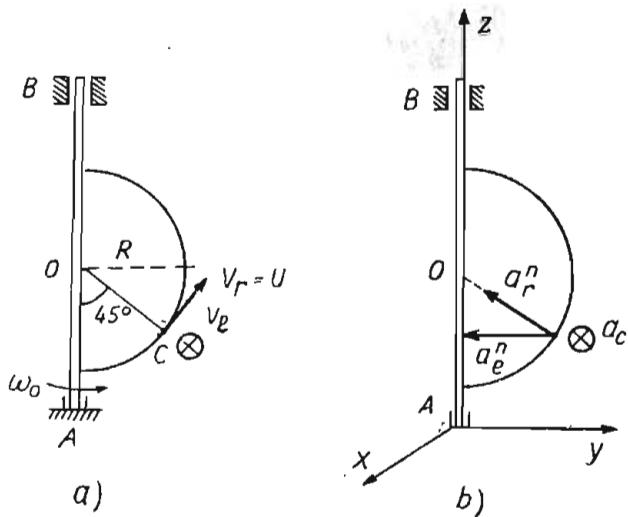
Từ đó:

$$a_a = \sqrt{(5\sqrt{2})^2 + (15 \cdot \frac{2}{4})^2 + (\frac{5\sqrt{2}}{4})^2} = 9 \text{ cm/s}^2$$

§4-4. BÀI TẬP.

I- Bài toán phân tích chuyển động của điểm.

4-1. Tay quay OA = 1 quay đều quanh O với vận tốc góc ω_0 làm con chạy A chuyển động trong rãnh của culit K và culit K chuyển động lên xuống (xem hình bài 4-1). Tìm vận

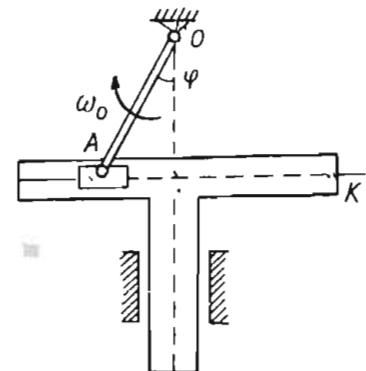


Hình 4-7.

tốc và gia tốc của culit K và vận tốc, gia tốc của con chạy A đối với culit, cho biết lúc khảo sát $\varphi = 30^\circ$.

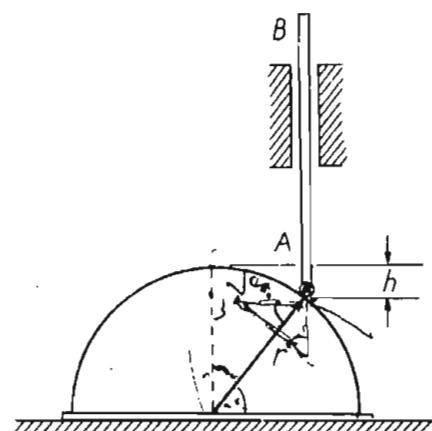
4-2. Cần đẩy AB chuyển động thẳng, nhanh dần đều, sau 4 giây nó trượt từ vị trí cao nhất xuống đoạn $h = 4$ cm làm cho cam bán kính $r = 10$ cm trượt trên nền ngang. Tìm vận tốc và gia tốc của cam lúc đó (xem hình bài 4-2).

4-3. Một cam hình tam giác có góc nhọn α trượt theo mặt nằm ngang với gia tốc không đổi a_0 làm cho thanh AB chuyển động theo khe thẳng đứng (xem hình bài 4-3). Tìm vận tốc và gia tốc của thanh AB.



Hình bài 4-1

4-4. Con chạy A của cơ cấu tay quay cần lắc có chốt trên bánh răng E, bánh răng này được truyền chuyển động nhờ bánh răng D. Bán kính các bánh răng là $R_D = 100$ mm, $R_E = 350$ mm, khoảng cách $O_1A = 300$ mm, $O_1B = 700$ mm (xem hình bài 4-4). Cho vận tốc góc của bánh D là $\omega_D = 7$ rad/s. Tìm vận tốc góc và gia tốc góc của cần lắc BA lúc A ở vị trí cao nhất và lúc O_1A vuông góc với cần lắc BA.



Hình bài 4-2

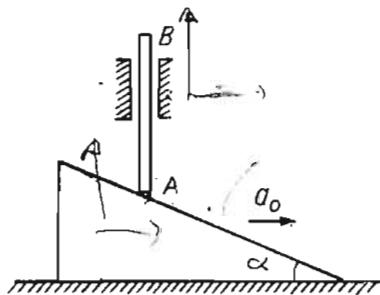
4-5. Để truyền chuyển động quay giữa hai trục song song, người ta dùng cơ cấu như hình bài 4-5. Tay quay AB quay quanh trục O_1 với vận tốc góc ω_1 không đổi làm cho máng chữ thập quay quanh trục O_2 . Biết $O_1O_2 = O_1A = O_1B = b$.

Xác định:

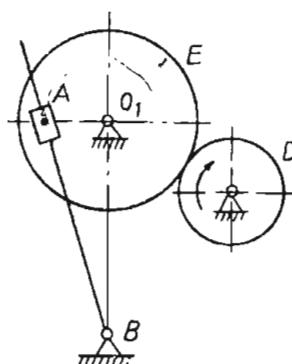
- 1) Vận tốc tương đối và theo của con chạy A, vận tốc góc của máng.
- 2) Gia tốc tương đối, theo và côriôlit của con chạy A.

Hướng dẫn: đặt $\widehat{O_2O_1A} = \varphi = \omega_1 t$.

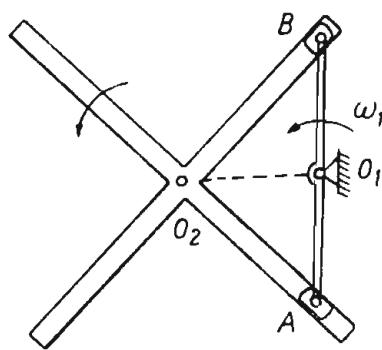
4-6) Hai đĩa A và B cùng quay với vận tốc góc ω quanh các trục cố định O_1 và O_2 (xem hình bài 4-6). Trên đĩa B lấy điểm M trên vành và khảo sát chuyển động của nó khi lấy đĩa A làm hệ qui chiếu động.



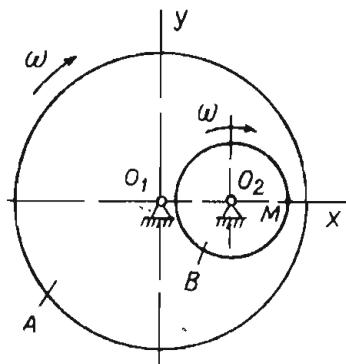
Hình bài 4-3



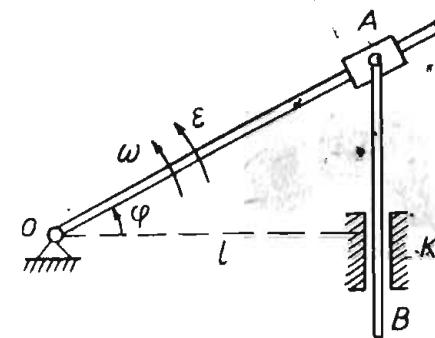
Hình bài 4-4



Hình bài 4-5



Hình bài 4-6



Hình bài 4-7.

Xác định trị số gia tốc tương đối và côrôlit của M nếu $\omega = 10 \text{ rad/s}$ và $O_1O_2 = 15 \text{ cm}$.

Hướng dẫn: \vec{V}_r và \vec{a}_r hoàn toàn chưa xác định, phân tích thành a_{rx} và a_{ry} .

4-7 Tay quay OC của cơ cấu culit quay quanh O làm thanh AB chuyển động theo rãnh K nhờ con chạy A (xem hình bài 4-7). Xác định vận tốc, gia tốc của thanh AB. Cho biết $OK = l$, ở thời điểm khảo sát OC có vận tốc góc ω , gia tốc góc ϵ và làm với OK góc φ .

4-8. Cơ cấu culit như hình bài 4-8. Tay quay OA quay với vận tốc góc không đổi ω_0 . Xác định vận tốc góc, gia tốc góc của O_1D , gia tốc của thanh BC ở thời điểm mà tay quay nằm ngang về bên phải. Cho biết $OA = r$, $OO_1 = r\sqrt{3}$, $h = 2r\sqrt{3}$.

Hướng dẫn: phân tích chuyển động điểm A và điểm B.

II- Bài toán tổng hợp chuyển động của điểm.

4-9. Trên xe chuyển động nhanh dần với gia tốc $49,2 \text{ cm/s}^2$ có đặt một động cơ điện. Rôto của động cơ quay với phương trình $\varphi = t^2$. Bán kính rôto là 20 cm.

Xác định vận tốc tuyệt đối và gia tốc tuyệt đối của điểm A nằm trên vành rôto lúc $t = 1$ giây, biết lúc đó A có vị trí như hình bài 4-9.

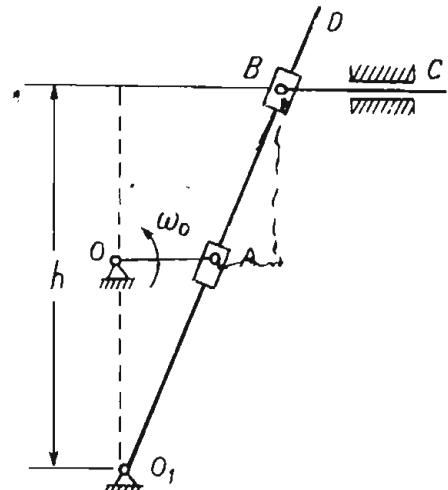
4-10. Cơ cấu như hình bài 4-10. $O_1A = O_2B = 20 \text{ cm}$; $R = 16 \text{ cm}$. Thanh O_1A quay theo luật

$$\varphi = \frac{5}{48} \pi t^3$$

Điểm M chuyển động trên vành tròn theo luật $S = \widehat{AM} = \pi t^2 \text{ cm}$. Tại thời điểm $t_1 = 2 \text{ s}$, hãy tìm vận tốc tuyệt đối, gia tốc tuyệt đối của điểm M.

4-11. Một ống tròn bán kính $R = 1 \text{ m}$ quay quanh trục O với vận tốc góc không đổi $\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$. Trong ống có điểm M dao động quanh điểm A theo luật $\varphi = \sin \pi t$ (xem hình bài 4-11). Xác định gia tốc tuyệt đối của M ở thời điểm $t = 2 \frac{1}{6} \text{ giây}$.

4-12. Tam giác vuông OAB quay quanh trục O với vận tốc góc không đổi $\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$.



Hình bài 4-8.

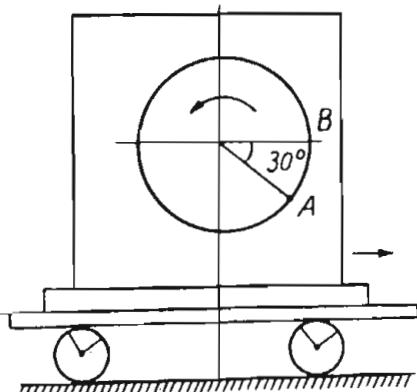
Điểm M chuyển động từ A đến B với vận tốc không đổi bằng 2 cm/s^2 ; vận tốc đầu bằng không. Tìm vận tốc tuyệt đối và vận tốc tuyệt đối của M ở thời điểm $t = \frac{1}{2} \text{ s}$, biết lúc này OB = BM = 4 cm (xem hình bài 4-12).

4-13. Máy nén khí có những rãnh cong quay đều quanh trục O với vận tốc góc ω . Khí chạy trong rãnh với vận tốc tương đối $u = \text{const}$. Tìm hình chiếu lên trục ox và oy của vận tốc và vận tốc tuyệt đối một phần tử khí nằm ở cửa vào C. Cho biết bán kính cong của rãnh ở C là ρ ; góc giữa pháp tuyến của rãnh ở C và bán kính CO là φ . Bán kính CO bằng r (xem hình bài 4-13).

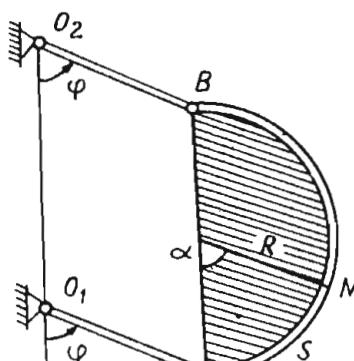
4-14. Tam giác vuông ABC, có AB = 2a = 20 cm; $\alpha = 60^\circ$; quay quanh trục CB theo phương trình $\varphi = 10t - 2t^2$. Trên AB có điểm M di chuyển xung quanh trung điểm O theo phương trình $\xi = a \cos \frac{\pi}{3} t$. Tìm vận tốc tuyệt đối của M lúc $t = 2\text{s}$ (xem hình bài 4-14).

4-15. Cơ cấu điều tiết ly tâm như hình bài 4-15. Lúc khảo sát, trục quay có vận tốc góc $\omega = \frac{\pi}{2} \text{ rad/s}$, gia tốc $\epsilon = 1 \text{ rad/s}^2$; các thanh treo quả cầu có vận tốc góc $\omega_1 = \frac{\pi}{2} \text{ rad/s}$, gia tốc góc $\epsilon_1 = 0,4 \text{ rad/s}^2$, góc $\alpha = 45^\circ$. Tìm vận tốc tuyệt đối của quả cầu.

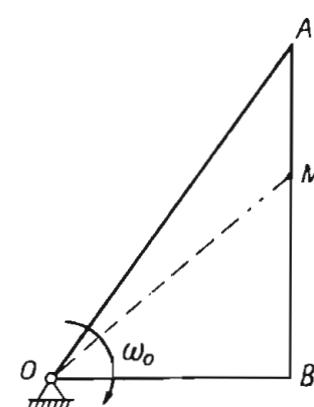
Biết $l = 50 \text{ cm}$; $= 5 \text{ cm}$.



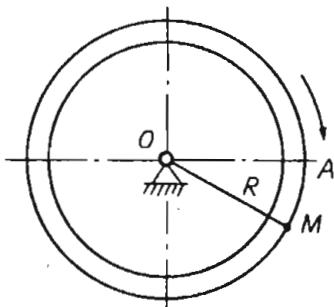
Hình bài 4-9.



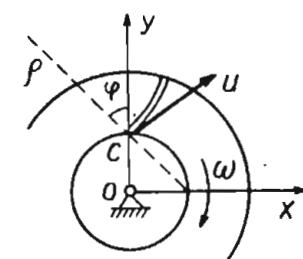
Hình bài 4-10.



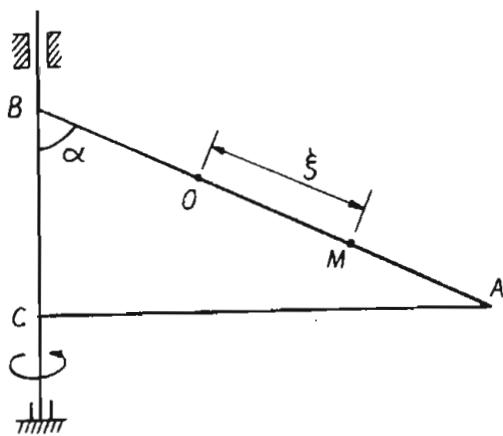
Hình bài 4-12



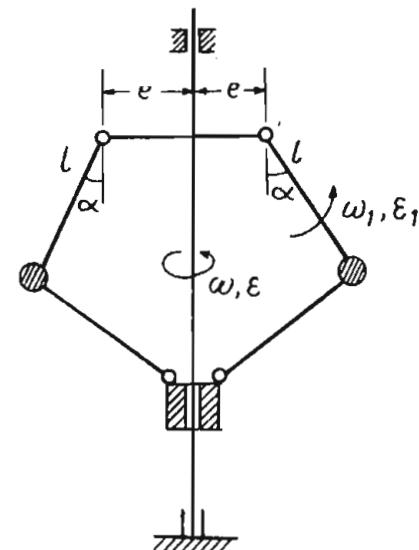
Hình bài 4-11.



Hình bài 4-13.



Hình bài 4-14



Hình bài 4-15.

Chương 5

HỢP CHUYỂN ĐỘNG QUAY CỦA VẬT RẮN QUANH CÁC TRỤC

§5-1. CƠ SỞ LÝ THUYẾT.

I- Hợp chuyển động quay quanh hai trục song song

Xét vật quay quanh trục z với vận tốc góc tương đối $\bar{\omega}_r$, trục này quay quanh trục z_1 cố định với vận tốc góc theo $\bar{\omega}_e$. Trục z song song với trục z_1 (hình 5-1).

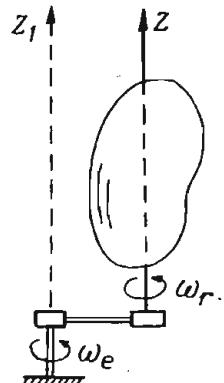
1. Định lý

Hợp hai chuyển động quay quanh hai trục song song ta được *chuyển động song phẳng* đối với mặt phẳng vuông góc với các trục. Vận tốc góc tuyệt đối bằng tổng đại số các vận tốc góc theo và tương đối:

$$\bar{\omega}_a = \bar{\omega}_e + \bar{\omega}_r \quad (5-1)$$

Trường hợp đặc biệt, nếu hai chuyển động cùng tốc độ và ngược chiều ta được *chuyển động tịnh tiến* ($\bar{\omega}_a = 0$).

Chú ý: Muốn tìm vận tốc, gia tốc của điểm thuộc vật ta đưa về bài toán chuyển động song phẳng (chương 3).



Hình 5-1

2. Truyền động hành tinh, vi sai phẳng.

Truyền động hành tinh vi sai là truyền động trong đó có một trục cố định, còn trục của các bánh răng khác được gắn vào tay quay quay quanh trục cố định đó.

Truyền động hành tinh: nếu có một bánh cố định, cơ cấu cần một khâu dẫn động (bài toán cho một vận tốc góc độc lập).

Truyền động vi sai: bánh và tay quay quay độc lập với nhau, cơ cấu cần hai khâu dẫn động (bài toán cho hai vận tốc góc độc lập).

Trong cơ cấu hành tinh vi sai phẳng, các trục quay song song với nhau (hình 5-2).

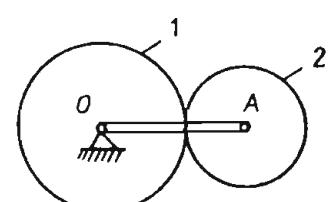
Công thức truyền động khi này là:

$$\frac{\bar{\omega}_{1r}}{\bar{\omega}_{2r}} = \frac{\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_e}{\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_e} = \pm \frac{r_2}{r_1} = \pm \frac{z_2}{z_1} \quad (5-2)$$

Ở đây $\bar{\omega}_{1r}$, $\bar{\omega}_{2r}$: vận tốc góc tương đối của bánh 1; bánh 2 đối với tay quay.

$\bar{\omega}_e$: vận tốc góc của tay quay.

$\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$: vận tốc góc tuyệt đối của bánh 1, bánh 2.



Hình 5-2

r: bán kính; z: số răng. Lấy dấu (-) khi ăn khớp ngoài, dấu (+) khi ăn khớp trong.

Nếu bánh 1 cố định (cơ cấu hành tinh) thì $\omega_1 = 0$.

II- Hợp chuyển động quay quanh hai trục cắt nhau

Xét vật quay quanh trục z với vectơ vận tốc góc tương đối $\vec{\omega}_r$, trục này quay quanh trục cố định z_1 với vectơ vận tốc góc theo $\vec{\omega}_e$. Trục z cắt trục z_1 tại O (hình 5-3).

1. Định lý

Hợp hai chuyển động quay quanh hai trục cắt nhau tại O, ta được *chuyển động quay quanh O*. Vectơ vận tốc góc tuyệt đối bằng tổng vectơ các vận tốc góc theo và tương đối.

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r \quad (5-3)$$

2. Truyền động hành tinh, vi sai nón.

Trong cơ cấu hành tinh, vi sai nón các trục quay cắt nhau tại O (hình 5-4)

Công thức truyền động khi này là:

$$\frac{\vec{\omega}_{1r}}{\vec{\omega}_{2r}} = \pm \frac{r_2}{r_1} = \pm \frac{\omega_2}{z_1} \quad (5-4)$$

Nếu bánh 1 cố định (cơ cấu hành tinh), thì $\omega_1 = 0$. Khác với (5-2) ở đây:

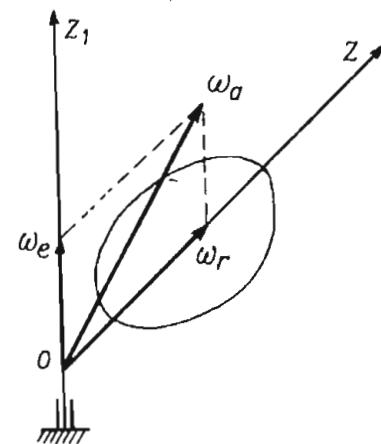
Lấy dấu (+) khi nhìn từ chiều dương của trục z_1 và trục z thấy các chuyển động quay tương đối quanh chúng là cùng dấu (cùng quay theo chiều dương hoặc cùng theo chiều âm tức là cùng ngược chiều hoặc cùng thuận chiều kim đồng hồ).

Lấy dấu (-) khi khác dấu.

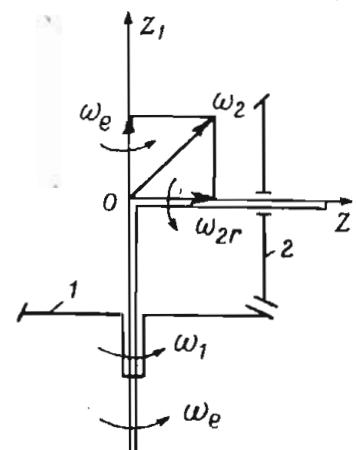
Khi các vectơ cùng phương có thể cộng đại số, còn khi khác phương phải cộng vectơ, chẳng hạn trên hình 5-4 ta có:

Vectơ $\vec{\omega}_1$ (vận tốc góc tuyệt đối của bánh 1) cùng phương với vectơ $\vec{\omega}_e$ (vận tốc góc của tay quay), còn vectơ $\vec{\omega}_e$ và vectơ $\vec{\omega}_{2r}$ khác phương, do đó:

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_1 &= \vec{\omega}_{1r} + \vec{\omega}_e \\ \vec{\omega}_2 &= \vec{\omega}_{2r} + \vec{\omega}_e \end{aligned} \quad (5-5)$$



Hình 5-3.



Hình 5-4.

§5-2. HƯỚNG DẪN ÁP DỤNG

Các loại bài toán :

- I. Truyền động hành tinh, vi sai phẳng (hai trục song song).

II. Truyền động hành tinh, vi sai nón (hai trục cắt nhau).

Phương pháp giải bài toán

1. Phân tích chuyển động: tìm các trục quay và các chuyển động quay quanh chúng. Chọn tay quay làm hệ động.

2. Vận tốc góc

Đặt vận tốc góc của tay quay là ω_e .

Cơ cấu hành tinh vi sai phẳng: áp dụng (5-2).

Cơ cấu hành tinh vi sai nón: chọn chiều dương cho các trục, áp dụng (5-4) và (5-5).

§5.3- NHỮNG BÀI GIẢI MẪU

I- Truyền động hành tinh vi sai phẳng

Thí dụ 5-1. Hộp biến tốc (hình 5-5) gồm: trục dẫn A; bánh 1 cố định; cặp bánh răng 2 và 3; bánh răng 4 gắn cứng với trục bị dẫn B.

Số răng của các bánh răng là: $z_1 = 120$; $z_2 = 40$; $z_3 = 30$; $z_4 = 50$. Trục dẫn quay với tốc độ $n_A = 1500$ vòng/phút.

Tìm tốc độ trục bị dẫn B.

Bài giải

1. Phân tích chuyển động: cặp bánh răng 2-3 quay tương đối quanh trục của chúng (trục z); trục này quay quanh AB (trục z_1 cố định); trục z // trục z_1 . Cặp bánh răng 2-3 chuyển động song phẳng; cơ cấu hành tinh, vì bánh 1 cố định. Chọn tay quay làm hệ động.

2. Vận tốc góc.

Tay quay gắn cứng với trục dẫn A, do đó:

$$\bar{\omega}_A = \bar{\omega}_e$$

Áp dụng (5-2) đối với các cặp bánh răng 1-2 và 3-4:

$$\frac{\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_A}{\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_A} = + \frac{z_2}{z_1} \quad ; \quad \frac{\bar{\omega}_3 - \bar{\omega}_A}{\bar{\omega}_4 - \bar{\omega}_A} = - \frac{z_4}{z_3}$$

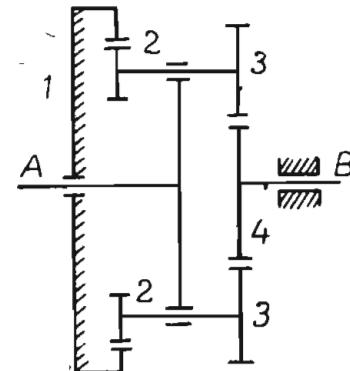
Nhân các đẳng thức trên với nhau, chú ý rằng $\omega_1 = 0$; $\omega_2 = \omega_3$; $\omega_4 = \omega_B$.

Ta có:

$$\frac{\bar{\omega}_A}{\bar{\omega}_B - \bar{\omega}_A} = - \frac{z_2 \cdot z_4}{z_1 z_3} \quad \text{hay} \quad \bar{\omega}_B = (1 + \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4}) \bar{\omega}_A$$

Chú ý rằng n vòng/phút tỉ lệ với ω nên:

$$\bar{n}_B = (1 + \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4}) \bar{n}_A = + 4200 \text{ vòng/phút}$$



Hình 5-5

Ta thấy n_B và n_A cùng dấu, do đó trục B quay cùng chiều với trục A, tốc độ 4200 vòng/phút.

Thí dụ 5-2. Hộp biến tốc như hình 5-6. Trục dẫn A gắn với tay quay, vận tốc góc $\omega_A = 120$ rad/s. Trên tay quay có bánh răng 2 và 3 gắn cứng với nhau. Bánh răng 1 quay cùng chiều trục dẫn với vận tốc góc $\omega_1 = 180$ rad/s.

Tìm vận tốc góc tuyệt đối của cặp bánh răng 2-3 và vận tốc góc của trục bị dẫn B. Cho biết số răng của các bánh: $z_1 = 80$; $z_2 = 20$; $z_3 = 40$; $z_4 = 60$.

Bài giải.

1. Phân tích chuyển động: cặp bánh răng 2-3 quay tương đối quanh trục của chúng (trục z), trục này quay quanh trục AB (trục z_1 cố định), trục z/z_1 . Cặp bánh răng 2-3 chuyển động song phẳng. Cơ cấu vi sai phẳng. Chọn tay quay làm hệ động.

2. Vận tốc góc: tay quay gắn cứng với trục dẫn A,

$$\text{do đó: } \bar{\omega}_A = \bar{\omega}_e$$

Áp dụng (5-2) đối với bánh răng 1 và 2:

$$\frac{\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_A}{\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_A} = -\frac{z_2}{z_1} \quad (1)$$

$$\text{Rút ra: } \bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_A + \frac{\omega_1}{z_2} (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_A)$$

Chọn chiều quay của trục A làm chiều dương, khi đó $\bar{\omega}_A = 120$ rad/s; $\bar{\omega}_1 = 180$ rad/s. thay vào phương trình $\bar{\omega}_2$ ta được $\bar{\omega}_2 = -120$ rad/s. Dấu (-) chứng tỏ bánh răng 2-3 quay ngược chiều trục dẫn.

Để tính $\bar{\omega}_B$, ta áp dụng (5-2) đối với bánh răng 3 và 4:

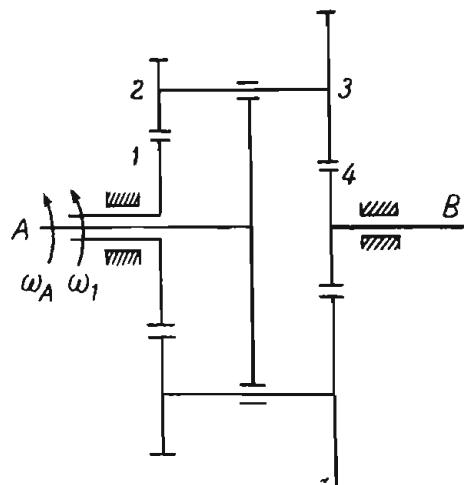
$$\frac{\bar{\omega}_3 - \bar{\omega}_A}{\bar{\omega}_4 - \bar{\omega}_A} = -\frac{z_4}{z_3} \quad (2)$$

Nhân (1) với (2), chú ý $\bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_3$; $\bar{\omega}_4 = \bar{\omega}_B$, ta có:

$$\frac{\bar{\omega}_B - \bar{\omega}_A}{\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_A} = \frac{\omega_1 \cdot z_3}{z_2 \cdot z_4}$$

$$\text{Rút ra: } \bar{\omega}_B = \bar{\omega}_A + \frac{\omega_1 \cdot z_3}{z_2 \cdot z_4} (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_A) = +280 \text{ rad/s}$$

Ta thấy $\bar{\omega}_B$ cùng dấu với $\bar{\omega}_A$, do đó trục bị dẫn quay cùng chiều với trục dẫn.



Hình 5-6

II- Truyền động hành tinh, vi sai nón.

Thí dụ 5-3. Cơ cấu vi sai kép như hình 5-7. Trục A gắn với tay quay, quay độc lập với bánh 1. Trên tay quay có hai bánh 2 và 3 gắn cứng với nhau. Bánh 1 quay với vận tốc góc $\bar{\omega}_1 = 10\pi$ rad/s. Trục B gắn cứng với bánh 4 quay với vận tốc góc $\bar{\omega}_B = -20$ rad/s. Các bán kính

$$r_1 = 12 \text{ cm}; r_2 = 6 \text{ cm}; r_3 = 3 \text{ cm}; r_4 = 6 \text{ cm}.$$

Tìm: Vận tốc góc của trục A.

Vận tốc góc tương đối và tuyệt đối của cặp bánh 2-3.

Bài giải

1. Phân tích chuyển động. Cặp bánh 2-3 quay tương đối quanh trục của chúng (trục z), trục này quay quanh trục AB (trục z_1 cố định). Trục z và z_1 cắt nhau tại O. Cặp bánh 2-3 chuyển động quay quanh O, cơ cấu vi sai nón. Chọn tay quay làm hệ động.

2. Vận tốc góc: chọn chiều dương cho trục z và z_1 như hình 5-7. Tay quay gắn cứng với trục A nên $\bar{\omega}_A = \bar{\omega}_e$. Áp dụng (5-4) cho các bánh 1, 2 và 3, 4:

$$\frac{\bar{\omega}_{1r}}{\bar{\omega}_{2r}} = \frac{r_2}{r_1} \quad (1)$$

$$\frac{\bar{\omega}_{3r}}{\bar{\omega}_{4r}} = -\frac{r_4}{r_3} \quad (2)$$

(Lấy dấu (+) vì bánh 1 quay theo chiều dương quanh z_1 làm cho bánh 2 quay theo chiều dương quanh z).

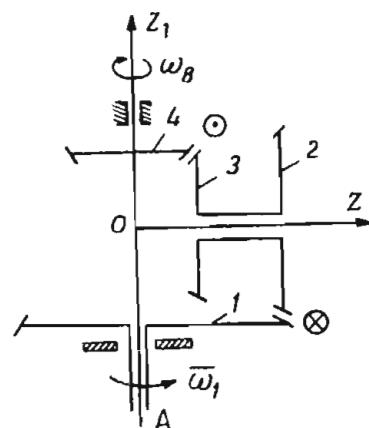
(Lấy dấu (-) vì bánh 4 quay theo chiều âm quanh z_1 làm cho bánh 3 quay theo chiều dương quanh z).

Nhân (1) với (2), chú ý $\bar{\omega}_{2r} = \bar{\omega}_{3r}$; $\bar{\omega}_4 = \bar{\omega}_B$

ta được

$$\frac{\bar{\omega}_{1r}}{\bar{\omega}_{4r}} = -\frac{r_2 \cdot r_4}{r_1 \cdot r_3} \quad (3)$$

Hình 5-7



vì $\vec{\omega}_A$, $\vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_2$ cùng phương nên:

$$\bar{\omega}_{1r} = \bar{\omega}_1 \quad \bar{\omega}_e = \bar{\omega}_1 \quad \bar{\omega}_A = \bar{\omega}_1; \quad \bar{\omega}_{4r} = \bar{\omega}_4 \quad \bar{\omega}_A = \bar{\omega}_B \quad \bar{\omega}_A$$

$$\text{Thay vào (3) ta được: } \frac{\bar{\omega}_1}{\bar{\omega}_B - \bar{\omega}_A} = \frac{r_2 \cdot r_4}{r_1 \cdot r_3} = -1$$

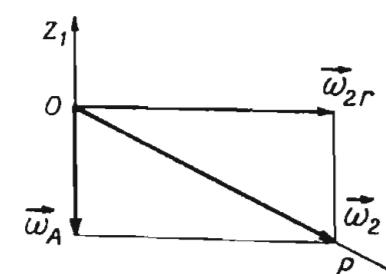
Rút ra: $\bar{\omega}_A = \frac{\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_B}{2} = 5\pi \text{ rad/s.}$ Dấu (-) chứng tỏ vectơ $\vec{\omega}_A$ ngược chiều với trục z_1 .

Để tìm $\bar{\omega}_{2r}$ và $\bar{\omega}_2$ ta thay $\bar{\omega}_A$ vào (1) được:

$$\frac{\bar{\omega}_{1r}}{\bar{\omega}_{2r}} = \frac{\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_A}{\bar{\omega}_{2r}} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{2}$$

Rút ra $\bar{\omega}_{2r} = 2(\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_A) = 30\pi \text{ rad/s.}$ Vectơ $\vec{\omega}_{2r}$ cùng chiều với trục z.

Vectơ $\vec{\omega}_A$ và $\vec{\omega}_{2r}$ có phương \perp với nhau (hình 5-8):



Hình 5-8

$$\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_A + \vec{\omega}_{2r}$$

$$\text{Về trị số: } \omega_2 = \sqrt{\omega_A^2 + \omega_{2r}^2} = 30,5 \pi \text{ rad/s.}$$

Phương của $\vec{\omega}_2$ chính là trục quay tức thời OP của cặp bánh 2-3.

§5-4. BÀI TẬP

I- Truyền động hành tinh, vi sai phẳng.

5-1. Hộp biến tốc gồm: bánh răng 1 cố định, hai cặp bánh 2-3, bánh 4 gắn cứng với trục bị dẫn B.

Cho $r_1 = 40 \text{ cm}$, $r_2 = 20 \text{ cm}$; $r_3 = 30 \text{ cm}$, $r_4 = 90 \text{ cm}$.

Trục dẫn A gắn cứng với tay quay mang trục của cặp bánh 2-3 quay với tốc độ $n_A = 1800$ vòng/phút.

Tìm tốc độ của trục bị dẫn B (hình bài 5-1).

5-2. Tay quay OA quay quanh trục O với tốc độ $\omega_0 = 30$ vòng/phút. Trên tay quay có lắp các trục của các bánh răng, trong đó bánh răng 2 và bánh răng 3 gắn cứng với nhau. Bánh răng 1 cố định. Biết số răng: $z_1 = 60$; $z_2 = 40$; $z_3 = 50$; $z_4 = 25$. Tìm tốc độ của bánh răng 3 (hình bài 5-2).

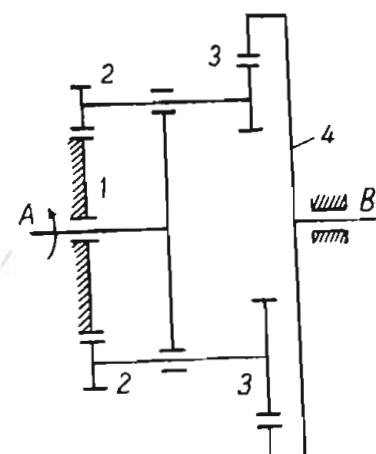
5-3. Cơ cấu vi sai, tay quay có vận tốc $\omega_0 = 3 \text{ rad/s}$. Bánh 1 quay cùng chiều với tay quay với vận tốc góc $\omega_1 = 3 \omega_0$. Biết $R_1 = 2R_2$. Tìm vận tốc góc tuyệt đối của bánh 2 và vận tốc góc tương đối của bánh 2 đối với tay quay (hình bài 5-3).

5-4. Trục dẫn A của hộp biến tốc quay với tốc độ $n_A = 1200$ vòng/phút. Bánh răng 1 lắp trơn trên trục dẫn và quay với tốc độ $n_1 = 160$ vòng/phút. Tìm tốc độ trục bị dẫn nếu trục A và bánh răng 1 quay ngược chiều nhau. Biết số răng của các bánh là $z_1 = 70$; $z_2 = 2$; $z_3 = 30$; $z_4 = 80$ (hình bài 5-4).

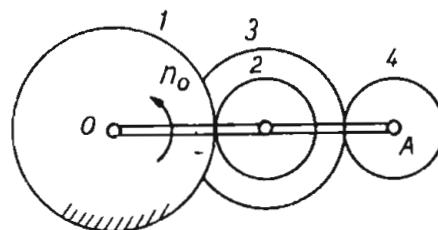
II- Truyền động hành tinh, vi sai nón.

5-5. Cơ cấu truyền động bánh răng nón như hình bài 5-5. Trục dẫn A gắn cứng với bánh 1. Trục bị dẫn B mang trục của cặp bánh 2-2. Bánh 3 cố định. Các bánh răng có cùng bán kính. Tìm tỉ số vận tốc góc của trục dẫn và trục bị dẫn.

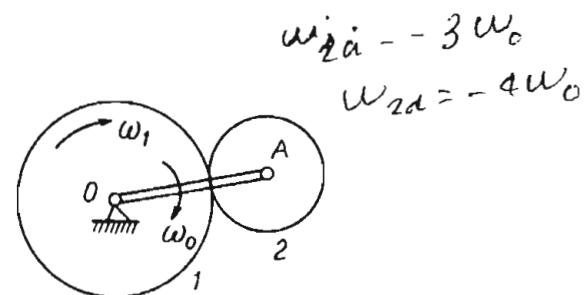
5-6. Cơ cấu truyền động bằng bánh răng nón



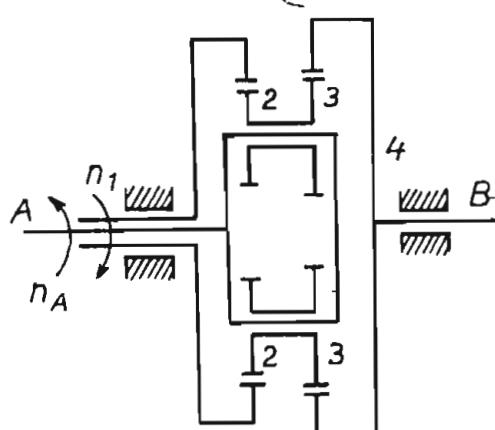
Hình bài 5-1.



Hình bài 5-2.



Hình bài 5-3



Hình bài 5-4.

như hình bài 5-6.

Bánh 1 và bánh 2 quay cùng chiều với vận tốc góc $\omega_1 = 3 \text{ rad/s}$ và $\omega_2 = 5 \text{ rad/s}$. Tìm vận tốc góc của trục A cùng với tay quay và vận tốc góc tương đối của bánh 3 đối với tay quay.

5-7. Hộp truyền động vi sai của ôtô (hình bài 5-7). Hai bánh răng I và II cùng bán kính $R = 6 \text{ cm}$, mỗi bánh răng gắn cứng với một nửa trực sau của xe và một bánh xe sau. Hai bánh răng trung gian III bán kính $r = 3 \text{ cm}$, có trục gắn cứng vào hộp, hộp lắp trọn vào trực sau của xe.

Khi chuyển động trên đường vòng, hai bánh chuyển động với vận tốc khác nhau: $\omega_1 = 6 \text{ rad/s}$; $\omega_2 = 4 \text{ rad/s}$.

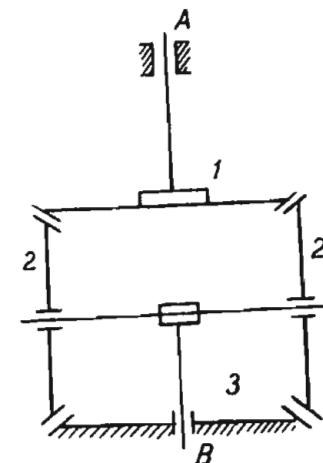
Tìm vận tốc góc của hộp, vận tốc góc tương đối của bánh III đối với hộp và vận tốc góc tuyệt đối của bánh III.

5-8. Hộp truyền động vi sai như hình bài 5-8.

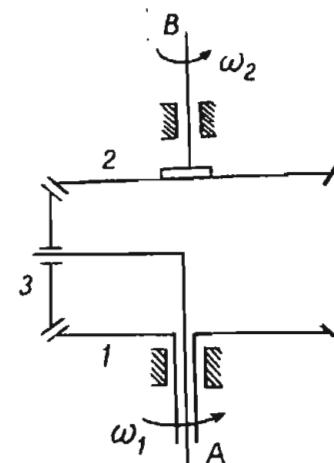
Bánh 1 lắp trọn trên trục A. Đầu cuối của trục này mang trục của cặp bánh 2-2. Bánh 3 gắn cứng với trục bị dãn B.

Tìm vận tốc góc của trục B trong các trường hợp:

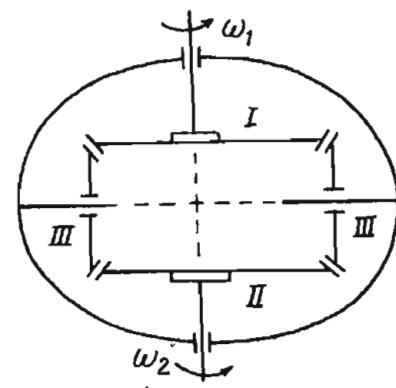
- 1) Trục dãn có vận tốc góc ω_A , bánh 1 đứng yên.
- 2) Trục dãn A có vận tốc góc ω_A , bánh 1 quay cùng chiều, vận tốc góc ω_1 .
- 3) Trục dãn A và bánh 1 quay cùng chiều với $\omega_A = \omega_1$.
- 4) Trục dãn A và bánh 1 quay cùng chiều với $\omega_1 = 2\omega_A$.
- 5) Trục dãn A có vận tốc góc ω_A bánh 1 quay ngược chiều với vận tốc góc ω_1 .



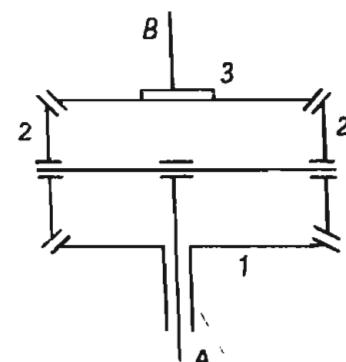
Hình bài 5-5



Hình bài 5-6



Hình bài 5-7



Hình bài 5-8

Chương 6

CÂN BẰNG CỦA HỆ LỰC PHẲNG

Trong chương này chúng ta giải các bài toán về cân bằng của hệ lực phẳng, bao gồm:

- I. Bài toán một vật không có ma sát.
- II. Bài toán hệ vật không có ma sát.
- III. Bài toán có ma sát.

I- BÀI TOÁN MỘT VẬT KHÔNG CÓ MA SÁT

§6-1. CƠ SỞ LÝ THUYẾT.

1- Lực hoạt động và phản lực liên kết.

* Lực hoạt động có quy luật xác định, hoặc tập trung hoặc phân bố. Hệ lực phân bố thường được thay bằng lực tập trung \vec{Q} đi qua trọng tâm của biểu đồ phân bố:

Hệ lực phân bố hình chữ nhật: (hình 6-1a)

$$Q = ql.$$

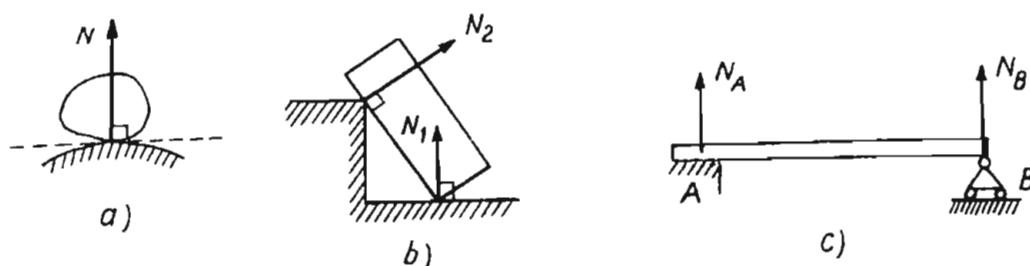
Hệ lực phân bố hình tam giác (hình 6-1b) $Q = \frac{1}{2} ql.$

q - cường độ lực phân bố (N/m); l - độ dài của biểu đồ phân bố (m).

Phản lực liên kết do vật gây liên kết đặt vào vật khảo sát.

Phản lực liên kết phụ thuộc vào dạng của liên kết.

a) Liên kết tựa: vật khảo sát tựa vào vật gây liên kết tại một mặt, một điểm hay con lăn (hình 6-2).



Hình 6-2

Phản lực pháp tuyến \vec{N} hướng từ vật gây liên kết vào vật khảo sát.

b) Liên kết dây: vật khảo sát nối với vật gây liên kết bởi dây, dai, xích (hình 6-3).

Ta tưởng tượng khi cắt dây, sức căng \vec{T} nằm dọc dây và làm căng đoạn dây nối với vật khảo sát.

c) Liên kết thanh: vật khảo sát nối với vật gây liên kết bởi những thanh (thẳng hay cong) thỏa mãn điều kiện:

Trọng lượng thanh không đáng kể.

Không có lực tác dụng trên thanh.

Thanh chịu liên kết hai đầu. Với ba điều kiện đó thanh chỉ chịu kéo hoặc nén (hình 6-4).

Tưởng tượng cắt thanh, lực kéo (nén) \vec{S} nằm dọc theo đường thẳng nối hai đầu thanh, chiều của \vec{S} được giả thiết. Nếu tính được $S > 0$ thì chiều giả thiết là đúng, $S < 0$ thì chiều giả thiết sai.

d) Liên kết bản lề, ổ trục: vật khảo sát nối với vật gây liên kết bởi bản lề hoặc ổ trục.

Phản lực liên kết gồm hai lực vuông góc trong mặt phẳng vuông góc với trục, chiều của hai lực được giả thiết. Nếu tính được thành phần lực nào đó là dương thì thành phần đó đã được giả thiết đúng.

Thí dụ, tính được $X_A > 0$; $Y_A < 0$ thì \vec{X}_A giả thiết đúng, \vec{Y}_A giả thiết sai (hình 6-5).

e) Liên kết bản lề cầu, ổ chặn (cối): vật khảo sát liên kết với vật gây liên kết bởi bản lề cầu A (hình 6-6a) hoặc ổ chặn (cối) A (hình 6-6b).

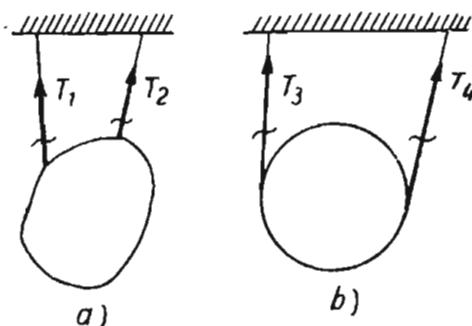
Phản lực liên kết gồm ba thành phần lực tương ứng vuông góc, chiều giả thiết: \vec{X}_A , \vec{Y}_A , \vec{Z}_A .

Chú ý: Nếu các lực hoạt động nằm trong một mặt phẳng thì các phản lực liên kết cũng chỉ có các thành phần nằm trong mặt phẳng đó.

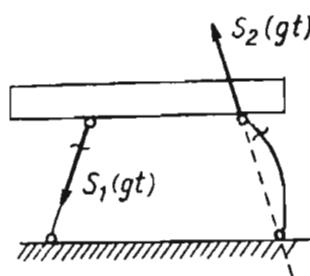
f) Liên kết ngàm: vật khảo sát liên kết với vật gây liên kết bởi ngàm (gắn cứng) (hình 6-7).

Phản lực liên kết gồm hai thành phần lực vuông góc, chiều được giả thiết và một ngẫu lực có mômen M , chiều được giả thiết.

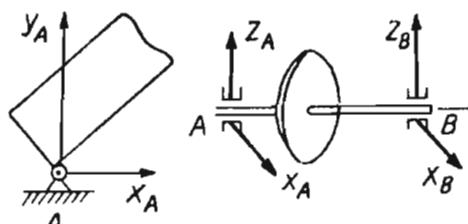
g) Liên kết rãnh trượt: khi rãnh trượt có độ dài l , ta có thể coi là liên kết tựa tại hai điểm hoặc liên kết ngàm có một lực \vec{N} và một ngẫu lực M (hình 6-8).



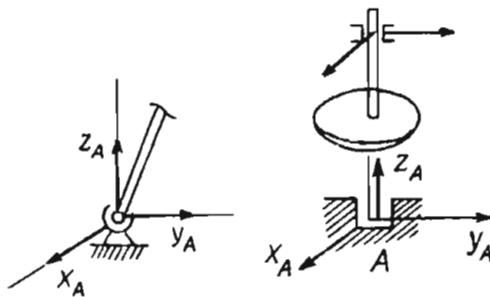
Hình 6-3



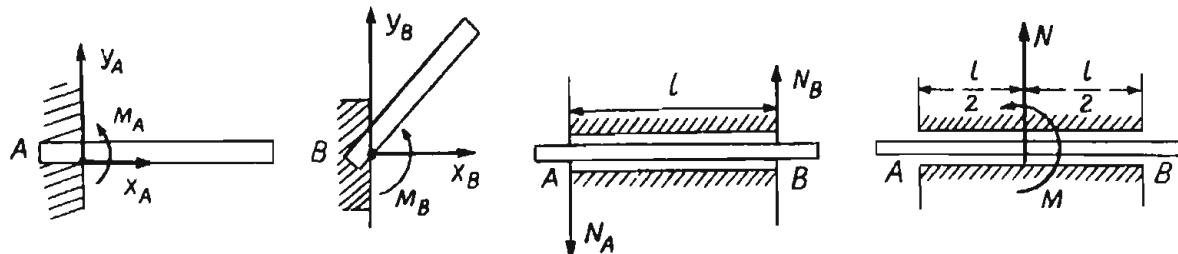
Hình 6-4



Hình 6-5



Hình 6-6



Hình 6-7

Hình 6-8

2. Chiếu lực lên hai trục. Mômen của lực đối với một điểm.

* Công thức chiếu lực lên hai trục vuông góc (hình 6-9):

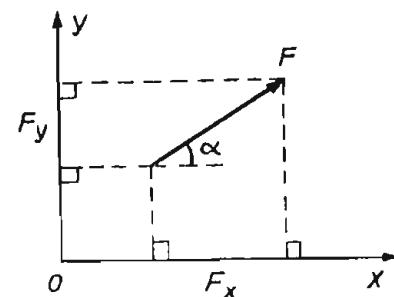
$$F_x = \pm F \cos \alpha$$

$$F_y = \pm F \sin \alpha$$

Nếu $\vec{F} \perp Ox$, hình chiếu $F_x = 0$

Nếu $\vec{F} \parallel Ox$, hình chiếu $F_x = \pm F$

(lấy dấu (+) hoặc (-) tùy thuộc vào \vec{F} thuận hoặc ngược chiều trục).



Lấy mômen của lực \vec{F} đối với điểm O có hai cách (hình 6-10):

Hình 6-9

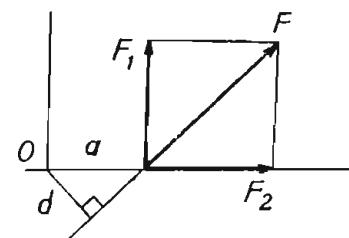
Áp dụng định nghĩa: $\bar{m}_o(\vec{F}) = \pm dF$

Lấy dấu + (-) khi lực quay ngược (thuận) chiều kim đồng hồ quanh O.

Phân tích lực ra các thành phần thích hợp (hình 6-10).

Thí dụ, $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

$$\bar{m}_o(\vec{F}) = \bar{m}_o(\vec{F}_1) + \bar{m}_o(\vec{F}_2) = \bar{m}_o(\vec{F}_1) = aF_1$$



3. Các dạng phương trình cân bằng (PTCB):

Hình 6-10

* Đối với hệ lực phẳng tổng quát, ta có thể dùng một trong ba dạng PTCB sau:

$$\text{Dạng 1: } \sum F_{kx} = 0 \quad (1); \quad \sum F_{ky} = 0 \quad (2); \quad \sum m_o(\vec{F}_k) = 0 \quad (3)$$

Trong đó (1) và (2): tổng hình chiếu các lực lên hai trục vuông góc.

(3): Tổng mômen các lực đối với điểm 0 tùy ý.

$$\text{Dạng 2: } \sum F_{kx} = 0 \quad (1); \quad \sum m_A(\vec{F}_k) = 0 \quad (2); \quad \sum m_B(\vec{F}_k) = 0 \quad (3)$$

Trong đó: đoạn AB không vuông góc với trục x.

$$\text{Dạng 3: } \sum m_A(\vec{F}_k) = 0 \quad (1); \quad \sum m_B(\vec{F}_k) = 0 \quad (2); \quad \sum m_C(\vec{F}_k) = 0 \quad (3)$$

Trong đó: A, B, C không thẳng hàng.

Đối với hệ lực phẳng đồng qui hoặc song song, ta chỉ lập được hai PTCB.

§6-1.2. HƯỚNG DẪN ÁP DỤNG

Trình tự giải bài toán cân bằng của hệ lực phẳng (một vật) gồm ba bước:

1/ Chọn vật khảo sát, đặt lực hoạt động và lực liên kết lên vật khảo sát.

2/ Lập phương trình cân bằng cần thiết.

Nên lập phương trình mômen đối với điểm nào có nhiều lực đi qua, như vậy phương trình sẽ đơn giản hơn.

3/ Giải hệ phương trình, ta nhận được các ẩn phải tìm, nếu số phương trình bằng số ẩn.

§6-1.3. NHỮNG BÀI GIẢI MẪU

Thí dụ 6-1. Thanh OA trọng lượng không đáng kể, có liên kết và chịu lực như hình 6-11. Biết OB = 2BA, góc $\alpha = 30^\circ$.

Tìm phản lực tại O và sức căng của dây.

Bài giải

1- Chọn vật khảo sát, đặt lực hoạt động và lực liên kết:

Xét OA: tại O - liên kết bản lề, tại B - liên kết dây.

Hệ lực cân bằng:

$$(\vec{P}, \vec{T}, \vec{X}_o, \vec{Y}_o) \equiv 0 \rightarrow \text{Hệ lực phẳng tổng quát.}$$

2- Phương trình cân bằng:

$$\sum F_{kx} = X_o - T \cos 30^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = Y_o + T \sin 30^\circ - P = 0 \quad (2)$$

$$\sum m_o = -P \cdot OA + T \cdot OB \sin 30^\circ = 0 \quad (3)$$

3- Giải hệ phương trình:

$$T = 3P; X_o = \frac{3\sqrt{3}}{2}; Y_o = \frac{P}{2}$$

Thí dụ 6-2.

Cầu đồng chất AB trọng lượng \vec{P} , chịu lực \vec{Q} và có liên kết như hình 6-12, góc $\alpha = 30^\circ$.

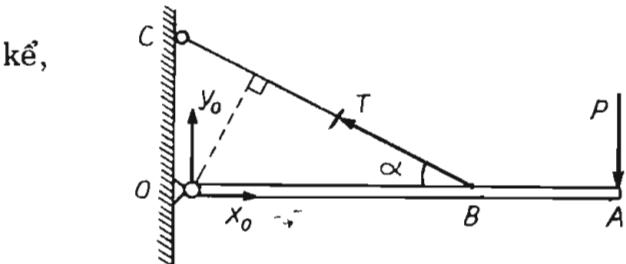
Tìm phản lực tại A và B.

Bài giải

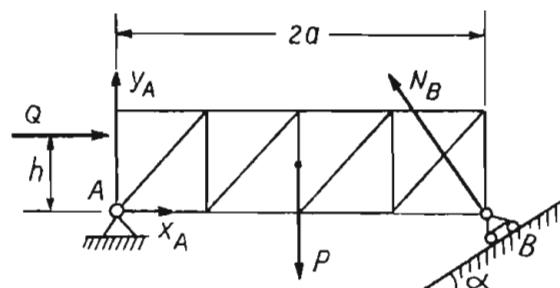
1- Chọn vật khảo sát, đặt lực hoạt động và lực liên kết:

Xét cầu: tại A - liên kết bản lề, tại B - liên kết con lăn (tựa).

Hệ lực cân bằng:



Hình 6-11



Hình 6-12

$(\vec{P}, \vec{Q}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{N}_B) \equiv 0 \rightarrow$ Hệ lực phẳng tổng quát

2- Phương trình cân bằng:

$$\sum F_{kx} = Q + X_A - N_B \sin 30^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = -P + Y_A + N_B \cos 30^\circ = 0 \quad (2)$$

$$\sum m_B = aP - hQ - 2aX_A = 0 \quad (3)$$

3- Giải hệ phương trình:

$$X_A = \frac{P\sqrt{3}}{6} + Q\left(\frac{h\sqrt{3}}{6a} - 1\right); Y_A = \frac{hQ}{2}; N_B = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(P + \frac{hQ}{a}\right)$$

Thí dụ 6-3.

Thanh AB trọng lượng không đáng kể, có liên kết và chịu lực như hình 6-13. Cường độ lực phân bố là q (N/m).

Tìm: Phản lực tại B.

- Nội lực tại mặt cắt C, cách đầu A một đoạn Z.

Bài giải

I. Tìm phản lực tại B

1- Chọn vật khảo sát, đặt lực hoạt động và lực liên kết:

Xét AB: tại B - liên kết ngầm.

Hệ lực cân bằng: khi thay hệ lực phân bố bởi lực tập trung \vec{Q} đặt ở giữa thanh và $Q = ql$, ta có:

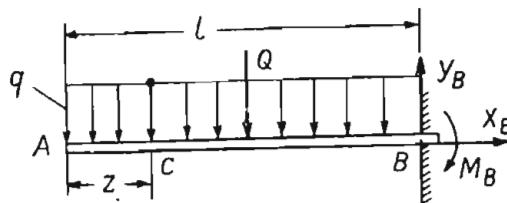
$(\vec{Q}, \vec{X}_B, \vec{Y}_B, \vec{M}_B) \equiv 0 \rightarrow$ Hệ lực phẳng tổng quát.

2- Phương trình cân bằng:

$$\sum F_{kx} = X_B = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = Y_B - Q = 0 \quad (2)$$

$$\sum m_B = \frac{l}{2} Q - M_B = 0 \quad (3)$$



Hình 6-13

3- Giải hệ phương trình:

$$X_B = 0; Y_B = ql; M_B = \frac{ql^2}{2}$$

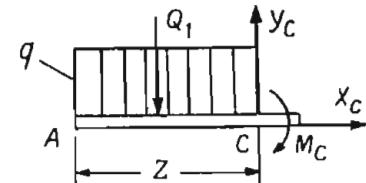
II- Tìm nội lực tại mặt cắt C (hình 6-14).

1- Chọn vật khảo sát, đặt lực hoạt động, và lực liên kết:

Xét AC: tại C - liên kết ngầm với CB.

Hệ lực cân bằng: khi thay hệ lực phân bố trên đoạn AC bởi lực \vec{Q}_1 đặt ở giữa AC và $Q_1 = qZ$, ta có:

$(\vec{Q}_1, \vec{X}_C, \vec{Y}_C, \vec{M}_C) \equiv 0 \rightarrow$ Hệ lực phẳng tổng quát.



Hình 6-14

2- Phương trình cân bằng:

$$\sum F_{kx} = X_C = 0 \quad (5)$$

$$\sum F_{ky} = Y_C - Q_1 = 0 \quad (6)$$

$$\sum m_C = \frac{Z}{2} Q_1 - M_C = 0 \quad (7)$$

3- Giải hệ phương trình:

$$X_C = 0; Y_C = qZ; M_C = \frac{qZ^2}{2} \quad \text{với } 0 \leq Z \leq 1$$

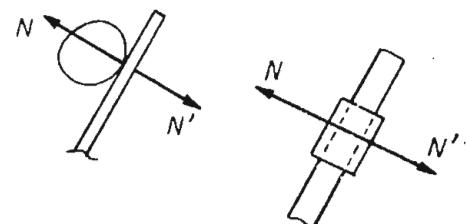
II- BÀI TOÁN HỆ VẬT KHÔNG CÓ MA SÁT

§6-2.1. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

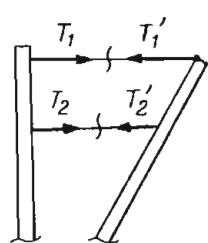
Lực liên kết giữa các vật thuộc hệ.

Xét hệ gồm nhiều vật liên kết với nhau. Lực liên kết giữa các vật thuộc hệ là nội lực trong hệ, do đó khi tách vật tại liên kết nào đó, ta phải đặt tại liên kết đó những cặp lực có cùng một đường tác dụng, cùng một trị số, ngược chiều nhưng đặt trên hai vật khác nhau:

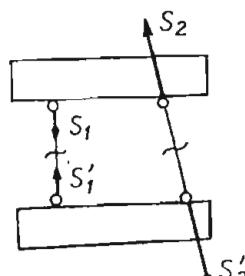
Tách vật tại liên kết tựa (hình 6-15).



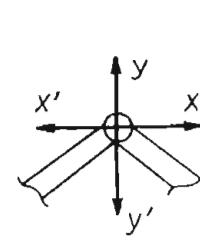
Tách vật tại liên kết dây (hình 6-16).



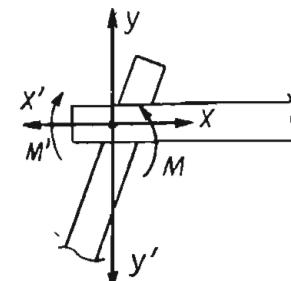
Hình 6-16



Hình 6-17



Hình 6-18



Hình 6-19.

§6-2.2. HƯỚNG DẪN ÁP DỤNG

Có hai phương pháp giải bài toán hệ vật không ma sát sau:

1) Phương pháp tách vật

Tách riêng từng vật tại liên kết. Đặt các lực hoạt động và lực liên kết lên từng vật.

* Lập các phương trình cân bằng cho từng vật: tổng số phương trình phải bằng tổng số ẩn phải tìm.

Giải hệ phương trình nói trên với chú ý: các cặp nội lực phải có cùng trị số và cùng dấu (cùng dương hay cùng âm tùy theo chiều giả thiết là đúng hay sai).

2) Phương pháp xét cả hệ rồi tách vật.

Xét cả hệ (coi như một vật rắn) sau đó tách vật tại liên kết. Đặc lực hoạt động, lực liên kết lên cả hệ và lên từng vật.

* Lập phương trình cân bằng cho cả hệ và một số vật sao cho tổng số phương trình bằng tổng số ẩn phải tìm.

Giải hệ phương trình nói trên.

Nhận xét. Tùy thuộc vào bài toán mà ta chọn phương pháp thích hợp.

Nếu xét cả hệ mà đơn giản thì nên dùng phương pháp thứ hai.

§6-2.3. NHỮNG BÀI GIẢI MẪU

Thí dụ 6-4. (Phương pháp tách vật)

Thanh đồng chất OA = 6a, trọng lượng \vec{P} .

Thanh đồng chất BC = 4a, trọng lượng \vec{p} .

Lực \vec{Q} thẳng đứng, đặt ở đầu A.

Tìm phản lực liên kết tại O, B và C (hình 6-20).

Bài giải

1- Tách vật tại liên kết, đặt lực hoạt động và lực liên kết lên từng vật:

Xét OA:

Tại O - liên kết bắn lề, tại B - liên kết tựa.

- Hệ lực ($\vec{P}, \vec{Q}, \vec{X}_o, \vec{Y}_o, \vec{N}_B$) $\equiv 0$

- Xét CB: . Tại C - Liên kết ngầm, tại B - Liên kết tựa

. Hệ lực ($\vec{p}, \vec{X}_c, \vec{Y}_c, \vec{M}_c, \vec{N}'_B$) $\equiv 0$

2- Phương trình cân bằng (PTCB):

PTCB của OA:

$$\sum F_{kx} = X_o = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = Y_o + N_B - P - Q = 0 \quad (2)$$

$$\sum m_o = 2aN_B - 3aP - 6aQ = 0 \quad (3)$$

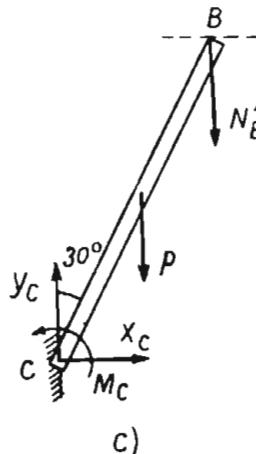
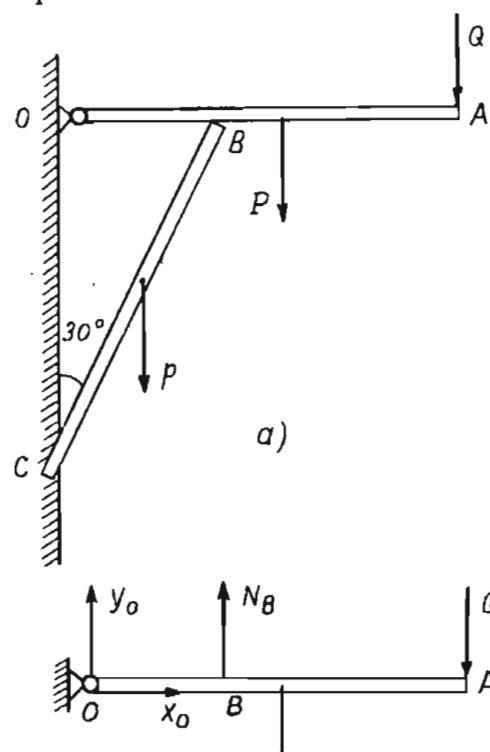
PTCB của CB:

$$\sum F_{kx} = X_c = 0 \quad (4)$$

$$\sum F_{ky} = Y_c - p - N'_B = 0 \quad (5)$$

$$\sum m_c = M_c - ap - 2aN'_B = 0 \quad (6)$$

3- Giải hệ phương trình: chú ý $N_B = N'_B$



Hình 6-20

$$X_o = 0; Y_o = -\frac{P}{2} - 2Q; N_B = \frac{3}{2} P + 3Q$$

$$X_C = 0; Y_C = p + \frac{3}{2} P + 3Q; M_C = a(3P + 6Q - p)$$

Nhận xét: Nếu xét cả hệ như một vật rắn thì:

$$(\vec{p}, \vec{P}, \vec{Q}, \vec{X}_o, \vec{Y}_o, X_C, \vec{Y}_C, \vec{M}_C) \equiv 0$$

Khi đó mỗi PTCB đều chứa hai ẩn, do đó phương pháp xét cả hệ không thuận lợi.

Thí dụ 6-5. (Phương pháp xét cả hệ rồi tách vật)

Cầu ABC gồm hai phần giống nhau, trọng lượng mỗi phần là P, phần cầu AB chịu lực Q. Các kích thước được cho ở hình 6-21.

Tìm các phản lực liên kết tại A, B, C

Bài giải

1- Tách vật tại liên kết, đặt lực hoạt động và lực liên kết lên từng vật:

Xét cả hệ:

Tại A và C là liên kết bản lề.

$$\text{Hệ lực } (\vec{P}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{X}_C, \vec{Y}_C) \equiv 0$$

Xét phần BC:

Tại B và C là liên kết bản lề.

$$\text{Hệ lực } (\vec{P}, \vec{X}_B, \vec{Y}_B, \vec{X}_C, \vec{Y}_C) \equiv 0$$

2- Phương trình cân bằng:

PTCB của cả hệ:

$$\sum m_A = -aP - 2aQ - 5aP + 6aY_C = 0 \quad (1)$$

$$\sum m_C = aP + 4aQ + 5aP - 6aY_A = 0 \quad (2)$$

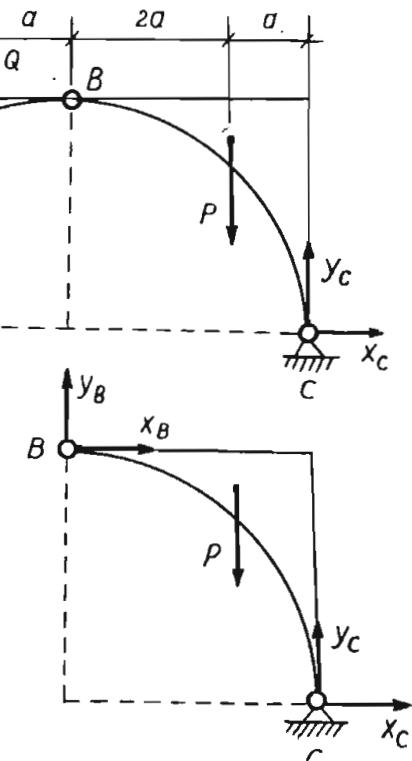
$$\sum F_{kx} = X_A + X_C = 0 \quad (3)$$

PTCB của BC:

$$\sum F_{kx} = X_B + X_C = 0 \quad (4)$$

$$\sum F_{ky} = Y_B + Y_C - P = 0 \quad (5)$$

$$\sum m_B = -2aP + 3aY_C + 3aX_C = 0 \quad (6)$$



Hình 6-21

3- Giải hệ phương trình:

$$X_A = X_C = \frac{1}{3}(P + Q); Y_A = P + \frac{2}{3}Q$$

$$X_B = -X_C = \frac{1}{3}(P + Q); Y_B = -\frac{1}{3}Q$$

$$Y_C = P + \frac{1}{3}Q$$

Nhận xét. Nếu dùng phương pháp tách vật thì phải xét phần AB và phần BC.

Hệ lực đặt vào AB là: $(\vec{P}, \vec{Q}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B) \equiv 0$ với $\vec{X}_B = -\vec{X}_B$, $\vec{Y}_B = -\vec{Y}_B$, giá trị $X_B = X'_B$, $Y_B = Y'_B$.

Khi đó mỗi PTCB của từng vật đều chứa hai ẩn do đó phương pháp tách vật không thuận lợi.

Thí dụ 6-6. (Phương pháp tách vật)

Cơ cấu ép có liên kết và chịu lực như hình 6-22a. Khoảng cách OB = $\frac{OA}{10}$. Tìm lực ép vào vật G và lực kéo nén (ứng lực) của các thanh.

Bài giải

1- Tách vật tại liên kết, đặt lực hoạt động và lực liên kết lên cùng vật.

Xét đòn OA:

Tại O - liên kết bản lề tại B
liên kết thanh.

$$\therefore \text{Hệ lực } (\vec{P}, \vec{X}_o, \vec{Y}_o, \vec{S}_l) \equiv 0$$

Xét nút C (hình 6-22b):

Nút C liên kết với con trượt E và đòn OA bởi các liên kết thanh.

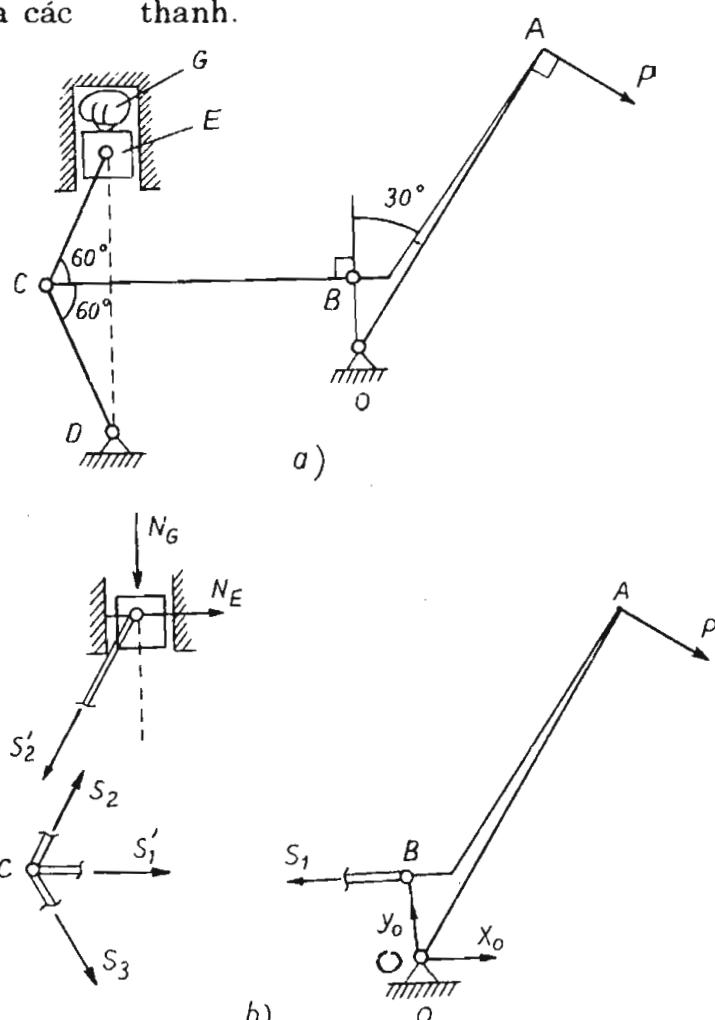
$$\therefore \text{Hệ lực } (\vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{S}_3) \equiv 0$$

Xét con trượt E (hình 6-22b):

Liên kết tựa với ranh và vật G, liên kết thanh với nút C.

$$\text{Hệ lực } (\vec{S}_2, \vec{N}_E, \vec{N}_G) \equiv 0$$

- Phương trình



Hình 6-22

$$\sum m_o = O.B.S_1 - O.A.P = 0 \quad (1)$$

PTCB của nút C:

$$\sum F_{kx} = S'_1 + S_2 \cos 60^\circ + S_3 \cos 60^\circ = 0 \quad (2)$$

$$\sum F_{kx} = S_2 \sin 60^\circ - S_3 \sin 60^\circ = 0 \quad (3)$$

PTCB của con trượt E:

$$\sum F_{ky} = N_G - S' \cos 30^\circ = 0 \quad (4)$$

3. Giải hệ phương trình:

$$S_1 = S'_1 = 10P; S_2 = S'_2 = S_3 = -10P; N_G = 5\sqrt{3}P$$

Nhận xét $S_2 = S_3 < 0$, do đó chiều giả thiết của \vec{S}_2 và \vec{S}_3 là sai.

Lực ép vào vật G là $\vec{N}_G = -\vec{N}_G$

III- BÀI TOÁN CÓ MA SÁT

§6-3.1. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

Xét vật A tựa lên vật B. Nếu vật A có xu hướng trượt và lăn tương đối trên B, ngoài phản lực pháp tuyến \vec{N} , vật A còn chịu lực ma sát trượt \vec{F}_{ms} và ngẫu lực ma sát lăn M_{ms} .

Nếu vật chỉ có xu hướng trượt thì lực ma sát ngược với xu hướng trượt và có trị số bị chặn (hình 6-23):

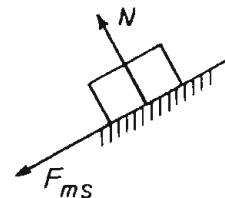
$$F_{ms} \leq fN$$

f- hệ số ma sát trượt. Nếu đặt $f = \tan \varphi$ thì φ gọi là góc ma sát.

Nếu vật chỉ có xu hướng lăn thì ngoài \vec{N} và \vec{F}_{ms} vật còn chịu ngẫu lực ma sát lăn, ngược với xu hướng lăn và có trị số bị chặn (hình 6-24):

$$M_{ms} \leq kN$$

k - hệ số ma sát lăn, đơn vị là mét (m).



Hình 6-23

§6-3.2. HƯỚNG DẪN ÁP DỤNG

Phương pháp giải bài toán có ma sát gồm ba bước sau:

* Bước 1. Chọn vật khảo sát, đặt lực hoạt động và lực liên kết - cản cứ vào xu hướng trượt hoặc giả thiết xu hướng trượt để đặt \vec{F}_{ms} . Nếu vật có xu hướng lăn, phải đặt thêm M_{ms} .

* Bước 2 Lập các phương trình cân bằng cho các vật khảo sát.

Điều kiện về ma sát: $F_{ms} \leq fN$

$$M_{ms} \leq kN \text{ (nếu có xét đến ma sát lăn).}$$

Bước 3. giải các phương trình và điều kiện trên, ta nhận được một *miền cân bằng*.

Chú ý: Để tránh việc giải hệ phương trình và các điều kiện ở dạng bất đẳng thức, ta có thể xét ở trạng thái *cân bằng tới hạn*, khi đó điều kiện về ma sát là: $F_{ms} = fN$

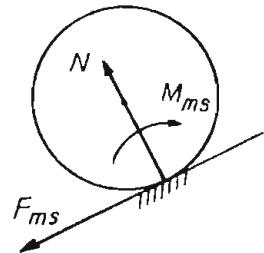
$$M_{ms} = kN$$

Khi giải hệ phương trình cân bằng và điều kiện cân bằng tới hạn, ta nhận được *biên* của miền cân bằng.

§6-3.3. NHỮNG BÀI GIẢI MẪU

Thí dụ 6-7. (Một vật có lực ma sát trượt).

Thanh AB = 4a, trọng lượng và bề dày không đáng kể, nằm ngang trên hai ống đỡ. Lực



Hình 6-24

kéo \vec{Q} tạo với phương ngang một góc α . Hệ số ma sát tại hai ổ đỡ là f (hình 6-25).

Tìm góc α để thanh không bị trượt đi dù Q rất lớn (tự hâm).

Bài giải

1- Chọn vật khảo sát, đặt lực hoạt động và lực liên kết.

Xét AB: tại C và D - liên kết tựa có ma sát (cần cứ xu hướng chuyển động để đặt \vec{N}_1 , \vec{N}_2 và các lực ma sát \vec{F}_1 , \vec{F}_2).

$$\text{Hệ lực } (\vec{Q}, \vec{N}_1, \vec{F}_1, \vec{N}_2, \vec{F}_2) \equiv 0$$

2- Phương trình cân bằng:

$$\sum F_{kx} = Q\cos\alpha - F_1 - F_2 = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = Q\sin\alpha + N_1 - N_2 = 0 \quad (2)$$

$$\sum m_C = 3aQ\sin\alpha - 2aN_2 = 0 \quad (3)$$

Điều kiện cân bằng giới hạn (sắp trượt):

$$F_1 = fN_1; F_2 = fN_2$$

3- Giải hệ phương trình:

$$\tan\alpha = \frac{1}{2f} \quad \text{hay } \alpha = \arctan\frac{1}{2f}$$

Muốn thanh cân bằng cần $\alpha > \arctan\frac{1}{2f}$

Thí dụ 6-8. (Hệ vật, có lực ma sát trượt)

Trục O có bán kính r và R, hệ số ma sát tại má hâm là f , tỷ số $\frac{AB}{AC} = \frac{m}{n}$

Tìm lực Q để hâm được trục. Bỏ qua bề dày má phanh (hình 6-26).

Bài giải

1- Tách vật tại liên kết, đặt lực hoạt động và lực liên kết lên từng vật.

Xét trục O:

Tại O - liên kết bắn lè, tại B - liên kết tựa có ma sát.

$$\text{Hệ lực } (\vec{P}, \vec{X}_o, \vec{Y}_o, \vec{N}, \vec{F}) \equiv 0$$

Xét đòn AC:

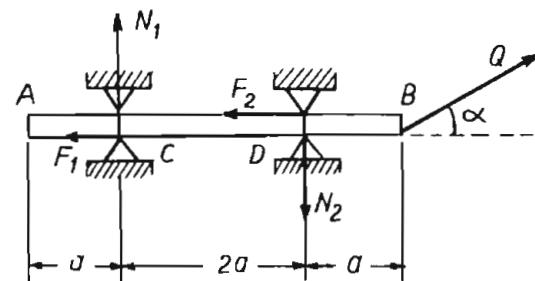
Tại A - liên kết bắn lè, tại B - liên kết tựa có ma sát.

$$\text{Hệ lực } (\vec{Q}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{N}, \vec{F}) \equiv 0$$

2- Phương trình cân bằng:

PTCB của trục O:

$$\sum m_o = rP - RF = 0 \quad (1)$$



Hình 6-25

PTCB của AC:

$$\sum m_A = AC.Q - AB.N' = 0 \quad (2)$$

Điều kiện cân bằng giới hạn: $F = fN$

3- Giải hệ phương trình:

$$Q = \frac{m}{n} - \frac{r}{R} - \frac{P}{f}$$

$$\text{Muốn h\~am được trục thi} Q > \frac{m}{n} - \frac{r}{R} - \frac{P}{f}$$

Thí dụ 6-9. (Một vật, có ma sát trượt và ma sát lăn).

Đĩa đồng chất, bán kính R, trọng lượng P, chịu tác dụng lực \vec{Q} đặt tại tâm O và nghiêng góc α . Hệ số ma sát trượt là f, hệ số ma sát lăn k (hình 6-27).

Tìm trị số Q để đĩa cân bằng.

Bài giải

1- Chọn vật khảo sát, đặt lực hoạt động và lực liên kết:

Xét đĩa:

Tại I liên kết tựa có ma sát trượt và ma sát lăn.

Hệ lực $(\vec{P}, \vec{Q}, \vec{N}, \vec{F}, \vec{M}) \equiv 0$

2- Phương trình cân bằng:

$$\sum F_{kx} = Q \cos \alpha - F = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = Q \sin \alpha - P + N = 0 \quad (2)$$

$$\sum m_I = M - R Q \cos \alpha = 0 \quad (3)$$

Điều kiện ma sát:

$$F \leq fN ; M \leq kN$$

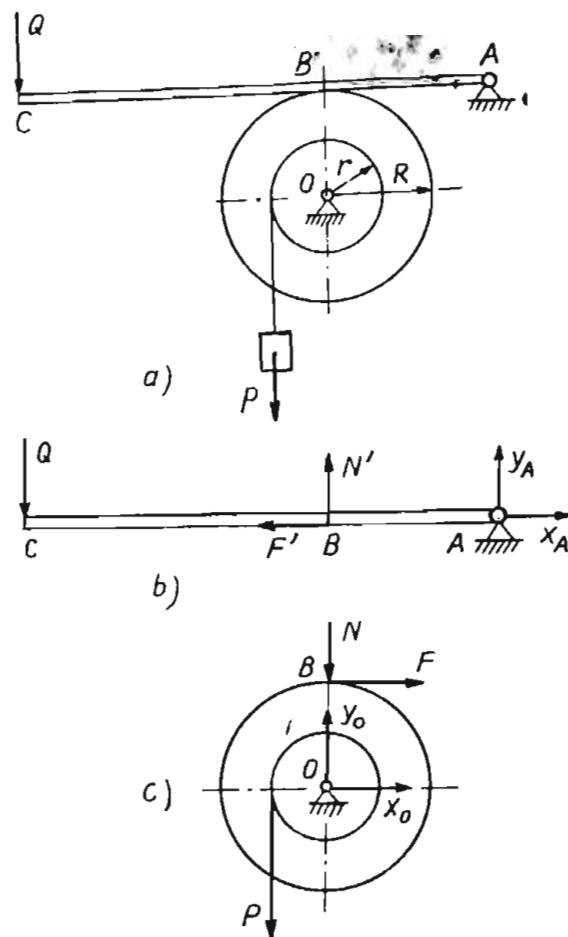
3- Giải hệ phương trình:

$$F = Q \cos \alpha ; M = R Q \cos \alpha ; N = P - Q \sin \alpha$$

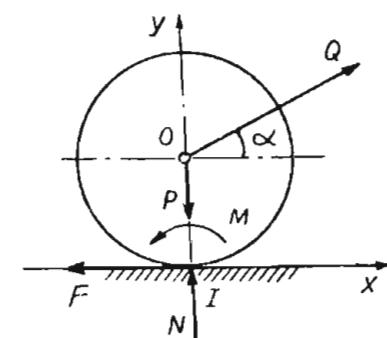
Khi thay vào điều kiện ma sát, ta được:

$$Q \leq \frac{fP}{\cos \alpha + f \sin \alpha} = Q_1$$

$$Q \leq \frac{\frac{k}{R} \cdot P}{\cos \alpha + \frac{k}{R} \sin \alpha} = Q_2$$



Hình 6-26



Hình 6-27

Vì vậy điều kiện cân bằng của đĩa là:

$$Q \leq \min \{ Q_1, Q_2 \}$$

§6- 4. BÀI TẬP

I- Hệ lực phẳng (một vật)

6-1) Xe C mang vật nặng (hình bài 6-1),

$P_1 = 40 \text{ kN}$ chạy trên đầm nằm ngang AB; đầm này đồng chất, trọng lượng $P = 60 \text{ kN}$, tựa trên hai ray A và B. Tính phản lực A và B theo tý số $n = \frac{AC}{AB}$

6-2) Trục nằm ngang trên hai ổ đỡ A, B mang ba đĩa có trọng lượng $P_1 = 3 \text{ kN}$, $P_2 = 5 \text{ kN}$, $P_3 = 2 \text{ kN}$. Kích thước ghi trên hình bài 6-2, trọng lượng của trục không đáng kể, tìm phản lực các ổ đỡ.

6-3) Dầm AB mắc vào tường nhờ bản lề A và được giữ ở vị trí nằm ngang nhờ thanh CD; thanh này có hai đầu là bản lề và nghiêng 60° với AB. Bỏ qua trọng lượng của dầm và thanh, biết AC = 2 m, CB = 1 m.

Tìm ứng lực của thanh CD và phản lực bản lề A khi đầu B đặt lực thẳng đứng $P = 10 \text{ kN}$.

6-4. Khung chữ nhật ABCD, trọng lượng không đáng kể, kích thước như hình bài 6-4, được đỡ bằng gối cố định A và gối di động D. Dọc cạnh BC, tác dụng lực P. Tìm phản lực tại A và D.

6-5. Dầm AB = 4a chịu lực P và hệ lực phân bố đều cường độ q như hình bài 6-5.

Tìm phản lực tại A và B.

6-6. Cầu đồng chất AB = 2a, trọng lượng P nằm ngang trên gối cố định A và di động B.

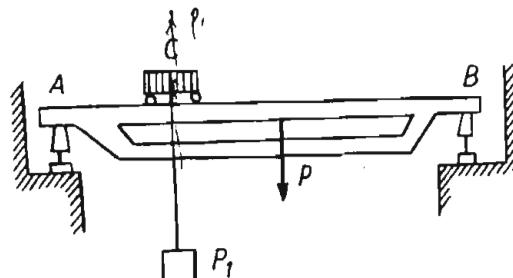
Ở tầm cao h có lực gió Q. Xác định phản lực tại A và B.

6-7) Xác định phản lực ở ngàm của dầm nằm ngang, trọng lượng không đáng kể, chịu lực như hình bài 6-7.

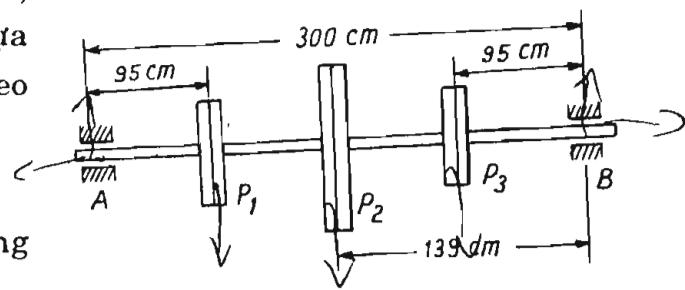
6-8) Xác định phản lực ở ngàm của dầm nằm ngang, trọng lượng không đáng kể, chịu lực như hình bài 6-8.

Hướng dẫn: chia hệ lực phân bố hình thang thành phân bố chữ nhật và tam giác.

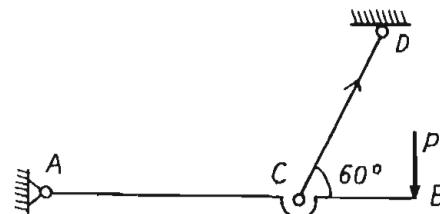
6-9) Cầu ABC có trục thẳng đứng AB = 1,8 m và được đỡ bởi hai ổ A và B. Đầu C có tầm xa 2,4 m dùng để treo xuống, trọng lượng 9,6 kN.



Hình bài 6-1



Hình bài 6-2.

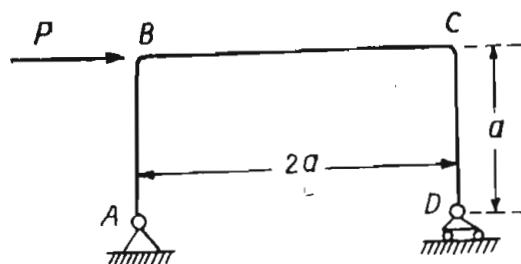


Hình bài 6-3

Xác định các phản lực tại A và B bô qua trọng lượng của cần.

Hướng dẫn: A quy về bản lề, B quy về tựa.

- 6-10) Chày ép AB (bó qua trọng lượng) trượt được theo máng thẳng đứng CD, chịu lực ép $P = 1 \text{ kN}$, đặt tại A, nghiêng 30° với chày. Biết $AB = 40 \text{ cm}$, $CD = 30 \text{ cm}$, $AC = DB = 5 \text{ cm}$. Tính lực ép xuống vật B và phản lực máng trượt, bô qua đường kính của chày (hình bài 6-10).



Hình bài 6-4

- 6-11. Vật nặng P treo ở đầu dây cuộn quanh vành trong bán kính r của trục quay. Vành ngoài, bán kính R có răng tựa vào cõi hâm AB nằm ngang. Tính phản lực tại trục O và lực nén cõi hâm (hình bài 6-11).

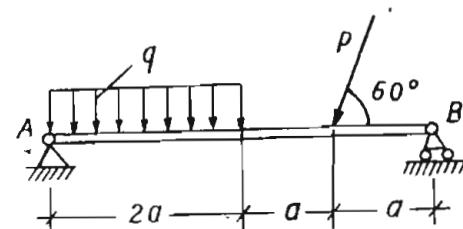
Hướng dẫn: cõi hâm là liên kết thanh.

- 6-12) Lực kéo nambieng Q đặt vào đầu E của móc ABCDE bị ngầm ở đầu A và có dạng như hình bài 6-12 ($AB = BC$ và bằng bán kính R của nửa đường tròn CDE).

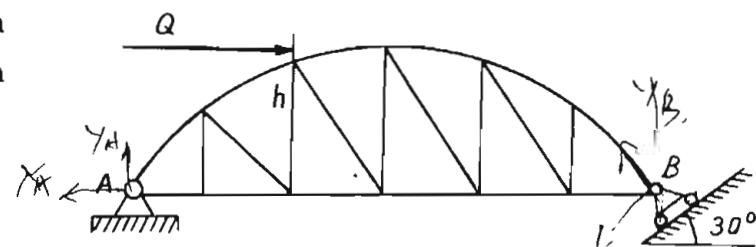
Tìm:

Phản lực ở ngầm A.

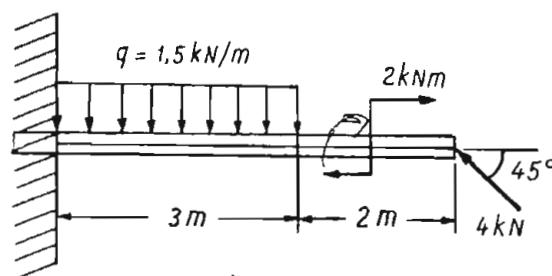
Nội lực ở các tiết diện B, C và D.



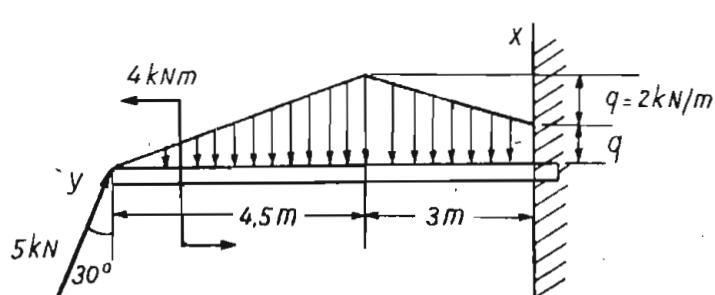
Hình bài 6-5



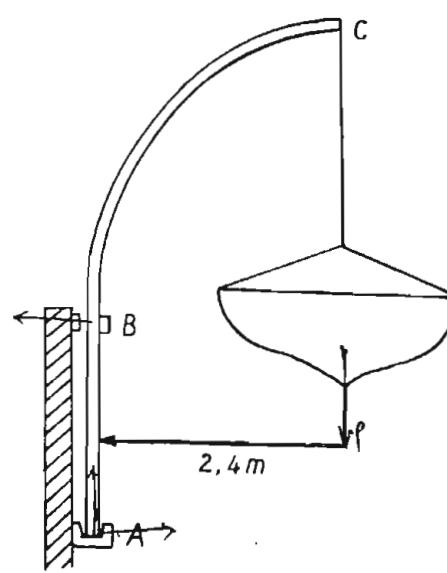
Hình bài 6-6

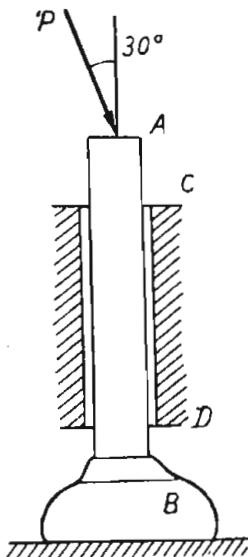


Hình bài 6-7

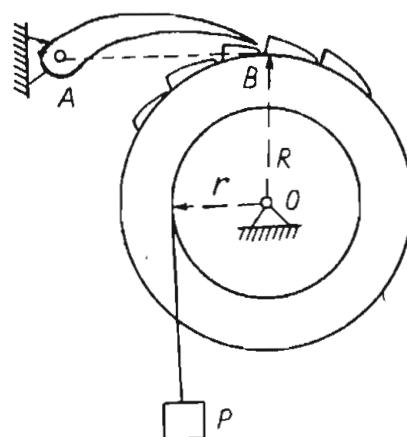


Hình bài 6-8





Hình bài 6-10



Hình bài 6-11

II- Hệ lực phẳng (hệ vật)

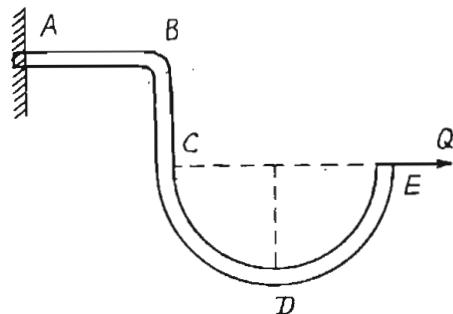
6-13. Cầu hai nhịp đồng chất. Nhịp AB = 80 m, trọng lượng

P = 1200 kN, nhịp BC = 40 m, trọng lượng Q = 600 kN nối với nhau bằng bản lề B và được đỡ nằm ngang nhờ các gối cố định A, gối di động C và D, (BD = 20 m). Xác định phản lực các gối đỡ và lực tác dụng tương hố ở B (hình bài 6-13).

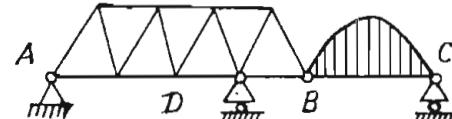
6-14. Một đường dốc nghiêng góc 30° gồm hai đoạn AB = 60 m và BC = 20 m nối với nhau bằng bản lề B và được giữ bởi gối cố định A (bản lề), hai cột CC và DD. Bỏ qua trọng lượng của đầm và các cột. Trên đoạn AE có lực phân bố thẳng đứng, cường độ lực phân bố là $q = 20$ kN/m. Tìm phản lực tại A, ứng lực các cột và lực tác dụng tương hố tại B. Cho AD = 40 m, AE = 70 m (hình bài 6-14).

6-15. Trên đường nằm ngang có xe AB trọng lượng Q mang cần BC trọng lượng p, quay được quanh trục B và giữ được bởi dây ED, vòng qua đầu mút C là dây mang vật nặng P, có đầu dây kia buộc vào A. Cho AE = EB = BD = DC và cần BC nghiêng 60° với mặt đường. Tìm phản lực đặt vào hai bánh xe A_1, B_1 ; sức căng của dây ED và lực tác dụng tương hố tại bản lề B (hình bài 6-15).

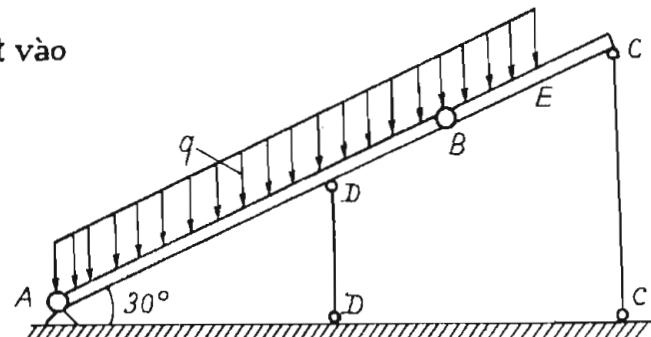
6-16. Trên nền nằm ngang đặt thang hai chân nối với nhau nhờ bản lề C và dây EF. Trọng lượng mỗi chân thang (đồng chất) là 120 N. Tại D có người nặng 720 N, kích



Hình bài 6-12



Hình bài 6-13



Hình bài 6-14

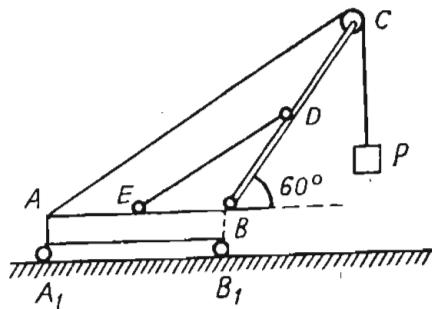
thước ghi trên hình bài 6-16. Tìm phản lực tại A, B và sức căng của dây.

(6-17) Giàn gồm các thanh như hình bài 6-17, bỏ qua trọng lượng các thanh, tìm ứng lực của chúng khi vật nặng có trọng lượng P .

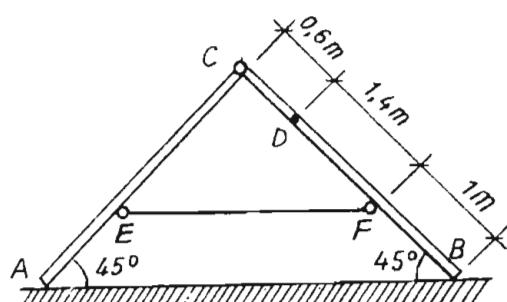
6-18. Cho cơ cấu ép như hình bài 6-18: lực P làm quay đòn OBA, kéo thanh BC, đẩy pittông E ép vào vật G. Cho $OB = \frac{1}{10} OA$, các góc ghi trên hình. Tìm lực nén vào G.

Hướng dẫn: quy hệ về ba vật: đòn OBA, nút C và pittông E.

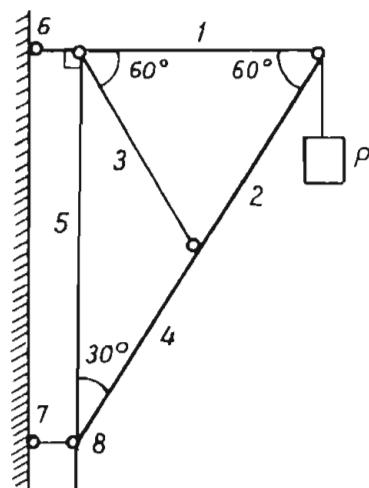
6-19. Hệ hai dầm AC và CB như hình bài 6-19: ngẫu lực có mômen $M = 20 \text{ Nm}$; cường độ lực phân bố đều $q = 10 \text{ N/m}$; $a = 1 \text{ m}$.



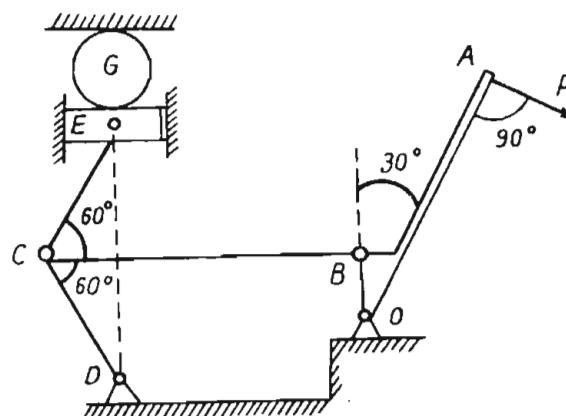
Hình bài 6-15



Hình bài 6-16



Hình bài 6-17



Hình bài 6-18

Tìm phản lực tại A, B, D và nội lực tại C.

6-20. Hai dầm AB và BC có liên kết và chịu lực như hình bài 6-20, biết $P = 100 \text{ N}$; lực phân bố $q = 20 \text{ N/m}$.

Tìm phản lực tại A, C và nội lực tại B.

6-21. Dầm ngang AB trọng lượng $Q = 20 \text{ kN}$. Thanh BE trọng lượng $P = 40 \text{ kN}$. Biết $CB = \frac{1}{3}AB$ và $DE = \frac{1}{3}BE$, góc $\alpha = 45^\circ$. Dầm và thanh đều đồng chất (hình bài 6-12).

- 1) Tìm các phản lực liên kết ở D, B, C, A .

