# TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

2 2017 Số 476

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 54

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606

Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre


Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ kính chúc các thầy, cô giáo và các em học sinh Năm mới - An khang - Thịnh vượng!


NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM
CÔNG TI CỔ PHẦN ĐẦU TƯ VÀ PHÁT TRIỂN GIÁO DỤC ĐÀ NẴNG
DANANG EDUCATION INVESTMENT AND DEVELOPMENT JOINT - STOCK COMPANY
Địa chỉ : 145 Lê Lợi, Q. Hải Châu, TP. Đà Nẵng
Điện thoại : (0511) 3889952 - 3889954 - Fax : (0511) 3889953 - 3889957
DEIDCO
Chúc Mừng Năm Mới
Đinh Dậu
2017
Hạnh phúc
An khang
Thịnh vượng


# KỸ THUẬT SỬ DỤNG ĐIỂM RƠI KHI DÙNG BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY

NGUYỄN NGỌC HÂN
(*Tạp chí Toán Tuổi thơ*)

Trong chứng minh các bài toán bất đẳng thức (BĐT) thì dự đoán được dấu "=" xảy ra khi nào sẽ giúp chúng ta biết cách sử dụng các bất đẳng thức một cách hợp lí nhất. Trong bài viết này chúng tôi chỉ nói đến các bài toán BĐT có sử dụng BĐT Cauchy mà dấu "=" xảy ra khi các biến $x, y, z$ bằng nhau.

**Bài toán 1.** *Cho $x, y, z$ là các số dương thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh rằng*

$$A=x^4+y^4+z^4 \geq \frac{1}{27}.$$

***Phân tích.*** Nhận xét rằng đẳng thức xảy ra tại $x=y=z=\frac{1}{3}$ (điểm rơi). Để sử dụng BĐT Cauchy một vế có số hạng $x^4$, vế kia phải có $x$ (để có thể sử dụng giả thiết $x+y+z=1$) và thỏa mãn dấu "=" xảy ra khi $x=\frac{1}{3}$, ta sẽ sử dụng BĐT Cauchy cho bốn số là $x^4$ và ba số $\left(\frac{1}{3}\right)^4$. Như vậy ta đã hạ bậc từ bậc bốn ở vế trái sang bậc một ở vế phải.

***Lời giải.*** Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$x^4+\left(\frac{1}{3}\right)^4+\left(\frac{1}{3}\right)^4+\left(\frac{1}{3}\right)^4 \geq 4\sqrt[4]{x^4\left(\frac{1}{3}\right)^{12}}=\frac{4}{27}x \quad (1)$$

Chứng minh tương tự ta được:

$$y^4+\left(\frac{1}{3}\right)^4+\left(\frac{1}{3}\right)^4+\left(\frac{1}{3}\right)^4 \geq \frac{4}{27}y \quad (2)$$

$$z^4+\left(\frac{1}{3}\right)^4+\left(\frac{1}{3}\right)^4+\left(\frac{1}{3}\right)^4 \geq \frac{4}{27}z \quad (3)$$

Cộng theo vế của (1), (2), (3) ta được:

$$x^4+y^4+z^4+\frac{3}{27} \geq \frac{4}{27}(x+y+z)=\frac{4}{27}$$

$$\Rightarrow x^4+y^4+z^4 \geq \frac{1}{27}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{3}$.

**Bài toán 2.** *Cho $x, y, z$ là các số dương thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh rằng*

$$B=x^3+y^3+z^3 \geq \frac{1}{9}.$$

***Phân tích.*** Điểm rơi của BĐT tại $x=y=z=\frac{1}{3}$. Tương tự Bài toán 1, ta sẽ dùng BĐT Cauchy cho ba số là $x^3, \left(\frac{1}{3}\right)^3, \left(\frac{1}{3}\right)^3$.

***Lời giải.*** Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$x^3+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^3 \geq 3\sqrt[3]{x^3\left(\frac{1}{3}\right)^6}=\frac{1}{3}x.$$

Chứng minh tương tự rồi cộng các BĐT đó theo vế ta được: $x^3+y^3+z^3+\frac{2}{9} \geq \frac{1}{3}(x+y+z)=\frac{1}{3}$

$$\Rightarrow x^3+y^3+z^3 \geq \frac{1}{9}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{3}$.

**Bài toán 3.** *Cho $x, y, z$ là các số dương thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh rằng:*

$$\sqrt{x(1-x)}+\sqrt{y(1-y)}+\sqrt{z(1-z)} \leq \sqrt{2}.$$

***Lời giải sai.*** Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\sqrt{x(1-x)} \leq \frac{x+1-x}{2}=\frac{1}{2}.$$

Chứng minh tương tự rồi cộng các bất đẳng thức đó theo vế ta được:

$$\sqrt{x(1-x)}+\sqrt{y(1-y)}+\sqrt{z(1-z)}\le\frac{3}{2}\le\sqrt{2}.$$

***Nhận xét.*** Lời giải trên sai vì $\frac{3}{2}=1,5>\sqrt{2}$. Lý do dẫn đến lời giải sai ở trên là khi dùng BĐT Cauchy ta đã không chú ý đến dấu "=" của BĐT xảy ra khi nào. Dấu "=" của BĐT trong lời giải xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{2}$, trong khi dấu "=" của BĐT đã cho xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{3}$. Ta có lời giải đúng như sau

***Lời giải.*** Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\sqrt{x(1-x)}=\frac{\sqrt{2x(1-x)}}{\sqrt{2}}\le\frac{2x+1-x}{2\sqrt{2}}=\frac{x+1}{2\sqrt{2}}.$$

Chứng minh tương tự rồi cộng các BĐT đó theo vế ta được:

$$\sqrt{x(1-x)}+\sqrt{y(1-y)}+\sqrt{z(1-z)}\le\frac{x+y+z+3}{2\sqrt{2}}=\frac{4}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{3}$.

**Bài toán 4.** *Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh rằng*

$$D=\sqrt[7]{x^3y^2z}+\sqrt[7]{y^3z^2x}+\sqrt[7]{z^3x^2y}\le\sqrt[7]{3}.$$

***Phân tích.*** Điểm rơi của BĐT tại $x=y=z=\frac{1}{3}$. Tích $x^3y^2z=x.x.x.y.y.z$ trong căn có sáu thừa số, nếu ta nhân và chia thêm vào tích này hằng số $\frac{1}{3}$ (điểm rơi) thì khi dùng BĐT Cauchy cho 7 số này ta sẽ chuyển dạng căn thức ở vế trái sang dạng bậc nhất theo *x, y, z* ở vế phải để có thể sử dụng giả thiết.

***Lời giải.*** Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\sqrt[7]{x^3y^2z}=\sqrt[7]{3}.\sqrt[7]{x^3y^2z.\frac{1}{3}}\le\sqrt[7]{3}.\frac{3x+2y+z+\frac{1}{3}}{7}.$$

Chứng minh tương tự rồi cộng các BĐT đó theo vế ta được:

$$\sqrt[7]{x^3y^2z}+\sqrt[7]{y^3z^2x}+\sqrt[7]{z^3x^2y}\le\sqrt[7]{3}.\frac{6(x+y+z)+1}{7}=\sqrt[7]{3}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{3}$.

**Bài toán 5.** *Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh rằng*

$$27x^3\sqrt{x}+27y^3\sqrt{y}+27z^3\sqrt{z}+\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\ge2\sqrt{3}.$$

***Lời giải.*** Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$27x^3\sqrt{x}+\sqrt{x}\ge2\sqrt{27x^4}=6\sqrt{3}x^2.$$

Chứng minh tương tự rồi cộng theo vế các BĐT đó ta được

$$27x^3\sqrt{x}+27y^3\sqrt{y}+27z^3\sqrt{z}+\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\ge6\sqrt{3}(x^2+y^2+z^2)\quad(1)$$

Ta lại có $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2+\left(z-\frac{1}{3}\right)^2\ge0$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2\ge\frac{2(x+y+z)}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow6\sqrt{3}(x^2+y^2+z^2)\ge2\sqrt{3}\quad(2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$27x^3\sqrt{x}+27y^3\sqrt{y}+27z^3\sqrt{z}+\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\ge2\sqrt{3}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{3}$.

**Bài toán 6.** *Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $x+y+z=2$. Chứng minh rằng*

$$\sqrt[2017]{\frac{1}{x}}+\sqrt[2017]{\frac{1}{y}}+\sqrt[2017]{\frac{1}{z}}\ge3.\sqrt[2017]{\frac{3}{2}}.$$

***Lời giải.*** Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\sqrt[2017]{\frac{1}{x}}+\sqrt[2017]{\frac{1}{y}}+\sqrt[2017]{\frac{1}{z}}\ge3.\sqrt[(2017.3)]{\frac{1}{xyz}}\ge3.\sqrt[(2017.3)]{\frac{27}{(x+y+z)^3}}=3.\sqrt[2017]{\frac{3}{2}}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=\frac{2}{3}$.

Để luyện tập, các bạn hãy giải các bài tập sau

**BÀI TẬP**

Cho $x,y,z$ là các số dương thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh rằng:

1. $x\sqrt{x}+y\sqrt{y}+z\sqrt{z}\ge\frac{1}{\sqrt{3}}$.

2. $x^3+y^3+z^3+x^2+y^2+z^2 \ge \frac{4}{9}$.

3. $(x^3+y^3+z^3)(x^4+y^4+z^4) \ge \frac{1}{243}$.

4. $xyz(1-x)(1-y)(1-z) \le \frac{8}{27^2}$.

5. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \ge 9$.

6. $\frac{1}{xyz} \ge 27$.

7. $\sqrt[n]{\frac{1}{x}}+\sqrt[n]{\frac{1}{y}}+\sqrt[n]{\frac{1}{z}} \ge 3\sqrt[n]{3}; n \in \mathbb{N}^*$.

8. $3x\sqrt{x}+3y\sqrt{y}+3z\sqrt{z}+\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \ge 2\sqrt{3}$.

9. $\sqrt[3]{x^2(1-x)}+\sqrt[3]{y^2(1-y)}+\sqrt[3]{z^2(1-z)} \le \sqrt[3]{2}$.

10. $x(1-x)+y(1-y)+z(1-z) \le \frac{2}{3}$.

11. $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z} \le \sqrt[3]{9}$. 12. $\sqrt[3]{x^2y}+\sqrt[3]{y^2z}+\sqrt[3]{z^2x} \le 1$.

## Hướng dẫn giải

1. Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$x\sqrt{x}+x\sqrt{x}+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} \ge 3\sqrt[3]{\left(\sqrt{x}\right)^6\cdot\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^3} = \sqrt[4]{3}x.$$

Chứng minh tương tự rồi cộng theo vế các bất đẳng thức đó ta được: $x\sqrt{x}+y\sqrt{y}+z\sqrt{z} \ge \frac{1}{\sqrt{3}}$.

2. Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$x^3+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^3 \ge 3\sqrt[3]{x^3.\left(\frac{1}{3}\right)^6} = \frac{1}{3}x$$

$$x^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2 \ge 2\sqrt{x^2.\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}x.$$

Chứng minh tương tự rồi cộng theo vế các bất đẳng thức đó ta được: $x^3+y^3+z^3+x^2+y^2+z^2 \ge \frac{4}{9}$.

3. Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$x^3+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^3 \ge 3\sqrt[3]{x^3.\left(\frac{1}{3}\right)^6} = \frac{1}{3}x \Rightarrow x^3+y^3+z^3 \ge \frac{1}{9}.$$

$$x^4+\left(\frac{1}{3}\right)^4+\left(\frac{1}{3}\right)^4+\left(\frac{1}{3}\right)^4 \ge 4\sqrt[4]{x^4.\left(\frac{1}{3}\right)^{12}} = \frac{4}{27}x$$

$$\Rightarrow x^4+y^4+z^4 \ge \frac{1}{27}.$$

Suy ra $(x^3+y^3+z^3)(x^4+y^4+z^4) \ge \frac{1}{243}$.

4. Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$xyz \le \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$$(1-x)(1-y)(1-z) \le \left(\frac{1-x+1-y+1-z}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$\Rightarrow xyz(1-x)(1-y)(1-z) \le \frac{8}{27^2}$$

5. Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \ge \frac{3}{\sqrt[3]{xyz}} \ge \frac{3}{\frac{x+y+z}{3}} = 9.$$

6. Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\frac{1}{xyz} \ge \frac{1}{\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3} = 27.$$

7. Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{x}}+\sqrt[n]{\frac{1}{y}}+\sqrt[n]{\frac{1}{z}} \ge 3.\sqrt[3n]{\frac{1}{xyz}}$$

$$\ge 3.\sqrt[3n]{\frac{27}{(x+y+z)^3}} = 3.\sqrt[n]{3}.$$

8. Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$3x\sqrt{x}+\sqrt{x} \ge 2\sqrt{3x^2} = 2\sqrt{3}x.$$

Chứng minh tương tự rồi cộng theo vế ta được

$$3x\sqrt{x}+3y\sqrt{y}+3z\sqrt{z}+\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \ge 2\sqrt{3}$$

9. Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\sqrt[3]{(2x)^2(1-x)} \le \frac{2x+2x+1-x}{3} = \frac{3x+1}{3}.$$

Chứng minh tương tự rồi cộng theo vế ta được điều phải chứng minh.

10. Ta có: $x(1-x)+y(1-y)+z(1-z)$

$$=-\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\left(y-\frac{1}{3}\right)^2-\left(z-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}(x+y+z)+\frac{1}{3} \le \frac{2}{3}.$$

11. Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)^2 x} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.x} \le \frac{x+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}{3}.$$

Chứng minh tương tự rồi cộng theo vế ta được

$$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z} \le \sqrt[3]{9}.$$

12. Áp dụng BĐT Cauchy ta có: $\sqrt[3]{x^2y} \le \frac{x+x+y}{3}$.

Chứng minh tương tự rồi cộng theo vế ta được

$$\sqrt[3]{x^2y}+\sqrt[3]{y^2z}+\sqrt[3]{z^2x} \le 1.$$

# MỘT BÀI TOÁN CƠ BẢN CÓ NHIỀU ỨNG DỤNG

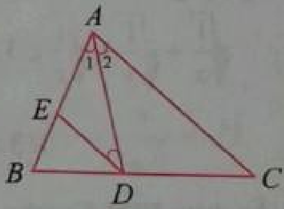
NGUYỄN ANH TUẤN
*(GV THCS Hòa Hiếu 2, TX. Thái Hòa, Nghệ An)*

Từ một bài toán đơn giản, nếu chịu khó suy nghĩ, tìm tòi, xâu chuỗi các bài toán lại với nhau thì sẽ có được nhiều kết quả thú vị. Chúng ta cùng bắt đầu bằng bài toán sau đây:

**Bài toán 1**. *Cho tam giác ABC và đường phân giác trong AD. Qua D kẻ đường thẳng song song với AC cắt cạnh AB tại E. Chứng minh rằng* $\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}=\frac{1}{AE}$ (*).

***Lời giải.*** (h. 1) Vì $DE//AC$ theo định lí Thales:

$\frac{AE}{AB}=\frac{DC}{BC}$ (1)



Hình 1

Từ $DE//AC \Rightarrow \widehat{A_2}=\widehat{ADE}$ (so le trong), mà $\widehat{A_1}=\widehat{A_2}$ nên $\widehat{A_1}=\widehat{ADE}$ suy ra $\Delta EAD$ cân tại $E \Rightarrow AE=ED$.

Theo hệ quả của định lí Thales ta có:

$$\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{AC}=\frac{BD}{BC} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{AE}{AB}+\frac{AE}{AC}=1 \Rightarrow \frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}=\frac{1}{AE}.$$

***Nhận xét.*** • Nếu cho $\widehat{BAC}=120^0$ thì có $\Delta ADE$ đều $\Rightarrow AE=AD$, thay vào hệ thức (*) ta được $\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}=\frac{1}{AD}$.

• Nếu cho $\widehat{BAC}=90^0$ thì có $\Delta ADE$ vuông cân $\Rightarrow AE=\frac{AD}{\sqrt{2}}$, thay vào hệ thức (*) ta được $\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}=\frac{\sqrt{2}}{AD}$.

• Nếu cho $\widehat{BAC}=60^0$ thì có $\Delta EAD$ cân có $\widehat{A}_1=30^0 \Rightarrow AE=\frac{AD}{\sqrt{3}}$, thay vào hệ thức (*) ta được $\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}=\frac{\sqrt{3}}{AD}$.

Từ đó ta có các bài toán quen thuộc sau:

**Bài toán 1.1.** *Cho tam giác ABC có* $\widehat{BAC}=120^0$, *đường phân giác trong AD. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}=\frac{1}{AD}.$$

**Bài toán 1.2.** *Cho tam giác ABC có* $\widehat{BAC}=90^0$, *đường phân giác trong AD. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}=\frac{\sqrt{2}}{AD}.$$

**Bài toán 1.3.** *Cho tam giác ABC có* $\widehat{BAC}=60^0$, *đường phân giác trong AD. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}=\frac{\sqrt{3}}{AD}.$$

**Bài toán 2**. *Cho tam giác ABC có* $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$, *gọi* $l_a, l_b, l_c$ *lần lượt là độ dài các đường phân giác trong ứng với các cạnh a, b, c. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{l_a}+\frac{1}{l_b}+\frac{1}{l_c}>\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

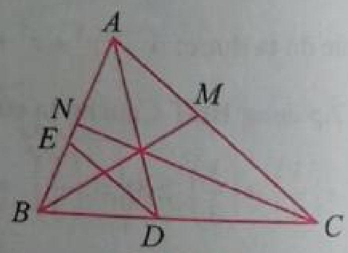
***Lời giải.*** (h. 2) Gọi *AD, BM, CN* là các đường phân giác, kẻ $DE//AC$ $(E\in AC)$, theo bài toán 1 ta có $\Delta ADE$ cân tại $E$ và $\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}=\frac{1}{AE}$ (1)

Áp dụng bất đẳng thức tam giác ta có:

$AE+ED>AD$

$\Rightarrow 2AE>AD$

$\Rightarrow \frac{1}{AE}<\frac{2}{AD}$ (2)



Hình 2

Từ (1) và (2) suy ra

$\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}<\frac{2}{AD}$

$\Rightarrow \frac{1}{AD}>\frac{1}{2}\left(\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}\right)$ hay

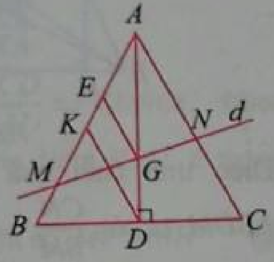
$\frac{1}{l_a}>\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$. Tương tự cũng có:

$$\frac{1}{l_b} > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right); \frac{1}{l_c} > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

Từ đó $\frac{1}{l_a}+\frac{1}{l_b}+\frac{1}{l_c} > \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

**Bài toán 3.** *Cho tam giác ABC cân tại A, một đường thẳng d bất kỳ đi qua trọng tâm G của tam giác và cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M, N. Chứng minh rằng tổng $\frac{1}{AM}+\frac{1}{AN}$ không phụ thuộc vào vị trí của đường thẳng d.*

***Lời giải.*** (h. 3) Gọi $AD$ là đường trung tuyến, kẻ $GE \,//\, AC\,(E \in AB)$. Vì $G$ cố định suy ra đường thẳng $GE$ (song song với $AC$) cố định. Như vậy $E$ là giao điểm của hai đường thẳng cố định $EG$ và $AB$ nên điểm $E$ cố định, do đó độ dài đoạn thẳng $AE$ không đổi. Theo bài toán 1, ta có




Hình 3

$\frac{1}{AM}+\frac{1}{AN}=\frac{1}{AE}$ (không đổi).

Vậy tổng $\frac{1}{AM}+\frac{1}{AN}$ không phụ thuộc vào vị trí của đường thẳng $d$.

***Nhận xét.*** Có thể chứng minh tổng $\frac{1}{AM}+\frac{1}{AN}$ không đổi như sau:

Kẻ $DK // GE // AC\,(E, K \in AB)$, theo bài toán 1:

$$\frac{1}{AM}+\frac{1}{AN}=\frac{1}{AE} \qquad (1)$$

Từ $DB = DC$ và $DK // AC \Rightarrow AK = \frac{1}{2}AB$.

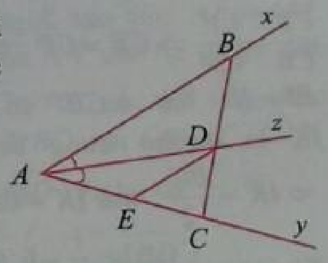
Theo định lí Thales ta có:

$$\frac{AE}{AK}=\frac{AG}{AD}=\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AE}{AB}=\frac{1}{3} \Rightarrow AE=\frac{1}{3}AB \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{1}{AM}+\frac{1}{AN}=\frac{3}{AB}$ (không đổi).

**Bài toán 4.** *Cho góc $\widehat{xAy}$, các điểm B, C theo thứ tự chuyển động trên các tia Ax, Ay sao cho $\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}=\frac{1}{k}$ (k là hằng số dương). Chứng minh rằng đường thẳng BC luôn đi qua một điểm cố định.*

***Lời giải.*** (h. 4). Kẻ tia phân giác $Az$ của góc $\widehat{xAy}$, gọi $D = Az \cap BC$, kẻ $DE // Ax$, $(E \in Ay)$ theo bài toán 1 ta có $\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}=\frac{1}{AE}$, kết hợp



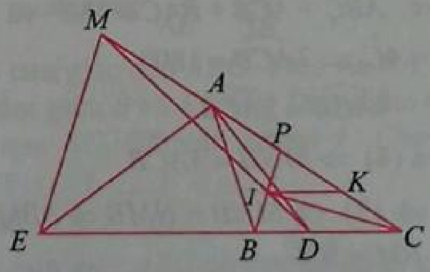

Hình 4

$\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}=\frac{1}{k}$ ta có $AE = k$ suy ra điểm $E$ cố định nên đường thẳng $DE$ cố định. Điểm $D$ là giao điểm của hai đường thẳng cố định $Az$ và $DE$ nên điểm $D$ cố định. Vậy đường thẳng $BC$ luôn đi qua điểm cố định $D$ được xác định như trên.

**Bài toán 5.** *Cho tam giác ABC, AD và AE lần lượt là các đường phân giác trong và đường phân giác ngoài của tam giác. Chứng minh rằng $\frac{1}{CD}+\frac{1}{CE}=\frac{2}{CB}$.*

***Lời giải.*** (h. 5) Trên tia $CA$ lấy điểm $M$ sao cho $CE = CM$, gọi $I$ là giao điểm của $MD$ với đường phân giác của góc $\widehat{ACB}$, kẻ $IK // BC$ $(K \in AC)$. Khi đó theo bài toán 1 ta có:

$$\frac{1}{CD}+\frac{1}{CE}=\frac{1}{CD}+\frac{1}{CM}=\frac{1}{CK} \qquad (1)$$




Hình 5

Vì $AD$, $AE$ lần lượt là các đường phân giác trong và đường phân giác ngoài của $\Delta ABC$ nên

$$\frac{AB}{AC}=\frac{DB}{DC}=\frac{EB}{EC} \Rightarrow \frac{CD}{CE}=\frac{DB}{EB} \qquad (2)$$

Vì $CI$ là đường phân giác của $\Delta CMD$ nên

$$\frac{CD}{CE}=\frac{CD}{CM}=\frac{DI}{MI} \qquad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra $\frac{DB}{EB}=\frac{DI}{MI} \Rightarrow BI // EM$ (theo định lí Thales đảo). Kéo dài $BI$ cắt $AC$ tại $P$, vì $BP // EM$, theo định lí Thales ta có:

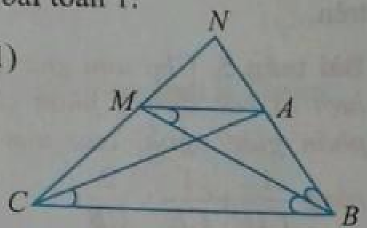
$\dfrac{CB}{CE}=\dfrac{CP}{CM}\Rightarrow CB=CP\Rightarrow \Delta CBP$ cân tại $C$ nên $IB=IP$. Xét $\Delta CBP$ có $IB=IP$; $IK//BC$ nên $IK$ là đường trung bình của tam giác đó $\Rightarrow IK=\dfrac{BC}{2}$, mà $IK=CK$ nên $CK=\dfrac{BC}{2}$ (4)

Từ (1) và (4) suy ra $\dfrac{1}{CD}+\dfrac{1}{CE}=\dfrac{2}{CB}$.

**Bài toán 6.** *Cho tam giác ABC có $\widehat{A}=2\widehat{B}=4\widehat{C}$. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{AB}=\dfrac{1}{BC}+\dfrac{1}{AC}$.*

***Lời giải.*** (h.6) Qua $A$ kẻ đường thẳng song song với $BC$ cắt tia phân giác của $\widehat{ABC}$ tại $M$. Gọi $N=AB\cap CM$, theo bài toán 1:

$\dfrac{1}{AB}=\dfrac{1}{BC}+\dfrac{1}{BN}$ (1)



*Hình 6*

Vì $\widehat{AMB}=\widehat{ABM}=\widehat{ACB}$ nên tứ giác $AMCB$ nội tiếp đường tròn

$\Rightarrow \widehat{ACM}=\widehat{ABM}=\widehat{ACB}$

$\Rightarrow \widehat{NMA}=\widehat{NCB}=2\widehat{ACB}$

$\Rightarrow \widehat{NMB}=\widehat{NMA}+\widehat{AMB}=3.\widehat{ACB}$ (2)

Xét $\Delta NMB$ ta thấy

$\widehat{MNB}=180^0-\left(\widehat{NMB}+\widehat{MBN}\right)=180^0-4\widehat{ACB}$ (3)

Mặt khác: $\widehat{ABC}+\widehat{ACB}+\widehat{BAC}=180^0$ và $\widehat{A}=2\widehat{B}=4\widehat{C}\Rightarrow 7\widehat{ACB}=180^0$

$\Rightarrow 180^0-4\widehat{ACB}=3\widehat{ACB}$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \widehat{MNB}=3\widehat{ACB}$ (5)

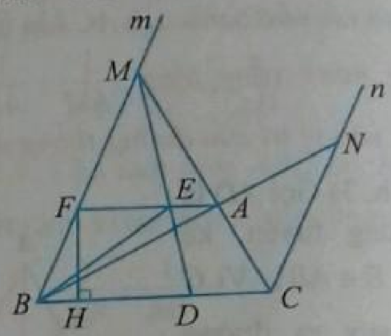
Từ (2) và (5) $\Rightarrow \widehat{MNB}=\widehat{NMB}\Rightarrow \Delta BMN$ cân tại $B\Rightarrow BM=BN$ (6)

Xét hình thang $ABCM$ có $\widehat{ABC}=\widehat{MCB}=2\widehat{ACB}$ nên $ABCM$ là hình thang cân $\Rightarrow MB=AC$, kết hợp với (6) suy ra $NB=AC$. Kết hợp (1) với $NB=AC$ ta được $\dfrac{1}{AB}=\dfrac{1}{BC}+\dfrac{1}{AC}$.

**Bài toán 7.** *Cho tam giác ABC. Hai đường thẳng $m//n$ thay đổi tương ứng đi qua B, C mà m, n chỉ có một điểm chung với các cạnh của tam giác ABC. Gọi $M=m\cap AC$, $N=n\cap AB$. Tìm giá trị lớn nhất của tổng $\dfrac{1}{MB}+\dfrac{1}{NC}$.*

***Lời giải.*** (h. 7) Trên tia $BC$ lấy điểm $D$ sao cho $BD=CN$. Gọi $E$ là giao điểm của $MD$ với tia phân giác của $\widehat{MBC}$, kẻ $EF//BC$ $(F\in BM)$, khi đó theo bài toán 1 ta có:

$$\frac{1}{MB}+\frac{1}{NC}=\frac{1}{MB}+\frac{1}{BD}=\frac{1}{BF} \quad (1)$$



*Hình 7*

Theo tính chất của đường phân giác trong $\Delta BDM$ ta có: $\dfrac{CN}{BM}=\dfrac{BD}{BM}=\dfrac{ED}{EM}$ (2)

Vì $BM//CN$ nên theo hệ quả của định lí Thales ta có $\dfrac{CN}{BM}=\dfrac{CA}{MA}$ (3)

Từ (2) và (3) $\Rightarrow \dfrac{ED}{EM}=\dfrac{CA}{MA}\Rightarrow AE//CD$ (theo định lí Thales đảo), mà $EF//BC$ nên ba điểm $A$, $E$, $F$ thẳng hàng. Kẻ $FH\perp BC\left(H\in BC\right)$, ta có: $BF\geq FH$ (4)

Vì $AF//BC$ nên $FH$ chính là khoảng cách giữa hai đường thẳng song song cố định $AF$ và $BC$, do vậy $FH$ không đổi. Từ (1) và (4)

$\Rightarrow \dfrac{1}{MB}+\dfrac{1}{NC}\leq\dfrac{1}{FH}$ (không đổi).

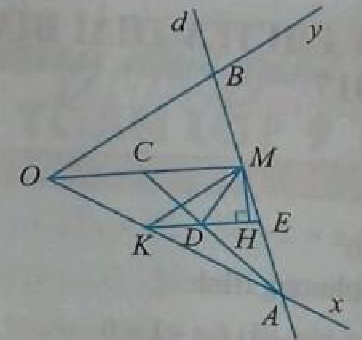
Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow H\equiv B\Leftrightarrow m\perp BC$.

Vậy $\max\left(\dfrac{1}{MB}+\dfrac{1}{NC}\right)=\dfrac{1}{FH}\Leftrightarrow m\perp BC$.

