https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

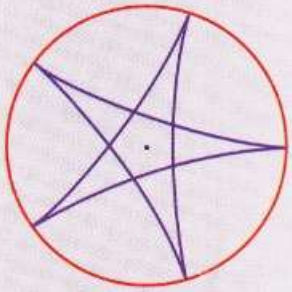
BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO * HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Toán học & Tuổi trẻ

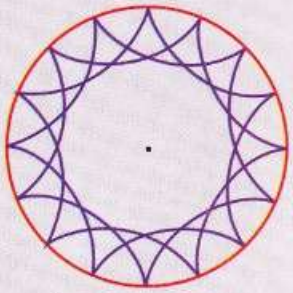
2
2004

SỐ 320 - NĂM THỨ 41 - TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG

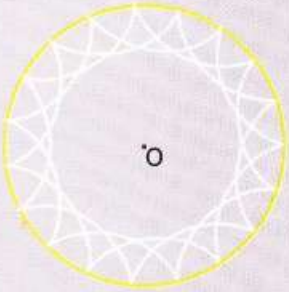
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ



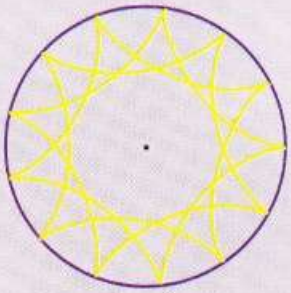
H 6: k = 5/3



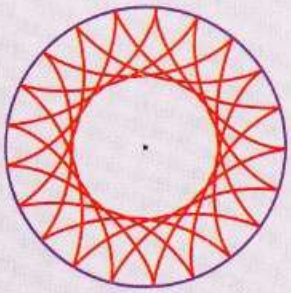
H 7: k = 16/3



H 10: k = 19/3



H 8: k = 13/3



H 9: k = 21/5

- ĐƯỜNG CONG HY - PÔ - XY - CLÔ - IT
- TOÁN HỌC VÀ CƠ CẤU CÁC LOẠI ĐỒNG TIỀN
- KẾT QUẢ CUỘC THI MỪNG XUÂN GIÁP THÂN
- GIẢI ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA NĂM HỌC 2002 - 2003

ĐƯỜNG CONG HY-PÔ-XY-CLÔ-IT

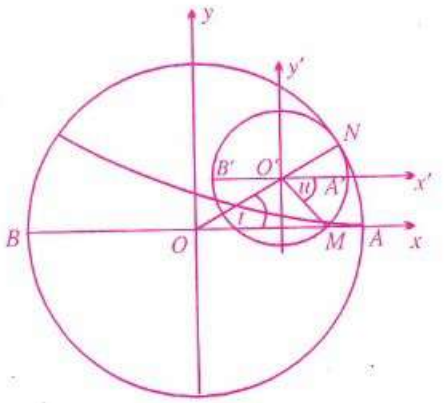
TRẦN ĐÌNH VIỆN
(*Hà Nội*)

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ số 316 (10/2003) đã giới thiệu đường cong Ê–pi–xy–clô–it. Trong số này chúng tôi xin giới thiệu một đường cong có cách xây dựng tương tự : đường cong Hy–pô–xy–clô–it.

1. Định nghĩa. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đề–các vuông góc Oxy cho đường tròn cố định $\mathscr{C}$ tâm O bán kính $OA = a$. Xét đường tròn $\mathscr{C}'$ tâm O' bán kính $O'A' = b$ $(b < a)$ tiếp xúc trong với đường tròn $\mathscr{C}$ và M là một điểm xác định trên đường tròn $\mathscr{C}'$.

Khi *đường tròn $\mathscr{C}'$ lăn không trượt bên trong đường tròn $\mathscr{C}$ mà $\mathscr{C}'$ luôn tiếp xúc với $\mathscr{C}$* thì quỹ đạo (đường đi) của điểm M vạch nên một đường cong, gọi là *đường Hy–pô–xy–clô–it*.

2. Phương trình. Giả sử tại thời điểm ban đầu hai đường tròn $\mathscr{C}'$ và $\mathscr{C}$ tiếp xúc trong tại A $(a\ ;\ 0)$ và M trùng với A. Khi $\mathscr{C}'$ lăn không trượt trên $\mathscr{C}$ (bên trong $\mathscr{C}$) đến vị trí có tiếp điểm N thuộc OO', lúc đó góc $(OA, ON) = t$ (radian) (tính cả số vòng quay). Tại vị trí này lập hệ trục tọa độ $O'x'y'$ bằng cách cho hệ trục tọa độ Oxy tịnh tiến theo vec–tơ $\overrightarrow{OO'}$. Đường tròn $\mathscr{C}'$ cắt tia $O'x'$ tại A' và cắt tia đối của $O'x'$ tại B' (h. 1). Đặt góc $(O'M, O'N) = v$ (radian) và góc $(O'A', O'M) = u$ (radian).



Hình 1

Ta có $(O'A', O'N) + (O'N, O'M) + (O'M, O'A') = 2m\pi$ $(m \in Z)$

và $(O'A', O'N) = (OA, ON) + 2n\pi$ $(n \in Z)$

nên $(OA, ON) + (O'N, O'M) + (O'M, O'A') = 2s\pi$ $(s \in Z)$ hay $t - v - u = 2s\pi$ (1)

Vì $\mathscr{C}'$ lăn không trượt trên $\mathscr{C}$ nên độ dài $d(\overset{\frown}{MN})$ của cung $\overset{\frown}{MN}$ bằng độ dài $d(\overset{\frown}{AN})$ của cung $\overset{\frown}{AN}$ *(tính cả số vòng quay của v, t)*, nên $bv = d(\overset{\frown}{MN}) = d(\overset{\frown}{AN}) = at \Rightarrow v = \dfrac{a}{b}t$. Đặt $k = \dfrac{a}{b}$ được $v = kt$ (2) với $k > 1$. Từ (1) và (2) tính được $u = (1 - k)t - 2s\pi$ (3)

Ta có $\overrightarrow{OO'} = ((a-b)\cos t\ ;\ (a-b)\sin t)$

Từ (3) có $\overrightarrow{O'M} = (b\cos u\ ;\ b\sin u)$

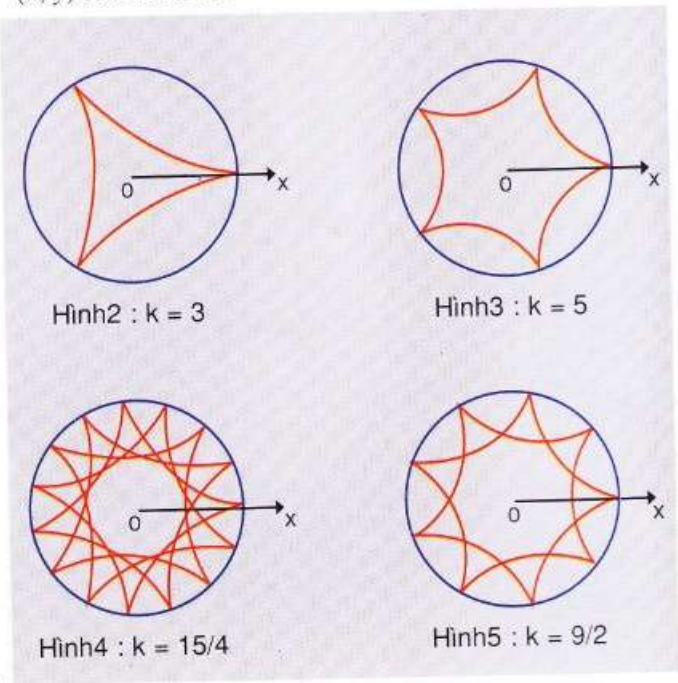
$= (b\cos(k-1)t\ ;\ -b\sin(k-1)t)$

Gọi (x, y) là tọa độ của M trong hệ tọa độ Oxy thì $\overrightarrow{OM} = (x, y)$. Từ hệ thức vec–tơ $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$ suy ra được phương trình theo tham số t của đường cong Hy–pô–xy–clô–it là :

$$(\mathscr{H}) : \begin{cases} x = (a-b)\cos t + b\cos(k-1)t \\ y = (a-b)\sin t - b\sin(k-1)t \end{cases} \quad (4)$$

với $t \in R$, $k = \dfrac{a}{b} > 1$.

Khi vẽ đường cong $\mathscr{H}$ dựa vào hệ thức (4) ứng với mỗi giá trị của t ta xác định được tọa độ (x, y) của điểm M.



3) Một số dạng đường cong Hy–pô–xy–clô–it

Dựa vào phương trình (4) ta thấy đường cong $\mathscr{H}$ nhận trục hoành làm trục đối xứng và hình dạng của $\mathscr{H}$ phụ thuộc vào hệ số k $(k > 1)$.

• Nếu $k = 2$ thì $\mathscr{H}$ là đường kính AB của đường tròn $\mathscr{C}$.

(Xem tiếp trang 2)

ỨNG DỤNG CỦA MỘT HỆ THỨC TRUY HỒI

NGUYỄN ĐỨC TRƯỜNG
(GV THCS Đa Tốn, Gia Lâm, Hà Nội)

Bài viết này trình bày cách vận dụng hệ thức truy hồi về tổng hai lũy thừa cùng bậc của hai nghiệm của một phương trình (PT) bậc hai vào giải một số bài toán.

• Ta đã biết phương trình bậc hai

$$x^2 + bx + c = 0 \qquad (1)$$

với $\Delta = b^2 - 4c > 0$ có hai nghiệm là $x_1 = -\frac{b}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$ và $x_2 = -\frac{b}{2} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$.

• Đặt $S_n = x_1^n + x_2^n$ $(n = 1, 2, 3, ..)$ ta có hệ thức sau

$$S_{n+2} + bS_{n+1} + cS_n = 0 \qquad (2)$$

với $S_1 = x_1 + x_2 = -b$,

$S_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = b^2 - 2c$.

Thực vậy (2) $\Leftrightarrow$

$x_1^n(x_1^2 + bx_1 + c) + x_2^n(x_2^2 + bx_2 + c) = 0$

• Nếu hai số có dạng liên hợp $x_1 = m + n\sqrt{d}$ và $x_2 = m - n\sqrt{d}$ với n, d là số dương thì $x_1 + x_2 = 2m$, $x_1x_2 = m^2 - n^2d$ nên x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình bậc hai

$$x^2 - 2mx + m^2 - n^2d = 0 \qquad (3)$$

• Gọi $[x]$ là phần nguyên của số thực x, nghĩa là số nguyên lớn nhất không vượt quá x, hay $[x] \le x < [x] + 1$.

Nếu $S_n = x_1^n + x_2^n$ nguyên và $0 < x_2 < 1$ thì x_2^n không nguyên $\Rightarrow$ x_1^n không nguyên mà $x_1^n < S_n = x_1^n + x_2^n < x_1^n + 1$ nên $[x_1^n] = S_n - 1$. Tương tự nếu $S_n = x_1^n + x_2^n$ nguyên và $-1 < x_2 < 0$ thì x_1^n không nguyên mà $x_1^n - 1 < S_n = x_1^n + x_2^n < x_1^n$ nên $[x_1^n] = S_n$.

Dưới đây thông qua một số bài toán chúng tôi muốn chỉ ra rằng khi sử dụng hệ thức truy hồi (2) thì lời giải khá ngắn gọn.

Bài 1. *Tính giá trị các biểu thức*

$$A = \left(2+3\sqrt{2}\right)^6 + \left(2-3\sqrt{2}\right)^6$$

$$B = \frac{1}{(2+3\sqrt{2})^6} + \frac{1}{(2-3\sqrt{2})^6}$$

Lời giải. Đặt $x_1 = 2+3\sqrt{2}$ và $x_2 = 2-3\sqrt{2}$ thì x_1, x_2 là hai nghiệm của PT $x^2 - 4x - 14 = 0$. Lúc đó hệ thức (2) có dạng $S_{n+2} = 4S_{n+1} + 14S_n$ $(n = 1, 2, 3, ...)$

Ta tính được :

$S_1 = 4$, $S_2 = 44$, $S_3 = 4 \times 44 + 14 \times 4 = 232$,

$S_4 = 4 \times 232 + 14 \times 44 = 1544$

$S_5 = 4 \times 1544 + 14 \times 232 = 9424$

$A = S_6 = 4 \times 9424 + 14 \times 1544 = 59312$

$$B = \frac{S_6}{14^6} = \frac{59312}{16.470596} = \frac{3707}{470596}$$

Bài 2. *Chứng minh rằng phần nguyên của số* $\left(2+\sqrt{3}\right)^n$ *luôn là số lẻ với mọi số tự nhiên n.*

Lời giải. Đặt $x_1 = 2 + \sqrt{3}$ và $x_2 = 2 - \sqrt{3}$ thì x_1, x_2 là hai nghiệm của PT $x^2 - 4x + 1 = 0$. Đặt $S_n = x_1^n + x_2^n$ ta có hệ thức $S_{n+2} = 4S_{n+1} - S_n$. Vì $S_1 = 4$ nên từ hệ thức trên suy ra S_n luôn là số nguyên chẵn, mà $0 < x_2 < 1$ thì $\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right] = \left[x_1^n\right] = S_n - 1$ luôn là số lẻ.

Bài 3. *Tìm chữ số tận cùng của phần nguyên của số* $\left(5+3\sqrt{3}\right)^{2003}$.

Lời giải. Đặt $x_1 = 5+3\sqrt{3}$ và $x_2 = 5 - 3\sqrt{3}$ thì x_1, x_2 là hai nghiệm của PT $x^2 - 10x - 2 = 0$.

Đặt $S_n = x_1^n + x_2^n$ ta có hệ thức $S_{n+2} = 10S_{n+1} + 2S_n$. Vì $S_1 = 10$ nên từ hệ thức trên suy ra S_n luôn chia hết cho 10 với n lẻ, mà $-1 < x_2 < 0$ thì số $\left[\left(5+3\sqrt{3}\right)^{2003}\right] = \left[x_1^{2003}\right] = S_{2003}$ luôn có chữ số tận cùng là 0.

Bài 4. *Tìm hai chữ số tận cùng của phần nguyên của số* $\left(\sqrt{29}+\sqrt{21}\right)^{2002}$

Lời giải. Đặt $x_1 = \left(\sqrt{29}+\sqrt{21}\right)^2 = 50+2\sqrt{609}$, $x_2 = \left(\sqrt{29}-\sqrt{21}\right)^2 = 50-2\sqrt{609}$ thì x_1, x_2 là hai nghiệm của PT $x^2 - 100x + 64 = 0$. Đặt $S_n = x_1^n + x_2^n$ ta có hệ thức $S_{n+2} = 100S_{n+1} - 64S_n$. Vì $S_1 = 100$ nên từ hệ thức này suy ra $S_n \vdots 100$ với mọi n lẻ. Vì $0 < x_2 < 1$ nên $\left[\left(\sqrt{29}+\sqrt{21}\right)^{2002}\right] = \left[x_1^{1001}\right] = S_{1001} - 1$, nghĩa là $\left[\left(\sqrt{29}+\sqrt{21}\right)^{2002}\right]$ có tận cùng là hai chữ số 9.

Các bạn hãy mở rộng hệ thức (2) đối với phương trình bậc ba (xem bài *Sử dụng công thức Vi-et để giải hệ phương trình* đăng trên THTT số 301 tháng 7 năm 2002).

Xin mời các bạn sử dụng hệ thức truy hồi để giải các bài tập sau :

Bài 1. Tìm phần nguyên của

$$\left(4+\sqrt{15}\right)^8 ; \left(45+\sqrt{1999}\right)^{1999}.$$

Bài 2. Tìm hai chữ số đứng bên phải và bên trái dấu phẩy của $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{2002}$.

Bài 3. Chứng minh rằng

$$A = \left(7+4\sqrt{3}\right)^n + \left(7-4\sqrt{3}\right)^n$$

nhận giá trị nguyên và không chia hết cho 13.

Bài 4. Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của PT :

$$x^2 - ax + 1 = 0 \ (a \in Z)$$

a) Chứng minh $x_1^5 + x_2^5$ nhận giá trị nguyên.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của a để $x_1^5 + x_2^5$ chia hết cho 25.

ĐƯỜNG CONG HY-PÔ-XY-CLÔ-IT

(Tiếp bìa 2)

• Nếu $k \geq 3$ và là số nguyên thì hình $\mathscr{H}$ gồm k cung bằng nhau, (không cắt nhau) mà nếu lấy một cung chắn $\frac{1}{k}$ đường tròn $\mathscr{C}$ rồi quay một góc bằng $\frac{t.360^o}{k}$ ($t = 1, 2, ..., k-1$) quanh tâm O của đường tròn $\mathscr{C}$ thì được tất cả $k-1$ cung còn lại (xem hình 2 và hình 3).

