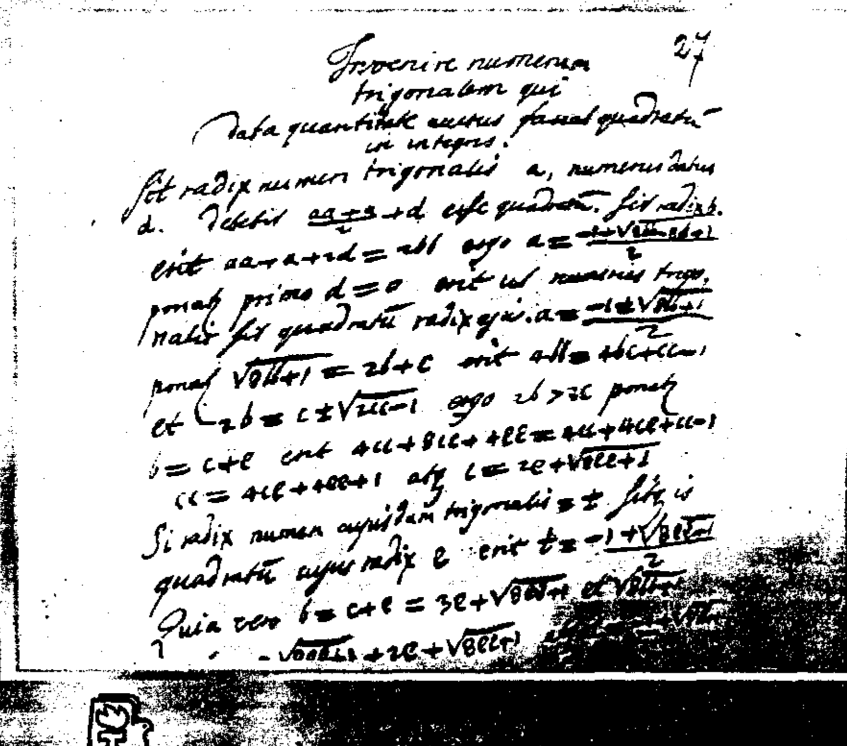
Giáo sư NGUYỄN CANG
Tiến sĩ Cao cấp Khoa học Toán học
Nguyên Chủ nhiệm Khoa Toán
Trường Đại học Tổng hợp Tp. Hồ Chí Minh

LỊCH SỬ TOÁN HỌC



NHÀ

Giáo sư NGUYỄN CANG
Tiến sĩ Cấp cao Khoa học Toán học
Nguyên Chủ nhiệm Khoa toán
Trường Đại học Tổng hợp TP. Hồ Chí Minh

LỊCH SỬ TOÁN HỌC

NHÀ XUẤT BẢN TRẺ

LỊCH SỬ TOÁN HỌC

GSTS. NGUYỄN CANG

Chịu trách nhiệm xuất bản:

LÊ HOÀNG

Biên tập:

YẾN CA

Vẽ bìa:

TRÍ ĐỨC

Sửa bản in:

KIẾN QUỐC

NHÀ XUẤT BẢN TRẺ

161B, Lý Chính Thắng – Quận 3 – Thành phố Hồ Chí Minh

In 1.500 cuốn, khổ 14x20cm tại Xí nghiệp in Nguyễn Minh Hoàng, số 100 Lê Đại Hành, P.7, Q.11, TP. HCM. ĐT : 8555812. Số đăng ký kế hoạch xuất bản 568/31 do Cục xuất bản cấp ngày 3-7-1998 và giấy trích ngang KHXB số 510/99. In xong và nộp lưu chiểu tháng 08 năm 1999.

Lời nói đầu

Cứ 4 năm một lần, các nhà Toán học thế giới tổ chức một cuộc hội thảo lớn thuộc các lĩnh vực của Toán đồng thời trao giải thưởng cao quý nhất – tương đương giải Nobel, gọi là giải Fields – cho 4-5 nhà Toán học xuất sắc dưới 40 tuổi được bình chọn từ các nước. Trong các cuộc hội thảo quy mô thế giới như vậy, các lĩnh vực của Toán được chia thành hơn 20 tiểu ban để thảo luận, và số nhà Toán học toàn thế giới tụ họp về đây rất đông, ví dụ năm 1998 Cộng hòa Liên bang Đức được mời là nước chủ nhà đăng cai hội thảo và số nhà Toán học tập trung về đây lên đến 5 nghìn! Trong hơn 20 Tiểu ban ấy (số Tiểu ban có thể thay đổi từ 19 đến 22, tùy năm) bao giờ cũng có Tiểu ban *"Phương pháp dạy Toán, Lịch sử Toán học và Triết học trong Toán học"*. Việt Nam ta tham gia hội thảo chính thức và quy mô từ 1956, tổ chức tại Mạc Tư Khoa và liên tục từ đó đến nay ta đều có đại biểu đi dự, tuy số lượng có thay đổi tùy năm do điều kiện có thuận lợi nhiều hay ít. Chúng ta có tham gia nhiều Tiểu ban (Giải tích, Hình học, Phương trình vi phân thường, Phương trình đạo hàm riêng, Vận trù, Tối ưu hóa, Đại số.......) nhưng ít khi chúng ta tham gia Tiểu ban *"Phương pháp dạy Toán, Lịch sử Toán và Triết học trong Toán học"*

Chúng ta có những báo cáo về "Phương pháp giảng dạy Toán" nhưng hầu như chưa có báo cáo nào nghiên cứu về "Lịch sử Toán và Triết học trong Toán học". Từ sau Cách Mạng tháng 8-1945, nhất là từ sau 1954, khi Miền Bắc được hoàn toàn giải phóng, đội ngũ những *người dạy Toán và nghiên cứu Toán* ngày một đông đảo, vừa nhiều về số lượng vừa có uy tín quốc tế ngày một rộng lớn. Đã đến lúc chúng ta cần có một tập thể những người nghiên cứu Lịch sử Toán Việt Nam bên cạnh Lịch sử Toán thế giới và trong đội ngũ những người quan tâm đến Triết học nên có một bộ phận chuyên về Triết học trong Khoa học Tự nhiên (trong đó có Triết học trong Toán học). Chúng tôi hoan nghênh Giáo sư Tiến sĩ Nguyễn Cảnh Toàn đã biên soạn 2 tập chuyên khảo rất bổ ích cho người học, nghiên cứu Toán và thầy dạy Toán *"Phương pháp luận duy vật biện chứng với việc học, dạy, nghiên cứu Toán học"* (Nhà Xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, 1997) và *mong rằng những người tâm đắc* với Giáo sư Nguyễn Cảnh Toàn ngày càng đông. Với suy nghĩ như vậy, tôi biên soạn tập tài liệu này nhằm mục đích:

* Trình bày có hệ thống và dễ hiểu lịch sử Toán học từ thời Thượng cổ đến "bình minh" của Toán học cận đại, *nhưng một cách tóm tắt.*

* Để cho đối tượng phục vụ của sách được rộng rãi, tài liệu này không đi sâu về kiến thức Toán do đó không đề cập tới ý nghĩa triết học của Toán học.

Tuy vậy, học sinh, sinh viên, giáo viên có thể tìm thấy ở tài liệu này không ít điều lý thú xoay quanh lĩnh vực Toán học một cách mạch lạc.

Đúng ra, để làm tốt công việc này nên có một tập thể, nhưng trong lúc chờ đợi, chúng tôi biên soạn tài liệu này không ngoài mục đích góp phần khởi động, hy vọng công việc ngày một hoàn thiện hơn, phục vụ các bạn học sinh, sinh viên tốt hơn. Tài liệu tham khảo chính của chúng tôi là các bài giảng, soạn khá công phu của Jean Paul Collette tại Đại học Québec (Canada) với đối tượng là sinh viên học chuyên đề Lịch sử Toán và Phương pháp giảng dạy Toán. Bên cạnh tài liệu trên, chúng tôi rất trân trọng quyển *"Lịch sử Toán học giản yếu"* do Giáo sư Jean Dieudonné chủ biên với sự cộng tác của 10 Giáo sư khác (Nhà Xuất bản Hermann, Paris) với nội dung Toán học rất phong phú, chuyên sâu, thích hợp với Giảng viên Toán ở Đại học, sinh viên Đại học và Cao học Toán. Vì vậy, chúng tôi tham khảo có mức độ, tránh đi sâu vào kiến thức Toán để phục vụ được đông đảo độc giả hơn. Ngoài ra chúng tôi còn tham khảo thêm nhiều sách nữa, đặc biệt là quyển *"Tiểu từ điển bách khoa Toán học"* theo bản dịch từ tiếng Đức sang tiếng Pháp do Giáo sư J.L.Lions chủ biên. Chỉ nêu 3 quyển sách trên để bạn nào quan tâm xin mời đi sâu thêm và hy vọng ngày càng có nhiều bạn tâm đắc. Chúng tôi có ý định biên soạn lịch sử Toán ở thế kỷ 19 và 20 riêng thành một tập với sự cộng tác của đồng nghiệp trong và ngoài nước vì Toán học ở hai thế kỷ này rất phát triển nhưng tài liệu có ở trong nước thì không đủ. Rất mong sự cộng tác của các bạn xa gần. Xin thành thực cám ơn trước.

Tp. Hồ Chí Minh, tháng 3, 1999.

NGUYỄN CANG

MỞ ĐẦU

Người Tiền sử xuất hiện trên Trái Đất từ hàng triệu năm trước, nhưng các nhà khoa học gần như chấp nhận ý kiến cho rằng cách đây khoảng 5 – 6 nghìn năm loài người mới bắt đầu có những hoạt động chứng tỏ họ có một nền văn minh nhất định và nền Toán học Cổ đại thực sự hình thành từ thế kỷ thứ 5 trước Công nguyên mà thôi, và hầu như từ thời xa xưa, người ta đã thừa nhận lịch sử Toán học là xương sống của lịch sử Khoa học của nhân loại.

Nghiên cứu Lịch sử Toán học, người đời sau kể cả chúng ta bây giờ, vẫn thấy còn nhiều điều thật khó hình dung nổi không hiểu người xưa căn cứ vào đâu mà đi đến những kết luận chính xác và huyền bí như vậy. Ví như bài toán gấp đôi một lập phương là một trong ba bài toán nổi tiếng từ thời Hy lạp xưa, đến ngày nay không ít người trong chúng ta còn hiểu được nó một cách vất vả khổ sở. Trong tập IX, mệnh đề 20 của bộ Eléments của Euclide đã chứng minh rằng *"số các số nguyên tố là vô hạn"*. Điều đó Euclide đã phát biểu cách đây trên 2000 năm. Thời ấy hiểu được mệnh trên không dễ nhưng ngày nay nhờ *"lý luận bằng phản chứng"* ta đã thấu suốt được nó. Theo thời gian, nhiều lập luận toán học được soi sáng thêm. Có lẽ vì thế mà ta không ngạc nhiên một tí nào khi thấy thế kỷ XX sắp kết thúc nhưng vẫn chưa thấy xuất hiện một Lịch sử Toán học của thế kỷ 20.

Hy vọng trong một vài thập kỷ đầu của thế kỷ 21, chúng ta sẽ được đọc một số công trình cá nhân hay tập thể đúc kết thành tựu toán học của thế kỷ 20 và lúc đó chắc chắn một bộ *"Lịch sử Toán học thế giới từ cổ đại đến hết thế kỷ 20"* sẽ ra đời.

Chương 1.

TOÁN HỌC THỜI TIỀN SỬ

Nhân loại biết tư duy toán học ở hình thức thô sơ từ bao giờ? Nhiều nhà nghiên cứu cho rằng Toán học được biết đến dưới dạng phép đếm và các khái niệm ban đầu về Hình học được hình thành ở Hy lạp từ thế kỷ thứ V trước Công nguyên. Tài liệu mà chúng ta có ngày nay đã minh chứng rằng quan niệm về phép đếm thô thiển cũng như hình học đã ra dời từ trước khi có nền văn minh cổ đại. Ngày nay các nhà Khảo cổ học tuy còn chưa thống nhất với nhau về nguồn gốc loài người, nhưng tất cả đều chung một nhận định là trước Công nguyên 40.000 năm (người Neandertal), con người đã biết suy nghĩ. Chứng cớ là người ta đã tìm thấy 2 yếu tố mang tính chất Toán học ở dạng sơ khai của xã hội Tiền sử:

* một dạng "ngôn ngữ" qua đó người ta phát hiện ra một hệ thống số.

* một số công cụ dùng trong xây dựng.

Quan hệ số

Có một số nhân tố khiến chúng ta tin rằng người Tiền sử đã có khái niệm về số. Nhiều thổ dân ngày nay ở Châu Úc và Polynésie hay dùng một hệ thống số dưới dạng mô tả. Họ không biết làm ruộng và không hề biết dùng cung tên. Carl B. Boyer trong *"A History of Mathematics"* New York, Wiley 1968, trang 4, có viết ở Tiệp người ta phát hiện một khúc xương chó sói hóa thạch có độ tuổi là 30.000 năm; trên đó có vết tích của 55 ký hiệu sắp xếp làm hai dãy mỗi dãy có từng nhóm 5 ký hiệu. Nhờ việc làm nhẫn nại, quên mệt mỏi của các nhà khảo cổ học và dân tộc học mà ngày nay người ta có thể dựng lại một cách khách quan quá trình tự nhiên mà người Tiền sử đã dùng để "đếm" các đồ vật cụ thể

Sự hình thành số ở người nguyên thủy

Trước khi ra đời một thứ ngôn ngữ để giao lưu, người nguyên thủy có nhận xét phân biệt trong tự nhiên giữa một cái cây và một rừng cây, giữa một con chó sói và một bầy chó sói v.v... nghĩa là phân biệt giữa ít và nhiều. Điều này có thể đã hình thành rất sớm, cũng như khái niệm về cặp; ví dụ một cặp chân, một đôi mắt, hai bàn tay....đã được người Tiền sử chú ý khá lâu. Theo quan niệm của chúng ta bây giờ thì đó là những nhận xét ban đầu dẫn đến khái niệm "một đối một", đó là giai đoạn đầu của phép đếm...Vật được quan sát bằng mắt là trung tâm chú ý của người Tiền sử. Và khi vật khuất mắt thì cái hiện ra trong đầu là hình ảnh của vật chứ không phải là số. Charles Darwin nói rằng trí nhớ và sự tưởng tượng là hai yếu tố quan trọng cấu thành sự suy luận toán học và động vật cao cấp (con người Tiền sử) đã từng sử dụng hai yếu tố cần thiết ấy. Từ những nhận xét thô sơ, người Tiền sử dần dần có ý so sánh và kết hợp mỗi vật quan sát được với một dấu hiệu hoặc một cái gì đó khá quen thuộc đối với họ, và điều này mỗi bộ lạc, mỗi dân tộc, có cách làm riêng của mình do nhu cầu trong đời sống hàng ngày. Ví dụ dân tộc Sumériens cổ đại (là một dân tộc có một nền văn minh rất sớm, họ sống ở thung lũng sông Euphrate, thuộc miền Trung, Cận Đông bây giờ) quen dùng từ "đàn ông" để chỉ 1, "đàn ông", "đàn bà" hôn phối để chỉ 2, và "nhiều" để chỉ 3. Người lùn Pygmées châu Phi thì dùng phương pháp lặp lại; ví dụ a chỉ 1, oa chỉ 2, ua chỉ 3, oa-oa chỉ 4 v.v..... *Bộ lạc Kamilarai ở châu Úc dùng từ bulan để chỉ* 2 và bulan-bulan để chỉ 4.

Hệ thống đếm

Các nhà khảo cổ, các nhà dân tộc học đều nhận xét các bộ lạc Tiền sử thường có thói quen nhóm 2 phần tử lại với nhau, hoặc 4, hoặc 6 phần tử lại với nhau, đó là cơ sở ban đầu của phép đếm. Một hệ thống đếm tự nhiên và phổ biến là phép đếm ứng với các ngón tay (nhóm 5 phần tử lại với nhau), hoặc ứng với các ngón của 2 bàn tay (nhóm 10 phần tử lại với nhau), hoặc *ứng với các ngón tay và ngón chân* (nhóm 20 phần tử lại với nhau). Giáo sư J.Struik trường Đại học Stanford (Mỹ) phát hiện có đến 307 cách đếm (nhóm các phần tử lại) của các bộ lạc da đỏ châu Mỹ. Người Tiền sử khi đã dùng hết các ngón tay, các ngón chân để đếm mà đối tượng cần đếm vẫn còn dư thì làm thế nào? Người Pygmées châu Phi cũng như nhiều bộ lạc thời ấy có sáng kiến dùng phương pháp lặp lại nói trên nghĩa là:

1	2	3	4	5	6	....
a	oa	ua	oa-oa	oa-ua	ua-ua	...

Một phương pháp khác rất thông minh của người Tiền sử la dùng nguyên tắc vị trí cũng na ná như ta bây giờ, nói theo ngôn ngữ của chúng ta ngày nay cho dễ hiểu; ví dụ số 1 ở hàng đơn vị là một đơn vị nhưng nếu nó đứng ở vị trí hàng chục thì đọc là một chục v.v.... Rồi nhu cầu trong sinh hoạt hàng ngày tuy còn đơn giản nhưng nhu cầu trao đổi thành quả hái lượm săn bắn....là cần; vì vậy mà hình thành những cách tính toán nguyên thuỷ nhưng tất nhiên là chỉ dùng số tự nhiên mà thôi!

Số và thú vật

Qua các giai đoạn phát triển, người Tiền sử dần dà tiếp cận với khái niệm về số, và nhờ đó mà nhận biết được trong một quần thể (một bầy chó săn, một nhóm đi săn bắn...) "số lượng giảm đi hay tăng lên". Một câu hỏi lý thú được đặt ra: "Khả năng cảm nhận tăng, giảm hoặc cao hơn là đếm ở loài thú có hay không?"

Câu trả lời khẳng định là có nhất là đối với một số loài chim, một số loài côn trùng, loài chuột, hải cẩu...Công trình nghiên cứu của Giáo sư Otto Koehler, trường Đại học Freiburg, đã chứng minh điều đó. Ta cũng có thể làm một vài thí dụ đơn giản: trong một tổ chim có 4 trứng. Nếu ta lấy đi 1 trứng thì con chim mái chưa có phản ứng gì, nhưng lấy đi 2 thì con chim đang ấp trứng cảm nhận được ngay. Ta có cảm giác là con chim đang ấp có thể phân biệt được giữa 4 trứng và 2 trứng. Người ta còn huấn luyện cho con chim họa mi đếm được đến 3. Tất nhiên ta cũng không vội vàng kết luận là loài thú có "óc toán học" nhưng những hành động theo bản năng, theo thói quen ấy giúp cho nhà nghiên cứu đi ngược dòng lịch sử tìm hiểu những việc làm của người Tiền sử từ lúc còn sơ khai, hành động theo bản năng, thói quen, rồi dần dà tư duy phát triển qua lao động (con người có ưu việt hơn là đôi bàn tay) và tiến xa không ngừng.

Phép tính trên các số tự nhiên

Theo cách tìm hiểu của chúng ta ngày nay: người xưa đếm tức là *"cộng"* các số tự nhiên và kết quả của đếm là do cộng các số nhỏ hơn. Ví dụ 5 có thể là do 1 + 4 hay 2 + 3, hoặc 1 + 1 + 1 + 2, hay 1 + 1 + 1 + 1 + 1 v.v.... Phép *"trừ"* xuất phát từ thói quen ở một số bộ lạc, ví dụ 6 là do 7 – 1. Nhưng 3 – 3 là được xếp riêng ra vì thời bấy giờ người ta chưa biết đến số 0 cũng như số âm. Phép *"nhân"* có nguồn gốc từ một số bộ lạc hay quen gấp đôi rồi từ đó phát triển lên. Phép *"chia"* là một phép tính khó đối với người Tiền sử. Nó xuất hiện vào thời kỳ văn minh Babylone và Ai Cập. Các phép tính số học mở đầu cho việc đo chiều dài, đo diện tích, đo thể tích. Các đơn vị đo ban đầu được chọn từ các bộ phận trong cơ thể; ví dụ ngón tay, bàn chân, dùng trong việc đo chiều dài, sức chứa của cái thúng dùng trong việc đo thể tích.....Việc xây dựng nhà cửa, đo đạc ruộng đất... thúc đẩy việc ra đời và phát triển của hình học. Cũng cần phải nói thêm, do nhu cầu giao lưu qua đường biển cũng như việc sản xuất; bên cạnh sự hình thành của số học, hình học, môn thiên văn cũng ra đời; bằng chứng ở sự hiểu biết sơ đẳng của một số bộ lạc về mặt trời, mặt trăng, sao...rồi họ cũng để ý đến hiện tượng ngày, đêm, thời tiết, các mùa. Do ảnh hưởng của thiên nhiên quá lớn đối với người Tiền sử, họ cảm thấy luôn luôn bị đe dọa nên trông mong sự che chở ở một lực lượng cứu tinh nào đó (thần linh) và cũng từ đó con người chịu ảnh hưởng của tôn giáo. Cho nên khi nghiên cứu những "phát minh" của người Tiền sử về Toán học, người ta thấy có những cái rõ ràng xuất phát từ yêu cầu của đời sống thực tế, nhưng cũng có những điều còn mang đậm màu sắc tôn giáo.

Chương 2.
NỀN VĂN MINH BABYLONE

Nền văn minh Babylone bao gồm nền văn minh của các dân tộc đã từng sống trên mảnh đất Lưỡng Hà (Mésopotamie) là vùng đất giữa sông Tigre và sông Euphrate, nghĩa là thuộc đất của Iran, Irak, Syrie ngày nay, và kinh thành Babylone cổ xưa (ngày nay người ta còn tìm thấy vết tích cách thủ đô Bagdad của Irak 160km về phía Đông Nam) là trung tâm văn hóa vào khoảng từ năm 2000 đến năm 550 trước Công nguyên. Ở đây, Toán học cổ đại đã từng một thời huy hoàng. Ngày nay sự hiểu biết của chúng ta về thời huy hoàng ấy nhờ công việc khai quật ở thế kỷ 19. Trong gần nửa triệu cổ vật bằng đất sét nung có trên 300 mảnh có ghi dấu vết toán học của người xưa và hiện đang được giữ ở Bảo tàng Paris, London, Berlin hoặc ở các trường Đại học Columbia, Yale, Pensylvanie. Nếu so sánh các cổ vật bằng đất sét nung này với papyrus của người Ai Cập hay những thanh tre của người Trung quốc xưa thường dùng thì cổ vật bằng đất sét nung này bền hơn. Nhưng phải đợi đến giữa thế kỷ XX, nhờ sự đóng góp của nhà khảo cứu người Pháp Thureau-Dangin và nhà nghiên cứu người Đức Otto Neugebauer mà những công trình toán học cổ nói trên mới được làm sáng tỏ dần vì còn những điều mà các nhà khoa học cách đây gần nửa thế kỷ chưa "giải mã" được. Về sau nhờ cố gắng của các nhà khoa học như Grotenfend và Rawlinson ngày nay người ta đã khám phá ra vốn hiểu biết của các dân tộc sống trên mảnh đất Lưỡng Hà có nền văn minh Babylone độc đáo.

Hệ đếm

Ở vùng Mésopotamie, những dạng "chữ viết" xuất hiện đầu tiên vào 3000 năm trước Công nguyên và đó là những dấu tượng hình. Dần dần, các dạng tượng hình ấy đã được người xưa "hợp lý hoá". Theo đó những "chữ số" cũng xuất hiện. Những công trình khảo cổ đã cho chúng ta biết được ý nghĩa của các ký hiệu ấy.

Ví dụ:

Ký hiệu  biểu diễn một đơn vị và nếu lặp lại 9 lần ta có số 9.

Ký hiệu  biểu diễn số 10. Nếu lặp lại nhiều lần và kết hợp với đơn vị thì có thể biểu diễn đến số 59. Từ số 60 người xưa dùng hai ký hiệu và cũng dùng phương pháp lặp lại và kết hợp như trên. Cho đến 1700 năm trước Công nguyên, trong các "văn bản" của Babylone, người ta chưa thấy xuất hiện ký hiệu của số không, nhưng ở vào thế kỷ thứ IV trước Công nguyên, ngày nay các nhà khảo cổ đã phát hiện ký hiệu  mà người xưa đã dùng để chỉ số không, nhưng chưa phải là phổ biến.

Nhưng dù sao, các nhà khảo cổ ngày nay cũng thừa nhận rằng hệ đếm của người xưa là một hệ kết hợp giữa cơ số 10 và 60 là một hệ đếm "văn minh" thời bấy giờ. Lấy một ví dụ mà các nhà khảo cổ ngày nay phát hiện được:

7424 được biểu diễn như sau (cơ số 60):

nếu hiểu theo ngôn ngữ của chúng ta bây giờ là:

7424 (cơ số 60) = $2.60^2 + 3.\ 60^1 + 44$

Thời vua Alexandre le Grand (356-323 trước C.N.) người xưa có cải tiến hơn bằng các ký hiệu .

Cũng số 7424 như trên nhưng được biểu diễn thành:

7424 (cơ số 60) = 

Người thời văn minh Babylone còn dùng ký hiệu để chỉ phép trừ. Ví dụ họ dùng ký hiệu sau:  để chỉ trừ 1. Nguyên tắc vị trí của ký hiệu đã giúp cho người Babylone diễn tả được phân số. Ví dụ muốn diễn tả $1\frac{1}{2}$ hay $1 + \frac{30}{60}$ (theo cơ số 60) thì họ dùng ký hiệu:  nhưng vì chưa biết số không nên dễ có sự nhầm lẫn vì các ký hiệu ấy có thể hiểu là: $1 + \frac{30}{60}$

hay $\frac{1}{60} + \frac{30}{60^2} \ldots$

Số học BABYLONE

Ta hãy xem bảng nhân với 9 của người Babylone. Theo bảng nhân này ta thấy sáng kiến của người xưa thể hiện từ hàng thứ bảy trở đi. Thực vậy, ở hàng thứ bảy: 7. 9 = 63 (cách viết ngày nay). Nếu theo cách viết như từ hàng thứ nhất đến hàng thứ sáu thì đáng lẽ ký hiệu 63 như sau:

BẢNG NHÂN VỚI 9

1			9
2			18
3			27
4			36
5			45
6			54
7			63
8			72
9			81
10			90
11			99
12			108
13			117
14			126

ta thấy xuất hiện ký hiệu . Ta thấy rằng ký hiệu  như trong bảng rõ ràng là có "cải tiến" hơn.

Người Babylone đã biết áp dụng "vốn kiến thức số học" của mình vào việc buôn bán sinh hoạt hàng ngày.

Đại số Babylone

Người Babylone đã biết đặt bài toán đại số và giải theo cách của họ vì họ chưa biết dùng một cách có hệ thống các ký hiệu đại số. Ví dụ họ nêu bài toán sau: *"Tìm chiều dài một cạnh hình vuông cho biết diện tích của nó trừ đi chiều dài của một cạnh thì bằng 870"*. Ngày nay ta dễ dàng đặt phương trình $x^2 - x = 870$ và tìm thấy đáp số là 30. Cách giải của người Babylone như sau với cách hiểu là: *"dấu chấm phẩy(;) thay thế cho dấu phẩy trong số thập phân ngày nay và dấu phẩy của họ dùng để chỉ một nhát cắt bằng* $\frac{1}{60}$ *hay 60"*. Bài toán trên được người Babylone giải như sau: lấy một nửa của một tức là 0;30 (cơ số 60). Nhân 0;30 với 0;30 ta có 0;15. Thêm vào kết quả này 14,30 (14,30 + 0;15 = 14,30;15 vì 0;15 có nghĩa 0,15) Nhưng 14,30;15 là bình phương của 29;30. Sau cùng ta thêm 0;30 vào 29;30, kết qủa là 30. Đây chính là đáp số của bài toán. Người Babylone còn biết giải những loại hệ phương trình như sau:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 21{,}15 & (1) \\ y = \dfrac{6}{7}x & (2) \end{cases}$$

Cách giải của người Babylone là họ đã biết thay phương trình (2) vào (1) và có kết quả:

$$x^2 + \frac{36}{49}x^2 = \frac{85}{4} \text{ (cơ số 10)}$$

từ đó có $$x^2 = \frac{49}{4} \quad \text{và} \quad x = \frac{7}{2}$$

Ở phòng lưu trữ của trường Đại học Yale (Mỹ), ta còn đọc được những dạng phương trình sau của người Babylone:

$$xy = a \quad \text{và} \quad \frac{mx^2}{y} + \frac{ry^2}{x} + b = 0$$

và khi giải đưa về một phương trình bậc 6 nhưng có dạng trùng phương đối với x^3. Khi khai quật ở Suse (Iran), người ta đã tìm thấy những cổ vật chứng tỏ người Babylone đã biết giải phương trình bậc 8 dưới dạng toàn phương đối với x^4. Neugebauer đã phát hiện trong bộ sưu tập của Louvre một tài liệu từ thời vua Nabuchodonosor (vua Babylone từ năm 605 đến năm 562 trước C.N) trong đó có ghi hai chuỗi số lý thú:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots\ldots + 2^9 = 2^9 + 2^9 - 1$$

$$1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 10^2 = \left[1\left(\frac{1}{3}\right) + 10\left(\frac{2}{3}\right)\right]55 = 385$$

Ngày nay chúng ta chưa có cơ sở để tìm hiểu một vấn đề đặt ra là: để đạt kết quả trên, không biết người Babylone thời bấy giờ đã tìm ra các công thức sau chưa?

$$\sum_{i=0}^{n} s^i = \frac{s^{n+1}}{s-1};\ \sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};\ \sum_{j=1}^{n} j^2 = \left[\frac{1}{3} + \frac{2n}{3}\right]\left[\sum_{j=1}^{n} j\right]$$

Người Babylone đã dùng một quy trình rất hữu hiệu để tính căn bậc hai của một số nguyên. Họ làm như sau: đặt $x = \sqrt{b}$, x là số phải tìm (một cách gần đúng). Nếu b_1 là một giá trị gần đúng của x. Giả sử a_1 là một giá trị gần đúng thứ hai của x sao cho $a_1 = \frac{b}{b_1}$. Nếu b_1 là quá bé thì a_1 là quá lớn. Ta chọn trung bình cộng $b_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$. Nếu b_1 là quá lớn thì $a_2 = -\frac{b}{b_2}$ quá nhỏ. Lấy trung bình cộng $b_3 = \frac{a_2 + b_2}{2}$.

Quá trình này tiếp diễn vô tận. Ngày nay, Trường Đại học Yale còn 2 di vật có ghi rõ kết quả gần đúng của số $\sqrt{2}$ như sau:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = 1{,}414213$$

Người Babylone cũng tính được:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Ngày nay khi nghiên cứu thành tựu về đại số của người Babylone, người ta cho rằng sở dĩ họ đạt được những kết quả như vậy là vì họ biết dựa vào số học.

Hình học Babylone

Do nhu cầu thực tế đời sống, người Babylone để ý đến đo đạc hình học. Họ xác định chu vi đường tròn bằng cách lấy đường kính của nó nhân với 3 (điều này có nghĩa là π tương đương với 3). Nhưng một nhà khảo cổ học Pháp phát hiện người Babylone đã tính giá trị gần đúng của π là $3\frac{1}{8}$. Nhưng Otto Neugebauer trong "The Exact Sciences in Antiquity" (tái bản lần thứ hai, New York, 1969, trang 42) không chấp nhận điều này. Người Babylone đã biết tính diện tích tam giác, diện tích hình thang, thể tích hình trụ thẳng, hình viên trụ. Họ đã biết định lý Pythagore, định lý Thalès, và *"đường vuông góc hạ từ đỉnh của một tam giác cân xuống cạnh đối diện thì chia cạnh ấy ra làm 2 đoạn bằng nhau"*.

Plimpton 322

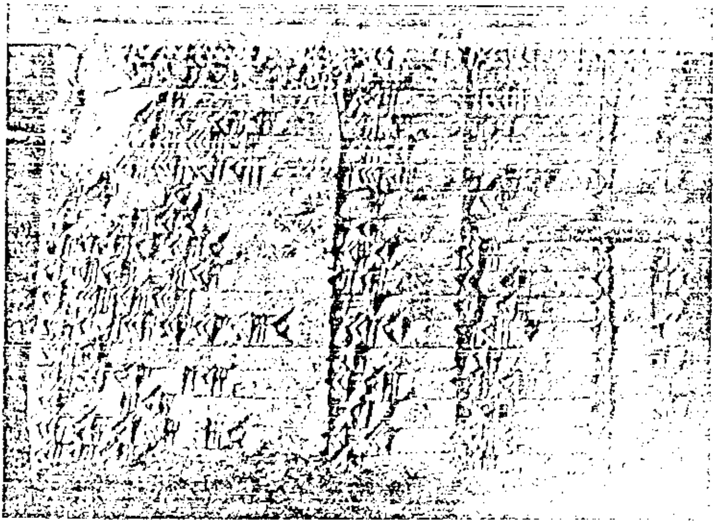
Năm 1945, O. Neugebauer va A.J.Sachs cho xất bản tập Mathematical Cuneiform Texts trong đó lần đầu tiên người ta công bố nội dung của bảng Plimpton 322 đã được giải mã và phân tích. Sở dĩ gọi là bảng Plimpton 322 vì nó nó thuộc bộ sưu tập cổ vật Plimpton số 322 của Trường Đại học Columbia. Lối viết trong đó là lối viết rất cổ vào khoảng 1900 – 1600 trước Công nguyên, vì thế giải mã được bảng Plimpton 322 thật là công phu. Điều lý thú là sau khi giải mã được người ta đã có được những cột chữ số sau:

I	II	III
120	119	169
3456	3367	4825
4800	4601	6649
13500	12709	18541

....

Ban đầu người ta chưa hiểu mối liên quan giữa 3 số này. Về sau thì thấy: $169^2 = 119^2 + 120^2$

Và người ta còn có cơ sở để tin rằng người *Babylone* đã lập những bảng lượng giác rất sớm (theo E.M. Bruins: "Pythagorean Triads in Babylonian Mathematics" đăng ở The Mathematical Gazette, 41 (1967): 25)



Plimpton 322

Chương 3.

VĂN MINH AI CẬP

Nguồn gốc

Nền văn minh Ai Cập xuất phát từ sự hòa nhập dần dần các cộng đồng và phân chia thành hai lãnh địa: Thượng Ai Cập và Hạ Ai Cập. Vị vua đầu tiên thống nhất hai lãnh địa đó là vua Ménès (3100 năm trước Công nguyên) và vị vua cuối cùng của Ai Cập đồng thời là vị Hoàng đế chinh phục cả Hy Lạp là Hoàng đế Alexandre le Grand (332 trước Công nguyên). Ai Cập từ lâu là mảnh đất lý tưởng cho mọi công cuộc tìm kiếm khảo cổ vì thời tiết ở đó khô ráo và tục lệ thờ cúng người quá cố của người dân Ai Cập. Chính nhờ vậy mà người đời sau có dịp chiêm ngưỡng kim tự tháp, đền đài, lăng tẩm, các papyrus vô giá mà Ai Cập đã cung cấp cho nhân loại.

Napoléon Bonaparte khi đem quân đi chinh phục Ai Cập có cho tháp tùng theo một số đông các nhà bác học, khảo cổ và chính họ là những người đã khai sinh cho nhân loại một ngành nghiên cứu mới là ngành Ai Cập học. Những người lính

Pháp trong đạo quân của Hoàng đế Napoléon là những người có nhiều công sức khai quật nhiều cổ vật rất có giá trị. Sông Nil là con sông linh thiêng đối với người Ai Cập. Hai bên bờ sông Nil có một loại cây gọi là papyrus được người cổ đại dùng làm "giấy viết" và vì khí hậu Ai Cập thích hợp cho việc bảo quản loại papyrus ấy nên ngày nay khi đến thăm một số Viện Bảo tàng Anh, Pháp, Đức, Nga, Mỹ.... chúng ta sẽ có dịp được chiêm ngưỡng vết tích của nền văn minh cổ đại của loài người. Xin kể sau đây một số papyrus nổi tiếng:

1). Papyrus Rhind được giữ ở British Museum (Anh) do một luật sư người Ai-len tên là Henry Rhind mua được năm 1858. Các nhà khảo cổ đã giải mã được chữ viết trong đó và cho biết rằng trong papyrus ấy có ghi lại kiến thức toán học của người Ai Cập cổ đại về Số học, Hình học không gian, phép tính các Kim tự tháp....Papyrus này ra đời vào khoảng 1650 năm trước Công nguyên.

2). Papyrus Golenischeff được mua ở Ai Cập năm 1893 và hiện được bảo quản tại Viện Bảo tàng Moscow. Trong papyrus này có ghi 25 bài toán thực tế về Số học và Hình học do nhu cầu đời sống đặt ra. Papyrus này ra đời vào khoảng 1850 năm trước Công nguyên.

3). Papyrus của Berlin cũng chứa đựng những tri thức toán học của người Ai Cập cổ đại như hai papyrus trên. Các nhà khảo cổ cho biết là ban đầu người Ai Cập cổ đại cũng viết trên đá, đất nung. (vào khoảng 3100 năm trước Công nguyên). Dần dần họ mới biết viết trên papyrus rồi cuộn tròn lại chứ không xếp thành trang như ta ngày nay.