**Bài toán 8.** *Cho góc $\widehat{xOy}$ $\left(\widehat{xOy}\neq 180^0\right)$, M là một điểm cố định nằm trong góc đó, d là đường thẳng đi qua M và cắt các cạnh Ox, Oy lần lượt tại A và B. Tìm giá trị lớn nhất của tổng*

$$\frac{1}{MA}+\frac{1}{MB}.$$

***Lời giải.*** (h. 8) Trên tia $MO$ lấy điểm $C$ sao cho $MC=MB$, gọi $D$ là giao điểm của $AC$ với đường phân giác của góc $OMA$. Kẻ $DE//OM$, $MK//Oy$ $\left(K\in Ox, E\in AB\right)$, theo tính chất đường phân giác trong $\Delta MCA$ ta có:




*Hình 8*

$$\frac{MB}{MA}=\frac{MC}{MA}=\frac{CD}{AD} \quad (1)$$

Vì $MK//Oy$ nên $\frac{MB}{MA}=\frac{OK}{KA}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{OK}{KA}=\frac{CD}{AD}\Rightarrow KD//OC$ (theo định lí Thales đảo), nên ba điểm $K, D, E$ thẳng hàng.

Kẻ $MH\perp KE\left(H\in KE\right)$, ta có $ME\ge MH$ (3)

Vì điểm $M$ cố định nên các đường thẳng $MK$ và $OM$ cố định suy ra đường thẳng $KE$ cố định dẫn đến độ dài $MH$ không đổi ($MH$ là khoảng cách giữa hai đường thẳng song song cố định $OM$ và $KE$).

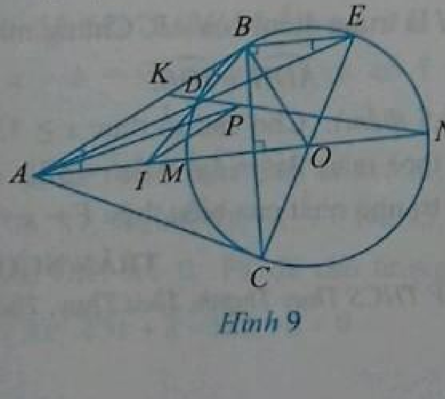
Theo bài toán 1: $\frac{1}{MB}+\frac{1}{MA}=\frac{1}{MC}+\frac{1}{MA}=\frac{1}{ME}$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \frac{1}{MB}+\frac{1}{MA}\le\frac{1}{MH}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow E\equiv H\Rightarrow d\perp OM$.

Vậy $\max\left(\frac{1}{MB}+\frac{1}{MA}\right)=\frac{1}{MH}\Leftrightarrow d\perp OM$.

**Bài toán 9**. *Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến AB và AC đến đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Tia AO cắt đường tròn (O) tại M và N (M nằm giữa A và N). Vẽ đường kính CE, AE cắt đường tròn (O) tại D, DB cắt AO tại I. Chứng minh rằng* $\frac{1}{AI}=\frac{1}{AM}+\frac{1}{AN}$.

***Lời giải.*** (h.9)




*Hình 9*

Trên đoạn $AB$ lấy điểm $K$ sao cho $AK=AM$. Gọi $P$ là giao điểm của $KN$ với tia phân giác của $\widehat{BAN}$. Ta có: $\widehat{EBC}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow BE\perp BC$, mà $OA\perp BC$

$\Rightarrow OA//BE \Rightarrow \widehat{BED}=\widehat{IAD}$. Ta lại có

$$\widehat{BED}=\widehat{ABD}\ \left(=\frac{1}{2}\text{ sđ}\overset{\frown}{BD}\right)$$

nên $\widehat{ABD}=\widehat{IAD}\Rightarrow \Delta IAD\backsim\Delta IBA$ (g.g)

$$\Rightarrow\frac{IA}{IB}=\frac{ID}{IA}\Rightarrow IA^2=IB.ID \quad (1)$$

Ta dễ dàng chứng minh được $IM.IN=ID.IB$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow IA^2=IM.IN$

$$\Rightarrow\frac{IA}{IN}=\frac{IM}{IA}=\frac{IA+IM}{IN+IA}=\frac{AM}{AN}=\frac{AK}{AN} \quad (3)$$

Từ $AP$ là đường phân giác của $\Delta AKN$

$$\Rightarrow\frac{AK}{AN}=\frac{KP}{PN} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) $\Rightarrow\frac{IA}{IN}=\frac{KP}{PN}\Rightarrow PI//AK$ (theo định lí Thales đảo) nên theo bài toán 1 ta có

$$\frac{1}{AI}=\frac{1}{AK}+\frac{1}{AN}=\frac{1}{AM}+\frac{1}{AN}.$$

## BÀI TẬP

**1.** Cho hình bình hành $ABCD$, một đường thẳng đi qua $A$ cắt $BD$, $CB$, $CD$ lần lượt ở $E$, $K$, $G$. Chứng minh rằng $\frac{1}{AE}=\frac{1}{AK}+\frac{1}{AG}$.

**2.** Cho tam giác đều $ABC$. Trên tia $BA$ lấy điểm $E$ ($A$ nằm giữa $B$ và $E$). Gọi $D$ là điểm đối xứng với $E$ qua $BC$, $CD$ cắt $AB$ tại $F$. Chứng minh rằng $\frac{1}{BC}=\frac{1}{BD}+\frac{1}{BF}$.

**3.** Cho tam giác $ABC$ có đường phân giác trong $AD$, $O$ là điểm bất kỳ trên $AD$ ($O$ khác $A$ và $D$). Tia $BO$ cắt cạnh $AC$ tại $E$, tia $CO$ cắt cạnh $AB$ tại $F$. Chứng minh rằng $\Delta\, ABC$ cân tại $A$ nếu

$$\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AE^2}=\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{AF^2}.$$

**4.** Cho tam giác đều $ABC$ nội tiếp đường tròn $(O)$, $D$ là điểm bất kỳ nằm trên cung nhỏ $BC$, $DA$ cắt $BC$ tại $E$. Gọi $H$, $I$, $K$ lần lượt là hình chiếu của $D$ trên các đường thẳng $BC$, $AB$, $AC$. Chứng minh các hệ thức:

a) $\frac{1}{DE}=\frac{1}{DB}+\frac{1}{DC}$ b) $\frac{1}{DH}=\frac{1}{DI}+\frac{1}{DK}$.

# ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN THÁI BÌNH
## NĂM HỌC 2016 - 2017

## VÒNG 1

*(Dành cho tất cả thí sinh)*
*(Thời gian làm bài: 120 phút)*

**Bài 1** (2,5 *điểm*). Cho biểu thức:

$$P=\left(\frac{x\sqrt{x}+x-2}{x-1}-\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right):\frac{1}{x\sqrt{x}-x}\ (x>0, x\neq 1).$$

a) Rút gọn biểu thức $P$.

b) Tìm $x$ để $P=2$.

c) Tìm $x$ để $P$ có giá trị nhỏ nhất.

**Bài 2** (1,5 *điểm*). Cho parabol $(P)$: $y=x^2$ và đường thẳng $(d)$: $y=2x-m+3$ ($m$ là tham số, $m\in\mathbb{R}$).

a) Tìm $m$ để parabol $(P)$ và đường thẳng $(d)$ cùng đi qua điểm có hoành độ là 1.

b) Tìm $m$ để parabol $(P)$ cắt đường thẳng $(d)$ tại hai điểm phân biệt $A$ và $B$, sao cho tung độ của điểm $A$ gấp 9 lần tung độ của điểm $B$.

**Bài 3** (2 *điểm*). a) Giải phương trình:

$$x^2-2x-2-2\sqrt{2}=0.$$

b) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} y^2+y(x-4)+x+1=0 \\ (x+1)^2+(x^2+y^2+2xy-8)y^2=0 \end{cases}.$$

**Bài 4** (3,5 *điểm*). Cho hình thang cân $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O)$ đường kính $AD$, có $AB=BC=a$. Gọi $E$ là giao điểm của $AB$ với $CD$, $H$ là trung điểm của $AB$, $F$ là giao điểm của $BD$ với $OE$, $I$ là giao điểm của $OB$ với $HC$.

a) Chứng minh rằng tam giác $EAD$ đều.

b) Chứng minh rằng $IF\,//\,AD$.

c) Chứng minh rằng $F$ là trực tâm của tam giác $OBC$.

d) Tính độ dài đoạn $HI$ theo $a$.

**Bài 5** (0,5 *điểm*). Cho ba số dương $x$, $y$, $z$ thỏa mãn $xyz=1$. Chứng minh rằng:

$$(x+y)(y+z)(z+x)\geq 2(1+x+y+z).$$

## VÒNG 2

*(Dành cho thí sinh thi chuyên Toán, Tin)*
*(Thời gian làm bài: 150 phút)*

**Bài 1** (2 *điểm*). 1) Giải phương trình:

$$5x-(x+3)\sqrt{2x-1}-1=0.$$

2) Cho hai số thực $a$, $b$ bất kì. Chứng minh rằng ít nhất một trong hai phương trình sau có nghiệm: $x^2+2ax+3ab=0$;

$$x^2+2bx-8ab=0.$$

**Bài 2** (2,5 *điểm*). 1) Tìm các số nguyên $x$, $y$ thoả mãn: $9x^2+3y^2+6xy-6x+2y-35=0$.

2) Cho $P(x)$ là đa thức bậc ba có hệ số bậc cao nhất bằng 1 và thỏa mãn: $P(2016)=2017$, $P(2017)=2018$. Tính giá trị của

$$-3P(2018)+P(2019).$$

**Bài 3** (2 *điểm*). Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} y^3+\sqrt{8x^4-2y}=2(2x^4+3) \\ \sqrt{2x^2+x+y}+2\sqrt{x+2y}=\sqrt{9x-2x^2+19y} \end{cases}.$$

**Bài 4** (3,5 *điểm*). Từ một điểm $I$ nằm bên ngoài đường tròn $(O)$, vẽ các tiếp tuyến $IA$, $IB$ ($A$, $B$ là các tiếp điểm) và cát tuyến $ICD$ (không đi qua tâm $O$) với đường tròn ($C$ nằm giữa $I$ và $D$).

1) Chứng minh: $AC.BD=AD.BC$.

2) Gọi $K$ là giao điểm của $CD$ và $AB$, $E$ là trung điểm của $OI$. Chứng minh rằng:

$$KA.KB=OE^2-EK^2.$$

3) Gọi $H$ là trung điểm của $AB$. Chứng minh:

$$\widehat{ADH}=\widehat{IDB}.$$

**Bài 5** (0,5 *điểm*). Cho các số thực $x\geq 1$, $y\geq 1$, $z\geq 1$ và thoả mãn: $3x^2+4y^2+5z^2=52$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F=x+y+z$.

**TRẦN NGỌC ĐẠI**
*(GV THCS Thụy Thanh, Thái Thụy, Thái Bình)*

# *Hướng dẫn giải* ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN LỚP 9 TỈNH HƯNG YÊN NĂM HỌC 2015 - 2016

*(Đề thi đăng trên TH&TT số 475, tháng 1 năm 2017)*

**Câu 1.** Ta có $\sqrt[3]{2}x=\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+2=x+1$

$\Rightarrow 2x^3=(x+1)^3 \Rightarrow x^3-3x^2-3x=1 \Rightarrow A=\sqrt{2017}.$

**Câu 2.** a) Đường thẳng $(d)$ cắt các trục $Ox$, $Oy$ lần lượt tại $A\left(\dfrac{m-1}{m};0\right)$, $B(0;1-m)$.

Xét $m=1$, khi đó $(d)$ đi qua $O$ nên khoảng cách từ $O$ đến $(d)$ bằng 0.

Xét $m\neq 1$, gọi $OH$ là đường cao của $\Delta OAB$.

Ta có $OA=\left|\dfrac{m-1}{m}\right|$, $OB=|1-m|$.

Từ $\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}\Rightarrow \dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{m^2+1}{(m-1)^2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{OH^2}=\frac{m^2+1}{(m-1)^2}=1+\frac{2}{m-1}+\frac{2}{(m-1)^2}$$

$$=2\left(\frac{1}{m-1}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\geq\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow OH\leq\sqrt{2}$. Đẳng thức xảy ra khi $m=-1$.

Vậy $m=-1$.

b) Ta có $\overline{ab}-\overline{ba}=k^2$ $(k\in\mathbb{N})\Leftrightarrow 9(a-b)=k^2$.

Do đó $a-b$ là một số chính phương, ta lại có $a-b\leq 9, a\neq b$, suy ra: $a-b=1$; $a-b=4$; $a-b=9$.

+ Với $a-b=1\Leftrightarrow a=b+1\Rightarrow$ có 9 số thỏa mãn: 10, 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98.

+ Với $a-b=4\Leftrightarrow a=b+4\Rightarrow$ có 6 số thỏa mãn: 40, 51, 62, 73, 84, 95.

+ Với $a-b=9\Leftrightarrow a=b+9\Rightarrow$ có 1 số thỏa mãn: 90.

Vậy có tất cả 16 số thỏa mãn là 10, 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98, 40, 51, 62, 73, 84, 95, 90.

**Câu 3.** a) ĐK: $x>0$. PT đã cho tương đương với $x^3+3x^2.\sqrt[3]{3x+2}-12x-8=0$

$\Leftrightarrow x^3+3x^2.\sqrt[3]{3x+2}-4(3x+2)=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^3}{3x+2}+\dfrac{3x^2}{\sqrt[3]{(3x+2)^2}}-4=0$ (do $x>0$ nên $3x+2>0$). Đặt $t=\dfrac{x}{\sqrt[3]{3x+2}}$ $(t>0)$.

PT trên trở thành $t^3+3t^2-4=0$

$\Leftrightarrow (t+2)^2(t-1)=0\Rightarrow t=1$ (do $t>0$).

Với $t=1$ ta có

$\dfrac{x}{\sqrt[3]{3x+2}}=1\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{3x+2}\Leftrightarrow x^3-3x-2=0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x^2-x-2)=0.$

PT đã cho có nghiệm $x=2$.

**Câu 4.** $\begin{cases}2x^2+y^2-3xy-4x+3y+2=0 & (1)\\ \sqrt{x^2-y+3}+\sqrt{y-x+1}=2 & (2)\end{cases}$

ĐK: $\begin{cases}x^2-y+3\geq 0\\ y-x+1\geq 0\end{cases}$

$(1)\Leftrightarrow y^2-3(x-1)y+2x^2-4x+2=0.$

Ta có $\Delta=(x-1)^2$; $(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=x-1\\ y=2x-2\end{array}\right.$

1) $y=x-1$, thay vào (2) ta được

$\sqrt{x^2-x+4}=2\Leftrightarrow x^2-x=0\Leftrightarrow x(x-1)=0.$

+ Với $x=0$ ta có $y=-1$ (thỏa mãn).

+ Với $x=1$ ta có $y=0$ (thỏa mãn).

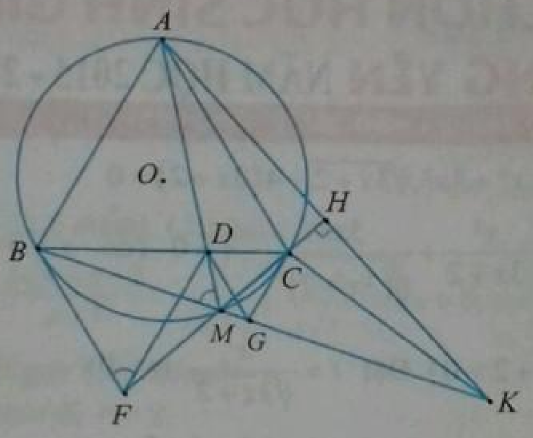
2) $y=2x-2$, thay vào (2) ta được

$\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x-1}=2$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+4}+\sqrt{x-1}=2$

Ta có $\sqrt{(x-1)^2+4}+\sqrt{x-1}\geq 2$. Đẳng thức xảy ra khi $x=1$, ta có $y=0$ (thỏa mãn). Vậy hệ đã cho có các nghiệm $(x;y)$ là $(0;-1)$, $(1;0)$.

**Câu 5**




a) Ta có $\widehat{AMB}=\widehat{ACB}=60^0$, $\widehat{AMH}=\widehat{ABC}=60^0$ $\Rightarrow \widehat{CMK}=60^0 \Rightarrow \widehat{AMH}=\widehat{HMK}$ mà $MH\perp AK$ nên tam giác $AMK$ cân tại $M$. Suy ra $H$ là trung điểm của $AK$.

b) Theo trên ta có $CA=CK$, mà $A, C$ cố định nên $K$ nằm trên đường tròn tâm $C$ bán kính $CA$ cố định.

Tam giác $ABC$ đều, nên $O$ là trọng tâm $\Delta ABC$

$$\Rightarrow OA=\frac{2}{3}.\frac{AC\sqrt{3}}{2}\Rightarrow 3\sqrt{3}=\frac{AC\sqrt{3}}{3}\Rightarrow AC=9.$$

c) Gọi $R_1;R_2$ lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp của hai tam giác $MBD$, $MCD$. Dựng các tam giác đều $BDF$ và $CDG$ ra phía ngoài $\Delta ABC$. Ta có: $\widehat{BFD}=\widehat{BMD}=60^0\Rightarrow$ tứ giác $BDMF$ nội tiếp.

Tương tự $CDMG$ là tứ giác nội tiếp nên $R_1;R_2$ lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác $BDF$ và $CDG$.

Ta có $\Delta BDF$ và $\Delta CDG$ đều nên:

$$R_1=\frac{BD\sqrt{3}}{3};\ R_2=\frac{CD\sqrt{3}}{3}\Rightarrow R_1.R_2=\frac{BD.CD}{3}$$

Lại có $BD.CD\le\frac{(BD+CD)^2}{4}=\frac{BC^2}{4}=\frac{3R^2}{4}$

$\Rightarrow R_1.R_2\le\frac{R^2}{4}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow D$ là trung điểm của $BC\Leftrightarrow M$ là điểm chính giữa cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$.

Vậy $R_1.R_2$ đạt giá trị lớn nhất khi $M$ là điểm chính giữa của cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$.

**Câu 6.** Ta có $P=\frac{a^3}{a(a+b+c)-ab-ca+2bc}$

$$+\frac{b^3}{b(a+b+c)-bc-ab+2ca}$$

$$+\frac{c^3}{c(a+b+c)-ca-bc+2ab}+3abc$$

$$P=\frac{a^3}{a^2+2bc}+\frac{b^3}{b^2+2ac}+\frac{c^3}{c^2+2ab}+3abc$$

$$P-3=\frac{a^3}{a^2+2bc}-a+\frac{b^3}{b^2+2ac}-b$$

$$+\frac{c^3}{c^2+2ab}-c+3abc$$

$$=-\frac{2abc}{a^2+2bc}-\frac{2abc}{b^2+2ac}-\frac{2abc}{c^2+2ab}+3abc$$

$$=-2abc\left(\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ac}+\frac{1}{c^2+2ab}\right)+3abc$$

Áp dụng BĐT Cauchy:

$$\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ac}+\frac{1}{c^2+2ab}$$

$$\ge 3.\frac{1}{\sqrt[3]{(a^2+2bc)(b^2+2ac)(c^2+2ab)}};$$

$$\sqrt[3]{(a^2+2bc)(b^2+2ac)(c^2+2ab)}$$

$$\le\frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}{3}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt[3]{(a^2+2bc)(b^2+2ac)(c^2+2ab)}\le\frac{(a+b+c)^2}{3}=3$$

$$\Rightarrow\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ac}+\frac{1}{c^2+2ab}\ge 1.$$

Suy ra $P-3\le -2abc+3abc=abc$

$$\le\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3=1\Rightarrow P\le 4.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Vậy $\max P=4$.

**PHẠM TRUNG KIÊN**

*(GV THCS Hồ Tùng Mậu, Ân Thi, Hưng Yên) Giới thiệu*


**CHUẨN BỊ CHO KỲ THI TRUNG HỌC PHỔ THÔNG QUỐC GIA**

# CÁC BÀI TOÁN THỰC TIỄN TIẾP CẬN ĐỀ THI THPT QUỐC GIA 2017

NGUYỄN NGỌC DUYỆT
PHẠM BÌNH NGUYÊN
*(GV THPT KonTum, KonTum)*

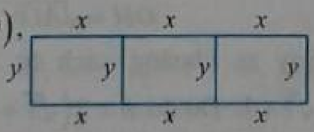
Chúng ta thấy rằng, kể từ khi Bộ Giáo dục và Đào tạo chuyển môn Toán trong Kì thi THPTQG từ hình thức tự luận sang hình thức trắc nghiệm đã thay đổi nhiều cách dạy của thầy và cách học của trò. Đặc biệt là khi có đề thi minh họa THPTQG 2017, trong đề thi có nhiều điểm mới, trong đó nổi bật là các bài toán thực tiễn. Điều này làm trăn trở các thầy dạy toán, bởi các bài toán thực tiễn trong sách giáo khoa không nhiều, mà các bài toán thực tiễn lại gần gũi và mang "hơi thở" của cuộc sống. Chính vì vậy, chúng tôi xin được trình bày một số bài toán thực tiễn, với hy vọng cung cấp tài liệu cho các thầy cô trong quá trình giảng dạy và đáp ứng với Kì thi THPTQG 2017.

**Bài toán 1.** *Người ta muốn xây một nhà kho hình chữ nhật có diện tích mặt sàn là $648(m^2)$ và chiều cao cố định bằng các bức tường xung quanh và bên trong để ngăn nhà kho thành 3 phòng hình chữ nhật có kích thước như nhau. Giá mỗi mét tường là 600.000 (VNĐ). Vậy cần phải xây các phòng theo kích thước nào để tiết kiệm chi phí nhất?*

**A.** *Theo kích thước* $12\times18$
**B.** *Theo kích thước* $9\times24$
**C.** *Theo kích thước* $8\times27$
**D.** *Theo kích thước* $3\times72$

***Lời giải.***

• TH1: Gọi chiều rộng của một phòng là $x\ (x>0)$, chiều dài của một phòng là $y\ (y>0)$ (h. 1).




*Hình 1*

Khi đó diện tích của một phòng là $xy$. Diện tích của nhà kho là $3xy$.

Theo giả thiết ta có $3xy=648 \Leftrightarrow y=\dfrac{216}{x}$.

Tổng chiều dài các bức tường cần phải xây dựng là

$l=6x+4y=6x+4.\dfrac{216}{x}=6x+\dfrac{864}{x}$.

Để chi phí xây dựng thấp nhất thì tổng chiều dài của các bức tường phải nhỏ nhất.

Xét hàm số $f(x)=6x+\dfrac{864}{x}$, với $x>0$.

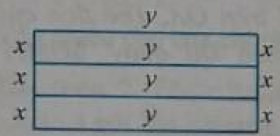
Ta có $f'(x)=6-\dfrac{864}{x^2}$, $f'(x)=0\Rightarrow x=12$.

Bảng biến thiên

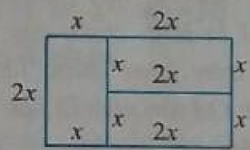
| $x$ | 0 | | 12 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | 144 | $\nearrow$ | |

Từ bảng biến thiên ta thấy rằng tổng chiều dài các bức tường nhỏ nhất bằng 144 m khi chiều rộng căn phòng là 12 m, suy ra chiều dài căn phòng là 18 m.

• Xét 2 TH xây nhà kho như 2 hình vẽ sau:




*Hình 2*




*Hình 3*

Ta thấy ở hình 2 kết quả như TH1, ở hình 3 kết quả tổng chiều dài các bức tường là $84\sqrt{3}(\mathrm{m})>144(\mathrm{m})$. Vậy ta phải xây mỗi căn phòng theo kích thước $12\times18$ để chi phí xây dựng là nhỏ nhất.

**Bài toán 2.** *Thầy A có một tờ giấy hình tròn với bán kính bằng 12. Sau đó thầy A cắt ra một hình quạt với góc ở tâm là $120^0$ và phần còn lại cũng là một hình quạt. Lúc này thầy A tạo ra hai hình nón với hai hình quạt này. Tỉ số thể tích của khối nón nhỏ so với khối nón lớn là bao nhiêu?*

**A.** $\dfrac{1}{8}$  **B.** $\dfrac{1}{4}$  **C.** $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$  **D.** $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

***Lời giải.*** Ta có diện tích hình tròn là

$$S=\pi r^2=\pi.12^2=144\pi.$$

Gọi diện tích hình quạt nhỏ là $S_1$, diện tích hình quạt lớn là $S_2$. Theo giả thiết, ta có

$$S_1=\frac{1}{3}S=48\pi,\ S_2=\frac{2}{3}S=96\pi.$$

Gọi $r_1$ là bán kính đường tròn đáy của hình nón nhỏ, $r_2$ là bán kính đường tròn đáy của hình nón lớn. Vì bán kính hình tròn là 12 nên độ dài đường sinh mỗi hình nón là $l=12$.

Ta có $S_1=\pi r_1 l \Leftrightarrow \pi r_1.12=48\pi \Leftrightarrow r_1=4$;

$$S_2=\pi r_2 l \Leftrightarrow \pi r_2.12=96\pi \Leftrightarrow r_2=8.$$

Gọi $h_1$ là đường cao của hình nón nhỏ, $h_2$ là đường cao của hình nón lớn.

Khi đó $h_1=\sqrt{l^2-r_1^2}=\sqrt{12^2-4^2}=\sqrt{128}$;

$$h_2=\sqrt{l^2-r_2^2}=\sqrt{12^2-8^2}=\sqrt{80}.$$

Thể tích của khối nón nhỏ là

$$V_1=\frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1=\frac{1}{3}\pi.4^2.\sqrt{128}.$$

Thể tích của khối nón lớn là

$$V_2=\frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2=\frac{1}{3}\pi.8^2.\sqrt{80}.$$

Ta có tỉ số thể tích của khối nón nhỏ so với khối nón lớn là $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{\frac{1}{3}\pi.4^2.\sqrt{128}}{\frac{1}{3}\pi.8^2.\sqrt{80}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

**Bài toán 3.** *Cho tam giác OAB vuông tại O và $OA=OB=4$. Lấy một điểm M thuộc cạnh AB và gọi H là hình chiếu của M trên OA. Thể tích của khối tròn xoay được tạo nên khi quay $\Delta OMH$ quanh OA lớn nhất là bao nhiêu?*

**A.** $\dfrac{256}{81}\pi$ **B.** $\dfrac{81}{256}\pi$ **C.** $\dfrac{128}{81}\pi$ **D.** $\dfrac{8}{3}\pi$

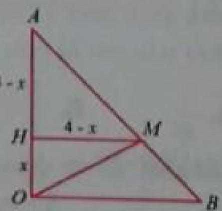
***Lời giải.*** Đặt $OH=x$, $0\le x\le 4$ thì $AH=4-x$. Do tam giác $AHM$ vuông cân tại $H$ nên $HM=4-x$.

Khi tam giác $OMH$ quay quanh trục $OA$ tạo thành khối nón tròn xoay có chiều cao là $OH=x$, bán kính đường tròn đáy là $r=HM=4-x$.

Thể tích khối nón tròn xoay là

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi(4-x)^2 x$$

$$=\frac{1}{3}\pi(x^3-8x^2+16x).$$




Xét hàm số

$$f(x)=\frac{1}{3}\pi(x^3-8x^2+16x)$$

với $0\le x\le 4$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{3}\pi(3x^2-16x+16)$,

$$f'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{4}{3} \\ x=4 \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên

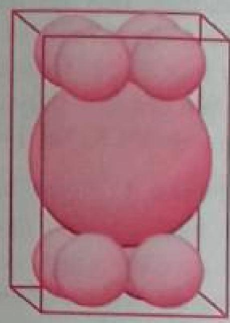
| $x$ | $0$ | | $\frac{4}{3}$ | | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | $0$ | − | |
| $f(x)$ | ↗ | | $\frac{256\pi}{81}$ | | ↘ |

Từ bảng biến thiên ta thấy rằng thể tích khối nón tròn xoay lớn nhất là $V=\dfrac{256\pi}{81}$.

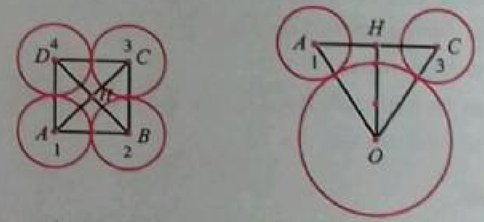
**Bài toán 4.** *Một hình hộp chữ nhật kích thước $4\times 4\times h$ chứa một khối cầu lớn có bán kính bằng 2 và 8 khối cầu nhỏ bán kính bằng 1. Biết rằng các khối cầu đều tiếp xúc nhau và tiếp xúc với các mặt của hình hộp (như hình vẽ). Hãy cho biết thể tích của khối hộp.*

**A.** $32+32\sqrt{5}$ **B.** $48+32\sqrt{5}$

**C.** $32+64\sqrt{2}$ **D.** $32+32\sqrt{7}$



***Lời giải.*** Giả sử bốn quả cầu nhỏ tiếp xúc nhau như hình vẽ. Gọi tâm các quả cầu lần lượt là $A,B,C,D$. Khi đó $ABCD$ là hình vuông có cạnh bằng 2. Gọi $H$ là giao điểm của $AC$ và $BD$ thì $AH=\sqrt{2}$. Gọi $O$ là tâm quả cầu lớn. Xét các quả cầu $(1),(3)$ và quả cầu lớn (như hình vẽ).




Khi đó ta có $AO=3$, $AH=\sqrt{2}$ nên

$$OH=\sqrt{AO^2-AH^2}=\sqrt{7}.$$

Suy ra khoảng cách từ tâm $O$ đến mặt đáy là $\sqrt{7}+1$. Do đó $h=2(\sqrt{7}+1)=2+2\sqrt{7}$.

Vậy thể tích của khối hộp chữ nhật là

$$V=4.4.(2+2\sqrt{7})=32+32\sqrt{7}.$$

**Bài toán 5.** *Một ngọn hải đăng đặt tại vị trí A có khoảng cách đến bờ biển là $AB=5$km. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng 7 km. Người canh hải đăng có thể chèo đò từ vị trí A đến vị trí điểm M trên bờ biển với vận tốc 4 km/h rồi đi bộ đến C với vận tốc 6 km/h. Hỏi vị trí điểm M cách vị trí điểm B một khoảng bao nhiêu để người đó đi đến kho là nhanh nhất?*

A. 0 km B. 7 km

C. $2\sqrt{5}$ km D. $\dfrac{14+5\sqrt{5}}{12}$ km

***Lời giải.*** Ta đặt khoảng cách $BM = x\,(\text{km})$, với $0 \le x \le 7$ thì $MC = 7 - x$ và $AM = \sqrt{25+x^2}$.

Thời gian để người canh hải đăng chèo đò từ vị trí $A$ đến vị trí điểm $M$ trên bờ biển là

$$h_1 = \frac{\sqrt{25+x^2}}{4}.$$

Thời gian để người canh hải đăng đi bộ từ vị trí $M$ đến vị trí kho $C$ là $h_2 = \dfrac{7-x}{6}$.