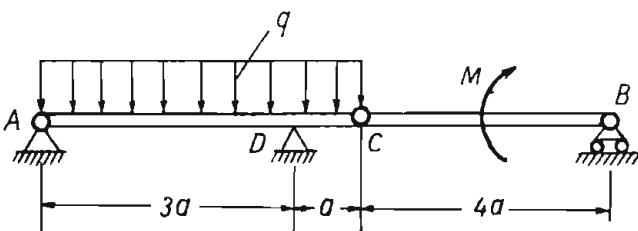
2) Xác định nội lực ở mặt cắt ngang của đàm ở cách đầu A một đoạn $AF = 0,6$ m khi cho $AB = 1$ m.

6-22. Tay quay $OA = R$ nằm ngang, chịu tác dụng của ngẫu lực có mômen M . Nhờ con trượt A mà lực truyền tác dụng sang thanh $CB = 3R$, góc $\widehat{C} = 30^\circ$. Tìm lực \vec{Q} nằm ngang

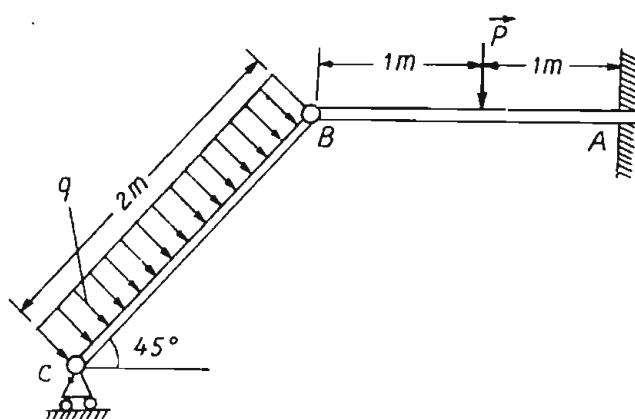
cần đặt vào B để có cân bằng (hình bài 6-22).

6-23 Cam A là khối lăng trụ thiết diện tam giác vuông trượt được theo mặt nhẵn nằm ngang dưới tác dụng của lực đẩy nằm ngang P . Cam có mặt nghiêng, góc nghiêng α , nhờ đó đẩy được cần trượt BC trượt theo máng trượt thẳng đứng. Xác định lực thẳng đứng Q phải đặt vào máng trượt để có cân bằng (hình bài 6-23).

6-24 Cho cơ cấu như hình bài 6-24. Momen M đặt vào tay quay OA, thông qua biên AB tấm tam giác đều CBD quay được quanh C và biên DE, truyền tác dụng xuống pittông E. Tìm lực Q cần đặt tại pittông để có cân bằng, biết $OA = CB = BD = CD = a$, $\hat{O} = \hat{C} = \hat{D} = 60^\circ$, $\hat{E} = 30^\circ$



Hình bài 6-19.

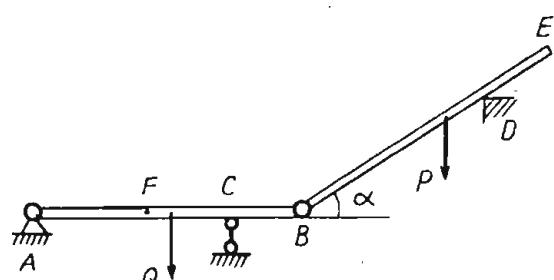


Hình bài 6-20.

III. Hệ lực phẳng (có ma sát)

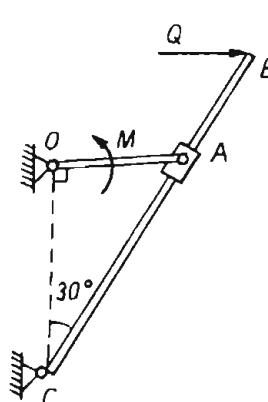
6-25. Thanh đồng chất AB có trọng lượng P , tựa lên nền ngang, hệ số ma sát giữa thanh và nền là f . Thanh được giữ cân bằng ở vị trí nghiêng 45° nhờ dây BC. Tìm góc nghiêng α của dây khi thanh ở trạng thái sắp trượt (hình bài 6-25).

6-26. Giá đỡ AB trọng lượng không đáng kể, đầu A là ống trụ chiều dài $b = 2$ cm trượt dọc cột thẳng đứng không nhẵn với hệ số ma sát trượt là $f = 0,1$. Xác định khoảng cách a từ giữa trực của cột tới điểm treo vật P để giá đỡ cân bằng (hình bài 6-26).

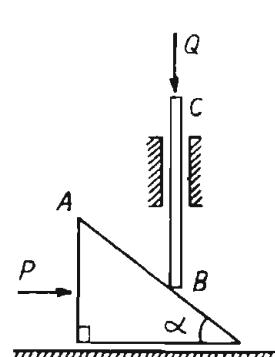


Hình bài 6-21

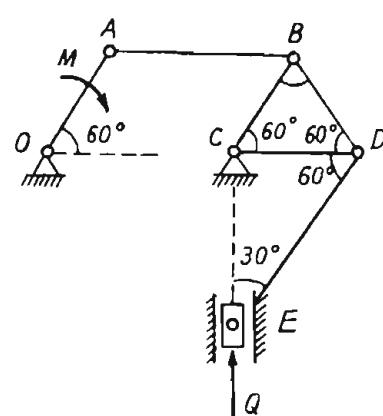
6-27. Trên mặt phẳng nghiêng một góc 30° với mặt nằm ngang có hai vật A và B, trọng



Hình bài 6-22



Hình bài 6-23.



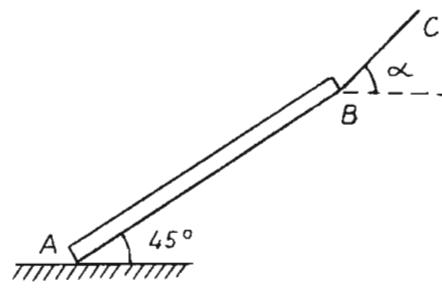
Hình bài 6-24.

lượng 200 N và 400 N nối với nhau bằng sợi dây. Biết hệ số ma sát giữa A và B với mặt nghiêng là $f_A = 0,5$ và $f_B = 2/3$. Hệ hai vật có cân bằng không? Tìm sức căng T của dây và trị số các lực ma sát (hình bài 6-27).

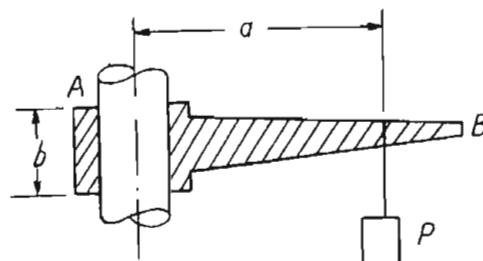
6-28. Lực nầm ngang P đặt vào nêm A làm cho nó có xu hướng trượt sang bên phải và đẩy nêm B trượt lên cao theo máng trượt nghiêng một góc α với mặt nầm ngang. Góc nghiêng của mặt tiếp xúc giữa hai nêm là β (hình bài 6-28). Tìm lực Q phải tác dụng dọc nêm B để có cân bằng trong các trường hợp sau:

1- Khi bỏ qua ma sát.

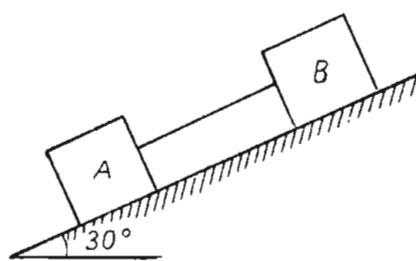
2- Khi giữa hai nêm có ma sát hệ số f và nêm B ở trạng thái sắp trượt lên cao. Tìm điều kiện xảy ra tự hãm của nêm B.



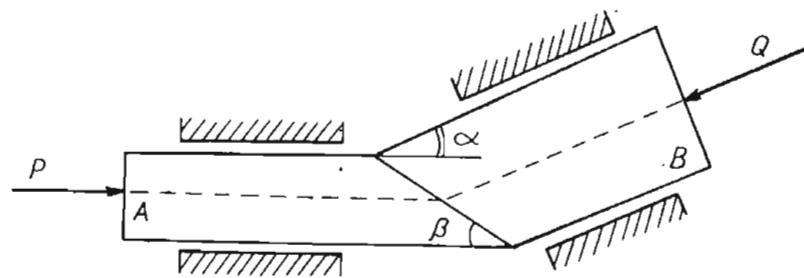
Hình bài 6-25



Hình bài 6-26



Hình bài 6-27



Hình bài 6-28

6-29) Lực nầm ngang P đặt vào nêm A làm cho nó có xu hướng trượt sang phải và đẩy cần BCD trượt thẳng đứng lên cao; cần này được định hướng bằng hai giá đỡ C và D.

Biết góc nghiêng của nêm A là α , đoạn BC = CD, tìm lực Q phải nén xuống cần để có cân bằng trong các trường hợp sau:

1- Khi bỏ qua ma sát.

2- Khi có ma sát hệ số f tại C và D và cần BD ở trạng thái sắp trượt sang phải. Trong điều kiện nào xảy ra tự hãm (cân bằng dù Q = 0 mà P rất lớn) (hình bài 6-29).

6-30. Mômen M làm tay quay OA = r có xu hướng quay và thông qua biên AB, đẩy cần BCD về bên phải theo hướng ngang; cần này được đỡ trên hai giá đỡ C và D. Biết $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = \alpha$; BC = CD, tìm lực nầm ngang Q tác dụng dọc BCD để có cân bằng:

1- Khi bỏ qua ma sát.

2- Khi tại C và D có ma sát hệ số f và cần BCD ở trạng thái sắp trượt sang phải. Trong điều kiện nào xảy ra tự hãm của cần BCD (hình bài 6-30).

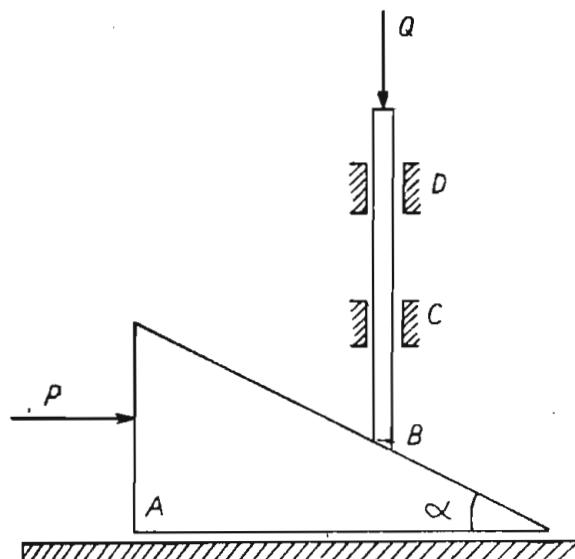
6-31. Cơ cấu bốc hàng gồm hai đòn AOB bắt chéo nhau tại bản lề O, kẹp vào kiện hàng ở má A và được kéo lên nhờ móc C, móc vào dây BCB nối hai đầu B của hai đòn. Biết:

$\widehat{BOB} = 2\alpha$, $OB = b$, bề ngang kiện hàng là $2a$, khoảng cách từ O đến kiện hàng là h . Xác định góc $\widehat{BCB} = 2\beta$ để cơ cấu nhờ ma sát ở hai má A có thể bốc kiện hàng lên cao dù trọng lượng P lớn. Cho hệ số ma sát trượt là f (hình bài 6-31).

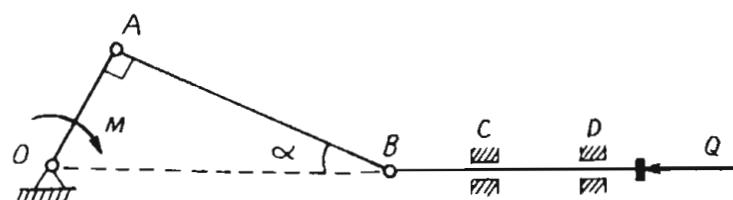
6-32. Trục quay có xu hướng quay dưới tác dụng của mômen M. Để giữ cân bằng, dùng lực Q thẳng đứng đặt tại đầu C của đòn nằm ngang AC quay được quanh trục A để ép má hám B vào vành trục quay. Biết hệ số ma sát f = 0,1, tỷ số $\frac{AB}{AC} = 0,2$, bán kính trục quay R = 0,4m

mômen M = 10 kNm. Xác định lực Q cần thiết. Bỏ qua bề dày má hám (hình bài 6-32).

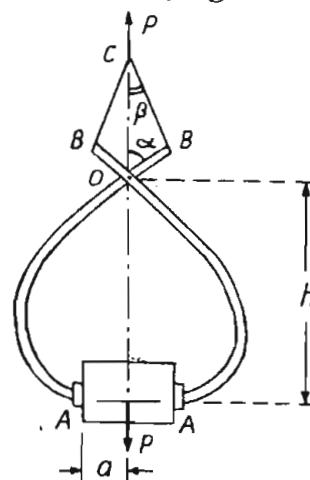
6-33. Máy dát kim loại gồm hai trục cán O và O' quay ngược chiều nhau. Biết bán kính mỗi trục cán là r, khoảng cách OO' = 2d, hệ số ma sát trượt giữa trục cán và tấm kim



Hình bài 6-29.



Hình bài 6-30



Hình bài 6-31

loại là $f = \operatorname{tg}\varphi$ (φ là góc ma sát).

Tìm bề dày lớn nhất 2a của những tấm kim loại mà máy có thể dát được (hình bài 6-33).

6-34. Hệ thống đẽ hám như hình vẽ bài 6-34. Trục hai tầng có trọng lượng G = 2 kN, các bán kính là r và R = 1,5'r. Xe có trọng lượng Q = 20 kN. Hệ số ma sát giữa má hám và trục là f = 0,1, góc $\alpha = 20^\circ$, khoảng cách a = 10 cm; b = 20 cm.

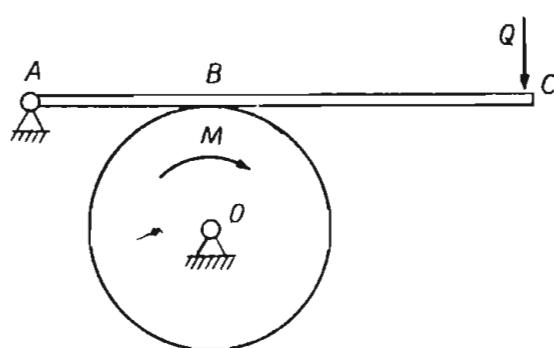
Tìm lực P để hám phản lực liên kết tại trục O và tại các rãnh A và B.

6-35. Trên mặt nằm ngang có bánh xe đồng chất tâm O, bán kính R, trọng lượng P, chịu lực kéo \vec{Q} nghiêng một góc α với mặt nằm ngang và hướng xuống dưới, đặt tại điểm A trên đường thẳng đứng qua O. Biết OA = a, hệ số ma sát trượt f, hệ số ma sát lăn k, tìm góc nghiêng α để có cân bằng (hình bài 6-35).

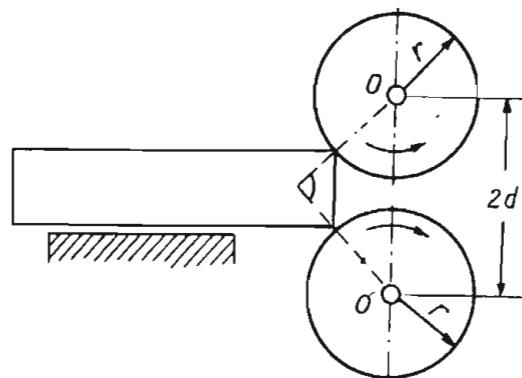
6-36. Trên mặt nằm ngang có bánh xe đồng chất tâm O, bán kính R, trọng lượng P, chịu ngẫu lực M và lực Q như hình bài 6-36. Biết hệ số ma sát trượt f, hệ số ma sát lăn k. Xác định trị số mômen M và trị số Q để bánh xe cân bằng (hình bài 6-36).

6-37. Xe một bánh gồm: bánh xe O- đồng chất, trọng lượng P, bán kính R và thân xe AOB (gồm cả hàng) trọng lượng Q. Xe chạy trên đường nằm ngang, thân xe nằm song song

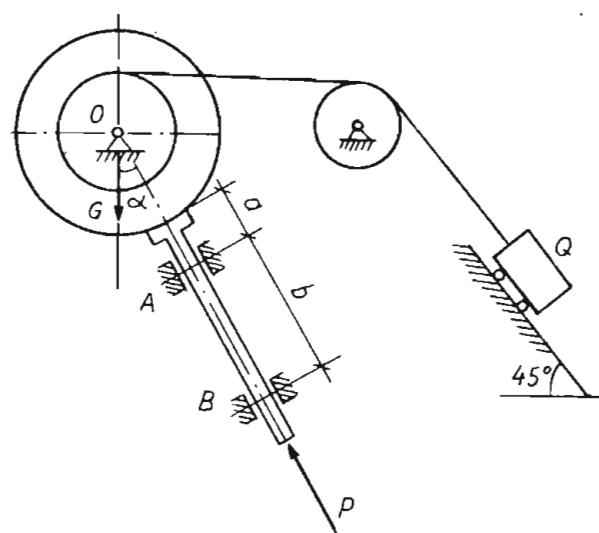
mặt đường, vị trí trọng tâm thân xe ghi trên hình bài 6-37. Biết giữa bánh xe với mặt đường có ma sát trượt hệ số f và ma sát lăn hệ số k . Xác định lực đẩy nằm ngang tại A để xe ở trạng thái sắp lăn không trượt.



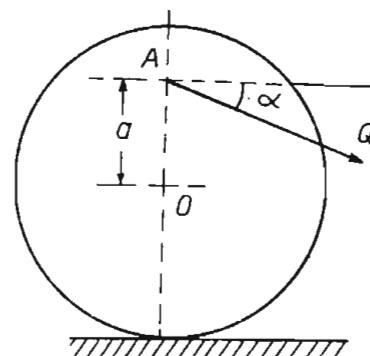
Hình bài 6-32



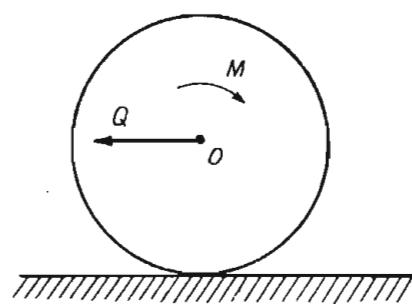
Hình bài 6-33



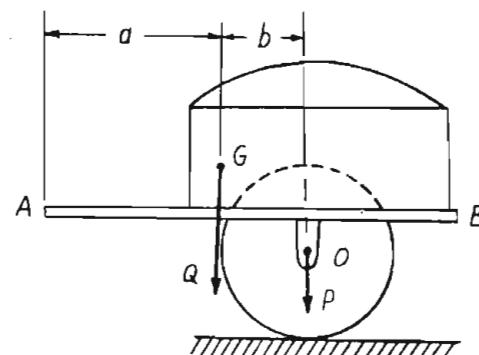
Hình bài 6-34



Hình bài 6-35



Hình bài 6-36



Hình bài 6-37.

Chương 7

CÂN BẰNG CỦA HỆ LỰC KHÔNG GIAN

§7.1. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

1/ Chiếu lực lên ba trục. Mômen của lực đối với một trục.

Gọi xyz là trục tọa độ vuông góc và α, β, γ là các góc mà lực \vec{F} tạo với ba trục, ta có công thức chiếu lực

$$F_x = \pm F \cos \alpha; F_y = \pm F \cos \beta; F_z = \pm \cos \gamma \text{ lấy dấu + (hoặc -) khi lực } \vec{F} \text{ thuận (hay ngược) chiều trục tọa độ.}$$

Lấy mômen của \vec{F} đối với một trục. Phân tích lực ra các thành phần song song, cắt trục hoặc vuông góc với các trục. Tính tổng mômen các thành phần lực đối với trục (hình 7-1).

Thí dụ: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2; \vec{F}_2 \parallel Z \text{ và } \vec{F}_1 \perp Z$

$$m_Z(\vec{F}) = m_Z(\vec{F}_1) + m_Z(\vec{F}_2) = m_Z(\vec{F}_1) = \pm h_1 F_1$$

lấy dấu + (hoặc -) khi nhìn ngược chiều dương của trục Z ta thấy \vec{F}_1 quay quanh Z ngược (hoặc thuận) chiều kim đồng hồ.

2/ Các phương trình cân bằng (PTCB) :

Đối với hệ lực không gian tổng quát, ta lập được sáu PTCB

$$\sum F_{kx} = 0 \quad (1)$$

$$\sum m_x(\vec{F}_k) = 0 \quad (4)$$

$$\sum F_{ky} = 0 \quad (2)$$

$$\sum m_y(\vec{F}_k) = 0 \quad (5)$$

$$\sum F_{kz} = 0 \quad (3)$$

$$\sum m_z(\vec{F}_k) = 0 \quad (6)$$

Trong đó : (1), (2), (3): tổng hình chiếu các lực lên ba trục.

(4), (5), (6) tổng mômen của các lực đối với ba trục.

Đối với hệ lực không gian đồng quy hoặc song song ta chỉ lập được ba PTCB.

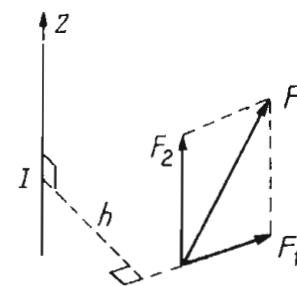
§7.2. HƯỚNG DẪN ÁP DỤNG

Trình tự giải bài toán về cân bằng của hệ lực không gian có ba bước sau .

Bước 1. Chọn vật khảo sát, đặt lực hoạt động và lực liên kết.

Bước 2. Lập các PTCB.

Nếu hệ lực không gian tổng quát: lập sáu PTCB.



Hình 7-1

Nếu hệ lực không gian đồng qui hoặc song song : lập ba PTCB.

Bước 3. Giải hệ PTCB lập được.

Chú ý. Nếu hệ gồm nhiều vật liên kết với nhau, ta phải tách vật liên kết rồi xét cân bằng của từng vật riêng rẽ.

§7-3. NHỮNG BÀI GIẢI MẪU

Thí dụ 7-1.

Tấm chữ nhật trọng lượng P được giữ nằm ngang nhờ liên kết cầu A, bản lề B và thanh CE tạo với phương đứng góc 30° . Tìm phản lực tại A, B và lực nén thanh CE (hình 7-2).

Bài giải

1) Chọn vật khảo sát, đặt lực hoạt động và lực liên kết

Xét tấm ABCD tại A - liên kết cầu, tại B - liên kết bản lề, tại C - liên kết thanh.

Hệ lực cân bằng (\vec{P} , \vec{X}_A , \vec{Y}_A , \vec{Z}_A , \vec{X}_B , \vec{Z}_B , \vec{S}) $\equiv 0$

2) Phương trình cân bằng : Đặt $AB = 2b$; $AD = 2a$.

$$\sum F_{kx} = X_A + X_B + S \cos 60^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = Y_A = 0 \quad (2)$$

$$\sum F_{kz} = Z_A + Z_B + S \sin 60^\circ - P = 0 \quad (3)$$

$$\sum m_x = bP + 2bZ_B + 2bS \sin 60^\circ = 0 \quad (4)$$

$$\sum m_y = aP - 2a\sqrt{3}S \cos 60^\circ = 0 \quad (5)$$

$$\sum m_z = -2bX_B - 2bS \cos 60^\circ = 0 \quad (6)$$

3) Giải hệ phương trình .

$$S = \frac{P\sqrt{3}}{3}; X_A = 0; Y_A = 0; Z_A = \frac{P}{2}; X_B = -\frac{P\sqrt{3}}{6}; Z_B = 0$$

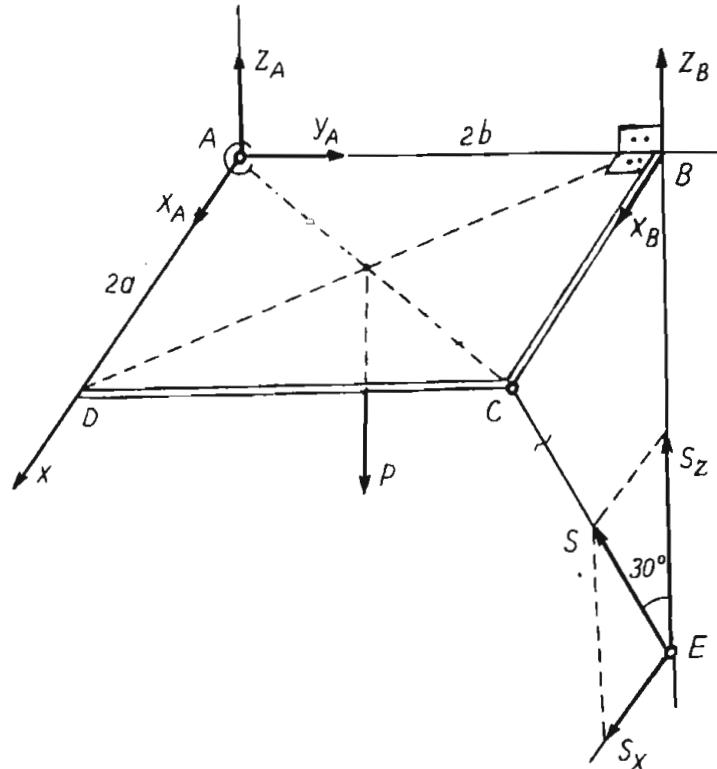
Thí dụ 7-2

Tấm phẳng chịu lực \vec{P} và được giữ bởi 6 thanh như hình 7-3. Bỏ qua trọng lượng tấm và các thanh. Toàn hình có dạng khối lập phương. Tìm lực kéo nén các thanh.

Bài giải

1) Chọn vật khảo sát, đặt lực hoạt động và lực liên kết .

Xét tấm phẳng các liên kết đều là liên kết thanh. Giả thiết \vec{S}_i đều hướng vào mặt



Hình 7-2

át của thanh (tức là giả thiết các thanh đều chịu nén).

Hệ lực cân bằng :

$$(\vec{P}_1 \vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{S}_3, \vec{S}_4, \vec{S}_5, \vec{S}_6) \equiv 0$$

2) Phương trình cân bằng: đặt cạnh hình hộp là a.

$$\sum F_{kx} = S_2 \cos 45^\circ + S_5 \cos 45^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = P + S_4 \cos 45^\circ = 0 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sum F_{kz} &= S_1 + S_2 \cos 45^\circ + S_3 + S_4 \cos 45^\circ + \\ &+ S_5 \cos 45^\circ + S_6 = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\sum m_x = aP + aS_1 + aS_2 \cos 45^\circ + aS_3 = 0 \quad (4)$$

$$\sum m_y = -aS_1 - aS_6 = 0 \quad (5)$$

$$\sum m_z = aP - aS_2 \cos 45^\circ = 0 \quad (6)$$

3) Giải hệ phương trình

$$S_1 = -P; S_2 = P\sqrt{2}; S_3 = P; S_4 = -P\sqrt{2}; S_5 = -P\sqrt{2}; S_6 = P$$

Nhận xét : các vectơ $\vec{S}_1, \vec{S}_4, \vec{S}_5$ giả thiết sai về chiều, do đó các thanh 1, 4, 5 chịu kéo, các thanh khác bị nén.

Thí dụ 7-3.

Trục nằm ngang mang hai đĩa tròn.

Đĩa 1 có bán kính R, chịu tác dụng ngẫu lực M, đĩa 2 có bán kính r, chịu tác dụng lực \vec{P} đặt ở vành và tạo với phương ngang x một góc α . Khoảng cách được cho trên hình vẽ. Bỏ qua trọng lượng trục và các đĩa.

Xác định ngẫu lực M để có cân bằng và tìm các phản lực liên kết tại A và B (hình 7-4).

Bài giải

1) Chọn vật khảo sát, đặt các lực hoạt động và lực liên kết

Xét cả hệ (trục và hai đĩa) : tại A và B là liên kết bắn lề (ở trục).

$$\text{Hệ lực cân bằng : } (\vec{P}, \vec{M}, \vec{X}_A, \vec{Z}_A, \vec{X}_B, \vec{Z}_B) \equiv 0$$

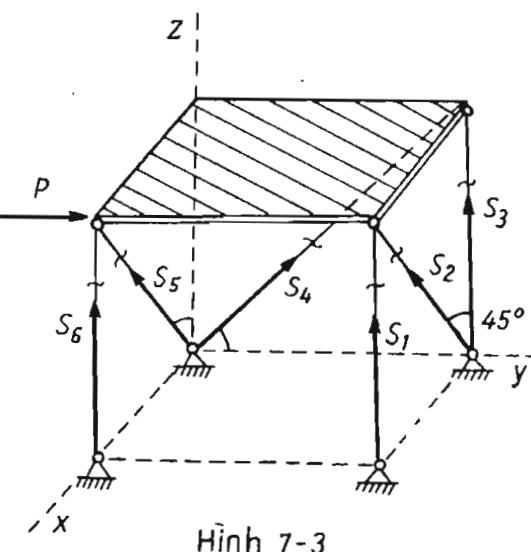
2) Phương trình cân bằng

$$\sum F_{kx} = X_A + X_B + P \cos \alpha = 0 \quad (1)$$

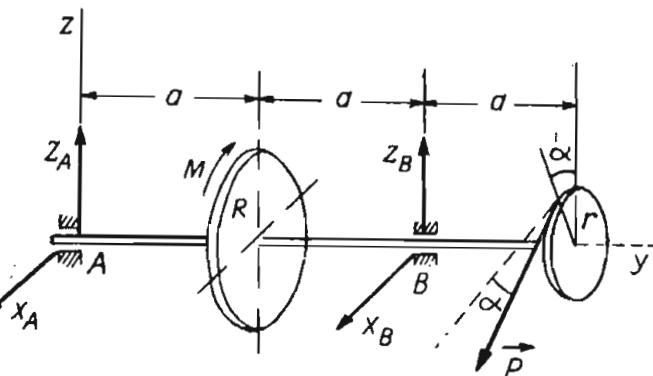
$$\sum F_{ky} \equiv 0$$

$$\sum F_{kz} = Z_A + Z_B - P \sin \alpha = 0 \quad (2)$$

3) Giải hệ phương trình



Hình 7-3



Hình 7-4

$$\sum m_x = 2aZ_B - 3aP \sin \alpha = 0 \quad (3)$$

$$\sum m_y = -M + RP = 0 \quad (4)$$

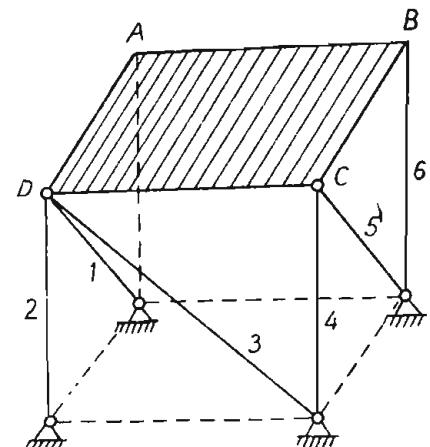
$$\sum m_z = 2aX_B - 3aP \cos \alpha = 0 \quad (5)$$

$$M = RP; X_A = \frac{P}{2} \cos\alpha; Z_A = -\frac{P}{2} \sin\alpha; X_B = -\frac{3}{2} P \cos\alpha; Z_B = \frac{3}{2} P \sin\alpha,$$

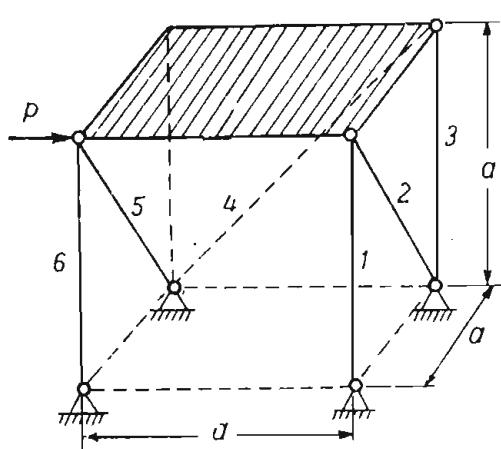
§7-4. BÀI TẬP : HỆ LỰC KHÔNG GIAN

7-1. Tấm phẳng đồng chất hình vuông trọng lượng P được đỡ ở vị trí nằm ngang nhờ sáu thanh (không trọng lượng) bố trí như hình bài 7-1. Toàn hình có dạng khối lập phương. Tìm ứng lực các thanh.

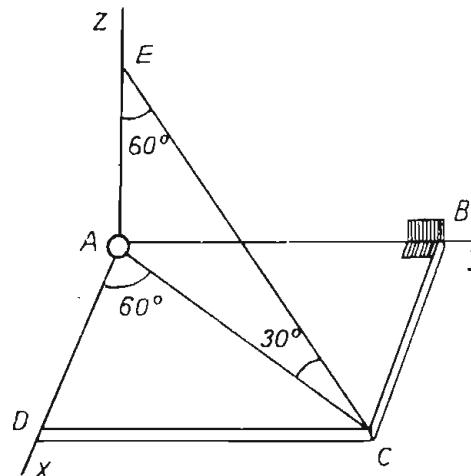
7-2. Tấm phẳng chịu lực \vec{P} và được đỡ ở vị trí nằm ngang nhờ 6 thanh như hình bài 7-2. Bỏ qua trọng lượng của tấm và các thanh, toàn hình có dạng khối lập phương. Tìm ứng lực các thanh.



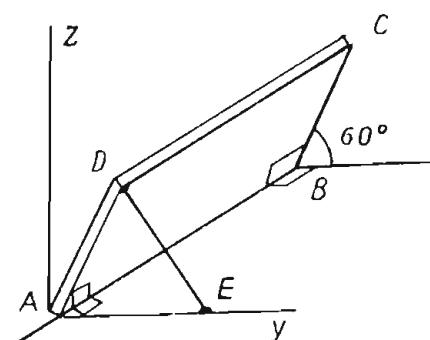
Hình bài 7-1



Hình bài 7-2



Hình bài 7-3

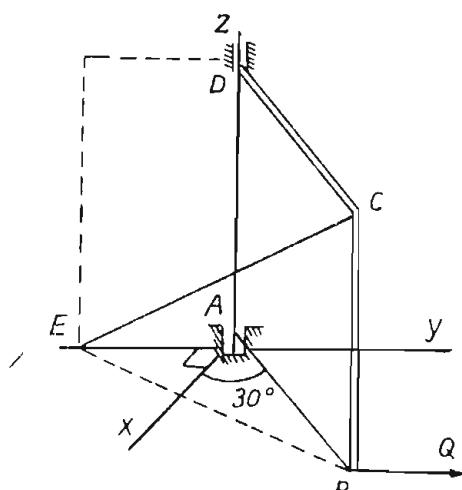


Hình bài 7-4

7-3. Tấm phẳng đồng chất hình chữ nhật, trọng lượng 200N, lắp vào tường nhờ gối cầu A và bản lề B và được giữ cân bằng ở vị trí nằm ngang nhờ dây CE nghiêng 60° với đường thẳng đứng AE. Biết đường chéo AC nghiêng 60° với cạnh AD, tìm phản lực ở A, B và sức căng dây (hình bài 7-3).

7-4. Tấm phẳng hình chữ nhật ABCD, đồng chất, trọng lượng $P = 120\text{N}$, gắn với nền nhờ hai bản lề A, B và được đỡ cân bằng ở vị trí nghiêng 60° nhờ thanh chống (không trọng lượng) DE = DA, nằm trong mặt thẳng đứng qua AD. Tìm phản lực các bản lề và ứng lực thanh (hình bài 7-4).

7-5. Cánh cửa đồng chất hình chữ nhật ABCD, trọng lượng P , chiều dài $AD = a\sqrt{3}$, chiều rộng $AB = a$, có trục quay thẳng đứng AD tạo bởi hai ố đỡ A (gối cầu) và D (bản lề). Cửa được mở ra một góc 120° với khuôn cửa, đầu B chịu lực \vec{Q} song song với cạnh dưới AE của khuôn, đầu C được giữ bởi dây CE. Tìm sức căng của dây và phản lực các ố đỡ (hình bài 7-5).



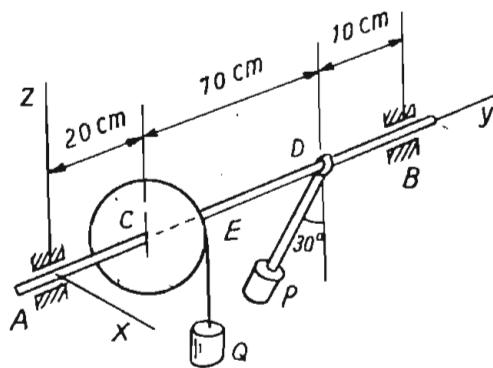
Hình bài 7-5

Hướng dẫn:

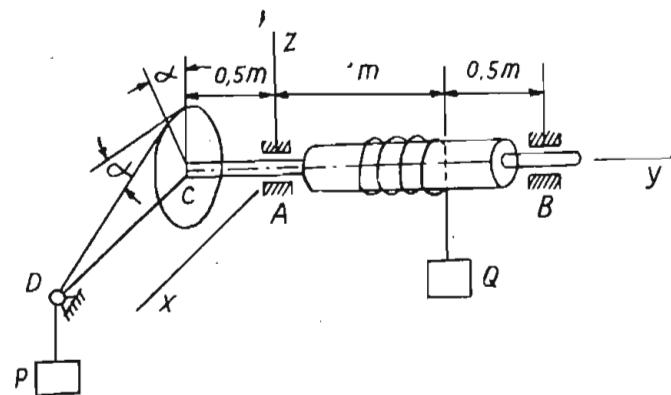
Chú ý dây CE nghiêng 45° với EB và CB, sức căng T phân tích ra hai thành phần đặt tại C (nằm theo CB và song song với BE).

7-6. Trục AB nằm ngang trên hai ổ đỡ A và B (bản lề), mang đĩa C và thanh DE (đều có trọng lượng không đáng kể). Trục cân bằng dưới tác dụng của hai vật nặng $Q = 250 \text{ N}$ treo ở đầu dây quấn quanh vành đĩa và $P = 1 \text{ kN}$ gắn vào đầu E.

Biết DE nghiêng 30° với đường thẳng đứng, bán kính đĩa bằng 20 cm, các kích thước khác ghi trên hình bài 7-6. Tìm chiều dài l = DE và phản lực các ổ đỡ.



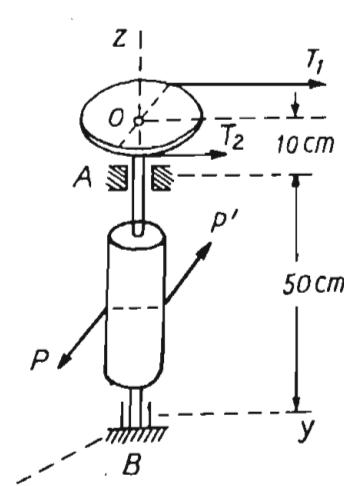
Hình bài 7-6



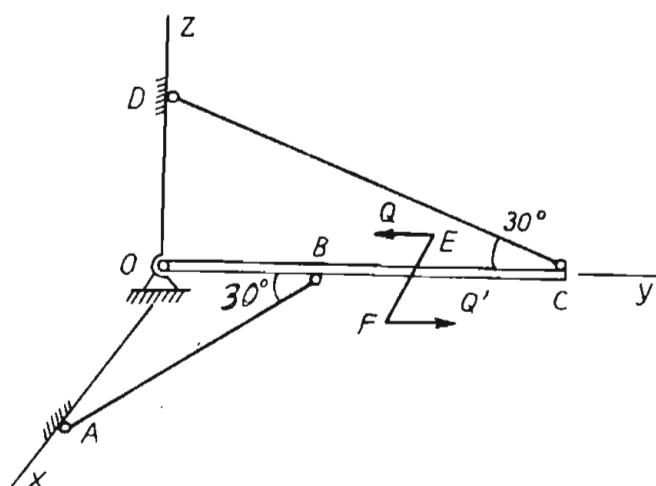
Hình bài 7-7

7-7. Hai ổ A, B (bản lề) đỡ trục nằm ngang AB mang theo đĩa C và khối trụ AB; bán kính của đĩa gấp 6 lần bán kính khối trụ. Quanh trụ, cuộn dây treo vật Q; quanh vành đĩa cũng cuộn dây, đầu tự do treo vật P = 60N, sau khi vòng qua ròng rọc nhỏ D. Kích thước cho trên hình bài 7-7, nhánh dây giữa đĩa và ròng rọc nằm trong mặt phẳng của đĩa và nghiêng với đường kính nằm ngang một góc $\alpha = 30^\circ$. Tìm Q, tìm phản lực các ổ đỡ.

7-8. Trục AB thẳng đứng nhờ hai ổ đỡ A (bản lề) và B (ổ chặn) mang theo bánh đai O



Hình bài 7-8



Hình bài 7-9

và rôto AB. Tổng trọng lượng bánh đai và rôto là $Q = 200\text{N}$. Bánh đai O có bán kính 10cm và hai nhánh đai truyền vòng qua nó có hai sức căng song song nằm ngang trị số $T_1 = 100\text{N}$, $T_2 = 50\text{N}$.

Tìm mômen ngẫu lực (\vec{P} , \vec{P}') cần có ở rôto để giữ cân bằng. Tìm phản lực ở đỡ. Kích thước cho trên hình bài 7-8.

7-9. Dầm ngang OC, trọng lượng $P = 1000\text{ N}$, dài 2 m chịu tác dụng của ngẫu lực (\vec{Q} , \vec{Q}') trong mặt phẳng ngang $Q = 100\text{N}$ tay đòn EF = 20 cm.

Dầm liên kết với tường bằng bản lề cầu O và hai dây AB, CD. Cho $OB = 0,5\text{ m}$. Tìm phản lực ở O và sức căng các dây (hình bài 7-9).

7-10. Cột của cần trục có liên kết cối ở A và giữ nhờ hai dây BC và BD. Vật nặng có trọng lượng P , liên kết với cột nhờ dây BG và thanh EG. Các góc ghi trên hình bài 7-10, $AE = BE$. Tìm phản lực ở A và ứng lực thanh EG.

7-11. Trên hình bài 7-11 là giàn không gian tạo bởi 6 thanh (không trọng lượng).

Lực \vec{P} đặt tại nút A nằm trong mặt ABCD và nghiêng 45° . Tìm ứng lực các thanh. Cho $P = 1\text{ kN}$, góc độ ghi trên hình.

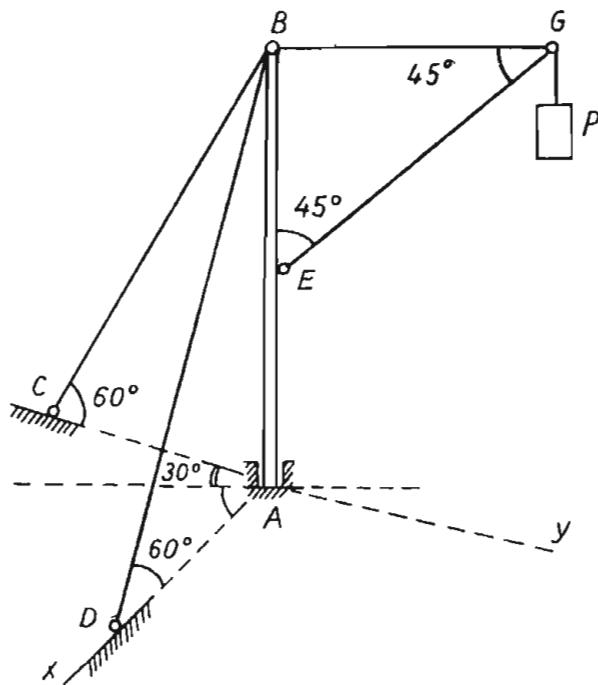
7-12. Trên hình vẽ là giàn không gian tạo bởi 6 thanh trọng lượng không đáng kể. Tại nút A chịu lực thẳng đứng P . Các góc độ ghi trên hình bài 7-12, tìm ứng lực các thanh.

CÁC BÀI TẬP ÔN THI KỲ I

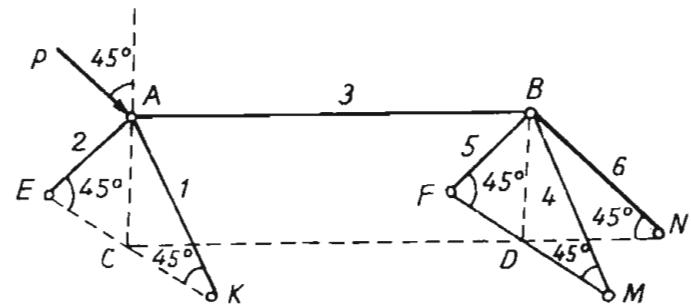
1. Cho cơ cấu cân bằng ở vị trí như hình bài 1.

Biết $OA = r = 0,20\text{ m}$; $\alpha = 60^\circ$; ngẫu lực có mômen $M = 60\text{ Nm}$.

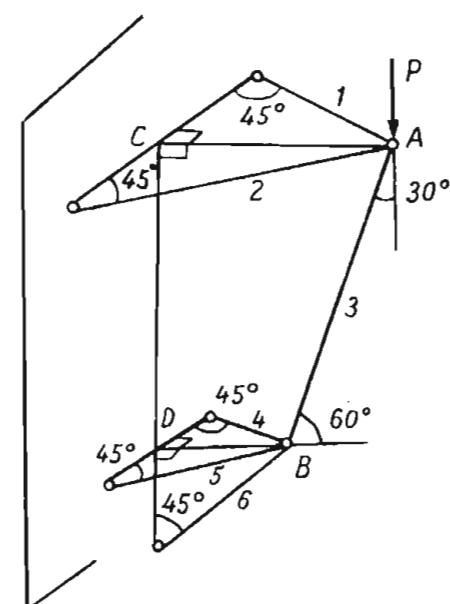
Tìm ứng lực của thanh AB, thanh BC, phản lực của rãnh trượt tác dụng vào các con chạy và lực P.



Hình bài 7-10



Hình bài 7-11



Hình bài 7-12

2. Cho hệ thanh có liên kết và chịu lực như hình bài 2. Biết $P = 200\sqrt{3}$ N, $AB = CD = 0,6$ m, $q = 900$ N/m, $BD = BE = 0,2$ m; $M = 120$ Nm; $\beta = 60^\circ$.

Hãy xác định

Sức căng dây treo CH.

Phản lực tại A và ứng lực thanh EK.

3. Cho cơ hệ có liên kết và chịu lực như hình bài 3. Biết $P = 600$ N, $Q = 900$ N, $R = 20$ cm, $= 10$ cm, $AB = 50\sqrt{3}$ cm, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$

Hãy xác định

Sức căng dây treo quả cầu I và phản lực tại D.

Phản lực tại A, E và H.

4. Cho cơ hệ có liên kết và chịu lực như hình bài

4. Vật A trọng lượng P nằm trên mặt phẳng nghiêng được treo bằng dây AB. Hệ số ma sát trượt giữa A và mặt nghiêng là f .

Hãy xác định

Trọng lượng Q của dầm OB để hệ cân bằng.

Phản lực tại O.

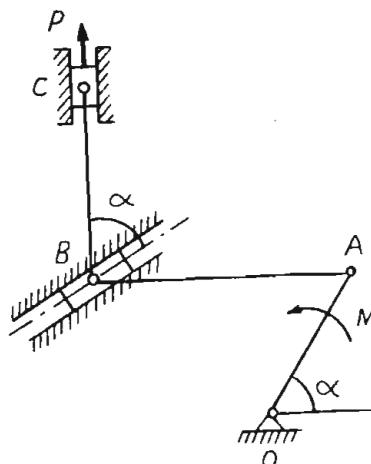
Biết $CO = CB$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 45^\circ$

5. Cho cơ cấu cam có kích thước như hình bài 5.

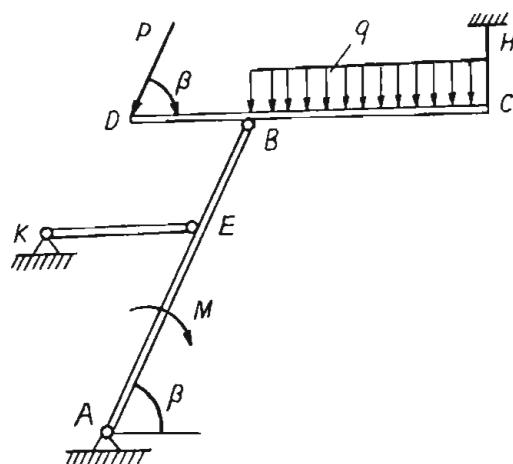
Biết ngẫu lực đặt vào cam có mômen M; hệ số ma sát tại C và D là f .

Tìm lực P để giữ cơ cấu cân bằng. Với điều kiện nào thì cần đẩy bị tự hãm?

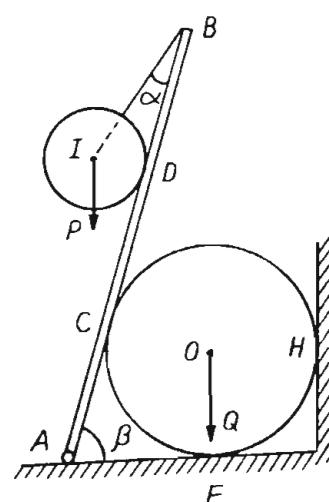
6. Cho trục tời O hai tầng kéo vật nặng D trọng lượng Q lên theo mặt phẳng nghiêng với góc nghiêng α . Để hãm cho vật D khỏi trượt xuống, người ta dùng đòn AB để hãm (xem hình bài 6). Hệ số ma sát trượt giữa má hãm C và tang tời là $f = 0,2$. Biết $Q = 1200$ N,



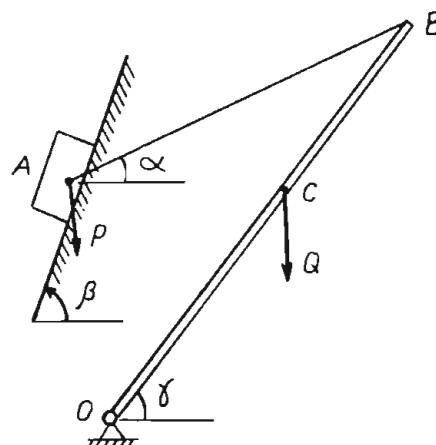
Hình bài 1



Hình bài 2



Hình bài 3



Hình bài 4

$r = 10 \text{ cm}$, $R = 15 \text{ cm}$, $CA = CB$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$, ma sát giữa vật D và mặt nghiêng không đáng kể.

Hãy xác định

Sức căng dây buộc vật nặng.

Lực P cần tác dụng và phản lực tại A.

7. Cân AB được giữ cân bằng bởi bản lề cầu ở A, thanh chống DE và dây CF. $AC = CD = DB$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$

Đầu B có treo một vật nặng trọng lượng P. Hãy xác định. Ứng lực thanh DE và sức căng dây CF. Phản lực liên kết tại A.

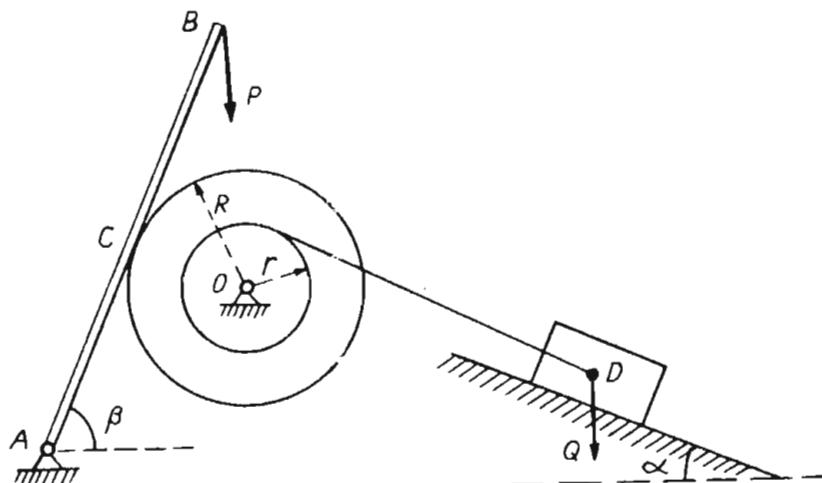
8. Tấm phẳng ABCD trọng lượng P được giữ cân bằng ở vị trí nằm ngang bởi bản lề cầu A, bản lề trụ B và thanh chống EH (hình bài 8).

Biết $AB = 2a$, $AD = a$, $DE = EC$, $\beta = 30^\circ$

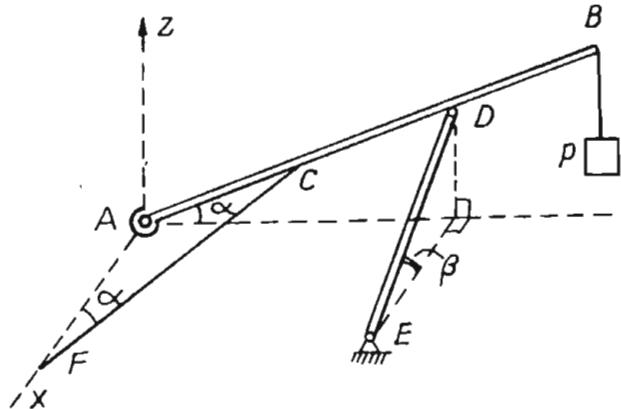
Xác định : - ứng lực thanh EH.

Phản lực tại A và B.

9. Người ta dùng tời để kéo vật nặng Q, có trọng lượng là 10 kN. Bán kính của puli R = 5 cm, chiều dài của tay quay KD = 40 cm, AD = 30 cm, AC = 40 cm, CB = 60 cm. Sợi dây treo vật tiếp xúc với puli nghiêng một góc 60° so với phương ngang. Hãy xác định lực P cần thiết tác dụng vào tay quay KD khi nó nằm ngang. Xác định các phản lực tại các ổ đỡ A, B (hình bài 9).



Hình bài 6



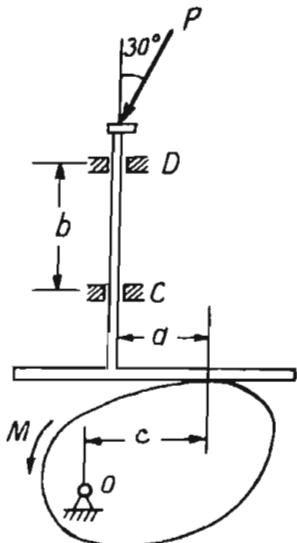
Hình bài 7

10. Tay quay OA của cơ cấu tay quay thanh truyền quay quanh trục O vuông góc với mặt phẳng của hình với vận tốc góc không đổi $\omega_0 = \pi \text{ rad/s}$.

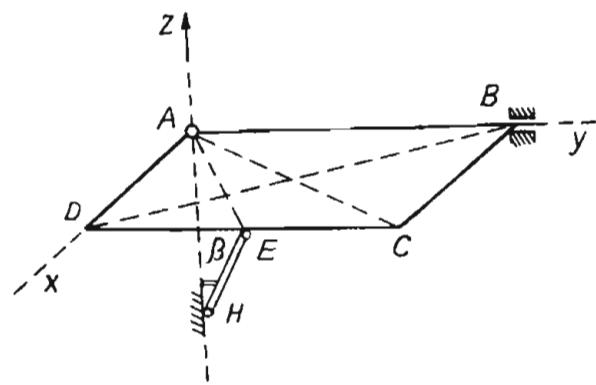
Cho kích thước : CA = 3 cm, AB = 15 cm, AC = 2 cm, AM = MB. Tại thời điểm tay quay OA thẳng đứng, hãy xác định

Vận tốc các điểm B, M.

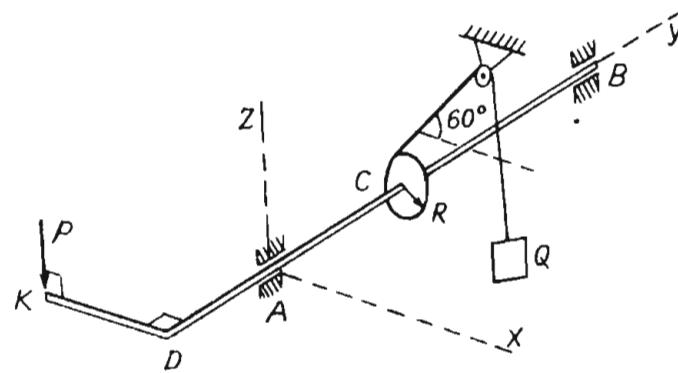
Gia tốc các điểm B, M, C (hình bài 10).



Hình bài 5



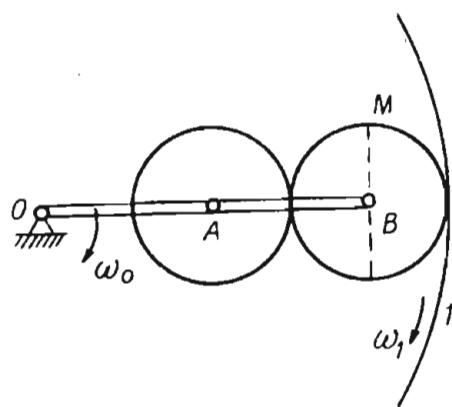
Hình bài 8



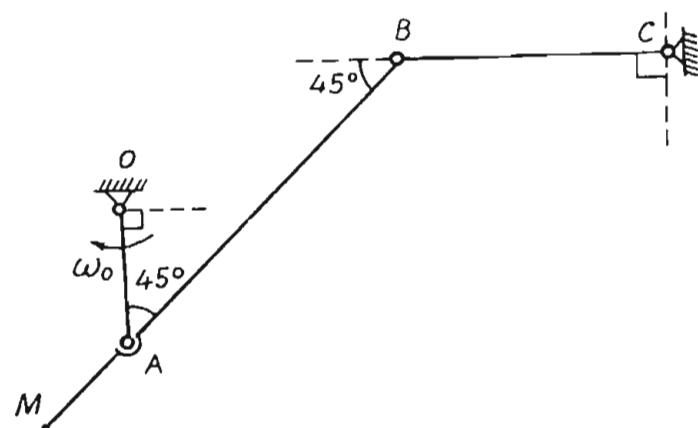
Hình bài 9

11. Tay quay OAB dài 40 cm quay đều với vận tốc góc 300 vòng/phút quanh trục O. Tại A và B lắp hai bánh răng ăn khớp với nhau cùng bán kính 10 cm. Bánh răng B ăn khớp với bánh răng 1 quay đều 360 vòng/phút.

1. Tìm vận tốc góc của bánh răng A, B.
 2. Tìm gia tốc của điểm M trên bánh răng B tại vị trí trên hình bài 11.



Hình bài 11



Hình bài 12

12. Hệ chuyển động đang ở vị trí như hình bài 12 OA thẳng đứng, BC nằm ngang. Tay quay OA quay đều với vận tốc góc ω_0 .

$$OA = r; AB = 2r\sqrt{2}; BC = 3r; AM = r.$$

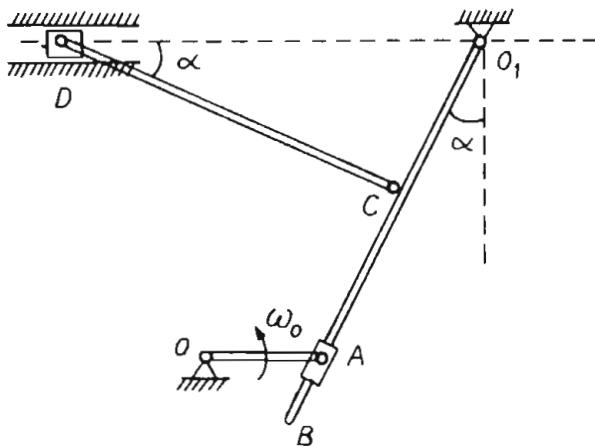
Các góc được cho trên hình vẽ. Hãy tìm

Vân tốc góc các thanh AB và BC.

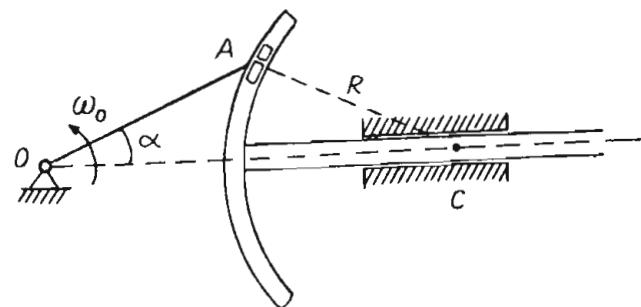
Vân tốc điểm M.

Gia tốc góc thanh BC.

13. Tay quay OA = 10 cm quay đều với vận tốc góc $\omega_0 = 10 \text{ rad/s}$. Nhờ con chạy A lắp ở đầu tay quay và có thể trượt dọc O₁B mà chuyển động được truyền sang cần O₁B. Chuyển động lại được truyền tiếp sang pittông D nhờ thanh truyền CD. Tại thời điểm khảo sát OA nằm ngang, góc $\alpha = 30^\circ$, O₁A = 100 cm, O₁C = 50 cm (hình bài 13).



Hình bài 13



Hình bài 14

- Tính vận tốc góc của O_1B và vận tốc của D.
- Tính gia tốc góc của O_1B và gia tốc của D.

14. Tay quay OA quay đều với vận tốc góc ω_0 , kéo con chạy A trượt trong rãnh tròn bán kính R.

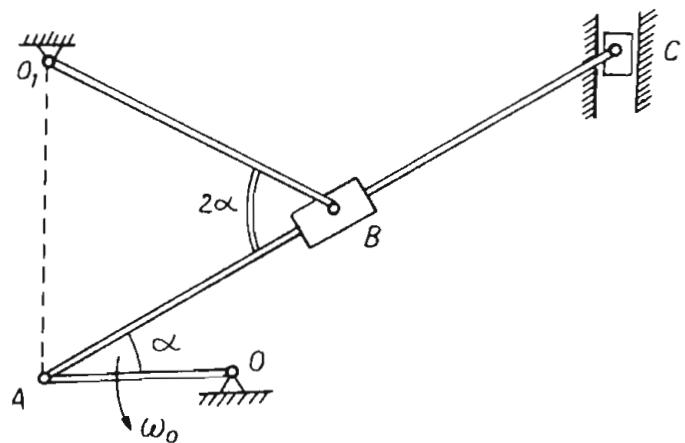
Biết : OA = a, AC = R, $\alpha = 30^\circ$.

Hãy xác định vận tốc và gia tốc của rãnh tròn trong chuyển động tịnh tiến theo phương ngang (hình bài 14).

15. Tay quay OA quay đều với vận tốc góc ω_0 , kéo theo cần O_1B dao động quanh O_1 . Tại vị trí trên hình bài 15 $O_1B = AB = BC = l$, $OA = a$.

Xác định : Vận tốc góc và gia tốc góc AC.

Vận tốc và gia tốc con chạy B.



Hình bài 15

Chương 8

ĐỘNG LỰC HỌC CHẤT ĐIỂM

§8-1. CƠ SỞ LÝ THUYẾT.

1/ Phương trình vi phân chuyển động của chất điểm.

Chất điểm có khối lượng m , chịu tác dụng của các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ chuyển động với
với vận tốc \vec{a} trong hệ qui chiếu quán tính, ta có đẳng thức dạng vectơ

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_k \quad (8-1)$$

* Nếu chiếu hệ thức (8-1) lên hệ trục tọa độ Đề Các oxyz cố định, ta được phương trình
vi phân chuyển động của chất điểm ở dạng tọa độ Đề Các

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx}; m\ddot{y} = \sum F_{ky}, m\ddot{z} = \sum F_{kz} \quad (8-2)$$

* Nếu chiếu hệ thức (8-1) lên hệ trục tọa độ tự nhiên M_{rnb} gắn liền với điểm M chuyển
động theo quỹ đạo, ta được phương trình vi phân chuyển động của chất điểm ở dạng tọa
độ tự nhiên

$$m\ddot{S} = \sum F_{kr}; mV^2/\rho = \sum F_{kn}; 0 = \sum F_{kb} \quad (8-3)$$

Trong trường hợp chất điểm chuyển động trong một mặt phẳng, nếu chiếu hệ thức
(8-1) lên hệ trục tọa độ độc cực, ta nhận được phương trình vi phân chuyển động của chất
điểm ở dạng tọa độ độc cực

$$m(r' - r\dot{\theta}^2) = \sum F_{kr}; \frac{m}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = \sum F_{k\theta} \quad (8-4)$$

2/ Bài toán thuận và bài toán ngược.

Khi dùng một trong các dạng phương trình vi phân, ta có thể giải được hai bài toán cơ
bản của động lực học đối với chất điểm.

Bài toán thuận : Biết chuyển động của chất điểm, tìm lực tác dụng lên chất điểm
hay các yếu tố liên quan đến lực đó.

Bài toán ngược : Biết lực tác dụng lên chất điểm và điều kiện đầu của chuyển động, tìm quy
luật chuyển động của chất điểm.

Ta sẽ lần lượt khảo sát hai bài toán đó đối với chuyển động của chất điểm.

§8-2. BÀI TOÁN THUẬN ĐỐI VỚI CHẤT ĐIỂM.

1/ Hướng dẫn áp dụng.

a) Vật thể khảo sát được biểu diễn dưới dạng một chất điểm. Đặt các lực tác dụng lên

chất điểm. Áp dụng một trong các dạng phương trình (8-1) ÷ (8-4), viết phương trình vi phân chuyển động cho chất điểm khảo sát.

b) Vì đã biết chuyển động nên từ các phương trình chuyển động hay từ biểu thức vận tốc (nhờ các phép tính đạo hàm) xác định gia tốc của chất điểm. Từ các phương trình trên rút ra các thành phần lực chưa biết.

2/ Những bài giải mẫu.

Thí dụ 8-1. Một vật nặng trọng lượng P được kéo lên theo phương thẳng đứng với gia tốc \vec{a} . Tìm sức căng T của dây (hình 8-1).

Bài giải

Vật khảo sát.

Vật nặng được coi như một chất điểm. Các lực tác dụng lên chất điểm đó bao gồm trọng lực \vec{P} , sức căng \vec{T} của dây.

Áp dụng đẳng thức (8-1) ta viết phương trình vi phân chuyển động cho chất điểm.

$$m\ddot{a} = \vec{P} + \vec{T}$$

Chọn trục tọa độ Oz hướng thẳng đứng từ dưới lên. Chiếu phương trình vectơ trên lên trục Oz

$$m\ddot{z} = ma = -P + T$$

Từ dây rút ra sức căng T của dây :

$$T = m(g + a)$$

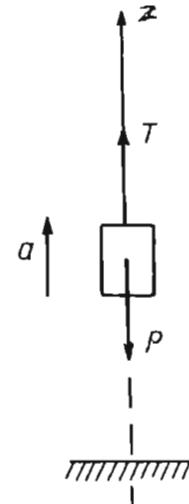
Nhận xét

Nếu \vec{a} hướng xuống thì $T = m(g - a)$.

Như vậy khi vật được kéo lên hay hạ xuống với gia tốc a thì

$$T = mg \pm ma$$

Nếu $a = 0$ tức là vật được kéo lên hay thả xuống không có gia tốc thì $T = P$. Ta nói đó là lực căng tĩnh của dây cáp.



Hình 8-1

Sức căng dây trong điều kiện chuyển động có gia tốc của vật nặng (chuyển động không quán tính) bằng sức căng tĩnh cộng với một lực gọi là phản lực động lực.

Thí dụ 8-2. Một máy bay bổ nhào trong mặt phẳng thẳng đứng rồi lái ngoặt lên. Ở điểm thấp nhất của quỹ đạo, máy bay có vận tốc $V = 1000$ m/giờ và bán kính cong của quỹ đạo là $R = 600$ m. Khối lượng của người lái là 80 kg. Tìm áp lực pháp tuyến do người lái tác dụng lên ghế ngồi ở vị trí thấp nhất đó.

Bài giải

Coi người lái là chất điểm M chuyển động theo đường cong (C), chịu tác dụng của trọng lực \vec{P} và phản lực \vec{R} của ghế. Lực \vec{R} được phân tích theo hai phương tiếp tuyến và pháp

tuyến với quỹ đạo tại điểm đó (hình 8-2).

$$\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$$

Phương trình vi phân chuyển động dạng vectơ

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{N} \quad (a)$$

Khi chiếu hai véc tơ của (a) lên phương pháp tuyến chính, ta có

$$m\vec{a}^n = \vec{P} + \vec{N} \quad (b)$$

$$\text{Từ (b) ta có : } N = P + m \frac{v^2}{R} = m \left(\frac{v^2}{R} + g \right) = 11.065 \text{ N}$$

Vậy người lái đã ép lên mặt ghế một áp lực pháp tuyến bằng 11.065 N, giống như trong điều kiện tĩnh người ấy nặng gấp 14 lần. Trong điều kiện ấy người lái, ghế, giày dép, ố đở... đều phải làm việc ở trạng thái siêu tải trọng.

Thí dụ 8-3.

Điểm M có khối lượng m chuyển động trong mặt phẳng Oxy theo phương trình

$$x = a \cos kt$$

$$y = b \sin kt$$

trong đó a, b, k là những hằng số;

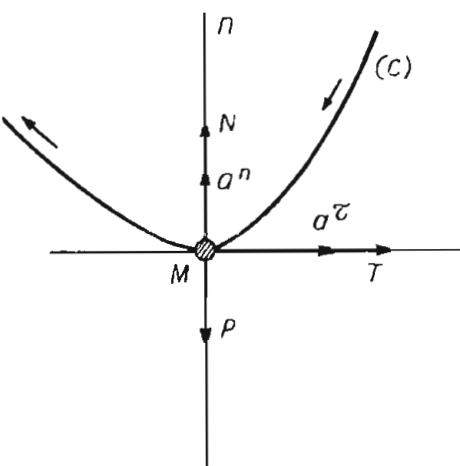
x, y tính bằng mét (m) t tính bằng giây (s).

Hãy xác định lực \vec{F} tác dụng lên chất điểm đó.

Bài giải

Nhận xét đầu tiên : loại bỏ t ra khỏi phương trình trên ta được phương trình quỹ đạo $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ đây là phương trình elip. Vậy quỹ đạo của điểm khảo sát là một

đường elip. Xem hình 8-3.



Hình 8-2

Để giải bài toán này ta cho lực \vec{F} là hợp lực tác dụng vào chất điểm. Phương trình vi phân chuyển động của nó được viết ở dạng vectơ $m\vec{a} = \vec{F}$; hoặc dưới dạng tọa độ. Các:

$$m\ddot{x} = F_x ;$$

$$m\ddot{y} = F_y ;$$

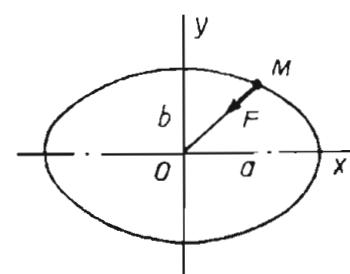
trong đó x, y là hình chiếu của \vec{a} lên trục Ox và Oy.

F_x, F_y là hình chiếu của \vec{F} lên hai trục.

Theo đề ra

$$x = a \cos kt$$

$$y = b \sin kt$$



Hình 8-3

Suy ra :

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -ak^2 \cos kt = -k^2 x \\ \ddot{y} &= -bk^2 \sin kt = k^2 y\end{aligned}$$

Ta có :

$$\begin{aligned}F_x &= -k^2 mx \\ F_y &= -k^2 my\end{aligned}$$

Nếu ta gọi \vec{r} là bán kính vectơ của chất điểm với hình chiếu lên các trục tọa độ là x, y thì kết quả nhận được có thể viết dưới dạng vectơ

$$\vec{F} = -k^2 m \vec{r}$$

Điều này chứng tỏ rằng trong chuyển động elip đã cho, lực tác dụng lên chất điểm tỷ lệ với khối lượng m và khoảng cách từ chất điểm đến gốc tọa độ. Lực này luôn hướng về gốc tọa độ O - tâm của elip.

§8-3. BÀI TOÁN NGƯỢC ĐỐI VỚI CHẤT ĐIỂM

1/ Hướng dẫn áp dụng.

a) Cũng như bài toán thuận trên đây, trước hết ta xác định chất điểm chuyển động cần khảo sát, tiếp theo là đặt các lực tác dụng lên chất điểm đó. Áp dụng phương trình (8-1) ÷ (8-4) để viết phương trình vi phân chuyển động cho chất điểm. Tùy từng bài toán ta chọn hệ tọa độ thích hợp và viết phương trình trên theo hệ tọa độ đó. Cuối cùng hãy viết các điều kiện ban đầu phù hợp với các đại lượng đã chọn theo đầu bài.

b) Tích phân hệ phương trình vi phân đã nhận được để được nghiệm tổng quát của bài toán. Trên cơ sở điều kiện đầu đã cho xác định các hằng số tích phân. Cuối cùng chúng ta nhận được nghiệm riêng của bài toán.

2/ Những bài giải mẫu.

Thí dụ 8-4 (lực là const).

Một đoàn tàu chuyển động trên một đoạn thẳng nằm ngang với vận tốc không đổi V_0 . Vào một lúc nào đấy ta tắt máy và hãm tàu lại. Lực hãm và cản của tổng hợp của tàu bằng $\frac{1}{10}$ trọng lượng của nó. Hãy xác định chuyển động của tàu từ khi tắt máy và hãm (hình 8-4).

Bài giải

Khảo sát đoàn tàu như một chất điểm có khối lượng m .

Lực tác dụng lên chất điểm đó bao gồm

Trọng lực \vec{P}

Phản lực pháp tuyến \vec{N} .

Lực cản ngang \vec{T} .

Theo (8-1) ta có phương trình vi phân chuyển động của chất điểm

$$m\ddot{x} = \vec{P} + \vec{M} + \vec{T} \quad (\text{a})$$

Ta chọn trục x là đường thẳng theo phương ngang. Gốc O là điểm lúc bắt đầu hâm và tắt máy, chọn thời điểm đó làm gốc thời gian.

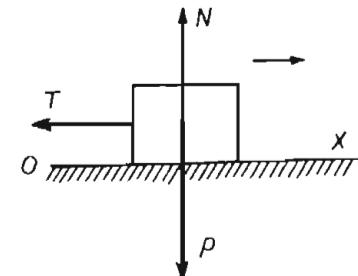
Chiếu hai véc của (a) lên trục x ta được phương trình vi phân chuyển động với điều kiện đầu như sau

$$\left. \begin{array}{l} m\ddot{x} = -T \\ \dot{x}(O) = V_0 \\ x(O) = 0 \end{array} \right\} \quad (\text{b})$$

Theo đề ra $T = \frac{1}{10} P$, nên rút ra

$$\ddot{x} = -\frac{g}{10} \quad (\text{c})$$

Tích phân phương trình (c) ta được



Hình 8-4

(d)

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = -\frac{g}{20} t + c_1 \\ x = -\frac{gt^2}{20} + c_1 t + c_2 \end{array} \right\}$$

Để xác định các hằng số c_1, c_2 ở trong (d) ta thay thế điều kiện đầu ở (b) vào (d) và nhận được :

$$c_1 = V_0; c_2 = 0$$

Cuối cùng ta có phương trình chuyển động của chất điểm là

$$= V_0 t - \frac{gt^2}{20} \quad (\text{e})$$

Nhận xét : Từ kết quả nhận được ta thấy đoàn tàu chuyển động chậm dần đều với vận tốc đầu là V_0 và với gia tốc là $\frac{g}{10}$. Tàu sẽ dừng hẳn ở thời điểm t_1 nào đó mà $V(t_1) = 0$.

Tức là .

$$V(t_1) = \dot{x}(t_1) = V_0 - \frac{gt_1}{10} = 0$$

Rút ra .

$$t_1 = \frac{10V_0}{g}$$

Quãng đường mà đoàn tàu còn chạy thêm được kể từ khi tắt máy là

$$x(t_1) = \frac{g}{10} \left(\frac{10V_0}{g} \right)^2 + V_0 \left(\frac{10V_0}{g} \right) = \frac{5V_0^2}{g}$$

Thí dụ 8-5 (lực phụ thuộc thời gian).

Một chất điểm có khối lượng m chịu tác dụng của một lực theo phương ngang x $F = psin(kt)$. Tìm chuyển động của chất điểm, biết rằng lúc ban đầu $t = 0$ thì chất điểm ở vị trí x_0 và có vận tốc V_0 .

Bài giải

Chọn trục Ox theo phương ngang, O là điểm gốc, x là tọa độ của chất điểm. Ta viết phương trình vi phân chuyển động của chất điểm cùng với điều kiện đầu đã cho như sau.

$$m\ddot{x} = psin(kt) \quad (a)$$

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}(0) = V_0 \\ x(0) = x_0 \end{array} \right\} \quad (b)$$

Giải phương trình (a) theo điều kiện đầu (b). Từ (a) ta có

$$m \frac{d\dot{x}}{dt} = psin(kt)$$

$$\text{hay } m dV = psin(kt) dt, \quad V = \dot{x} \quad (c)$$

Tích phân phương trình (c) từ V_0 đến V và từ O đến t ta có

$$mV - mV_0 = -\frac{p}{k} [\cos(kt) - 1]$$

$$\text{hay } V = V_0 + \frac{p}{km} [1 - \cos(kt)]$$

Thay vào $V = \dot{x}$ ta có

$$\frac{dx}{dt} = V_0 + \frac{p}{km} [1 - \cos(kt)]$$

$$\text{hay } dx = (V_0 + \frac{p}{km})dt - \frac{1}{km} \cos(kt)dt \quad (d)$$

Tích phân hai vế phương trình (d) tương ứng từ x_0 đến x và từ O đến t ta có

$$x = x_0 + (V_0 + \frac{p}{km})t - \frac{p}{k^2 m} \sin(kt) \quad (e)$$

Nhận xét: Phương trình chuyển động (e) chứng tỏ rằng chất điểm tham gia hai chuyển động.

1) Chuyển động đều.

$$= x_0 + (V_0 + \frac{p}{km})t$$

2) Dao động điều hòa

$$a = -\frac{p}{k^2 m} \sin(kt)$$

Thí dụ 8-6 (lực phụ thuộc vận tốc).

Một tàu thủy có khối lượng toàn bộ là m , chuyển động từ trạng thái nghỉ trên mặt nước

yên tĩnh. Cho biết lực tổng hợp, phát động và lực cản tác dụng vào tàu hướng theo phương chuyển động và có cường độ là $F = c - bV$ (c, b là các hằng số dương đã cho, còn V là vận tốc của tàu).

1. Xác định vận tốc tối hạn của tàu thủy.
2. Xác định phương trình chuyển động của tàu.

Bài giải

Khảo sát tàu thủy như một chất điểm chuyển động. Các lực tác dụng lên chất điểm là trọng lực \vec{P} , lực đẩy Acsimet \vec{N} và lực \vec{F} .

Theo (8-1) ta viết phương trình vi phân chuyển động của chất điểm

$$m\ddot{x} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F} \quad (a)$$

Chọn trục Ox theo phương ngang, cùng hướng với chuyển động của tàu. Chọn gốc tọa độ và gốc thời gian ứng với vị trí lúc khởi động. Chiếu (a) lên trục x, ta có phương trình vi phân chuyển động ở dạng tọa độ Đề Các :

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx} = c - b\dot{x} \quad (b)$$

với điều kiện đầu

$$\dot{x}(0) = V_0 = 0 \quad (c)$$

$$x(0) = 0$$

hoặc viết ở dạng khác

$$\frac{dV}{dt} = \frac{c}{m} - \frac{b}{m} V = \alpha - \beta V \quad (b')$$

$$\text{trong đó: } \alpha = \frac{c}{m}; \beta = \frac{b}{m};$$

$$\frac{dx}{dt} = V$$

với điều kiện đầu

$$V(0) = V_0 = 0 \quad (c')$$

$$x(0) = 0$$

Bây giờ chúng ta sẽ giải phương trình vi phân đã nhận được theo yêu cầu của bài toán.

a) Nếu ký hiệu V_1 là vận tốc tối hạn của tàu, nghĩa là khi con tàu chạy với vận tốc

$$\text{không thay đổi, khi đó } \frac{dV_1}{dt} = 0$$

Suy ra $\alpha - \beta V_1 = 0$

$$\text{hay : } V_1 = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{c}{b} = \text{const} > 0$$

Để giải phương trình chuyển động, trước hết nhận xét rằng tàu khởi hành từ trạng thái

nghi với giá tốc ban đầu $a_0 = \alpha - \beta V_0$; $\alpha > 0$ (vì $V_0 = 0$) và tại thời điểm t thì $a = \alpha - \beta V$. Rõ ràng là a giảm dần khi V tăng dần cho đến khi $V = V_1$ thì $a = 0$. Vậy suy ra rằng trong quá trình chuyển động luôn luôn có hệ thức: $\alpha - \beta V > 0$.

Do đó ta có thể tích phân phương trình (b') bằng phương pháp phân ly biến số

$$\frac{dV}{\alpha - \beta V} = dt$$

Tích phân phương trình này với cận tương ứng (lúc $t = 0$; $V(0) = 0$; còn lúc $t > 0$ $V = V(t)$)

$$\int_0^V \frac{dV}{\alpha - \beta V} = \int_0^t dt$$

$$\text{nhận được: } \ln(\alpha - \beta V) \Big|_0^V = \beta t \text{ hay } \frac{\alpha - \beta V}{\alpha} = e^{-\beta t}$$

Rút ra .

$$V = \frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta t}) = \frac{c}{b} (1 - e^{-\beta t}) \quad (d)$$

Hàm $e^{-\beta t}$ giảm rất nhanh nên sau một thời gian t nào đó có thể coi như chất điểm chuyển động với vận tốc $V_1 = \frac{c}{b}$ như đã nhận xét ở trên.

b) Để viết phương trình chuyển động của tàu ta tiếp tục tích phân phương trình (d) theo các cận tương ứng $x(0) = 0$ đến $x(t) = x$. Phương trình (d) được viết lại như sau

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c}{b} (1 - e^{-\beta t}) \text{ hay } dx = \frac{c}{b} (1 - e^{-\beta t}) dt$$

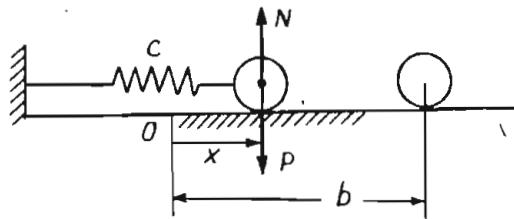
ta có

$$\int_0^x dx = \int_0^t \frac{c}{b} (1 - e^{-\beta t}) dt$$

Rút ra

$$t = \frac{c}{b} t + \frac{mc}{b^2} [1 - e^{-\beta t}]$$

Thí dụ 8-7 (Lực phụ thuộc vị trí)



Hình 8-5.

Một quả cầu nhỏ khối lượng m buộc vào đầu mút của lò xo có hệ số cứng là C , đầu kia của lò xo cố định. Người ta kéo quả cầu khỏi vị trí cân bằng một đoạn b rồi thả cho nó chuyển động. Tìm phương trình chuyển động của quả cầu (hình 8-5).

Bài giải

Chất điểm khảo sát là quả cầu.

Lực tác dụng lên chất điểm : trọng lực \vec{P} , phản lực N , lực kéo lò xo \vec{F}

Chọn gốc tọa độ O là vị trí cân bằng của lò xo, x là tọa độ của quả cầu, đồng thời cũng là độ dãn lò xo theo phương chuyển động.

Theo bài ra ta có : $F = cx$

Viết phương trình vi phân chuyển động của chất điểm dạng tọa độ Đề Các (8-2) .

$$m\ddot{x} = -cx$$

$$\ddot{x} = -\frac{c}{m}x$$

Đặt $k^2 = \frac{c}{m}$ ta có phương trình vi phân

$$\ddot{x} + k^2x = 0 \quad (a)$$

với điều kiện đầu . $\dot{x}(0) = 0$ }
 $x(0) = b$ }

Giải phương trình (a) theo điều kiện đầu (b) :

Ta biết nghiệm tổng quát của phương trình (a) có dạng

$$x = A\cos kt + B\sin kt \quad (c)$$

Trong đó A, B là những hằng số được xác định theo điều kiện (b).

$$\dot{x} = -kA\sin kt + kB\cos kt$$

$$\text{Khi } t = 0 \quad \dot{x}(0) = 0 = kB = 0$$

$$x(0) = b = A$$

$$\text{Do đó : } B = 0 \text{ và } A = b.$$

Cuối cùng ta nhận được phương trình chuyển động của quả cầu = $b\cos kt$.

Như vậy quả cầu thực hiện dao động điều hòa quanh vị trí cân bằng, có biên độ là b, tần số là k.

§8-3 BÀI TẬP

1/ Bài toán thuận

8-1. Trong quá trình chạy lên, biểu đồ vận tốc của thang máy theo thời gian có dạng hình thang cân mà các đáy lớn và bé là 10 và 6 đơn vị (theo trục t) và đường cao là 5 đơn vị (theo trục V tính bằng m/s); khối lượng của buồng bằng 500 kg. Xác định lực kéo của dây cáp T_1 , T_2 , T_3 trong ba khoảng thời gian sau : từ $t = 0$ đến $t = 2$ giây, từ $t = 2$ giây đến $t = 8$ giây, từ $t = 8$ đến $t = 10$ giây. Đoạn $2 \leq t \leq 8$ ứng với đáy nhỏ của hình thang.

8-2. Một đoàn tàu hỏa không kể đầu máy có khối lượng là 200 tấn chạy nhanh dần trên đoạn đường ray nằm ngang. Sau 60 giây kể từ lúc bắt đầu chạy nó đạt tới vận tốc 54 km/giờ. Tính lực kéo của đầu máy lên đoạn toa ở chỗ móc nối trong chuyển động đó, biết rằng lực cản chuyển động bằng 0,005 trọng lượng của đoàn tàu.

8-3. Một xe goòng có khối lượng là 700 kg đang chạy xuống dốc dọc theo đường ray thẳng và nghiêng với mặt ngang một góc 15° . Để giữ cho xe chạy đều, ta dùng dây cáp song song với mặt dốc. Vận tốc chạy của xe là 1,6m/s. Xác định lực kéo của dây cáp lúc xe chạy đều và khi nó hãm dừng lại trong 4 giây ? Lúc hãm coi rằng xe chạy chậm dần đều. Hệ số cản chuyển động tổng cộng là $f = 0,005$.

8-4. Một ôtô chở hàng có khối lượng là 6 tấn chạy xuống một chiếc phà với tốc độ 21,6 km/giờ. Từ lúc bắt đầu xuống phà đến lúc dừng hẳn xe phải chạy thêm một quãng là 10 m và cho rằng khi ấy ôtô chuyển động chậm dần đều. Tính lực cản mỗi dây cáp (có hai dây cáp) buộc giữ phà, coi rằng dây cáp luôn luôn căng.

8-5. Một cái sàng quặng thực hiện dao động điều hòa thẳng đứng với biên độ $a = 5$ cm. Tìm tần số k nhỏ nhất của sàng để cho các hạt quặng bật được lên khỏi mặt sàng.

8-6. Một máy bay bổ nhào trong mặt phẳng thẳng đứng rồi lại ngoặt lên. Ở điểm thấp nhất của quỹ đạo máy bay có vận tốc $V = 1000$ km/giờ và bán kính cong của quỹ đạo là $R = 600$ m. Khối lượng của người lái là 80 kg. Tìm áp lực pháp tuyến do người lái tác dụng lên ghế ngồi ở vị trí thấp nhất đó của quỹ đạo.

8-7. Một đoàn tàu hỏa chạy trên một đoạn đường vòng với vận tốc bằng 72 km/giờ. Trong toa người ta treo vật nặng vào một lực kế lò xo đặt thẳng đứng. Khối lượng của vật là 5 kg. Lực kế chỉ 50 N. Xác định bán kính cong của đường vòng, bỏ qua khối lượng của lò xo lực kế.

8-8. Một người đi xe đạp vạch nén đường cong có bán kính cong bằng 10 m với vận tốc 5 m/giây. Tìm góc nghiêng giữa mặt phẳng trung bình của xe với mặt phẳng thẳng đứng và hệ số ma sát bé nhất f_{\min} giữa lốp xe và mặt đường để bảo đảm cho xe chạy ổn định.

2/ Bài toán ngược.

8-9. Một vật nặng hạ xuống theo mặt phẳng trơn nghiêng một góc 30° so với phương nằm ngang. Tại thời điểm đầu vận tốc của vật bằng 2 m/s. Tìm xem vật đi được 9,6 m hết bao nhiêu thời gian.

8-10. Một vật nặng rơi xuống giếng mỏ không vận tốc đâu. Sau thời gian 6,5 giây người ta nghe thấy tiếng va đập của vật vào đáy giếng. Cho biết vận tốc của tiếng động là 330 m/s. Tìm chiều sâu h của hầm mỏ.

8-11. Một người lái tàu điện bằng cách mở dần điện trở làm tăng công suất động cơ sao cho lực kéo tăng tỉ lệ với thời gian từ giá trị bằng không và mỗi giây tăng được 1177 N. Tìm quãng đường S toa tàu đi được trong các điều kiện cho sau đây khối lượng của toa tàu bằng 10 tấn, lực ma sát không đổi và bằng $1,96 \cdot 10^3$ N, vận tốc đầu bằng không.

8-12. Một chiếc tàu thủy có trọng lượng là P chuyển động thẳng ngang từ trạng thái nghỉ. Lực đẩy của chân vịt không đổi bằng Q , và hướng theo hướng chuyển động của tàu. Lực cản của nước có giá trị $R = \frac{P}{g} k^2 V^2$. Trong đó k là hệ số tỷ lệ và V là vận tốc của con tàu. Tìm giá trị của vận tốc giới hạn và tìm biểu thức vận tốc hàm theo thời gian chuyển động của con tàu.

8-13. Một chiếc tàu lặn đang nằm yên, nhận được một trọng tải P thì lặn xuống sâu theo phương thẳng đứng. Trong trường hợp này có thể xem như lực cản của nước có giá trị tỷ lệ với vận tốc lặn xuống của tàu $R = kSV$ trong đó k là hệ số tỷ lệ, S là diện tích hình chiếu bằng của con tàu và V là vận tốc lặn của con tàu. Khối lượng của con tàu là m . Tìm biểu thức vận tốc của con tàu hàm theo thời gian. Tìm khoảng thời gian cần thiết

để cho vận tốc đạt giá trị bằng 95 % giá trị vận tốc giới hạn.

8-14. Một chất điểm khối lượng m chuyển động thẳng dưới tác dụng của lực thay đổi theo luật $F = F_0 \cos \omega t$, trong đó F_0 là không đổi. Ở thời điểm ban đầu, điểm có vận tốc là V_0 . Tìm phương trình chuyển động của điểm.

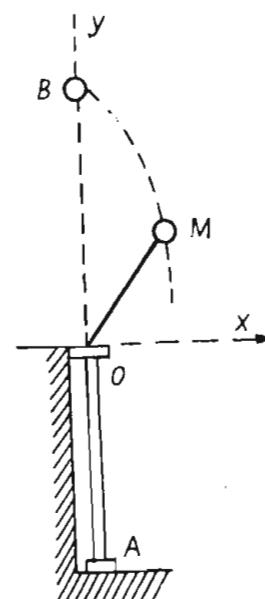
8-15. Xác định chuyển động của một quả cầu nặng dọc theo một rãnh thẳng tưởng tượng đi qua tâm quả đất ; nếu biết rằng lực hút ở bên trong quả đất tỷ lệ với khoảng cách từ quả cầu đến tâm quả đất và hướng về tâm này. Quả cầu được thả với vận tốc ban đầu bằng không. Tìm vận tốc quả cầu lúc đi qua tâm quả đất và thời gian để đi từ mặt đất đến tâm ấy. Biết bán kính quả đất $R = 637.10^6$ cm, $g = 980$ cm/s 2

8-16. Từ một khẩu súng đại bác đặt ở điểm O, người ta bắn một viên đạn với góc bắn α so với phương ngang và với vận tốc ban đầu V_0 . Đồng thời từ điểm A ở cách điểm O một quãng là l theo đường ngang và mặt phẳng thẳng đứng qua OA cũng chứa V_0 , người ta bắn lên một viên đạn khác theo đường thẳng đứng. Bỏ qua sức cản của không khí, xác định vận tốc bắn V_1 của viên đạn thứ hai để nó chạm vào viên đạn thứ nhất.

8-17. Một chất điểm có khối lượng m chuyển động dưới tác dụng lực đẩy từ một tâm O cố định theo luật $\vec{P} = k^2 m \vec{r}$, trong đó k là hằng số và m là khối lượng của chất điểm còn r là bán kính định vị của chất điểm tính từ O. Ở thời điểm đầu chất điểm ở $M_0(a, 0)$ và có vận tốc \vec{V}_0 song song với trục y. Xác định quỹ đạo của chất điểm.

8-18. Một dây đàn hồi được giữ chặt ở điểm A, vòng qua một vòng nhẫn cố định O. Ở đầu cuối tự do của nó có buộc một quả cầu M khối lượng m kg. Chiều dài của dây lúc không dãn là $l \approx AO$. Để kéo dãn dây ra 1cm cần một lực bằng $k^2 m$ (Niutơn). Sau khi kéo dây dãn theo đường thẳng AB cho dài ra gấp đôi, ta truyền cho quả cầu một vận tốc V_0 vuông góc với AB.

Xác định quỹ đạo của quả cầu khi bỏ qua tác dụng của trọng lực và xem như sức căng dây tỷ lệ với độ dãn dài của nó.



Hình bài 8-18

như sau: $\frac{1}{2} \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}$ (vì $r = \frac{d}{2}$)

Để xác định diện tích hình tròn ta có thể áp dụng công thức:

$$A = \pi r^2$$

hoặc

$$A = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

Chương 9

DẶC TRUNG HÌNH HỌC CỦA VẬT RẮN

Đây là một đặc trưng của vật rắn là khả năng biến đổi hình dạng theo thời gian.

§9-1. DẶC TRUNG HÌNH HỌC CỦA MẶT CẮT NGANG

Mômen tịnh của mặt cắt ngang đối với trục trực:

Ta gọi mômen tịnh của mặt cắt ngang đối với trục x và y (thỉnh thoảng) là các tích phân sau đây:

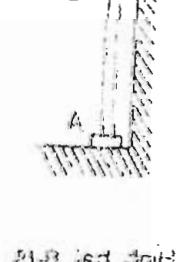
$$S_x = \int y dF, \quad S_y = \int x dF$$

Trong đó dF - diện tích phần nhỏ dF của mặt cắt.

Tọa độ trọng tâm x_c, y_c của mặt cắt được xác định bởi tỷ số:

$$x_c = \frac{S_y}{F}$$

hoặc công thức



Hình 9-1

$$y_c = \frac{S_x}{F}$$

Trong đó

x_i, y_i - tọa độ trọng tâm của hình đơn giản thứ i.

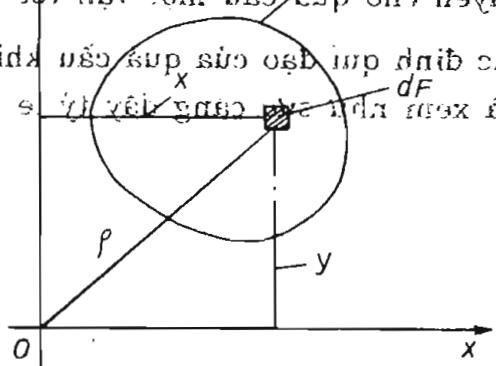
F_i - diện tích của hình đơn giản thứ i.

Trục trung tâm là trục có mômen tịnh của mặt cắt ngang đối với nó là bằng không $S = 0$.

Trọng tâm của mặt cắt ngang là giao điểm của hai trục trung tâm

Ví dụ 9-1.

Tìm trọng tâm của các hình trong hình 9-2a và 9-3a.



Hình 9-1

Bài giải

Tập 9

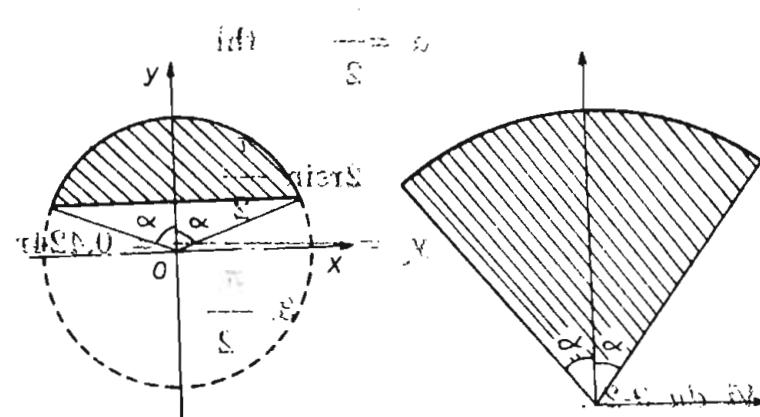
a) Tung độ của trọng tâm C (hình 9-2b).

$$y_c = \frac{S_x}{F}$$

trong đó $S_x = \int y dF$

$$dF = 2r \cos\varphi dy$$

$$y = r \sin\varphi$$



trong đó $dy = r \cos\varphi d\varphi$

hay $S_x = \int_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2} r \sin\varphi \cdot 2r \cos\varphi \cdot r \cos\varphi d\varphi$

$$= 2r^3 \int_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2} \sin\varphi \cos^2\varphi d\varphi$$

$$= \frac{2}{3} r^3 \sin^3\alpha$$

Và

$$F = \frac{r^2}{2} (2\alpha - \sin 2\alpha)$$

Vậy

$$y_c = \frac{S_x}{F} = \frac{\frac{2}{3} r^3 \sin^3\alpha \cdot 2}{\frac{r^2}{2} (2\alpha - \sin 2\alpha)} = \frac{4}{3} \frac{r \sin^3\alpha}{(2\alpha - \sin 2\alpha)}$$

b) Tung độ của trọng tâm C (hình 9-3b)

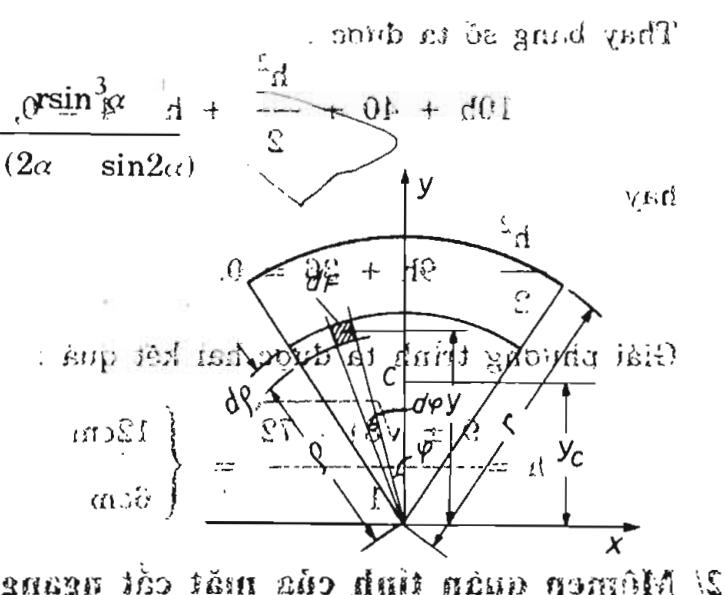
$$y_c = \frac{S_x}{F}$$

trong đó

$$S_x = \int y dF$$

$$dF = \rho \cdot d\varphi \cdot d\rho$$

$$y = \rho \cos\varphi$$



hay đổi idf = ρ · dφ · dρ

$$(+) S_x = 2 \int_0^r \int_0^\alpha \rho \cos\varphi \rho d\varphi d\rho = 2 \int_0^r \rho^2 d\rho \int_0^\alpha \cos\varphi d\varphi = \frac{4}{3} r^3 \sin\alpha$$

và $F = \alpha r^2$

Vậy

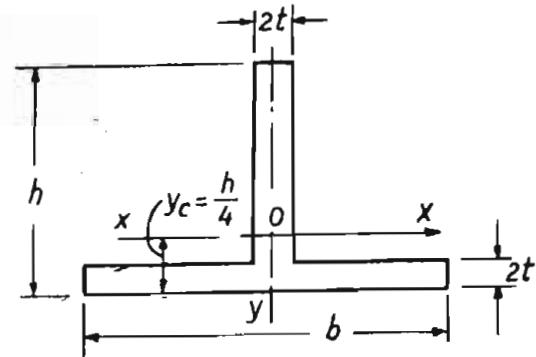
$$y_c = \frac{2}{3} \frac{r^3 \sin\alpha}{\alpha r^2} = \frac{2r \sin\alpha}{3\alpha}$$

Thay

Trường hợp

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \quad \text{thì}$$

$$y_c = \frac{2r \sin \frac{\pi}{2}}{3 \cdot \frac{\pi}{2}} = 0,424r$$



Hình 9-4

Ví dụ 9-2

Xác định chiều cao h của mặt cắt ngang hình chữ T sao cho trục trung tâm $x - x$ ở vị trí cách đáy bằng $\frac{h}{4}$. Biết $b = 20$ cm, và $t = 1$ cm (hình 9-4).

Bài giải

Vì hình có trục y là trục đối xứng nên trọng tâm nằm trên trục này.

Ta chia hình chữ T thành hai hình chữ nhật. Nếu trục $x - x$ là trục trung tâm thì mômen tĩnh của diện tích hình chữ T đối với trục $x - x$:

$$S_x = S_x^I + S_x^{II} = 0$$

$$\text{hay } 2bt\left(\frac{h}{4} - t\right) + 2t(h - 2t)\left[\left(\frac{h - 2t}{2}\right) + 2t - \frac{h}{4}\right] = 0.$$

Thay bằng số ta được

$$10h + 40 + \frac{h^2}{2} + h \cdot 4 = 0,$$

hay

$$\frac{h^2}{2} + 9h + 36 = 0.$$

Giải phương trình ta được hai kết quả

$$h = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 72}}{1} = \begin{cases} 12\text{cm} \\ 6\text{cm} \end{cases}$$

2/ Mômen quán tính của mặt cắt ngang

Mômen quán tính của mặt cắt ngang đối với một trục được xác định bởi tích phân :

$$I_x = \int_F y^2 dF; I_y = \int_F x^2 dF \quad (9-4)$$

Mômen quán tính ly tâm của mặt cắt ngang đối với hệ trục tọa độ vuông góc x, y là tích phân

$$I_{xy} = \int_F xy dF \quad (9-5)$$

Mômen quán tính đối cực của mặt cắt ngang đối với gốc tọa độ O được xác định bởi tích phân

$$I_p = \int p^2 dF = I_x + I_y \quad (9-6)$$

Hệ trục có $I_{xy} = 0$ gọi là hệ trục chính.