Hệ thống đếm

Người Ai Cập cổ đại có một hệ thống đếm dựa vào phương pháp tượng hình, nhưng nếu nói theo lịch sử thì có hai hệ thống đếm:

* *hệ thống đếm dựa vào phương pháp tượng hình,*

* *hệ thống đếm của tôn giáo có từ thế kỷ thứ VIII trước Công nguyên.*

Ví dụ sau đây để chỉ phương pháp tượng hình

(ngón tay trỏ)  dùng để chỉ số 10.000

(con nòng nọc)  dùng để chỉ số 100.000

(người ngạc nhiên)  dùng để chỉ số 1.000.000

1. *Hệ thống đếm dựa vào phương pháp tượng hình:* Đây là hệ thống đếm cơ số 10, nhưng không viết theo vị trí, nhưng dùng nguyên tắc cộng.

Ví dụ: 12 105 = 

hay

Để diễn tả phân số của một, nghĩa là tử số là 1, mẫu số là một số nguyên nào đó; người Ai Cập cổ đại dùng một hình ô van dưới là ký hiệu diễn tả số nguyên.

Ví dụ: $\frac{1}{7}$ =  ; $\frac{1}{10}$ = 

2. *Hệ thống đếm của tôn giáo:* Đây cũng là hệ đếm cơ số 10, nhưng khác phương pháp tượng hình là có thêm ký hiệu mới. Những ký hiệu đó biểu diễn những số từ 1 đến 10 và lũy thừa của 10.

Ví dụ: Số 38 biểu diễn theo phương pháp tượng hình là  thì biểu diễn theo tôn giáo là  trong đó dấu  chỉ 8 được đặt bên trái thay vì bên phải; vì người Ai Cập có thói quen viết từ phải qua trái chứ không phải từ trái qua phải như chúng ta. Người Ai Cập cũng nghĩ tới việc biểu diễn các phân số nhưng chưa thật gọn lắm.

Số học Ai Cập

Số học Ai Cập dựa vào 2 nguyên lý tính toán. Nguyên lý thứ nhất là căn cứ vào khả năng chia cho 2 hoặc nhân cho 2. Nguyên lý thứ hai là căn cứ vào khả năng lấy hai phần ba của một số. Việc nhân hai số nguyên được người Ai Cập tiến hành như sau dựa vào nhận xét *"mọi số được biểu diễn bằng tổng của các lũy thừa của 2 và phần còn lại"*.

Ví dụ muốn thực hiện phép nhân 24×37. Ta chú ý $24 = 16 + 8$ và họ làm:

	1	37	
	2	74	
	4	148	
	8	296	
+	16	592	+
	24	888	

Do đó: $24 \times 37 = 888$.

Họ cũng làm tương tự như vậy khi chia 847 cho 33. Họ đặt

$$\begin{aligned} 847 &= 528 + 319 \\ &= 528 + 264 + 55 \\ &= 528 + 264 + 33 + 22 \end{aligned}$$

và kết luận rằng phép chia 847 cho 33 cho thương số là 25 và số dư là 22.

	33	1	
	66	2	
	132	4	
+	264	8	+
+	528	16	+
	825	25	

Nguyên tắc nhân đôi hoặc chia đôi mà ta thấy ở trên dùng trong phép nhân, chia đã giúp cho việc làm tính của người xưa khá thuận tiện. Nhưng nếu áp dụng vào phân số thì thấy có trở ngại. Họ tìm cách phân tích một phân số thành tổng của hai hay nhiều phân số có tử số là 1, ví dụ $\frac{2}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7}$

Ta hãy xét vài ví dụ sau:

Ví dụ 1: Hãy biến đổi $\frac{2}{7}$ thành tổng của $\frac{1}{28}$ và $\frac{1}{4}$

Cách giải như sau:

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7}$$

$$= \frac{1}{14} + \frac{1}{14} + \frac{1}{7}$$

$$= \frac{1}{28} + \frac{1}{28} + \frac{1}{14} + \frac{1}{7}$$

$$= \frac{1}{28} + \frac{1}{4}$$

Ví dụ 2: Chứng minh rằng : $\frac{1}{15} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$

Ta làm như sau: $\frac{2}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$

Nếu tiếp tục như trên sẽ tắc. Ta chú ý:

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15}$$

và $$\frac{2}{5} = \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{5} = \frac{1}{15} + \frac{1}{3}$$

Ví dụ 3: Chứng minh rằng: $\frac{2}{13} = \frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104}$

Giải:
$$\frac{2}{13} = \frac{1}{13} + \frac{1}{13}$$
$$= \frac{1}{26} + \frac{1}{26} + \frac{1}{13}$$
$$= \frac{1}{52} + \frac{1}{52} + \frac{1}{26} + \frac{1}{13}$$
$$= \frac{1}{104} + \frac{1}{104} + \frac{1}{52} + \frac{1}{26} + \frac{1}{13}$$
$$= \frac{1}{104} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104} + \frac{1}{26} + \frac{1}{13}$$
$$= \frac{1}{104} + \frac{1}{52} + \frac{1}{8}$$

Khi nghiên cứu cách làm của người Ai Cập cổ đại, người ta có cảm giác người Ai Cập xưa thích sử dụng các phân số $\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}$, có thể là vì những phân số nói trên thường gặp trong đời sống hằng ngày của họ; hơn nữa nếu chia đôi các phân số ấy họ sẽ được một dãy các phân số như $\frac{1}{3}; \frac{1}{6}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}$, v.v... là những phân số rất cần cho họ trong các phép biến đổi như trên đã làm. Người Ai Cập tìm cách đưa một phân số về dạng tổng của hai, ba.. phân số có tử số là 1 như ví dụ 2 đã minh họa.

Người ta còn tìm thấy trong các papyrus một số quy tắc sau đây:

- *Quy tắc lấy $\frac{2}{3}$ của một phân số mà tử số là 1.* Ví dụ phân số cho là $\frac{1}{n}$. Ta có kết quả là tổng hai phân số, phân số thứ nhất có tử số là 1, mẫu số bằng 2n. Phân số thứ hai có tử số là 1 và mẫu số là 6n. (n là số nguyên)

Ví dụ: Tìm $\frac{2}{3}$ của $\frac{1}{3}$?

Theo quy tắc trên ta có: $\frac{2}{3}$ của $\frac{1}{3}$ bằng: $\frac{1}{6} + \frac{1}{18}$

Ví dụ khác: $\frac{2}{3}$ của $\frac{1}{9}$ bằng $\frac{1}{18} + \frac{1}{54}$

- *Quy tắc lấy $\frac{1}{3}$ của $\frac{1}{n}$:* Kết quả là $\frac{1}{4n} + \frac{1}{12n}$

Ví dụ: $\frac{1}{3}$ của $\frac{1}{5}$ là $\frac{1}{20} + \frac{1}{60}$.

Người Ai Cập cũng biết làm cả phép chia nữa.

Đại số Ai Cập

Trong Viện Bảo tàng ở Mạc Tư Khoa còn lưu lại 110 bài toán trên papyrus. Cách giải những bài toán ấy là cách giải số học hoặc cách giải phương trình tuyến tính dạng x + ax = b hoặc x + ax + + cx = b. Lượng chưa biết "x" mang tên là "aha" hay "h". Người Ai Cập còn biết cấp số cộng và cấp số nhân. Bài toán số 40 sau đây trong papyrus là một ví dụ chứng tỏ họ biết cấp số cộng: *"Chia 100 cái bánh cho 5 người sao cho* $\frac{1}{7}$ *của tổng số bánh của 3 người đầu bằng phần bánh của hai người còn lại. Hỏi phần bánh người này khác người tiếp theo là bao nhiêu ?"*

Họ giải như sau:

Giả sử phần bánh người này khác người tiếp theo là $5\frac{1}{2}$ cái và người thứ nhất có 1 cái; như vậy số bánh các người liên tiếp nhau là:

$$1 \quad 6\frac{1}{2} \quad 12 \quad 17\frac{1}{2} \quad 23 \text{ (tổng số bánh là 60)}$$

như vậy cần thêm 40 cái bánh nữa (tức $\frac{2}{3}$ của 60) mới được 100. Và họ thêm vào phần từng người $\frac{2}{3}$ phần nữa, nghĩa là:

$$1\frac{2}{3} \quad 10\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\right) \quad 20 \quad 29\frac{1}{6} \quad 38\frac{1}{3} \text{ (tổng là 100)}$$

Bài toán số 79 trong papyrus là một ví dụ về cấp số nhân.

Hình học và lượng giác Ai Cập

Phần lớn các bài toán hình ghi trong papyrus là các bài toán tìm diện tích các hình phẳng và tìm thể tích các khối.

Người ta phát hiện cách tính diện tích hình tam giác cân, cách tính thể tích lăng trụ, nhưng không thấy người Ai Cập cổ đại chứng tỏ họ đã biết định lý Pythagore, nhưng họ đã biết dùng số π với giá trị $3\frac{1}{2}$.

Vào thế kỷ thứ 13 trước Công nguyên, trong ngôi mộ vua Ai Cập Séti đệ nhất, người ta thấy hai hình vẽ đồng dạng vẽ trên tường của phòng ngủ của vua, điều này chứng tỏ người Ai Cập hiểu biết về tính đồng dạng khá sớm. Đặc biệt người ta đọc được trên papyrus trong Viện Bảo tàng ở Mạc Tư Khoa bài toán lý thú sau đây:

"Nếu có ai hỏi bạn cách tìm thể tích khối lăng trụ cụt cao h = 6 có hai đáy là 4 và 2 thì bạn hãy bày cho người ấy cách tính sau: lấy bình phương của 4 có được 16, rồi lấy 4 nhân với 2 được 8, lấy bình phương của 2 được 4, thêm 16 vào 8 và 4 được 28; lấy một phần ba của 6 được 2, lấy 2 lần 28 được 56; 56 chính là kết quả phải tìm!".

Ngày nay ta dùng công thức $V = \frac{h}{3}\left[a^2 + b^2 + ab\right]$. Nhưng thời đó không hiểu người Ai Cập cổ đại lý luận như thế nào mà đạt kết quả chính xác như vậy! Còn nhiều điều bí ẩn nữa nhưng ngày nay chúng ta vẫn chưa tìm ra!

Chương 4.
SỰ RA ĐỜI CỦA TOÁN HỌC HY LẠP

Các nhà khảo cổ đã phân tích rằng các hoạt động trí tuệ của các dân tộc "tiền Hy Lạp" đã yếu dần do những biến động về kinh tế và chính trị xảy ra từ cuối thế kỷ thứ hai mươi trước Công nguyên, và "kỷ nguyên đồng thau" đã nhường chỗ cho "kỷ nguyên sắt". Trong suốt thời kỳ này; kéo dài từ thế kỷ thứ 20 trước Công nguyên cho đến thế kỷ thứ 7 trước Công nguyên, nhiều nền văn minh của nhân loại đã yếu kém như văn minh Ba Tư, Ai Cập và được thay thế bằng những nền văn minh mới xuất hiện tiến bộ hơn như nền văn minh Hebreux (Do Thái), Hy Lạp. Sự thay thế đồng thau bằng sắt đã đem lại nhiều thay đổi sâu sắc trong việc chế tạo vũ khí chiến đấu, công cụ sản xuất; nhờ đó bộ mặt kinh tế cũng thay đổi theo. Sự phát minh ra tiền tệ (do vua Crésus vào thế kỷ thứ 6 trước Công nguyên) đã góp phần không nhỏ trong việc giao lưu mua bán và phát kiến những miền đất mới. Hơn nữa dân tộc Hy Lạp còn được thừa hưởng những đặc ân của thiên nhiên (điều kiện địa lý, thời tiết ôn hòa lý tưởng của miền Địa Trung Hải...)

nên đời sau gán cho tiếng tăm là "thần kỳ Hy Lạp". Đi đôi với những thành tựu kinh tế là thành tựu về văn hóa, chữ viết. Thời ấy các nơi tập trung dân cư đông đúc là quanh bờ Hắc Hải và Địa Trung Hải. Các trung tâm văn minh mới thừa hưởng gia tài của văn minh Ai Cập, Babylone thông qua các kiến thức về Toán học, Thiên văn học. Quyển Lịch sử Toán học Hy Lạp cổ nhất được một người học trò của Aristote tên là Eudème viết vào thế kỷ thứ 4 trước Công nguyên. Quyển này bị thất lạc nhưng có một phần được trích dẫn và xuất hiện trong "Bình luận về tập I của quyển Eléments của Euclide" do Proclus viết vào thế kỷ thứ 6 sau Công nguyên. Qua tài liệu này, người đời sau biết được Thalès de Milet là nhà sáng lập ra nền Toán học Hy Lạp qua những lần ông đi thăm Ai Cập và sau đó ông truyền bá vào Hy Lạp vào thế kỷ thứ 6. Proclus cũng nhắc đến Pythagore sống vào thế kỷ thứ 6 và xem Pythagore như là người đã có công cải tổ môn hình học, tách nó ra khỏi triết học và làm cho hình học gần gũi với mọi người. Và chính nhờ Eudème, Proclus mà ngày nay ta có tư liệu khẳng định nền Toán học Hy lạp, hay nói chung là nền văn minh Hy Lạp kế thừa nền văn minh Ai Cập, Babylone. Nhưng người Hy Lạp đã có công lớn trong việc xây dựng Toán học thành một khoa học diễn giải, có lập luận, chứng minh khá chặt chẽ với những định nghĩa, tiên đề, định lý tuyệt đẹp mà trước đây người Ai Cập chưa làm được.

Nhà Toán học đầu tiên của Hy Lạp và cũng là của nhân loại: THALÈS

Milet là một trung tâm văn hóa, kinh tế sầm uất thời Hy Lạp cổ đại và là quê hương của Thalès vì vậy người Pháp quen gọi ông là Thalès de Milet.

Ông là thương gia, nhà chính trị, nhà khoa học, nhà toán học, nhà thiên văn học, nhà triết học và thời cổ đại Hy Lạp ông được suy tôn là một trong bảy nhà thông thái của nhân loại. Ban đầu ông đi buôn, nhưng sau một thời gian, trở nên giàu có thì ông không buôn bán nữa mà dùng số tiền kiếm được để đi ra nước ngoài học hỏi nghiên cứu. Ông dừng lâu ở Ai Cập, tìm hiểu thêm về Toán và Thiên văn. Trở về quê hương là Milet, Thalès bắt đầu nổi tiếng, rồi tiếng tăm của ông lan truyền khắp Hy Lạp. Tuy kế thừa nền Toán học Ai Cập, nhưng với thiên tài của ông, Thalès đã làm cho Toán học trở thành một khoa học chính xác, sáng sũa và chính vì thế mà đời sau phong tặng ông danh hiệu *"nhà Toán học đầu tiên của nhân loại"*. Về hình học, người đời sau dành cho ông vinh quang đã phát minh những định đề sau:

1. *Mọi đường kính chia đôi một hình tròn.*
2. *Các góc đáy một tam giác cân thì bằng nhau.*
3. *Các góc thẳng đứng tạo nên bởi hai đường thẳng giao nhau thì bằng nhau.*
4. *Góc nội tiếp trong nửa hình tròn là một góc vuông.*

Người ta còn truyền tụng rằng ông đo được chiều cao của Kim tự tháp chỉ nhờ một cái gậy thẳng và bóng của nó (tính chất tam giác đồng dạng). Nhà Sử học Hérodote sống vào thế kỷ thứ 5 trước Công nguyên viết rằng Thalès đã dự đoán được nhật thực xảy ra năm 585 trước Công nguyên. Người ta xây dựng nhiều huyền thoại về cuộc đời của Thalès, nhưng có một điều chắc chắn không ai phủ nhận là ông đã xây dựng môn Hình học Hy Lạp nổi tiếng.

Người cha của Toán học Hy Lạp: PYTHAGORE

Ông quê ở Samos gần Milet, sinh vào nửa đầu của thế kỷ thứ VI trước Công nguyên. Ông kém Thalès gần 50 tuổi. Người đời vẫn xếp ông vào lớp học trò của Thalès. Sau khi chu du nhiều năm ở Ai Cập, Babylone, ông trở về quê hương nhưng cuối cùng thì định cư tại miền Đại Hy Lạp (Bắc nước Italy ngày nay). Ở đây ông thành lập nhóm nghiên cứu mang tính quý tộc, huyền bí, đầy màu sắc tôn giáo. Trường phái Pythagore là một "Viện Hàn Lâm" cổ đại. Ở đó học trò ông học và nghiên cứu Toán học, Triết học, Khoa học tự nhiên và làm lễ tôn giáo. Càng ngày ảnh hưởng của trường phái Pythagore càng lan tràn mạnh mẽ nên làm nhà chức trách thời bấy giờ giận giữ ra lệnh phá, và giải thể. Pythagore lui về ở Metapontum và mất ở đấy. Tuy vậy 200 năm sau ảnh hưởng của ông cùng học trò vẫn còn. Những bài viết về ông thường bị thất lạc, nhưng những công trình nghiên cứu toán học của ông vẫn được đời sau truyền tụng. Những công trình ấy tuy độc đáo có giá trị nhưng mang nhiều màu sắc thần bí. Pythagore có nhiều đóng góp nghiên cứu về số học, hình học (với định lý Pythagore nổi tiếng), về thiên văn, âm nhạc.

Số học Pythagore

Người Hy Lạp cổ đại phân biệt số học và logistique như sau:

* *Số học chuyên nghiên cứu các quan hệ trừu tượng về số.*

* *Logistique nghiên cứu tính toán, thực hành về số.*

Sự phân biệt trên còn kéo dài đến thế kỷ XV của chúng ta. *"Lý thuyết số"* mà ngày nay chúng ta nghiên cứu chính là Số học của người Hy Lạp cổ đại, còn Số học chính là logistique thời ấy. Sau này trong tác phẩm "Eléments" của Euclide, tập IX có nói về số chẵn, số lẻ chính là đúc kết một phần kết quả nghiên cứu của trường phái Pythagore. Nicomaque sống vào thế kỷ thứ II sau Công nguyên trong tác phẩm có tựa đề *"Nhập môn Số học"* có nhắc lại định nghĩa về số chẵn, số lẻ của trường phái Pythagore như sau: *"Số chẵn là số có thể chia thành hai phần bằng nhau được. Số lẻ là số không thể chia thành hai phần bằng nhau được"*. Nhưng trường phái Pythagore còn đưa ra định nghĩa *"hai số bạn bè"* là hai số mà các số chia của số này có tổng bằng số kia. Ví dụ 284 và 220 là hai số bạn bè vì:

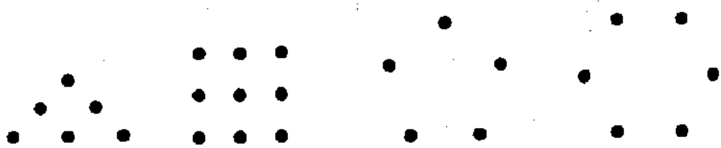
284 có số chia là 1, 2, 4, 71, 142 nhưng 1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220

220 có só chia là 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110. Nhưng 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284.

Những cặp số bạn bè có vai trò trong ảo thuật, chiêm tinh học, phép tính tử vi. Ngoài "hai số bạn bè", trường phái

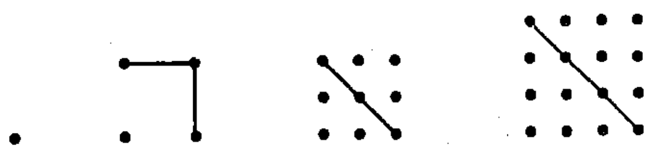
Pythagore còn đưa ra định nghĩa *"số hoàn hảo"*. Số hoàn hảo là số bằng tổng các số chia của chính nó. Nicomaque đã tự tìm ra các số hoàn hảo sau: 6, 28, 496, 8128. và Nicomaque còn đưa ra quy tắc tìm số hoàn hảo: *"Khi tổng sau đây: $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots. + 2^n = p$ là một số nguyên tố thì $2^n . p$ là một số hoàn hảo"*, nhưng quy tắc này do Pythagore tìm ra và Nicomaque nhắc lại.

Trường phái Pythagore còn phát minh ra *"các số tam giác, vuông, ngũ giác, lục giác.."* và công thức chung của các số ấy như sau:



$\frac{n.(n+1)}{2}$ $\qquad n^2 \qquad$ $\frac{n.(3n-1)}{2}$ $\qquad 2n^2 - n$

Và nhiều định lý rất hay bắt nguồn từ các số ấy. Ví dụ định lý sau: *"Mọi bình phương là tổng của hai số tam giác liên tiếp"*. Để minh họa định lý này ta dùng các sơ đồ sau:



1 $\qquad$ 1 + 3 $\qquad$ 3 + 6 $\qquad$ 6 + 10

Ta thấy các số 3, 6, 10 là những số tam giác. Nếu nói theo ngôn ngữ toán học ngày nay thì số tam giác được tính bằng công thức $\frac{n.(n+1)}{2}$ và hai số tam giác liên tiếp có tổng là:

$$\frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1).n}{2} = n^2$$

Âm nhạc Pythagore

Thời thượng cổ, các dân tộc Trung Hoa, Ai Cập, Babylone, Chaldée (vùng Vịnh Ba Tư bây giờ) thường thông qua hiện tượng dây rung để liên kết số học và âm nhạc. Họ cố định một đầu dây căng thẳng và cho nó rung để phát ra âm thanh, sau đó làm cho độ dài của dây giảm đi một nửa và nhận thấy rằng âm tăng lên một octave (bát độ). Nếu cho rung hai phần ba của dây thì âm chỉ tăng một phần năm mà thôi v.v... Đó là hiện tượng ban đầu của việc tiếp cận hiện tượng âm thanh của người xưa. Trường phái Pythagore cho rằng giữa thiên văn học và âm nhạc có mối liên quan. Họ quan niệm rằng một vật thể chuyển động trong không gian phát ra âm thanh với tần số mà tai ta chưa cảm nhận được. Thiên văn học Hy Lạp vào thế kỷ thứ VI sau Công nguyên cho rằng khoảng cách giữa các hành tinh và tỷ số giữa tốc độ của hành tinh theo quỹ đạo là hài hòa nghĩa là biểu biễn bằng tỷ số của hai số nguyên. Và các hành tinh trong quá trình chuyển động phát ra âm thanh hòa tấu với nhau.. Trường phái Pythagore cho rằng âm nhạc là một ngành của toán học phải có chỗ đứng trong chương trình đào tạo thế hệ trẻ Hy Lạp thời bấy giờ.

Trường phái Pythagore nghiên cứu về tỷ lệ thức, đại lượng vô ước và hình học.

Trong tập VII của tác phẩm "Eléments" của Euclide có ghi những kết quả nghiên cứu về tỷ lệ thức của Pythagore cùng học trò ông:

1. Nếu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; thì $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

2. Nếu $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$ và $\frac{b}{c} = \frac{e}{f}$; thì $\frac{a}{c} = \frac{d}{f}$

3. Nếu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; thì $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

4. Nếu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; thì $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

5. Nếu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; thì $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

Pythagore và học trò cũng đưa ra khái niệm trung bình cộng, trung bình nhân, trung bình điều hòa. Người ta còn nói thêm rằng trường phái Pythagore còn đưa ra tỷ lệ sau đây rất thú vị:

$$\frac{a}{\frac{a+b}{2}} = \frac{\frac{2ab}{a+b}}{b}$$

trong đó $\frac{a+b}{2}$ là trung bình cộng của a và b và $\frac{2ab}{a+b}$ là trung bình điều hòa của a và b. Một trường hợp đặc biệt của tỷ lệ trên là $\frac{12}{9} = \frac{8}{6}$ được dùng trong âm nhạc.

Một trong những thành tích đáng ghi nhớ của nền toán học Hy Lạp là việc nghiên cứu các đại lượng vô ước. Sự phát minh ra những đại lượng vô tỷ ấy được đánh giá là công lao của trường phái Pythagore. Lấy một ví dụ trong hình học: Xét một hình vuông và quy ước chiều dài của cạnh của nó là đơn vị. Trong trường hợp này, đường chéo của hình vuông và cạnh của nó không thể có số đo chung, nói cách khác là đường chéo của hình vuông vô ước với cạnh của nó.

Định lý Pythagore

Học sinh Trung học ngày nay đều đã được học định lý Pythagore nổi tiếng. Trong tác phẩm "Eléments", tập I của Euclide, mệnh đề thứ 47 đã nhắc lại định lý Pythagore như sau: *"Trong một tam giác vuông, bình phương của cạnh huyền bằng tổng các bình phương của hai cạnh của góc vuông"*. Người ta còn cho rằng trường phái Pythagore đã nghiên cứu về đa diện đều nữa.

Rất sở trường về hình học, trường phái Pythagore hay có xu hướng giải quyết những vấn đề đại số bằng phương pháp hình học. Ví dụ: Trong tác phẩm "Eléments", tập II, Euclide đã nhắc lại các hằng đẳng thức đáng nhớ được Pythagore chứng minh bằng hình học và cũng bằng phương pháp ấy, Pythagore đã giải các phương trình trùng phương, phương trình bậc hai với nghiệm số thực.

Từ Pythagore đến Platon

Đời sau không còn lưu giữ được một tài liệu nào nói về những thành tựu toán học từ Pythagore cho đến Platon ngoài một tài liệu của Proclus có tựa đề là *"Bình luận"*. Trong tài liệu này, Proclus cung cấp cho người đời sau nhiều tư liệu về các nhà Toán học có đóng góp không nhỏ cho nền văn minh Hy Lạp cổ đại.

Anaxagore (500 – 428 trước Công nguyên) là một nhà vật lý hơn là nhà toán học nhưng toán học, nhất là thiên văn học đã lôi cuốn ông. Ông đã nhiều lần thử giải quyết bài toán cầu phương hình tròn nhưng không thành công. Về thiên văn ông đã nhận thức được mặt trăng nhận ánh sáng từ mặt trời, và ông đã giải thích một cách khoa học hiện tượng nhật thực và nguyệt thực.

Oenopide trẻ hơn Anaxagore, cũng là một nhà thiên văn và hình học. Ông đã giải bài toán hình học: *"Dựng một đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước từ một điểm ở ngoài đường thẳng ấy"*. Và Proclus cũng cho rằng chính Oenopide đã giải bài toán sau: *"Trên một đường thẳng cho trước và qua một điểm cho trước trên đường thẳng ấy, dựng một góc bằng một góc cho trước"*.

Démocrite (460-370 trước Công nguyên) nổi tiếng vì thuyết cấu tạo nguyên tử của ông. Democrite đi chu du nhiều nơi như Athènes, Ai Cập, Lưỡng Hà, Ấn độ, Ethiopie. Ông được xem như một nhà khoa học duy vật cổ đại. Démocrite viết nhiều tác phẩm khoa học giá trị như: *"Về các số"*, *"Về Hình học"* *"Khảo* *sát về tiếp tuyến", "Về các số vô tỷ"* nhưng ngày nay không còn vết tích một tác phẩm nào. Démocrite đã có khái niệm về *"vô cùng"* và chính nhờ quan niệm này mà ông đã *tìm ra thể tích* hình chóp và ông đã chứng minh được thể tích hình chóp bằng một phần ba thể tích hình trụ có cùng đáy và chiều cao. Nhưng, theo Archimède, thì Démocrite đã phát biểu kết quả còn cách chứng minh một cách chặt chẽ thì chưa ai thấy!

Ngoài ra còn những nhà hình học tên tuổi khác như Hippocrate ở Chio (khác với Hippocrate ở Cos được xem như thuỷ tổ ngành Y học). Ông quan tấm đến vấn đề cầu phương hình tròn và gấp đôi hình lập phương. Proclus cho rằng Théodore de Cyrène thầy học của Platon là người đã từng chứng minh rằng $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ... $\sqrt{17}$ là vô ước với đơn vị. Ngoài ra ông còn là nhà hình học, thiên văn học, âm nhạc học nữa.

Chương 5.

TỪ PLATON ĐẾN EUCLIDE

Platon

Sinh ở Athènes vào năm 427 trước Công nguyên, trong một gia đình giàu có và quý tộc. Sau 8 năm được thầy học là Socrate đùm bọc, năm 399 trước C.N, Socrate bị hại; ông định cư ở Mégare rồi về sau ông đi chu du sang phía Đông, Ai Cập, và Đại Hy Lạp. Ông trở về Athènes năm 377, mở trường dạy Triết học. Nơi đây trở thành nơi gặp gỡ của các nhà thông thái thời bấy giờ, đồng thời là một thư viện. Ông dạy học ở đó suốt trong 40 năm. Tác phẩm của Platon để lại cho đời sau được giữ gìn nguyên vẹn bao gồm Triết học và Toán học. Tuy không bị thất lạc nhưng tác phẩm nghiên cứu toán học của Platon bị tản mạn nhiều nơi và thuộc nhiều lĩnh vực như lý thuyết số, hình học không gian, tiên đề học, cơ sở của toán học, đa diện đều.

Eudoxe (408-355 trước C.N)

Ông là một tài năng đa dạng. Vừa là nhà hình học, ông vừa là một thầy thuốc nổi tiếng; ông còn tinh thông về địa lý, thiên văn, triết học và đặc biệt là một nhà hùng biện thời Hy Lạp cổ đại. Năm 23 tuổi ông đến Athènes học Triết học và Tu từ học. Ông qua Ai Cập hai năm để học toán và thiên văn và tập quan sát bầu trời. Ông thường gặp gỡ Platon để trao đổi về triết học, toán học và rất được Platon kính nể. Nhưng rất tiếc là đời sau không còn giữ được bao nhiêu những công trình của ông. Proclus nói rằng Eudoxe đã làm giàu thêm cho gia tài hình học Hy Lạp. Người ta nói nhiều mệnh đề trong tập V của tác phẩm Eléments của Euclide là phần sáng tạo của ông. Eudoxe được tôn vinh là người sáng tạo ra algorithme (thuật toán) trong phép tính tích phân. Ông là người đề ra giả thuyết những hình cầu đồng tâm để giải thích chuyển động của 5 hành tinh (thời ấy người ta chỉ biết có 5) quay quanh mặt trời.

Menechme

Ông là học trò của Eudoxe và tiếp tục các công trình của thầy về thiên văn, hình học. Ông kiên nhẫn học hỏi nghiên cứu. Tục truyền rằng Alexandre Đại Đế muốn học hình học nhưng ngại gian khổ, kiên nhẫn nên hỏi ông bày cho con đường tắt để học cho nhanh. Ông tâu rằng: *"Trong hình học không có đường riêng cho vua đi"*. Khám phá nổi tiếng của ông là tiết diện conic. Ông đã tìm ra các tính chất của parabole, hyperbole và ellipse nhưng thời đó ông chưa dùng các từ ellipse, hyperbole, parabole mà mãi sau này Apollonius thuộc trường phái Alexandrie mới dùng đến các từ ấy.

Menechme có một người em cũng là một nhà toán học tên là Dinostrate. Menechme quan tâm đến bài toán gấp đôi một hình lập phương thì em của ông quan tâm đến bài toán dùng công cụ để cầu phương một hình tròn.

Aristote (384-322 trước C.N)

Ông là học trò của Platon và là thầy của Alexandre Đại Đế. Ông là một nhà triết học và đồng thời là một nhà sinh vật học. Tuy vậy ông theo dõi cập nhật tri thức toán học của thời đại và có những đóng góp khá độc đáo. Chính ông là người đã nêu những phân biệt rõ ràng chính xác thế nào là Tiên đề, Định nghĩa, Giả thiết v.v... Theo ông Tiên đề là khái niệm rất phổ biến, là sự thực hiển nhiên, ai cũng phải công nhận. Ông đưa ra ví dụ về Tiên đề: *"Nếu ta đem những lượng bằng nhau trừ vào những lượng bằng nhau thì những phần còn lại cũng bằng nhau"*. Aristote trình bày trong tác phẩm "Vật lý học" của mình những khái niệm về liên tục, vô hạn, chuyển động...Ông cho rằng khái niệm về liên tục, vô hạn là những khái niệm tế nhị. Ví như sự liên tục cảm nhận được qua giác quan nhưng khó thừa nhận được nếu không gắn liền mật thiết với các phần tử của nó. Aristote không thừa nhận vô hạn trên sự việc thực tế nhưng thừa nhận vô hạn trong tư duy. Ông bảo rằng cứ chia đôi mãi một lượng nào đó thì việc chia đôi ấy là vô hạn theo tư duy, nhưng trên thực thì khó mà làm được. Vì những cơ sở của logic của ông và những khái niệm mới mẽ táo bạo ông đưa ra trong lĩnh vực lý luận toán học nên đời sau tôn vinh ông vừa là nhà triết học vừa là nhà khoa học đóng góp nhiều cho toán học.

Trường phái toán học Alexandrie

Vua Philippe xứ Macédoine lợi dụng sự bất hòa trong nội bộ giai cấp thống trị của các miền của Hy Lạp nên đem quân xâm chiếm Athènes vào năm 338 trước C.N. Hai năm sau, Alexandre le Grand nối ngôi cha là Vua Philippe. Với lực lượng quân sự hùng hậu, Vua Alexandre tiếp tục xâm chiếm hầu hết các xứ có nền văn minh phát triển thời bấy giờ. Năm 331, Vua Alexandre vào Ai Cập và quyết định thành lập Alexandrie là một trung tâm văn hóa thu hút nhiều nhà thông thái khắp nơi thời bấy giờ. Thành phố Alexandrie cổ đại nằm ở cửa sông Nil, nên cũng là trung tâm kinh tế thương mại. Chính Vua Alexandre trực tiếp trông coi việc xây dựng thành phố này theo bản thiết kế của kiến trúc sư Hy Lạp nổi tiếng Dinocrate. Nhưng năm 323 trước C.N thì Vua Alexandre mất, đất nước lại rơi vào cảnh loạn lạc, chia làm ba nước nhỏ. Năm 306 phần đất Ai Cập trong Đại vương quốc của Vua Alexandre xưa bây giờ có một người chủ mới, đó là Vua Ptolémée I, chọn Alexandrie làm thủ đô và chịu ảnh hưởng văn hóa Hy Lạp. Vua Ptolémée có ý đồ xây dựng Alexandrie thành một bảo tàng lớn, có thư viện, phòng đọc sách, nghỉ ngơi. Thư viện Alexandrie có 600.000 papyrus ghi chép tri thức khoa học nhân loại thời bấy giờ hàng năm thu hút nhiều nhà bác học lớn thuộc nhiều lĩnh vực khác nhau đến làm việc, nghiên cứu, trao đổi ý kiến...

Euclide (thế kỷ thứ III trước C.N)

Ông là người sáng lập trường Toán học trong Đại học Alexandrie. Tục truyền ông học Toán ở Athènes trong Viện hàn lâm của Platon nhưng đáng tiếc là người đời sau không hiểu lắm về đời tư của ông, thậm chí ngày tháng năm và nơi sinh của ông cũng ít người biết chính xác. Ông để lại cho đời sau nhiều tác phẩm khoa học như "Eléments" gồm 13 tập "Những dữ kiện", "Phép chia các hình", "Những hiện tượng", "Quang học" là những tác phẩm của ông còn được truyền tụng đến bây giờ. Ông còn viết nhiều tác phẩm nữa như 4 tập về "Coniques", "Catoptrique hay hình học các tia phản chiếu" v.v... nhưng bị thất lạc. Tuy ông viết nhiều công trình khoa học rất giá trị nhưng các thế hệ loài người hết lời ca ngợi tác phẩm "Eléments" là một tác phẩm được tái bản hơn một nghìn lần và lần xuất bản quy mô đầu tiên vào năm 1482. Cho đến tận ngày nay, tác phẩm "Eléments" vẫn còn phát huy tác dụng. Trong "Eléments" Euclide đã sắp xếp hợp lý, hoàn chỉnh, sáng tạo thêm, chứng minh chặt chẽ thêm tất cả là 465 mệnh đề không chỉ là hình học mà còn cả về Lý thuyết số, Đại số sơ cấp giải quyết theo tinh thần hình học. Xin dành một phần quan trọng trong chương này để nói chi tiết thêm về tác phẩm bất hủ của mọi thời đại mà tác giả của nó là một nhà hình học vĩ đại của nhân loại: tác phẩm ELÉMENTS (Những khái niệm cơ bản) của EUCLIDE.

Như trên đã nói, "Eléments" (Những khái niệm cơ bản) gồm có 13 tập.

- Tập 1: Bao gồm phần mở đầu có 23 định nghĩa, 5 tiên đề và 5 khái niệm chung. 23 định nghĩa nói trên đề cập đến điểm, đường, mút của một đường, đường thẳng, mặt, góc phẳng, đường thẳng vuông góc, góc tù, góc nhọn, giới hạn, hình, hình tròn, đường thẳng song song.

5 tiên đề mà Euclide phát biểu gồm có:

1. *Dựng một đường thẳng từ một điểm bất kỳ đến một điểm bất kỳ.*
2. *Tạo liên tục một đường thẳng hữu hạn trong một đường thẳng.*
3. *Vẽ một đường tròn từ một điểm bất kỳ và với một khoảng cách bất kỳ.*
4. *Các góc vuông đều bằng nhau.*
5. *Nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng cho trước tạo thành những góc trong cùng một phía với đường thẳng có tổng bé hơn hai góc vuông thì nếu kéo dài hai đường thẳng cho trước nói trên về phía có tổng hai góc trong bé hơn hai góc vuông, hai đường thẳng ấy sẽ cắt nhau.*

Đây là một tiên đề nổi tiếng về đường song song gây tiếng vang hàng nghìn năm sau.