Tổng thời gian để người canh hải đăng di chuyển từ vị trí $A$ đến vị trí kho $C$ là

$$h = h_1 + h_2 = \frac{\sqrt{25+x^2}}{4} + \frac{7-x}{6}.$$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{\sqrt{25+x^2}}{4} + \dfrac{7-x}{6}$ với $0 \le x \le 7$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{x}{4\sqrt{25+x^2}} - \dfrac{1}{6}$,

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2\sqrt{5}$.

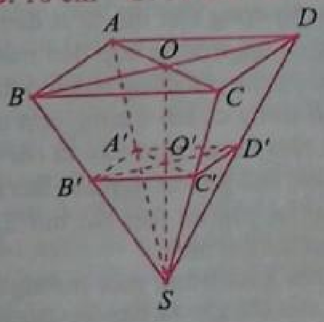
Bảng biến thiên

| $x$ | $0$ | $2\sqrt{5}$ | $7$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | | $f(2\sqrt{5})$ | |

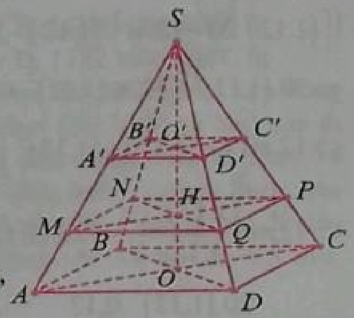
Từ bảng biến thiên ta thấy rằng để người canh hải đăng di chuyển từ vị trí $A$ đến vị trí kho $C$ là nhanh nhất thì vị trí điểm $M$ cách vị trí điểm $B$ một khoảng là $2\sqrt{5}$ km.

**Bài toán 6.** *Một cái phễu đựng nước có dạng hình chóp tứ giác đều S.ABCD. Đổ nước vào phễu sao cho chiều cao của mực nước bằng $2\sqrt[3]{98}$ cm. Sau đó ta đậy nắp phễu và lật úp lại (lấy ABCD làm mặt đáy của phễu) thì lúc này chiều cao của mực nước là 4 cm. Hỏi chiều cao của cái phễu là bao nhiêu?*

A. 12 cm B. 10 cm C. 14 cm D. 16 cm




***Lời giải.*** Giả sử mực nước ban đầu tạo thành mặt $A'B'C'D'$. Sau khi lật úp phễu lại thì mực nước tạo thành mặt $MNPQ$.




Gọi $H = MP \cap NQ$

$SO' = d\left(S,(A'B'C'D')\right)$,

$SH = d\left(S,(MNPQ)\right)$,

$SO = d\left(S,(ABCD)\right)$.

Ta có $V_{S.A'B'C'D'} = V_{MNPQ.ABCD} = V_{S.ABCD} - V_{S.MNPQ}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}SO'.S_{A'B'C'D} = \frac{1}{3}SO.S_{ABCD} - \frac{1}{3}SH.S_{MNPQ}$

$\Leftrightarrow SO'.\dfrac{S_{A'B'C'D}}{S_{ABCD}} = SO - SH.\dfrac{S_{MNPQ}}{S_{ABCD}}$

$\Leftrightarrow SO'.\left(\dfrac{SO'}{SO}\right)^2 = SO - SH.\left(\dfrac{SH}{SO}\right)^2$

$\Leftrightarrow SO'^3 = SO^3 - (SO - OH)^3$.

Đặt $SO = x$, ta được phương trình

$$\left(2\sqrt[3]{98}\right)^3 = x^3 - (x-4)^3 \Leftrightarrow x = SO = 10.$$

Vậy chiều cao của cái phễu là 10cm.

**Bài toán 7.** *Được sự hỗ trợ từ Ngân hàng Chính sách xã hội địa phương, nhằm giúp đỡ các sinh viên có hoàn cảnh khó khăn hoàn thành việc đóng học phí học tập, một bạn sinh viên A đã vay của ngân hàng 20 triệu đồng với lãi suất 12%/năm, và ngân hàng chỉ bắt đầu tính lãi sau khi bạn A kết thúc khóa học. Bạn A đã hoàn thành khóa học và đi làm với mức lương là 5,5 triệu đồng/tháng. Bạn A dự tính sẽ trả hết nợ gốc lẫn lãi suất cho ngân hàng trong 36 tháng. Hỏi số tiền m mỗi tháng mà bạn A phải trả cho ngân hàng là bao nhiêu?*

A. $m = \dfrac{1,12^3 \times 20 \times 0,12}{(1,12^3 - 1)\times 12}$ triệu

B. $m = \dfrac{1,12^2 \times 20 \times 0,12}{(1,12^2 - 1)\times 12}$ triệu

C. $m = \dfrac{1,12^3 \times 36 \times 0,12}{(1,12^3 - 1)\times 12}$ triệu

D. $m = \dfrac{1,12^2 \times 36 \times 0,12}{(1,12^2 - 1)\times 12}$ triệu

***Lời giải.*** Năm thứ nhất trả gốc và lãi, số tiền còn lại là $(1+0,12).20 - 12.m = (1,12).20 - 12.m$.

Năm thứ hai, số tiền còn lại

$$\left[(1,12).20 - 12.m\right].(1,12) - 12.m.$$

Năm thứ ba, số tiền còn lại

$$\left\{\left[(1,12).20-12.m\right].(1,12)-12.m\right\}.(1,12)-12m=0$$

$$\Leftrightarrow 20.(1,12)^3-12.m.(1,12)^2-12.m.(1,12)-12.m=0$$

$$\Leftrightarrow 12.m\left[1+(1,12)+(1,12)^2\right]=20.(1,12)^3$$

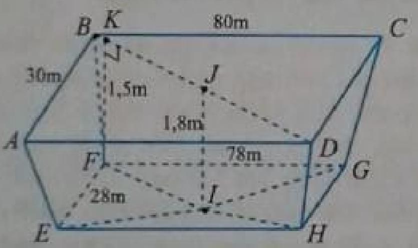
$$\Leftrightarrow 12.m.\frac{(1,12)^3-1}{1,12-1}=20.(1,12)^3$$

$$\Leftrightarrow m=\frac{20.(1,12)^3.0,12}{\left[(1,12)^3-1\right].12}.$$

Vậy bạn A mỗi tháng phải trả cho ngân hàng $\frac{20.(1,12)^3.0,12}{\left[(1,12)^3-1\right].12}$ triệu đồng.

**Bài toán 8.** *Hình dưới mô tả một cái ao chứa nước nuôi cá tra được tạo bởi hình chóp cụt ABCD.EFGH và hình chóp I.EFGH, các đáy của hình chóp cụt là các hình chữ nhật và hình chiếu của I trên các đáy chính là tâm của các đáy, biết độ dài các đoạn thẳng như trong hình vẽ. Cứ 10 ngày thì thay $\frac{1}{2}$ nước cũ. Hỏi lượng nước một lần thay là bao nhiêu?*

**A.** $1827\,m^3$ **B.** $1890\,m^3$
**C.** $1773\,m^3$ **D.** $1882\,m^3$




***Lời giải.*** Gọi $S$ là diện tích hình chữ nhật $ABCD$, $S'$ là diện tích hình chữ nhật $EFGH$.

Thể tích của khối chóp cụt $ABCD.EFGH$ là

$$V=\frac{h}{3}\left(S+\sqrt{S.S'}+S'\right)$$

$$=\frac{1,5}{3}\left(30.80+\sqrt{30.80.28.78}+28.78\right)\approx 3436,727\,\text{m}^3.$$

Thể tích của khối chóp $I.EFGH$ là

$V'=\frac{1}{3}.S'.h'$ với $h'=IJ-FK=1,8-1,5=0,3.$

Vậy $V'=\frac{1}{3}.28.78.0,3=218,4\,m^3.$

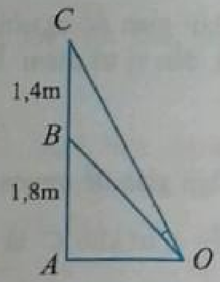
Thể tích của hồ nuôi cá là

$$V_1=V+V'\approx 3436,727+218,4=3655,127\,\text{m}^3.$$

Vậy lượng nước một lần thay là $\frac{1}{2}V_1\approx 1827,5635\text{m}^3.$

**Bài toán 9.** *Một màn hình chữ nhật cao 1,4m được đặt ở độ cao 1,8m so với tầm mắt (tính từ đầu mép dưới của màn hình). Để nhìn rõ nhất phải xác định vị trí đứng sao cho "góc nhìn" lớn nhất. Hãy xác định vị trí đứng đó. (Góc BOC được gọi là "góc nhìn").*

**A.** $AO=2,4\,\text{m}$ **B.** $AO=2\,\text{m}$
**C.** $AO=2,6\,\text{m}$ **D.** $AO=3\,\text{m}$




***Lời giải.*** $\widehat{BOC}$ lớn nhất khi $\tan\widehat{BOC}$ lớn nhất.

Đặt $OA=x$, $x>0$.

Ta có

$$\tan\widehat{BOC}=\tan\left(\widehat{AOC}-\widehat{AOB}\right)$$

$$=\frac{\tan\widehat{AOC}-\tan\widehat{AOB}}{1+\tan\widehat{AOC}.\tan\widehat{AOB}}$$

$$=\frac{\frac{AC}{OA}-\frac{AB}{OA}}{1+\frac{AC}{OA}.\frac{AB}{OA}}=\frac{\frac{1,4}{x}}{1+\frac{3,2}{x}.\frac{1,8}{x}}=\frac{1,4x}{x^2+5,76}.$$

Xét hàm số $f(x)=\frac{1,4x}{x^2+5,76}$ với $x>0.$

Ta có $f'(x)=\frac{-1,4x^2+8,064}{\left(x^2+5,76\right)^2}$,

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=2,4.$

Bảng biến thiên

| $x$ | 0 | | 2,4 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | |
| $f(x)$ | | ↗ | $\frac{7}{24}$ | ↘ | |

Vậy để nhìn rõ nhất thì ta đứng cách màn hình 2,4m.

**Bài toán 10.** *Một xe ôtô đi từ A đến B, cùng lúc có người đi xe đạp từ B đến A. Ba phút sau khi hai xe gặp nhau ôtô quay ngay lại đuổi xe đạp, khi đuổi kịp lại quay ngay để chạy về B. Nếu sau khi gặp lần đầu một phút ôtô quay lại còn xe đạp sau khi gặp tăng vận tốc $\frac{15}{7}$ lần thì ôtô cũng chỉ mất từng ấy thời gian. Tìm tỷ số vận tốc của xe ôtô và xe đạp.*

**A.** 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

***Lời giải.*** Gọi $x$ (km/phút) là vận tốc của ôtô, $y$ (km/phút) là vận tốc của xe đạp. Theo bài ra ta nhận thấy rằng chuyển động của ôtô từ $A$ đến chỗ gặp lần thứ nhất trong cả hai trường hợp đều mất một số thời gian như nhau và chuyển động của ôtô từ chỗ gặp lần thứ nhất đến $B$ trong cả hai trường hợp cũng đều mất một thời gian như nhau. Như vậy ta chỉ quan tâm tới quãng thời gian: ôtô gặp xe đạp lần thứ nhất, tiếp tục chạy, rồi quay lại gặp xe đạp lần thứ 2, và quay lại chỗ gặp xe đạp lần thứ nhất.

Ta hãy tính thời gian trong mỗi trường hợp. Trường hợp thứ nhất, sau khi gặp xe đạp lần thứ nhất, ôtô chạy thêm 3 phút theo chiều đến $B$. Trên đường ngược lại tới chỗ gặp lần thứ nhất cần 3 phút. Trong thời gian này xe đạp đã đi được $6y$ km tính từ chỗ gặp nhau lần thứ nhất. Ôtô gặp xe đạp lần thứ hai với vận tốc chênh lệch $(x-y)$ km/phút và cần thời gian $\dfrac{6y}{x-y}$ phút. Trên đường ngược lại từ chỗ gặp lần thứ hai tới chỗ gặp nhau lần thứ nhất cũng bị mất $\dfrac{6y}{x-y}$ phút, nghĩa là mất

$3+3+\dfrac{6y}{x-y}+\dfrac{6y}{x-y}=6+\dfrac{12y}{x-y}$ phút.

Tương tự, trường hợp thứ hai mất

$$1+1+\frac{2.\frac{15}{7}y}{x-\frac{15}{7}y}+\frac{2.\frac{15}{7}y}{x-\frac{15}{7}y}=2+\frac{60y}{7x-15y} \text{ phút.}$$

Hai thời gian này bằng nhau vì vậy ta được phương trình $6+\dfrac{12y}{x-y}=2+\dfrac{60y}{7x-15y}$.

Bài toán dẫn đến phương trình thuần nhất bậc hai

$$7x^2-16xy-15y^2=0.$$

Đặt $t=\dfrac{x}{y}$, ta được phương trình $7t^2-16t-15=0$.

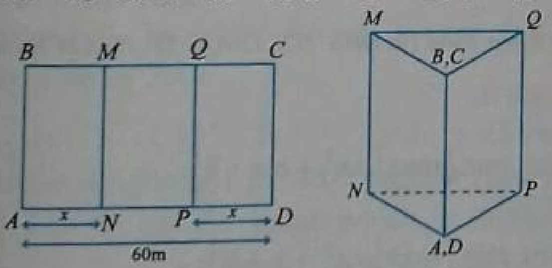
Giải phương trình trên ta được $t=3$.

Vậy tỉ số vận tốc của xe ôtô và xe đạp là 3.

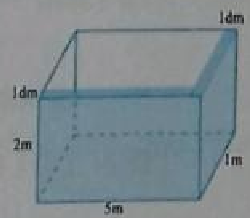
## BÀI TẬP

**1.** Cho một tấm nhôm hình chữ nhật $ABCD$ biết $AD=60$ cm. Ta gập tấm nhôm theo 2 cạnh $MN$ và $PQ$ vào phía trong đến khi $AB$ và $DC$ trùng nhau như hình vẽ, để được một hình lăng trụ khuyết 2 đáy. Tìm $x$ để thể tích khối lăng trụ lớn nhất.

**A.** $x=20$ **B.** $x=30$ **C.** $x=45$ **D.** $x=40$




**2.** Người ta muốn xây một bồn chứa nước dạng khối hộp chữ nhật trong một phòng tắm. Biết chiều dài, chiều rộng, chiều cao của khối hộp đó lần lượt là 5m, 1m, 2m, chỉ xây 2 vách (hình vẽ bên).

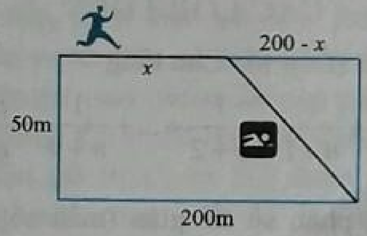



Biết mỗi viên gạch có chiều dài 20cm, chiều rộng 10cm, chiều cao 5cm. Hỏi người ta sử dụng ít nhất bao nhiêu viên gạch để xây bồn đó và thể tích thực của bồn chứa bao nhiêu lít nước? (Giả sử lượng xi măng và cát không đáng kể).

**A.** 1180 viên, 8820 lít **B.** 1180 viên, 8800 lít
**C.** 1182 viên, 8820 lít **D.** 1182 viên, 8800 lít

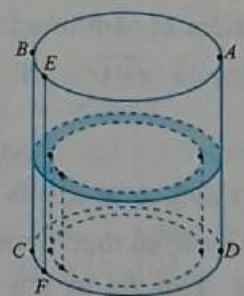
**3.** Có một cái hồ rộng 50m, dài 200m. Một vận động viên chạy phối hợp với bơi (bắt buộc cả hai) cần đi từ góc này qua góc đối diện bằng cách cả chạy và bơi (như hình vẽ). Hỏi rằng sau khi chạy được bao xa (quãng đường $x$) thì nên nhảy xuống bơi để đến đích nhanh nhất? Biết rằng vận tốc bơi là 1,5 m/s, vận tốc chạy là 4,5m/s.

**A.** $x\approx 182,3$m **B.** $x\approx 152,3$m
**C.** $x\approx 183,3$m **D.** $x\approx 197,5$m




**4.** Một bể tắm nước nóng có hình dạng được mô tả như hình dưới. Bên trên là một hình trụ có đường kính 2,6m, độ sâu 4,5dm. Bên dưới là một hình trụ có đường kính 2m, độ sâu 4,0dm. Biết hai hình trụ đó đồng tâm ở một đáy và mực nước thấp hơn miệng bể 1dm. Lượng nước trong bể tắm trên là bao nhiêu?

**A.** 3115 lít **B.** 3646 lít **C.** 2801 lít **D.** 1161 lít



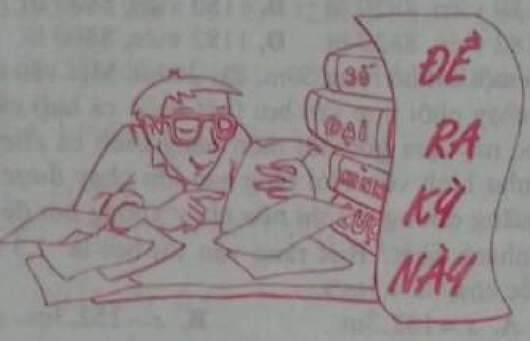

**5.** Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2000000 đồng một tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ 100000 đồng một tháng thì có thêm hai căn hộ bị bỏ trống. Hỏi muốn có thu nhập cao nhất, công ty đó phải cho thuê mỗi căn hộ với giá bao nhiêu một tháng?

**A.** 2200000 **B.** 2150000
**C.** 2250000 **D.** 2300000

**6.** Một cái ly dạng hình nón có thể tích bằng $48\pi\,\text{cm}^3$. Cái ly đang chứa một lượng nước có chiều cao bằng $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$ chiều cao của ly. Bỏ một viên đá hình cầu vào trong ly, viên đá ngập hoàn toàn trong ly, làm nước dâng vừa đầy ly. Hỏi bán kính viên đá bằng bao nhiêu?

**A.** 6 cm **B.** $\sqrt[3]{18}$ cm **C.** 4 cm **D.** 3 cm

(Xem tiếp trang 27)




## CÁC LỚP THCS

**Bài T1/476 (Lớp 6).** Cho tổng

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{n+9}=\frac{p}{q}$$

với $\frac{p}{q}$ là phân số tối giản (mẫu số ở các số hạng trong tổng là 10 số tự nhiên liên tiếp). Tìm số tự nhiên $n$ nhỏ nhất để $q$ chia hết cho 2006.

TẠ THỊ MÙI

*(GV THPT Khánh Dương, Yên Mô, Ninh Bình)*

**Bài T2/476 (Lớp 7).** Cho tam giác $ABC$ vuông cân tại $A$. Lấy điểm $M$ nằm trong tam giác $ABC$ sao cho $BM = BA$ và $\widehat{ABM}=30^0$. Chứng minh: $MA = MC$.

ĐẬU CÔNG NHO

*(GV THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, Nghệ An)*

**Bài T3/476.** Cho các số thực dương $a$, $b$, $c$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=2(ab+bc+ca)-abc$.

NGUYỄN MINH SANG

*(GV THCS Lâm Thao, Lâm Thao, Phú Thọ)*

**Bài T4/476.** Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính $AB$ cố định. Vẽ tia $Ax$ là tiếp tuyến tại $A$ của nửa đường tròn (tia $Ax$ thuộc nửa mặt phẳng chứa nửa đường tròn có bờ là đường thẳng $AB$). Gọi $M$ là điểm thay đổi trên tia $Ax$ ($M$ không trùng với $A$). Đoạn thẳng $MB$ cắt nửa đường tròn tại điểm $K$ khác $B$. Trên tia $AB$ xác định điểm $N$ sao cho $AN = AM$. Chứng minh rằng khi $M$ thay đổi thì đường thẳng đi qua $K$ và vuông góc với $KN$ luôn đi qua một điểm cố định.

NGUYỄN TÁN NGỌC

*(GV THCS Nhơn Mỹ, An Nhơn, Bình Định)*

**Bài T5/476.** Giải phương trình sau:

$$\sqrt{2x^3-2x^2+x}+2.\sqrt[4]{3x-2x^2}=x^4-x^3+3.$$

HOÀNG LÊ NHẬT TÙNG

*(SV K61 SP Toán, ĐHQG Hà Nội)*

## CÁC LỚP THPT

**Bài T6/476.** Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}3^x+2^y=5\\ 3^y+2^x=5\end{cases}.$$

NGUYỄN TUẤN NGỌC

*(GV THPT chuyên Tiền Giang, Mỹ Tho, Tiền Giang)*

**Bài T7/476.** Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ ($n \ge 2$) là các số dương. Đặt $S=a_1^n+a_2^n+...+a_n^n$, $P=a_1a_2...a_n$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{S-a_1^n+P}+\frac{1}{S-a_2^n+P}+...+\frac{1}{S-a_n^n+P}\le\frac{1}{P}.$$

ĐẶNG THANH HẢI - TRẦN TUYẾT THANH

*(GV Khoa Cơ bản, Học viện PK - KQ, Sơn Tây, Hà Nội)*

**Bài T8/476.** Cho tam giác $ABC$. Chứng minh rằng:

$$2(\sin A+\sin B+\sin C)\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right)$$

$$\le\frac{45}{4}+(\cos A+\cos B+\cos C)\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right).$$

TRẦN TUẤN ANH

*(GV Khoa Toán Tin ĐHKHTN, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh)*

**Bài T9/476.**

1) Tìm $\min\limits_{a,b}\left\{\max\limits_{-1\le x\le 1}\left|a.x^2+b.x+1\right|\right\}$.

2) Tìm $\min\limits_{a,b}\left\{\max\limits_{-1\le x\le 1}\left|a.x^2+x+b\right|\right\}$.

PHẠM VIỆT HẢI

*(SV K49A1T, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)*

## TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

**Bài T10/476.** Cho số tự nhiên $a \ge 2$. Chứng minh rằng tồn tại vô số số tự nhiên $n$ sao cho $a^n+1$ chia hết cho $n$.

VŨ THANH TÙNG

*(SV K5 CNTN, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)*

**Bài T11/476.** Cho số thực $a$ khác 0, khác $-1$. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(f(x)+ay)=(a^2+a)x+f(f(y)-x), \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

TRẦN DIỆU MINH

*(GV THPT chuyên Lý Tự Trọng, Cần Thơ)*

**Bài T12/476.** Cho tam giác nhọn $ABC$ với $AB < AC$ và các đường cao $AD$, $BE$, $CF$; $EF$ cắt $BC$ tại $G$. $K$ là hình chiếu của $C$ trên $AG$. $AD$ cắt $CK$ tại $H$. $AC$ cắt $HF$ tại $L$. Chứng minh rằng $A$ là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác $FKL$.

LÊ VIẾT ÂN

*(Số nhà 15, xóm 2, thôn Ngọc Anh, Phú Thượng, Phú Vang, Thừa Thiên Huế)*

**Bài L1/476.** Khi tập luyện trong nhà thi đấu, cầu thủ sút đi một quả bóng theo đường thẳng với vận tốc ban đầu $v_0$, sao cho bóng chỉ trượt - không quay và không bị nẩy lên khỏi mặt sân. Giả thiết quả bóng là một hình cầu có mật độ khối lượng được phân bố đồng đều trên bề mặt. Ma sát lăn và lực cản của không khí không đáng kể, sân tập đủ rộng và phẳng. Xác định vận tốc của quả bóng, khi mà nó bắt đầu lăn - không trượt.

NGÔ AN HÒA KỲ *(TP. Hồ Chí Minh)*

**Bài L2/476.** Cho đoạn mạch điện có $R$, $L$, $C$ mắc nối tiếp, gồm điện trở $R = 100\ \Omega$, cuộn cảm thuần và tụ điện có điện dung $C$ thay đổi được. Điện áp xoay chiều đặt vào giữa hai đầu đoạn mạch có tần số 50 Hz. Khi thay đổi $C$ thì thấy có hai giá trị $C_1$ và $3C_1$ đoạn mạch đều cho cùng một công suất và hai dòng điện vuông pha với nhau. Lấy $\pi^2 = 10$. Tính độ tự cảm $L$ của cuộn cảm thuần.

THANH LÂM *(Hà Nội)*

# PROBLEMS IN THIS ISSUE

## FOR SECONDARY SCHOOL

**Problem T1/476 (For 6th grade).** Consider the sum in the following form

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+9}=\frac{p}{q}$$

where $n$ is a natural number and $\frac{p}{q}$ cannot be simplified. Find the smallest $n$ such that $q$ is divisible by 2006.

**Problem T2/476 (For 7th grade).** Given an isosceles right triangle $ABC$ with the right angle $A$. Let $M$ be the point which is inside the triangle such that $BM = BA$ and $\widehat{ABM}=30^0$. Prove that $MA = MC$.

**Problem T3/476.** Given positive numbers $a$, $b$, $c$ such that $a+b+c=3$. Find the maximum value of the expression

$$P=2(ab+bc+ca)-abc.$$

**Problem T4/476.** Given a semicircle $O$ with the fixed diameter $AB$. Let $Ax$ be the ray such that $Ax$ is tangent to the semicircle at $A$ and $Ax$ and the semicircle are on the same half-plane determined $AB$. A point $M$, which is different from $A$, varies on the ray $Ax$. Assume that $MB$ intersects the semicircle at second point $K$ which is different from $B$. On the ray $AB$ choose $N$ such that $AN = AM$. Prove that when $M$ varies, the line which goes through $K$ and is perpendicular to $KN$ always goes through a fixed point.

**Problem T5/476.** Solve the equation

$$\sqrt{2x^3-2x^2+x}+2.\sqrt[4]{3x-2x^2}=x^4-x^3+3.$$

## FOR HIGHSCHOOL

**Problem T6/476.** Solve the system of equations

$$\begin{cases}3^x+2^y=5\\3^y+2^x=5\end{cases}.$$

**Problem T7/476.** Given $n$ positive numbers $a_1$, $a_2$, …, $a_n$ ($n \ge 2$). Let $S=a_1^n+a_2^n+\ldots+a_n^n$ and $P=a_1a_2\ldots a_n$. Prove that

$$\frac{1}{S-a_1^n+P}+\frac{1}{S-a_2^n+P}+\ldots+\frac{1}{S-a_n^n+P}\le\frac{1}{P}.$$

*(Xem tiếp trang 27)*


**Bài T1/472.** *Tìm số chính phương có ba chữ số thỏa mãn: Nếu đổi chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị cho nhau ta được số mới là số chính phương liền sau số chính phương đã cho ($(n+1)^2$ là số chính phương liền sau số chính phương $n^2$).*

***Lời giải.*** Gọi số chính phương cần tìm là $\overline{abc} = n^2$ thì $\overline{acb} = (n+1)^2$. Do $(n+1)^2 \le 999$ thì $n+1 \le 31$ nên $n \le 30$. Từ $\overline{acb} - \overline{abc} = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$ và $\overline{acb} - \overline{abc} = 100a + 10c + b - (100a + 10b + c) = 9c - 9b$ suy ra $2n + 1 = 9(c - b)$. Từ đó $c - b$ là số lẻ và $9(c - b) \le 61$ suy ra $c - b \le 5$. Với $c - b$ bằng 1, 3, 5 thì $n$ tương ứng bằng 4, 13, 22 và $n^2$ tương ứng bằng 16, 169, 484. Chỉ có số $n = 13$ với $n^2 = 169$, $(n+1)^2 = 196$ thỏa mãn yêu cầu đề bài. Vậy số cần tìm là 169. ❒

➢***Nhận xét.*** Hầu hết các bạn gửi bài giải đều trả lời đúng, tuy nhiên một số bạn không chú ý hạn chế số $n$ nên phải thử nhiều hơn cách trên. Các bạn có lời giải tốt là: **Phú Thọ:** *Hà Quang Tùng, Bùi Trọng Hiếu, Ngô Văn Thọ, Trần Quang Đạt, Bùi Thị Bích Ngọc, Nguyễn Phạm Thanh Nga, Trần Thị Yến Khanh, Đỗ Quyên Quyên, Trần Đức Ngọc*, 6A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Thị Thanh Hằng*, 6A4, *Nguyễn Ngọc Toàn*, 6A5, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Hà Nội:** *Hoàng Lê Bích Ngọc*, 6A, THCS Thái Thịnh, Q. Đống Đa, *Bùi Minh An*, 6A1, Trường Hanoi Academy, Q. Tây Hồ; **Thanh Hóa:** *Trịnh Đức Tuấn*, 6A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn; **Nghệ An:** *Nguyễn Xuân Mạnh, Nguyễn Thị Thanh Hằng, Nguyễn Thị Khánh Thư, Nguyễn Quốc Hiếu, Trương Công Cảnh*, 6A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

**VIỆT HẢI**

**Bài T2/472.** *Một dãy biểu thức có dạng sau: 1; 3+5; 7+9+11; 13+15+17+19; 21+23+25+27+29; ... Chứng minh rằng mỗi số hạng của dãy đều là lũy thừa bậc 3 của một số nguyên dương nào đó.*

***Lời giải*** . Trong dãy các biểu thức đã cho, đặt $A_1 = 1$; $A_2 = 3 + 5$; $A_3 = 7 + 9 + 11$; $A_4 = 13 + 15 + 17 + 19$; $A_5 = 21 + 23 + 25 + 27 + 29$; ….
Hiển nhiên $A_1 = 1^3$; $A_2 = 8 = 2^3$; Với $n \ge 3$ ta có số hạng cuối cùng của tổng (biểu thức) $A_n$ là số lẻ thứ $(1 + 2 + 3 + \ldots + n)$ trong dãy các số tự nhiên lẻ đầu tiên, nó bằng $2.\dfrac{n(n+1)}{2} - 1 = n(n+1) - 1$. Khi đó số hạng cuối cùng của tổng $A_{n-1}$ là $(n-1)n - 1$, suy ra số hạng đầu tiên của tổng $A_n$ là $(n-1)n + 1$. Như vậy $A_n$ chính là tổng của $n$ số tự nhiên lẻ liên tiếp, từ $(n-1)n + 1$ đến $n(n+1) - 1$. Ta có

$$A_n = \frac{[(n-1)n+1+n(n+1)-1].n}{2} = \frac{2n^2.n}{2} = n^3.$$

Vậy mỗi số hạng của dãy đều là lũy thừa bậc 3 của một số nguyên dương nào đó. ❒

➢***Nhận xét.*** Bài toán không khó, tất cả các bạn đều tìm ra kết quả $A_n = n^3$. Tuy nhiên, nhiều bạn chỉ tính cụ thể $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, $A_5$ rồi dựa theo quy luật đưa ra kết luận. Lập luận này không chặt chẽ vì đây là suy luận kiểu quy nạp không hoàn toàn. Các bạn sau đây có lời giải tương đối tốt: **Phú Thọ:** *Đào Nhân Đô, Vũ Minh Khải, Nguyễn Công Hải*, 7A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Thị Thanh Hằng*, 6A4, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Nghệ An:** *Nguyễn Thanh Nguyên, Lê Anh Đức, Lê Hải Phong*, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** *Ngô Đức Hoàng, Trần Nhật Hoa, Đồng Văn Sỹ Hoàng, Trần Phương Thảo, Nguyễn Thị Thùy Trang, Nguyễn Khánh Chi, Ngô Phước Hà, Trần Tú Trinh*, 7A, *Nguyễn Thị Hà Chi*, 7B, THCS Xuân Diệu, Can Lộc; **Quảng Ngãi:** *Văn Quang Tuệ, Lê Tuấn Kiệt*, 7A, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành.