Hệ trục có $I_{xy} = 0; S_x = S_y = 0$ gọi là hệ trục quán tính chính trung tâm.

Tương ứng với các hệ trục trên ta có các tên mômen quán tính chính hoặc mômen quán tính chính trung tâm.

Một trục đối xứng của mặt cắt ngang giờ cũng là một trục trong hệ trục quán tính chính trung tâm.

Các kí hiệu xem hình 9-1.

Thí dụ 9-3.

Tính mômen quán tính ly tâm J_{xy} và $J_{x_0y_0}$ của hình tam giác vuông ABC. Điểm O là trọng tâm của tam giác (hình 9-5a)

Bài giải (hình 9-5b).

Mômen quán tính ly tâm trung tâm $J_{x_0y_0}$

$$J_{x_0y_0} = \int_F xy dF = \int_{\frac{b}{3}}^{\frac{2b}{3}} dx \int_{-\frac{h}{3}}^{\frac{h}{3}-\frac{x}{b}} xy dy,$$

$$\text{hay } J_{x_0y_0} = \frac{h^2 b^2}{72}$$

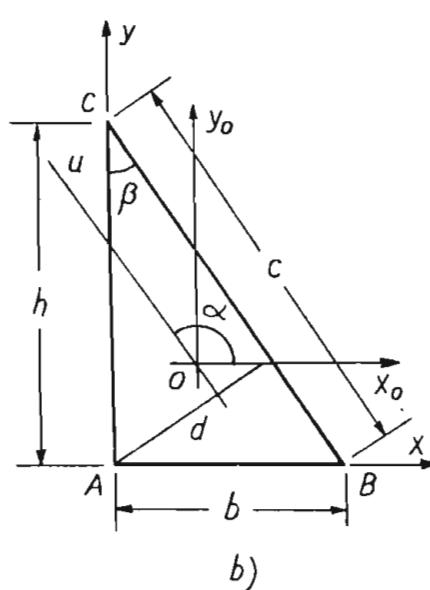
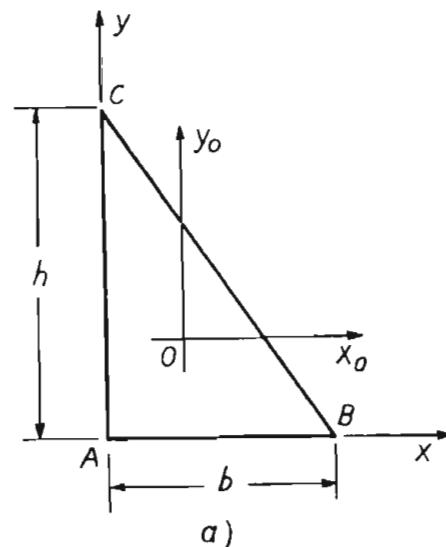
Mômen quán tính ly tâm đối với hệ trục x, y :

$$\begin{aligned} J_{xy} &= J_{x_0y_0} + \frac{h}{3} \cdot \frac{b}{3} F, \\ &= \frac{h^2 b^2}{72} + \frac{h}{3} \cdot \frac{b}{3} \cdot \frac{bh}{2} \\ J_{xy} &= \frac{h^2 b^2}{24} \end{aligned}$$

Mômen quán tính ly tâm $J_{x_0y_0}$ cũng có thể tính không qua tích phân hai lớp mà dựa vào công thức quen thuộc:

$$J_u = J_{x_0} \cos^2 \alpha + J_{y_0} \sin^2 \alpha - 2J_{x_0y_0} \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\text{hay } J_{x_0y_0} = \frac{J_{x_0} \cos^2 \alpha + J_{y_0} \sin^2 \alpha - J_u}{2 \sin \alpha \cos \alpha}$$



Hình 9-5

trong đó

$$J_{x_0} = \frac{bh^3}{36}, J_{y_0} = \frac{hb^3}{36}$$

J_u là mômen quán tính trục đối với trục u song song với đường huyền

$$J_u = \frac{cd^3}{36} = \frac{h^3b^3}{36c^2}$$

$$\cos\alpha = \sin\beta = -\frac{b}{h}, \quad \sin\alpha = \cos\beta = \frac{h}{b}$$

Vậy $J_{x_0y_0} = -\frac{h^2b^2}{72}$

3/ Công thức chuyển trục song song của mômen quán tính

Các kí hiệu xem hình 9-6.

$$= + \alpha$$

$$= y + b.$$

$$I_u = I_x + 2bS_x + b^2F \quad (9-7)$$

$$I_v = I_y + 2aS_y + a^2F$$

$$I_{uv} = I_{xy} + bS_y + aS_x + abF$$

Khi các trục x, y là các trục trung tâm.

$$S_x = S_y = 0, \text{ ta có}$$

$$I_u = I_x + b^2F \quad (9-8)$$

$$I_v = I_y + a^2F$$

$$I_{uv} = I_{xy} + abF$$

Nếu trục x, y là các trục quán tính chính trung tâm.

$$I_{xy} = 0, \text{ ta có}$$

$$I_u = I_x + b^2F \quad (9-9)$$

$$I_v = I_y + a^2F$$

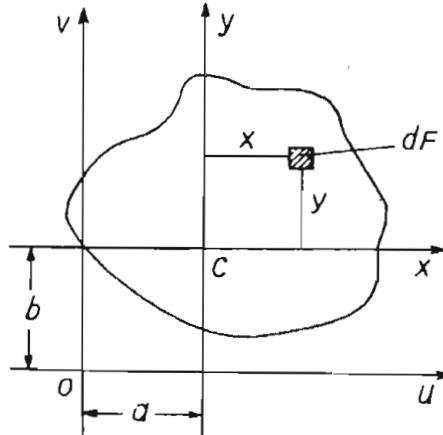
$$I_{uv} = abF$$

Thi dụ 9-4.

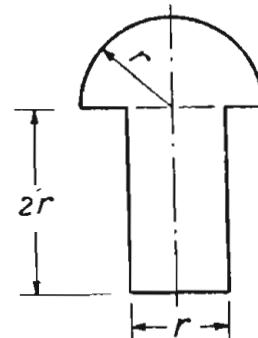
Tính mômen quán tính chính trung tâm của mặt cắt như trên hình 9-7a.

Bài giải

Ta chia mặt cắt thành hai hình như trên hình 9-7b và chọn hệ trục ban đầu là $C_1x_1y_1$.



Hình 9-6



Hình 9-7a

Vì trục y là trục đối xứng nên $\Delta_{\text{c}} = 0$

y_c xác định bằng công thức

$$y_c = \frac{S_x}{F'}$$

trong đó

$$S_x = \frac{1}{2} \pi r^2 \left(\frac{4}{3\pi} r + r \right) = 0,712\pi r^3,$$

$$F' = \frac{\pi r^2}{2} + 2r \cdot r = 3,5708r^2$$

Vậy $y_c = \frac{0,712\pi r^3}{3,5708r^2} = 0,627 r$

Mômen quán tính chính trung tâm của hình

$$J_x = J_x^I + J_x^{II}$$

trong đó

$$J_x^I = J_{x_1}^I + a^2 F' = \frac{r(2r)^3}{12} + (0,627r)^2 2r^2 = 1,456r^4$$

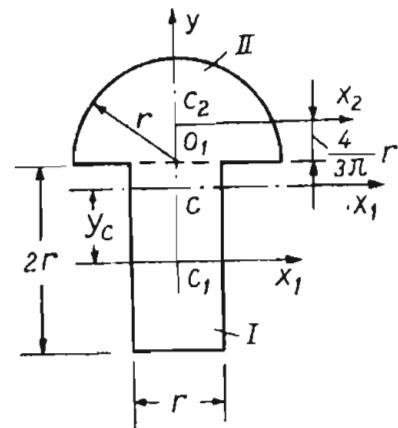
$$J_x^{II} = J_{x_2}^{II} + b^2 F'$$

với $J_{x_2}^{II} = \frac{1}{2} \frac{\pi d^4}{64} - \left(\frac{4}{3\pi} r \right)^2 \frac{\pi r^2}{2} \approx 0,035\pi r^4$

nên $J_x^{II} = 0,035\pi r^4 + (0,797r)^2 \frac{\pi r^2}{2} \approx 1,11r^4$

Vậy $J_x = 1,456r^4 + 1,11r^4 = 2,566r^4$

$$J_y = \frac{1}{2} \frac{\pi d^4}{64} + \frac{2r \cdot r^3}{10} \approx 0,566 r^4$$



Hình 9-7b

§9-2. ĐẶC TRƯNG CHO SỰ PHÂN BỐ KHỐI LƯỢNG CỦA VẬT RẮN

1. Các công thức tính mômen quán tính của vật rắn

Momen quán tính của vật rắn đối với trục (hình 9-8)

$$J_{\Delta} = \sum_{k=1}^{\infty} m_k h_k^2 = M\rho^2 \quad (9-10)$$

trong đó, m_k khối lượng chất điểm thứ k; h_k khoảng cách từ chất điểm thứ k đến trục z; M khối lượng của vật; ρ bán kính quan tính.

Momen quan tính của vật đối với các trục tọa độ :

$$\left. \begin{array}{l} J_x = \sum m_k (y_k^2 + z_k^2) \\ J_y = \sum m_k + (z_k^2 + x_k^2) \\ J_z = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2) \end{array} \right\} \quad (9-11)$$

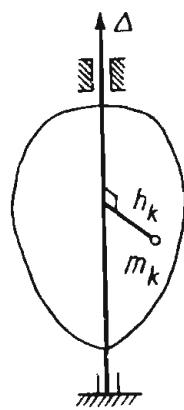
Momen quan tính tích của vật rắn:

$$\left. \begin{array}{l} J_{xy} = \sum m_k x_k y_k \\ J_{yz} = \sum m_k y_k z_k \\ J_{zx} = \sum m_k z_k x_k \end{array} \right\} \quad (9-12)$$

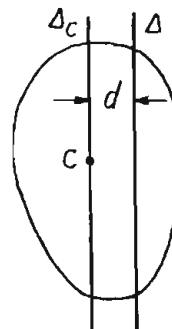
Momen quan tính của vật đối với các trục song song :

$$J_\Delta = J_{\Delta_c} + M d^2 \quad (9-13)$$

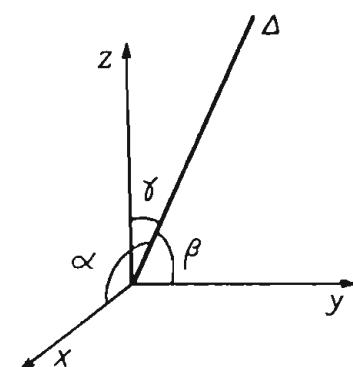
Δ và Δ_c là hai trục song song, trục Δ_c qua khoi tâm C, M khoi luong của vật, d khoảng cách hai trục (hình 9-9).



Hình 9-8



Hình 9-9



Hình 9-10

Momen quan tính của trục bất kỳ qua gốc tọa độ (hình 9-10)

$$J = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma - 2J_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2J_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2J_{zx} \cos \gamma \cos \alpha \quad (9-14)$$

Nếu trục O_z là trục quan tính chính tại O ($J_{yz} = J_{zx} = 0$) thì

$$J_\Delta = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma - 2J_{xy} \cos \alpha \cos \beta \quad (9-15)$$

Nếu Oxz là trục quan tính chính tại O ($J_{xy} = J_{yz} = 0$) thì

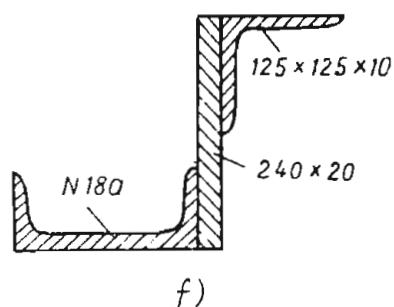
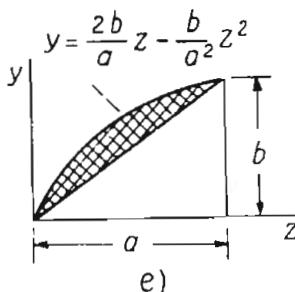
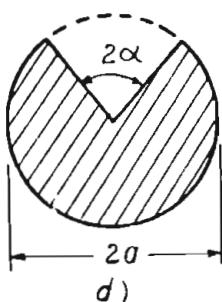
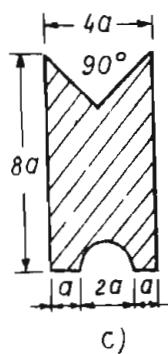
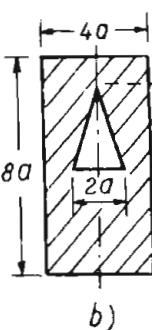
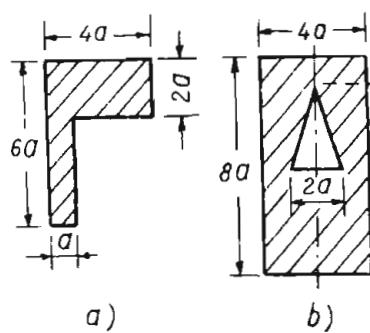
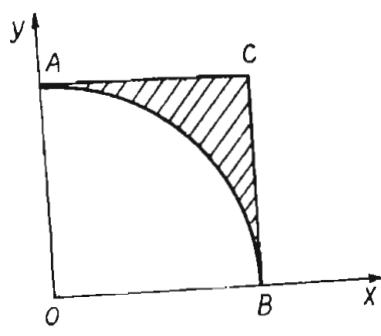
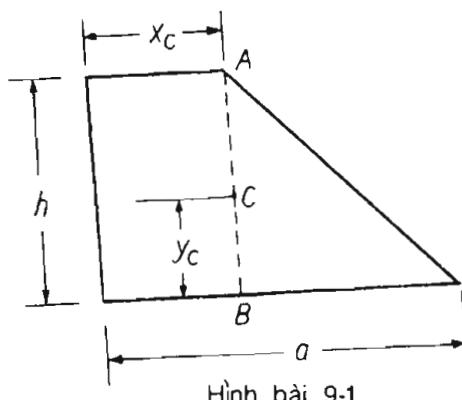
$$J_\Delta = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma \quad (9-16)$$

2. Mômen quán tính của một số vật đồng chất

Dạng	Vật đồng chất	Mômen quán tính đối với các trục
Thanh mảnh		$J_z = J_x = \frac{Ml^2}{12}$
Vành tròn		$J_x = J_y = \frac{MR^2}{2}$ $J_z = MR^2$
Trụ tròn		Trụ đặc : $J_y = \frac{MR^2}{2}$ $J_x = J_z = \frac{M}{4} \left(R^2 + \frac{h^2}{3} \right)$ Trụ rỗng mỏng $J_y = MR^2$ $J_x = J_z = \frac{M}{2} \left(R^2 + \frac{h^2}{6} \right)$
Tấm phẳng		$J_z = M \frac{a^2}{12}; J_y = M \frac{b^2}{12}$
Mặt tròn		$J_x = J_y = \frac{MR^2}{4}$ $J_z = \frac{MR^2}{2}$
Quả cầu đặc		$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{5} MR^2$

Ghi chú : M - khối lượng của vật.

§9-3. BÀI TẬP



Hình bài 9-3

9-1. Xác định đáy nhỏ x_c của hình thang sao cho trọng tâm C của hình nằm trên đường thẳng AB. Xác định tung độ y của trọng tâm (hình bài 9-1).

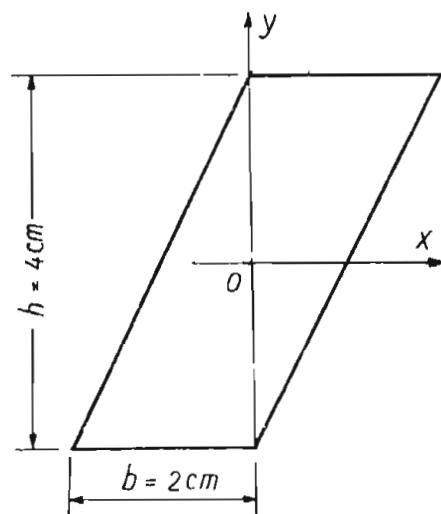
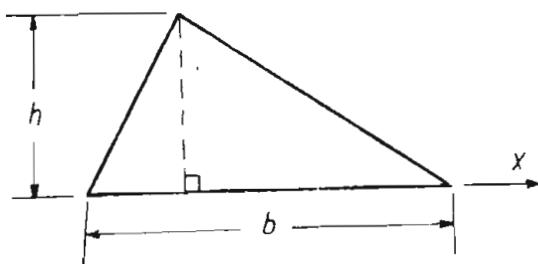
9-2. Tìm tọa độ trọng tâm của hình tam giác cong ABC như trên hình bài 9-2.

9-3. Xác định vị trí trọng tâm của các mặt cắt cho trên hình bài 9-3.

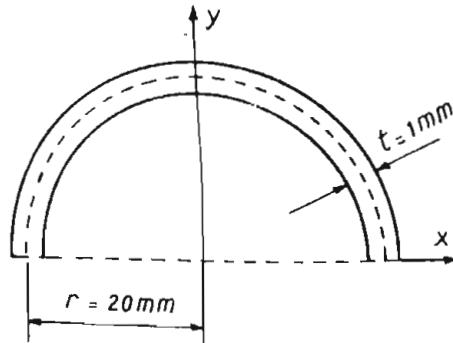
9-4. Xác định trọng tâm và mômen quán tính đối với trục trung tâm song song với cạnh đáy của hình thang.

9-5. Tính mômen quán tính đối với trục trung tâm song song với cạnh đáy của một hình tam giác (hình bài 9-5).

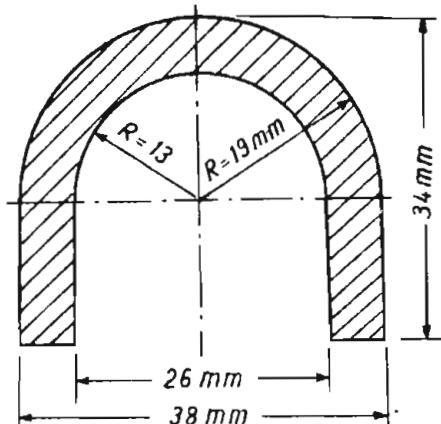
9-6. Tính mômen quán tính I_x , I_y của hình bình hành đối với hệ trục trung tâm O_x , O_y như trên hình bài 9-6.



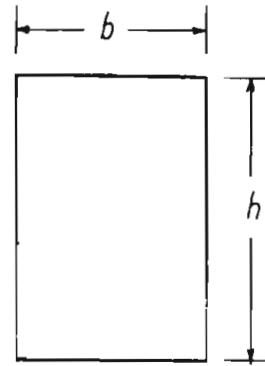
9-7. Xác định trọng tâm và tính mômen quán tính chính trung tâm của các mặt cắt trên hình bài 9-7a và 9-7b.



Hình bài 9-7a



Hình bài 9-7b



Hình bài 9-8

9-8. Xác định hệ trục quán tính chính có gốc tại góc A của hình chữ nhật, có kích thước $b = 4 \text{ cm}$, $h = 6 \text{ cm}$. Tính các mômen quán tính chính (hình bài 9-8).

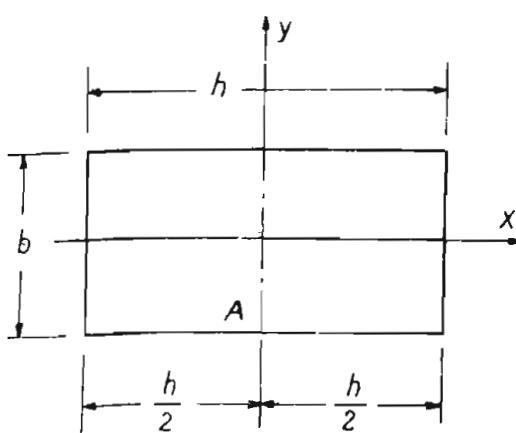
9-9. Tìm tỉ lệ chiều dài giữa các cạnh của hình chữ nhật sao cho bất kì hệ trục quán tính nào đi qua điểm giữa A của một cạnh A ($y_A = -\frac{h}{2}$, $x_A = 0$) đều là hệ trục quán tính chính và tìm mômen quán tính chính ấy (hình bài 9-9).

9-10. Xác định mômen quán tính của hình chữ thập có $b = 9\text{cm}$ và $h = 4 \text{ cm}$ đối với hệ trục Ouv (hình bài 9-10).

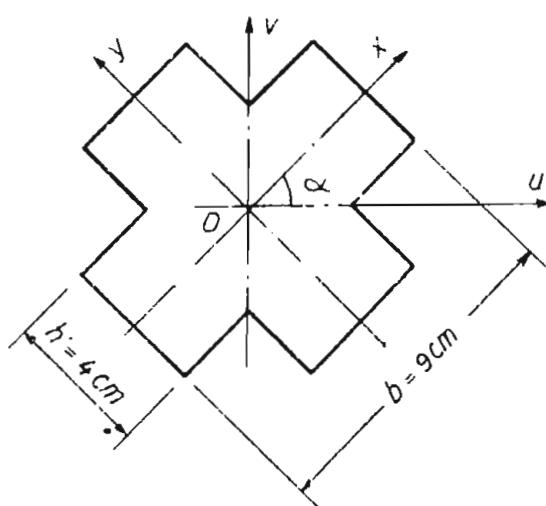
9-11. Tính mômen quán tính chính trung tâm của các hình ở hình bài 9-11.

9-12. Tìm mômen quán tính đối với trục trung tâm α của mặt cắt một dầm thép ghép như trên hình bài 9-12. So sánh mômen quán tính mặt cắt nguyên và mặt cắt đã bị khuyết lỗ.

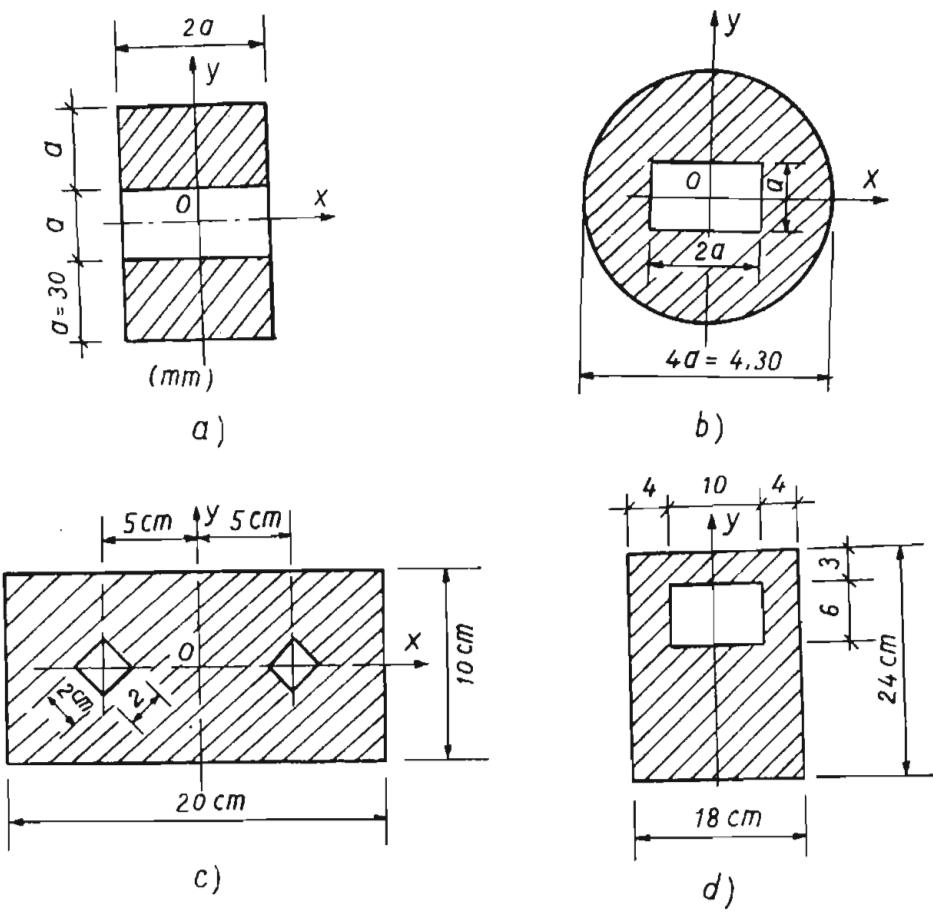
9-13. Các mặt cắt vẽ trên hình bài 9-13 (hình vuông, hình chữ nhật để nằm, hình chữ nhật để đứng, hình tròn, hình vành khăn, hình ghép hai chữ I, hình chữ I, hình ghép hai



Hình bài 9-9



Hình bài 9-10



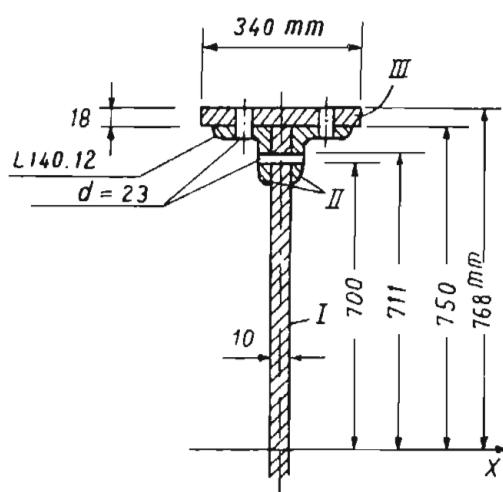
Hình bài 9-11

chữ [) có cùng diện tích $F = 62 \text{ cm}^2$. Tính mômen quán tính của các mặt cắt đối với trục nằm ngang và so sánh.

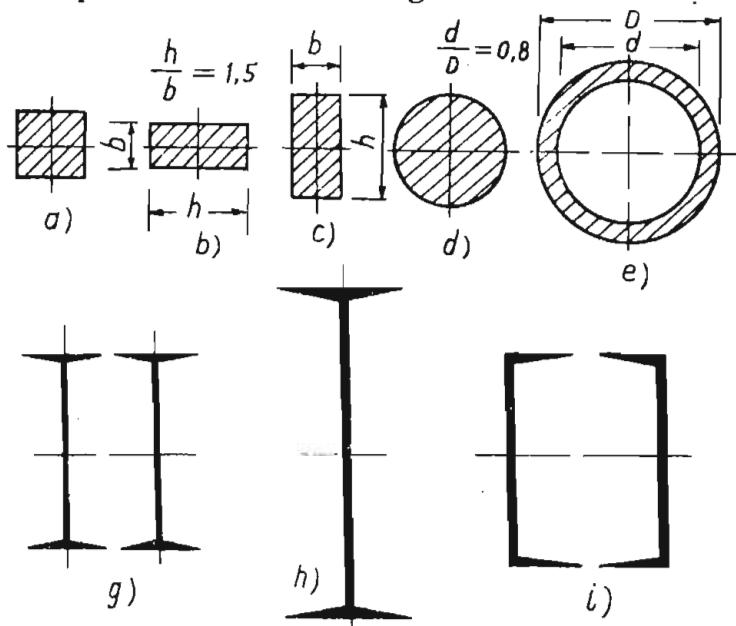
9-14. Tìm khoảng cách c của mặt cắt gồm hai thép chữ [số hiệu 30 được bố trí như ở hình bài 9-14 để có $J_x = J_y$

9-15. Tính trọng tâm và tính mômen quán tính chính trung tâm của mặt cắt như trên hình bài 9-15.

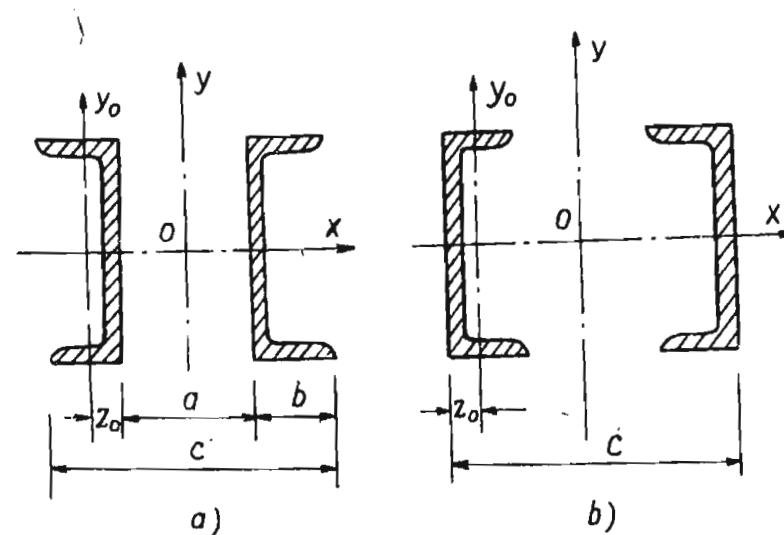
9-16. Xác định trọng tâm và tính mômen quán tính chính trung tâm của các mặt cắt như trên hình bài 9-16.



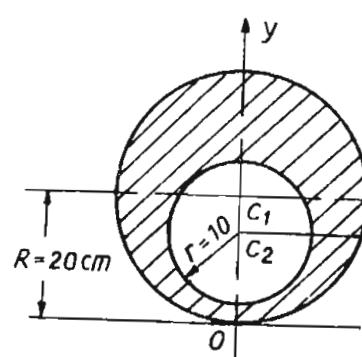
Hình bài 9-12



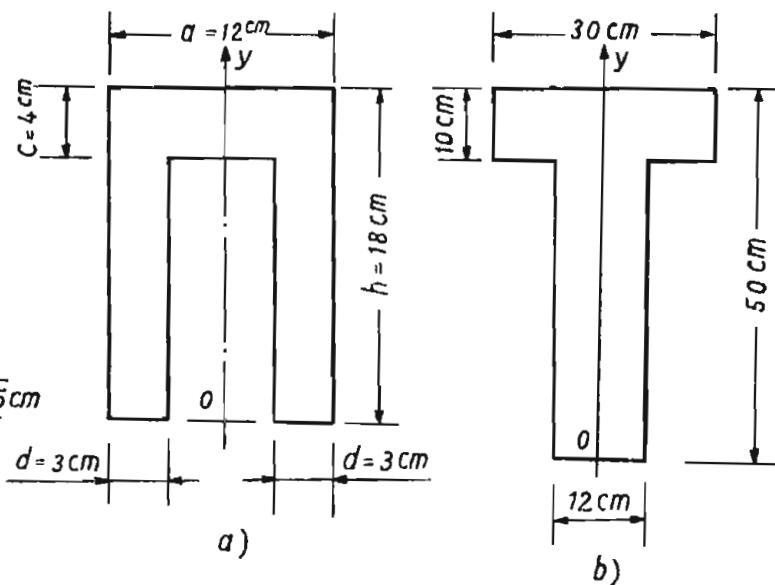
Hình bài 9-13



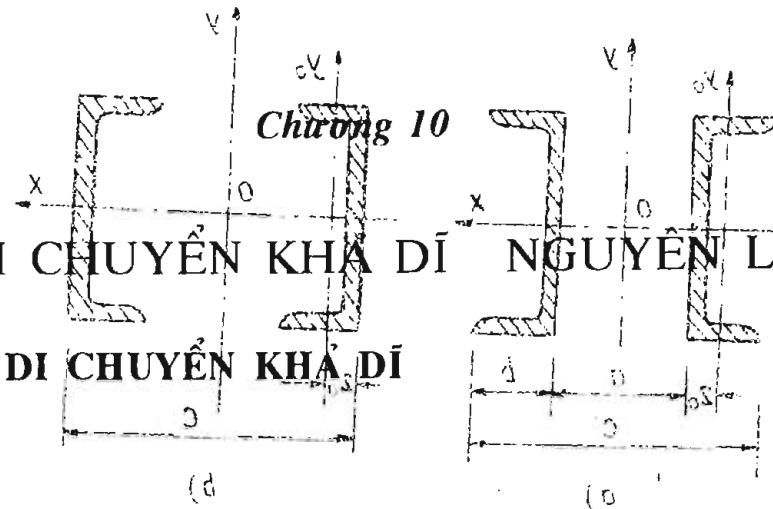
Hình bài 9-14



Hình bài 9-15



Hình bài 9-16



NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẢ DĨ NGUYÊN LÝ DALAMBE

§10-1. NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẢ DĨ

I. Cơ sở lý thuyết

1/ Nguyên lý di chuyển khả dĩ :

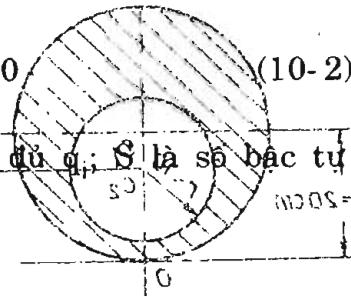
"Đối với cơ hệ chịu liên kết giữ, dừng và lý tưởng, điều kiện cần và đủ để cơ hệ cân bằng ở một vị trí đang xét là tổng công nguyên tố của các lực hoạt động tác dụng lên cơ hệ trong mọi di chuyển khả dĩ từ vị trí đó bằng không".

$$\sum \delta A = \sum \vec{F}_k \cdot \delta r_k = 0 \quad (10-1)$$

Đối với hệ chịu liên kết holonomic, giữ, dừng và lý tưởng, điều kiện cân bằng (10-1) được viết ở dạng tọa độ suy rộng là :

$$\sum \delta A = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_s \delta q_s = \sum_{i=1}^s Q_i \delta q_i = 0 \quad (10-2)$$

ở đó Q_i là lực suy rộng tương ứng với tọa độ suy rộng δq_i ; s là số bậc tự do của cơ hệ; δq_i là biến phân của tọa độ q_i .



2/ Các phương pháp tính lực suy rộng

Phương pháp 1.

Theo định nghĩa, ta có

$$Q_i = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \frac{\partial r_k}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^n (X_k \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + Y_k \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + Z_k \frac{\partial z_k}{\partial q_i}) \quad (10-3)$$

Như vậy để sử dụng công thức này ta cần tìm hình chiếu các lực hoạt động trên các trục tọa độ. Đề C và biểu thức các tọa độ của điểm đặt của lực hoạt động theo tọa độ suy rộng đủ.

Phương pháp 2.

Tính tổng công của các lực hoạt động trong di chuyển khả dĩ tương ứng rồi biểu diễn dưới dạng (10-2).

Các hệ số đứng trước các biến phân của tọa độ suy rộng đủ sẽ là lực suy rộng tương ứng.

Do các δq_i độc lập, ta có thể tính riêng từng lực suy rộng bằng cách chọn các di chuyển khả dĩ đặc biệt. Ví dụ, để tính lực suy rộng Q_1 ứng với tọa độ q_1 ta chọn hệ di chuyển kh

dị đặc biệt như sau

$$\delta q_1 \neq 0, \delta q_2 = \delta q_3 = \dots = \delta q_s = 0, \text{ khi đó } \sum \delta A = Q_1 \delta q_1$$

Để tìm Q_2 , ta truyền cho hệ một di chuyển khả di, trong đó

$$\delta q_2 \neq 0, \delta q_1 = \delta q_3 = \dots = \delta q_s = 0, \text{ khi đó } \sum \delta A = Q_2 \delta q_2$$

Ta làm tương tự đối với các lực suy rộng khác.

Nhóm 3: Cân bằng

Phương pháp 3.

1-01

Khi các lực dều là lực thế (tức là hệ chỉ chịu các lực như : trọng lực, lực đàn hồi, ngẫu lực, lực đàn hồi) và thể nặng của các lực thế có dạng : $\Pi = \Pi(q_1, q_2, \dots, q_s)$ thì lực suy rộng $\dot{\Pi}$ được tính theo công thức $\dot{\Pi} = \frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$ với $i = 1, 2, \dots, s$

i. Cân bằng

3/ Điều kiện cân bằng của cơ hệ chịu liên kết holonomic, giữ dừng và lý tưởng trong dạng tọa độ suy rộng dù :

Điều kiện cân bằng của cơ hệ có dạng $\dot{\Pi} = \dot{\Pi}(q_1, q_2, \dots, q_s)$ là $\dot{\Pi} = 0$ với q_1, q_2, \dots, q_s là các tọa độ tự do.

II. Hướng dẫn áp dụng

Các bài toán thường gặp :

1/ Tìm điều kiện cân bằng của cơ hệ có một hoặc nhiều bậc tự do (điều kiện về lực hoạt động, về vị trí cân bằng).

Khi giải loại bài toán này đầu tiên cần xác định số bậc tự do của cơ hệ, sau đó chọn các tọa độ suy rộng dù và tính các lực suy rộng của các hoạt động tương ứng với các tọa độ suy rộng dù và cuối cùng viết điều kiện cân bằng (10-5).

2/ Xác định các phản lực liên kết của các hệ cơ hệ tĩnh định.

Trong bài toán loại này hệ cơ học có số bậc tự do bằng không. Do đó cần thay thế cơ hệ đang khảo sát bằng những cơ hệ một hoặc nhiều bậc tự do bằng cách giải phóng các liên kết. Nói cách khác ta cần phá vỡ các liên kết và thay thế bằng cách sử dụng của chúng bằng những phản lực liên kết. Khi đó số bậc tự do của cơ hệ bằng số thành phần (ẩn) của các liên kết bị phá vỡ. Bằng cách như vậy chúng ta có bài toán cân bằng của cơ hệ mà số bậc tự do khác không.

Chú thích :

- a) Khi chọn các tọa độ suy rộng dù của cơ hệ có thể từ việc phân tích khả năng chuyển động cơ hệ để biết số bậc tự do cơ hệ và nhờ đó chọn các tọa độ suy rộng dù của cơ hệ.
- b) Khi tính tĩnh của các lực trong di chuyển khả di có thể áp dụng mọi công thức tính công đã biết, trong đó ta thay các di chuyển thực vô cùng bằng những di chuyển khả di tương ứng. Thí dụ, trong trường hợp vật rắn chuyển động quay quanh một trục cố định, ta có:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k) = \sum_{k=1}^n m_o(\vec{F}_k) \delta \varphi$$

còn trong trường hợp vật rắn chuyển động song phẳng thì :

$$\sum \delta A(\vec{F}_k) = \sum_{k=1}^n m_p(\vec{F}_k) \delta \varphi$$

Ở đó P là tâm vận tốc tức thời của tấm phẳng.

III. Những bài giải mẫu

Thí dụ 10-1.

Dùng kích (hình 10-1) để nâng vật nặng có khối lượng $M = 5020 \text{ kg}$. Tay quay OA dài $0,6 \text{ m}$ và bước của trục vít là $h = 12 \text{ mm}$. Tác dụng vào đầu mút OA của tay quay một lực \vec{P} hướng vuông góc với chính tay quay và với đường tâm của thanh vít. Tìm cường độ của lực P khi cơ hệ cân bằng, bỏ qua ma sát.

Bài giải

Cơ hệ khảo sát gồm toàn bộ kích. Cơ hệ có 1 bậc tự do với liên kết hòlônmôm giữ, dừng và lý tưởng. Chọn tọa độ suy rộng $q = \varphi$; φ là góc quay của tay quay OA. Các lực hoạt động gồm lực \vec{P} và \vec{Q} . Giả sử $\delta\varphi$ và δh là di chuyển khả dĩ tương ứng của tay quay và vật nặng. Biết rằng khi tay quay quay được góc 2π thì vật được nâng một đoạn là h vậy :

$$\delta h = \frac{h}{2\pi} \delta\varphi$$

Tổng công các lực hoạt động trong di chuyển khả dĩ sẽ bằng :

$$\sum \delta A = Pa\delta\varphi - Q\delta h = (Pa - Q\frac{h}{2\pi})\delta\varphi$$

Vậy lực suy rộng của các lực hoạt động ứng với tọa độ suy rộng φ là :

$$Q_\varphi = + Pa - Q \frac{h}{2\pi}$$

Từ điều kiện cân bằng của cơ hệ (10-5) :

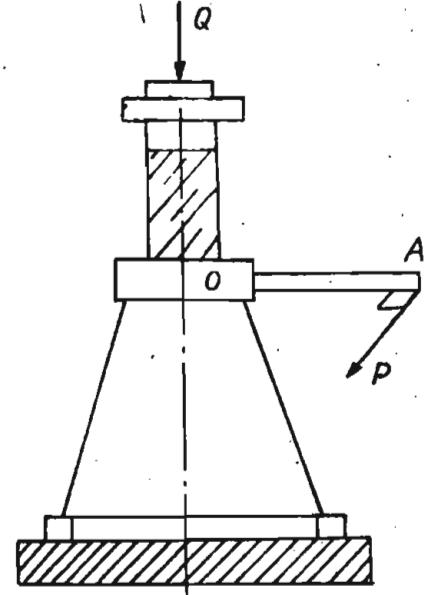
$$\begin{aligned} Q_\varphi &= 0 \\ \text{ta có : } P &= \frac{Qh}{2\pi a} \end{aligned}$$

Thay số vào ta nhận được :

$$P = \frac{5020 \times 9,81 \times 0,012}{2 \times 3,14 \times 0,6} = 157 \text{ N}$$

Thí dụ 10-2.

Cho cơ cấu như hình 10-2. Tác dụng vào khâu DC tại điểm C lực nén nang \vec{F}_c . Tìm giá trị của lực \vec{F}_B đặt thẳng góc vào thanh AB tại điểm B, để cơ cấu cân bằng. Cho : $AD = BC$; $AB = CD$; $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$; $\angle DCB = 30^\circ$.



Hình 10-1

Bài giải

Khảo sát cơ cấu ABCD. Cơ cấu chịu liên kết hòlôn ôm, giữ, dừng, lý tưởng và có một bậc tự do. Chọn tọa độ suy rộng đủ là góc định vị φ của thanh DC. Các lực hoạt động là các lực \vec{F}_C và \vec{F}_D . Cho cơ hệ di chuyển khả dĩ ứng với góc quay $\delta\varphi$ của thanh DC. Lúc đó di chuyển δs_C của điểm C có phương vuông góc với thanh DC, còn điểm B có di chuyển δs_B , có phương vuông góc với thanh AB. Tổng công khả dĩ của các lực hoạt động sẽ là

$$\sum \delta A = F_C \delta s_C + F_B \delta s_B.$$

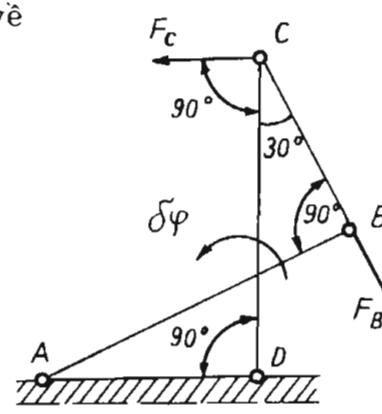
Thanh BC chuyển động song phẳng. Sử dụng định lý về hình chiếu vận tốc của hai điểm thuộc vật song phẳng ta có

$$V_B = V_C \sin 30^\circ = -\frac{1}{2} V_C$$

$$\text{Do } \delta s_B = \frac{1}{2} \delta s_C = \frac{1}{2} \overline{DC} \delta \varphi$$

Vây

$$\sum \delta A_F = (F_C - \frac{F_B}{2}) DC \delta \varphi$$



Hình 10-2

Lực suy rộng của các lực hoạt động ứng với tọa độ suy rộng φ sẽ bằng

$$Q_{\varphi} = (F_C - \frac{F_B}{2})DC$$

Từ điều kiện cân bằng của cơ hệ trong tọa độ suy rộng đủ (10-5) :

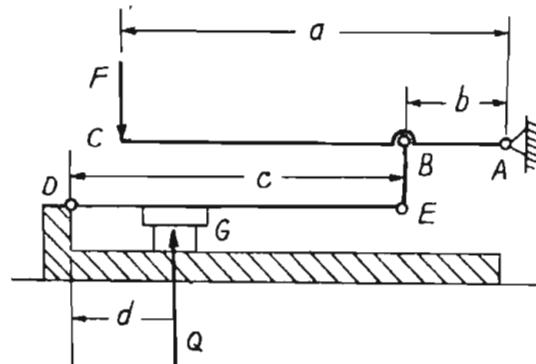
$$Q_{\nu\nu} = 0$$

ta rút ra .

$$F_B = 2F_C.$$

Thí dụ 10-3. Xác định lực ép Q lên mẫu G của một máy ép có sơ đồ như hình 10-3. Cho

$$F = 100 \text{ N}, a = 60 \text{ cm}, b = 10 \text{ cm}; c = 60 \text{ cm}; d = 20 \text{ cm}.$$



Hình 10-3

Bài giải

Khảo sát cơ cấu máy ép. Cơ hệ có liên kết hôlônôm, giữ, dừng, lý tưởng và có một bậc tự do. Chọn tọa độ suy rộng đủ là góc định vị φ của khâu $A\bar{C}$. Các lực hoạt động là lực \vec{F} và lực ép \vec{Q} . Cho cơ cấu di chuyển khả dĩ ứng với thanh AC quay quanh A một góc $\delta\varphi$. Khi đó thanh DE quay quanh D một góc $\delta\theta$.

Tổng công khả dĩ của các lực hoạt động sẽ là .

$$\Sigma \delta A = Fa\delta\varphi - Qd\delta\theta.$$

Từ nhận xét rằng di chuyển hai điểm B và E bằng nhau, ta có

$$b\delta\varphi = c\delta\theta$$

Vậy $\sum \delta A = (Fa - Qd) \frac{b}{c} \delta \varphi$

Lực suy rộng Q_φ ứng với tọa độ rộng đủ φ sẽ bằng

$$Q_\varphi = Fa - Qd \frac{b}{c}$$

Sử dụng điều kiện cân bằng của cơ hệ trong tọa độ suy rộng đủ.

$$Q_\varphi = Fa - Qd \frac{b}{c} = 0$$

ta nhận được : $Q = F - \frac{b}{d}$

Thi du 10-4. Cho cơ hệ như trên hình 10-4. Xác định mômen M của ngẫu lực cần đặt vào trục kéo I và tỷ số trọng lượng của hai vật nặng để cho cơ hệ cân bằng. Cho bán kính của trục tời là R , bỏ qua trọng lượng của các ròng rọc và ma sát ở các ổ trục quay.

Bài giải

Cơ hệ khảo sát gồm có trục kéo I và các ròng rọc II, III, IV, dùng dây vắt qua chúng và hai vật nặng có trọng lượng P_1 , P_2 . Để dàng thấy cơ hệ có hai bậc tự do.

Có thể chọn hai tọa độ suy rộng đủ của cơ hệ là $q_1 = \varphi_1$, $q_2 = \varphi_2$, ở đây φ_1 , φ_2 là hai góc quay của trục I và của ròng rọc II tương ứng. Hệ lực hoạt động gồm các trọng lực \vec{P}_1 , \vec{P}_2 và mômen \vec{M} .

Để tính các lực suy rộng ứng với các tọa độ suy rộng đủ ta cho cơ hệ thực hiện một di chuyển khả dĩ bất kỳ và tính biểu thức

$$\sum \delta A(\vec{F}_k) = \delta A(\vec{M}) + \delta A(\vec{P}_1) + \delta A(\vec{P}_2)$$

Biểu thị các di chuyển khả dĩ bất kỳ của cơ hệ bằng hai biến phân góc quay $\delta\varphi_1$, $\delta\varphi_2$ của trục I và của ròng rọc II. Qui ước rằng các di chuyển thẳng đứng là dương nếu chúng hướng lên và là âm khi chúng hướng xuống, các di chuyển góc quay là dương khi chúng ngược với chiều quay của kim đồng hồ và là âm trong trường hợp trái lại. Gọi δs_1 , δs_2 là di chuyển các điểm đặt của các lực \vec{P}_1 và \vec{P}_2 . Ta có :

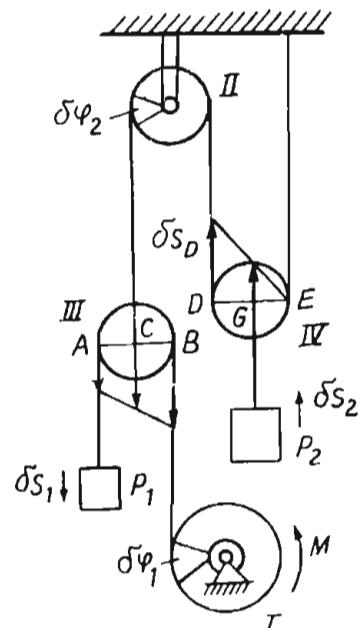
$$\sum \delta A(\vec{F}_k) = M\delta\varphi_1 - P_1\delta s_1 - P_2\delta s_2 \quad (a)$$

Cần phải tính các δs_1 , δs_2 theo $\delta\varphi_1$ và $\delta\varphi_2$. Khi chú ý ròng rọc IV có tâm vận tốc tức thời là B ta có

$$\delta s_2 = \frac{\delta s_D}{2} = \frac{r\delta\varphi_2}{2}$$

Ròng rọc III chuyển động song phẳng, nên ta có

$$\delta s_C = \frac{\delta s_A + \delta s_B}{2}$$



Hình 10-4

Từ đó suy ra : $\delta s_1 = \delta s_A = 2\delta s_C - \delta s_B$

Nhưng $\delta s_C = r\delta\varphi_2; \delta s_B = -R\delta\varphi_1$

nên $\delta s_1 = 2r\delta\varphi_2 + R\delta\varphi_1$

Thay các giá trị đó của δs_1 và δs_2 vào biểu thức (a) ta có

$$\begin{aligned}\sum \delta A(F_k) &= M\delta\varphi_1 - P_1(R\delta\varphi_1 - 2r\delta\varphi_2) - P_2 \frac{r\delta\varphi_2}{2} \\ &= (M - P_1R)\delta\varphi_1 + r(2P_1 - \frac{P_2}{2})\delta\varphi_2\end{aligned}$$

Vậy các lực suy rộng Q_1 và Q_2 ứng với các tọa độ suy rộng φ_1 và φ_2 là :

$$Q_1 = M - P_1R; Q_2 = r(2P_1 - \frac{P_2}{2})$$

Điều kiện cân bằng của cơ hệ sẽ là :

$$M - P_1R = 0; 2P_1 - \frac{P_2}{2} = 0$$

Từ đó ta nhận được $M = P_1R; P_2 = 4P_1$

Chú thích : Để tìm các lực suy rộng Q_1, Q_2 có thể sử dụng phương pháp tính riêng từng lực suy rộng. Thí dụ, để tính lực suy rộng Q_1 ứng với tọa độ suy rộng φ_1 ta chọn di chuyển khả dĩ đặc biệt như sau : $\delta\varphi_1 \neq 0; \delta\varphi_2 = 0$ và tính công của các lực trong di chuyển khả dĩ đặc biệt này.

Chú ý là trong di chuyển khả dĩ đặc biệt này chỉ có ngẫu lực M và lực \vec{P}_1 sinh công (lực \vec{P}_2 không sinh công vì di chuyển khả dĩ đặc biệt này ròng rọc IV đứng yên).

Vậy công các lực hoạt động trong di chuyển khả dĩ đặc biệt trên bằng

$$\sum \delta A = M\delta\varphi_1 - P_1\delta s_A$$

Trong di chuyển khả dĩ đặc biệt trên, ròng rọc III quay quanh tâm của mình.

Do đó $\delta s_A = \delta s_B = R\delta\varphi_1$

Thay giá trị của δs_A vào biểu thức trên, ta có

$$\sum \delta A = (M - P_1R)\delta\varphi_1$$

Do đó lực suy rộng $Q_1 = M - P_1R$

Bằng cách hoàn toàn tương tự, để tính lực suy rộng Q_2 ta chọn hệ di chuyển khả dĩ đặc biệt như sau

$$\delta\varphi_1 = 0, \delta\varphi_2 \neq 0$$

Trong di chuyển khả dĩ như vậy ròng rọc I đứng yên (và do đó ngẫu lực M không sinh công) còn ròng rọc III và IV chuyển động song phẳng quanh tâm vận tốc E và B tương ứng. Ta có :

$$\delta s_A = 2\delta s_C; \delta s_G = \frac{1}{2}\delta s_D; C \text{ và } G \text{ là tâm ròng rọc III và IV.}$$

Vì $\delta s_C = \delta s_D = r\delta\varphi_2$ nên

$$\delta s_A = 2r\delta\varphi_2; \delta s_G = \frac{1}{2}r\delta\varphi_2$$

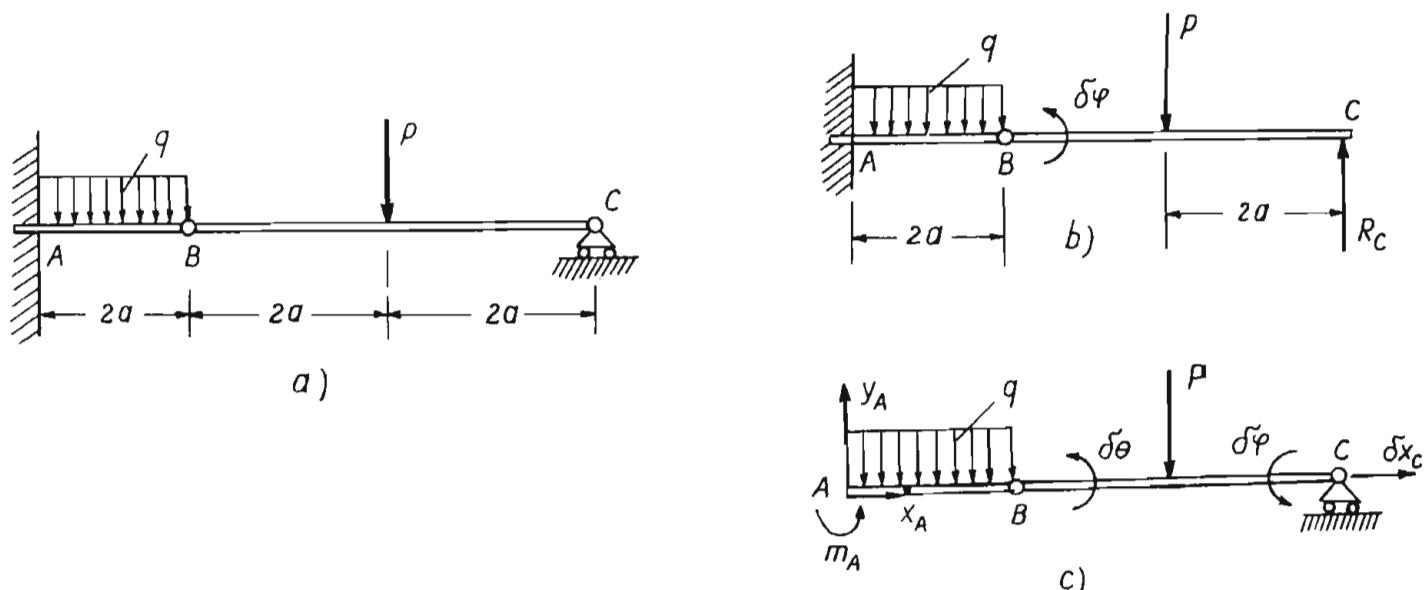
Công của các lực hoạt động di chuyển khả dĩ đặc biệt này bằng

$$\sum \delta A = P_1 \delta s_A - P_2 \delta s_G = (2P_1 r - P_2 \frac{r}{2}) \delta\varphi_2$$

$$\text{Vậy } Q_2 = r(2P_1 - \frac{P_2}{2})$$

Chúng ta nhận được kết quả đã tìm ở trên.

Thi dụ 10-5 Cho hệ dầm chịu lực như hình 10-5. Tìm phản lực ở gối C và ở ngầm A. Bỏ qua ma sát.



Hình 10-5

Bài giải

Khảo sát hệ dầm đã cho. Đầu tiên ta tìm phản lực ở gối C. Bỏ gối đỡ đi, tác dụng vào C phản lực \vec{R}_c thẳng đứng hướng lên. Ta có cơ hệ một bậc tự do cân bằng dưới các lực hoạt động \vec{P} , \vec{Q} , \vec{R}_c (cần xem \vec{R}_c là lực hoạt động) có liên kết tại ngầm A.

Cho cơ hệ thực hiện di chuyển khả dĩ đặc biệt bằng cách cho dầm BC xoay đi một góc vô cùng bé $\delta\varphi$ (hình 10-5b). Điều đó có nghĩa là ta đã xem cơ hệ có một bậc tự do và tọa độ suy rộng đủ của cơ hệ là $q = \varphi$; φ là góc quay của dầm BC quanh B.

Vậy

$$\sum \delta A = \bar{m}_B(\vec{P}) + \bar{m}_B(\vec{R}_c) \delta\varphi = (-2aP + 4aR_c)\delta\varphi$$

$$\text{Vậy } Q_\varphi = 4aR_c - 2aP$$

Sử dụng điều kiện cân bằng của hệ $Q\varphi = 0$ ta nhận được

$$R_c = \frac{P}{2}$$

Bây giờ ta chuyển sang tìm phản lực của ngầm A.

Phá vỡ liên kết tại ngàm A và thay thế bằng các lực \vec{X}_A , \vec{Y}_A và ngẫu lực m_A (hình 10-5c). Bằng cách đó ta có hệ 3 bậc tự do. Chọn các tọa độ suy rộng như sau $q_1 = x_c$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = \theta$, φ là góc quay của dầm BC quanh C và θ là góc quay của dầm AB quanh B, ta lần lượt tính các lực suy rộng: Q_{xc} , $Q\varphi$ và $Q\theta$. Để tính lực suy rộng Q_{xc} ta chọn hệ di chuyển khả dĩ như sau: $\delta x_c \neq 0$; $\delta\theta = \delta\varphi = 0$. Ta tính công của các lực hoạt động \vec{P} , \vec{Q} , \vec{X}_A , \vec{Y}_A , \vec{m}_A trong di chuyển đặc biệt này:

$$\sum \delta A = X_a \cdot \delta x_c$$

Vậy

$$Q_{xc} = X_A.$$

Để tính lực suy rộng Q_θ ta chọn các di chuyển khả dĩ như sau:

$\delta x_c = 0$, $\delta\varphi = 0$, $\delta\theta \neq 0$. Công các lực hoạt động trong di chuyển khả dĩ này là

$$\sum \delta A = (Qa + m_A - 2a Y_A) \delta\theta$$

Vậy :

$$Q_\theta = Qa + m_A - 2a Y_A$$

Để tính lực suy rộng Q_φ ta chọn các di chuyển khả dĩ như sau

$$\delta x_c = 0; \delta\varphi \neq 0; \delta\theta = 0,$$

Công của các lực hoạt động trong di chuyển khả dĩ này là

$$\sum \delta A = [-6a Y_A + m_A + (2P + 5Q)]a \delta\varphi$$

Vậy :

$$Q_\varphi = -6a Y_A + m_A + (2P + 5Q)a$$

Sử dụng điều kiện cân bằng của cơ hệ ta có

$$X_A = 0; Q_a + m_A - 2a Y_A = 0; -6a Y_A + m_A + (2P + 5Q)a = 0$$

Từ đó

$$X_A = 0; Y_A = Q + \frac{P}{2}; m_A = a(P + Q)$$

§10-2. NGUYÊN LÝ DALAMBE

I. Cơ sở lý thuyết

1/ Lực quán tính

Lực quán tính của chất điểm $\boxed{\vec{F}^q = -m\vec{a}}$ (10-6)

trong đó m và \vec{a} là khối lượng và gia tốc chất điểm.

Thu gọn lực quán tính của vật rắn chuyển động:

Vật tịnh tiến :

$$\vec{R}_c^q = -M\vec{a}_c \quad (10-7)$$

trong đó : M khối lượng của vật
 \vec{a}_c gia tốc khối tâm C.

Tấm phẳng quay quanh trục cố định, vuông góc với tâm tại O

$$\vec{R}_o^{qt} = -M\vec{a}_c; M_o^{qt} = J_o \cdot \bar{\epsilon} \quad (10-8)$$

trong đó : J_o mômen quán tính của tấm đối với trục O.
 $\bar{\epsilon}$ gia tốc góc của vật.

Tấm phẳng chuyển động song phẳng :

$$\vec{R}_c^{qt} = -M\vec{a}_c; \vec{M}_c^{qt} = -J_c \bar{\epsilon}_S \quad (10-9)$$

trong đó J_c mômen quán tính của tấm đối với trục qua khối tâm C;
 $\bar{\epsilon}_S$ gia tốc góc của tấm phẳng.

2/ Nguyên lý Dalambé

Ở mỗi thời điểm ta có một hệ lực cân bằng gồm các lực thật tác dụng lên cơ hệ và các lực quán tính tương ứng của các chất điểm cơ hệ.

$$(\sum \vec{F}_k, \sum \vec{F}_k^{qt}) \equiv 0$$

Hệ quả : nếu các lực thật được phân thành các ngoại lực và nội lực tức $\vec{F}_k = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i$, thì

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e + \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{qt} = 0 \\ \sum_{k=1}^n m_o(\vec{F}_k^e) + \sum_{k=1}^n m_o(\vec{F}_k^{qt}) = 0 \end{array} \right\} \quad (10-10)$$

3/ Phương pháp tính động

Nhờ hệ quả đã nêu trên ta có thể giải quyết bài toán động lực học bằng cách viết phương trình cân bằng.

Trình tự áp dụng như sau :

- Xác định vật khảo sát và phân tích chuyển động của từng vật thể thuộc cơ hệ.
- Đặt ngoại lực tác dụng lên cơ hệ, đặt các lực quán tính của các vật thuộc hệ phù hợp với các chuyển động và kết quả thu gọn để có một hệ gồm các ngoại lực và các lực quán tính.
- Viết phương trình cân bằng tĩnh học.
- Giải các phương trình đó và nhận xét kết quả.

Chú ý : đối với vật rắn cần sử dụng kết quả thu gọn của hệ lực quán tính.

II. Hướng dẫn áp dụng

Phương pháp tĩnh động thường được áp dụng để giải các bài toán sau đây

Bài toán thuận khi đã biết chuyển động của cơ hệ, tìm lực tác dụng lên cơ hệ, đặc biệt quan trọng là tìm phản lực động lực.

Bài toán đặc biệt : tìm điều kiện cân bằng tương đối của một chất điểm hay vật thể nào đó đang chuyển động (xem thí dụ 10-8).

Phương pháp tĩnh động cũng có thể giúp ta giải quyết bài toán tìm các qui luật chuyển động (bài toán ngược).

III. Những bài giải mẫu

Thí dụ 19-6.

Một vật nặng trọng lượng P được kéo lên nhanh dần đều với gia tốc \vec{a} bằng dây cáp. Tìm sức căng của dây cáp.

Bài giải

Vật khảo sát : vật nặng A chuyển động tịnh tiến thẳng đứng. Các lực tác dụng lên vật:

Trọng lực \vec{P}

Lực kéo của dây \vec{T} .

Lực quán tính $\vec{F}^{qt} = -m\vec{a}$ Ta có hệ lực cân bằng :

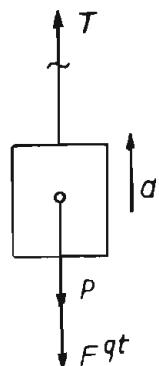
$$(\vec{P}, \vec{T}, \vec{F}^{qt}) = 0$$

Viết phương trình cân bằng cho hệ lực (chiếu các lực lên phương thẳng đứng)

$$P + T - F^{qt} = 0$$

giải ra được

$$T = P(1 + \frac{a}{g})$$



Hình 10-6

Nhận xét sức căng dây T bằng chính lực P cộng với một lực nữa ta gọi là phản lực động lực $P\frac{a}{g}$. Nếu vật được nâng lên không có gia tốc ($a = 0$) thì $T = P$, nghĩa là không có phản lực động lực

Thí dụ (10-7).

Hai đĩa có khối tâm ở A và B, có khối lượng m_1 và m_2 được gắn vào trực CD vuông góc với các đĩa qua O_1 và O_2 cách A và B tương ứng các đoạn a và b . Biết O_1A và O_2B nằm trên hai mặt phẳng vuông góc; $O_1C = c$; $O_2D = d$; $O_1O_2 = l$.

Xác định phản lực động lực ở các ố trực C, D khi trực quay đều với vận tốc góc ω (hình 10-7).

Bài giải

Khảo sát cơ hệ gồm trực DC và hai đĩa.

Chọn hệ trục xy gắn chặt với vật quay, trực Z nằm dọc DC.

Các đĩa là những tấm phẳng quay đều quanh trục vuông góc với chúng, vậy ta có các lực quán tính tương ứng bằng:

$$\vec{F}_A^{qt} = -m_1 \vec{a}_A$$

$$\vec{F}_B^{qt} = -m_2 \vec{a}_B$$

Về trị số

$$F_A^{qt} = m_1 a \cdot \omega^2$$

$$F_B^{qt} = m_2 b \cdot \omega^2$$

Các phản lực động lực được phân tích ra các thành phần nằm trên các trục tương ứng.

$$(\vec{X}^d, \vec{Y}^d, \vec{X}_D^d, \vec{Z}_D^d, \vec{F}_A^{qt}, \vec{F}_B^{qt}) = 0 \quad (a)$$

Viết phương trình cân bằng cho hệ lực không gian (a) :

$$\sum F_{kx} = X_C^d + X_D^d + F_B^{qt} = 0$$

$$\sum F_{ky} = Y_C^d + Y_D^d + F_A^{qt} = 0$$

$$\sum F_{kz} = Z_D^d = 0$$

$$\sum m_x(\vec{F}_k) = -Y_C^d(c + d + l) - F_A^{qt}(d + l) = 0$$

$$\sum m_y(\vec{F}_k) = X_C^d(c + d + l) + F_B^{qt}(d) = 0$$

Giải hệ phương trình (b) ta có

$$X_C^d = \left(\frac{b}{c + d + l} \right) m_2 \cdot b \cdot \omega^2$$

$$Y_C^d = \left(\frac{d + 1}{c + d + l} \right) m_1 \cdot a \cdot \omega^2$$

$$X_D^d = \left(\frac{d + l}{c + d + l} \right) m_2 \cdot b \cdot \omega^2$$

$$Y_D^d = -\left(\frac{c + l}{c + d + l} \right) m_1 \cdot a \cdot \omega^2 ; Z_D^d = 0$$

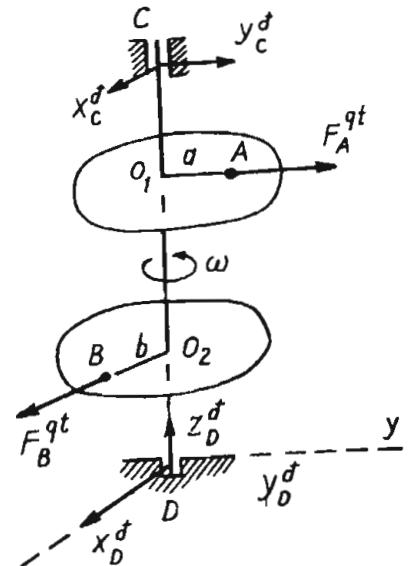
Nhận xét : muốn cho phản lực động triệt tiêu khi trục quay ta cần phải chế tạo sao cho trục quay CD đi qua khối tâm của các đĩa, nghĩa là $a = b = 0$.

Thí dụ 10-8.

Một thanh thẳng mảnh, đồng chất $OA = l$ được gắn bằng bản lề vào một trục quay thẳng đứng như hình 10-8. Trục quay đều với tốc độ góc ω , chốt bản lề nằm ngang. Bỏ qua ma sát, tìm hệ thức giữa tốc độ góc ω và góc nghiêng φ giữa trục quay và thanh OA khi chuyển động đó ổn định.

Bài giải

Khảo sát thanh OA chuyển động.



Hình 10-7

(b)

Các lực tác dụng lên OA gồm trọng lực \vec{P} , phản lực \vec{R}_o ở bản lề.

Các lực quán tính \vec{F}_k^{qt} gồm một hệ lực song song cùng chiều phân bố theo hình tam giác.

Ta có

$$(\vec{P}, \vec{R}_o, \text{các } \vec{F}_k^{qt}) \equiv 0 \quad (\text{a})$$

Ta thu gọn lực quán tính của thanh OA khi chuyển động đã ổn định, góc φ không đổi

Xét một phần tử của OA, có khối lượng m_k , cách O một khoảng r_k .

Gia tốc của nó là gia tốc hướng tâm, nên lực quán tính là một lực ly tâm vuông góc với trục quay, cường độ là

$$F_k^{qt} = m_k h_k \cdot \omega^2 = m_k r_k \cdot \sin\varphi \cdot \omega^2$$

Ta có hệ lực song song phân bố như hình 10-8. Thu gọn hệ lực này ta được một lực R^{qt} đặt tại G cách O một đoạn

bằng $\frac{2}{3} l$, có cường độ là

$$R^{qt} = \frac{P}{g} a_C$$

tức là $R^{qt} = \frac{P}{g} \cdot \frac{l}{2} \cdot (\sin\varphi) \omega^2$

Vậy ta có hệ cân bằng gồm

$$(\vec{P}, \vec{R}_o, \vec{R}^{qt}) \equiv 0 \quad (\text{b})$$

Viết phương trình cân bằng cho hệ lực phẳng (b)

$$\sum \overline{m}_o(\vec{F}_k) = P \cdot \frac{l}{2} \sin\varphi + R^{qt} \cdot \frac{2}{3} \cdot l \cos\varphi = 0 \quad (\text{c})$$

Thay các giá trị trên vào (c) ta rút ra

$$\cos\varphi = \frac{3g}{2l\omega^2}$$

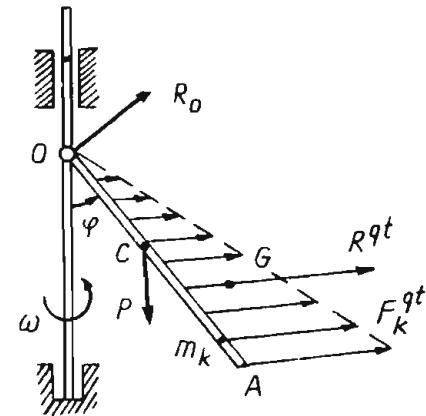
Thí dụ 19-9.

Một bánh đà có trọng lượng P bán kính R được coi như một vành tròn đồng chất. Bánh đà quay đều quanh trục qua tâm O vuông góc với mặt phẳng của nó với tốc độ góc η (vòng/phút). Tìm ứng lực pháp tuyến đối với một tiết diện xuyên tâm của bánh đà do hiệu ứng quán tính gây ra (hình 10-9).

Bài giải

Khảo sát tưởng tượng cắt bánh đà làm hai bởi một mặt phẳng đối xứng đi qua trục quay, không xét đến trọng lực.

Các lực tác dụng lên nửa bánh đà bên phải là lực N_1, N_2 là ứng lực cần tìm. Các lực



Hình 10-8

quán tính xét tương tự như thí dụ trước ta có một hệ lực quán tính \vec{F}_k^{qt} đồng qui đi qua tâm O của bánh đà. Thu gọn hệ lực quán tính này ta có \vec{R}^{qt} với giá trị

$$R_{qt} = Ma_C$$

Ta có $(\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{R}^{qt}) \equiv 0$

Để xác định a_C ta cần xác định trọng tâm C của nửa đường tròn.

Ta có

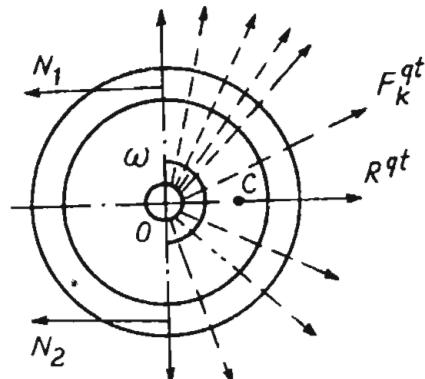
$$\text{nên } OC = \frac{2R}{\pi}$$

$$a_C = OC \cdot \omega^2 = \frac{2R}{\pi} \omega^2$$

$$\text{còn } \omega = \frac{\pi n}{30}$$

Từ hình 10-9 ta thấy ngay :

$$N_1 = N_2 = \frac{P}{2g} = \frac{\pi R}{900} n^2$$



Hình 10-9

Thí dụ 10-10.

Vật 1 có trọng lượng P_1 rơi xuống với giá tốc a_1 làm cho đĩa 2 quay và đĩa 3 lăn không trượt theo mặt phẳng nghiêng, góc nghiêng α (hình 10-10a). Đĩa 2 có trọng lượng P_2 , bán kính r . Đĩa đồng chất 3 có trọng lượng P_3 , bán kính R . Dây song song với mặt phẳng nghiêng.

Tìm Sức căng các nhánh dây, phản lực tại trục O và lực ma sát tại mặt phẳng nghiêng.

Bài giải

Ta tách hệ làm ba vật và xét riêng từng vật. Trên mỗi vật đều đặt các lực hoạt động, lực liên kết, lực quán tính thu gọn.

1/ Xét vật 1 (hình 10-10b).

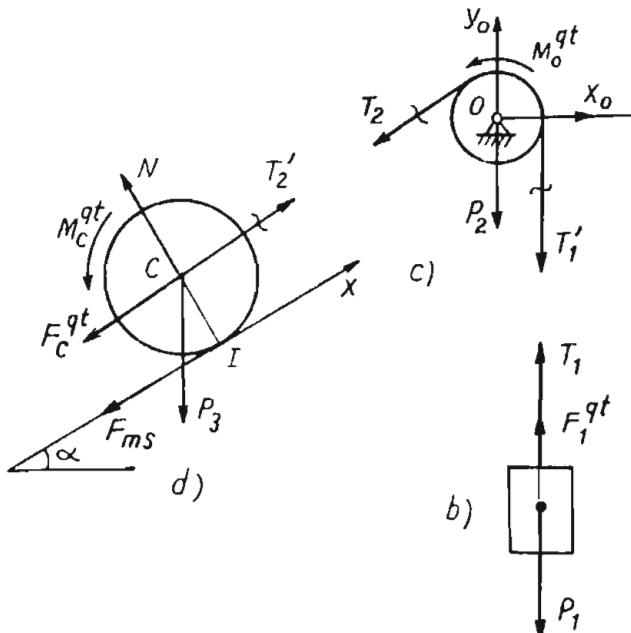
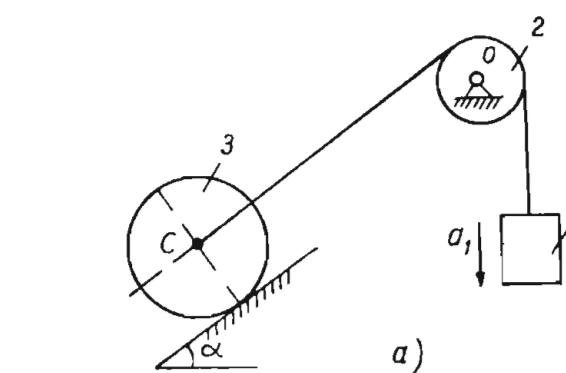
Hệ lực cân bằng :

$$(\vec{P}_1, \vec{T}_1, \vec{F}_1^{qt}) \equiv 0$$

Phương trình cân bằng :

$$\sum F_{ky} = T_1 + F_1^{qt} - P_1 = 0$$

Giải phương trình ta được sức căng của nhánh dây I là :



Hình 10-10

$$T_1 = P_1 \quad F_{1\text{qt}} = P_1 \cdot \frac{P_1}{g} a_1 = P_1(1 - \frac{a_1}{g})$$

2/ Xét đĩa 2 (hình 10-10c).

Hệ lực cân bằng

$$(\vec{P}_2, \vec{T}'_1, \vec{T}_2, \vec{X}_o, \vec{Y}_o, \vec{M}_o^{\text{qt}}) \equiv 0$$

Phương trình cân bằng :

$$\sum F_{kx} = X_o - T_2 \cos \alpha = 0$$

$$\sum F_{ky} = Y_o - P_2 - T'_1 - T_2 \cos \alpha = 0$$

$$\sum m_o(F_k) = T_2 r - T'_1 r + M_o^{\text{qt}} = 0$$

$$\text{Giải các phương trình với } M_o^{\text{qt}} = J_o \varepsilon_2 = \frac{P_2 r^2}{2g} - \frac{a_1}{g} = \frac{P_2 r}{2g} a_1$$

$$\text{Ta được : } T_2 = - \frac{M_o^{\text{qt}}}{r} + T'_1 = - \frac{P_2}{2g} a_1 + P_1(1 - \frac{a_1}{g}) = P_1 - (\frac{P_1}{g} + \frac{P_2}{2g}) a_1$$

$$X_o = T_2 \cos \alpha$$

$$Y_o = P_2 + T'_1 + T_2 \cos \alpha$$

3/ Xét đĩa 3 (hình 10-10d).

Hệ lực cân bằng $(\vec{P}_3, \vec{T}_2, \vec{N}, \vec{F}_{ms}, \vec{F}_c^{\text{qt}}, \vec{M}_c^{\text{qt}}) \equiv 0$.

Phương trình cân bằng khi chọn trục x theo mặt phẳng nghiêng :

$$\sum F_{kx} = T'_2 - F_c^{\text{qt}} - F_{ms} = 0$$

$$\text{Giải phương trình ta được : } F_{ms} = T'_2 - F_c^{\text{qt}} = T_2 - \frac{P_3}{g} a_1$$

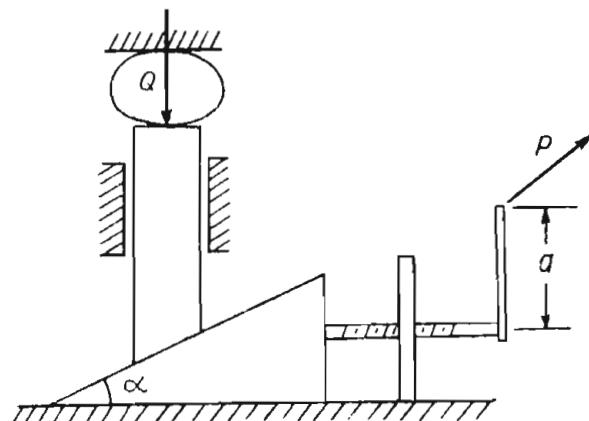
§10-3. BÀI TẬP

I. Nguyên lý di chuyển khả dĩ

10-1. Xác định liên hệ giữa lực P và Q trong máy ép dạng nêm như hình bài 10-1. Lực \vec{P} tác dụng vào đầu tay quay và vuông góc với mặt phẳng chứa đường tâm của trục vít và tay quay. Bước của vít là h , góc định của nêm là α , chiều dài tay quay là a . Bỏ qua ma sát.

10-2. Máy ép thủy lực như hình bài 10-2. Lực \vec{F} tác dụng vào đầu tay quay OA và vuông góc với nó. Diện tích xylanh trái là S_1 và xylanh phải là S_2 . Tìm lực nén \vec{Q} đặt vào vật. Biết $OA = a$, $OB = b$. Bỏ qua ma sát.

10-3. Sơ đồ của cân bàn như hình bài 10-3. Tìm hệ thức giữa a , b , d , c , l sao cho vật



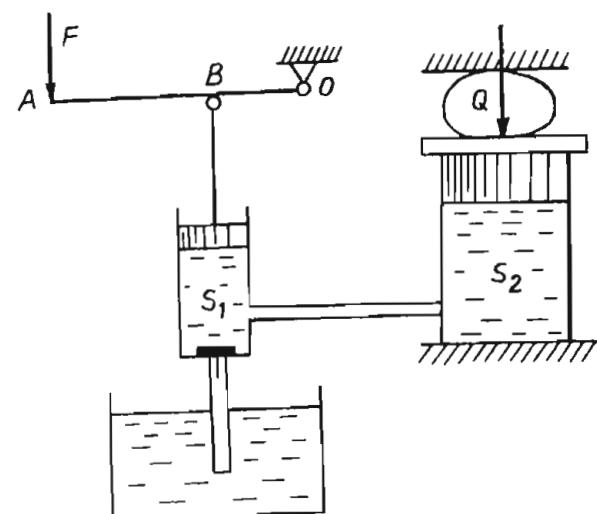
Hình bài 10-1

cân và đối trọng cân bằng nhau ở bất cứ vị trí nào của vật trên mặt bàn cân. Khi đó tìm hệ thức giữa hai trọng lượng P và Q của đối trọng và vật cân.

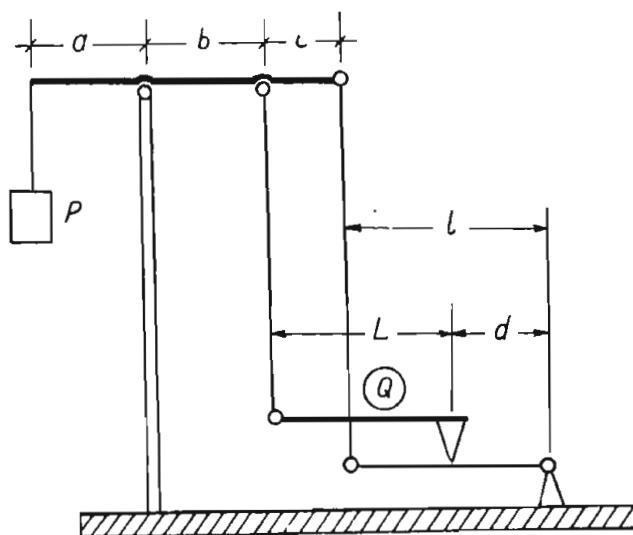
10-4. Cơ cấu cân bằng ở vị trí như hình bài 10-4 dưới tác dụng của lực \vec{P} và lực lò xo. Tìm hệ số cứng c của lò xo biết rằng lò xo bị nén một đoạn là $h = 4$ cm và tỷ số $\frac{OA}{OC} = \frac{4}{5}$

10-5. Hai vật A và B cùng trọng lượng P , ròng rọc C có trọng lượng không đáng kể. Vật D có trọng lượng Q . Khi hệ cân bằng, tìm hệ thức giữa P và Q , tìm hệ số ma sát trượt giữa vật A và nền (hình bài 10-5).

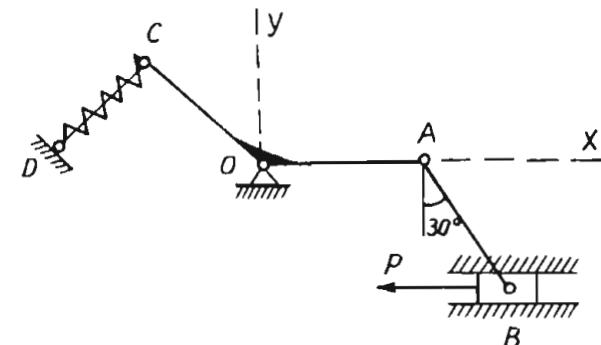
10-6. Vật A và vật B được nối với nhau bởi một sợi dây vòng qua hai ròng rọc (hình bài 10-6). Hai mặt phẳng nghiêng có góc nghiêng là α và β . Vật C có trọng lượng Q . Bỏ qua trọng lượng các ròng rọc và ma sát.



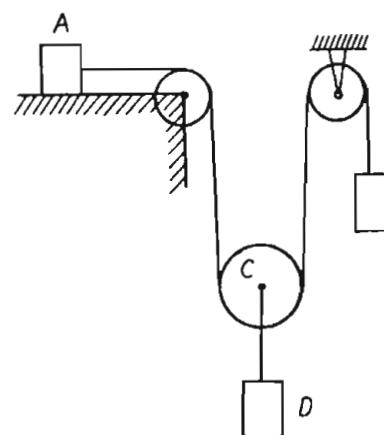
Hình bài 10-2



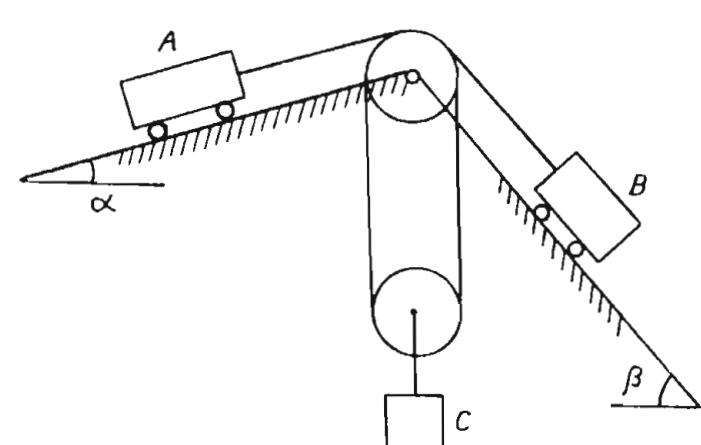
Hình bài 10-3



Hình bài 10-4



Hình bài 10-5



Hình bài 10-6

Tìm các trọng lượng P_1 và P_2 của vật A và vật B để hệ cân bằng.

10-7. Cho các hệ dầm như hình bài 10-7.

Hình bài 10-7a/ Cho $l = 2 \text{ m}$; $a = 2 \text{ m}$; $b = 1 \text{ m}$; $q = 4,9 \cdot 10^3 \text{ N/m}$.

Tìm phản lực liên kết tại ngàm A và điểm tựa B.

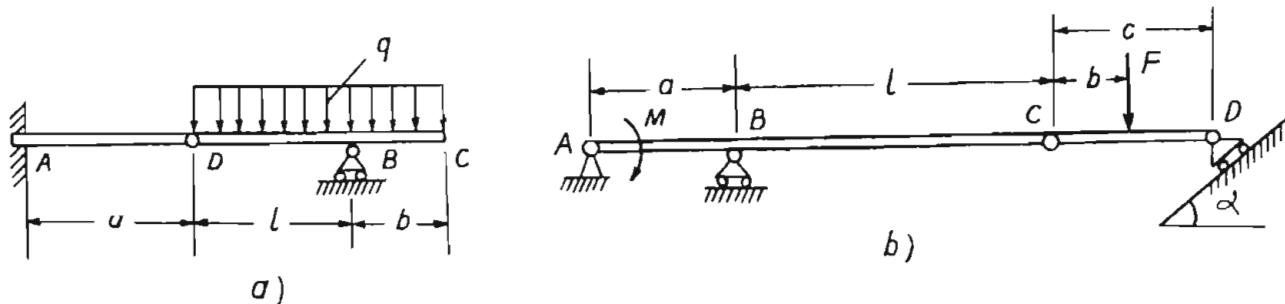
Hình bài 10-7b/ Cho $l = 6 \text{ m}$; $a = 2 \text{ m}$; $b = 1 \text{ m}$; $c = 2 \text{ m}$; $\alpha = 45^\circ$

$M = 1,96 \cdot 10^4 \text{ Nm}$; $F = 2,94 \cdot 10^4 \text{ N}$.

Tìm phản lực liên kết tại bản lề A; điểm tựa B, điểm tựa D.

II. Nguyên lý Đalămbe

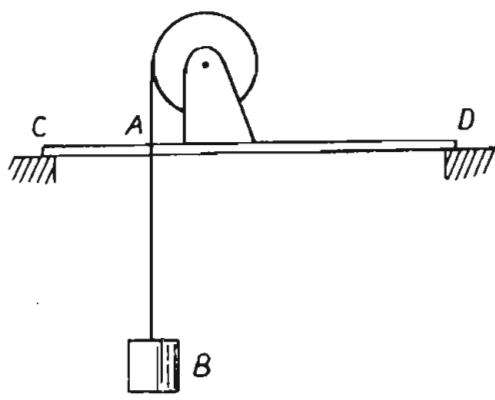
10-8. Một tời đặt trên dầm, dầm tựa lên C và D. Khoảng cách $CD = 8 \text{ m}$, $AC = 3 \text{ m}$. Vật B nặng 20 kN được kéo lên nhanh dần với gia tốc $a = 0,5 \text{ m/s}^2$. Tìm sức căng của



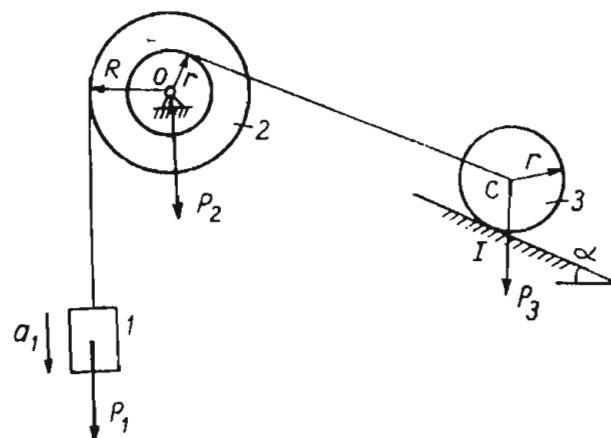
Hình bài 10-7

dây. Tìm áp lực phụ lên gối C, D do lực quán tính của vật nặng (hình bài 10-8)

10-9. Xe ôtô có khối lượng m chạy trên đường ngang với gia tốc a . Trọng tâm của xe cách mặt đường là h và theo phương ngang cách trực các bánh trước và sau những đoạn b và d . Bỏ qua mômen quán tính của các bánh xe đối với trục quay của chúng. Tìm áp lực pháp tuyến của cặp bánh trước và cặp bánh sau lên mặt đường. Với trạng thái chuyển động nào của xe thì hai áp lực ấy có giá trị bằng nhau?



Hình bài 10-8



Hình bài 10-10

10-10. Vật 1 có trọng lượng P_1 rơi xuống với giá tốc a_1 . Trục 2 có trọng lượng P_2 , các bán kính r , và R , mômen quán tính đối với trục quay là J . Đĩa 3 có trọng lượng P_3 , bán kính r lăn không trượt.

Dây song song với mặt phẳng nghiêng, góc nghiêng α .

Tìm sức căng các dây, lực liên kết tại O và lực ma sát tại I (hình bài 10-10).

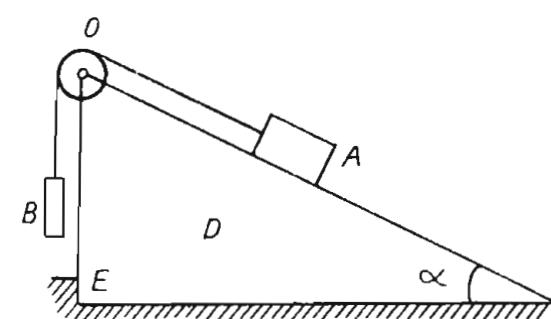
10-11. Vật A có trọng lượng P hạ xuống theo mặt nghiêng D, truyền chuyển động cho vật nặng B có trọng lượng P_2 , nhờ một sợi dây không trọng lượng, không dãn vòng qua ròng rọc cố định O. Góc của mặt phẳng nghiêng với mặt ngang là α .

Xác định áp lực của măt phẳng nghiêng D lên mő

E của nền (hình bài 10-11)

10-12. Một thanh thẳng đồng chất AB được gắn bằng bản lề vào một trục quay thẳng đứng tại O (hình bài 10-12). Biết $OA = a$, $OB = b$. Trục quay đều với vận tốc góc ω , chốt bản lề nằm ngang. Bỏ qua ma sát, tìm hệ thức giữa ω và góc nghiêng φ của trục và thanh AB khi chuyển động ổn định.

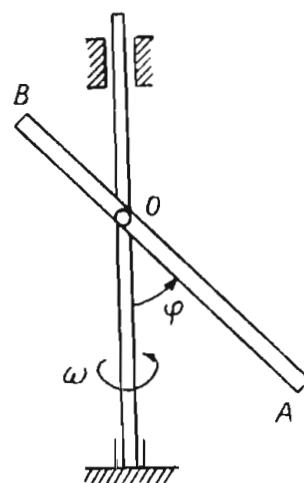
10-13. Thanh OAB đồng chất được lắp bằng bản lề có chốt ngang vào một trục quay thẳng đứng tại O (hình bài 10-12). Biết $OA = a$, $OB = b$, $\angle BOA = 90^\circ$ là φ . Trục đứng quay đều với vận tốc góc ω . Ở trạng cân bằng tương đối trong mặt phẳng của nó, tìm qu



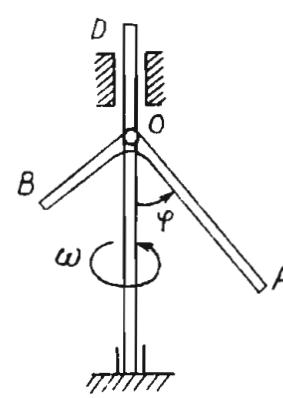
Hình bài 10-11

10-14. Trên trục nằm ngang AB ta lắp hai thanh cùng chiều dài l vuông góc với trục và nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Ở đầu cuối mỗi thanh gán các quả cầu D và E, khối lượng mỗi quả là m. Xác định áp lực động lực của trục AB lên các ống trục A và B khi trục quay đều với vận tốc góc ω .

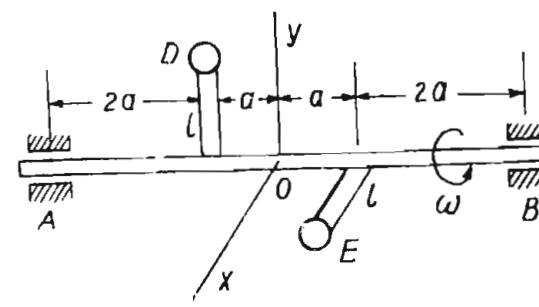
Các thanh có vị trí như trên hình bài 10-4. Các quả cầu coi như các chất điểm, khối lượng các thanh bỏ qua.



Hình bài 10-12



Hình 10-13



Hình 10-14

Chương 11

CÁC ĐỊNH LÝ TỔNG QUÁT CỦA ĐỘNG LỰC HỌC

Các định lý tổng quát của động lực học là hệ quả của định luật cơ bản động lực học. Nó giúp chúng ta giải các bài toán của động lực học bằng cách lập mối quan hệ giữa các đặc trưng chuyển động và đặc trưng cho tác dụng của lực.

Trong chương này chúng ta xét chuyển động của cơ hệ trong hệ qui chiếu quán tính. Trường hợp đặc biệt có thể xét một chất điểm.

§11-1. ĐỊNH LÝ BIẾN THIÊN ĐỘNG LƯỢNG VÀ ĐỊNH LÝ CHUYỂN ĐỘNG KHỐI TÂM CỦA CƠ HỆ

1/ Cơ sở lý thuyết

a) *Khối tâm của cơ hệ*. Khối tâm của cơ hệ là một điểm hình học, vị trí của nó được xác định như sau

$$\begin{aligned} \vec{r}_c &= \frac{\sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k}{M} \\ \dot{x}_c &= \frac{1}{M} \sum m_k x_k \\ y_c &= \frac{1}{M} \sum m_k y_k \\ z_c &= \frac{1}{M} \sum m_k z_k \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (11-1)$$

trong đó m_k là khối lượng chất điểm thứ k.

$M = \sum m_k$ là khối lượng cả hệ.

$\vec{r}_k(x_k, y_k, z_k)$ là bán kính vectơ chất điểm thứ k.

$\vec{r}_c(x_c, y_c, z_c)$ là bán kính vectơ khối tâm C.

b) *Động lượng* của cơ hệ là một đại lượng vectơ

$$\vec{Q} = \sum_{k=1}^n m_k \vec{V}_k \quad (11-2)$$

Trong đó, m_k là khối lượng chất điểm thứ k.

\vec{V}_k là vận tốc chất điểm thứ k.

Theo định nghĩa khối tâm C ta có thể viết động lượng của cơ hệ như sau :

$$\vec{Q} = M\vec{V}_c \quad (11-3)$$

c) Xung lượng của lực \vec{F} được định nghĩa như sau

Xung lượng nguyên tố : $d\vec{S} = \vec{F} dt$

Xung lượng của lực \vec{F} trong khoảng thời gian $t = t_2 - t_1$ là :

$$\vec{S} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt \quad (11-4)$$

d) Định lý biến thiên động lượng của cơ hệ :

Dạng đạo hàm :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{Q}}{dt} &= \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e \\ \dot{Q}_x &= \sum F_{kx}^e \\ \dot{Q}_y &= \sum F_{ky}^e \\ \dot{Q}_z &= \sum F_{kz}^e \end{aligned} \quad (11-5)$$

Dạng hữu hạn :

$$\vec{Q}_2 - \vec{Q}_1 = \sum_{k=1}^n \vec{S}_k^e$$

$$\begin{aligned} Q_{2x} - Q_{1x} &= \sum S_{kx}^e \\ Q_{2y} - Q_{1y} &= \sum S_{ky}^e \\ Q_{2z} - Q_{1z} &= \sum S_{kz}^e \end{aligned} \quad (11-6)$$

trong đó \vec{S}_k^e là xung lượng của ngoại lực \vec{F}_k^e

Trường hợp bảo toàn động lượng.

Nếu $\sum \vec{F}_k^e = 0$ thì $\vec{Q} = \text{const}$: động lượng của hệ bảo toàn.

Nếu $\sum F_{kx}^e = 0$ thì $Q_x = \text{const}$: động lượng của hệ bảo toàn đối với trục x.

e) Định lý chuyển động khối tâm

$$\begin{aligned} M\vec{a}_c &= \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e \\ M\ddot{x}_c &= \sum F_{kx}^e \\ M\ddot{y}_c &= \sum F_{ky}^e \\ M\ddot{z}_c &= \sum F_{kz}^e \end{aligned} \quad (11-7)$$

Trong đó M là khối lượng cả hệ, $\vec{a}_c(\ddot{x}_c, \ddot{y}_c, \ddot{z}_c)$ là gia tốc của khối tâm C;
 $\vec{F}_k^e(F_{kx}^e, F_{ky}^e, F_{kz}^e)$ là ngoại lực thứ k.

Trường hợp bảo toàn chuyển động khối tâm.

Nếu $\sum F_k^e = 0$ thì $\vec{V}_c = \text{const}$ khối tâm của cơ hệ chuyển động theo quán tính (đứng yên hoặc chuyển động thẳng đều).

Nếu $\sum_k F_{kx}^e = 0$ thì $\dot{x}_c = \text{const}$ khối tâm của cơ hệ chuyển động theo quán tính trên trục x, nghĩa là hoặc $\dot{x}_c = \dot{x}_c(0)$ hay $M\dot{x}_c = \sum m_k \dot{x}_k = \sum m_k \dot{x}_k(0)$

2/ Hướng dẫn áp dụng.

Định lý biến thiên động lượng thường được áp dụng để giải các bài toán sau .

Bài toán va chạm của các vật chuyển động thẳng (bài toán thuận và bài toán ngược).

Bài toán xác định áp lực thủy động của dòng chất lỏng lên thành ống.

Định lý chuyển động khối tâm thường được áp dụng trong các bài toán sau

Biết chuyển động cơ hệ, tìm các ngoại lực tác dụng lên cơ hệ (bài toán thuận).

Bài toán chuyển động của cơ hệ, trong đó biết chuyển động của một số bộ phận, tìm các chuyển động của bộ phận còn lại (bài toán ngược).

Chú ý khi áp dụng các định lý biến thiên động lượng và chuyển động khối tâm chỉ cần chú ý đến ngoại lực tác dụng lên cơ hệ.

Khi áp dụng các định lý này cần theo trình tự sau :

Phân tích chuyển động của các bộ phận thuộc cơ hệ.

Phân tích hệ ngoại lực tác dụng lên cơ hệ ấy, tìm đặc điểm của vectơ chính $\vec{R}' = \sum \vec{F}_k^e$ hoặc là hình chiếu của vectơ ấy lên một trục nào đó.

Từ đó xác định bài toán cần giải quyết là bài toán thuận hay ngược và định lý nào (các công thức (11-5), (11-6), (11-7)) có thể áp dụng để giải bài toán ấy

3/ Những bài giải mẫu.

Thí dụ 11-1. Một dòng chất lỏng lý tưởng đồng chất không nén được chảy qua một ống dẫn có khuỷu đổi hướng 30° (hình 11-1).

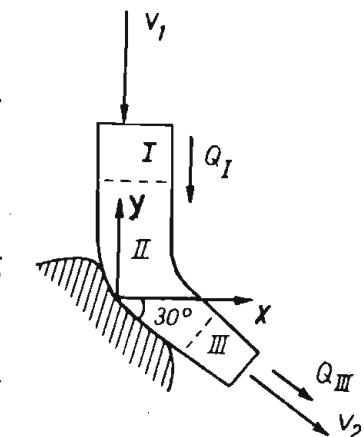
Lưu lượng khối của dòng chảy là M kg/s. Vận tốc của chất lỏng ở các tiết diện vào và ra là V_1 và V_2 .

Tìm áp lực của ống lên giá đỡ, không tính đến tác dụng của trọng lực.

Bài giải

Ta khảo sát khối nước ở thời điểm t_1 khối nước I và II sau một thời gian rất ngắn $t = t_2 - t_1$, tức là ở thời điểm $t_2 = t_1 + \Delta t$ khối nước I và II di chuyển sang vị trí II và III.

Các lực tác dụng lên giá đỡ bằng chính lực của giá đỡ tác dụng lên ống nhưng ngược chiều.



Hình 11-1

Nếu không kể đến tác dụng của trọng lực thì lực tác dụng lên đoạn ống nước là \vec{Y} .

Áp dụng định lý động lượng (11-6)

$$\vec{Q}_2 - \vec{Q}_1 = (\vec{X} + \vec{Y}) \Delta t \quad (a)$$

trong đó:

\vec{Q}_1 là động lượng của khối nước ở thời điểm t_1

\vec{Q}_2 là động lượng khối nước lúc t_2 .

Nếu cho \vec{Q}_1 là động lượng khối nước I.

\vec{Q}_{II} là động lượng khối nước II

\vec{Q}_{III} là động lượng khối nước III thì theo (a) ta có

$$\vec{Q}_{III} - \vec{Q}_1 = (\vec{X} + \vec{Y}) \Delta t \quad (b)$$

chiếu (b) lên hai phương x và y ta có

$$Q_{III} \cos 60^\circ = X \Delta t$$

$$Q_{III} \sin 60^\circ - Q_1 = Y \Delta t \quad (c)$$

Theo đề ra ta có

$$Q_1 = M \cdot \Delta t \cdot V_1$$

$$Q_{II} = M \cdot \Delta t \cdot V_2$$

Thay vào (c) ta rút ra

$$X = MV_2 \cos 60^\circ$$

$$Y = -M(V_2 \sin 60^\circ + V_1)$$

Thi dụ 11-2.