5 khái niệm chung là những khái niệm sau:

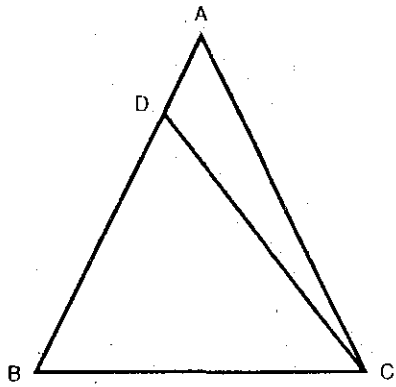
1. *Các đại lượng cùng bằng một đại lượng thì bằng nhau.*
2. *Thêm những đại lượng bằng nhau vào những đại lượng bằng nhau thì có những đại lượng mới bằng nhau.*
3. *Bớt những đại lượng bằng nhau vào những đại lượng bằng nhau thì còn lại những đại lượng bằng nhau.*
4. *Những vật trùng khít với nhau thì bằng nhau.*
5. *Toàn thể lớn hơn bộ phận.*

Sau phần mở đầu này là 48 mệnh đề được phân thành ba nhóm: Nhóm thứ nhất gồm 26 mệnh đề có liên quan đến các tính chất của tam giác, gồm có ba trường hợp bằng nhau của tam giác, các hệ thức giữa các phần tử của tam giác, phép dựng hình như dựng đường phân giác của một góc, trung điểm của một đoạn thẳng, dựng đường vuông góc với một đường thẳng. Nhóm thứ hai gồm từ mệnh đề thứ 27 đến mệnh đề thứ 32 liên quan đến lý thuyết đường song song và chứng minh tổng các góc trong của một tam giác bằng hai góc vuông. Nhóm thứ ba gồm từ mệnh đề thứ 33 đến mệnh đề thứ 48 liên quan đến hình bình hành, hình tam giác, hình vuông, đến khái niệm diện tích. Mệnh đề thứ 47 là định lý Pythagore và định lý đảo của nó được xem như mệnh đề 48.

- Tập 2: Gồm có hai định nghĩa và 14 mệnh đề. Hai định nghĩa nói về hình bình hành có một góc vuông (hình chữ nhật) và các mệnh đề chứng minh sự tương đương hình học của một số hằng đẳng thức đại số. Trong hai tập đầu thì Euclide nhắc lại và sắp xếp cũng như bổ sung những công trình mà trường phái Pythagore đã làm. Điều đáng chú ý ở đây là Euclide đã sử dụng một phương pháp chứng minh mà trước ông chưa ai làm, đó là *phương pháp chứng minh bằng phản chứng*. Lấy ví dụ sau để minh họa:

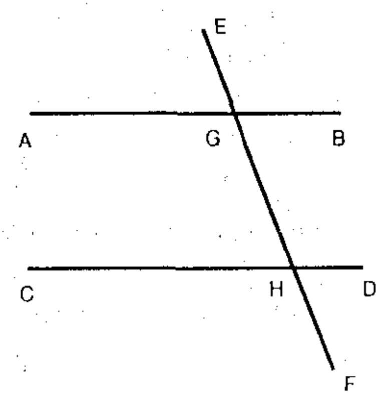
* *Mệnh đề 1.6:* Nếu trong một tam giác có hai góc bằng nhau thì đối diện với hai góc bằng nhau ấy là hai cạnh bằng nhau.

Chứng minh: Xét tam giác ABC có góc ABC bằng góc ACB. Ta nói cạnh AB = AC. Thực vậy, nếu AB không bằng AC, giả sử AB lớn hơn AC. Trên AB ta lấy một điểm D sao cho BD = AC. Xét hai tam giác ABC và DBC. Hai tam giác này có một góc bằng nhau gồm giữa hai cạnh bằng nhau từng đôi một (góc ABC = góc ACB theo giả thiết, BD = AC, BC là cạnh chung); vậy hai tam giác ấy bằng nhau, vô lý. Nếu AC lớn hơn AB ta cũng làm tương tự và thấy vô lý. Vậy AB = AC !



* *Mệnh đề 1.29.* Một đường thẳng EF cắt hai đường thẳng song song AB, CD và tạo thành những góc trong bằng nhau (ví dụ góc AGH = góc GHD). Nếu góc ngoài EGB = góc trong BGH thì các góc trong cùng phía bằng nhau và bằng một góc vuông (để dễ theo dõi, xin tạm thay đổi cách phát biểu gốc và xin mời xem hình vẽ kèm theo).

Trong mệnh đề này, lần đầu tiên *Euclide* đã *dùng tiên* đề về đường thẳng song song, là một tiên đề đã gây nhiều tranh luận suốt hàng trăm năm, và cuối cùng người ta thừa nhận rằng không thể chứng minh tiên đề song song nhờ bốn tiên đề trên và vì vậy tiên



đề về đường thẳng song song được mang tên là tiên đề 5. Việc không thể chứng minh tiên đề 5 hay sự độc lập giữa 5 tiên đề Euclide đã mở đường cho các nhà toán học Gauss, Bolyai, Lobatchevski đến với hình học Phi Euclide.

• Tập 3: Chứa tất cả 11 định nghĩa về đường tròn và 37 mệnh đề về đường tròn, dây cung, tiếp tuyến,, cách dựng đường tròn, các góc chắn....

• Tập 4: Gồm có 7 định nghĩa về các hình đa giác nội tiếp trong hình tròn, ngoại tiếp với hình tròn. Kiến thức trong các tập 3 và 4 nói chung Euclide rút ra từ các công trình của Hippocrate ở Chio nhưng được sắp xếp và bổ sung, hoàn chỉnh thêm.

• Tập 5: Gồm 18 định nghĩa về lý thuyết tỷ lệ thức của Eudoxe nhưng được nâng cao.

• Tập 6: Nêu lên phần áp dụng của tập 5 vào hình học phẳng, tam giác đồng dạng

• Tập 7, 8, 9: Dành cho lý thuyết số.

Trong tập 7, ta thấy có định nghĩa và mệnh đề về đơn vị, số chẵn, số lẻ, số nguyên tố, số bình phương, số hoàn chỉnh (hoàn hảo), bội số, ước số, bội số chung nhỏ nhất, ước số chung lớn nhất, các số nguyên tố cùng nhau. Tập 7 có 22 định nghĩa và 39 mệnh đề. Tập 8 gồm 27 mệnh đề về cấp số, các tính chất đơn giản về các số bình phương, lập phương, nhưng hầu như không thấy định nghĩa nào. Tập 9 gồm 36 mệnh đề về số chẵn, số lẻ, số nguyên tố. Đây là phần kết thúc lý thuyết số mà Euclide trình bày trong tác phẩm "Eléments ". Trong tập 9 có một mệnh đề nổi tiếng là mệnh đề 36. Mệnh đề này phát biểu như sau theo ngôn ngữ toán học ngày nay cho dễ theo dõi.

* Mệnh đề 36 (tập 9):

Nếu $S_n = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ *là một số nguyên tố, thì* $2^{n-1}(2^n - 1)$ *là một số hoàn chỉnh (hoàn hảo).* Người Hy Lạp cổ đã tìm ra được 4 số hoàn hảo là 6, 28, 496. 8128. Cho đến ngày nay, người ta biết rằng các số hoàn hảo là những số chẵn và có dạng như Euclide đã tìm ra. Còn có số hoàn hảo nào là số lẻ không thì người ta chưa chứng minh được.. Vào thế kỷ thứ XVIII, nhà toán học vĩ đại Euler đã chứng minh một cách tổng quát rằng mọi số hoàn hảo chẵn có dạng như Euler đã tìm ra!

- Tập 10: Là tập đồ sộ nhất trong tác phẩm "Eléments" của Euclide. Theo các sử gia thì dây là tập dáng chú ý nhất trong tác phẩm "Eléments". Nó gồm có bốn định nghĩa về đại lượng khả ước và vô ước và 115 mệnh đề về số vô tỷ. Euclide phân loại một cách hệ thống những đoạn vô ước dạng:

$a \pm \sqrt{b}$, $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$, $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$ trong đó a, b đều là khả ước.

Các tập 11, 12, 13 chủ yếu là về hình học không gian.

- Tập 11: Có 39 mệnh đề, 28 định nghĩa mặt phẳng, mặt phẳng song song, về các khối đồng dạng, các khối chóp, trụ, cầu, lập phương.

- Tập 12: Gồm 18 mệnh đề về cách tính diện tích các hình. Theo Archimède thì trong tập này Euclide đã dùng nhiều kết quả của Eudoxe ở Cnide.

• Tập 13: Nói về cách dựng các hình đa diện đều và tính chất của chúng.

Đời sau hết lời ca ngợi tác phẩm "Eléments" chính là vì cách suy luận độc đáo của Euclide. Ông đã đi từ 5 tiên đề, các định nghĩa để xây dựng thành công 465 mệnh đề toán học. Mặc dù "Eléments" chưa phải là tuyệt hảo, còn đôi chỗ thiếu sót, chưa chính xác, nhưng nhân loại mãi mãi tự hào về tác phẩm tuyệt vời ấy và muôn đời sau vẫn còn nhớ ơn Euclide.

Các tác phẩm khác của Euclide

Đời sau còn nhắc đến những tác phẩm khoa học sau mà người ta cho rằng Euclide là tác giả. Đó là "Những dữ kiện" gồm có 15 định nghĩa và 95 mệnh đề về các quy tắc đại số, các công thức đại số, về phương trình trùng phương, phương trình tuyến tính, về hình học đường tròn về các tỷ số số học. Trong "Sự chia các hình" (tuy bản gốc đã mất nhưng người ta còn tìm được bản dịch bằng tiếng Ả Rập) người ta đọc được 36 mệnh đề rất thú vị về chia bằng nhau hoặc theo một tỷ lệ nào đó v.v... Hai tác phẩm khoa học khác mà ngày nay người ta còn lưu truyền là *"Hiện tượng"* và *"Quang học"* trong đó Euclide đề cập tới toán học áp dụng vào Thiên văn sơ cấp và triển vọng xa hơn của nó. Tuy cuộc đời của Euclide còn nhiều điều người đời sau chưa được biết đến nhưng mọi người đều tôn vinh ông là nhà toán học, khoa học vĩ đại đã mở đường cho các nhà bác học của trường phái Alexandrie huy hoàng thời Cổ đại Hy Lạp sau này.

Chương 6.
ARCHIMÈDE VÀ NHỮNG BẬC THẦY CỦA TRƯỜNG ĐẠI HỌC CỔ ĐẠI ALEXANDRIE

Archimède (287-212 trước C.N)

Sinh trưởng ở Syracuse, một đô thị Hy Lạp lớn thời Cổ đại, ông là con trai của một nhà thiên văn ít tên tuổi tên là Phéidias. Ông có bà con với vua Hiéron miền Syracuse. Sử sách chép rằng ông có một thời gian lưu học ở Ai Cập, đặc biệt là ở trường Đại học Alexandrie, và chính tại dây ông đã được gặp Conon - học trò của Euclide - và Eratosthène - Giám đốc Thư viện Đại học Alexandrie, nổi tiếng là một nhà Địa lý học. Nhờ mối thâm giao này mà Archimède tiếp cận với những phát minh mới về toán học và khoa học trong thời gian ông lưu học xa nhà. Trở về quê hương ông say sưa nghiên cứu, truyền thụ cho học trò những tri thức, phát minh về toán học, khoa học đã làm tên tuổi ông thành bất tử. Cuộc đời của ông và ngay cái chết đáng tiếc của ông cũng thành huyền thoại được đời dời truyền tụng thán phục, thương cảm. Sử gia La Mã đã không ngừng ca tụng thêu dệt thần thoại hóa ông mong đời sau giảm nhẹ tội lỗi cho tướng La Mã Marcellus đã giết ông, một ân nhân của nhân loại, vào năm 212 trước C.N khi thành Syracuse của Hy Lạp bị quân La Mã vây hãm. Tục truyền rằng quân La Mã vây thành Syracuse trong hai năm (từ 214 đến 212 trước C.N) nhưng không làm sao hạ nổi thành vì Archimède đã giúp dân Syracuse chế ra nhiều súng bắn đá tiêu diệt quân La Mã đến gần thành, và ông đã dùng hệ thống thấu kính hội tụ sức nóng mặt trời thiêu rụi thuyền bè quân xâm lược. Tướng La Mã Marcellus dành cho quân vây thành, chờ thời. Quân Hy Lạp lâu ngày mất cảnh giác, nhân dịp lễ nữ thần Diane (nữ thần săn bắn), sơ hở để quân La Mã lẻn vào thành và nhờ đó mà tướng Marcellus có cơ hội chiếm được Syracuse. Tướng Marcellus mến mộ thiên tài Archimède đã ra lệnh quân sĩ không được chạm đến ông nhưng đáng tiếc, quân lính của Marcellus say máu chém giết bất cứ ai mà chúng gặp, vì thế mà Archimède đã bị hại. Trong những huyền thoại về cuộc đời Archimède thì có lẽ câu chuyện ông phát minh ra nguyên lý đầu tiên của Thủy tĩnh học là thú vị, được mọi người truyền tụng cho tới ngày nay. Sử sách chép lại rằng Vua Hiéron sai thợ kim hoàn làm một vương miện nhưng nhà vua nghi ngờ người thợ kim hoàn lấy bớt vàng và thay bạc vào bèn hỏi ý kiến bạn thân là nhà bác học Archimède làm sao xác định được tính ngay gian mà không làm hỏng chiếc vương miện. Sau nhiều thời gian suy nghĩ, ông đã nảy ra ý kiến giải quyết vấn đề mà Vua Hiéron đặt ra nhân ngâm mình tắm trong bồn, ông thấy trọng lượng cơ thể như nhẹ đi. Ông sung sướng nhảy ra khỏi bồn tắm, hét to lên *"Eurêka! Eurêka!"* (ý nói tôi đã tìm ra!). Từ đó ông phát minh ra nguyên lý đầu tiên của Thủy tĩnh học và chính trên cơ sở nguyên lý ấy ông đã giải quyết hoàn toàn và đẹp đẽ bài toán của Vua Hiéron... Một lần khác, khi nghiên cứu về đòn bẩy, ông nhận xét với đòn bẩy, có thể dùng một lực nhỏ để bẩy một vật nặng hơn nhiều lần, vì vậy ông nói vui: *"Hãy cho tôi một điểm tựa, tôi sẽ bẩy được quả đất lên!"*. Say sưa với phát minh, nghiên cứu khoa học, ông không còn nhớ gì đến việc ăn uống thường ngày nữa. Sinh thời, ông thú vị về bài toán mà ông đã giải: "*một hình cầu nội tiếp trong một hình viên trụ*" và ông nói rằng: "mai kia, sau khi tôi qua đời, nên ghi hình ảnh bài toán này trên bia mộ tôi". Và người ta đã thực hiện đúng nguyện ước của ông. Chính nhờ đó mà Cicéron (106-43 trước C.N) đã tìm ra được ngôi mộ Archimède bị bỏ hoang theo năm tháng, gai mọc đầy và cỏ dại phủ kín! Ông đã lại cho đời sau một gia tài vô cùng quý giá về các phát minh khoa học của ông thuộc các lĩnh vực: Hình học phẳng, Hình học không gian, Số học, Cơ học, Thủy tĩnh học, Thiên văn học. Ngôn ngữ trình bày trong các công trình khoa học ấy rất khúc chiết, mạch lạc, trong sáng, khiến cho ngày nay ai đọc cũng vô cùng kinh ngạc. Có thể tóm lược công trình của Archimède vào *10 tác phẩm nổi tiếng sau:*

1. *"Về trạng thái cân bằng"* tập I, nghiên cứu về trọng tâm, về hình bình hành, hình tam giác.

2. *"Cầu phương hình parabole"*, trong đó ông vừa cho lời giải hình học, vừa cho lời giải cơ học.

3. *"Về trạng thái cân bằng"* tập II, nghiên cứu về trọng

tâm của đới parabole. (segment de parabole).

4. *"Bàn về hình cầu và hình viên trụ"* tập I và II, trong đó Archimède đã đưa ra những kết quả sau:

– Diện tích một hình cầu bằng 4 lần diện tích của hình tròn lớn của hình cầu ấy.

– Diện tích của đới cầu bằng diện tích hình tròn có bán kính bằng đoạn thẳng nối đỉnh của đới cầu tới một điểm của chu vi hình tròn đáy.

– Khi một viên trụ ngoại tiếp với một hình cầu có chiều cao bằng đường kính của hình cầu thì thể tích và diện tích toàn phần của hình viên trụ bằng 1,5 lần thể tích và diện tích của hình cầu.

5. *"Bàn về các hình xoắn"*. Sau này ta quen gọi là hình xoắn Archimède $f = r\theta$.

6. *"Bàn về các conoïdes và các sphéroïdes"*, nghiên cứu về thể tích có được do các ellipses và paraboles quay quanh trục đối xứng.

7. *"Đo đường tròn"* .

8. *"Arénaire"*, nghiên cứu về hệ đếm các số lớn. Archimède bảo rằng có thể viết số lớn đó lớn hơn số hạt cát lấp đầy vũ trụ!

9. *"Nghiên cứu về các vật nổi"*, gồm 2 tập.

10. *"Bàn về phương pháp"*. Trong tác phẩm này Archimède muốn đề cập đến phương pháp luận. Ông đã trình bày một số phương pháp giúp ông phát minh ra định lý toán học. Archimède đã tìm ra giá trị gần đúng của số π bằng cách dùng một đa

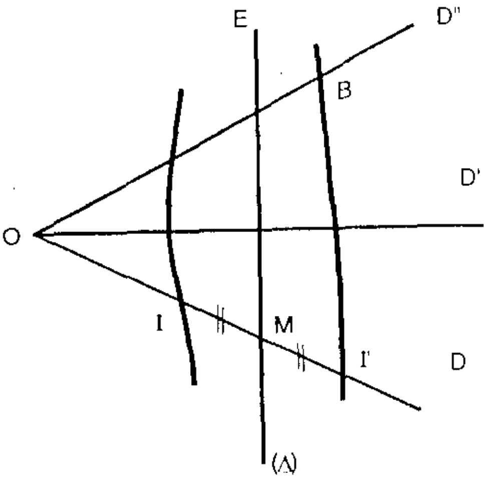
giác đều có 96 cạnh nội tiếp trong hình tròn. Công lao ông đóng góp cho toán học, cơ học, vật lý, thiên văn học... thật là vĩ đại.

Eratosthène (276-194 trước C.N)

Trong khi Archimède nghiên cứu khoa học tại quê nhà Syracuse thì ở thư viện Đại học Alexandrie một nhà khoa học khác cũng được nhiều người biết đến là Eratosthène. Ông vừa là một nhà toán học, vừa là một nhà thơ, nhà sử học, nhà địa lý học, nhà thiên văn học và cũng khá nổi tiếng về thể thao, điền kinh nữa. Ông sinh ở Cyrène, một thành phố ở phía nam Địa Trung Hải. Thời thanh niên của ông trôi qua ở Athènes, về sau ông được Vua Ptolémée III xứ Ai Cập mời làm thầy học cho Thái tử đồng thời kiêm Giám đốc Thư viện trường Đại học Alexandrie vào năm 40 tuổi. Sinh viên Đại học Alexandrie gọi ông là "Pentathlos" có nghĩa là nhà vô địch môn thể thao 5 môn phối hợp. Công trình khoa học giá trị nhất của ông là ông đã đo chính xác chu vi quả đất. Lời giải cơ học của bài toán gấp đôi hình khối lập phương của Eratosthène được khắc vào đá ở đền thờ Vua Ptolémée. Ông cũng còn nghiên cứu về số nguyên tố nữa.

Nicomède

Người ta không biết chắc năm sinh của ông, chỉ biết ông sống vào giữa thời Eratosthène (276-194 trước C.N) và Apollonius (262-200 trước C.N). Người ta biết đến ông nhờ phát minh của ông ra đường "conchoïde". Người ta phân biệt conchoïde của một đường thẳng, conchoïde của một đường cong. Sau đây xin nêu ví dụ về conchoïde của đường thẳng: O là một điểm cố định, (Δ) là một đường thẳng cố định. Qua O ta vẽ các đường thẳng (D), (D'), (D''), lần lượt cắt đường thẳng cố định (Δ) tại các điểm M, M', M''. Giả sử MI = MI' có độ dài không đổi. Khi đường thẳng (D) quay quanh điểm O, quỹ tích của I và I' với độ dài MI = MI' không đổi là một đường cong và đường cong này được gọi là conchoïde của đường thẳng (Δ). Người ta dùng đường conchoïde để giải bài toán chia 3 một góc bất kỳ và gấp đôi một hình lập phương.



Apollonius (262-200 trước C.N)

Trong một thế kỷ tồn tại, Alexandrie với những vì vua tài ba đã không ngừng phát triển và trở thành một trung tâm văn minh của thời cổ đại với dân số một triệu người. Lâu đài, thành quách, đền thờ, công viên, trường học, nhà hát, cung thể thao, chợ... tất cả tạo nên sự phồn vinh, phát triển khá cao. Chính trong môi trường văn hóa đó, các nhà bác học Alexandrie đã sống và làm việc, thầy trò cùng bàn bạc sôi nổi các vấn đề khoa học. Apollonius thời trai trẻ đến Alexandrie để theo học các học trò của Euclide. Ông ở đó rất lâu, rồi qua Pergame (miền Tiểu Á) thăm trường Đại học và Thư viện mới khai trương. Ông quay về Alexandrie làm việc cho đến ngày qua đời (vào khoảng từ năm 200 đến năm 190 trước C.N). Mặc dù là một nhà thiên văn nhưng ông cũng rất nổi tiếng về Hình học với tác phẩm *"Tiết diện conique"* rất độc đáo ở chỗ phương pháp ông dùng rất gần với Hình học giải tích của chúng ta ngày nay. Tác phẩm *"Tiết diện conique"* của Apollonius gồm 8 tập với 400 mệnh đề đã đưa ông vào hàng ngũ các "nhà hình học lớn của thời đại" như người ta đã tôn vinh ông vì sự thật là tác phẩm ấy đã vượt trội hơn các công trình của Menechme, Euclide cùng một đề tài. Người có công trong việc sưu tầm công trình của Apollonius để truyền lại cho hậu thế là Pappus (cuối thế kỷ thứ III sau C.N) ở Alexandrie. Ngày nay, người ta còn truyền tụng *"bài toán Apollonius"*: dựng một đường tròn tiếp xúc với 3 đường tròn cho trước, kể cả các trường hợp các đường tròn cho trước suy biến thành những đường thẳng hay những điểm. Bài toán này hấp dẫn các thế hệ toán học sau này như Viète, Euler, Newton, Descartes. Trung tâm văn minh Alexandrie của nhân loại cổ đại với 3 đời minh quân Ptolémée I, II, III là những năm tháng huy hoàng nhất của "kỷ nguyên vàng" của Toán học Hy Lạp. Khi Vua Ptolémée IV lên ngôi là lúc cuối đời của Apollonius. Tên bạo chúa này tự tay mình đã giết chết mẹ, vợ, em và một số bạn bè. Xã hội dần dần suy tàn, nền Toán học Hy Lạp không còn ở đỉnh cao nữa.

Lượng giác Hy Lạp và Toán ứng dụng

Kim tự tháp Ai Cập là một chứng minh hùng hồn rằng từ lâu, người Ai Cập đã biết lượng giác và người Hy Lạp sau này kế thừa vốn hiểu biết quý giá đó. Người Hy Lạp đã nghiên cứu hệ thức giữa các góc và dây cung mà nó chắn trong cùng một đường tròn. Từ thời Hippocrate người ta đã biết mối liên hệ giữa góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn một dây cung và Eudoxe đã vận dụng những hiểu biết đó để xác định kích thước quả đất và khoảng cách tương đối đến mặt trời và mặt trăng.

Aristarque (310-230 trước C.N)

Chính ông là người đã phát biểu trước Copernic 17 thế kỷ (nhưng không tính toán được như Copernic) rằng Trái Đất và các hành tinh quay quanh Mặt Trời. Trong một tác phẩm nhỏ *"Bàn về kích thước và các khoảng cách tương đối đến Mặt Trời và Mặt Trăng"*. Aristarque đã thiết lập các tỷ số lượng giác và trình bày 18 mệnh đề trong đó mệnh đề 7 phát biểu: "khoảng cách từ Mặt Trời đến Trái Đất lớn hơn 18 lần nhưng nhỏ hơn 20 lần khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trăng"; điều này tương đương với cách nói: tỷ số giữa khoảng cách từ mặt trăng đến mặt trời bằng sin 3^0 hay $\frac{1}{2} < \sin 3^0 < \frac{1}{18}$

Trong các mệnh đề 11, 12, 13 ta lần lượt thấy các tỷ số sau: $\frac{1}{6} < \sin 1^0 < \frac{1}{45}$; $\frac{89}{90} < \cos 1^0 < 1$; $\frac{44}{45} < \cos^2 1^0 < 1$

Hipparque (180-125 trước C.N)

Người Hy Lạp tôn vinh ông là cha đẻ của Thiên văn học Hy Lạp. Ông là cộng tác viên của trường Đại học Alexandrie vào những năm 161-126 trước C.N. Nhiều nhà khoa học thời bấy giờ bảo rằng Hipparque là tác giả của một quyển Hình học gồm 12 tập chuyên nghiên cứu về dây cung trong đường tròn (mở đường cho lượng giác) nhưng bị thất lạc không còn một tí vết tích nào. Ông có nhiều đóng góp trong nghiên cứu chuyển động của Mặt Trăng, phát hiện nhiều bất thường trong chuyển động ấy, nhưng sở dĩ ông được tôn vinh về thiên văn vì ông đã sáng chế nhiều dụng cụ cải tiến cách đo đạc trong thiên văn thời bấy giờ. Ông đã phát minh ra hệ quy chiếu dùng ngôn ngữ kinh độ và vĩ độ, gây quan niệm đúng về quỹ đạo của Mặt Trời, Mặt Trăng, và còn đóng góp về lý thuyết nhật thực, nguyệt thực. Nhưng điều đáng tiếc là trong những năm tháng ông ở Trường Đại học Alexandrie thì xã hội Alexandrie đã có nhiều biến động xấu, phong hóa suy đồi, vua quan và bọn quyền thế giàu sang bạo ngược, sống phè phỡn, xa hoa trụy lạc, trộm cướp nổi lên tứ tung, thời huy hoàng ngày xưa của Alexandrie tàn lụi dần. Nhưng may thay, triều đại các vua Ptolémée vào buổi hoàng hôn còn vài tia loé sáng nhờ Nữ hoàng Cléopâtre. Tranh dành quyền lực với anh, Cléopâtre liên minh với César - nhà chính khách tài năng La Mã. Nhờ sự liên minh này, César đã giúp cho Cléopâtre lên ngôi ở Ai Cập. Nhưng dân chúng Alexandrie tẩy chay César, căm ghét sự có mặt của quân La Mã của César ở thành phố. Cuối cùng quân La Mã phải rút nhưng đã trả thù bằng cách đốt cháy Alexandrie. Trong đêm tàn khốc ấy gần nửa triệu bản viết tay và papyrus vô giá của nhân loại về các công trình toán học, khoa học và các ngành khác được các nhà bác học và các triều đại hoàng kim Ptolémée nâng niu tích lũy hàng ba trăm năm đã thành tro! Nữ hoàng Cléopâtre, sau khi đã trở thành người đứng đầu nhà nước Ai Cập đã ra sức phục hồi Thư viện Alexandrie. Bà đã dùng nhiều biện pháp khôn ngoan nên đã thành công phần nào trong việc thu hồi được 200.000 papyrus viết tay từ thư viện Pergame và mong trở lại thời hoàng kim xưa. Bà đi nhiều nơi, thu phục nhân tài, quy tụ các nhà bác học về Alexandrie. Nhưng tiếc thay, bà mất vào năm 31 trước Công C.N, triều đại của bà cũng mất theo và Ai Cập trở thành một tỉnh của Đế quốc La Mã. Người La Mã cố gắng thiết lập một trật tự mới, nhất là ở Viện Bảo tàng, Thư viện và Trường Đại học Alexandrie thì họ cố giữ cấu trúc và sự hoạt động như những ngày huy hoàng của các triều đại Ptolémée trước.

Menelaüs (100 sau CN)

Ông là sinh viên của Đại học Alexandrie, về sau được giữ lại trường một thời gian cho đến khi ông được gọi về Rome giữ chức vụ chuyên viên ở đài thiên văn. Người ta nói ông viết một quyển *"Nghiên cứu về dây cung của đường tròn"* gồm 6 tập nhưng ngày nay bị thất lạc. Ông là nhà hình học đầu tiên nghiên cứu về tam giác cầu và có nhiều định lý về Lượng giác cầu. Ngày nay người ta còn lưu lại được quyển sách của ông nghiên cứu về các hình vẽ trên mặt cầu có tên là Sphoerica. Hình học cầu của ông có nhiều ứng dụng trong thiên văn học.

Ông để lại cho đời sau một định lý bất hủ mang tên ông - định lý Menelaüs, có nhiều ứng dụng trong Lượng giác cầu. Định lý ấy ta phát biểu theo ngôn ngữ của chúng ta như sau: Trong một tam giác phẳng ABC. Ta có đường hoành FED (xem hình vẽ). Từ A, B, C ta hạ những đường vuông góc xuống đường hoành, ta có AG, BH, CI. Ta có hệ thức:

$$\frac{AD}{DC}\cdot\frac{CE}{EB}\cdot\frac{BF}{FA}=1$$

Ông dã dùng tam giác đồng dạng chứng minh được các hệ thức sau:

$$\frac{AD}{DC}=\frac{AG}{CI};\ \frac{CE}{EB}=\frac{CI}{BH},\ \frac{BF}{FA}=\frac{BH}{GA}$$

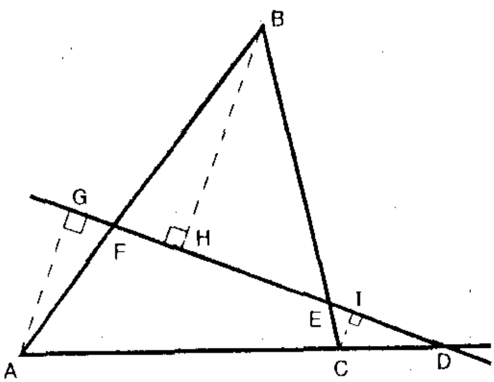
Từ đó suy ra:

$$\frac{AD}{DC}\cdot\frac{CE}{EB}\cdot\frac{BF}{FA}=1$$

Hay:

AD. CE. BF

= CD. BE. AF



Đối với tam giác cầu ta có:

sin AD. sin CE. sin BF = sin CD. sin BE. sin AF

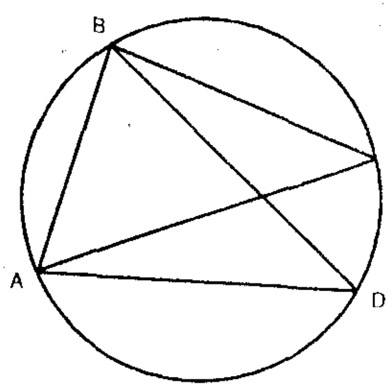
Từ định lý này, ứng dụng vào lượng giác cầu, ta suy ra được nhiều điều khác nữa.

Ptolémée (85-165 sau C.N)

Claude Ptolémée không bà con gì với dòng vua Ptolémée cả. Ông là Giáo sư của trường Đại học Alexandrie từ những năm 125 – 160 và phụ trách Đài Thiên văn của trường. Ông đã viết một bộ sách gồm 13 tập nhan đề Almageste. Bộ sách này trong Thiên văn học được sánh ngang với bộ Eléments của Euclide về Toán học mấy trăm năm trước. Cho đến thế kỷ XII, các bảng tính toán về Thiên văn chủ yếu dựa vào bộ Almageste này của Ptolémée. Qua sự tàn phá của thời gian, ngày nay chúng ta may mắn còn lưu lại được chẳng những các bảng lượng giác trong bộ sách này mà may mắn còn giữ được cách lập các bảng lượng giác ấy nữa. Ptolémée đã chia vòng tròn ra làm 360^0 và đường kính ra làm 120 phần, rồi mỗi phần ra phút, giây...; ông thừa nhận rằng tỷ số giữa chu vi đường tròn và đường kính của nó là $3^0\ 8'\ 30''$ nghĩa là

$$\pi(\text{pi}) = 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{60^2} = 3{,}14166$$

Ông còn phát biểu định lý sau đây mà đời sau gọi là Định lý Ptolémée: *"Tổng các tích các cạnh đối của một tứ giác cyclique bằng tích các đường chéo của tứ giác cyclique"*. Ptolémée gọi tứ giác nội tiếp trong đường tròn là tứ giác cyclique. Qua hình vẽ



bên, kết luận của định lý Ptolémée là:

$$AB.CD + BC.DA = AC.BD.$$

Định lý Ptolémée còn dẫn đến hệ thức trong lượng giác:

$$\sin (a \pm b) = \sin a \cos b \pm \sin b \cos a$$

Trong tác phẩm Almageste của ông có những bảng số rất cần cho sự tính toán của các nhà thiên văn (tập I).

Trong tập II của bộ Almageste ông nghiên cứu sự thay đổi của các hiện tượng thiên văn tùy thuộc vào độ cong của trái đất. Trong tập VII và VIII ông thiết lập một catalogue 1028 vì sao tương đối cố định. Các tập còn lại ông nói về các hành tinh. Bộ Almageste được sử dụng rộng rãi cho tới thời Copernic và Képler nghĩa là hơn một nghìn năm sau! Ptolémée còn nghiên cứu địa lý, quang học và âm nhạc nữa.

Có một điều thú vị là ông cũng bị thu hút bởi tiên đề song song của Euclide, và cũng đã mầy mò thử chứng minh nhưng thất bại. Mặc dù chính quyền của Đế quốc La Mã không tỏ ra cản trở gì, nhưng trên thực tế hành động, người La Mã thích văn thơ, nhạc, kịch, triết học ca hát hơn khoa học tự nhiên. Các nhà bác học của trường phái Alexandrie bị bỏ rơi, do đó các môn khoa học tự nhiên cơ bản, nhất là toán, chỉ còn là vang và bóng của một thời oanh liệt.

Cùng với số ít nhà toán học Hy Lạp rơi rớt lại như Héron, Diophante, Pappus còn luyến tiếc thời vàng son xưa, nền toán học Hy Lạp, niềm kiêu hãnh một thời của nhân loại cổ đại, sa sút dần và Châu Âu sắp bước vào đêm dài tăm tối nghìn năm thời Trung cổ.

Héron (75-150 sau CN)

Công trình khoa học của ông chủ yếu tập trung vào Toán và Cơ. Học sinh Trung học không lạ gì công thức mang tên ông - *Công thức Héron:*

$$D = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \text{ với } \quad s = \frac{a+b+c}{2}$$

Ngoài ra ông còn nghiên cứu cách tính thể tích hình nón, hình trụ, hình hộp chữ nhật, hình chóp, hình chóp cụt, hình cầu, hình xuyến, các hình đa diện đều. Trước Héron, phần nhiều các nhà Toán học Hy Lạp thường thích nghiên cứu lý thuyết, ít người nghiên cứu ứng dụng, hoặc tìm cách sáng chế máy móc, nhưng với Héron thì ông thích nghiên cứu toán ứng dụng và máy móc. Ông sáng chế đồng hồ nước, máy nâng, nhiệt kế. Tất cả những máy ấy đều dựa trên nguyên lý Thủy tĩnh học. Toán học Hy Lạp đến thời Héron mang màu sắc mới, khác với những thế kỷ trước, màu sắc ứng dụng vào thực tế, nhất là với Diophante thì các vấn đề đặt ra để giải quyết gần gũi với đời sống thường ngày hơn.

Diophante (năm 150 sau C.N)

Thực ra người ta chưa nói chính xác được ông sinh vào năm nào. Có người bảo rằng ông sống lâu, thọ 84 tuổi. Ông để lại cho đời sau chủ yếu là tác phẩm Số học gồm 13 tập nhưng lưu truyền cho đến ngày nay chỉ 6 tập đầu, 7 tập sau bị thất lạc. Công trình nghiên cứu của ông mang nhiều sắc thái khác các nhà toán học thuộc thế hệ trước. Người ta còn giữ lại được

189 bài toán ông nêu ra có kèm theo lời giải và hầu hết thuộc loại phương trình vô định (có vô số nghiệm). Diophante chỉ quan tâm đến những nghiệm dương và trong những nghiệm dương ấy ông chỉ lấy một nghiệm mà thôi! Diophante đã đưa ra những ký hiệu toán học mới. Sau đây xin nêu cụ thể một số bài toán Diophante trong tập 1 (có tất cả 39 bài) là tập chủ yếu gồm những bài về phương trình bậc nhất.

Bài toán 1: Chia 100 ra làm hai phần khác nhau là 40. Hỏi mỗi phần?

Giải: Cho x là số nhỏ nhất. Có phương trình $2x + 40 = 100$, rút ra $x = 30$ và phần kia là 70.