• Nếu $k = \frac{n}{m}$ là phân số tối giản, $m \geq 2$ thì hình $\mathscr{H}$ gồm n cung bằng nhau (cắt nhau) mà nếu lấy một cung chắn $\frac{m}{n}$ đường tròn $\mathscr{C}$ rồi quay một góc bằng $\frac{t.m.360^o}{n}$ ($t = 1, 2, ..., n-1$) quanh tâm O của đường tròn $\mathscr{C}$ thì được tất cả $n-1$ cung còn lại (xem các hình 4, 5 ở bìa 2 và các hình ở bìa 1).

4) Mối liên hệ giữa hai đường Ê-pi-xy-clô-it và Hy-pô-xy-clô-it

Ta xét quỹ đạo của M thuộc $\mathscr{C}'$ khi đường tròn $\mathscr{C}'$ bán kính b lăn không trượt bên ngoài đường tròn $\mathscr{C}$ bán kính a (với $b > a$) mà $\mathscr{C}'$ luôn tiếp xúc với $\mathscr{C}$. Lập luận hoàn toàn như trên, đặt $d = b - a$ hay $b = a + d$, thay vào phương trình (4) được

$$\begin{cases} x = -d\cos t + (a+d)\cos\frac{d}{a+d}t \\ y = -d\sin t + (a+d)\sin\frac{d}{a+d}t \end{cases} \quad (5)$$

Đặt $\varphi = \frac{d}{a+d}t$ và $k = \frac{a}{d}$ thì phương trình (5) trở thành

$$\begin{cases} x = (a+d)\cos\varphi - d\cos(1+k)\varphi \\ y = (a+d)\sin\varphi - d\sin(1+k)\varphi \end{cases} \quad (6)$$

Phương trình (6) chính là phương trình của đường Ê-pi-xy-clô-it, đó là quỹ đạo của điểm M trên đường tròn $\mathscr{C}_1$ bán kính d lăn không trượt trên đường tròn $\mathscr{C}$ tâm O bán kính a mà $\mathscr{C}_1$ luôn tiếp xúc ngoài với $\mathscr{C}$ (hình trang 3).

TOÁN HỌC và CƠ CẤU CÁC LOẠI ĐỒNG TIỀN

PHAN THANH QUANG
(Tp. Hồ Chí Minh)

Các nhà toán học quan tâm đến vấn đề tiền bạc theo nghĩa : mệnh giá của tiền được cơ cấu như thế nào là hợp lí nhất. Cụ thể là có mấy loại mệnh giá, mỗi mệnh giá có giá trị bao nhiêu ?

Trong loại đồng tiền Ơrô (Euro) ở châu Âu hiện nay có các đồng tiền 1; 2; 5; 10; 20 xen (cent, một euro bằng 100 cents). Ngoài ra có đồng 1 ơrô, 2 ơrô, rất phù hợp với cơ số 10 mà chúng ta sử dụng. Với cơ cấu như vậy, ta có thể trả một món tiền nào đó bằng cách trả bằng mệnh giá tiền lớn nhất có thể được, phần còn lại cũng lần lượt trả theo thứ tự lớn nhất của phần còn lại cho đến hết. Bằng cách đó số lượng các đồng tiền phải bỏ ra là ít nhất.

Jeffrey Shallit ở Đại học Waterloo (Ontario) lại nhìn vấn đề với con mắt khác. Ông đặt vấn đề tìm một hệ thống tiền sao cho số các đồng tiền trung bình phải sử dụng là ít nhất. Loại bài toán này nằm trong một lĩnh vực toán số học, đó là phương trình Đi-ô-phăng, là một phương trình mà hệ số và ẩn số đều lấy các giá trị nguyên.

Biết được số nghiệm một phương trình Đi-ô-phăng (ví dụ có bao nhiêu cách để trả 18 cents với các đồng tiền mệnh giá khác nhau) là một bài toán về giải tích tổ hợp, nhiều khi rất phức tạp.

J. Shallit cũng quan tâm đến tiền của Mỹ với các đồng 1; 5; 10, 25 cents.

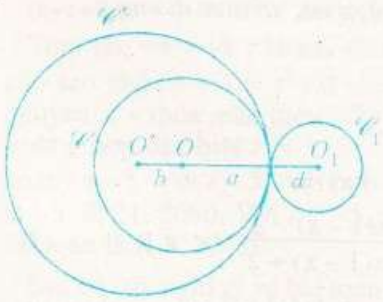
Ông đã tính toán và thấy rằng người châu Âu cần trung bình 4,6 đồng ơrô để giao dịch lặt vặt hàng ngày như đi ôtô buyt, tàu điện, mua nước ngọt. Các khoản tiền khác thì chi bằng séc, thẻ... Với người Mỹ, cần 4,7 đồng đôla. Cách hữu hiệu nhất để giảm đến tối thiểu số đồng tiền bỏ ra trong giao dịch là tạo ra đồng tiền có mệnh giá... 1,37 ơrô (hay đồng tiền có mệnh giá - 1,33 ơrô tùy theo tình hình). Như vậy trong giao dịch, số đồng tiền trung bình phải bỏ ra là 3,9 đồng. Người Mỹ, tương tự như vậy, cần có đồng tiền mệnh giá 18 cents (gọi là đồng Elvis, là tên người nêu ý kiến đó).

Ý tưởng của Shallit và Elvis về mặt lí thuyết thì độc đáo và trí tuệ thật, nhưng trên thực tế thì không thực hiện được, vì khi giao dịch, làm sao mà tính nhẩm nhanh chóng các số tiền phải trả tiếp theo ? (Ví dụ mua món hàng 13,85 ơrô thì trả tiền sao đây với đồng 1,37 ơrô ?). Hơn nữa ý tưởng đó làm nảy sinh một điều : một hệ thống chỉ tối ưu trong những điều kiện nhất định, mà điều kiện đó đâu có dễ được tất cả mọi người có liên quan cùng chấp nhận ?

Cuối cùng muốn cho ý tưởng táo bạo được khả thi, phải tính lại hết giá trị của tất cả những đồng tiền mới, xuất phát từ một "*giá trị trung bình không hệ số*" trên tất cả các giá có thể có. Nói một cách khác đồng 1,37 ơrô là tốt hơn nếu tất cả các giá đều xuất hiện với tần số bằng nhau. Theo định luật Benford trong bất cứ một sự thống kê nào các giá bắt đầu bằng những chữ số 1 nhiều hơn bắt đầu bằng chữ số 9. Như vậy muốn sự tính toán phản ánh đúng sự thực phải đưa vào "*giá trị trung bình có hệ số*".

Rút cuộc một câu hỏi vẫn còn chưa có giải đáp : Giá trị thực sự của Elvis là gì ? Ý tưởng của Shallit hay thật, nhưng "rằng hay thì thật là hay"...

*(Theo **Benoit Rittaud** trong **Recherche** số tháng 12/2003)*



Như vậy khi đường tròn $\mathscr{C}'$ bán kính b lăn không trượt trên đường tròn $\mathscr{C}$ cố định bán kính a tâm O mà $\mathscr{C}'$ luôn tiếp xúc với $\mathscr{C}$ thì quỹ đạo của điểm xác định M trên $\mathscr{C}'$ là đường Ê–pi–xy–clô–it nếu $\mathscr{C}'$ nằm ngoài $\mathscr{C}$, hoặc là đường Hy–pô–xy–clô–it nếu $\mathscr{C}'$ nằm trong $\mathscr{C}$.

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA MÔN TOÁN
LỚP 12 THPT NĂM HỌC 2002 - 2003 BẢNG A

NGUYỄN KHẮC MINH
(Cục Khảo thí và Kiểm định CLGD – Bộ GD&ĐT)

I. ĐỀ THI

Ngày thi thứ nhất (12/3/2003)

Bài 1: *Cho hàm số f xác định trên tập hợp số thực R, lấy giá trị trên R và thỏa mãn điều kiện $f(\cot gx) = \sin 2x + \cos 2x$ với mọi x thuộc khoảng $(0; \pi)$.*

Hãy tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số

$g(x) = f(x).f(1-x)$

trên đoạn $[-1; 1]$.

Bài 2: *Trong mặt phẳng, cho hai đường tròn cố định (O_1) và (O_2) tiếp xúc với nhau tại điểm M, và bán kính của đường tròn (O_2) lớn hơn bán kính của đường tròn (O_1). Xét điểm A nằm trên đường tròn (O_2) sao cho ba điểm O_1, O_2, A không thẳng hàng. Từ A kẻ các tiếp tuyến AB và AC đến đường tròn (O_1) (B và C là các tiếp điểm). Các đường thẳng MB và MC cắt lại đường tròn (O_2), tương ứng, tại E và F. Gọi D là giao điểm của đường thẳng EF và tiếp tuyến tại A của đường tròn (O_2). Chứng minh rằng điểm D di động trên một đường thẳng cố định, khi A di động trên đường tròn (O_2) sao cho ba điểm O_1, O_2, A không thẳng hàng.*

((O) kí hiệu đường tròn tâm O.).

Bài 3: *Với mỗi số nguyên $n > 1$, kí hiệu S_n là số các hoán vị $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ của n số nguyên dương đầu tiên, mà mỗi hoán vị $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ đều có tính chất:*

$1 \le |a_k - k| \le 2$ *với mọi* $k = 1, 2, \dots, n$.

Chứng minh rằng: $1{,}75.S_{n-1} < S_n < 2.S_{n-1}$ *với mọi số nguyên* $n > 6$.

Ngày thi thứ hai (13/3/2003)

Bài 4: *Hãy tìm số nguyên dương n lớn nhất sao cho hệ phương trình*

$$(x+1)^2 + y_1^2 = (x+2)^2 + y_2^2 = \dots$$
$$= (x+k)^2 + y_k^2 = \dots = (x+n)^2 + y_n^2$$

có nghiệm nguyên $(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Bài 5: *Cho hai đa thức:*

$P(x) = 4x^3 - 2x^2 - 15x + 9$

và $Q(x) = 12x^3 + 6x^2 - 7x + 1$.

1/ Chứng minh rằng mỗi đa thức đã cho đều có ba nghiệm thực phân biệt.

2/ Kí hiệu α và β tương ứng là nghiệm lớn nhất của $P(x)$ và $Q(x)$. Chứng minh rằng

$$\alpha^2 + 3\beta^2 = 4.$$

Bài 6: *Cho tập hợp F gồm tất cả các hàm số $f: R^+ \to R^+$ thỏa mãn điều kiện:*

$$f(3x) \ge f(f(2x)) + x$$

với mọi số thực dương x.

Hãy tìm số thực α lớn nhất sao cho với mọi hàm số f thuộc tập hợp F ta đều có:

$$f(x) \ge \alpha x$$

với mọi số thực dương x.

(R^+ kí hiệu tập hợp các số thực dương.).

II. ĐÁP ÁN

Bài 1: Ta có:

$f(\cot gx) = \sin 2x + \cos 2x \quad \forall x \in (0; \pi)$

$$\Leftrightarrow f(\cot gx) = \frac{2\cot gx}{\cot g^2 x + 1} + \frac{\cot g^2 x - 1}{\cot g^2 x + 1} =$$

$$= \frac{\cot g^2 x + 2\cot gx - 1}{\cot g^2 + 1} \quad \forall x \in (0; \pi).$$

Từ đó, lưu ý rằng với mỗi $t \in R$ đều tồn tại $x \in (0; \pi)$ sao cho $\cot gx = t$, ta được:

$$f(t) = \frac{t^2 + 2t - 1}{t^2 + 1} \quad \forall t \in R.$$

Dẫn tới:

$g(x) = f(x).f(1-x) =$

$$= \frac{x^2(1-x)^2 + 8x(1-x) - 2}{x^2(1-x)^2 - 2x(1-x) + 2} \quad \forall x \in R. \qquad (1)$$

Đặt $u = x(1-x)$. Dễ thấy, khi x chạy qua $[-1; 1]$ thì u chạy qua $[-2; \frac{1}{4}]$. Vì vậy, từ (1) ta được: $\min\limits_{-1 \le x \le 1} g(x) = \min\limits_{-2 \le u \le 1/4} h(u)$

và $\max\limits_{-1\le x\le 1} g(x) = \max\limits_{-2\le u\le 1/4} h(u)$,

trong đó $h(u) = \dfrac{u^2+8u-2}{u^2-2u+2}$

Ta có: $h'(u) = \dfrac{2(-5u^2+4u+6)}{(u^2-2u+2)^2}$

Từ việc khảo sát dấu của h'(u) trên [-2; 1/4] ta được:

$\min\limits_{-2\le u\le 1/4} h(u) = h((2-\sqrt{34})/5) = 4-\sqrt{34}$,

và $\max\limits_{-2\le u\le 1/4} h(u) = \max\{h(-2), h(1/4)\}$

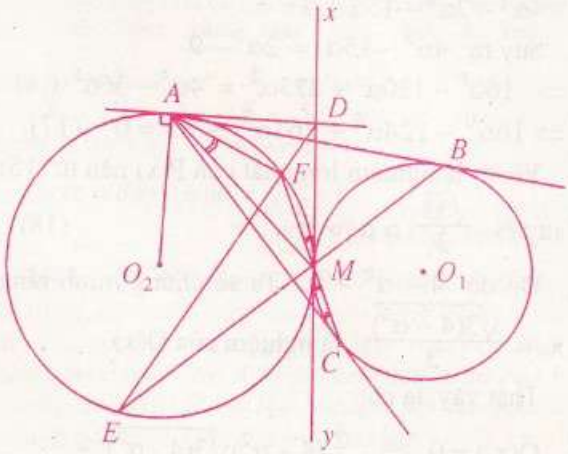
$= \max\{-7/5, \dfrac{1}{25}\} = \dfrac{1}{25}$.

Vậy, trên [−1; 1] ta có: $\min g(x) = 4-\sqrt{34}$ và $\max g(x) = \dfrac{1}{25}$.

• **Chú ý**: *Đối với bài làm của thí sinh, yêu cầu trình bày bảng biến thiên của hàm số h(u) trên* $[-2; \dfrac{1}{4}]$.

Bài 2: Xét hai trường hợp sau:

• *Trường hợp 1*: Hai đường tròn (O_1) và (O_2) tiếp xúc ngoài với nhau tại điểm M.



Qua M kẻ tiếp tuyến chung xy của hai đường tròn (O_1) và (O_2). Do CA và My, tương ứng, là các tiếp tuyến tại C và M của (O_1) nên:

$\angle FCA = \angle CMy$

Mà $\angle CMy = \angle FMx$ (hai góc đối đỉnh)

Nên $\angle FCA = \angle FMx$.

Lại có $\angle FMx = \angle FAM$ (vì cùng bằng 1/2 sđ cung MF)

Suy ra $\angle FCA = \angle FAM$.

Xét hai tam giác MFA và AFC, có:

$\angle MFA = \angle AFC$

$\angle FAM = \angle FCA$ (theo chứng minh trên)

Do đó $\Delta MFA \backsim \Delta AFC$. Suy ra: $\dfrac{MF}{FA} = \dfrac{AF}{FC}$. Dẫn tới: $FM.FC = FA^2$. Mà $FM.FC = P_{F/(O1)} = FO_1^2 - R_1^2$, trong đó R_1 là bán kính của đường tròn (O_1), nên $FA^2 = FO_1^2 - R_1^2$, hay $FO_1^2 - FA^2 = R_1^2$.

Bằng cách chứng minh tương tự, ta sẽ có: $EO_1^2 - EA^2 = R_1^2$. Suy ra:

$FO_1^2 - FA^2 = EO_1^2 - EA^2 = R_1^2$.

Từ đó, với lưu ý D nằm trên đường thẳng EF, ta được:

$DO_1^2 - DA^2 = R_1^2$, hay $DO_1^2 - R_1^2 = DA^2$. (2)

Do DA là tiếp tuyến tại A của đường tròn (O_2) nên $DA^2 = P_{D/(O2)} = DO_2^2 - R_2^2$ (3)

trong đó R_2 là bán kính của đường tròn (O_2).

Từ (2) và (3) suy ra: $DO_1^2 - R_1^2 = DO_2^2 - R_2^2$, hay $P_{D/(O1)} = P_{D/(O2)}$. Điều này chứng tỏ D nằm trên trục đẳng phương (cố định) của hai đường tròn cố định (O_1) và (O_2). Yêu cầu của bài toán được chứng minh.

• *Trường hợp 2*: Hai đường tròn (O_1) và (O_2) tiếp xúc trong với nhau tại điểm M.

Trong trường hợp này, yêu cầu của bài toán được chứng minh tương tự như ở *Trường hợp 1*.

Bài 3: Trước hết, ta sẽ xây dựng một hệ thức truy hồi cho s_n.

Với mỗi $n \in N^*$, kí hiệu S_n là tập hợp tất cả các hoán vị $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ thỏa mãn các điều kiện của đề bài.