**NGUYỄN XUÂN BÌNH**

**Bài T3/472.** *Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn phương trình: $x^2 - 2x = 27y^3$.*

***Lời giải.*** Ta có $x^2 - 2x = 27y^3 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 27y^3 + 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 = (3y+1)(9y^2 - 3y + 1)$ (1)

Do $x$, $y$ là các số nguyên nên $(x-1)^2$ là số chính phương.

Mà $27y^3+1=(x-1)^2\ge 0$ nên $y\in\mathbb{N}$. Suy ra $3y+1$ và $9y^2-3y+1$ là hai số tự nhiên.

Giả sử $d=\text{ƯCLN}(3y+1,\ 9y^2-3y+1)$ với $d\in\mathbb{N}^*$. Suy ra $3y+1\,\vdots\, d,\ 9y^2-3y+1\,\vdots\, d$

$\Rightarrow\left[(9y^2-3y+1)-3y(3y+1)+2(3y+1)\right]\vdots\, d\Rightarrow 3\,\vdots\, d.$

Kết hợp với $3y+1\,\vdots\, d$ suy ra $1\,\vdots\, d$. Nên $d=1$.

Kết hợp với (1) ta có $3y+1$ và $9y^2-3y+1$ là hai số chính phương.

*Cách* 1. Đặt $9y^2-3y+1=k^2$ $(k\in\mathbb{N})$

$\Leftrightarrow 36y^2-12y+4=4k^2\Leftrightarrow 4k^2-(6y-1)^2=3$

$\Leftrightarrow(2k-6y+1)(2k+6y-1)=3.$

Do $y$, $k$ là các số tự nhiên nên $2k-6y+1$ và $2k+6y-1$ là hai số nguyên, hơn nữa $2k+6y-1\ge-1$. Xảy ra các trường hợp sau:

a) $\begin{cases}2k-6y+1=1\\2k+6y-1=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=1\\y=\dfrac{1}{3}\end{cases}$

b) $\begin{cases}2k-6y+1=3\\2k+6y-1=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=1\\y=0\end{cases}$

c) $\begin{cases}2k-6y+1=-3\\2k+6y-1=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=-1\\y=\dfrac{1}{3}\end{cases}$

Từ đó chỉ chọn được $y=0$. Do đó $x^2-2x=0$

$\Leftrightarrow x(x-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2.\end{array}\right.$

Vậy có hai cặp số nguyên $(x,y)$ thỏa mãn phương trình là $(0;0)$ và $(2;0)$.

*Cách* 2. Do $y\in\mathbb{N}$ nên

$$(3y-1)^2\le 9y^2-3y+1\le(3y+1)^2.$$

Mà $9y^2-3y+1$ là số chính phương và không chia hết cho 3 nên xảy ra hai khả năng sau:

• $9y^2-3y+1=(3y-1)^2$

$\Leftrightarrow 9y^2-3y+1=9y^2-6y+1\Leftrightarrow y=0$

• $9y^2-3y+1=(3y+1)^2$

$\Leftrightarrow 9y^2-3y+1=9y^2+6y+1\Leftrightarrow y=0.$

Từ đó tìm được $x=0$; $x=2$ và có kết luận như *Cách* 1. ☐

➤***Nhận xét.*** Đa số các bạn tham gia gửi bài đều giải theo một trong hai cách trên. Một số bạn không đưa ra nhận xét $y\in\mathbb{N}$ nên phải xét nhiều trường hợp và lời giải phức tạp hơn. Mời các bạn hãy tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^5-2x=27y^3$.

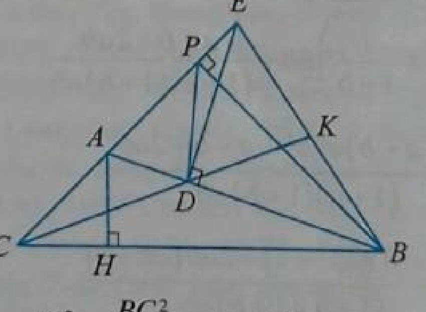
Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt: **Nghệ An:** *Phan Thị Huyền Anh*, 9C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Phú Thọ:** *Vũ Minh Khải, Nguyễn Công Hải*, 7A3, *Nguyễn Chí Công*, 8A3, *Nguyễn Thùy Dương, Nguyễn Thị Hiền*, 9A3, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Tạ Kim Thanh Hiền*, 8A4, *Bùi Tuấn Anh, Nguyễn Trúc Quỳnh*, 9A2, THCS Yên Lạc; **Sơn La:** *Trần Văn Chiến, Nguyễn Trung Thế, Điêm Đăng Hoàng*, 9A1, THCS Chất lượng cao Mai Sơn; **Thanh Hóa:** *Thiều Đình Minh Hùng*, 8C, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; **Hà Tĩnh:** *Hoàng Quốc Khánh*, THCS Đồng Lạng, Đức Thọ.

**PHẠM THỊ BẠCH NGỌC**

**Bài T4/472.** *Cho tam giác ABC có góc BAC tù thỏa mãn hệ thức* $AB^2-AC^2=\dfrac{BC^2}{2}$. *Gọi D là điểm trên cạnh AB sao cho BC = 2CD. Từ D kẻ đường thẳng vuông góc với đường thẳng AB cắt đường thẳng AC tại điểm E, K là giao điểm của đường thẳng CD và cạnh BE. Chứng minh rằng K là trung điểm của BE.*

***Lời giải.*** Hạ $AH\perp BC$ tại $H$ và hạ $BP\perp AE$ tại $P$. Ta có $AB^2-AC^2$

$=(AH^2+HB^2)-(AH^2+HC^2)=HB^2-HC^2.$




Mà $AB^2-AC^2=\dfrac{BC^2}{2}$ (giả thiết), suy ra

$HB-HC=\dfrac{BC}{2}\Rightarrow CH=\dfrac{BC}{4}.$

Ta có $\Delta AHC\backsim\Delta BPC$ (g.g), nên $\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{CH}{CP}$,

suy ra $CA.CP=CH.CB=\dfrac{BC^2}{4}=CD^2$

$\Rightarrow\dfrac{CA}{CD}=\dfrac{CD}{CP}.$

Từ đó suy ra $\Delta CAD \backsim \Delta CDP$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{CDA} = \widehat{CPD}$ (1)

Lại có, tứ giác $BDPE$ nội tiếp nên

$$\widehat{CPD} = \widehat{DBE} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\widehat{DBK} = \widehat{CDA} = \widehat{BDK} \quad (3)$$

Hơn nữa $\widehat{KDE} = 90° - \widehat{BDK} = \widehat{DEK}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $DK = BK = EK$, hay $K$ là trung điểm của $BE$ (điều phải chứng minh). □

➤***Nhận xét.*** Chỉ có hai bạn tham gia giải bài toán trên là bạn *Nguyễn Đặng Nhật Minh*, 8C2, THCS Archimedes Academy, **Hà Nội** và bạn *Bùi An Duy*, 8B, THCS Hà Nội Amsterdam, **Hà Nội**. Tuy nhiên cả hai lời giải đều rất dài và trình bày không tốt.

**NGUYỄN THANH HỒNG**

**Bài T5/472.** *Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b ta có bất đẳng thức:*

$$\frac{a+b}{1+ab} + \left(\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b}\right)ab + \frac{a+b+2ab}{(1+a)(1+b)ab} \geq 3.$$

*Đẳng thức xảy ra khi nào?*

***Lời giải.*** Gọi biểu thức vế trái của bất đẳng thức phải chứng minh là $P$.

Tổng hai số hạng sau của $P$ là (lưu ý $a^2b^2 + 1 \geq 2ab$):

$$\left(\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b}\right)ab + \frac{a+b+2ab}{(1+a)(1+b)ab}$$

$$= \frac{(2+a+b)a^2b^2 + a+b+2ab}{(1+a)(1+b)ab}$$

$$= \frac{(a+b)(a^2b^2+1) + 2ab(ab+1)}{(1+a)(1+b)ab}$$

$$\geq \frac{2ab(a+b) + 2ab(ab+1)}{(1+a)(1+b)ab} = \frac{2ab(1+a)(1+b)}{(1+a)(1+b)ab} = 2.$$

Như vậy nếu $\frac{a+b}{1+ab} \geq 1$ thì $P \geq 3$, bất đẳng thức được chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a^2b^2 = 1 \\ a+b = 1+ab \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 1.$$

Ta xét trường hợp $\frac{a+b}{1+ab} < 1 \Leftrightarrow a+b < 1+ab$

$\Leftrightarrow (1+a)(1+b) < 2(1+ab)$.

Khi đó

$$P = \frac{a+b}{1+ab} + \frac{(2+a+b)ab}{(1+a)(1+b)} + \frac{a+b+2ab}{(1+a)(1+b)ab}$$

$$> \frac{a+b}{1+ab} + \frac{(2+a+b)ab}{2(1+ab)} + \frac{a+b+2ab}{2(1+ab)ab}$$

$$= \frac{2ab(a+b) + (a+b)a^2b^2 + (a+b) + 2ab(1+ab)}{2(1+ab)ab}$$

$$= \frac{(a+b)(ab+1)^2}{2(1+ab)ab} + 1 = \frac{(a+b)(ab+1)}{2ab} + 1$$

$$> \frac{(a+b)^2}{2ab} + 1 \geq 3 \text{ (lưu ý } (a+b)^2 \geq 4ab \text{)}.$$

Trong trường hợp này ta có $P > 3$.

Như vậy trong mọi trường hợp ta có $P \geq 3$.

Bất đẳng thức trong đầu bài được chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1$. □

➤***Nhận xét.*** Đây là bài toán hay và khó nên ít bạn gửi bài giải. Về kiến thức chỉ sử dụng các bất đẳng thức quen thuộc, đơn giản như $a^2b^2 + 1 \geq 2ab$; $(a+b)^2 \geq 4ab$. Tuy nhiên cái khó phải biết cách biến đổi biểu thức một cách thích hợp. Các bạn sau đây có bài giải tốt: **Nghệ An:** *Trần Anh Quốc*, 9A, THCS Đặng Thai Mai, TP Vinh; **Phú Thọ:** *Triệu Quang Mạnh*, 9A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Hà Nội:** *Nguyễn Đặng Nhật Minh*, 8C2, THCS Archimedes Academy.

**NGUYỄN ANH DŨNG**

**Bài T6/472.** *Giải phương trình*

$$\sqrt[3]{2x^3+6} = x + \sqrt{x^2-3x+3} \quad (1)$$

***Lời giải.*** (Của bạn *Trương Nhật Nguyên Bảo*, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Quảng Nam**).

Ta có: (1) $\Leftrightarrow \sqrt[3]{2x^3+6} - 2x = \sqrt{x^2-3x+3} - x$

$$\Leftrightarrow \frac{6-6x^3}{(\sqrt[3]{2x^3+6})^2 + 2x\sqrt[3]{2x^3+6} + 4x^2} = \frac{3-3x}{\sqrt{x^2-3x+3}+x}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 1-x=0 & (2) \\ \dfrac{2(1+x+x^2)}{(\sqrt[3]{2x^3+6})^2 + 2x\sqrt[3]{2x^3+6} + 4x^2} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-3x+3}+x} & (3) \end{array}\right.$$

• (2) $\Leftrightarrow x=1$: là nghiệm của PT(1).

• (3) $\Leftrightarrow 2\left(1+x+x^2\right)\left(\sqrt{x^2-3x+3}+x\right)$

$$=\left(\sqrt[3]{2x^3+6}\right)^2+2x\sqrt[3]{2x^3+6}+4x^2$$

$$\Leftrightarrow 2(1+x+x^2)\sqrt[3]{2x^3+6}$$
$$=(\sqrt[3]{2x^3+6})^2+2x\sqrt[3]{2x^3+6}+4x^2$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{2x^3+6}-2\right)\left(\sqrt[3]{2x^3+6}-2x^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\sqrt[3]{2x^3+6}-2=0 & (4)\\ \sqrt[3]{2x^3+6}-2x^2=0 & (5)\end{array}\right.$$

• (4) $\Leftrightarrow \sqrt[3]{2x^3+6}=2 \Leftrightarrow 2x^3+6=8 \Leftrightarrow x=1$.

• (5) $\Leftrightarrow \sqrt[3]{2x^3+6}=2x^2 \Leftrightarrow 2x^3+6=8x^6$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3=1\\ x^3=-\dfrac{3}{4}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}}\end{array}\right..$$

Thử lại ta thấy $x=1$ và $x=-\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}}$ đều là nghiệm của (1). Vậy PT(1) có hai nghiệm là: $x=1$ và $x=-\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}}$. ❒

➢***Nhận xét.*** Đa số các bạn giải theo cách trên hoặc theo cách đặt ẩn phụ. Lời giải của một số bạn còn dài. Ngoài bạn *Bảo*, các bạn sau có lời giải ngắn gọn: **Lào Cai:** *Nguyễn Thị Minh Ngọc*, 10 Toán, THPT chuyên Lào Cai. **Phú Thọ:** *Trần Quốc Lập*, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương, Việt Trì. **Hưng Yên:** *Dương Thành Đạt*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; *Nguyễn Huy Hoàng*, 10A3, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang. **Ninh Bình:** *Vũ Hoàng Long*, 10 Toán, THPT chuyên Lương Văn Tụy. **Thanh Hóa:** *Lê Anh Đức*, *Đặng Quang Anh*, 10 Toán, THPT chuyên Lam Sơn; *Lê Tiến Đạt*, 10 A1, THPT Nông Cống I; *Nguyễn Danh Thắng*, *Nguyễn Bá Tuân*, 11A5, THPT Lương Đắc Bằng, Hoằng Hóa. **Nghệ An:** *Trần Tiến Mạnh*, 11A1, THPT chuyên Đại học Vinh. **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Công Phú*, 10 Toán 1, THPT chuyên Quốc Học Huế. **Quảng Nam:** *Nguyễn Lê Thanh Hằng*, 10/1; THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm. **Bến Tre:** *Trịnh Mai Trường Thịnh*, 11 Toán, THPT chuyên Bến Tre. **Bình Phước:** *Lưu Trí Cường*, 10T4, THPT chuyên Bình Long, TX. Bình Long. **Vĩnh Long:** *Trần Minh Quân*, 12T1 ; *Trần Lĩnh*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, TP. Vĩnh Long. **Kon Tum:** *Nguyễn Ngọc Khánh Như*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, TP. Kon Tum;

**TRẦN HỮU NAM**

**Bài T7/472.** *Tìm nghiệm nguyên của bất phương trình* $x^6-2x^3-6x^2-6x-17<0$ (1)

***Lời giải.*** (Theo đa số các bạn) ta có

(1) $\Leftrightarrow x^6<2(x+1)^3+15$ (2)

Khi $x\le -3$ thì $2(x+1)^3+15\le -1<0$ nên từ (2) suy ra $x\ge -2$ (*)

Mặt khác, khi $x\ge 3$ thì từ

$$x^6\ge 27x^3=2x^3+6x^3+6x^3+13x^3$$
$$>2x^3+6x^2+6x+17$$

suy ra $x^6-2x^3-6x^2-6x-17>0$.

Vậy nên $x\le 2$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra $x\in\{-2,-1,0,1,2\}$.

Thử vào (1), ta thu được nghiệm $x\in\{-1,0,1,2\}$.

➢***Nhận xét.*** Đây là dạng toán cơ bản nên có nhiều bạn đã gửi bài giải về Tòa soạn và giải theo cách trình bày ở trên và nhiều cách nữa như sử dụng đạo hàm hoặc xây dựng các đồng nhất thức khác nhau đối với biểu thức ở vế trái của (1).

Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Hà Nam:** *Lê Phương Nam*, 11T, THPT chuyên Biên Hòa; **Hà Nội:** *Nguyễn Văn Dũng*, 11A14, THPT Ngọc Tảo, Phúc Thọ, **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Quang Hùng*, 11A1, THPT Cù Huy Cận; **Hưng Yên:** *Dương Thành Đạo*, 10T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Kon Tum:** *Nguyễn Ngọc Khánh Như*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Long An:** *Nguyễn Thị Ngân Trúc*, 11T1, THPT chuyên Long An; **Nghệ An:** *Bạch Quang Hiệu*, 11A1, THPT Cửa Lò, *Trần Tiến Mạnh*, 11A1, *Bùi Thái Cường*, 12A1, THPT chuyên ĐH Vinh; **Phú Thọ:** *Trần Quốc Lập*, *Hoàng Lê Công Khôi*, 10T, THPT chuyên Hùng Vương; **Quảng Nam:** *Nguyễn Huy Hải*, *Trương Nhật Nguyên Bảo*, 11/1, *Trần Văn Tình*, 10/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Quảng Trị:** *Võ Thục Khánh Huyền*, 10T, *Nguyễn Thị Phương Linh*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Thanh Hóa:** *Đặng Quang Anh*, 10T, THPT chuyên Lam Sơn, *Lê Tiến Đạt*, 10A1, THPT Nông Cống I, *Nguyễn Bá Tuân*, *Nguyễn Danh Thắng*, *Nguyễn Khải Hưng*, 11A5, THPT Lương Đắc Bằng, Hoằng Hóa; **Tây Ninh:** *Lê Hiền Khải*, 11T, THPT chuyên Hoàng Lê Kha; **Thừa Thiên**

**Huế:** *Nguyễn Thị Trúc Ly*, 11 Hóa 2, *Lê Cẩm Huyên*, 11 Lý, *Lê Cẩm Thanh Hà*, 11T2, *Lê Viết Thanh Long*, *Nguyễn Thị Phương Ly*, *Nguyễn Thị Phương Nhi*, *Cao Thị Linh*, 11T1, THPT chuyên Quốc Học Huế. **Tiền Giang:** *Lê Hoàng Bảo*, 11T, THPT chuyên Tiền Giang; **Vĩnh Long:** *Phan Gia Anh*, 12T1, *Trần Phan Thái Anh*, 10T1, *Châu Minh Khánh*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Vĩnh Phúc:** *Kim Thị Hồng Lĩnh*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Nam Định:** *Nguyễn Thanh Huyền*, 11T2, *Vũ Thị Diệp*, 11T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Quảng Bình:** *Lê Hoàng Long*, 11T, *Lê Đình Hải*, 10T, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Sóc Trăng:** *Lê Long Quốc*, 12A1T, *Nguyễn Đức Thịnh*, 10A2T, THPT Nguyễn Thị Minh Khai.

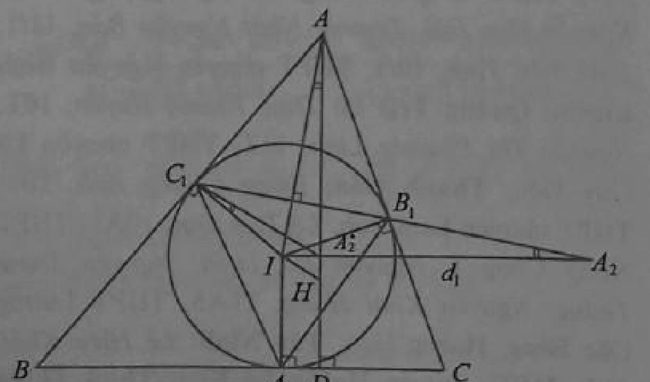
**NGUYỄN VĂN MẬU**

**Bài T8/472.** *Cho tam giác ABC không cân có I là tâm đường tròn nội tiếp và H là trực tâm. Đường tròn (I) tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại $A_1, B_1, C_1$. Đường thẳng $d_1$ đi qua I, song song với BC cắt đường thẳng $B_1C_1$ tại $A_2$. Tương tự ta có $B_2, C_2$. Chứng minh các điểm $A_2, B_2, C_2$ thẳng hàng và đường thẳng qua $A_2, B_2, C_2$ vuông góc với IH.*

***Lời giải.*** Kẻ các đường cao *AD, BE, CF* của $\Delta ABC$. Gọi $A_2^*, B_2^*, C_2^*$ theo thứ tự là giao điểm của $d_1$ với *AD*, $d_2$ với *BE*, $d_3$ với *CF* ($d_2, d_3$ được xác định tương tự như $d_1$). Ta thấy

$\widehat{IC_1A_2^*} = \widehat{IAA_2^*} = \widehat{IA_2C_1} \Rightarrow \Delta IC_1A_2^* \backsim \Delta IA_2C_1$ (g.g)

$\Rightarrow IC_1^2 = IA_2^*.IA_2$. Xét phép nghịch đảo *f* cực *I*, phương tích $k = r^2$ (*r* là bán kính đường tròn (*I*)) (Kí hiệu $f(I; k = r^2)$).




Khi đó $f(I; k = r^2): A_2^* \mapsto A_2$

$$B_2^* \mapsto B_2$$

$$C_2^* \mapsto C_2$$

Dễ thấy $A_2^*, B_2^*, C_2^*$ cùng thuộc đường tròn đường kính *IH*, suy ra đường tròn (ω) ngoại tiếp $\Delta A_2^*B_2^*C_2^*$ đi qua *I*. Từ đó theo tính chất phép nghịch đảo ta thấy $A_2, B_2, C_2$ cùng nằm trên đường thẳng Δ, ảnh của đường tròn (ω) qua phép nghịch đảo $f(I; k = r^2)$. Vì tâm của (ω) thuộc *IH*, nên $IH \perp \Delta$ (đpcm). ❒

➤***Nhận xét.*** 1) Ngoài cách giải trên, nhiều bạn xét cực - đối cực đối với đường tròn (I), sử dụng *định lý La Hire* chỉ ra *AD, BE, CF* lần lượt các đường đối cực của các điểm $A_2, B_2, C_2$ cũng đi đến điều cần chứng minh.

2) Các bạn sau có lời giải đúng và gọn: **Hà Nội:** *Nguyễn Văn Dũng*, 11A14, THPT Ngọc Tảo, Phúc Thọ; **Bắc Giang:** *Chu Thị Ngân*, 10 Toán, THPT chuyên Bắc Giang; **Vĩnh Phúc:** *Đỗ Trung Phương*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Thanh Hóa:** *Đặng Quang Anh*, 10T, THPT chuyên Lam Sơn, *Nguyễn Bá Tuân*, 11A5, THPT Lương Đắc Bằng, Hoằng Hóa; **Nghệ An:** *Trần Tiến Mạnh*, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh, TP. Vinh; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Minh Hải*, *Lê Viết Thanh Long*, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc Học Huế, TP. Huế; **Quảng Nam:** *Trương Nhật Nguyên Bảo*, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Kon Tum:** *Nguyễn Ngọc Khánh Như*, 10T0, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Vĩnh Long:** *Châu Minh Khánh*, 11T1, *Phan Gia Anh*, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, TP. Vĩnh Long.

**HỒ QUANG VINH**

**Bài T9/472.** *Cho phương trình*

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

*có các hệ số thỏa mãn các điều kiện*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 0, \sum_{i=1}^{n-1}(n-i)a_i = 2-n,$$

$$\sum_{i=1}^{n-2}(n-i)(n-i-1)a_i = 3-n(n-1).$$

*Giả sử $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là n nghiệm của phương trình. Hãy tính giá trị của các biểu thức:*

a) $E=\sum_{1\le i<j\le n}\frac{1}{(1-x_i)(1-x_j)}$.

b) $F=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1-x_i)^2}$.

***Lời giải.*** Đặt

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n.$$

Theo Định lí khai triển của một đa thức theo các nghiệm ta có

$$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n).$$

Do đó $f'(x)=\sum_{i=1}^{n}(x-x_1)\ldots\widehat{(x-x_i)}\ldots(x-x_n)$

(không có $x-x_i$),

$$f''(x)=2\sum_{1\le i<j\le n}(x-x_1)\ldots\widehat{(x-x_i)}\ldots\widehat{(x-x_j)}\ldots(x-x_n).$$

Suy ra nếu $x\notin\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ thì

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-x_i},\frac{f''(x)}{f(x)}=2\sum_{1\le i<j\le n}\frac{1}{(x-x_i)(x-x_j)}.$$

Từ giả thiết ta có $f(1)=1, f'(1)=2, f''(1)=3$.

Bởi vậy $1\notin\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$, $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-x_i}=\frac{f'(1)}{f(1)}=2$,

$2\sum_{1\le i<j\le n}\frac{1}{(1-x_i)(1-x_j)}=\frac{f''(1)}{f(1)}=3$. Do đó

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1-x_i)^2}=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-x_i}\right)^2-2\sum_{i<j}\frac{1}{(1-x_i)(1-x_j)}=2^2-3=1.$$

Như vậy $E=\sum_{1\le i<j\le n}\frac{1}{(1-x_i)(1-x_j)}=\frac{3}{2}$,

$$F=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1-x_i)^2}=1.\ \square$$

➤***Nhận xét.*** Bài toán trên là bài toán cơ bản, đơn giản của việc áp dụng đạo hàm trong đa thức. Các bạn học sinh sau có lời giải đúng: **Hà Nội:** *Nguyễn Văn Dũng*, 11A14, THPT Ngọc Tảo, Phúc Thọ; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Bá Tuấn*, 11A5, THPT Lương Đắc Bằng, Hoằng Hóa; **Thừa Thiên Huế:** *Phan Cảnh Minh Phước*, 11T2, THPT chuyên Quốc Học Huế, TP. Huế; **Vĩnh Long:** *Phan Gia Anh*, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, TP. Vĩnh Long.

**NGUYỄN MINH ĐỨC**

**Bài T10/472.** *Có 20 viên sỏi được xếp thành ba đống. Mỗi lần thực hiện cho phép lấy một nửa số viên sỏi từ đống sỏi có chẵn viên sỏi và chuyển sang đống khác. Chứng minh rằng, dù ban đầu các đống sỏi được xếp thế nào, sau một số hữu hạn bước thực hiện như thế, ta có thể tạo ra một đống sỏi có đúng 10 viên sỏi.*

***Lời giải.*** Ta ký hiệu số sỏi của ba đống sỏi là $(m,n,p)$. Do tổng số sỏi là 20 là số chẵn cho nên phải có ít nhất 1 trong 3 số $m, n, p$ là số chẵn. Bây giờ ta chứng minh có cách thực hiện sao cho ta thu được một cấu hình $(2x,x,y)$. Thật vậy, do luôn có một đống có chẵn số sỏi, cho nên ta có thể xét 2 đống sỏi $(2m,n)$. Ta chứng tỏ còn khi nào $m\neq n$ thì ta còn có thể thực hiện chuyển sỏi để thu được 2 đống $(2m',n')$ với $2m'+n'<2m+n$ hoặc $2m'+n'=2m+n$ nhưng với hiệu $|m'-n'|<|m-n|$. Thực vậy, xét 2 trường hợp:

1) Trường hợp $m$ hoặc $n$ chẵn. Trong trường hợp này, ta chuyển $m$ viên sỏi từ đống $2m$ viên sang đống thứ ba và thu được hai đống $(m,n)$ với một đống chẵn và tổng số sỏi của chúng giảm đi.

2) Trường hợp cả $m$ và $n$ đều lẻ. Ta chuyển $m$ viên sỏi sang đống $n$ viên để thu được 2 đống $(m,m+n)$. Tổng số sỏi 2 đống vẫn không đổi, nhưng $\left|\frac{m+n}{2}-m\right|=\left|\frac{m-n}{2}\right|<|m-n|$.

Quá trình chuyển như vậy không thể kéo dài vô hạn được, cho nên lúc nào đó ta phải thu được ba đống sỏi có dạng là $(2x, x, y)$. Khi đó $3x+y=20$. Bằng cách chuyển $x$ viên sỏi từ đống $2x$ viên sang đống thứ 3, ta được $(x,x,x+y)$ với $x+y$ chẵn, và sau đó khi chuyển nửa số sỏi ở đống thứ ba sang đống thứ hai, ta có ba đống là $\left(x,x+\frac{x+y}{2},\frac{x+y}{2}\right)$ với $x+\frac{x+y}{2}=10$. $\square$

➤***Nhận xét.*** Bài này nhiều bạn gửi lời giải nhưng đa phần giải chưa tốt và nhiều bạn phải đưa về duyệt các trường hợp cụ thể là điều không làm được với bài toán tổng quát. Chỉ có hai bạn sau đây giải tổng quát và đúng: **Quảng Nam:** *Trương Nhật Nguyên Bảo*, 11/1 THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Thanh Hóa:** *Đặng Quang Anh*, 10T THPT chuyên Lam Sơn.