Bài toán 39: Cho hai số, ví dụ 3 và 5. Tìm số thứ ba x sao cho ba tổng số sau đây lập thành cấp số cộng:

$3x + 15$, $5x + 15$, $8x$

Giải: Diophante phân biệt các trường hợp:

1). $5x + 15$ ví dụ là số lớn nhất, $3x + 15$ ví dụ là số nhỏ nhất thì: $5x + 15 + 3x + 15 = 2.\ 8x$; rút ra $x = \dfrac{15}{4}$

2). $5x + 15$ ví dụ là số lớn nhất, $8x$ ví dụ là số bé nhất thì: $5x + 15 + 8x = 2.\ (3x + 15)$; rút ra $x = \dfrac{15}{7}$

3). Ví dụ $8x$ là số lớn nhất, $3x + 15$ là số bé nhất thì: $8x + 3x + 15 = 2.\ (5x + 15)$; rút ra $x = 15$

Các tập 2, 3, 4, 5, 6 nghiên cứu về phương trình vô định bậc 2 hoặc bậc cao có 2, 3 ẩn số. Sau đây xin trích một số bài.

Bài 20, tập 2: Tìm hai số cho biết bình phương số này cộng với số kia thành một số chính *phương. Ví dụ: hai số đó là* x và 2x + 1.

Giải: Diophante giải ra $x = \frac{3}{13}$

và hai số ấy là $\frac{3}{13}$ và $\frac{19}{13}$

Bài toán 9, tập 3: Cho một số. Tìm 3 số khác cho biết lấy hai trong ba số ấy trừ số cho trước thì được một số chính phương. Ví dụ số cho trước là 3.

Giải: Diophante giải ra ba số ấy là 23, 80, 44.

Bài toán 11, tập 4: Tìm hai hình lập phương cho biết hiệu của chúng bằng hiệu của các cạnh của chúng.

Giải: Diophante cho hai lập phương ấy có canh là 2x và 3x. Như vậy: $19x^3 = x$ và x là vô tỷ.

Diophante bảo nếu 7x và 8x lần lượt là 2 cạnh của hình lập phương thì $x = \frac{1}{13}$ và hai cạnh của hình lập phương đó là $\frac{7}{13}$ và $\frac{8}{13}$.

Diophante còn có tác phẩm *"Bàn về các số đa giác"* nhưng còn lưu lại đến ngày nay chỉ một phần nhỏ. Công việc làm của Diophante có phần nào tương tự Euclide nghĩa là trong tác phẩm "Số học" cũng như trong "Eléments" không phải những điều ghi trong đó toàn là phần phátminh của tác giả, mà trái lại có những công trình của những người đi trước, và cũng có rất nhiều phần là do tác giả sáng tạo. Nhưng cho dù ghi lại công trình của người đi trước, Euclide cũng như Diophante đã có công sắp xếp, hợp lý hóa cả về cấu trúc cũng như về nội dung để cho vấn đề được trình bày sáng sủa hơn, khoa học hơn.

Pappus

Người ta đoán ông sinh ra vào cuối thế kỷ thứ III, đầu thế kỷ thứ IV sau C.N vì khi đọc bài bình luận của ông về tác phẩm Almageste người ta có thấy ông nhắc đến việc ông quan sát nhật thực vào năm 320. Tác phẩm chính của ông là bộ *"Sưu tầm toán học"* còn giữ lại đến ngày nay một phần của tập 2 và các tập tiếp theo cho đến tập 8 là tập cuối cùng. Bộ "Sưu tầm Toán học" của Pappus rất quan trọng vì ông đã góp phần bổ sung vào công trình của các tiền bối như Euclide, Archimède, Apollinius, nhờ đó chúng ta được biết thêm tin tức về các tập bị thất lạc đồng thời ông cũng đưa vào những sáng tạo của bản thân, những lời bình rất thú vị. Có thể tóm tắt nội dung 8 tập của bộ "Sưu tầm toán học" của Pappus như sau:

* Hai tập đầu bị thất lạc phần nhiều, nhưng người ta cũng thấy được ông phát triển một số ý của Apollonius về cách viết những số lớn.

* Tập 3 nói về bất đẳng thức trong tam giác và một phương pháp mới dựng 5 loại đa diện đều nội tiếp trong hình cầu cho trước.

* Tập 4 mở rộng định lý Pythagore.

* Tập 5 nói về sự đẳng chu, so sánh các diện tích cùng chu vi, so sánh các thể tích các vật thể có cùng diện tích, nhân đó đề cập tới ý nghĩa toán học của tổ ong. Vấn đề này được các nhà khoa học Việt Nam nhắc lại trong bài *"Con ong giỏi toán"* đăng trong Tạp chí *"Khoa học"* xuất bản ở Hà Nội vào những năm đầu của thập kỷ 40 của thế kỷ này.

* Tập 6 chủ yếu nói về Thiên văn.

* Tập 7 đặc biệt quan trọng vì nó giúp cho các nhà toán học có cái vốn *nghề nghiệp cần thiết trong cuộc đời nghiên cứu* toán của mình.

* Tập 8 là tập cuối cùng, viết về Cơ học. Nhưng đặc biệt có nêu cách dựng một conique đi qua 5 điểm cho trước.

Pappus cũng viết những bài bình luận về các tác phẩm như "Eléments", "Các dữ kiện" của Euclide, "Almageste", "Planisphère" của Ptolémée. Theo gương Pappus, một số nhà toán học về sau cũng thường viết bình luận các tác phẩm của người đi trước. Đây là một việc làm rất có ích cho đời sau. Có thể nêu một số người, tuy sự nghiệp sáng tạo toán học của họ không nhiều nhưng việc làm của họ là bình luận các tác phẩm toán học của lớp người trước rất có lợi cho hậu thế.

Théon ở Alexandrie và con gái là Hypatie

Théon sống vào khoảng năm 365 sau C.N. Ông không có sáng tạo gì về Toán học đáng kể nhưng được người đời nhắc tới vì ông đã viết bình luận dài 11 tập về bộ Almageste của Ptolémée và đã xem lại, chỉnh trang bộ Eléments của Euclide làm cơ sở cho việc xuất bản quy mô sau này. HYPATIE, con gái ông, là nhà toán học nữ đầu tiên của nhân loại, đã viết bình luận cho bộ *"Số học"* của Diophante, tác phẩm *"Tiết diện conique"* của Apollonius. Ngoài Toán học ra, Hypatie còn là thầy thuốc và nhà triết học.

Những nhà viết lịch sử Toán

Proclus sống vào thế kỷ thứ V sau C.N. Ông viết bình luận về tập 1 của bộ Eléments, ngoài ra ông còn viết *"Lịch sử Hình học"* gồm 4 tập và tác phẩm *"Lý luận về các khoa học Toán học"*. Đặc biệt trong bình luận tác phẩm *"Nền Cộng hòa"* của Platon, Proclus đã viết về *"Lịch sử Toán"*.

Bên cạnh Proclus, có thể kể thêm nhà bình luận về Aristote là Simplicius. Ngoài ra còn có Eutoche chuyên viết lời chú giải và bình luận về những tác phẩm của Archimède như *"Bàn về hình cầu và hình trụ"* *"Bàn về cân bằng"* hoặc tác phẩm của Apollonius như *"Tiết diện conique"*.

SỰ CÁO CHUNG CỦA NỀN TOÁN HỌC HY LẠP

Khi Đế quốc La Mã thống trị, mọi trật tự đều lần lượt thay đổi trên đất Hy Lạp xưa. Người La Mã thiện chiến thích văn nghệ, hùng biện, yêu khoa xây dựng, không ưa khoa học tự nhiên, ít quan tâm đến toán học. Về tôn giáo, họ không thờ nhiều thần như người Hy Lạp. Dưới thời vua Constantin, đây là mâu thuẫn lớn. Các nhà bác học, khoa học Hy Lạp đứng trước sự lựa chọn: hoặc bảo vệ tín ngưỡng đa thần của mình có nghĩa là chấp nhận sự trả giá đắt, hoặc theo người La Mã đi ngược với tôn giáo mình. Trong sự tuyệt vọng nhưng cương quyết bảo vệ đến cùng tôn giáo đa thần của mình, họ lui vào đền thờ Sérapis chống lại người La Mã. Trong đền thờ Serapis họ cất giấu phần tài sản quý báu nhất của nhân loại thời bấy giờ: phần lớn papyrus của Thư viện Alexandrie. Những người Công giáo La Mã giận dữ bao vây đền thờ và cuối cùng họ thắng, họ chém giết man rợ điên cuồng đốt cháy hơn 300.000 papyrus mà người Hy Lạp và nhân loại nói chung đã tích lũy hàng bao nhiêu thế kỷ mới có! Điều thương tâm nhất là Hypatie, nhà nữ toán học của loài người, nhà khoa học Hy Lạp cuối cùng sống chết vì tôn giáo của mình, cương quyết cự tuyệt theo tôn giáo La Mã, đã bị giết và bị chặt ra làm nhiều khúc, quân La Mã đã đem những phần thi thể bà rải trên đường phố Alexandrie để uy hiếp những người chống lại. Tuy vậy Thư viện Alexandrie vẫn tiếp tục tìm cách sao chép những papyrus. Cho đến năm 640 sau C.N, khi người Hồi giáo chiếm Alexandrie, Thư viện mới ngưng hoạt động. Chính quyền Ả Rập nhận lệnh thủ tiêu tất cả những gì trái với kinh Coran.

Mười thế kỷ vinh quang của nền Toán học Cổ Hy Lạp, và cũng gần như của nhân loại cổ đại đã chấm dứt và châu Âu bước vào thời kỳ tăm tối mà người ta gọi là *"đêm dài Trung cổ"* kéo dài một nghìn năm. Phải đợi đến thế kỷ thứ XVII lịch sử nhân loại mới sang trang.

Chương 7.

SƠ LƯỢC VỀ CÁC NỀN TOÁN HỌC TRUNG QUỐC VÀ ẤN ĐỘ

Cũng như Ai Cập và Ba Tư, Trung Hoa và Ấn Độ là những trung tâm văn minh sớm của loài người, nhưng vì người ta ít được tiếp cận và do đó ít được tài liệu, nhất là những tài liệu về khoa học tự nhiên của hai trung tâm văn hóa lớn ấy. Những nhà Trung Quốc học cho rằng ba nghìn năm trước C.N, đã có những vị Hoàng đế trị vì ở trên những phần đất thuộc lãnh thổ Trung Quốc bây giờ. Hoàng đế Fou-Hi trị vì vào những năm 2852 – 2738 trước C.N đã khuyến khích những nhà khoa học quan sát thiên văn để giúp vua làm lịch khuyến nông cho nhân dân. Nhà tư tưởng nổi tiếng trong lịch sử Trung Hoa là Khổng Khâu tức Khổng Tử là người có công lớn trong việc này.

HỆ ĐẾM CỦA NGƯỜI TRUNG HOA XƯA

Người Trung Hoa xưa dùng ký hiệu riêng để biểu diễn cách đếm và viết các số của mình. Người Trung Hoa có chữ viết theo lối tượng hình rất sớm so với các dân tộc khác trên thế giới. Để diễn tả từ 1 trở đi họ đã làm như bảng dưới đây:

一	=	1
二	=	2
三	=	3
四	=	4
五	=	5
六	=	6
七	=	7
八	=	8
九	=	9
十	=	10
百	=	100 (10^2)
千	=	1000 (10^3)

Để biểu diễn ví dụ số 5625 họ đã viết như dưới đây:

五千	六百	二十	五
5×10^3	6×10^2	2×10	5

Họ còn có cách viết theo vị trí. Các ký hiệu diễn tả từ 1 đến 9 như sau:

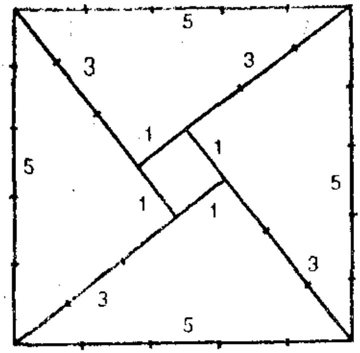
và 9 bội số đầu tiên của 10 là:

Với 18 ký hiệu trên họ có thể viết số lớn một cách thoải mái. Ví dụ số 54878, họ viết như sau:

Giống như người Babylone, ký hiệu số không xuất hiện khá chậm ở Trung Hoa. Có một điều đáng chú ý là bàn tính là một công cụ tính toán rất văn minh và xuất hiện khá sớm ở Trung Hoa.

Một điều đáng chú ý nữa là người Trung Hoa xưa không chấp nhận số âm, vì thế trong phương trình thì họ vứt các nghiệm âm!

Chou-Pei hay Số học cổ điển



Đây là tác phẩm nghiên cứu toán khá cổ nhưng người ta không xác định được nó ra đời vào lúc nào và tác giả nó là ai? Có người cho rằng nó xuất hiện vào thế kỷ thứ XII trước C.N. Chou-Pei trình bày dưới dạng đối thoại. Nội dung bao gồm một số vấn đề về thiên văn, một số tính chất của tam giác vuông (tương tự định lý Pythagore), một số tính chất của phân số. Trong Chou-Pei có chỗ trình bày đối thoại của một vị Hoàng tử với quan Thượng thư. Quan Thượng thư tâu với vị Hoàng tử rằng tính chất các số là do hình tròn và hình vuông mà có. Hình vuông tượng trưng cho Đất và hình tròn chính là Trời. Trong Chou-Pei còn có hình vẽ minh hoạ cho định lý Pythagore như trên.

Thuật toán Trung Quốc chia làm 9 ngành

Đây là sách Toán có ảnh hưởng lớn ở Trung Hoa cổ đại. Nhưng cũng như một số sách Toán khác của Trung Hoa, người ta không biết tác giả nó là ai và xuất hiện từ năm nào. Trong cuốn này có chứa 250 bài toán về nông nghiệp, chia tài sản, cách tính diện tích các hình, cách đo chiều dài, lời giải một số phương trình, tính chất tam giác vuông. Đặc biệt có trình bày cách tính diện tích hình tam giác, hình chữ nhật, hình thang, chu vi đường tròn với số π là 3. Người Trung Hoa xưa đã biết giải toán với kỹ thuật giải khá rắc rối. Xin nêu một số đề toán:

Bài toán 11 (ngành IV): Một cánh đồng có diện tích là 1 và chiều ngang là $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{12}$. Hỏi chiều dài?.

Bài toán 15 (ngành IV): Một cánh đồng hình vuông có diện tích là 567 752 , hỏi mỗi cạnh?

Bài toán 1 của ngành VIII đưa đến việc giải một hệ 3 phương trình tuyến tính bằng phương pháp ma trận là phương pháp mà người Trung Hoa ưa dùng:

$$3x + 2y + z = 39$$

$$2x + 3y + z = 34$$

$$x + 2y + 3z = 26$$

Quy tắc giải của họ như sau:

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \\ \begin{matrix} 26 & 34 & 39 \end{matrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 9 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} 26 & 102 & 39 \end{matrix} \end{array} \cdots\cdots \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} 26 & 63 & 39 \end{matrix} \end{array} \cdots\cdots \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} 26 & 24 & 39 \end{matrix} \end{array} \cdots\cdots \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \\ \begin{matrix} 99 & 24 & 39 \end{matrix} \end{array}$$

Ma trận cuối cùng cho các phương trình đã được đơn giản: $36z = 99$; $5y + z = 24$; $3x + 2y + z = 39$; từ đó suy ra các nghiệm x, y, z.

Trong “9 ngành” có nhiều bài toán dẫn đến việc giải các phương trình có dạng: $x^2 = a$, $x^3 = b$, $x^2 + y^2 = c$ và $y - x = k$.

Có bài toán: ví dụ bài 20 ngành 9 đưa đến một phương trình bậc 2 có dạng: $x^2 + 34x - 71\,000 = 0$ và tác giả cho đáp số là $x = 250$ là đáp số chấp nhận được.

Liou Houi, Tsu Ch'ung - Chih, Chou Chi-kié

Sau khi La Mã đốt sạch gia tài Toán học của nhân loại tích lũy một nghìn năm thì ở phương Đông, người Trung Hoa đang cố gắng tìm tòi sáng tạo, nhưng đời sau không được thừa hưởng bao nhiêu. Vào thế kỷ thứ III sau C.N, nhà toán học Trung Hoa Liou Houi khi nghiên cứu một đa giác đều 172 cạnh đã tìm ra giá trị gần đúng của số π là 3,14159. Ông còn tìm giá trị gần đúng thể tích một chóp cụt mà đáy là một hình vuông. Cuối thế kỷ thứ IV hai cha con nhà toán học Tsu Ch'ung-Chih (430-501) đã lập một thành tích xuất sắc thời bấy giờ là đã chứng minh rằng giá trị của π gồm giữa 3,1415927 và 3,1415916. Thành tích này không một nhà toán học nào của thế giới vượt qua nổi cho đến thế kỷ thứ XV. Tuy người Trung Hoa chưa có những phát minh gì lớn ngoài những điều vừa kể về Toán học nhưng trái lại họ phát minh ra thuốc súng, kỹ thuật in, giấy, la bàn đi biển... Nhưng nhà toán học vĩ đại nhất của Trung Hoa thời bấy giờ là Chou Chi-kié (1280-1303). Ông là Giáo sư toán học trong hai mươi năm và để lại cho đời sau hai tác phẩm lớn, đặc biệt là về đại số; ông đã xây dựng nên ngành Đại số của Trung Quốc. Ông đã nghiên cứu cách giải phương trình đại số bậc cao mà ông đặt tên là “fan fa” tương tự như phương pháp mà Horner đã tìm ra 500 năm sau! Ông đã tìm ra cái mà sau này Pascal mới tìm ra và người đời vì thiếu thông tin nên gọi sai là "tam giác Pascal"!

Trong tác phẩm xuất sắc của ông mang một cái tên khó hiểu là *"Những tấm gương quý giá"* người ta tìm thấy những công thức sau:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1 + 8 + 30 + 80 + \ldots + \frac{n^2(n+1)(n+2)}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(4n+1)}{120}$$

Rất khó đánh giá những sự đóng góp của người Trung Hoa vào kho tàng toán học của nhân loại từ thời Cổ đại cho đến thế kỷ XV, nhưng có điều chắc chắn là người Nhật Bản chịu ảnh hưởng của văn hóa Trung Hoa từ thời Cổ đại cho đến thế kỷ thứ VI sau C.N.

Sơ lược về Toán học Ấn Độ

Ấn Độ là nước chịu nhiều năm đau khổ vì nước ngoài xâm chiếm. Từ thế kỷ thứ IV trước C.N cho đến thế kỷ thứ III sau C.N, Ấn Độ lần lượt bị nhiều dân tộc xâm lăng. Từ thế kỷ thứ III sau C.N, triều đại Gupta gốc Ấn trị vì đất nước, nhưng đến thế kỷ thứ V thì Ấn Độ lại bị nước ngoài xâm lăng cho đến thế kỷ thứ XV. Tuy xã hội biến động như vậy, nhưng người ta vẫn nghĩ rằng Ấn Độ có một nền văn minh sớm, là một trong các trung tâm văn minh lớn của nhân loại. Bằng chứng là trên đất nước Ấn Độ, người ta gặp không ít những đền đài, di tích của những sản phẩm văn hóa của loài người. Nếu nhân dân Ấn Độ không có một nền toán học Cổ đại vững vàng, thì không thể có những công trình như thế.

Các Sulvaṣutras hay Quy tắc các dây

Muốn xây dựng các đền thờ, người Ấn Độ xưa cần đo đạc. Vì vậy các quy tắc về đo đạc đều có trong các Sulvasutras (Sulva là ý nói đến dây), Sutras là quy tắc. Sulvasutras viết dưới dạng thơ ca và ra đời từ thời Pythagore, trong đó nằm rải rác những kiến thức hình học, đại số như trong tập 2 của bộ Eléments của Euclide. Nếu để ý khai thác thì thấy nhờ định lý Pythagore, người Ấn biết dựng một hình vuông bằng tổng hai hình vuông khác, một hình chữ nhật bằng một hình vuông cho trước, một hình vuông bằng hiệu hai hình vuông. Người ta cũng còn thấy trong Sulvasutras, người Ấn có ý đồ tìm hiểu cách cầu phương một hình tròn. Nhưng dù sao thì người Ấn cũng chỉ sử dụng toán học như một công cụ trong xây dựng đền đài mà thôi. Nếu như các Sulvasutras dùng trong xây dựng đền đài thì các Siddhantas dùng trong thiên văn.

Các Siddhantas hay Hệ thống thiên văn.

Vào thế kỷ thứ IV sau C.N, các Siddhantas hay Hệ thống thiên văn xuất hiện dưới dạng thơ ca mà nội dung gồm có lượng giác xem như công cụ Toán để nghiên cứu thiên văn, nhưng có điều đáng chú ý ở đây là Toán học của người Ấn rất độc đáo không hề mang dấu ấn của Trung Hoa, Hy Lạp hay Babylone. Người Ấn dùng hàm sin, còn lượng giác Hy Lạp của Ptoléméee thì căn cứ vào quan hệ hàm giữa dây cung của đường tròn với góc tại tâm tương ứng. Từ thế kỷ thứ VI sau C.N người Ấn có nhiều đóng góp vào sự phát triển của lượng giác, đại số, lý thuyết phương trình trong khi đó Hy Lạp và Châu Âu chuẩn bị bước vào đêm dài Trung cổ.

Ai là nhà Toán học Ấn độ mang tên Aryabhata ?

Năm 499 sau CN, tại thành phố Patna bên sông Hằng, người ta thấy xuất hiện một bộ sách Toán viết bằng ngôn ngữ Ấn-Âu gồm có 4 phần:

* *Hòa tấu của bầu trời*

* *Cách tính toán*

* *Thời gian và đo thời gian*

* *Hình cầu*

và tác giả của bộ sách quý ấy là Aryabhata, nhưng Aryabhata lại là bút danh không phải của một người! Ngày nay cũng chưa xác định được chính xác tác giả. Sách chỉ trình bày tóm tắt và chủ yếu là phép đo về thiên văn, còn về toán học nói chung thì có quy tắc khai phương, khai căn bậc ba, tính diện tích hình tròn với $\pi = 3{,}1416$, diện tích hình tam giác, hình thang. Có một số quy tắc sai; ví dụ quy tắc tính thể tích hình chóp, hình cầu. Còn tính toán về thiên văn thì tuy người đời sau chưa hiểu bằng cách nào người Ấn Độ xưa lập các công thức cụ thể, nhưng có thể thấy các bảng số của họ ghi rõ giá trị tương đương với $1 - \cos\theta$ với θ tính từ $3\frac{3}{4}^{0}$ đến $\theta = 90^0$. Và trong các bảng số cũng thấy rõ là việc lập bảng đủ phục vụ cho họ về tính toán thiên văn! Có một điều đáng chú ý là người Ấn cố gắng đi tìm phép đếm và đã đi dần đến chỗ dùng 9 ký hiệu, nhưng còn ký hiệu số không thì trên thế giới ngày nay mọi người còn tranh cãi, dân tộc nào đã phát minh ra ký hiệu số không đầu tiên? Có người bảo đó là người Ấn Độ (xem tóm tắt quá trình bằng sơ đồ ở trang 87) nhưng cũng có nhiều người nghi ngờ.

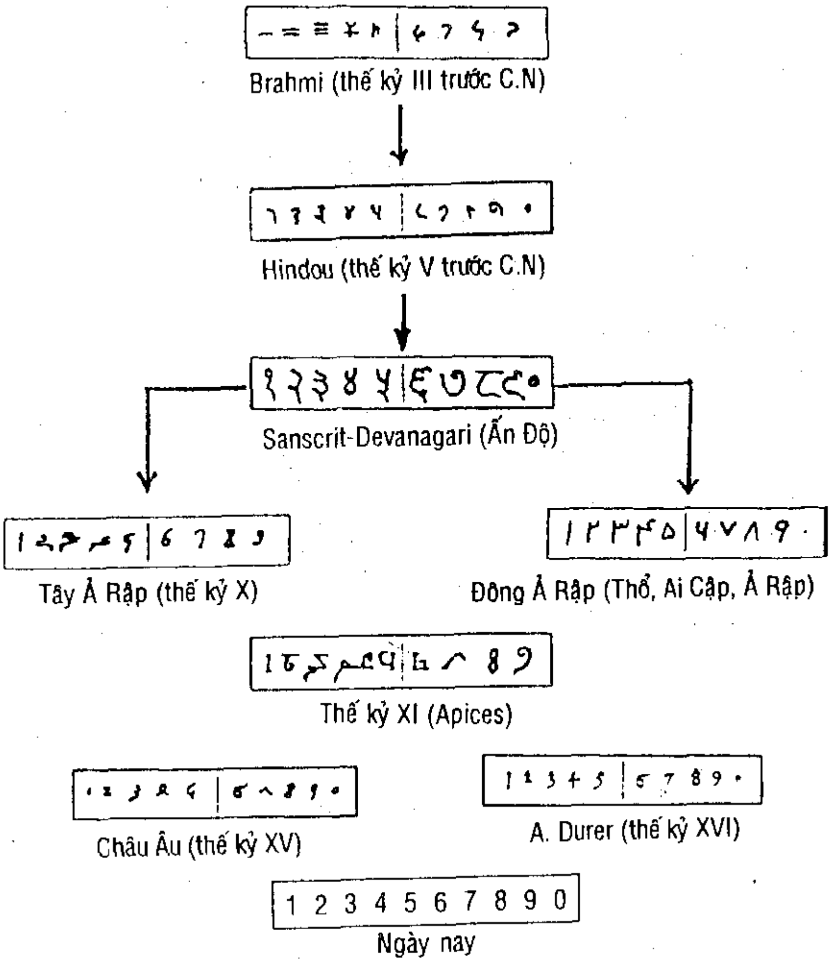
Nhà toán học lớn nhất của Ấn Độ: Brahmagupta

Ông là nhà toán học lớn nhất của Ấn Độ ở thế kỷ thứ VI. Ông sinh sống và làm việc ở Ujjain một trung tâm Thiên văn ở miền Trung Ấn Độ. Ông viết một tác phẩm về Thiên văn năm 628 gồm 21 chương trong đó có nhiều chương về Toán học trong đó ông dùng hai giá trị của π, một giá trị thực dụng ông cho là 3 và một giá trị chặt chẽ hơn là $\sqrt{10}$.

Ông có công mở rộng công thức Héron trong trường hợp tứ giác nội tiếp bằng công thức:

$$A = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

Sơ đồ về quá trình hình thành hệ thống đếm của một số dân tộc



với a, b, c, d là các cạnh và s là nửa chu vi của tứ giác nội tiếp. Đến Brahmagupta, người ta thấy ông đã bắt đầu nói đến số âm, số dương và số không. Đối với giải tích bất định, Brahmagupta có lẽ là người đầu tiên cho lời giải tổng quát đối với phương trình Diophante: $ax + by = c$ với a, b, c là những số nguyên. Brahmagupta nghiên cứu phương trình Pell: $y^2 = ax^2 + 1$ với a là một số nguyên mà căn bậc hai của nó là vô tỷ. Thực ra việc nghiên cứu phương trình Pell được kết thúc bằng công trình của Lagrange vào thế kỷ thứ XVIII.

Sau Brahmagupta có Mahavira là nhà toán học Ấn vào thế kỷ thứ IX có phần đóng góp vào toán học sơ cấp. Ngoài ra còn có Bhaskara chẳng những bổ sung, đính chính một số công trình của Brahmagupta, mà còn cho những lời giải đặc biệt cho những phương trình bất định nữa; ví dụ đối với phương trình bất định $x^2 = 1 + py^2$ ông cho lời giải với p = 8 , 11, 32, 61, 67; khi p = 67 ông tìm ra hai nghiệm nguyên x = 1 776 319 049 và y = 22 615 390. Thời đó việc tính toán này không dễ chịu một tí nào. Nhưng Bhaskara có nhầm lẫn đáng tiếc: ông cho rằng Brahmagupta phạm sai lầm khi mở rộng định lý Héron, và trách rằng môn đệ của Brahmagupta dùng công thức của thầy nhưng không đính chính cái sai của thầy! Thực ra thì Brahmagupta không sai, công thức của ông vẫn đúng với mọi tứ giác cyclic! Đối với tứ giác bất kỳ thì sự mở rộng công thức Héron cho ta:

$$A^2 = [\,(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)\,] - abcd.\cos^2\alpha$$

với α là nửa tổng của hai góc đối trong tứ giác.

Chương 8.

SƠ LƯỢC NỀN TOÁN HỌC Ả RẬP

Thời xa xưa, các dân tộc Ả Rập sống lang thang đây đó như dân du mục. Mãi đến thế kỷ thứ VII sau C.N hai trung tâm La Mecque và Médine vì là nơi dừng chân của những đoàn người qua lại buôn bán, đổi chác nên chóng trở thành sầm uất và La Mecque về sau còn là nơi hành hương của tín đồ đạo Hồi nữa. Chính nơi đây Mahomet – người sáng lập ra đạo Hồi – đã ra *đời năm* 570 sau C.N. Mahomet sống thời thanh thiếu niên ở một thành phố có 25.000 dân này. Năm 40 tuổi ông tập hợp được một số bạn bè rồi dần dần số đông trong thành phố ngã theo thuyết lý của ông. Cơ sở của đạo Hồi của ông dần dần hình thành từ đấy. Nhưng thuyết lý của Mahomet bị những người giàu có, những thương gia chống lại kịch liệt. Ông sợ bị hại bèn trốn sang Médine. Ở đây ông được che chở và hoan nghênh. Dân chúng Médine đã đóng góp tích cực vào sự thành công của đạo Hồi, và lực lượng quân sự của Ả Rập ngày càng hùng mạnh *với đạo Hồi làm* liều thuốc tinh thần, họ đã chiếm nhiều đất đai, về phía Đông họ bành trướng đến Ấn Độ, qua Ba

Tư và Lưỡng Hà, về phía Tây họ phát triển đến tận Bắc Phi và Tây Ban Nha. Năm 629, Mahomet "áo gấm về làng" trở lại cố hương La Mecque, lấy nơi đây làm thủ phủ. Năm 632 sau một cơn sốt nặng ông qua đời, nhưng cái chết của ông không làm chậm trễ sự xâm chiếm đất đai của người Ả Rập. Họ tiếp tục chiếm Damas, Jérusalem, Lưỡng Hà, Alexandrie..... Từ năm 750 người Ả Rập ở Maroc tách ra thành Ả Rập phương Đông có thủ đô tại Bagdad. Nền văn hóa Ả Rập dựa vào tôn giáo của Mahomet (đạo Hồi) chứ không dựa vào chính trị nhưng dù sao vẫn tạo cho mình sức mạnh để cai quản đất nước trong nhiều thế kỷ và cố vực dậy Đại học Alexandrie. Trong khi đó, phương Tây chìm đắm trong bóng tối cả nghìn năm và xa lạ với sự phát triển của Toán học. Trong những năm đầu đi chinh phục bằng sức mạnh quân sự, những người đứng đầu đội quân xâm lược Ả Rập sáng suốt thấy rằng họ có trình độ hiểu biết thua kém người Hy Lạp, La Mã, vì vậy từ năm 650 đến năm 750, vua chúa Ả Rập ra sức chiêu hiền đãi sĩ, họ mời các nhà bác học đến Bagdad làm việc, mặt khác từ thế kỷ thứ VIII họ cho dịch Siddhantas từ tiếng Ấn Độ, dịch tác phẩm của Ptolémée, và một phần của bộ Eléments của Euclide. Đặc biệt vào thế kỷ thứ IX, người Ả Rập rất say sưa dịch các tác phẩm khoa khoa học của người Hy Lạp ra tiếng Ả Rập. Một số nhà bác học theo tôn giáo La Mã người Syrie được mời vào triều đình Bagdad chủ trì việc dịch toàn văn bộ Eléments (Những khái niệm cơ bản) của Euclide, bộ Almageste của Ptolémée. Thời bấy giờ có một nhà bác học Ả Rập nổi tiếng là Al-Huwarizmi. Ông là nhà thiên văn đồng thời tác giả của một bộ Toán học chuyên về Số học và Đại số.

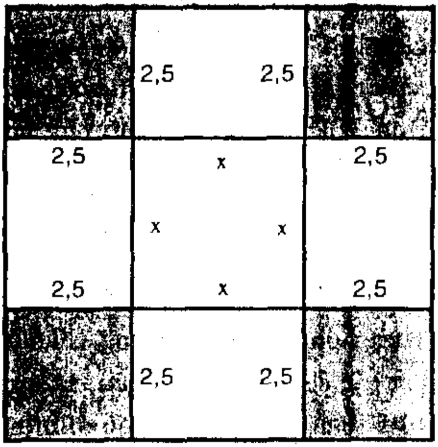
Al-Huwarizmi

Ông quê ở Huwarizmi, ngày nay thuộc Uzbékistan, nhưng người đời sau không biết rõ lắm về thân thế của ông, chỉ biết ông sống vào thời vua Charlemagne của phương Tây. Trong tác phẩm chính của mình "Hisab al-jabr wa'l-muqqabala" (Khoa học về sự chuyển vị và giản ước) chính Huwarizmi là người đầu tiên đã dùng từ al-jabr để chỉ đại số; sau này người Pháp học tập người Ả Rập và cũng gọi đại số là algèbre, người Anh gọi là algebra (người Nga cũng gọi đại số là "al ghép bơ ra" viết bằng chữ slave). Trong 6 chương đầu của tác phẩm "Đại số" của ông, Huwarizmi đã trình bày lý thuyết về phương trình tuyến tính và phương trình trùng phương nhưng ông chỉ nói đến nghiệm dương mà thôi. Qua các công trình nghiên cứu của họ chúng ta cũng thấy rõ các nhà toán học Ả Rập chịu ảnh hưởng khá đậm nét các nhà toán học Hy Lạp. Tuy đời sau đánh giá Huwarizmi rất cao, thậm chí có người ví bộ sách "Đại số" của ông có vị trí trong Toán học Ả Rập như bộ "Eléments" của Euclide trong Toán học Hy Lạp nhưng bộ sách của Huwarizmi có nhược điểm là thiếu sự trong sáng, rõ ràng về ký hiệu; vì vậy vai trò của bộ sách bị hạn chế. Cũng giống như các nhà toán học ở các thế hệ trước ở Hy Lạp, Babylone, Ai Cập, các nhà toán học Ả Rập cũng cố gắng kết hợp đến mức tối đa hình học và đại số. Huwarizmi cũng vậy, ông cố gắng dùng hình học để cụ thể hoá quá các bước giải của đại số. Xin cử ví dụ sau đây:

Cho lời giải hình học của phương trình đại số $x^2 + 10x = 39$.

Huwarizmi đã làm như sau:

Dựng một hình vuông có cạnh là x. Sau đó bổ sung bằng bốn hình chữ nhật có cạnh là 2,5 và x và 4 hình vuông có diện tích là 6,25.



Lấy tổng của diện tích 4 hình vuông có bôi đen với diện tích 4 hình chữ nhật có cạnh là x và 2,5 với diện tích hình vuông trung tâm có cạnh là x ta có 25 + 39 = 64, đây là diện tích hình vuông lớn có cạnh là 2,5 + 2,5 + x. Vậy một cạnh nó là $\sqrt{64} = 8$; do đó $x = 8 - 5 = 3$. Đây là nghiệm của bài toán.

Một người có công dịch sách Hy Lạp ra tiếng Ả Rập: Tabit Ben Qurra

Ông sinh năm 826 và mất năm 901. Ông có công thành lập trường chuyên dịch sách Hy Lạp ra tiếng Ả Rập, nhất là các sách của Euclide, Archimède, Apollonius. Ông xem lại rất công phu bản dịch ra tiếng Ả Rập tác phẩm Eléments của

Euclide. Một phần của quyển Coniques của Ptolémée còn lưu lại đến ngày nay là nhờ bản dịch của Tabit Ben Qurra. Ông chẳng những cố gắng dịch trung thành với ý của tác giả mà còn có những bình luận đề nghị sửa đổi bổ sung nữa. Thời ấy người ta biết tiếng ông không phải vì ông là nhà toán học, mà ông còn nổi tiếng là thầy thuốc, nhà triết học, nhà ngôn ngữ học. Về Toán ông viết sách Thiên văn, Hình học, Đại số, ông còn quan tâm đến ma phương. Sau đây xin nêu một định lý của ông mở rộng định lý Pythagore. *Nếu từ một đỉnh A của tam giác ABC*, người ta dựng 2 đường thẳng AD và AE tạo với cạnh đáy BC các góc ADB và AED; các góc này nếu bằng góc BAC thì tổng bình phương các cạnh AB và AC bằng BC. (BE + CD). Nếu góc BAC là tù thì E và D hoán vị và phải chứng minh:

$$(AB)^2 + (AC)^2 = BC.\,(BD + CE).$$

Tabit Ben Qurra nêu định lý trên nhưng không chứng minh!

Ông còn để lại một phát biểu độc đáo về số bè bạn: *"Nếu a, b, c là những số nguyên tố và nếu* $a = 3.2^n - 1$; $b = 3.\,2^{n-1} - 1$; $c = 3^2.\,2^{2n-1} - 1$ *thì* $2^n.\,ab$ *và* $2^n.\,c$ *là những số bè bạn"* vì số này bằng tổng số những số chia của số kia.

Ông còn viết 150 tác phẩm bằng tiếng Ả Rập về Logique, về Toán, Thiên văn và Y học, 15 tác phẩm dịch từ Hy Lạp, một số bằng tiếng Syriaque.