Giả sử $n > 4$. Xét hoán vị $A = (a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1})$ bất kì thuộc S_{n+1}. Từ các giả thiết của đề bài suy ra $a_{n-1} = n+1$ hoặc $a_n = n+1$.

• *Trường hợp 1*: $a_{n-1} = n+1$. Khi đó, phải có $a_n = n-1$ hoặc $a_n = n-2$.

- Nếu $a_n = n-1$ thì phải có $a_{n+1} = n$. Do đó, trong trường hợp này A có dạng:

$A_1 = (a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, n+1, n-1, n)$ với $(a_1, a_2, \dots, a_{n-2}) \in S_{n-2}$. (4)

- Nếu $a_n = n-2$ thì $a_{n+1} = n-1$ hoặc $a_{n+1} = n$.

+ Nếu $a_{n+1} = n-1$ thì phải có $a_{n-2} = n$. Như thế, trong trường hợp này A có dạng:

$A_2 = (a_1, a_2, \dots, a_{n-3}, n, n+1, n-2, n-1)$ với $(a_1, a_2, \dots, a_{n-3}) \in S_{n-3}$. (5)

+ Nếu $a_{n+1} = n$ thì A có dạng:

$A_3 = (a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, n+1, n-2, n)$ với $\{a_1, a_2, \dots, a_{n-2}\} = \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{n-2, n\}$ (6)

• *Trường hợp 2*: $a_n = n + 1$. Khi đó, ta có $a_{n+1} = n$ hoặc $a_{n+1} = n - 1$.

- Nếu $a_{n+1} = n$ thì A có dạng:

$A_4 = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, n+1, n)$ với $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) \in S_{n-1}$. (7)

- Nếu $a_{n+1} = n - 1$ thì A có dạng:

$A_5 = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, n+1, n-1)$ với $\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\} = \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{n-1\}$. (8)

Từ (4) – (8) suy ra phép đặt tương ứng f:

$f : A_1 \in S_{n+1} \mapsto (a_1, a_2, \dots, a_{n-2}) \in S_{n-2}$;

$f : A_2 \in S_{n+1} \mapsto (a_1, a_2, \dots, a_{n-3}) \in S_{n-3}$;

$f : A_3 \in S_{n+1} \mapsto (a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, n, n-2) \in S_n$;

$f : A_4 \in S_{n+1} \mapsto (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) \in S_{n-1}$;

$f : A_5 \in S_{n+1} \mapsto (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, n-1) \in S_n$;

xác lập một đơn ánh

$f : S_{n+1} \to S_n \cup S_{n-1} \cup S_{n-2} \cup S_{n-3}$.

Xét hoán vị $B \in S_n \cup S_{n-1} \cup S_{n-2} \cup S_{n-3}$, dễ thấy:

$B \notin f(S_{n+1}) \Leftrightarrow B = (b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, n-2) \in S_n$ với $b_{n-1} \neq n \Leftrightarrow B = (b_1, b_2, \dots, b_{n-4}, n-1, n, n-3, n-2)$ với $(b_1, b_2, \dots, b_{n-4}) \in S_{n-4}$.

Từ đó suy ra f là một song ánh từ S_{n+1} đến $(S_n \cup S_{n-1} \cup S_{n-2} \cup S_{n-3}) \setminus (S_{n-4} \times \{(n-1, n, n-3, n-2)\})$. Vì thế $s_{n+1} = s_n + s_{n-1} + s_{n-2} + s_{n-3} - s_{n-4}$ $\forall n > 4$ (9)

Suy ra: $s_{n+1} - s_n = s_{n-1} + s_{n-2} + s_{n-3} - s_{n-4}$ $\forall n > 4$ (10)

Do đó: $s_{n+2} - s_{n+1} = s_n + s_{n-1} + s_{n-2} - s_{n-3}$ $\forall n > 4$ (11)

Lấy (11) trừ (10), vế theo vế, ta được:

$s_{n+2} - 2.s_{n+1} = s_{n-4} - 2.s_{n-3}$ $\forall n > 4$,

hay: $s_n - 2.s_{n-1} = s_{n-6} - 2.s_{n-5}$ $\forall n > 6$ (12)

Dễ dàng chứng minh được $s_{n-5} > s_{n-6}$ $\forall n > 6$. Vì thế, từ (12) ta có:

$s_n < 2.s_{n-1}$ $\forall n > 6$ (13)

Hơn nữa, từ (9) ta có:

$s_n > s_{n-1} + s_{n-2} + s_{n-3}$ $\forall n > 5$ (14)

Từ (13) và (14) suy ra với mọi $n > 8$ ta có:

$s_n > s_{n-1} + (s_{n-1}/2) + (s_{n-2}/2) > s_{n-1} + (s_{n-1}/2) + (s_{n-1}/4) = 1{,}75.\, s_{n-1}$.

Bằng cách đếm trực tiếp, ta được: $s_1 = 0$, $s_2 = 1$, $s_3 = 2$ và $s_4 = 4$. Từ đó, dựa vào (9) ta tính được: $s_5 = 6$, $s_6 = 13$, $s_7 = 24$ và $s_8 = 45$. Các kết quả này cho thấy $s_7 > 1{,}75.\, s_6$ và $s_8 > 1{,}75.\, s_7$. Vì thế, ta có $s_n > 1{,}75.\, s_{n-1}$ $\forall n > 6$.

Vậy, tóm lại:

$1{,}75.\, s_{n-1} < s_n < 2.s_{n-1}$ $\forall n > 6$.

Bài 4: Theo kết quả bài 4 Bảng B (*THTT số 319 (1/2004)*), hệ phương trình của đề bài không có nghiệm nguyên khi n = 4; và do đó nó không có nghiệm nguyên với mọi $n \geq 4$.

Khi $n = 3$, dễ thấy hệ có nghiệm nguyên ($x = -2$; $y_1 = 0$; $y_2 = 1$; $y_3 = 0$).

Từ đó suy ra giá trị n cần tìm theo yêu cầu của đề bài là: $n = 3$.

Bài 5: 1/ Ta có:

$P(-2) = -1$; $P(-1) = 18$; $P(3/2) = -9/2$ và $P(\sqrt{33}/3) = (15 - \sqrt{33})/9$. (15)

$Q(-2) = -57$; $Q(-1) = 2$; $Q(1/3) = -2/9$ và $Q(1) = 12$. (16)

Từ (15) suy ra P(x) có 3 nghiệm thực phân biệt. (Đpcm).

Từ (16) suy ra Q(x) có 3 nghiệm thực phân biệt. (Đpcm).

2/ Vì α là nghiệm của P(x) nên:

$4\alpha^3 - 2\alpha^2 - 15\alpha + 9 = 0$.

Suy ra $4\alpha^3 - 15\alpha = 2\alpha^2 - 9$

$\Rightarrow 16\alpha^6 - 120\alpha^4 + 225\alpha^2 = 4\alpha^4 - 36\alpha^2 + 81$

$\Rightarrow 16\alpha^6 - 124\alpha^4 + 261\alpha^2 - 81 = 0$ (17)

Vì α là nghiệm lớn nhất của P(x) nên từ (15) suy ra $\frac{\sqrt{33}}{3} > \alpha > \frac{3}{2}$. (18)

Do đó $4 - \alpha^2 > 0$. Ta sẽ chứng minh rằng $x_0 = \frac{\sqrt{3(4-\alpha^2)}}{3}$ là nghiệm của Q(x).

Thật vậy, ta có:

$Q(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{3}(4-\alpha^2)\sqrt{3(4-\alpha^2)} + 2(4-\alpha^2) - \frac{7}{3}\sqrt{3(4-\alpha^2)} + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (3 - \frac{4\alpha^2}{3})\sqrt{3(4-\alpha^2)} + 9 - 2\alpha^2 = 0$

$\Leftrightarrow (9 - 2\alpha^2)^2 = \left(3 - \frac{4\alpha^2}{3}\right)^2 3(4-\alpha^2)$ (do (18))

$\Leftrightarrow 3(81 - 36\alpha^2 + 4\alpha^4) = (81 - 72\alpha^2 + 16\alpha^4)(4 - \alpha^2)$

$\Leftrightarrow\ 16\alpha^6 - 124\alpha^4 + 261\alpha^2 - 81 = 0.$

Đẳng thức cuối cùng là một đẳng thức đúng (theo (17)); vì thế x_0 là nghiệm của Q(x). Hơn nữa, từ (18) dễ dàng suy ra

$$x_0 \in (\frac{1}{3}; \frac{\sqrt{21}}{6}) \subset (\frac{1}{3}; 1).$$

Mặt khác, vì β là nghiệm lớn nhất của Q(x) nên từ (16) suy ra β là nghiệm duy nhất của Q(x) trong khoảng $(\frac{1}{3}; 1)$.

Từ các kết quả vừa nhận được ở trên suy ra $\frac{\sqrt{3(4-\alpha^2)}}{3} = \beta$; do đó: $\alpha^2 + 3\beta^2 = 4$.

• **Chú ý**: *Việc xét P(3/2) và P($\sqrt{33}$ / 3) trong chứng minh phần 1/ là hệ quả của quá trình giải quyết phần 2/. Vì thế việc xét đó tạo cảm giác khiên cưỡng, áp đặt. Nếu chỉ nhằm mục đích chứng minh phần 1/, có thể thay việc xét nói trên bằng việc xét P(1) và P(2).*

Bài 6: • Dễ thấy hàm số $f(x) = \frac{x}{2}$, $x \in R^+$ là một hàm số thuộc F. Từ đó suy ra $\alpha \le \frac{1}{2}$.

• Xét hàm số f bất kì thuộc F. Từ điều kiện của đề bài dễ thấy:

$$f(x) \ge \frac{x}{3} \quad \forall x \in R^+. \qquad (19)$$

Xét dãy số (α_n) xác định bởi:

$\alpha_1 = 1/3$ và $\alpha_{n+1} = (2\alpha_n^2 + 1)/3 \quad \forall n = 1, 2, ...$

Bằng phương pháp quy nạp theo n, ta sẽ chứng minh $\forall n \in N^*$ luôn có:

$$f(x) \ge \alpha_n x \quad \forall x \in R^+. \qquad (20)$$

Thật vậy, theo (19), ta có (20) khi n = 1. Giả sử đã có (20) khi n = k. Khi đó:

$$f(x) \ge \alpha_k f(\frac{2x}{3}) + \frac{x}{3} \ge \alpha_k.\alpha_k.\frac{2x}{3} + \frac{x}{3} = \frac{2\alpha_k^2 + 1}{3}x = \alpha_{k+1}x \quad \forall x \in R^+$$

Như vậy ta có (20) khi n = k +1. Theo nguyên lí quy nạp, ta có điều cần chứng minh.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh $\lim \alpha_n = \frac{1}{2}$.

Thật vậy, trước hết, bằng phương pháp quy nạp theo n, dễ dàng chứng minh được dãy (α_n) là dãy bị chặn trên bởi $\frac{1}{2}$.

Từ đó: $\alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{1}{3}(\alpha_n - 1)(2\alpha_n - 1) > 0$, chứng tỏ (α_n) là dãy tăng. Suy ra (α_n) là dãy hội tụ.

Giải phương trình giới hạn, với lưu ý $\alpha_n < \frac{1}{2}$, ta được $\lim \alpha_n = \frac{1}{2}$. Do đó, từ (20) suy ra $f(x) \ge \frac{x}{2} \quad \forall x \in R^+$.

• Từ các chứng minh trên ta được giá trị α cần tìm là: $\alpha = \frac{1}{2}$.

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC *(Tiếp trang 24)*

Phương trình này có nghiệm : $x = A_1\sin(\omega_1 t + \varphi_1)$: chứng tỏ vật m tiếp tục dao động điều hòa. Biên độ dao động của vật m được tính theo hệ thức : $\omega_1^2 x_2^2 + v_1^2 = \omega_1^2 A_1^2 \Rightarrow A_1 = |x_2|$, với x_2 là tọa độ của vật m đối với gốc tọa độ O_1 tại vị trí cân bằng mới. Độ dãn của lò xo tại vị trí cân bằng mới O_1 là $\Delta l_1 = \frac{mg\sin\alpha}{k} = 3{,}2$ (cm). Chiều dài của lò xo khi m nằm tại O_1 là : $l_1 = l_o - \Delta l_1 = 16{,}8$ (cm). Do đó, khi lò xo có chiều dài 21 cm thì m cách O_1 : $|x_2| = 21 - 16{,}8 = 4{,}2$ (cm). Vì vậy ta có : $A_1 = |x_2| = 4{,}2$ (cm).

Nhận xét. Các bạn có lời giải đúng và gọn :

Phú Thọ : *Dương Trung Hiếu*, 11B, THPT NK Ngô Sĩ Liên ; **Bắc Ninh :** *Chu Thanh Bình*, Lí 12, *Nguyễn Duy Khánh*, Lí 11, THPT chuyên Bắc Ninh ; **Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Thị Phương Dung*, 11A3, *Hoàng Xuân*, 12A3, THPT ch. Vĩnh Phúc ; **Thanh Hóa :** *Nguyễn Trọng Tuấn*, 12C7, THPT Đào Duy Từ, Thanh Hóa ; **Hưng Yên :** *Đào Ngọc Dương*, 12 chuyên lí, THPT chuyên Hưng Yên ; **Tp. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Anh Tuấn*, 11 Lí, PTNK, ĐHQG Tp. HCM ; **Quảng Ngãi :** *Thới Ngọc Tuấn Quốc*, 12 Lí, THPT ch. Lê Khiết ; **Nam Định :** *Nguyễn Văn Phi*, 12 Lí, THPT Lê Hồng Phong ; **Đăk Lăk :** *Lưu Xuân Bách*, 12 Lí, THPT ch. Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột ; **Ninh Bình :** *Đinh Xuân Cấp*, 12 Lí, THPT Lương Văn Tụy ; **Bình Định:** *Trần Quốc Thành*, 11 Lí, THPT chuyên Lê Quý Đôn ; **Nghệ An :** *Thái Bá Sơn*, K30, A3, *Võ Hoàng Biên*, K3, chuyên Lí, THPT Phan Bội Châu, Vinh, *Lê Thành Công*, 12B, THPT Nam Đàn I.

MAI ANH

HƯỚNG DẪN GIẢI
ĐỀ TỰ ÔN THI SỐ 1

(Đề đã đăng trên THTT số 319, tháng 1 năm 2004)

Câu I. 1) Bạn đọc tự giải.

2) Hàm số có tiệm cận đứng : $x = 1$, tiệm cận xiên : $y = x - 1$, giao điểm của chúng là $I(1, 0)$. Hai đường thẳng cần tìm có PT :

$y = k_1(x-1)$ (Δ_1) ; $y = k_2(x-1)$ (Δ_2) ; $k_1, k_2 \in Z$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $1 < k_1 < k_2$. Tọa độ các giao điểm A, B của (Δ_1) và đồ thị hàm số là nghiệm của hệ PT :

$$\begin{cases} y = k_1(x-1) \\ y = \dfrac{x^2-2x+2}{x-1} \end{cases} \Rightarrow x = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{k_1-1}}$$

Có : $A\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{k_1-1}}, \dfrac{k_1}{\sqrt{k_1-1}}\right)$

Tương tự nếu gọi C, D là các giao điểm của (Δ_2) với đồ thị hàm số thì có

$$C\left(1+\frac{1}{\sqrt{k_2-1}}, \frac{k_1}{\sqrt{k_2-1}}\right)$$

Do I là tâm đối xứng của đồ thị hàm số nên $ABCD$ luôn là hình bình hành. $ABCD$ là hình chữ nhật khi và chỉ khi : $IA^2 = IC^2$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{k_1-1} + \frac{k_1^2}{k_1-1} = \frac{1}{k_2-1} + \frac{k_2^2}{k_2-1}$$

$$\Leftrightarrow (k_1-k_2)(k_1k_2-k_1-k_2-1) = 0$$

$$\Rightarrow k_1k_2 - k_1 - k_2 - 1 = 0 \text{ (do } k_2 > k_1 > 1)$$

$$\Rightarrow (k_1-1)(k_2-1) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_1 = 2 \\ k_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\Delta_1): y = 2(x-1) \\ (\Delta_2): y = 3(x-1) \end{cases}$$

Câu II. 1) Ta có $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{|x|^3+e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0} x|x| + \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = -1$$

2) Tập xác định (TXĐ) của hàm số là tập các giá trị của đối số x thỏa mãn

$$\begin{cases} x \neq -1 \\ mx^2+(m+3)x+3 \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

TH1: $m = 0$ thì (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ 3x+3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x > -1$,

TXĐ của hàm số là $(-1, +\infty)$

TH2: $m \neq 0$. Xét biệt thức Δ của tam thức bậc hai $mx^2 + (m+3)x + 3$:

$\Delta = (m+3)^2 - 12m = (m-3)^2 \geq 0$

• Nếu $m = 3$ thì (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ 3x^2+6x+3 \geq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow x \neq -1$.