Một chiếc ôtô trọng lượng P chuyển động từ đầu phà đến cuối phà. Chiều dài của phà là l , trọng lượng Q . Bò qua lực cản của nước đối với phà. Tìm độ dịch chuyển của phà khi chuyển động đó? Lúc đầu ôtô và phà đứng yên (hình 11-2).

Bài giải

Khảo sát cơ hệ gồm ôtô và phà.

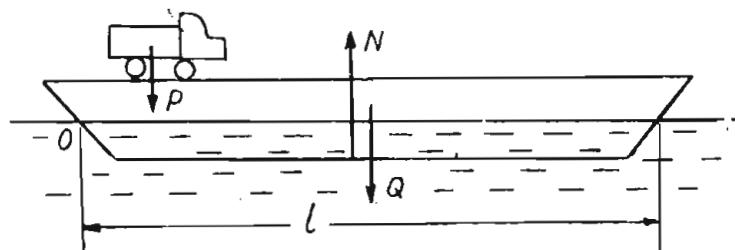
Lực tác dụng gồm trọng lực \vec{P} , \vec{Q} và lực đẩy Acsimet \vec{N} .

Tất cả các lực đều có phương thẳng đứng.

Áp dụng định lý chuyển động khối tâm ta có

$$M\vec{a}_c = \vec{P} + \vec{Q} + \vec{N} \quad (a)$$

Trong đó M là khối lượng cơ hệ



Hình 11-2

$$M = \frac{P + Q}{g}$$

\vec{a}_c là gia tốc khối tâm của cơ hệ.

Nếu chiếu (a) lên phương ngang x ta có

$$M \cdot \dot{x}_c = 0$$

Từ đây rút ra $\dot{x}_c = \text{const}$ (b)

Nếu lúc đầu phà và ôtô đứng yên thì $\dot{x}_c = 0$ và ta có

$$x_c = \text{const} \quad (c)$$

nghĩa là trong quá trình chuyển động khối tâm của cơ hệ luôn luôn đứng tại chỗ.

Ta chọn gốc tọa độ O là vị trí đầu phà lúc bắt đầu chuyển động.

δ là đoạn dịch chuyển của phà khi ôtô đi đến cuối phà.

Ta có x_{c1} là vị trí của khối tâm lúc đầu:

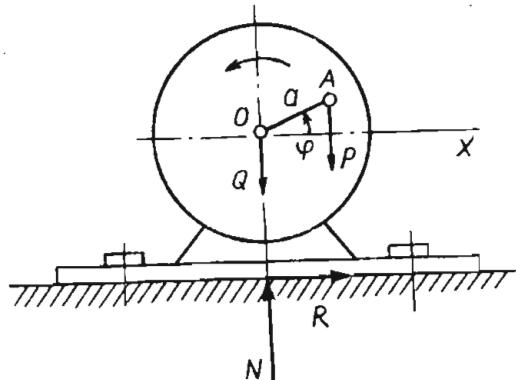
$$x_{c1} = \frac{\frac{P}{g} \cdot O + \frac{Q}{g} \cdot \frac{l}{2}}{\frac{P}{g} + \frac{Q}{g}} = \frac{Ql}{2(P + Q)}$$

Vị trí của khối tâm lúc ôtô đi đến cuối phà là

$$x_{c2} = \frac{\frac{P}{g} (l - \delta) + \frac{Q}{g} (\frac{l}{2} - \delta)}{\frac{P}{g} + \frac{Q}{g}}$$

Theo (c) ta có $x_{c1} = x_{c2}$, rút ra

$$\delta = \frac{Pl}{P + Q}$$



Hình 11-3

Thí dụ 11-3. Động cơ được giữ cố định như hình 11-3. Phần cố định của động cơ có trọng lượng là Q , phần quay có trọng lượng là P đặt cách trục quay một đoạn là a . Tìm lực cắt cực đại các bulông nếu động cơ quay đều với vận tốc góc ω .

Bài giải

Ta khảo sát toàn bộ động cơ. Ngoại lực tác dụng lên động cơ bao gồm các trọng lực \vec{P} , \vec{Q} , phản lực thẳng đứng \vec{N} của nền và phản lực nằm ngang \vec{R} của bulông. Gọi \vec{a}_c là khối tâm của hệ, áp dụng định lý khối tâm ta có

$$m\vec{a}_c = \vec{P} + \vec{Q} + \vec{N} + \vec{R} \quad (a)$$

Chiếu (a) lên trục x nằm ngang ta có

$$\frac{P + Q}{g} \ddot{x}_c = R \quad (b)$$

Ta cần xác định \ddot{x}_c . Nếu chọn gốc tọa độ là 0, theo định nghĩa khối tâm ta có :

$$x_c = \frac{Px_A + Qx_0}{Q + P} = \frac{Px_A}{Q + P}$$

Vì $x_0 = 0$, còn $x_A = a\sin\varphi = a\sin\omega t$
nên $\dot{x}_A = -a\omega^2 \sin\omega t$.

Rút ra $\ddot{x}_c = \frac{Pa\omega^2 \sin\omega t}{P + Q}$

Theo (b) ta có :

$$R = \frac{Pa\omega^2 \sin(\omega t)}{g}$$

R sẽ đạt giá trị cực đại khi $\sin(\omega t) = \pm 1$.

$$R_{\max} = \frac{Pa\omega^2}{g}$$

Nhận xét . nếu ω lớn, tức là tốc độ quay cao, mặc dù độ lệch tâm a nhỏ, lực R_{\max} cũn rất lớn. Cho nên trong kỹ thuật cần tìm cách khắc phục để a = 0.

§11-2. ĐỊNH LÝ BIẾN THIÊN MÔMEN ĐỘNG LƯỢNG

1/ Cơ sở lý thuyết

Mômen động lượng của cơ hệ đối với một tâm \vec{L}_o và đối với một trục (\vec{L}_z) :

$$\vec{L}_o = \sum_{k=1}^n \vec{m}_o(m_k \vec{v}_k)$$

$$\vec{L}_z = \sum_{k=1}^n \vec{m}_z(m_k \vec{v}_k)$$

Mômen động lượng của vật rắn quay quanh một trục cố định z

$$\vec{L}_z = J_z \vec{\omega} \quad (11-8)$$

trong đó

J_z là mômen quán tính của vật đối với trục z,

ω là vận tốc góc của vật quay.

Định lý biến thiên mômen động

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_o = \sum_{k=1}^n \vec{m}_o(\vec{F}_k^e) \quad \frac{d}{dt} \vec{L}_z = \sum_{k=1}^n \vec{m}_z(\vec{F}_k^e) \quad (11-9)$$

Trường hợp bao toàn

Nếu $\sum_{k=1}^n \vec{m}_o(\vec{F}_k^e) = 0$ thì $\vec{L}_o = \text{const}$: mômen động của cơ hệ đối với tâm O bảo toàn.

Nếu $\sum_{k=j}^n \vec{m}_z(\vec{F}_k^e) = 0$ (11-10)

thì $\bar{L}_z = \text{const}$: mômen động của cơ hệ đối với trục z bảo toàn.

- Phương trình vi phân chuyển động của vật quay quanh một trục cố định

$$J_z \ddot{\varphi} = J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z \bar{\varepsilon} = \sum \vec{m}_z(\vec{F}_k^e) \quad (11-11)$$

2/ Hướng dẫn áp dụng

Định lý biến thiên mômen động thường được áp dụng cho các bài toán sau

- Bài toán chuyển động của vật rắn quay quanh một tâm cố định hay một trục cố định.
- Bài toán của chất điểm hay của cơ hệ có mômen động lượng đối với một tâm hay đối với một trục bảo toàn.

Áp dụng định lý mômen động lượng theo trình tự sau

Xác định cơ hệ khảo sát, phân tích chuyển động các vật của cơ hệ, chú ý quan hệ động học.

Phân tích các ngoại lực tác dụng lên cơ hệ, phát hiện những đặc điểm về mômen các ngoại lực.

- Xác định định lý hay phương trình cần áp dụng

Đối với cơ hệ (chất điểm, vật rắn tịnh tiến, vật rắn quay quanh một trục) thì áp dụng (11-9). Trường hợp bảo toàn áp dụng (11-10).

Đối với một vật rắn quay quanh trục cố định áp dụng (11-11).

3/ Những bài giải mẫu

Thí dụ 14-1.

Trên vành đĩa trọng lượng P, bán kính R có một chất điểm trọng lượng p. Đĩa quay quanh trục thẳng đứng với vận tốc góc ω_0 . Tìm vận tốc góc ω của đĩa lúc chất điểm chuyển động theo vành đĩa với vận tốc tương đối (hình 11-4).

Bài giải

Xét cả hệ gồm đĩa và chất điểm. Ngoại lực tác dụng lên hệ gồm các trọng lực và phản lực ở trục quay. Vì $\sum \vec{m}_z(\vec{F}_k^e) = 0$ nên mômen động lượng của cơ hệ đối với trục z bảo toàn do đó :

$$\bar{L}_z = \bar{L}_z(O) \quad (1)$$

$\bar{L}_z = \bar{L}_{1z} + \bar{L}_{2z}$. Ở đây \bar{L}_{1z} và \bar{L}_{2z} là mômen động của đĩa và của chất điểm. Giả thiết ω có chiều dương, ta có :

$$\begin{aligned}\bar{L}_{1z} &= J_z \bar{w} = \frac{PR^2}{2g} \omega; \quad \bar{L}_{2z} = \bar{m}_z (m\vec{V}) = R.mV = \\ &= \frac{P}{g} (u + R\omega)\end{aligned}$$

Như vậy $\bar{L}_z = \frac{\omega R^2(P + 2p) + 2pu}{2g}$

ứng với lúc đầu $\omega = 0, \omega = \omega_0$, nên

$$L_z(0) = \frac{\omega_0 R^2(P + 2p)}{2g}$$

Thay vào (1) được

$$\omega = \omega_0 \frac{2pu}{(P + 2p)R}$$

Thí dụ 11-5.

Hai vật nặng P_1 và P_2 được buộc vào hai dây quấn vào hai tang tời có bán kính r và R . Để nâng vật nặng P_1 lên người ta tác dụng vào tời một mômen quay M . Tìm giá tốc góc của tời quay. Trọng lượng của tời là Q , bán kính quán tính là ρ (hình 11-5).

Bài giải

Xét cơ hệ gồm vật nặng A, B và tời C.

Lực tác dụng lên hệ gồm $\bar{M}, \vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{Q}$ và phản lực \vec{R}_o .

Áp dụng định lý mômen động lượng đối với trực quay của tời qua O ta có

$$\frac{d}{dt} \bar{L}_z = P_1r + P_2R + M \quad (a)$$

Tính $\bar{L}_z = \bar{L}_z(A) + \bar{L}_z(B) + \bar{L}_z(C)$ (b)

Mômen động lượng của vật A.

$$\bar{L}_z(A) = r \cdot \frac{P_1}{g} V_1 = \frac{P_1}{g} \cdot r^2 \omega$$

Mômen động lượng vật B

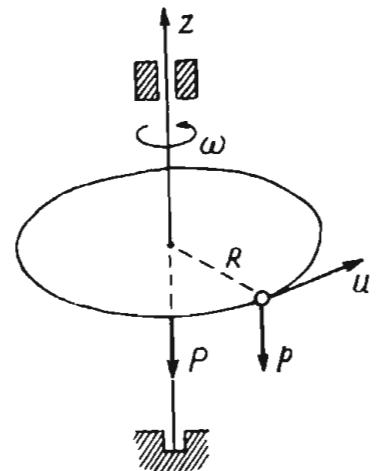
$$\bar{L}_z(B) = R \cdot \frac{P_2}{g} V_2 = \frac{P_2}{g} R^2 \omega$$

Mômen động lượng của tời C

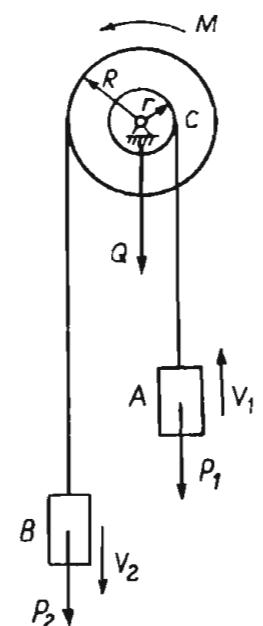
$$\bar{L}_z(C) = J_z \omega = \frac{Q}{g} \rho^2 \omega$$

Thay các kết quả vào (b) ta có

$$\bar{L}_z = (P_1 r^2 + P_2 R^2 + Q \rho^2) \frac{\omega}{g}$$



Hình 11-4



Hình 11-5

Thay vào (a) ta có :

$$\frac{P_1r^2 + P_2R^2 + Q\rho^2}{g} \cdot \varepsilon = -P_1r + P_2R + M$$

Từ đây chúng ta có được gia tốc quay của trục tời

$$\varepsilon = \frac{(M + P_2R - P_1r)g}{P_1r^2 + P_2R^2 + Q\rho^2}$$

Thí dụ 11-6.

Viết phương trình dao động nhỏ của con lắc vật lý (hình 11-6).

Bài giải

Con lắc vật lý là một vật nặng có thể quay được quanh một trục cố định O, dao động dưới tác dụng của trọng lực P.

Gọi : a = OC.

J_o mômen quán tính của vật đối với trục qua O.

φ - góc quay nhỏ.

Các lực tác dụng lên vật gồm trọng lực \vec{P} và phản lực \vec{R}_o .

Áp dụng phương trình vi phân của vật rắn quay quanh một trục cố định (11-11) ta có:

$$J_o \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \bar{m}_o(\vec{P}) = -P \cdot a \sin \varphi$$

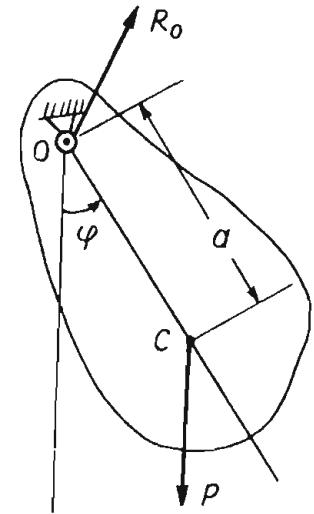
Vì góc φ nhỏ nên có thể coi $\sin \varphi \approx \varphi$ ta có phương trình

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + k^2\varphi = 0 \quad (a)$$

đặt

$$k^2 = \frac{P \cdot a}{J_o}$$

Từ phương trình (a) ta thấy dao động nhỏ của con lắc vật lý là dao động điều hòa. Người ta thường áp dụng con lắc vật lý để xác định mômen quán tính của các vật rắn bằng thực nghiệm.



Hình 11-6

§11.3 ĐỊNH LÝ BIẾN THIÊN ĐỘNG NĂNG

1/ Cơ sở lý thuyết.

a) Động năng của cơ hé.

$$T = \frac{1}{2} \sum m_k v_k^2$$

trong đó m_k và V_k là khối lượng và vận tốc của chất điểm thứ k.

Áp dụng định nghĩa tổng quát ta có các công thức tính động năng các vật rắn

Động năng của vật rắn chuyển động tịnh tiến

$$T = \frac{1}{2} M V_c^2 \quad (11-12)$$

Trong đó: M là khối lượng,

V_c là vận tốc khối tâm.

Động năng của vật rắn quay quanh trục cố định z :

$$T = \frac{1}{2} J_z \omega^2 \quad (11-13)$$

J_z là mômen quán tính của vật đối với trục quay z, ω là vận tốc góc của vật.

Động năng của vật rắn chuyển động song phẳng :

$$T = \frac{1}{2} J_c \omega^2 + \frac{1}{2} M v_c^2 \quad (11-14)$$

J_c là mômen quán tính của vật đối với trục qua khối tâm C.

ω là vận tốc góc.

M là khối lượng vật ; v_c là vận tốc khối tâm.

b) Công và công suất của lực :

- Công nguyên tố của lực \vec{F} trong di chuyển vô cùng bé

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{v} dt = F \cos \alpha ds = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

Công của lực \vec{F} trong một di chuyển hữu hạn $M_1 M_2$.

$$A = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{M_1}^{M_2} F \cos \alpha ds = \int_{M_1}^{M_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

Dựa vào định nghĩa cơ bản này ta có thể tính công của các lực hay gấp

$$\text{Công của trọng lực} \quad A = \pm Ph \quad (11-15)$$

$$\text{Công của lực đàn hồi} \quad A = -\frac{1}{2} (x_2^2 - x_1^2) \quad (11-16)$$

Trong đó c là độ cứng; x_1 và x_2 là độ biến dạng đầu và cuối.

Công của lực và ngẫu lực tác dụng vào vật quay quanh trục cố định

$$dA = \bar{m}_z(\vec{F}) d\varphi; \quad dA = \bar{M} d\varphi$$

$$\text{Khi } \bar{m}_z(\vec{F}) = \text{const} \text{ và } \bar{M} = \text{const} \text{ thì} \quad (11-17)$$

$$A = \bar{m}_z(\vec{F}) \cdot \varphi; \quad A = \bar{M} \varphi$$

Công của ngẫu lực đàn hồi :

$$A = \frac{1}{2} (\varphi_2^2 - \varphi_1^2) \quad (11-18)$$

\sim là độ cứng; φ_1 và φ_2 là các góc kể từ vị trí không biến dạng.

Công suất

$$\left. \begin{array}{l} N = \frac{dA}{dt} \\ N = \frac{\sum A}{t} \\ N = \vec{F} \cdot \vec{V} \\ N = \vec{M} \cdot \vec{\omega} \end{array} \right\} \quad (11-19)$$

c/ **Định lý động năng :**

$$\text{Dạng vi phân} \quad dT = \sum dA_k^i + \sum dA_k^e \quad (11-20)$$

$$\text{Dạng đạo hàm} \quad \frac{dT}{dt} = \sum N_k^i + \sum N_k^e \quad (11-21)$$

$$\text{Dạng hữu hạn} \quad T - T_o = \sum A_k^i + \sum A_k^e \quad (11-22)$$

trong đó

A_k^i và A_k^e là công của nội lực \vec{F}_k^i và của ngoại lực \vec{F}_k^e

N_k^i và N_k^e là công suất của nội lực và của ngoại lực.

T và T_o là động năng của hệ lúc xét và lúc đầu.

d/ **Định lý bảo toàn cơ năng** là trường hợp riêng của (11-22) áp dụng cho *trường lực thể* (nghĩa là chỉ có trọng lực, lực đàn hồi)

$$T_o + \Pi_o = T + \Pi = E = \text{const} \quad (11-23)$$

trong đó T_o, Π_o động năng, thế năng của hệ lúc đầu.

T, Π động năng, thế năng của hệ lúc xét.

E - cơ năng của hệ.

Thế năng của trọng lực : $\Pi = \pm Ph + \text{const.}$

Thế năng của lực đàn hồi $\Pi = \frac{1}{2} c x^2 + \text{const.}$

Thế năng của ngẫu lực đàn hồi $\Pi = \frac{1}{2} c \varphi^2 + \text{const.}$

2/ Hướng dẫn áp dụng

Định lý động năng được áp dụng để tìm chuyển động (vận tốc, gia tốc) và công suất của hệ một bậc tự do. Trình tự giải bài toán như sau

a) Phân tích chuyển động và lực.

Phân tích chuyển động của điểm và các vật (để chọn công thức tính động năng tương ứng).

Phân tích lực (để chọn công thức tính công tương ứng).

b) Áp dụng định lý động năng.

Tính gia tốc hoặc công suất thì áp dụng (11-20) hoặc (11-21).

Tính vận tốc thì cần phân biệt :

. Khi có lực hoặc ngẫu lực biến thiên (không tính được công hữu hạn) thì áp dụng (11-20) hoặc (11-21).

Khi các lực và ngẫu lực đều là const (tính được công hữu hạn) thì áp dụng (11-22).

. Khi các lực đều là lực thế (tức là chỉ gồm trọng lực, lực đàn hồi, ngẫu lực đàn hồi) thì áp dụng (11-23).

3/ Những bài giải mẫu

Thí dụ 11-7. Một chiếc xe tăng được khởi động nhờ một động cơ làm quay bốn bánh xe (mỗi bên hai bánh) kéo theo xích chuyển động. Sau 8 giây kể từ lúc bắt đầu chuyển động xe tăng đạt được vận tốc 36 km/h. Hãy xác định công suất trung bình của động cơ, nếu trọng lượng của xe không kể bánh và xích là $P_1 = 50$ kN, trọng lượng mỗi bánh là $P_2 = 2$ kN, trọng lượng của mỗi xích là $P_3 = 5$ kN. Bánh xe coi như đĩa đồng chất.

Bài giải

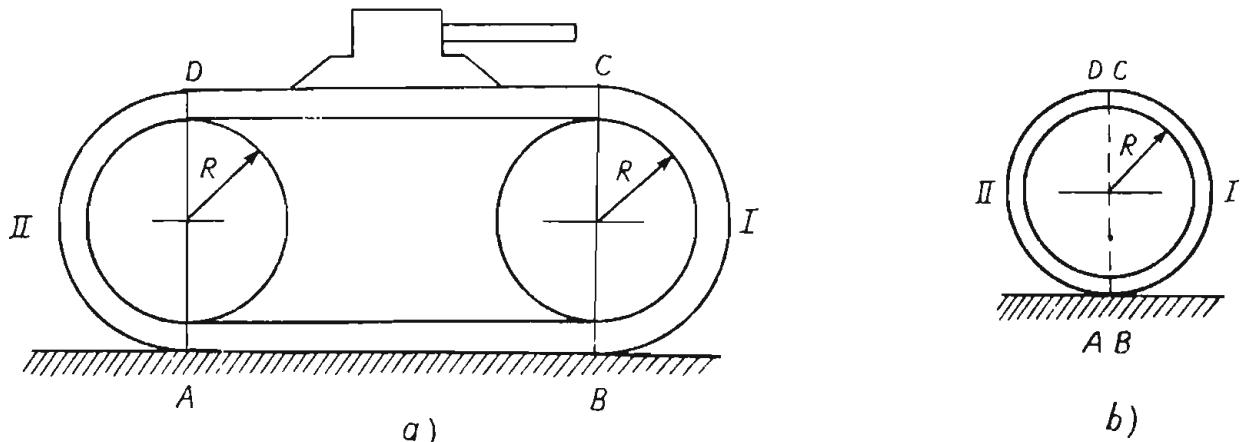
Hệ khảo sát gồm

Thân xe chuyển động tịnh tiến.

Bánh xe chuyển động song phẳng (4 bánh).

Xích xe chia làm ba phần : đoạn AB có vận tốc bằng không, không chuyển động, đoạn CD chuyển động tịnh tiến với vận tốc bằng 2 vận tốc của trực bánh xe, đoạn ba là một vòng tròn kết hợp gồm BIC và DIIA chuyển động song phẳng (hình 11-7).

Xác lập công suất trung bình của động cơ ta áp dụng công thức .



Hình 11-7

$$N = \frac{\sum A}{t}$$

$\sum A$ là tổng công của tất cả các lực thực hiện được trong thời gian t.

Theo định lý động năng :

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i$$

mà $T_0 = 0$ vì thời điểm đầu xe tăng đứng yên cho nên rút ra .

$$N = \frac{T}{t} \quad (a)$$

Bây giờ ta tính động năng T của hệ

Theo sự phân tích chuyển động trên ta có

$$T = T_{xc} + T_{4\text{ bánh}} + T_{2\text{ xích}} \quad (b)$$

Nếu gọi V là vận tốc của xe, ω – vận tốc của các bánh xe ($\omega R = V$) thì

$$T_{xc} = \frac{P_1}{2g} V^2 \quad (c)$$

$$T_{4\text{ bánh}} = 4J \cdot \frac{\omega^2}{2} + 4 \cdot V^2 \cdot \frac{P_2}{2g}$$

trong đó J là momen quán tính của bánh xe đối với trục quay:

$$J = \frac{P_2 R^2}{2g}$$

$$T_{4\text{ bánh}} = \frac{3P_2}{g} V^2$$

$$T_{2\text{xích}} = 2T(\text{ĐC}) + 2T(\text{vành tròn})$$

$$T_{(\text{ĐC})} = \frac{P_3 \cdot l \cdot 4V^2}{(2l + 2\pi R)2g} = \frac{P_3 \cdot l \cdot V^2}{g(l + \pi R)}$$

$$T(\text{vành tròn}) = R^2 \frac{P_3 \cdot 2\pi R}{2l + 2\pi R} \frac{\omega^2}{2g} + \frac{P_3 \cdot 2\pi R}{2l + 2\pi R} \frac{V^2}{2g}$$

$$T(\text{vành tròn}) = \frac{P_3 \pi R}{g(l + \pi R)} V^2$$

ta có :

$$T_{2\text{xích}} = 2 \frac{P_3 l V^2}{g(l + \pi R)} + 2 \frac{P_3 \pi R V^2}{g(l + \pi R)} = \frac{2P_3 V^2}{g} \quad (e)$$

Thay (c), (d), (e) vào (b) ta được :

$$T = \frac{P_1}{g} \frac{V^2}{2} + \frac{3P_2}{g} V^2 + \frac{2P_3 V^2}{g} = (\frac{P_1}{2} + 3P_2 + 2P_3) \frac{V^2}{g} \quad (2)$$

Thay kết quả này vào (a) ta được

$$N = (\frac{P_1}{2} + 3P_2 + 2P_3) \frac{V^2}{g.t} \quad (i)$$

Thay các giá trị vào (i), với $t = 8$ s, $V = 10$ m/s. Ta sẽ có kết quả của bài toán.

Thí dụ 11-8.

$$N = 51,250 \text{ kW.}$$

Một vật nặng A có trọng lượng P được kéo lên từ trạng thái đứng yên nhờ tời B là đĩa tròn đồng chất có bán kính R, trọng lượng Q. Hỏi khi người ta tác dụng vào tời một ngẫu lực có mômen không đổi M thì vận tốc của vật A bằng bao nhiêu lúc lên cao được một đoạn là h ? Tìm giá tốc vật A ? (hình 11-8).

Bài giải

* Cơ hệ khảo sát gồm vật nặng A chuyển động tịnh tiến. Tời B chuyển động quay quanh một trục cố định.

Các lực tác dụng lên hệ gồm trọng lực \vec{F} và \vec{Q} ; ngẫu lực \vec{M} , phản lực \vec{R}_o . Để tìm vận tốc A ta áp dụng định lý động năng dạng (11-22).

$$T - T_o = A(\vec{P}) + A(M) \quad (a)$$

* Ta tính động năng của hệ :

$$T_o = 0 \text{ vì ban đầu hệ đứng yên } T = T_A + T_B$$

Vật A chuyển động tịnh tiến nên động năng được tính :

$$T_A = \frac{P}{2g} V_A^2$$

Vật B quay quanh một trục cố định nên

$$T_B = \frac{1}{2} J_B \omega_B^2$$

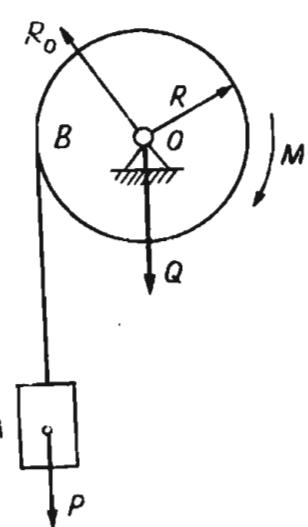
J_B là mômen quán tính của đĩa tròn đồng chất, được tính :

$$J_B = \frac{QR^2}{2g} \quad \left\{ \frac{M R^2}{2} \right\}$$

$$\omega_B = \frac{V_A}{R}$$

$$\text{Ta có } T = \frac{P}{2g} V_A^2 + \frac{QR^2}{4g} \omega_B^2$$

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{P}{g} + \frac{Q}{2g} \right) V_A^2$$



(b)

Hình 11-8

* Khi vật A lên cao được một đoạn h thì tời B quay được một góc

$$\varphi = \frac{h}{R}$$

Ta tính công của mômen M và lực P . $A(M) = M \cdot \varphi$

$$A(\vec{P}) = -P \cdot h$$

Vậy $\sum A_k^e = M\varphi \quad Ph = (\frac{M}{R} - P)h$ (c)

Vì dây không dãn nên $\sum A_k^i = 0$

Thay (b) và (c) vào đẳng thức (a) ở trên ta có :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{P}{g} + \frac{Q}{2g} \right) V_A^2 = \left(\frac{M}{R} - P \right) h \quad (d)$$

Từ đây rút ra vận tốc của vật A .

$$v_A = \sqrt{\frac{\frac{M}{R} - P}{\frac{P}{g} + \frac{Q}{2}}} \cdot h = \sqrt{\frac{4g(M - PR)}{R(2P + Q)}} \quad (c)$$

Để tìm gia tốc a_A của vật A, ta lấy đạo hàm hai vế của đẳng thức (d) theo thời gian t:

$$\left(\frac{P}{g} + \frac{Q}{2g} \right) V_A a_A = \left(\frac{M}{R} - P \right) V_A$$

Từ đây rút ra

$$a_A = \frac{\left(\frac{M}{R} - P \right) g}{\frac{P}{g} + \frac{Q}{2}} = \frac{2g(M - PR)}{R(2P + Q)} = \text{Const}$$

Thí dụ 11-9.

Một cơ cấu hành tinh đặt trong mặt phẳng nằm ngang chuyển động từ trạng thái nghỉ nhờ một mômen quay không đổi M đặt vào tay quay OA.

Hãy xác định gia tốc gốc của tay quay. Cho bánh 1 cố định có bán kính r_1 , bánh 2 chuyển động là một đĩa tròn đồng chất có bán kính r_2 và trọng lượng P, còn tay quay OA là một thanh đồng chất có trọng lượng là Q. Bỏ qua các lực ma sát (hình 11-9).

Bài giải

Khảo sát cơ hệ gồm :

Tay quay chuyển động quay quanh O.

Bánh 2 chuyển động song phẳng.

Lực tác dụng lên cơ hệ gồm : các trọng lực \vec{P} , \vec{Q} , và phản lực pháp tuyến \vec{N} thẳng đứng, các lực này không sinh công vì có phương vuông góc với phương di chuyển. Ngẫu lực có mômen M , phản lực \vec{R}_0 ở O và lực ăn khớp từ bánh 1 lên bánh 2 : \vec{S}_{12} .

Để tìm gia tốc góc của tay quay ta áp dụng định lý động năng dạng vi phân (11-20) :

$$dT = \sum dA_k^l + \sum dA_k^e \quad (a)$$

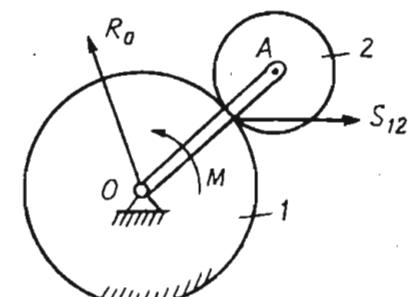
Tính động năng của hệ

Cho tay quay OA quay với vận tốc góc ω , khi đó

$$T_{\text{hệ}} = T_{OA} + T_{b2} \quad (b)$$

$$T_{OA} = \frac{1}{2} J_o \omega^2 = \frac{Q}{2g} \cdot \frac{(r_1 + r_2)^2}{3} \omega^2 \quad (c)$$

$$\text{Vì } J_o = \frac{Ml^2}{3}$$



Hình 11-9.

Bánh hai chuyển động song phẳng nên

$$T_{b2} = \frac{1}{2} J_A \omega_2^2 + \frac{1}{2} m_A V_A^2 \quad (d)$$

Trong đó ω_2 là vận tốc góc bánh 2 và V_A là vận tốc của điểm A. Bánh 2 chuyển động song phẳng có tâm vận tốc là điểm tiếp xúc với bánh 1 nên :

$$V_A = (r_1 + r_2)\omega = r_2 \omega_2$$

$$\text{Rút ra } \omega_2 = \frac{r_1 + r_2}{r_2} \cdot \omega$$

Thay vào (d) ta có

$$T_{b2} = \frac{P}{2g} \cdot \frac{r_2^2}{2} - \frac{(r_1 + r_2)^2}{r_2^2} \omega^2 + \frac{P}{2g} (r_1 + r_2)^2 \omega^2$$

$$T_{b2} = \frac{3P}{4g} (r_1 + r_2)^2 \omega^2$$

Thay (c) và (d) vào (b) ta có

$$T_{\text{hệ}} = \frac{1}{2g} \left(\frac{Q}{3} + \frac{3P}{2} \right) (r_1 + r_2)^2 \omega^2$$

Lấy vi phân của T

$$dT = \frac{1}{g} \left(\frac{Q}{3} + \frac{3P}{2} \right) (r_1 + r_2)^2 \omega d\omega \quad (e)$$

* Tính công khi tay quay OA quay được một góc vô cùng bé $d\phi$

$$\sum dA_k^l = 0$$

$$\sum dA_k^e = M \cdot d\phi = M \cdot \omega dt \quad (f)$$

Chú ý rằng ngoài mômen quay M sinh công còn các lực khác đều không sinh công.

Thay (e) và (f) vào (a) rút ra :

$$\frac{1}{g} \cdot \left(\frac{Q}{3} + \frac{3P}{2} \right) (r_1 + r_2)^2 \omega d\omega = M \omega d\omega$$

Ta có gia tốc góc của tay quay :

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{M \cdot g}{\left(\frac{Q}{3} + \frac{3P}{2} \right) (r_1 + r_2)^2}$$

Thí dụ 11-10.

Con lăn A trọng lượng Q lăn không trượt trên mặt phẳng nghiêng từ trên xuống. Nhờ một dây mảnh nhẹ không dãn vòng qua ròng rọc B, vật A kéo vật nặng C trọng lượng P từ dưới lên. Ròng rọc B quay quanh trục cố định O vuông góc với mặt phẳng là một đĩa tròn đồng chất có cùng bán kính R và trọng lượng với con lăn A. Mặt nghiêng có góc nghiêng α so với mặt nằm ngang.

Hãy xác định gia tốc của trục con lăn A (hình 11-10).

Bài giải

Cơ hệ khảo sát bao gồm các vật :

Con lăn A chuyển động song phẳng.

Tời B chuyển động quay quanh một trục cố định.

Vật nặng C chuyển động tịnh tiến.

Các lực tác dụng lên cơ hệ gồm :

Trọng lực \vec{Q} của vật A và B, trọng lực \vec{P} của vật C. Phản lực ở A là \vec{N}_A , lực ma sát trượt ở A là \vec{F}_{ms} . Phản lực ở O là \vec{R}_o . Ở đây chỉ có trọng lực \vec{P} của vật C và trọng lực Q của con lăn A sinh công. Để tìm gia tốc của trục A, áp dụng định lý động năng dạng vi phân (11-20) :

$$dT_{hệ} = \sum dA_k^l + \sum dA_k^c \quad (a)$$

* Trước tiên ta tính động năng của hệ

$$T_{hệ} = T_A + T_B + T_C \quad (b)$$

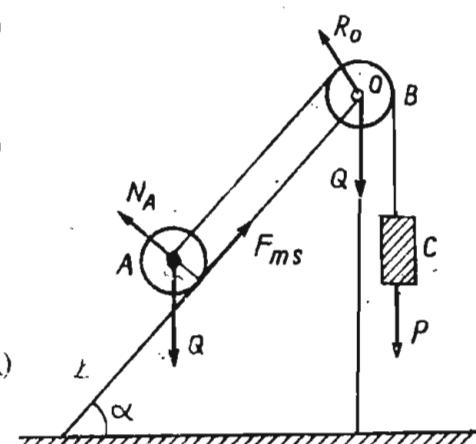
Vật A chuyển động song phẳng :

$$T_A = \frac{1}{2} m_A V_A^2 + \frac{1}{2} J_A \omega_A^2$$

Trong đó $V_A = R \omega_A$ (là vận tốc của trục con lăn A)

$$J_A = \frac{1}{2} m_A R^2$$

$$\text{nên } T_A = \frac{1}{2} m_A V_A^2 + \frac{1}{4} m_A R^2 \omega_A^2$$



Hình 11-10

$$T_A = \frac{3Q}{4g} V_A^2 \quad (c)$$

Vật B chuyển động quay quanh một trục cố định.

$$T_B = \frac{1}{2} J_B \omega_B^2$$

Ta có ngay $\omega_B = \omega_A$ vì vật A và B có cùng bán kính.

$$J_B = \frac{QR^2}{2g}$$

Vậy $T_B = \frac{Q}{4g} V_A^2$ (d)

Vật C chuyển động tịnh tiến nên

$$T = \frac{1}{2} m V^2$$

Vận tốc V cũng chính là vận tốc V_A .

Ta có

$$T = \frac{P}{2g} V_A^2 \quad (e)$$

Thay (c), (d), (e) vào (b) ta có

$$T_{hc} = \frac{1}{2g} (2Q + P) V_A^2, \text{ do đó } dT_{hc} = \frac{1}{g} (2Q + P) V_A dV_A \quad (f)$$

Tiếp theo ta tính công nguyên tố do các lực tác dụng sinh ra khi vật A di chuyển được một đoạn vô cùng bé $ds = v_A dt$.

$$\sum dA_k^i = 0 \text{ vì dây không dãn.}$$

$$\sum dA_k^e = dA(\vec{Q}) + dA(\vec{P}) \quad (i)$$

Các lực khác đều không sinh công. Ta có

$$\sum dA_k^e = Q \sin \alpha ds - P ds \quad (j)$$

Thay (j) và (f) vào (a) ta có :

$$\frac{1}{g} (2Q + P) v_A dV_A = (Q \sin \alpha - P) ds = (Q \sin \alpha - P) v_A dt$$

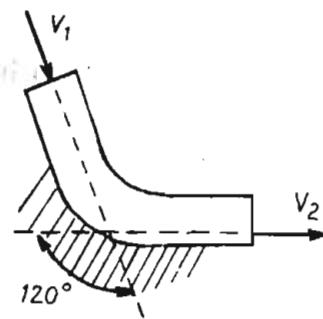
Gia tốc vật A : $a_A = \frac{dv_A}{dt} = g \frac{Q \sin \alpha - P}{2Q + P} = \text{Const}$

§11-4. BÀI TẬP

1/ Định lý động lượng.

11-1. Xác định áp lực động lực tổng hợp lên gối đỡ của dòng chất lỏng chảy trong một đoạn ống cong đặt trong mặt phẳng ngang như hình bài 11-1.

Tiết diện ngang của ống có đường kính $d = 20$ cm. Hai nhánh của đường ống tạo với nhau một góc $\alpha = 120^\circ$. Vận tốc nước chảy trong ống là $V = 127$ m/s.



Hình bài 11-1

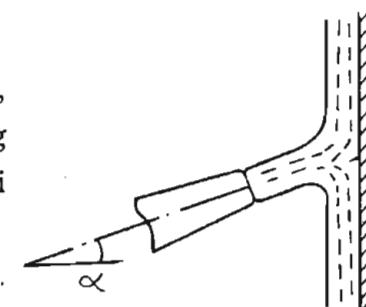
Bỏ qua tác dụng của trọng lực.

11-2. Một dòng nước được phun ra với vận tốc bằng $V = 8$ m/s và nghiêng với phương ngang một góc $\alpha = 30^\circ$ từ một vòi có tiết diện $S = 16$ cm².

Xác định áp lực tổng hợp của dòng chất lỏng lên mặt tường thẳng đứng. Bỏ qua ảnh hưởng của trọng lực và coi rằng sau khi gặp tường, chất lỏng chuyển động theo mặt tường (hình bên 12-2)

2/ Định lý chuyển động khối tâm

11-3. Xác định độ di chuyển ngang của con tàu mang cần cẩu, khi cần AB mang vật nặng có khối lượng bằng 2 tấn cất thẳng đứng lên từ vị trí ban đầu nghiêng góc 30° như trên hình bài 11-3. Khối lượng của tàu và cần cẩu bằng 20 tấn, chiều dài AB = 8 m. Bỏ qua sức cản của nước và khối lượng của cần AB.



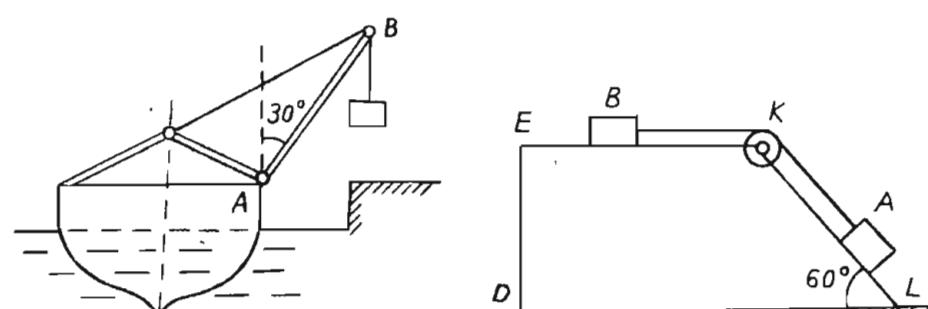
Hình bài 11-3

11-4. Hai vật nặng A và B có khối lượng là m_1 và m_2 được nối với nhau bằng một sợi dây mềm, nhẹ, không dãn và được đặt trên các mặt KL, EK của lăng trụ DEKL. Lăng trụ có khối lượng là m , được đặt trên mặt nền ngang nhẵn và cứng. Tìm độ di chuyển của lăng trụ khi vật nặng A trượt xuống theo mặt nghiêng KL một đoạn dài S. Ban đầu hệ đứng yên (hình bài 11-4).

11-5. Thanh đồng chất AB dài l tựa đầu A lên nền ngang nhẵn và có góc nghiêng ban đầu là α .

Tìm quỹ đạo của đầu mút B khi ta thả cho thanh rơi nằm xuống mặt nền ngang (hình bài 11-5).

11-6. Một toa tàu dao động điều hòa thẳng đứng trên các lò xo với biên độ 2,5 cm và với chu kỳ $T = 0,5$ giây. Khối lượng của hòm xe và tải trọng là 10 tấn, của các bánh xe bằng



Hình bài 11-4

1 tần. Xác định áp lực tổng hợp của các bánh xe lên các đường ray.

11-7. Xác định áp lực lên nền của một máy bơm nước lúc bơm chạy không. Trọng lượng của phần cố định gồm vỏ D và móng E bằng P_1 , tay quay CA dài là a và có trọng lượng bằng P_2 . Trọng lượng của máng trượt B cùng với pitông là P_3 . Tay quay OA quay đều với vận tốc góc ω . Xem như các vật khảo sát đều là những vật đồng chất và có cấu tạo đối xứng (hình bài 11-7).

11-8. Một động cơ hơi nước nằm ngang trên mặt móng nhẵn trơn.

Tay quay OA có chiều dài r quay đều với vận tốc góc ω . Thanh truyền dài bằng tay quay. Coi rằng khối lượng của các bộ phận chuyển động được thu gọn về thành hai khối lượng m_1 và m_2 tập trung ở đầu tay quay và ở trọng tâm của pittông. Khối lượng của vỏ động cơ là m_3 . Xác định chuyển động ngang của vỏ động cơ, cho biết ban đầu pittông ở vị trí xa nhất về bên trái (hình bài 11-8).

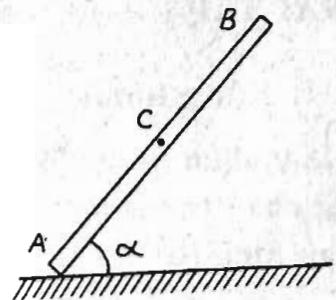
Khi động cơ được gắn chặt vào móng máy bằng bulông, tìm áp lực của động cơ lên mặt móng và tìm lực cát ngang bulông. Bỏ qua lực cát ban đầu của bulông.

3/ Định lý momen động lượng

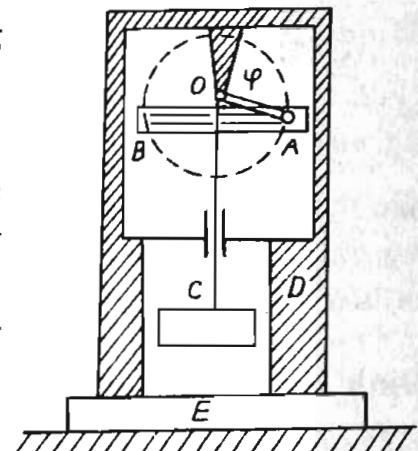
11-9. Một đĩa tròn đồng chất có khối lượng m_1 và có bán kính bằng r , quay quanh trục cố định AB với vận tốc góc ω_0 . Vào một thời điểm nào đó một chất điểm M có khối lượng m_2 bắt đầu chuyển động từ tâm đĩa ra ngoài vành theo một đường bán kính với vận tốc không đổi u . Xác định vận tốc góc ω của đĩa (hàm theo thời gian) kể từ lúc chất điểm M chuyển động. Bỏ qua lực ma sát ở ổ trục quay.

11-10. Một đĩa tròn đồng chất bán kính r khối lượng m_1 nằm ngang và quay được quanh một trục thẳng đi qua tâm đĩa. Một chất điểm M trên vành đĩa, khối lượng m_2 chuyển động theo vành với qui luật $S = \widehat{M_0 M} = \frac{at^2}{2}$. Xác định vận tốc góc, gia tốc góc của đĩa. Bỏ qua ma sát và biết ban đầu hệ đứng yên.

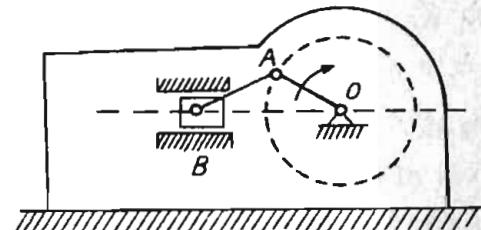
* 11-11.Ống nằm ngang CD quay quanh trục thẳng đứng AB. Trong ống có quả cầu khối lượng m nằm cách trục quay một khoảng MC = a. Tại một thời điểm nào đó ống được truyền vận tốc góc ω_0 . Tìm vận tốc góc ω của ống tại thời điểm quả cầu vừa rời khỏi ống CD. Biết mômen quán tính của ống đối với trục quay là J, chiều dài CD = L. Bỏ qua ma sát (hình bài 11-11).



Hình bài 11-5



Hình bài 11-7



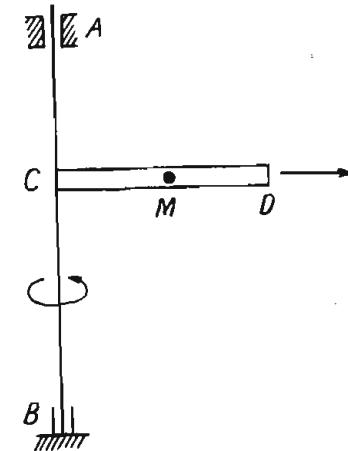
Hình bài 11-8

11-12. Một môtor điện chịu tác dụng của một ngẫu lực tổng hợp (phát động và cản) có mômen quay là $M = a - b\omega$, trong đó a, b là các hằng số dương, còn ω là vận tốc góc môtor. Mômen quán tính của rôto đối với trục quay hình học là J . Tìm biểu thức vận tốc góc $\omega(t)$ trong quá trình mở máy từ trạng thái nghỉ.

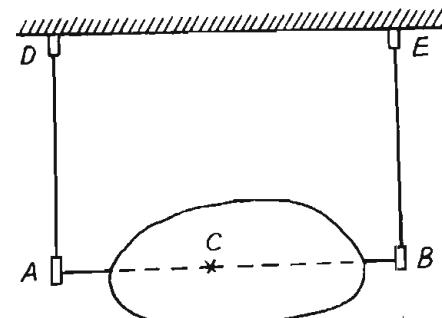
11-13. Để xác định mômen quán tính của vật đối với trục AB qua khối tâm C của vật, người ta treo vật bằng hai thanh AD và BE gắn cứng vào vật, sao cho AB song song với DE và cùng nằm ngang. Cho vật dao động quanh trục DE và đo nửa chu kỳ T của dao động. Biết trọng lượng của vật là P, khoảng cách $AD = BE = h$. Bỏ qua trọng lượng của hai thanh treo và bỏ qua ma sát ở các khớp quay.

Tính mômen quán tính của vật đối với trục AB (hình bài 11-13).

11-14. Một vật rắn quay quanh trục cố định, khởi động từ trạng thái nghỉ, chịu tác dụng của mômen quay không đổi M và của mômen cản $M_c = \alpha\omega^2$, trong đó α là hằng số và ω là vận tốc góc của vật. Mômen quán tính của vật đối với trục quay là J . Tìm luật biến thiên của vận tốc góc theo thời gian và tìm giá trị vận tốc giới hạn của vật.



Hình bài 11-11



Hình bài 11-13

4/ Định lý biến thiên động năng.

11-15. Búa máy có khối lượng $m = 200$ kg đậm 84 lần trong 1 phút.

Hành trình của búa $h = 0,35$ m. Hiệu suất của búa $\eta = 0,7$. Tìm công suất của động cơ để đảm bảo chế độ làm việc đều của búa.

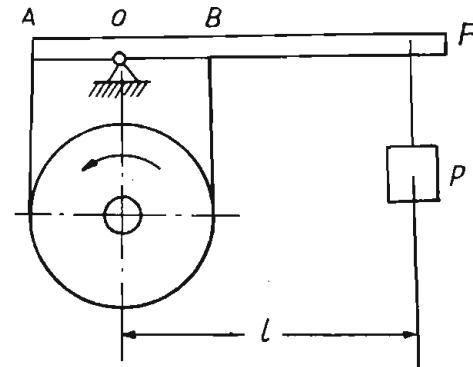
11-16. Trục động cơ được lắp vào bánh đai và nối với đòn AF nhờ dây như hình bài 11-6. Tìm công suất của động cơ khi nó quay $n = 240$ vòng/phút và để đòn cân bằng người ta treo vật nặng $P = 29,4$ N ở khoảng cách $l = 50$ cm.

11-17. Cho cơ cấu culit như trên hình bài 11-17. Cần lắc OC quay quanh trục O kéo thanh AB chuyển động lên xuống theo máng trượt thẳng đứng K.

Cần OC được coi là thanh đồng chất có chiều dài bằng R và khối lượng m_1 . Con chạy A có khối lượng m_2 , thanh AB có khối lượng m_3 .

Khoảng cách giữa trục O và máng trượt K bằng l. Xem con chạy A như một chất điểm, tìm biểu thức động năng của cơ cấu theo vận tốc góc và góc quay của tay quay.

11-18. Tay quay của một cơ cấu tay quay thanh truyền được coi là thanh đồng chất có



Hình bài 11-16

chiều dài bằng r , có khối lượng m_1 , đang quay với vận tốc góc ω . Con chạy có khối lượng bằng m_2 , thanh truyền dài l , coi rằng tỷ số $\frac{r}{l}$ là bé.

a) Bỏ qua khối lượng thanh truyền, tìm biểu thức động năng của cơ cấu theo vận tốc góc và góc quay của tay quay.

b) Kế đến khối lượng của thanh truyền là m_3 , tính động năng của hệ ở vị trí tay quay OA vuông góc với đường trượt của con chạy.

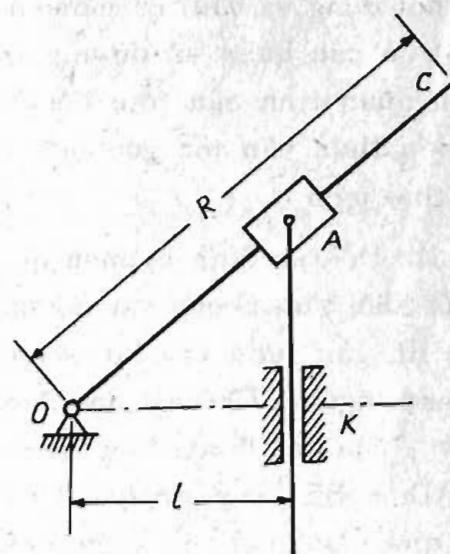
11-19. Cho cơ cấu hành tinh như hình bài 11-19, các bánh I, II, III là các đĩa tròn đồng chất, cùng bán kính r , cùng khối lượng m . Tay quay OA được xem là một thanh đồng chất có khối lượng m_1 . Tìm biểu thức động năng của cơ cấu theo vận tốc góc của tay quay.

11-20. Một vật nặng là P được treo vào đầu một sợi dây mềm, nhẹ, không dãn, rồi quấn dây vào trống hình trụ của một trục quay nằm ngang. Vật nặng rơi, kéo cả trống quay theo. Xác định vận tốc của vật nặng sau lúc nó rơi xuống được một độ cao là h , ban đầu yên nghỉ. Trống có trọng lượng bằng Q và được coi là một khối tròn đồng chất. Bỏ qua ma sát.

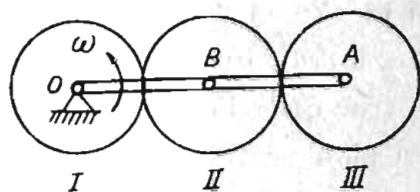
11-21. Một tời kéo gồm hai trống K_1 và K_2 có bán kính r_1 và r_2 ghép cứng với nhau và với trục quay nằm ngang O_1O_2 , có mômen quán tính đối với trục đó bằng J_1 và J_2 . Tác dụng vào tay quay của trục tời một ngẫu lực có mômen M không đổi kéo vật nặng D có trọng lượng P lên cao. Khi trống K_2 quấn dây thì trống K_1 thả dây. Bỏ qua ma sát và trọng lượng dây, cho biết ban đầu hệ đứng yên. Tìm vận tốc góc của tay quay AB khi vật D được kéo lên một đoạn h (hình bài 11-21).

11-22. Ngẫu lực có mômen quay M không đổi tác dụng lên tang của một trục tời có bán kính bằng r và có trọng lượng là P_1 . Quấn vào tang tời một sợi dây mềm, nhẹ, không dãn rồi buộc đầu mút dây vào vật nặng A có trọng lượng P_2 để kéo nó lên theo mặt thẳng nghiêng, góc nghiêng so với mặt phẳng ngang là α .

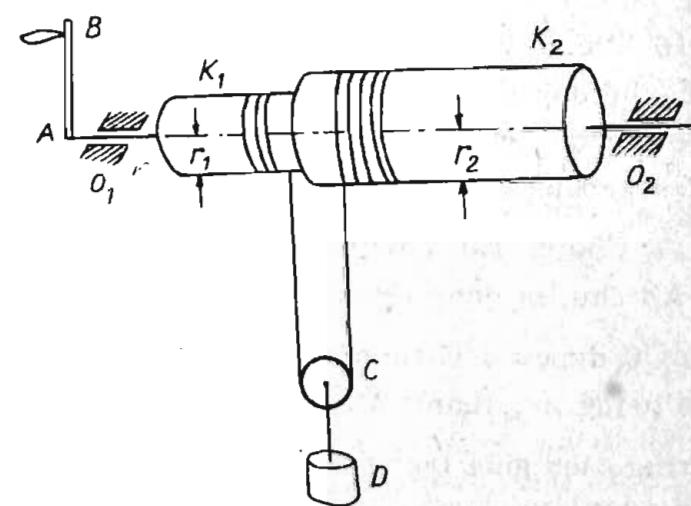
Hệ số ma sát trượt giữa vật nặng và mặt phẳng nghiêng là f . Tang tời



Hình bài 11-17



Hình bài 11-19



Hình bài 11-21

được xem là một trục tròn đồng chất.

Tìm biểu thức vận tốc góc của trục rời theo góc quay của nó. Tìm gia tốc góc (hình bài 11-22).

11-23. Cơ cấu hành tinh như trên hình bài 11-23, chuyển động trong mặt phẳng nằm ngang. Bánh răng 3 cố định, các bánh răng động 1 và 2 được coi là những đĩa tròn đồng chất cùng bề dày và cùng vật liệu. Biết bánh răng 1 quay nhanh gấp 10 lần tay quay. Bỏ qua khối lượng của tay quay. Mômen quán tính của bánh răng 1 đối với trục O_1 là J_1 . Bánh răng 1 chịu tác dụng của ngẫu lực cản có mômen là M_1 không đổi. Tay quay chịu tác dụng của ngẫu lực phát động có mômen quay M_o cũng không đổi. Tìm gia tốc góc tay quay (hình bài 11-23).

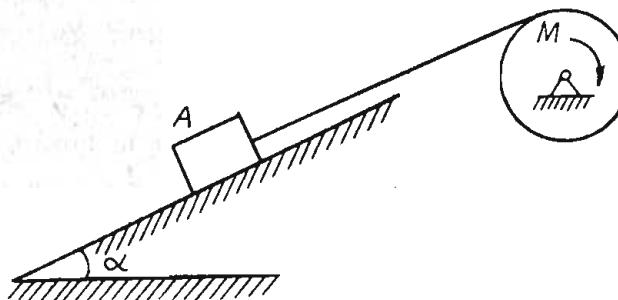
11-24. Vật 1 có trọng lượng P_1 rơi xuống. Trục 2 có trọng lượng P_2 , bán kính là r , R , bán kính quán tính đối với trục qua tâm là ρ . Đĩa 3 có trọng lượng P_3 , bán kính r lăn không trượt, góc nghiêng α . Dây song song với mặt phẳng nghiêng.

Tìm gia tốc góc ϵ_2 của trục 2 (hình bài 11-24).

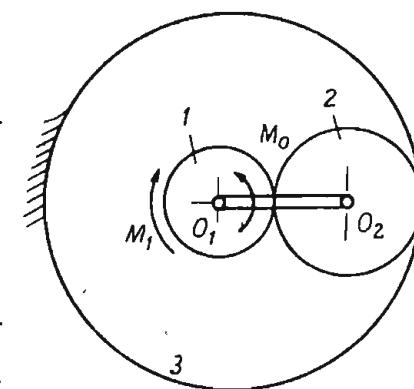
11-25. Một băng chuyển vật liệu chuyển động từ trạng thái nghỉ khi tác động vào puli B một mô men không đổi M . Xác định vận tốc của vật A theo đoạn chuyển dời S của nó (hình bài 11-25).

Trọng lượng vật nặng được chuyển lên là P , puli B và C/các đĩa đồng chất bán kính r và trọng lượng mỗi cái là Q . Dây băng có trọng lượng không đáng kể và tạo với phương ngang một góc α . Giữa vật A và băng, giữa băng và puli không có trượt.

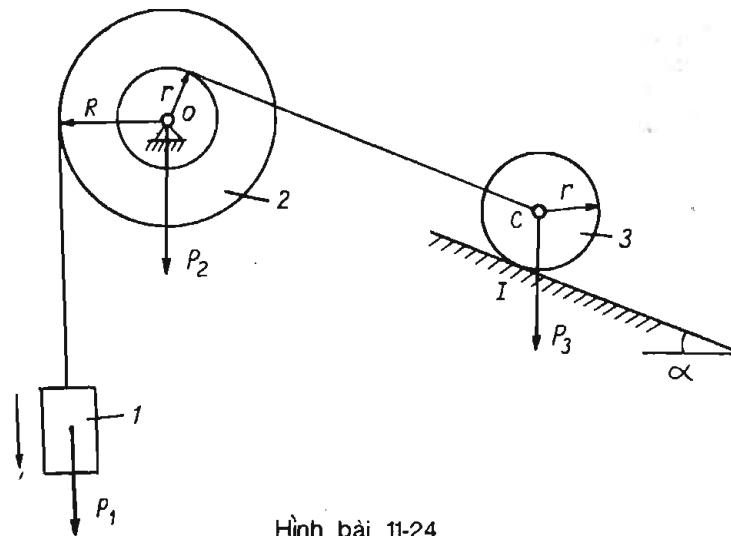
11-26. Một vật nặng A trọng lượng P hạ xuống dưới nhờ một sợi dây không dãn, không trọng lượng, vòng qua ròng rọc cố định không trọng lượng D và cuốn vào trống B. Trong lúc vật A hạ xuống, bánh C lăn không trượt theo



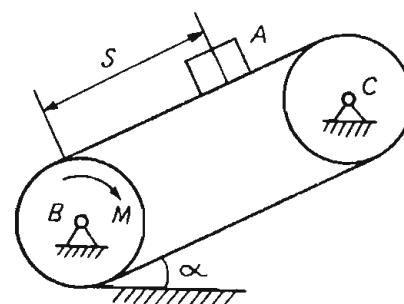
Hình bài 11-22



Hình bài 11-23



Hình bài 11-24

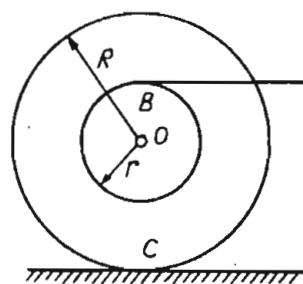


Hình bài 11-25

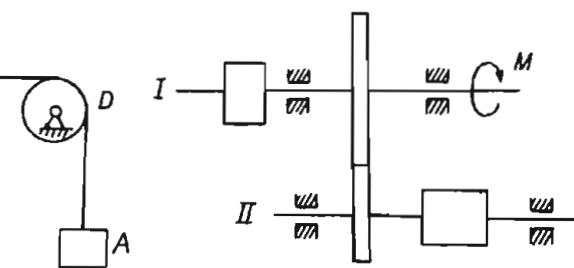
đường nằm ngang. Trống B có bán kính r gắn cứng với bánh C bán kính R, toàn khối có trọng lượng là Q và bán kính quán tính đối với trục qua O là ρ (hình bài 11-26).

11-27. Hai trục quay I và II cùng với những vô lăng và bánh răng gắn trên chúng có mômen quán tính đối với trục quay của chúng là $J_1 = 4900 \text{ kgm}^2$ và $J_2 = 3920 \text{ kgm}^2$. Tỷ số truyền động giữa hai trục $k = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{2}{3}$. Trục I chịu tác dụng mômen quay $M = 490 \text{ Nm}$.

Hỏi sau khi trục II quay được bao nhiêu vòng thì đạt tốc độ $n_2 = 120 \text{ vòng/phút}$ (hình bài 11-27).



Hình bài 11-26



Hình bài 11-27

Chương 12

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CHUYỂN ĐỘNG CỦA VẬT RẮN VÀ CƠ HỆ

§12-1. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

1- Vật rắn chuyển động tịnh tiến

Phương trình vi phân chuyển động có dạng của định lý chuyển động khối tâm (11-7) đã được xét ở chương 11.

2- Vật rắn quay quanh trục cố định

Phương trình vi phân chuyển động có dạng (11-11) đã được xét ở định lý mômen động lượng (chương 11).

3- Vật rắn chuyển động song phẳng

Phương trình vi phân chuyển động có dạng :

$$\left. \begin{array}{l} M\ddot{x}_c = \sum F_{kx}^e \\ M\ddot{y}_c = \sum F_{ky}^e \\ J_c \ddot{\varphi}_s = \sum \bar{m}_c (\vec{F}_k^e) \end{array} \right\} \quad (12-1) \text{ hoặc} \quad \left. \begin{array}{l} M\dot{S}_c = \sum F_k^e \tau \\ M \frac{V_c^2}{\rho} = \sum F_{kn}^e \\ J_c \ddot{\varphi}_s = \sum \bar{m}_c (\vec{F}_k^e) \end{array} \right\} \quad (12-2)$$

Trong đó . x_c, y_c là tọa độ của khối tâm C.

φ_s là góc định vị của tấm phẳng S đối với hệ trục tọa độ tịnh tiến cùng với khối tâm.

M là khối lượng của tấm.

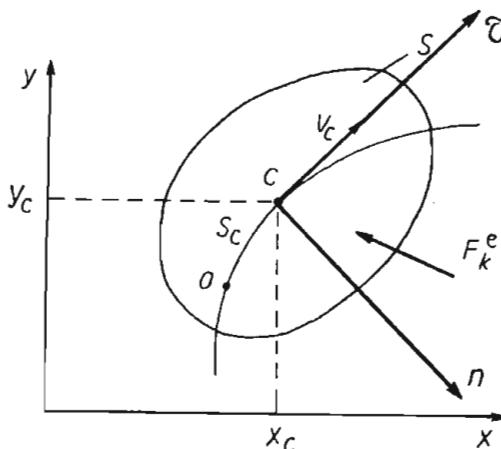
J_c là mômen quán tính của tấm đối với trục đi qua C và thẳng góc với mặt phẳng của tấm.

\vec{F}_k^e là ngoại lực thứ k.

$S_c = \widehat{OC}$ là tọa độ cong của C.

V_c là vận tốc của C.

ρ là bán kính cong của quỹ đạo khối tâm C.



Hình 12-1

4- Cơ hệ những chất điểm và vật rắn chuyển động

Phương trình vi phân chuyển động có dạng phương trình Lagrange loại II

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (12-3)$$

$$i = 1, \dots, S$$

Trong đó : S Số bậc tự do của hệ.

$T = T(q_i, \dot{q}_i)$ động năng của hệ được tính theo tọa độ suy rộng q_i
và vận tốc suy rộng $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$.

Q_i lực suy rộng, được tính theo các phương pháp ở §10-1 (chương 10).

$\frac{\partial T}{\partial q_i}$ - đạo hàm riêng của động năng theo tọa độ suy rộng q_i .

$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$ đạo hàm riêng của động năng theo vận tốc suy rộng q_i .

$\frac{d}{dt} (\)$ đạo hàm theo thời gian của ().

§12-2. HƯỚNG DẪN ÁP DỤNG

1- Phương trình vi phân chuyển động song phẳng

Phương trình này dùng để giải cả bài toán thuận và bài toán ngược :

a) Biết chuyển động của vật, xác định vectơ chính và mômen chính các ngoại lực tác dụng lên vật và do đó có thể xác định các lực liên kết.

b) Biết các lực tác dụng lên vật, xác định chuyển động của vật.

* Trường hợp đã biết quỹ đạo khối tâm C, ta áp dụng công thức dạng (12-2).

2- Phương trình Lagrange loại II.

Phương trình này được áp dụng để thành lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ. Khi giải các phương trình lập được (bằng phương pháp giải tích hoặc phương pháp số trên máy tính) ta sẽ được $q_i(t)$ với $i = 1, 2, \dots, S$. Các $q_i(t)$ xác định chuyển động của hệ.

§12-3. NHỮNG BÀI GIẢI MẪU

Thí dụ 12-1. Đĩa tròn có trọng lượng P , bán kính R, bán kính quán tính đối với trục qua C và vuông góc với đĩa là ρ . Hệ số ma sát trượt giữa đĩa và nền là f (hình 12-2).

Tìm lực \vec{F} để đĩa lăn không trượt.

Bài giải

1. Phân tích chuyển động và lực

Đĩa chuyển động song phẳng.

Lực tác dụng gồm : trọng lực \vec{P} , phản lực \vec{N} , lực \vec{F} nằm ngang, lực ma sát \vec{F}_{ms} .

2. Lập phương trình vi phân chuyển động:

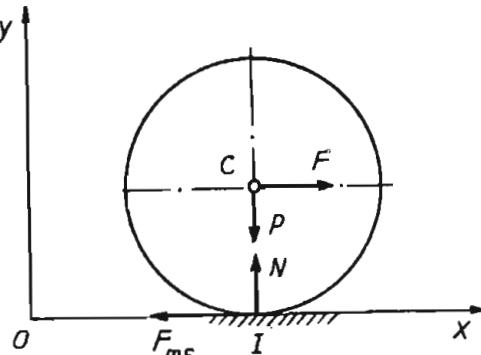
Chọn trục tọa độ như hình 12-2. Quy ước chiều dương của góc quay φ là ngược chiều kim đồng hồ.

Phương trình vi phân chuyển động có dạng :

$$\frac{P}{g} \ddot{x}_c = F - F_{ms} \quad (a)$$

$$\frac{P}{g} \ddot{y}_c = N - P \quad (b)$$

$$\frac{P}{g} \rho^2 \dot{\varphi} = -RF_{ms} \quad (c)$$



Hình 12-2

Ta có ba phương trình với năm đại lượng chưa biết \ddot{x}_c , \ddot{y}_c , $\dot{\varphi}$, F_{ms} và N . Ta cần tìm một số liên hệ giữa các đại lượng này :

Vì đĩa lăn không trượt, nên điểm I là tâm vận tốc tức thời :

$$V_c = R\omega \text{ hoặc } \dot{x}_c = -R\dot{\varphi}, \text{ do đó : } \ddot{x}_c = -R\ddot{\varphi} \quad (d)$$

$$\text{Vì } y_c = R = \text{const nên } \ddot{y}_c = 0 \quad (e)$$

Giải các phương trình (a), (b), (c) và chú ý đến các liên hệ (d), (e) ta được

$$N = P; \quad F_{ms} = \frac{\rho^2 F}{R^2 + \rho^2}$$

Điều kiện để đĩa lăn không trượt là .

$$F_{ms} \leq fN \quad \text{hay: } \frac{\rho^2 F}{R^2 + \rho^2} \leq fP$$

$$\text{Vậy lực } F \text{ phải thỏa mãn điều kiện : } F \leq \frac{R^2 + \rho^2}{\rho^2} fP$$

Thí dụ 12-2. Thanh đồng chất $AB = 2a$ có đầu A, B tựa vào tường nhẵn và nền nhẵn. Giữ thanh AB đứng yên tạo với nền một góc φ_0 rồi thả ra cho nó chuyển động dưới tác dụng của trọng lực P.

Tìm vận tốc góc và gia tốc góc theo góc nghiêng φ . Tìm phản lực tại A và B, suy ra giá trị của φ lúc đầu A rời khỏi tường (hình 12-3).

Bài giải

1. Phân tích chuyển động và lực :

Thanh AB chuyển động song phẳng.

Các lực tác dụng gồm trọng lực \vec{P} , các phản lực liên kết \vec{N}_A , \vec{N}_B .

2. Lập phương trình vi phân chuyển động.

Chọn hệ trục tọa độ như hình 12-3.

Quy ước chiều dương của φ là ngược chiều kim đồng hồ.

. Phương trình vi phân chuyển động có dạng :

$$M\ddot{x}_c = N_A \quad (a)$$

$$M\ddot{y}_c = N_B - P \quad (b)$$

$$J_c\ddot{\varphi} = N_B a \cos \varphi - N_A a \sin \varphi \quad (c)$$

Các liên hệ : Vì $x_c = a \cos \varphi$; $y_c = a \sin \varphi$ nên :

$$\ddot{x}_c = a \ddot{\varphi} \sin \varphi - a \dot{\varphi}^2 \cos \varphi \quad (d)$$

$$\ddot{y}_c = a \ddot{\varphi} \cos \varphi - a \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \quad (e)$$

Giải các phương trình trên với $J_c = \frac{1}{3} Ma^2$ ta được :

$$N_A = -\frac{P}{g} a (\dot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi)$$

$$N_B = P + \frac{P}{g} a (\dot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi)$$

$$\ddot{\varphi} = \ddot{\varepsilon} = -\frac{3g}{2a} \cos \varphi \quad (f)$$

Lấy tích phân biểu thức (f) với điều kiện đầu $\varphi(0) = \varphi_0$; $\dot{\varphi}(0) = 0$ ta được

$$\dot{\varphi}^2 = \omega^2 = -\frac{3g}{a} (\sin \varphi - \sin \varphi_0)$$

Đầu A rời tường khi $N_A = 0$, tức là

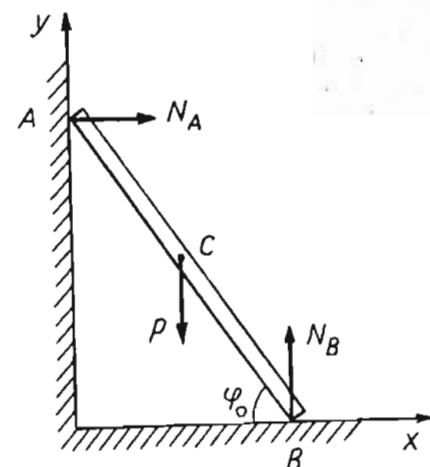
$$\frac{P}{g} a \left[\frac{3g}{2a} \cos \varphi \sin \varphi + \frac{3g}{a} (\sin \varphi - \sin \varphi_0) \cos \varphi \right] = 0$$

Vì $\cos \varphi \neq 0$ nên $3 \sin \varphi - 2 \sin \varphi_0 = 0$

Vậy đầu A rời tường khi : $\sin \varphi = \frac{2}{3} \sin \varphi_0$

Sau khi thanh rời tường, từ (a) ta nhận được

$$\ddot{x}_c = 0; \dot{x}_c = \text{const}$$



Hình 12-3

Suy ra hình chiếu của khối tâm trên trục x chuyển động đều sau khi thanh rời tường.

Thí dụ 12-3. Con lắc 1 quay được quanh trục A, khối lượng là m_1 , mômen quán tính đối với trục qua khối tâm C là J , khoảng cách AC = l.

Vật 2 có khối lượng m_2 chuyển động được trên nền ngang nhẵn. Lò xo có độ cứng c, ở vị trí O lò xo không bị biến dạng.

Lập phương trình vi phân chuyển động của hệ (hình 12-4).

Bài giải

Áp dụng phương trình Lagrange loại II, ta giải bài toán theo 5 bước :

1- Chọn tọa độ suy rộng và xác định số bậc tự do :

$$q_1 = \varphi ; q_2 = X ; \text{ Số bậc tự do của hệ } S = 2.$$

2- Viết phương trình Lagrange cho hệ :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = Q_\varphi \quad (a)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{X}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{X}} = Q_x \quad (b)$$

3- Tính các lực suy rộng.

Các lực đều là lực thế. Chọn nền làm gốc để tính thế năng trọng lực.

$$\Pi = \frac{c}{2} X^2 - m_1 g l \cos \varphi$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = m_1 g l \sin \varphi ; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial X} = c X$$

do đó $Q_\varphi = -m_1 g l \sin \varphi$; $Q_x = -c X$

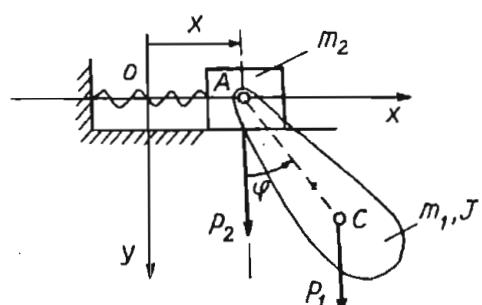
4- Tính động năng của hệ

$$T(\varphi, \dot{\varphi}, X, \dot{X})$$

$$T = T_1 + T_2$$

con lắc 1 chuyển động song phẳng nên

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_c^2 + \frac{1}{2} J_c \omega^2$$



Hình 12-4

Vật 2 chuyển động tịnh tiến nén

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 V_2^2$$

ở đây : $J_c = J$; $\omega = \dot{\varphi}$; $V_2 = \dot{X}$, $V_c^2 = \dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2$

$$x_c = X + l\sin\varphi ; \quad \dot{x}_c = \dot{X} + l\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$y_c = l\cos\varphi ; \quad \dot{y}_c = -l\dot{\varphi}\sin\varphi$$

$$V_c^2 = \dot{X}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{X}\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$\text{do đó : } T_1 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{X}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{X}\dot{\varphi}\cos\varphi) + \frac{1}{2} J\dot{\varphi}^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 \dot{X}^2$$

$$T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{X}^2 + \frac{1}{2} (J + m_1 l^2) \dot{\varphi}^2 + m_1 l \dot{X} \dot{\varphi} \cos\varphi$$

5 Tính các đạo hàm và lập phương trình vi phân chuyển động :

$$\text{a/ Đối với } \varphi : \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m_1 l \dot{X} \dot{\varphi} \sin\varphi$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = (J + m_1 l^2) \dot{\varphi} + m_1 l \dot{X} \cos\varphi$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = (J + m_1 l^2) \ddot{\varphi} + m_1 l \ddot{X} \cos\varphi - m_1 l \dot{X} \dot{\varphi} \sin\varphi$$

Phương trình (a) trở thành :

$$(J + m_1 l^2) \ddot{\varphi} + m_1 l \ddot{X} \cos\varphi = -m_1 g l \sin\varphi \quad (1)$$

$$\text{b/ Đối với } X : \frac{\partial T}{\partial \dot{X}} = 0 \text{ (vì } T \text{ không phụ thuộc } X)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{X}} = (m_1 + m_2) \dot{X} + m_1 l \dot{\varphi} \cos\varphi$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{X}} \right) = (m_1 + m_2) \ddot{X} + m_1 l \ddot{\varphi} \cos\varphi - m_1 l \dot{\varphi}^2 \sin\varphi$$

Phương trình (b) trở thành

$$(m_1 + m_2) \ddot{X} + m_1 l \dot{\varphi} \cos\varphi - m_1 l \dot{\varphi}^2 \sin\varphi = cX \quad (2)$$

Như vậy, hệ có 2 bậc tự do, ta nhận được 2 phương trình vi phân cấp 2 đối với φ và X có dạng (1) và (2). Khi giải hệ 2 phương trình này với các điều kiện đầu ta nhận được $\varphi(t)$ và $X(t)$, chúng xác định chuyển động của hệ.

Trường hợp φ bé, ta có thể lấy xấp xỉ $\sin\varphi \approx \varphi$; $\cos\varphi = 1$ và bỏ qua các số hạng vô

cùng bé cấp lớn hơn 1 (tức là bỏ qua số hạng chứa φ^2) khi đó hệ phương trình (1) và (2) trở thành :

$$(J + m_1 l^2) \ddot{\varphi} + m_1 l \ddot{X} + m_1 g l \varphi = 0 \quad (1')$$

$$(m_1 + m_2) \ddot{X} + m_1 l \ddot{\varphi} + c X = 0 \quad (2')$$

Hệ (1) và (2) là hệ phương trình vi phân phi tuyến, còn hệ (1') và (2') là hệ phương trình vi phân tuyến tính, nó được tuyến tính hóa từ hệ (1) và (2) với giả thiết φ bé.

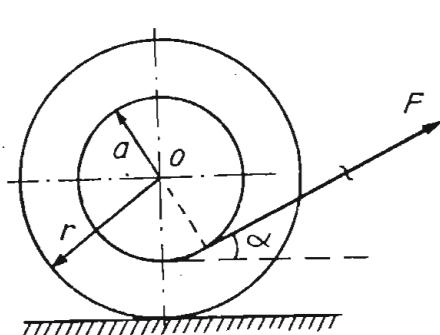
§12-4. BÀI TẬP

I. Phương trình vi phân chuyển động song phẳng

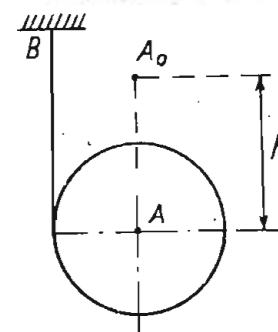
12-1. Một bánh xe đồng chất bán kính r lăn xuống không trượt theo đường dốc chính của một mặt phẳng nghiêng có góc nghiêng α so với phương ngang. Hệ số ma sát lăn giữa bánh xe và mặt phẳng nghiêng là k . Tìm điều kiện để bánh xe lăn xuống đều.

12-2. Một con lăn đồng chất hình trụ tròn, có trọng lượng P bán kính a , được đặt trên mặt phẳng ngang, không nhẵn, có một sợi dây quấn vào tàng trong của con lăn với bán kính a . Bán kính quán tính của con lăn đối với trục của nó là ρ . Tác dụng lên đầu tự do của dây một lực F , nghiêng với mặt phẳng ngang một góc không đổi α . Tìm qui luật chuyển động của trục O của con lăn (hình bài 12-2).

12-3. Một trụ tròn đồng chất A , có khối lượng m , lăn xuống theo dây treo thẳng đứng ^{dây} quấn vào nó. Đầu B của dây được buộc chặt và khi trụ rơi không vận tốc thì nhả dây quấn



Hình bài 12-2



Hình bài 12-3

ra. Tìm vận tốc trục khối trụ khi nó đã rơi được một đoạn thẳng h và tìm lực căng của dây treo (hình bài 12-3).

12-4. Người ta quấn hai dây mềm vào một khối trụ đồng chất và quấn dây đối xứng qua mặt phẳng trung bình song song với đáy : khối trụ nặng là P được đặt lên mặt phẳng nghiêng sao cho đường sinh của nó vuông góc với đường dốc chính và buộc cố định mút tự do của hai dây trên sao cho phần dây tự do song song với đường dốc chính của mặt phẳng nghiêng AB. Hệ số ma sát trượt giữa mặt trụ và mặt nghiêng là f . Giả thiết rằng trọng lực thẳng lực cản do ma sát và khối trụ trượt xuống không vận tốc đầu. Tìm quy luật chuyển

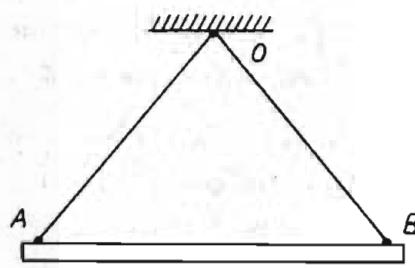
động s(t) của trục khối trụ và lực căng của mỗi dây. Cho rằng trong chuyển động đang xét dây quấn chưa bị nhả ra hết (hình bài 12-4).

12-5. Một thanh đồng chất AB có trọng lượng P được treo vào điểm O nhờ hai dây có chiều dài bằng nhau và bằng độ dài của thanh. Xác định sức căng của một trong hai nhánh dây tại thời điểm nhánh kia bị đứt (hình bài 12-5).

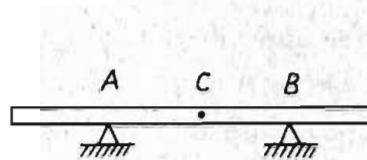
12-6. Một thanh mảnh đồng chất có chiều dài $2l$ và trọng lượng P nằm trên hai gối đỡ A và B. Trọng tâm C của thanh nằm cách đều hai gối đỡ :

$CA = CB = a$. Áp lực tĩnh trên mỗi gối đỡ bằng $P/2$ (hình bài 12-6).

Tìm sự thay đổi áp lực trên gối đỡ A tại thời điểm khi gối đỡ B bị rơi tức thời.



Hình bài 12-5



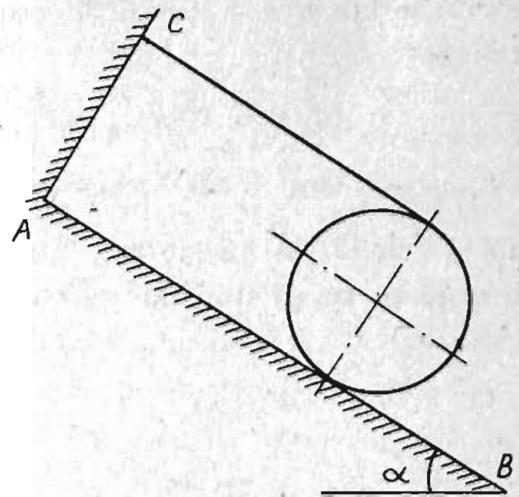
Hình bài 12-6

II. Phương trình Lagrange loại II

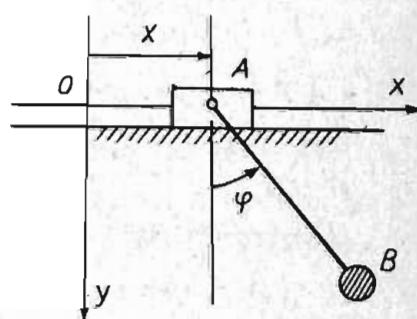
12-7. Con lắc gồm con chạy A có khối lượng m_1 trượt trên nền ngang nhẵn và quả cầu nhỏ khối lượng m_2 được nối với con chạy A bằng thanh AB cứng, nhẹ, dài l. Lập phương trình vi phân chuyển động của cả hệ (hình bài 12-7).

12-8. Một ống trụ tròn rỗng, đồng chất có trọng lượng P, bán kính đáy R và có thể quay quanh trục thẳng đứng. Trên mặt trong của ống trụ có xé một rãnh đinh ốc, bước của đường đinh ốc là h. Một viên bi nhỏ, chạy trong rãnh ấy dưới tác dụng của trọng lượng bản thân. Bỏ qua ma sát. Thành lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ, cho biết ban đầu hệ đứng yên. Tìm phương trình chuyển động của cơ hệ.

12-9. Một hình trụ khối lượng m, bán kính r lăn không trượt bên trong của một trụ rỗng, khối lượng M, bán kính R, trụ này có thể quay quanh trục nằm ngang O. Momen quán tính của các trụ đối với các trục của mình tương ứng bằng MR^2 và $\frac{mr^2}{2}$. Thành lập phương trình vi phân chuyển động của hệ và tìm các tích phân (hình bài 12-9).

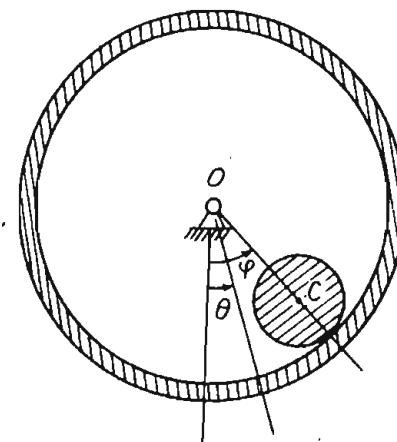


Hình bài 12-4



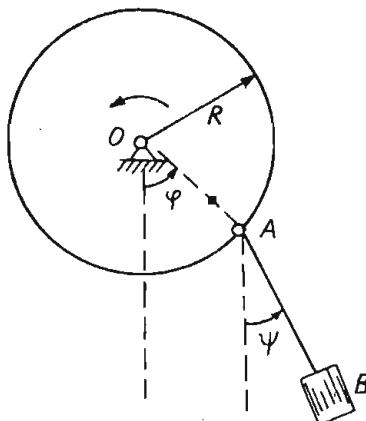
Hình bài 12-7

12-10. Một đĩa đồng chất, bán kính R , có khối lượng M , có thể quay quanh trục nằm ngang O . Một dây nhẹ không giãn AB , một đầu của nó treo vào vành đĩa tại A và đầu kia buộc vật có khối lượng m tại B . Thành lập phương trình vi phân chuyển động của hệ (hình bài 12-10).

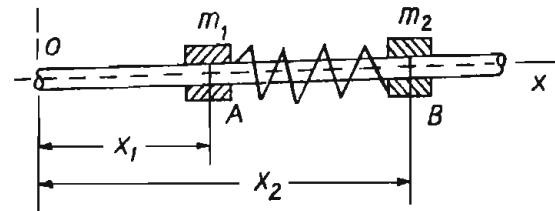


Hình bài 12-9

12-11. Xác định chuyển động của cơ hệ gồm hai khối lượng m_1 và m_2 có thể trượt tịnh tiến dọc thanh nhẵn nằm ngang (Ox). Các khối lượng được nối với nhau nhờ một lò xo có độ cứng c . Khoảng cách giữa hai tâm của hai khối lượng khi lò xo không làm việc là l . Trạng thái đầu của cơ hệ được xác định bằng giá trị của vận tốc và tọa độ khai tâm của hai vật khi $t = 0$: $x_1 = 0$; $\dot{x}_1 = u_0$; $x_2 = l$, $\dot{x}_2 = 0$ (hình bài 12-11).



Hình bài 12-10

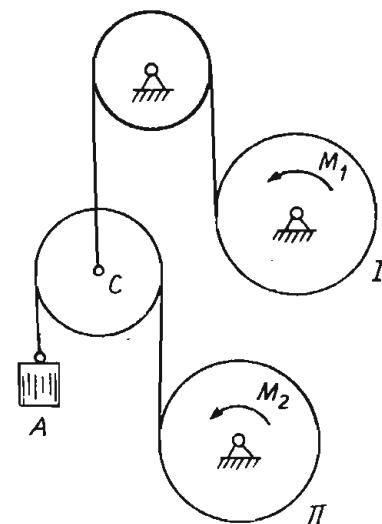


Hình bài 12-11

12-12. Vật A có khối lượng m được kéo lên nhờ các trục quay I và II có cùng bán kính R và mômen quán tính của chúng đổi với trục quay riêng bằng J . Xác định giá tốc của vật A nếu các trục quay chịu tác dụng của các ngẫu lực có mômen là M_1 và M_2 . Bỏ qua khối lượng của các ròng rọc và ma sát ở các ổ trục. Coi các dây là nhẹ, không giãn và không trượt đổi với các ròng rọc (hình bài 12-12).

12-13. Vật có khối lượng M , trượt được trên nền ngang nhẵn. Đĩa có khối lượng m , bán kính R quay được quanh A . Lò xo có độ cứng C , ở vị trí O lò xo không bị biến dạng. Lập phương trình vi phân chuyển động của hệ (hình bài 12-13).

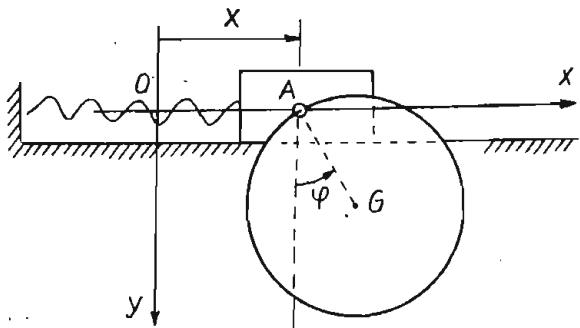
12-14. Một dầm có tiết diện vuông, khối lượng M , bị khoét một lỗ hình trụ bán kính R được nối với thanh cố định nhờ một lò xo có độ cứng C và có thể trượt không ma sát dọc theo phương ngang. Dọc theo bề mặt của lỗ, lăn không trượt một hình trục đồng chất khối lượng m , bán kính r ($r < R$) (hình bài 12-14).



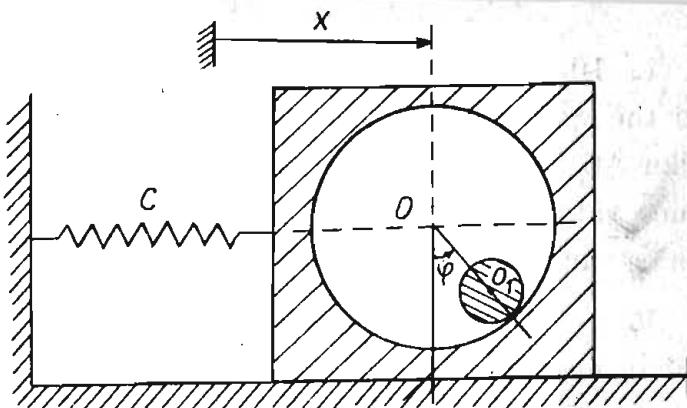
Thành lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ.

12-15. Một dầm có khối lượng M được nối với các tường

Hình bài 12-12



Hình bài 12-13



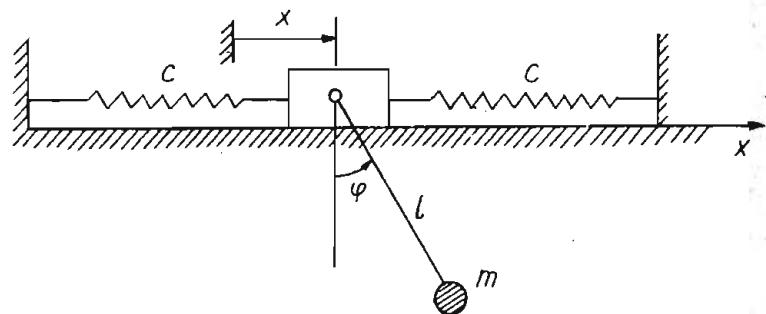
Hình bài 12-14

cố định nhờ các lò xo có độ cứng như nhau \$C\$, có thể trượt không ma sát dọc sàn ngang. Một vật khối lượng \$m\$ được buộc vào một đầu dây và được treo vào khói tâm của đầm. Dây được xem là mảnh và không giãn. Thành lập phương trình vi phân chuyển động của hệ.

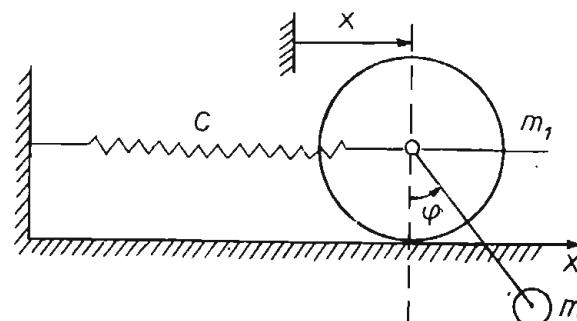
12-16. Thành lập phương trình vi phân chuyển động của một con lắc có khối lượng \$m\$ và độ dài \$l\$, điểm treo của nó nằm tại tâm của đĩa bán kính \$r\$ và có khối lượng \$m_1\$. Đĩa có thể lăn không trượt trên nền ngang \$Ox\$ tâm của đĩa nối với tường cố định nhờ một lò xo có độ cứng \$c\$ (hình bài 12-16)

12-17. Giải bài tập 10-12 (chương 10) khi trục quay thẳng đứng có momen quán tính đối với trục tâm của nó bằng \$J\$ và chịu tác dụng ngẫu lực \$M\$, còn thanh đồng chất \$AB\$ có khối lượng \$m\$. Thành lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ (hình bài 10-12).

12-18. Giải bài tập 10-13 (chương 10) khi trục quay thẳng đứng có momen quán tính đối với trục tâm của nó bằng \$J\$ và chịu tác dụng ngẫu lực \$M\$, còn thanh gãy khúc \$OAB\$ đồng chất có khối lượng phân bố theo chiều dài là \$\sigma\$ (\$kg/m\$). Thành lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ (hình bài 10-13).



Hình bài 12-15



Hình bài 12-16

Chương 13

KÉO NÉN ĐÚNG TÂM

§13-1. ỨNG SUẤT PHÁP, BIẾN DẠNG DÀI TUYỆT ĐỐI

Một thanh gọi là chịu kéo, nén đúng tâm khi trên một mặt cắt ngang của thanh chỉ có một thành phần nội lực là lực dọc N_z .

Trên mặt cắt ngang không có ứng suất tiếp, ứng suất pháp σ_z phân bố đều và được tính theo công thức

$$\sigma_z = \frac{N_z}{F} \quad (13-1)$$

Trong đó

N_z - giá trị lực dọc trên mặt cắt ngang tính ứng suất, lực dọc được coi là dương khi thanh chịu kéo và là âm khi thanh chịu nén.

F - diện tích mặt cắt ngang.

Độ dãn dài tuyệt đối của thanh được tính theo công thức

$$\Delta l = \int \frac{N_z}{EF} dz \quad (13-2)$$

Trong đó

N_z - lực dọc, là hàm của tọa độ theo trục thanh $N_z(z)$.

F - diện tích mặt cắt ngang tổng quát cũng là hàm của tọa độ $F(z)$.

E - môđun đàn hồi khi kéo, nén của vật liệu.

l - chiều dài của thanh.

Nếu trên suốt chiều dài l của thanh N_z , E , F là hằng số thì

$$\Delta l = \frac{N_z l}{EF} \quad (13-3)$$

Nếu thanh có nhiều đoạn có tính chất trên thì ta chia thanh ra làm nhiều đoạn và công thức có dạng

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \frac{N_{zi}}{E_i F_i} dz \quad \text{hoặc} \quad \Delta l = \sum_{i=1}^n \frac{N_{zi} l_i}{E_i F_i} \quad (13-4)$$

Tích số EF được gọi là độ cứng của thanh kéo nén đúng tâm.

Ví dụ 13-1. Cho thanh thẳng có mặt cắt không đổi chịu lực như trên hình 13-1A. Vẽ biểu đồ lực dọc, biểu đồ ứng suất và biểu đồ chuyển vị của các mặt cắt ngang (hình 13-1A).

Bài giải

Bằng phương pháp mặt cắt, ta tính được nội lực ở bốn đoạn từ đầu tự do.

$$N_1 = P; N_2 = P - 2P = -P; N_3 = P - 2P = -P; N_4 = P - 3P + P = -P;$$

$$N_4 = P - 3P + P = -P$$

Ứng suất ở các đoạn :

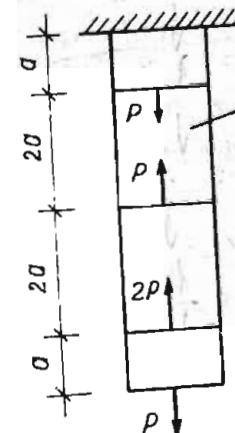
$$\sigma_1 = \frac{P}{F}; \sigma_2 = -\frac{P}{F}; \sigma_3 = -\frac{2P}{F}; \sigma_4 = -\frac{P}{F}$$

Chuyển vị của các mặt cắt tính theo công thức chung

$$\Delta l = \sum \int \frac{Ndz}{EF} = \frac{1}{EF} \sum \int Ndz.$$

Đoạn 4 ($0 \leq z \leq a$):

$$\Delta l = \frac{1}{EF} \int_0^a N_4 dz = -\frac{Pz}{EF}$$



Hình 13-1A

Đoạn 3 ($a \leq z \leq 3a$)

$$\Delta l_3 = \frac{1}{EF} \left(\int_0^a N_4 dz + \int_a^{3a} N_3 dz \right) = \frac{1}{EF} (-Pa - 2Pz + 2Pa) = \frac{1}{EF} (Pa - 2Pz),$$

Đoạn 2 ($3a \leq z \leq 5a$):

$$\Delta l_2 = \frac{1}{EF} \left(\int_0^a N_4 dz + \int_a^{3a} N_3 dz + \int_{3a}^{5a} N_2 dz \right),$$

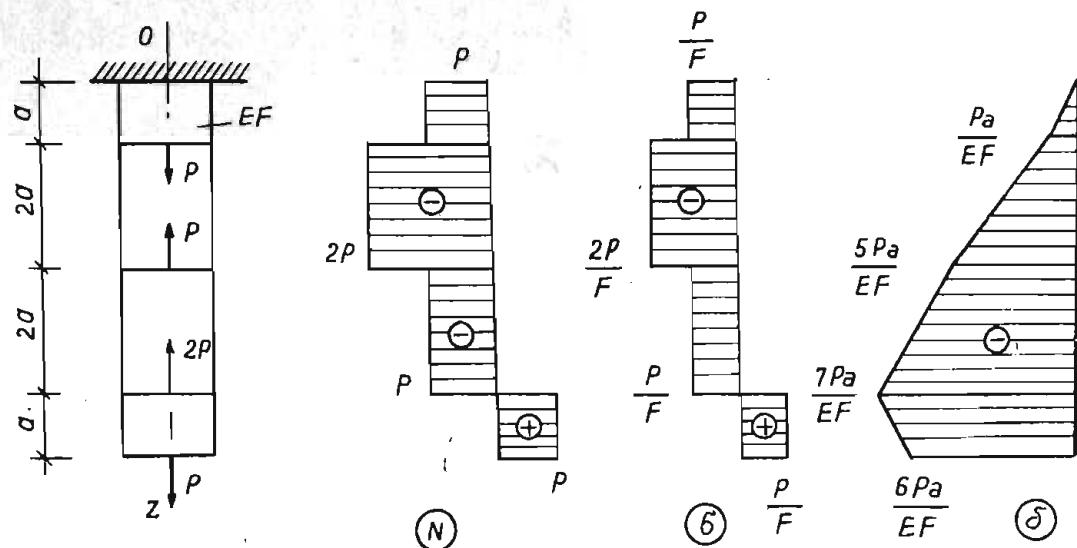
$$= \frac{1}{EF} (-Pa - 4Pa - Pz + 3Pa) = \frac{1}{EF} (-2Pa - Pz).$$

Đoạn 1 ($5a \leq z \leq 6a$):

$$\Delta l_1 = \frac{1}{EF} \left(\int_0^a N_4 dz + \int_a^{3a} N_3 dz + \int_{3a}^{5a} N_2 dz + \int_{5a}^{6a} N_1 dz \right),$$

$$= \frac{1}{EF} (-Pa - 4Pa - 2Pa + Pz - 5Pa) = \frac{1}{EF} (-12Pa + Pz).$$

biểu đồ lực dọc N , ứng suất σ , chuyển vị δ xem hình 13-1B.



Hình 13-1B

Ví dụ 13-2. Một thanh thẳng có bề dày không đổi, bề rộng biến đổi theo hàm bậc nhất chịu một lực tập trung ở đầu tự do. Vẽ biểu đồ lực dọc, ứng suất và chuyển vị của các mặt cắt (hình 13-2A).