Xã hội Ả Rập tuy có nhiều chủng tộc khác nhau nhưng thống nhất được nhờ một tín ngưỡng chung là đạo Hồi. Về khoa học, các nhà bác học Ả Rập biết học hỏi, dung hoà những cái mà cho là hay ở người Hy Lạp, người Ấn Độ....Trong phép đếm và viết số ngày nay chúng ta thừa hưởng cách dùng ký hiệu của người Ấn Độ và Ả Rập là chủ yếu.

Aboul-Wafa (940-998)

Quê hương ông là nước Iran ngày nay. Ông sinh ra trong một gia đình thông thái. Ông nổi tiếng về Thiên văn và Toán học. Thời ông người ta quen dùng hàm tang: a = btgA

Ông có công hệ thống hóa kiến thức đã biết về lượng giác phẳng và có đóng nghiên cứu về lương giác cầu. Ông bổ sung thêm vào các bảng lượng giác đã có bằng bảng lượng giác dựa vào hàm tang. Ông lập bảng sin mới với những góc khác nhau 15' và xấp xỉ đến số thập phân thứ tám. Aboul-Wafa cũng quan tâm đến Đại số. Ông dịch từ tiếng Hy Lạp tác phẩm *"Số học"* của Diophante và viết bình luận về quyển "Eléments" của Euclide.

Al-Karhi

Ông là người Ả Rập đầu tiên cho lời giải (ông chỉ quan tâm đến nghiệm dương) của phương trình $ax^{2n} + bx^n = c$ và đưa ra nhiều định lý về Lý thuyết Số; trong đó có định lý về *"tổng các bình phương và tổng các lập phương của n số nguyên đầu tiên"*.

Các nhà bác học Ả Rập khác

Từ thế kỷ thứ XI nền toán học Ả Rập, nói chung là nền khoa học Ả Rập khởi sắc. Đội ngũ các nhà khoa học khá đông đảo và khả năng rất là đa dạng.

Ibn Sina (980-1037): là một nhà khoa học đa dạng: ông là nhà toán học, nhà vật lý học, nhà thiên văn. Ông sáng tạo

[illegible]

phép [illegible] số 0. Ông [illegible] đến các nhà toán học thời Trung cổ phương Tây.

Al-Biruni (973-1048): là một nhà bác học toàn diện. Ông đã từng qua Ấn Độ, viết về tập quán, tín ngưỡng và hiểu biết khoa học của người Ấn Độ. Về Hình học ông chứng minh khá độc đáo công thức Heron về diện tích tam giác và phát hiện rằng Archimede đã biết đến công thức này rồi. Ông cũng chứng minh công thức của Brahmagupta:

$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ về diện tích tứ giác nội tiếp.

Ibn al-Haitam (965-1039): vừa là thầy thuốc vừa là nhà toán học. Trong số 92 công trình của ông thì 25 công trình là về Toán, ngoài ra là về Vật lý (Quang học) và Y. Ông đã gây ảnh hưởng khá sâu sắc đối với các nhà khoa học châu Âu.

Omar Khayyam (1050-1122): phương Tây cho ông là một nhà thơ lớn người Iran. Nhưng người nước ông còn biết ông là một nhà Đại số, một nhà làm lịch nổi tiếng nữa. Ông viết sách Đại số nhưng nổi tiếng hơn Al-Huwarizmi vì ông đề cập đến phương trình bậc 3. Tuy ông có nói đến phương trình trùng phương nhưng ông cũng giống như những người đi trước là không đả động gì đến nghiệm âm cả! Ông có nói trong quyển Đại số của ông rằng ông tìm ra được cách khai triển $(a + b)^n$ với n là số nguyên dương nhưng không thấy một vết tích nào cả. Nếu quả đúng như ông nói thì ông đã đi trước Pascal hàng thế kỷ! Ông cũng quan tâm đến tiên đề về đường thẳng song song như nhiều nhà toán học khác nhưng không đạt được kết quả mong đợi, nhưng dù sao thì trong quá trình nghiên cứu, những giả thiết ông nêu ra đã được nhà toán học Saccheri quan tâm và từ đó nảy sinh ra *Hình học phi Euclide* của *Bolyai- Lobatchevski, Hình học Riemann* hàng trăm năm sau. Sau khi Omar Khayyam mất năm 1122, nền khoa học Ả Rập tàn lụi dần do những biến động về chính trị, tôn giáo làm mất ổn định xã hội. Tuy vậy cũng còn một số rất ít nhà toán học đáng chú ý như Nasir Al-Din (1201-1274), cháu của Gengis Khan, nhà quân sự đã chinh phục một phần lớn đất đai châu Á và châu Âu. Nasir Al-Din nghiên cứu có hệ thống về lượng giác phẳng và lượng giác cầu nhưng tiếc thay công trình của Nasir Al-Din ít được biết ở châu Âu. Nhưng trái lại Saccheri đã dựa vào công trình nghiên cứu về Hình học của Nasir Al-Din để "bênh vực" cho Euclide. Có thể nói nhà toán học Ả Rập cuối cùng nên nhắc đến là Al-Kasi ở đầu thế kỷ thứ XV. Ông làm việc tại Đài thiên văn Samarkand. Ông viết nhiều công trình Toán học và Thiên văn học bằng tiếng Ba Tư và tiếng Ả Rập. Ông là chuyên gia về phân số thập phân. Trong các công trình của ông, người ta thấy ông thường sử dụng tam giác Pascal. Ông mất năm 1436 và năm 1453 Constantinople rơi vào tay quân Thổ Nhĩ Kỳ, nền văn minh Ả Rập cáo chung. Nền toán học của nhân loại trãi qua hàng ngàn năm rực rỡ ở Hy Lạp đã tàn lụi vào thế kỷ thứ V sau C.N, châu Âu chìm đắm trong "đêm dài Trung cổ". Các dân tộc Trung Hoa, Ấn Độ, Ả Rập đã nâng niu, gìn giữ và phát triển di sản trí tuệ vô cùng quý báu ấy của loài người, giờ đây trước những biến động của lịch sử đã chuyển giao lại gia tài ấy cho nước Ý mới hồi sinh để tiếp tục tục làm giàu thêm cho trí thông minh, nền tự hào, kiêu hãnh của con người.

Chương 9.

TOÁN HỌC TRONG "ĐÊM DÀI TRUNG CỔ" Ở CHÂU ÂU

(từ thế kỷ thứ VI đến thế kỷ thứ XV)

Vài nét lịch sử

Theo lịch sử thì thời kỳ Trung cổ của Châu Âu bắt dầu từ năm 476 là năm đế chế La Mã phương Tây sụp đổ cho đến năm 1453 là năm quân Thổ Nhĩ Kỳ vào chiếm thành phố Constantinople.

Bizance vốn là một thành phố Hy Lạp được xây dựng từ thế kỷ thứ VII trước C.N; nhưng vào năm 324 sau C.N, Hoàng đế Constantin dã xâm chiếm và đặt cho nó một tên mới là Constantinople và từ đó nó trở thành thủ đô của đế chế La Mã phương Đông trong suốt thời Trung cổ. Đế chế La Mã phương Đông, hay còn gọi là đế chế Bizantin quan tâm gìn giữ di sản trí tuệ của người Hy Lạp cổ đại, vì vậy tuy trong gần nghìn năm hầu như dẫm chân tại chỗ, nền toán học Bizantin cũng có cống hiến cho nhân loại một số nhân vật tiêu biểu.

Isidore ở Milet

Ông là một trong những Giám đốc cuối cùng của Viện Hàn lâm Platon ở Athènes. Sau khi Viện Hàn lậm bị chính quyền La Mã đóng cửa vào năm 529, các nhà bác học của Viện Platon phân tán thành nhóm nhỏ lưu vong tại Ba Tư và trở thành một Viện Hàn Lâm bị lưu đày. Isidore quan tâm đến việc giữ gìn các công trình của Archimède và Apollonius.

Anthemius

Ông được uỷ thác việc gìn giữ bản bình luận của Eutoche về quyển Coniques của Apollonius. Anthemius là kiến trúc sư và nổi tiếng nhờ quyển sách ông viết về tính chất của tiêu điểm của parabole.

Jean Philoponus

Ông vừa là nhà toán học vừa là nhà vật lý học. Ông viết một công trình bình luận về quyển *"Nhập môn Số học"* của Nicomaque.

Michel Psellus

Ông là nhà triết học ở Athènes và Constantinople. Ông viết một bộ sách gồm Số học, Âm nhạc, Hình học và Thiên văn được dịch ra tiếng La Tinh nhiều lần ở thế kỷ XVI. Ông nghiên cứu về Aristote, về Logique hình thức.

Tây Âu tiếp thu nền văn hóa Ả Rập

Tuy gần mười thế kỷ (từ thế kỷ thứ VI đến thế kỷ thứ XV) phát triển chậm nhưng Tây Âu đã giữ được mối quan hệ tinh thần với văn hóa Ả Rập. Không khí toán học châu Âu bắt đầu có phong độ nhờ sự đóng góp của Giáo hoàng Sylvestre II có tên là Gerbert (940-1003).

Ông sinh trưởng trên đất Pháp và có lẽ là người Công giáo đầu tiên theo học trường Ả Rập ở Tây Ban Nha vào những năm 967-970 và đã sử dụng chữ số Ấn Độ – Ả Rập khá nhuần nhuyễn ở châu Âu. Nếu trước đây, người Ả Rập phải vất vả lắm mới vượt qua được hàng rào ngôn ngữ để đến được với nền văn hóa Hy Lạp vào thế kỷ thứ IX thì giờ đây, Tây Âu phải chật vật mãi đến thế kỷ XII các nhà bác học mới thay đổi được cách nhìn như người Ả Rập trước kia. Họ tiếp cận được với di sản văn hóa Ả Rập ở các trung tâm văn hóa tại các thành phố Ý, Sicile, Tây Ban Nha qua các bản dịch La Tinh. Thời đó Sicile là nơi gặp nhau của ba nền văn hóa: Hy Lạp, La Tinh và Ả Rập. Qua nhiều năm thăng trầm biến đổi của lịch sử người ta đều may mắn tìm thấy ở đây những bản gốc hoặc phiên bản hay bản dịch các công trình toán học, khoa học của các nhà bác học lớp trước. Vì vậy Sicile và Tây Ban Nha trở thành hai trung tâm dịch thuật lớn nhất ở châu Âu vào thế kỷ XII. Ta có thể kể tên một số nhà dịch thuật tiêu biểu:

Adelard de Bath (1075-1160)

Ông là người Anh, đi chu du nhiều nơi. Ông đã làm được ba việc lớn: một là bản dịch từ tiếng Ả Rập ra tiếng La Tinh những bảng số dùng để tính tóan trong Thiên văn của Al-Huwarizmi; hai là bản dịch bộ Eléments của Euclide: ba là bản dịch từ tiếng Hy Lạp ra La Tinh quyển Almageste của Ptolémée. Thời bấy giờ thành phố Tolède ở Tây Ban Nha là trung tâm dịch thuật lớn nhất Tây Âu vào thế kỷ XII. Tolède đã từng bị người Ả Rập xâm chiếm hàng thế kỷ, về sau người Công giáo chiếm lại. Thư viện thành phố Tolède tuy không to bằng thư viện Alexandrie nhưng lúc này có vai trò quan trọng trong giao lưu văn hóa và người dân Tolède đa số nói được tiếng Ả Rập mặc dù họ là người Do Thái, Âu Châu.

Gérard de Crémone (1114-1187)

Ông là người Pháp nhưng cư trú tại Tây Ban Nha để học tiếng Ả Rập. Suốt đời, ông chỉ chuyên dịch sách Toán từ tiếng Hy Lạp, Ả Rập ra tiếng La Tinh, tất cả là 84 quyển.

Fibonacci, một nhà toán học độc đáo

Leonard de Pise (1180-1250), thường được biết đến dưới cái tên Fibonacci là con một nhà buôn ở Pise. Cha ông muốn đào tạo ông theo nghề buôn bán, nhưng chính vì thế mà ông tiếp xúc với tính toán rồi dần dần ông say mê toán học. Ông học toán với một thầy giáo người Ả Rập và đi chu du qua Ai Cập, Syrie, Hy Lạp, Sicile. Càng đi, ông càng nhận thức được tính ưu việt của cách tính toán của người Ả Rập. Năm 1202, sau khi về quê ông viết cuốn *"Liber abaci"*. (Sách dạy sử dụng bàn tính). Mở đầu cuốn sách, ông cho rằng Số học và Hình học liên quan chặt chẽ với nhau và hỗ trợ nhau, nhưng trong Liber abaci chủ yếu là ông đề cập tới Số học. Liber abaci chia làm 15 chương, nhưng ngay từ những trang đầu của cuốn sách, ông nói nhiều về 9 ký hiệu Ấn Độ dùng trong phép đếm và có nói đến *ký hiệu số không* xuất phát từ chữ *Zephirum* dạng La Tinh của chữ Ả Rập *Sifr*. Fibonacci nghiên cứu về phân số nhưng không hề đả động gì đến phân số thập phân. Ông nêu nhiều ứng dụng số học trong buôn bán. Trong các chương 8, 9, 10, 11 ông có đề cập đến giải tích bất định bậc nhất. Trong những chương cuối ông nói đến phương trình bậc hai và cách giải theo Al-Huwarizmi. Nhưng trong *Liber abaci*, bài toán gây nhiều chú ý cho các thế hệ toán học là bài toán sau: *"Hỏi ta sẽ có bao nhiêu cặp thỏ cuối năm nếu ta bắt đầu bằng một cặp và mỗi cặp mỗi tháng cho một cặp mới, và cặp mới này sau 2 tháng lại bắt đầu sinh sản?"*.

Bài toán nổi tiếng này dẫn đến một dãy (suite) gọi là dãy Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,.........u..... với $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$.

Dãy này có nhiều tính chất, ví dụ:

- u_n và u_{n+1} là nguyên tố cùng nhau
- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right) = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$
- $u_{n+1} \cdot u_{n-1} = u_n^2 + (-1)^n$ với $n \geq 2$ v.v...

Léonard de Pise (Fibonacci) là một nhà toán học độc đáo, rất tiếc người cùng thời ít hiểu nội dung công trình của ông. Năm 1228 người ta cố gắng tái bản tác phẩm độc đáo *"Liber abaci"* của ông, song ít ai ai hiểu nổi; mãi đến thế kỷ XIX, *Liber abaci* mới thật sự được hoan nghênh.

Năm 1220, tác phẩm *"Practica geometrioe"* của ông ra đời nhưng ngày nay không tìm thấy nữa. Trong quyển hình học này ông trình bày nhiều lĩnh vực từ các đơn vị do lường thời bấy giờ hay dùng ở Pise là quê hương ông cho đến cách chứng minh định lý Pythagore bằng tam giác đồng dạng. Ông còn trình bày cách chia các hình, cách khai căn bậc ba, bài toán gấp đôi một lập phương, và nhiều bài toán hình học giải bằng phương pháp đại số theo cách của người Babylone và người Ả Rập. Fibonacci còn viết một quyển sách nữa có tựa đề *"Bông hoa của những lời giải của một số vấn đề có liên quan đến Số và Hình học"*. Ông giải thích vì sao ông đặt tựa đề của quyển sách như thế: "nhiều vấn đề trong đó khá gai góc nhưng được trình bày một cách bay bướm cũng giống như cây cắm rễ sâu trong đất nhưng lại nở hoa làm đẹp cho đời và từ đó người ta suy ra được bao nhiêu nhiều hay khác!". Trong sách Hình học này có tất cả 15 bài toán nhưng có đến 13 bài đưa đến phương trình và phương trình bất định bậc nhất. Hai bài còn lại do Jean de Palerme - nhà triết học và là cận thần của Hoàng đế Frédéric II đề nghị Fibonacci giải, nhân một chuyến du ngoạn của Hoàng đế có Fibonacci tháp tùng. Bài toán thứ nhất dẫn đến việc tìm lời giải của phương trình bậc ba: $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$.

Fibonacci đã chứng minh rằng nghiệm của phương trình trên không thể có dưới dạng: $a + \sqrt{b}$ hay $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ với a, b hữu tỷ và Fibonacci đã cho giá trị gần đúng đến số thập phân thứ 9 của nghiệm dương của phương trình trên, nhưng ông không hề cho biết do đâu mà ông có kết quả đó!

Bài toán thứ hai là một bài toán chia tiền không có gì đáng nói.

Năm 1225, Léonard de Pise lại cho ra đời một cuốn sách nữa có tựa đề *"Những số bình phương"*. Trong sách này có 20 mệnh đề dẫn đến việc giải các phương trình: $x^2 + a = y^2$; $x^2 - a = z^2$ trong đó nghiệm phải là những số hữu tỷ.

Các trường Đại học châu Âu ra đời

Sự phát triển của Toán học và Khoa học ở châu Âu ngày càng khởi sắc nhờ sự ra đời của hàng loạt trường Đại học ở các thành phố lớn như Paris (năm 1200), Oxford (1214), Cambridge (1231), Padoue (1222) v.v....Đây là môi trường hoạt động tốt nhất cho các nhà bác học và là nơi đào tạo nhân tài cho xã hội. Trong số những nhà toán học có ảnh hưởng lớn ở thời kỳ này có Jordanus Nemorarius. Ông quê ở Đức, nhưng là Giáo sư nhiều năm và là sáng lập viên trường phái Cơ học trường Đại học Paris. Ông nghiên cứu về đòn bẩy, mặt phẳng nghiêng, và là người đầu tiên đưa ra công thức $\dfrac{F}{W} = \dfrac{1}{\cos\theta}$ với F là lực, W là trọng lượng, θ là góc nghiêng. Ông còn là tác giả nhiều bộ sách về Số học, Hình học, Thiên văn, Cơ học. Tác phẩm của ông *"Arithmetica decem libris demonstrata"* là một quyển sách về Số học lý thuyết viết theo tinh thần của Euclide, Nicomaque. Sách này được dùng để dạy ở Đại học Paris cho đến thế kỷ XVI và được tái bản vào những năm 1496 và 1503. Trong sách này người ta thấy nhiều cái mới trong cách dùng ký hiệu toán học làm cho việc phát biểu định lý trở nên ngắn gọn.

Từ trước đến giờ có nhiều người đã từng dịch bộ *"Eléments"* của Euclide, song mãi đến năm 1482 thì bộ sách nổi tiếng ấy mới được dịch và in một cách quy mô lần đầu tiên. Người dịch là Campano da Novara, Giáo hoàng từ năm 1261 đến năm 1264. Nhân loại cần ghi ơn một nhà khoa học nữa vì nhờ ông mà ngày nay chúng ta mới được đọc di sản trí tuệ tuyệt vời của Archimède. Sau khi người con vĩ đại của muôn đời này bị lính La Mã giết hại tại Syracuse rồi tiếp đến là nền toán học Hy Lạp suy tàn cho mãi đến trước năm 1269 sau C.N thì nhân loại chỉ đọc được từng phần công trình của Archimède qua các bản dịch Ả Rập. Năm 1269 nhà khoa học người Hà Lan Guillaume de Moerbeke (1215 – 1286) đã công bố và cho in hầu hết các tác phẩm nổi tiếng về Toán học và Vật lý của Archimède được ông dịch từ tiếng Hy Lạp sang La Tinh. Điều này vô cùng quan trọng vì nó giúp cho các nhà bác học thời Phục hưng ở châu Âu và các thế kỷ tiếp theo cùng chúng ta ngày nay có điều kiện nghiên cứu toàn diện gia tài đồ sộ mà Archimède để lại cho đời sau.

Nếu thế kỷ XIII là thế kỷ của dịch thuật và chính nhờ đó mà trong "đêm dài Trung cổ", Toán học cũng như các khoa học khác dần dần gượng dậy thì sang thế kỷ XIV, châu Âu lại qua những cơn ác mộng khủng khiếp chưa từng thấy trong lịch sử: bệnh dịch hạch đã cướp đi sinh mạng 1/3 dân số toàn châu lục và cuộc chiến tranh một trăm năm đã gây bao nhiêu tổn thất. Tuy vậy trong đêm tối hãi hùng ấy vẫn còn le lói sáng hai ngôi sao, đó là Brawardine và Oresme

Thomas Brawardine (1290-1349)

Ông là nhà triết học, nhà thần học người Anh, nhưng lại là nhà toán học xuất sắc nhất nước Anh ở thế kỷ XIV. Ông học rộng biết nhiều nên được người Anh tôn vinh là "ông Tiến sĩ uyên bác". Về sau ông được thụ phong Hồng Y Giáo Chủ. Ông viết nhiều sách, đáng chú ý là quyển *"Tractatus de proportionibus"* năm1328, trong đó không phải ông chỉ nghiên cứu về tính chất của tỷ lệ thức mà nói rộng ra tất cả những gì có liên quan đến tỷ lệ thức, ví dụ Brawardine đưa ra cách nghiên cứu định luật chuyển động sau đây của Aristote: $v = k\dfrac{F}{R}$ trong đó v là tốc độ, k là hằng số tỷ lệ, F là lực, và R là lực cản của môi trường. Ông cũng viết một quyển Số học và một quyển Hình học. Điều đáng chú ý là trong tác phẩm *"Tratatus de continuo"* ông bàn đến vấn đề liên tục và sự liên tục của đại lượng gồm vô số phần tử liên tục. Đời sau đánh giá rằng tuy ông chưa đạt đến chỗ khai sinh môn tính vi tích phân nhưng dù sao thì những ý nghĩ đầu tiên của ông cũng đáng trân trọng.

Nicole Oresme (1323-1382)

Ông sinh trưởng ở miền Normandie nước Pháp, làm việc tại trường Navarre là khuôn viên của Trường Đại học Bách khoa Paris ngày nay. Ông là Giáo sư Toán, về sau được thụ phong Giám mục. Ông nghiên cứu về các quy tắc của lũy thừa, kể cả những trường hợp số mũ là phân số, số vô tỷ. Ông cũng quan tâm đến tổng vô hạn của các chuỗi, những định lý về hội tụ và phân kỳ của chuỗi vô hạn. Ông chứng minh rằng:

$$1).\ \frac{a}{n}+\frac{a}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{a}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^2+\ldots+\frac{a}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^p+\ldots=a$$

$$2).\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=1$$

$$3).\ \frac{1}{1000}+\frac{1}{1000}\left(1-\frac{1}{1000}\right)+\frac{1}{1000}+\left(1-\frac{1}{1000}\right)^2+\ldots+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{1000}\left(1-\frac{1}{1000}\right)^p+\ldots=1$$

Ông viết để lại cho đời sau nhiều sách toán như *"Bàn về hình cầu"* *"Bàn về bầu trời và thế giới"* hoặc những bản dịch ra tiếng Pháp tác phẩm của Aristote, Pétrarque.

Chương 10.

TOÁN HỌC TRONG THỜI KỲ PHỤC HƯNG Ở CHÂU ÂU

Từ giữa thế kỷ thứ XIV đến giữa thế kỷ thứ XV, châu Âu trải qua những ngày tháng khủng khiếp:

– Bệnh dịch hạch đã giết mất một phần ba sinh mạng người dân châu Âu,

– Cuộc chiến tranh 100 năm,

– Năm 1453; sự sụp đổ của đế chế *Bizantin* (đế chế La Mã phương Đông), quân Thổ xâm chiếm và tàn phá Constantinople.

Người dân Bizantin hoảng loạn chạy trốn quân Thổ, mang theo những gì mà họ cho là quý giá nhất trong đó có những papyrus vô giá của nền văn minh Hy Lạp xưa cho đến bấy giờ hãy còn xa lạ đối với Tây Âu. Nơi dừng chân đầu tiên của dân chạy loạn là đất Ý và dần dần cả Đức, Pháp, Anh được thừa hưởng cả gia tài văn hóa ấy, châu Âu phục hưng từ ấy.

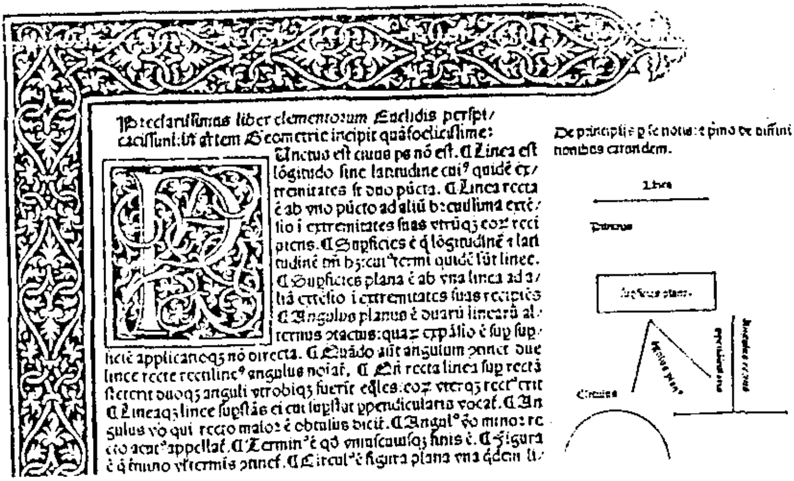
Việc mở các trường Đại học ở thế kỷ XIII làm tăng nhu cầu nhân bản các sách cần cho việc giảng dạy cũng như học tập, nhưng chép tay không thể đáp ứng nhu cầu được. Người ta nghĩ cách làm sao nhân được nhiều bản giống nhau từ một bản gốc. Việc nghĩ ra cách in ấn xuất phát từ thực tế đó. Anh em nhà Gutenberg người Đức cùng những người cộng sự đã có công đầu trong việc đặt nền móng đầu tiên cho nghề in ở châu Âu. Lúc đầu ho bị cản trở đe dọa vì làm cho một số người sống bằng nghề chép từ papyrus bị mất công ăn việc làm, nhưng tính ưu việt của việc in ấn ngày càng rõ và chiếm dần ưu thế ở các trung tâm văn hóa, hơn nữa nghề in dần dần đem lại nguồn thu vì vậy nó mau chóng phát triển. Thời ấy nghề in phát triển nhất là ở Venise (Ý).

Ban đầu người ta in những công trình Y học của Hippocrate và Galien là loại công trình khoa học gây hấp dẫn nhất, nhưng từ khi những bản in của bộ Eléments của Euclide được dịch từ Hy Lạp sang La Tinh cùng với tác phẩm của Archimède và Apollonius thì Toán học châu Âu bắt đầu khởi sắc. Nhưng có một trở ngại: Các nhà Khoa học châu Âu thích đọc bản dịch các sách Đại số, Số học dịch từ Hy Lạp ra La Tinh hơn là các tác phẩm nổi tiếng của Archimède với lý do là Archimède viết khó hiểu hơn.

Sự hoạt động Toán học lúc bấy giờ chỉ tập trung ở các thành phố lớn của Ý, ở Pháp, Nuremberg (Đức), Vienne, Prague, Trung Âu. Sau đây là một số nhà toán học tiêu biểu.

Nicolas de Cuse (1401-1464)

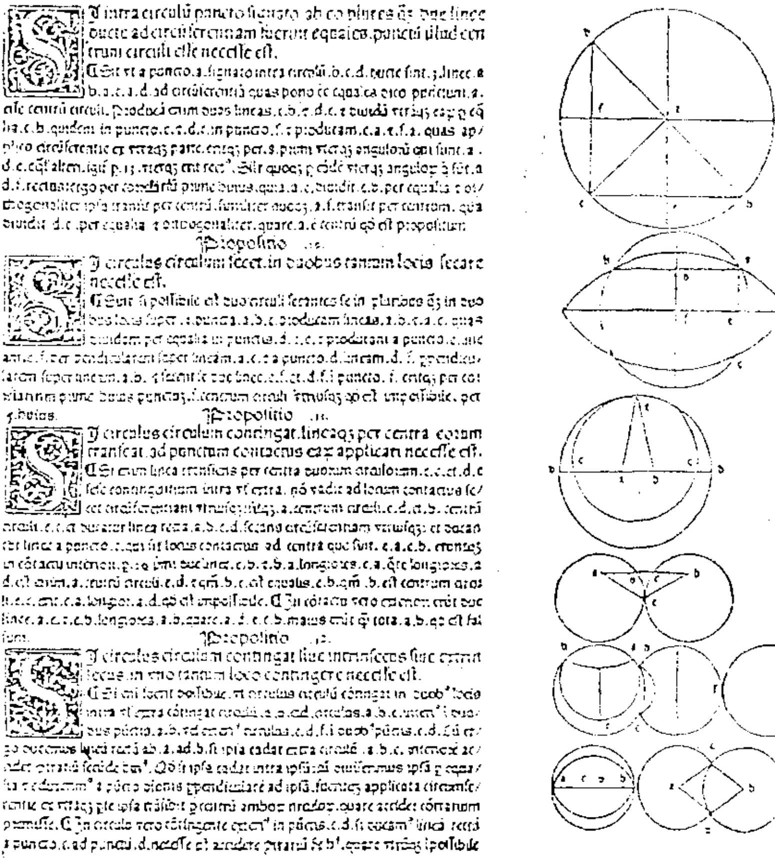
Ông người Đức nhưng là tu sĩ ở Rome. Ông làm toán vào lúc công việc ở Nhà thờ rảnh rỗi, chứ không phải là nhà toán học chuyên nghiệp, vì vậy ông không có thành tích gì đáng nói ngoài việc ông xác định gần đúng số π bằng cách cho đa giác đều nhiều cạnh nội tiếp trong hình tròn với kết quả là 3,142337...



Một trang in của lần xuất bản thứ nhất bộ Eléments (Venise, 1482)

Johann Müller (1436-1476)

Người ta biết ông phần nhiều dưới các tên là Regiomontanus. Ông là người Đức, đã từng học ở Đại học Leipzig và Đại học Vienne, nhờ thế mà ông yêu môn Toán và Thiên văn. Ông theo Hồng y Giáo chủ Bessarion, một người Bizantin, sang Rome và những năm tháng ở đó ông học thêm tiếng Hy Lạp. Sau một thời gian đi chu du ở Ý ông quay về Đức và năm 1471 ông lập một nhà in và một đài thiên văn ở Nuremberg.



Một trang in khác của lần xuất bản thứ nhất bộ Eléments (Venise, 1482)

Ông mơ ước được in những tác phẩm dịch từ tiếng Hy Lạp của Archimède, Apollonius, Héron, Ptolémée, và nhiều tác giả Hy Lạp khác nhưng ông mất năm 1476, vào tuổi 40; trước khi biến được ước mơ thành hiện thực. Ông dịch dở dang ra tiếng La Tinh tác phẩm *"Almageste"*, *"Âm nhạc học"*, *"Quang học"*, *"Địa* *lý học"* của Claude Ptolémée, tác phẩm *"Sphoerica"* của Menelaus, *"Tiết diện coniques"* của Apollonius, *"Những vấn đề Cơ học"* của Aristote. Ông không đơn thuần làm công tác dịch thuật mà còn viết lời bình luận khá sâu sắc nữa. Ông còn nổi tiếng nhờ công trình nghiên cứu khá sâu về tam giác mang tên *"De triangulis omnimodis"*, xây dựng khá hoàn chỉnh môn Lượng giác học. Sách này có 5 chương, 2 chương dành cho Lượng giác phẳng, 3 chương còn lại dành cho Lượng giác cầu. Sau đây là một số bài toán ông nêu lên ta thấy rất gần với ngày nay:

Bài toán 1: Cho biết cạnh đáy và góc đối với cạnh đáy ấy, cho biết thêm chiều cao tương ứng với cạnh đáy ấy hoặc diện tích hình tam giác. Hãy giải tam giác?

Bài toán 2: Hãy xác định một tam giác nếu cho biết một cạnh, chiều cao tương ứng, và tỷ số giữa hai cạnh còn lại.

Bài toán 3: Cho một tam giác. Nếu cho biết hiệu của hai cạnh, chiều cao ứng với cạnh thứ ba. Chân của chiều cao chia cạnh thứ ba ra làm hai đoạn thẳng. Cho biết hiệu của hai đoạn thẳng ấy. Hãy xác định tam giác?

Nicolas Chuquet

Ông là nhà toán học xuất sắc nhất nước Pháp vào nửa sau của thế kỷ XV. Sinh ra ở Paris, đỗ bác sĩ Y khoa và hành nghề y tại Lyon.

Năm 1484 ông cho xuất bản tập *"Ba phần trong khoa học về Số"*. Trong phần đầu ông trình bày các phép tính số học với số hữu tỷ, có lời giải thích về các chữ số Ấn – Ả Rập. Chuquet nói rằng: "về ký hiệu của các chữ số ấy thì ký hiệu thứ mười không nói lên một giá trị nào cả, vì vậy nó có tên là "zéro" hay "rien" hay hình ảnh của không một giá trị nào cả".

Phần thứ hai trình bày về các phép tính trên các số vô tỷ, về căn các số.

Phần thứ ba trình bày về Đại số hay còn gọi là "Quy tắc về cái chưa biết". Chuquet rất quen thuộc với các quy luật về số mũ. Trong phần thứ ba còn trình bày về cách giải phương trình nhưng có đặc điểm là Chuquet biết dùng các ký hiệu toán học để trình bày vấn đề gọn hơn... Nói chung Chuquet ít thừa nhận số không là nghiệm của phương trình; ngoại trừ một trường hợp sau ông thừa nhận nó có một nghiệm là số không và còn chỉ ra rằng phương trình dạng $ax^n + bx^{n+m} = cx^{n+2m}$ với các hệ số và số mũ là những số nguyên dương, ngoài một nghiệm là số không, phương trình còn có thể có nghiệm ảo nữa. Người đương thời ít biết đến công trình của ông ngoại trừ một người tên là Etienne de la Roche có xuất bản ở Lyon một quyển sách trong đó có chứa phần lớn nội dung của "Ba phần trong khoa học về Số" của Chuquet. Mãi đến năm 1880, tác phẩm của Chuquet mới chính thức được in ra. Người ta nói rằng bài viết về Đại số đầu tiên ở giai đoạn Phục hưng ở châu Âu là bài của Chuquet và quyển Đại số được nổi tiếng ở thời kỳ lịch sử này là của Pacioli xuất bản ở Ý mười năm sau tác phẩm của Chuquet.

Luca Pacioli (1445-1514)

Ông là người Ý, từng làm giáo viên ở Venise. Ông theo Công giáo và năm 1475 trở thành Giáo sư Toán học, khi thì ở Florence, khi thì ở Pise, khi thì ở Bologne, cuối cùng ông mất tại quê hương. Ông chưa phải là nhà toán học đầy sáng tạo, nhưng người đương thời ghi nhận công lao ông truyền thụ mạch lạc gia tài trí tuệ của người xưa.

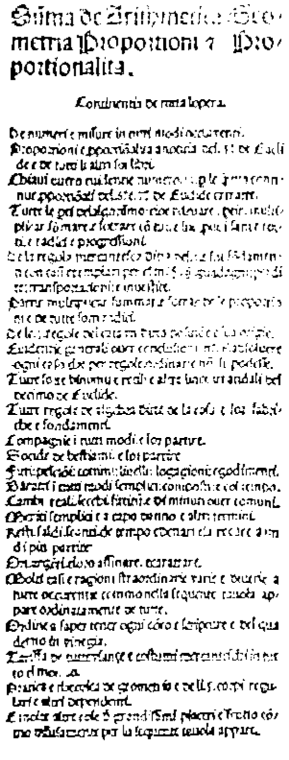
Năm 1494, Pacioli cho xuất bản quyển *"Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita"*, một tổng hợp bổ ích và có hệ thống những công trình toán học của người xưa. Quyển sách này viết xong năm 1487 bằng tiếng mẹ đẻ đã gây được tiếng vang to lớn. Pacioli thừa nhận rằng ông thừa kế gia tài do những thế hệ các nhà đại số học trước ông để lại bắt đầu bằng bản dịch ra tiếng La Tinh quyển *"Đại số học"* của Al-Huwarizmi năm 1464. Thời Phục hưng, châu Âu cố xây dựng cho mình môn Đại số có sắc thái riêng. Hơn nữa việc mua bán thời bấy giờ đã khá thịnh hành ở Ý cùng một số nước khác trong vùng nên phần Số học được chú ý nhiều; cho nên từ 1478 người ta thấy xuất hiện nhiều sách Số học không rõ tác giả là ai, trong đó các thí dụ cụ thể đều lấy ở thương trường!

Léonard de Vinci (1452-1519)

Nhắc đến tên ông người ta nghĩ ngay đến nhà họa sĩ tài hoa đã để lại cho đời nhiều tuyệt tác trong đó không ai quên được bức họa nổi tiếng *"La Joconde"*. Thực ra ông cũng là kỹ sư, nhà khoa học bên cạnh thiên tài về hội họa, điêu khắc. Ông có công trình về hình họa, cơ học, giải phẫu nhưng rất tiếc là ít người biết đến. Ông nghiên cứu Toán mục đích ứng dụng vào lý thuyết viễn thị trong hội họa. Ông hình như không quan tâm đến xu thế nghiên cứu của thời đại ông mà chỉ nghiên cứu theo sở thích cá nhân mà thôi.