TXĐ của hàm số đã cho là $R \setminus \{-1\}$.

• Nếu $m > 3$ thì từ (1) suy ra TXĐ của hàm số là : $(-\infty, -1) \cup \left[-\dfrac{3}{m}, +\infty\right)$.

• Nếu $0 < m < 3$ thì từ (1) suy ra TXĐ của hàm số là $\left(-\infty, \dfrac{3}{m}\right] \cup (-1, +\infty)$.

• Nếu $m < 0$ thì từ (1) suy ra TXĐ là $\left(-1, -\dfrac{3}{m}\right]$.

3) *Cách 1.* Từ $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z \leq 0$

$\Rightarrow (x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 \leq 5$ (1)

$F = 2x + 3y - 2z =$

$= 2(x-2) + 3y + (-2)(z+1) + 6$

Áp dụng BĐT Bu–nhi–a–cốp –xki cho 2 bộ số $(2, 3, -2)$, $(x-2, y, z+1)$ ta có :

$|2(x-2) + 3y + (-2)(z+1)|$

$\leq \sqrt{2^2+3^2+(-2)^2}.\sqrt{(x-2)^2+y^2+(z+1)^2}$

$\leq \sqrt{17}.\sqrt{5} = \sqrt{85}$, do (1). (2)

Từ (1), (2) suy ra $6-\sqrt{85} \leq F \leq 6+\sqrt{85}$.

$F = 6-\sqrt{85} < 0$ khi dấu bằng xảy ra ở (1) và (2), lúc đó

ĐỀ TỰ ÔN THI SỐ 2

(Thời gian làm bài : 180 phút)

Câu I. (2,25 điểm).

1) Khảo sát hàm số :

$$y = |x+2| + \frac{1}{x} \quad (C)$$

2) Tìm m để phương trình

$$|x+2| + \frac{1}{x} = \log_2(\log_{\frac{1}{2}} m)$$

có đúng 3 nghiệm phân biệt.

Câu II. (2,25 điểm).

1) Giải phương trình :

$$\cos 3x \sin 2x - \cos 4x \sin x = \frac{1}{2}\sin 3x + \sqrt{1+\cos x}.$$

2) Giải bất phương trình :

$$\sqrt{8 + 2^{1+\sqrt{3-x}} - 4^{\sqrt{3-x}}} + 2^{1+\sqrt{3-x}} > 5$$

Câu III. (1 điểm).

Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 1. Hai điểm M, N lần lượt di chuyển trên cạnh AD và DC sao cho $AM = x$, $CN = y$ và $\widehat{MBN} = \frac{\pi}{4}$. Tìm x, y để diện tích tam giác MBN đạt giá trị lớn nhất ? nhỏ nhất ?

Câu IV. (3,5 điểm)

1) Trong không gian với hệ trục tọa độ Đêcác vuông góc $Oxyz$ cho mặt cầu (I, R) có phương trình : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$ và mặt phẳng (α) có phương trình: $2x + 2y - z + 17 = 0$.

Lập phương trình mặt phẳng (β) song song với mặt phẳng (α) và cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 3.

2) Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy là tam giác vuông cân tại A ; $BC = 2a$. Gọi M là một điểm trên cạnh AA_1. Đặt $\widehat{BMC} = \alpha$, góc giữa mặt phẳng (MBC) và mặt phẳng (ABC) là β.

a) Chứng minh rằng : $\frac{1}{\cos\alpha} - 1 = \frac{2}{\mathrm{tg}^2\beta}$.

b) Tính thể tích hình lăng trụ theo a, α biết rằng M là trung điểm của AA_1.

Câu V. (1 điểm).

Trong khai triển $\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}} + \sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^{21}$ tìm số hạng chứa a, b có số mũ bằng nhau.

NGUYỄN THANH GIANG
(GV THPT chuyên Hưng Yên)

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-2} < 0$$

và $2x + 3y - 2z = 6 - \sqrt{85}$, suy ra

$$(x, y, z) = \left(2 - \frac{2}{17}\sqrt{85}, -\frac{3}{17}\sqrt{85}, -1 + \frac{2}{17}\sqrt{85}\right)$$

Tương tự : $F = 6 + \sqrt{85} > 0$ khi dấu bằng xảy ra ở (1) và (2), lúc đó

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-2} > 0$$

và $2x + 3y - 2z = 6 + \sqrt{85}$, suy ra

$$(x, y, z) = \left(2 + \frac{2}{17}\sqrt{85}, \frac{3}{17}\sqrt{85}, -1 - \frac{2}{7}\sqrt{85}\right)$$

Cách 2. Trong hệ tọa độ $Oxyz$ xét mặt cầu $(\mathscr{C})$ có PT $(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 5$. Mặt cầu $(\mathscr{C})$ có tâm $I(2, 0, -1)$, bán kính $R = \sqrt{5}$. Xét họ mặt phẳng (α) có PT $2x + 3y - 2z - F = 0$. Gọi $M(x, y, z)$ với x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z \le 0$, lúc đó M nằm trong $(\mathscr{C})$ (kể cả mặt cầu $(\mathscr{C})$). Do đó $(\mathscr{C})$ và (α) có điểm chung $\Leftrightarrow d(I, \alpha) \le R$ $\Leftrightarrow \frac{|6-F|}{\sqrt{17}} \le \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{85} \le F \le 6 + \sqrt{85}$. Vậy $\min F = 6 - \sqrt{85}$ và $\max F = 6 + \sqrt{85}$.

Có thể tìm các điểm cực trị bằng cách lập PT đường thẳng qua I vuông góc với mp(α), sau đó tìm giao điểm của đường thẳng này với mặt cầu $(\mathscr{C})$.

(Kì sau đăng tiếp)

ĐẶNG VŨ HÀ

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10
HỆ THPT CHUYÊN TRƯỜNG ĐHKHTN HÀ NỘI NĂM 2003

(Đề thi đã đăng trên THTT số 319, tháng 1 năm 2004)

VÒNG I

Câu I. ĐK $x \geq -2$. Chú ý rằng $x^2 + 7x + 10 = (x+5)(x+2)$. Nhân cả hai vế của PT đã cho với $(\sqrt{x+5}+\sqrt{x+2}) > 0$ được :

$$1 + \sqrt{x^2+7x+10} = \sqrt{x+5} + \sqrt{x+2}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+5}-1)(\sqrt{x+2}-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+5}=1\\ \sqrt{x+2}=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-4 \text{ (loại)}\\ x=-1.\end{array}\right.$$

Đáp số : $x = -1$.

Cách khác : Đặt ẩn phụ $u = \sqrt{x+5}$ và $v = \sqrt{x+2}$.

Câu II. Hệ PT

$$\begin{cases}2x^3+3x^2y=5\\ y^3+6xy^2=7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}8x^3+12x^2y=20\\ y^3+6xy^2=7\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(2x+y)^3=27\\ y^3+6xy^2=7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x+y=3. & (1)\\ 2y^3-9y^2+7=0 & (2)\end{cases}$$

Giải (2) được : $y = 1$, $y = \dfrac{7 \pm \sqrt{105}}{4}$.

Tóm lại hệ có 3 nghiệm (x, y) là : $(1, 1)$; $\left(\dfrac{5+\sqrt{105}}{8}, \dfrac{7-\sqrt{105}}{8}\right)$; $\left(\dfrac{5-\sqrt{105}}{8}; \dfrac{7+\sqrt{105}}{8}\right)$

Cách khác : Đặt $y = xt \neq 0$ thay vào hệ PT rồi biến đổi làm mất x^3.

Câu III. Ta có

$$2y^2x + x + y + 1 = x^2 + 2y^2 + xy$$

$$\Leftrightarrow 2y^2(x-1) - x(x-1) - y(x-1) + 1 = 0 \quad (1)$$

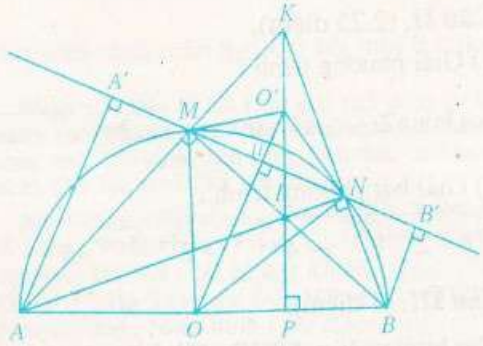
Nhận xét rằng $x = 1$ không phải là nghiệm của PT (1). Chia cả 2 vế PT (1) cho $x - 1$ ta được :

$$2y^2 - x - y + \frac{1}{x-1} = 0 \qquad (2)$$

PT có nghiệm x, y nguyên, suy ra $\dfrac{1}{x-1}$ nguyên nên $x - 1$ thuộc $\{1, -1\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=0.\end{array}\right.$

Thay $x = 2$ và $x = 0$ vào PT (2) và để ý đến y là số nguyên ta được $y = 1$. Vậy PT đã cho có hai nghiệm nguyên là $(2, 1)$ và $(0,1)$.

Câu IV. 1) Dựng AA' và $B'B$ vuông góc với MN. Gọi H là trung điểm của MN, lúc đó $OH \perp MN$. Trong hình thang $AA'B'B$ ta có



$OH = \dfrac{1}{2}(AA'+BB') = \dfrac{R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow MH = \dfrac{R}{2} \Rightarrow$ $MN = R$ và ΔOMN đều.

2) Dễ thấy các điểm M, N, I, K cùng nằm trên đường tròn đường kính IK. $\widehat{AKN} = \dfrac{1}{2}(\text{sđ}\overset{\frown}{AB} - \text{sđ}\overset{\frown}{MN}) = 60^o$. Gọi O' là trung điểm của $IK \Rightarrow \widehat{MO'N} = 2\widehat{MKN} = 120^o \Rightarrow MN = MO'.\sqrt{3}$ hay $MO' = \dfrac{MN.\sqrt{3}}{3} = \dfrac{R\sqrt{3}}{3}$. Do đó bán kính đường tròn qua M, N, I, K là $\dfrac{R\sqrt{3}}{3}$.

3) Điểm K nằm trên cung chứa góc 60° dựng trên đoạn $AB = 2R$ nên S_{KAB} lớn nhất $\Leftrightarrow$ đường cao KP lớn nhất $\Leftrightarrow \Delta KAB$ đều, lúc đó $S_{KAB} = \dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4} = R^2\sqrt{3}$.

Câu V. Ta có $x^2 + 1 \geq 2x$; $y^2 + 1 \geq 2y$; $z^2 + 1 \geq 2z$; $2(x^2 + y^2 + z^2) \geq 2(xy + yz + zx)$.

Cộng bốn bất đẳng thức trên theo từng vế ta được : $3(x^2 + y^2 + z^2) + 3 \geq 2(x + y + z + xy + yz + zx)$

mà vế phải bằng 6 theo giả thiết nên

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 3 \qquad (*)$$

Đẳng thức ở (*) xảy ra $\Leftrightarrow$ bốn đẳng thức trên xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

VÒNG 2

Câu VI. $x^4 + 2mx^2 + 4 = 0$ (1). Đặt $x^2 = t$, PT (1) trở thành $t^2 + 2mt + 4 = 0$ (2). PT (1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ PT (2) có hai nghiệm dương phân biệt t_1, t_2, nghĩa là

$$\begin{cases} \Delta' = m^2 - 4 > 0 \\ t_1 + t_2 = -2m > 0 \\ t_1.t_2 = 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -2.$$

Khi đó PT (1) có 4 nghiệm là $x_{1,2} = \pm\sqrt{t_1}$, $x_{3,4} = \pm\sqrt{t_2}$, và

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 2(t_1 + t_2)^2 - 4t_1t_2 = 8m^2 - 16.$$

Từ giả thiết có $8m^2 - 16 = 32 \Leftrightarrow m = -\sqrt{6}$ (vì $m < -2$).

Câu VII. $y^2 - (x+1)y - 2x^2 + 5x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (y + x - 2)(y - 2x + 1) = 0$

Giải hệ $\begin{cases} y + x - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 \end{cases}$

được $(x, y) = (1, 1)$.

Giải hệ $\begin{cases} y - 2x + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 \end{cases}$

được $(x, y) = \left(-\dfrac{4}{5}, -\dfrac{13}{5}\right)$.

Câu VIII. Với $|x| \geq 2$ và $|y| \geq 2$ ta có

$\begin{cases} x^2y^2 \geq 4x^2 \\ x^2y^2 \geq 4y^2 \end{cases} \Rightarrow x^2y^2 \geq 2(x^2+y^2) = x^2 + y^2 + x^2 + y^2$

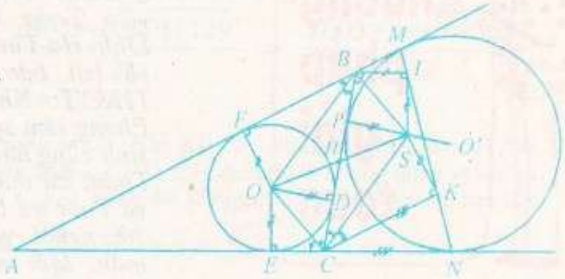
$\geq x^2 + y^2 + 2|xy| > x^2 + y^2 + xy$. Vậy $|x| \leq 2$ hoặc $|y| \leq 2$. Nếu $x = \pm 2$ hoặc $y = \pm 2$ thì PT đã cho không có nghiệm nguyên. Thử với $x = 0$, $x = 1$ và $x = -1$ ta thấy PT đó có 3 nghiệm nguyên (x, y) là $(0, 0)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$.

Câu IX. 1) Gọi p là nửa chu vi ΔABC, thì $p = AB + CD = AC + BD = AM = AN = AB + BM$ suy ra $BP = CD$.

2) Từ $\Delta BMI \backsim \Delta AMN \Rightarrow BI = BM = BP = CD = CE$. Do BI, CE song song và bằng nhau nên $BICE$ là hình bình hành.

Xét tương tự có $BKCF$ là hình bình hành.

3) Gọi H là trung điểm của BC và S là điểm đối xứng với O qua H. Dễ thấy các cặp điểm



sau đối xứng nhau qua H : (B, C) ; (P, D) ; (I, E), (F, K) do đó $SI = SP = SK$ (vì chúng lần lượt bằng OE, $SK = OF$, $SP = OD$) $\widehat{BIS} = \widehat{CEO} = 90^\circ$; $\widehat{BPS} = \widehat{CDO} = 90^\circ$; $\widehat{CKS} = \widehat{BFO} = 90^\circ$. Vậy đường tròn tâm S, bán kính SP đi qua P, I, K và tiếp xúc với BC, BI, CK (lần lượt tại P, I, K).

Câu X. Đặt $y = 3 - x$ bài toán đã cho trở thành: Tìm GTNN của biểu thức $P = x^4 + y^4 + 6x^2y^2$, trong đó x, y là các số thực thay đổi thỏa mãn :

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 + y^2 \geq 5. \end{cases}$$

Từ các hệ thức trên ta có $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2xy = 9 \\ x^2 + y^2 \geq 5 \end{cases}$

$\Rightarrow (x^2 + y^2) + 4(x^2 + y^2 + 2xy) \geq 5 + 4.9 = 41$

$\Rightarrow 5(x^2 + y^2) + 4(2xy) \geq 41.$

Mặt khác

$$16(x^2+y^2)^2 + 25(2xy)^2 \geq 40(x^2+y^2)(2xy) \qquad (1),$$

dấu đẳng thức xảy ra

$\Leftrightarrow 4(x^2 + y^2) = 5(2xy)$. Cộng hai vế của BĐT (1) với $25(x^2 + y^2)^2 + 16(2xy)^2$ ta thu được :

$41[(x^2+y^2)^2 + (2xy)^2] \geq [5(x^2+y^2) + 4(2xy)]^2$

$\geq 41^2$ hay $(x^2 + y^2)^2 + (2xy)^2 \geq 41$

$\Leftrightarrow x^4 + y^4 + 6x^2y^2 \geq 41.$

Đẳng thức xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \\ 4(x^2 + y^2) = 5(2xy) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x, y) = (1, 2) \\ (x, y) = (2, 1) \end{array}\right.$$

Do đó giá trị nhỏ nhất của P bằng 41, đạt được $\Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 2$.

PHẠM HÙNG

Nhà giáo Phạm Quốc Phong, sinh ngày : 20.10.1951, quê quán : Đức Hòa, Đức Thọ, Hà Tĩnh.

Cựu học sinh chuyên Toán khóa I, ĐHSP Vinh. Hiện nay là giáo viên Toán trường THPT Hồng Lĩnh, Hà Tĩnh. Là tác giả của một số bài báo đăng trên tạp chí TH&TT. Nhà giáo Phạm Quốc Phong tâm sự : Từ khi còn là học sinh cũng như bây giờ là thầy giáo Toán, tôi thấy rằng báo Toán học và Tuổi trẻ là không thể thiếu đối với người yêu toán học và dạy toán. Mỗi người đều thu hoạch được những điều bổ ích trên báo Toán và hãy làm cho báo Toán mãi mãi là niềm tự hào như chính bản thân nó".