**VŨ ĐÌNH HÒA**

**Bài T11/472.** *Với mỗi số nguyên dương t, ta ký hiệu $\varphi(t)$ là số các số nguyên dương không vượt quá t và nguyên tố cùng nhau với t. Cho n, k là các số nguyên dương và p là số nguyên tố lẻ. Chứng minh tồn tại số nguyên dương a sao cho $p^k$ là ước của tất cả các số $\varphi(a), \varphi(a+1), ..., \varphi(a+n)$.*

***Lời giải.*** Ta có bổ đề sau:

**Bổ đề 1.** Cho $x_0, k \in \mathbb{Z}$ với $k \geq 1$ và $p$ là số nguyên tố với $x_0 \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$. Xét đa thức

$$F(x) = 1 + x^{p^{k-1}} + x^{2p^{k-1}} + ... + x^{(p-1)p^{k-1}} \quad (1)$$

Giả sử $q$ là số nguyên tố sao cho $q|F(x_0)$. Khi đó $q \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p^k)$.

*Chứng minh*: Ta có $F(x_0)|x^{p^k} - 1$, do đó $q|x_0^{p^k} - 1 \Leftrightarrow x_0^{p^k} \equiv 1\ (\mathrm{mod}\, q)$.

Gọi $h = \mathrm{ord}_q(x)$. Suy ra $h|p^k \Rightarrow h = p^\gamma, \gamma \leq k$.

Nếu $\gamma < k \Rightarrow p^\gamma | p^{k-1} \Rightarrow x_0^{p^{k-1}} \equiv 1\ (\mathrm{mod}\, q) \quad (2)$

$\Rightarrow F(x) \equiv p (\mathrm{mod}\, q)$. Mà $F(x_0) \equiv 0\ (\mathrm{mod}\, q)$ suy ra $p = q$. Do (2) $\Rightarrow x_0^{p^{k-1}} \equiv 1\ (\mathrm{mod}\, p) \quad (3)$

Theo định lý Fermat $x_0^p \equiv x_0\ (\mathrm{mod}\, p)$

$\Rightarrow x_0^{p^{k-1}} \equiv x_0 (\mathrm{mod}\, p)$. Do (3) $\Rightarrow x_0 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$ trái giả thiết. Mâu thuẫn này chứng tỏ $\gamma = k$ tức là $h = p^k$. Mặt khác do $q|F(x_0)$ nên $(x_0, q) = 1$.

Theo định lý Fermat $x_0^{q-1} \equiv 1\ (\mathrm{mod}\, q)$.

Vậy $q - 1 \vdots h = p^k$ hay $q \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p^k)$.

**Bổ đề 2.** Có vô số số nguyên tố có dạng $p^k t + 1$.

*Chứng minh*: Phản chứng. Giả sử có hữu hạn số nguyên tố dạng $p^k t + 1$ là $q_1, q_2, ..., q_m$. Xét số $x_0 = q_1 ... q_m + 1$. Do $q_i \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$ $(i = 1, 2, ..., m)$ nên $x_0 \equiv 2 (\mathrm{mod}\, p) \Rightarrow x_0 \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$.

Gọi $q$ là ước nguyên tố của $F(x_0)$, ở đây $F(x)$ là đa thức (1). Theo bổ đề 1, $q \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p^k)$. Vậy tồn tại $i \in \{1, 2, ..., m\}$ để $q = q_i$. Suy ra $x_0 \equiv 1\ (\mathrm{mod}\, q) \Rightarrow F(x) \equiv p (\mathrm{mod}\, q) \Rightarrow q = p$.

Mâu thuẫn.

Trở lại bài toán. Lấy $q_0, q_1, ..., q_n$ là các số nguyên tố phân biệt với $q_i \equiv 1\ (\mathrm{mod}\, p^k)$ (ta lấy được như vậy là do bổ đề 2). Theo định lý Trung Hoa tồn tại $a \in \mathbb{N}^*$ sao cho $a \equiv i\ (\mathrm{mod}\, q_i)$ $\forall i = 0, 1, ..., n$.

Tức là $a + i \equiv 0\ (\mathrm{mod}\, q_i), \forall i = 0, 1, ..., n \quad (4)$

Chú ý rằng từ công thức $\varphi(n) = \prod_{p_i|n} p_i^{\alpha_i - 1}(p_i - 1)$, ta suy ra $p - 1|\varphi(n)$ nếu $p|n$. Vậy từ (4) suy ra $q_i - 1|\varphi(a+i)$. Do $q_i \equiv 1\ (\mathrm{mod}\, p^k), \forall i = 0, 1, ..., n$ nên $\varphi(a+i) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p^k), \forall i = 0, 1, ..., n$. ❒

➤***Nhận xét.*** 1) Đây là bài toán khó nên chỉ có hai bạn tham giải, nhưng lời giải của hai bạn chưa hoàn chỉnh dù đi theo hướng đúng.

2) Bổ đề 2 là một trường hợp riêng của Định lý *Dirichlet*: " Có vô số số nguyên tố dạng $a' + b$ trong đó $(a, b) = 1$. Tuy nhiên Định lý *Dirichlet* hiện chưa có cách chứng minh bằng phương pháp toán sơ cấp".

**ĐẶNG HÙNG THẮNG**

**Bài T12/472.** *Cho tam giác nhọn ABC có AD, BE, CF là các đường cao. Các đường tròn đường kính AB, AC theo thứ tự cắt các tia DF, DE tại Q và P. N là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF. Chứng minh rằng:*

*1) $AN \perp PQ$.*

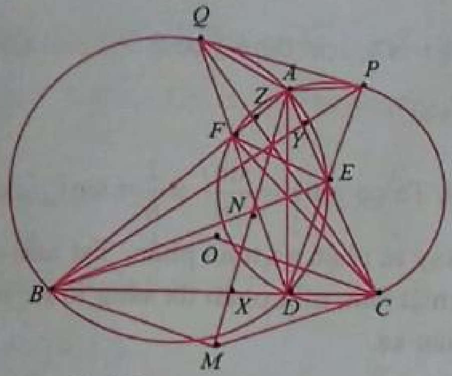
*2) AN, BP, CQ đồng quy.*

***Lời giải.*** Ta cần có một bổ đề.

**Bổ đề.** Cho tam giác $ABC$, $O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp, $N$ là tâm đường tròn Euler, $M$ là điểm đối xứng của $O$ qua $BC$. Khi đó $N$ là trung điểm của $AM$.

Phép chứng minh bổ đề trên rất quen thuộc, không trình bày ở đây.

Trở lại giải bài toán.




1) Gọi $R_N$ là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\Delta DEF$. Dễ thấy.

$$NP^2 - NQ^2 = \left(NP^2 - R_N^2\right) - \left(NQ^2 - R_N^2\right)$$
$$= \overline{PE}.\overline{PD} - \overline{QF}.\overline{QD}$$
$$= \overline{PE}\left(\overline{PE} + \overline{ED}\right) - \overline{QF}.\left(\overline{QF} + \overline{FD}\right) = -\overline{EP}.\overline{ED} + \overline{FD}.\overline{FQ}$$

(vì $PE = EF = QF$)

$$= -\overline{EA}.\overline{EC} + \overline{FA}.\overline{FB} = -\overline{EA}\left(\overline{EA} + \overline{AC}\right) + \overline{FA}\left(\overline{FA} + \overline{AB}\right)$$

$$= -\overline{EA}^2 + \overline{FA}^2$$ (vì tứ giác $BCEF$ nội tiếp)

$$= \overline{PA}^2 - \overline{QA}^2$$ (vì $EA = QA$; $FA = PA$)

Do đó $AN \perp PQ$.

2) Kí hiệu $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ theo thứ tự là số đo của các góc $\widehat{BAC}, \widehat{CBA}, \widehat{ACB}$. Gọi $X$, $Y$, $Z$ theo thứ tự là giao điểm của $AN$, $BP$, $CQ$ với $BC$, $CA$, $AB$; $M$ là điểm đối xứng của $A$ qua $N$. Theo bổ đề trên $M$ và $O$ đối xứng nhau qua $BC$, suy ra $\widehat{BMC} = \widehat{BOC} = 2\widehat{A}$. Từ đó, chú ý rằng $Q$, $P$ theo thứ tự là điểm đối xứng của $E$, $F$ qua $AB$, $CA$, suy ra $\widehat{ABM} = \widehat{B} + 90° - \widehat{A} = \widehat{CBQ}$;

$\widehat{ACM} = \widehat{C} + 90° - \widehat{A} = \widehat{BCP}$;

$\widehat{BAP} = 2\widehat{A} = \widehat{CAQ}$; $BM = CM$;

$AP = AF$; $AQ = AE$; $CP = CF$; $BQ = BE$.

Vậy, chú ý rằng $X$ thuộc $AM$ và các tam giác $ABE$, $ACF$ đồng dạng, ta có

$$\frac{XB}{XC}.\frac{YC}{YA}.\frac{ZA}{ZB} = \frac{S_{ABM}}{S_{ACM}}.\frac{S_{BCP}}{S_{BAP}}.\frac{S_{CAQ}}{S_{CBQ}}$$

$$= \frac{BA.BM\sin\widehat{ABM}}{CA.CM\sin\widehat{ACM}}.\frac{CB.CP\sin\widehat{BCP}}{AB.AP\sin\widehat{BAP}}.\frac{AC.AQ\sin\widehat{CAQ}}{BC.BQ\sin\widehat{CBQ}}$$

$$= \frac{CF}{AF}.\frac{AE}{BE}.\frac{\sin\widehat{ABM}}{\sin\widehat{CBQ}}.\frac{\sin\widehat{BCP}}{\sin\widehat{ACM}}.\frac{\sin\widehat{CAQ}}{\sin\widehat{BAP}} = 1.$$

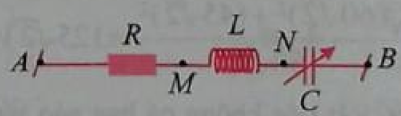
Theo định lí Ceva, $AN$, $BP$, $CQ$ đồng quy. ❐

➢***Nhận xét.*** Bài toán này không khó nhưng chỉ có 7 bạn tham gia giải, nhiều lời giải quá dài, nhiều lời giải trình bày quá tối. Tuy nhiên vẫn nêu tên cả 7 bạn: **Sơn La:** *Trần Hoàng Đạt*, 11A1, THPT Mộc Lỵ, Mộc Châu; **Thanh Hóa:** *Đặng Quang Anh*, 10T, THPT chuyên Lam Sơn, TP Thanh Hóa, *Nguyễn Danh Thắng*, *Nguyễn Bá Tuân*, 11A5, THPT Lương Đắc Bằng, Hoằng Hóa; **Nghệ An:** *Trần Mạnh Tiến*, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh, TP. Vinh; **Hà Tĩnh:** *Trần Hậu Đức Thắng*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh, TP Hà Tĩnh; **Thừa Thiên - Huế:** *Lê Viết Thanh Long*, 11T1, THPT chuyên Quốc Học Huế.

**NGUYỄN MINH HÀ**

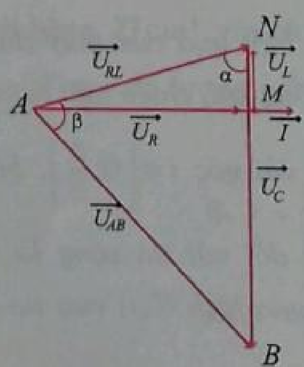
**Bài L1/472.** *Đặt một điện áp xoay chiều ổn định $u = U_0\cos(\omega t)$ (V) ($U_0$ và $\omega$ không đổi) vào hai đầu đoạn mạch gồm điện trở thuần $R = 150\ \Omega$, cuộn cảm thuần có độ tự cảm $L$ và tụ điện có điện dung $C$ thay đổi được. Điều chỉnh điện dung $C$ của tụ điện sao cho điện áp hiệu dụng của tụ điện đạt giá trị cực đại. Khi đó, điện áp cực đại của điện trở là 120 V; tại thời điểm $t$, điện áp tức thời hai đầu mạch là 160 V và hai đầu tụ điện là 70 V. Xác định dung kháng của tụ điện.*

***Lời giải.*** Giả sử mạch điện có dạng như hình dưới.




Biểu diễn vectơ: $\overrightarrow{U_{AB}} = \overrightarrow{U_R} + \overrightarrow{U_L} + \overrightarrow{U_C}$.

Theo giản đồ vectơ:



Xét $\Delta ANB$, theo định lí hàm số sin ta có:

$$\frac{AB}{\sin\alpha}=\frac{NB}{\sin\beta}\Leftrightarrow\frac{U}{\sin\alpha}=\frac{U_C}{\sin\beta}\Rightarrow U_C=\frac{U}{\sin\alpha}\sin\beta.$$

Theo bài ra: $\sin\alpha=\frac{U_R}{\sqrt{U_R^2+U_L^2}}$ và $U_0$ không đổi

$\Rightarrow U_{C\max}$ khi $\sin\beta=1\Rightarrow\beta=90^\circ$. Tam giác $ANB$ vuông tại $A\Rightarrow\frac{1}{U_R^2}=\frac{1}{U_{RL}^2}+\frac{1}{U^2}$ (1)

Mặt khác: $u\perp u_{RL}\Rightarrow\frac{u_{RL}^2}{U_{RL}^2}+\frac{u^2}{U^2}=2$ (2)

Theo bài ra: $u=160$ V; $u_C=70$ V và

$$u=u_{RL}+u_C\Rightarrow u_{RL}=90\text{ V}.$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow\frac{u_{RL}^2}{U_{RL}^2}+u^2\left(\frac{1}{U_R^2}-\frac{1}{U_{RL}^2}\right)=2$

$$\Leftrightarrow\frac{u_{RL}^2}{U_{RL}^2}-\frac{u^2}{U_{RL}^2}=2-\frac{u^2}{U_R^2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{U_{RL}^2}\left(90^2-160^2\right)=2-\frac{160^2}{(60\sqrt{2})^2}=-\frac{14}{9}$$

$$\Rightarrow\quad U_{RL}=75\sqrt{2}\,V\Rightarrow U=\frac{U_{RL}.U_R}{\sqrt{U_{RL}^2-U_R^2}}=100\sqrt{2}\,V$$

và $U_L=\sqrt{U_{RL}^2-U_R^2}=\sqrt{(75\sqrt{2})^2-(60\sqrt{2})^2}=45\sqrt{2}\,V$

$$\Rightarrow U_{C\max}=U\frac{\sqrt{U_R^2+U_L^2}}{U_R}$$

$$=100\sqrt{2}\frac{\sqrt{(60\sqrt{2})^2+(45\sqrt{2})^2}}{60\sqrt{2}}=125\sqrt{2}\,V.\ \square$$

➢***Nhận xét.*** Rất tiếc không có bạn nào gửi bài giải cho đề ra kì này.

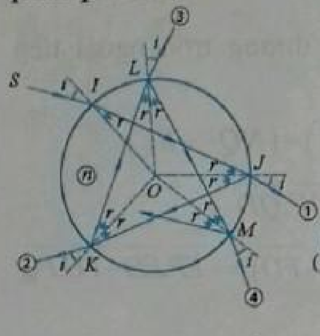
**ĐINH THỊ THÁI QUỲNH**

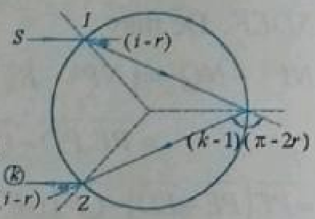
**Bài L2/472.** *Một quả cầu thủy tinh trong suốt đặt trong không khí, chiếu một tia sáng đơn sắc đến mặt cầu với góc $i\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$, biết chiết suất của quả cầu đối với tia sáng là $n>n_{kk}=1$.*

*a) Xác định góc lệch $\delta^k(i)$ của tia tới và tia ló thứ $k$ ($k\geq 1$).*

*b) Với $n=\sqrt{3}$, xác định $i$ để $\delta^{10}(i)$ cực tiểu, xác định $\delta^{10}{}_{\min}(i)$.*

***Lời giải.*** Ta có $\sin r=\frac{\sin i}{n}\leq\frac{1}{n}=\sin i_{gh}$, do đó không xảy ra phản xạ toàn phần. Tại mỗi điểm tới trên mặt cầu, một phần tia sáng ló ra, một phần phản xạ.




a) Căn cứ vào sơ đồ truyền sáng, ta có:

$$\delta^k(i)=(i-r)+(k-1)(\pi-2r)+(i-r)$$
$$=(k-1)\pi+2i-2kr$$

$$\Rightarrow\delta^k(i)=(k-1)\pi+2i-2k\times\arcsin\left(\frac{\sin i}{n}\right)$$

$$=\left[\begin{array}{l}2i-2k\times\arcsin\left(\frac{\sin i}{n}\right),\ k=2a+1\ (a\geq 0)\\ \pi+2i-2k\times\arcsin\left(\frac{\sin i}{n}\right),\ k=2b\ (b\geq 1)\end{array}\right.$$

b) Ta có: $\delta^{10}(i)=\pi+2i-20r$

$$\Rightarrow\delta^{10}(i)'=2-20r'(i).$$

Điều kiện cực trị: $\delta^{10}(i)'=0\Rightarrow r'(i)=\frac{1}{10}$ (1)

$$\sin r=\frac{1}{n}\sin i\Rightarrow\cos r\times r'(i)=\frac{\cos i}{n}$$

$$\Rightarrow r'(i)=\frac{\cos i}{n\cos r}=\frac{\cos i}{\sqrt{n^2-\sin^2 i}}=\frac{\cos i}{\sqrt{3-\sin^2 i}}\quad(2)$$

Từ (1) và (2), ta có: $\sin i=\sqrt{\frac{97}{99}}$

$$\Rightarrow i=\arcsin\left(\sqrt{\frac{97}{99}}\right)\approx 81^\circ 49'43.18''.$$

Dễ dàng kiểm tra được với giá trị của góc tới $i$ đó thì góc lệch $\delta^{10}$ cực tiểu. $\square$

➢***Nhận xét.*** Rất tiếc không có bạn nào gửi bài giải cho đề ra kì này.

**NGUYỄN XUÂN QUANG**

## PROBLEMS ... (*Tiếp theo trang 17*)

**Problem T8/476.** Given a triangle $ABC$. Show that

$$2(\sin A+\sin B+\sin C)\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right)$$
$$\le\frac{45}{4}+(\cos A+\cos B+\cos C)\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right).$$

**Problem T9/476.**

1) Find $\min\limits_{a,b}\left\{\max\limits_{-1\le x\le 1}\left|a.x^2+b.x+1\right|\right\}$.

2) Find $\min\limits_{a,b}\left\{\max\limits_{-1\le x\le 1}\left|a.x^2+x+b\right|\right\}$.

### TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

**Problem T10/476.** Given a natural number $a\ge 2$. Prove that there exists infinitely many natural numbers $n$ such that $a^n+1$ is divisible by $n$.

**Problem T11/476.** Let $a$ be a real number which is different from 0 and $-1$. Find all functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ such that

$$f(f(x)+ay)=(a^2+a)x+f(f(y)-x),\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

**Problem T12/476.** Given an acute triangle $ABC$ with $AB<AC$ and let $AD$, $BE$, and $CF$ be its altitude. Assume that $EF$ intersects $BC$ at $G$. Let $K$ be the perpendicular projection of $C$ on $AG$. Suppose that $AD$ intersects $CK$ at $H$ and $AC$ intersects $HF$ at $L$. Prove that $A$ is the incenter of the triangle $FKL$.

*Translated by* **NGUYEN PHU HOANG LAN**
*(College of Science-Vietnam National University, Hanoi)*

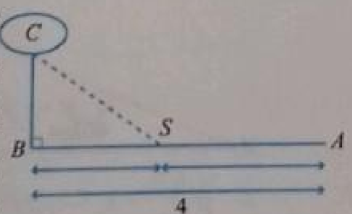
## CÁC BÀI TOÁN ... (*Tiếp theo trang 15*)

**7.** Thầy $A$ mua nhà nhưng thiếu tiền nên thầy $A$ đã vay ngân hàng 300 triệu. Ngân hàng đồng ý cho thầy vay với lãi xuất 6%/năm. Hỏi thầy muốn trả hết số tiền vay trong 5 năm thì thầy phải trả cho ngân hàng mỗi tháng bao nhiêu (làm tròn đến đơn vị nghìn đồng)?

**A.** 5.935.000 **B.** 5.550.000
**C.** 6.200.000 **D.** 5.320.000

**8.** Một đường dây điện được nối từ một nhà máy điện ở $A$ đến một hòn đảo ở $C$. Khoảng cách từ $C$ đến $B$ là 1 km.

Khoảng cách từ $B$ đến $A$ là 4 km. Mỗi km dây điện đặt dưới nước là mất 5000 USD, còn đặt dưới đất mất 3000 USD.




Hỏi điểm $S$ trên bờ cách $A$ bao nhiêu để khi mắc dây điện từ $A$ qua $S$ rồi đến $C$ là ít tốn kém nhất?

**A.** $\frac{15}{4}$ km **B.** $\frac{13}{4}$ km **C.** $\frac{10}{4}$ km **D.** $\frac{3}{4}$ km

**9.** Khi sản xuất vỏ hộp sữa bò hình trụ, các nhà sản xuất luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm vỏ hộp là ít nhất, tức là diện tích toàn phần của hình trụ là nhỏ nhất. Muốn thể tích khối trụ đó bằng $V$ và diện tích toàn phần của hình trụ đó là nhỏ nhất thì bán kính đáy bằng bao nhiêu?

**A.** $R=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ **B.** $R=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$

**C.** $R=\sqrt{\frac{V}{2\pi}}$ **D.** $R=\sqrt{\frac{V}{\pi}}$

**10.** Một công ty sản xuất một loại cốc giấy hình nón có thể tích bằng $27\,\text{cm}^3$ với chiều cao $h$ và bán kính đáy $r$. Tìm $r$ để lượng giấy tiêu thụ là ít nhất.

**A.** $r=\sqrt[4]{\frac{3^6}{2\pi^2}}$ **B.** $r=\sqrt[6]{\frac{3^8}{2\pi^2}}$

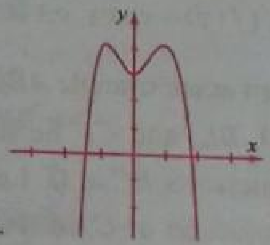
**C.** $r=\sqrt[4]{\frac{3^8}{2\pi^2}}$ **D.** $r=\sqrt[6]{\frac{3^6}{2\pi^2}}$

# THỬ SỨC TRƯỚC KÌ THI

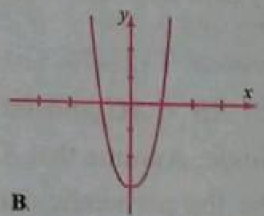
## ĐỀ SỐ 6

***(Thời gian làm bài: 90 phút)***

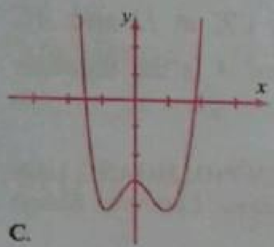
**Câu 1.** Trong các đồ thị dưới đây đồ thị nào là đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$?



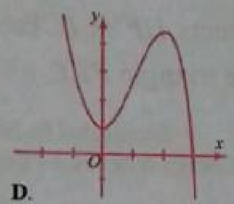

A.




B.




C.




D.

**Câu 2.** Kết luận nào sau đây về tính đơn điệu của hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ là đúng?

A. Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

B. Hàm số luôn nghịch biến trên $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

C. Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

D. Hàm số luôn đồng biến trên $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

**Câu 3.** GTLN của hàm số $y = x^3 - 3x + 5$ trên đoạn $[0;1]$ là

A. 5 B. 3 C. 1 D. 7

**Câu 4.** Cho hàm số $y = x^3 - 4x$. Số giao điểm của đồ thị hàm số và trục $Ox$ bằng

A. 0 B. 2 C. 3 D. 4

**Câu 5.** Hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ đồng biến trên:

A. $(2;+\infty)$ B. $(1;+\infty)$

C. $(-\infty;1)$ và $(3;+\infty)$ D. $(1;3)$

**Câu 6.** Số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số : $y = \dfrac{3x+1}{x^2-4}$ là:

A. 2 B. 1 C. 4 D. 3

**Câu 7.** Cho $(C)$: $y = x^3 + 3x^2 - 3$. Tiếp tuyến của $(C)$ song song với đường thẳng $9x - y + 24 = 0$ có phương trình là:

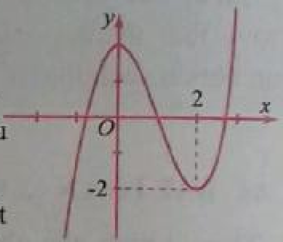
A. $y = 9x + 8$ B. $y = 9x - 8$; $y = 9x + 24$

C. $y = 9x - 8$ D. $y = 9x + 24$

**Câu 8.** Tìm $m$ để đồ thị hàm số: $y = x^4 - 2mx^2 + 2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 1.

A. $m = \sqrt[3]{3}$ B. $m = \sqrt{3}$ C. $m = 3\sqrt{3}$ D. $m = 1$

**Câu 9.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình bên. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?



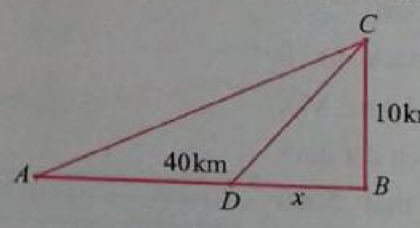

A. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 2$.

B. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 2.

C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng –2.

D. Hàm số có ba cực trị.

**Câu 10.** Một người cần đi từ khách sạn $A$ bên bờ biển đến hòn đảo $C$. Biết rằng khoảng cách từ đảo $C$ đến bờ biển là 10km, khoảng cách từ khách sạn $A$ đến điểm B trên bờ gần đảo $C$ là 40km. Người đó có thể đi đường thủy hoặc đi đường bộ rồi đi đường thủy (như hình vẽ dưới đây). Biết kinh phí đi đường thủy là 5 USD/km, đi đường bộ là 3 USD/km. Hỏi người đó phải đi đường bộ một khoảng bao nhiêu để kinh phí nhỏ nhất? ($AB = 40$km, $BC = 10$km).




A. $\dfrac{15}{2}km$ B. $\dfrac{65}{2}km$ C. $10km$ D. $40km$

**Câu 11.** Tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-2}{x+1}$ và đường thẳng $y = -2x$ là:

A. $(-2; -4)$ B. $(-\frac{1}{2}; 1)$

C. $(-2; -\frac{1}{2})$ D. $(-2; 4), (\frac{1}{2}; -1)$

Câu 12. Nghiệm của phương trình $2^{x-1} = \frac{1}{8}$ là

A. $x = 4$ B. $x = -2$ C. $x = 3$ D. $x = 2$

Câu 13. Đạo hàm của hàm số $y = \log_3 x$ là

A. $y' = \frac{1}{x\ln 3}$ B. $y' = \frac{1}{x}$

C. $y' = \frac{\ln 3}{x}$ D. $y' = x\ln 3$

Câu 14. Nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} < \frac{1}{27}$ là:

A. $x < 5$ B. $x > 5$ C. $x > -1$ D. $x < -1$

Câu 15. Tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{\log_2(-x^2 + 2x)}$ là

A. $D = (0;2)$ B. $D = [0;2]$

C. $D = [0;2] \setminus \{1\}$ D. $D = (0;2) \setminus \{1\}$

Câu 16. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ B. $y = \log_2(x-1)$

C. $y = \log_2(x^2 + 1)$ D. $y = \log_2(2^x + 1)$

Câu 17. Cho các số thực dương $a, b, c$ với $c \neq 1$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$

B. $\log_{c^2} \frac{b}{a^2} = \frac{1}{2}\log_c b - \log_c a$

C. $\log_c \frac{a}{b} = \frac{\ln a - \ln b}{\ln c}$

D. $\frac{1}{2}\log_c^2 \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \log_c b - \log_c a$

Câu 18. Đạo hàm của hàm số $y = \frac{\log_4 x}{x+2}$ là

A. $y' = \frac{1}{2x(x+2)^2\ln 2}(x + 2 - x\ln x)$

B. $y' = \frac{1}{2x(x+2)^2\ln 2}(x + 2 - \ln x)$

C. $y' = \frac{1}{x(x+2)^2\ln 2}(x + 2 - x\ln x)$

D. $y' = \frac{1}{2(x+2)^2\ln 2}(x + 2 - x\ln x)$

Câu 19. Đặt $\log_{12} 27 = a$. Hãy biểu diễn $\log_6 16$ theo $a$.

A. $\log_6 16 = \frac{4a - 12}{a + 3}$ B. $\log_6 16 = \frac{12 - 4a}{a + 3}$

C. $\log_6 16 = \frac{12 + 4a}{a + 3}$ D. $\log_6 16 = \frac{12 + 4a}{a - 3}$

Câu 20. Cho các số thực dương $a, b$ với $a \neq 1$ và $\log_a b > 0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\left[\begin{array}{l} 0 < a, b < 1 \\ 0 < a < 1 < b \end{array}\right.$ B. $\left[\begin{array}{l} 0 < a, b < 1 \\ 1 < a, b \end{array}\right.$

C. $\left[\begin{array}{l} 0 < b < 1 < a \\ 1 < a, b \end{array}\right.$ D. $\left[\begin{array}{l} 0 < b, a < 1 \\ 0 < a < 1 < b \end{array}\right.$

Câu 21. Người ta thả một lá bèo vào một hồ nước. Giả sử sau $t$ giờ, bèo sẽ sinh sôi kín cả mặt hồ. Biết rằng sau mỗi giờ, lượng lá bèo tăng gấp 10 lần lượng lá bèo trước đó và tốc độ tăng không đổi. Hỏi sau mấy giờ thì số lá bèo phủ kín $\frac{1}{3}$ cái hồ?

A. $\frac{t}{3}$ B. $\frac{10^t}{3}$ C. $t - \log 3$ D. $\frac{t}{\log 3}$

Câu 22. Diện tích $S$ của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được tính theo công thức nào sau đây?