Bài giải

Bề rộng mặt cắt ngang :

$$b_z = b\left(1 + \frac{z}{l}\right)$$

Diện tích mặt cắt ngang m

$$F_z = bh\left(1 + \frac{z}{l}\right)$$

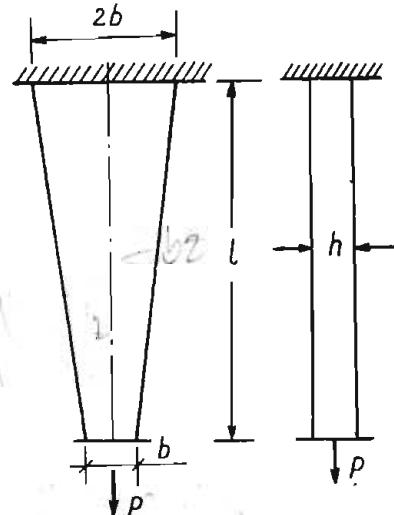
Ứng suất pháp ở mặt cắt ngang m - n :

$$\sigma = \frac{P}{bh} \frac{1}{1 + \frac{z}{l}}$$

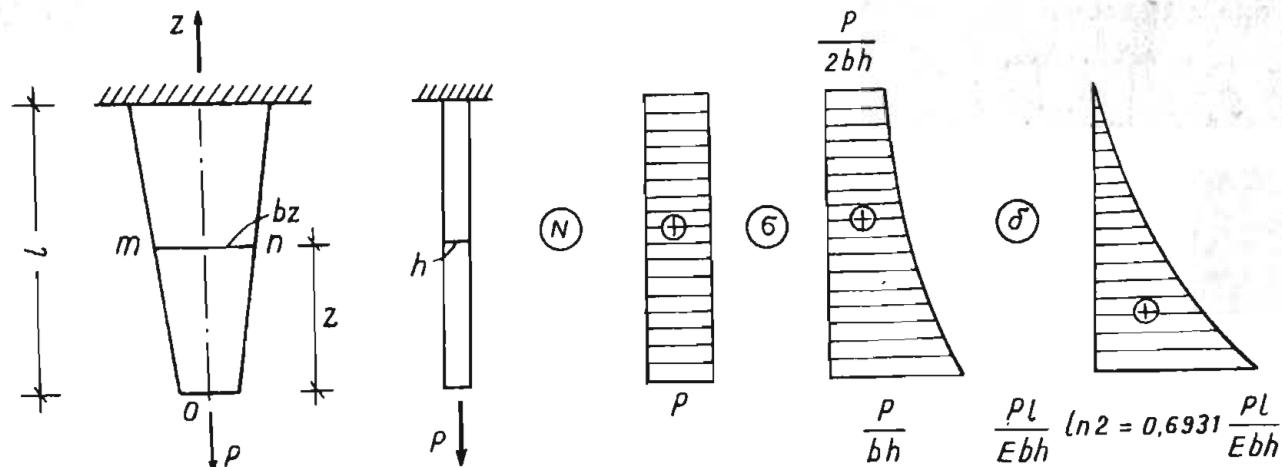
Chuyển vị của mặt cắt ngang m - n

$$\delta' = \frac{P}{Ebh} \int \frac{dz}{1 + \frac{z}{l}} = \frac{Pl}{Ebh} \left[\ln\left(1 + \frac{z}{l}\right) \right] = \frac{Pl}{Ebh} \ln \left| \frac{2}{1 + \frac{z}{l}} \right|$$

Biểu đồ lực dọc N, ứng suất σ, chuyển vị δ xem hình 13-2B.



Hình 13-2A



Hình 13-2B

§13-2. CHUYỂN VỊ CÁC ĐIỂM CỦA HỆ THANH LIÊN KẾT KHỚP

Chuyển vị đòn hồi các điểm của một hệ thanh liên kết khớp tính theo sơ đồ tổng quát sau :

Từ điều kiện cân bằng tĩnh học ta tìm được lực dọc trực của các bộ phận đòn hồi. Dùng công thức tính độ dãn dài tuyệt đối của các bộ phận, vì khi biến dạng các bộ phận của hệ không rời nhau, do đó bằng phương pháp các đường giao nhau, ta lập được các điều kiện chập của chuyển vị, tức là các quan hệ hình học của các bộ phận hợp thành hệ thống. Từ những quan hệ ấy ta xác định được các chuyển vị cần tìm.

Khi dùng phương pháp đường giao nhau, cần chú ý rằng các bộ phận của hệ không những có biến dạng dọc trực mà còn có thể quay xung quanh khớp nào đó. Do đó mỗi một điểm của bộ phận đều có thể chuyển vị dọc trực của bộ phận và chuyển vị trên cung tròn có bán kính tương ứng. Cung tròn (đường giao) đó có thể thay bằng đường kẻ vuông góc với bán kính quay vì biến dạng của thanh rất bé so với chiều dài của nó.

Ví dụ 13-3. Xác định đường kính của các thanh 1 và 2 sao cho chuyển vị đứng của điểm A không vượt quá 1 mm, và ứng suất trong các thanh 1, 2 không vượt quá $16 \frac{kN}{cm^2}$; $= 1m$, $E = 2.10^4 kN/cm^2$ (hình 13-3A).

Bài giải

Tính lực dọc trong các thanh 1 và 2 .

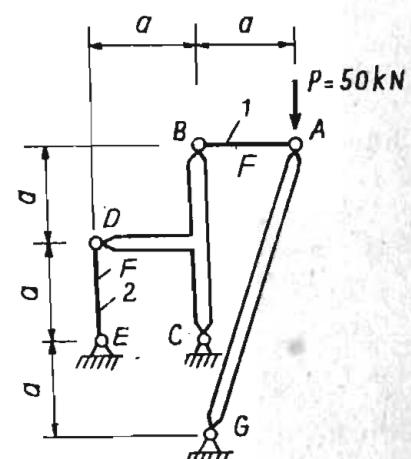
Xét phần phải (hình 13-3Bb):

$$\sum M_G = 0, \quad N_1 \cdot 3a = P \cdot a. \quad \text{Rút ra } N_1 = -\frac{P}{3}$$

Xét phần trái (hình 13-3Ba):

$$\sum M_C = 0, \quad N_2 \cdot \frac{2a}{2} = N_1 \cdot 2a$$

$$\text{Rút ra : } N_2 = 2N_1 = -\frac{P}{3}$$



Hình 13-3A

Biến dạng của các thanh $\Delta l_1 = \frac{N_1 a}{EF} = \frac{Pa}{3EF}$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 a}{EF} = \frac{2Pa}{3EF}$$

Tính chuyển vị đứng của điểm A:

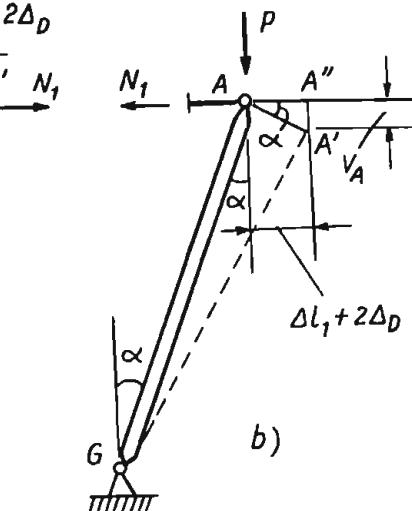
$$v_A = \overline{AA''} \operatorname{tg}\alpha = (2\Delta_D + \Delta l_1) \operatorname{tg}\alpha = \\ = \frac{2\Delta_D + \Delta l_1}{3}$$

Nhưng :

$$\Delta_D = \Delta l_2 \quad \operatorname{tg}\beta = \Delta l_2 \quad 1 = \Delta l_2.$$

Vậy :

$$v_A = \frac{2\Delta l_2 + \Delta l_1}{3} = \frac{5Pa}{9EF}$$



Hình 13-3B

Xác định đường kính theo điều kiện cứng :

$$v_A \leq [v_A],$$

hay $\frac{5Pa}{9EF} \leq [v_A].$

Rút ra : $F \geq \frac{5Pa}{9E[v_A]} = \frac{5.50.100}{9.2.10^4.0,1} \approx 1,4 \text{cm}^2 \quad d = 1,34 \text{cm}$

- Xác định đường kính theo điều kiện bền.

Lực dọc thanh 2 lớn hơn trong thanh 1, vậy điều kiện bền của thanh 2

$$\frac{N_2}{F} \leq [\sigma],$$

hay $F \geq \frac{N_2}{[\sigma]} = \frac{2P}{3[\sigma]} = \frac{2.50}{3.16} \approx 2,08 \text{ cm}^2; \quad d = 1,63 \text{ cm}$

Cuối cùng chọn . $[d] = 1,63 \text{ cm}$

§13-3. TÍNH TOÁN ĐIỀU KIỆN BỀN VÀ ĐIỀU KIỆN CỨNG

Trình tự tính toán điều kiện bền của thanh theo ứng suất cho phép có các bước sau .

Căn cứ vào biểu đồ nội lực để suy ra mặt cắt nguy hiểm hoặc các mặt cắt nghi ngờ là nguy hiểm.

Căn cứ vào biểu đồ phân bố ứng suất pháp và tiếp trên mặt cắt ngang để suy ra điểm nguy hiểm.

Xem vật liệu của thanh là dẻo hay giòn để viết điều kiện bền cho đúng.

Phân tích trạng thái ứng suất của điểm nguy hiểm. Nếu là trạng thái ứng suất đơn hoặc trượt thuận túy thì không cần dùng đến thuyết bền. Nếu trạng thái ứng suất là phẳng hoặc khối thì phải dùng một thuyết bền nào đó thích hợp với vật liệu đã cho.

Đối với bài toán kéo, nén đúng tâm. Ứng suất trên mặt cắt ngang phân bố là đều, trạng thái ứng suất là đơn, ứng suất σ , là ứng suất chính nên điều kiện bền có các dạng.

$$\text{Đối với vật liệu dẻo vì } [\sigma_k] = [\sigma_n] \quad [\sigma] = \frac{\sigma_{ch}}{n}$$

$$\text{suy ra} \quad |\sigma|_{\max} = \frac{N_z}{F} \leq [\sigma] \quad (13-5)$$

$$\text{Đối với vật liệu giòn vì } [\sigma_k] < < [\sigma_n]$$

$$\text{nên ta có hai điều kiện } \sigma_{z,\min} = \frac{N_z}{F} \leq [\sigma_n] \quad (13-6)$$

$$\begin{aligned} & N_z \\ & \sigma_{z,\max} = \frac{N_z}{F} \leq [\sigma_k] \end{aligned} \quad (13-7)$$

Trong đó :

$$[\sigma_k] = \frac{\sigma_B^k}{n} - \text{ứng suất cho phép khi kéo.}$$

$$[\sigma_n] = \frac{\sigma_B^n}{n} - \text{ứng suất cho phép khi nén.}$$

σ_{ch} - giới hạn chảy.

σ_B^k - giới hạn bền khi kéo.

σ_B^n - giới hạn bền khi nén.

hệ số an toàn.

Nếu có đặt thêm điều kiện bổ sung là chuyển vị đàm hồi δ của điểm nào đó của hệ không được vượt quá một giá trị cho phép $[\delta]$ thì việc kiểm tra độ cứng thực hiện theo bất đẳng thức:

$$\delta \leq [\delta] \quad (13-8)$$

Từ công thức trên ta suy ra ba bài toán cơ bản sau

Kiểm tra bền tính theo các công thức (13-5), (13-6) và (13-7).

Chọn kích thước của mặt cắt ngang :

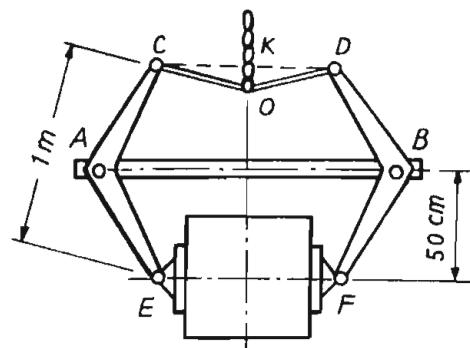
$$F \geq \frac{N}{[6]} \quad (13-9)$$

Tìm tải trọng cho phép

$$N_r \leq F_1[6] \quad (13-10)$$

Vi du 13-4.

Trên hình 13-4A là một bộ phận nâng hàng. Xác định trọng lượng Q của vật nâng theo điều kiện bền của thanh AB



Hình 13-4 A

Ứng suất pháp cho phép khi kéo của thanh $[6]_k = 16 \text{ kN/cm}^2$

Thanh AB có mặt cắt ngang hình chữ nhật $1.37\text{ cm} \times 2.74\text{ cm}$.

Chiều dài của các thanh OC và OD bằng 60 cm. Khoảng cách OK = 10 cm.

Bài giải

Tách phần bên trái (hình 13-4B) và viết phương trình hình chiếu ta được :

$$2N_{OC} \cos\alpha = Q \text{ với } \cos\alpha = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}$$

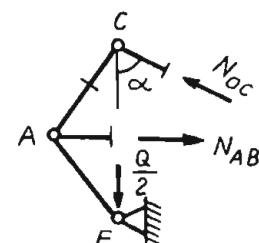
Rút ra $N_{OC} = 3Q$

Phương trình mômen

$$\sum M_E = 0; N_{OC} - 1 - N_{AB} - 0,5 = 0.$$

Rút ra

$$N_{AB} = 2N_{OC} = 6Q.$$



High 13-4B

Điều kiện bền của thanh AB

$$\frac{6Q}{F} \leq [\sigma].$$

Ta được

$$Q \leq \frac{[\sigma].F}{6} = \frac{16.1,37.2,74}{6} = 10 \text{ kN}; \quad [Q] = 10 \text{ kN}$$

Vi du 13-5.

Có hệ thống thanh chịu lực như trên hình 13-5A. Tính diện tích mặt cắt ngang các thanh treo biết rằng ứng suất cho phép $[\sigma] = 16000 \text{ N/cm}^2$

Bài giải

Thanh AB, CD xem như tuyệt đối cứng.

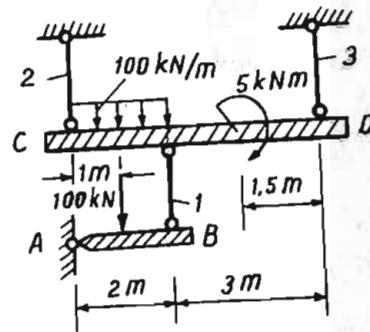
Cắt thanh treo 1, kí hiệu nội lực ở thanh 1 là N . Xét sự cân bằng của thanh AB (hình 13-5B). Lấy tổng mômen các lực đối với điểm A ta có

$$N_1 \cdot 2 - 100 \cdot 1 = 0$$

$$\text{suy ra } N_1 = \frac{100}{2} = 50 \text{ kN}$$

Tính F_1 .

$$F_1 = \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{50}{16} = 3,125 \text{ cm}^2$$



Hình 13-5A

Tính F_2 và F_3 . Xét sự cân bằng của thanh CD (hình 13-5C).

$$\sum Y = 0,$$

$$N_2 \cdot 2 - N_1 + N_3 = 0,$$

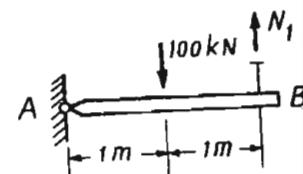
$$N_2 + N_3 = 250 \text{ kN}.$$

$$\sum M_A = 0,$$

$$5N_3 - 5 \cdot 50 - 2 \cdot 100 \cdot 2 \cdot 1 = 0,$$

$$N_3 = 61 \text{ kN};$$

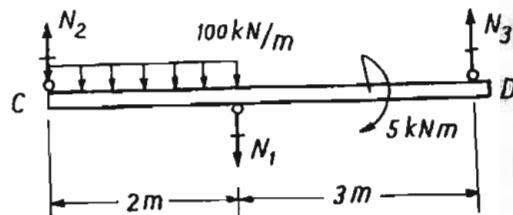
$$N_2 = 250 - N_3 = 250 - 61 = 189 \text{ kN}.$$



Hình 13-5B

$$F_2 = \frac{N_2}{[\sigma]} = \frac{189}{16} = 11,8 \text{ cm}^2.$$

$$F_3 = \frac{N_3}{[\sigma]} = \frac{61}{16} = 3,8 \text{ cm}^2.$$



Hình 13-5C

§13-4. HỆ SIÊU TĨNH

Hệ siêu tĩnh là hệ mà không thể xác định được phản lực tại chỗ liên kết nhờ các phương trình cân bằng tĩnh học hoặc xác định nội lực bằng phương pháp mặt cắt. Tính hệ siêu tĩnh có nhiều phương pháp. Trong bài toán kéo, nén siêu tĩnh ta có thể tính theo trình tự sau:

Xác định bậc siêu tĩnh.

Viết các phương trình cân bằng tĩnh học.

Lập các phương trình phụ nhờ các điều kiện thực về chuyển vị, tức là dựa trên các quan hệ hình học giữa các biến dạng của các bộ phận của hệ. Số phương trình phụ độc lập cần thiết bằng số bậc siêu tĩnh.

Giải hệ phương trình cân bằng tĩnh học và các phương trình phụ ta tìm được nội lực ở các bộ phận của hệ.

Sau khi tính được nội lực ở các bộ phận tiếp tục tính toán theo yêu cầu của bài toán đã cho.

Ví dụ 13-6. Vẽ biểu đồ lực dọc, ứng suất và chuyển vị của thanh bị ngầm hai đầu và chịu lực như trên hình 13-6A. Cho $E = 2.10^4 \text{ kN/cm}^2$.

Bài giải

Loại bỏ ngầm B, giả sử phản lực V_B có chiều như trên hình 13-6B.

Phương trình biến dạng là : $\Delta l_B = 0$

hay

$$\frac{P.a}{2EF} + \frac{P.2a}{2EF} + \frac{Pa}{EF} - \frac{V_B.2a}{EF} - \frac{V_B}{2EF} - \frac{2a}{2EF} = 0.$$

từ đó rút ra

$$V_B = \frac{5}{6} P$$

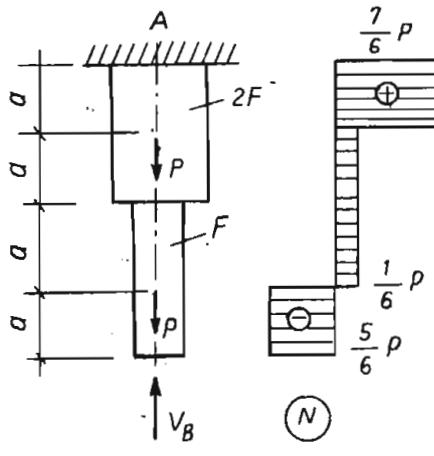
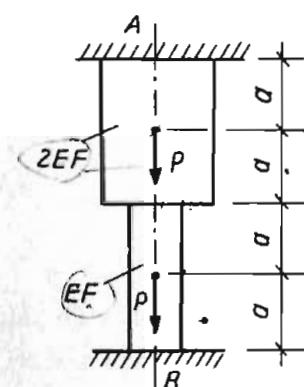
Sau khi tìm được V_B , những phần còn lại tính như với thanh tĩnh định. Biểu đồ N, σ , δ như trên hình 13-6B, b, c, d.

Ví dụ 13-7.

Xác định giá trị của lực $P = P_1$ làm cho đai tuyệt đối cứng D chạm vào gối trung gian C. Với giá trị của lực $P = P_2$ bằng bao nhiêu để đầu dưới của thanh chạm gối B ?

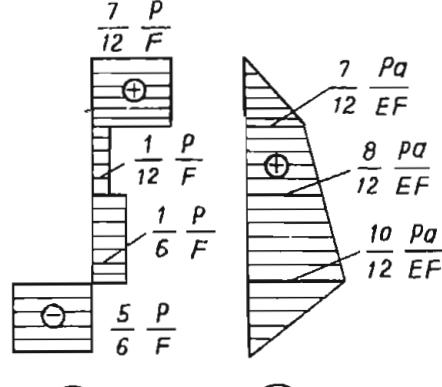
Vẽ đồ thị biểu diễn quan hệ giữa lực P và chuyển vị của điểm đặt lực đó khi P biến thiên từ 0 đến $2P_2$ (hình 13-7A).

Lấy $E = 2.10^4 \text{ kN/cm}^2$ và bỏ qua chiều dày của đai D.



a)

b)



c)

d)

Hình 13-6A

Hình 13-6B

Bài giải (hình 13.7B)

Muốn cho đai D chạm gối C thì độ giãn của phần thanh giữa ngàm A và đai D phải bằng $\delta_1 = 0,01$ cm, tức là

$$\Delta l_1 = \frac{P_1 \cdot 60}{E F} = \delta_1$$

Rút ra

$$P_1 = \frac{EF\delta_1}{60} = \frac{2 \cdot 10^4 \cdot 1 \cdot 0,01}{60} = \frac{10}{3} = 3,33 \text{ kN}$$

Khi đó, chuyển vị của điểm đặt lực là

$$\Delta_1 = \frac{P_1 \cdot (30 + 60)}{E \cdot F} = \frac{10 \cdot 90}{3,2 \cdot 10^4 \cdot 1} = 0,015 \text{ cm},$$

và chuyển vị của điểm B (Δ_{B3}) cũng bằng Δ_1

$$\Delta_B = 0,015 \text{ cm.}$$

Do đó điểm B chỉ còn cách ngàm B là

$$0,025 - 0,015 = 0,010 \text{ cm.}$$

Vì đai D đã chạm gối C, nên bây giờ ta có thể coi thanh như bị ngầm ở C và ở đầu dưới, cách ngầm B là 0,010 cm.

Vậy giá trị P' phải thêm vào để đầu dưới của thanh chạm ngầm B được tính như sau:

$$\Delta'_{13} = \frac{P'_{23} \cdot 30}{E_F} = 0,010 \text{ cm}$$

Rút ra

$$P_2' = \frac{EF \cdot 0,010}{30} = \frac{2 \cdot 10^4 \cdot 0,010}{30} = 6,67 \text{ kN.}$$

Do dó :

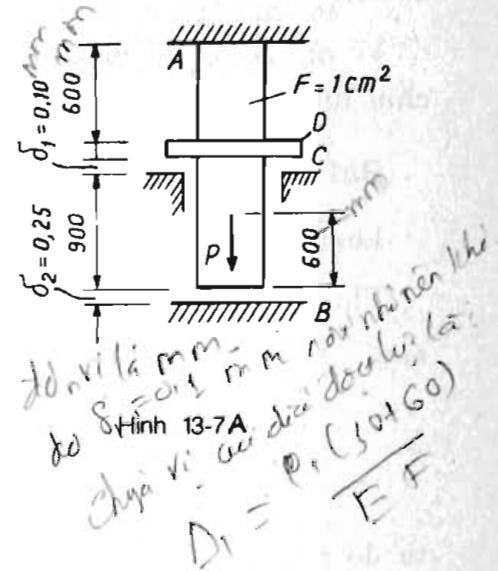
$$P_2 = P_1 + p'_2 = 3,33 + 6,67 = 10 \text{kN}$$

(Có thể tính trực tiếp P_2 như sau coi thanh bị ngầm ở C nhưng đầu dưới còn cách ngầm B là

$$0,025 - 0,010 = 0,015 \text{ cm.}$$

Vây

$$\Delta_B = \frac{p_2 \cdot 30}{EE} = 0,015 \text{ cm}$$



Rút ra :

$$P_2 = \frac{EF \cdot 0,015}{30} = \frac{2 \cdot 10^4 \cdot 0,015}{30} = 10 \text{ kN}$$

Điểm đặt lực chuyển vị thêm một đoạn đúng bằng Δ'_B . $\Delta_2 = \Delta_1 + \Delta'_B$

$$\Delta_2 = 0,015 + 0,010 = 0,025 \text{ cm}$$

Khi $P = 2P_2$ thì bài toán là siêu tĩnh. Ta biết rằng $P = P_2$ thì đầu dưới chạm ngầm B. Vậy chỉ giải bài toán siêu tĩnh với trường hợp tiếp theo $P = P_2$ (ngầm ở C và B):

$$\Delta''_B = 0 = \frac{P_2 \cdot 30}{EF} - \frac{V_R \cdot 90}{EF} = 0,$$

$$V_B = \frac{P_2 \cdot 30}{90} = \frac{P_2}{3} = \frac{10}{3} = 3,33 \text{ kN.}$$

Lúc này điểm đặt lực di chuyển thêm là

$$\Delta'_3 = \frac{(P_2 - V_B) \cdot 30}{EF} = \frac{\left(10 - \frac{10}{3}\right) \cdot 30}{2 \cdot 10^4 \cdot 1}$$

$$= \frac{20 \cdot 30}{3 \cdot 2 \cdot 10^4} = 0,010 \text{ cm.}$$

Vậy $\Delta_3 = \Delta_2 + \Delta'_3 = 0,025 + 0,010 = 0,035 \text{ cm.}$

Ví dụ 13-8. Một thanh AB có độ cứng $E_1 F_1$ dài l_1 , được treo thẳng đứng. Đầu dưới A được chèo bằng hai thanh xiên có cùng độ cứng $E_2 F_2$, dài l_2 .

Tính chuyển vị của điểm A khi lực P di động từ A đến B (hình 13-8Aa).

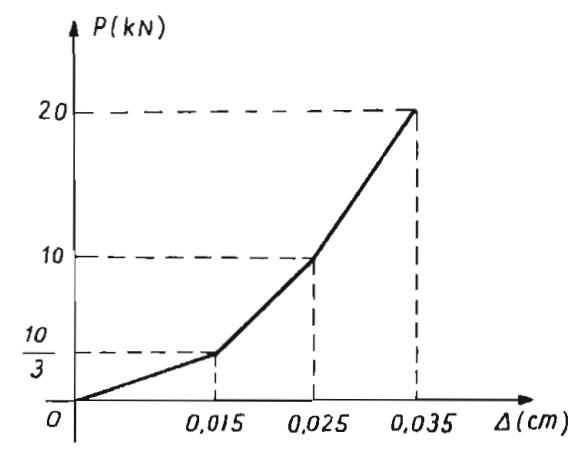
Công thức tính chuyển vị của điểm A sẽ thay đổi như thế nào nếu thay thanh AB bằng hai thanh có độ cứng $E'_1 F'_1$; $E''_1 F''_1$ (hình 13-8Ab).

Bài giải

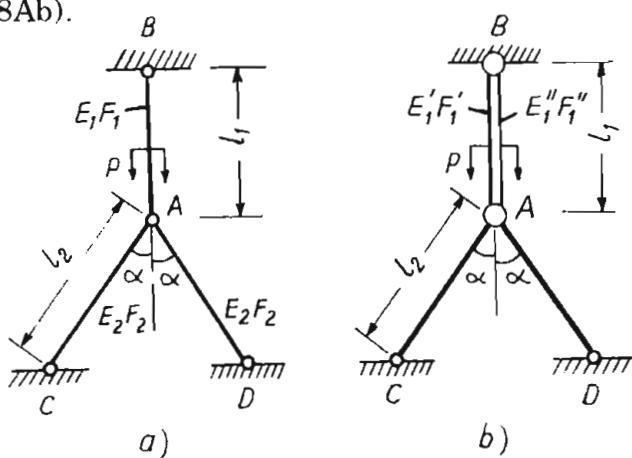
Gọi N_1 là nội lực (nén) ở đầu A của thanh đứng. Tách nút A (hình 13-8B) ta có phương trình cân bằng

$$2N_2 \cos \alpha - N_1 = 0.$$

Đặt Δl_1 là độ biến dạng tuyệt đối của thanh AB và Δl_2 độ biến dạng tuyệt đối của thanh xiên, ta được



Hình 13-7B



Hình 13-8A

$$\Delta l_2 = \Delta l_1 \cos\alpha$$

trong đó :

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 F_2}$$

$$\Delta l_1 = \frac{P(l_1 - x)}{E_1 F_1} \cdot \frac{N_1 l_1}{E_1 F_1}$$

$$\text{Vậy } \frac{N_2 l_2}{E_2 F_2} = \left[\frac{P(l_1 - x)}{E_1 F_1} - \frac{N_1 l_1}{E_1 F_1} \right] \cos\alpha.$$

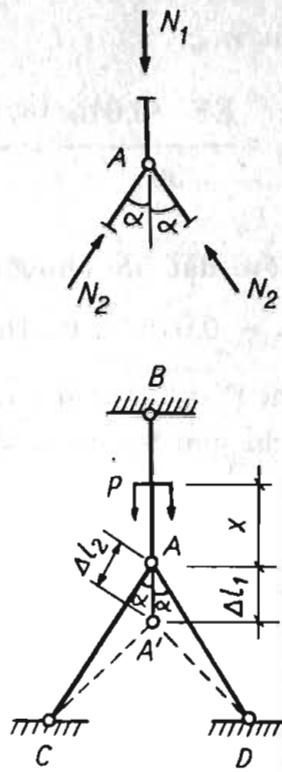
Dựa vào phương trình cân bằng :

$$2. - \frac{E_2 F_2}{l_1} [P(l_1 - x) - N_1 l_1] \cos^2 \alpha - N_1 = 0.$$

Rút ra :

$$l_2 \in E_1 F_1$$

$$N_1 = \frac{\frac{2}{l_2} \cdot \frac{E_2 F_2}{E_1 F_1} P(l_1 - x) \cos^2 \alpha}{1 + \frac{2}{l_2} \frac{E_2 F_2}{E_1 F_1} \cos^2 \alpha}$$



Hình 13-8B

Mang vào Δl_1 , ta sẽ được chuyển vị của điểm A :

$$v_A = \frac{P(l_1 - x)}{E_1 F_1 [1 + 2 \frac{l_1}{l_2} \frac{E_2 F_2}{E_1 F_1} \cos^2 \alpha]}$$

Khi thay thanh AB bằng hai thanh có độ cứng khác nhau, ta phải tìm độ cứng tương đương. Bằng cách so sánh biến dạng, ta được độ cứng tương đương :

$$(EF)_{1d} = E'_{\perp} F'_{\perp} + E''_{\perp} F''_{\perp}.$$

Thực vậy, độ biến dạng tuyệt đối của thanh phải bằng nhau :

$$\frac{N'_1 l_1}{E'_1 F'_1} = \frac{N''_1 l_1}{E''_1 F''_1} = \frac{(N'_1 + N''_1)l_1}{E'_1 F'_1 + E''_1 F''_1} = \frac{N_{td} l_1}{(EF)_{td}}$$

Nhưng

$$N'_1 + N''_1 = N_{td} \text{ (nội lực trong thanh tương đương)}$$

nêñ :

$$E'_1 F'_1 + E''_1 F''_1 = (EF)_{td}.$$

Do đó ta vẫn dùng được công thức tính chuyển vị v_A ở trên nhưng phải thay E_1F_1 bằng $E'_1F'_1 + E''_1F''_1$:

Ví dụ 13-9.

Một bulông bằng thép được lồng vào trong một ống đồng như trong hình 13-9.

Tính ứng suất trong bulông và trong ống đồng khi ta vặn ốc $\frac{1}{4}$ vòng.

Bước ren của bulông là 3 mm. Cho: $E_{thép} = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$, $E_{đồng} = 1 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$

Bài giải

Khi siết ốc thì ống bị nén và bulông bị kéo

$$|\Delta l_{đồng}| + |\Delta l_{th}| = \frac{3}{40} \text{ cm},$$

hay
$$\frac{|N_d| \cdot l}{E_d F_d} + \frac{|N_{th}| \cdot l}{E_{th} F_{th}} = \frac{3}{40} \quad (a)$$

Phương trình cân bằng :

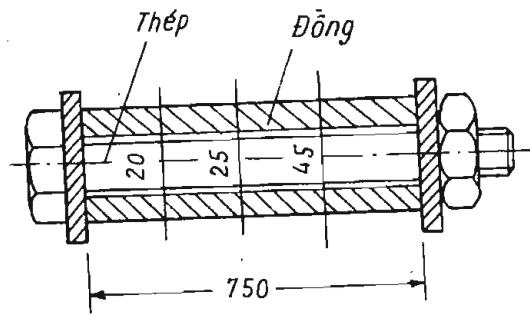
$$|N_d| = |N_{th}|.$$

Mang (b) vào (a) và chú ý rằng:

$$\sigma_d = \frac{N_d}{F_d}$$

ta được $\sigma_d = 3640 \text{ N/cm}^2$ (nén),

và
$$\sigma_{th} = \sigma_d \frac{F_d}{F_{th}} = 12750 \text{ N/cm}^2$$
 (kéo).



Hình 13-9

§13-5. BÀI TẬP

13-1. Cho các thanh chịu lực như trên hình bài 13-1 a, b, c, d, e, f. Vẽ biểu đồ lực dọc, ứng suất và chuyển vị của các mặt cắt ngang.

13-2. Pittông trong xi lanh của một máy ép khí có đường kính $D = 40 \text{ cm}$. Cần pittông bằng thép có đường kính $d = 15 \text{ cm}$ và dài 70 cm . Tính ứng suất và độ biến dạng dài tuyệt đối của cần pittông, biết rằng áp suất khi ép bằng $= 250 \text{ at}$. Môđun đàn hồi $E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$ (hình bài 13-2).

13-3. Một cần cầu gồm một giá chữ A và một cáp giằng nâng một vật nặng $P = 20 \text{ kN}$. Giá chữ A bằng gỗ tròn đường kính $d = 20 \text{ cm}$, dây cáp có diện tích mặt cắt ngang 400 mm^2 . Tính ứng suất pháp trên mặt cắt ngang cột gỗ và dây cáp (hình bài 13-3).

13-4. Tính hệ số an toàn của các thanh thép AB và CD. Thanh AB có mặt cắt ngang tròn đường kính $d = 32 \text{ mm}$. Thanh CD có mặt cắt ngang ghép bởi hai thép góc L $100 \times 100 \times 10$. (hình bài 13-4).

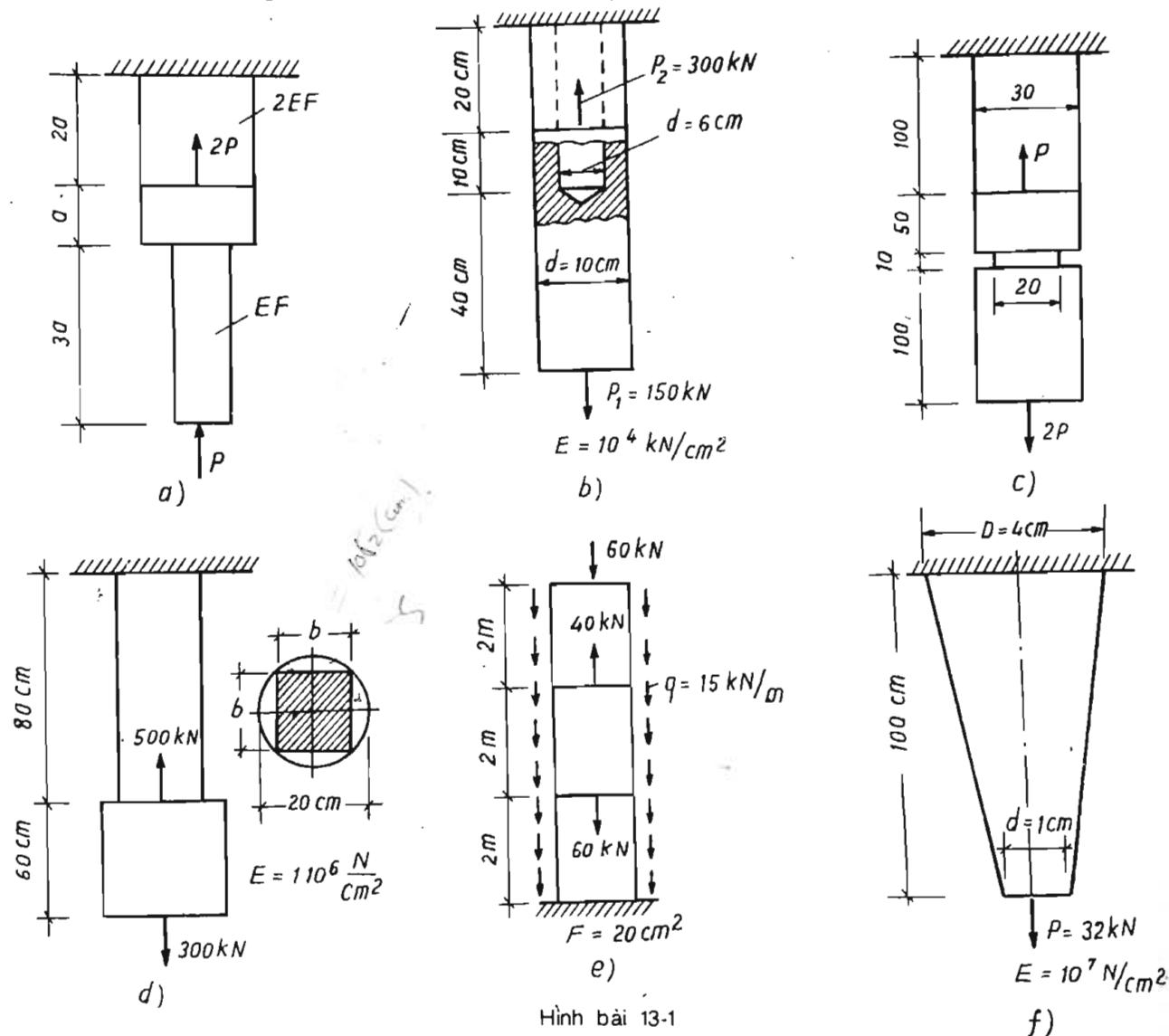
Giới hạn chảy của thép : $\sigma_{ch} = 22 \text{ kN/cm}^2$.

13-5. Người ta nén một mẫu gang cho đến khi vỡ trên một máy ép bằng thủy lực loại 1500 kN. Khi nén mẫu có kích thước 40×40 mm thì cột máy có hệ số an toàn bằng bao nhiêu? (Máy có hai cột tròn đường kính $d = 100$ mm).

Xác định kích thước lớn nhất của mẫu gang (hình vuông) mà máy này có thể nén được. Khi đó hệ số an toàn của cột máy là bao nhiêu ?

Vật liệu của cột máy có giới hạn chảy $\sigma_{ch} = 32 \text{ kN/cm}^2$

Vật liệu của mẫu gang có giới hạn bền : $\sigma_b = 58 \text{ kN/cm}^2$



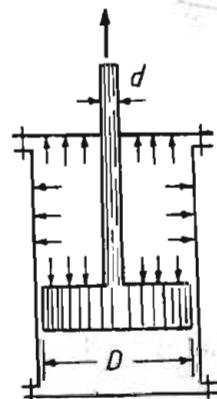
Hình bài 13-1

13-6. Chọn kích thước diện tích F mặt cắt ngang của các bộ phận đàn hồi của hệ trên hình bài 13-6: ở các bài mà dự kiện cho bằng chì thì ứng suất cho phép $[\sigma]$ bằng nhau về kéo và nén đối với tất cả các bộ phận của hệ. Nếu ở bài không cho mô đun đàn hồi E thì coi như đã biết và giống nhau đối với tất cả các thanh. Ở bài (g) (f) lấy $E = 2.10^7 \text{ N/cm}^2$

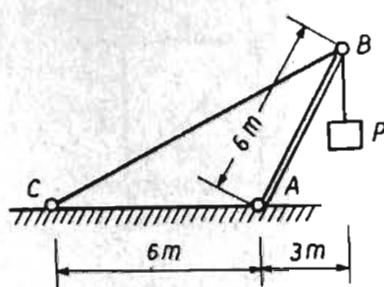
13-7. Xác định kích thước mặt cắt ngang của các thanh 1, 2 3 trên hình bài 13-7.

Đối với các thanh chịu kéo :

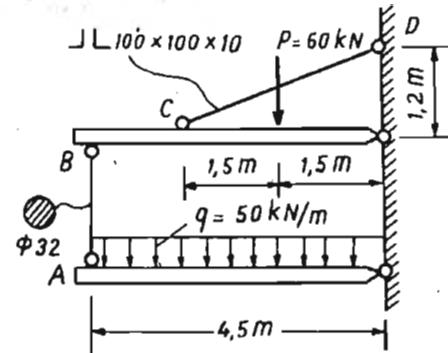
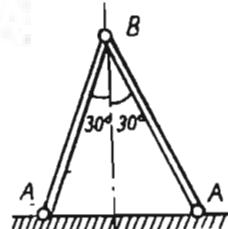
$$[\sigma]_k = 16 \text{ kN/cm}^2$$



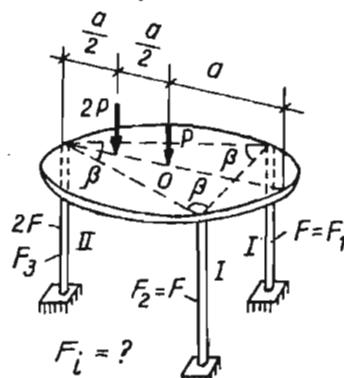
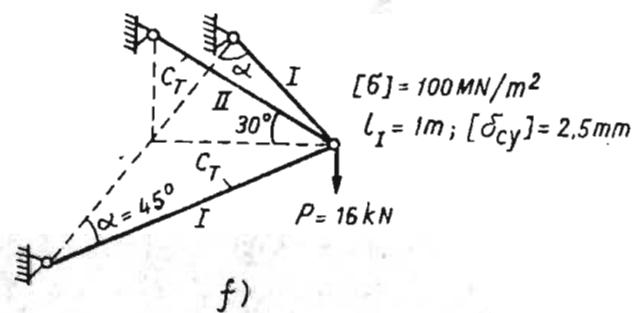
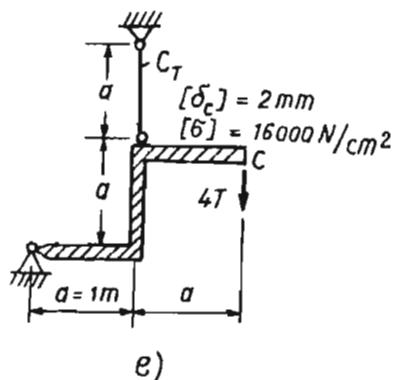
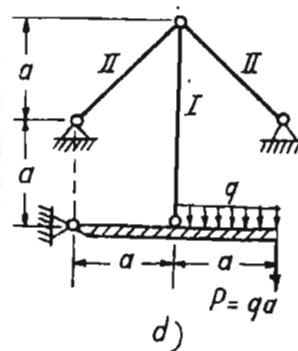
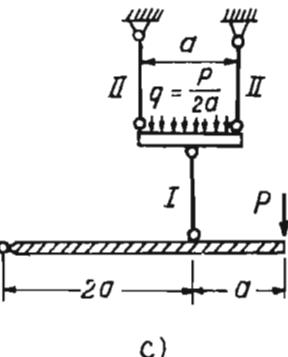
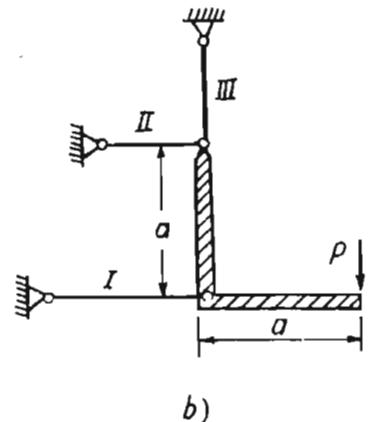
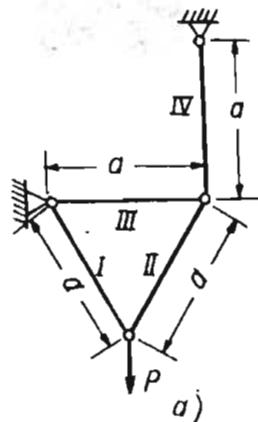
Hình bài 13-2



Hình bài 13-3



Hình bài 13-4



Hình bài 13-6.

Đối với các thanh chịu nén :

$$[\sigma]_n = 10 \text{ kN/cm}^2$$

13-8. Một tấm tròn tuyệt đối cứng đặt trên ba cột song song bố trí như trên hình bài

13-8. Xác định diện tích mặt cắt ngang của các cột. Cột bằng vật liệu có ứng suất cho phép là $[\sigma]$.

13-9. Xác định đường kính d_o của bulông trong hộp an toàn của máy dát, để khi $P = 6.000$ kN thì bulông sẽ bị đứt (xem hình bài 13-9).

Bulông bằng vật liệu có giới hạn bền $\sigma_b = 60$ kN/cm², bỏ qua lực ma sát.

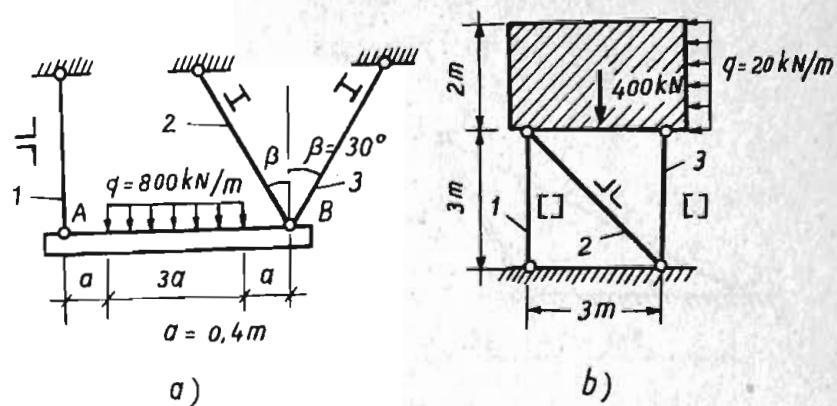
13-10. Trên hình bài 13-10 là một bộ phận nâng hàng loại lớn. Xác định trọng lượng hàng lớn nhất mà bộ phận đó có thể nâng được.

$$\text{Lấy : } [\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2.$$

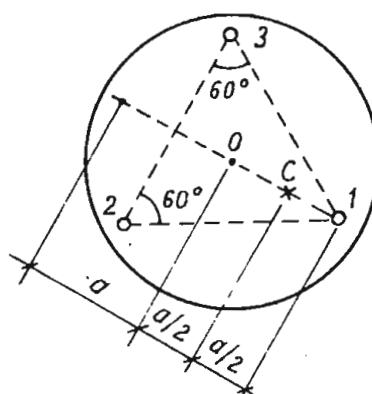
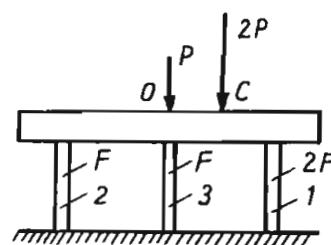
$$d = 40 \text{ mm.}$$

$$h = 3, b = 30 \text{ mm.}$$

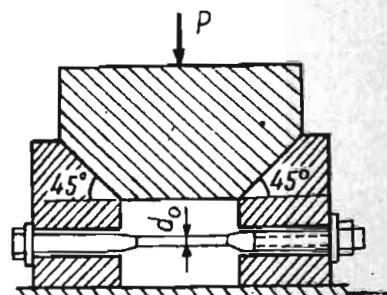
13-11. Người ta ghép đáy hình bán cầu vào thân hình trụ tròn của một thùng chứa nước bằng 8 bulông đường kính $d = 5$ mm. Tính chiều cao h lớn nhất của mức nước. Cho ứng suất cho phép của bulông $[\sigma] = 16$ kN/cm² và trọng lượng riêng của nước $\gamma = 10 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3}$ (xem hình bài 13-11).



Hình bài 13-7



Hình bài 13-8



Hình bài 13-9

13-12. Xác định tải trọng P theo

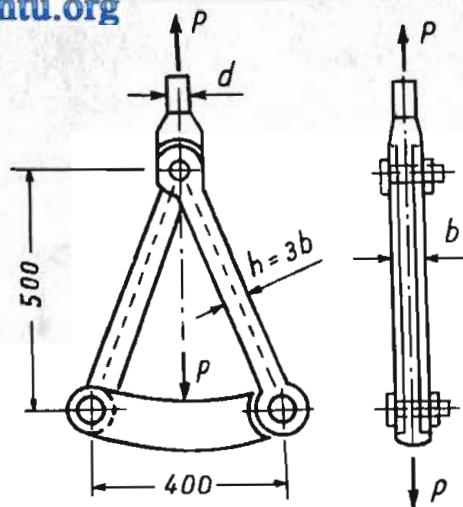
Điều kiện bền của các thanh 1 và 2 (xem hình bài 3-12a)

$$[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2; E = 2.10^4 \text{ kN/cm}^2$$

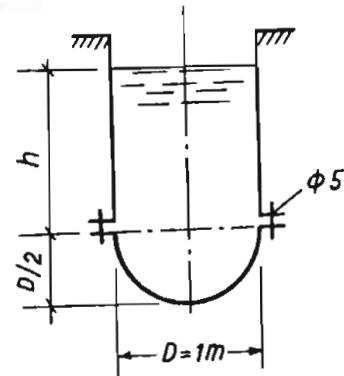
Điều kiện cứng : chuyển vị thẳng đứng của điểm A không vượt quá 1,5 mm. (Đối với bài ở hình bài 13-12b giả thiết thanh AB là tuyệt đối cứng).

13-13. Tính lực cho phép P hoặc những đại lượng chỉ dẫn ở mỗi bài (hình bài 13-13a, b, c).

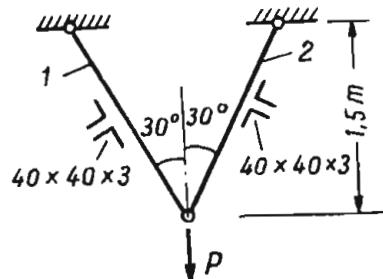
13-14. Tải trọng P chạy trên đầm tuyệt đối cứng AB trong giới hạn từ $x_1 = 0,4$ m đến $x_2 = 4,8$ m (hình bài 13-14). Vẽ đồ thị biểu diễn sự biến thiên của lực dọc trong các thanh treo theo X .



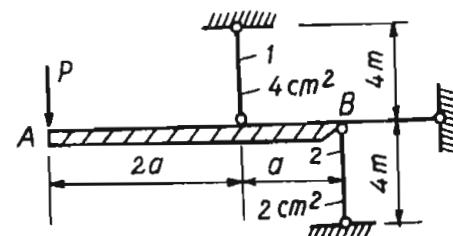
Hình bài 13-10



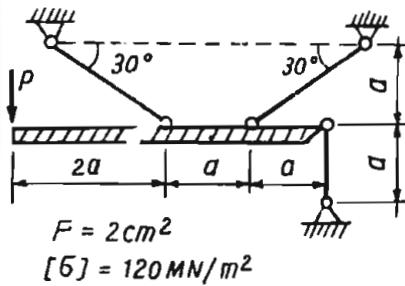
Hình bài 13-11



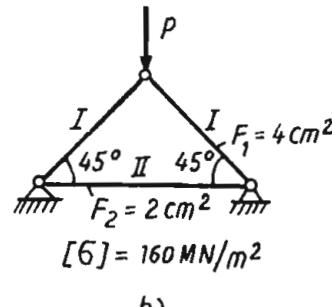
Hình bài 13-12a



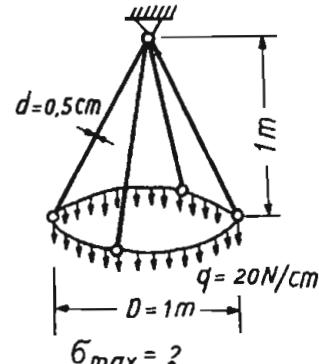
Hình bài 13-12b



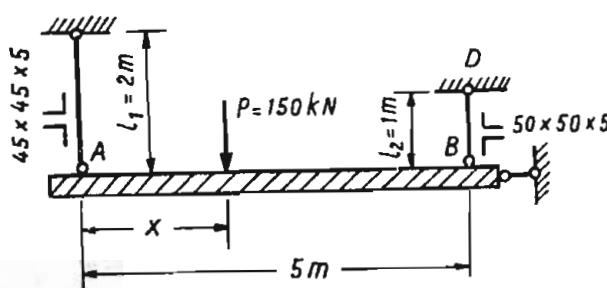
a)



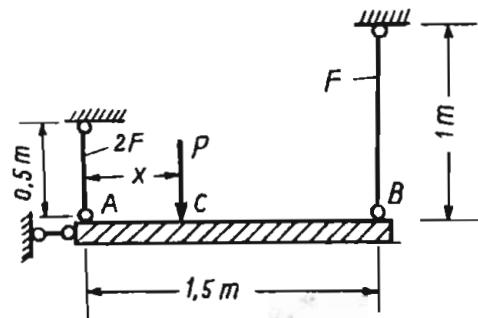
Hình bài 13-13b



c)



Hình bài 13-14



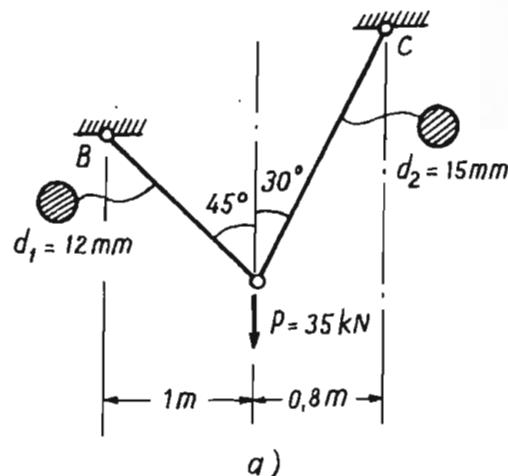
Hình bài 13-15

Tính góc xiên của dầm AB so với đường ngang khi tải trọng P ở giữa nhịp. Xác định vị trí của tải trọng P sao cho dầm AB vẫn nằm ngang. $E = 2.10^4 \text{ kN/cm}^2$

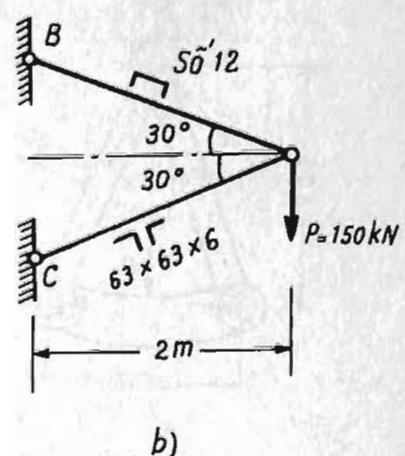
13-15. Thanh tuyệt đối cứng AB được treo bằng hai thanh cùng vật liệu có diện tích và

chiều dài khác nhau (xem hình bài 13-15). Tính vị trí đặt lực P để cho thanh AB vẫn giữ nằm ngang khi các thanh treo biến dạng.

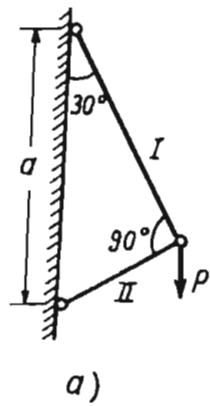
13-16. Tính chuyển vị thẳng đứng V_A của khớp A . Các thanh đều bằng thép : $E_{th} = 2 \cdot 10^4$ kN/cm² Kích thước cho trên hình bài 13-16 a, b.



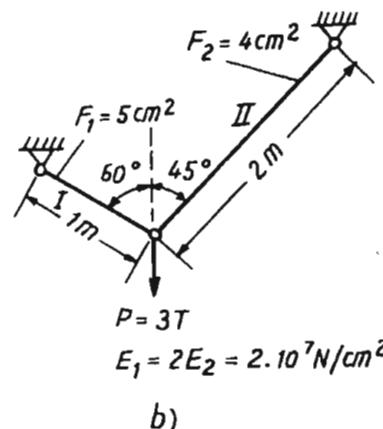
Hình bài 13-16



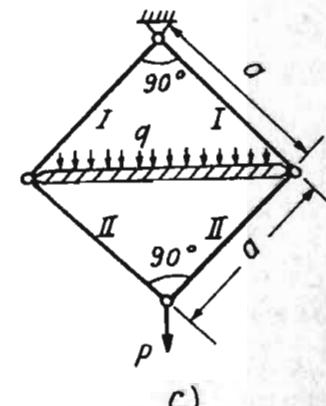
b)



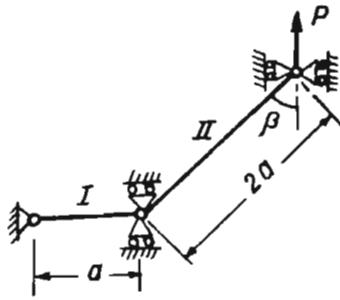
a)



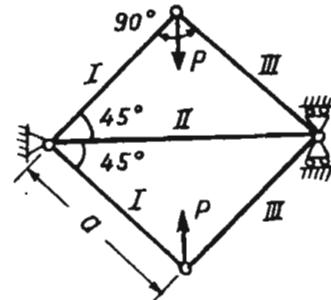
b)



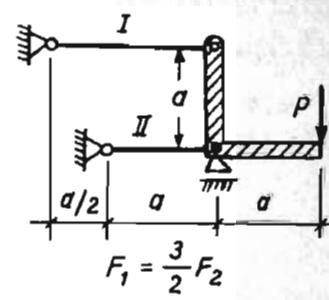
c)



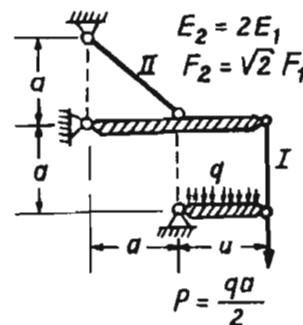
d)



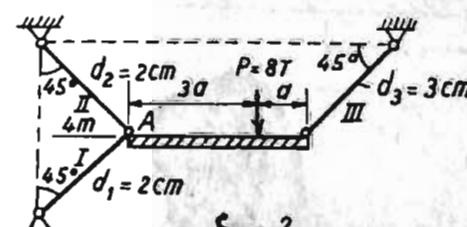
e)



f)



g)



$$\delta_A = ?$$

Hình bài 13-17.

ghi trên hình vẽ bài 13-17) và ứng suất trên mặt cắt ngang các thanh.

Trong những bài chỉ có đề chữ, không cho giá trị của E và F thì coi các thanh đều có E và F như nhau. Đối với bài 13-17h lấy $E = 2.10^7 \text{ N/cm}^2$.

13-18. Người ta dùng tenxômet đòn có chuẩn đo 50 mm và hệ số khuếch đại $K = 1.000$ để xác định môđun đàn hồi E của thép, đồng, dura. Kết quả thí nghiệm được ghi trong bảng sau :

Mẫu bằng thép		Mẫu bằng đồng		Mẫu bằng dura	
Lực kéo P(N)	Số đọc trên Tenxômet	Lực kéo P(N)	Số đọc trên Tenxômet	Lực kéo P(N)	Số đọc trên Tenxômet
2000	0	2500	0	1250	0
7000	16	5000	16	2500	11,5
12000	31,5	7500	31,5	3750	22,5
17000	48	10000	48	5000	34,5

Mẫu hình trụ tròn đường kính $d = 10 \text{ mm}$. Hãy tính ra môđun đàn hồi của các vật liệu trên.

13-19. Nếu kéo một thanh thép tròn có chiều dài 3 m, đường kính 1,6 mm bởi lực P thì nó sẽ dãn 1,3 mm. Nhưng nếu kéo một thanh đồng có chiều dài 1,8 m, đường kính 3,2 mm cũng bởi lực P đó thì thanh này sẽ dãn ra là 0,39 mm. Tính môđun đàn hồi của thanh đồng biết môđun đàn hồi của thanh thép là 2.10^7 N/cm^2

13-20. Để xác định hệ số Poatxông μ của vật liệu, người ta kẹp hai tenxômet đòn vào mẫu thử như trên hình bài 13-20. Cả hai tenxômet đòn đều có chuẩn đo $l = 20 \text{ mm}$ và hệ số khuếch đại $K = 1000$. Hãy tính hệ số theo kết quả được ghi trong bảng sau

Lực kéo P(N)	Số đo trên Tenxômet A	Số đo trên Tenxômet B
5000	5	13,5
15000	17	9,5
25000	28,5	5,5
35000	41	2

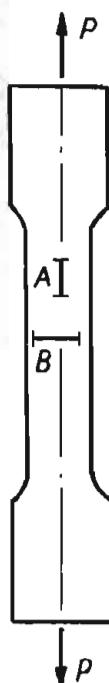
13-21. Vẽ biểu đồ lực dọc, ứng suất và chuyển vị các thanh chịu lực như trên hình bài 13-21. Biết $E = 2.10^4 \text{ kN/cm}^2$.

13-22. Một cái móc treo trọng lượng 42 kN như trên hình bài 13-22. Thanh treo ở giữa bằng thép, có mặt cắt ngang hình chữ nhật kích thước $0,5 \text{ cm} \times 2 \text{ cm}$. Các thanh bên bằng dura, có mặt cắt ngang hình chữ nhật kích thước $1,5 \text{ cm} \times 2 \text{ cm}$.

Xác định ứng suất và biến dạng của các thanh treo.

Cho : $E_{th} = 2.10^4 \text{ kN/cm}^2$, $E_{dura} = 0,7.10^4 \text{ kN/cm}^2$

13-23. Dầm tuyệt đối cứng được giữ bởi các thanh treo bằng thép có giới hạn chảy $\sigma_{ch} = 24 \text{ kN/cm}^2$ (hình bài 13-23). Xác định giá trị cho phép của tải trọng tác dụng lên



Hình bài 13-20

dầm. Hệ số an toàn $n = 1,6$ módun đàn hồi của thép : $E = 2.10^4 \text{ kN/cm}^2$

13-24. Tính nội lực trong các thanh vẽ trên bài 13-24.

Độ cứng EF của các thanh giống nhau.

13-25. Xác định tải trọng $P_2 = 40 \text{ kN}$ cho phép [P] theo điều kiện bền của các thanh treo : $P_3 = 30 \text{ kN}$.

$[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$. Giả thiết dầm AB là tuyệt đối cứng, các thanh treo được làm cùng một loại thép (xem hình bài 12-25).

13-26. Có kết cấu chịu lực P như trên hình bài 13-26. Tính chuyển vị V_A của điểm A.

13-27. Một thanh gãy khúc coi như cứng tuyệt đối đặt trên gối A và được giữ bằng ba thanh CD, BE, BF cùng diện tích mặt cắt ngang F và cùng vật liệu. Tính nội lực ở các thanh này khi hệ thống chịu tác dụng của lực P.

13-28. Vẽ biểu đồ lực dọc, ứng suất và chuyển vị của các mặt cắt dọc theo trục thanh chịu lực như trên hình bài 13-28.

13-29. Một tấm tuyệt đối cứng được đặt trên bốn cột cùng diện tích, cùng chiều dài và cùng bằng một loại vật liệu (hình bài 13-29a).

Tính phản lực trong các cột đối với hai trường hợp đặt lực (hình 13-29b)

a) Lực P đặt ở điểm A trên đường nối hai cột 3 và 1.

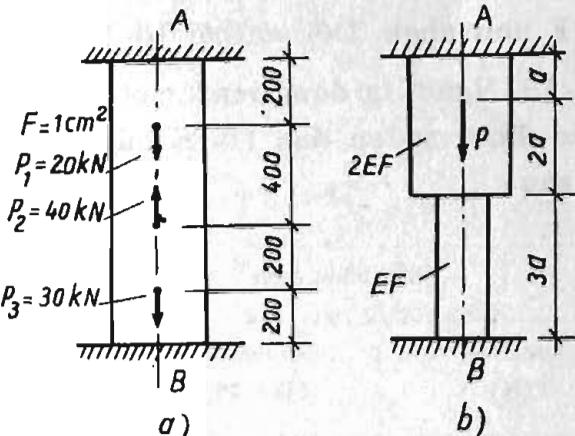
b) Lực P đặt ở điểm B.

13-30. Tính ứng suất pháp tại các dây treo I, II trong các hình bài 13-30.

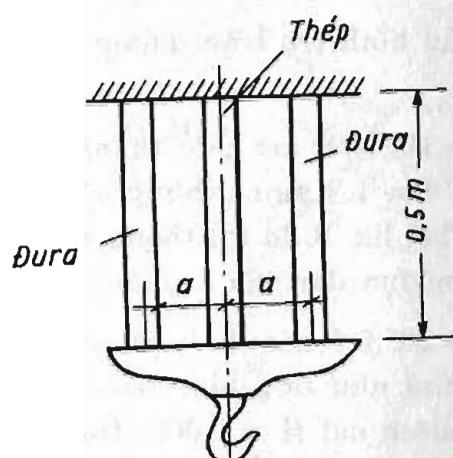
13-31. Xác định kích thước của mặt cắt ngang. Biết

$[\sigma]_{th} = 16 \text{ kN/cm}^2$, $[\sigma]_d = 6 \text{ kN/cm}^2$, $[\sigma]_{nh} = 8 \text{ kN/cm}^2$.

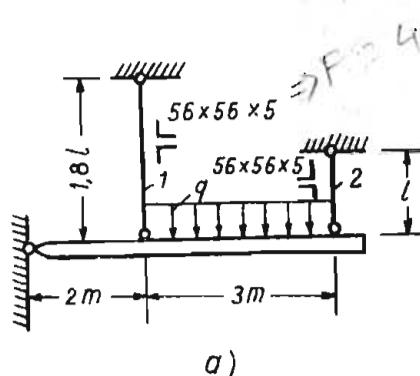
$E_{th} = 2.10^4 \text{ kN/cm}^2$, $E_d = 1.10^4 \text{ kN/cm}^2$, $E_{nh} = 0,7.10^4 \text{ kN/cm}^2$ (hình bài 13-31)



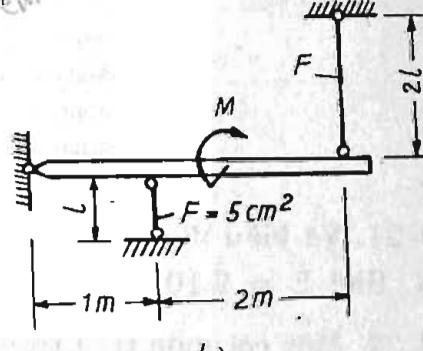
Hình bài 13-21



Hình bài 13-22



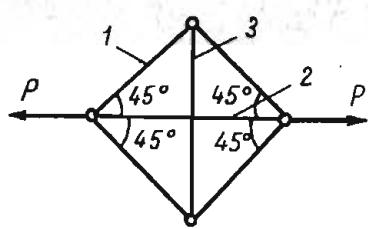
a)



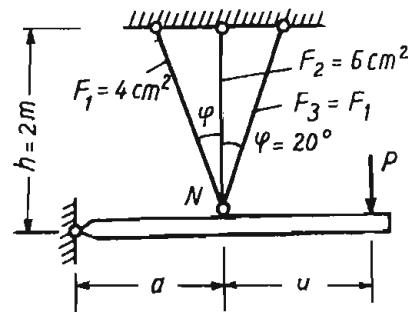
b)

Hình bài 13-23

13-32. Một bulông bằng thép dùng để giữ hai ống thép và đồng. Tính lực P cho phép tác dụng vào bulông để ứng suất trong đó không vượt quá $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$. Lực kéo trước N_o trong bulông được chọn sao cho khi lực P cho phép tác dụng trước N_o (xem hình bài 13-32).



Hình bài 13-24



Hình bài 13-25

13-33. Lực $P=2000 \text{ N}$ và lực gió có cường độ $q=300 \text{ N/m}$. Tính diện tích dây giằng biết rằng ứng suất cho phép $[\sigma] = 35 \text{ kN/cm}^2$

$$E = 1,6 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$$

Tính chuyển vị nằm

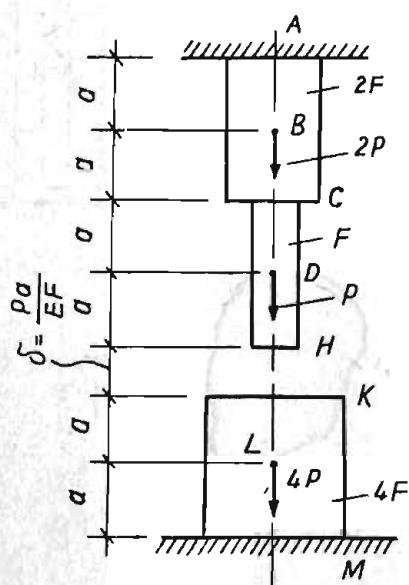
ngang của đầu cột. Chú ý rằng dây cáp chỉ chịu được kéo (hình bài 13-33).

13-34. Vẽ biểu đồ lực dọc, ứng suất và chuyển vị trong các thanh chịu lực như trên hình bài 13-34. $E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$.

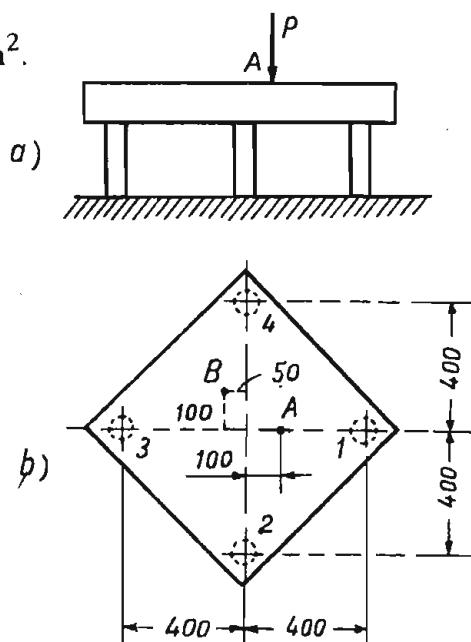
13-35. Một thanh đồng có diện tích mặt cắt ngang bằng 20 cm^2 và có chiều dài trước khi chịu lực là $20,002 \text{ cm}$. Thanh đồng này được lồng vào một ống thép cùng diện tích mặt cắt ngang và có chiều dài trước khi chịu lực là 20 cm .

Tải trọng P tác dụng vào thanh đồng thông qua một tấm đệm tuyệt đối cứng. Tải trọng P phải bằng bao nhiêu để ứng suất trong thanh đồng và ống thép bằng nhau (xem hình bài 13-35)..

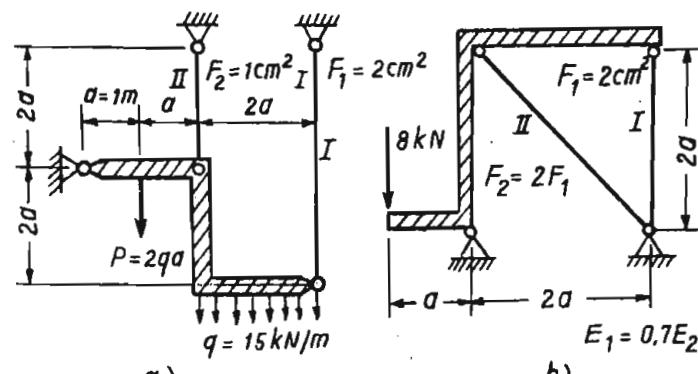
$$E_d = 1 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2; E_{th} = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2.$$



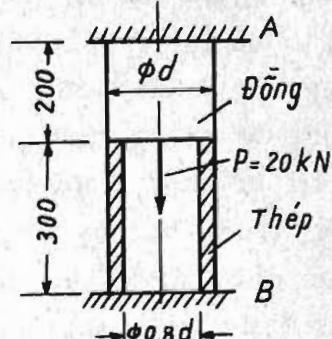
Hình bài 13-28



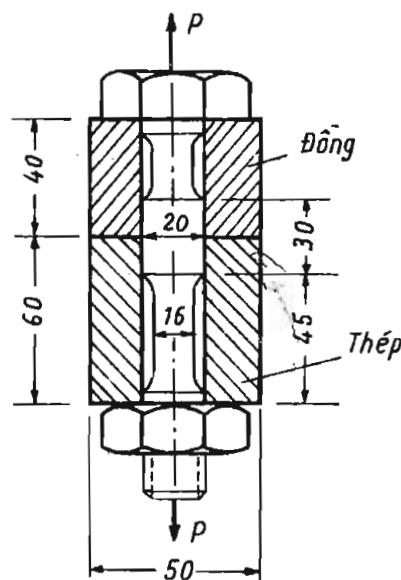
Hình bài 13-29



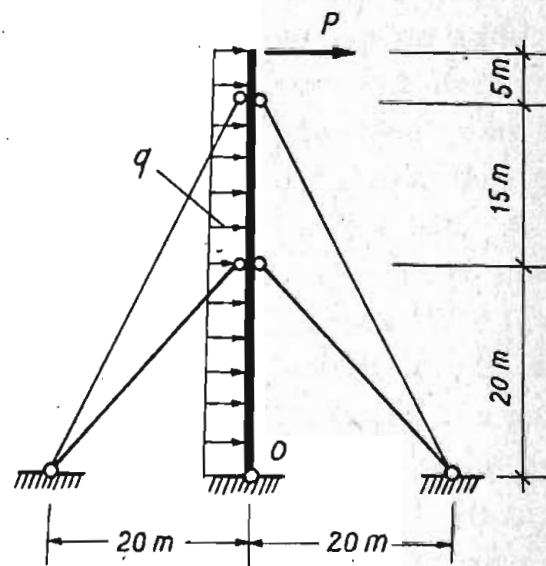
Hình bài 13-30



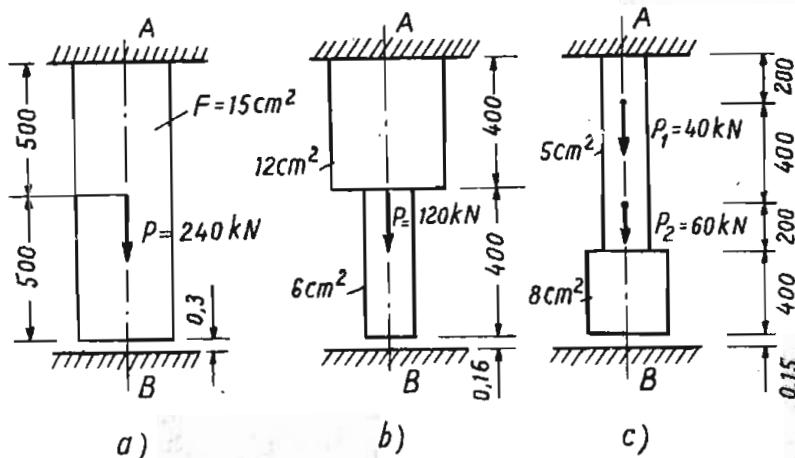
Hình bài 13-31



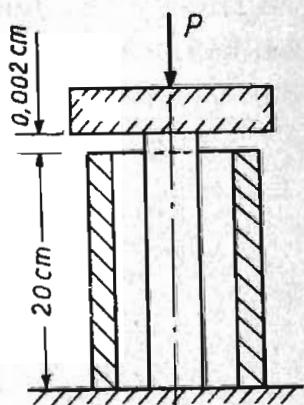
Hình bài 13-32.



Hình bài 13-33



Hình bài 13-34



Hình bài 13-35

Chương 14

XOẮN THUẦN TÚY THANH THẲNG

§14-1. MÔMEN XOẮN

Một thanh gọi là chịu xoắn thuần túy khi trên mặt cắt ngang của thanh chỉ có một thành phần nội lực là mômen xoắn M_z . Mômen xoắn tại một mặt cắt bất kì được xác định bằng phương pháp mặt cắt. Công thức tổng quát xác định giá trị mômen xoắn tại một mặt cắt ngang như sau

$$M_z = \sum M + \sum \int m_z dz \quad (14-1)$$

Tích phân tính trên chiều dài của đoạn thẳng có mômen phân bố m_z tác dụng và tổng tính với tất cả các đoạn thanh cùng nằm về một phía của mặt cắt đang xét. Chiều của mômen xoắn nội lực M_z được xem là dương, nếu từ ngoài nhìn vào mặt cắt, mômen quay thuận với chiều kim đồng hồ.

Giữa mômen ngoại lực M , tốc độ vòng quay n và công suất N có quan hệ sau

$$\begin{aligned} N & \text{ tính bằng mã lực:} & M &= 716200 \frac{N}{n} \\ N & \text{ tính bằng kW:} & M &= 973600 \frac{N}{n} \end{aligned} \quad (14-2)$$

Khi đó : M tính bằng $N \text{ cm}$; $n = (\text{vòng/phút})$

Trong hệ đơn vị quốc tế SI ta có : M tính bằng N.m , tốc độ quay ω tính bằng Rad/sec , công suất N tính bằng Watt, ta có quan hệ

$$M = \frac{N}{\omega} \quad (14-3)$$

Vì mômen xoắn tỉ lệ với công suất nên đối với trực quay có tốc độ đều truyền công suất cho các máy hoạt động ta có thể thay cách vẽ biểu đồ mômen xoắn bằng cách vẽ biểu đồ công suất.

§14-2. ỨNG SUẤT TIẾP, GÓC XOẮN

Đối với thanh mặt cắt ngang tròn, trên mặt cắt ngang ứng suất pháp bằng không, ứng suất tiếp tại điểm trên mặt cắt cách tâm một khoảng cách p . Xác định bởi công thức:

$$\sigma_p = \frac{M_z}{I_p} \cdot p \quad (N/m) \quad (14-4)$$

Trong đó $I_p = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1d^4$ - mômen quán tính độc cực của mặt cắt ngang.

d - đường kính đường tròn.

R - bán kính đường tròn.

Ứng suất tiếp lớn nhất (τ_{max}) xảy ra ở các điểm trên chu vi vòng tròn và có giá trị.

$$\tau_{max} = \frac{M_z}{W_p} \quad (14-5)$$

trong đó

$$W_p = \frac{I_p}{R} = \frac{\pi R^3}{2} = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3 \quad \text{mômen chống xoắn của mặt cắt ngang.}$$

Đối với mặt cắt ngang hình vành khăn

$$I_p = \frac{\pi R^4}{2} (1 - \eta^4) = \frac{\pi d_n^4}{32} (1 - \eta^4) \approx 0,1d_n^4(1 - \eta^4)$$

$$W_p = \frac{\pi d_n^3}{16} (1 - \eta^4) \approx 0,2d_n^3(1 - \eta^4)$$

trong đó

$$\eta = \frac{d_i}{d_n}; \quad d_i \quad \text{đường kính trong.}$$

d_n đường kính ngoài.

Góc xoắn tương đối giữa hai mặt cắt ngang được tính theo công thức

$$\varphi = \int \frac{M_z}{GI_p} dz \quad (\text{rad}) \quad (14-6)$$

Trong đó :

M_z - mômen xoắn là hàm của tọa độ theo trục thanh $M_z(Z)$.

I_p - mômen quán tính độc cực của mặt cắt ngang.

$$I_p = \frac{\pi R^4}{2} = 0,1d^4$$

G - mô đun đàn hồi khi trượt.

l - chiều dài giữa hai mặt cắt - chiều dài thanh.

Nếu trên suốt chiều dài l của thanh M_z , G, I_p là hằng số thì

$$\varphi = \frac{M_z \cdot l}{G \cdot I_p} \quad (14-7)$$

tích số $G \cdot I_p$ được gọi là độ cứng của thanh chịu xoắn.

Trường hợp thanh có nhiều đoạn có tính chất trên thì ta chia thanh ra làm nhiều đoạn và công thức có dạng

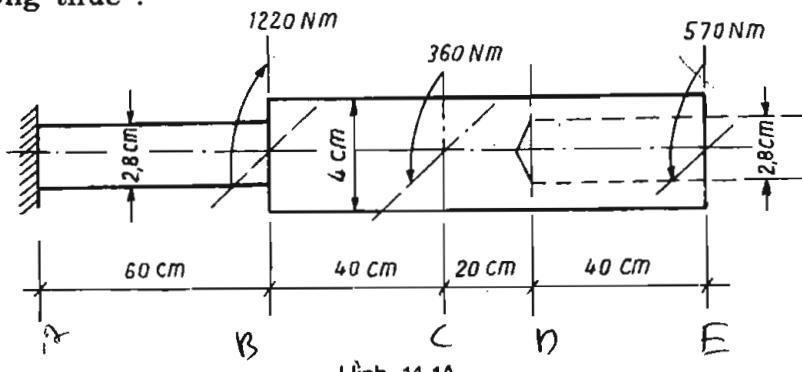
$$\varphi = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \frac{M_{zi}}{G \cdot I_p} dz \text{ hoặc } \varphi = \sum_{i=1}^n \frac{M_{zi} \cdot l_i}{G \cdot I_p} \quad (14-8)$$

Góc xoắn tỉ đối được tính theo công thức :

$$\theta = \frac{M_z}{G \cdot I_p} \quad (14-9)$$

Ví dụ 14-1. Tính ứng suất tiếp lớn nhất ở các mặt cắt và góc xoắn tại đầu tự do của thanh.

Cho $G = 8 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2$ (hình 14-1A)



Hình 14-1A

Bài giải (hình 14-1B).

$$\tau_{\max(AB)} = \frac{M_{z(AB)}}{W_{p(AB)}} = \frac{29000}{0,2 \cdot 2,8^3} = 6600 \text{ N/cm}^2$$

$$\tau_{\max(BD)} = \frac{M_{z(BD)}}{W_{p(BD)}} = \frac{93000}{0,2 \cdot 4^3} = 7260 \text{ N/cm}^2$$

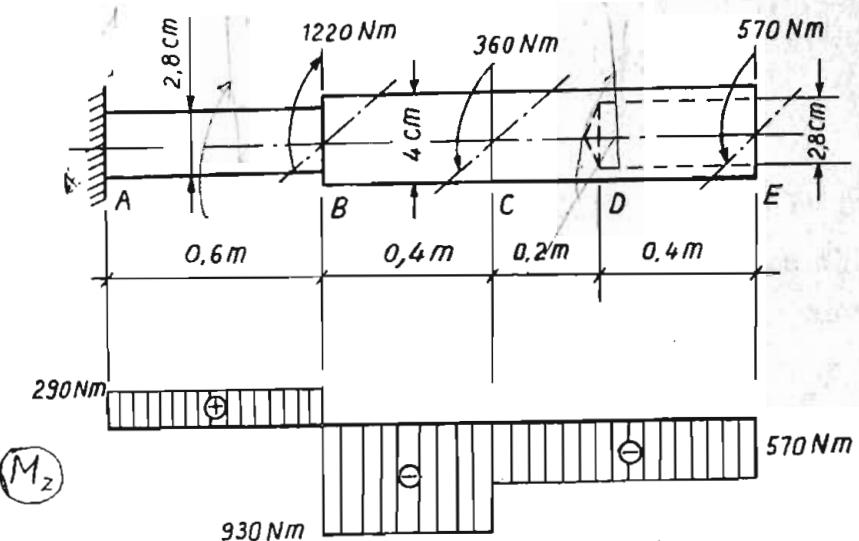
$$\tau_{\max(DE)} = \frac{M_{z(DE)}}{W_{p(DE)}} = \frac{57000}{0,2 \cdot 4^3 [1 - (\frac{2,8}{4})^4]} = 5860 \text{ N/cm}^2$$

Tính góc xoắn

$$\varphi_E = \varphi_{AB} + \varphi_{BC} + \varphi_{CD} + \varphi_{DE} = \sum \frac{M_z \cdot l_i}{G \cdot J_p}$$

$$= \frac{29000 \cdot 60}{8 \cdot 10^6 \cdot 0,1 \cdot 2,8^4} - \frac{93000 \cdot 40}{8 \cdot 10^6 \cdot 0,1 \cdot 4^4} - \frac{57000 \cdot 20}{8 \cdot 10^6 \cdot 0,1 \cdot 4^4}$$

$$= \frac{57000 \cdot 40}{8 \cdot 10^6 \cdot 0,1 \cdot 4^4 [1 - (\frac{2,8}{4})^4]} = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$



Hình 14-1B

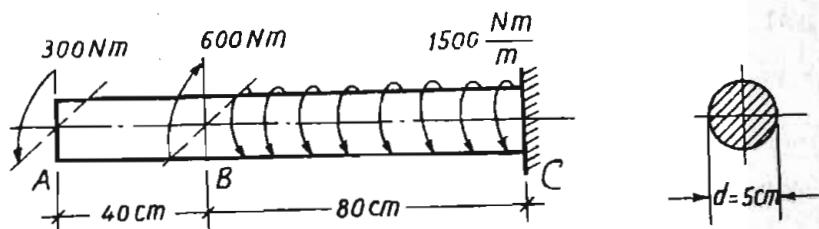
Ví dụ 14-2. Tính ứng suất tiếp lớn nhất và góc xoắn tại các mặt cắt A và B của thanh.

Cho $G = 8 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2$ (hình 14-2A).

Bài giải (hình 14-2B)

Ứng suất cực đại .

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{z\max}}{W_p} = \frac{90000}{0.2 \cdot 5^3} = \\ = 3600 \text{ N/cm}^2.$$



Hình 14-2A

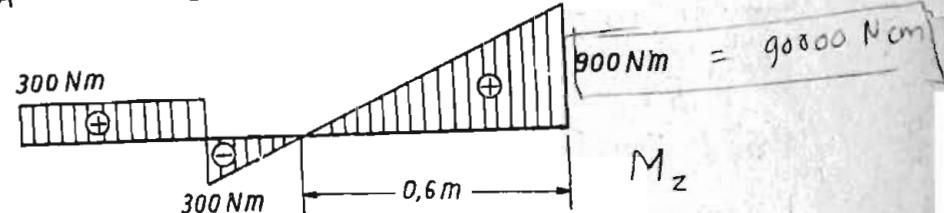
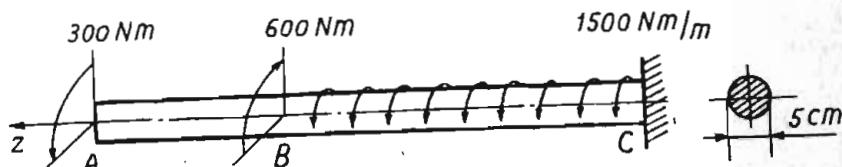
Góc xoắn của mặt cắt B so

với ngàm C :

$$\varphi_B = \int_0^{80} \frac{M_{z(CB)} dz}{G I_p} \quad (a)$$

trong đó

$$M_{z(CB)} = M_c \left(1 - \frac{z}{60}\right) = \\ = 900 \left(1 - \frac{z}{60}\right)$$



Hình 14-2B

Thay vào (a), ta được .

$$\varphi_B = \int_0^{80} \frac{90000 \left(1 - \frac{z}{60}\right)}{8 \cdot 10^6 \cdot 0.1 \cdot 5^4} dz = \frac{90000}{8 \cdot 10^6 \cdot 0.1 \cdot 5^4} \left(80 - \frac{80^2}{2 \cdot 60}\right) = 4.8 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

Góc xoắn của mặt cắt A :

$$\varphi_A = \varphi_B + \varphi_{BA} = \varphi_B + \frac{M_{z(BA)} \cdot l_{BA}}{GJ_p}$$

$$\varphi_A = 4,8 \cdot 10^{-3} + \frac{30000.40}{8.10^6.0.1.5^4} = 7,2 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

§14-3. TÍNH TOÁN ĐIỀU KIỆN BỀN VÀ ĐIỀU KIỆN CỨNG

Điểm nguy hiểm là điểm có ứng suất tiếp lớn nhất. Trạng thái ứng suất của điểm này là trượt thuận túy. Do đó điều kiện bền có dạng

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p} \leq [\tau] \quad (14-10)$$

Trong đó . $[\tau]$ ứng suất tiếp cho phép

Với vật liệu dẻo $[\tau] = \frac{\tau_{ch}}{n}$

Với vật liệu giòn $[\tau] = \frac{\tau_B}{n}$

Trong đó:

τ_{ch} giới hạn chảy khi xoắn ;

τ_B giới hạn bền khi xoắn.

Điều kiện cứng có dạng

$$\theta = \frac{M_z}{GI_p} \leq [\theta] \quad (14-11)$$

$[\theta]$ góc xoắn tỉ đối cho phép, có thứ nguyên là rad/chiều dài.

Nếu cho góc xoắn tỉ đối có thứ nguyên . độ/chiều dài thì ta phải đổi thành radian theo công thức

$$[\theta]^{\text{rad/chiều dài}} = [\theta]^{\text{độ/chiều dài}} \cdot \frac{\pi}{180} \quad (14-12)$$

Từ công thức (14-10) (14-11) ta suy ra ba bài toán cơ bản sau

Kiểm tra bền và kiểm tra điều kiện cứng theo (14-10) (14-11).

Tìm tải trọng cho phép theo điều kiện bền và điều kiện cứng:

$$M_z \leq W_p [\tau] \quad (14-13Q)$$

$$M_z \leq G \cdot I_p \cdot [\theta] \quad (14 - 13b)$$

So sánh hai giá trị chọn giá trị mômen xoắn bé hơn.

Chọn kích thước mặt cắt ngang

$$\left. \begin{aligned} W_p &\geq \frac{M_z}{[\tau]} \\ I_p &\geq \frac{M_z}{G[\theta]} \end{aligned} \right\} \quad (14-14)$$

So sánh kích thước chọn được do hai bất đẳng thức trên ta lấy giá trị lớn hơn.

Khi tính trị số M_z được lấy ở mặt cắt nguy hiểm. Ví dụ với thanh có mặt cắt không đổi là trị số M_{zmax} .

Ví dụ 14-3. Để xác định công suất của một tuabin hơi nước, người ta đo góc xoắn của trục trên một đoạn chiều dài 5m. Đường kính của trục bằng 25 cm và đường kính trong bằng 17 cm. Vận tốc quay $n = 250$ v/phút, $G = 8 \cdot 10^6$ N/cm².

Xác định công suất của tuabin, biết góc xoắn đo được là 1° . Tính ứng suất lớn nhất trên mặt cắt ngang.

Bài giải.

Từ $M = 974000 \frac{W}{n}$ rút ra $W = \frac{M \cdot n}{974000}$

Từ $\varphi = \frac{M_z \cdot l}{GJ_p}$ rút ra $M_z = \frac{\varphi G J_p}{l}$

Vậy $W = \frac{\varphi G J_p n}{974000 l}$

Ta tính được góc xoắn $\varphi = \frac{\pi}{180} \cdot 1 = 0,0175$ rad.

và mômen quán tính cực: $J_p = 0,1 \cdot D^4 (1 - \alpha^4) =$

$$= 0,1 \cdot 25^4 \left[1 - \left(\frac{17}{25} \right)^4 \right] = 30700 \text{ cm}^4$$

Thay vào biểu thức của W, được.

$$W = \frac{0,01745 \cdot 8 \cdot 10^6 \cdot 30700 \cdot 250}{974000 \cdot 500} = 2200 \text{ kW}$$

và $\tau_{max} = \frac{M_z}{W_p} = \frac{974000 \cdot 2200}{0,2 \cdot 25^3 \left[1 - \left(\frac{17}{25} \right)^4 \right] \cdot 250} = 3500 \text{ N/cm}^2$

Ví dụ 14-4.

Xác định công suất trục nhận được và ứng suất tiếp lớn nhất trên mặt cắt ngang của nó, nếu bằng tenxômet điện ta đo được biến dạng của tấm điện trở dán theo phương AB là: $\epsilon = 4,25 \cdot 10^{-4}$. Biết số vòng quay của trục trong một phút là 120; $G = 8 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2$; $\alpha = \frac{d}{D} = 0,6$; $D = 40 \text{ cm}$ (hình 14-3).

Bài giải

Vì $\sigma = \tau$ nên ta có trạng thái ứng suất phẳng (trượt thuận túy)

$$= \frac{1}{E} \tau(1 + \mu),$$

hay $\tau = \frac{\epsilon E}{(1 + \mu)} = 2\epsilon G$.

Mặt khác $= \frac{M_z}{W_p} = \frac{974000 \text{ W}}{n \cdot 0,2D^3(1 - \alpha^4)}$

Vậy $2\epsilon G = \frac{974000 \text{ W}}{0,2D^3(1 - \alpha^4)n}$

hay $W = \frac{2 \cdot 4,25 \cdot 10^{-4} \cdot 8 \cdot 10^6 \cdot 0,2 \cdot 40^3 (1 - 0,6^4) \cdot 120}{974000} = 9325 \text{ kW}$

$$\sigma_{\max} = 2\epsilon G = 2 \cdot 4,25 \cdot 10^{-4} \cdot 8 \cdot 10^6 = 6800 \text{ N/cm}^2$$

Ví dụ 14-5. Một trục gồm nhiều đoạn được nối với nhau như hình 14-4. Trục chịu momen xoắn $M_z = 500 \text{ Nm}$. Kiểm tra độ bền của trục, khớp và chẽm, biết

$$[\tau]_{tr} = 4 \cdot 10^3 \text{ N/cm}^2; [\tau]_{kh} = 2,5 \cdot 10^3 \text{ N/cm}^2;$$

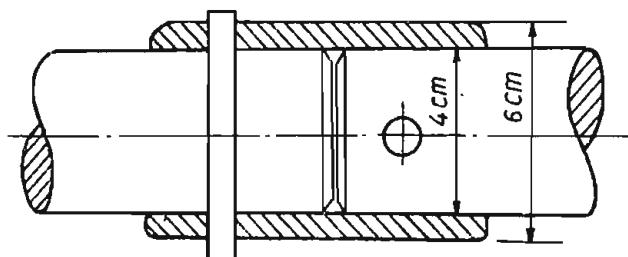
$$[\tau]_{ch} = 9 \cdot 10^3 \text{ N/cm}^2.$$

(Khi tính chẽm lấy đường kính $d = 1,3 \text{ cm}$).

Bài giải

Ở trục.

$$\tau_{\max}^{tr} = \frac{M_z}{W_p} = \frac{50000}{0,2 \cdot 4^3} = 3906 \text{ N/cm}^2 < [\tau]_{tr}$$



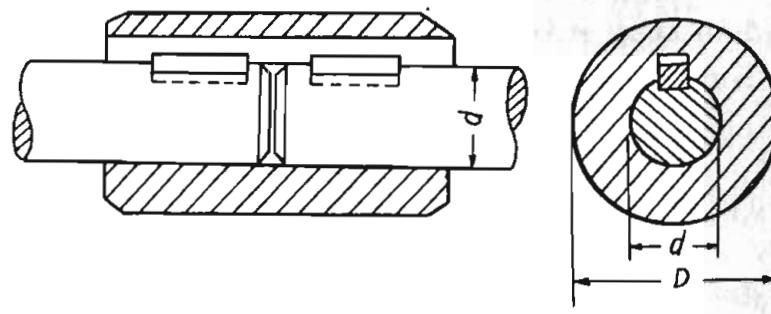
Hình 14-4

Ở khớp:

$$\tau_{\max}^{tr} = \frac{M_z}{W_p} = \frac{50000}{0,2 \cdot 6^3 \left(1 - \frac{4^4}{6^4}\right)} = 1440 \text{ N/cm}^2 < [\tau]_{kh}$$

Giả thiết bỏ qua lực ma sát giữa trục và khớp thì chêm phải chuyển toàn bộ mômen từ đoạn này sang đoạn kia. Ta có quan hệ

$$M = i_{ch} \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot 4$$



Hình 14-5

Từ đó rút ra .

$$i_{ch} = \frac{M_z}{\pi d^2} = \frac{50000}{3,14 \cdot (1,3)^2} = 9415 \text{ N/cm}^2$$

Ứng suất tiếp ở chêm vượt quá ứng suất cho phép :

$$\frac{\tau}{[\tau]_{ch}} = \frac{9415 - 90000}{9000} \cdot 100 = 4,6\% < 5\%$$

Ví dụ 14-6 Hai đoạn trục được nối với nhau bằng một khớp ống như hình 14-5. Xác định tỉ số giữa đường kính d của trục và đường kính D của khớp để độ bền khi xoắn của chúng bằng nhau. Biết giới hạn chảy của trục là $\tau_{ch}^{tr} = 1,8 \cdot 10^4 \text{ N/cm}^2$ và của khớp là $\tau_{ch}^{kh} = 1,6 \cdot 10^4 \text{ N/cm}^2$. Hệ an toàn của trục và của khớp như nhau (hình 14-5).

Bài giải

$$\tau_{max}^{tr} = \frac{M_z}{W_p} = \frac{M_z}{0,2d^3} = \frac{18000}{n},$$

$$\tau_{max}^{kh} = \frac{M_z}{W_p} = \frac{M_z}{0,2D^3(1 - \alpha^4)} = \frac{16000}{n}$$

So sánh hai biểu thức trên ta được

$$\frac{0,2D^3(1 - \alpha^4)}{0,2d^3} = \frac{18000}{16000} = 1,125$$

hay $\frac{1 - \alpha^4}{\alpha^3} = 1,125$

$$\text{hay } \alpha^4 + 1,125\alpha^3 - 1 = 0$$

Giải phương trình này và chỉ lấy nghiệm thực dương nhỏ hơn 1 ($\alpha < 1$) ta được :

$$\alpha = \frac{d}{D} = 0,8$$

Ví dụ 14-7. Động cơ điện A truyền sang puli 1 của trục I công suất $N_1 = 20 \text{ kW}$ các puli 2, 3, 4 nhận được các công suất $N_2 = 15 \text{ kW}$ $N_3 = 2 \text{ kW}$ $N_4 = 3 \text{ kW}$; các puli 5, 6, 7 của trục II nhận được các công suất $N_5 = 7 \text{ kW}$ $N_6 = 4 \text{ kW}$ $N_7 = 4 \text{ kW}$ (hình 14-6). Xác định đường kính của hai trục, biết

$$[\tau] = 3000 \text{ N/cm}^2, [\theta] = 0,25^\circ/\text{m},$$

$$D = 200 \text{ mm},$$

$$D_1 = 400 \text{ mm}, D_2 = 200 \text{ mm},$$

$$D_3 = 600 \text{ mm}.$$

Vận tốc góc của trục động cơ là
 $n = 1000 \text{ vg/ph.}$

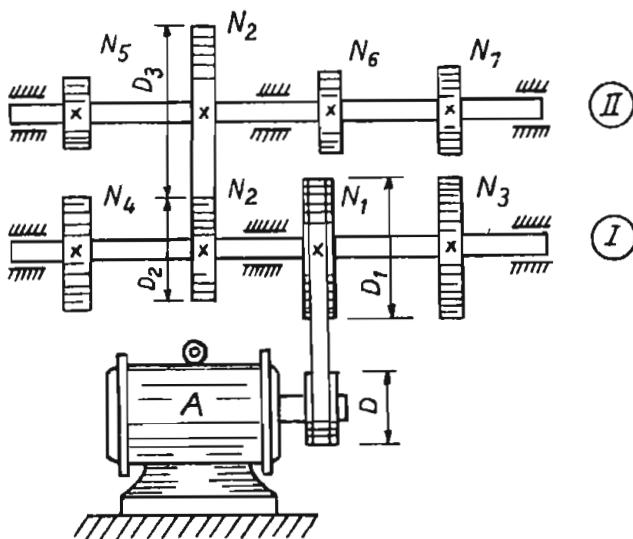
Bài giải

Số vòng quay của trục I là .

$$n_1 = n \frac{D}{D_2} = 100 \frac{200}{400} = 500 \text{ vg/ph}$$

Vận tốc góc là

$$\omega_1 = \frac{\pi n_1}{30} = \frac{3,14 \cdot 500}{30} = 52,3 \text{ rad/s}$$



Hình 14-6

Theo công thức tính mômen tác động lên puli theo công suất

$$M = \frac{W(\text{kW})}{\omega}, \quad \text{ta được :} \quad M_1 = \frac{20 \cdot 10^3}{52,3} = 382 \text{ Nm}$$

$$M_2 = \frac{15 \cdot 10^3}{52,3} = 286 \text{ Nm}, \quad M_3 = \frac{2 \cdot 10^3}{52,3} = 38,2 \text{ Nm},$$

$$M_4 = \frac{3 \cdot 10^3}{52,3} = 57,8 \text{ Nm.}$$

Theo biểu đồ mômen xoắn của trục I (hình 14-7a), ta có

$$M_{z\max} = 343,8 \text{ Nm} = 34380 \text{ Ncm.}$$

Đường kính trục theo điều kiện bền

$$d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{M_z}{0,2[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{34380}{0,2.3000}} = 3,85 \text{ cm}$$

Theo điều kiện cứng

$$d_1 \geq 10 \sqrt[4]{\frac{5,7 M_z}{G[\theta]}} = 10 \sqrt[4]{\frac{5,7.34380}{8.10^6. 0,25}} = 5,6 \text{ cm}$$

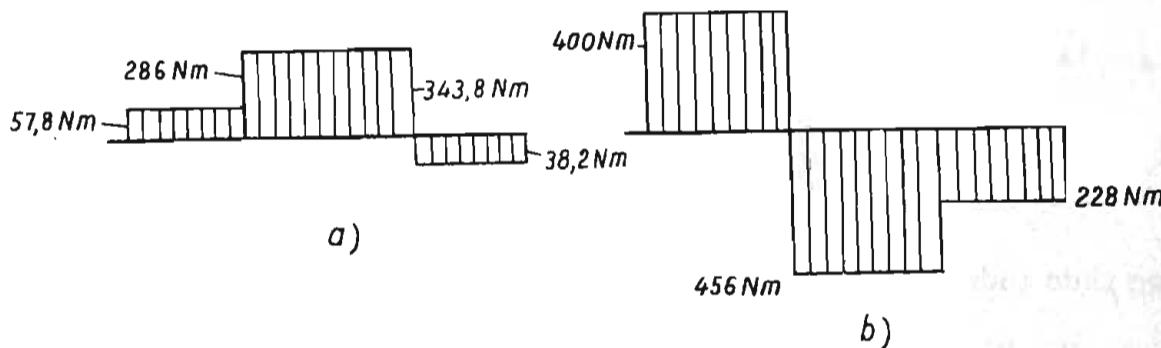
Số vòng quay trục II là $n_2 = 500 \frac{200}{600} \approx 167 \text{ vg/ph}$

$$\omega_2 = \frac{3,14 \cdot 167}{30} = 17,5 \text{ rad/s}$$

Momen tác động lên các puli là . $M_2 = \frac{15.10^3}{17,5} = 856 \text{ Nm}$

$$M_5 = \frac{7.10^3}{17,5} = 400 \text{ Nm}$$

$$M_6 = M_7 = \frac{4.10^3}{17,5} = 228 \text{ Nm}$$



Hình 14-7

Theo biểu đồ mômen xoắn của trục II (hình 14-7b), ta có

$$M_{z,\max} = 45600 \text{ Ncm.}$$

Dường kính trục theo điều kiện bền là :

$$d_2 \geq \sqrt[3]{\frac{45600}{0,2.3000}} = 4,25 \text{ cm}$$

Theo điều kiện cứng

$$d_1 \geq 10 \sqrt[4]{\frac{5,7.45600}{8.10^6. 0,25}} = 5,9 \text{ cm}$$

Vậy đường kính trục I chọn theo điều kiện cứng

$$d_1 = 5,6 \text{ cm.}$$

Đường kính trục II chọn theo điều kiện cứng

$$d_2 = 5,9 \text{ cm.}$$

Ví dụ 14-8. Bộ phận đỡ gối đầm cầu chạy có cấu tạo như hình 14-8A. Các đinh bulông có đường kính $d = 20 \text{ mm}$ và $[\tau] = 6000 \text{ N/cm}^2$.

Xác định tải trọng P có thể tác dụng lên gối.

Bài giải

Tưởng tượng dời lực P về tâm phân bố của hai dây đinh (hình 14-8B) ta sẽ được : lực $P_1 = P$

Mômen $M = P.c$. Mômen này sẽ làm xoắn đám đinh.

Giả thiết P_1 phân bố đều lên các đinh. Nội lực cắt trong mỗi đinh sẽ là .