PHƯƠNG TRÌNH CÁT TUYẾN CỦA ĐƯỜNG CONG

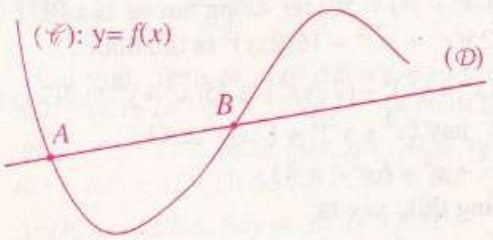
PHẠM QUỐC PHONG

Bài toán viết phương trình (PT) đường thẳng được đưa vào từ lớp 9 và xuyên suốt chương trình toán THPT : trong đại số, hình giải tích, cho đến bài toán khảo sát hàm số. Bài viết này trình bày kĩ thuật viết phương trình cát tuyến của đường cong bằng cách viết PT đường thẳng qua 2 điểm nhưng không cần tìm tọa độ 2 điểm đó. THTT số 236 (2/1997) đã từng đề cập đến vấn đề này trong bài "Phương pháp viết gián tiếp phương trình đường thẳng".

Hệ phương trình đặc trưng và phương trình hệ quả

Cho đường cong $(\mathscr{C})$ có PT $y = f(x)$

Đường thẳng $(\mathcal{D})$ cắt đường cong $(\mathscr{C})$ tại hai điểm phân biệt A và B được gọi là cát tuyến qua A,B của đường cong ấy.



Khi đường thẳng $(\mathcal{D})$ cắt đường cong $(\mathscr{C})$: $y = f(x)$ tại các điểm A,B có hoành độ thoả mãn PT $g(x) = 0$, thì tọa độ của A, B thỏa mãn hệ PT

$$(*)\quad \begin{cases} y = f(x) & (1) \\ g(x) = 0 & (2) \end{cases}$$

PT hệ quả của hệ PT (*) có dạng

$$y = f(x) + Q(x)g(x)$$

trong đó $Q(x)$ là biểu thức của x với hệ số bất định. Nếu ta chọn được $Q(x)$ sao cho $f(x) + Q(x)g(x) = ux + v$ (dạng nhị thức bậc nhất) thì tọa độ của A, B đều thỏa mãn PT $y = ux + v$, đó chính là PT của cát tuyến cần tìm mà không cần tìm tọa độ của A, B.

Hệ (*) được gọi là *hệ PT đặc trưng* của cát tuyến PT (3) gọi là *PT hệ quả* của hệ PT đặc trưng.

Phương trình (1) được gọi là *phương trình tung độ*.

Phương trình (2) được gọi là *phương trình hoành độ*.

Ví dụ 1: Viết PT đường thẳng $(\mathcal{D})$, biết rằng $(\mathcal{D})$ cắt parabol $(\mathcal{P})$: $y = x^2 + mx + 5m$ (m là tham số) tại các điểm có hoành độ thoả mãn PT $3x^2 + 7mx - \sqrt{3} = 0$.

Lời giải. Toạ độ giao điểm A,B của $(\mathcal{P})$ và $(\mathcal{D})$ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y = x^2 + mx + 5m & (1) \\ 3x^2 + 7mx - \sqrt{3} = 0 & (2) \end{cases}$$

Đặt $y = x^2 + mx + 5m + Q(x)(3x^2 + 7mx - \sqrt{3})$

Để triệt tiêu biểu thức chứa x^2 ta chọn $Q(x) = -\dfrac{1}{3}$ thì $y = \left(m - \dfrac{7}{3}m\right)x + 5m + \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{4}{3}mx + 5m + \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad (3)$$

Ta thấy rằng PT (2) luôn có 2 nghiệm phân biệt (do $ac < 0$), nên (3) là PT đường thẳng $(\mathcal{D})$ phải tìm.

Chú ý : Cát tuyến chỉ tồn tại khi hệ đặc trưng có nghiệm.Vì thế lập luận PT hoành độ có nghiệm là không thể thiếu.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = \dfrac{13x-9}{x^2+1}$ có đồ thị là $(\mathscr{C})$.

1. Viết PT nối các điểm cực đại, cực tiểu của hàm số.

2. Chứng minh $(\mathscr{C})$ có 3 điểm uốn thẳng hàng.

Lời giải. Tập xác định của hàm số là R. Đặt $f(x) = \dfrac{13x-9}{x^2+1}$ thì

$$f'(x) = \frac{13(x^2+1)-(13x-9)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-13x^2+18x+13}{(x^2+1)^2}$$

Đặt $h(x) = 13x^2 - 18x - 13$.

1) Để ý PT $h(x) = 0$ có hai nghiệm trái dấu (do $ac < 0$) và cũng là 2 nghiệm của $f'(x)$ nên hàm số $f(x)$ có cực đại và cực tiểu.

Toạ độ các điểm cực trị là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y=f(x) \\ f'(x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=f(x) \\ h(x)=0 \end{cases} \qquad (*)$$

Để vế phải của PT hệ quả

$$y = \frac{13x-9+P(x)(13x^2-18x-13)}{x^2+1}$$

có dạng bậc nhất ta đặt $P(x) = ax + b$ và cần chọn a, b để tử thức chia hết cho mẫu thức.

$13ax^3+(13b-18a)x^2 + (13-13x-18b)x-9-13b$
$= (x^2+1)(13ax+13b-18a) + (13-26a-18b)x + (18a-26b-9)$.

Để đa thức dư bằng 0 cần giải hệ PT

$\begin{cases} -26a-18b+13 = 0 \\ 18a-26b-9 = 0 \end{cases}$ được $a = \dfrac{1}{2}$, $b = 0$, thay vào đa thức thương được $y = \dfrac{13}{2}x - 9$, đây là PT đường thẳng nối điểm cực đại và điểm cực tiểu của hàm số.

2) $f''(x) = \dfrac{2(13x^3-27x^2-39x+9)}{(x^2+1)^3}$

Ta thấy $y'' = 0 \Leftrightarrow 13x^3 - 27x^2 - 39x + 9=0$
$\Leftrightarrow (x - 3)(13x^2 + 12x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow x = 3 ; x = \dfrac{-6\pm5\sqrt{3}}{13}$ (3)

suy ra $(\mathscr{C})$ có 3 điểm uốn.

Toạ độ ba điểm uốn là nghiệm của hệ PT :

$$\begin{cases} y=f(x) \\ y''=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{13x-9}{x^2+1} \\ 13x^3-27x^2-39x+9=0 \end{cases}$$

PT hệ quả của hệ trên có dạng

$$y = \frac{13x-9+P(x)(13x^3-27x^2-39x+9)}{x^2+1}$$

Đặt $P(x) = b$, chia tử thức cho mẫu thức được
$13bx^3 - 27bx^2 + (-39b + 13)x + 9b - 9$
$= (x^2+1)(13bx - 27b) + (-52b+13)x + 36b-9$

Cho đa thức dư bằng 0, nghĩa là giải hệ PT

$\begin{cases} -52b+13=0 \\ 36b-9=0 \end{cases}$ được $b = \dfrac{1}{4}$. Thay vào đa thức thương được $y = \dfrac{13}{4}x - \dfrac{27}{4}$. Toạ độ 3 điểm uốn thỏa mãn PT đường thẳng này nên 3 điểm uốn thẳng hàng.

(Kì sau đăng tiếp)

PHÁT ĐỘNG ĐỢT THI ĐUA XUẤT BẢN - IN - PHÁT HÀNH SGK LỚP 3, LỚP 8

Ngày 28.1.2004 tại Hội trường NXB Giáo dục ở Hà Nội đã diễn ra Lễ phát động đợt thi đua xuất bản - in - phát hành sách giáo khoa mới lớp 3, lớp 8 và sách giáo khoa thí điểm lớp 11. Dự lễ phát động có ông Nguyễn Văn Trang, Phó Ban chỉ đạo đổi mới chương trình SGK, Vụ trưởng Vụ GD Trung học, ông Viện trưởng Viện Chiến lược và Chương trình giáo dục, ông Quyền Vụ trưởng Vụ GD Tiểu học, các ông Phó Tổng Giám đốc NXB Giáo dục cùng toàn thể biên tập viên, cán bộ NXB Giáo dục, đại diện các nhà in SGK tại Hà Nội. TS. Nguyễn Văn Trang đã giao nhiệm vụ xuất bản SGK mới lớp 3, lớp 8 và thí điểm lớp 11 cho NXB Giáo dục. PGS. TS. Vũ Dương Thụy, Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NXBGD đã phát động đợt thi đua.

Ngày 9.2.2004 đã tiến hành Lễ phát động đợt thi đua xuất bản, in, phát hành SGK mới lớp 3, lớp 8 và lớp 11 tại NXB Giáo dục ở Tp. Hồ Chí Minh. Dự lễ phát động có ông Ngô Trần Ái, Chủ tịch HĐ Quản trị kiêm Tổng Giám đốc NXBGD, các ông Phó Tổng Giám đốc NXBGD cùng toàn thể biên tập viên, cán bộ NXBGD, đại diện các nhà in SGK tại Tp. Hồ Chí Minh.

PV

CÁC LỚP TRUNG HỌC CƠ SỞ

Bài T1/320. (Lớp 6).

Tổng $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{17}+\frac{1}{18}$ bằng $\frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản (các mẫu số ở các số hạng của tổng là các số tự nhiên liên tiếp từ 2 đến 18). Chứng minh rằng b chia hết cho 2431.

ĐỖ VĂN ĐẢM
(GV THCS Yên Mỹ, Yên Mô, Ninh Bình)

Bài T2/320. (Lớp 7).

Tam giác ABC có $AB > AC$, chân đường cao AH nằm trong cạnh BC. Đường phân giác của góc ABC và góc ACB cắt AH theo thứ tự tại E và F. Chứng minh rằng $BE > EF + FC$

NGUYỄN MINH HÀ
(GV PTCTT ĐHSP Hà Nội)

Bài T3/320. Tìm hai bộ ba số nguyên dương $a \geq b \geq c$ và $x \geq y \geq z$ sao cho tổng ba số của bộ này bằng tích ba số của bộ kia.

NGUYỄN DUY LIÊN
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T4/320. Giải phương trình

$$(x-2)\sqrt{x-1}-\sqrt{2}x+2=0$$

ĐẶNG QUỐC CHẤN
(GV THCS Nam Sơn, Nam Trực, Nam Định)

Bài T5/320. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $\sqrt{4x-x^3}+\sqrt{x+x^3}$ với $0 \leq x \leq 2$.

NGUYỄN QUANG LONG
(SV K46 XD2, ĐH Xây dựng Hà Nội)

Bài T6/320. Hai đường tròn tâm O và tâm O' cắt nhau tại P và Q. Tiếp tuyến chung của chúng gần P tiếp xúc với đường tròn (O) tại A và với đường tròn (O') tại B. Tiếp tuyến của (O) tại P cắt (O') tại C và tiếp tuyến của (O') tại P cắt (O) tại D. Gọi M là điểm đối xứng của P qua điểm giữa của AB. Đường thẳng AP cắt BC tại E và đường thẳng BP cắt AD tại F. Chứng minh rằng $AMBEQF$ là lục giác nội tiếp.

VŨ ĐÌNH HÒA
(GV ĐHSP Hà Nội)

Bài T7/320. Dựng tam giác ABC biết ba điểm P, Q, R trong đó P là điểm đối xứng của A qua B, Q là điểm đối xứng của B qua C, R là điểm đối xứng của C qua A.

HOÀNG HÙNG
(GV THCS Chu Văn An, Hải Phòng)

CÁC LỚP TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

Bài T8/320. Chứng minh các đẳng thức sau với số nguyên dương n :

a) $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}C_n^k.C_{n+k-1}^{k-1}=1$

b) $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}.k^n}{2k-1}C_n^k=\frac{(n!)^2.2^n}{(2n)!}$

TẠ VIỆT TÔN
(SV K46 AIT ĐH KHTN Hà Nội)

Bài T9/320. Giải hệ phương trình n ẩn sau với số nguyên dương n :

$$\begin{cases}\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+...+\sqrt{x_n}=n\\ \sqrt{x_1+8}+\sqrt{x_2+8}+...+\sqrt{x_n+8}=3n\end{cases}$$

Hãy tổng quát hóa bài toán.

TRẦN NGỌC THẮNG
(SV K50A khoa Toán Tin, ĐHSP Hà Nội)

Bài T10/320. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$$f(x)=\sqrt{2}\sin x+\sqrt{15-10\sqrt{2}\cos x}$$

TRẦN NAM DŨNG
(GV ĐH KHTN Tp. Hồ Chí Minh)

Bài T11/320. Gọi r và R lần lượt là bán kính các đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp của một tam giác ABC. Gọi p và p' lần lượt là chu vi ΔABC và $\Delta A'B'C'$, trong đó A', B', C' là các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp với các cạnh của ΔABC. Chứng minh rằng : $\frac{r}{R}\leq\frac{p'}{p}\leq\frac{1}{2}$

HỒ QUANG VINH
(Hà Nội)

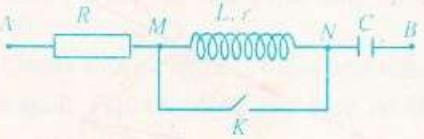
Bài T12/320. Cho hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$ cạnh $AB = a$. Qua điểm E trên cạnh CD (E khác C, D) dựng đường thẳng cắt các đường thẳng AA_1 và B_1C_1 tại M và N theo thứ tự. Qua điểm M dựng đường thẳng cắt các đường thẳng BC và C_1D_1 lần lượt tại F và P. Hãy xác định vị trí điểm E sao cho tam giác MNP có chu vi nhỏ nhất và tính chu vi đó.

NGUYỄN XUÂN HÙNG
(GV THPT Lam Sơn, Thanh Hóa)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/320. Cho mạch điện như hình vẽ : $u_{AB} = 180\sqrt{2}\sin\omega t$ (V), $L = 0{,}4$(H). Khi khóa K đóng và khi K mở biểu thức của dòng điện lần lượt là : $i_d = 2\sqrt{2}\sin(\omega t + \pi/3)$ (A),

$$i_m = 2\sqrt{6}\sin(\omega t - \pi/6) \text{ (A)}$$



1) Chứng minh rằng $r = 0$.

2) Xác định R, Z_L, Z_C.

3) Xác định chu kì của dòng xoay chiều.

CHU VĂN BIÊN
(ĐH Hồng Đức, Thanh Hóa)

Bài L2/320. Một điện tích điểm q, khối lượng m được treo vào một điểm cố định qua một sợi dây nhẹ, không giãn và cách điện, chiều dài l. Ở vị trí cân bằng, điện tích q nằm ở tâm của một vòng tròn tích điện đều với điện tích Q cùng dấu với q. Vòng cố định nằm ngang và có bán kính R. Tìm chu kì dao động nhỏ của q.

NGUYỄN XUÂN QUANG
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/320. (for 6th grade)

Write the sum of 18 fractions $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{17}, \frac{1}{18}$ in the form of an irreducible fraction $\frac{a}{b}$. Prove that b is divisible by 2431.

T2/320. (for 7th grade)

Given a triangle ABC with $AB > AC$, the foot of its altitude AH lies inside BC. The angled-bisectors of $\widehat{ABC}$ and of $\widehat{ACB}$ cut AH respectively at E and F. Prove that $BE > EF + FC$.

T3/320. Find positive integers $a \ge b \ge c$ and $x \ge y \ge z$ so that $\begin{cases} a + b + c = xyz \\ x + y + z = abc. \end{cases}$

T4/320. Solve the equation

$$(x-2)\sqrt{x-1} - \sqrt{2}x + 2 = 0$$

T5/320. Find the greatest value of the expression

$$\sqrt{4x - x^3} + \sqrt{x + x^3} \text{ where } 0 \le x \le 2.$$

T6/320. The circle (O) with center O cuts the circle (O') with center O' at P and Q. Their common tangent (nearer to P) touches (O) at A, (O') at B. Let C be the point of intersection of the tangents to (O) at P with the circle (O'). Let D be the point of intersection of the tangents to (O') at P with the circle (O). Let M be the point such that AB and PM have common midpoint. The line AP cuts BC at E and the line BP cuts AD at F. Prove that $AMBEQF$ is a hexagone inscribed in a circle.

T7/320. Construct a triangle ABC with given P, Q, R so that B is the midpoint of AP, C is the midpoint of BQ, A is the midpoint of CR.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T8/320. Prove the following equalities for positive integer n :

a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} C_n^k . C_{n+k-1}^{k-1} = 1$

b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}.k^n}{2k-1} C_n^k = \frac{(n!)^2.2^n}{(2n)!}$

T9/320. Solve the following system of equations of n unknowns

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \ldots + \sqrt{x_n} = n$$

$$\sqrt{x_1 + 8} + \sqrt{x_2 + 8} + \ldots + \sqrt{x_n + 8} = 3n$$

(n is a given positive integer).