A. $S = \int_a^b f(x)dx$ B. $S = \int_a^b (f(x))^2 dx$

C. $S = \int_a^b |f(x)| dx$ D. $S = \pi\int_a^b (f(x))^2 dx$

Câu 23. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x+1}$ là:

A. $F(x) = \ln(x+1) + C$ B. $F(x) = \log_2^3(x+1) + C$

C. $F(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} + C$ D. $F(x) = \ln|x+1| + C$

Câu 24. Một ca nô đang chạy trên hồ Tây với vận tốc $20 m/s$ thì hết xăng. Từ thời điểm đó, ca nô chuyển động chậm dần đều với vận tốc

$v(t)=-5t+20\,\text{m/s}$, trong đó $t$ là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc hết xăng. Hỏi từ lúc hết xăng đến lúc dừng hẳn ca nô đi được bao nhiêu mét?

A. 10 m B. 20 m C. 30 m D. 40 m

**Câu 25.** Giá trị của tích phân $I=\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}dx$ là

A. $\frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)$ B. $\frac{1}{3}(2\sqrt{2}+1)$

C. $-\frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)$ D. $\frac{1}{3}(2-2\sqrt{2})$

**Câu 26.** Giá trị của tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx$ là

A. $-1$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. 1 D. $-\frac{\pi}{2}+1$

**Câu 27.** Thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\frac{x}{4}$, $y=0$, $x=1$, $x=4$ quanh trục $Ox$ là

A. $6\pi$ B. $\frac{21\pi}{16}$ C. $12\pi$ D. $8\pi$

**Câu 28.** Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=2\sin 5x+\sqrt{x}+\frac{3}{5}$ sao cho đồ thị của hai hàm số $F(x)$, $f(x)$ cắt nhau tại một điểm thuộc $Oy$ là

A. $-\frac{2}{5}\cos 5x+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{3}{5}x-1$

B. $-\frac{2}{5}\cos 5x+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{3}{5}x$

C. $-\frac{2}{5}\cos 5x+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{3}{5}x+1$

D. $-\frac{2}{5}\cos 5x+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{3}{5}x+2$

**Câu 29.** Cho số phức $\bar{z}=3+2i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z$.

A. Phần thực bằng 3, phần ảo bằng 2

B. Phần thực bằng $-3$, phần ảo bằng 2

C. Phần thực bằng 3, phần ảo bằng $-2$

D. Phần thực bằng $-3$, phần ảo bằng $-2$.

**Câu 30.** Cho số phức $z=4-5i$. Số phức liên hợp của $z$ có điểm biểu diễn là

A. (4; 5) B. (4; –5) C. (5; 4) D. (–4; 5)

**Câu 31.** Giả sử $z_1$ và $z_2$ là các nghiệm của phương trình $z^2+4z+13=0$.

Giá trị của biểu thức $A=|z_1|^2+|z_2|^2$ là:

A. 18 B. 20 C. 26 D. 22.

**Câu 32.** Cho số phức $z=1+i$. Tính môđun của số phức $w=\frac{\bar{z}+2i}{z-1}$.

A. 2 B. $\sqrt{2}$ C. 1 D. $\sqrt{3}$

**Câu 33.** Các nghiệm của phương trình $z^4-1=0$ trên tập số phức là

A. –2 và 2 B. –1 và 1 C. $i$ và $-i$ D. –1; 1; $i$ và $-i$

**Câu 34.** Cho số phức $z$ thỏa mãn: $|z-1|=|z-2+3i|$.

Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $z$ là:

A. Đường tròn tâm $I(1,2)$, bán kính R=1.

B. Đường thẳng có phương trình: $x-5y-6=0$.

C. Đường thẳng có phương trình: $2x-6y+12=0$

D. Đường thẳng có phương trình: $x-3y-6=0$.

**Câu 35.** Hình hộp chữ nhật có độ dài ba cạnh xuất phát từ một đỉnh lần lượt là 2, 3, 4. Thể tích hình hộp đó là:

A. 24 B. 8 C. 12 D. 4

**Câu 36.** Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $a$, cạnh bên $SA$ vuông góc với đáy và $SA=\sqrt{3}a$. Thể tích $V$ khối chóp $S.ABC$ là:

A. $V=\frac{3}{8}a^3$ B. $V=\frac{1}{4}a^3$ C. $V=\frac{3}{2}a^3$ D. $V=\frac{\sqrt{3}}{2}a^3$

**Câu 37.** Cho hình hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và $(ABC)$ bằng $60^0$ cạnh $AB=a$. Thể tích $V$ khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là.

A. $V=\frac{3\sqrt{3}}{8}a^3$ B. $V=\sqrt{3}a^3$

C. $V=\frac{\sqrt{3}}{4}a^3$ D. $V=\frac{3}{4}a^3$

**Câu 38.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a$, $SA=a\sqrt{3}$ và vuông góc với đáy. Khoảng cách từ $A$ đến mặt phẳng $(SBC)$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{a}{2}$ D. $\frac{a}{3}$

**Câu 39.** Trong không gian, cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$, $AC=a$, $\widehat{ABC}=30^0$. Tính độ dài đường sinh $l$ của hình nón, nhận được khi quay tam giác $ABC$ xung quanh trục $AB$.

A. $l=2a$ B. $l=a\sqrt{3}$ C. $l=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ D. $l=a\sqrt{2}$

Câu 40. Một thùng hình trụ có thể tích bằng $12\pi$, chiều cao bằng 3. Diện tích xung quanh của thùng đó là.

A. $12\pi$ B. $6\pi$

C. $4\pi$ D. $24\pi$

Câu 41. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại $B$, cạnh $AB=3$, $BC=4$, cạnh bên $SA$ vuông góc với đáy và $SA=12$. Thể tích $V$ khối cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$ là.

A. $V=\dfrac{169}{6}\pi$ B. $V=\dfrac{2197}{6}\pi$

C. $V=\dfrac{2197}{8}\pi$ D. $V=\dfrac{13}{8}\pi$

Câu 42. Người ta cần đổ một ống bi thoát nước hình trụ với chiều cao 200cm, độ dày của thành bi là 10cm và đường kính của bi là 60cm. Lượng bê tông cần phải đổ của bi đó là.

A. $0,1\pi\ m^3$ B. $0,18\pi\ m^3$ C. $0,14\pi\ m^3$ D. $V=\pi\ m^3$

Câu 43. Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(1;\ 2;\ -3)$ và bán kính $R=2$ có phương trình:

A. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=4$

B. $(x+3)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=2$

C. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=2$

D. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=4$

Câu 44. Trong không gian cho đường thẳng $d$ có phương trình: $d:\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{3}$. Một vectơ chỉ phương của d là:

A. $\vec{u}=(2;0;1)$ B. $\vec{u}=(-2;0;-1)$

C. $\vec{u}=(-1;2;3)$ D. $\vec{u}=(1;2;3)$

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+3z-5=0$ và mặt phẳng $(Q): -2x+4y-6z-5=0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $(P)\,//\,(Q)$ B. $(P)\equiv(Q)$

C. $(P)$ cắt $(Q)$ D. $(P)\perp(Q)$

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)$: $x^2+y^2+z^2+2x+6y-4z-2=0$.

Xác định tâm $I$ và bán kính $R$ của mặt cầu $(S)$

A. $I(1;3;-2)$; $R=2\sqrt{3}$ B. $I(-1;-3;2)$; $R=2\sqrt{3}$

C. $I(-1;-3;2)$; $R=4$ D. $I(1;3;-2)$; $R=4$

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d$: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$ và điểm $A(2;0;-1)$.

Mặt phẳng $(P)$ đi qua điểm $A$ và vuông góc với đường thẳng $d$ có phương trình là:

A. $2x+y-z+5=0$ B. $2x+y+z+5=0$

C. $2x+y-z-5=0$ D. $2x+y+z-5=0$

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x+2y-3z+4=0$. Đường thẳng $d$ nằm trong mặt phẳng $(P)$ sao cho $d$ cắt và vuông góc với $\Delta$ có phương trình là:

A. $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$ B. $\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+1}{1}$

C. $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$ D. $\dfrac{x+3}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{1}$

Câu 49. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=4$ và mặt phẳng $(P): x-2y-2z+3=0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $(P)$ cắt $(S)$

B. $(P)$ tiếp xúc với $(S)$

C. $(P)$ không cắt $(S)$

D. Tâm của mặt cầu $(S)$ nằm trên mặt phẳng $(P)$

Câu 50. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1)$, $B(0;4;0)$ và mặt phẳng $(P)$ có phương trình $2x-y-2z+2015=0$. Gọi $\alpha$ là góc nhỏ nhất mà mặt phẳng $(Q)$ đi qua hai điểm $A$, $B$ tạo với mặt phẳng $(P)$. Giá trị của $\cos\alpha$ là:

A. $\dfrac{1}{9}$ B. $\dfrac{1}{6}$ C. $\dfrac{2}{3}$ D. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

**ĐẶNG THỊ QUỲNH HOA**

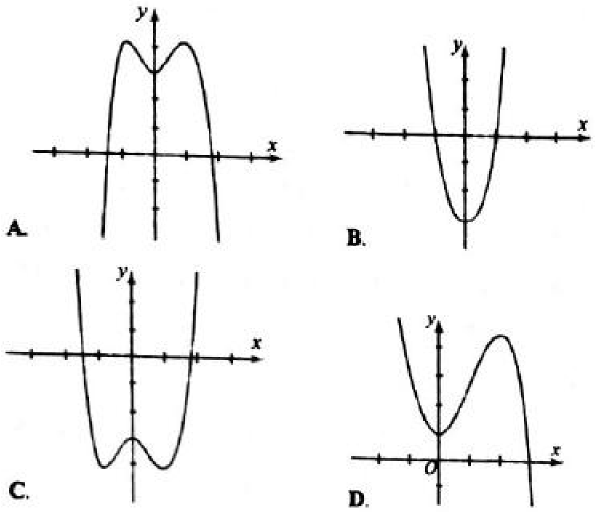
*(GV THPT Nghèn, Can Lộc, Hà Tĩnh)*

# THỬ SỨC TRƯỚC KÌ THI

## ĐỀ SỐ 6

**(*Thời gian làm bài: 90 phút*)**

**Câu 1.** Trong các đồ thị dưới đây đồ thị nào là đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$?




**Câu 2.** Kết luận nào sau đây về tính đơn điệu của hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ là đúng?

**A.** Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

**B.** Hàm số luôn nghịch biến trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

**C.** Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

**D.** Hàm số luôn đồng biến trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

**Câu 3.** GTLN của hàm số $y = x^3 - 3x + 5$ trên đoạn $[0; 1]$ là

**A.** 5 **B.** 3 **C.** 1 **D.** 7

**Câu 4.** Cho hàm số $y = x^3 - 4x$. Số giao điểm của đồ thị hàm số và trục $Ox$ bằng

**A.** 0 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

**Câu 5.** Hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ đồng biến trên:

**A.** $(2; +\infty)$ **B.** $(1; +\infty)$

**C.** $(-\infty; 1)$ và $(3; +\infty)$ **D.** $(1; 3)$

**Câu 6.** Số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số : $y = \dfrac{3x+1}{x^2-4}$ là:

**A.** 2 **B.** 1 **C.** 4 **D.** 3

**Câu 7.** Cho $(C)$: $y = x^3 + 3x^2 - 3$. Tiếp tuyến của $(C)$ song song với đường thẳng $9x - y + 24 = 0$ có phương trình là:

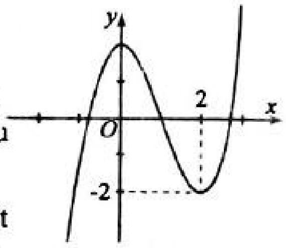
**A.** $y = 9x + 8$ **B.** $y = 9x - 8$; $y = 9x + 24$

**C.** $y = 9x - 8$ **D.** $y = 9x + 24$

**Câu 8.** Tìm $m$ để đồ thị hàm số: $y = x^4 - 2mx^2 + 2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 1.

**A.** $m = \sqrt[3]{3}$ **B.** $m = \sqrt{3}$ **C.** $m = 3\sqrt{3}$ **D.** $m = 1$

**Câu 9.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình bên. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?



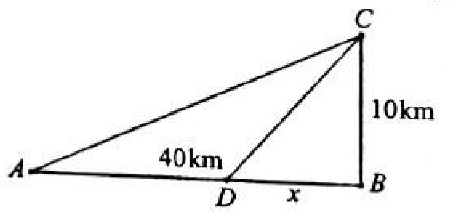

**A.** Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 2$.

**B.** Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 2.

**C.** Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng $-2$.

**D.** Hàm số có ba cực trị.

**Câu 10.** Một người cần đi từ khách sạn $A$ bên bờ biển đến hòn đảo $C$. Biết rằng khoảng cách từ đảo $C$ đến bờ biển là 10km, khoảng cách từ khách sạn $A$ đến điểm B trên bờ gần đảo $C$ là 40km. Người đó có thể đi đường thủy hoặc đi đường bộ rồi đi đường thủy (như hình vẽ dưới đây). Biết kinh phí đi đường thủy là 5 USD/km, đi đường bộ là 3 USD/km. Hỏi người đó phải đi đường bộ một khoảng bao nhiêu để kinh phí nhỏ nhất? ($AB = 40$km, $BC = 10$km).




**A.** $\dfrac{15}{2}km$ **B.** $\dfrac{65}{2}km$ **C.** $10km$ **D.** $40km$

**Câu 11.** Tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-2}{x+1}$ và đường thẳng $y = -2x$ là:

A. $(-2;-4)$ B. $(-\frac{1}{2};1)$

C. $(-2;-\frac{1}{2})$ D. $(-2;4), (\frac{1}{2};-1)$

**Câu 12.** Nghiệm của phương trình $2^{x-1}=\frac{1}{8}$ là

**A.** $x=4$ **B.** $x=-2$ **C.** $x=3$ **D.** $x=2$

**Câu 13.** Đạo hàm của hàm số $y=\log_3 x$ là

**A.** $y'=\frac{1}{x\ln 3}$ **B.** $y'=\frac{1}{x}$

**C.** $y'=\frac{\ln 3}{x}$ **D.** $y'=x\ln 3$

**Câu 14.** Nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}<\frac{1}{27}$ là:

**A.** $x<5$ **B.** $x>5$ **C.** $x>-1$ **D.** $x<-1$

**Câu 15.** Tập xác định của hàm số $y=\frac{1}{\log_2(-x^2+2x)}$ là

**A.** $D=(0;2)$ **B.** $D=[0;2]$

**C.** $D=[0;2]\setminus\{1\}$ **D.** $D=(0;2)\setminus\{1\}$

**Câu 16.** Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?

**A.** $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ **B.** $y=\log_2(x-1)$

**C.** $y=\log_2(x^2+1)$ **D.** $y=\log_2(2^x+1)$

**Câu 17.** Cho các số thực dương $a,b,c$ với $c\neq 1$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

**A.** $\log_c \frac{a}{b}=\log_c a-\log_c b$

**B.** $\log_{c^2}\frac{b}{a^2}=\frac{1}{2}\log_c b-\log_c a$

**C.** $\log_c \frac{a}{b}=\frac{\ln a-\ln b}{\ln c}$

**D.** $\frac{1}{2}\log_c^2\left(\frac{b}{a}\right)^2=\log_c b-\log_c a$

**Câu 18.** Đạo hàm của hàm số $y=\frac{\log_4 x}{x+2}$ là

**A.** $y'=\frac{1}{2x(x+2)^2\ln 2}(x+2-x\ln x)$

**B.** $y'=\frac{1}{2x(x+2)^2\ln 2}(x+2-\ln x)$

**C.** $y'=\frac{1}{x(x+2)^2\ln 2}(x+2-x\ln x)$

**D.** $y'=\frac{1}{2(x+2)^2\ln 2}(x+2-x\ln x)$

**Câu 19.** Đặt $\log_{12}27=a$. Hãy biểu diễn $\log_6 16$ theo $a$.

**A.** $\log_6 16=\frac{4a-12}{a+3}$ **B.** $\log_6 16=\frac{12-4a}{a+3}$

**C.** $\log_6 16=\frac{12+4a}{a+3}$ **D.** $\log_6 16=\frac{12+4a}{a-3}$

**Câu 20.** Cho các số thực dương $a,b$ với $a\neq 1$ và $\log_a b>0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.** $\left[\begin{array}{l}0<a,b<1\\0<a<1<b\end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l}0<a,b<1\\1<a,b\end{array}\right.$

**C.** $\left[\begin{array}{l}0<b<1<a\\1<a,b\end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l}0<b,a<1\\0<a<1<b\end{array}\right.$

**Câu 21.** Người ta thả một lá bèo vào một hồ nước. Giả sử sau $t$ giờ, bèo sẽ sinh sôi kín cả mặt hồ. Biết rằng sau mỗi giờ, lượng lá bèo tăng gấp 10 lần lượng lá bèo trước đó và tốc độ tăng không đổi. Hỏi sau mấy giờ thì số lá bèo phủ kín $\frac{1}{3}$ cái hồ?

**A.** $\frac{t}{3}$ **B.** $\frac{10^t}{3}$ **C.** $t-\log 3$ **D.** $\frac{t}{\log 3}$

**Câu 22.** Diện tích $S$ của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a;b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ được tính theo công thức nào sau đây?

**A.** $S=\int_a^b f(x)dx$ **B.** $S=\int_a^b (f(x))^2dx$

**C.** $S=\int_a^b |f(x)|dx$ **D.** $S=\pi\int_a^b (f(x))^2dx$

**Câu 23.** Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{x+1}$ là:

**A.** $F(x)=\ln(x+1)+C$ **B.** $F(x)=\log_2^3(x+1)+C$

**C.** $F(x)=\frac{-1}{(x+1)^2}+C$ **D.** $F(x)=\ln|x+1|+C$

**Câu 24.** Một ca nô đang chạy trên hồ Tây với vận tốc $20\,m/s$ thì hết xăng. Từ thời điểm đó, ca nô chuyển động chậm dần đều với vận tốc

$v(t) = -5t + 20$ m/s, trong đó $t$ là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc hết xăng. Hỏi từ lúc hết xăng đến lúc dừng hẳn ca nô đi được bao nhiêu mét?

**A.** 10 m **B.** 20 m **C.** 30 m **D.** 40 m

**Câu 25.** Giá trị của tích phân $I = \int_0^1 x\sqrt{x^2+1}dx$ là

**A.** $\frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)$ **B.** $\frac{1}{3}(2\sqrt{2}+1)$

**C.** $-\frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)$ **D.** $\frac{1}{3}(2-2\sqrt{2})$

**Câu 26.** Giá trị của tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx$ là

**A.** $-1$ **B.** $\frac{\pi}{2}$ **C.** 1 **D.** $-\frac{\pi}{2}+1$

**Câu 27.** Thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{x}{4}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$ quanh trục $Ox$ là

**A.** $6\pi$ **B.** $\frac{21\pi}{16}$ **C.** $12\pi$ **D.** $8\pi$

**Câu 28.** Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2\sin 5x + \sqrt{x} + \frac{3}{5}$ sao cho đồ thị của hai hàm số $F(x)$, $f(x)$ cắt nhau tại một điểm thuộc $Oy$ là

**A.** $-\frac{2}{5}\cos 5x + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{3}{5}x - 1$

**B.** $-\frac{2}{5}\cos 5x + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{3}{5}x$

**C.** $-\frac{2}{5}\cos 5x + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{3}{5}x + 1$

**D.** $-\frac{2}{5}\cos 5x + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{3}{5}x + 2$

**Câu 29.** Cho số phức $\bar{z} = 3 + 2i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z$.

**A.** Phần thực bằng 3, phần ảo bằng 2

**B.** Phần thực bằng –3, phần ảo bằng 2

**C.** Phần thực bằng 3, phần ảo bằng –2

**D.** Phần thực bằng –3, phần ảo bằng –2.

**Câu 30.** Cho số phức $z = 4 - 5i$. Số phức liên hợp của $z$ có điểm biểu diễn là

**A.** (4; 5) **B.** (4; –5) **C.** (5; 4) **D.** (–4; 5)

**Câu 31.** Giả sử $z_1$ và $z_2$ là các nghiệm của phương trình $z^2 + 4z + 13 = 0$.

Giá trị của biểu thức $A = |z_1|^2 + |z_2|^2$ là:

**A.** 18 **B.** 20 **C.** 26 **D.** 22.

**Câu 32.** Cho số phức $z = 1 + i$. Tính môđun của số phức $w = \frac{\bar{z}+2i}{z-1}$.

**A.** 2 **B.** $\sqrt{2}$ **C.** 1 **D.** $\sqrt{3}$

**Câu 33.** Các nghiệm của phương trình $z^4 - 1 = 0$ trên tập số phức là

**A.** –2 và 2 **B.** –1 và 1 **C.** $i$ và $-i$ **D.** –1; 1; $i$ và $-i$

**Câu 34.** Cho số phức $z$ thỏa mãn: $|z-1| = |z-2+3i|$.

Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $z$ là:

**A.** Đường tròn tâm $I(1,2)$, bán kính R=1.

**B.** Đường thẳng có phương trình: $x - 5y - 6 = 0$.

**C.** Đường thẳng có phương trình: $2x - 6y + 12 = 0$

**D.** Đường thẳng có phương trình: $x - 3y - 6 = 0$.

**Câu 35.** Hình hộp chữ nhật có độ dài ba cạnh xuất phát từ một đỉnh lần lượt là 2, 3, 4. Thể tích hình hộp đó là:

**A.** 24 **B.** 8 **C.** 12 **D.** 4

**Câu 36.** Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $a$, cạnh bên $SA$ vuông góc với đáy và $SA = \sqrt{3}a$. Thể tích $V$ khối chóp $S.ABC$ là:

**A.** $V = \frac{3}{8}a^3$ **B.** $V = \frac{1}{4}a^3$ **C.** $V = \frac{3}{2}a^3$ **D.** $V = \frac{\sqrt{3}}{2}a^3$

**Câu 37.** Cho hình hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và $(ABC)$ bằng $60^0$ cạnh $AB = a$. Thể tích $V$ khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là.

**A.** $V = \frac{3\sqrt{3}}{8}a^3$ **B.** $V = \sqrt{3}a^3$

**C.** $V = \frac{\sqrt{3}}{4}a^3$ **D.** $V = \frac{3}{4}a^3$

**Câu 38.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a$, $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với đáy. Khoảng cách từ $A$ đến mặt phẳng $(SBC)$ bằng

**A.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\frac{a}{2}$ **D.** $\frac{a}{3}$

**Câu 39.** Trong không gian, cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$, $AC = a, \widehat{ABC} = 30^0$. Tính độ dài đường sinh $l$ của hình nón, nhận được khi quay tam giác $ABC$ xung quanh trục $AB$.

**A.** $l = 2a$ **B.** $l = a\sqrt{3}$ **C.** $l = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ **D.** $l = a\sqrt{2}$

Câu 40. Một thùng hình trụ có thể tích bằng $12\pi$, chiều cao bằng 3. Diện tích xung quanh của thùng đó là.

**A.** $12\pi$ **B.** $6\pi$

**C.** $4\pi$ **D.** $24\pi$

Câu 41. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại $B$, cạnh $AB = 3$, $BC = 4$, cạnh bên $SA$ vuông góc với đáy và $SA = 12$. Thể tích $V$ khối cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$ là.

**A.** $V = \dfrac{169}{6}\pi$ **B.** $V = \dfrac{2197}{6}\pi$

**C.** $V = \dfrac{2197}{8}\pi$ **D.** $V = \dfrac{13}{8}\pi$

Câu 42. Người ta cần đổ một ống bi thoát nước hình trụ với chiều cao 200cm, độ dày của thành bi là 10cm và đường kính của bi là 60cm. Lượng bê tông cần phải đổ của bi đó là.

**A.** $0{,}1\pi\ m^3$ **B.** $0{,}18\pi\ m^3$ **C.** $0{,}14\pi\ m^3$ **D.** $V = \pi\ m^3$

Câu 43. Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(1;\ 2;\ -3)$ và bán kính $R = 2$ có phương trình:

**A.** $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 4$

**B.** $(x+3)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 2$

**C.** $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 2$

**D.** $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 4$

Câu 44. Trong không gian cho đường thẳng $d$ có phương trình: $d: \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-1}{3}$. Một vectơ chỉ phương của d là:

**A.** $\vec{u} = (2;0;1)$ **B.** $\vec{u} = (-2;0;-1)$

**C.** $\vec{u} = (-1;2;3)$ **D.** $\vec{u} = (1;2;3)$

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)$: $x - 2y + 3z - 5 = 0$ và mặt phẳng $(Q)$: $-2x + 4y - 6z - 5 = 0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.** $(P) \parallel (Q)$ **B.** $(P) \equiv (Q)$

**C.** $(P)$ cắt $(Q)$ **D.** $(P) \perp (Q)$

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)$: $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 6y - 4z - 2 = 0$. Xác định tâm $I$ và bán kính $R$ của mặt cầu $(S)$

**A.** $I(1;3;-2)$; $R = 2\sqrt{3}$ **B.** $I(-1;-3;2)$; $R = 2\sqrt{3}$

**C.** $I(-1;-3;2)$; $R = 4$ **D.** $I(1;3;-2)$; $R = 4$

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d$: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{-1}$ và điểm $A(2;0;-1)$. Mặt phẳng $(P)$ đi qua điểm $A$ và vuông góc với đường thẳng $d$ có phương trình là:

**A.** $2x + y - z + 5 = 0$ **B.** $2x + y + z + 5 = 0$

**C.** $2x + y - z - 5 = 0$ **D.** $2x + y + z - 5 = 0$

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z}{-1}$ và mặt phẳng $(P)$: $x + 2y - 3z + 4 = 0$. Đường thẳng $d$ nằm trong mặt phẳng $(P)$ sao cho $d$ cắt và vuông góc với $\Delta$ có phương trình là:

**A.** $\dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-1}{2}$ **B.** $\dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z+1}{1}$

**C.** $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$ **D.** $\dfrac{x+3}{-1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{1}$

Câu 49. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)$: $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 4$ và mặt phẳng $(P)$: $x - 2y - 2z + 3 = 0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.** $(P)$ cắt $(S)$

**B.** $(P)$ tiếp xúc với $(S)$

**C.** $(P)$ không cắt $(S)$

**D.** Tâm của mặt cầu $(S)$ nằm trên mặt phẳng $(P)$

Câu 50. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1)$, $B(0;4;0)$ và mặt phẳng $(P)$ có phương trình $2x - y - 2z + 2015 = 0$. Gọi $\alpha$ là góc nhỏ nhất mà mặt phẳng $(Q)$ đi qua hai điểm $A$, $B$ tạo với mặt phẳng $(P)$. Giá trị của $\cos\alpha$ là:

**A.** $\dfrac{1}{9}$ **B.** $\dfrac{1}{6}$ **C.** $\dfrac{2}{3}$ **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

**ĐẶNG THỊ QUỲNH HOA**

*(GV THPT Nghèn, Can Lộc, Hà Tĩnh)*

# ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 5

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1C | 2C | 3A | 4D | 5D | 6B | 7B | 8D | 9A | 10C | 11C | 12A | 13B | 14D | 15A | 16B | 17A |
| 18D | 19C | 20D | 21D | 22A | 23A | 24B | 25B | 26C | 27D | 28D | 29C | 30A | 31C | 32D | 33C | 34D |
| 35A | 36B | 37C | 38B | 39A | 40C | 41B | 42B | 43B | 44C | 45D | 46D | 47B | 48A | 49B | 50A | |

**Câu 3.** Tìm được $y_1 = 4, y_2 = 3 \Rightarrow 2y_1 - y_2 = 5$. Chọn A.

**Câu 4.** Lưu ý $f(x)$ không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Chọn D.

**Câu 7.** Phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x = 0$ $\Leftrightarrow x = 0, x = -2$. Tính được $y(0) = 1, y(-2) = 5$. Từ bảng biến thiên của hàm số suy ra $(C)$ cắt $(d)$ tại ba điểm phân biệt khi $1 < 5^m < 5$ $\Leftrightarrow 0 < m < 1$. Chọn B.

**Câu 8.** Ta có $y' = 3x^2 - 2mx - 2m > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow \Delta' = m^2 + 6m < 0 \Leftrightarrow -6 < m < 0$. Chọn D.

**Câu 9.** Nếu $x = 1$ không là nghiệm của đa thức $(m+1)x - 2m + 1$ thì đồ thị hàm số có tiệm cận đứng. Khi $x = 1$ là nghiệm của đa thức $(m+1)x - 2m + 1$ tức là $m = 2$ thì đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng, vì khi đó $\lim\limits_{x\to a} y = 3$ với mọi $a \in \mathbb{R}$. Chọn A.

**Câu 10.** Chiều cao của hình trụ $(T)$ là $h' = h - x$, bán kính đáy $r'$ thỏa mãn $\frac{x}{h} = \frac{r'}{r}$ $\Rightarrow r' = \frac{xr}{h}$. Thể tích khối trụ $(T)$ là

$$V = \pi(r')^2 h' = \frac{\pi r^2}{2h^2}.x.x.(2h-2x)$$

$$\le \frac{\pi r^2}{2h^2}\left(\frac{2h}{3}\right)^3 = \frac{4}{27}\pi r^2 h.$$

Thể tích phần không gian nằm phía trong $(N)$ nhưng phía ngoài của $(T)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $V$ đạt giá trị lớn nhất, tức là $x = x = 2h - 2x \Leftrightarrow x = \frac{2h}{3}$. Có thể xét hàm số $f(x) = -x^3 + hx^2$ với $x \in (0;h)$. Chọn C.

**Câu 11.** Hàm số $f(x) = \frac{2x^2 + 3x + m + 1}{x+1}$ có đạo hàm $f'(x) = 2 - \frac{m}{(x+1)^2}$ trên $D = (-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$.