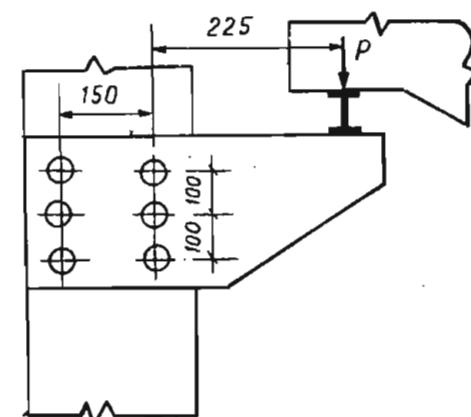
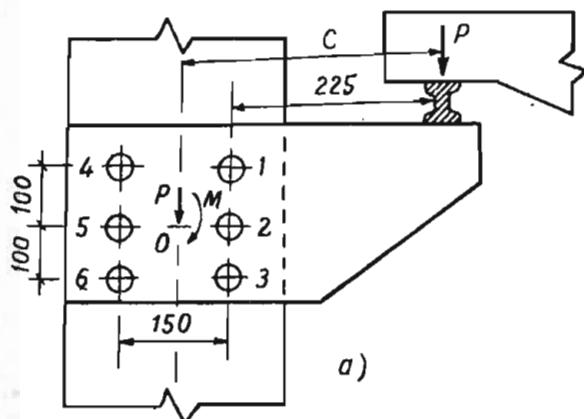
$$Q = \frac{P_1}{n} = \frac{P}{6} \quad (\text{a})$$

Nội lực do mômen M giả thiết có giá trị tỉ lệ bậc nhất với khoảng cách từ các đinh đến tâm O, phương vuông góc với bán kính và chiều cùng chiều quay với mômen. Tổng mômen của các nội lực này bằng M

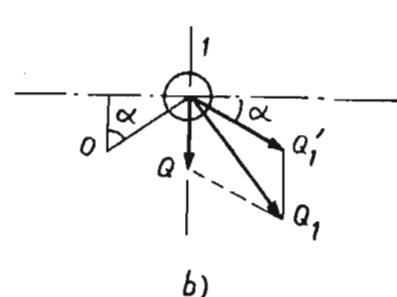
$$M = P.c = \sum_{i=1}^6 P_i \rho_i \quad (\text{b})$$

trong đó ρ_i là khoảng cách từ tâm O đến tâm mỗi đinh. Vì nội lực trong các đinh tỷ lệ với khoảng cách nên ta có

$$\frac{P_k}{\rho_k} = \frac{P_1}{\rho_i} \quad \text{hay } P_i = \frac{\rho_i}{\rho_k} P_k$$



Hình 14-8A



Hình 14-8B

Thay vào ta được

$$M = P.c = \frac{P_k}{\rho_k} \sum_{i=1}^6 \rho_i^2$$

Vậy nội lực trong đinh thứ k là

$$P_k = \frac{M}{\sum_{i=1}^6 \rho_i^2}$$

Ta có $\rho_1 = \rho_3 = \rho_4 = \rho_6 = \sqrt{7,5^2 + 10^2} = 12,5\text{cm}$.
 $\rho_2 = \rho_5 = 7,5\text{ cm}, \quad c = 30\text{ cm.}$

Do đó

$$\sum \rho_i^2 = 4 \cdot 12,5^2 + 2 \cdot 7,5^2 = 737,5\text{ cm}^2$$

Nội lực cắt do M gây ra trong đinh 1 là

$$Q_1 = P_1 = \frac{M}{\sum \rho_i^2} \rho_1 = \frac{30P}{737,5} \cdot 12,5 = 0,508P$$

Nội lực cắt do M gây ra trong đinh 2 là

$$Q_2 = P_2 = \frac{M}{\sum \rho_i^2} \rho_2 = \frac{30P}{737,5} \cdot 7,5 = 0,305P$$

Lực cắt tổng hợp trong đinh 2 là :

$$Q_2 = Q + Q_2 = \frac{P}{6} + 0,305P = 0,4716P$$

Lực cắt tổng hợp trong đinh 1 là

$$\begin{aligned} Q_1 &= \sqrt{Q^2 + Q'_1^2 + 2\cos(Q \cdot Q'_1) \cdot QQ'_1} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{6}P\right)^2 + (0,508P)^2 + 2 \cdot \frac{1}{6}P \cdot 0,508P \sin\alpha} \\ &= P \sqrt{\frac{1}{36} + 0,258 + 0,1016} = 0,622P. \end{aligned}$$

Vậy điều kiện để xác định tải trọng là điều kiện bên của đinh 1 (hoặc 3)

$$0,622 [P] = \frac{\pi d^2}{4} [\tau]$$

$$[P] = \frac{3,14 \cdot 2^2}{0,622 \cdot 4} 6000 = 30200N = 30,2 \text{ kN.}$$

§14-4. BÀI TOÁN SIÊU TÍNH

Cách giải bài toán siêu tĩnh về xoắn tương tự như cách giải bài toán siêu tĩnh về kéo nén. Ngoài những phương trình cân bằng tĩnh học ta phải thiết lập thêm các phương trình phụ đảm bảo cho số phương trình bằng số ẩn số. Các phương trình phụ này được xác định từ các điều kiện thực về chuyển vị - biến dạng.

Nếu tất cả các thanh của hệ siêu tĩnh chỉ chịu xoắn, chuyển vị đàn hồi được xác định bằng góc xoắn. Nếu trong hệ chỉ có một số thanh chịu xoắn, còn các thanh khác chịu kéo hoặc nén thì đối với các thanh chịu xoắn chuyển vị được xác định bằng góc xoắn, các thanh kia xác định bằng biến dạng dọc.

Ví dụ 14-9. Xác định giá trị mômen xoắn \mathcal{K} của trục AB biết $[t] = 4500 \text{ N/cm}^2$ (hình 14-9A).

Bài giải

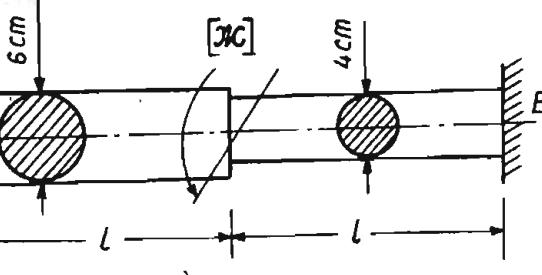
Phương trình cân bằng

$$\mathbb{X}_A + \mathbb{X}_B = \mathbb{X}$$

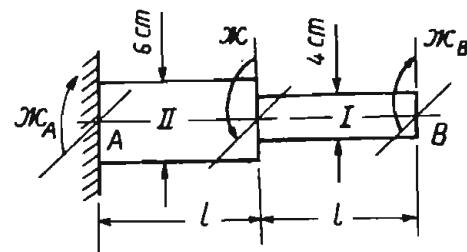
Phương trình biến dạng khi bỏ ngầm B (hình 14-9B).

$$\varphi_B = \frac{\mathbb{X}_B^I}{GJ_p^I} + \frac{\mathbb{X}_B^II}{GJ_p^{II}} - \frac{\mathbb{X}_I}{GJ_p^{II}} = 0$$

hay $\mathbb{X}_B \left(\frac{1}{J_p^I} + \frac{1}{J_p^{II}} \right) = \frac{\mathbb{X}}{J_p^{II}}$ (a)



Hình 14-9A



Hình 14-9B

Nếu gọi đường kính đoạn I là d_1 thì đường kính đoạn II bằng $1,5d_1$

$$\frac{1}{J_p^I} = 0,1d_1^4$$

$$J_p^{II} = 0,1d_2^4 = 0,1(1,5d_1)^4 = 5,06J_p^I$$

Thay vào (a) ta có

$$\mathbb{X}_B \left(1 + \frac{1}{5,06} \right) = \frac{\mathbb{X}}{5,06}$$

hay $\mathbb{X}_B = \frac{\mathbb{X}}{6,06} = 0,165\mathbb{X}$

Thay vào phương trình cân bằng, ta được

$$\mathbb{X}_A = 0,835\mathbb{X}$$

Từ

$$\frac{M}{W_p} \leq [\tau] \text{ rút ra } M = 0,2d^3[\tau].$$

Mômen cho phép tính theo \mathbb{X}_B

$$[\mathbb{X}_1] = \frac{0,2 \cdot 4^3 \cdot 4500}{0,165} \approx 350000 \text{ Ncm} = 3,5 \text{ kNm.}$$

Mômen cho phép tính theo \mathbb{X}_A

$$[\mathbb{X}_2] = \frac{0,2 \cdot 6^3 \cdot 4500}{0,835} = 116000 \text{ Ncm} = 1,16 \text{ kNm}$$

Vậy tải trọng cho phép

$$[\mathbb{X}] = [\mathbb{X}_2] = 1,16 \text{ kNm.}$$

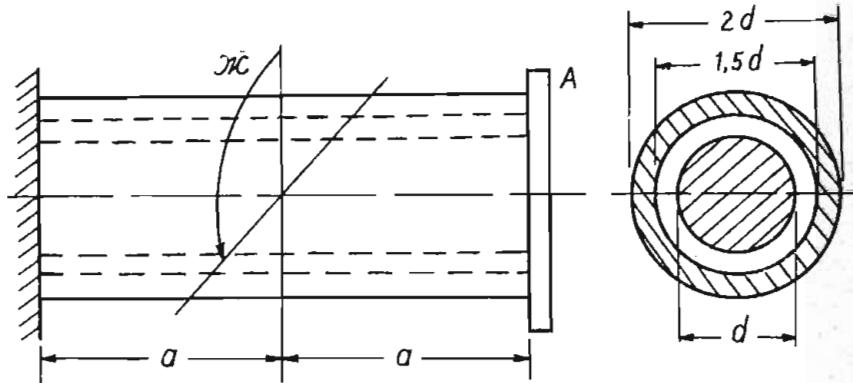
Ví dụ 14-10. Một ống đura và một trục thép được liên kết và chịu lực như trên hình 14-10A. Xác định mômen xoắn cho phép \mathbb{X} có thể tác dụng lên ống. Ứng suất cho phép của trục là $[\tau]_{th} = 9000 \text{ N/cm}^2$, của đura là $[\tau]_d = 6000 \text{ N/cm}^2$, $G_{th} = 3G_d = 8,1 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2$. Đường kính trục thép $d = 2\text{cm}$.

Bài giải (hình 14-10B).

Khi bị xoắn tại đĩa A sẽ xuất hiện mômen xoắn phản lực \mathbb{X}_A . Điều kiện để xác định mômen này là

$$\varphi_{A,tr} = \varphi_{A,ống}$$

hay



Hình 14-10A

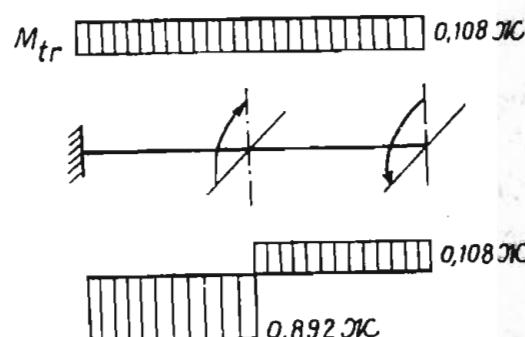
$$\frac{\mathbb{X}_A \cdot 2a}{G_t J_{ptr}} = \frac{\mathbb{X} \cdot a}{G_d J_{p.ống}} - \frac{\mathbb{X}_A \cdot 2a}{G_d J_{p.ống}}$$

Ta có :

$$J_{ptr} = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$J_{p.ống} = \frac{\pi (2d)^4}{32} \left[1 - \left(\frac{1,5}{2} \right)^4 \right] = \frac{175}{512} d^4$$

$$\frac{J_{p.ống}}{J_{ptr}} = \frac{175}{16}$$



Hình 14-10B

Thay vào phương trình trên ta được $\mathbf{X}_A \approx 0,108 \mathbf{X}$

Dựa vào biểu thức mômen xoắn của ống và trục ta tính được mômen cho phép :

$$[\mathbf{X}]_{tr} = \frac{[\tau]_{th} W}{0,108} = \frac{9000 \cdot 0,2 \cdot 2^3}{0,108} = 1,33 \cdot 10^5 \text{ Ncm}$$

$$[\mathbf{X}]_{\text{ống}} = \frac{[\tau]_d \cdot W_{\text{ống}}}{0,892} = \frac{6000 \cdot 0,2 \cdot 4^3 (1 - 0,75^4)}{0,892} = 5,89 \cdot 10^4 \text{ Ncm.}$$

Như vậy, để bảo đảm điều kiện bền, chọn

$$[\mathbf{X}] = 5,89 \cdot 10^4 \text{ Ncm.}$$

§14-5. BÀI TẬP

14-1. Vẽ biểu đồ mômen xoắn, tính ứng suất tiếp lớn nhất và góc xoắn giữa hai đầu thanh. Cho $G = 8 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2$ (hình bài 14-1).

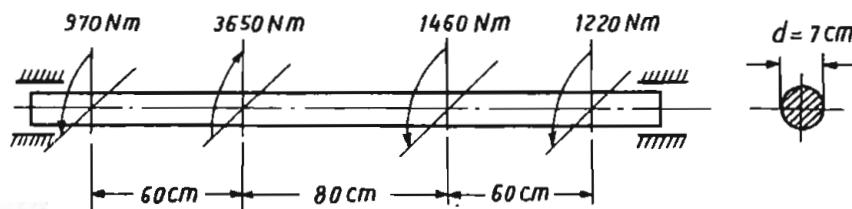
14-2. Xác định m để trục cân bằng. Vẽ biểu đồ mômen xoắn, tính ứng suất tiếp lớn nhất và góc xoắn giữa hai đầu trục (hình bài 14-2).

Cho $G = 8 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2$

14-3. Kiểm tra độ bền
và độ cứng của trục tròn
biết $[\tau] = 3000 \text{ N/cm}^2$,

$[\theta] = 0,5^\circ/\text{m}$, $G = 8 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2$ (hình bài 14-3).

Tính góc xoắn tại B và
C.

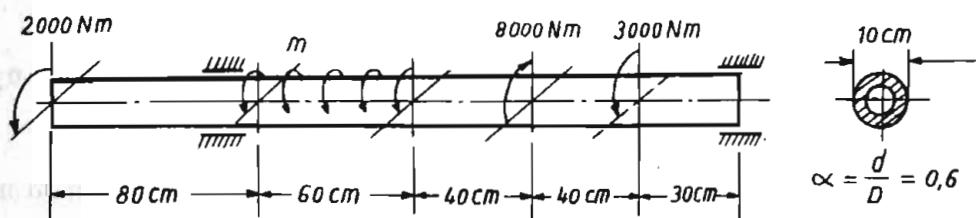


Hình bài 14-1

14-4. Kiểm tra độ bền
và độ cứng trục tròn có đường kính $d = 6 \text{ cm}$, $[\tau] = 2000 \text{ N/cm}^2$. $[\theta] = 0,4^\circ/\text{m}$,
 $G = 8 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2$ Bánh A là bánh chủ động (hình bài 14-3).

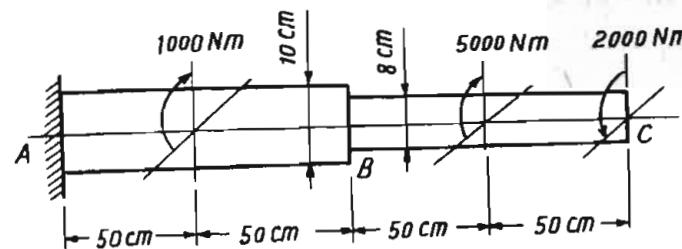
14-5. Bộ phận hãm của cัน trục có cấu tạo như trên hình bài 14-3. $D = 300 \text{ mm}$,
 $d = 30 \text{ mm}$, $l = 400 \text{ mm}$.

Xác định ứng suất tiếp lớn nhất và góc xoắn của trục khi lực ép lên má phanh là 800 N,
hệ số ma sát giữa má phanh và bánh hãm là $f = 0,4$.

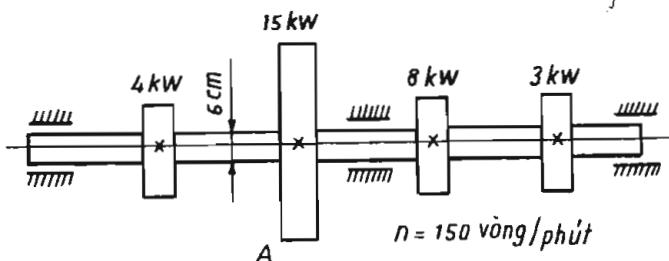


Hình bài 14-2

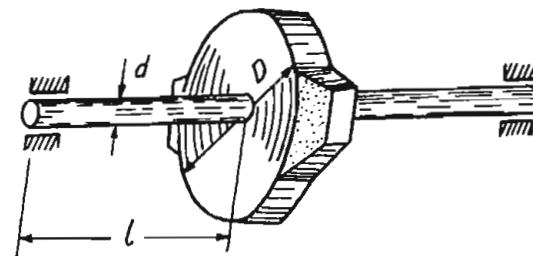
14-6. Người ta đặt một tenxômet theo phương xiên góc 45° với đường sinh của một trục tròn bị xoắn. Khi mômen xoắn tăng $\Delta M = 9000 \text{ Nm}$ thì độ giãn của tenxômet tăng thêm $\Delta s = 12\text{mm}$. Biết hệ số khuếch đại của tenxômet $k = 1000$, chuẩn đo $s = 20 \text{ mm}$, $l = 1\text{m}$, $D = 12\text{cm}$, $d = 8\text{cm}$. Xác định môđun đàn hồi trượt G và giá số góc xoắn φ của trục (hình bài 14-6).



Hình bài 14-3



Hình bài 14-4



Hình bài 14-5

14-7. Xác định giá trị mômen xoắn X tác dụng vào trục, nếu bằng tẩm điện trở ta do được biến dạng tương đối theo phương xiên góc 45° đối với đường sinh. (hình bài 14-7)

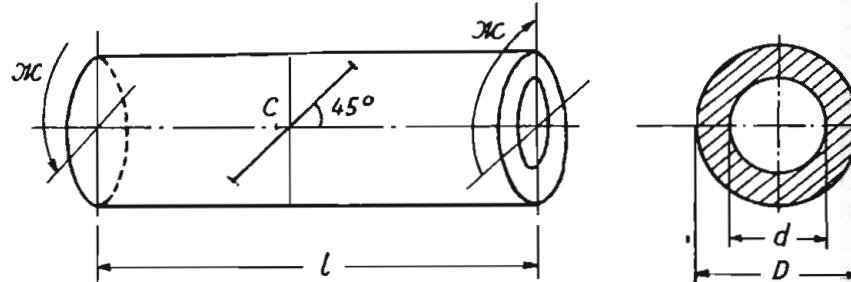
$$\varepsilon_A = 30,10^{-5}$$

$$\varepsilon_B = 34,10^{-5}$$

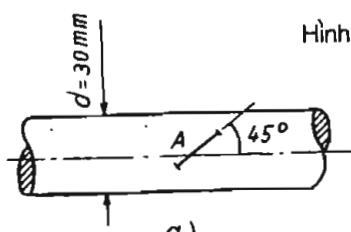
Cho

$$E = 2 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2;$$

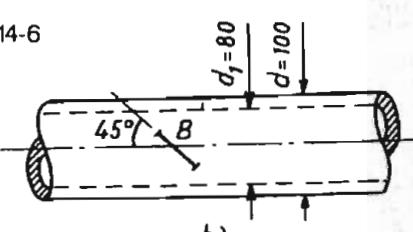
$$\mu = 0,3.$$



Hình bài 14-6



Hình bài 14-7



14-8. Hai trục có cùng chiều dài, cùng trọng lượng và cùng vật liệu. Trục đặc có đường kính D_o và trục rỗng có tỷ số

$$\alpha = \frac{d}{D} = 0,6$$

Tìm tỷ số mômen xoắn để ứng suất tiếp lớn nhất trên các mặt cắt ngang của chúng bằng nhau. So sánh độ cứng giữa hai trục.

Để độ bền của trục rỗng bằng độ bền của trục đặc, có thể giảm trọng lượng của nó xuống bao nhiêu ?

14-9. Một trục đặc và một trục rỗng có trọng lượng bằng nhau và chịu cùng một mômen

xoắn. Trục rỗng có đường kính trong $\geq 75\%$ đường kính ngoài.

So sánh ứng suất tiếp lớn nhất trên hai trục.

14-10. Để giảm trọng lượng một trục đặc xuống 25%, người ta đem gia công thành rỗng có đường kính ngoài bằng 2 lần đường kính trong. Hỏi trục có đủ bền không nếu ứng suất tiếp lớn nhất trên trục đặc bằng 5600 N/cm^2 và ứng suất tiếp cho phép $[\tau] = 6000 \text{ N/cm}^2$

14-11. Người ta đem một trục đặc đường kính 20 cm gia công thành rỗng có đường kính trong bằng 0,6 lần đường kính ngoài.

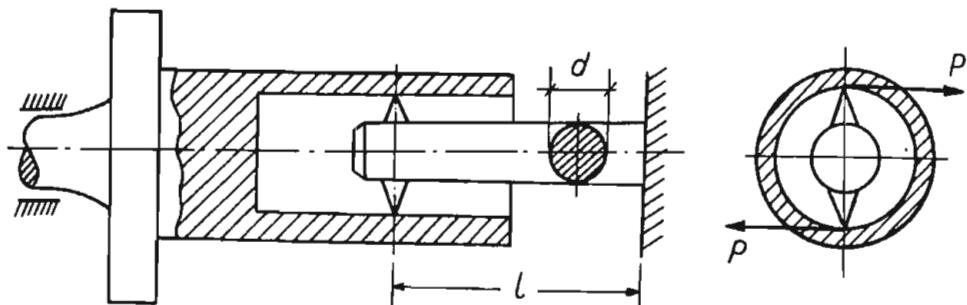
Xác định đường kính ngoài của trục rỗng sao cho ứng suất tiếp lớn nhất của chúng bằng nhau.

So sánh trọng lượng giữa hai trục.

14-12. Một bộ phận tiện trong có cấu tạo như hình bài 14-12. Tính đường kính d của trục lắp dao tiện nếu công suất của động cơ điện bằng 10 kW, hệ số hiệu suất $\eta = 0,8$, $\omega = 60 \text{ vg/ph}$, $l = 1600 \text{ mm}$, $[\tau] = 4000 \text{ N/cm}^2$.

Tính góc xoắn của trục, biết $G = 8 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2$.

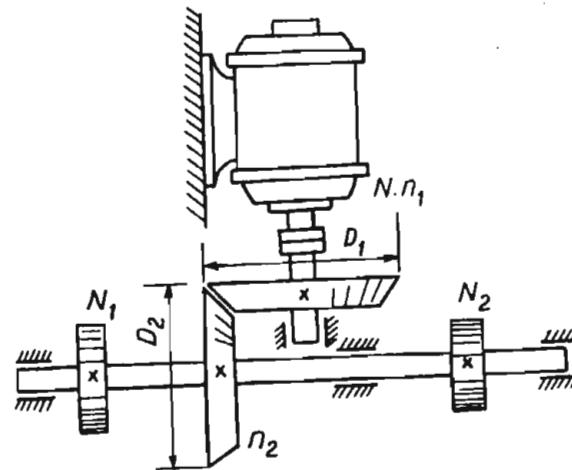
14-13. Hai đoạn trục đặc và rỗng được nối với nhau bằng khớp li hợp. Trục nhận được công suất $W = 7,5 \text{ kW}$ số vòng quay $n = 100 \text{ vg/ph}$. Tính kích thước mặt cắt ngang của hai trục, biết $[\tau] = 2000 \text{ N/cm}^2$. Tỉ số giữa đường kính trong và ngoài của trục rỗng bằng $\frac{1}{2}$ (hình bài 14-13).



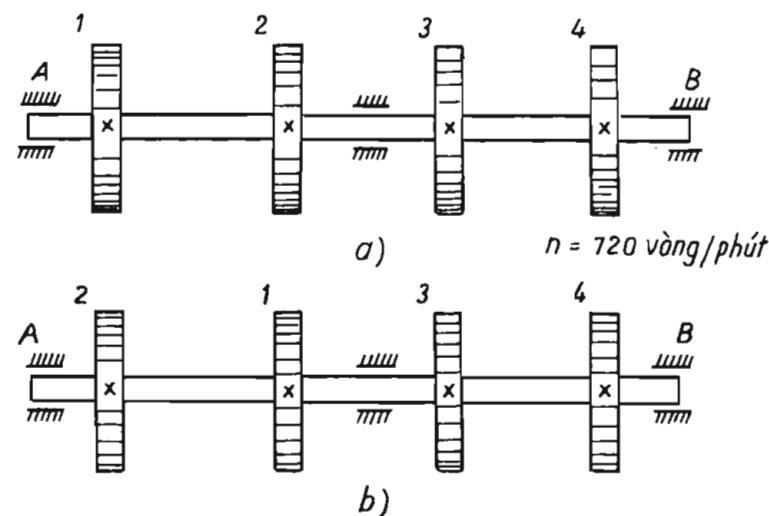
Hình bài 14-12



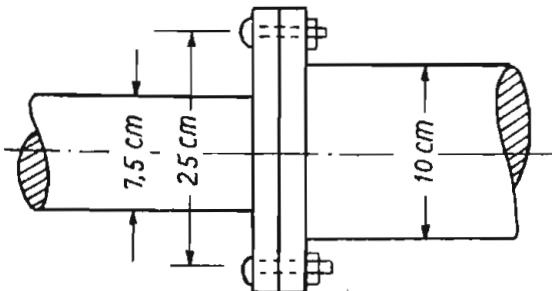
Hình bài 14-13



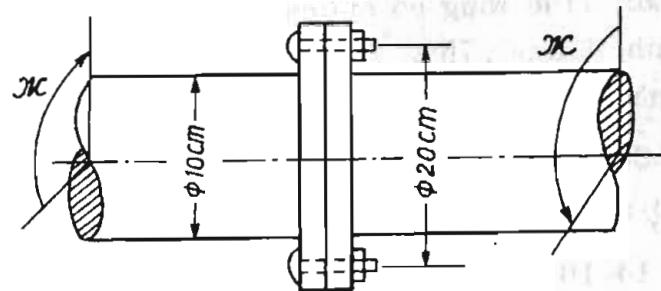
Hình bài 14-15



Hình bài 14-16



Hình bài 14-17



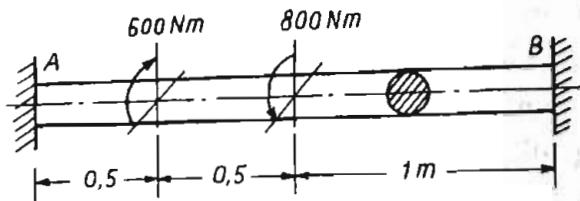
Hình bài 14-18

- 14-14. Một trục đặc có đường kính bằng 10 cm chịu tác dụng của mômen xoắn \mathcal{M} . Xác định kích thước mặt cắt ngang của một trục rỗng có cùng chiều dài, cùng độ bền và độ cứng bằng 1,5 lần độ cứng của trục đặc trên.

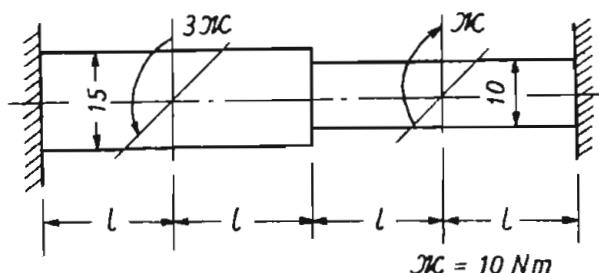
So sánh trọng lượng giữa hai trục.

- 14-15. Xác định đường kính của hai trục hình bài 14-15 biết $[\tau] = 4000 \text{ N/cm}^2$, $[\theta] = 0,3^\circ/\text{m}$, $N = 22 \text{ kW}$, $n_1 = 1200 \text{ vg/ph}$, $D_1 = 150 \text{ mm}$, $D_2 = 290 \text{ mm}$, $N_1 = 0,6 \text{ N}$, $N_2 = 0,4 \text{ N}$.

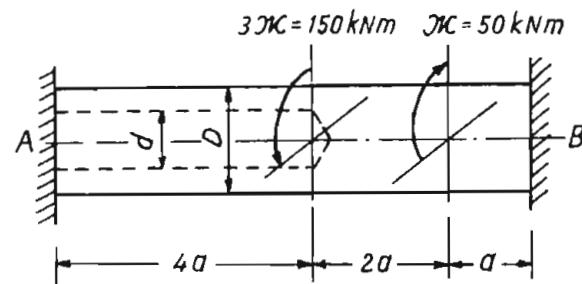
- 14-16. Trục AB mang bốn puli. Puli 1 nhận được công suất bằng 118 kW và truyền cho các puli 2, 3, 4, các công suất là $N_2 = 51,5 \text{ kW}$; $N_3 = 40,5 \text{ kW}$; $N_4 = 26 \text{ kW}$. Xác định



Hình bài 14-19



Hình bài 14-20

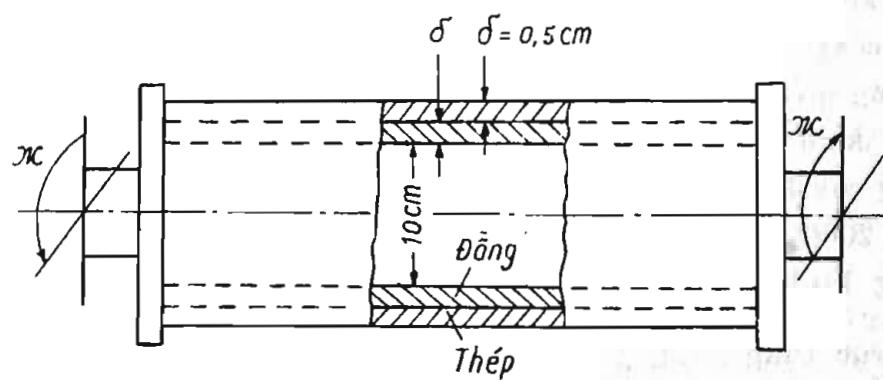


Hình bài 14-21

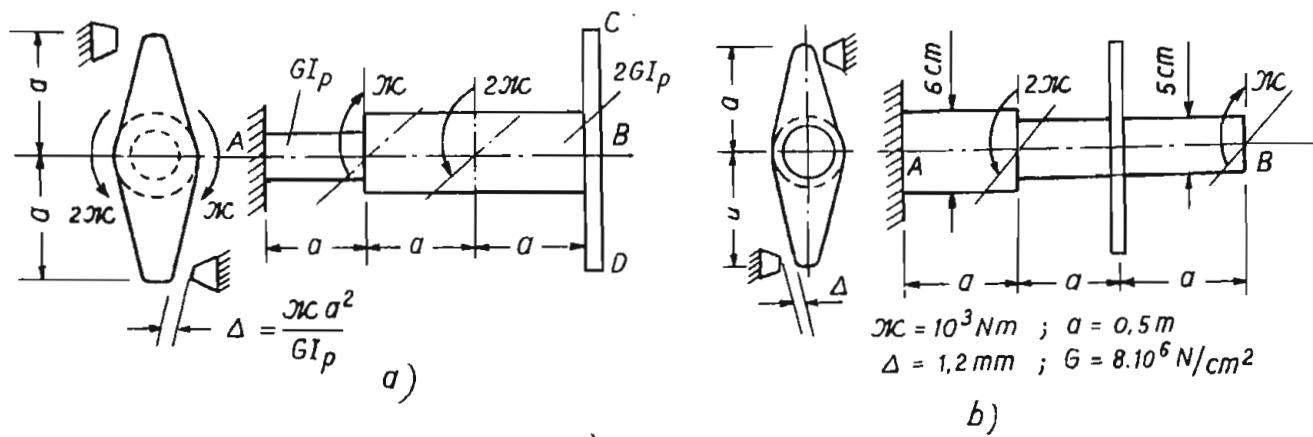
đường kính của trục nếu $n = 720 \text{ vg/ph}$, $[\tau] = 3000 \text{ N/cm}^2$ (hình bài 14-16).

Nếu sắp xếp các puli một cách hợp lý theo hình bài 14-16b thì đường kính của trục sẽ giảm xuống bao nhiêu lần?

- 14-17. Hai trục đường kính bằng 7,5 cm và 10 cm được nối với nhau bằng 6 bulông có đường kính bằng 20 mm. Xác định công suất có thể truyền đến hệ trục nếu vật liệu làm đinh có $[\tau] = 2500 \text{ N/cm}^2$, và trục có $[\tau]_{tr} = 6000 \text{ N/cm}^2$.



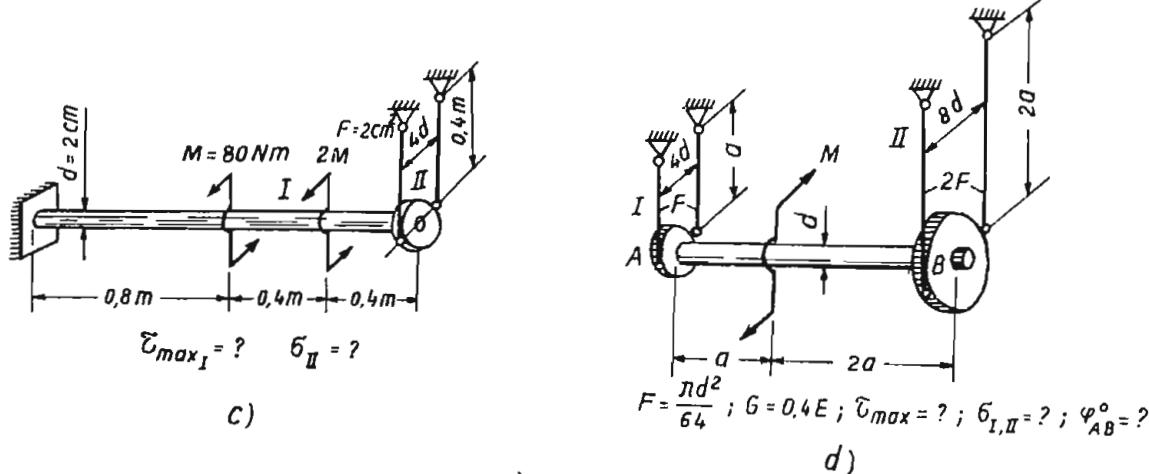
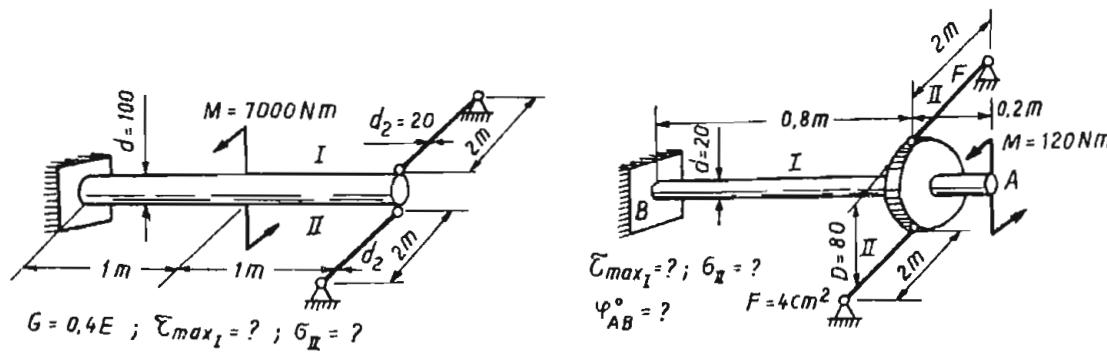
Hình bài 14-22



Hình bài 14-23

Trục quay 120 vg/ph. Tâm đinh nằm trên đường tròn đường kính 25 cm (hình bài 14-17).

14-18. Hai trục đường kính bằng 10 cm được nối với nhau bằng mặt bích. Các bulông



Hình bài 14-24

nối có đường kính $d = 2$ cm. Xác định số bulông cần thiết nếu chúng được bố trí trên một đường kính 20 cm. Ứng suất tiếp cho phép của bulông bằng 4000 N/cm^2 và của trục bằng 6000 N/cm^2 (hình bài 14-18).

14-19. Tính đường kính của thanh AB biết $[\tau] = 4000 \text{ N/cm}^2$, $[\theta] = 0,25^\circ/\text{m}$ $G = 8 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2$ (hình bài 14-19).

14-20. Vẽ biểu đồ mômen xoắn và tính ứng suất tiếp lớn nhất trên các mặt cắt ngang nguy hiểm của trục tròn như trên hình bài 14-20.

14-21. Trục AB, đường kính bằng D, có khoan một lỗ dọc với đường kính $d = 0,5 D$ từ

dầu bên trái. Xác định giá trị của D biết $[\tau] = 6000 \text{ N/cm}^2$ Trục chịu những ngẫu lực xoắn như trên hình bài 14-21.

14-22. Hai ống đồng và thép được lồng vào nhau và gắn cứng hai đầu. Ống chịu tác dụng của mômen xoắn $M = 3000 \text{ Nm}$. Xác định ứng suất tiếp lớn nhất trên mặt cắt ngang của mỗi ống (hình bài 14-22).

$$G_{th}=2G_d= 8.10^6 \text{ N/cm}^2.$$

14-23. Vẽ biểu đồ mômen xoắn của các thanh chịu lực như hình bài 14-23.

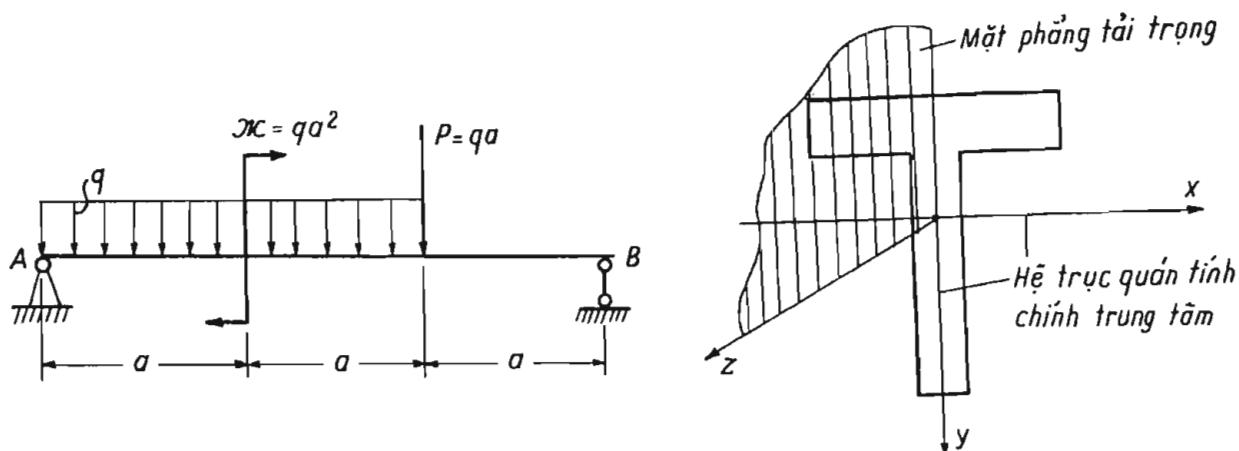
14-24. Xác định các đại lượng theo điều kiện ghi trên hình bài 14-24. Cho $E = 2.10^7 \text{ N/cm}^2$, $G = 8.10^6 \text{ N/cm}^2$

Chương 15

UỐN PHẲNG

§15-1. LỰC CẮT, MÔMEN UỐN, BIỂU ĐỒ NỘI LỰC

Xét dầm chịu uốn phẳng như hình 15-1, oz trục của thanh, oy trùng với trục quán tính chính trung tâm. V_A, V_B thành phần phản lực ở gối tựa A và B được xác định nhờ các phương trình cân bằng tĩnh học.



Hình 15-1

Lực cắt Q_y và mômen uốn M_x tại một mặt cắt ngang bất kỳ được xác định nhờ phương pháp mặt cắt. Giá trị của nó được xác định bởi các biểu thức sau:

$$Q_y(z) = \sum P_{i(y)} \quad (15-1)$$

$$M_{x(z)} = \sum m(P_i) \quad (15-2)$$

trong đó

$\sum P_{i(y)}$ - tổng đại số hình chiếu tất cả những ngoại lực (lực tập trung, lực phân bố), tác dụng vào phần dầm ở một bên của mặt cắt lên trục y.

$\sum m(P_i)$ - tổng đại số mômen của tất cả các ngoại lực (lực tập trung, lực phân bố, mômen tập trung, mômen phân bố...) tác dụng vào phần dầm ở một bên của mặt cắt đối với trọng tâm O của mặt cắt.

Dấu của lực cắt Q và mômen uốn được coi là dương hoặc âm tùy theo chiều của chúng cho như trên hình 15-2.

Biểu đồ nội lực.

Biểu đồ nội lực là đồ thị biểu diễn sự biến thiên nội lực theo trục thanh.

Trình tự vẽ biểu đồ nội lực như sau:

Xác định các phản lực tại các liên kết, (trường hợp thanh đầu ngàm đầu tự do thì

không cần thiết).

Phân đoạn sao cho từng đoạn biểu thức của lực cắt và mômen uốn là liên tục.

Viết phương trình cho từng đoạn, dựa trên cơ sở phương pháp mặt cắt, cắt tại một tọa độ bất kì.

Căn cứ vào phương trình vẽ biểu đồ cho từng đoạn.

Kiểm tra kết quả nhờ các nhận xét sau:

Trên biểu đồ lực cắt Q , tại vị trí tương ứng với mặt cắt có đặt lực tập trung, có bước nhảy mà độ lớn bằng giá trị của lực tập trung.

Trên biểu đồ mômen uốn M , tại vị trí tương ứng với mặt cắt có đặt ngẫu lực, có bước nhảy mà độ lớn bằng giá trị của ngẫu lực.

Đối với dầm không có ngẫu lực uốn phân bố tác dụng, giữa tải trọng phân bố $q(z)$; lực cắt $Q_y(z)$ và mômen uốn $M_x(z)$ có quan hệ vi phân sau:

$$q = \frac{dQ}{dz}; \quad Q = \frac{dM}{dz} \text{ hay } q = \frac{d^2M}{dz^2} \quad (15-3)$$

Có nghĩa trên đoạn dầm có tải trọng phân bố $q(z)$, nếu $q(z)$ là hàm đại số có bậc n : $q(z)^n$ thì lực cắt Q_y là hàm đại số có bậc cao hơn một, và mômen uốn có bậc cao hơn hai so với hàm của tải trọng phân bố. Tại mặt cắt có giá trị lực cắt $Q = 0$ thì mômen uốn có giá trị cực trị.



Hình 15-2

Ví dụ 15-1. Vẽ biểu đồ nội lực của dầm cho trên hình 15-3A.

Bài giải

So sự phân bố của tải trọng, ta phân dầm làm ba đoạn tính toán AB, BC và CD.

Đoạn AB ($0 \leq z_1 \leq a$).

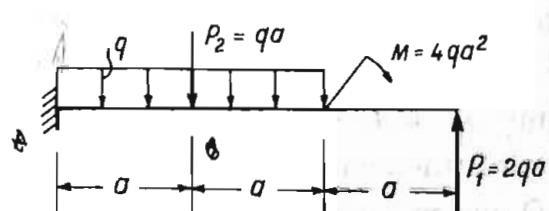
$$Q_1 = -P_1 = -2qa,$$

$$M_1 = P_1 z_1 = 2qa^2,$$

Đoạn BC ($a \leq z_2 \leq 2a$). $Q_2 = -P_1 + q(z_2 - a) = q(z_2 - 3a)$,

$$M_2 = P_1 z_2 - q \frac{(z_2 - a)^2}{2} \quad M.$$

Đoạn CD ($2a \leq z_3 \leq 3a$).



Hình 15-3A

$$Q_3 = -P_1 + P_2 + q(z_3 - a) = q(z_3 - 2a),$$

$$M_3 = P_1 z_3 - P_2 (z_3 - 2a) \quad M = \frac{q}{2} (z_3 - 2a)^2$$

Dựa vào các biểu thức của Q và M trong các đoạn đã viết ở trên ta vẽ được biểu đồ Q và M như trên hình vẽ 15-3B.

Ví dụ 15-2. Vẽ biểu đồ nội lực của dầm cho trên hình 15-4A.

Bài giải

Ta có các phương trình cân bằng:

$$\sum M_A = 0 \text{ hay } B \cdot 4a + P \cdot a - M - q \cdot 4a \cdot a = 0,$$

$$\sum M_B = 0 \text{ hay } A \cdot 4a - P \cdot 5a - q \cdot 4a \cdot 3a + M = 0$$

Từ đó rút ra:

$$A = 4qa$$

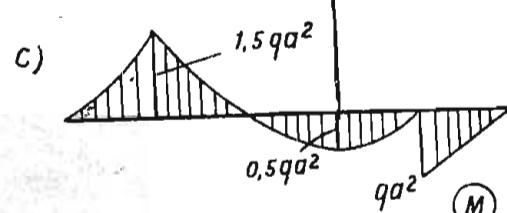
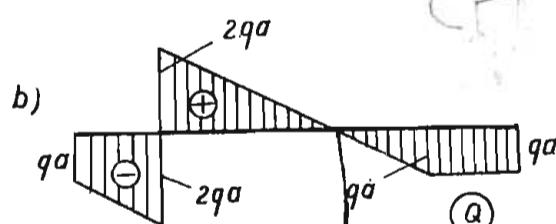
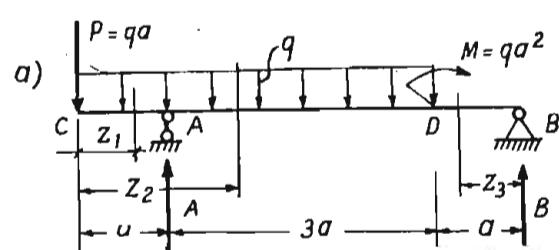
$$B = qa$$

Ta chia dầm làm ba đoạn: CA, AD, và DB.

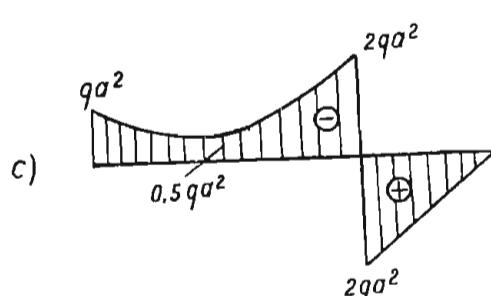
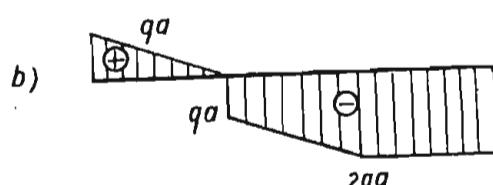
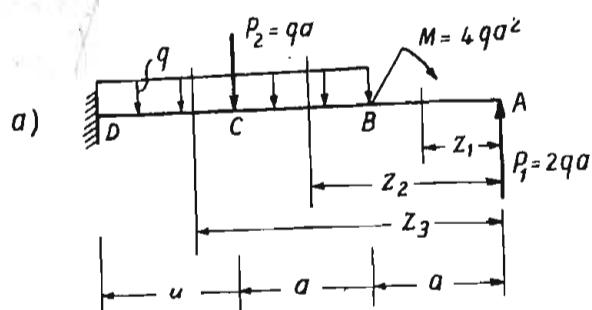
Đoạn CA ($0 \leq z_1 \leq a$)

$$Q_1 = -P - qz_1$$

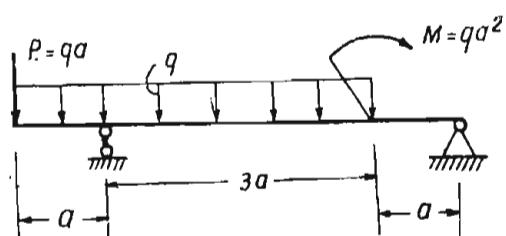
$$M_1 = -Pz_1 - q \frac{z_1^2}{2}$$



Hình 15-4B



Hình 15-3B



Hình 15-4A

Đoạn AD ($0 \leq z_2 \leq 4a$)

$$Q_2 = -P - qz_2 + A,$$

$$M_2 = -Pz_2 - q \frac{z_2^2}{2} + A(z_2 - a)$$

Đoạn DB ($0 \leq z_3 \leq a$)

$$Q_3 = -B = -qa,$$

$$M_3 = Bz_3 = qaz_3$$

Biểu đồ Q và M như trên hình 15-4B.

Ví dụ 15-3. Vẽ biểu đồ lực cắt và mômen uốn của dầm chịu trọng là ngẫu lực phân bố đều như hình 15-5A. Trong trường hợp này hãy phát

biểu về liên hệ vi phân giữa nội lực và ngoại lực.

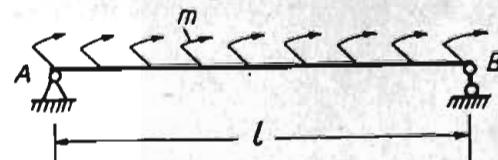
Bài giải (hình 15-5B)

Từ hai phương trình cân bằng:

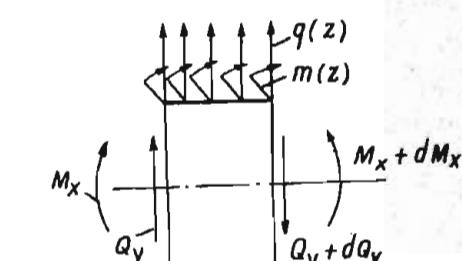
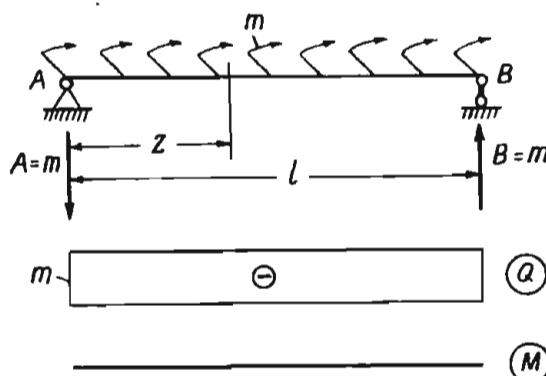
$$\sum MA = ml - Bl = 0$$

$$\sum Y = A + B = 0$$

ta rút ra $A = B = m$



Hình 15-5A



Hình 15-5B

Biểu thức mômen uốn và lực cắt

$$Q = -m; M = -mz + mz = 0$$

Xét sự cân bằng của một phân tố dầm chịu ngoại lực là tải trọng thẳng đứng q và ngẫu lực phân bố m , ta rút ra liên hệ vi phân:

$$\frac{dQ_y}{dz} = q(z) \quad \frac{dM_x}{dz} = Q_y + m$$

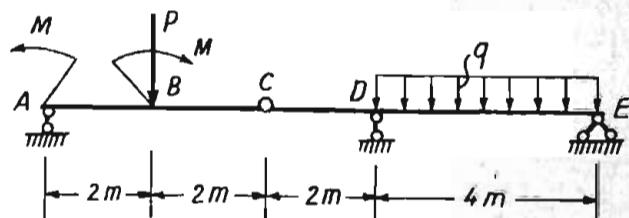
Ví dụ 15-4. Vẽ biểu đồ nội lực của dầm tĩnh định hai nhịp chịu lực như trên hình 15-6A cho $q = 30 \text{ kN/m}$; $p = 36 \text{ kN}$ và $M = 48 \text{ kN.m}$

Bài giải (hình 15-6B)

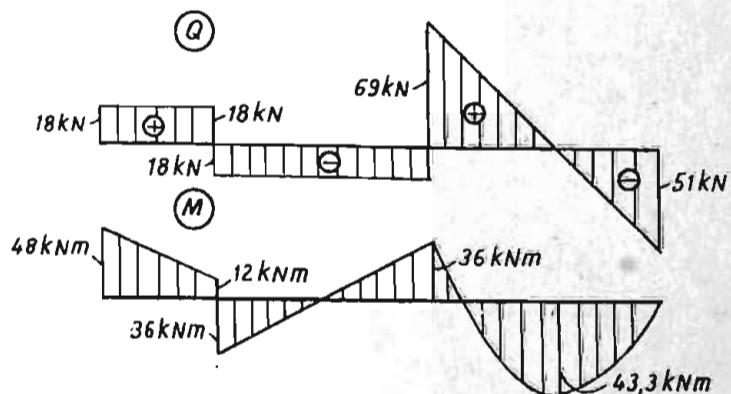
Để giải những dầm nhiều nhịp tĩnh định, ta phải phân tích dầm thành những dầm thành phần gọi là những dầm chính và dầm phụ (hoặc dầm đỡ và dầm gác). Những dầm thành phần phải tĩnh định và ổn định vị trí.

Ở bài toán này, dầm AC là dầm phụ, dầm CE là dầm chính. Dầm AC có một gối tựa lên móng C của dầm CE.

Khi tính, người ta giải lần lượt từ



Hình 15-6A



Hình 15-6B

dầm phụ đến dầm chính. Ở các điểm tựa, dầm phụ chuyển lực xuống dầm chính; khi tính dầm chính lực này được coi như ngoại lực.

Ở đây, ta tính và vẽ được biểu đồ nội lực của dầm phụ AC. Khi tính dầm chính CE, ngoài tải trọng phân bố q, ta phải thêm lực C = 18 kN do dầm phụ chuyển xuống.

Biểu đồ nội lực của toàn dầm tĩnh định nhiều nhịp vẽ bằng cách ghép liền biểu đồ nội lực của các dầm thành phần.

§15-2. ỨNG SUẤT PHÁP TRÊN MẶT CẮT NGANG

Ứng suất pháp trên mặt cắt ngang của dầm bị uốn phẳng thuận túy và uốn ngang phẳng đều tính theo công thức.

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} \cdot y \quad (15-4)$$

Trong đó: M_x - mômen uốn tại mặt cắt ngang đang xét.

y - tọa độ của điểm đang xét tính từ đường trung hòa.

I_x - mômen quán tính của mặt cắt ngang đối với trục trung hòa.

Trên mặt cắt ngang ứng suất kéo lớn nhất và nén có trị số tuyệt đối lớn nhất ở những điểm xa đường trung hòa nhất và tính theo công thức:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_x|}{I_x} |y^k| \max \quad (15-5)$$

$$\sigma_{\min} = \frac{|M_x|}{I_x} |y^n| \max$$

Trong đó $|y^k| \max$; $|y^n| \max$ là khoảng cách từ đường trung hòa đến các thớ bị kéo và bị nén xa nhất (hình 15-7).

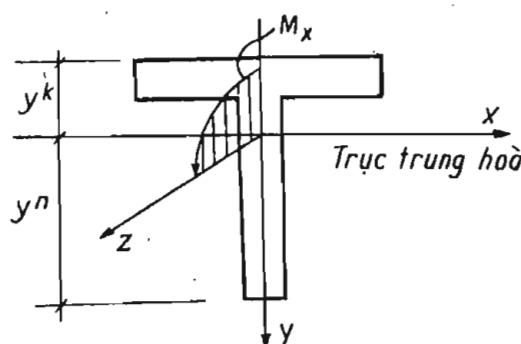
Công thức 15-5 thường được viết ở dạng

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x^k}$$

$$\sigma_{\min} = \frac{M_x}{W_x^n}$$

$$\text{Trong đó: } W_x^k = \frac{I_x}{|y^k| \max}; W_x^n = \frac{I_x}{|y^n| \max}$$

gọi là môđun chống uốn.



Hình 15-7.

§15-3. ỨNG SUẤT TIẾP TRÊN MẶT CẮT NGANG

Tại một điểm bất kỳ trên mặt cắt ngang hình chữ nhật của đầm (hình 15-7), giá trị ứng suất tiếp tính theo công thức D.I. Giurapxki.

$$\epsilon_{zy} = \frac{Q_y \cdot S_x^c}{b \cdot I_x} \quad (15-6)$$

Trong đó: Q_y - lực cắt tại mặt cắt khảo sát.

$$S_x^c = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad \text{mômen tĩnh đối với trục trung hòa } x \text{ của phần mặt cắt}$$

nằm về một phía của đường có tọa độ y , là đường mà ta xét ứng suất tiếp.

b - bề rộng của mặt cắt.

$$I_x = \frac{bh^3}{12} \quad \text{mômen quán tính của mặt cắt ngang đối với trục trung hòa.}$$

Ứng suất tiếp cực đại ở tại đường trung hòa, ví dụ, đối với mặt cắt ngang chữ nhật, có giá trị:

$$\epsilon_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q_y}{F} \quad (15-7)$$

trong đó $F = b \cdot h$ - diện tích mặt cắt ngang của đầm.

§15-4. ĐIỀU KIỆN BỀN

4-1. Đầm chịu uốn phẳng thuần túy.

Các điểm nguy hiểm nằm ở mép trên và mép dưới của chu vi, tức là các điểm xa trục trung hòa nhất về phía kéo và nén. Trạng thái ứng suất của điểm nguy hiểm là trạng thái ứng suất đơn, nên điều kiện bền là:

- Đối với vật liệu dẻo

$$|\sigma_z|_{\max} = \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma]. \quad (15-8)$$

- Đối với vật liệu giòn

$$\sigma_{k,\max} = \frac{M_x}{W_x^k} \leq [\sigma_k]. \quad (15-9)$$

$$\sigma_{n,\min} = \frac{M_x}{W_x^n} \leq [\sigma_n]. \quad (15-10)$$

$\sigma_{k,\max}; \sigma_{n,\min}$ - trị số ứng suất kéo, nén lớn nhất và bé nhất trên toàn đầm.

Ví dụ 15-5. Chọn kích thước a của mặt cắt ngang dầm chịu lực như hình 15-8A. Cho $[\sigma]_k = 9 \text{ kN/cm}^2$, $[\sigma]_n = 12 \text{ kN/cm}^2$

Bài giải

Biểu đồ nội lực vẽ trên hình 15-8B.

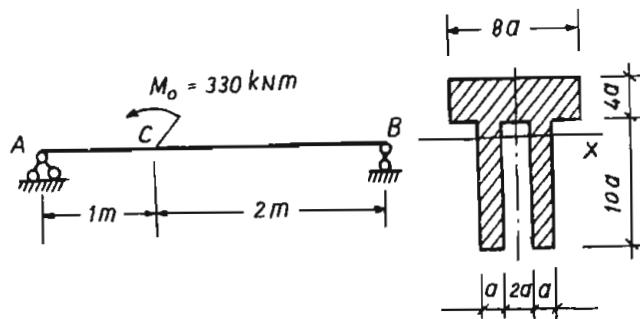
Trọng tâm mặt cắt cách mép trên:

$$y_c = \frac{4a \cdot 8a - 2a + 2 - 10a \cdot a \cdot 9a}{4a \cdot 8a + 2 - 10a \cdot a} = 4,7a.$$

Mômen quán tính trung tâm của mặt cắt:

$$J_x = \frac{8a(14a)^3}{12} + (2,3a)^2 8a - 14a$$

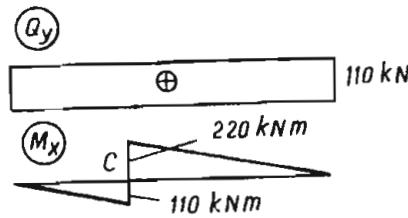
$$\frac{6a(10a)^3}{12} - (4,3a)^2 6a \cdot 10a = 812,6 a^4$$



Hình 15-8A

Mặt cắt hợp lý cần có điều kiện:

$$\frac{y_k}{y_n} = \frac{[\sigma]_k}{[\sigma]_{nn}} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \quad \text{hay } y_k = \frac{3}{4} y_n$$



Hình 15-8B

thớ bị nén đạt giới hạn nguy hiểm trước. Do đó ta có điều kiện bền:

$$\frac{M_x}{J_x} y_n \leq [\sigma]_n$$

$$\text{hay } \frac{22000}{812,6 a^4} 9,3a \leq 12$$

$$a \geq 2,75 \text{ cm.}$$

Ở mặt cắt bên trái điểm C, mômen dương, $\frac{y_k}{y_n} = \frac{9,3a}{4,7a} > \frac{3}{4}$

Ở đây thớ kéo đạt nguy hiểm trước. Vậy

$$\frac{M_x}{J_x} y_k \leq [\sigma]_k$$

hay $\frac{11000}{812,6 \text{ a}^4} 9,3 \text{ a} \leq 9$

$$\text{a} \geq 2,4 \text{ cm.}$$

Ta chọn kích thước: $\text{a} = 2,75 \text{ cm.}$

§15-5. TÍNH ĐỘ VÔNG VÀ GÓC XOAY CỦA DÀM CHỊU UỐN.

Trục của thanh sau khi biến dạng gọi là đường đàn hồi. Độ vông của dầm là thành phần chuyển vị thẳng đứng, đó là thành phần chuyển vị chính, thành phần chuyển vị ngang thường không tính đến vì rất bé.

5-1. Phương trình vi phân gần đúng của đường đàn hồi được xác định từ biểu thức sau:

$$y''(z) = -\frac{M_x(z)}{EI_x(z)} \quad (15-11)$$

trong đó qui ước hệ trục tọa độ chọn như hình 15-9 và M_x được coi là dương theo qui ước như đã chọn ở trên hình 15-2

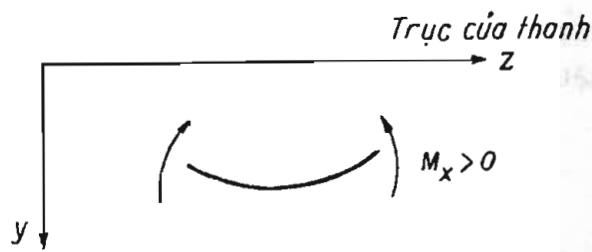
5-2. Xác định độ vông và góc xoay theo phương pháp tích phân không định hạn.

Phương trình góc xoay:

$$\theta(z) = y'(z) = \int -\frac{M_x}{EI_x} dz + C \quad (15-12)$$

Phương trình đường đàn hồi:

$$y(z) = \int dz \int -\frac{M_x}{EI_x} dz + Cz + D$$



Hình 15-9

Trong đó C, D là các hằng số tích phân được xác định nhờ các điều kiện biên và liên tục.

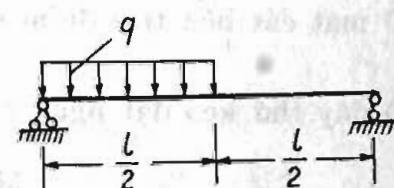
Ví dụ 15-6. Xác định góc quay tại hai đầu dầm và độ vông tại giữa dầm bằng phương pháp tích phân không định hạn (hình 15-10A).

Bài giải

Phản lực ở gối A:

$$A = \frac{3}{8} ql$$

Xem dầm chịu tải trọng như trên hình 15-10B ta sẽ



Hình 15-10A

được các hằng số tích phân: $C_1 = C_2, D_1 = D_2$.

Mômen uốn:

$$\text{Đoạn 1 } (0 \leq z \leq \frac{l}{2}): M_1 = \frac{3}{8} qlz - q \frac{z^2}{2}$$

$$\text{Đoạn 2 } (\frac{l}{2} \leq z \leq l): M_2 = \frac{3}{8} qlz - q \frac{z^2}{2} + q \frac{(z - \frac{l}{2})^2}{2}$$

Dường đàn hồi và góc quay:

Đoạn 1:

$$\varphi_1 = \frac{1}{EJ_x} \left(-\frac{3ql}{16} z^2 + \frac{q}{6} z^3 \right) + C_1$$

$$y_1 = \frac{1}{EJ_x} \left(-\frac{ql}{16} z^3 + \frac{q}{24} z^4 \right) + C_1 z + D_1$$

$$\text{Đoạn 2: } \varphi_2 = \frac{1}{EJ_x} \left[-\frac{3ql}{16} z^2 + \frac{q}{6} z^3 - \frac{q}{6} (z - \frac{l}{2})^3 \right] + C_2,$$

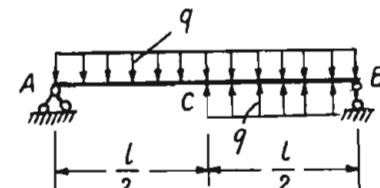
$$y_2 = \frac{1}{EJ_x} \left[-\frac{ql}{16} z^3 + \frac{q}{24} z^4 - \frac{q}{24} (z - \frac{l}{2})^4 \right] + C_2 z + D_2$$

Điều kiện biên:

Khi $z=0$ $y_1 = 0$;

$$z = \frac{l}{2}, \quad y_1 = y_2, \quad \varphi_1 = \varphi_2;$$

$$z = l \quad y_2 = 0$$



Hình 15-10B

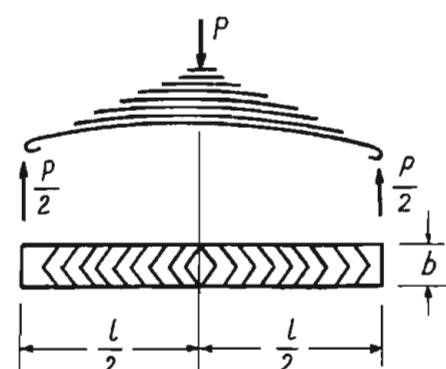
Thể vào những phương trình trên, ta rút ra:

$$C_1 = C_2 = \frac{9}{384} \cdot \frac{ql^3}{EJ_x}; \quad D_1 = D_2 = 0$$

Góc quay đầu đàm:

$$\varphi_{1A} = C_1 = \frac{9}{384} \cdot \frac{ql^3}{EJ_x}.$$

$$\varphi'_{2B} = \frac{ql^3}{EJ_x} \left(-\frac{3}{16} + \frac{1}{6} - \frac{1}{48} + \frac{9}{384} \right) = \frac{7}{384} \frac{ql^3}{EJ_x}$$



Hình 15-11

Độ vông giữa dầm

$$y_c = \frac{ql^4}{EJ_x} \left(\frac{-6 + 2 + 9}{768} \right) = \frac{5}{768} \frac{ql^4}{EJ_x}$$

Ví dụ 15-7. Một nhíp lò xo (hình 15-11) gồm 10 lá rộng $b = 7,5$ mm, dày $t = 10$ mm có ứng suất cho phép 40000 N/cm 2 , môđun đàn hồi $E = 2.10^7$ N/cm 2 . Nhíp rộng $l = 1000$ mm. Xác định tải trọng cho phép của nhíp và độ vông tương ứng.

Bài giải

Tính nhíp như một dầm chống uốn đều, ta có:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x(z)}{W_x(z)} = \frac{M_o}{W_o} \leq [\sigma]$$

trong đó M_o và W_o là mômen uốn và mômen chống uốn của mặt cắt giữa nhíp:

$$M_o = \frac{Pl}{4}, \quad W_o = \frac{10bt^2}{6}$$

Từ đó tính được tải trọng cho phép:

$$\frac{[P]l}{4} : \frac{10bt^2}{6} = [\sigma]$$

hay

$$[P] = \frac{20 bt^2 [\sigma]}{3l} = \frac{20 \cdot 7,5 \cdot 1^2 \cdot 40000}{3 \cdot 100} = 20000 \text{ N.}$$

Tính độ vông, ta có:

$$y'' = \frac{M_x(z)}{EJ_x(z)} = \frac{M_x(z)}{EW_x(z) \frac{t}{2}} = \frac{2M_o}{EW_o t} = -\frac{2[\sigma]}{Et} \quad (\text{a})$$

Từ đó:

$$y' = -\frac{2 [\sigma]}{Et} z + C$$

$$y = -\frac{[\sigma]}{Et} z^2 + Cz + D \quad (\text{b})$$

Với điều kiện biên:

$$\text{Khi } z = 0, y = 0$$

$$\text{Khi } z = \frac{l}{2}, y = 0$$

ta được

$$C = \frac{[\sigma]l}{Et}, D = 0$$

Thay vào (b), có

$$y = -\frac{[\sigma]}{Et} z^2 + \frac{[\sigma]l}{Et} z$$

thay $z = \frac{l}{2}$. ta được độ vông cực đại:

$$y_{\max} = \frac{[\sigma] l^2}{4Et} = \frac{40000 \cdot 100^2}{4 \cdot 2 \cdot 10^7} = 5 \text{ cm.}$$

Chú thích: Từ (a) có thể thấy đường đàn hồi của nhíp là một cung tròn, do đó có thể tính độ vông bằng đường tên của cung.

5-3. Xác định độ vông góc xoay bằng phương pháp đồ toán.

Phương pháp dựa trên cơ sở đặt một dầm giả tạo có trị số là:

Bảng (15-1). Cách chọn dầm giả tạo tương ứng với dầm thực đã cho.

Dầm thực	Dầm giả tạo
 $y=0$ $y' \neq 0$	 $M_{gt} = 0$ $Q_{gt} \neq 0$
 $y=0$ $y' \neq 0$	 $M_{gt} = 0$ $Q_{gt} \neq 0$
 $y \neq 0$ $y' \neq 0$ $y=0$ $y' \neq 0$	 $M_{gt} \neq 0$ $M_{gt} = 0$ $Q_{gt} \neq 0$ $Q_{gt} \neq 0$
 $y \neq 0$ $y' \neq 0$ $y=0$ $y' \neq 0$ $y \neq 0$ $y' \neq 0$	 $M_{gt} \neq 0$ $M_{gt} = 0$ $M_{gt} = 0$ $M_{gt} \neq 0$ $Q_{gt} \neq 0$ $Q_{gt} \neq 0$
 $y=0$ $y' \neq 0$	 $M_{gt} = 0$ $Q_{gt} = 0$

$$q_{gt} = -\frac{M_x}{EJ_x} \quad (15-14)$$

lên một dầm giả tạo thích hợp thì trị số góc xoay tại một mặt cắt nào đó sẽ bằng lực cắt giả tạo $Q_{gt} = \theta$, và độ võng có trị số bằng mômen uốn giả tạo, $M_{gt} = y$.

Ví dụ 15-8. Tìm độ võng y_c tại mặt cắt C, góc xoay ở bên phải và bên trái khớp A, góc xoay tại gối B của dầm như hình 15-12A.

Bài giải

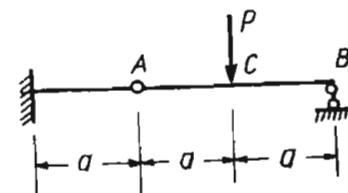
Biểu đồ mômen uốn của dầm vẽ trên hình 15-12Ba. Dầm giả tạo và tải trọng giả tạo vẽ trên hình 15-12Bb, từ đó tính được góc xoay và độ võng của dầm thực:

$$y_c = M_{gtc} = \frac{Pa^2}{3EJ_x} a \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{Pa}{2EJ_x} a \cdot \frac{1}{3} a = \frac{Pa^3}{4EJ_x} \quad a)$$

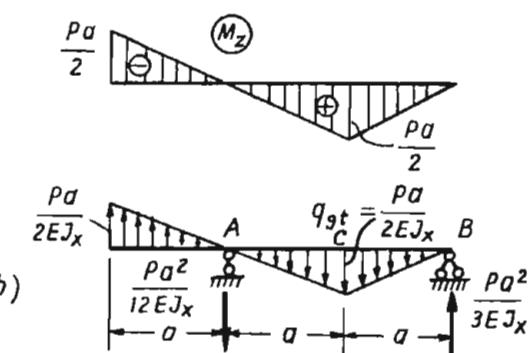
$$\varphi_{A\text{trái}} = Q_{gtA\text{trái}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Pa}{2EJ_x} a = \frac{Pa^2}{4EJ_x}$$

$$\varphi_{A\text{phải}} = Q_{gtA\text{phải}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Pa}{2EJ_x} - \frac{Pa^2}{12EJ_x} = \frac{Pa^2}{6EJ_x} \quad b)$$

$$\varphi_B = Q_{gtB} = V_{gtB} = -\frac{Pa^2}{3EJ_x}$$



Hình 15-12A



Hình 15-12B

§15-6. DÀM SIÊU TÍNH

Dầm siêu tĩnh là dầm không thể xác định được các thành phần phản lực ở các chốt liên kết bằng các điều kiện tĩnh học. Trong chương này ta giới hạn cách định nghĩa về bậc siêu tĩnh của dầm bằng số ẩn số thừa mà các điều kiện tĩnh học không xác định được. Có nhiều phương pháp giải, ở đây chỉ trình bày phương pháp so sánh chuyển vị. Theo phương pháp này người ta bỏ bớt các liên kết của dầm siêu tĩnh cho trước để được dầm tĩnh định không biến dạng hình học. Dầm này gọi là dầm cơ bản.

Trước hết người ta chỉ đặt vào dầm cơ bản những tải trọng cho trước và tính chuyển vị tương ứng với ẩn số thừa bỏ đi ở mặt cắt đã giảm liên kết (nếu bỏ lực thừa thì tính độ võng, bỏ mômen thừa thì tính góc quay). Sau đó cũng trên dầm cơ bản ấy, người ta chỉ đặt các ẩn số thừa làm tải trọng và tính chuyển vị ở các mặt cắt đã giảm liên kết như ở trên. Giá trị của ẩn số thừa xác định từ điều kiện: tổng chuyển vị của dầm cơ bản do tải trọng cho trước tác dụng và do ẩn số thừa tác dụng ở mặt cắt đã giảm liên kết bằng chuyển vị cũng của mặt cắt ấy của dầm siêu tĩnh.

Ví dụ 15-10. Vẽ biểu đồ lực cắt và mômen uốn của dầm siêu tĩnh chịu lực như hình 15-13A. Vẽ đường đàn hồi nếu dầm có mặt cắt ngang là hình vành khăn $D = 1,2$ cm, $d = 0,8$ cm, ứng suất cho phép $[\sigma] = 16000$ N/cm² và $a = 1$ m. Hãy xác định tải trọng

cho phép.

Bài giải

Trước hết ta tính tác dụng của lực P đặt tại C . Bỏ ngầm A , thay vào đó những phản lực V_{A1} và M_{A1} (hình 15-13B) ta có điều kiện biến dạng:

$$\varphi_A = \varphi_{AP} + \varphi_{AV_{A1}} + \varphi_{AM_{A1}} = 0,$$

$$f_A = f_{AP} + f_{AV_{A1}} + f_{AM_{A1}} = 0.$$

Các biến dạng trên có thể tính bằng phương pháp đồ toán. Ta có:

$$\varphi_A = -\frac{Pa^2}{EJ_x} + \frac{3M_{A1}a}{EJ_x} + \frac{9V_{A1}a^2}{2EJ_x} = 0,$$

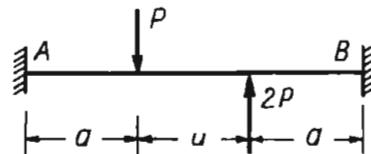
$$f_A = \frac{14Pa^3}{3EJ_x} + \frac{9M_{A1}a^2}{2EJ_x} + \frac{9V_{A1}a^3}{EJ_x} = 0$$

Giải hệ này ta được:

$$V_{A1} = \frac{20}{27}P, M_{A1} = \frac{4}{9}Pa.$$

Bằng các phương trình cân bằng, rút ra:

$$V_{B1} = \frac{2}{27}PM_{B1} = \frac{2}{9}Pa.$$



Hình 15-13A

Dựa vào kết quả trên, ta có thể suy ra dễ dàng giá trị các phản lực sinh ra do tác dụng của $2P$ đặt tại D (hình 15-13Ba suy ra từ hình 15-13Bb):

$$V_{A2} = \frac{14}{27}P, M_{A2} = \frac{4}{9}Pa, V_{B2} = \frac{40}{27}P, M_{B2} = \frac{8}{9}Pa.$$

Phản lực do cả hai lực P và $2P$ sinh ra (hình 15-15Bc):

$$V_A = \frac{2}{9}P, M_A = 0, V_B = \frac{11}{9}P, M_B = \frac{2}{3}Pa.$$

Biểu đồ mômen uốn M_x và lực cắt Q_y vẽ trên hình 15-13Bd:

$$M_{max} = \frac{2}{3}Pa.$$

Tính P để đảm bảo điều kiện bền:

$$\frac{M_{max}}{W_x} \leq [\sigma].$$

hay $\frac{\frac{2}{3} \text{ Pa}}{0,1 D^3(1 - \eta^4)} \leq [\sigma]$,

hay $P \leq [\sigma] \cdot 0,1 D^3(1 - \eta^4) \frac{3}{2a} =$
 $= 16000 \cdot 0,1 \cdot 1,2^3(1 - 0,66^4) \frac{3}{2 \cdot 100}.$

$P \leq 33 \text{ N.}$

Phương trình đường đàn hồi (y):

Đoạn 1 ($0 \leq z \leq a$)

$$y_1(z) = -\frac{\frac{2}{9} P z^3}{6EJ_x}$$

Đoạn 2 ($a \leq z \leq 2a$)

$$y_2(z) = \frac{\frac{2}{9} P z^3}{6EJ_x} + \frac{P(z - a)^3}{6EJ_x}$$

Đoạn 3 ($2a \leq z \leq 3a$)

$$y_3(z) = \frac{\frac{2}{9} P z^3}{6EJ_x} + \frac{P(z - a)^3}{6EJ_x} - \frac{2P(z - 2a)^3}{6EJ_x}$$

Ví dụ 15-11. Một dầm thép mặt cắt hình chữ I ($EJ_x = 1,5 \text{ MN/m}^2$, $W_x = 102 \text{ cm}^3$) dài $l_1 = 2 \text{ m}$ đặt trên hai gối và chịu một lực P đặt ở giữa (hình 15-14).

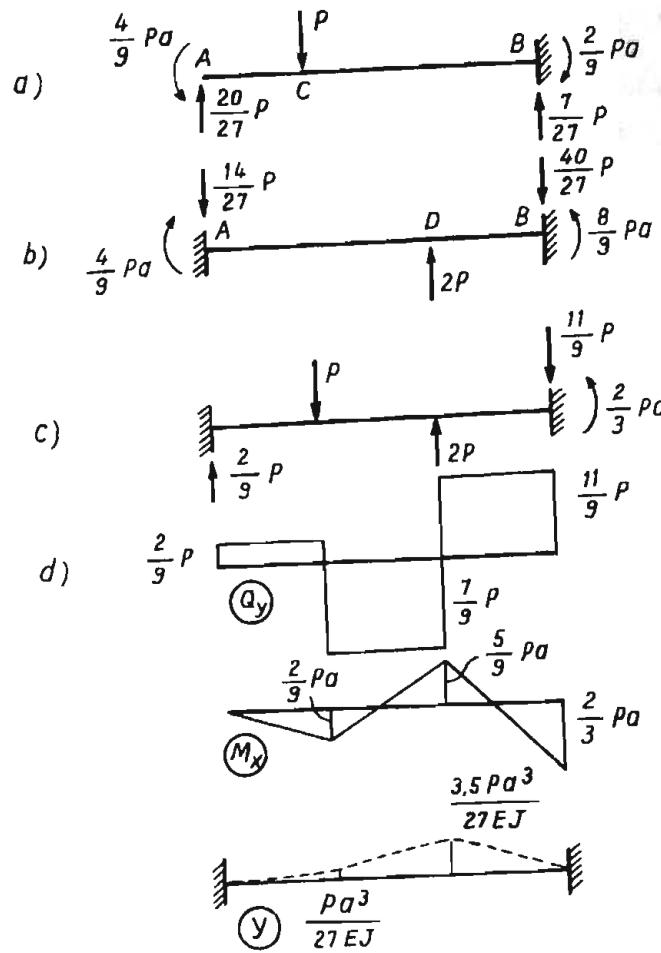
Ở phía dưới giữa dầm có đặt vuông góc một dầm thứ hai dài $l_2 = 1 \text{ m}$ có mặt cắt giống dầm trên, đặt trên gối đơn giản (hình 15-14). Khi chưa chịu lực đáy dầm trên còn cách mặt trên của dầm dưới là $\delta = 2 \text{ mm}$.

Xác định quan hệ giữa lực P với độ vồng f ở giữa dầm trên và ứng suất cực đại của dầm này.

Bài giải

Tải trọng lớn nhất để dầm trên chạm dầm dưới tính từ công thức:

$$f = 2 \cdot 10^{-3} = \frac{P_0 l_1^3}{48EJ_x} = \frac{P_0 2^3}{48 \cdot 1,5} = \frac{P_0}{9}.$$

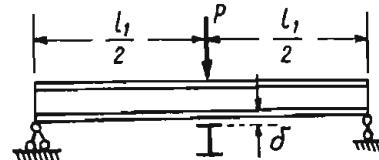


Hình 15-13B

hay $P_0 = 9.2.10^3 \text{ MN} = 18 \text{ kN}$.

Khi $P \leq P_0$, ta có:

$$f = \frac{P l_1^3}{48EJ_x} = \frac{2^3}{48 \cdot 1,5} P = \frac{1}{9} P.$$



Hình 15-14

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_x} = \frac{Pl_1}{4W_x} = \frac{2}{4 \cdot 102 \cdot 10^{-6}} P = \frac{1}{204 \cdot 10^{-6}} P.$$

Khi $P = P_0$ thì $\sigma_{\max} = 88 \text{ MN/m}^2$.

Khi $f > 2 \text{ mm}$, hai đầm cùng làm việc. Phần lực tác dụng vào đầm trên tính bằng cách so sánh biến dạng của hai đầm:

$$f_1 = f_2$$

hay

$$\frac{P_1 l_1^3}{48EJ_x} = \frac{P_2 l_2^3}{48EJ_x}$$

hay

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{l_2^3}{l_1^3} = \frac{P_1}{P_1 + P_2} = \frac{l_2^3}{l_2^3 + l_1^3} = \frac{l^3}{l^3 + 2^3} = \frac{1}{9}$$

Đặt $P_1 + P_2 = P'$ là lực đặt thêm sau khi hai đầm chạm nhau thì:

$$P_1 = \frac{P'}{9}, \quad P_2 = \frac{8P'}{9}$$

Độ vồng và ứng suất của đầm trên ở giai đoạn này:

$$f' = \frac{\frac{P'}{9} l_1^3}{48EJ_x} = \frac{\frac{P'}{9} 2^3}{48 \cdot 1,5} = 0,0123 P',$$

$$\sigma'_{\max} = \frac{\frac{P'}{9}}{102 \cdot 10^{-6}} = 1,09 \cdot 10^3 P'$$

Đầm trên đến giới hạn an toàn khi $\sigma'_{\max} = 160 - 88 = 72 \text{ MN/m}^2$.

Khi đó

$$P' = \frac{72}{1,09 \cdot 10^3} = 66 \cdot 10^{-3} \text{ MN} = 66 \text{ kN}.$$

Nếu dầm dưới đến giới hạn an toàn thì:

$$\sigma'_{\max} = \frac{8P'}{9W_x} = \frac{8P'}{9 \cdot 102 \cdot 10^{-6}} = 160 \text{ MN/m}^2$$

hay $P' = 18,4 \text{ kN}$.

Vậy

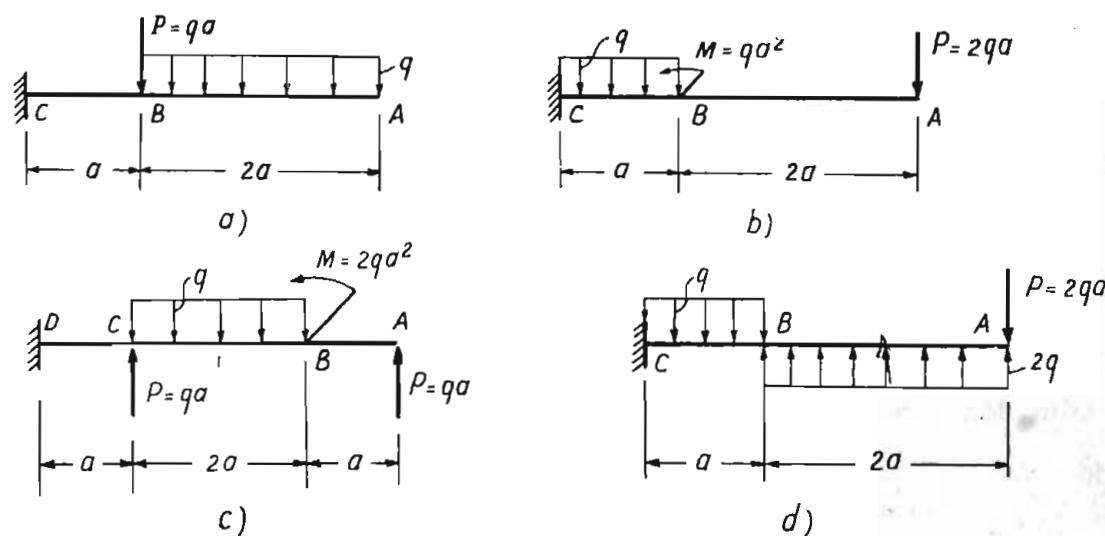
$$[P] = 18 + 18,4 = 36,4 \text{ kN.}$$

Khi đó độ vồng của dầm trên $f = 2 + 0,0123 \cdot 18,4 \cdot 10^{-3} = 2,23 \text{ mm}$.

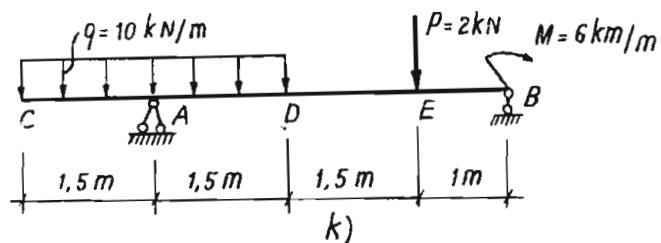
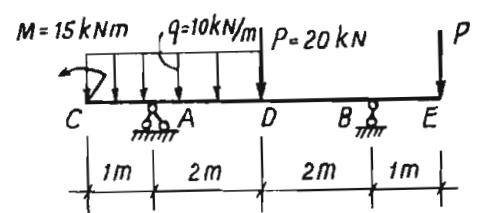
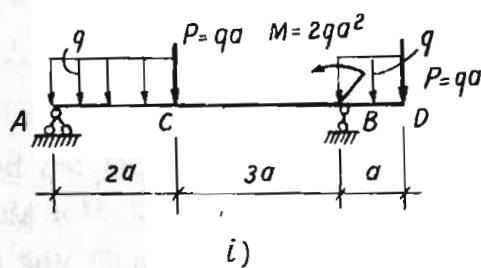
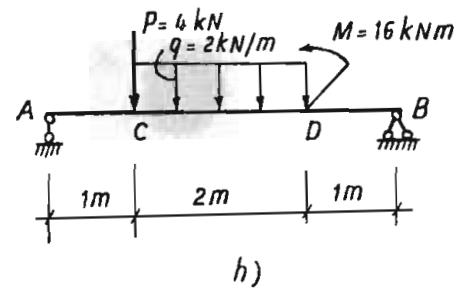
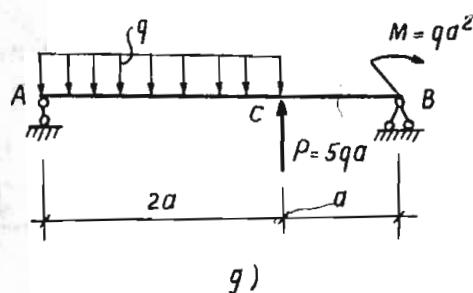
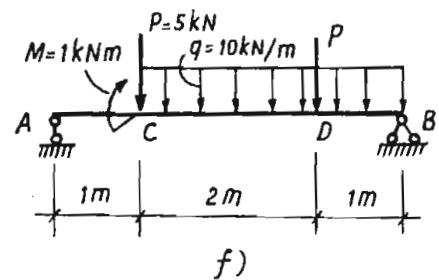
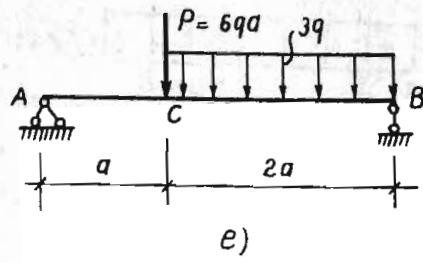
§15-7. BÀI TẬP

- 15-1. Vẽ biểu đồ nội lực của dầm cho trên hình bài 15-1.
- 15-2. Không cần tính ra phản lực, vẽ biểu đồ nội lực của các dầm cho trên hình bài 15-2.
- 15-3. Xác định khoảng cách a đầu tự do của dầm để mômen uốn tại gối tựa có giá trị bằng mômen lớn nhất của dầm hình bài 15-3a, b
- 15-4. Cho một dầm chịu lực phân bố đều, hai đầu liên kết khớp. Để giảm giá trị của mômen uốn lớn nhất trong dầm xuống còn một nửa, người ta đặt vào mặt cắt tại gối tựa B một mômen tập trung (hình bài 15-4). Hãy xác định giá trị của mômen tập trung đó.
- 15-5. Vẽ biểu đồ nội lực của các dầm cho trên hình bài 15-5.
- 15-6. Vẽ biểu đồ lực cắt và mômen uốn của những dầm nhiều nhịp tĩnh định cho trên hình bài 15-6.
- 15-7. Một dầm côngxon có chiều dài $l = 0,5 \text{ m}$, bằng gang có mặt cắt ngang là hình tam giác cân. Chiều cao h , bề rộng đáy $b = 0,6 h$. Côngxon chịu lực $P = 1 \text{ kN}$ tác dụng ở đầu tự do hướng theo đường cao mặt cắt ngang từ trên xuống dưới. Biết giới hạn bền kéo và nén của gang là $\sigma_{bk} = 25 \text{ kN/cm}^2$; $\sigma_{bn} = 100 \text{ kN/cm}^2$, hệ số an toàn $\gamma = 5$.

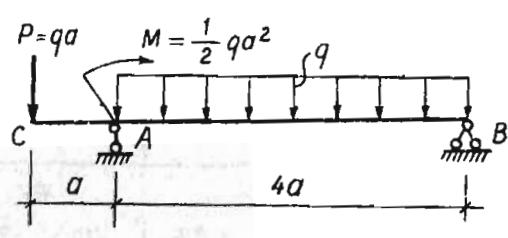
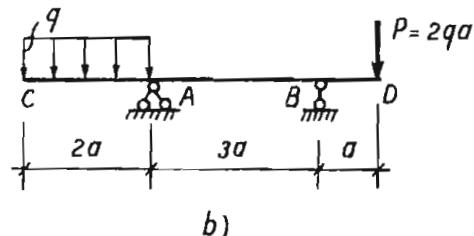
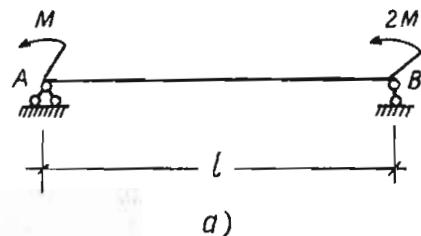
Hỏi nên đặt đáy mặt cắt lên phía trên hay phía dưới? Tính kích thước mặt cắt.



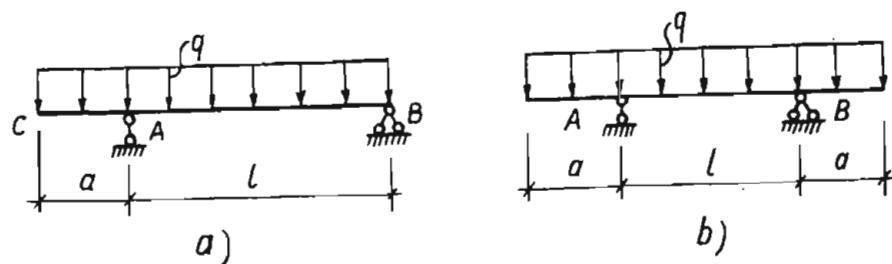
Hình bài 15-1



Hình bài 15-1 (tiếp)



Hình bài 15-2



Hình bài 15-3

15-8. Dầm bằng thép có mặt cắt ngang là hình vuông 3×3 cm, dài $l = 12$ m. Kiểm tra độ bền của dầm trong hai trường hợp sau:

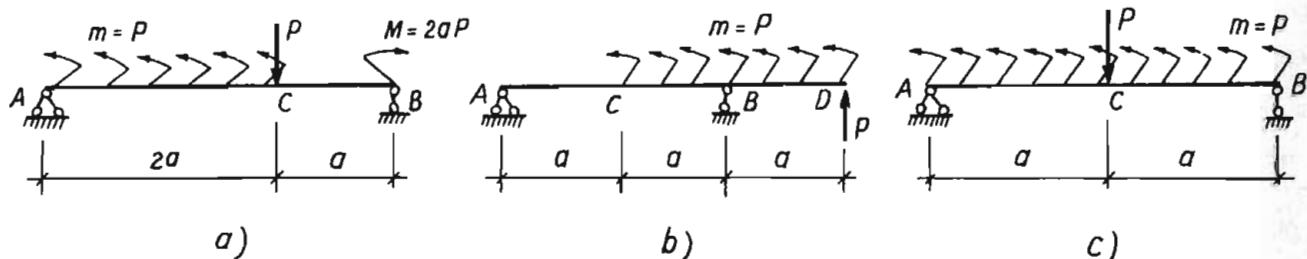
1. Dầm kê ở hai đầu.
2. Dầm kê trên hai gối cách đầu dầm một khoảng a .

Tính khoảng cách a sao cho ứng suất pháp có giá trị nhỏ nhất.

Biết $[\sigma] = 21$ kN/cm², $\gamma = 0,0785$ N/cm³

15-9. Một máng nước có mặt cắt ngang như hình bài 15-9. Máng đặt lên hai cột cách nhau 6 m. Máng làm bằng vật liệu có trọng lượng riêng $\gamma = 18$ kN/m³. Hỏi khi chứa đầy nước thì ứng suất pháp và ứng suất tiếp cực đại là bao nhiêu? Vẽ biểu đồ ứng suất.

15-10. Tính ứng suất pháp lớn nhất của dầm dài $l = 100$ cm chịu lực ở đầu tự do $P = 25180$ N đặt tại điểm A, hình bài 15-10. Xét hai trường hợp:



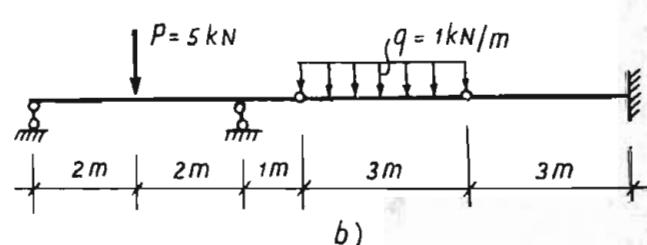
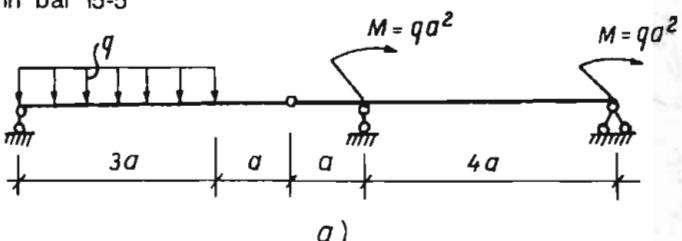
Hình bài 15-5

1. Lực P theo phương thẳng đứng (hình 15-9a)

2. Lực P theo phương nằm ngang (hình 15-9b)

Cho: $b = 200$ mm, $t = 20$ mm,
 $\alpha = 45^\circ$

15-11. Một dầm thép, mặt cắt ngang chữ I chịu tải trọng như hình bài 15-11. Chọn số hiệu của mặt cắt. Kiểm tra độ bền của dầm theo thuyết bền thế năng biến đổi hình dạng lớn

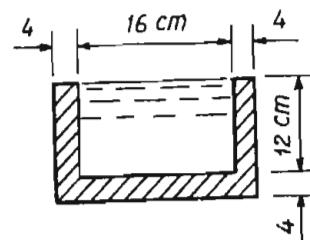


Hình bài 15-6

nhất. Biết $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$.

15-12. Cho đầm thép chịu lực như hình bài 15-12. Biết:

$q = 2,2 \text{ kN/m}$, $p = 12 \text{ kN}$, $l = 0,5 \text{ m}$, $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$. Xác định kích thước mặt cắt hình tròn, hình vuông, hình chữ nhật ($h = 2b$) đặt nằm và đặt đứng thép hình chữ I, hình vành khăn



Hình bài 15-9

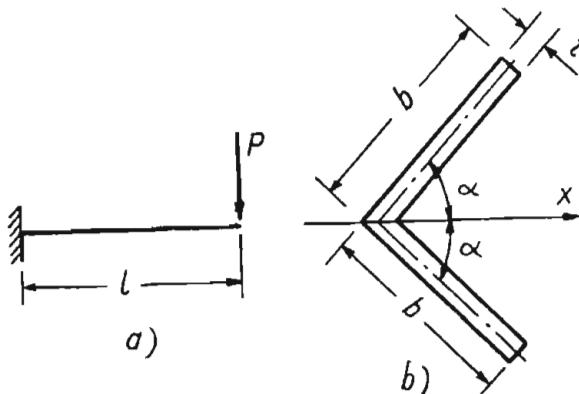
$(\frac{d}{D} = 0,75)$. So sánh trọng lượng của các đầm nói trên.

15-13. Một đầm đỡ ban công mặt cắt chữ I chịu tải trọng phân bố đều và lực tập trung $P = 2000 \text{ N}$. Xác định số hiệu mặt cắt, biết đầm dài $l = 1,5 \text{ m}$ và ứng suất cho phép $[\sigma] = 10000 \text{ N/cm}^2$

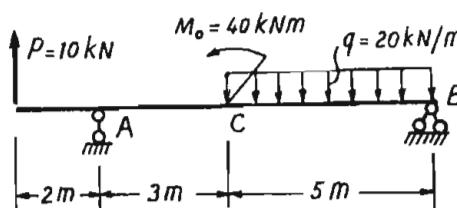
Xác định phản lực tại A và B, xem như đầm tì lên hai điểm A và B (hình bài 15-13).

15-14. Một cần cẩu di động trên đầm cầu tạo bởi hai thanh thép chữ I dài 10 m. Chọn số hiệu mặt cắt đầm (hình bài 15-14). Cho $[\sigma] = 14 \text{ kN/cm}^2$

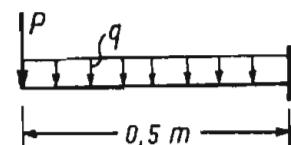
15-15. Xác định đường kính ngoài và đường kính trong của chốt pittông động cơ máy kéo, biết áp lực lên pittông $P_{max} = 22600 \text{ N}$, $d_2 = 0,75 d$, $[\sigma] = 10000 \text{ N/cm}^2$, chiều dài tính toán của chốt $l = 73 \text{ mm}$, chiều rộng đầu thanh truyền $l_1 = 48 \text{ mm}$. Kiểm tra cả điều kiện bền theo ứng suất tiếp cho phép $[\tau] = 5800 \text{ N/cm}^2$. Giả thiết áp lực P_{max} phân bố đều trên mặt ty (hình bài 15-15).



Hình bài 15-10



Hình bài 15-11



Hình bài 15-12

15-16. Xác định đường kính của nám đoạn trục theo điều kiện bền ứng suất pháp và ứng suất tiếp. Trục chịu lực như hình bài

15-6. Biết: $P = 20 \text{ kN}$ và thép làm trục có giới hạn chảy $\sigma_o = 320 \text{ N/mm}^2$, hệ số an toàn $n = 3$ và ứng suất tiếp cho phép

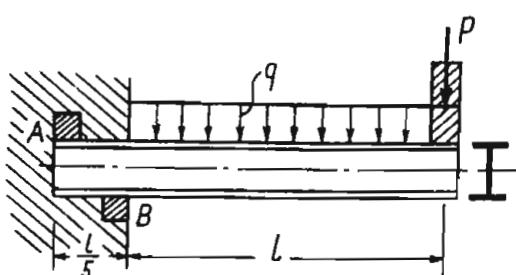
$$[\sigma]$$

$$[\tau] = \frac{\sigma}{\sqrt{3}}$$

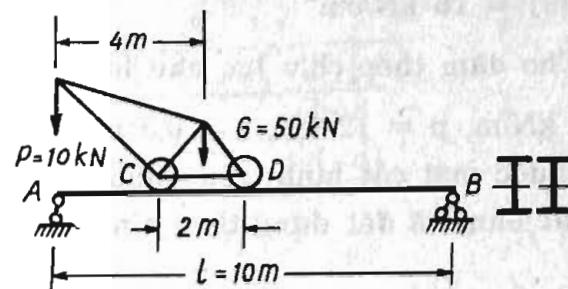
15-17. Từ điều kiện bền của ứng suất pháp, xác định kích thước a, h của mặt cắt. Biết $q = 10 \text{ kN/m}$, $p = 1 \text{ kN}$, $l = 2,4 \text{ m}$ và $[\sigma]_k = 3 \text{ kN/cm}^2$, $[\sigma]_n = 9 \text{ kN/cm}^2$ (hình bài 15-17).

15-18. Một ống gang đựng đầy nước có đường kính ngoài $D = 200 \text{ mm}$, thành ống $t = 10 \text{ mm}$, phải vượt qua một hố rộng. Hãy xác định bề rộng hố để đặt ống không cần trụ đỡ ở giữa. Biết ứng suất cho phép $[\sigma] = 2000 \text{ N/cm}^2$, trọng lượng riêng của gang

$$\gamma = 0,075 \frac{\text{N}}{\text{cm}^3}$$



Hình bài 15-13



Hình bài 15-14

15-19. Xác định kích thước a của mặt cắt ngang của dầm chịu lực như hình bài 15-19 cho hai trường hợp:

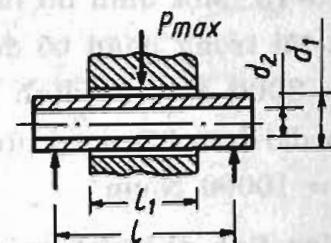
1. Vật liệu làm dầm là vật liệu dẻo có: $[\sigma]_k = [\sigma]_n = 17,5 \text{ kN/cm}^2$.