Hành lang chính cho khoa học Ả Rập tiến vào châu Âu

Khoa học Ả Rập tiến vào châu Âu bằng nhiều con đường, song hành lang chính là nước Ý. Các nước khác như Đức, Pháp tuy đi sau Ý vào những năm đầu thời kỳ Phục hưng nhưng lại phát triển mạnh vào những thế kỷ sau. Nhưng người Đức có công đầu trong việc dùng ký hiệu "+" "–" (cộng, trừ) thay cho ký hiệu "p" và "m" mà người Ý đã dùng trước đây trong sách của họ. Năm 1489 trước khi quyển *"Summa"* của Pacioli ra đời thì một Phó Giáo sư Đức ở Leipzig tên là Johann Widman đã cho xuất bản quyển *"Rechenung auff allen Kauffmanschafft"* là quyển *"Số học thương mại"* cổ nhất thế giới trong đó xuất hiện lần đầu các dấu "+" "–".


Sũma de Arithmetica Geometria Proportioni e Proportionalita.

Bản in lần thứ nhất năm 1494 của ***Suma de Arithmetica***

Ở Đức trong nửa đầu thế kỷ thứ XVI đã có nhiều sách Đại số, Số học ra đời, đặc biệt là *"Số học thương mại"* của Peter Apian có phần độc đáo ở chỗ trang bìa có in *"Tam giác Pascal"* trước khi Blaise Pascal ra đời gần một trăm năm! Có thể kể thêm một quyển Số học nữa của người Đức là quyển *"Arithmetica integra"* mà tác giả là Michael Stifel. Tuy đầu đề là Số học nhưng nội dung bao gồm cả Đại số nữa. Trong sách này cũng nói đến Tam giác Pascal nhưng đặc biệt là tác giả thừa nhận số âm vẫn có thể là nghiệm của phương trình mặc dù tác giả gọi số âm là *numeri absurdi (số vô lý!).* Người ta đánh giá Arithmetica integra là một quyển sách tốt cho đến năm 1544 vì sau đó xuất hiện cách giải phương trình bậc ba và phương trình biquadratique (song trùng phương) là những đóng góp đẹp của nền Toán học Ý.

Trong lĩnh vực này không thể không nói đến người đáng chú ý đầu tiên là Cardano.

Girolamo Cardano (1501-1576)

Ông đỗ bác sĩ Y khoa năm 23 tuổi. Ông hành nghề y nhưng vẫn ham mê Toán học nên ông nhận làm Giáo sư Toán học và Chiêm tinh học. Ông sang Écosse gần một năm làm bác sĩ cho Giám mục ở Saint André. Trên đường về, ông ghé Luân đôn xem số tử vi cho Vua Edouard VI lúc này đang bị bệnh sởi. Cardano đã đoán sai ngày tận số của nhà vua. Trở về Ý, ông được bổ nhiệm làm Giáo sư Đại học Bologne, nhưng bị cáo giác là nhà ảo thuật nên ông bị bắt giam vào tháng 10-1570 và chỉ được được thả ra sau khi đã tuyên thệ không bao giờ giảng dạy tại những nước của Nhà Thờ Cơ Đốc. Ông định cư ở Rome năm 1571, và nhờ khả năng về Y học của ông nên ông được Giáo hoàng ban cho một trợ cấp. Ông mất năm 1576. Nhà sử học Pháp Jacques de Thou viết rằng ông sùng bái, say mê tử vi, chiêm tinh học, tiên đoán ngày tận số của mình nên ngày 21 tháng 9 năm 1576 ông ăn chất độc để chết đúng ngày ông tiên đoán! Cardano viết khá nhiều về Toán và một số ngành khác. Năm 1663 nhà xuất bản Lyon đã in công trình của ông thành 10 tập trong đó về Toán có *Practica arithmetica* (1539) và *Ars magna* (1545) về Khoa học có *De subtilitate*. Trong quyển này ông viết về Vật lý của Aristote và ca ngợi 12 nhà khoa học tiền bối trong đó có Archimède, Ptolémée, Aristote, Euclide, Calculator, Apollonius, Al- Huwarizmi...Trong Practica ông có nói đến khai căn bậc ba. Năm 1545, khi Cardano công bố công trình *Ars magna sive de regulis algebraicis*, thì nhiều người cho rằng Cardano là nhà đại số xuất sắc nhất châu Âu. Nếu bây giờ ta đọc lại quyển Đại số nổi tiếng của ông thì sẽ thấy nó dài và thiếu tổng quát nhưng ý tưởng trong đó và kết quả ông đạt được trong việc giải phương trình bậc ba thì thật đáng khâm phục. Ông đặt vấn đề giải phương trình bậc ba $x^3 + 6x = 20$. Bây giờ ta nói tổng quát là giải phương trình $x^3 + px = q$.

Nếu dùng ngôn ngữ của chúng ta ngày nay thì phương pháp Cardano như thế này:

Thay x bằng $u - v$ và đặt u, v như thế nào đó để cho tích uv bằng một phần ba hệ số của x trong phương trình $x^3 + 6x = 20$ có nghĩa là $uv = 2$.

Từ $x^3 + 6x$ ta có $(u - v)^3 + 3\ uv\ (u - v) = u^3 - v^3$. Từ $x^3 + 6x = 20$ ta có $(u - v)^3 + 3\ uv\ (u - v) = u^3 - v^3 = 20$.

Khử v từ $uv = 2$ và $u^3 - v^3 = 20$, ta có $u^6 = 20\ u^3 + 8$ (trùng phương đối với u^3) và $u^3 = \sqrt{108} + 10$

Từ $x = u^3 - v^3$ và $u - v = 20$, ta có:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$$

Cardano cho một công thức tương đương với công thức chúng ta ngày nay đối với phương trình $x^3 - px = q$ là:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} - \frac{q}{2}}$$

Nhưng cách giải trên vấp phải trở ngại khi gặp phương trình $x^3 = 15\ x + 4$ bởi vì kết quả giải ra là nghiệm có dạng

$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} - \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ và lúc này chưa ai quen với căn bậc hai của số âm! Cardano cho một nghiệm như thế là "ngụy biện".

Đối với phương trình bậc bốn, Cardano viết trong ARS MAGNA rằng lời giải của phương trình trên là công của Ludovico Ferrari. Cardano đã đưa ra một phương trình bậc bốn dạng: $x^4 + 6x^2 + 36 = 60x$ và các công đoạn cần vượt qua để tới nghiệm như sau:

1). Thêm vào hai vế sao cho vế trái thành:

$$x^4 + 12x^2 + 36 = (x^2 + 6)^2$$

2). Thêm vào hai vế một ẩn số mới sao cho vế trái trở thành một chính phương:

$$(x^2 + 6 + y)^2 = 6x^2 + 60x + y^2 + 12y + 2yx^2$$

$= (6 + 2y)\ x^2 + 60x + y^2 + 12y$ (tam thức bậc hai đối với x)

3). Chọn y làm sao cho tam thức bậc hai đối với x là một chính phương, muốn vậy làm cho biệt số bằng 0 nghĩa là: $60^2 - 4(6 + 2y)(y^2 + 12y) = 0$ (1)

4). Nhưng (1) là một phương trình bậc 3 có dạng: $y^3 + 15y^2 + 36\ y = 450$ mà cách giải theo Cardano ta đã biết rồi và có :

$$y = \sqrt[3]{287,5 + \sqrt{80449,25}} + \sqrt[3]{287,5 - \sqrt{80449,25}} - 5$$

5). Thay y vào phương trình của x:

$(x^2 + 6 + y)^2 = (6 + 2y)\ x^2 + 60x + y^2 + 12y$ rồi lấy căn bậc hai ở mỗi vế.

6). Công đoạn cuối cùng là giải phương trình trùng phương.

Việc giải phương trình bậc ba, bậc bốn quả là một bước tiến dài sau hàng nghìn năm phát triển môn Đại số kể từ thời Babylone nhưng nó cũng đưa các nhà toán học đến những vấn đề mới: số vô tỷ, số âm, số ảo; vì đó là những điều khó tránh khi giải các phương trình bậc hai, ba, bốn. Nhưng lịch sử việc đi tìm lời giải cho phương trình bậc ba không đơn thuần dừng ở công lao của Cardano mà sử sách chép lại là sự việc còn rắc rối hơn nhiều vì có một nhà toán học nữa người Ý tên là Tartaglia cũng tự cho rằng vinh quang của việc tìm ra cách giải phương trình bậc ba thuộc về mình!

Vậy ai đã tìm ra cách giải phương trình bậc ba, Cardano, Tartaglia hay ai khác?!

Nicolo Tartaglia sinh năm 1500, mồ côi sớm, nói ngọng, nhờ khổ công tự học mà có trình độ Toán học. Ông đã biết áp dụng Toán vào kỹ thuật pháo binh. Tác phẩm chính của ông là "*General trattato di numeri et misuri*" xuất bản năm 1556 trong đó có Số học, Hình học ứng dụng, Đại số, và một bản dịch ra tiếng Ý công trình về hình cầu và hình trụ của Archimède. Vụ tranh giành quyền tác giả của việc giải phương trình bậc ba giữa hai nhà toán học Ý Cardano và Tartaglia gần cùng tuổi gây rất nhiều xôn xao trong dư luận khoa học thời bấy giờ. Thực ra thì người phát minh đầu tiên cách giải phương trình bậc ba là một Giáo sư Toán Trường Đại học Bologne (Ý) tên là Scipione del Ferro (1465-1526). Ông đã giải phương trình $x^3 + px = q$. Nhưng ông không hề công bố công khai cách giải. Mãi đến khi ông sắp qua đời, ông mới báo cho người học trò của ông là Antonio Maria Fior, cũng là một nhà toán học nhưng ít tài năng hơn, cách giải của ông.

Nhưng cho dù có những nguồn tin như vậy, năm 1541 Tartaglia vẫn độc lập tìm ra cách giải. Fior không tin, tìm cách giảm uy tín của Tartaglia và thách Tartaglia giải 30 phương trình trong một thời gian nhất định do Fior đề xuất. Tartaglia nhận lời và trong thời gian quy định, Tartaglia đã giải xong và đúng tất cả phương trình nhưng ngược lại cũng vẫn thời gian ấy Fior chỉ giải được một phương trình do Tartaglia ra mà thôi! Fior chỉ giải được một loại phương trình có dạng $x^3 + px = q$, còn Tartaglia giải được nhiều loại trong đó có loại $x^3 + px^2 = q$, Fior chưa từng biết đến.

Thắng lợi của Tartaglia đến tai Cardano. Tháng 3 năm 1539 nhân gặp Tartaglia ở Milan, Cardano bèn chớp cơ hội nhờ Tartaglia giảng bày cách giải phương trình bậc 3. Sau khi quyển Ars Magna của Cardano ra đời (trong đó có trình bày cách giải phương trình bậc ba như là một sáng tạo của bản thân), Tartaglia phản đối kịch liệt vì thấy Cardano không trung thực nhưng Ludovico Ferrari (1522-1565), học trò và thư ký riêng của Cardano đã bênh vực thầy và đánh lạc hướng bằng cách vu cho Tartaglia đã lấy công trình của Scipione del Ferro làm của riêng cho mình!

Cuộc cãi vã còn gay go, kéo dài, nhưng cuối cùng thì Cardano "tai qua nạn khỏi" và vị cứu tinh chính là tác phẩm *"Đại số"* của Bombelli vì trong đó Bombelli đóng góp nhiều vào *"Phương trình bậc ba"*, đặc biệt là có đề cập đến số ảo.

Rafael Bombelli (1526-1573)

Ông là một kỹ sư tài ba nhưng ít người biết rõ lai lịch của ông. Năm 1572, trước khi Cardano chết mấy năm, ông cho xuất bản quyển *"Đại số"* trong đó ông đóng góp nhiều về nghiên cứu cách giải phương trình bậc ba. Có lẽ từ trước tới khi ông cho ra đời quyển *"Đại số"*, chưa có tác giả nào đề cập tới số ảo khá nhiều như ông.

Như ta đã biết nghiệm của phương trình $x^3 = 15x + 4$ là

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} - \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Nếu thay trực tiếp vào thì x = 4 là một nghiệm dương. Nhưng vào thời đó khi mà số phức chưa được nghiên cứu một cách có hệ thống thì Bombelli đã có những ý kiến khá hay. Ông nhận xét hai lượng dưới dấu căn là hai lượng (ý Bombelli muốn nói liên hợp) mà tổng là 4. Nếu căn bậc ba của $2-\sqrt{-121}$ hay $2-11\sqrt{-1}$ là $2-a\sqrt{-1}$ thì a phải bằng 1; nghĩa là $\left(2-1\sqrt{-1}\right)^3 = 2-11\sqrt{-1}$

và như vậy: $x = 2+1\sqrt{-1}+2-1\sqrt{-1} = 4$.

Bây giờ mà chúng ta đọc lại lý luận của Bombelli thì chúng ta chưa thật hài lòng nhưng cách đây trên 400 năm những ý tưởng của Bombelli thật đáng kính trọng.

Robert Recorde (1510-1558)

Ông sinh trưởng ở xứ Galles (Anh), tốt nghiệp Bác sĩ Y khoa tại Đại học Cambridge năm 1545 và ít năm sau được mời làm Ngự Y cho Vua Edouard VI và Hoàng hậu Marie. Ông kết thúc cuộc đời một cách bi thảm trong tù vì lý do tôn giáo hay chính trị một cách khó hiểu. Ông viết sách Toán dưới dạng đối thoại giữa thầy và trò. Nội dung sách Toán của ông rất thiết thực bao gồm những vấn đề Số học ứng dụng trong thương mại. Đây là tác phẩm Toán học đầu tiên của ông và ông đề tựa kính tặng Vua Edouard VI. Tác phẩm thứ hai của ông là về Hình học; nói chung ông viết lại bằng tiếng Anh bốn tập đầu của bộ Eléments của Euclide nhưng chỉ có hai tập được in ra mà thôi. Một năm trước khi ông mất, ông cho ra đời tập *The Whetstone of Witte*. Đây là quyển sách Đại số. Điều đáng nói ở đây là

Recorde, lần đầu tiên sau một nghìn năm trăm năm phát triển của Đại số, đã dùng dấu = (dấu bằng) trong sách Đại số của mình. Chỉ có điều là dấu bằng của Recorde hơi dài quá khổ. Đến thế kỷ thứ XVII thì người ta mới sửa lại như ngày nay.

Copernic với những ý tưởng táo bạo

Từ rất lâu các nhà toán học đã thấy mối quan hệ giữa Hình học và Đại số cùng với chiếc cầu nối là Lượng giác. Nhưng do những mâu thuẫn về ý thức hệ giữa những người Ả Rập Tây Ban Nha và những người Ả Rập Ba Tư nên Lượng giác học ít được những nhà toán học châu Âu chú ý cho đến giữa thế kỷ thứ XV. Về sau, Georg Peurbach (1423-1461) dịch từ Hy Lạp ra La Tinh bộ Almageste của Ptolémée nhưng chưa kịp hoàn thành thì ông mất và học trò ông là Regiomontanus chẳng những hoàn thành công việc của thầy mà còn lập bảng *sin* các góc khác nhau 10', rồi lập bảng *tang* từng độ một từ 0^0 đến 90^0 để giúp cho việc tính toán trong Thiên văn và như ta đã biết Lượng giác là công cụ không thể thiếu được trong việc tính toán ấy.

Song song với việc làm của Peurbach và Regiomontanus, là nhà bác học Ba Lan Copernic và nhà bác học Đức Rhacticus đã góp phần tích cực của mình để thúc đẩy sự phát triển môn Lượng giác dưới thời Phục hưng ở châu Âu.

Nicolas Copernic (1473-1543)

Từ hàng nghìn năm, Nhà Thờ Thiên Chúa giáo đã từng giảng giải rằng Trái Đất là trung tâm của vũ trụ. Mặt Trời cùng bao nhiêu vì sao khác quay quanh Trái Đất. Nhưng Nicolas Copernic - nhà thiên văn học người Ba Lan, bằng tính toán đã chứng minh rằng Mặt Trời đứng yên tương đối và Trái Đất cùng các hành tinh khác quay quanh Mặt Trời! Điều này, trước Copernic khá lâu, nhà thiên văn Hy Lạp Aristarque đã nghĩ tới nhưng chưa chứng minh thuyết phục được. Có thể nói *"hệ thống Copernic"* là cơ sở của Thiên văn học hiện đại.

Nicolas Copernic là con trai một nhà buôn Ba Lan giàu có, đồng thời là viên chức của thành phố Torun. Ông mồ côi cha lúc lên mười và ở với chú. Lớn lên ông học tại Đại học Cracovie và năm 1496 thì sang Ý học Y khoa và Thiên văn học. Năm 27 tuổi, ông được mời làm Giáo sư Toán học ở Ý nhưng ông từ chối và quay về Ba Lan. Năm 1510, chú ông vận động cho ông làm hầu cận Giáo Chủ vùng Frauenburg. Ông ở đó suốt 30 năm làm đủ nghề: thầy thuốc, tài chánh, chính trị, công việc của Nhà Thờ, nhưng chủ yếu là nghiên cứu Thiên văn và Toán học. Ông kín đáo, không muốn phổ biến những công trình nghiên cứu của mình. Nhưng một nhà khoa học Đức tên là Rhaeticus, sau 2 năm làm việc cùng Copernic rất khâm phục và thích thú những phát hiện của Copernic đã quyết định công bố lý thuyết Copernic vào năm 1540. Copernic đoán biết

COPERNIC

cái gì sẽ xảy ra sau khi lý thuyết của ông về sự chuyển động của Trái Đất được công bố! Nhưng ông tin rằng ông đúng nên cuối cùng ông giao toàn bộ bản thảo cho Rhaeticus.

Copernic mất ngày 24 tháng 5 năm 1543; vài ngày sau khi bản in lần thứ nhất của công trình nổi tiếng *"De revolutionibus orbium coelestium"* ra đời làm tức tối Nhà Thờ lúc bấy giờ. Trong công trình nghiên cứu Thiên văn này tất nhiên có chứa những chương nói về Lượng giác theo phương pháp của Regiomonatus và đặc biệt Copernic giải quyết định lý sau: *"Nếu một đường tròn nhỏ lăn nhưng không trượt bên trong một đường tròn lớn có đường kính bằng hai lần đường kính đường tròn nhỏ thì:*

a) quỹ tích của một điểm trên chu vi đường tròn nhỏ là một đoạn thẳng – một đường kính đường tròn lớn.

b) quỹ tích của một điểm không ở trên chu vi đường tròn nhỏ nhưng cố định đối với đường tròn nhỏ là một ellipse".

Phần đầu của định lý này đã có trong công trình của Cardan. Định lý Copernic này là sự mở rộng một định lý của Nasir al-din về chuyển động thẳng là hợp lực của hai chuyển động tròn.

Georg Joachim Rhaeticus (1514-1576)

Là nhà toán học đồng thời học trò của Copernic, Rhaeticus cũng là một nhà thiên văn nổi tiếng ở thế kỷ thứ XVI. Hiểu một cách sâu sắc công trình của Regiomontanus, Copernic cộng vào đó là những suy nghĩ sắc sảo toán học của bản thân, ông đã cho in công trình mang tên *"Opus palatinum de triangulis"* được người đương thời đánh giá là quyển sách viết về lượng giác hay nhất. Trong quyển sách Lượng giác này, lần đầu tiên người ta thấy cách định nghĩa sin, cos, tang, cotang không khác ngày nay và Rhaeticus đã để 12 năm ròng để lập các bảng lượng giác cho 6 hàm cơ bản với độ chính xác đến chữ số thứ 10 sau dấu phẩy (hệ thập phân).

Sơ lược về tình hình nghiên cứu Hình học ở thời kỳ Phục hưng ở châu Âu.

Nghiên cứu Hình học thuần túy được thịnh hành ở xã hội Hy Lạp cổ đại, nhưng sau này các nhà toán học Ấn Độ và Trung Hoa thích Hình học ứng dụng vào đời sống thực tế hơn, vì vậy họ tìm cách liên kết Hình học và Đại số. Ở châu Âu, trước thế kỷ XVI nhiều bài toán Hình học được giải theo cách Đại số và ngược lại nhiều phương trình Đại số được tìm nghiệm bằng con đường Hình học. Cuối thời Phục hưng, bắt đầu manh nha nhiều hướng Hình học mới do yêu cầu phát triển của xã hội: Hình học họa hình, Hình học xạ ảnh phục vụ chủ yếu cho xây dựng, chế tạo cơ khí.

Hình học phi Euclide ra đời do sự phát triển tất yếu của tư duy. Ban đầu người ta chưa biết nó dùng để làm gì, nên có nhà toán học gọi nó là Hình học ảo! Nhưng về sau (phải sau năm mươi năm) thì không ai còn thắc mắc đó nữa. Hình học phi Euclide bắt nguồn từ những suy nghĩ của Ptolémée cho đến Saccheri muốn chứng minh tiên đề thứ 5 về đường thẳng song

song của Euclide nhờ bốn tiên đề trước. Sự thất bại của Ptolémée và Saccheri trong việc chứng minh tiên đề 5 nhờ bốn tiên đề trước đã mở đường cho các nhà toán học lừng danh Gauss, Bolyai, Lobatchevski, Riemann...sáng tạo ra *Hình học phi Euclide* sau này.

Hình học xạ ảnh do nhà toán học Pháp Gérard Désargues (1593-1661) phát minh và được hoàn thiện bởi cũng nhà toán học Pháp J.V.Poncelet.

Hình học họa hình được đánh giá là quan trọng trong kiến trúc, kỹ thuật cơ khí v.v... do nhà toán học Pháp Gaspard Monge (1746-1818) đặt nền móng quy mô đầu tiên.

Thực ra từ hàng nghìn năm trước Công nguyên, việc xây dựng các đền đài lăng tẩm đều do những nhà kiến trúc cổ đại chỉ đạo. Muốn làm được việc này họ phải dùng khái niệm về Hình học họa hình nhưng lúc bấy giờ chưa ai đúc kết thành lý thuyết và ghi lại thành sách vở. Mãi đến thế kỷ XV các Kiến trúc sư người Ý Filippo Brunelleschi, Leon Battista Alberti mới công bố những suy nghĩ và kinh nghiệm về nghề của mình. Về sau, có những công trình bổ sung của Piero della Francesca (Ý), Albrech Durer (Đức) nhưng tất cả đều chưa thật có hệ thống và hoàn chỉnh thành một ngành của Toán học. Công lao của Monge là nâng Hình học họa hình lên thành một khoa học lý thuyết và ứng dụng rất được hoan nghênh trong giới xây dựng, kiến trúc thời bấy giờ.

Chương 11.

NỀN TOÁN HỌC CHÂU ÂU CHO ĐẾN THẾ KỶ XVII

Cuối thế kỷ thứ XVI, châu Âu ngày càng phát triển sau những năm dài ngưng trệ và chịu bao đau thương tang tóc. Thời bấy giờ có hai nhà khoa học đã có công dịch thuật những tác phẩm Hy Lạp bị thất lạc, có giá trị, nhưng còn xa lạ đối với các nhà khoa học châu Âu là Maurolico va Commandino.

Francisco Maurolico (1494-1575)

Ông sinh ra, lớn lên, gắn bó suốt đời với quê hương Sicile. Là một nhà hình học có tài, ông đã sưu tầm, dịch, và chú thích gần như tất cả công trình giá trị nhất của Euclide, Archimède, Apollonius ra tiếng La Tinh. Đặc biệt, ông dịch 4 tập của bộ *Tiết diện coniques* của Apollonius và tìm cách phục hồi tập 5 đồng thời dùng lời bình của Pappus. Trong tác phẩm *Arithmeticorum libri duo* xuất bản năm 1575 tại Venise, lần đầu tiên ông phát biểu và áp dụng nguyên lý quy nạp toán học là một nguyên lý do Levi Ben Gerson (thế kỷ XIV) đã nghiên cứu, về sau được Pascal, Fermat, và Jacques Bernoulli (thế kỷ XVII) nghiên cứu tiếp và từ *"quy nạp toán học"* được A.De Morgan phổ biến từ thế kỷ XIX.

Federigo Commandino (1509-1575)

Ông là một nhà khoa học Ý có công chuyển tải tri thức từ thời Cổ đại, Phục hưng đến thế hệ các nhà khoa học châu Âu đương đại đặc biệt là về Toán học. Có thể nói ông đặt nền móng cho Toán học cận đại.

Francois Viète (1540-1603)

Ông là nhà toán học nổi tiếng nhất trong thời kỳ chuyển tiếp. Ông sinh ra, lớn lên đi học Trung học ở Fontenay (Pháp), rồi học Luật ở Poitiers, và ra làm luật sư ở quê hương. Năm 1571 ông làm luật sư ở Paris. Năm 1576 được cử theo hầu cận Vua Henri III và bị cách chức từ 1584 đến 1589. Trong suốt cuộc đời, ngoài những lúc hành nghề, ông có hai thời kỳ được rãnh rỗi đó là những năm 1564-1568 và 1584-1589 và chính những lúc này ông dành thì giờ cho nghiên cứu Toán học. Ông bắt đầu bằng những công trình về Thiên văn và Lượng giác nhưng những công trình này không được in ra. Về sau, năm 1579, ông mới cho xuất bản quyển Lượng giác có tên *"Canon mathematicus seu ad triangula"*. Trong sách này ta thấy những hằng đẳng thức sau:

$$\sin\theta = \sin(60^0 + \theta) - \sin(60^0 - \theta)$$

$$3\sin\theta - 4\sin^3\theta = \sin 3\theta \,;$$

$$\cos\theta + \operatorname{cotg}\theta = \operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}$$

$$\cos\theta - \operatorname{cotg}\theta = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$$

Thực ra công thức sin và cos của 2θ đã được biết từ thời Ptolémée và cũng có thể tìm ra sin 3θ, cos 3θ cũng như sau này có thể tìm sin nx, cos nx từ công thức Ptolémée, nhưng rất vất vả. Viète dùng tính chất tam giác vuông và hằng đẳng thức: $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ad + bc)^2 + (bd - ac)^2 = (ad - bc)^2 + (bd + ac)^2$ để dẫn tới công thức của sin nx và cos nx tương đương với:

$$\sin nx = \binom{n}{1}\cos^{n-1}x\sin x - \binom{n}{3}\cos^{n-3}x\sin^3 x + \ldots$$

$$\cos nx = \cos^n x - \binom{n}{2}\cos^{n-2}x\sin^2 x + \binom{n}{4}\cos^{n-4}x\sin^4 x$$

Viète còn tìm ra những công thức này:

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

và tương tự:

$$\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A\cos B$$

$$\sin(A+B) - \sin(A-B) = 2\cos A\sin B$$

và còn nhiều nữa, nhưng tác phẩm làm Viète nổi tiếng là quyển Đại số *In artem analyticam isagoge* xuất bản ở Tours năm 1591 rồi tái bản ở Paris năm 1624. Đây là một quyển sách viết với những sáng tạo trong việc dùng ký hiệu rõ ràng và ngày nay ta còn dùng công thức của ông về mối liên quan giữa nghiệm và hệ số của phương trình bậc 2. Hình học của Viète ở trình độ tương đương với các công trình của Apollonius và Pappus. Ông cũng đề cập tới bài toán chia 3 một góc bất kỳ, gấp đôi một hình lập phương và ông phát biểu rằng giải những bài toán ấy đưa về một phương trình bậc 3. Trong quá trình diễn đạt những phép tính đại số bằng ngôn ngữ hình học ông phát hiện rằng thước và compas chỉ có thể dùng để giải phương trình bậc nhất và bậc hai mà thôi. Gần cuối đời, vào khoảng năm 1600, ông xuất bản ở Paris quyển *De numerosa potestatum ad exegesin resolutione,* trong đó ông nêu một phương pháp xấp xỉ liên tiếp nghiệm của một phương trình, tương tự với cách của Horner. Viète có lẽ là người đầu tiên nêu mối liên hệ chặt chẽ giữa Đại số và Lượng giác. Ví dụ xuất phát từ phương trình $x^3 + 3\,px + q = 0$, nếu dùng $y = mx$ thay vào ta có một phương trình mới $y^3 + 3\,pm^3\,y + m^3\,q = 0$, ta trực giác thấy nó hao hao giống phương trình $\cos^3\theta - \frac{3}{4}\cos\theta - \frac{1}{4}\cos 3\theta = 0$

Nếu $y = \cos\theta$, $3pm^2 = -\frac{3}{4}$ và $m^3q = \cos 3\theta$; ta có thể xác định dễ dàng 3θ rồi θ theo p, m và q. Biết $\cos\theta$ thì xác định được y rồi x. Nhờ Viète gợi ý, sau này Girard tiếp tục nghiên cứu kỹ hơn. Với đà ấy dần dần người ta hoàn chỉnh được việc tìm ra ba nghiệm thực của phương trình bậc ba.

Người ta còn kể chuyện vui sau đây: một nhà toán học Hà Lan tên Adrian Van Roomen (1561 - 1615) thách các nhà toán học châu Âu giải phương trình sau:

$$x^{45} - 45\,x^{43} + 945\,x^{41} - \ldots\ldots - 3795\,x^{3} + 45x = K.$$

Viète nhận giải và nhận xét phương trình trên có được khi ta có K = sin 450θ với x = sinθ. Ít lâu sau ông tìm ra được 23 nghiệm dương của phương trình trên và cho qua các nghiệm âm. Roomen phục quá, đáp tàu qua Pháp để xin được hân hạnh làm quen với Viète. Trong suốt cuộc đời mình, Viète chỉ làm toán một cách tài tử thuộc các lĩnh vực Đại số, Lượng giác, Lý thuyết phương trình, và Hình học; nhưng ông chính là nhân vật xuất sắc nhất ở thời kỳ chuyển tiếp này.

Simon Stevin (1548 - 1620)

Ông sinh tại Bruges (Bỉ), thời thanh niên làm nghề thủ quỹ, kế toán, về sau kiếm được việc làm chính thức tại Sở Tài chính ở quê nhà. Ông đi nhiều nơi, qua Đức, Ba Lan, Thụy Điển. Quyển sách đầu tiên ông viết và xuất bản là một quyển sách hướng dẫn về tính lãi, cách lập bảng và nhiều ứng dụng thực tế. Ông học Đại học Leyde ở Hà Lan rồi trở thành Giáo sư Toán học và thầy học của Thái tử Hà Lan là Maurice de Nassau. Nhờ sự tiến cử của Thái tử, Stevin trở thành vị quan chuyên lo hậu cần cho quân đội Hà Lan, chức vụ này ông đảm trách cho đến cuối đời. Năm 1600, ông dạy Toán ở Trường Xây dựng thuộc Đại học Leyde. Thái tử Maurice de Nassau là người yêu Toán, nên luôn tạo điều kiện cho thầy học mình là Stevin có điều kiện hoạt động toán học. Năm 64 tuổi Stevin mới lập gia đình và sau đó sinh hạ được 4 con. Ông mất tại nhà riêng tại La Haye. Năm 1846 người ta xây dựng tượng ông tại quê ông là Bruges. Ông am hiểu Euclide, Apollonius, Al-Huwarizmi và rất ưa thích tác phẩm của Archimède, Pappus, Jordanus Nemorarius, Leonard de Vinci, Tartaglia. Ông là một nhà toán học và là một nhà cơ học. Về Toán, ông đã để ý đến nghiệm âm của phương trình, điều mà trước đây nhiều nhà toán học hay bỏ qua. Ông nghiên cứu về tam giác cầu. Về khoa học thực nghiệm ông viết nhiều công trình về Tĩnh học, Thuỷ tĩnh học, Hàng hải, Lý thuyết Thủy triều, Địa chất.

John Napier (1550- 1617)

Người ta ít biết về thời niên thiếu của ông. Mồ côi mẹ năm 13 tuổi, ông được nuôi ăn học tại Đại học Saint- Andrews (xứ Ecosse). Ông rời Đại học Saint-Andrews mà không có bằng cấp gì, bỏ ra nước ngoài, rồi trở về nơi cha ông có ruộng đất, lập gia đình, sống trong giàu có.Thời ấy (thế kỷ XVI) nước ông có nội chiến giữa người theo đạo Cơ Đốc (thân Pháp) và người theo đạo Tin Lành (thân Anh). Napier là tín đồ đạo Tin Lành. Cuối thế kỷ XVI, Napier nhận xét thời bấy giờ việc tính toán rất mất thì giờ, phiền toái, đôi khi còn tính sai nữa nên ông tập trung sức lực cố tìm cách vượt khó khăn ấy. Ông đã bỏ ra 20 năm ròng rã mới phát minh được hệ thống logarithme. Năm 1614, ba năm trước khi ông qua đời về bệnh thống phong (đau dớn dữ dội ở ngón chân cái) ông cho xuất bản công trình bất hủ "*Mirifici logarithmorum canonis descriptio*" và hai năm sau khi ông mất, người ta cho xuất bản tiếp công trình thứ hai của ông về logarithme *"Mirifici logarithmorum canonis constructio"* trong đó ông trình bày cách lập bảng logarithme.

Phát minh của Napier về logarithme đã gây một chấn động lớn trong giới khoa học Anh. Một trong những người ngưỡng mộ ông là Henry Briggs (1561-1630); Giáo sư Hình học trường Đại học Oxford. Briggs đến thăm Napier ở Edimbourg và sau khi trao đổi, hai nhà toán học đã thống nhất đi đến kết luận rằng logarithme của 1 bằng 0 và logarithme của 10 bằng 1. Từ đó ra đời từ *"logarithme có cơ số bình thường"* hay còn gọi là logarithme của Briggs. Năm 1617, năm Napier qua đời, Briggs cho xuất bản *"Logarithmorum chilias prima"* gồm có logarithme các số từ 1 đến 1000 chính xác đến 14 chữ số sau dấu phẩy. Từ năm 1624, xuất hiện quyển *"Arithmetica logarithmica"* cũng của Briggs trong đó có logarithme của các số từ 1 đến 100.000 và luôn luôn với 14 chữ số lẻ chính xác. Trong lịch sử toán học thế giới chưa có một phát minh nào được truyền bá nhanh như vậy: từ 1614 đến 1631 có đến hơn 20 công trình xuất bản đề cập đến vấn đề này.

Jobst Burgi (1552-1632)

Gần như cùng thời với Napier, nhà toán học Thụy Sĩ cũng xuất phát từ những ý tưởng như Napier trong việc tìm tòi khám phá ra logarithme. Nhưng đáng tiếc là những công trình của Burgi mãi đến năm 1620 mới được xuất bản ở Prague (Tiệp). Nhưng khái niệm về cơ số không có trong công trình của Burgi và log 1 = 0 cũng không được thừa nhận! Những logarithme chứa trong bảng của Burgi đều là những số nguyên.

John Speidell

Trong một tác phẩm nhan đề *"New Logarithmes"* xuất bản ở Luân Đôn năm 1619, ông điều chỉnh lại logarithme của Napier bằng cách đưa ra khái niệm logarithme tự nhiên có cơ số là e.

Những người góp phần hoàn thiện công việc nghiên cứu logarithme có nhiều nhưng đáng chú ý có Edward Wright (1559-1615) là người đã đưa ra các tính chất của logarithme:

- $\log mn = \log m + \log n$
- $\log \frac{m}{n} = \log m - \log n$
- $\log x^n = n \log x$

và người sáng chế ra thước tính chính là William Oughtred (1574 – 1660).

Việc phát minh ra logarithme đã giúp cho Toán học Tính toán tiến một bước dài nhất là trong các phép tính Thiên văn.

Những công trình toán học của Stevin về các đại lượng vô hạn, cũng như những nghiên cứu của ông về trọng tâm và phép tính logarithme là những điều kiện thuận lợi cho việc nghiên cứu thiên văn của Képler.

Johann Képler (1571-1630)

Ông là người Đức sinh ở Wurtemberg, tốt nghiệp trường La Tinh năm 13 tuổi. Ông xuất thân là con nhà nghèo nên thời thơ ấu sống chật vật, ông vào học Trường Dòng năm 1584 trong hoàn cảnh thiếu thốn, lại dau yếu luôn. Về sau nhờ theo học ở Trường Dòng Maullbron ba năm, sức khoẻ ông khá lên dần và nhờ giỏi LaTinh ông được nhận vào Đại học Tubingen năm 1589.

KÉPLER

Thời bấy giờ môn Thần học là môn quan trọng nhất trong các môn ở Đại học, nhưng Thần học không lấn át được tư tưởng của Copernic về Vũ trụ, do thầy học của ông, Giáo sư Maestlin truyền thụ hàng ngày. Năm 23 tuổi ông được bổ nhiệm dạy Luân lý và Toán học tại Trường Trung học Tin Lành ở Graz. Bị đuổi khỏi trường vì kỷ luật tôn giáo, ông sống lưu vong ở Prague. Ở đó ông được nhận làm phụ tá và học trò của nhà Thiên văn nổi tiếng Tiệp khắc Tycho Brahé. Tháng 10,năm 1601 nhà bác học Tycho Brahé mất và Hoàng đế Rodolphe II bổ nhiệm Képler làm "Quan coi về Toán học của Hoàng đế". Năm 1612 một người con trai và vợ ông qua đời. Ông buồn phiền, không muốn lưu lại Prague nữa, bèn nhận chức Giáo sư Toán tại một trường Trung học nhỏ ở Linz và làm việc ở đó suốt 14 năm, cuối cùng ông mất tháng 11 năm 1630 tại Ratisbonne. Một người bạn ông đã viết "Mặt trời của các nhà thiên văn thế giới đã tắt".