Nếu $m > 0$ thì $f(x)$ nghịch biến trên các khoảng $\left(-1-\sqrt{\frac{m}{2}};-1\right), \left(-1;-1+\sqrt{\frac{m}{2}}\right)$, nên $m > 0$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nếu $m < 0$ thì $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^+}\left(2x+1+\frac{m}{x+1}\right) = -\infty$ nên tồn tại $x_2 > -1$ sao cho $f(x_2) < 0$, và $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^-}\left(2x+1+\frac{m}{x+1}\right) = +\infty$ nên tồn tại $x_1 < -1$ sao cho $f(x_1) > 0$. Ta thấy $x_1, x_2 \in D$, $x_1 < x_2$ và $f(x_1) > f(x_2)$ nên $f(x)$ không phải là hàm đồng biến trên $D$ (mặc dù trong trường hợp này nó đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1), (-1;+\infty)$). Do đó $m < 0$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nếu $m = 0$ thì $f(x) = 2x + 1$ xác định trên $D = (-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$. Hàm $y = 2x + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $f(x)$ đồng biến trên $D$.

Vậy với $m = 0$ thì $f(x)$ đồng biến trên tập xác định $D = (-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$. Chọn C.

**Câu 15.** Ở câu này cần lưu ý: $\sqrt[6]{a}$ xác định khi $a \ge 0$, và $\sqrt{b}$ xác định khi $b \ge 0$. Với $a, b$ thỏa mãn một trong các đẳng thức, nên ra ở phương án $B, C, D$ thì $a, b$ có thể là số âm. Chọn A.

Câu 16. Ở câu này cần lưu ý: $\log_2 x + \log_2 y$ xác định khi $x > 0$ và $y > 0$, còn $\log_2(xy)$ xác định khi $xy > 0$. Chọn B.

Câu 20. Nếu $a > 0, a \neq 1$, thì $a^u = a^v \Leftrightarrow u = v$. Biến đổi ở bước 4 là sai vì $3.2^x$ có thể bằng 1. Chọn D.

Câu 24. Điện lượng cần tìm là

$$\int_0^6 Q_0\omega.\cos(\omega t)\,dt = Q_0 \sin 6\omega\ (C).$$

Chọn B.

Câu 27. Mỗi đơn vị dài trên các trục tọa độ là $2\,\mathrm{cm}$ nên mỗi đơn vị diện tích là $4\,\mathrm{cm}^2$. Do đó diện tích cần tính là $\left(\int_{-1}^{2}|x^3|dx\right).4\,\mathrm{cm}^2 = 17\,\mathrm{cm}^2$.

Chọn D.

Câu 28. Lấy tích phân từ 0 đến 1 hai vế của khai triển $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n$.

Chọn D.

Câu 34. Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + iy\ (x, y \in \mathbb{R})$. Gọi $F_1(-4;0), F_2(4;0)$. Ta thấy $MF_1 + MF_2 = \sqrt{(x-4)^2 + y^2} + \sqrt{(x+4)^2 + y^2}$ $= |z-4| + |z+4| = 10$ nên tập hợp các điểm $M$ là elip có trục lớn $2a = 10$, tiêu cự $F_1F_2 = 2c = 8$, nên $a = 5, c = 4 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow$ trục nhỏ là $2b = 6$. Elip này có phương trình $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Dẫn tới giá trị lớn nhất của $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ bằng 5 và giá trị nhỏ nhất bằng 3.

Chọn D.

Câu 35. Một hình chóp có $2n$ cạnh sẽ gồm $n$ cạnh đáy và $n$ cạnh bên, như vậy đa giác đáy là $n$ - giác. Vậy hình chóp đó sẽ có $n + 1$ mặt, gồm 1 mặt đáy và $n$ mặt bên. Chọn A.

Câu 37. $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC} = \frac{1}{24}$

$\Rightarrow V_{S.A'B'C'} = \frac{1}{24}.V_{S.ABC} = \frac{1}{24}.\frac{1}{6}SA.SB.SC = 2.$

Chọn C.

Câu 39. $V_{ACD'B'} = a^3 - 4.\left(\frac{1}{6}a^3\right) = \frac{1}{3}a^3$. Chọn A.

Câu 40. Gọi khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng $a$ là $S.ABCD$. Mặt phẳng $(P)$ song song với $(ABCD)$ và cắt các đoạn thẳng $SA, SB, SC, SD, SO$ tại $A', B', C', D', O'$ ($O$ là tâm hình vuông $ABCD$). Đặt

$k = \frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \frac{SC'}{SC} = \frac{SD'}{SD} = \frac{SO'}{SO}\ (0 < k < 1)$ thì $S_{A'B'C'D'} = k^2 S_{ABCD}$. Ta thấy

$V_{S.A'B'C'D'} = V_{A'B'C'D'.ABCD}$ khi $\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}SO'.S_{A'B'C'D'}}{\frac{1}{2}SO.S_{ABCD}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{SO'}{SO}.\frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{2}$$

$\Leftrightarrow k.k^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Do đó diện tích thiết diện là $S_{A'B'C'D'} = k^2 S_{ABCD} = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^2 a^2 = \frac{a^2}{\sqrt[3]{4}}$.

Chọn C.

Câu 43. Xét hai trường hợp $0 < m < 1$ và $m > 1$. Chọn B.

Câu 47. Lưu ý, mỗi số $a, b, c$ có thể âm hoặc dương. Chọn B.

Câu 50. Gọi $I$ là tâm mặt cầu $(S)$ thì $IA \perp IB$. Hơn nữa $IA = IB = 2$ nên khoảng cách từ $I$ tới $d$ bằng $\sqrt{2}$. Chọn A.

**NGUYỄN VĂN XÁ**
*(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)*

mãn một trong các đẳng thức, nên ra ở phương án $B$, $C$, $D$ thì $a$, $b$ có thể là số âm. Chọn A.

**Câu 16.** Ở câu này cần lưu ý: $\log_2 x + \log_2 y$ xác định khi $x > 0$ và $y > 0$, còn $\log_2(xy)$ xác định khi $xy > 0$. Chọn B.

**Câu 20.** Nếu $a > 0, a \neq 1$, thì $a^u = a^v \Leftrightarrow u = v$. Biến đổi ở bước 4 là sai vì $3.2^x$ có thể bằng 1. Chọn D.

**Câu 24.** Điện lượng cần tìm là

$$\int_0^6 Q_0\omega.\cos(\omega t)\,dt = Q_0 \sin 6\omega\ (C).$$

Chọn B.

**Câu 27.** Mỗi đơn vị dài trên các trục tọa độ là $2\,\text{cm}$ nên mỗi đơn vị diện tích là $4\,\text{cm}^2$. Do đó diện tích cần tính là $\left(\int_{-1}^{2}|x^3|dx\right).4\,\text{cm}^2 = 17\,\text{cm}^2$.

Chọn D.

**Câu 28.** Lấy tích phân từ 0 đến 1 hai vế của khai triển $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n$. Chọn D.

**Câu 34.** Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + iy\ (x, y \in \mathbb{R})$. Gọi $F_1(-4;0), F_2(4;0)$. Ta thấy $MF_1 + MF_2 = \sqrt{(x-4)^2+y^2} + \sqrt{(x+4)^2+y^2}$ $= |z-4| + |z+4| = 10$ nên tập hợp các điểm $M$ là elip có trục lớn $2a = 10$, tiêu cự $F_1F_2 = 2c = 8$, nên $a = 5, c = 4 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow$ trục nhỏ là $2b = 6$. Elip này có phương trình $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Dẫn tới giá trị lớn nhất của $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ bằng 5 và giá trị nhỏ nhất bằng 3. Chọn D.

**Câu 35.** Một hình chóp có $2n$ cạnh sẽ gồm $n$ cạnh đáy và $n$ cạnh bên, như vậy đa giác đáy là $n$ - giác. Vậy hình chóp đó sẽ có $n + 1$ mặt, gồm 1 mặt đáy và $n$ mặt bên. Chọn A.

**Câu 37.** $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC} = \frac{1}{24}$

$\Rightarrow V_{S.A'B'C'} = \frac{1}{24}.V_{S.ABC} = \frac{1}{24}.\frac{1}{6}SA.SB.SC = 2.$

Chọn C.

**Câu 39.** $V_{ACD'B'} = a^3 - 4.\left(\frac{1}{6}a^3\right) = \frac{1}{3}a^3$. Chọn A.

**Câu 40.** Gọi khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng $a$ là $S.ABCD$. Mặt phẳng $(P)$ song song với $(ABCD)$ và cắt các đoạn thẳng $SA, SB, SC, SD, SO$ tại $A', B', C', D', O'$ ($O$ là tâm hình vuông $ABCD$). Đặt

$k = \frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \frac{SC'}{SC} = \frac{SD'}{SD} = \frac{SO'}{SO}\ (0 < k < 1)$ thì $S_{A'B'C'D'} = k^2 S_{ABCD}$. Ta thấy

$V_{S.A'B'C'D'} = V_{A'B'C'D'.ABCD}$ khi $\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}SO'.S_{A'B'C'D'}}{\frac{1}{2}SO.S_{ABCD}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{SO'}{SO}.\frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow k.k^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Do đó diện tích thiết diện là $S_{A'B'C'D'} = k^2 S_{ABCD} = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^2 a^2 = \frac{a^2}{\sqrt[3]{4}}$.

Chọn C.

**Câu 43.** Xét hai trường hợp $0 < m < 1$ và $m > 1$. Chọn B.

**Câu 47.** Lưu ý, mỗi số $a, b, c$ có thể âm hoặc dương. Chọn B.

**Câu 50.** Gọi $I$ là tâm mặt cầu $(S)$ thì $IA \perp IB$. Hơn nữa $IA = IB = 2$ nên khoảng cách từ $I$ tới $d$ bằng $\sqrt{2}$. Chọn A.

**NGUYỄN VĂN XÁ**
*(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)*


# PHƯƠNG PHÁP XÂY DỰNG DÃY NGHIỆM TRONG BÀI TOÁN PHƯƠNG TRÌNH HÀM ĐA THỨC

**KIỀU ĐÌNH MINH**
*(GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)*

Dãy số có nhiều ứng dụng rộng rãi trong Toán học. Việc xây dựng dãy số trong khi giải toán là quan trọng. Bài viết này chúng tôi đề cập đến việc xây dựng dãy nghiệm trong các bài toán giải phương trình (PT) hàm đa thức. Hy vọng bạn đọc sẽ tìm thấy nhiều điều bổ ích khi đọc bài viết này.

**Thí dụ 1.** *Tìm tất cả các đa thức $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ thỏa mãn $P(0)=0$ và $P(x^2+1)=(P(x))^2+1$, $\forall x\in\mathbb{R}$.*

***Lời giải.*** Lập dãy $(\alpha_n)$ xác định bởi: $\alpha_0=0,\alpha_{n+1}=\alpha_n^2+1,n=0,1,....$ Khi đó $(\alpha_n)$ là dãy tăng. Mặt khác, bằng quy nạp ta chứng minh được $P(\alpha_n)=\alpha_n,\forall n\ge 0.$ Do đó đa thức $Q(x)=P(x)-x$ có vô số nghiệm $\alpha_n$. Vậy $Q(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}$ hay $P(x)=x,\forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại ta thấy đa thức này thỏa mãn.

**Thí dụ 2.** *Tìm tất cả các đa thức $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ thỏa mãn $P(0)=6$ và $P(x)=\sqrt{P(x^2+1)-7}+6$, $\forall x\ge 0$.*

***Lời giải.*** Từ giả thiết ta có

$$P(x^2+1)=(P(x)-6)^2+7,\forall x\ge 0.$$

Lập dãy $(\alpha_n)$ xác định bởi:

$$\alpha_0=0,\alpha_{n+1}=\alpha_n^2+1,n=0,1,....$$

Bằng quy nạp ta chứng minh được

$$P(\alpha_n)=\alpha_n+6,\forall n\ge 0.$$

Từ đó suy ra $P(x)=x+6,\forall x\ge 0.$

**Thí dụ 3.** *Tìm tất cả các đa thức $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ thỏa mãn $P(x)P(x+1)=P(x^2+2),\forall x\in\mathbb{R}$.*

***Lời giải.*** Nếu $P(x)\equiv c$ thì $c^2=c\Leftrightarrow c=0,c=1.$ Ta có $P(x)=0,P(x)=1.$ Xét $P(x)\ne c.$ Kiểm tra trực tiếp ta thấy đa thức $P(x)=x^2-x+2$ thỏa mãn bài toán. Ta thấy nếu $P(x)$ thỏa mãn thì đa thức $(P(x))^n$ $(n\in\mathbb{N}^*)$ cũng thỏa mãn.

Đặt $\deg P=n$, khi đó nếu $n$ lẻ thì $P(x)$ có nghiệm $x_0\Rightarrow P(x_0)=0\Rightarrow P(x_0^2+2)=0.$ Do đó dãy số dương $(x_n): x_{n+1}=x_n^2+2,\forall n=0,1,...$ cũng là nghiệm. Điều này không xảy ra. Vậy $n=2m$ $(m\in\mathbb{N}^*)$. Dễ thấy hệ số cao nhất của $P(x)$ bằng 1. Đặt

$$P(x)=(x^2-x+2)^m+Q(x),\deg Q=q<2m.$$

Thay vào PT ban đầu có

$$(x^2+x+2)^m Q(x)+(x^2-x+2)^m Q(x+1)$$
$$+Q(x)Q(x+1)=Q(x^2+2),\forall x\in\mathbb{R}.$$

Nếu $Q(x)\ne c$ thì bằng cách so sánh bậc hai vế dẫn đến $q\ge 2m$, vô lý. Vậy $Q(x)=c\Rightarrow Q(x)\equiv 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Do đó $P(x)=(x^2-x+2)^m$. Tóm lại:

$$P(x)\equiv 0,P(x)\equiv 1,P(x)=(x^2-x+2)^m\ (m\in\mathbb{N}^*).$$

**Thí dụ 4.** *Tìm tất cả các đa thức $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ thỏa mãn $P(x)P(x+1)=P(x^2+x+1),\forall x\in\mathbb{R}$.*

***Lời giải.*** $P(x)\equiv c$ thì $c^2=c\Leftrightarrow c=0,c=1.$ Ta có $P(x)=0,P(x)=1.$

Xét $\deg P=n\ge 1.$ Nếu $n$ lẻ thì $P(x)$ có nghiệm thực $x_0$. Lập dãy số $(\alpha_n)$ xác định bởi

$$\begin{cases}\alpha_1=x_0\\ \alpha_{n+1}=\alpha_n^2+\alpha_n+1,n=1,2,...\end{cases}$$

Bằng quy nạp thì $P(\alpha_n)=0,\forall n=1,2,...$

Mà $(\alpha_n)$ tăng thực sự nên $P(x)=0$ có vô số nghiệm, điều này là vô lý.

Nếu $n$ chẵn thì $n=2m\ (m\in\mathbb{N}^*)$. Đặt

$$P(x)=Q(x)+(x^2+1)^m.$$

Thay vào PT ban đầu và so sánh bậc hai vế, ta được $P(x)=(x^2+1)^m$. Tóm lại:

$$P(x)\equiv 0, P(x)\equiv 1, P(x)=(x^2+1)^m\ (m\in\mathbb{N}^*).$$

**Thí dụ 5.** *Tìm tất cả các đa thức $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ sao cho $P(x)P(2x^2)=P(2x^3+x), \forall x\in\mathbb{R}$.*

***Lời giải.*** Dễ thấy $P(x)=0, P(x)=1$ thỏa mãn. Xét $\deg P=n\ge 1$.

Nếu $n$ lẻ thì $P(x)$ có nghiệm $x_0$. Lập dãy $(\alpha_n)$ xác định bởi

$$\begin{cases}\alpha_1=x_0\\ \alpha_{n+1}=2\alpha_n^3+\alpha_n, n=1,2,...\end{cases}$$

Ta có $P(\alpha_n)=0, \forall n=1,2,...$ Suy ra điều vô lý.

Xét $n=2m(m\in\mathbb{N}^*)$. Đặt

$$P(x)=Q(x)+(x^2+1)^m, \deg Q=q<2m.$$

Từ đó suy ra $P(x)=(x^2+1)^m\ (m\in\mathbb{N}^*)$.

**Thí dụ 6.** *Tìm tất cả các đa thức $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ sao cho $P(x)P(2x^2)=P(x^3+x), \forall x\in\mathbb{R}$.*

***Lời giải.*** Chỉ có $P(x)=0, P(x)=1$ là các đa thức hằng thỏa mãn. Nếu $\deg P=n\ge 1$. Đặt

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n, a_0\ne 0.$$

Cho $x=0\Rightarrow P(0)=a_n=0$ hoặc $P(0)=a_n=1$.

Nếu $a_n=0$ thì

$$P(x)=x^mQ(x), Q(0)\ne 0, m\in\mathbb{N}^*.$$

Thay vào PT ta có

$$(2x^2)^m Q(x)Q(2x^2)=$$
$$(x^2+1)^m Q(x^3+x)\Rightarrow Q(0)=0,$$

trái với giả thiết. Vậy $a_n=1$. Đồng nhất hệ số cao nhất ta được $a_0=\dfrac{1}{2^n}$.

Nếu $P(x)$ có nghiệm $x_0\in\mathbb{R}$. Lập dãy số $(\alpha_n)$ xác định bởi $\begin{cases}\alpha_1=x_0\ne 0\\ \alpha_{n+1}=\alpha_n^3+\alpha_n, n=1,2,...\end{cases}$

Thì dãy $(\alpha_n)$ đơn điệu tăng khi $x_0>0$ và đơn điệu giảm khi $x_0<0$. Từ đó, nếu đa thức đã cho có một nghiệm thực khác 0 thì nó sẽ có vô số nghiệm thực. Điều này không thể xảy ra. Vậy $P(x)$ chỉ có nghiệm phức $z_1,z_2,...,z_n$ và $|z_1|.|z_2|...|z_n|=2^n$. Do đó tồn tại $z_k$ với $|z_k|\ge 2$. Điều này dẫn đến $|z_k^2+1|\ge|z_k^2|-1\ge 3$ và vì vậy $|z_k^3+z_k|>|z_k|$. Ta thu được $P(x)$ có vô số nghiệm, điều này không thể xảy ra.

Tóm lại : $P(x)\equiv 0, P(x)\equiv 1$.

**Thí dụ 7.** *Tìm tất cả các đa thức $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ thỏa mãn $P(0)=0$ và*

$$P(x^2-x+1)=(P(x))^2-P(x)+1, \forall x\in\mathbb{R}.$$

***Lời giải.*** Thay $x$ bởi $1-x$, ta được

$$P((1-x)^2-(1-x)+1)=(P(1-x))^2-P(1-x)+1$$
$$\Leftrightarrow P(x^2-x+1)=(P(1-x))^2-P(1-x)+1.$$

Theo giả thiết, ta có

$$(P(x))^2-P(x)+1=(P(1-x))^2-P(1-x)+1$$
$$\Leftrightarrow (P(1-x)+P(x)-1)(P(1-x)-P(x))=0.$$

Do đó một trong hai đa thức $P(1-x)+P(x)-1$ và $P(1-x)-P(x)$ có vô hạn nghiệm hay $P(1-x)+P(x)-1=0, \forall x\in\mathbb{R}$ hoặc $P(1-x)-P(x)=0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Thay $x=1$ vào PT đã cho, ta có $P(1)=1$.

Vậy $P(1-x)+P(x)-1=0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Thay $x=\dfrac{1}{2}$ vào PT trên, ta có $P\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$. Chú ý rằng với $x\in(0;1)$ thì $0<x<x^2-x+1<1$.

Xét dãy số $(x_n)$ xác định bởi:

$$x_0=\frac{1}{2}\in(0;1) \text{ và } x_n=x_{n-1}^2-x_{n-1}+1, \forall n\ge 1.$$

Bằng quy nạp, ta được $P(x_n)=x_n, \forall n\ge 0$. Suy ra đa thức $Q(x)=P(x)-x$ có vô số nghiệm. Do đó $Q(x)\equiv 0, \forall x\in\mathbb{R}$. Vậy $P(x)=x, \forall x\in\mathbb{R}$.

***Nhận xét.*** Dãy số $(x_n): x_0=0; x_n=x_{n-1}^2-x_{n-1}+1, \forall n\ge 1$ là tuần hoàn nên ta không thể làm tương tự như các thí dụ trên. Mấu chốt của bài toán này là chỉ ra được $P\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

**Thí dụ 8.** *Xét tập hợp các đa thức $P(x)$ với hệ số thực và có bậc lớn hơn 1 thỏa mãn*

$$P(x^2-1)=P(x).P(-x),\forall x\in\mathbb{R}.$$

*Hãy tìm trong tập hợp đó một đa thức có bậc bé nhất nhưng có nghiệm lớn nhất.*

***Lời giải.*** Gọi $x_0$ là một nghiệm của $P(x)$. Khi đó $P(x_0^2-1)=P(x_0).P(-x_0)=0\Rightarrow x_0^2-1$ cũng là nghiệm của $P(x)$.

Xét $x_0>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, ta có $x_0^2-x_0-1>0$ suy ra $x_0^2-1>x_0>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Thành thử, từ một nghiệm $x_0>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, ta xây dựng được một dãy vô hạn các nghiệm phân biệt của $P(x)$. Điều này vô lý vì $P(x)$ là một đa thức có bậc lớn hơn 1 nên có số nghiệm là hữu hạn.

Như vậy nếu $x_0$ là một nghiệm của $P(x)$ thì $x_0\le\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Xét đa thức $P(x)=x^2-x-1$, ta có $P(x^2-1)=(x^2-1)^2-(x^2-1)-1=x^4-3x^2+1$,

$P(x)P(-x)=(x^2-x-1)(x^2+x-1)=x^4-3x^2+1$.

Hơn nữa $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ là một nghiệm của $P(x)=x^2-x-1$. Tóm lại: $P(x)=x^2-x-1$.

**Thí dụ 9.** *Chứng minh rằng nếu đa thức $P(x)$ thỏa mãn $P(2x^2-1)=\frac{(P(x))^2}{2}-1,\forall x\in\mathbb{R}$ thì $P(x)$ phải là hằng số.*

***Lời giải.*** Xây dựng dãy

$$u_1=1,u_2=-1,u_n=\sqrt{\frac{u_{n-1}+1}{2}},\forall n\ge 3.$$

Ta có $u_n<u_{n+1}<1,\forall n\ge 2$ và

$$P(u_n)=\frac{(P(u_{n+1}))^2}{2}-1,\forall n\ge 1.$$

Chú ý rằng $P(u_n)\ne 0,\forall n\ge 1$. Vì nếu $P(u_n)=0$ thì $P(u_{n-1}),P(u_{n-2}),...,P(u_1)$ là hữu tỷ, nhưng $P(1)=1\pm\sqrt{3}$. Lấy đạo hàm hai vế của phương trình đã cho, ta có $4x.P'(2x^2-1)=P(x)P'(x)$. Cho $x=1$, do $P(1)\ne 4$, ta có $P'(u_1)=P'(1)=0$. Suy ra $0=P'(u_2)=P'(u_3)=\cdots$ Vì vậy $P'(x)$ là đa thức 0. Do đó $P(x)$ là đa thức hằng.

## BÀI TẬP

**1.** Tìm tất cả các đa thức $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ thỏa mãn

$$P(0)=0,P(x^3+1)=(P(x))^3+1,\forall x\in\mathbb{R}.$$

**2.** Tìm tất cả các đa thức $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ thỏa mãn

$$P(x)P(x-1)=P(x^2),\forall x\in\mathbb{R}.$$

**3.** Tìm tất cả các đa thức $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ thỏa mãn

$$P(x)P(x+1)=P(x^2+x),\forall x\in\mathbb{R}.$$

**4.** Tìm tất cả các đa thức $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ thỏa mãn

$$P(x^3+2x)P(x^3+2x+1)=P(x^6+4x^4+4x^2),\forall x\in\mathbb{R}.$$

**5.** Tìm tất cả các đa thức $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ thỏa mãn

$$P(x)P(3x^2)=P(3x^3+x),\forall x\in\mathbb{R}.$$

**6.** Tìm tất cả các đa thức $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ thỏa mãn

$$P(x)P(2x^2-1)=P(x^2)P(2x-1),\forall x\in\mathbb{R}.$$

**7.** Chứng minh rằng không tồn tại đa thức $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ có bậc 998 sao cho $(P(x))^2-1=P(x^2+1),\forall x\in\mathbb{R}$.

**8.** Cho $P(x),Q(x)\in\mathbb{R}[x]$ thỏa mãn

$$P\left(1+x+Q(x)+(Q(x))^2\right)=Q\left(1+x+P(x)+(P(x))^2\right),\forall x\in\mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng nếu $P(x)=Q(x)$ có nghiệm thực thì $P(x)\equiv Q(x),\forall x\in\mathbb{R}$.

**9.** Với mỗi đa thức $P(x)\in\mathbb{R}[x]$, kí hiệu $A_P$ là tập hợp các số thực $x$ sao cho $P(x)=0$. Tìm số phần tử nhiều nhất có thể có của $A_P$ khi $P(x)$ thuộc tập hợp các đa thức hệ số thực với bậc ít nhất là 1 và thỏa mãn $P(x^2-1)=P(x).P(-x),\forall x\in\mathbb{R}$.

**10.** Tìm tất cả các đa thức $P(x)\in\mathbb{C}[x]$ chỉ với các không điểm thực và thỏa mãn

$$P(x^2-1)=P(x).P(-x),\forall x\in\mathbb{R}.$$


# TOÁN HỌC và HÓA HỌC


**LẠI NĂNG DUY**
*(Cựu HS chuyên Hóa, THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định)*


Nhà bác học Xô viết nổi tiếng, Viện sĩ *Migdal* đã có lần nêu lên một quan niệm đặc sắc: "*Vẻ đẹp của khoa học không những chỉ ở trong sự hài hòa lôgic mà còn ở trong sự liên hệ phong phú nữa*". Toán học mang vẻ đẹp hoàn hảo, "*một trong những biểu hiện đẹp đẽ của trí óc con người*" (*Peter Hilton*). Có lẽ vẻ đẹp siêu phàm trong lôgic toán học không phải bàn nhiều lắm. Sự liên hệ phong phú của toán học với cuộc sống đã được Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ nhiều lần đề cập và giới thiệu. Đọc những bài như: "*Con ong giỏi toán*"; "*Cây*"; "*Cái ngẫu nhiên cũng cần tính toán*" tôi thực sự ngỡ ngàng, những sự việc tôi vốn nghĩ "*bắn súng đại bác*" cũng không liên quan gì đến toán học vậy mà chúng lại có mối liên hệ sâu sắc với toán. Vậy nhưng bấy lâu nay chúng tôi rất hiếm khi gặp một bài viết về mối liên hệ giữa toán học và hóa học. Trong ba anh em ruột: Toán học, Vật lý và Hóa học; Hóa học như người em út khuất dưới cái bóng của hai ông anh Vật lý và Toán học đi cạnh nhau. Điều này khiến bấy lâu nay người ta hiểu lầm gán cho hóa học như đứa con rơi trong gia đình tự nhiên. Một phần do cách học Hóa mang nặng tính kinh viện của một bộ phận học sinh ngày nay, toán học chỉ được áp dụng một cách thô thiển nhất vào những bài toán hóa học rất thiếu tính thực tế. Thực ra, chỉ cần chịu khó đi sâu một chút bạn sẽ thấy toán học rất thân thiết với hóa học. Do trình độ còn thấp tôi chỉ nêu lên ví dụ nhỏ về mối liên hệ chặt chẽ này.

Có lẽ không người nào từng học hóa hữu cơ mà không biết đến khái niệm đồng phân cấu tạo. Đồng phân là hiện tượng các chất hữu cơ có cùng công thức phân tử nhưng có cấu tạo khác nhau. Rất nhiều bài tập yêu cầu các bạn viết công thức cấu tạo từ công thức phân tử. Có thể bạn làm rất dễ dàng và rất tốt, song có bao giờ bạn nghĩ có một công thức tổng quát cho phép xác định số đồng phân cấu tạo từ công thức phân tử không? Chẳng hạn công thức dãy đồng đẳng ankan là: $C_nH_{2n+2}$. Thường các bạn chỉ phải viết cấu tạo với $n \leq 7$, do số đồng phân không lớn quá 9 nên các bạn dễ dàng đếm được số đồng phân có thể có sau khi đã liệt kê đầy đủ, lần lượt từng cấu tạo. Nhưng nếu $n = 20$, các bạn thử viết xem? "Chỉ có" 366319 cấu tạo có thể có thôi. Rõ ràng việc liệt kê đơn thuần dựa vào hóa học rất dễ gặp sai lầm thậm chí là không thể. Nhưng nếu nhờ toán học: Đây là một bài toán cấu tạo một hình liên thông mà các điểm nút là những nguyên tử cacbon và các cung là gạch hóa trị. Giống hệt mô hình cây vẫn được dùng trong lý thuyết đồ thị hay tôpô tổ hợp. Cây đẻ nhánh chính là sự kiện tăng số $n$ trong công thức phân tử. Từ $n = 4$ cây "cấu tạo hóa học" bắt đầu đẻ nhánh theo hai cách khác nhau. Đối với những thành phần tiếp theo của dãy ankan các quan hệ còn phức tạp hơn rất nhiều. Nhờ cách biến đổi từ thuần túy hóa học sang suy nghĩ toán học, người ta đã khẳng định rằng có thể xác định số lớn nhất cấu tạo hóa học ứng với một công thức phân tử. Tất nhiên trong một số trường hợp do đặc điểm riêng của hóa học mà số chất trên thực tế có thể ít hơn sự tiên đoán của toán học. Nhưng cũng nên nhớ rằng để biết được số chất trên thực tế phải xác định số cấu tạo có thể có bằng toán học rồi mới kiểm chứng lại. Về mặt này ta có thể nêu lên một dẫn chứng tiêu biểu trong lịch sử: Năm 1874, *Cayley* dựa vào tư duy toán học đã biết rằng về lý thuyết người ta có thể có 8 chất từ công thức $C_5H_{11}OH$. Nhưng trong thời của ông chỉ có 2 chất trong số đó được biết. Sau đó, năm 1901 nhờ nghiên cứu, tìm kiếm hóa học theo những công thức của *Cayley* người ta đã phát hiện được 5 đồng phân nữa, gần đây đã tìm được nốt chất còn lại. Đây là một ví dụ về sự hợp tác tốt đẹp giữa Toán học và Hóa học.