2. Vật liệu làm dầm là vật liệu dòn có: $[\sigma]_k = 3 \text{ kN/cm}^2$ và $[\sigma]_n = 9 \text{ kN/cm}^2$.

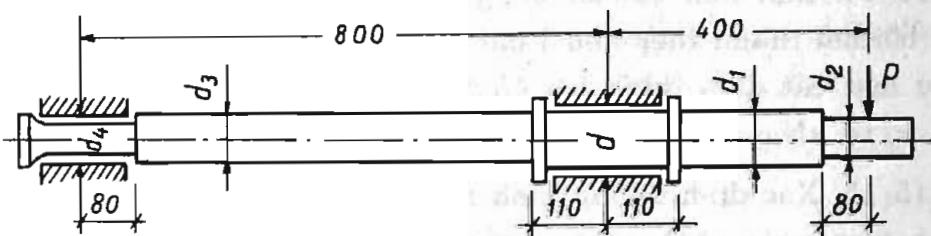
Biết $q = 100 \text{ N/cm}$ và $l = 1 \text{ m}$.

15-20. Một dầm đơn

giản dài $l = 1\text{m}$, chịu tải trọng phân bố đều $q = 600 \text{ N/cm}$. Dầm có mặt cắt ngang là hình chữ nhật $b \times h$, xé từ mặt cắt tròn đường kính d của một cây gỗ (hình 15-20). Xác định



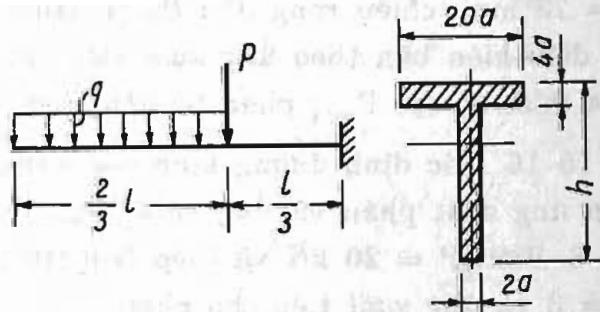
Hình bài 15-15



Hình bài 15-16

tỷ số $\frac{b}{h}$ sao cho mặt cắt hình chữ nhật có mômen chống uốn lớn nhất. Xác định đường kính d của cây gỗ để dầm đạt điều kiện bền, biết $[\sigma] = 1000 \text{ N/cm}^2$

15-21. Người ta dùng dầm gỗ tròn $D = 26 \text{ cm}$ và ván gỗ để đỡ lớp đất cao $H = 2 \text{ m}$ đổ lên trên nắp hầm. Hầm rộng $l = 3 \text{ m}$. Tính khoảng cách a giữa các dầm gỗ và bề dày của ván gỗ. Biết trọng lượng riêng của đất $\gamma = 0,012 \text{ N/cm}^3$ Ứng suất cho phép của gỗ là $[\sigma] = 1000 \text{ N/cm}^2$. Khi tính, xem ván gỗ có hai đầu tì tự do lên hai gối tựa là hai dầm gỗ (hình bài 15-21).



Hình bài 15-17

15-22. Một đập chắn nước làm bằng ván gỗ tựa vào những cột chống bằng gỗ vuông. Tính bề dày t của ván gỗ và cạnh c của cột chống. Khoảng cách giữa hai cột chống $d = 100 \text{ cm}$; chiều cao của nước $H = 200 \text{ cm}$. Ứng suất cho phép của gỗ $[\sigma] = 400 \text{ N/cm}^2$ (hình bài 15-22).

Xem ván như những dầm đơn giản tựa lên hai cột và xem cột chống có ngầm ở độ sâu $h = 24$ cm dưới mặt đất.

15-23. Vẽ biểu đồ nội lực của dầm tĩnh định hai nhịp chịu tải trọng như trên hình bài 15-23. Chọn số hiệu mặt cắt gồm hai hình chữ [có xét đến trọng lượng dầm]. Vẽ biểu đồ ứng suất pháp tại mặt cắt B.

Cho $[\sigma] = 160 \text{ MN/cm}^2$; $[\tau] = 100 \text{ MN/m}^2$

15-24. Tại mặt cắt nguy hiểm nhất của một dầm chữ nhật có mômen $M = 12 \text{ kNm}$, lực cắt $Q = 40 \text{ kN}$. Tính kích thước mặt cắt

dầm biết $\frac{b}{h} = \frac{1}{12}$ $[\sigma] = 10 \text{ kN/cm}^2$, $[\tau] = 5,78 \text{ kN/cm}^2$

15-25. Xác định kích thước hợp lý của dầm chống uốn đều chịu lực như hình bài 15-25. Dầm có mặt cắt ngang là hình chữ nhật.

1. Chiều cao h không đổi, tính b (z).
2. Chiều rộng b không đổi tính h (z). Cho biết P , l , $[\sigma]$ và $[\tau]$.

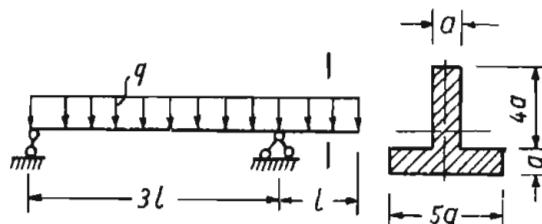
15-26. Tính ứng suất lớn nhất của nhịp xe dạng côngxon có chiều dài $l = 55 \text{ cm}$, $h = 0,5 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$. Lực tác dụng ở đầu mút $P = 1250 \text{ N}$. Số lá nhịp $n = 7$ (hình bài 15-26).

15-27. Một côngxon có mặt cắt ngang là hình chữ nhật bề rộng không đổi, chiều cao thay đổi h_0 và h . Xác định tỷ số $\frac{h}{h_0}$ và $\frac{a}{l}$ sao cho dầm có trọng lượng bé nhất mà vẫn đảm bảo điều kiện bền (hình bài 15-27):

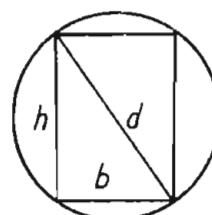
1. Trường hợp có lực tập trung P tại đầu tự do của dầm.
2. Trường hợp lực phân bố đều q dọc chiều dài dầm.

15-28. Xác định tải trọng lớn nhất có thể tác dụng lên côngxon gồm 4 cây gỗ tròn ghép lại. Cho $d = 16 \text{ cm}$ và $[\sigma] = 1000 \text{ N/cm}^2$. Để xét đến biến dạng của thanh ghép dầm, khi tính mômen chống uốn chỉ lấy 80% giá trị của hình nguyên vẹn (hình bài 15-28).

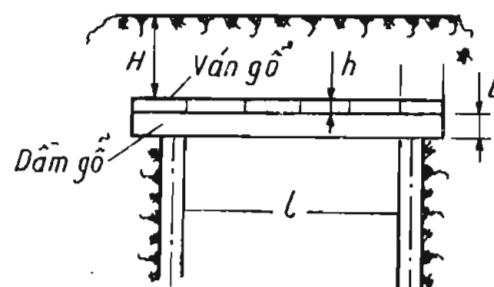
15-29. Một thiết bị gồm tay kéo và đòn khuỷu ABC, (hình bài 15-29) đòn khuỷu xoay tự do xung quanh khớp B. Khi hám với lực kéo là P_1 thì lực ti lên bánh xe tại C là P_2 . Xác định giá trị P_1 và P_2 . Biết mặt cắt đòn khuỷu tại B có



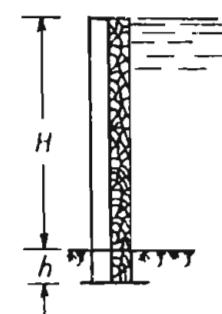
Hình bài 15-19



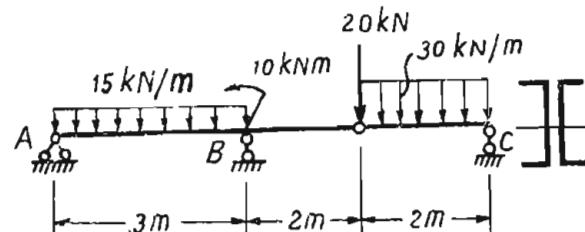
Hình bài 15-20



Hình bài 15-21

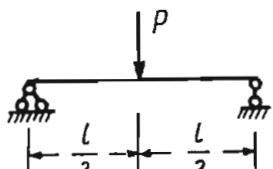


Hình bài 15-22



Hình bài 15-23

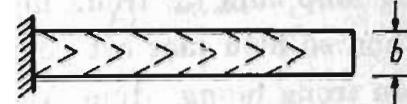
$b = 2 \text{ cm}$, $h = 6 \text{ cm}$,
đường kính $d = 20 \text{ mm}$ và ứng suất cho phép $[\sigma] = 14 \text{ kN/cm}^2$, $a = 25 \text{ cm}$.



Hình bài 15-25.

15-30. Cho dầm thép như trên hình

bài 15-30. Tính tải trọng cho phép, biết $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$.



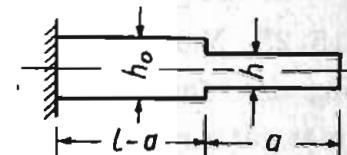
Hình bài 15-26

15-31. Có dầm thép chịu lực như hình bài 15-31. Mặt cắt ngang dầm gồm hai thép chữ [số 36 và hai bản nắp ghép lại. Tính tải trọng q có thể đặt vào dầm bù qua ứng suất tiếp.

15-32. Xác định đường đàn hồi của dầm AB bằng phương pháp tích phân không định hạn, biết $M_o = 20 \text{ kNm}$ (hình bài 15-32).

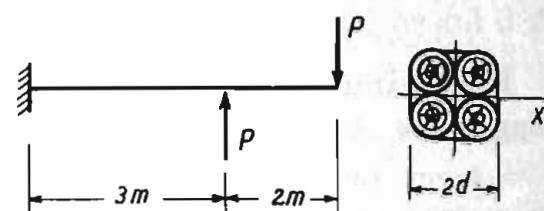
15-33. Tìm độ võng tại mặt cắt C và B của dầm chịu lực như hình bài 15-33 bằng phương pháp tích phân không định hạn.

15-34. Xác định góc xoay tại gối A và B, độ võng tại C của dầm như hình bài 15-34.



Hình bài 15-27

15-35. Bằng phương pháp đồ toán, tìm độ võng và góc xoay tại đầu tự do của dầm. Dầm chịu lực như hình bài 15-35. Viết phương trình đường đàn hồi của dầm.



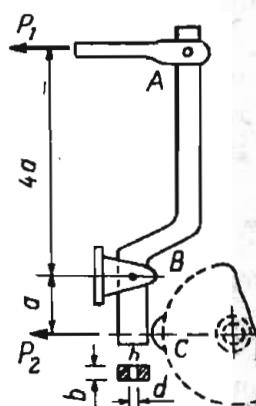
Hình bài 15-28.

15-36. Dầm có độ cứng không đổi chịu lực như hình bài 15-36. Xác định:

Độ võng và góc xoay tại mặt cắt C.

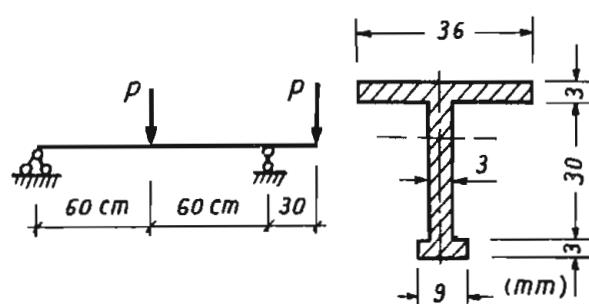
Góc xoay tại hai gối tựa A và B.

Độ võng tại mặt cắt D.



15-37. Dầm có mặt cắt ngang thay đổi và chịu lực như hình bài 15-37. Tính độ võng tại đầu tự do và góc xoay tại mặt cắt ngang giữa dầm.

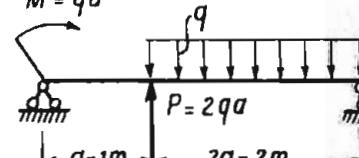
15-38. Dầm có độ cứng không đổi chịu tải trọng



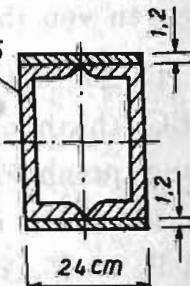
Hình bài 15-30

Hình bài 15-29

$$M = qa^2$$

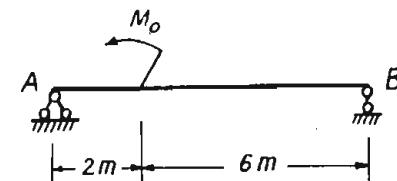


Bài hình 15-31

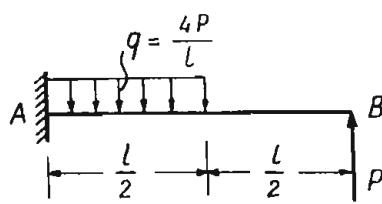


phân bố đều dọc dầm. Tính độ vông tại mặt cắt D và mặt cắt A, góc xoay tại mặt cắt A (hình bài 15-38).

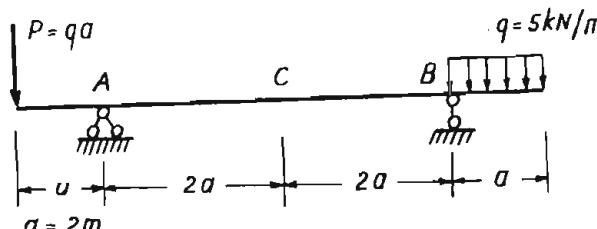
15-39. Xác định độ vông và góc quay lớn nhất về giá trị tuyệt đối của dầm. P, M, α , E và I_{max} coi như đã biết trong các hình bài 15-39.



Hình bài 15-32



Hình bài 15-33

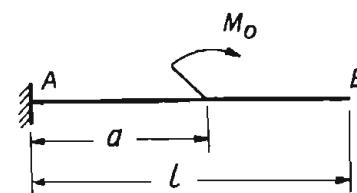


Hình bài 15-34

15-40. Bằng phương pháp đồ toán xác định độ vông và góc xoay ở đầu C của dầm chịu lực P = 40 kN như trên hình bài 15-40. Hai đoạn dầm có độ cứng khác nhau.

15-41. Xác định độ vông f_C của mặt cắt C và góc quay θ của mặt cắt D. Các đại lượng P, a, E, I_{max} coi như đã biết trong các hình bài 15-41.

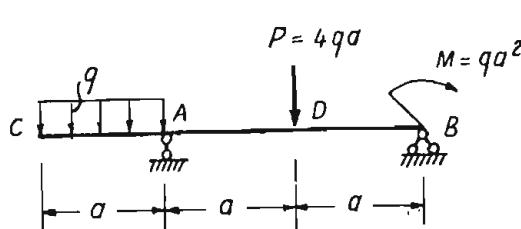
15-42. Xác định tải trọng P cho phép của dầm chịu lực như hình bài 15-42 theo điều kiện bền và cứng. Mặt cắt của dầm là thép định hình chữ I số hiệu 33, $E=2.10^4$ kN/cm², $[\sigma]=16$ kN/cm², $\frac{f}{l} = \frac{1}{800}$ và $a = 60$ cm.



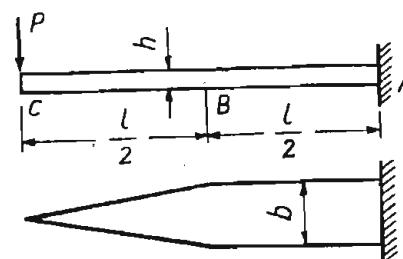
Hình bài 15-35.

15-43. Dầm có mặt cắt gồm hai hình chữ [chịu lực như hình bài 15-43. Chọn số hiệu mặt cắt để dầm bảo đảm độ bền và độ cứng. Cho P = 40 kN, l = 3 m, $[\sigma] = 16$.kN/cm²,

$$E = 2.10^4 \text{ kN/cm}^2, \frac{f}{l} = \frac{1}{400}$$



Hình bài 15-36



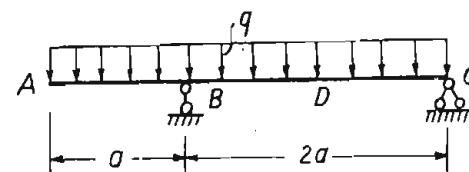
Hình bài 15-37

15-44. Chọn kích thước mặt cắt ngang hình chữ nhật

($\frac{h}{b} = \frac{5}{3}$) của dầm chịu lực như hình vẽ 15-44. Biết

P = 800 N, E = 1.10^6 N/cm² và $[\sigma] = 1200$ N/cm²,

$$\frac{f}{l} = \frac{1}{200}$$



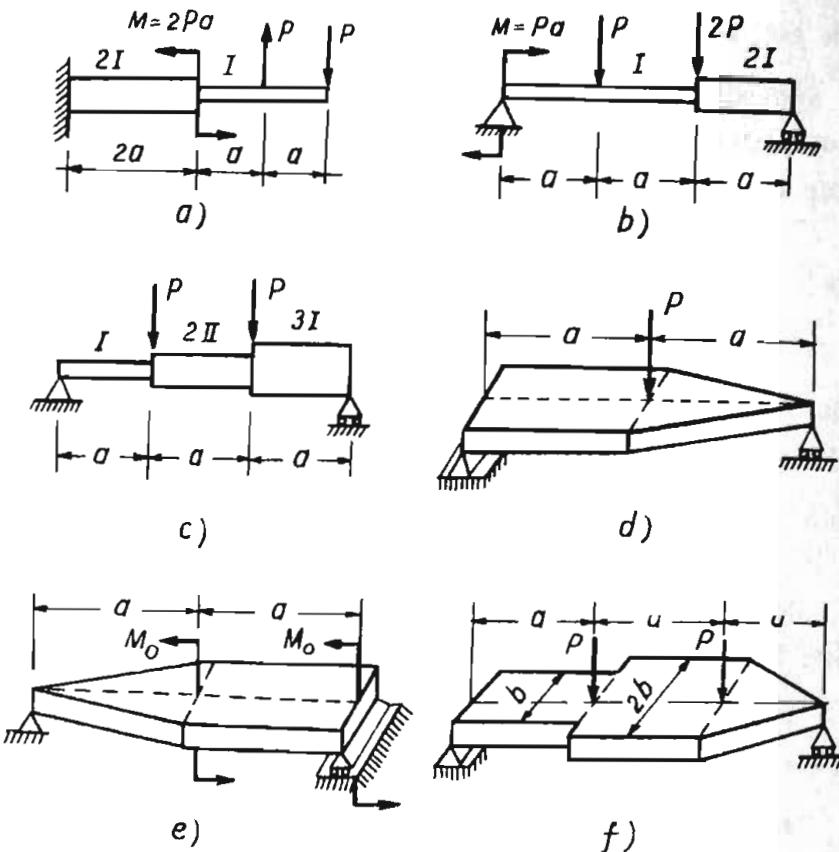
Hình bài 15-38

15-45. Viết phương trình đường đàn hồi của dầm siêu tĩnh chịu tải trọng phân bố đều q như hình bài 15-45.

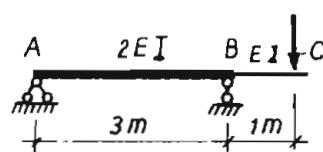
15-46. Có hai dầm cùng vật liệu đặt đè lên nhau ở giữa nhịp như trên hình bài 15-46. Tải trọng tác dụng lên dầm $P = 20 \text{ kN}$. Kích thước dầm ghi trên hình vẽ. Tính ứng suất lớn nhất và độ vông của mỗi dầm. Cho $E = 10^3 \text{ kN/cm}^2$.

15-47. Một thanh thép dài 1m, mặt cắt hình chữ nhật $b \times h = 20 \times 6 \text{ mm}$, ngàm ở đầu A, chịu một lực $P = 30 \text{ N}$ đặt ở giữa nhịp. Kiểm tra độ bền của dầm biết rằng $[\sigma] = 160 \text{ MN/m}^2$. Ở đầu B có khe hở $\delta = 20 \text{ mm}$. Cho $E = 2.10^5 \text{ MN/m}^2$ (hình bài 15-47)

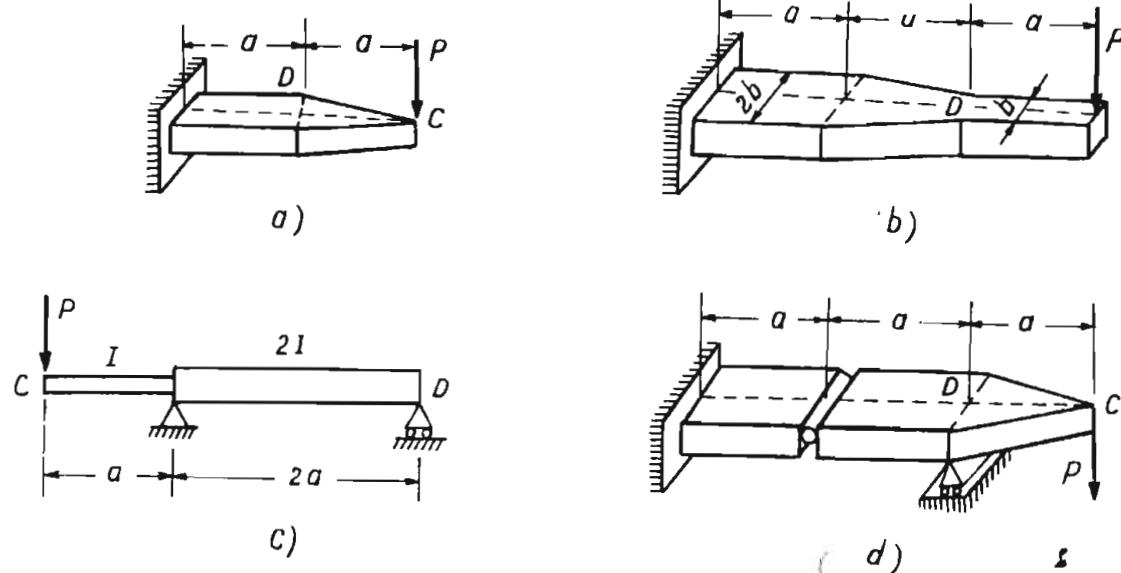
15-48. Xác định phản lực tại ngàm của dầm siêu tĩnh chịu tải trọng như hình bài 15-48.



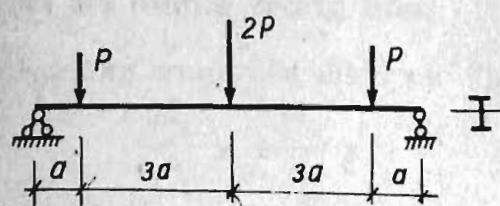
Hình bài 15-39



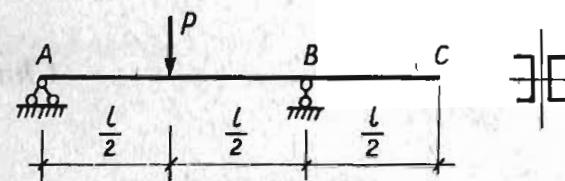
Hình bài 15-40



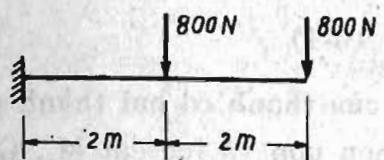
Hình bài 15-41



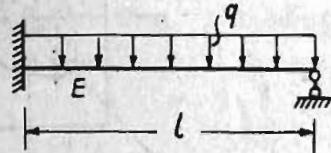
Hình bài 15-42



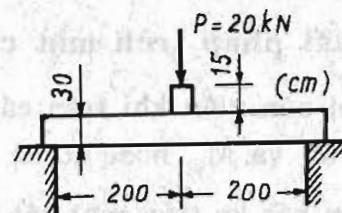
Hình bài 15-43



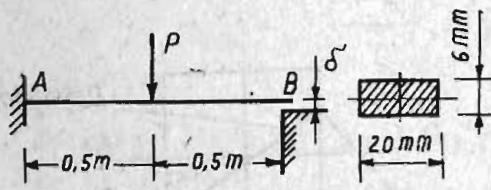
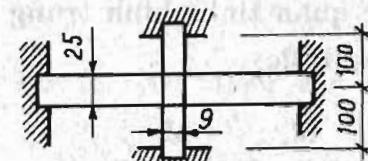
Hình bài 15-44



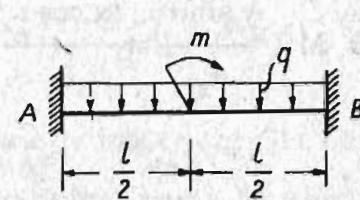
Hình bài 15-45



Hình bài 15-46



Hình bài 15-47



Hình bài 15-48

Chương 16

TÍNH THANH CHIU LỰC PHỨC TẠP

§16-1. UỐN XIÊN

1-1. Ứng suất pháp trên mặt cắt ngang (hình 16-1)

Một thanh bị uốn xiên khi trên các mặt cắt ngang của thanh có hai thành phần nội lực là mômen uốn M_x và M_y , hoặc có cả thành phần mômen uốn và lực cắt M_x , Q_y , M_y , Q_x .

Tại một điểm bất kỳ trên mặt cắt ngang có tọa độ x, y , (Oxy

là hệ trục quán tính chính trung tâm), ứng suất pháp được tính theo công thức:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x \quad (16-1)$$

hoặc

$$\sigma_z = M \left(\frac{y \cdot \sin\alpha}{I_x} + \frac{x \cdot \cos\alpha}{I_y} \right) \quad (16-2)$$

Trong đó:

$$M_x = M \sin\alpha$$

$$M_y = M \cos\alpha$$

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} \quad (16-3)$$

α góc giữa trục x và đường tải trọng (hình 16-2) do đó hệ số góc của đường tải trọng là

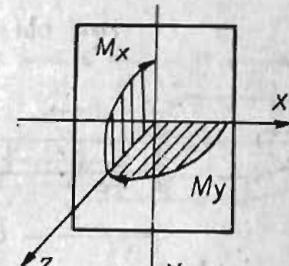
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{M_x}{M_y} \quad (16-4)$$

M_x, M_y được coi là dương khi làm căng các thớ ở phía chiều dương của trục y và trục x (hình 16-1).

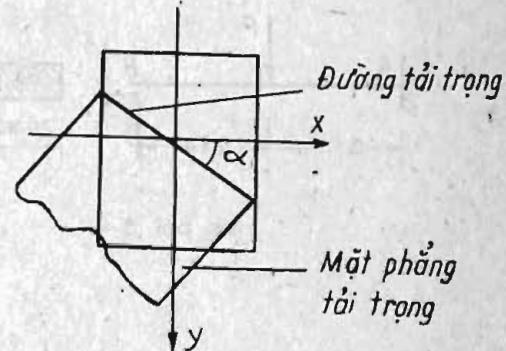
Để không cần chú ý đến dấu của tọa độ x, y và M_x, M_y trong kỹ thuật sử dụng công thức sau:

$$\sigma_z = \pm \frac{|M_x|}{I_x} |y| \pm \frac{|M_y|}{I_y} |x| \quad (16-5)$$

Trong đó các giá trị đều lấy trị số tuyệt đối. Còn lấy dấu cộng hay trừ trước mỗi số hạng thì tùy theo các mômen uốn M_x và M_y gây ra ứng suất kéo hay nén ở điểm đang xét.



Hình 16-1



Hình 16-2

1-2. Vị trí đường trung hòa.

Vị trí đường trung hòa được xác định bởi phương trình:

$$\frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x = 0 \quad (16-6)$$

hoặc $y = -\frac{I_x}{I_y} \cdot \frac{M_y}{M_x} x = -\tan\beta \cdot x$

với

$$\tan\beta = -\frac{I_x}{I_y} \cdot \frac{M_y}{M_x} = -\tan\alpha \cdot \frac{I_x}{I_y} \quad (16-7)$$

β - góc nghiêng giữa đường trung hòa với trục x,

1-3. Ứng suất pháp cực đại và cực tiểu.

Những điểm có ứng suất pháp cực trị là những điểm xa trục trung hòa nhất và được tính theo công thức

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_x|}{I_x} \cdot |y_k| + \frac{|M_y|}{I_y} |x_k| \quad (16-8)$$

$$\sigma_{\min} = -\frac{|M_x|}{I_x} \cdot |y_n| - \frac{|M_y|}{I_y} |x_n| \quad (16-9)$$

Trong đó x_k, y_k - tọa độ của điểm chịu kéo cách xa đường trung hòa nhất.

x_n, y_n tọa độ của điểm chịu nén cách xa đường trung hòa nhất.

Nếu mặt cắt ngang có hai trục quán tính chính trung tâm đều là các trục đối xứng thì do $|x_k| = |x_n| ; |y_k| = |y_n|$
ta có

$$\sigma_{\max} = |\sigma_{\min}|$$

Trường hợp mặt cắt ngang có hai trục đối xứng như (hình 16-1) trị số ứng suất pháp cực trị được viết dưới dạng

$$\sigma_{\max} = |\sigma_{\min}| = \frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} \quad (16-10)$$

trong đó $W_x = \frac{I_x}{|y_{\max}|} ; W_y = \frac{I_y}{|x_{\max}|}$ (16-11)

1-4. Ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang.

Ứng suất tiếp tổng hợp có thể tính gần đúng bằng tổng hình học của các ứng suất tiếp do Q_x và Q_y gây ra. Ứng suất này thường rất bé, do đó có thể không xét đến trong tính toán thực tế.

1-5. Điều kiện bền của đầm chịu uốn xiên

Khi đã bỏ qua ảnh hưởng của ứng suất tiếp. Điểm nguy hiểm là điểm có ứng suất pháp cực trị. Trạng thái ứng suất của điểm nguy hiểm là trạng thái ứng suất đơn. Do đó điều kiện bền là:

- Đối với vật liệu dẻo:

$$|\sigma_{\max}| \leq [\sigma] \quad (16-12)$$

- Đối với vật liệu giòn:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma_k] \quad (16-13)$$

$$\sigma_{\min} \leq [\sigma_n] \quad (16-14)$$

Từ các điều kiện bền, ta cũng rút ra ba bài toán cơ bản:

Kiểm tra bền thỏa mãn điều kiện (16-12) hoặc (16-13) (16-14).

Tìm tải trọng cho phép.

Chọn kích thước mặt cắt ngang. Riêng bài toán chọn kích thước có phức tạp hơn, ví dụ, theo (16-8) và (16-9) ta có nhiều đại lượng chưa biết như I_x ; I_y ; x_k ; y_k ; x_n ; y_n . Do đó phải tiến hành theo phương pháp thử dần.

Ví dụ: Theo (16-10) thì điều kiện bền (16-12) sẽ có dạng

$$\frac{M_x + CM_y}{W_x} \leq [\sigma]$$

từ đó ta có

$$W_x \geq \frac{M_x + CM_y}{[\sigma]}$$

trong đó

$$C = \frac{W_x}{W_y}$$

Với mặt cắt hình chữ nhật chiều cao h , chiều rộng b thì $C = \frac{h}{b}$, đối với thép cán định hình I có thể chọn lần đầu $C = 8$.

Với hình chữ U chọn lần đầu $C = 6$.

1-6. Tính chuyển vị.

Độ vồng f và góc xoay θ của mặt cắt nào đó của đầm bị uốn xiên bằng tổng hình học độ vồng và góc xoay do các thành phần mômen uốn tác dụng trong các mặt phẳng quán tính chính trung tâm của đầm, tức là:

$$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}; \quad \theta = \sqrt{\theta_x^2 + \theta_y^2} \quad (16-15)$$

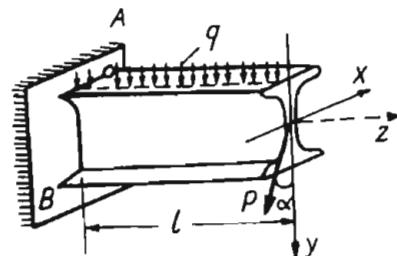
trong đó f_x , f_y - độ vồng theo phương trực x và trực y;

θ_x , θ_y - góc xoay của mặt cắt xung quanh trực x và trực y.

Phương của độ vồng tại mặt cắt nào đó được xác định bởi công thức:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{f_y}{f_x}$$

còn góc quay tổng hợp của mặt cắt là góc mà mặt cắt quay xung quanh đường trung hòa.



Hình 16-3A

Ví dụ 16-1. Cho $p = 2400 \text{ N}$, $q = 4000 \text{ N/m}$

$$l = 2 \text{ m}; \alpha = 30^\circ; E = 2 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2;$$

$$[\sigma] = 16.000 \text{ N/cm}^2.$$

Xác định số hiệu mặt cắt dầm thép hình chữ I và vị trí đường trung hòa (hình 16-3A).

Bài giải (hình 16-3B)

Mômen uốn cực đại ở ngàm

$$M_{y\max} = Pl \sin \alpha = 240 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 2400 \text{ Nm}$$

$$M_{x\max} = \frac{pl^2}{2} + Pl \cos \alpha = \frac{400 \cdot 4}{2} + 240 \cdot 2 \cdot 0,866 = 12160 \text{ Nm}$$

Thử lần thứ nhất, ta lấy $c = 8$.

Thay vào công thức mômen chống uốn:

$$W_x = \frac{M_x + cM_y}{[\sigma]} = \frac{1216 + 8 \cdot 240}{1600} \cdot 100 = 196 \text{ cm}^3$$

Ta chọn mặt cắt dầm thép chữ I số 20 có giá trị mômen chống uốn nhỏ hơn và gần nhất:

$$W_x = 184 \text{ cm}^3, W_y = 23,1 \text{ cm}^3.$$

Tại điểm A và B ở mặt cắt ngàm ta có $|\sigma_{\max}| = |\sigma_{\min}|$ do đó

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{z\max}}{W_x} + \frac{M_{y\max}}{W_y} = \frac{121600}{184} + \frac{24000}{23,1} \approx 17000 \text{ N/cm}^2$$

Vì

$$\frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100 = \frac{17000 - 1600}{1600} \cdot 100 \approx 6,2 \% \quad 5\%$$

do đó ta lấy mặt cắt số 20a với $W_x = 203 \text{ cm}^3, W_y = 28,2 \text{ cm}^3$ khi đó:

$$\sigma_{\max} = \frac{121600}{203} + \frac{24000}{28,2} = 14500 \text{ N/cm}^2$$

Ứng suất nhỏ hơn

$$\frac{1600 - 1450}{1600} \cdot 100 \approx 9,4\%$$

Đối với mặt cắt số 20a, $I_y = 155 \text{ cm}^4$, $I_x = 2030 \text{ cm}^4$, do đó ở mặt cắt ngầm $\tan \beta = (I_x M_{y\max}) / (I_y M_{x\max}) = 2030 \cdot 240 / (155 \cdot 1216) \approx 2,58$ và $\beta = 68^\circ 50'$.

Trên hình 16-3B có vẽ đường trung hòa nn và biểu đồ ứng suất pháp σ của mặt cắt ngầm.

Ví dụ 16-2

Một công xon có mặt cắt thay đổi chịu lực như trên hình 16-4. Biết $P_1 = 1,63 \text{ P}$ và $h = 2b$

Xác định giá trị và phương của độ võng ở đầu tự do.

Bài giải

Dầm có mặt cắt thay đổi nên độ võng toàn phần bằng tổng độ võng trong từng đoạn.

Gọi J_{x1}, J_{y1} là các mômen quán tính của phần dầm có mặt cắt hình chữ nhật, J_{x2}, J_{y2} là mômen quán tính của phần dầm có mặt cắt hình tròn.

$$J_{x1} = \frac{bh^3}{12} = \frac{2b^4}{3}$$

$$J_{y1} = \frac{hb^3}{12} = \frac{b^4}{6}$$

$$J_{x2} = J_{y2} = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi (b\sqrt{5})^4}{64} = \frac{25\pi b^4}{64}$$

Bằng các phương pháp tìm độ võng đã biết, ta có:

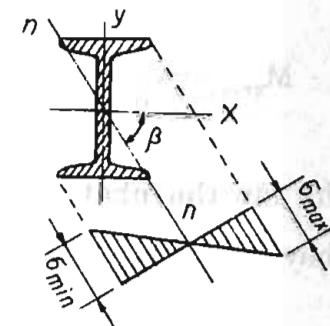
$$f_y = \frac{P_1 a^3}{3EJ_{x1}} + \frac{7P_1 a^3}{3EJ_{x2}}$$

$$f_x = \frac{Pa^3}{3EJ_{x1}} + \frac{7Pa^3}{3EJ_{y2}}$$

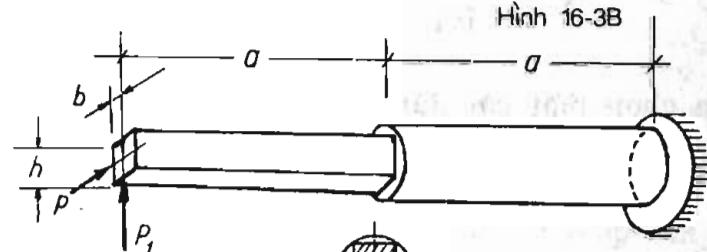
$$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{\left(\frac{P_1 a^3}{3EJ_{x1}} + \frac{7P_1 a^3}{3EJ_{x2}}\right)^2 + \left(\frac{Pa^3}{3EJ_{y1}} + \frac{7Pa^3}{3EJ_{y2}}\right)^2}$$

Thay các giá trị mômen quán tính vừa tìm được ở trên và $P_1 = 1,63 \text{ P}$ vào biểu thức. Cuối cùng ta được:

$$f_{\max} = 5,5 \frac{Pa^3}{Eb^4}$$



Hình 16-3B



Hình 16-4

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{f_y}{f_x}$$

Với $f_y = 3,912 \frac{\text{Pa}^3}{\text{Eb}^4}$, $f_x = 3,9 \frac{\text{Pa}^3}{\text{Eb}^4}$

ta được $\gamma = 45^\circ$

§16-2. UỐN VÀ KÉO NÉN ĐỒNG THỜI.

2-1. Ứng suất pháp trên mặt cắt ngang.

Một thanh chịu uốn và kéo nén đồng thời khi trên các mặt cắt ngang của thanh có các thành phần nội lực là lực dọc và mômen uốn hoặc có cả thành phần lực cắt.

Ứng suất pháp tại một điểm bất kỳ trên mặt cắt ngang có tọa độ x, y được xác định theo công thức:

$$\sigma_z = \frac{N_z}{F} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x \quad (16-16)$$

hoặc theo công thức kỹ thuật

$$\sigma_z = \pm \frac{|N_z|}{F} \pm \frac{|M_x|}{I_x} |y| \pm \frac{|M_y|}{I_y} |x| \quad (16-17)$$

Chọn dấu tương tự như trong uốn xiên

2-2. Vị trí đường trung hòa.

Vị trí đường trung hòa được xác định bởi phương trình:

$$\frac{N_z}{F} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x + = 0 \quad (16-18)$$

hoặc $1 + \frac{M_x \cdot y}{N_z \cdot i_{x2}} + \frac{M_y \cdot x}{N_z \cdot i_{y2}} = 0 \quad (16-19)$

trong đó i_x , i_y bán kính quán tính chính, $i^2 = \frac{I}{F}$

F diện tích mặt cắt ngang.

i_x , i_y - mômen quán tính chính trung tâm của mặt cắt ngang.

2-3. Ứng suất pháp cực đại và cực tiểu.

Ứng suất pháp có giá trị cực đại và cực tiểu tại những điểm tiếp xúc của chu tuyến mặt

cắt với các đường thẳng song song với đường trung hòa.

Nếu thanh có mặt cắt ngang có hai trục đối xứng, tương tự ký hiệu trong uốn xiên ta có

$$\sigma_{\max} = \pm \frac{|\mathbf{N}_z|}{F} + \frac{|\mathbf{M}_x|}{W_x} + \frac{|\mathbf{M}_y|}{W_y} \quad (16-20)$$

$$\sigma_{\min} = \pm \frac{|\mathbf{N}_z|}{F} - \frac{|\mathbf{M}_x|}{W_x} - \frac{|\mathbf{M}_y|}{W_y} \quad (16-21)$$

2-4. Điều kiện bền.

Bỏ qua ảnh hưởng của ứng suất tiếp được tính như trong uốn xiên. Trạng thái ứng suất của điểm nguy hiểm là trạng thái ứng suất đơn. Do đó điều kiện bền là:

Đối với vật liệu dẻo

$$|\sigma_{\max}| \leq [\sigma] \quad (16-22)$$

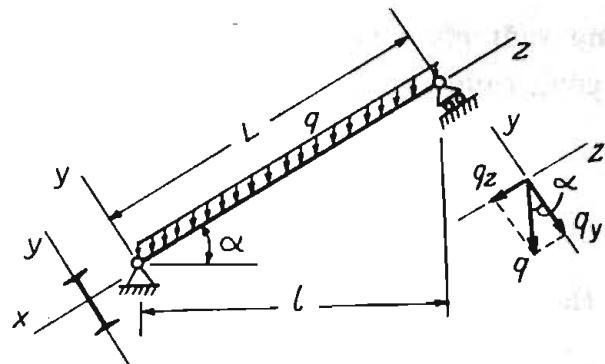
Đối với vật liệu giòn

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma_k] \quad (16-13)$$

$$\sigma_{\min} \leq [\sigma_n] \quad (16-24)$$

Ví dụ 16-3. Cho $q = 6 \text{ kN/m}$; $L = 6 \text{ m}$; $\alpha = 30^\circ$;

$[\sigma] = 140 \text{ MN/m}^2$ (hình 16-5). Chọn số hiệu mặt cắt đầm thép chữ I.



Hình 16-5

Bài giải

Hình chiếu của tải trọng q lên trục z và trục y (hình 16-5):

$$q_z = q \sin \alpha; q_y = q \cos \alpha$$

Thành phần q_z phân bố đều trên chiều dài l tạo ra biến dạng nén. Thành phần q_y làm đầm bị uốn ngang. Mômen uốn cực đại ở mặt cắt giữa nhịp đầm:

$$M_{\max} = q_y l^2 / 8 = q L^2 (8 \cos \alpha).$$

Ta lấy giá trị này để thử chọn mặt cắt lần thứ nhất. Khi đó

$$W_x = \frac{M_{\max}}{|\sigma|} = \frac{q L^2}{8[\sigma] \cos \alpha} = \frac{6000.36}{8 \cdot 14 \cdot 10^7 \cdot 0,866} = 2,23 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 = 223 \text{ cm}^3$$

Mặt cắt chữ I số 22 có mômen chống uốn lớn hơn và gần nhất với giá trị này: $W_x = 232 \text{ cm}^3$; $F = 30,6 \text{ cm}^2$

Ở mặt cắt có M_{\max} tác dụng lực nén dọc bằng:

$$N_z = \frac{L}{2} = -\frac{qz}{2} = \frac{qL}{2} \operatorname{tg}\alpha$$

Ta kiểm tra mặt cắt đã chọn ở trên khi có xét thêm lực dọc:

$$\sigma_{\max} = \frac{|N_z|}{F} + \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{6000 \cdot 6}{2 \cdot 30,6 \cdot 10^{-4} \sqrt{3}} + \frac{6000 \cdot 36}{8 \cdot 232 \cdot 10^{-6} \cdot 0,866} = \\ = 137,8 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 = 137,8 \text{ MN/m}^2.$$

Ứng suất nhỏ hơn

$$\frac{[\sigma]}{\sigma} \frac{|\sigma_{\max}|}{100} = \frac{2,2}{140} \cdot 100 = 1,6\%$$

Thực ra ứng suất lớn nhất ở tại mặt cắt bên trái mặt cắt giữa nhịp một đoạn khá bé do đó ảnh hưởng không đáng kể. Thật vậy, đối với một mặt cắt bất kỳ ta có:

$$|\sigma|_{\max} = \frac{1}{W} \left(\frac{qlz}{2} \cos\alpha - \frac{qz^2}{2} \cos\alpha \right) + \frac{a(l-z)}{F} \sin\alpha$$

Vì $\frac{d|\sigma|_{\max}}{dz} = \frac{ql}{2W} \cos\alpha - \frac{qz}{W} \cos\alpha - \frac{q}{F} \sin\alpha = 0,$

nên mặt cắt nguy hiểm ở cách gối trái một đoạn ~ bằng:

$$z = \frac{1}{2} \cdot \frac{W}{F} \operatorname{tg}\alpha = \frac{6 \cdot 2}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{232 \cdot 10^{-6}}{30,6 \cdot 10^{-4} \sqrt{3}} = 3,420 \text{ m},$$

Mặt cắt giữa nhịp là $\frac{1}{2}L = 3 \text{ m.}$

Ở mặt cắt này ($z = 3,420 \text{ m}$)

$$|\sigma|_{\max} = \frac{1}{232 \cdot 10^{-6}} \left(\frac{6000 \cdot 6}{2} \cdot 3,420 - \frac{6000}{2} \cdot 3,420^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{6000 \cdot 3,508}{30,6 \cdot 10^{-4} \cdot 2} = \\ = 137,85 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 = 137,85 \text{ MN/m}^2$$

tức là lớn hơn ứng suất ở mặt cắt giữa nhịp gần 0,05%.

§16-3. KÉO NÉN LỆCH TÂM

Kéo - nén lệch tâm là trường hợp đặc biệt của thanh chịu uốn cong kéo-nén. Ngoại lực tác dụng trong trường hợp này có phương song song với trục của thanh, nhưng điểm đặt ở ngoài trọng tâm của các mặt cắt ngang khảo sát. Ví dụ (hình 16-6), khi đó tại mặt cắt ngang bất kỳ thành phần nội lực có các giá trị:

$$M_x = N \cdot y_c; \quad M_y = N \cdot x_c; \quad N_z = N$$

Ứng suất pháp tại một điểm bất kỳ trên mặt cắt ngang

$$\sigma_z = \frac{N_z}{F} + \frac{P \cdot y_c}{I_x} + \frac{P \cdot x_c}{I_y} \quad (16-25)$$

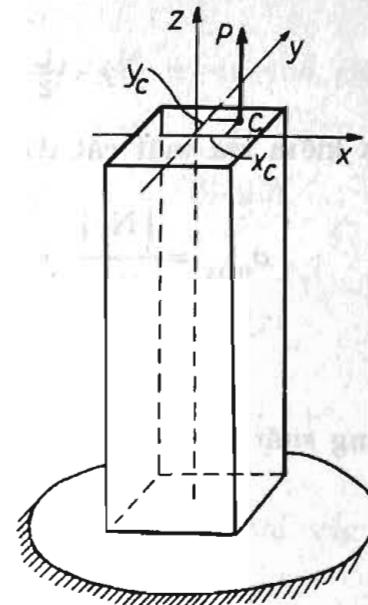
hoặc

$$\sigma_z = \frac{N_z}{F} \left(1 + \frac{y_c \cdot y}{i_x^2} + \frac{x_c \cdot x}{i_y^2} \right) \quad (16-26)$$

Trong đó x_c, y_c tọa độ của điểm đặt lực, các ký hiệu khác như trong uốn cộng kéo - nén.

Dường trung hòa xác định từ phương trình:

$$1 + \frac{y_c \cdot y}{i_x^2} + \frac{x_c \cdot x}{i_y^2} = 0 \quad (16-27)$$



Hình 16-6

Vì kéo - nén lệch tâm là trường hợp đặc biệt của uốn cộng kéo - nén, nên cách tính trị số ứng suất cực đại và cực tiểu, việc kiểm tra bền làm tương tự như uốn cộng kéo - nén.

Ví dụ 16-4. Một cột có mặt cắt hình vuông bị nén lệch tâm trên trục y. Ứng suất tại điểm A bằng $+200 \text{ N/cm}^2$, tại B bằng không.

Hỏi tải trọng tác dụng lên cột, độ lệch tâm và ứng suất nén lớn nhất ở cột (hình 16-7).

Bài giải

$$\sigma_A = \frac{P}{40^2} \left(1 + \frac{-20 \cdot x_k \cdot 12}{40^2} \right) = 200 \text{ N/cm}^2 \quad (a)$$

$$\sigma_B = \frac{P}{40^2} \left(1 + \frac{-10 \cdot x_k \cdot 12}{40^2} \right) = 0 \quad (b)$$

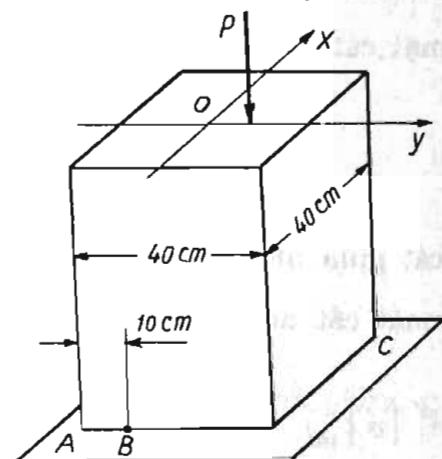
Từ phương trình (b) ta xác định được độ lệch tâm x_k :

$$1 + \frac{-10 \cdot x_k \cdot 12}{40^2} = 0$$

hay $x_k = \frac{40^2}{12 \cdot 10} = \frac{40}{3} \text{ cm.}$

Thay vào (a), được: $\frac{P}{40^2} \left(1 - \frac{20 \cdot 40 \cdot 12}{40^2 \cdot 3} \right) = 200$

Rút ra $P = 32 \cdot 10^4 \text{ N.}$



Hình 16-7

$$\sigma_c = \frac{32 \cdot 10^4}{40^2} \left(1 + \frac{20 \cdot 40 \cdot 12}{40^2 \cdot 3} \right) = 600 \text{ N/cm}^2$$

Ví dụ 16-5. Một dụng cụ đẽ kẹp có dạng như hình 16-8. Cho: $h = 15 \text{ mm}$, $b = 5 \text{ mm}$, $= 50 \text{ mm}$. Tính mômen của ngẫu lực có thể đặt vào tay vặn để cho ứng suất lớn nhất ở thân giá không vượt quá ứng suất cho phép.

Cho $[\sigma] = 160 \text{ MN/m}^2$. Bước của răng ốc vít $\lambda = 1 \text{ mm}$. Giả thiết bỏ qua các ảnh hưởng ma sát.

Bài giải

Quan hệ giữa mômen ngẫu lực đặt vào tay vặn và lực nén tác dụng vào chi tiết:

$$N = \frac{2\pi}{\lambda} M.$$

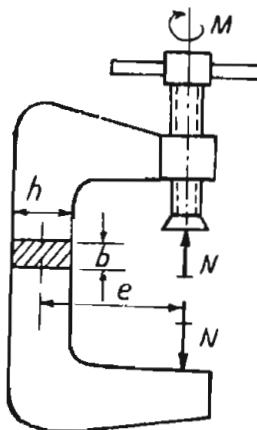
Ứng suất ở thân chi tiết:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{bh} \left(1 + \frac{6e}{h} \right) = \frac{2\pi M}{\lambda bh} \left(1 + \frac{6e}{h} \right) \leq [\sigma]$$

hay $M \leq \frac{[\sigma] \lambda b h}{2\pi \left(1 + \frac{6e}{h} \right)}$

thay bằng số:

$$M \leq \frac{16000 \cdot 0,1 \cdot 0,5 \cdot 1,5}{2 \cdot 3,14 \left(1 + \frac{6e}{h} \right)} = 9,1 \text{ Ncm}$$



Hình 16-8

§16-4. XOẮN VÀ UỐN ĐỒNG THỜI.

Ta gọi một thanh chịu xoắn và uốn đồng thời khi trên mặt cắt ngang có các thành phần nội lực là mômen xoắn, mômen uốn hoặc có cả lực cắt.

Nếu mặt cắt ngang là hình tròn, đường kính d thì ứng suất tiếp do Q_x , Q_y có giá trị rất bé, khi tính toán ta không xét đến.

Ứng xuất tiếp do mômen xoắn đạt giá trị cực đại ở các điểm trên chu vi, có trị số bằng

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_p} = \frac{16M_z}{\pi d^3} \quad (16-28)$$

Ứng suất pháp có trị số lớn nhất và bé nhất do mômen uốn M_x , M_y gây ra tại hai điểm

A và B trên chu vi, đó là hai giao điểm của đường kính vuông góc với vectơ mômen uốn tổng hợp tức là giao điểm của đường tải trọng với chu vi.

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$$

$$\sigma = \pm \frac{M}{W_{\text{uốn}}} = \pm \frac{32M}{\pi d^3} \quad (16-29)$$

Tại các điểm nguy hiểm A và B, phân bố ở trạng thái ứng suất phẳng.

Chú ý. Trị số $W_p = 2W_{\text{uốn}}$ do đó công thức tính toán độ bền thanh tròn chịu xoắn và uốn đồng thời thường đưa về dạng:

$$\sigma_{\text{tù}} = \frac{M_{\text{td}}}{W} \leq [\sigma] \quad (16-30)$$

trong đó. Theo thuyết bền thứ ba:

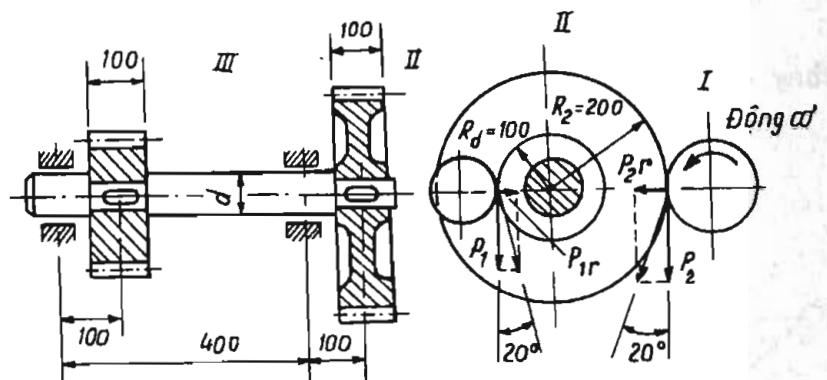
$$M_{\text{td}} = \sqrt{M^2 + M_z^2} \quad (16-31)$$

$$\text{Theo thuyết bền thứ tư: } M_{\text{td}} = \sqrt{M^2 + 0,75M_z^2} \quad (16-32)$$

$$\text{Theo thuyết bền Mo: } M_{\text{td}} = \frac{1 - \alpha}{2} M + \frac{1 + \alpha}{2} \sqrt{M^2 + M_z^2} \quad (16-33)$$

Ví dụ 16-6.

Trục truyền (II) có bánh răng hình trụ răng thẳng truyền công suất $W = 10$ mã lực từ động cơ (I) quay với tốc độ $n = 100$ v/g/ph đến bánh xe (III). Phương các lực tác dụng ghi trên hình 16-9A. Ứng suất cho phép của vật liệu chế tạo trục $[\sigma] = 10$ kN/cm².



Hình 16-9A

Xác định kích thước cần thiết của trục truyền theo thuyết bền thế năng biến đổi hình dạng và thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất. Xét hai trường hợp: có để ý đến thành phần lực hướng tâm và không để ý đến. Khi tính bỏ qua trọng lượng trục và sự mất mát lực truyền chuyển động giữa các bánh răng và ổ trục.

Bài giải (hình 16-9B)

Mômen xoắn tác dụng vào trục:

$$M_z = 716200 \frac{W}{n} = 716200 \frac{10}{100} = 71620 \text{ Ncm}$$

Trường hợp 1 (không để ý đến lực hướng tâm). Trục chịu uốn bởi lực P_1 và P_2 :

$$P_1 = \frac{M_z}{r_1} = \frac{71620}{10} = 7162 \text{ N}$$

$$P_2 = \frac{M_z}{r_2} = \frac{71620}{20} = 3581 \text{ N.}$$

Vẽ biểu đồ mômen uốn ta được $M_{x\max} = 447 \text{ Nm}$.

Dường kính tính theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất:

$$d = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{M_{x\max}^2 + M_z^2}}{0,1[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{44700^2 + 71620^2}}{0,1.10000}} = \\ \approx 4,1 \text{ cm.}$$

Tính theo thuyết bền thế năng biến đổi hình dạng:

$$d = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{M_{x\max}^2 + 0,75M_z^2}}{0,1[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{44700^2 + 0,75.71620^2}}{0,1.10000}} \approx 3,9 \text{ cm.}$$

Trường hợp 2 (có để ý đến lực hướng tâm). Ngoài mômen uốn M_x , trục còn bị uốn do mômen uốn M_y .

Thành phần lực hướng tâm:

$$P_{1r} = P_1 \operatorname{tg} 20^\circ = 7162 \cdot 0,364 = 2610 \text{ N,}$$

$$P_{2r} = P_2 \operatorname{tg} 20^\circ = 3581 \cdot 0,364 = 1305 \text{ N.}$$

Vẽ biểu đồ mômen uốn M_y ta được $M_{y\max} = 229 \text{ Nm}$ ở cùng mặt cắt với $M_{x\max}$.

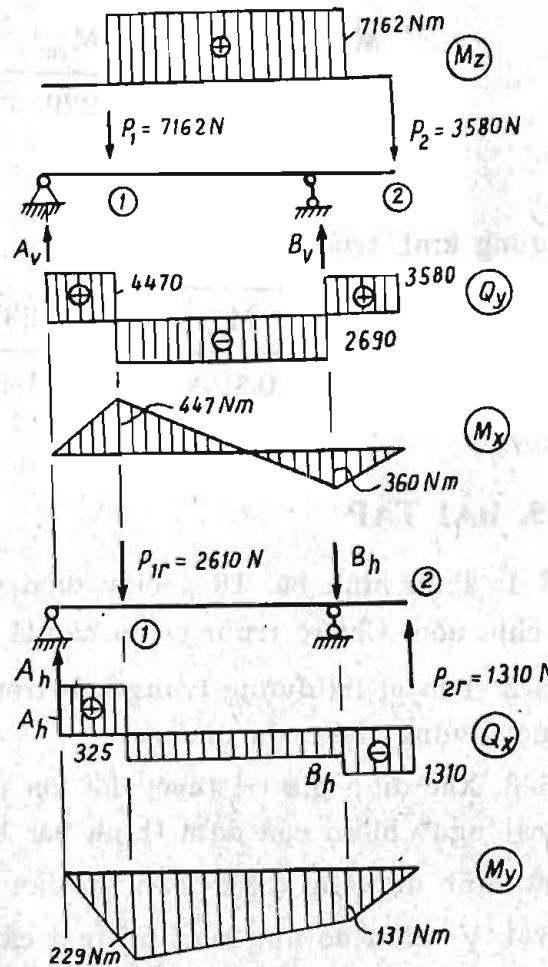
Mômen tính theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất:

$$M_{t3} = \sqrt{M_{x\max}^2 + M_{y\max}^2 + M_z^2} \\ = \sqrt{44700^2 + 22900^2 + 71620^2} = 76450 \text{ Ncm.}$$

Dường kính trục

$$d = \sqrt[3]{\frac{M_{t3}}{0,1[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{76450}{0,1.10000}} \approx 4,3 \text{ cm.}$$

Mômen tính theo thuyết bền thế năng biến đổi hình dạng lớn nhất:



Hình 16-9B

$$\begin{aligned} M_{t4} &= \sqrt{M_{x\max}^2 + M_{y\max}^2 + 0,75M_z^2} \\ &= \sqrt{44700^2 + 22900^2 + 0,75 \cdot 71620^2} \\ &= 63750 \text{ Ncm.} \end{aligned}$$

Đường kính trục

$$d = \sqrt[3]{\frac{M_{t4}}{0,1[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{63750}{0,1 \cdot 10000}} \approx 4 \text{ cm.}$$

§16-5. BÀI TẬP

16-1. Trên hình bài 16-1 biểu diễn những mặt cắt nhau và vị trí đường tải trọng của đầm chịu uốn. Chỉ rõ trường hợp nào là uốn phẳng, trường hợp nào là uốn xiên. Giải thích.

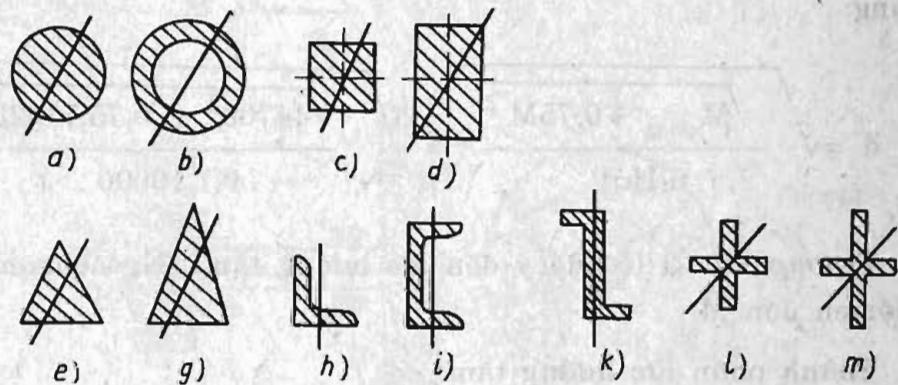
16-2. Tìm vị trí đường trung hòa trên mặt cắt hình chữ nhật khi đường tải trọng trùng với một đường chéo của mặt cắt.

16-3. Xác định giá trị tuyệt đối lớn nhất của ứng suất pháp, vị trí đường trung hòa tại mặt cắt nguy hiểm của đầm (hình bài 16-3).

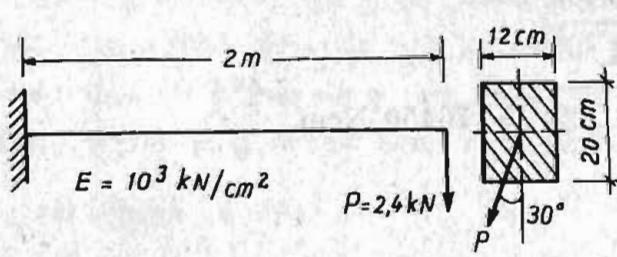
Xác định độ vông toàn phần tại đầu tự do.

16-4. Vẽ biểu đồ ứng suất tại mặt cắt nguy hiểm của đầm và kiểm tra độ bền. Cho biết $[\sigma]_k = 6 \text{ kN/cm}^2$; $[\sigma]_n = 18 \text{ kN/cm}^2$ (hình bài 16-4).

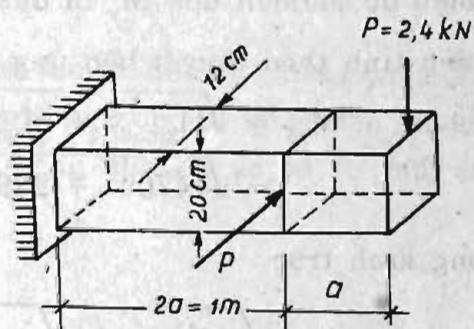
16-5. Một cột gạch mặt cắt vuông $1 \times 1 \text{ m}$, cao 5m , chịu tải trọng bản thân và áp lực gió nằm ngang phân bố đều $q = 800 \text{ N/cm}$. Trọng lượng riêng của cột $\gamma = 16 \text{ kN/m}^3$. Xác định ứng suất nén lớn nhất và nhỏ nhất tại chân cột (hình bài 16-5).



Hình 16-1



Hình bài 16-3a

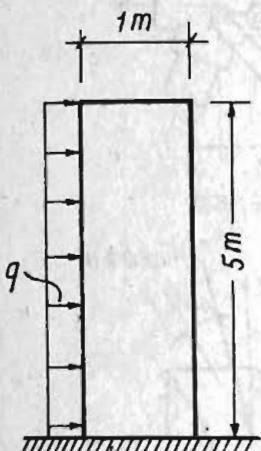


Hình bài 16-3b

16-6. Một cột điện mặt cắt tròn có đường kính $d = 20 \text{ cm}$, chôn chặt vào đất. Ở độ cao 5 m , người ta mắc hai nhóm dây nằm ngang A và B. Góc giữa phương của hai nhóm dây

$\alpha = 120^\circ$. Cột chịu lực tác dụng nằm ngang do nhóm dây A sinh ra $P_A = 1 \text{ kN}$, nhóm dây B sinh ra $P_B = 1,5 \text{ kN}$. Trọng lượng hai nhóm dây truyền vào cột bằng $2,8 \text{ kN}$, trọng lượng cột bằng $0,9 \text{ kN}$ (hình bài 16-6).

Xác định ứng suất kéo và nén lớn nhất tại chân cột.



Hình bài 16-5

kính trong 20 mm . Đầu B của ống coi như ngầm chặt (hình bài 16-9).

16-10. Trên hình bài 16-10 cho $P_1 = 40\,000 \text{ N}$ (trong mặt phẳng yz)

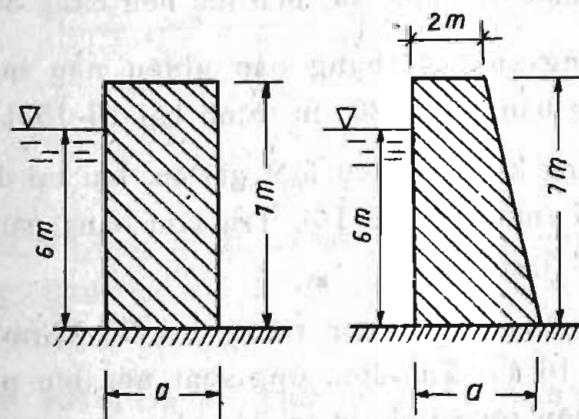
$$P_2 = 10\,000 \text{ N}; P_3 = 8000 \text{ N}$$

$$M = 20\,000 \text{ Nm}; l = 2 \text{ m}$$

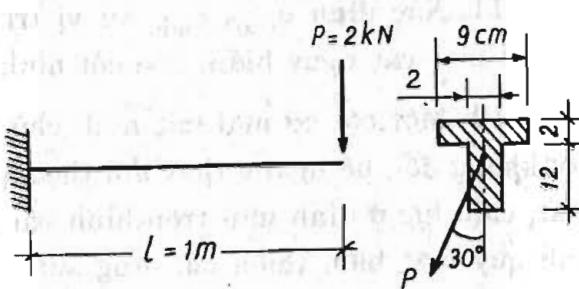
$$\alpha = 15^\circ; \beta = 30^\circ;$$

$$[\sigma] = 16\,000 \text{ N/cm}^2$$

Chọn số liệu mặt cắt chữ [ID].



Hình bài 16-7



Hình bài 16-4

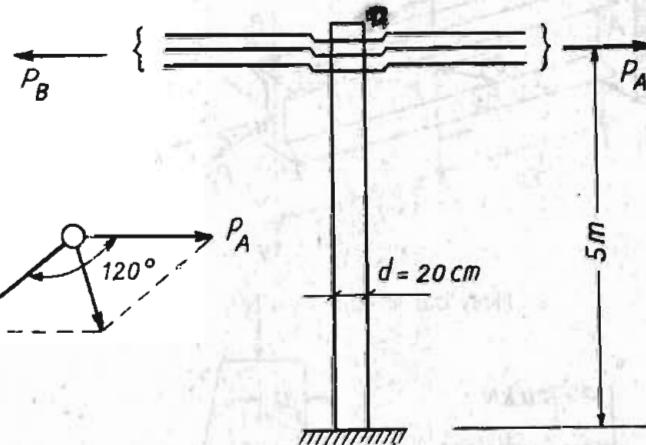
16-7. Trên hình bài

16-7 mặt cắt ngang của hai phương án đập chắn nước bằng bêtông cao 7m . Trọng lượng riêng 20 kN/m^3 .

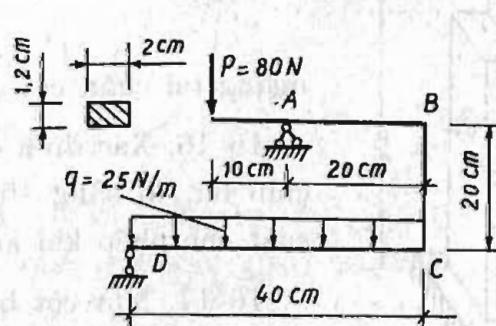
Xác định chiều rộng cần thiết của chân đập sao cho dưới chân đập không phát sinh ứng suất kéo.

16-8. Tính ứng suất cực đại và cực tiểu ở những mặt cắt nguy hiểm của thanh gãy khúc vẽ trên hình bài 16-8.

16-9. Xác định ứng suất pháp trong ống AB của cọc yên xe đạp, nếu tải trọng $P = 600 \text{ N}$. Đường kính ngoài của ống bằng 24 mm , đường



Hình bài 16-6



Hình bài 16-8

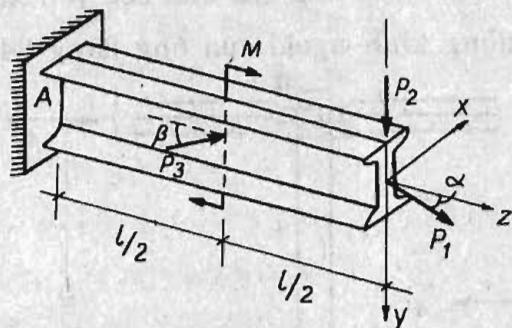
16-11. Xác định σ_{\max} , σ_{\min} và vị trí trục trung hòa tại mặt cắt nguy hiểm của cột hình bài 16-11.

16-12. Một cột có mặt cắt hình chữ nhật có bề dày không đổi, bề ngang thay đổi theo quy luật bậc nhất, chịu lực ở đỉnh như trên hình bài 16-12. Xác định quy luật biến thiên của ứng suất kéo và nén lớn nhất và vị trí đường trung hòa ở các mặt cắt.

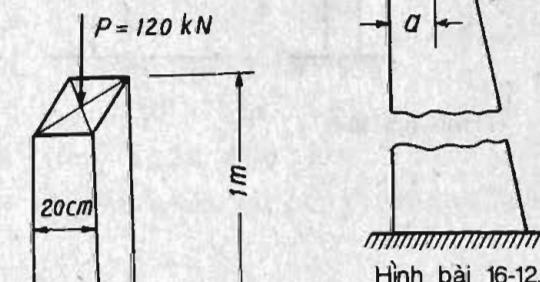
16-13. Xác định σ_{\max} , σ_{\min} và vị trí đường trung hòa tại mặt cắt nguy hiểm của cột chi trên hình bài 16-13.

16-14. Xác định σ_{\max} , σ_{\min} và vị trí đường trung hòa tại mặt cắt nguy hiểm của cột ở các hình bài 16-14.

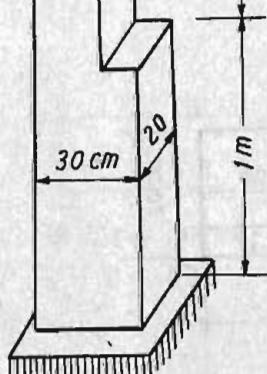
16-15. Hình bài 16-15a cho một cột có mặt cắt phần trên 20×20 cm, mặt cắt



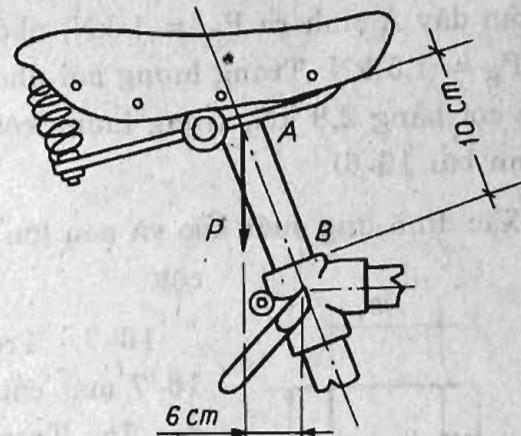
Hình bài 16-10



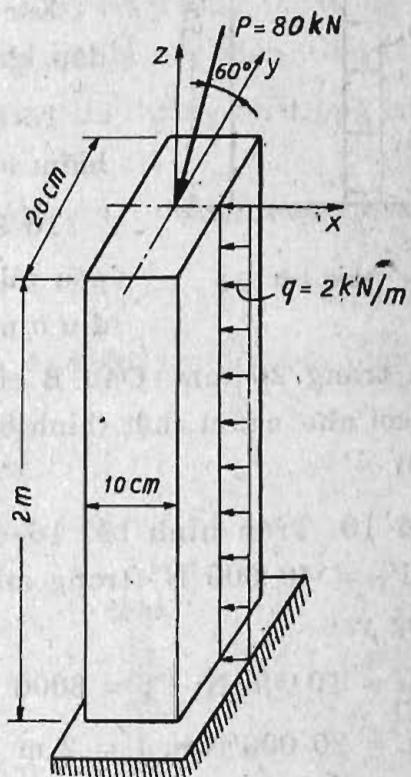
Hình bài 16-12



Hình bài 16-13



Hình bài 16-9



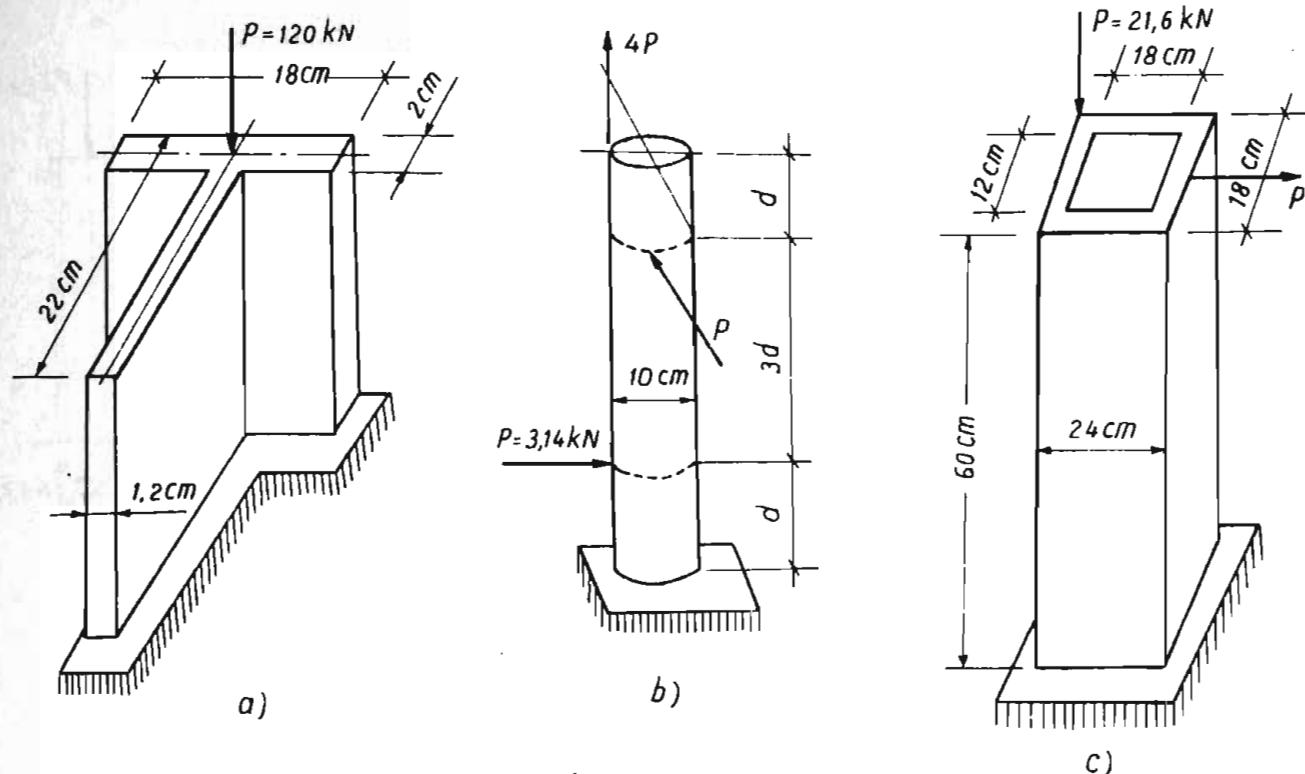
Hình bài 16-11

phần dưới 20×30 cm. Xác định ứng suất pháp lớn nhất tại chân cột, nếu lực nén bằng 350 kN.

Ứng suất sẽ bằng bao nhiêu nếu mặt cắt ngang tại chân cột cũng bằng 20×20 cm (hình bài 16-15b).

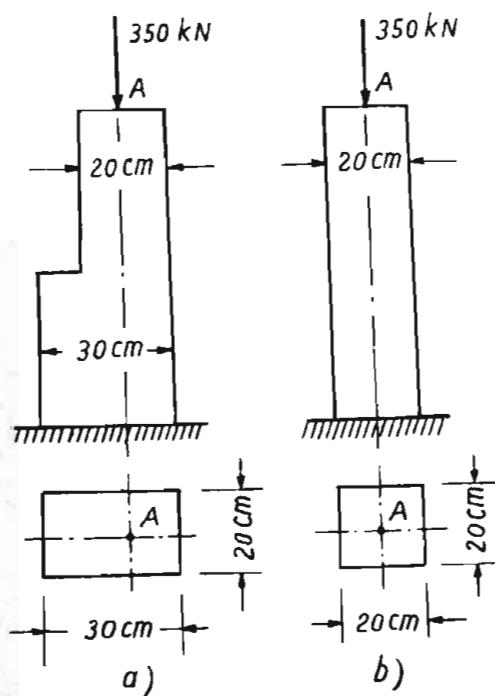
16-16. Xác định đường kính của trụ một giá ép, khi tại điểm A chịu lực ép bằng 15 kN (hình bài 16-16). Trụ làm bằng gang ứng suất cho phép khi kéo $3,5 \text{ kN/cm}^2$.

16-17. Một cột bằng đá, trọng lượng riêng $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$, chịu tải trọng như hình bài 16-17. Xác định ứng suất nén lớn nhất và nhõ nhất tại mặt cắt chân cột và chỉ vị trí của chúng trên mặt cắt ấy.

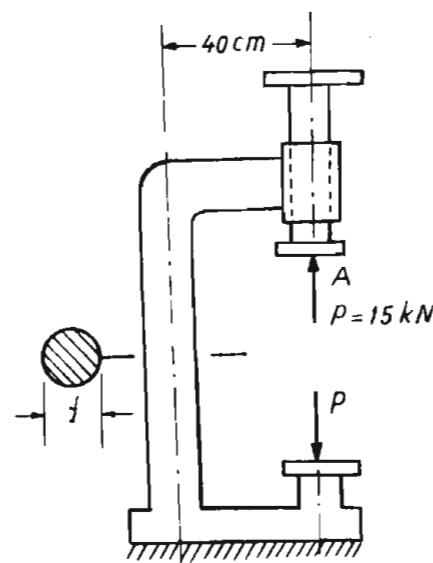


Hình bài 16-14

16-18. Một cột thép chữ I số hiệu 33, chịu nén đúng tâm bởi lực $P = 2 \text{ kN}$. Nếu dọc chiều cao cột, người ta hàn thêm một thanh chữ [số hiệu 14, vị trí và giá trị lực P không thay đổi thì ứng suất nén cực đại đôi với trường hợp nào lớn hơn (hình bài 16-18).



Hình bài 16-15



Hình bài 16-16

16-19. Có hai cột kích thước ghi trên hình bài 16-19 phải chịu nén lệch tâm bởi những lực khác nhau thế nào để ứng suất tại điểm C ở chân cột bằng nhau. So sánh ứng suất tại điểm B của hai cột.

16-20. Kiểm tra bền phần dưới của cột bêtông mặt cắt ngang chữ nhật $18 \times 40 \text{ cm}$. Cho biết $[\sigma]_k = 60 \text{ N/cm}^2$, $[\sigma]_n = 700 \text{ N/cm}^2$ (hình bài 16-20).

16-21. Một càn cầu được đặt trên móng bêtông, trục AB của càn cầu đi qua trọng tâm móng. Trọng lượng càn cầu 180 kN (không kể vật nặng P và đối trọng Q) đặt tại điểm C cách trục AB một khoảng cách 0,6m (hình bài 16-21).

Xác định kích thước cạnh a của móng, sao cho ở đáy móng không phát sinh ứng suất kéo. Xác định áp lực lớn nhất trên nền đất với trị số a đã chọn. Trọng lượng riêng bêtông $\gamma = 22 \text{ kN/m}^3$

16-22. Một mắt xích có kích thước và chịu lực như ở hình bài 16-22. Tính ứng suất trên đoạn thẳng của mắt xích. Nếu một bên mắt bị đứt chỉ còn một bên làm việc thì ứng suất tăng bao nhiêu lần?

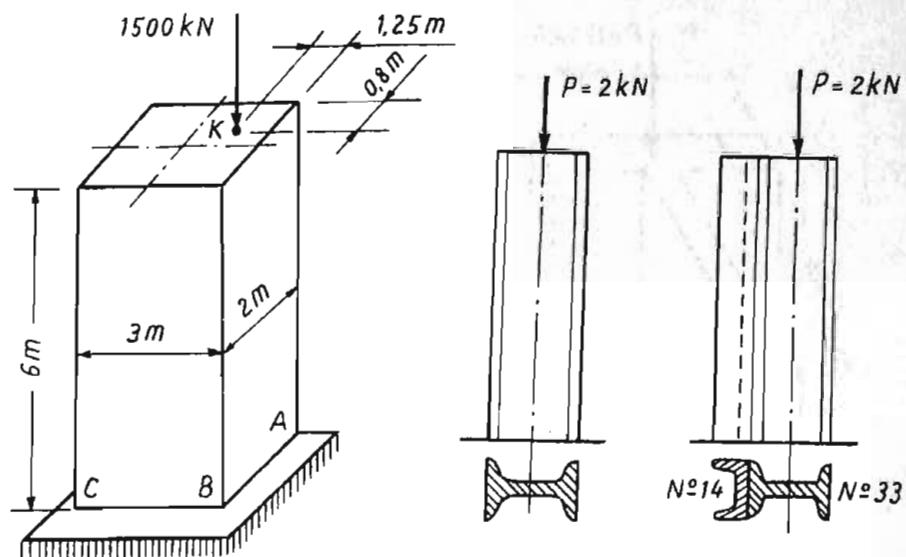
16-23. Cột treo dây điện gồm hai dầm thép số hiệu 14a, (hình bài 16-23). Trọng lượng dây 420 N, trọng lượng tay với móc dây 560 N. Xác định ứng suất kéo và nén lớn nhất tại mặt cắt chân cột có xét cả trọng lượng của cột.

16-24. Một thanh mặt cắt hình chữ nhật b và h bị kéo đúng tâm như hình bài 16-24. Hỏi nếu cần khoét rãnh sâu αh thì nên khoét ở một bên hay cả hai bên để đảm bảo tốt nhất về mặt độ bền.

16-25. Vẽ biểu đồ mômen xoắn M_z , biểu đồ mômen uốn M_u và tính ứng suất tương đương theo lý thuyết thứ ba về độ bền cho các hình bài 16-25.

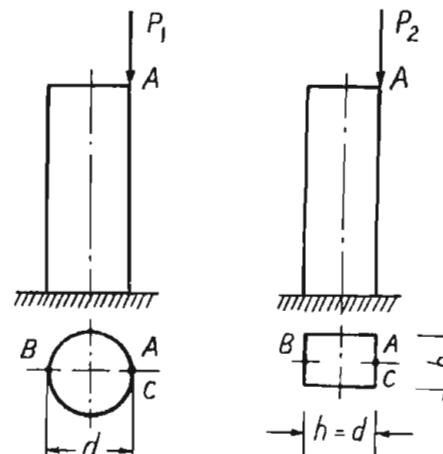
16-26. Xác định đường kính trục của hộp giảm tốc theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất. Sơ đồ của trục xem hình bài 16-26. Cho biết:

Lực tiếp tuyến $P_{t3} = 2700 \text{ N}$; $P_{t4} = 9700 \text{ N}$.

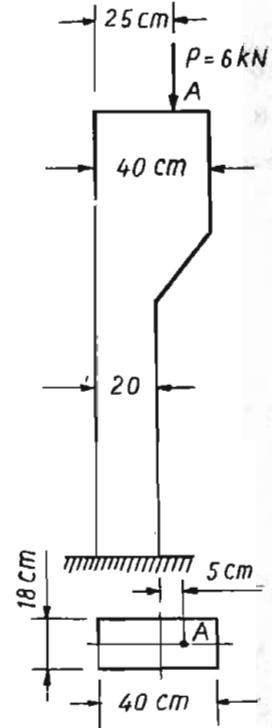


Hình bài 16-17

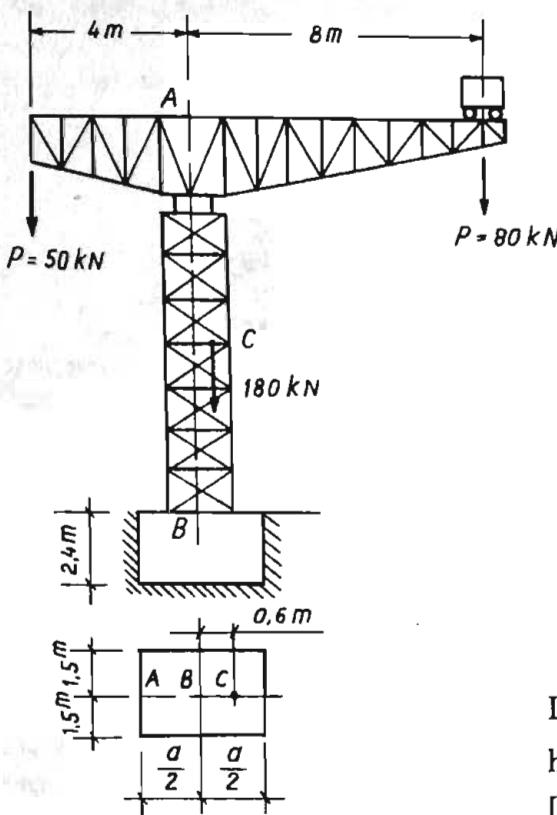
Hình bài 16-18



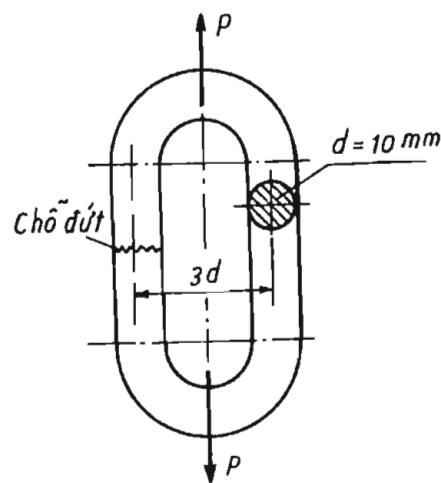
Hình bài 16-19



Hình bài 16-20



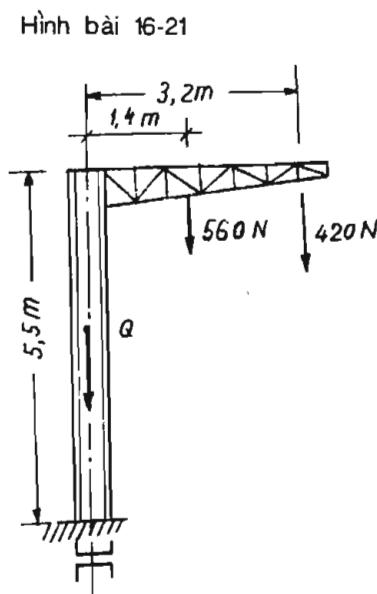
Hình bài 16-21



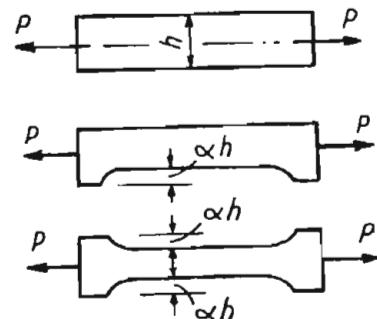
Hình bài 16-22

Lực hướng tâm $P_{r3} = 1000 \text{ N}$; $P_{r4} = 3530 \text{ N}$.
Lực dọc trục $P_{a3} = 460 \text{ N}$.

Dường kính lớn của bánh răng $D_{tb} = 299 \text{ mm}$, $f = 62 \text{ mm}$, $g = 72 \text{ mm}$, $h = 52 \text{ mm}$. Ứng suất cho phép của vật liệu $[\sigma] = 5000 \text{ N/cm}^2$.



Hình bài 16-23



Hình bài 16-24

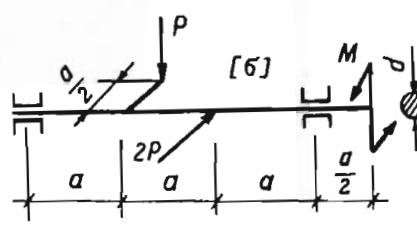
16-27. Dùng thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất, xác định đường kính d của trục hộp giảm tốc (hình bài 16-27).

Lực tiếp tuyến $P_{t1} = 1100 \text{ N}$

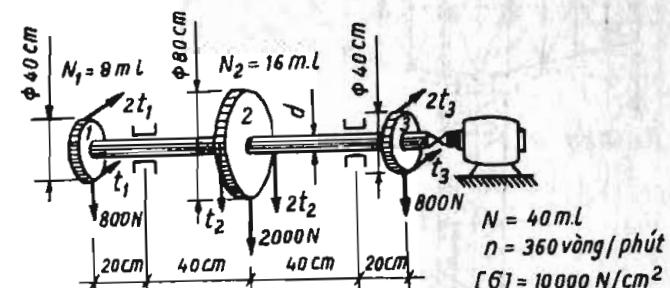
Lực hướng tâm $P_{r1} = 310 \text{ N}$

Lực dọc trục $P_{a1} = 380 \text{ N}$

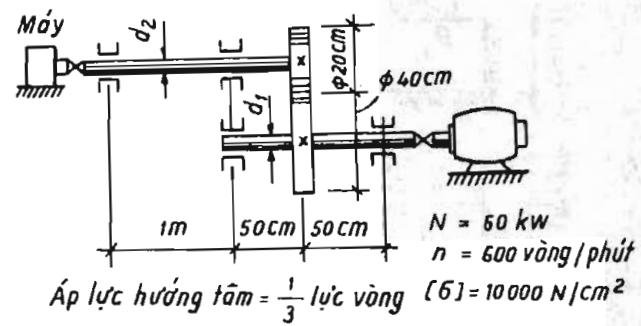
Dường kính trung bình của bán răng hình nón $D_{tb} = 42 \text{ mm}$, $f = 25 \text{ mm}$; $b = 50 \text{ mm}$. Vật liệu chế tạo trục $[\sigma] = 4500 \text{ N/cm}^2$.



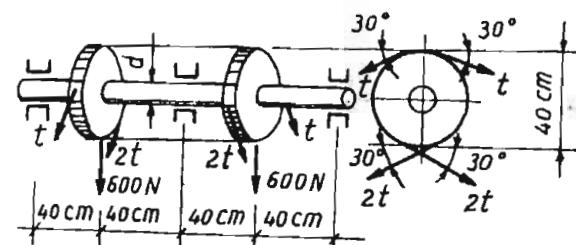
a)



b)

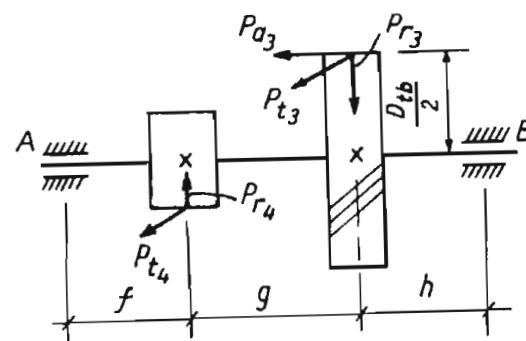


c)

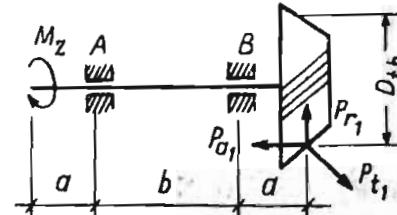


e)

Hình bài 16-25



Hình bài 16-26



Hình bài 16-27

CÁC BÀI TẬP ÔN THI KÌ II

1- Ba vật nặng A, B, C trọng lượng tương ứng mỗi vật là $P_1 = 20 \text{ N}$; $P_2 = 15 \text{ N}$, $P_3 = 10 \text{ N}$ được nối liền với nhau bằng một sợi dây không trọng lượng, không dãn và vắt qua các ròng rọc O_1 , O_2 . Lăng trụ D có trọng lượng $P = 100 \text{ N}$. Bỏ qua tất cả ma sát (hình bài 1).

a. Tính dịch chuyển của lăng trụ D khi vật A hạ xuống được một đoạn 1 mét (khi không có mố E).

b. Nếu có mố E. Tìm áp lực tác dụng lên mố, biết gia tốc của vật A rơi xuống là $2,5 \text{ m/s}^2$.

2- Đĩa O đồng nhất, bán kính R, trọng lượng Q quay được quanh trục thẳng đứng O_1O_2 vuông góc với đĩa và đi qua O.

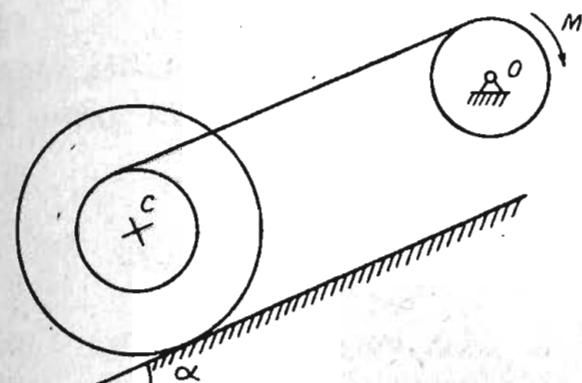
Trên vành đĩa có một người, trọng lượng P. Ban đầu hệ đứng yên. Sau đó người chạy trên vòng tròn đường kính OA với vận tốc không đổi V (góc $\varphi = \frac{Vt}{R\sqrt{2}}$).

a. Chứng minh rằng mômen động lượng của cơ hệ bảo toàn đối với trục O_1O_2 .

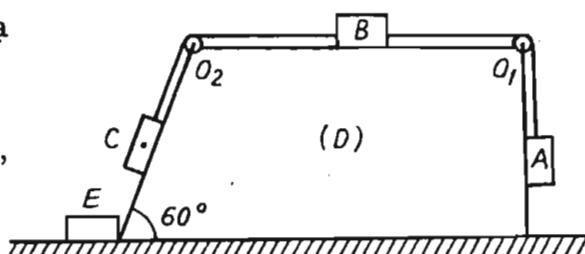
b. Tìm vận tốc góc của đĩa theo thời gian t.

c. Tìm gia tốc tuyệt đối của người khi chạy qua điểm A. Tìm lực tác dụng vào người lúc đó (hình bài 2)

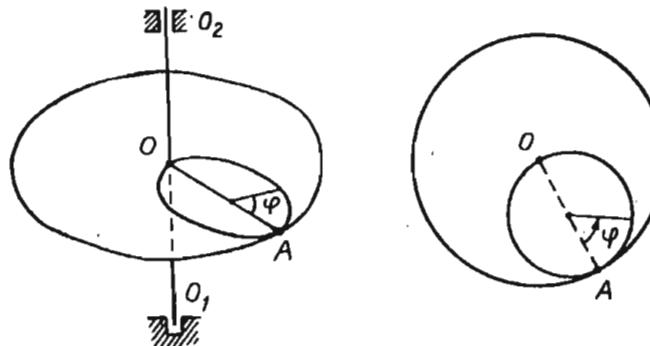
3- Ngẫu lực có mômen $M = \text{const}$ làm quay tời O, và kéo con lăn C lăn không trượt lên theo mặt nghiêng, góc nghiêng α . Biết tời O là một đĩa tròn đồng chất bán kính R, trọng lượng Q. Con lăn C hai tầng bán kính R và $2R$, trọng lượng P đặt tại tâm đối xứng C và bán kính quan tính đối với C là ρ . Dây song song với mặt phẳng nghiêng.



Hình bài 3



Hình bài 1



Hình bài 2

a. Tìm gia tốc góc của tời O.

b. Tìm lực ma sát trượt tác dụng vào con lăn C, từ đó suy ra hệ số ma sát trượt để không xảy ra hiện tượng trượt.

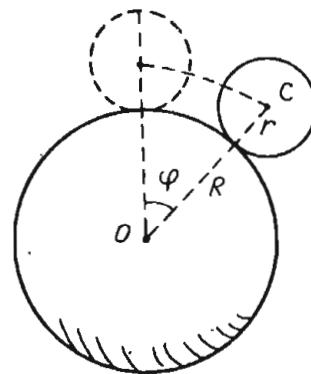
4- Hai thanh đồng chất AB và AC được nối với nhau bằng bản lề B không ma sát. $AB = AC = 2l$. Bán kính quan tính của mỗi thanh đối với khối tâm của nó là ρ . Lúc A ở cách mặt đất một đoạn là h thì dây EF bị đứt nên các

thanh đỡ xuống (hình bài 4).

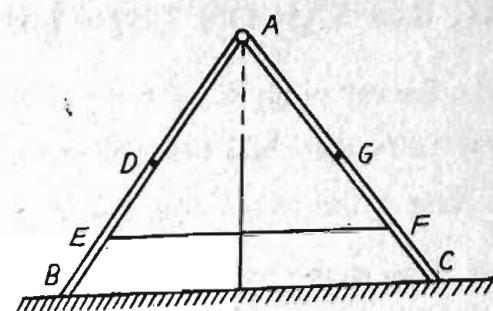
- a. Xác định gia tốc điểm A, vận tốc của nó tại vị trí cách sàn một đoạn $\frac{h}{2}$ và lúc rơi đến mặt sàn.

- b. Xác định phản lực liên kết tại A và C.

- 5- Trụ tròn đồng chất bán kính r , khối lượng m lăn tự do trên trụ tròn cố định bán kính R . Chuyển động bắt đầu từ vị trí cao nhất không vận tốc đầu. Hệ số ma sát trượt là f (hình bài 5).



Hình bài 5



Hình bài 4

- a. Tìm vận tốc tâm C của trụ theo góc φ .

- b. Tìm vị trí φ khi trụ C rời khỏi mặt trụ O.

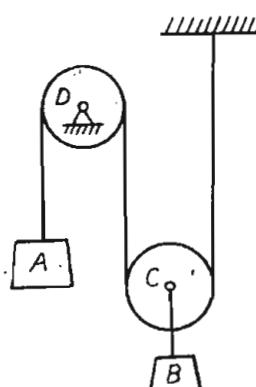
- c. Tìm các giá trị φ khi trụ C lăn không trượt.

- 6- Vật nặng A trọng lượng P_1 rơi xuống làm vật nặng B trọng lượng P_2 chuyển động lên theo phương thẳng đứng. Coi các ròng rọc C, D là những đĩa tròn đồng chất cùng bán kính r và cùng trọng lượng P , dây không dãn.

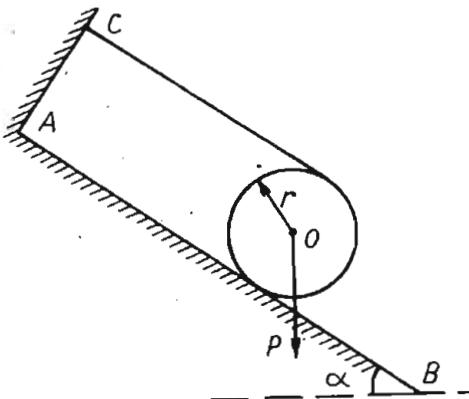
- a. Tìm gia tốc rơi xuống của vật A.

- b. Tìm sức căng các nhánh dây (hình bài 6).

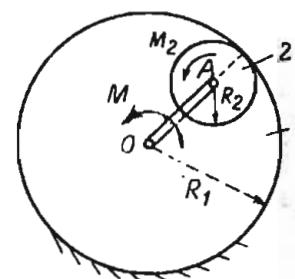
- 7- Hai dây không dãn được quấn vào hai đầu của một hình trụ tròn đồng chất trọng lượng P , bán kính r và các đầu cuối được buộc vào C. Trụ tròn được đặt trên mặt nghiêng



Hình bài 6



Hình bài 7



Hình bài 8

AB sao cho các đường sinh vuông góc với AB. Hình trụ chuyển động xuống không vận tốc đầu dưới tác dụng của trọng lực P. Hệ số ma sát trượt giữa hình trụ và mặt nghiêng là f (hình bài 7).

- a. Xác định gia tốc của tâm hình trụ.

- b. Xác định sức căng dây.

- 8- Cơ cấu hành tinh nằm trong mặt phẳng ngang. Bánh răng 1 bán kính R_1 cố định; bánh răng 2 bán kính R_2 , trọng lượng Q là một vành đồng chất lăn không trượt trong bánh 1. Tay quay OA trọng lượng P chịu tác dụng của ngẫu lực có mômen $M = \text{const}$. Ban đầu hệ đứng yên (hình bài 8).

a. Tìm động năng của hệ theo vận tốc góc tay quay.

b. Tìm giá tốc góc tay quay.

c. Khi bánh răng 2 chịu tác dụng ngẫu lực cản $M_2 = -k \omega_2$ (k - hằng số, ω_2 - vận tốc góc bánh 2), hãy xác định vận tốc góc của tay quay OA theo thời gian t. Tìm vận tốc góc lớn nhất mà tay quay đạt được.

9- Chất điểm A trọng lượng P_1 chuyển động trong mặt phẳng đứng, trên mặt trong của một hình trụ rỗng cố định bán kính R. Chất điểm B trọng lượng P_2 nối với A nhờ thanh không trọng lượng AB = l, có thể dao động quanh trục đi qua A và vuông góc với mặt phẳng hình vẽ. Bỏ qua ma sát giữa chất điểm và mặt trụ.

Thành lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ.

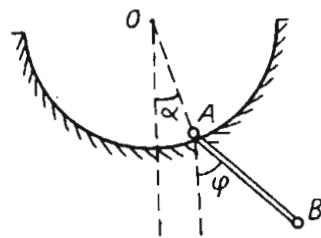
10- Đĩa tròn đồng chất bán kính R, khối lượng M có thể lăn không trượt trên nền ngang. Thanh đồng chất có độ dài OA = l, đầu O gắn bắn lề vào tâm đĩa, thanh có khối lượng m. Lò xo có độ cứng C (hình bài 10).

Thành lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ.

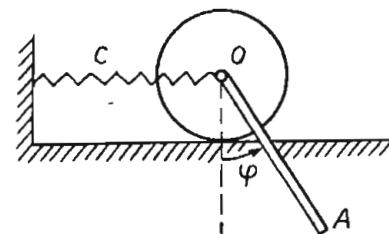
11- Một đĩa tròn đồng chất bán kính R, khối lượng M có thể quay quanh trục nằm ngang O.