Generalize the problem.

T10/320. Find the greatest value of the function

$$f(x) = \sqrt{2}\sin x + \sqrt{15 - 10\sqrt{2}\cos x}$$

T11/320. Let r and R be respectively the inradius and the circumradius of triangle ABC. Let p and p' be respectively the perimeter of ΔABC and $\Delta A'B'C'$ where A', B', C' are the touching points of BC, CA, AB with the incircle. Prove that : $\frac{r}{R} \le \frac{p'}{p} \le \frac{1}{2}$.

T12/320. Let be given a cube $ABCDA_1B_1C_1D_1$ with side $AB = a$. From a point E on the side CD (E distinct from C, D) draw a line cutting the lines AA_1 and B_1C_1 respectively at M and N. From M draw a line cutting the lines BC and C_1D_1 respectively at F and P. Determine the position of E so that the perimeter of triangle MNP attains its least value and calculate this least value.

Bài T1/316. (Lớp 6). *Xét các số gồm 7 chữ số phân biệt mà các chữ số đó thuộc tập hợp {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}.*

1) Hỏi có ba số a, b, c nào mà a + b = c ?

2) Hỏi có hai số khác nhau a, b nào mà a chia hết cho b ?

Lời giải. Mỗi số gồm 7 chữ số phân biệt mà các chữ số đó thuộc tập hợp {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} khi chia cho 9 có số dư bằng số dư của tổng các chữ số $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$ khi chia cho 9, nghĩa là có số dư bằng 1.

1) Giả sử có ba số a, b, c mà $a + b = c$. Vì a, b khi chia cho 9 đều có số dư là 1 nên $a + b$ khi chia cho 9 có số dư là 2, nhưng c chia cho 9 có số dư 1. Điều mâu thuẫn này chứng tỏ không tồn tại các số a, b, c mà $a + b = c$.

2) Giả sử $a = b \times n$. Vì $b \times 7 \geq 1234567 \times 7 > 7654321 \geq a$ nên $0 < n < 7$. Với $b = 9k + 1$ thì $a = b \times n = (9k + 1) \times n = 9kn + n$, mà a chia cho 9 dư 1 nên $n = 1 \Rightarrow a = b$, trái giả thiết. Vậy không có hai số khác nhau a, b mà a chia hết cho b.

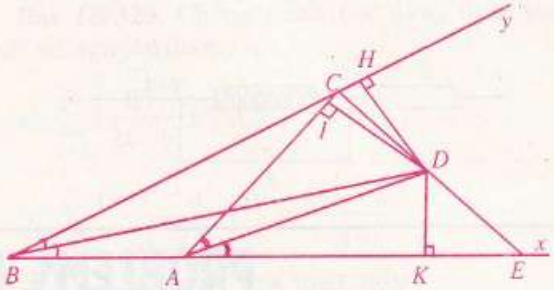
Nhận xét. Một số bạn đọc không kĩ đề bài nên chỉ xét các số có một chữ số và nhỏ hơn 8. Các bạn sau có lời giải đúng :

Phú Thọ : *Tạ Hồng Hà*, 6A3, *Ninh Thanh Tùng*, 6A1, THCS Lâm Thao ; **Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Thị Tươi*, 6A, THCS Yên Lạc ; **Hải Dương :** *Trần Trung Đức*, 6A, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách ; **Nam Định :** *Nguyễn Lâm Phúc*, 6A4, THCS Trần Đăng Ninh, Tp. Nam Định ; **Nghệ An :** *Vũ Đức Hoàn*, 6A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, *Nguyễn Thị Thu Nga*, 6A, THCS Quán Hành, Nghi Lộc ; **Bình Định :** *Phan Thị Phương Ly*, 6A2, THCS Ngô Mây, Phù Cát, *Nguyễn Thanh Tùng*, 6A10, THCS Quang Trung II, Tp. Quy Nhơn.

VIỆT HẢI

Bài T2/316. (Lớp 7). *Cho tam giác ABC có $\widehat{ABC} = 30^o$ và $\widehat{BAC} = 130^o$. Gọi Ax là tia đối của tia AB. Đường phân giác của góc ABC cắt đường phân giác của góc CAx tại D. Đường thẳng BA cắt đường thẳng CD tại E. Hãy so sánh các độ dài AC và CE.*

Lời giải. Giả sử Cy là tia đối của tia CB. Dựng DH, DI, DK lần lượt vuông góc với các đường thẳng BC, CA, AB. Từ giả thiết bài ra ta có : $DI = DK$ và $DK = DH \Rightarrow DI = DH$. ($I$ phải nằm trên tia CA vì nếu I thuộc tia đối của tia CA thì $DI > DH$). Vậy CD là tia phân giác của góc $\widehat{ACy}$. Từ đó : $\widehat{ACD} = \widehat{DCy} = \dfrac{130^o + 30^o}{2} = 80^o$.



Mặt khác $\widehat{CAE} = 180^o - 130^o = 50^o$. Do đó $\widehat{CEA} = 50^o$, suy ra ΔCAE cân tại C, hay $AC = CE$.

Nhận xét. Sau đây là các bạn có lời giải gọn hơn cả :

Hà Nội : *Hà Văn Hiếu*, 7A20, THCS Giảng Võ, Ba Đình; **Vĩnh Phúc :** *Đại Thị Ánh*, 7A, THCS Yên Lạc, Yên Lạc ; **Hà Tây :** *Trần Ngọc Thúy*, 7B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa ; **Thanh Hóa :** *Lê Thị Nga*, 8D, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn ; **Nghệ An :** *Dương Ngọc Chính*, 7B, THCS Hưng Chính, Hưng Nguyên, *Dương Ngọc Sơn*, 7B, THCS Đặng Thai Mai, Tp. Vinh, *Lưu Văn Trung*, 7A, THCS Nguyễn Trãi, Tân Kỳ, *Tăng Hồng Trường*, 7A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu ; **Hà Tĩnh :** *Vương Bằng Việt*, 7/1, THCS Nam Hà, Tx. Hà Tĩnh ; **Thừa Thiên – Huế :** *Nguyễn Khoa Thi*, 6², THCS Phú Thanh, Phú Vang ; **Đà Nẵng :** *Hồ Thị Hoàng Oanh*, 6/2, THCS Tây Sơn, Q. Hải Châu ; **Đắk Lắk :** *Phan Duy Bá Hoành*, 7D, THCS Tân Lợi, Tp. Buôn Ma Thuột ; **Khánh Hòa :** *Võ Thái Thông*, 8/4, Trường Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh.

HỒ QUANG VINH

Bài T3/316. *Tìm tất cả các cặp số nguyên tố p, q biết rằng $p^3 - q^5 = (p+q)^2$* (1)

Lời giải. Kí hiệu $\mathscr{P}$ là tập hợp các số nguyên tố. Từ (1) và do $p, q \in \mathscr{P}$ nên $p^3 - q^5 > 0$ hay $p^3 > q^5 \geq 2^5$. Vậy $p > 3$ và do đó p không chia hết cho 3.

• Nếu $q \vdots 3$ thì $q = 3$ (do $q \in \mathscr{P}$). Thay $q = 3$ vào (1) ta được : $p^3 - 3^5 = (p + 3)^2 \Leftrightarrow p^3 - p^2 - 6p - 252 = 0 \Leftrightarrow (p - 7)(p^2 + 6p + 36) = 0 \Rightarrow p - 7 = 0 \Leftrightarrow p = 7$. Vậy $p = 7$, $q = 3$ thỏa mãn (1) là một cặp số nguyên tố cần tìm.

• Nếu $q \not\equiv 3 \pmod 3$, ta xét các trường hợp :

+ Nếu $\begin{cases} p \equiv 1 \pmod 3 \\ q \equiv 1 \pmod 3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} p \equiv 2 \pmod 3 \\ q \equiv 2 \pmod 3 \end{cases}$

thì $p^3 - q^5 \equiv 0 \pmod 3$, $(p+q)^2 \equiv 1 \pmod 3$ nên không thỏa mãn (1).

+ Nếu $\begin{cases} p \equiv 1 \pmod 3 \\ q \equiv 2 \pmod 3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} p \equiv 2 \pmod 3 \\ q \equiv 1 \pmod 3 \end{cases}$

thì $p^3 - q^5 \equiv \pm 1 \pmod 3$, $(p+q)^2 \equiv 0 \pmod 3$ cũng không thỏa mãn (1).

Vậy $p = 7$, $q = 3$ là cặp số nguyên tố duy nhất thỏa mãn (1).

Nhận xét. Đa số các bạn tìm được kết quả đúng của bài toán. Các bạn sau có lời giải tốt hơn : **Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Xuân Thọ*, 9B, THCS Vĩnh Yên, Tx. Vĩnh Yên ; **Phú Thọ :** *Cao Quyết Thắng*, 9A, THCS Phong Châu, Tx. Phú Thọ ; **Nam Định :** *Cao Mạnh Hùng*, 8A, THCS Yên Định, Hải Hậu ; **Hải Dương :** *Hoàng Tiến Đạt*, 8A, THCS Ngô Gia Tự, Tp. Hải Dương ; **Thái Nguyên :** *Nguyễn Thu Hiền*, 9A2, THCS Chu Văn An, Tp. Thái Nguyên ; **Thanh Hóa :** *Lê Quang Trường*, 9D, THCS Lê Quý Đôn, Bỉm Sơn, *Lê Viết Tuấn*, 9B, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoằng Hóa ; **Nghệ An :** *Trịnh Văn Nam*, 9C, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, *Trương Việt Đức*, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương ; **Hà Tĩnh :** *Lê Sỹ Hạnh*, 9B, THCS Nghèn, Can Lộc ; **Đắc Lắc :** *Võ Văn Tuấn*, 7A5, THCS Buôn Hồ, Krông Buk ; **Đồng Nai:** *Tạ Hoàng Long*, 9/8, THCS Nguyễn Trãi, Xuân Thọ, Xuân Lộc.

TRẦN HỮU NAM

Bài T4/316. *Giải hệ phương trình :*

$$\begin{cases} 20.\dfrac{y}{x^2} + 11y = 2003 & (1) \\ 20.\dfrac{z}{y^2} + 11z = 2003 & (2) \\ 20.\dfrac{x}{z^2} + 11x = 2003 & (3) \end{cases}$$

Lời giải. Từ (1), ta có $y\left(\dfrac{20}{x^2}+11\right) = 2003 \Rightarrow$ $y > 0$. Tương tự, từ (2), (3) $\Rightarrow z > 0$, $x > 0$. Vì hệ không đổi khi ta hoán vị vòng quanh đối với x, y, z nên không mất tính tổng quát có thể giả thiết $x = \max(x, y, z)$, nghĩa là $x \ge y$, $x \ge z$.

Trừ theo từng vế của (3) cho (1) được :

$$20\left(\frac{x}{z^2} - \frac{y}{x^2}\right) + 11(x-y) = 0$$

$$20(x^3 - yz^2) + 11x^2z^2(x-y) = 0 \qquad (4)$$

Vì $x \ge y > 0$, $x \ge z > 0$ nên dễ thấy $x - y \ge 0$ và $x^3 - yz^2 \ge 0$.

Do đó PT (4) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = yz^2 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z$.

Thay kết quả đó vào PT (1), ta được

$$\frac{20}{x} + 11x = 2003$$

$$\Leftrightarrow 11x^2 - 2003x + 20 = 0$$

Vậy hệ có nghiệm là $x = y = z =$

$$= \frac{2003 + d\sqrt{4011129}}{22} = \frac{2003 + 3d\sqrt{445681}}{22}$$

với $d = 1, -1$.

Nhận xét. 1. Khi giải bài toán trên, nhiều bạn đã đưa ra giả thiết $x \ge y \ge z$ (!?), điều đó là không đúng vì vai trò của x, y, z trong hệ không như nhau. Một số bạn đặt $\dfrac{1}{x} = a$, $\dfrac{1}{y} = y$, $\dfrac{1}{z} = c$ rồi giải tương tự như trên :

2. Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Phú Thọ : *Lê Hải Nam*, 8A3, THCS Hạ Hòa, *Lương Đức Hoàng*, 9A, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh ; **Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Hữu Kiên* và *Nguyễn Kim Thuật*, 9A, THCS Yên Lạc, *Nguyễn Xuân Thọ*, 9B, THCS Vĩnh Yên ; **Nam Định :** *Cao Mạnh Hùng*, 9B, THCS Yên Định, Hải Hậu ; **Hải Phòng :** *Vũ Hoài Nam*, 7C2, THCS Trần Phú II, Quận Lê Chân ; **Hải Dương :** *Hoàng Đình Phương*, 9B, THCS Lê Quý Đôn ; **Quảng Ngãi :** *Nguyễn Tấn Hưng*, 7A, THCS Tịnh Châu, Sơn Tịnh ; **Khánh Hòa :** *Võ Thái Thông*, 8/4, THCS Ngô Gia Tự, Cam Ranh, *Nguyễn Thị Hoàng Anh*, 9^1, THCS Đinh Tiên Hoàng, Ninh Hòa ; **Đắc Lắc :** *Võ Văn Tuấn*, 7A5, THCS Buôn Hồ, Krông Buk.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T5/316. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $\dfrac{a}{\sqrt{b}} + \dfrac{b}{\sqrt{c}} + \dfrac{c}{\sqrt{a}}$ *trong đó các số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện* $a + b + c \ge 3$.

Lời giải. Gọi biểu thức trên là A. Ta có :

$$A^2 = \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + 2\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{c}} + 2\frac{b\sqrt{c}}{\sqrt{a}} + 2\frac{c\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Áp dụng BĐT Cô-si cho bốn số dương ta được

$$\frac{a^2}{b} + \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{c}} + \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{c}} + c \ge 4a \qquad (1)$$

$$\frac{b^2}{c} + \frac{b\sqrt{c}}{\sqrt{a}} + \frac{b\sqrt{c}}{\sqrt{a}} + a \ge 4b \qquad (2)$$

$$\frac{c^2}{a} + \frac{c\sqrt{a}}{\sqrt{b}} + \frac{c\sqrt{a}}{\sqrt{b}} + b \ge 4c \qquad (3)$$

Cộng theo từng vế của (1), (2) và (3) ta suy ra $A^2 \ge 3(a+b+c) \ge 9 \Rightarrow A \ge 3$.

Có đẳng thức $A = 3$ khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng 3.

Nhận xét. Hầu hết các bạn đều sử dụng bất đẳng thức Bu-nhia–cốp–xki cho các bộ ba số. Một số bạn sử dụng

những bất đẳng thức quen thuộc khác hoặc kết hợp nhiều bất đẳng thức để thu được cách giải ngắn gọn.

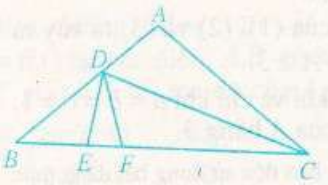
Sau đây là danh sách các bạn có lời giải tốt :

Nghệ An : *Trịnh Văn Nam*, 9C, *Nguyễn Cảnh Toàn*, 8A, THCS Cao Xuân Huy, *Lê Ngọc Thạch, Trương Việt Đức, Nguyễn Thanh Tuấn*, 9A, *Nguyễn Tú Diễn, Lê Đình Toàn*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, *Chu Thị Hằng Nga*, 9A, *Nguyễn Trường Anh*, 9B, THCS Bạch Liêu, *Phạm Công Hùng*, 9B, Hermann Gmeiner ; **Thanh Hóa:** *Lê Thị Hạnh*, 7A5, THCS Quang Trung, *Lê Xuân Thống Nhất, Lê Ngọc Tuấn*, 9B, THCS Nhữ Bá Sỹ, *Nguyễn Bá Tuấn Anh*, 9B, *Lê Quang Trường*, 9D, THCS Lê Quý Đôn, *Lê Hữu Tuấn*, 9B, THCS Nhữ Bá Sỹ, *Vương Quốc Bắc*, 9A, THCS Quảng Ngọc, *Lê Trung Thành*, 9B, THCS Lê Hữu Lập ; **Tp. Hồ Chí Minh :** *Đoàn Đắc Thành*, 8A, THCS Nguyễn Du, *Nguyễn Xuân Đạt*, 9A6, THCS Vân Đồn ; **Khánh Hòa :** *Đỗ Thị Thinh*, 8K, THCS Thái Nguyên, *Phạm Thanh Toàn*, 10A6, THPT Lí Tự Trọng ; **Bình Thuận :** *Trương Thành Dũng*, 9A, THCS Hòa Đa ; **Phú Yên :** *Phan Thanh Tú Uyên*, 9A, THCS Lương Thế Vinh ; **Hà Nam :** *Nguyễn Mạnh An, Bùi Anh Tuấn, Nhữ Anh Tuấn*, 9B, THCS Trần Phú ; **Phú Thọ :** *Trần Mạnh Trung, Lương Đức Hoàng*, 9A, THCS Giấy Phong Châu, *Lê Hải Nam*, 8A3, THCS Hạ Hòa ; **Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Hoài Nam*, 9D, THCS Liên Bảo, *Trần Tấn Phong*, 8A, THCS Lập Thạch, *Đỗ Đình Khanh, Đoàn Mạnh Hùng*, 9A, THCS Yên Lạc ; **Thái Nguyên :** *Nguyễn Duy Thắng*, 9A, THCS Chu Văn An ; **Hà Tĩnh :** *Hồ Vũ Hải*, 9A, THCS Nguyễn Du, *Hoàng Minh Đức*, 9A, THCS Nguyễn Huy Tự ; **Thái Bình :** *Nguyễn Thị Mây*, 9Bm THCS Thanh Nê ; **Hà Nội :** *Nguyễn Kim Dũng*, 9A, Hà Nội - Amsterdam, *Trần Tuấn Anh*, 10A, chuyên Lý – ĐHKHTN ; **Hải Dương :** *Hoàng Đình Phương*, 9B, THCS Lê Quý Đôn, *Nguyễn Hữu Miên*, 9A, THCS Nam Hồng ; **Bắc Ninh :** *Nguyễn Hữu Cường*, 8B, THCS Yên Phong, *Nguyễn Đức Toản*, 9C, THCS Yên Phong ; **Bắc Giang :** *Thân Ngọc Thức*, 9A, THCS Nguyên Hồng ; **Nam Định :** *Ngô Tiến Đạt*, 12C5, THPT A – Hải Hậu ; **Hà Tây :** *Nghiêm Duy Thái*, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền ; **Thừa Thiên – Huế :** *Lê Hữu Điền Khuê*, 9/1, THCS Nguyễn Tri Phương, Tp. Huế.