Ngoài ra có thể kể được vô số những thành tựu lớn của Hóa học nhờ sự trợ giúp vô cùng quan trọng của Toán học như: lý thuyết nhóm, hình học phi Euclit (đặc biệt là phép toán đối xứng) trong hóa học lượng tử, hóa học lập thể, lý thuyết phản ứng hóa học. Một vài kết quả trong số đó rất gần gũi với học sinh THPT như: hình dáng các orbitan, thuyết lai hóa, hình học phân tử, cấu hình phân tử, động hóa học, đồng phân cấu hình, thuyết trường tinh thể,... Quả thật toán học ngày càng đi sâu vào hóa học. Ở mức độ nhất định nào đó việc giải quyết các vấn đề hóa học đã trở thành giải quyết toán học như phương trình Schrödinger (một phương trình cơ bản của vật lý lượng tử cho phép xác định xác suất có mặt của electron mà thực chất các quá trình hóa học là sự phân bố lại lớp electron của nguyên tử). Tuy chưa có lời giải chính xác nhưng sự đơn giản hóa các phương trình cơ lượng tử của Toán học đã giúp Hóa học đạt kết quả tuyệt diệu.

Các bạn thấy đấy Hóa học và Toán học rất gắn bó với nhau. Nhà bác học *Richard Feynman* nói rằng: "*Thiên nhiên nói với chúng ta bằng ngôn ngữ toán học*". Hóa học là một phần của thiên nhiên, vậy tại sao chúng ta không để hóa học nói với chúng ta ngôn ngữ toán học nhiều hơn nữa!

# TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

## BÀI SỐ 17

**Problem.** *Without calculator, compare two numbers $e^{\pi}$ and $\pi^{e}$.*

***Solution.*** Let $a = e^{\pi}$ and $b = \pi^{e}$. Taking natural logarithms preserves inequalities, therefore $a > b$ if and only if $\ln a > \ln b$ (1). But (1) is equivalent to $\pi^{\ln e} > e^{\ln \pi}$ or equivalent to

$$\frac{\ln e}{e} > \frac{\ln \pi}{\pi}.$$

Consider the function $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. We have $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$ which is smaller than 0 when $x > e$. Hence $f(x)$ is decreasing for $x > e$.

Therefore the inequality $\frac{\ln e}{e} > \frac{\ln \pi}{\pi}$ holds. So, $e^{\pi} > \pi^{e}$.

### TỪ VỰNG

*calculator* : máy tính

*compare* : so sánh

*natural logarithms* : logarit tự nhiên

*preserve* : giữ nguyên (chiều của bất phương trình)

*inequality* : bất phương trình, bất đẳng thức

**NGUYỄN PHỤ HOÀNG LÂN**
*(Trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)*

## BÀI DỊCH SỐ 14

**Bài toán.** *Tìm số các số tự nhiên sao cho trong biểu diễn thập phân của mỗi số, các chữ số giảm dần từ trái qua phải.*

***Lưu ý.*** Có một số lời giải cho bài này. Lời giải sau đây được đề xuất bởi hai học sinh *T. Hoang* và *C. Bac* (Lớp 12, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội).

***Lời giải.*** Xét dãy số sau: 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0. Có 10 vị trí để đặt các chữ số 9, 8, ..., 1, 0. Bài toán đã cho được quy về bài toán sau: giữa 10 vị trí, chúng ta sẽ chọn một vài (ít nhất là một) vị trí để đặt chữ số "1" vào và đặt các chữ số "0" vào các vị trí còn lại. Ví dụ số 9410 tương ứng với 1000010011; số 3 tương ứng với 0000001000, ... Có $2^{10} - 1 = 1023$ dãy nhị phân như thế (ta không đếm dãy nhị phân 0000000000). Do đó có tất cả 1023 số cần tìm.

***Nhận xét.*** Các bạn sau có lời dịch tốt, gửi bài sớm đến Tòa soạn: **Hà Nội:** *Nguyễn Văn Dũng*, *Hoàng Thị Thu Hoài*, 11A14, THPT Ngọc Tảo, Phúc Thọ; **Hải Dương:** *Nguyễn Đặng Sơn*, 11A, THPT Nam Sách; **Nghệ An:** *Dương Văn Minh*, 10A2, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Ngọc Thanh*, 11T1, *Phan Cảnh Minh Phước*, 11T2, THPT chuyên Quốc Học Huế; **Bến Tre:** *Lê Ngô Nhật Huy*, 10A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre; **Vĩnh Long:** *Châu Minh Khánh*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, TP. Vĩnh Long.

**HỒ HẢI** *(Hà Nội)*


**SỐ HẠNG TỔNG QUÁT CỦA DÃY SỐ !**

**GIẢI ĐÁP: 1 = 0 !**

*(Đề đăng trên TH&TT số 471, tháng 9 năm 2016)*

***Phân tích sai lầm.*** Bạn học sinh đó đã áp dụng sai định lý: *Nếu* $\lim u_n = a, \lim v_n = b$ *(a, b hữu hạn), thì* $\lim(u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n = a + b.$

Cần nhớ rằng định lý trên chỉ đúng trong trường hợp tổng $u_n + v_n$ có hữu hạn số hạng.

Do $\lim\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$ là giới hạn của tổng vô hạn nên không thể thực hiện biến đổi:

$$\lim\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$$
$$=\lim\frac{1}{n}+\lim\frac{1}{n}+\ldots+\lim\frac{1}{n}=0.$$

Đó chính là lí do dẫn đến kết quả sai: 1 = 0 !

***Nhận xét.*** Nhiều bạn đã tham gia bài này nhưng chỉ có các bạn sau phát hiện đúng sai lầm:
**Hà Nội:** *Đinh Châu Anh*, 12A1, THPT Hồ Xuân Hương, số 1, Nguyễn Quý Đức, Q. Thanh Xuân. **Hưng Yên:** *Triệu Ninh Ngân*, 12A9, *Nguyễn Thị Phương Oanh*, 11A1, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang. **Vĩnh Long:** *Lê Minh Quân*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

**KIHIVI**

Dãy số là một chuyên đề quan trọng trong bồi dưỡng học sinh giỏi. Trong chuyên đề dãy số có bài toán quen thuộc sau:

**Bài toán.** *Cho dãy số* $\{u_n\}$ *thỏa mãn:*

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ u_n = \dfrac{u_n + 2 - \sqrt{3}}{1 + (\sqrt{3}-2)u_n},\ n = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

*Tìm số hạng tổng quát* $u_n$.

***Lời giải.*** Ta có:

$$\tan\frac{\pi}{6} = \tan 2.\frac{\pi}{12} = \frac{2\tan\frac{\pi}{12}}{1-\tan^2\frac{\pi}{12}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \tan^2\frac{\pi}{12} + 2\sqrt{3}\tan\frac{\pi}{12} - 1 = 0 \Leftrightarrow \tan\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}.$$

Khi đó: $u_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \tan\dfrac{\pi}{6}.$

$$u_2 = \frac{\tan\frac{\pi}{6}+\tan\frac{\pi}{12}}{1-\tan\frac{\pi}{6}\tan\frac{\pi}{12}} = \tan\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}\right);$$

$$u_3 = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}\right)+\tan\frac{\pi}{12}}{1-\tan\frac{\pi}{6}\tan\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}\right)} = \tan\left(\frac{\pi}{6}+2.\frac{\pi}{12}\right).$$

Bằng quy nạp ta chứng minh được

$$u_n = \tan\left(\frac{\pi}{6}+(n-1).\frac{\pi}{12}\right),\ \forall n \geq 1.$$

***Các bạn có nhận xét gì về bài toán và lời giải trên?***

**PHẠM QUANG HÙNG**
*(GV THPT chuyên Thái Bình)*


**GIẢI ĐÁP:** $1 = 0$ !

***(Đề đăng trên TH&TT số 471, tháng 9 năm 2016)***

***Phân tích sai lầm.*** Bạn học sinh đó đã áp dụng sai định lý: *Nếu* $\lim u_n = a, \lim v_n = b$ *(a, b hữu hạn), thì* $\lim(u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n = a + b$.

Cần nhớ rằng định lý trên chỉ đúng trong trường hợp tổng $u_n + v_n$ có hữu hạn số hạng.

Do $\lim\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$ là giới hạn của tổng vô hạn nên không thể thực hiện biến đổi:

$$\lim\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$$
$$=\lim\frac{1}{n}+\lim\frac{1}{n}+\ldots+\lim\frac{1}{n}=0.$$

Đó chính là lí do dẫn đến kết quả sai: $1 = 0$ !

***Nhận xét.*** Nhiều bạn đã tham gia bài này nhưng chỉ có các bạn sau phát hiện đúng sai lầm:
**Hà Nội:** *Đinh Châu Anh*, 12A1, THPT Hồ Xuân Hương, số 1, Nguyễn Quý Đức, Q. Thanh Xuân. **Hưng Yên:** *Triệu Ninh Ngân*, 12A9, *Nguyễn Thị Phương Oanh*, 11A1, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang. **Vĩnh Long:** *Lê Minh Quân*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

**KIHIVI**

## SỐ HẠNG TỔNG QUÁT CỦA DÃY SỐ !

Dãy số là một chuyên đề quan trọng trong bồi dưỡng học sinh giỏi. Trong chuyên đề dãy số có bài toán quen thuộc sau:

**Bài toán**. *Cho dãy số* $\{u_n\}$ *thỏa mãn:*

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ u_n = \dfrac{u_n + 2 - \sqrt{3}}{1+(\sqrt{3}-2)u_n},\ n = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

*Tìm số hạng tổng quát* $u_n$.

***Lời giải***. Ta có:

$$\tan\frac{\pi}{6} = \tan 2.\frac{\pi}{12} = \frac{2\tan\frac{\pi}{12}}{1-\tan^2\frac{\pi}{12}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \tan^2\frac{\pi}{12} + 2\sqrt{3}\tan\frac{\pi}{12} - 1 = 0 \Leftrightarrow \tan\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}.$$

Khi đó: $u_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \tan\dfrac{\pi}{6}$.

$$u_2 = \frac{\tan\frac{\pi}{6}+\tan\frac{\pi}{12}}{1-\tan\frac{\pi}{6}\tan\frac{\pi}{12}} = \tan\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}\right);$$

$$u_3 = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}\right)+\tan\frac{\pi}{12}}{1-\tan\frac{\pi}{6}\tan\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}\right)} = \tan\left(\frac{\pi}{6}+2.\frac{\pi}{12}\right).$$

Bằng quy nạp ta chứng minh được

$$u_n = \tan\left(\frac{\pi}{6}+(n-1).\frac{\pi}{12}\right), \forall n \geq 1.$$

***Các bạn có nhận xét gì về bài toán và lời giải trên?***

**PHẠM QUANG HỪNG**
*(GV THPT chuyên Thái Bình)*

**Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ**
**Mathematics and Youth Magazine**

*XUẤT BẢN TỪ 1964*
Số 475 (1.2017)
Tòa soạn : Tầng 12, Tòa nhà Diamond Flower, Số 1, Hoàng Đạo Thúy, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.35121607, ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com



## TRONG SỐ NÀY



*Biên tập*: LÊ MAI - NGUYỄN HIỆP
*Mĩ thuật*: QUỐC HIỆP, THANH LONG
*Trị sự, phát hành*: NGUYỄN KHOA ĐIỀM, NGUYỄN THỊ THU HUYỀN
*Thiết kế, chế bản*: MAI ANH

# TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

*Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc*

*Cuốn sách*

## NHỮNG CON ĐƯỜNG SÁNG TẠO TRONG GIẢI TOÁN HÌNH HỌC

**(của các tác giả: PGS.TS. NGƯT Lê Quốc Hán (chủ biên), TS. Đinh Quang Minh, Th.S. Lê Thị Ngọc Thúy)**

Sách dày 472 trang, khổ 17 × 24cm, giá bìa 80.000 đồng. Nội dung của sách trình bày các phương pháp giải những loại toán *hình học phổ thông* điển hình với gần 1000 bài toán hình học từ lớp 7 đến lớp 12 theo chương trình Bộ Giáo dục & Đào tạo hiện ban hành. Ngoài ra sách còn trình bày nguồn gốc những bài toán ấy và cách thức sáng tác các bài toán mới từ chúng. Có lẽ đây là nét khác biệt của cuốn sách này với phần lớn các sách tham khảo toán cùng loại.


Sách gồm ba phần chính. Phần *Hình học phẳng* dành cho các học sinh khá giỏi về toán; trong đó có nhiều bài toán không dễ, được chọn trong các đề thi Olympic Toán Quốc tế và Khu vực. Một số định lý và khái niệm quen thuộc và ít quen thuộc được đề cập khá chi tiết như: *Định lý Thales, Định lý Pythagore, Định lý Ptolemy, Công thức Lebniz, Công thức Euler, Bài toán Torricelli, Bài toán Napoléon, Đường thẳng và đường tròn chín điểm Euler, Đường thẳng Simson, Điểm Lemoine*, ... Phần *Hình học không gian* chủ yếu dành cho học sinh đại trà. Vì vậy bên cạnh các bài toán khó đánh dấu * là những bài toán chọn trong các đề thi Tuyển sinh Đại học hay Tốt nghiệp THPT mấy năm gần đây. Ngoài phương pháp chính là suy luận lôgic, thỉnh thoảng các tác giả sử dụng công cụ vectơ nếu thấy thật cần thiết. Phần *Mối liên hệ giữa hình học với các phân môn khác* như Lượng giác, Đại số; các tác giả tập trung vào phần *Tam giác lượng* với nhiều bài toán hay, và trong phần *Phương pháp hình học trong đại số* đề cập đến một số dạng toán hình học giải tích phẳng thường gặp trong các kỳ thi Tuyển sinh đại học hay Tốt nghiệp THPT.

Sách cố gắng trình bày dựa trên sự kết hợp hài hòa của văn phong tươi mát, độc đáo và sắc sảo của Polya với sự giản dị dễ hiểu mà thâm trầm sâu sắc của Hứa Thuần Phỏng. Có thể xem đây là những suy nghiệm sâu sắc nhất của nhóm tác giả, đặc biệt là của NGƯT Lê Quốc Hán, chủ biên cuốn sách với 50 năm học và giải toán.

Tin rằng cuốn sách không chỉ hữu ích cho học sinh và thầy cô giáo yêu toán phổ thông, mà còn là tài liệu tham khảo tốt cho sinh viên và giảng viên các trường Đại học và Cao đẳng ngành Toán, cùng các phụ huynh có nguyện vọng giúp con em mình học tốt môn Hình học vốn được xem là khó nhưng hấp dẫn này.

---

*Mọi chi tiết xin liên hệ:* **TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ**

**Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội**

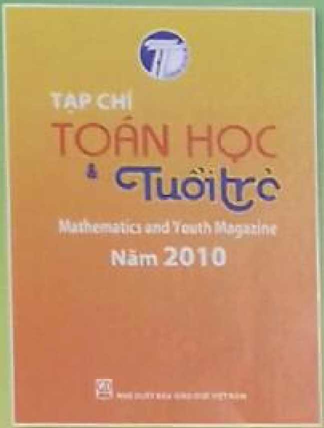
- ĐT Biên tập: (04) 35121607
- ĐT/Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606
- Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com
- Website: www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre

# TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

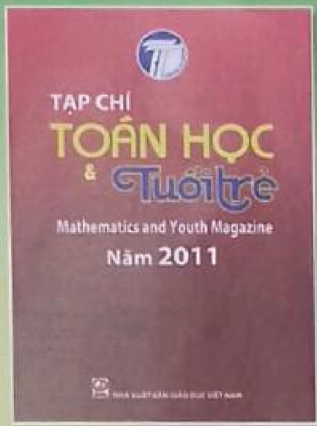
*Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc*

***Bộ đóng tập***

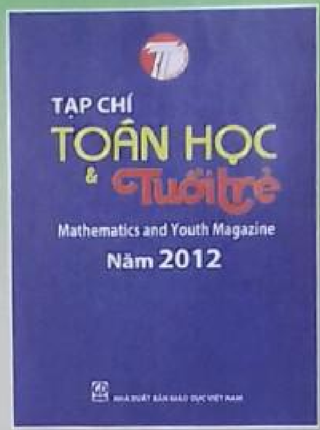
## TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ HÀNG NĂM



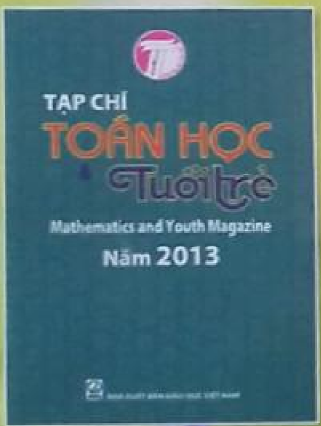

Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 99.000 đồng



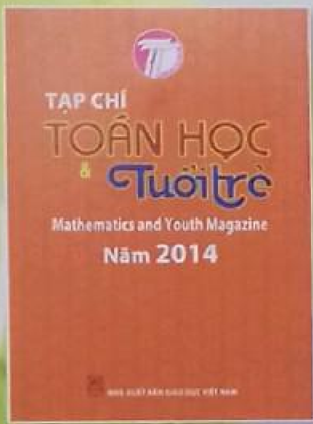

Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 126.000 đồng



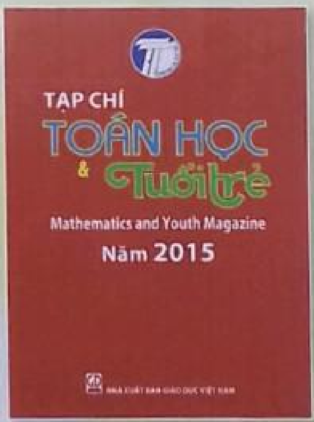

Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 152.000 đồng



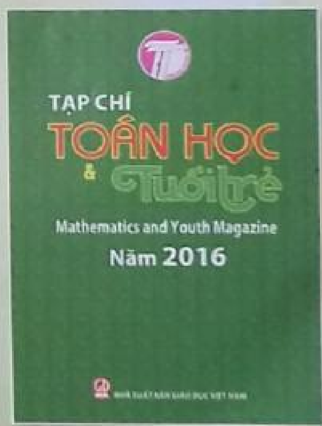

Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 175.000 đồng




Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 185.000 đồng




Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng




Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

**Bạn đọc có thể đặt mua các cuốn Đóng tập này tại các cơ sở BƯU ĐIỆN trên toàn quốc hoặc đặt mua tại Tòa soạn.**

*Mọi chi tiết xin liên hệ:*

**TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ**

**Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội**

- ĐT Biên tập: (04) 35121607
- ĐT/Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606
- Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com
- Website: www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre

**ISSN: 0866-8035**
**Chỉ số: 12884**
**Mã số: 8BT1M7**

**Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010**
**In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP**
**In xong và nộp lưu chiểu tháng 1 năm 2017**

**Giá: 12.500 đồng**
**Mười hai nghìn năm trăm đồng**


## GIẢI ĐÁP: ĐÃ ĐÚNG CHƯA ?

*(Đề đăng trên TH&TT số 472, tháng 10 năm 2016)*

***Phân tích.*** Bạn *Thành* đã sai khi nhận giá trị $P=\frac{-7}{5}$, vì khi đó:

$$\frac{-7}{5}=P=|\sin x|+\cos x\ge \sin x+\cos x=\frac{1}{5}: \text{vô lý.}$$

***Lời giải đúng.*** *Cách 1.* (Sửa lời giải trên)

Nếu $\sin x\ge 0$ thì

$$P=|\sin x|+\cos x=\sin x+\cos x=\frac{1}{5}.$$

Nếu $\sin x<0$ thì $P=|\sin x|+\cos x=-\sin x+\cos x$.

Khi $\sin x<0$, ta có

$$\begin{cases}\sin x+\cos x=\frac{1}{5}\\ -\sin x+\cos x=P\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-P\right)\\ \cos x=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}+P\right)\end{cases}.$$

Ta có: $\sin^2 x+\cos^2 x=1\Leftrightarrow\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}-P\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}+P\right)^2=1$

$$\Leftrightarrow\frac{2}{25}+2P^2=4\Leftrightarrow P^2=\frac{49}{25}\Leftrightarrow P=\pm\frac{7}{5}.$$

Vì $\sin x<0\Rightarrow P=\frac{7}{5}$. Vậy $P=\frac{1}{5}$ hoặc $P=\frac{7}{5}$.

*Cách 2.* Ta có $\begin{cases}\sin x+\cos x=\frac{1}{5}\\ \sin^2 x+\cos^2 x=1\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x+\cos x=\frac{1}{5}\\ (\sin x+\cos x)^2-2\sin x.\cos x=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x+\cos x=\frac{1}{5}\\ \sin x.\cos x=\frac{-12}{25}\end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\sin x$, $\cos x$ là nghiệm của phương trình

$$t^2-\frac{1}{5}t-\frac{12}{25}=0\Leftrightarrow t=\frac{4}{5}, t=\frac{-3}{5}.$$

Với $\sin x=\frac{4}{5}$, $\cos x=\frac{-3}{5}$, ta có

$$P=|\sin x|+\cos x=\frac{4}{5}-\frac{3}{5}=\frac{1}{5}.$$

Với $\sin x=\frac{-3}{5}, \cos x=\frac{4}{5}$, ta có

$$P=|\sin x|+\cos x=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}=\frac{7}{5}.$$

Vậy $P=\frac{1}{5}$ hoặc $P=\frac{7}{5}$.

***Nhận xét.*** Trong các bài gửi về Tòa soạn, các bạn sau đã phân tích đúng sai lầm và đưa ra lời giải đúng:

**Hà Nội:** *Hoàng Thị Thu Hoài*, 11A14, THPT Ngọc Tảo. **Hưng Yên:** *Nguyễn Thị Quỳnh Hoa*, 11A1, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang. **Hà Nam:** *Lê Phương Nam*, 11 Toán, THPT chuyên Biên Hòa. **Thanh Hóa:** *Hoàng Huy Toản*, 12A1, THPT Hoằng Hóa IV, Hoằng Hóa. **Nghệ An:** *Mai Thị Kim Chi*, *Lê Thị Thùy Dung*, 11A1, THPT Cửa Lò, TX. Cửa Lò. **Thừa Thiên Huế:** *Lê Cẩm Thanh Hà*, 11 Toán 2; *Lê Cẩm Huyền*, 11 Lý, THPT chuyên Quốc Học Huế. **Tiền Giang:** *Lê Hoàng Bảo*, 11 Toán, THPT chuyên Tiền Giang. **Bến Tre:** *Lê Ngô Nhật Huy*, 10A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre.

**KIHIVI**

## LỜI GIẢI NGẮN GỌN !

***Đề bài:*** *Trong không gian Oxyz, cho điểm M(1; 0; 5) và hai đường thẳng $d_1$, $d_2$ lần lượt có phương trình tham số là*

$$\begin{cases}x=1+2t\\ y=3-2t\ (t\in\mathbb{R})\\ z=1+t\end{cases} \text{ và } \begin{cases}x=1-t\\ y=2+t\ (t\in\mathbb{R}).\\ z=1-3t\end{cases}$$

*Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M và cắt cả hai đường thẳng $d_1$, $d_2$.*

Có bạn học sinh giải như sau:

Gọi $A(1+2t;\ 3-2t;\ 1+t)=\Delta\cap d_1$

$B(1-t;\ 2+t;\ 1-3t)=\Delta\cap d_2$.

Khi đó $\overrightarrow{AB}(-3t;-1+3t;-4t)$ $(\overrightarrow{AB}\ne\vec{0}\ \forall t\in\mathbb{R})$ là một vectơ chỉ phương của Δ. Vậy Δ có phương trình tham số $\begin{cases}x=1-3t\\ y=-1+3t\ (t\in\mathbb{R}).\\ z=5-4t\end{cases}$

***Bạn có nhận xét gì về lời giải ngắn gọn trên ?***

**NGUYỄN VĂN XÁ**

*(GV THPT Yên Phong Số 2, Bắc Ninh)*


## GIẢI ĐÁP: ĐÃ ĐÚNG CHƯA ?

*(Đề đăng trên TH&TT số 472, tháng 10 năm 2016)*

***Phân tích.*** Bạn *Thành* đã sai khi nhận giá trị $P=\frac{-7}{5}$, vì khi đó:

$$\frac{-7}{5}=P=\left|\sin x\right|+\cos x\geq \sin x+\cos x=\frac{1}{5}: \text{vô lý.}$$

***Lời giải đúng.*** *Cách 1.* (Sửa lời giải trên)

Nếu $\sin x\geq 0$ thì

$$P=\left|\sin x\right|+\cos x=\sin x+\cos x=\frac{1}{5}.$$

Nếu $\sin x<0$ thì $P=\left|\sin x\right|+\cos x=-\sin x+\cos x$.

Khi $\sin x<0$, ta có

$$\begin{cases}\sin x+\cos x=\dfrac{1}{5}\\ -\sin x+\cos x=P\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{5}-P\right)\\ \cos x=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{5}+P\right)\end{cases}.$$

Ta có: $\sin^2 x+\cos^2 x=1\Leftrightarrow\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}-P\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}+P\right)^2=1$

$$\Leftrightarrow\frac{2}{25}+2P^2=4\Leftrightarrow P^2=\frac{49}{25}\Leftrightarrow P=\pm\frac{7}{5}.$$

Vì $\sin x<0\Rightarrow P=\frac{7}{5}$. Vậy $P=\frac{1}{5}$ hoặc $P=\frac{7}{5}$.

*Cách 2.* Ta có $\begin{cases}\sin x+\cos x=\dfrac{1}{5}\\ \sin^2 x+\cos^2 x=1\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x+\cos x=\dfrac{1}{5}\\ (\sin x+\cos x)^2-2\sin x.\cos x=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x+\cos x=\dfrac{1}{5}\\ \sin x.\cos x=\dfrac{-12}{25}\end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\sin x$, $\cos x$ là nghiệm của phương trình

$$t^2-\frac{1}{5}t-\frac{12}{25}=0\Leftrightarrow t=\frac{4}{5}, t=\frac{-3}{5}.$$

Với $\sin x=\frac{4}{5}$, $\cos x=\frac{-3}{5}$, ta có

$$P=\left|\sin x\right|+\cos x=\frac{4}{5}-\frac{3}{5}=\frac{1}{5}.$$

Với $\sin x=\frac{-3}{5}$, $\cos x=\frac{4}{5}$, ta có

$$P=\left|\sin x\right|+\cos x=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}=\frac{7}{5}.$$

Vậy $P=\frac{1}{5}$ hoặc $P=\frac{7}{5}$.

***Nhận xét.*** Trong các bài gửi về Tòa soạn, các bạn sau đã phân tích đúng sai lầm và đưa ra lời giải đúng:

**Hà Nội:** *Hoàng Thị Thu Hoài*, 11A14, THPT Ngọc Tảo. **Hưng Yên:** *Nguyễn Thị Quỳnh Hoa*, 11A1, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang. **Hà Nam:** *Lê Phương Nam*, 11 Toán, THPT chuyên Biên Hòa. **Thanh Hóa:** *Hoàng Huy Toản*, 12A1, THPT Hoằng Hóa IV, Hoằng Hóa. **Nghệ An:** *Mai Thị Kim Chi, Lê Thị Thùy Dung*, 11A1, THPT Cửa Lò, TX. Cửa Lò. **Thừa Thiên Huế:** *Lê Cẩm Thanh Hà*, 11 Toán 2; *Lê Cẩm Huyền*, 11 Lý, THPT chuyên Quốc Học Huế. **Tiền Giang:** *Lê Hoàng Bảo*, 11 Toán, THPT chuyên Tiền Giang. **Bến Tre:** *Lê Ngô Nhật Huy*, 10A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre.

**KIHIVI**

## LỜI GIẢI NGẮN GỌN !

***Đề bài:*** *Trong không gian Oxyz, cho điểm $M(1;0;5)$ và hai đường thẳng $d_1$, $d_2$ lần lượt có phương trình tham số là*

$$\begin{cases}x=1+2t\\ y=3-2t\ (t\in\mathbb{R})\\ z=1+t\end{cases}\text{ và }\begin{cases}x=1-t\\ y=2+t\ (t\in\mathbb{R}).\\ z=1-3t\end{cases}$$

*Viết phương trình đường thẳng $\Delta$ đi qua M và cắt cả hai đường thẳng $d_1$, $d_2$.*

Có bạn học sinh giải như sau:

Gọi $A(1+2t;\,3-2t;\,1+t)=\Delta\cap d_1$

$B(1-t;\,2+t;\,1-3t)=\Delta\cap d_2$.

Khi đó $\overrightarrow{AB}(-3t;-1+3t;-4t)$ ($\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}\ \forall t\in\mathbb{R}$) là một vectơ chỉ phương của $\Delta$. Vậy $\Delta$ có phương trình tham số $\begin{cases}x=1-3t\\ y=-1+3t\ (t\in\mathbb{R}).\\ z=5-4t\end{cases}$

***Bạn có nhận xét gì về lời giải ngắn gọn trên ?***

**NGUYỄN VĂN XÁ**

*(GV THPT Yên Phong Số 2, Bắc Ninh)*

**Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ**
**Mathematics and Youth Magazine**

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 476 (2.2017)
Tòa soạn : Tầng 12, Tòa nhà Diamond Flower, Số 1, Hoàng Đạo Thúy, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.35121607, ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com



## TRONG SỐ NÀY



*Biên tập*: LÊ MAI - NGUYỄN HIỆP
*Trị sự, phát hành*: NGUYỄN KHOA ĐIỀM, NGUYỄN THỊ THU HUYỀN
*Mĩ thuật*: QUỐC HIỆP, THANH LONG
*Thiết kế, chế bản*: MAI ANH

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM
**NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC TẠI TP. ĐÀ NẴNG**
Địa chỉ: 771 Nguyễn Hữu Thọ, P. Khuê Trung, Q. Cẩm Lệ, TP. Đà Nẵng
Điện thoại: (0511).3787877 - Fax: (0511).3787368


ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT2M7
Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 2 năm 2017
Giá: 12.500 đồng
Mười hai nghìn năm trăm đồng