Thanh đồng chất AB = l, khối lượng m, lắp bắn lề với vành đĩa. Thành lập phương trình vi phân chuyển động của hệ.

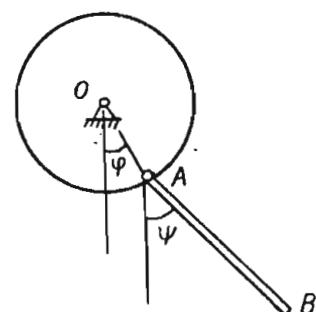
12- Lăng trụ tam giác ABC, trọng lượng P, có thể trượt trên nền ngang nhẵn. Hình trụ tròn đồng chất, trọng lượng Q, lăn không trượt trên mặt nghiêng của lăng trụ với góc nghiêng α ;



Hình bài 9



Hình bài 10



Hình bài 11

Tìm giá tốc chuyển động của lăng trụ.

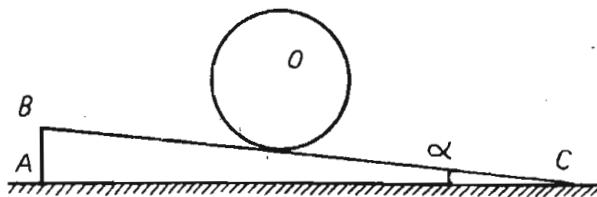
13- Hệ dàn có sáu thanh được liên kết với nhau chịu tải trọng như hình bài 13. Biết rằng A, B, C, D là bốn đỉnh của một hình vuông cạnh a. Tất cả các thanh cùng một vật liệu và có diện tích mặt cắt ngang như nhau. Tìm nội lực trong thanh CD. (Hệ giàn được coi là hệ phẳng và hai thanh AB, CD coi như không tiếp xúc nhau).

14- Cho một đầm chịu lực như hình bài 14.

L = 2,7m, P = 4,8 kN, ứng suất cho phép khi kéo $[\sigma]_k = 1 \text{ kN/cm}^2$, ứng suất cho phép khi nén $[\sigma]_n = 6 \text{ kN/cm}^2$.

a. Tính chiều dài đầu thừa BC để đầm làm việc hợp lý.

b. Xác định kích thước của mặt cắt ngang.



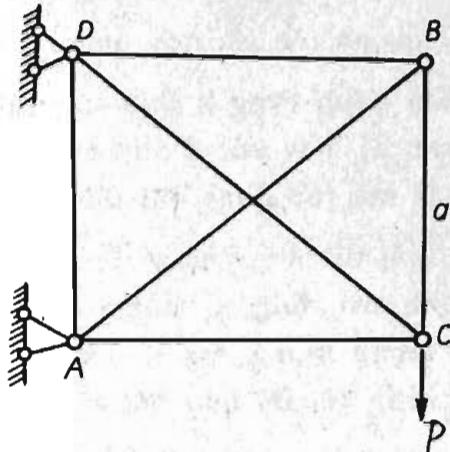
Hình bài 12

15- Cho một dầm có độ cứng không đổi và chịu tải trọng như trên hình bài 15.

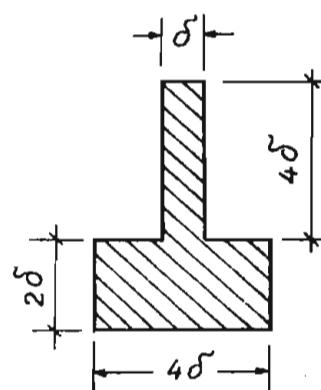
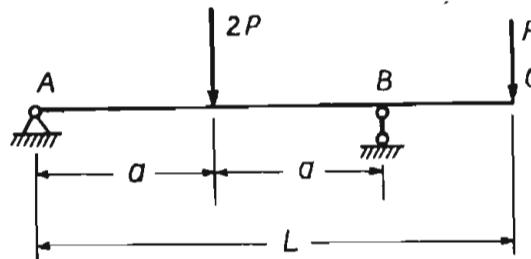
- Vẽ biểu đồ lực cắt Q_y và mômen uốn M_x
- Tính độ vông lớn nhất và góc xoay lớn nhất bằng phương pháp tải trọng giả tạo.

16- Một cột chịu nén bởi lực P_1 và chịu uốn bởi lực phân bố theo hình tam giác như hình bài 16. Tính giá trị lực P_1 và ứng suất σ_{\min} . Biết $\sigma_{\max} = 0$

17- Một trục tròn ngầm hai đầu chịu lực như hình bài 17. Biết $l = 40 \text{ cm}$; $d = 20 \text{ cm}$; $G = 8 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2$; góc xoay giữa hai mặt cắt AB; $\varphi_{AB} = 0,01 \text{ rad}$.



Hình bài 13

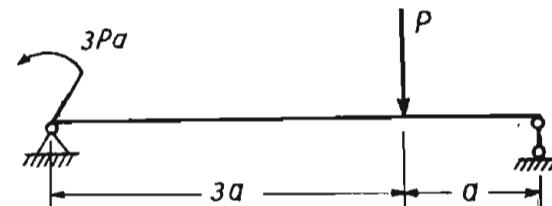


Hình bài 14

- Tính giá trị ứng suất tiếp lớn nhất (τ_{\max}).

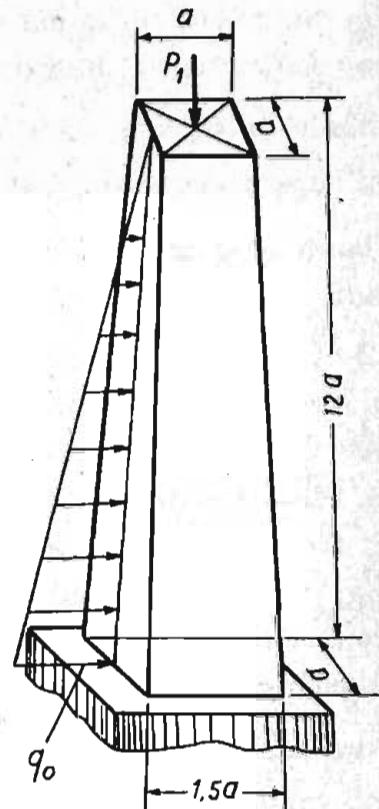
- Vẽ biểu đồ góc xoay của các mặt cắt ngang.

18- Cho hệ

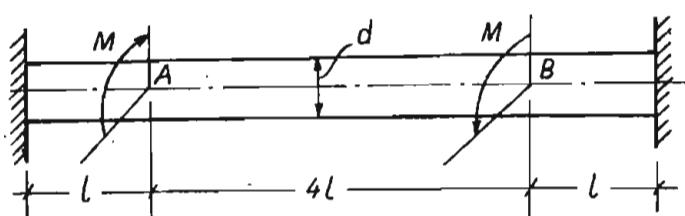


Hình bài 15

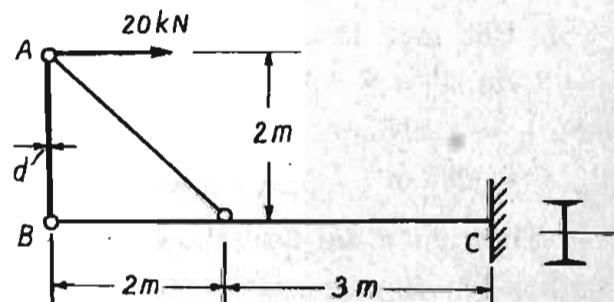
thanh chịu lực như hình bài 18. Tính kích thước mặt cắt ngang của thanh AB và dầm BC. Biết thanh AB có mặt cắt ngang là tròn, dầm BC mặt cắt ngang chữ I. $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$.



Hình bài 16



Hình bài 17



Hình bài 18

TRẢ LỜI CÁC BÀI TẬP

CHƯƠNG I. CHUYỂN ĐỘNG CỦA ĐIỂM

1-1. a) $x + y = 5$; ($2 \leq x \leq \infty$); $V = 3\sqrt{2}t^2$ cm/s; $a = 6\sqrt{2}t$ cm/s².

b) Vòng tròn $R = 10$ cm; $V = 4\pi$ cm/s; $a = 1,6\pi^2$ cm/s².

c) $xy = -16$; $y = -2z$ (mặt trụ hyperbolic, đường sinh // oz).

$$V = \frac{2}{(1+t)^2} \sqrt{4 + 5(1+t)^4} \text{ cm/s}; \quad a = \frac{8}{(1+t)^3} \text{ cm/s}^2$$

$$1-2. a) a = \sqrt{a_1^2 + \frac{(V_o - a_1 t)^2}{R^2}}$$

$$b) a = a_1 \text{ lúc } t = \frac{V_o}{a_1}, \text{ số vòng } n = \frac{V_o^2}{4\pi a_1 R}$$

$$1-3. V = bk\cos kt; \quad a^r = bk^2 \sin kt; \quad a^\theta = \frac{b^2 k^2}{l} \cos^2 kt; \quad V = a^\theta = 0 \text{ tại vị trí biên.} \\ a^r = 0 \text{ tại vị trí 0.}$$

$$1-4. x = d \cos \varphi + r\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}; \quad (\lambda = \frac{d}{r}, \varphi = \omega t)$$

$$V = -(1 + \frac{\lambda \cos \omega t}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \omega t}}) d \omega \sin \omega t$$

$$1-5. x_B = r \cos \omega_o t + \frac{r^2}{4l} \cos 2\omega_o t + \text{const}$$

$$x_M = r \cos \omega_o t + \frac{r^2}{8l} \cos 2\omega_o t + \text{const}$$

$$y_M = -\frac{1}{2} \sin \omega_o t$$

$$1-6. x = 4 \sin \frac{\pi}{2} t$$

$$1-7. (x+y)^2 = \frac{2V_o^2}{a} y; \quad V_{\min} = \frac{V_o}{\sqrt{2}}$$

$$1-8. V_o = 500 \text{ m/s}; \quad a_o = 10 \text{ m/s}^2; \quad h = 8 \text{ km}$$

$$S = 24 \text{ km}; \quad \rho_o = 41,67 \text{ km}; \quad \rho = 9 \text{ km}$$

$$1-9. \rho = 2 \frac{1}{8} m$$

$$1-10. \text{ Elip: } \frac{x^2}{100^2} + \frac{y^2}{20^2} = 1; V = 80\pi \text{ cm/s}$$

$$a = 1600\pi^2 \text{ cm/s}^2; \rho = 4 \text{ cm}$$

CHƯƠNG 2. CHUYỂN ĐỘNG QUAY CỦA VẬT RẮN QUANH TRỤC CỐ ĐỊNH

$$2-1. \omega = 3\pi \text{ rad/s}^2; n = 1325 \text{ vòng}$$

$$2-2. t = 8 \text{ s}$$

2-3. 1) Khi $t = 1 \text{ s}$: vật quay chậm dần; $t = 2 \text{ s}$ - vật quay nhanh dần.

$$2) V_1 = 0,2 \text{ m/s}; a_1 = 0,633 \text{ m/s}^2$$

$$V_2 = 0,4 \text{ m/s}; a_2 = 1 \text{ m/s}^2$$

$$2-4. t = 1 \text{ s}; t = 2 \text{ s}; a = 282,95 \text{ cm/s}^2$$

$$2-5. \alpha = 4\sqrt{17} \text{ m/s}^2$$

$$2-6. a^n = 5 \text{ m/s}^2$$

$$2-7. n_3 = 120 \text{ vòng/phút, cùng chiều với bánh thứ nhất}$$

$$2-8. \omega_4 = \frac{r_3}{r_2 r_4} dk \cos kt$$

$$2-9. \omega_3 = 2,94 \text{ rad/s}; \epsilon_3 = 3,84 \text{ rad/s}^2; V_M = 118 \text{ cm/s}; a_M = 379 \text{ cm/s}^2$$

$$2-10. i_{14} = \frac{\omega_A}{\omega_B} = 35, \text{ hai trục quay cùng chiều.}$$

CHƯƠNG 3. CHUYỂN ĐỘNG SONG PHẲNG CỦA VẬT RẮN

$$3-1. \omega = 2 \text{ rad/s}; \epsilon = 6 \text{ rad/s}^2; V_C = V_E = \sqrt{2} \text{ m/s}; V_D = 2 \text{ m/s}; a_B = 2 \text{ m/s}^2; a_C = 3,16 \text{ m/s}^2.$$

$$3-2. V_C = V_E = 2r\sqrt{2}\omega_0; V_D = 4r\omega_0; a_B = 6r\omega_0^2; a_C = 2r\sqrt{2}\omega_0^2$$

$$3-3. V_D = 0; V_E = \frac{4}{3} \sqrt{3gh}; a_D = \frac{2}{9r} g^2 t^2; a_E = \frac{4g}{9r} \sqrt{9r^2 + g^2 t^4}$$

$$3-4. a_A = 4\sqrt{26} \text{ m/s}^2; \vec{a}_A \text{ tạo với phương thẳng đứng một góc } \beta; \cos \beta = \frac{5}{\sqrt{20}}$$

$$3-5. V_A = 4V; \epsilon_3 = -\frac{a}{r}; \epsilon_4 = -\frac{3a}{R}$$

$$3-6. a_C = 5 \text{ m/s}^2; a_B = 7,29 \text{ m/s}^2; a_D = 6,4 \text{ m/s}^2$$

$$3-7. a_N = 480 \text{ cm/s}^2; a_M = 96 \text{ cm/s}^2$$

$$3-8. \omega_1 = (1 + \frac{r_3}{r_1})\omega_0; \epsilon_1 = 0; r_1 = \frac{r_3}{11}$$

$$3-9. \omega_{AB} = 2 \text{ rad/s}; \epsilon_{AB} = 16 \text{ rad/s}^2; a_B = 565,6 \text{ cm/s}^2$$

$$3-10. \omega_{AB} = 2 \text{ rad/s}; \omega_{BC} = 4 \text{ rad/s}; \epsilon_{AB} = 20 \text{ rad/s}^2; \epsilon_{BC} = 8 \text{ rad/s}^2$$

$$3-11. \omega_{BC} = \frac{8}{3} \omega_0; \epsilon_{BC} = \frac{20}{9} \omega_0^2$$

$$3-12. \text{ Khi OA thẳng đứng: } \omega = 2\omega_0; \epsilon = \frac{4rw_0^2}{\sqrt{l^2 - 4r^2}}$$

$$\text{khi OA nằm ngang: } \omega = 2(1 \pm \frac{l}{r}); \epsilon = 0$$

$$3-13. V_B = V_C = 200 \text{ cm/s}; a_B^n = 400 \text{ cm/s}^2; a_B^t = 370,45 \text{ cm/s}^2$$

$$3-14. V_B = 20\sqrt{3} \text{ cm/s}; V_C = 30 \text{ cm/s}; \omega_{BC} = \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot 5 \text{ rad/s}; a_B = 44 \text{ cm/s}^2$$

$$3-15. \omega_{AB} = 2 \text{ rad/s}; \omega_{DE} = 0,5 \text{ rad/s}; a_B = 2000 \text{ cm/s}^2; a_C = 1800 \text{ cm/s}^2$$

$$3-16. \omega_{EF} = 20 \text{ rad/s}; \epsilon_{EF} = 932 \text{ rad/s}$$

$$3-17. \omega = \frac{\pi^2}{6} \text{ rad/s}; \epsilon = \frac{\pi^4 \sqrt{3}}{72} \text{ rad/s}^2; \vec{v}_M = \vec{v}_A$$

$$\vec{a}_M = \begin{cases} a_{Mx} = -\frac{\pi^4}{12} \text{ cm/s}^2 \\ a_{My} = \pi^4 \frac{\sqrt{3}}{12} \text{ cm/s}^2 \end{cases}$$

$$3-18. V_D = 34,6 \text{ cm/s}; \omega_{AB} = 2 \text{ rad/s}; a_D = 29,4 \text{ m/s}^2; \epsilon_{AB} = 5,2 \text{ rad/s}^2$$

$$3-19. V_B = 6 \text{ m/s}; V_M = 6\sqrt{2} \text{ m/s}; a_B = 18 \text{ m/s}^2; a_M = 18\sqrt{2} \text{ m/s}^2$$

$$3-20. a_{Ax} = -\frac{3}{2} a_0; a_{Ay} = -\frac{V_0^2}{2R}$$

$$a_B = \frac{3}{2} a_o \cdot \frac{3V_o^2}{2\sqrt{4l^2 - 9R^2}}; \epsilon_{AB} = \frac{V_o^2}{R\sqrt{4l^2 - 9R^2}}$$

$$3-21. a_B = 24r\omega_o^2; a_C = 7\sqrt{3}r\omega_o^2; \epsilon_{BC} = \frac{7\sqrt{3}}{5} \omega_o^2$$

$$3-22. \omega = 2 \text{ rad/s}; \epsilon = 12,05 \text{ rad/s}^2; a_C = 3,18 \text{ m/s}^2$$

$$3-23. \omega = \sqrt{2} \text{ rad/s}; \epsilon = 1 \text{ rad/s}^2; a_C = 6 \text{ cm/s}^2; \vec{a}_C \text{ hướng từ C đến D.}$$

$$3-24. V_C = 0; a_C = \sqrt{\frac{V_A^4}{a^2} + \frac{V_B^4}{b^2}}$$

$$3-25. V_o = \frac{V_1 + V_2}{2}; \omega_o = \frac{a_1 + a_2}{2}; a_{Ax} = a_1; a_{Ay} = -(\frac{V_1 - V_2}{4r})^2$$

CHƯƠNG 4. HỢP CHUYỂN ĐỘNG CỦA ĐIỂM

$$4-1. V_e = \frac{1}{2} l\omega_o; V_r = \frac{\sqrt{3}}{2} l\omega_o; a_e = \frac{\sqrt{3}}{2} l\omega_o^2; a_r = \frac{1}{2} l\omega_o^2$$

$$4-2. \boxed{V_e = \frac{9}{8} \text{ cm/s}; a_e = 0,406 \text{ cm/s}^2}$$

$$4-3. \boxed{a = a_o \operatorname{tg}\alpha}$$

$$4-4. \omega_1 = 0,6 \text{ rad/s}; \omega_{II} = 0; \epsilon_1 = 0; \epsilon_{II} = 1,9 \text{ rad/s}^2$$

$$4-5. \omega_2 = \frac{\omega_1}{2}; V_r = b\omega_1 \cos \frac{\omega_1}{2} t; V_e = b\omega_1 \sin \frac{\omega_1}{2} t$$

$$a_r = a_e = \frac{b\omega_1^2}{2} \sin \frac{\omega_1}{2} t; a_C = b\omega_1^2 \cos \frac{\omega_1}{2} t$$

$$4-6. a_r = 15 \text{ cm/s}^2; a_C = 30 \text{ cm/s}^2$$

$$4-7. V_{AB} = \frac{l\omega}{\cos^2 \varphi}; a_{AB} = \frac{2l\operatorname{tg}\varphi}{\cos^2 \varphi} \omega^2 + \frac{l}{\cos^2 \varphi} \epsilon$$

$$4-8. \omega_1 = \frac{\omega_o}{4}; \epsilon_1 = \frac{\sqrt{3}}{8} \omega_o^2; a_{BC} = \frac{2}{3} r\omega_o^2$$

$$4-9. V_a = 78 \text{ cm/s}; a_a = 74,6 \text{ cm/s}^2$$

$$4-10. \varphi = 30^\circ; \alpha = 45^\circ; V_a = 76,3 \text{ cm/s}; a_a = 312 \text{ cm/s}$$

$$4-11. a_a^n = -13,84 \text{ m/s}^2; a_a^r = 4,93 \text{ m/s}^2$$

4-12. $V_a = \sqrt{41} \text{ cm/s}; a_a = 6\sqrt{2} \text{ cm/s}^2$

4-13. $V_x = u \cos \varphi + r\omega; V_y = u \sin \varphi$

$$a_x = 2u\omega - \frac{u^2}{\rho} \sin \varphi; a_y = -r\omega^2 - (2u\omega - \frac{u^2}{\rho} \cos \varphi)$$

4-14. $a_{ax} = 48,7 \text{ cm/s}^2; a_{ay} = -12,6 \text{ cm/s}^2; a_{az} = -2,7 \text{ cm/s}^2$

4-15. $a_a = 293,7 \text{ cm/s}^2$

CHƯƠNG 5. HỢP CHUYỂN ĐỘNG QUAY CỦA VẬT RĂN QUANH CÁC TRỤC

5-1. $n_B = 3000 \text{ vòng/phút}$

5-2. $\bar{n}_3 = (1 - \frac{z_1 z_2}{z_3 z_4}) \bar{n}_o = -60 \text{ vòng/phút}$

5-3. $\bar{\omega}_{2a} = -3\bar{\omega}_o; \bar{\omega}_{2r} = -4\bar{\omega}_o$

5-4. $n_B = 585 \text{ vòng/phút}, \text{ cùng chiều với bánh 1.}$

5-5. $\omega_A/\omega_B = 2$

5-6. $\omega_A = 4 \text{ rad/s}; \omega_{3r} = 3,5 \text{ rad/s}$

5-7. $\omega_c = 5 \text{ rad/s}; \omega_{3r} = 2 \text{ rad/s}; \omega_{3a} = 5,4 \text{ rad/s}$

5-8. 1) $\omega_B = 2\omega_A; 2) \omega_B = 2\omega_A - \omega_1; 3) \omega_B = \omega_A$

4) $\omega_B = 0; 5) \omega_B = 2\omega_A + \omega_1$

CHƯƠNG 6. CÂN BẰNG CỦA HỆ LỰC PHẲNG

6-1. $N_A = (70 - 40n) \text{ kN}; N_B = (30 + 40n) \text{ kN}$

6-2. $N_A = N_B = 5 \text{ kN}$

6-3. $S_{CD} = 10\sqrt{3} \text{ kN}; X_A = 5\sqrt{3} \text{ kN}; Y_A = 5 \text{ kN}$

6-4. $N_D = \frac{P}{2}; X_A = -P; Y_A = -\frac{P}{2}$

6-5. $X_A = \frac{P}{2}; Y_A = \frac{1}{8}(P\sqrt{3} - 12aq); N_B = \frac{1}{8}(3P\sqrt{3} + 4aq)$

$$6-6. N_B = \left(P + \frac{h}{a} Q \right) \frac{\sqrt{3}}{3}; X_A = P \frac{\sqrt{3}}{6} + \left(Q + \frac{h\sqrt{3}}{6a} \right) Q; Y_A = \frac{P}{2} - \frac{h}{2a} Q$$

$$6-7. X = 2,8 \text{ kN}; Y = 1,7 \text{ kN}; M = -5,35 \text{ kNm}$$

$$6-8. X = 137 \text{ kN}; Y = 25 \text{ kN}; M = 270 \text{ kNm}$$

$$6-9. X_A = 12,8 \text{ kN}; Y_A = 9,6 \text{ kN}; X_B = -12,8 \text{ kNm}$$

$$6-10. N_B = \frac{3}{2} \text{ kN}; N_C = 0,58 \text{ kN}; N_D = 0,08 \text{ kN} \text{ (coi là hai liên kết tựa)}$$

$$N = \frac{1}{2} \text{ kN}; M = 1 \text{ kNm} \text{ (coi là liên kết ngầm)}$$

$$6-11. X_o = \frac{r}{R} P; Y_o = P; S_{AB} = \frac{r}{R} P$$

$$6-12. X_A = -Q; Y_A = 0; M_A = -RQ; X_B = -Q; Y_B = 0; M_B = -RQ$$

$$X_C = -Q; Y_C = 0; M_C = 0; X_D = -Q; Y_D = 0; M_D = RQ$$

$$6-13. Y_A = 300 \text{ kN}; Y_B = \pm 300 \text{ kN}; N_C = 300 \text{ kN}; N = 1200 \text{ kN}$$

$$6-14. Y_A = 225 \text{ kN}; Y_B = 150 \text{ kN}; S_C = 50 \text{ kN}; S_D = 1200 \text{ kN}$$

$$6-15. N_{A1} = \frac{Q}{2} + \frac{P}{4} p; N_{B1} = \frac{Q + 3P}{2} + \frac{5}{4} p; T = p.$$

$$X_B = \frac{\sqrt{3}}{2} (p + P); Y_B = \frac{3}{2} (p + P)$$

$$6-16. N_A = 408 \text{ N}; N_B = 552 \text{ N}; T = 522 \text{ N}.$$

$$6-17. S_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}; S_2 = S_4 = -\frac{2\sqrt{3}}{3} P; S_3 = S_5 = 0; S_6 = -S_7 = \frac{\sqrt{3}}{3} P; S_8 = -P$$

$$6-18. N = 5\sqrt{3} P$$

$$6-19. X_A = 0; Y_A = 15N; N_B = 5N; X_C = 0; Y_C = \pm 5N; N_D = 20 N$$

$$6-20. X_A = -20\sqrt{2} N; Y_A = 100 N; M_A = -100 \text{ Nm}.$$

$$6-21. X_A = 15 \text{ kN}; Y_A = -7,5 \text{ kN}; X_B = 15 \text{ kN}; Y_B = 25 \text{ kN}$$

$$N_C = 52,5 \text{ kN}; N_D = 21,2 \text{ kN}; X_F = -15 \text{ kN}; Y_F = 27,5 \text{ kN}; M_F = -6,5 \text{ kNm}$$

$$6-22. Q = \frac{8\sqrt{3}}{9R} M$$

$$6-23. Q = P \cot \alpha$$

$$6-24. Q = \frac{M}{a}$$

$$6-25. \operatorname{tg}\alpha = 2 + \frac{1}{f}$$

$$6-26. a \geq 10 \text{ cm}$$

$$6-27. F_A = 86,6 \text{ N}; F_B = 213,4 \text{ N}; T = 13,4 \text{ N}$$

$$6-28. 1) Q = \frac{P\sin(\alpha + \beta)}{\sin\beta}; 2) Q = \frac{P[\sin(\alpha+\beta)+f\cos(\alpha+\beta)]}{\sin\beta + f\cos\beta} = \frac{P\sin(\alpha+\beta+\varphi)}{\sin(\alpha + \varphi)}; \alpha+\beta > \pi - \varphi$$

$$6-29. 1) Q = P\cot\alpha; 2) Q = P(\cot\alpha - 3f); \cot\alpha \leq 3f$$

$$6-30. 1) Q = \frac{M}{r} \cos\alpha; 2) Q = \frac{M}{r} (\cos\alpha - 3fsin\alpha); \cot\alpha \leq 3f$$

$$6-31. \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\beta} \leq \frac{hf - a}{b}$$

$$6-32. Q \geq 5 \text{ N}$$

$$6-33. a = d - r\cos\varphi$$

$$6-34. P \geq 94 \text{ kN}; X_o = 9,2 \text{ kN}; Y_o = -89,6 \text{ kN}; N_A = 14,1 \text{ kN}; N_B = 4,7 \text{ kN}$$

$$6-35. \cot\alpha \leq \min(f; \frac{k}{a + R})$$

$$6-36. Q \leq fP; M \leq kP + RQ \leq (k + fR)P$$

$$6-37. F_A = \frac{k}{R} (P + \frac{aQ}{a + b}) \leq F(P + \frac{aQ}{a + b})$$

CHƯƠNG 7. CÂN BẰNG CỦA HỆ LỰC KHÔNG GIAN

$$7-1. S_1 = S_3 = S_4 = 0; S_2 = S_6 = -\frac{P}{2}$$

$$7-2. S_1 = P; S_2 = -P\sqrt{2}; S_3 = -P; S_4 = P\sqrt{2} = S_5; S_6 = -P$$

$$7-3. T = 200 \text{ N}; X_A = 86,6 \text{ N}; Y_A = 150 \text{ N}; Z_A = 100 \text{ N}; X_B = 0; Z_B = 0$$

$$7-4. S = 34,5 \text{ N}; X_A = 17,3 \text{ N}; Z_A = 30 \text{ N}; Y_B = 0; Z_B = 60 \text{ N}$$

$$7-5. T = Q\sqrt{6}; X_A = \frac{P}{4} + \frac{Q\sqrt{3}}{2}(2 - \sqrt{2}); Y_A = \frac{P\sqrt{3}}{12} - \frac{Q}{2}; Z_A = P + Q\sqrt{3}$$

$$X_D = -\frac{P}{4} - \frac{Q\sqrt{3}}{2}(\sqrt{2} - 1); Y_D = Q - \frac{P\sqrt{3}}{12}$$

$$7-6. l = 10 \text{ cm}; X_A = X_B = 0; Z_A = 300 \text{ N}; Z_B = 950 \text{ N}$$

$$7-7. Q = 360 \text{ N}; X_A = -69,3 \text{ N}; Z_A = 160 \text{ N}; X_B = 17,3 \text{ N}; Z_B = 230$$

$$7-8. M = 5 \text{ Nm}; X_A = X_B = 0; Y_A = -180 \text{ N}; Y_B = 10 \text{ N}; Z_B = 200 \text{ N}$$

$$7-9. T_{CD} = 1000 \text{ N}; T_{AB} = 80 \text{ N}; X_o = 40 \text{ N}; Y_o = 540\sqrt{3} \text{ N}; Z_o = 500 \text{ N}$$

$$7-10. X_A = -\frac{P}{4}; Y_A = \frac{P\sqrt{3}}{4}; Z_A = \frac{P}{4}(7 + \sqrt{3}); S = P\sqrt{2}$$

$$7-11. S_1 = S_2 = -0,5 \text{ kN}; S_3 = -0,7 \text{ kN}; S_4 = S_5 = 0,5 \text{ kN}; S_6 = -1 \text{ kN}$$

$$7-12. S_1 = S_2 = \frac{P}{\sqrt{6}}; S_3 = \frac{-2}{\sqrt{3}}P; S_4 = S_5 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)P; S_6 = -\sqrt{2}P$$

CHƯƠNG 8. ĐỘNG LỰC HỌC CHẤT ĐIỂM

$$8-1. T_1 = 6024 \text{ N}; T_2 = 4800 \text{ N}; T_3 = 3576 \text{ N}$$

$$8-2. F = 59840 \text{ N}$$

$$8-3. S_1 = 1671 \text{ N}; S_2 = 9162 \text{ N}$$

$$8-4. T = 5396 \text{ N}$$

$$8-5. k = 14 \text{ rad/s}$$

$$8-6. N = 11065 \text{ Newton}$$

$$8-7. R = 202 \text{ m}$$

$$8-8. \alpha = 14^{\circ}25; f_{min} = 0,225$$

$$8-9. t = 1,61 \text{ s}$$

$$8-10. h = 175 \text{ m}$$

$$8-11. \text{Chuyển động sau } \frac{5}{3} \text{ giây kể từ lúc đóng mạch; } S = 0,01962(t - \frac{5}{3})^3 \text{ m.}$$

$$8-12. V_{gh} = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{gQ}{P}}; V = V_{gh} \frac{e^{\alpha t} - 1}{e^{\alpha t} + 1}; \alpha = 2k^2V_{gh}$$

$$8-13. V = \frac{P}{kS} (1 - e^{-\frac{ks}{m}t}); T = -\frac{m}{kS} \ln 0,05$$

8-14. $= \frac{F_o}{m\omega^2} (1 - \cos\omega t) + V_o t$

8-15. $x = R \cos \sqrt{\frac{g}{R}} t; V = 7,9 \text{ km/s}; T = 21,1 \text{ phút}$

8-16. $V_I = V_o \sin \alpha$ không phụ thuộc khoảng cách l.

8-17. Hyperbol: $(\frac{x}{V_o})^2 - (\frac{ky}{V_o})^2 = 1$

8-18. Ellip: $(\frac{kx}{V_o})^2 + (\frac{y}{l})^2 = 1$.

CHƯƠNG 9. ĐẶC TRUNG HÌNH HỌC CỦA VẬT RĂN

9-1. $x_c = 0,366a; y_c = 0,424h$

9-2. $x_c = y_c = 0,76R$

9-3. a) $x_c = 1,5a; y_c = 4a$

b) $x_c = 2a; y_c = 3,9a$.

c) $x_c = 2a; y_c = 3,71a$

d) $x_c = 0,5 a; y_c = \frac{(\pi - \alpha - \frac{2}{3} \sin \alpha)a}{\pi - \alpha}$

e) $x_c = 0,5a; y_c = 0,6b$.

f) $x_c = 17,79 \text{ cm}; y_c = 11,88 \text{ cm}$

9-4. $y_c = \frac{4}{9} b; J_x = \frac{13}{108} b^4$

9-5. $I_x = \frac{bh^3}{36}$

9-6. $I_x = 10,67 \text{ cm}^4; I_y = 5,33 \text{ cm}^4$

9-7. a) $y_c = 1,27 \text{ cm}^4; I_x = 0,24 \text{ cm}^4; I_y = 1,25 \text{ cm}^4$

b) $y_c = 1,86 \text{ cm}^4; I_x = 24,28 \text{ cm}^4; I_y = 8,61 \text{ cm}^4$

9-8. $\alpha_1 = -30^\circ 28'; \alpha_2 = 59^\circ 32'; I_{\max} = 378 \text{ cm}^4; I_{\min} = 38,5 \text{ cm}^4$

$$9-9. \frac{h}{b} = 2; I = \frac{2}{3} b^4$$

$$9-10. I_u = I_v = I_x = I_y = 270 \text{ cm}^4$$

$$9-11. \text{ a) } I_x = 351 \text{ cm}^4; I_y = 108 \text{ cm}^4$$

$$\text{b) } I_x = 1000 \text{ cm}^4; I_y = 965 \text{ cm}^4$$

$$\text{c) } I_x = 1664 \text{ cm}^4; I_y = 6463 \text{ cm}^4$$

$$\text{d) } I_x = 18048 \text{ cm}^4; I_y = 11100 \text{ cm}^4; y_c = 11 \text{ cm}$$

$$9-12. I_{x,ng} = 1640000 \text{ cm}^4; I_{xk} = 1416300 \text{ cm}^4; \Delta\% = 13,7\%$$

$$9-13. \text{ a) } 320 \text{ cm}^4; \text{ b) } 213 \text{ cm}^4; \text{ c) } 500 \text{ cm}^4; \text{ d) } 306 \text{ cm}^4$$

$$\text{e) } 1860 \text{ cm}^4; \text{ g) } 5060 \text{ cm}^4; \text{ h) } 13380 \text{ cm}^4; \text{ i) } 5800 \text{ cm}^4$$

So sánh:

$$\text{a) } 1; \text{ b) } 0,665; \text{ c) } 1,56; \text{ d) } 0,96$$

$$\text{e) } 5,8; \text{ g) } 15,8; \text{ h) } 41,7; \text{ i) } 18,1$$

$$9-14. \text{ a) } c = 38,18 \text{ cm}$$

$$\text{b) } c = 28,26$$

$$9-15. y_c = 21,7 \text{ cm}; I_x = 107400 \text{ cm}^4; I_y = 117800 \text{ cm}^4$$

$$9-16. \text{ a) } y_c = 10,3 \text{ cm}; I_x = 3920 \text{ cm}^4; I_y = 2340 \text{ cm}^4$$

$$\text{b) } y_c = 10,4 \text{ cm}; I_x = 182000 \text{ cm}^4; I_y = 28260 \text{ cm}^4$$

CHƯƠNG 10. NGUYÊN LÝ ĐI CHUYỂN KHÁ DĨ, NGUYÊN LÝ ĐALAMBÉ

$$10-1. Q = P \frac{2\pi a}{htg\alpha}$$

$$10-2. Q = \frac{aS_2F}{bS_1}$$

$$10-3. \frac{b+c}{b} = \frac{1}{d}; P = \frac{b}{a} Q$$

$$10-4. c = \frac{\sqrt{3}}{5} P$$

$$10-5. P = \frac{Q}{2}; f \geq 1$$

$$10-6. P_1 = \frac{Q}{2\sin\alpha}; P_2 = \frac{Q}{2\sin\beta}$$

$$10-7. a) X_A = 0; Y_A = 0,36 \cdot 10^4 \text{ N}; M_A = 0,73 \cdot 10^4 \text{ Nm}; N_B = 11 \cdot 10^3 \text{ N}$$

$$b) X_A = 1,47 \cdot 10^4 \text{ N}; Y_A = -5,4 \cdot 10^4 \text{ N}; N_B = 6,85 \cdot 10^4 \text{ N}; N_D = 2,08 \cdot 10^4 \text{ N}$$

$$10-8. T = 21 \text{ kN}; N_C = 0,637 \text{ kN}; N_D = 0,382 \text{ kN}$$

$$10-9. N_1 = \frac{m(gd - ah)}{b + d}; N_2 = \frac{m(gb + ah)}{b + d}$$

$$N_1 = N_2 \text{ khi xe chạy chậm dần đều với gia tốc } a = \frac{g(b - d)}{2h}$$

$$10-10. T_1 = P_1(1 - \frac{a_1}{g}); T_2 = T_1 - \frac{R}{rR} a_1; F_{ms} = T_2 \cdot P_3 \sin\alpha \cdot \frac{rP_3}{gR} a_1$$

$$10-11. N = \frac{P_1 \sin\alpha - P_2}{P_1 + P_2} P_1 \cos\alpha$$

$$10-12. \cos\varphi = \frac{3g(a - b)}{2\omega^2(a^2 - ab + b^2)}$$

$$10-13. \omega^2 = 3g \frac{b^2 \cos\varphi - a^2 \sin\varphi}{(b^3 - a^3) \sin 2\varphi}$$

$$10-14. N_A = N_B = \frac{\sqrt{5}}{3} ml\omega^2$$

CHƯƠNG 11. CÁC ĐỊNH LÝ TỔNG QUÁT ĐỘNG LỰC HỌC

$$11-1. R = 502 \text{ N}$$

$$11-2. R = 88,8 \text{ N}$$

$$11-3. \Delta = 0,36 \text{ m}$$

$$11-4. \delta = \frac{(m_1 \cos 60^\circ + m_2)S}{m + m_1 + m_2}$$

$$11-5. \text{Elip } (x - l \cos\alpha)^2 + \frac{y^2}{4} = l^2$$

$$11-6. \text{Áp lực thay đổi từ } 68,67 \cdot 10^3 \text{ N đến } 147,15 \cdot 10^3 \text{ N}$$

$$11-7. N = P_1 + P_2 + P_3 + \frac{a\omega^2}{2g} (P_2 + 2P_3) \cos \omega t$$

$$11-8. x = \frac{(m_1 + 2m_2)r}{m_1 + m_2 + m_3} (\cos \omega t - 1); N = (m_1 + m_2 + m_3)g \quad m_1 r \omega^2 \sin \omega t; T = (m_1 + 2m_2)r \omega^2 \cos \omega t$$

$$11-9. \omega = \frac{m_1 r^2 \omega_0}{m_1 r^2 + 2m_2 u^2 t^2}$$

$$11-10. \omega = \frac{2am_2t}{r(2m_2 + m_1)}; \zeta = \frac{2am_2}{r(2m_2 + m_1)}$$

$$11-11. \omega = \frac{(J + ma^2)\omega_0}{J + mL^2}$$

$$11-12. \omega = \frac{a}{b} (1 - e^{-\frac{b}{J}t})$$

$$11-13. J = hP \left(\frac{T^2}{\pi^2} - \frac{h}{g} \right)$$

$$11-14. \omega(t) = \sqrt{\frac{M}{\alpha}} \cdot \frac{e^{\beta t} - 1}{e^{\beta t} + 1}; \beta = \frac{2}{J} \sqrt{\alpha M}; \omega_{gh} = \lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = \sqrt{\frac{M}{\alpha}}$$

$$11-15. N = 2,944 \text{ kW}$$

$$11-16. N = 369,45 \text{ W}$$

$$11-17. T = \frac{\omega^2}{6\cos^4 \varphi} [m_1 R^2 \cos^4 \varphi + 3l^2(m_2 + m_3)]$$

$$11-18. \text{a)} T = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3} m_1 + m_2 [\sin \varphi + \frac{r \sin 2\varphi}{2l \sqrt{1 - (\frac{r}{l})^2 \sin^2 \varphi}}] \right\} r^2 \omega^2$$

$$\text{b)} T = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} m_1 + m_2 + m_3 \right) r^2 \omega^2$$

$$11-19. T = \frac{1}{3} (33 m + 8 m_1) r^2 \omega^2$$

$$11-20. V = 2 \sqrt{\frac{P}{2P + Q}} gh$$

$$11-21. \omega = 2 \sqrt{\frac{4M - 2P(r_2 - r_1)}{(r_2 - r_1)[P(r_2 - r_1)^2 + 4g(J_1 + J_2)]}} \text{ gh}$$

$$11-22. \omega = \frac{2}{r} \sqrt{\frac{M - P_2 r(\sin\alpha + f\cos\alpha)}{P_1 + 2P_2}} \text{ gr}$$

$$\varepsilon = \frac{2g[M - P_2 r(\sin\alpha + f\cos\alpha)]}{P_1 + 2P_2}$$

$$11-23. \varepsilon_o = \frac{M_o - 10M_1}{1300J_1}$$

$$11-24. \varepsilon_2 = \frac{\mathcal{M}_{tg}}{J_{tg}} = \text{const}; \quad \mathcal{M}_{tg} = P_1 R - P_3 \sin\alpha; \quad J_{tg} = \frac{1}{g} (P_1 R^2 + P_2 \rho^2 + P_3 r^2)$$

$$11-25. V = \sqrt{\frac{2g(M - Pr\sin\alpha)}{r(P + Q)}} S$$

$$11-26. a_A = \frac{P(R + r)^2}{Q(R^2 + \rho^2) + P(R + r)^2}$$

11-27. Sau 2,34 vòng

CHƯƠNG 12. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CHUYỂN ĐỘNG CỦA VẬT RẮN VÀ CƠ HÈ

$$12-1. k = rtg\alpha$$

$$12-2. = - \frac{F}{P} \cdot \frac{rg(r\cos\alpha - a)}{2(r^2 + \rho^2)} t^2$$

$$12-3. V = \frac{2}{3} \sqrt{3gh}; \quad T = \frac{1}{3} mg$$

$$12-4. S(t) = - \frac{1}{3} g(\sin\alpha - 2f\cos\alpha)t^2 \quad \text{Khối trụ đứng yên nếu } \operatorname{tg}\alpha < 2f$$

$$T = \frac{P}{6} (\sin\alpha + f\cos\alpha)$$

$$12-5. T = 0,266P$$

$$l^2 - 3a^2$$

$$12-6. \text{Độ biến thiên của áp lực tại A là } \frac{l^2 - 3a^2}{2(l^2 + 3a^2)} P$$

12-7.

$$l\ddot{\varphi} + \ddot{x}\cos\varphi + g\sin\varphi = 0$$

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2 l\ddot{\varphi}\cos\varphi - m_2 l\dot{\varphi}^2\sin\varphi = 0$$

12-8. PTVP: $\frac{1}{g} [(Q + P)R^2\ddot{\theta} + QR\sin\gamma\ddot{S}] = 0; \frac{Q}{g} (R\sin\gamma\ddot{\theta} + \ddot{S}) = P\cos\gamma$

PTCD: $\theta = \frac{P\sin 2\gamma}{Q\cos^2\gamma + P} \cdot \frac{gt^2}{4R}; S = \frac{Q\cos 2\gamma + P}{Q\cos^2\gamma + P} - \frac{P}{Q} \cos\gamma \frac{t^2}{2}$;

θ - góc quay của trục, S - quãng đường của bi theo ranh.

12-9. $MR^2\ddot{\theta} - \frac{1}{2} mR[(R - r)\dot{\varphi} + R\dot{\theta}] = C_1$

$$\frac{1}{2} MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4} m[(R - r)\dot{\varphi} - R\dot{\theta}]^2 + \frac{m}{2} (R - r)^2\dot{\varphi}^2 - mg(R - r)\cos\varphi = C_2$$

φ - góc quay của đoạn thẳng nối tâm các trục, θ - góc quay của trục ngoài.

12-10. $(m + \frac{M}{2})R^2\ddot{\varphi} + mRl\cos(\varphi - \psi)\ddot{\psi} + mRl\sin(\varphi - \psi)\dot{\psi}^2 + mgR\sin\varphi = 0$

$$mRl\cos(\varphi - \psi)\ddot{\varphi} + ml^2\ddot{\psi} - mRl\sin(\varphi - \psi)\dot{\varphi}^2 + mglsin\psi = 0$$

12-11. $x_1 = \frac{1}{m_1 + m_2} (m_1 u_o t + \frac{m_2 u_o}{k} \sin kt)$

$$x_2 - 1 = \frac{1}{m_1 + m_2} (m_1 u_o t - \frac{m_1 u_o}{k} \sin kt); k = \sqrt{\frac{1}{c} (\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2})}$$

12-12. $a_A = \frac{(2M_1 + M_2 - 5mgR)R}{J + 5mR^2}$

12-13. $(M + m)\ddot{x} + mR\dot{\varphi}\cos\varphi - mR\dot{\varphi}^2\sin\varphi + cx = 0$

$$\frac{3}{2} R\ddot{\varphi} + \ddot{x}\cos\varphi + g\sin\varphi = 0$$

12-14. $(M + m)\ddot{x} + m(R - r)\ddot{\varphi}\cos\varphi - m(R - r)\dot{\varphi}^2\sin\varphi + cx = 0$

$$\frac{3}{2} (R - r)^2\ddot{\varphi} + (R - r)\ddot{x}\cos\varphi + g(R - r)\sin\varphi = 0$$

x - hoành độ trọng tâm của đầm; j - góc của đường nối tâm lõi với tâm trục và đường thẳng đứng.

$$12-15. (M + m)\ddot{X} + ml\ddot{\varphi}\cos\varphi - ml\dot{\varphi}^2\sin\varphi + 2cX = 0$$

$$l\ddot{\varphi} + \ddot{X}\cos\varphi + g\sin\varphi = 0$$

$$12-16. (3m_1 + 2m)\ddot{X} + 2ml\ddot{\varphi}\cos\varphi - 2ml\dot{\varphi}^2\sin\varphi + 2cX = 0$$

$$l\ddot{\varphi} + \ddot{X}\cos\varphi + g\sin\varphi = 0$$

$$12-17. [J + \frac{m}{6}(a^2 - ab + b^2)\sin^2\varphi]\ddot{\theta} + \frac{m}{6}(a^2 - ab + b^2)\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin 2\varphi = M$$

$$\ddot{\varphi} - \frac{1}{2}\dot{\theta}^2\sin 2\varphi - \frac{3}{2}g(b - a)\sin\varphi = 0;$$

θ góc quay của trục máy.

φ góc giữa AB và đường thẳng đứng.

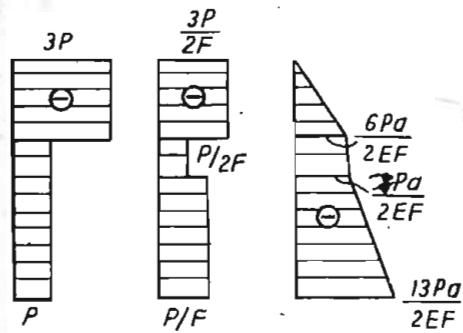
$$12-18. [J + \frac{1}{3}\sigma(b^3\sin^2\varphi + a^3\cos^2\varphi)]\ddot{\theta} + \frac{1}{3}\sigma(b^3 - a^3)\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin 2\varphi = M$$

$$(a^3 + b^3)\ddot{\varphi} - \frac{1}{2}(b^3 - a^3)\dot{\theta}^2\sin 2\varphi - \frac{3}{2}(a^2\cos\varphi - b^2\sin\varphi) = 0$$

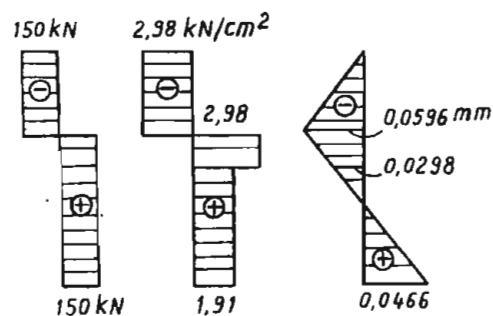
θ - góc quay của trục máy và φ góc giữa thanh OA với đường thẳng đứng.

CHƯƠNG 13. KÉO NÉN ĐÚNG TÂM

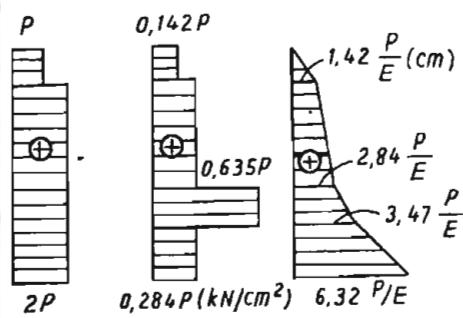
13-1.



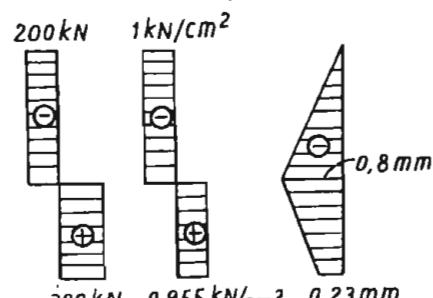
a)



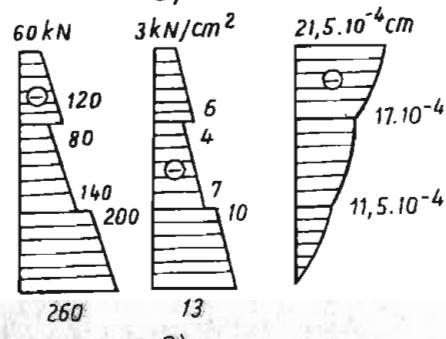
b)



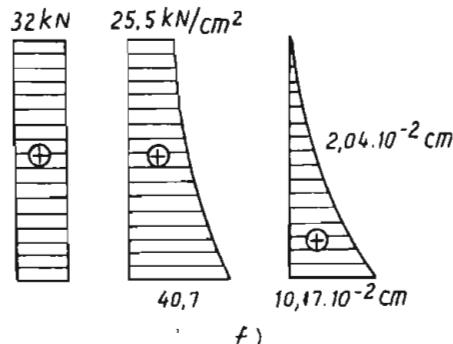
c)



d)



e)



13-2. $\sigma = 15,3 \text{ kN/cm}^2$ $\Delta l = 0,054 \text{ cm}$

13-3. $\sigma_{\text{cót}} = 0,064 \text{ kN/cm}^2$. $\sigma_{\text{cáp}} = 5 \text{ kN/cm}^2$.

13-4. $n_{AB} = 1,57$; $n_{CD} = 1,58$.

13-5. $n = 5,42$; hệ số an toàn nhỏ nhất: 3,35

13-6. a) $F_1 = P/(\sqrt{3}[\sigma])$; $F_2 = P/(2\sqrt{3}[\sigma])$; $F_3 = P/2[\sigma]$.

b) $F = P/[\sigma]$.

c) $F_1 = 3P/(2[\sigma])$; $F_2 = P/[\sigma]$

d) $F_1 = 79a/2 [\sigma]$; $F_2 = 7\sqrt{29}a/4 [\sigma]$

e) 5cm^2

f) $4,9 \text{ cm}^2$; 8 cm^2

g) $F_1 = F_2 = \frac{7}{8} \frac{P}{[\sigma]}$; $F_3 = \frac{7}{4} \frac{P}{[\sigma]}$

13-7. a) L 90x 90 x 9 hay L 100 x 100 x 8; I số 14

b) thanh 1: [số 12; thanh 2: L 25 x 25 x 4 hay L 32 x 32 x 3; thanh 3: [số 8.

13-8. $F = \frac{5}{6} \frac{P}{[\sigma]}$

13-9. $d_o = 80 \text{ mm}$.

13-10. $P = 89 \text{ kN}$

13-11. $h = 2,87 \text{ m}$

13-12. a) $P = 130 \text{ kN}$

b) $P = 1,765 \text{ kN}$

13-13. a) $P = 9 \text{ kN}$

b) $P = 64 \text{ kN}$

c) $\sigma_{\text{max}} = 8940 \text{ N/cm}^2$

13-14. $N_1 = P \frac{5 - x}{5}$; $N_2 = \frac{P_x}{5}$; $\varphi = 0,968 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \approx 20''$

$x = 3,46 \text{ cm}$. Đồ thị biểu diễn biến thiên lực dọc là đường bậc nhất.

13-15. $= 0,3 \text{ m}$;

13-16. a) $V_A = 0,144 \text{ cm}$ b) $V_A = 0,246 \text{ cm}$

13-17. a) $\delta_y = \frac{PG}{8EF} (1 + 3\sqrt{3})$; $\delta_x = \frac{Pa}{8EF} (3 - \sqrt{3})$; $\sigma_I = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{P}{F}$; $\sigma_{II} = \frac{P}{2F}$

b) $\delta_y = 1,36 \text{ mm}; \delta_x = 0,53 \text{ mm}; \sigma_I = 4400 \text{ N/cm}^2; \sigma_{II} = 4700 \text{ N/cm}^2$

c) $\frac{(2P + \sqrt{2} \cdot qa)}{EF}; \frac{(P + \sqrt{2} \cdot qa)}{\sqrt{2} \cdot F}; \frac{P}{\sqrt{2} \cdot F}$

d) $\frac{p \cdot a}{EF \cos^2 \beta} (\sin^2 \beta + 2); \frac{P}{F} \cdot \tan \beta; \frac{P}{F \cos \beta}$

e) $\delta_x = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{Pa}{EF}; \delta_y = \frac{Pa}{2EF} (2 + \sqrt{2}); \frac{P}{\sqrt{2}F}; \frac{P}{F}$

f) $\delta_x = \frac{3}{2} \frac{Pa}{EF_1}; \delta_y = \frac{3Pa}{EF_1}; \frac{P}{F_1}; \frac{3P}{2F}$

g) $10 \frac{Pa}{E_1 F_1}; 2 \frac{P}{F_1}; \frac{4P}{F_1}$

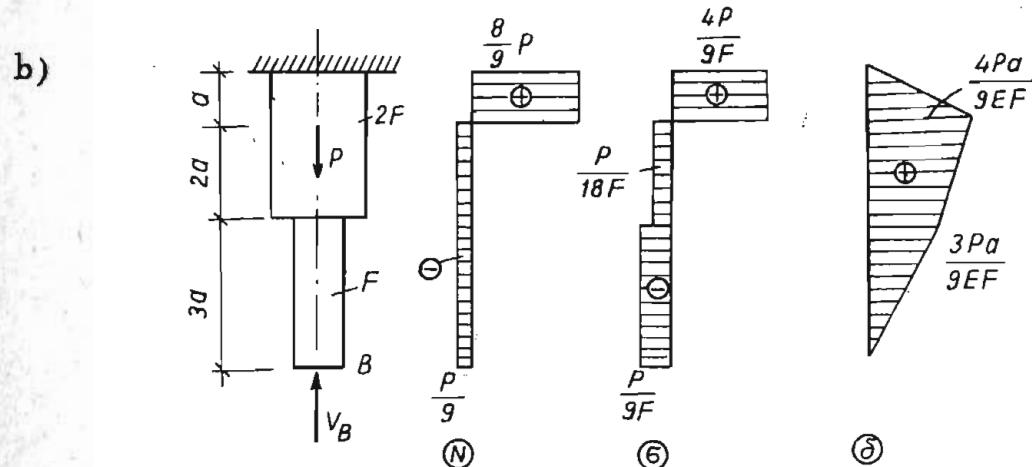
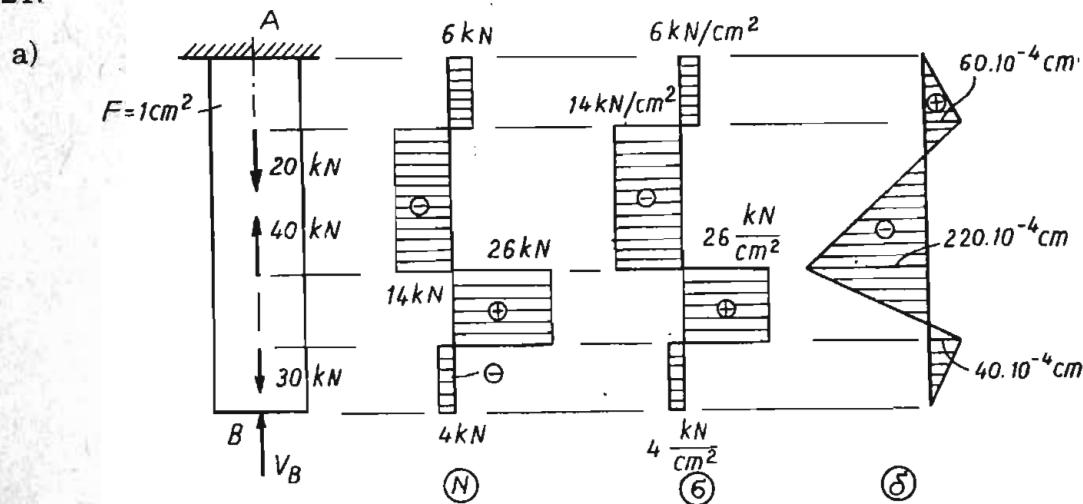
h) $\delta_x = 5,4 \text{ mm}; \delta_y = 1,8 \text{ mm}; \sigma_I = 9000; \sigma_{II} = 18.000; \sigma_{III} = 12000 \text{ N/cm}^2$

13-18. $E_{th} = 2 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2; E_d = 1.10^5 \text{ N/mm}^2; E_{dura} = 0,7 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$;

13-19. $E_d = 1.10^7 \text{ N/cm}^2$.

13-20. $\mu = 0,32$

13-21.



13-22. $N_{dura} = N_{th} = 14 \text{ kN}$; $\sigma_{dura} = 4,67 \text{ kN/cm}^2$; $\sigma_{th} = 14 \text{ kN/cm}^2$
 $\Delta l_{th} = 0,035 \text{ cm}$.

- 13-23. a) $q = 84 \text{ kN/m}$
 b) $M = 275 \text{ kN.m}$

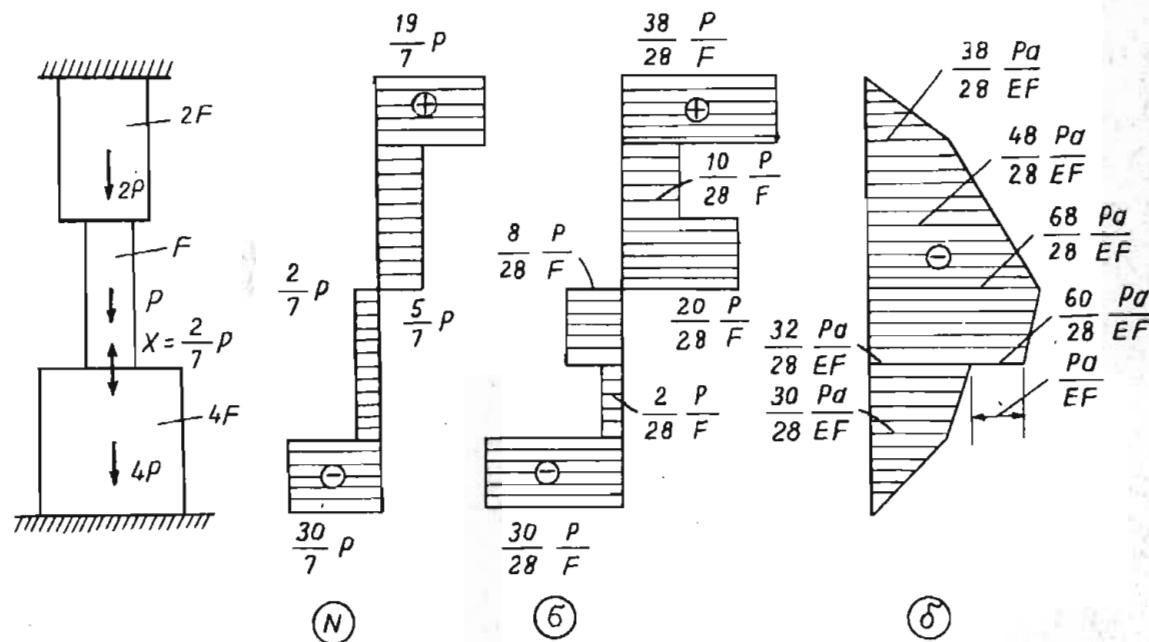
13-24. $N_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot P$; $N_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} P$; $N_3 = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} P$

13-25. $[P] = 95 \text{ kN}$

13-26. $V_A = 1,12 \frac{\text{Pa}}{\text{EF}}$

13-27. $N_1 = N_3 = \frac{P \cos 30^\circ}{1 + 2 \cos^2 30^\circ}$; $N_2 = \frac{P}{1 + 2 \cos^2 30^\circ}$

13-28.



13-29. $N_1 = 0,1875.P$; $N_2 = 0,125.P$; $N_3 = 0,3125P$; $N_4 = 0,375P$.

13-30. a) 120 MN/m^2 .

b) 10 MN/m^2 ; $7,1 \text{ MN/m}^2$

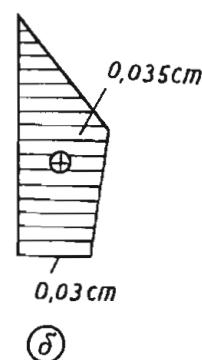
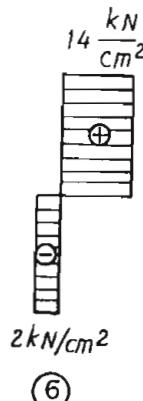
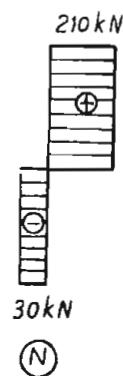
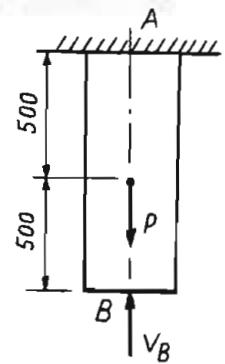
13-31. $d = 1,69 \text{ cm}$

13-32. $N_o = 1,12 [P] = 28 \text{ kN}$

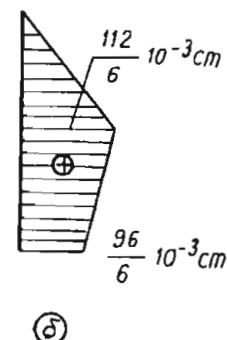
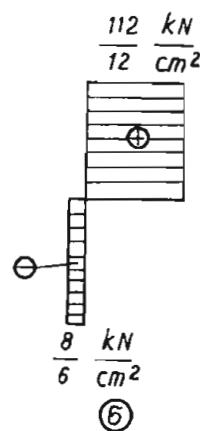
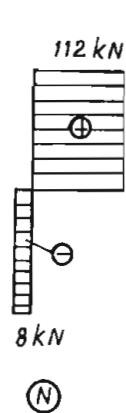
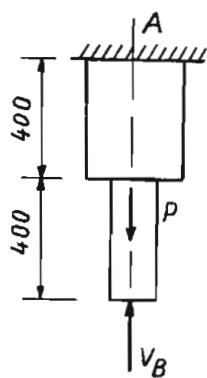
13-33. $0,074 \text{ cm}$

13-34.

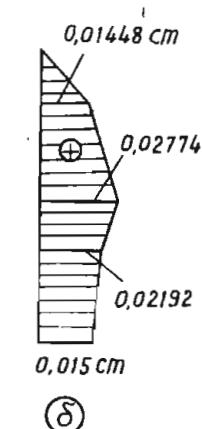
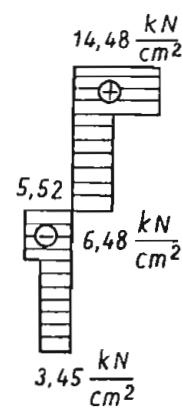
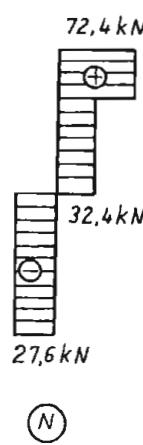
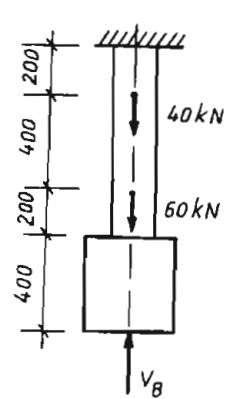
a)



b)



c).

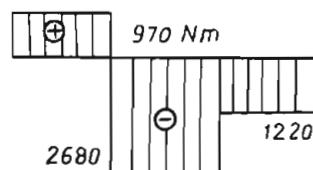
13-35. $P = 80 \text{ kN}$

CHƯƠNG 14. XOẮN THANH THẲNG

$$14-1. \quad \tilde{\sigma}_{\max} = 3,901 \text{ kN/cm}^2; \varphi = -0,0119 \text{ rad.}$$

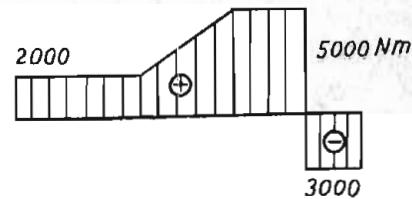
$$14-2. \quad m = 5000 \text{ Nm/m}; \iota_{\max} = 2878 \text{ N/cm}^2,$$

Biểu đồ mômen xoắn bài 14-1



bài 14-1

Biểu đồ mômen xoắn bài 14-2



bài 14-2

14-3. $\tau_{\max(AB)} = 2000 \text{ N/cm}^2$; $\tau_{\max(BC)} = 2930 \text{ N/cm}^2$
 ~~$\theta_{\max} = 21,1^\circ/\text{m}$~~ ; ~~$\varphi_{B_1} = 4,375 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$~~ ; ~~$\varphi_c = 5,9 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$~~

14-4. $\tau_{\max} = 1655 \text{ N/cm}^2$; $\theta_{\max} = 0,394^\circ/\text{m}$.

14-5. $\tau_{\max} = 1775 \text{ N/cm}^2$; $\varphi = 0,34^\circ = 21'$

14-6. $G = 2,72 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2$; $\varphi = 6'.52''$

14-7. a) $K = 24900 \text{ Ncm}$; b) $K = 616000 \text{ Ncm}$

14-8. $\frac{M_z^r}{M_d^d} = 1,7$; Trục rỗng giảm được 29,6%

14-9. $\frac{\tau_{\max}^d}{\tau_{\max}^r} = 2,35$.

14-10. $\tau_{\max} = 5970 \text{ N/cm}^2$

14-11. $D = 21 \text{ cm}$; $d = 12,6 \text{ cm}$; $Q_d : Q_r = 1,42$.

14-12. $d = 5,45$; $\varphi = 1^\circ 39'$

14-13. $d = 5,7 \text{ cm}$; $d_2 = 5,8 \text{ cm}$; $d_1 = 2,9 \text{ cm}$

14-14. $D = 15 \text{ cm}$; $d = 13,7 \text{ cm}$; $Q_d : Q_r = 2,68$.

14-15. $d_1 = 4,5 \text{ cm}$; $d_2 = 4,7 \text{ cm}$

14-16. $d_a = 6,4 \text{ cm}$; $d_b = 5,3 \text{ cm}$; Đường kính giảm 1,21 lần.

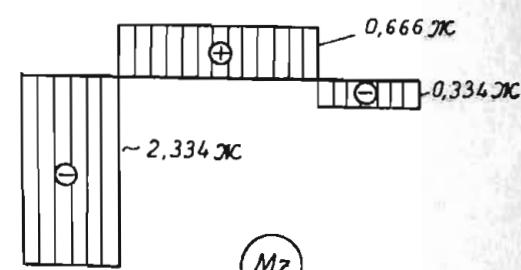
14-17. $N = 63,5 \text{ kW}$

14-18. $n = 10 \text{ bulông}$

14-19. $d = 6,3 \text{ cm}$

14-20. $\tau_{\max} = 3460 \text{ N/cm}^2$ (trên đoạn có đường kính lớn)

14-21. $d = 20 \text{ cm}$.

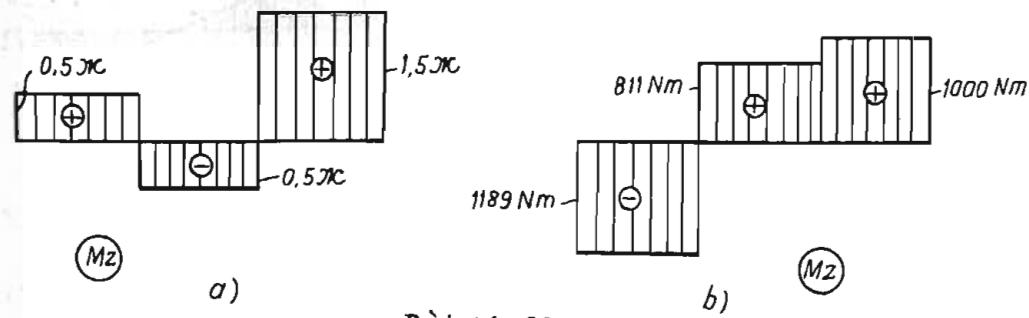


$\tau_{\max} = 3460 \text{ N/cm}^2$ (trên đoạn có đường kính lớn)

Biểu đồ mômen xoắn bài 14-20

$$14-22. \tau_{th} = 2600 \text{ N/cm}^2 ; \tau_d = 1180 \text{ N/cm}^2$$

14-23.



Bài 14-23

$$14-24. \text{ a)} \tau_{max_1} = 3060 \text{ N/cm}^2 ; \sigma_{II} = 3180 \text{ N/cm}^2.$$

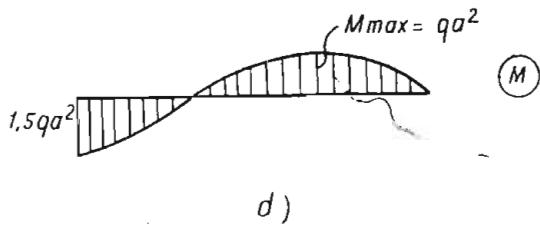
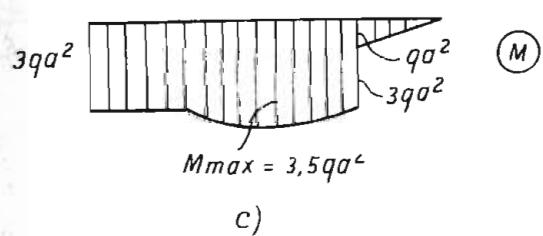
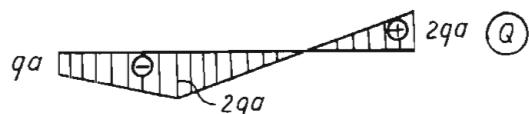
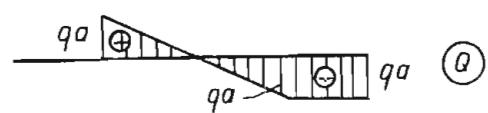
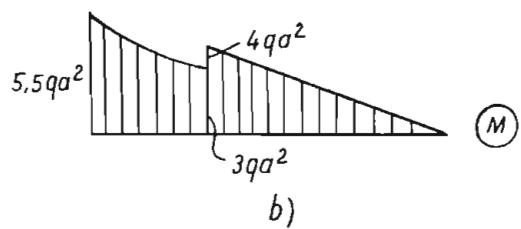
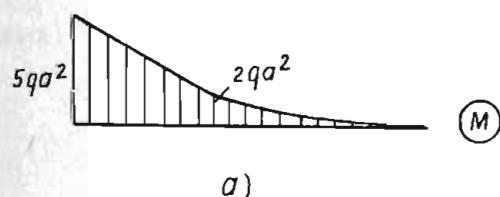
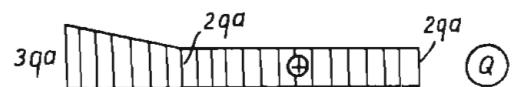
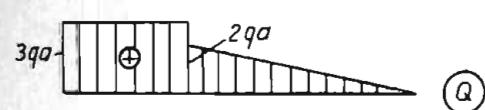
$$\text{b)} \tau_{max_1} = 7500 \text{ N/cm}^2 ; \sigma_{II} = 370 \text{ N/cm}^2; \varphi_{AB}^o = 1,14^\circ$$

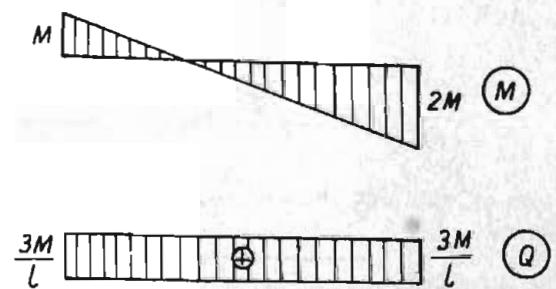
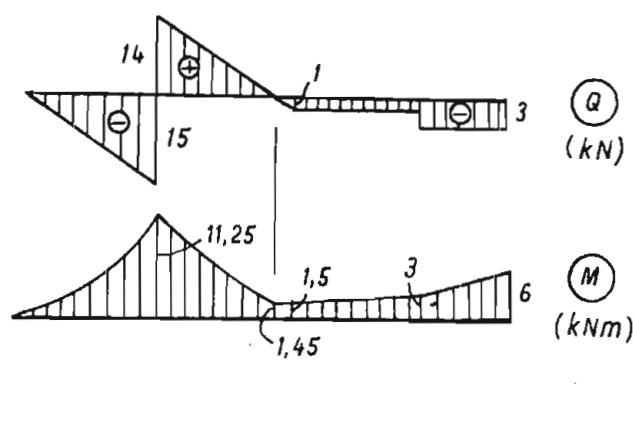
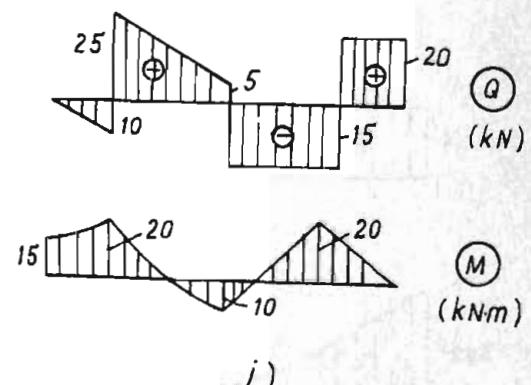
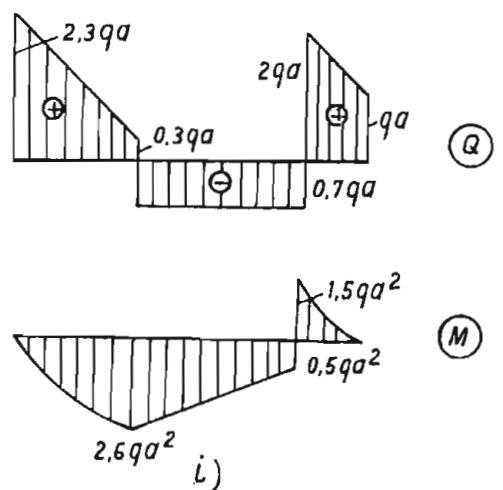
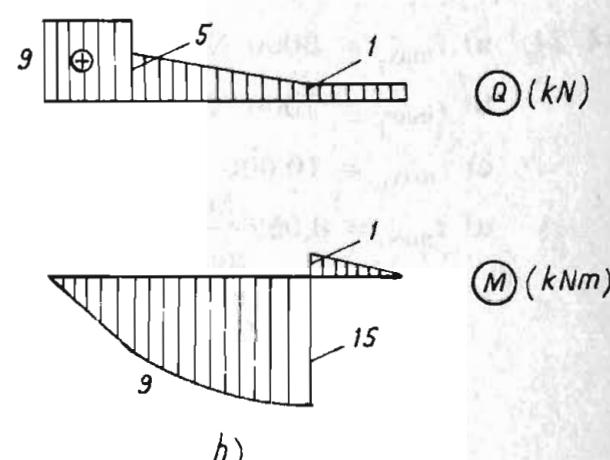
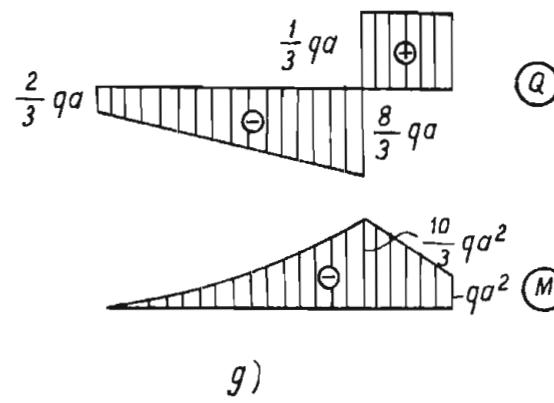
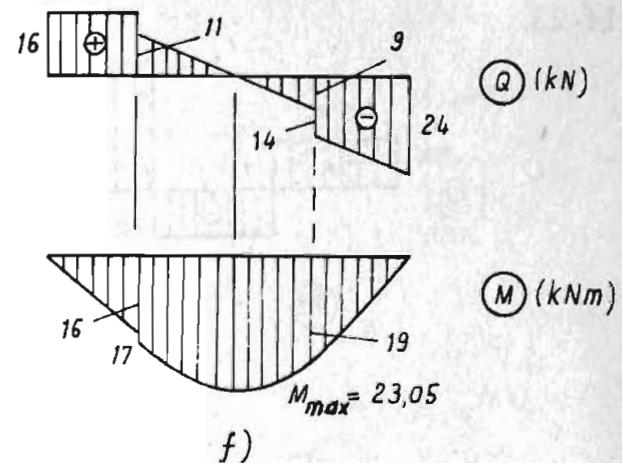
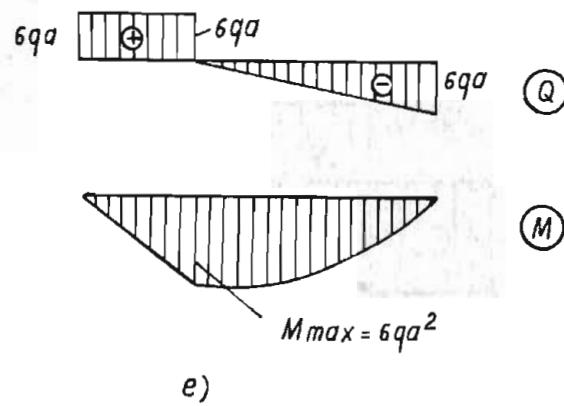
$$\text{c)} \tau_{max_1} = 10.000 \text{ N/cm}^2 ; \sigma_{II} = 1000 \text{ N/cm}^2.$$

$$\text{d)} \tau_{max} = 0,052 \frac{M}{\pi d^3} ; \sigma_I = 3,3 \frac{M}{\pi d^3} ; \sigma_{II} = 0,453 \frac{M}{\pi d^3} ; \varphi_{AB}^o = 0,5 \frac{M \cdot Q}{G \pi d^4} ;$$

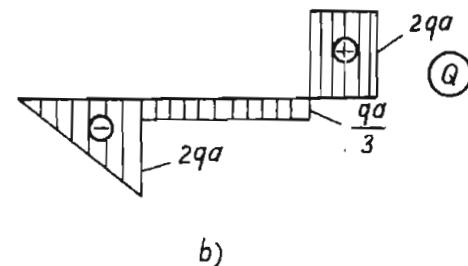
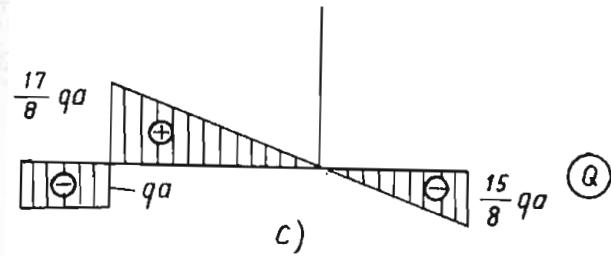
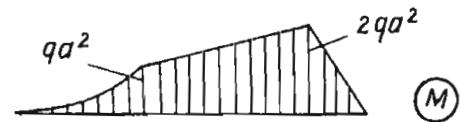
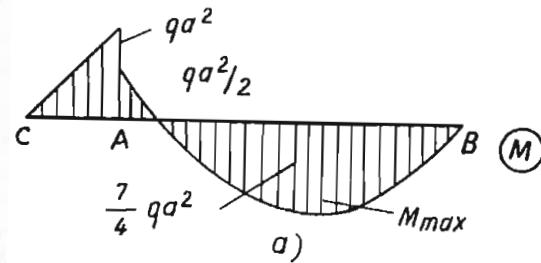
CHƯƠNG 15. UỐN NGANG PHẲNG THANH THẲNG

15-1





15-2

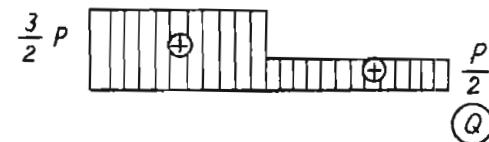
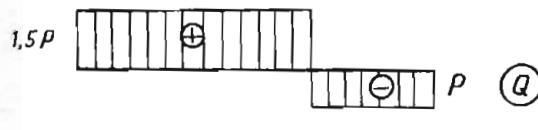
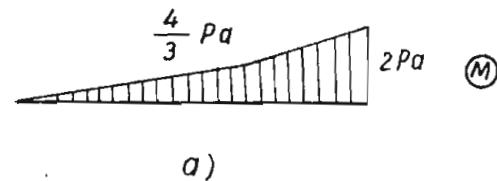
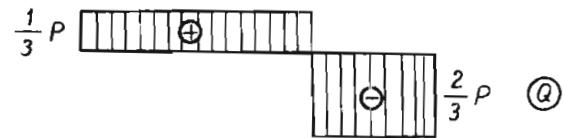


15-3. a) $a = l(\sqrt{2} - 1)$

b) $a = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot l$

15-4. $M_o = 0,147 \cdot q \cdot l^2$

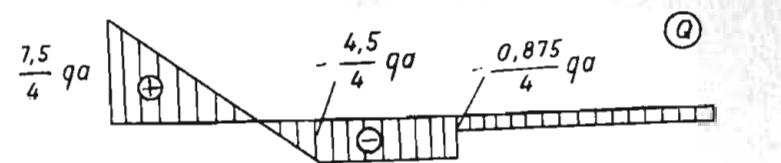
15-5.



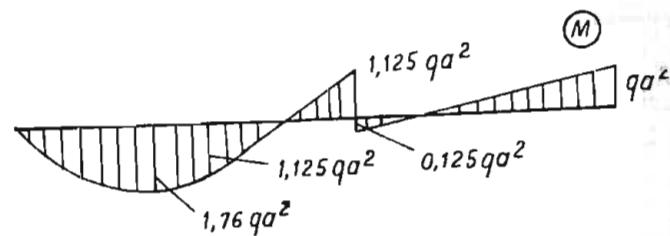
b)

c)

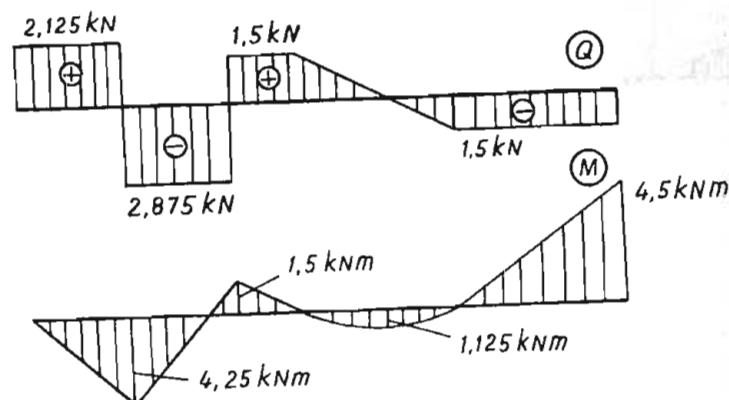
15- 6



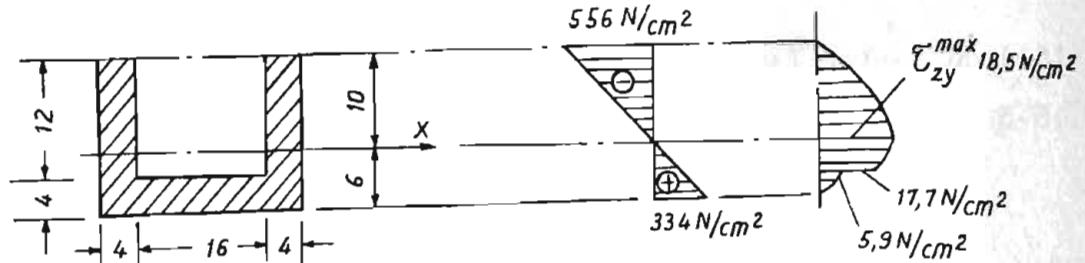
a)



b)



Biểu đồ bài 15-9

15- 7. Đặt đáy ở phía trên, $h = 6 \text{ cm}$; $b = 3,6 \text{ cm}$ 15- 8. 1) $\sigma_{\max} = 28,26 \text{ kN/cm}^2$; 2) $a = 2,49 \text{ cm}$; $\sigma_{\max} = 4,85 \text{ kN/cm}^2$ 15- 9. $\sigma_{z\max} = 334 \text{ N/cm}^2$; $\sigma_{z\min} = -556 \text{ N/cm}^2$; $\tau_{xy}^{\max} = 18,5 \text{ N/cm}^2$ (xem biểu đồ ở trên).15- 10. 1) $\sigma_{\max} = 6650 \text{ N/cm}^2$ 2) $\sigma_{\max} = 13660 \text{ N/cm}^2$ 15- 11. Mật cắt I số 36. Ở mặt cắt có mômen uốn lớn nhất ($M_{\max} = 110 \text{ kNm}$); $\sigma_{\max} = 14,8 \text{ kN/cm}^2$; ở điểm sát bản cánh mặt cắt C; $\sigma = 9,11 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$.

15- 12.

Hình	Tròn	Vuông	Chữ nhật đứng	Chữ nhật nằm	I	Vành khăn
Kích thước	$D = 8,18 \text{ cm}$	$a = 6,9 \text{ cm}$	$h = 8,7 \text{ cm}$ $b = 4,35 \text{ cm}$	$h = 10,96 \text{ cm}$ $b = 5,48 \text{ cm}$	Số 12	$D = 9,28 \text{ cm}$ $d = 6,96 \text{ cm}$
sо sánh diện tích	3,18	2,89	2,30	3,64	1	1,79

15-13. I số 12; $R_A = 17,5 \text{ kN}$; $R_B = 22,5 \text{ kN}$

15-14. hai dầm chữ I số 30a.

15-15. $d_1 = 35 \text{ mm}$; $d_2 = 26 \text{ mm}$;
 $\sigma_{\max} = 3500 \text{ N/cm}^2$

15-16. $d = 95 \text{ mm}$; $d_1 = 85 \text{ mm}$; $d_2 = 50 \text{ mm}$;
 $d_3 = 90 \text{ mm}$; $d_4 = 45 \text{ mm}$

15-17. $a = 1 \text{ cm}$; $h = 24 \text{ cm}$

15-18. $l = 7,92 \text{ m}$

15-19. 1) $a = 2,06 \text{ cm}$; 2) $a = 3,1 \text{ cm}$

15-20. $\frac{b}{h} = 0,71$; $d = 22,7 \text{ cm}$

15-21. $a = 65 \text{ cm}$; $h = 3 \text{ cm}$

15-22. $a = 30 \text{ cm}$; $t = 6,2 \text{ cm}$

15-23. Mặt cắt [số 27].

15-24. $b = 5 \text{ cm}$; $h = 12 \text{ cm}$

15-25. 1) $b_z = \frac{3P}{k^2 [\sigma]} \cdot Z \quad (0 \leq Z \leq \frac{1}{2})$; bề rộng ở đầu dầm.

$$b_o = \frac{3P}{4h \cdot [\tau]} \text{ bề rộng kéo dài một đoạn } \frac{h}{4} \frac{[\sigma]}{[\tau]}$$

$$2) h_z = \sqrt{\frac{3P}{b[\sigma]}} Z \quad (0 \leq Z \leq \frac{1}{2}) \text{; bề cao ở đầu dầm.}$$

$$h_o = \frac{3P}{4b [\tau]} \text{; bề cao kéo dài một đoạn } \frac{3.P. [\sigma]}{16.b.[\tau]^2}$$

b, h kích thước mặt cắt giữa dầm tính theo quan hệ $\frac{bh^2}{6} = \frac{Pl}{4[\tau]}$.

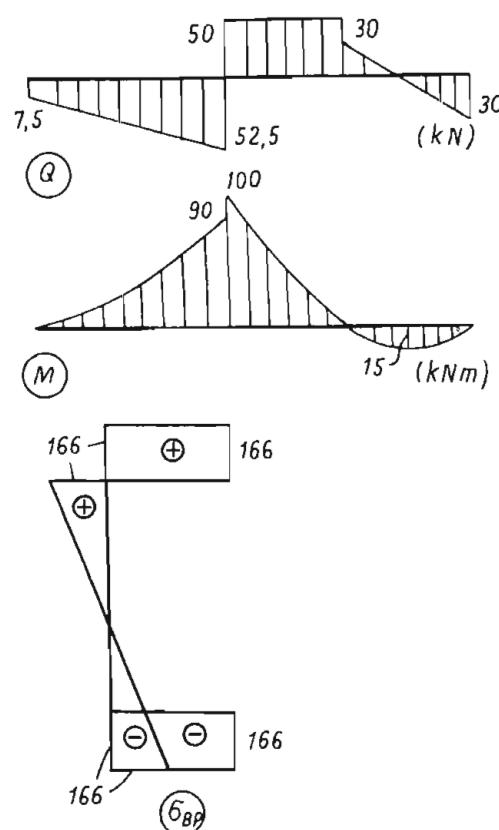
15-26. $\sigma_{\max} = 59 \text{ kN/cm}^2$

$$15-27. 1) \frac{h}{h_o} = \frac{2}{3}; \frac{4}{1} = \frac{4}{9}; \quad 2) \frac{h}{h_o} = \frac{1}{2}; \quad \frac{a}{l} = \frac{1}{2}$$

15-28. $P = 16,1 \text{ kN}$

15-29. $P_1 = 1470 \text{ N}$; $P_2 = 5880 \text{ N}$

15-30. $[P] = 580 \text{ N}$



Biểu đồ Q, M, σ_{Bp} bài 15-23

$$15-31. [q] = 3,46 \text{ kN/cm}, \tau_{\max} = 6,85 \text{ kN/cm}^2.$$

$$15-32. y_1 = \frac{1}{EI_x} (18,4Z + 0,417 Z^3) \quad (0 \leq Z \leq 2\text{m})$$

$$y_2 = \frac{1}{EI_x} (40 - 58,4Z + 10Z^2 - 0,417 Z^3) \quad (2 \text{ m} \leq Z \leq 8 \text{ m})$$

$$15-33. y_B = \frac{25}{96} \frac{Pl^3}{EI_x}; \quad y_C = \frac{7}{96} \frac{Pl^3}{EI_x}$$

$$15-34. \theta_A = -\frac{5}{3} \frac{qa^3}{EI_x}; \quad \theta_B = \frac{4}{3} \frac{qa^3}{EI_x}; \quad f_c = -\frac{3}{2} \frac{qa^4}{EI_x}$$

$$15-35. \theta_B = \frac{M_o}{EI_x}; \quad y_B = \frac{M_o}{EI_x} l - \frac{l}{2}.$$

$$15-36. \theta_c = \frac{qa^3}{6EI_x}; \quad y_C = -\frac{5}{24} \frac{qa^4}{EI_x}; \quad \theta_A = \frac{qa^3}{3EI_x}; \quad \theta_B = -\frac{qa^3}{6EI_x}; \quad y_D = \frac{7qa^4}{24EI_x}$$

$$15-37. f_c = \frac{7}{96} \frac{pl^3}{EI_x}; \quad \theta_B = \frac{p \cdot l^2}{16EI_x} \quad (I_x \text{ mômen quán tính mặt cắt ngang}).$$

$$15-38. y_D = \frac{qa^4}{12EI_x}; \quad y_A = \frac{qa^4}{8EI_x}; \quad \theta_A = -\frac{qa^3}{6EI_x}$$

$$15-39. \text{a)} f_{\max} = 3 \cdot \frac{Pa^3}{EI_{\max}}; \quad \theta_{\max} = \frac{2Pa^2}{EI_{\max}}$$

$$\text{b)} f_{\max} = \frac{265}{72} \cdot \frac{Pa^3}{EI_{\max}}; \quad \theta_{\max} = \frac{14}{3} \frac{Pa^2}{EI_{\max}}$$

$$\text{c)} f_{\max} = \frac{205}{108} \frac{Pa^3}{EI_{\max}}; \quad \theta_{\max} = \frac{41}{18} \frac{Pa^2}{EI_{\max}}$$

$$\text{d)} f_{\max} = \frac{121}{576} \cdot \frac{Pa^3}{EI_{\max}}; \quad \theta_{\max} = \frac{11}{24} \frac{Pa^2}{EI_{\max}}$$

$$e) f_{\max} = \frac{25}{72} \cdot \frac{M_o \cdot a^2}{EI_x}; \theta_{\max} = \frac{5}{6} \cdot \frac{M_o a}{EI_{\max}}$$

$$f) f_{\max} = \frac{98}{81} \cdot \frac{Pa^3}{EI_{\max}}; \theta_{\max} = \frac{14}{9} \cdot \frac{Pa^2}{EI_{\max}}$$

$$15-40. y_c = \frac{33,4}{EI_x} \text{ (m)}; \theta_c = \frac{40}{EI_x} \text{ (rad)}$$

$$15-41. a) f_c = \frac{17}{6} \cdot \frac{Pa^3}{EI_{\max}}; \theta_D = \frac{3}{2} \cdot \frac{Pa^2}{EI_{\max}}$$

$$b) f_c = 10 \cdot \frac{Pa^3}{EI_{\max}}; \theta_D = \frac{9}{2} \cdot \frac{Pa^2}{EI_{\max}}$$

$$c) f_c = \frac{4}{3} \cdot \frac{Pa^3}{EI_{\max}}; \theta_D = \frac{1}{3} \cdot \frac{Pa^2}{EI_{\max}}$$

$$d) f_c = \frac{7}{6} \cdot \frac{Pa^3}{EI_{\max}}; \theta_D = \frac{2}{3} \cdot \frac{Pa^2}{EI_{\max}}$$

15-42. $P \leq 18 \text{ kN}$

15-43. Mát cắt [số 18a

15-44. $b = 14 \text{ cm}; h = 24 \text{ cm}$

$$15-45. y_{(z)} = \frac{ql^2}{8EI_x} Z^2 - \frac{5ql}{8EI_x} Z^3 + \frac{9}{24EI_x} Z^4$$

15-46. $\sigma_{\max(t)} = 1570 \text{ N/cm}^2; \sigma_{\max(d)} = 784 \text{ N/cm}^2; f = 0,7 \text{ cm}$

15-47. $\sigma_{\max} = 25,4 \text{ MN/m}^2$.

$$15-48. V_A = \frac{ql}{2} \cdot \frac{3m}{21}; M_A = \frac{ql^2}{12} \cdot \frac{m}{4}; V_B = \frac{ql}{2} + \frac{3m}{21}; M_B = \frac{ql^2}{12} + \frac{m}{4}$$

CHƯƠNG 16. THANH CHỊU LỰC PHÚC TẠP

16-1. Uốn phẳng: a, b, c, e, i, l

uốn xiên d, g, h, k, m.

16-2. Đường chéo thứ hai của mặt cắt

- 16-3. a) $\sigma_{\max} = 134 \text{ N/cm}^2$; $\beta = 58^\circ$; $f = 1,31 \text{ cm}$
 b) $\sigma_{\max} = 950 \text{ N/cm}^2$; $\beta = 118^\circ 22'$; $f = 4,72 \text{ cm}$.

- 16-4. $\sigma_{\max} = 4,74 \text{ kN/cm}^2 < [\sigma]_K$
 $\sigma_{\min} = -2,23 \text{ kN/cm}^2 \leq [\sigma]_n$

- 16-5. $\sigma_{\max} = -20 \text{ kN/cm}^2$; $\sigma_{\min} = -140 \text{ kN/cm}^2$

- 16-6. $\sigma_{\max} = 832 \text{ kN/cm}^2$; $\sigma_{\min} = -856 \text{ kN/cm}^2$

- 16-7. Phương án 1: $a = 3,93 \text{ m}$;

Phương án 2: $a = 3,52 \text{ m}$

- 16-8. $\sigma_{\max BC} = 2904 \text{ kN/cm}^2$; $\sigma_{\min BC} = -2929 \text{ kN/cm}^2$

- 16-9. $\sigma_{\max} = 4660 \text{ kN/cm}^2$; $\sigma_{\min} = -5355 \text{ kN/cm}^2$

- 16-10. Măt cắt [số 24a]

- 16-11. $\sigma_{\max} = 12850 \text{ kN/cm}^2$; $\sigma_{\min} = -13550 \text{ kN/cm}^2$;
 $a = 1,44 \text{ cm}$; $b = 0,29 \text{ cm}$

- 16-12. Xem bài 16-12.

- 16-13. $\sigma_{\max} = 0$; $\sigma_{\min} = -400$; $a = 15 \text{ cm}$; $b = \infty$

- 16-14. a) $\sigma_{\max} = 650 \text{ N/cm}^2$; $\sigma_{\min} = -2860 \text{ N/cm}^2$;
 $a = \infty$; $b = 12,5 \text{ cm}$.

- b) $\sigma_{\max} = 1760 \text{ N/cm}^2$; $\sigma_{\min} = -1440 \text{ N/cm}^2$; $a = 0,63 \text{ cm}$; $b = -0,83 \text{ cm}$

- c) $\sigma_{\max} = 930 \text{ N/cm}^2$; $\sigma_{\min} = -1130 \text{ N/cm}^2$; $a = -1,44 \text{ cm}$; $b = -4,67 \text{ cm}$

- 16-15. a) $\sigma_{\max} = 0$; $\sigma_{\min} = -1167 \text{ N/cm}^2$; b) $\sigma = -875 \text{ N/cm}^2$

- 16-16. $d = 122 \text{ mm}$

- 16-17. $\sigma_A = -64,5 \text{ N/cm}^2$; $\sigma_C = -9,5 \text{ N/cm}^2$.

- 16-18. Trường hợp 1: $\sigma = -37,3 \text{ N/cm}^2$;

Trường hợp 2: $\sigma = -40,3 \text{ N/cm}^2$

- 16-19. $\sigma_{B\text{tròn}} = 2,4 \cdot \frac{P_2}{bd}$; $\sigma_{B\text{chữ nhật}} = 2 \cdot \frac{P_2}{bd}$; ứng suất ở hình tròn lớn hơn 20%.

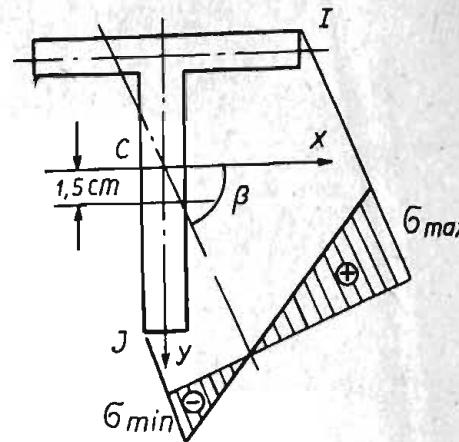
- 16-20. $\sigma_{\max} = 58 \text{ N/cm}^2$; $\sigma_{\min} = -92 \text{ N/cm}^2$

- 16-21. $a = 3,7 \text{ m}$; $\sigma_{\min} = -161 \text{ kN/cm}^2$

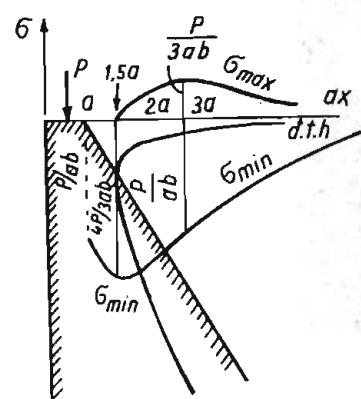
- 16-22. $\sigma = 0,635P \text{ N/cm}^2$; 26 lần

- 16-23. $\sigma_{\max} = 1295 \text{ N/cm}^2$; $\sigma_{\min} = -1439 \text{ N/cm}^2$

- 16-24. $0 < \alpha < \frac{2}{5}$ Khoét rãnh hai bên tốt hơn; $\alpha = \frac{2}{5}$ như nhau



Biểu đồ bài 16-4



Bài 16-12

$$16-25. \text{ a) } d \geq 2,46 \sqrt[3]{\frac{\text{Pa}}{[\sigma]}}$$

- b) $d \approx 50 \text{ mm}$
- c) $d = 38 \text{ mm}; b = 22 \text{ mm}$
- d) $d_1 = 54,5 \text{ mm}; d_2 = 64 \text{ mm}$
- e) $d \approx 70 \text{ mm}$

$$16-26. d = 5 \text{ cm}$$

$$16-27. d = 2 \text{ cm.}$$

867563
8372240
10829

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Văn Đĩnh, Lê Doãn Hồng, Nguyễn Nhật Lê, Đỗ Sanh

Bài tập Cơ học lý thuyết

Trường Đại học Bách khoa Hà Nội, 1993.

2. Nguyễn Văn Đĩnh, Lê Doãn Hồng, Nguyễn Nhật Lê, Đỗ Sanh

Bài tập Cơ học

Nhà xuất bản Giáo dục và đào tạo, 1993.

3. W. G. McLean, E. W. Nelson

Schaum's outline of theory and problems of engineering mechanics

Schaum publishing Co., 1962.

4. Bùi Trọng Lựu, Nguyễn Văn Vượng

Bài tập Sức bền vật liệu

Nhà xuất bản Giáo dục và đào tạo, 1994.

5. Nguyễn Khải và đồng nghiệp

Bài tập Sức bền vật liệu

Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp, 1976.

6. I.N. Miroliubôp và đồng nghiệp

Bài tập Sức bền vật liệu

Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp và Nhà xuất bản



214

Giá 35.000đ