PHAN DOÃN THOẠI

Bài T6/316. *Tam giác ABC với BC = a, AB = AC = b có đường phân giác góc ACB cắt cạnh AB tại D sao cho CD + DA = a. Chứng minh rằng $a^3 + b^3 = 3ab^2$.*

Lời giải. Trên BC lấy điểm E sao cho $BE = AD$. Suy ra $DC = EC$. Gọi DF là phân giác góc $\widehat{BDC}$. Từ CD là phân giác góc $\widehat{ACB}$ nên $AC \times BD = BC \times AD$. Từ đó $AB \times BD = BC \times BE$ nên $\Delta BDC \backsim \Delta BEA$. Suy ra $\widehat{BCD} = \widehat{BAE}$.



Do vậy $ADEC$ là tứ giác nội tiếp. Do đó ΔBDE là cân. Cùng với ΔCDE cân suy ra $4\widehat{C} + \frac{\widehat{C}}{2} = 180^o$ nên $\widehat{C} = 40^o$. Ta có $\widehat{BDF} = \widehat{FDC} = \widehat{ADC}$ $(= 60^o)$. Nên $\Delta DFC = \Delta DAC$. Từ tính chất đường phân giác ta có $BD = \frac{ab}{a+b}$, $AD = \frac{b^2}{a+b}$ nên $CD = \frac{a^2+ab-b^2}{a+b}$.

Suy ra $\frac{BD}{DC} = \frac{BF}{FC} \Rightarrow \frac{ab}{a^2+ab-b^2} = \frac{a-b}{b}$;

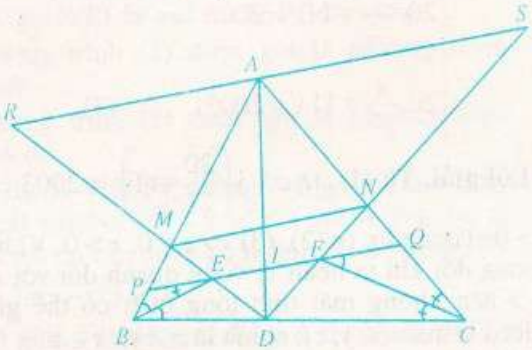
$ab^2 = a^3 + b^3 - 2ab^2$ hay $a^3 + b^3 = 3ab^2$ (đpcm).

Nhận xét. Các bạn có lời giải tốt :

Vĩnh Phúc : *Nguyễn Hữu Kiên*, 9A, THCS Yên Lạc, *Nguyễn Thị Hồng Mây*, 7A, THCS Lập Thạch ; **Bắc Ninh :** *Chu Trần Hùng*, 9A, THCS Hàn Thuyên, Lương Tài ; **Nam Định :** *Phạm Thị Huệ*, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên, *Trần Quang Huy*, 9A1, THCS Phùng Chí Kiên, Tp. Nam Định ; **Thanh Hóa :** *Nguyễn Khắc Cương*, 9C, THCS Thiệu Đô, Thiệu Hóa, *Nguyễn Lưu Bách*, 8C, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc ; **Nghệ An :** *Trần Xuân Tùng*, Diễn Đồng, Diễn Châu.

VŨ KIM THUY

Bài T7/316. *Giả sử D là một điểm trên cạnh BC (D khác B, C) của tam giác ABC. Gọi E và F lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABD và tam giác ACD. Chứng minh rằng nếu bốn điểm B, C, E, F cùng nằm trên một đường tròn thì* $\frac{AD+DB}{AD+DC} = \frac{AB}{AC}$



Lời giải. Theo tính chất đường phân giác ta có

- $\frac{AD}{BD} = \frac{AM}{MB} \Rightarrow \frac{AD+DB}{AD} = \frac{AM+MB}{AM} = \frac{AB}{AM} \Rightarrow \frac{AD+DB}{AB} = \frac{AD}{AM}$ (1)
- $\frac{AD}{DC} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{AD+DC}{AD} = \frac{AN+NC}{AN} = \frac{AC}{AN} \Rightarrow \frac{AD+DC}{AC} = \frac{AD}{AN}$ (2)

Ta sẽ chứng minh $AM = AN$.

Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của đường thẳng EF với các cạnh AB, AC. Ta có

$\widehat{APQ} = \widehat{ABE} + \widehat{PEB} = \widehat{ABE} + \widehat{BCF}$ (tứ giác $BEFC$ nội tiếp) $\Rightarrow \widehat{APQ} = \dfrac{\widehat{B}}{2} + \dfrac{\widehat{C}}{2}$.

Tương tự ta có $\widehat{AQP} = \dfrac{\widehat{B}}{2} + \dfrac{\widehat{C}}{2}$. Như vậy ΔAPQ cân $\Rightarrow AP = AQ$. Qua A kẻ đường thẳng song song với PQ, cắt DM và DN lần lượt ở R và S. Ta có

$$\frac{EP}{EI} = \frac{AP}{AI} = \frac{AQ}{AI} = \frac{FQ}{FI} \text{ hay } \frac{IE}{IF} = \frac{EP}{FQ} \quad (3)$$

Theo định lí Ta-let ta có $\dfrac{IE}{IF} = \dfrac{AR}{AS}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\dfrac{EP}{FQ} = \dfrac{AR}{AS}$ hay $\dfrac{EP}{AR} = \dfrac{FQ}{AS}$.

Mặt khác, $\dfrac{EP}{AR} = \dfrac{MP}{MA}$; $\dfrac{FQ}{AS} = \dfrac{NQ}{NA}$,

Từ đó $\dfrac{MP}{MA} = \dfrac{NQ}{NA}$, suy ra $MN \,//\, PQ$ mà $AP = AQ \Rightarrow AM = AN$. Kết hợp với (1) và (2) suy ra

$$\frac{AD+DB}{AB} = \frac{AD+DC}{AC} \text{ hay } \frac{AD+DB}{AD+DC} = \frac{AB}{AC}.$$

Nhận xét. Đây là bài toán khó, rất ít bạn tham gia gửi bài. Lời giải tốt có các bạn :

Vĩnh Phúc : *Nguyễn Kim Thuật, Nguyễn Hữu Kiên*, 9A, THCS Yên Lạc, huyện Yên Lạc ; **Hải Dương :** *Vũ Thị Quỳnh Hoa*, 9C, THCS Chu Văn An, Chí Linh, *Vũ Đình Quyền*, 9B, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách, *Hoàng Đình Phương*, 9/3, THCS Lê Quý Đôn, Hải Dương ; **Thanh Hóa :** *Lê Ngọc Tuấn*, 9B, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoằng Hóa, *Hoàng Vũ Hạnh*, 9B, THCS Trần Mai Ninh, Tp. Thanh Hóa ; **Khánh Hòa :** *Võ Thái Thông*, 8/4, THCS Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T8/316. *Với mỗi số tự nhiên $k > 0$, chứng minh rằng số $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{2k}$ luôn viết được trong dạng $a_k + b_k\sqrt{6}$ với a_k, b_k nguyên dương. Tìm hệ thức xác định dãy (a_k), dãy (b_k) với $k = 1, 2, 3, \ldots$ Chứng minh rằng với mọi $k \geq 2$ thì $a_{k-1}.a_{k+1} - 6b_k^2$ là một hằng số.*

Lời giải. (của bạn *Nguyễn Hoàng Việt*, 10A, PTCT ĐHSP **Hà Nội** và bạn *Nguyễn Hữu Đăng*, 10 Toán, THPT chuyên **Thái Bình**)

Ta chứng minh $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^{2k} = a_k + b_k\sqrt{6}$ bằng phương pháp quy nạp. Với $k = 1$ mệnh đề đúng. Giả sử mệnh đề đúng với k.

Ta có $\left(2+\sqrt{3}\right)^{2(k+1)} = \left(2+\sqrt{3}\right)^{2k}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2$

$= \left(a_k + b_k\sqrt{6}\right)\left(5+2\sqrt{6}\right)$

$= (5a_k + 12b_k) + (2a_k + 5b_k)\sqrt{6}$

Do $\sqrt{6}$ là số vô tỉ nên suy ra

$a_{k+1} = 5a_k + 12b_k$ (1) ; $b_{k+1} = 2a_k + 5b_k$ (2)

Từ (1) và (2) ta có

$a_{k+2} = 5a_{k+1} + 12b_{k+1} = 5a_{k+1} + 12(2a_k + 5b_k)$

$= 5a_{k+1} + 12\left(2a_k + 5.\dfrac{a_{k+1} - 5a_k}{12}\right)$

$= 10a_{k+1} - a_k$ với $a_1 = 5$, $a_2 = 49$.

Tương tự ta có

$b_{k+2} = 10b_{k+1} - b_k$ với $b_1 = 2$, $b_2 = 20$.

Đó là các hệ thức truy hồi xác định (a_k) và (b_k)

2) Từ (1) và (2) ta có $a_{k-1} = 5a_k - 12b_k$

Vậy $a_{k-1}a_{k+1} - 6b_k^2 =$

$= (5a_k - 12b_k)(5a_k + 12b_k) - 6b_k^2$

$= 25\left(a_k^2 - 6b_k^2\right) = 25(a_k + \sqrt{6}b_k)(a_k - \sqrt{6}b_k)$

$= 25\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^{2k}.\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^{2k} = 1^{2k} = 1$.

Thành thử : $a_{k-1}\,a_{k+1} - 6b_k^2 = 25, \forall k \geq 2$.

Nhận xét. Bài này được nhiều bạn tham gia giải với nhiều lời giải khác nhau. Các bạn có lời giải tốt bao gồm: **Vĩnh Phúc :** *Đỗ Việt Kiên*, 10A, THPT ch. Vĩnh Phúc ; **Nghệ An :** *Nguyễn Sỹ Bình*, 11, THPT chuyên Phan Bội Châu, *Lê Mạnh Hùng*, 10A2, PTCT ĐH Vinh ; **Thừa Thiên - Huế :** *Trương Hoàng Dũng*, 11T, Quốc học Huế; **Bình Định :** *Nguyễn Phúc Thọ, Đào Thanh Sử*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quy Nhơn ; **Quảng Trị :** *Nguyễn Văn Việt*, THPT Lê Quý Đôn ; **Quảng Ngãi :** *Trần Thị Ngọc Ngà*, THPT ch. Lê Khiết.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T9/316. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$\left(x^{a_1} + x^{a_2} + \ldots + x^{a_n}\right)\left(\frac{1}{x^{a_1}} + \frac{1}{x^{a_2}} + \ldots + \frac{1}{x^{a_n}}\right)$$

trong đó x là số thực dương, $x \neq 1$; m, n là các số tự nhiên, n chẵn và $a_1, a_2, \ldots, a_n$ thuộc đoạn $[m, m+1]$.

Lời giải. (của đa số các bạn)

Đặt $x^{a_i} = t_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Ta có

$t_i \in [x^m, x^{m+1}]$ và $(t_i - x^m)(t_i - x^{m+1}) \le 0$.

$\Leftrightarrow t_i^2 - (x+1)t_i x^m + x^{2m+1} \le 0$

Suy ra $t_i + x^{2m+1}\dfrac{1}{t_i} \le (x+1)x^m$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi hoặc $t_i = x^m$ hoặc $t_i = x^{m+1}$. Vậy nên, theo bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân, ta thu được

$$(x+1)nx^m \ge \sum_{i=1}^{n} t_i + x^{2m+1}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i} \ge$$

$$\ge 2\sqrt{x^{2m+1}\sum_{i=1}^{n} t_i \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i}}$$

Do đó $\dfrac{(x+1)^2 n^2 x^{2m}}{2^2 x^{2m+1}} \ge \sum_{i=1}^{n} t_i \sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{t_i}$

hay $(x^{a_1} + x^{a_2} + \ldots + x^{a_n})\left(\dfrac{1}{x^{a_1}} + \dfrac{1}{x^{a_2}} + \ldots + \dfrac{1}{x^{a_n}}\right)$

$\le \dfrac{n^2(x+1)^2}{4x}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi có k số a_i bằng m và k số còn lại bằng $m+1$ ($n = 2k$).

Nhận xét. Đây là một bài tập loại dễ nên rất nhiều bạn tham gia giải và gửi bài đến Tòa soạn. Các bạn đều giải đúng và theo cách trình bày đã nêu ở trên.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T10/316. *Xét phương trình $x^2 - 2x + \cos\alpha = 0$ với tham số α thuộc $(0 ; \pi/2)$.*

1) Chứng minh rằng phương trình trên luôn có 2 nghiệm thực dương x_1, x_2.

2) Gọi $f(x)$ là tam thức bậc hai với hệ số bậc cao nhất là 1, nhận hai số $t_1 = x_1^{x_1} + x_2^{x_1}$ và $t_2 = x_1^{x_2} + x_2^{x_2}$ làm nghiệm. Tìm tất cả các giá trị c sao cho $f(c) < 0$ với mọi α thuộc $(0 ; \pi/2)$.

Lời giải. 1. Không mất tính tổng quát ta giả sử $x_1 < x_2$. Giải phương trình bậc hai ta có $x_1 = 1 - \sqrt{1-\cos\alpha}$; $x_2 = 1 + \sqrt{1-\cos\alpha}$. Rõ ràng $x_2 > x_1 > 0$.

2. Đặt $u = \sqrt{1-\cos\alpha}$. Do $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ nên $0 < u < 1$ và chú ý $\lim\limits_{\alpha\to 0} u = 0$.

Theo BĐT Béc-nu-li ta có

$t_1 = x_1^{x_1} + x_2^{x_1} = (1-u)^{1-u} + (1+u)^{1-u} <$

$< 1 - u(1-u) + 1 + u(1-u) = 2$

$t_2 = x_1^{x_2} + x_2^{x_2} = (1-u)^{1+u} + (1+u)^{1+u} >$

$> 1 - u(1+u) + 1 + u(1+u) = 2$ (1)

Nhận xét $f(c) < 0 \Leftrightarrow t_1 < c < t_2$.

Mặt khác $\lim\limits_{\alpha\to 0} t_1 = \lim\limits_{u\to 0}\left((1-u)^{1-u} + (1+u)^{1-u}\right) = 2$,

$\lim\limits_{\alpha\to 0} t_2 = \lim\limits_{u\to 0}\left((1-u)^{1+u} + (1+u)^{1+u}\right) = 2$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $t_1 < c < t_2$ đúng với mọi $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ khi và chỉ khi $c = 2$. Vậy $c = 2$ là số duy nhất thỏa mãn $f(c) < 0$ với mọi $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

Nhận xét. Đây là bài toán giải tích dạng cơ bản. Rất nhiều bạn giải sai hoặc giải đúng nhưng lí luận rất dài, lòng vòng (do chưa nắm vững kiến thức cơ bản của giải tích). Các bạn sau có lời giải tốt :

Bắc Giang : *Nguyễn Tuyết Mai*, 12A, THPT NK Ngô Sĩ Liên ; **Vĩnh Phúc :** *Phạm Văn Hoàng*, 12A1, THPT chuyên ; **Hà Nội :** *Đỗ Hoàng Khiêm*, 11A1, PTCT–Tin, ĐHSP 1 ; **Hà Tây :** *Lê Đắc Hải*, 11L2, THPT chuyên Nguyễn Huệ ; **Ninh Bình :** *Đỗ Hoàng Huy*, 12T, THPT Lương Văn Tụy ; **Thanh Hóa :** *Trần Văn Thiện*, 12C5, THPT Như Thanh ; **Quảng Trị :** *Lê Tiến Triển*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T11/316. *Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Gọi O và R lần lượt là tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Gọi I_a, I_b, I_c lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp ứng với các góc đỉnh A, B, C. Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{2R} \le \frac{OI_a}{(a+b)(a+c)} + \frac{OI_b}{(b+c)(b+a)} + \frac{OI_c}{(c+a)(c+b)} \le \frac{1}{4r}.$$

Lời giải. (Dựa theo bạn *Nguyễn Trọng Hòa*, 11T, THPT Lam Sơn, **Thanh Hóa**).