Ông đóng góp cho nền toán học thế giới bằng những công trình về *"Tiết diện coniques"*.Trong Hình học coniques, chính ông là người đầu tiên đã dùng từ *"tiêu điểm"* và từ *"nguyên lý liên tục"*. Ông còn có ý thức đưa ra khái niệm *"điểm ở vô tận"* mà sau này, năm 1822, nhà hình học Pháp Poncelet đã dùng lại và phát triển thêm. Song những điều đó không phải đã đưa ông tới đỉnh vinh quang. Ông đã trở thành "mặt trời của các nhà thiên văn thế giới" chính là nhờ những định luật về chuyển động của các hành tinh. Trong công trình nghiên cứu tuyệt vời *"Astronomia nova"* xuất bản năm 1609 ông đưa ra 2 định luật về chuyển động của hành tinh, đời sau gọi là *định luật Képler:*

ĐỊNH LUẬT 1: Mỗi hành tinh chuyển động theo một hình ellipse nhận mặt trời làm một tiêu điểm.

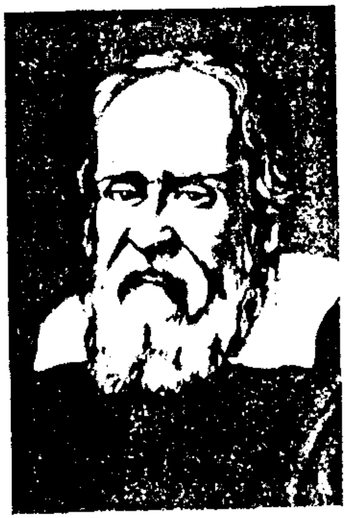
ĐỊNH LUẬT 2: Đường thẳng nối mặt trời tới quỹ đạo của hành tinh quét những diện tích bằng nhau trong những thời gian bằng nhau.

Định luật thứ hai của Képler chẳng những quan trọng về mặt thiên văn mà nó còn là một đóng góp về tư tưởng xây dựng môn vi tích phân sau này nữa.

Trong khi Képler tích cực xây dựng lý thuyết của mình thì năm 1612 thì một nhà bác học Ý cho chào dời một dụng cụ lạ, rồi tuyên bố những câu "động trời" làm Nhà Thờ tức tối buộc tội chết ở dàn hỏa thiêu. Nhà thiên văn học thiếu may mắn đó là Galilée.

Galiléo Galilei (1564-1642)

Ông sinh ra ở Pise thuộc nước Ý, xuất thân từ một gia đình nghèo nhưng có học thức. Ban đầu ông ghi tên vào học ngành Y nhưng lại say sưa nghiên cứu khoa học, đặc biệt là Cơ học ứng dụng. Từ khi còn là sinh viên Y khoa ông đã có một phát minh rất nổi tiếng. Hồi ấy, trong nhà thờ thành phố Pise có một chiếc đèn treo, Galilei liên tưởng đến một đồng hồ quả lắc và sau này ông phát hiện tính đẳng thời của chuyển động quả lắc độc lập với trọng lượng quả lắc. Galilei nghiên cứu chăm chỉ các công trình của các bậc tiền bối như Archimède, Euclide. Ông nổi tiếng về Toán rất sớm. Năm 25 tuổi, ông được bổ nhiệm làm Giáo sư Toán trường Đại học Pise. Năm 1592 ông xin thuyên chuyển về Padoue. Ông tiếp tục công trình nghiên cứu về Cơ và để ý đến kính thiên văn. Từ năm 1609, ông trở thành Cố vấn khoa học cho Quận công ở Toscane, và sau nhiều chuyến đi Rome ông trở thành Viện sĩ Viện Hàn Lâm. Chính ở thời kỳ này ông phát minh ra kính thiên văn mang tên ông, và từ đó ông công khai ủng hộ tư tưởng của Copernic, nhưng về sau ông bị Nhà Thờ lên án cho là tà giáo vì "tội" truyền bá tư tưởng chống lại Nhà



GALILEI

Thờ La Mã: dám nói Trái Đất quay! Sau sự việc trên ông trở nên kín đáo hơn, lui về ẩn dật trong một biệt thự nhỏ ở Florence. Mười lăm năm cuối cùng trong đời, ông sống trong trầm ngâm suy tưởng về Cơ học và Thiên văn. Năm 1632, Galilei xuất bản công trình nổi tiếng *"Đối thoại giữa hai hệ thống thế giới"*; trong đó luận thuyết của Copernic chẳng những được nhắc lại mà còn được chứng minh chặt chẽ, thuyết phục hơn. Đại Pháp Quan của Tòa án Giáo hội La Mã lần này cương quyết không "tha tội" cho Galilei, bắt ông phải tuyên thệ không được truyền bá tư tưởng *"Trái Đất quay"* nữa hoặc là phải chết thiêu trên dàn hỏa. Lúc này ông đã 70 tuổi. Tuổi già sức yếu lại thêm mù hai mắt ông vẫn dành những năm tháng còn lại của đời mình cho Cơ học, Thiên văn và Khoa học.

Ông mất năm 78 tuổi. Tác phẩm quan trọng bậc nhất ông để lại cho đời sau là hai tác phẩm *"Thiên văn"* và *"Vật lý"* viết bằng tiếng mẹ đẻ (tiếng Ý). Ông đặt nền móng cho cơ học của lý thuyết vật rơi, động lực học. Người ta còn nói ông là tác giả của *"lý thuyết về bản thể parabole của quỹ đạo của một viên đạn thoát ra từ nòng súng"*. Lý thuyết sức bền vật liệu cũng là một đối tượng nghiên cứu của Galilei.

Trong bản dịch từ tiếng Ý ra tiếng Pháp tác phẩm *"Đối thoại giữa hai hệ thống thế giới, hệ thống của Ptolémée và hệ thống của Copernic"* ông diễn tả nội dung khoa học của vấn đề dưới dạng đối thoại giữa ba nhân vật: Salviati, tượng trưng cho Galilei, nhân vật thứ hai là Sagredo, một người bạn của Salviati có tầm nhìn phóng khoáng, đầu óc cởi mở và cuối cùng là Simplicio, một người thủ cựu, bảo thủ.

Năm 1638, trong khi còn bị theo dõi, quản thúc chặt chẽ, ông cho xuất bản quyển *"Thuyết trình và chứng minh Toán học về hai nền khoa học mới"* với hình thức tương tự quyển trên. Trong hai quyển sách nổi tiếng ấy có chứa nhiều điểm có nội dung *"vô cùng bé"* và *"vô cùng lớn"*. Trong khi giải thích về hiện tượng vật lý, Galilei đã dùng đến từ *"không thể phân chia"* mà sau này, một người vừa là học trò vừa là bạn vong niên của ông là Cavalieri đã dùng rất thành công trong các chứng minh toán học.

Bonaventura Cavalieri (1598-1647)

Sinh trưởng ở Milan, ông là một người học trò xuất sắc của Galilei. Ông được phong là Giáo sư Toán trường Đại học Bologne từ 1629 cho đến khi mất. Ông viết nhiều tác phẩm về Toán, Quang học, Thiên văn, nhưng cái chính mà người ta ca ngợi là ông đã truyền bá logarithme vào nước Ý. Tác phẩm *"Bàn về những phần tử không thể chia được"* của Cavalieri tuy có nhược điểm là khó hiểu nhưng là mầm mống cho phép tính vi tích phân sau này. Ông có nêu một định lý sau đây minh họa cho lý thuyết của ông (định lý Cavalieri): *"Nếu hai vật thể có hai chiều cao bằng nhau; nếu hai tiết diện phẳng song song với hai mặt phẳng đáy, cùng cách các mặt phẳng đáy tương ứng như nhau và tỷ số giữa hai tiết diện luôn theo một tỷ số cố định thì tỷ số giữa hai thể tích của hai vật thể ấy là tỷ số nói trên."*

Trong những áp dụng lý thuyết của ông có công thức

$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$ ông chứng bằng hình học.

Năm 1632 Cavalieri công bố tác phẩm *"Directorium universale uranometricum"* trong đó có bảng sin, tang, secante cùng logarithme của chúng với 8 số lẻ. Phương pháp dùng phần tử không thể chia được của Cavalieri gây nhiều tranh cãi nhưng dù sao nó cũng là mầm mống cho phát minh vĩ đại sau này: *tính vi tích phân.*

CAVALIERI

NAPIER

VIÈTE

Chương 12.

THỜI KỲ RỰC RỠ CỦA TOÁN HỌC

Sau thời kỳ Phục hưng và chuyển tiếp, châu Âu bước vào thời kỳ khởi sắc. Một nhân vật nổi lên hàng đầu, không phải vì số lượng đồ sộ công trình hay sự đa dạng trong nghiên cứu mà là phương pháp nghiên cứu. Đó là Descartes.

René Descartes (1596 - 1650) và tính biện chứng trong hình học giải tích

Trong Toán học, thời kỳ mới bắt đầu từ thế kỷ XVII bằng những cuộc cách mạng trong suy nghĩ và phương pháp nghiên cứu; thể hiện ở sự ra đời của các môn Hình học giải tích, Tính vi tích phân, gắn liền tên tuổi của những nhà phát minh ra chúng như Descartes, Fermat, Pascal, Leibnitz, Newton... Người ta luôn nhớ tới công lao của nhà bác học đã đặt nền móng cho phương pháp biện chứng trong Toán học, đó là René Descartes.

Ông là người Pháp, sinh tại Hà Lan năm 1596, thuộc gia đình quý tộc. Ông học Tiểu học ở Trường Dòng và nổi tiếng là học sinh có năng khiếu. Năm 1612 ông đến Paris để tiếp xúc với giới trí thức và sau đó tham gia binh nghiệp, đi nhiều nơi, mãi đến năm 1626 mới định cư ở Paris và đi sâu vào nghiên cứu Triết học và Khoa Học. Ông trở lại Hà Lan, sống ẩn dật, miên man trong suy nghĩ, xa lánh mọi người trong 20 năm.

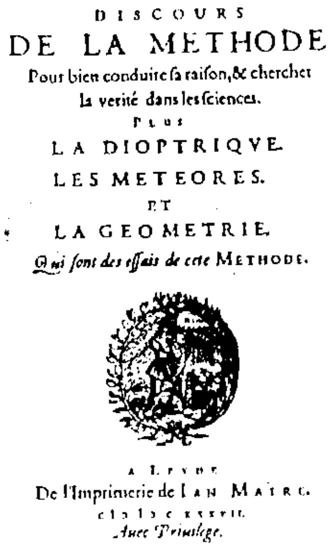
Năm 1649, theo lời mời của Hoàng hậu Christine nước Thụy Điển, ông sang giúp Hoàng hậu tăng vốn hiểu biết và do không chịu nổi thời tiết khắc nghiệt, ông đã qua đời năm 1650. Chính trong thời gian ẩn dật 20 năm tại Hà Lan, ông đã để lại cho đời tác phẩm lừng danh *"Phương pháp luận"* và 3 phụ lục về *"Quang học"* *"Thiên văn học"* và *"Hình học"*.

Phụ lục thứ ba ngày nay ta gọi là Hình học giải tích đã tôn ông lên hàng bất tử vì ông đã phát minh cho nhân loại một phương pháp nghiên cứu hình học mới kết hợp giữa Hình học và Đại số.

Descartes là nhà toán học đầu tiên của nhân loại đưa ra phương pháp xác định tọa độ một điểm bằng một hệ trục vuông góc và Descartes đã chứng tỏ rằng khi điểm này chuyển động vạch nên một đường thì mối quan hệ giữa x và y được thể hiện bằng $f(x,y) = 0$. Đây là ý nghĩ sản sinh ra môn Hình học giải tích và mối quan hệ hàm giữ các đại lượng. Triết học gọi đây là quan hệ biện chứng trong Toán học.

Từ khi có Hình học giải tích, việc nghiên cứu hình học đã qua được một chặn đường dài phát triển. Vinh quang mà người đời dành cho Descartes là ở phương pháp luận nghiên cứu khoa học của ông thể hiện cụ thể ở Hình học giải tích. Hai trăm năm sau ngày mất của Descartes, trong tác phẩm *"Biện chứng pháp* *thiên nhiên*" F. Engels (1820-1895) gọi sự phát minh ra đại lượng biến thiên của Descartes là "bước ngoặt trong sự phát triển của Toán học thế giới".

Sau Descartes là hai nhà toán học lớn khác đã mở ra thêm nhiều hướng mới cho Toán học. Mặc dù công trình của họ để lại cho đời sau không nhiều nhưng tư tưởng toán học của họ thật là những hướng đi cho bao nhiêu thế hệ kế tiếp, đó là Fermat và Pascal.


DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire sa raison, & chercher
la verité dans les sciences.
PLUS
LA DIOPTRIQVE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui sont des essais de cete METHODE.

A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
CIƆ IƆ C XXXVII.
Avec Privilege.

RENÉ DESCARTES

Tác phẩm PHƯƠNG PHÁP LUẬN
Phụ lục về Hình học giải tích

Fermat (1601-1665), Pascal (1623-1662) và Viện Hàn Lâm khoa học

Fermat là một hiện tượng hơi đặc biệt của làng toán học thế giới. Ông không quan tâm gì đến việc để lại công trình của mình cho đời sau, vì ông cho rằng Toán học đối với ông chỉ là trò giải trí lúc nhàn rỗi! Chỉ sau khi ông qua đời, con trai ông cùng bè bạn lúc sinh thời của ông mới cho công bố những công trình độc đáo của ông dưới dạng tờ rời; ghi chép cẩu thả và tản mạn khắp nơi, trong đó có những công trình cho đến ngày nay mà những vấn đề ông đặt ra trong đó vẫn còn bỏ ngỏ!

Pierre de Fermat là người Pháp, quan chức hành chính, tư pháp thành phố Toulouse đồng thời là tu sĩ, nhà thơ, thông thạo nhiều ngoại ngữ châu Âu. Sau khi ông công bố tác phẩm *"Phương pháp nghiên cứu cực đại và cực tiểu"*, ông đã nghiễm nhiên trở thành nhà sáng lập ra môn tính Vi phân. Ông cũng được xem là người phát minh ra môn tính Tích phân. Ngoài ra ông còn nghiên cứu về xác suất. Nhưng tên tuổi ông trở thành bất tử vì những công trình độc đáo về số học và người ta gán cho ông công lao thay đổi khá nhiều bộ mặt của Số học là một ngành khó của Toán học. Tuy ông có nhiều nghiên cứu về Số học nhưng ông không công bố, chỉ trao đổi với bạn bè. Có nhiều định lý Số học do ông tìm ra nhưng lại phát biểu một cách tài tử.

Người ta kể chuyện: có một định lý hay do ông tìm ra nhưng ông chỉ nói: *"Mọi số nguyên là tổng của 3 số tam giác, của 4 số hình vuông, của 5 số ngũ giác, của 6 số lục giác là tối đa"*. Mãi đến 200 năm sau, nhà toán học lỗi lạc người Pháp là Cauchy mới chứng minh hoàn chỉnh! Đặc biệt ông còn nêu định lý sau (người đời còn gọi là bài toán Fermat): *Phương trình* $x^n + y^n = z^n$ *chỉ có nghiệm nguyên với* $n \leq 2$. Ông cho biết với n = 3, người Ả Rập đã chứng minh được. Fermat nói ông chứng minh được; với n = 4 và còn nói ông có cách chứng minh lý thú nhưng cho đến tận ngày nay chưa ai chứng minh được; vì vậy không thể kết luận được bài toán Fermat đúng hay sai! Những năm đầu thập kỷ 90 của thế kỷ này (thế kỷ 20) trong một cuộc họp về toán ở Anh, có người tuyên bố là đã chứng minh được định lý Fermat. Nhưng rất tiếc sau khi kiểm chứng chi ly từng "công đoạn chứng minh" thì người ta phát hiện sai sót và bài toán hiện vẫn còn bỏ ngỏ!.

Blaise Pascal là một nhà Toán học "thần đồng" Pháp. Về sau, ông là nhà tư tưởng, đồng thời là nhà văn, nhà vật lý, nhà phát minh. Thiên tài toán học của ông bộc lộ năm ông 12 tuổi khi ông đã tự xây dựng được 32 mệnh đề trong tập I của bộ Eléments của Euclide. Năm 14 tuổi ông tham gia sinh hoạt "Câu lạc bộ khoa học" cùng với cha ông và các nhà khoa học đương thời. Năm 17 tuổi Pascal xuất bản công trình *"Nghiên cứu về đường coniques"*. Sau khi ông qua đời được một năm thì người ta công bố *"Tam giác Pascal"* nhưng khi viết lịch sử Toán học thì nhiều tác giả phát hiện rằng trước Pascal khá lâu, nhân loại cũng đã biết vấn đề này rồi. Ông đã có ý kiến dùng tích phân từng phần để xác định thể tích, diện tích, trọng tâm các vật thể. Người ta còn kể một chuyện lý thú: ông bị nhức răng, nhưng chưa tới thời kỳ phải nhổ. Để bớt đau, ông tập trung suy nghĩ về Toán! Ông đã phát hiện ra một hiện tượng mới và phát biểu thành định lý: *Quỹ tích của một tiếp điểm của đường tròn với một đường thẳng khi đường tròn lăn chứ không trượt trên đường thẳng là một đường cong có tên là cycloïde.*

Bản thân Pascal cũng không lường hết cái hay của đường cycloïde. Xin nêu vài ví dụ:

1. Để 3 viên bi giống nhau vào 3 vị trí khác nhau trên đường cycloide và cho lăn tự do thì 3 viên bi xuống nhanh và đến cùng một lúc. Lăn xuống thì rất dễ nhưng lăn lên thì rất khó!

2. Ánh sáng đi từ Mặt Trời xuyên qua lớp không khí dặc loãng khác nhau để đến Trái Đất thì nên đi theo đường cong nào để đến Trái Đất nhanh nhất (ít thời gian nhất).

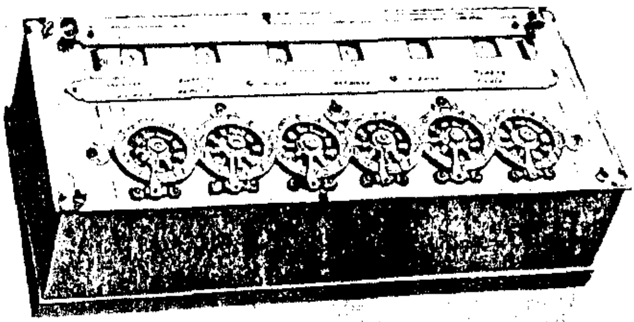
Bernoulli đã chứng minh rằng "Thượng Đế" đã chọn đường cycloïde là đường đi ít tốn thời gian nhất!

Pascal còn đặt nền móng cho môn Xác suất Thống kê. Tài năng phát minh của ông còn thể hiện ở chỗ năm 18 tuổi; ông phát minh ra máy tính số học để giúp cha ông trong việc tính toán. Ông còn là nhà vật lý, phát hiện ra nhiều định luật về áp suất về cân bằng của chất lỏng, về máy ép thủy lực.

Năm 1654 (31 tuổi), ông về sống như tu sĩ ở Port Royal (thuộc Paris). Ông dự định viết một tác phẩm mang tên "*Bênh vực cho đạo Cơ Đốc*" nhưng tác phẩm chưa xong thì ông mất. Một phần tác phẩm này được công bố lấy tên là *Pensées (những dòng suy nghĩ)*. Tuy là nhà toán học, khoa học nhưng ông chủ trương văn chương phải trong sáng, uyển chuyển, và có sức mạnh. Về đạo lý ông khuyên mọi người chống lại cái chưa hoàn mỹ, những cái phù phiếm vô tích sự. Vì vậy, bên cạnh thiên tài khoa học của ông, ông còn được xếp vào hàng những nhà tư tưởng phái kinh điển. Pascal bình sinh yếu kém về thể lực nên ông mất sớm năm 39 tuổi.

PASCAL

FERMAT



Máy tính cơ học của Pascal sáng chế năm 1642

Từ Câu lạc bộ bác học Paris đến Viện Hàn Lâm Khoa Học Pháp (1666)

Lúc còn là thiếu niên, Pascal thường theo cha đến dự sinh hoạt ở Câu lạc bộ bác học Paris. Trụ sở của Câu lạc bộ là nhà riêng của Marin Mersenne (1588-1648), một trí thức lớn thời bấy giờ. Thời ấy ngôi nhà của Mersenne không chỉ là nơi sinh hoạt của trí thức Pháp mà còn là nơi gặp gỡ của trí thức châu Âu nữa. Sau khi Mersenne mất nhà vật lý Thévenot tiếp tục công việc của ông và năm 1666 ông đề nghị chính thức thành lập Viện Hàn Lâm Khoa Học Pháp và được Vua Louis XIV chấp nhận. Đây là Viện Hàn Lâm thứ hai ở châu Âu sau Viện Hàn Lâm Ý (1590). Tiếp theo là các Viện Hàn Lâm Khoa Học Berlin (1700), Madrid (1713), Saint Pétersbourg (1725), Thụy Điển (1729), Bỉ (1772).... Từ đây bắt đầu những năm tháng rực rỡ của Toán học châu Âu và thế giới.

Những nhà Toán học hàng đầu của nhân loại ở cuối thế kỷ XVII

Isaac Newton (1643 - 1727)

Sinh trưởng trong một gia đình thuộc tầng lớp trên của xã hội, nhưng từ bé ông là một thiếu niên bệnh tật yếu đuối, vì vậy ông thường nghĩ ra những trò chơi hợp với sức khỏe của mình. Thiên tài sáng tạo của ông bộc lộ rất sớm từ trong những trò chơi của con trẻ đến việc học hành; ông là một thiếu niên cực kỳ thông minh ít ai sánh kịp. Năm 26 tuổi, ông trở thành Giáo sư

Đại học nổi tiếng. Nữ hoàng Anne nước Anh mời ông làm Chủ tịch Hội Khoa Học Hoàng gia Anh và Chính phủ Pháp mời ông làm Viện sĩ nước ngoài của Viện Hàn Lâm Khoa Học Pháp. Ông nghiên cứu Cơ học và Quang học. Tên tuổi ông trở thành bất tử cùng với những định luật mang tên ông. Về Toán học, ông đã áp dụng Hình học giải tích vào việc nghiên cứu các đường cong bậc hai, bậc ba. Ông đặt nền móng vững chắc cho *Phép tính vi phân, tích phân*. Nhờ thiên tài xuất chúng như vậy, ông có nhiều công cụ toán học để đưa ra *phát hiện vĩ đại của mọi thời đại* là ĐỊNH LUẬT VẠN VẬT HẤP DẪN và nhờ định luật này mà về sau nhiều nhà bác học như Le Verrier (1811-1877), Giám đốc Đài thiên văn Paris, thuần túy bằng tính toán, đã phát hiện ra hành tinh Neptune năm 1846. Các hiện tượng trong thiên nhiên như nhật, nguyệt thực, thủy triều... cũng đều nhờ định luật vạn vật hấp dẫn của Newton mà giải thích và tính toán trước ngày giờ sẽ xảy ra. Ông là người sáng lập ra môn Cơ học thiên thể mà về sau nhà bác học Pháp Laplace đã thừa kế và phát triển. Đời sau khó tìm thấy nhà khoa học nào vĩ đại hơn người công dân nước Anh này.

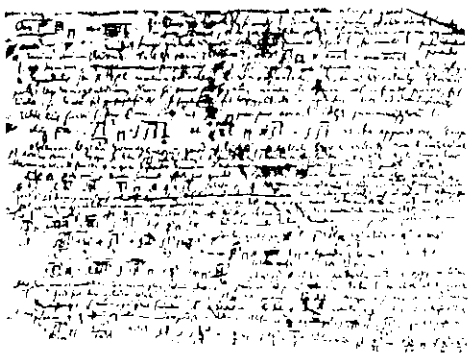

NEWTON

Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646 - 1716)

Ông là người Đức, được suy tôn là *cha đẻ môn Tính vi tích phân*. Ông rất thông minh nhưng từ nhỏ không được theo học Toán mà phải học Luật. Về sau ông tự học Toán. Ông lại là chính khách, nên có dịp qua lại Paris, nhờ đó ông bị thuyết phục đi theo ngành Toán và thành công rất nhanh trong nghiên cứu nên được mời tham gia Viện Hàn Lâm Khoa Học Pháp năm 1699. Năm sau, theo đề nghị của ông, Viện Hàn Lâm Khoa Học Đức được thành lập. Từ năm 1672 ông nghiên cứu máy tính của Pascal, *Lý thuyết tổ hợp,* và quan tâm đến *phép đếm cơ số 2* là một công cụ cần cho *máy tính điện tử* sau này Nhưng vinh quang chính mà người đời sau dành cho ông là việc ông đóng góp to lớn cho sự phát triển của Tính vi tích phân và từ "*vô cùng bé*" cùng những ký hiệu "*dx*", "*dy*".... mà

LEIBNIZ

Một trang viết tay của Leibnitz
ngày 29 tháng 10 năm 1627
trong đó có dấu tích phân



ngày nay ta dùng cũng do ông đặt ra. Người đời đặt bài thơ ca ngợi ông là bậc thầy của Vua Chúa, các nhà hiền triết, và những nhà thông thái!

Dòng họ BERNOULLI

Đây một dòng họ thông thái đã đóng góp cho nhân loại 8 nhà Toán học ở hai thế kỷ XVII và XVIII. Dòng họ này gốc ở Bỉ, sau định cư tại Thụy Sĩ. Xuất sắc nhất dòng họ này Jacob Bernoulli (1654-1705), Johann Bernoulli (1667-1748) và Daniel Bernoulli (1700-1782). Cả ba đều được mời làm Viện sĩ nước ngoài của Viện Hàn Lâm Khoa Học Pháp. Jacob nổi tiếng về Giải tích và tiếp tục phát triển con đường của Leibnitz. Ngoài ra ông còn góp phần hoàn chỉnh môn Xác suất Thống kê. Johann tiếp tục sự nghiệp của anh là Jocob. Daniel là con của Jacob.

JACOB BERNOULLI

JOHANN BERNOULLI

DANIEL BERNOULLI

Ông xuất sắc đặc biệt, được Nga hoàng mời làm Giáo sư Đại học nhưng vì không chịu được khí hậu khắc nghiệt của nước Nga nên trở về Thụy Sĩ dạy thêm Y học, Triết và Sinh vật. Ông cũng được mời làm Giáo sư Đại học Đức.

Daniel chuyên về Giải tích và Thủy động học, Ông nghiên cứu về thủy triều, được giải thưởng Viện Hàn Lâm Pháp. Ông còn quan tâm đến Động học chất khí. Ông là một thiên tài về Tính vi tích phân và dùng nó để khai thác mọi lĩnh vực.

Thế kỷ 18 với các nhà Toán học tài năng biết vận dụng lý thuyết vào thực tiễn

Ba nhà Toán học lớn: Euler, Lagrange, Laplace.

Trong hai thế kỷ XVIII và XIX, Toán học phát triển thật là toàn diện so với 17 thế kỷ trước. Vì vậy chỉ xin nêu một số nhà toán học được *suy tôn*, nhưng thật ra những nhà toán học khác cũng đều đáng ca ngợi cả.

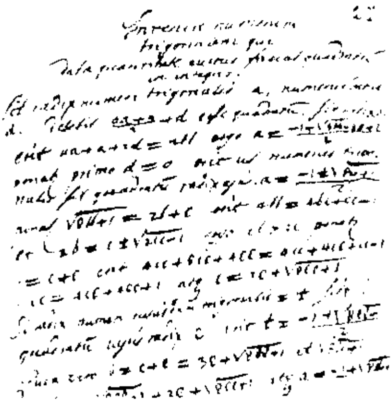
Newton có một người học trò xuất sắc là Mac Laurin tiếp tục sự nghiệp của thầy về Hình học. Năm 1740 Mac Laurin cùng Daniel Bernoulli và Euler đã được Viện Hàn Lâm Khoa Học Pháp tặng giải thưởng về công trình khoa học nghiên cứu hiện tượng triều lên và triều xuống. Thời này Toán học đã có ứng dụng nhiều trong thực tế. Các nhà Toán học Maupertuis (Thụy Sĩ) Clairaut (Pháp) đã lên tận Bắc cực hoặc qua tận Brésil để thực hiện việc đo chiều dài một kinh tuyến. Cramer (Thụy Sĩ) đã tham gia giải bài toán do Viện Hàn Lâm Pháp nêu ra là tại sao quỹ đạo các hành tinh là hình ellipse? Ông được xem là tác giả cách giải hệ phương trình tuyến tính có n ẩn. Tuy nhiên trong tất cả các nhà toán học ở thế kỷ XVIII thì Euler được tôn vinh là nhà toán học nổi tiếng hơn cả.

Leonhard Euler (1707 - 1783)

Ông sinh ra và học ở Thụy Sĩ, làm việc ở Pháp, Đức, Nga và mất tại Saint Pétersbourg (Nga). Thầy dạy toán của ông là Johann Bernoulli. Sau khi ông nổi danh vua Đức Frédéric II mời ông sang Berlin làm Chủ tịch Viện Hàn Lâm Khoa Học Đức cho đến 1766. Về sau theo lời mời của Hoàng hậu nước Nga là Catherine II ông sang làm việc ở Viện Hàn Lâm Pétersbourg cho đến khi qua đời. Ông sở dĩ được hâm mộ khắp châu Âu vì đã đóng góp quá nhiều cho Toán ứng dụng và Toán lý thuyết (thực ra hai cái này chỉ là hai mặt của Toán học mà thôi). Ông quan tâm đến Giải tích, Đại số và đặc biệt là đã đặt được mối liên hệ giữa hàm lượng giác và hàm lũy thừa bằng công thức mang tên ông, *công thức Euler:* $\cos\theta + i.\sin\theta = e^{i\theta}$.

Ông đóng góp nhiều cho Giải tích. Ông nghiên cứu về dây rung và nguyên nhân của gió về phương diện Toán học. Nhờ đó mà ông đặt cơ sở cho Phương trình vi phân đạo hàm riêng. Ông còn làm giàu cho kiến thức của nhân loại về Cơ học vật rắn, Thủy động học. Ông được 5 lần giải thưởng của Viện Hàn Lâm Paris về các công trình *"Chuyển động của Hành tinh và Sao chổi"*, *"Chuyển động của Mặt Trăng"*. Ông còn được thưởng 300 Bảng Anh vàng vì đã đo chính xác chiều dài kinh tuyến Trái Đất. Ngoài ra ông còn được giải thưởng vì đã lý giải toán học hiện tượng lên xuống của thủy triều. Ông còn viết sách về *"Nguyên tắc pháo binh"* về *"Đóng và điều khiển tàu thủy"*. Hình học thuần túy đối với ông chỉ là trò giải trí nhưng ông đã cho lời giải tuyệt hay về *một đường tròn tiếp xúc với 3 đường tròn cho trước* và *một hình cầu tiếp xúc với 4 hình cầu*. Ông còn có khiếu về âm nhạc và viết *"Lý thuyết toán học cho âm nhạc theo quan điểm dây rung"*. Ông đặc biệt giỏi về tính toán. Cuối đời, ông bị mù hai mắt nhưng khả năng tính toán không hề sút giảm.

EULER



Một trang viết tay của Euler

Joseph Louis Lagrange (1736-1813)

Cùng với ngôi sao sáng chói là Euler làm rạng rỡ cho thế kỷ XVIII về những phát minh toán học và khoa học, thay đổi cơ bản tư tưởng triết học của nhân loại về thế giới quan, nhân sinh quan, còn có những nhà toán học khác mà đời sau mãi mãi nhớ ơn như người công dân Pháp vĩ đại Joseph Louis Lagrange chẳng hạn.

Ông thuộc dòng họ quý tộc ba đời gốc Ý bị phá sản nhưng ông vẫn luôn luôn xem mình là người Pháp, sống và cống hiến cuộc đời khoa học cho nước Pháp. Lagrange được phong làm Giáo sư Toán học Trường Pháo binh năm ông mới 18 tuổi và từ đó trở đi ông không chọn con đường nào khác là con đường đi sâu nghiên cứu Giải tích Toán học. Ông được Euler đánh giá cao nên từ năm 1759 (lúc mới 23 tuổi) Euler mời ông vào Viện Hàn Lâm Khoa Học Đức. Sau khi Euler được mời sang Nga, chính Euler đã tiến cử ông thay Euler điều khiển Viện Hàn Lâm Khoa Học Đức. Ông quan tâm đến Phương trình vi phân, Thiên văn và liên tiếp các năm 1766, 1772, 1776, 1778 ông được Viện Hàn Lâm Khoa Học Paris tặng giải thưởng và từ năm 1772 ông chính thức được bầu vào Viện Hàn Lâm Khoa Học Pháp.

Sau khi vua Đức Frédéric II mất, theo lời mời của vua Pháp Louis XVI

LAGRANGE

ông về định cư tại Paris và năm 1787 ông chính thức là công dân nước Pháp. Để tỏ lòng kính trọng ông, Hoàng hậu Marie Antoinette mời ông vào ở Louvres. Trước và sau ông chưa có ai được vinh dự đó. Năm 1794, nước Pháp mở trường Đại học Bách khoa Paris, ông đảm nhiệm giảng dạy môn Giải tích. Ông có công với nền toán học thế giới vì đã đóng góp vào hầu hết lĩnh vực của Giải tích. Ông còn nghiên cứu và góp phần vào thành tựu của Cơ học giải tích, Hàm giải tích, Tính biến phân, Đại số. Ông còn chứng minh việc *giải phương trình đại số bậc 5 theo lối cũ là không được.* Trong *Phương trình vi phân thường,* ông đã sáng tạo ra phương pháp *giải phương trình tuyến tính.* Trong *Phương trình vi phân đạo hàm riêng*, ông cũng có nhiều đóng góp to lớn. Về Cơ học thiên thể, ông được Viện Hàn Lâm Paris tặng giải thưởng về công trình nghiên cứu *"Hành tinh Jupiter"* (1766) về *"Mặt Trăng"* (1776) về *"Các nhiễu động của Sao Chổi"* (1778).

Đời sau đã xuất bản toàn bộ công trình của ông dưới tên LAGRANGE TOÀN TẬP gồm 14 TẬP; mỗi tập dày 700 trang và việc xuất bản này phải kéo dài từ năm 1867 (54 năm sau khi ông mất) cho đến năm 1892.

Pierre Simon Laplace (1749 - 1827)

Cùng với Euler và Lagrange, Laplace đã làm sáng danh thế kỷ XVIII bằng hai công trình *"Cơ học thiên thể"* và *"Lý thuyết giải tích về Xác suất"*.

Xuất thân từ một gia đình nông dân Pháp nghèo, ông xin vào học Trường Quân sự quê nhà nhưng nhờ năng khiếu đặc biệt về toán ông được chú ý, nhưng điều quan trọng là ông được nhà toán học D' Alembert nâng đỡ nên năm 24 tuổi ông được mời vào Viện Hàn Lâm Khoa Học Paris. Năm 1784, khi làm Giám khảo Trường Pháo binh chính ông đã tuyển anh thanh niên Bonaparte vào học và về sau anh thanh niên này đã trở thành Hoàng đế Napoléon Bonaparte nổi tiếng trong lịch sử nước Pháp và thế giới. Có lẽ vì thế mà khi đã trở thành "bá chủ thiên hạ" Hoàng đế Napoléon đã dành cho ông nhiều ân sủng, quyền cao chức trọng. Nhưng những thứ đó không hề hấp dẫn Laplace một tí nào, hoàn toàn xa lạ với niềm say mê và khát khao nghiên cứu Toán học của ông. Cuối cùng Napoléon đành chiều ông và cho phép ông "từ quan" để quay về với con đường Toán học, cùng với Lagrange chăm lo cho trường Đại học Bách khoa Paris, lò đào tạo nhân tài ứng dụng của nước Pháp. Cuộc đời ông là những đóng góp cho sự hiện đại hóa của Giải tích Toán học. Công trình nghiên cứu của ông về *Lý thuyết phương trình* thật to lớn, đặc biệt với công trình *"Cơ học thiên thể"* ông được xem như Newton của nước Pháp. Sau này, năm 1829 (16 năm sau khi ông qua đời) đọc diễn văn tại Viện Hàn Lâm Khoa Học Pháp, nhà toán học Fourier nói: *"Laplace sinh ra là để đào sâu và đẩy lùi mọi giới hạn cản trở trí tuệ của con người, để giải những gì mà người ta tưởng là không giải nổi".*

NHỮNG NHÀ TOÁN HỌC LỚN KHÁC CỦA THẾ KỶ XVIII

Brook Taylor (1685-1731) người Anh, quê ở Edmonton, tên tuổi ông gắn liền với việc khai triển một hàm thành chuỗi

Moreau Maupertuis (1698-1759) người Pháp, quê ở Saint Malo, có công lên địa cực để đo một đoạn kinh tuyến năm 1736.

Gaspard Monge (1746-1818) người Pháp, đặt nền móng đầu tiên cho môn Hình học họa hình

Adrien Marie Legendre (1752-1833) người Pháp, sinh ở Paris, là một nhà toán học chuyên về Số học và Giải tích.

Jean Baptiste Joseph de Fourier (1768-1830) người Pháp, quý tộc, sinh ở Auxerre (Pháp). Ông đã phát minh ra chuỗi lượng giác mang tên ông - chuỗi Fourier - một công cụ toán học cực kỳ quan trọng đối với nhiều ngành khoa học ứng dụng.

THẾ KỶ XIX VÀ THỜI KỲ CẬN ĐẠI

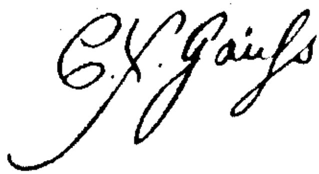
Từ thế kỷ XIX trở đi, Toán học thế giới đã phát triển cực kỳ mạnh mẽ và toàn diện. Ở thời kỳ này xuất hiện rất nhiều nhà toán học chẳng những đóng góp nhiều về mặt lý thuyết mà còn thúc đẩy cho kỹ thuật tiến những bước dài nữa. Nổi bật nhất là Gauss và Cauchy nhưng không thể không chú ý đến nhiều nhà Toán học lỗi lạc khác nữa.

Carl Friedrich GAUSS (1777-1855)

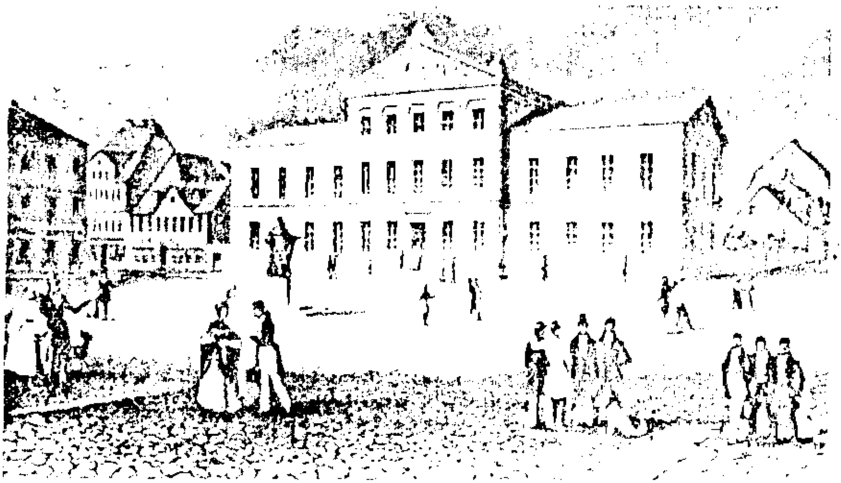
Ông là người Đức, con một người thợ nghèo, nhưng từ năm lên 3 tuổi đã bộc lộ thiên tài toán học đặc biệt, nên được Quận công vùng Brunswick nuôi ăn học. Càng lớn lên ông càng thể hiện năng khiếu toán học dị thường. Ông đỗ Tiến sĩ năm 22 tuổi do đưa ra một chứng minh lỗi lạc về *Lý thuyết phương trình*. Ông không thích làm Giáo sư Đại học mà nhận chức Giám đốc Đài thiên văn Gottingen năm 1807. Ông có cách giải độc đáo phương trình $x^{2^n+1} = 1$ khi $2^n + 1$ là số nguyên tố.

Từ đó ông đưa ra ý kiến khẳng định dựng một đa giác đều $2^n + 1$ cạnh nội tiếp trong hình tròn nếu $2^n + 1$ là *số nguyên tố;*

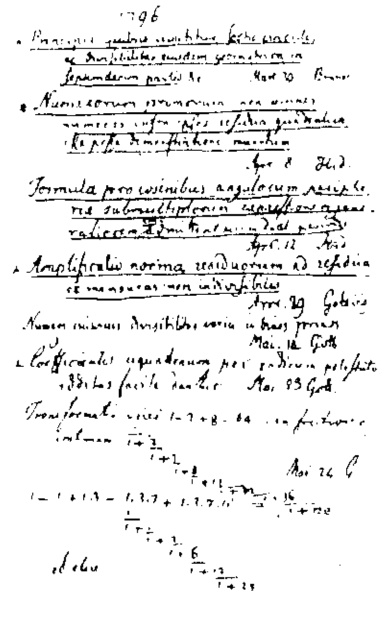
với n = 4 thì đa giác đều có 17 cạnh mà ngày nay giới toán học không ngớt lời ca ngợi. Về Giải tích Toán học ông đóng góp nhiều vào *Phép tính biến thiên*. Ông nhận được nhiều giải thưởng lớn của Viện Hàn Lâm. Ông là nhà toán học rất say mê tính toán cụ thể. Ông đã công bố nhiều công trình về tính toán như *"Luật xác suất của sai số", "Sai số ngẫu nhiên", "Sai số trung bình tuyệt đối", "Sai số trung bình toàn phương"*....là những công trình ngày nay ta dùng trong *Đo lường chính xác*. Ngoài ra ông còn đóng góp nhiều công trình nghiên cứu về *Hiện tượng mao dẫn, Quy luật đường đi của ánh sáng qua một hệ thấu kính dày*. Toàn bộ tác phẩm của ông được xuất bản thành 7 tập kéo dài từ năm 1863 đến năm 1871; về sau có bổ sung thêm những công trình mà sinh thời ông chưa kịp công bố.



GAUSS VÀ CHỮ KÝ CỦA GAUSS



TRƯỜNG ĐẠI HỌC GOTTINGEN, NƠI GAUSS LÀM VIỆC GẦN 50 NĂM



Một trang viết tay trong công trình khoa học của GAUSS (30 - III - 1796)

Augustin CAUCHY (1789 - 1857)

Ông xuất thân từ một gia đình khá giả ở vùng Normandie (Pháp). Ông vốn rất giỏi về văn chương nhưng năm 16 tuổi ông thi vào Đại học Bách khoa Paris. Ông đỗ đầu lúc ra trường nhưng vì say mê Toán học và do có tài đặc biệt nên ông được bổ nhiệm làm Giáo sư môn Toán-Cơ Trường Đại học Bách khoa Paris. Ông là nhà toán học Pháp có nhiều đóng góp cho Toán học thế giới, ở ngành nào ông cũng có công lớn, đặc biệt về *Giải tích Toán học*. Công trình của ông nhiều đến nỗi muốn xuất bản toàn bộ phải dùng đến 27 tập lớn! Ông còn đặt nền móng cho *Lý thuyết đàn hồi các vật rắn dùng để nghiên cứu sức bền vật liệu.* Ông còn được giải thưởng về *Truyền sóng trên mặt chất lỏng.* Ông còn phát minh *Cách tính mới về chuyển động của các hành tinh.* Ông là người đã chứng minh một cách cụ thể sức mạnh không có giới hạn của Toán học để nghiên cứu thiên nhiên, ví dụ *Sự truyền ánh sáng, sự khúc xạ, sự phản xạ....*

CAUCHY

Niels Henrik ABEL (1802-1829)

Trong lịch sử Toán học thế giới ít có nhà toán học nào mà cuộc đời tài ba đầy gian truân như Abel. Ông người Na Uy, cha là Mục sư Tin lành mất sớm, để lại nhiều con còn bé phải nuôi. Abel mãi đến năm 16 tuổi mới bắt đầu học toán nhưng đã tỏ ra đặc biệt có năng khiếu nên ông học qua Đại học rất dễ dàng nhờ học bổng của Nhà nước và do Thầy học của Abel xin hộ. Năm 1820 ông bắt đầu chứng minh rằng *phương trình bậc 5 không giải được bằng căn thức*, nhờ đó năm 1825 ông được học bổng qua Berlin nhân đó làm quen với Crelle và gợi ý Crelle thành lập Tạp chí Toán học để làm nơi giao lưu với các nhà toán học trên thế giới thời bấy giờ và Abel là một cộng tác viên xuất sắc của tờ báo. Giáo trình *"Giải tích Toán học"* của Cauchy đã làm ông say mê. ông qua Paris là nơi mà ông cho là *"Trung tâm của Toán học thế giới"* thời bấy giờ và công bố công trình *"Về tính chất tổng quát của một số lớn số siêu việt"* nhưng ít được chú ý tới. Thất vọng, ông quay về quê hương, sống trong nghèo khổ.

ABEL

JACOBI, bạn thân của Abel

Tuy vậy ông vẫn phát minh nhiều công trình về Giải tích. Các nhà toán học thế giới thời bấy giờ như Legendre (Pháp), Jacobi (Đức) đã thấy ở ông một thiên tài toán học nên thỉnh cầu vua Thụy Điển giúp. Kết quả không được như mong muốn. Abel sống trong nghèo khổ, bệnh tật, mắc bệnh đau ngực. Jacobi, trẻ hơn Abel 2 tuổi rất phục Abel nên tìm mọi cách xin bằng được một chỗ làm xứng đáng cho Abel. Nhưng sức khoẻ Abel tàn tạ dần, cuối cùng Abel mất năm 27 tuổi. Sau khi ông mất, Viện Hàn Lâm Khoa Học Pháp mới tặng ông giải thưởng lớn và người đi nhận là mẹ ông, và bạn thân nhất của ông lúc ông còn sống, nhà Toán học người Đức Jacobi. Bốn năm sau, vua Thụy Điển cho xuất bản toàn bộ công trình của Abel. Tuy ông còn rất trẻ, chưa đầy 27 tuổi, nhưng các nhà Toán học đời sau xếp ông vào loại bậc thầy như Cauchy và Gauss là *"những người đã làm cho Toán học trở thành một thứ Triết học trong sáng với logique chặt chẽ, suy diễn chính xác không thể chê vào đâu được"* (trích diễn văn của nhà Toán học Pháp Emile Picard đọc nhân dịp kỷ niệm 100 năm ngày mất của Abel)

Nicolai Ivanovitch LOBATCHEVSKI (1793-1856)

Ông là người Nga, con một công chức nhỏ. Ông mồ côi cha sớm. Lúc nhỏ, ông học rất giỏi nên được vào Đại học Kazan lúc mới 14 tuổi. Năm 23 tuổi ông được phong làm Giáo sư Toán học trường Đại học Kazan, và năm 27 tuổi ông được mời làm Viện sĩ Viện Hàn Lâm Khoa Học Kazan. Ông thường làm việc hết mình không nề hà bất cứ một công việc gì từ viện trưởng Đại học cho đến nhân viên thư viện hay phòng thí nghiệm. Ông được Gauss mời làm Viện sĩ nước ngoài Viện Hàn Lâm Khoa

Học Gottingen. Mặc dù ông được giới bác học nước ngoài tôn trọng nhưng lại bị chính quyền địa phương ghét bỏ, vì vậy ông sớm bị cách chức. Sức khoẻ ông bị giảm sút dần do làm việc quá sức.

Nicolai Ivanovitch
LOBATCHEVSKI

Cuối cùng ông bị mù vĩnh viễn, phải đọc cho người khác chép quyển *"Pangéométrie"* nổi tiếng trong lịch sử Hình học thế giới. Từ năm 1815 ông đeo đuổi phát minh hình học mới *xây dựng trên cơ sở phủ định tiên đề 5 của Euclide*. Các nhà toán học đương thời chưa hiểu nổi ông nhưng ông vẫn đeo đuổi phát minh tới cùng. Cho đến năm 1840, Gauss mới công nhận sự thành công của phát minh của ông và từ đó, Gauss cũng như các nhà toán học thế giới gọi hình học của ông là *Hình học ảo*, nhưng ngày nay *Hình học Lobatchevski* rất thực vì trong những chuyến du hành vũ trụ dài ngày, ngày nay cũng như tương lai, việc tính toán phải dựa trên cơ sở không gian Lobatchevski. Có thể nói nôm na là hình học Lobatchevski dùng trong không gian rộng lớn (vũ trụ) còn hình học Euclide dùng trong không gian hẹp. Tuy vậy Hình học Lobatchevski và Hình học Euclide không đối đầu nhau mà là bổ sung cho nhau. Toàn bộ suy nghĩ sáng tạo của ông được đúc kết ở những tác phẩm sau:

– *Cơ sở Hình học (1830)*

– *Hình học ảo (1837)*

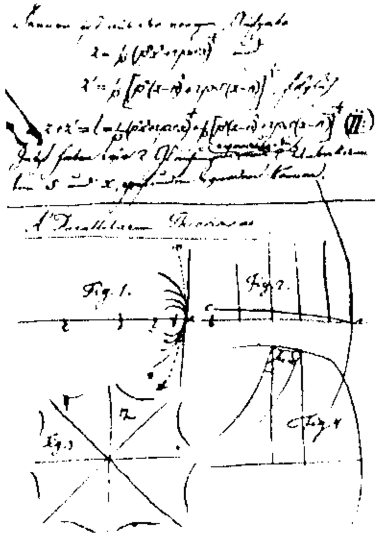
– *Cơ sở mới của Hình học (1838)*

– *Khảo cứu mới về lý thuyết đường song song (1840)*

– *Pangéométrie (1855)*

Janos BOLYAI (1802 - 1860)

Ông người Hung. Cha ông là Giáo sư Toán học. Lên 9 tuổi, ông vẫn chưa biết làm tính cộng nhưng năm 13 tuổi đã giỏi nổi tiếng về tính tích phân và cơ học. Mặc dù không biết một tí gì về công trình của Lobatchevski nhưng Bolyai đã có những suy nghĩ và phát hiện theo hướng Hình học phi Euclide. Đời sau, khi nhắc đến Lobatchevski bao giờ cũng nhắc đến ông, mặc dù ông chưa đạt đến thành công như Lobatchevski.



Một trang viết tay trong công trình nghiên cứu về Hình học phi Euclide của Bolyai

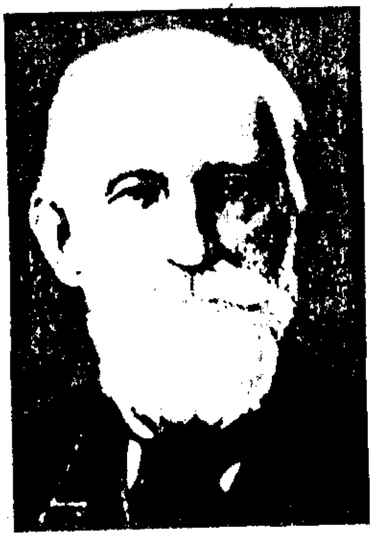
Janos BOLYAI

Toán học phát triển mạnh ở thế kỷ 19, đặc biệt là ở cuối thế kỷ. Nhờ đó mà khoa học kỹ thuật cũng phát triển theo, toàn diện và khắp nơi. Sau đây xin nêu thêm tên một số nhà Toán học tên tuổi nữa:

P.G. Lejeune DIRICHLET (1805-1859) người Đức, chuyên về Lý thuyết Số và Chuỗi lượng giác

Friederich Wilhelm BESSEL (1784-1846) nhà thiên văn Đức

Evariste GALOIS (1811-1832)
nhà toán học Pháp nổi tiếng
về Đại số



Pafnuti Lvovich CHEBYSHEF
(1821-1894) nhà Toán học Nga

Berhard RIEMANN
(1826-1866)
nhà toán học Đức
chuyên về
Lý thuyết hàm phức,
Hình học phi Euclide.

Leopold KRONECKER (1823-1891)

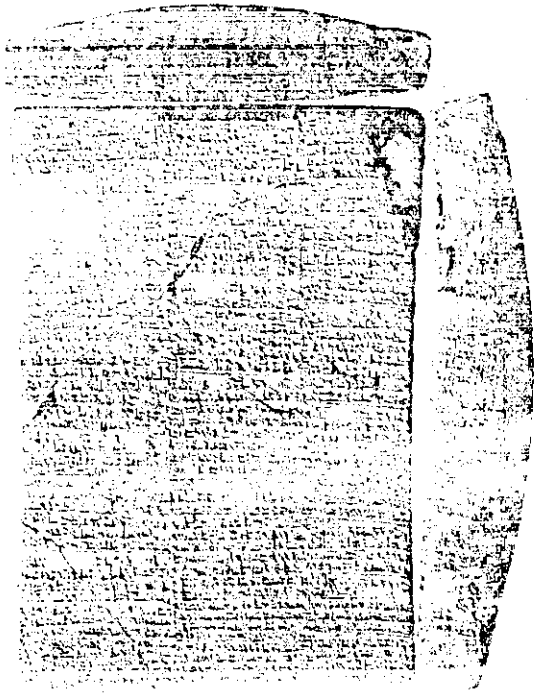
Arthur CAYLEY (1821-1895)
nhà toán học Anh chuyên về
Lý thuyết ma trận

Sonya KOVALEVSKI
(1850-1891)
nhà nữ toán học Nga
chuyên về Giải tích

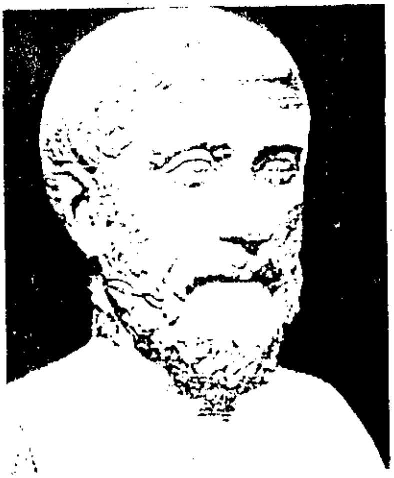
Sophus LIE (1842-1899)
Nhà toán học Na Uy chuyên về Lý thuyết nhóm.

Karl WEIERSTRASS
(1815-1897) Nhà toán học Đức, chuyên về
Giải tích Toán học

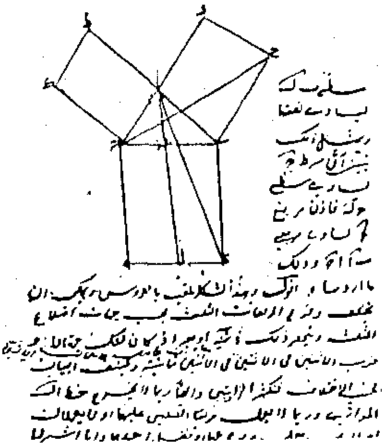
NHỮNG TRANG PHỤ LỤC



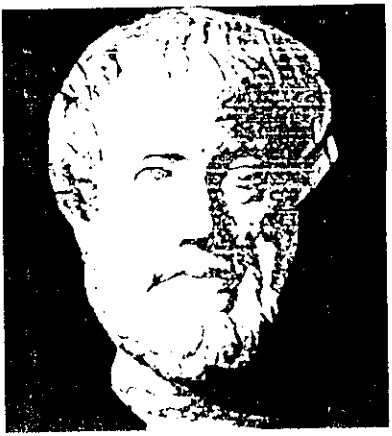
Di tích thời Babylone có chứa 16 bài toán và lời giải



PYTHAGORE



Định lý Pythagore tìm thấy trong một bản chép tay của người Ả Rập ở thế kỷ 14



ARISTOTE (384-322 trước CN)

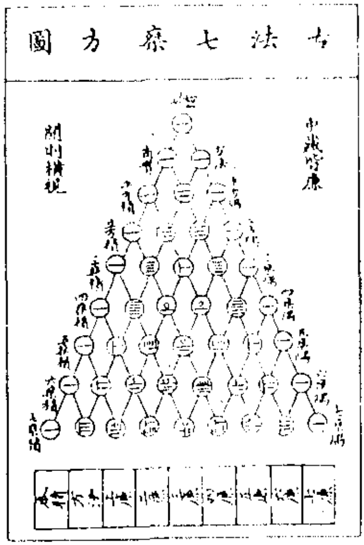
ALEXANDRE ĐẠI ĐẾ
(356-323 trước CN)

EUCLIDE (thế kỷ III trước CN)

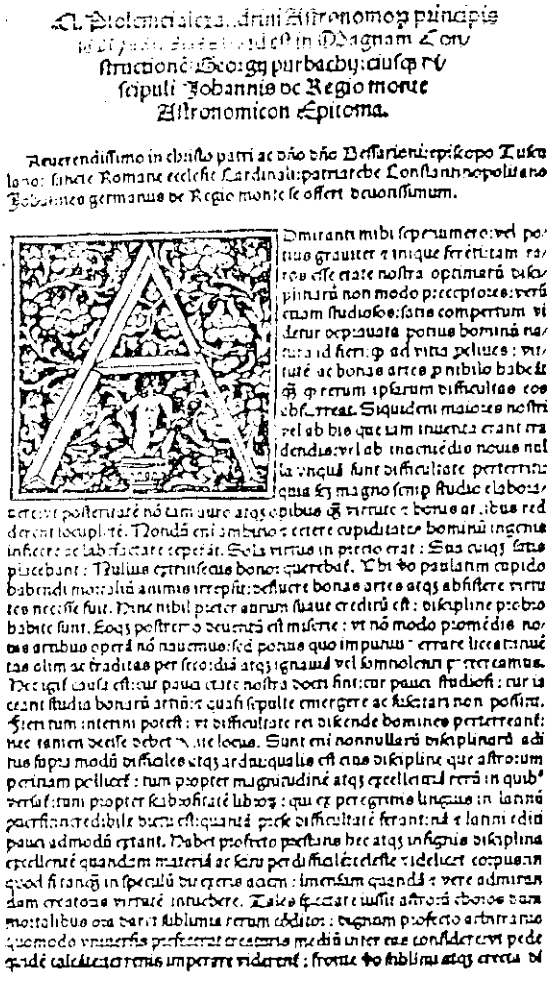
一	=	1
二	=	2
三	=	3
四	=	4
五	=	5
六	=	6
七	=	7
八	=	8
九	=	9
十	=	10
百	=	100 (10^2)
千	=	1000 (10^3)

Hệ thống đếm của người Trung Quốc

ARCHIMEDE (287-212 trước CN)

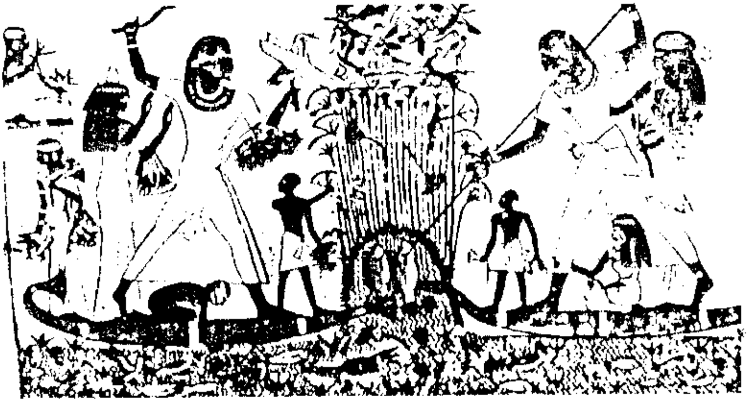


"Tam giác Pascal" trong sách toán của Trung Quốc năm 1303 (trước khi Pascal ra đời)

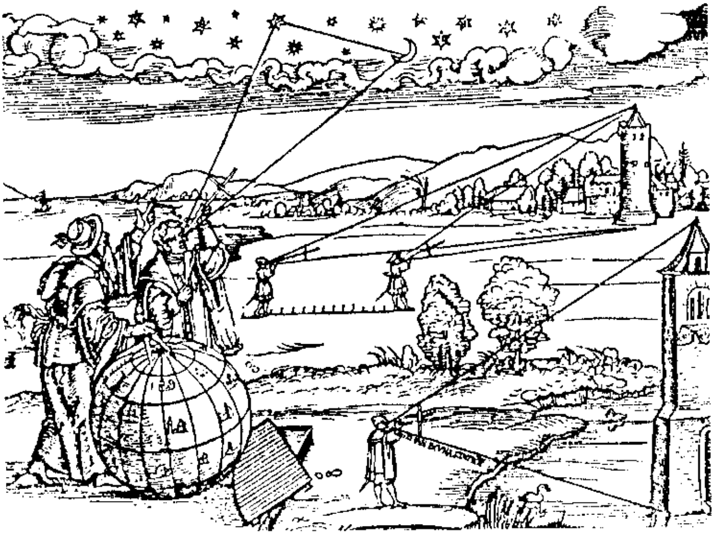

Ptolemei alexandrini Astronomorum principis ... in Magnam Constructionē Georgij purbachij: eiusq; discipuli Johannis de Regio monte Astronomicon Epitoma.

Reuerendissimo in christo patri ac dño dño Bessarioni: episcopo Tusculano: sancte Romane ecclesie Cardinali: patriarche Constantinopolitano Johannes germanus de Regio monte se offert deuotissimum.

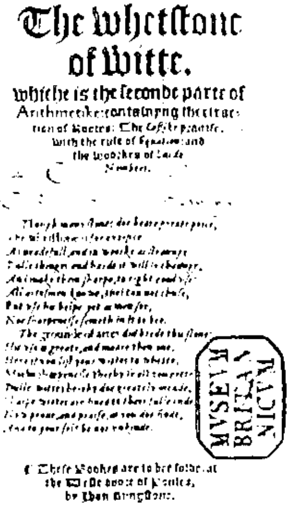
REGIOMONTANUS: Một trang của Almageste, lần xuất bản thứ nhất năm 1496



Trên papyrus thời Ai Cập cổ đại, người ta thấy tranh vẽ cảnh câu cá, bắt chim

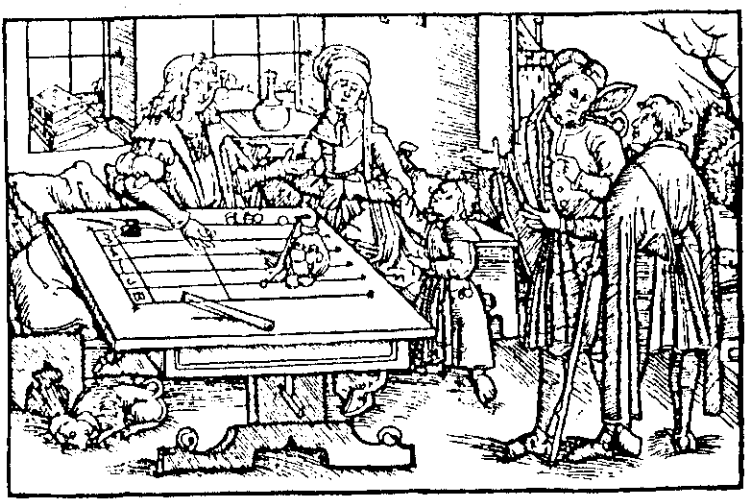


Minh họa cảnh nghiên cứu vận dụng Toán vào thực tế ở châu Âu thế kỷ 15

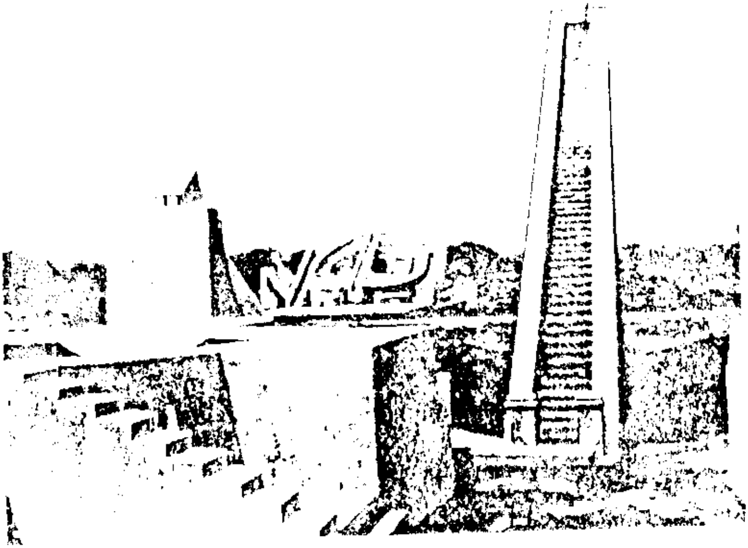


Một trang sách "Đại số" của
Robert Record năm 1557

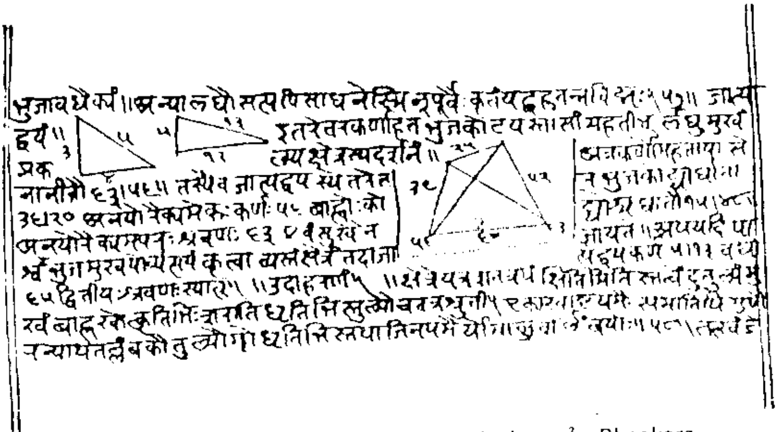
Bìa sách dạy tính toán trên bàn tính
của Adams Ries năm 1550.



Bản khắc gỗ thế kỷ thứ 16 tả cảnh tính toán buôn bán.



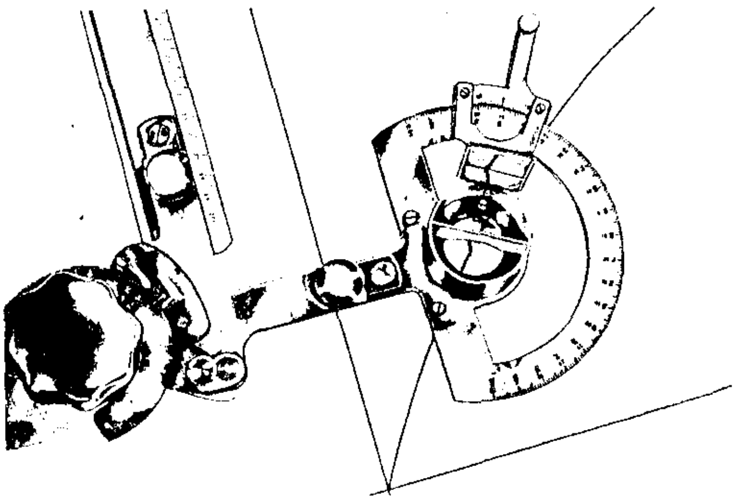
Đài thiên văn Ấn Độ (Delhi) ở thế kỷ 17

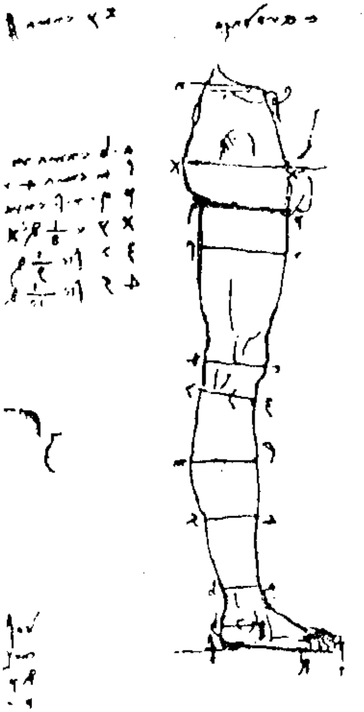


Một trang viết tay trong công trình toán học của Bhaskara

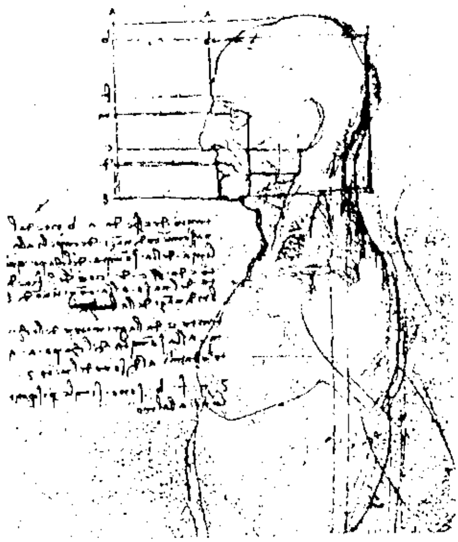
Một dụng cụ đo vị trí của Sao và chiều cao của nó đến đường chân trời (do người Ả Rập sáng chế ở thế kỷ 15)

Dụng cụ để xác định tang và pháp tuyến với một đường cong cho trước





Phác họa của Léonard de Vinci



J. Regiomontanus

Simon Stevin

Albrech Dürer

Niccolo Tartaglia

Jérôme Cardan

Jost Bürgi

Luca Pacioli (1445-1514)

Chương 13.
THẾ KỶ CỦA NHỮNG PHÁT MINH VĨ ĐẠI: THẾ KỶ XX

Thế kỷ XX là thế kỷ của những phát minh vĩ đại, không riêng gì trong lĩnh vực Toán học. Vì vậy chúng tôi đề nghị biên soạn riêng một bộ *Lịch sử Toán học của thế kỷ XX với sự công tác của một tập thể đông đảo các đồng nghiệp trong nước và ngoài nước và trong bộ này có một phần dành cho Toán học Việt Nam.*

Thế kỷ XX đã làm thay đổi các phong cách nghiên cứu xưa nay của các nhà toán học. Trước đây, khi Toán học còn phát triển ở mức độ vừa phải, một nhà toán học có thể nghiên cứu đồng thời nhiều lĩnh vực khác nhau. Cuối thế kỷ XIX, đầu thế kỷ XX trên thế giới có sự giao lưu mạnh mẽ, hầu như ở nước nào cũng có người nghiên cứu Toán học, vì vậy ngày càng có ít người cùng một lúc nghiên cứu nhiều lĩnh vực xa nhau. Đã đến lúc người ta tạm chia Toán học ra nhiều ngành và đội ngũ Toán học thế giới cũng tùy theo sở trường và có thể do nhu cầu, mà tách ra theo chuyên môn. Bây giờ thì không còn ai nói Toán lý thuyết và Toán ứng dụng nữa vì không có lý thuyết nào mà không có ứng dụng và ngược lại.

Dù sao thì để có cái nhìn liên tục, chúng tôi xin giới thiệu một số nhà toán học ở thế kỷ XX mà tên tuổi khá quen thuộc với các bạn sinh viên:

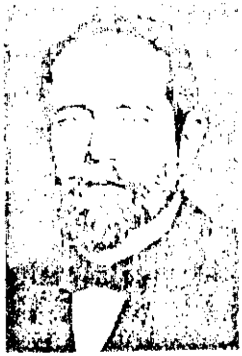
Richard DEDEKIND
(1831-1916)

George STOKES
(1819-1903)

Georg FROBENIUS
(1849-1917)

Georg CANTOR
(1845-1918)

Henri POINCARÉ
(1854-1912)



Félix KLEIN
(1849-1925)

David HILBERT
(1862-1943)

Elie CARTAN
(1869-1951)

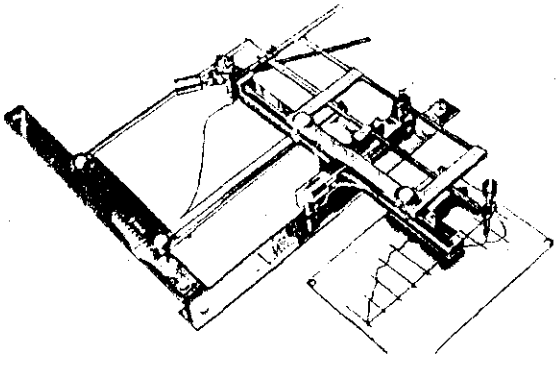
Henri LEBESGUE
(1875-1941)

J.Von NEUMANN
(1903-1957)

Hermann WEYL
(1885-1955)

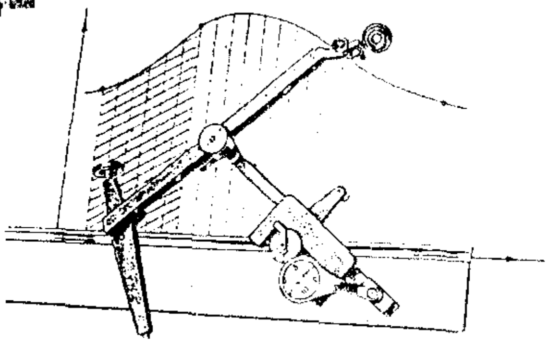
J.S.HADAMARD
(1865-1963)

Stefan BANACH
(1892-1945)

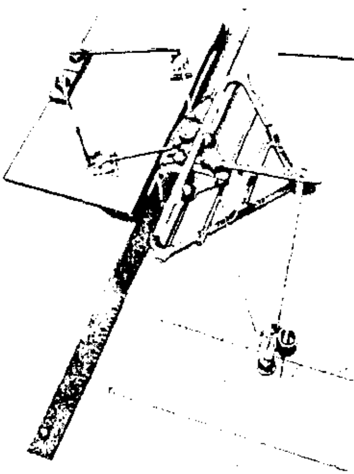


Dụng cụ vẽ nghiệm phương trình vi phân

Emmy NOETHER (1882-1935), nhà nữ toán học Đức chuyên về Đại số.



Dụng cụ để tính tích phân của một hàm mà đồ thị đã cho trước



Dụng cụ để xác định chuỗi Fourier của một hàm tuần hoàn

SÁCH THAM KHẢO CHÍNH

1. ***Petite encyclopédie des Mathémathiques***. Publiée originellement sous le titre: Kleine Enzyklopadie der Mathematik. Première Edition Francaise 1980

2. ***Abrégé d'histoire des Mathématiques 1700-1900.*** Tác giả Jean Dieudonné Hermann. (1980)

3. ***Histoire des Mathématiques.*** Tác giả Jean-Paul Collette Editions du Renouveau Pédagogique Inc.(1973) 8955, Bl Saint Laurent, Montréal (Québec) H2N 1M6

4. ***Triết học trong Toán học.*** Tác giả: Nguyễn Cang. Bài giảng cho sinh viên Cao học Triết 1993, 1996. Đại học Tổng hợp tp Hồ Chí Minh.

MỤC LỤC