Gọi AA_1, BB_1, CC_1 là các đường phân giác của ΔABC.

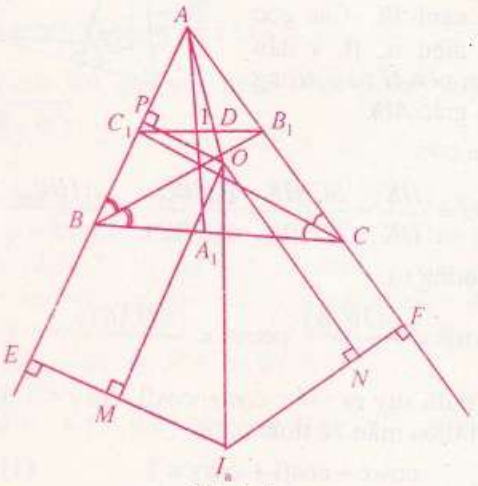
Dựng $I_aE \perp AB$ tại E ; $I_aF \perp AC$ tại F; $OM \perp I_aE$ tại M ; $ON \perp I_aF$ tại N; $OP \perp AB$ tại P (h. 1) thế thì ta có $\widehat{B_1AC_1} = \widehat{CAB} = \widehat{NOM}$ (1)

$AE = AF = p$; $OM = PE = p - \dfrac{c}{2} = \dfrac{a+b}{2}$ và

$ON = p - \frac{b}{2} = \frac{c+a}{2} \Rightarrow \frac{OM}{ON} = \frac{a+b}{c+a}$ (2)

Theo tính chất đường phân giác, ta dễ dàng tính được $AB_1 = \frac{bc}{c+a}$ và $AC_1 = \frac{bc}{a+b}$

$\Rightarrow \frac{AB_1}{AC_1} = \frac{a+b}{c+a}$ (3)



Hình 1

Từ (1). (2) và (3) ta có $\Delta AB_1C_1 \backsim \Delta OMN$ nên $\frac{B_1C_1}{MN} = \frac{AB_1}{OM} = \frac{2bc}{(a+b)(a+c)}$

$\Rightarrow B_1C_1 = \frac{2bcMN}{(a+b)(a+c)} = \frac{2bc\, OI_a \sin\widehat{MON}}{(a+b)(a+c)} =$

$= \frac{2bc\, OI_a \sin A}{(a+b)(a+c)} = \frac{abc\, OI_a}{R(a+b)(a+c)}$

$\Rightarrow OI_a = \frac{R(a+b)(a+c)B_1C_1}{abc}$

tương tự $OI_b = \frac{R(b+c)(b+a)C_1A_1}{abc}$,

$OI_c = \frac{R(c+a)(c+b)A_1B_1}{abc}$

Vậy $Q = \frac{OI_a}{(a+b)(a+c)} + \frac{OI_b}{(b+c)(b+a)} + \frac{OI_c}{(c+a)(c+b)}$

$= \frac{R}{abc}(A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1)$

a) Chứng minh $Q \ge \frac{1}{2R}$

• Nếu ΔABC không tù (h. 1) OA cắt B_1C_1 tại D, khi đó

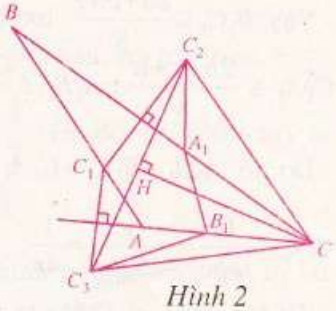
$R.B_1C_1 = OA.B_1C_1 \ge OA.B_1C_1.\sin\widehat{ADC_1} = 2.S_{OB_1AC_1}$,

tương tự $R.C_1A_1 \ge 2S_{OC_1BA_1}$, $R.A_1B_1 \ge 2S_{OB_1CA_1}$.

Do đó $R(A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1) \ge 2S_{ABC}$

$\Rightarrow Q \ge \frac{1}{2R}$ (*)

• Nếu ΔABC tù (giả sử $\widehat{A} > 90^o$) (h. 2). Gọi C_2, C_3 lần lượt là các điểm đối xứng của C_1 qua BC, AB thì $A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1 \ge C_2C_3$.



Hình 2

Dựng $CH \perp C_2C_3$. Vì $C < 90^o$ và do $\widehat{C_3CC_2} = 2\widehat{C}$ suy ra $CC_1 = CC_2 = CC_3 > CA = b$ (do $\widehat{CAC_1} > 90^o$) $\Rightarrow C_2C_3 = 2CC_3\sin C > 2b\sin C$.

Vậy $A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1 > 2bc\sin C$. Xét tương tự $A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1 > 2c.\sin B$. Suy ra

$A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1 > b\sin C + c\sin B = \frac{bc}{2R} + \frac{bc}{2R} = \frac{bc}{R} \ge \frac{2S_{ABC}}{R}$ nghĩa là $Q > \frac{1}{2R}$. (**)

b) Chứng minh $Q \le \frac{1}{4r}$.

Theo định lí hàm số côsin ta có

$B_1C_1^2 = AB_1^2 + AC_1^2 - 2AB_1.AC_1.\cos A$

$\Leftrightarrow B_1C_1^2 = \left(\frac{bc}{a+c}\right)^2 + \left(\frac{bc}{a+b}\right)^2$

$-2\frac{b^2c^2}{(a+c)(a+b)}.\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$= \frac{b^2c}{c+a}\left(\frac{c}{c+a} - \frac{b}{b+a}\right) + \frac{c^2b}{b+a}\left(\frac{b}{b+a} - \frac{c}{c+a}\right)$

$+\frac{bca^2}{(b+a)(c+a)}$

$= \frac{a^2bc}{(a+c)(a+b)} - \frac{abc(a+b+c)(b-c)^2}{(a+c)^2(a+b)^2} \le$

$\le \frac{a^2bc}{(a+c)(a+b)} \le \frac{a^2bc}{4\sqrt{ac}\sqrt{ba}} = \frac{\sqrt{ab}.\sqrt{ac}}{4} \le$

$$\le \left(\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{ac}}{2}\right)^2 \le \left[\frac{1}{4}\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a+c}{2}\right)\right]^2$$

$$= \frac{1}{36}\left(\frac{2a+b+c}{2}\right)^2$$

Vậy $B_1C_1 \le \frac{2a+b+c}{8}$ tương tự

$C_1A_1 \le \frac{2b+c+a}{8}$, $A_1B_1 \le \frac{2c+a+b}{8}$

Do đó $A_1B_1+B_1C_1+C_1A_1 \le \frac{1}{2}(a+b+c) = p$

và $Q \le \frac{Rp}{abc} = \frac{p}{4S_{ABC}} = \frac{1}{4r}$ (***)

Từ (*), (**) và (***) ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức đồng thời xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

Nhận xét. 1) Để chứng minh $Q \le \frac{1}{4r}$ rất nhiều bạn sử dụng kết quả ở bài T6/265 (THTT số tháng 7/1999) hoặc bài toán 4 trong bài *Một số bài toán liên quan tới các đường phân giác trong tam giác* của tác giả Bùi Tá Long ((Tuyển tập 5 năm THTT, NXBGD 2003, trang 122).

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt :

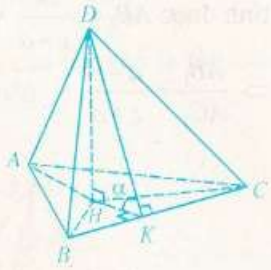
Hải Phòng : *Lê Trung Sơn*, 10T, THPT NK Trần Phú ; **Đà Nẵng :** *Đỗ Quốc Khánh*, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn ; **Đồng Tháp :** *Bùi Quốc Thanh*, 10T, THPT Sa Đéc ; **Phú Thọ :** *Đinh Đức Thành*, 11A1, THPT chuyên Hùng Vương ; **Khánh Hòa :** *Võ Thái Thông*, 8/4, THCS Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh ; **Hà Nam :** *Nhữ Anh Tuấn*, 9B, THCS Trần Phú, Phủ Lý ; **Nghệ An :** *Nguyễn Ngọc Cường*, $12A_1$, *Nguyễn Viết Khôi*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, Vinh, *Nguyễn Đức Tùng*, 10A1, khối PTCTT, ĐH Vinh ; **Tp. HCM:** *Nguyễn Hữu Tâm*, 12T, PTNK, ĐHQG Tp.HCM; **Hà Nội :** *Nguyễn Việt Anh*, 10A1, PTNK, ĐHQG Hà Nội ; **Hòa Bình :** *Bùi Văn Chiến*, 12T, THPT Hoàng Văn Thụ ; **Hải Dương :** *Nguyễn Duy Mạnh*, 10T, THPT Nguyễn Trãi.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài T12/316. *Xét các tứ diện ABCD có các cặp cạnh đối bằng nhau và số đo các góc nhị diện cạnh BC, CA, AB tương ứng là α, β, γ đều nhọn. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$T = \sqrt{\cos^2\alpha+\frac{1}{\cos^2\alpha}} + \sqrt{\cos^2\beta+\frac{1}{\cos^2\beta}} + \sqrt{\cos^2\gamma+\frac{1}{\cos^2\gamma}}$$

Lời giải. – Theo giả thiết thì $ABCD$ là một *tứ diện gần đều*, có các mặt là những tam giác bằng nhau : $\Delta BCD = \Delta ADC = \Delta DAB = \Delta CBA$ và do đó, các mặt có diện tích bằng nhau (kí hiệu là S).



Gọi H và K là hình chiếu (vuông góc) của đỉnh D lần lượt trên mặt đối diện ABC và trên cạnh BC. Các góc nhị diện α, β, γ đều nhọn nên H nằm trong tam giác ABC.

Ta có :

$$\cos\alpha = \frac{HK}{DK} = \frac{BC.HK}{BC.DK} = \frac{s(HBC)}{s(DBC)} = \frac{s(HBC)}{S}$$

Tương tự,

$$\cos\beta = \frac{s(HCA)}{S} ; \cos\gamma = \frac{s(HAB)}{S}.$$

Từ đó suy ra : $0 < \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma < 1$, đồng thời thỏa mãn hệ thức :

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 \qquad (1)$$

Áp dụng BĐT Bu–nhia–côp–xki, ta được :

$$(1^2+9^2)\left(\cos^2\alpha+\frac{1}{\cos^2\alpha}\right) \ge \left(\cos\alpha+\frac{9}{\cos\alpha}\right)^2$$

hay là :

$$\sqrt{82}.\sqrt{\cos^2\alpha+\frac{1}{\cos^2\alpha}} \ge \cos\alpha + \frac{9}{\cos\alpha} \qquad (2)$$

và hai BĐT tương tự (bằng cách thay α bởi β hoặc γ).

Cộng theo từng vế ba BĐT có dạng (2) đối với α, β, γ ta được : $T\sqrt{82} \ge$

$$\ge (\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)+9\left(\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos\beta}+\frac{1}{\cos\gamma}\right) \qquad (3)$$

Mặt khác, ta lại có BĐT quen thuộc :

$$\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos\beta}+\frac{1}{\cos\gamma} \ge \frac{9}{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma} \qquad (4)$$

Cuối cùng, từ (1), (3) và (4) ta được: $T \ge \sqrt{82}$.

Vậy : $\min T = \sqrt{82}$.

Dấu đẳng thức đạt được khi và chỉ khi dấu bằng xảy ra ở mọi BĐT trên $\Leftrightarrow \cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = \arccos\frac{1}{3} \Leftrightarrow ABCD$ là một *tứ diện đều*.

Nhận xét. 1) Bài toán này được khá đông các bạn tham gia giải và đa số các bạn đều cho lời giải như đã nêu ở trên. Đó là lời giải gọn gàng và đơn giản nhất, chỉ đơn thuần sử dụng hai BĐT Bu–nhi–a–côp–xki và Cô–si (2) và (4). Cách khác : nếu đặt $\cos\alpha = a_1$, $\cos\beta = a_2$, $\cos\gamma = a_3$; $\frac{1}{\cos\alpha} = b_1$, $\frac{1}{\cos\beta} = b_2$, $\frac{1}{\cos\gamma} = b_3$ thì từ hai bộ ba số dương a_1, a_2, a_3 ; b_1, b_2, b_3 ta có thể thiết lập được BĐT đại số sau :

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+\sqrt{a_3^2+b_3^2} \geq$$

$$\geq \sqrt{(a_1+a_2+a_3)^2+(b_1+b_2+b_3)^2} \qquad (5)$$

Sử dụng BĐT (5) ta thu được BĐT (6) sau :

$$T \geq \sqrt{(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)^2+\left(\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos\beta}+\frac{1}{\cos\gamma}\right)^2}$$

Sau đó, từ (1), (4) và (6) ta thu được kết quả như đã chỉ ra trong lời giải ở trên.

Nếu để ý rằng đặt $\cos\alpha = x$, $\cos\beta = y$, $\cos\gamma = z$ thì $0 < x, y, z < 1$ và $x+y+z = 1$. Và do đó, phần đại số của bài toán trở thành một trường hợp riêng của câu V. *Đề thi tuyển sinh đại học khối A năm 2003*. (Nội dung Đề thi cũng tìm $\min T$, duy chỉ có điều kiện $x+y+z \leq 1$ là tổng quát hơn). Cách tìm giá trị nhỏ nhất của T đã được chỉ ra trên tạp chí THTT số 314 (8/2003). Ngoài ra, các bạn *Phạm Thành Nam*, 11A1, THPT Liên Hà, Đông Anh, **Hà Nội**, *Lê Viết Ân*, 10^9, THPT Quốc học Huế, **Thừa Thiên – Huế**, *Nguyễn Tiến Dũng*, 10A1, THPT Thanh Hà, **Hải Dương** còn chỉ ra rằng (dựa vào bài viết trong số 314 của THTT) ta có thể khái quát hóa BĐT nêu trong bài toán bằng cách thay biểu thức T bởi :

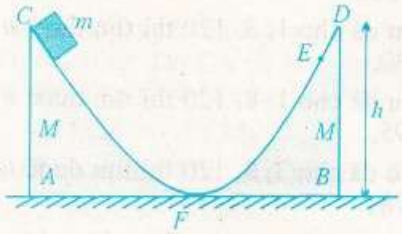
$$T_n = \sqrt[n]{x^n+\frac{1}{x^n}}+\sqrt[n]{y^n+\frac{1}{y^n}}+\sqrt[n]{z^n+\frac{1}{z^n}}$$

trong đó $0 < x, y, z < 1$ và $x+y+z = 1$

Khi đó ta được : $\min T = \sqrt[n]{9^n+1}$.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài L1/316. *Hai nêm A, B có cùng khối lượng M đặt sát nhau như hình vẽ nhưng đều có thể di chuyển trên mặt ngang. Một vật có khối lượng m ở con nêm A bên trái trượt từ độ cao h xuống. Hỏi vật m có thể lên đến độ cao nào ở nêm B bên phải. Bỏ qua mọi ma sát.*



Lời giải. Vật m di chuyển từ C đến chân F của nêm A bên trái (đồng thời nêm di chuyển sang bên trái), sau đó vật m tiếp tục di chuyển trên mặt ngang tới nêm B bên phải rồi leo lên nêm đó tới điểm cao nhất E có độ cao h_{max}. Kí hiệu $\vec{u}$ và $\vec{v}$ tương ứng là vận tốc của vật m và nêm A khi vật m tới chân F, áp dụng định luật bảo toàn động lượng (xét theo phương ngang) và định luật bảo toàn cơ năng, ta có :

$$\frac{mu^2}{2}+\frac{Mv^2}{2} = mgh \; ; \; mu = Mv \quad (1)$$

Sau đó vật m chuyển động trên mặt ngang với vận tốc $\vec{u}$ (do bỏ qua ma sát) và leo lên nêm B. Tới độ cao h_{max} vật m dừng lại và cùng với nêm có vận tốc V. Áp dụng các định luật bảo toàn động lượng và bảo toàn cơ năng ta lại có :

$$\frac{mu^2}{2} = \frac{(M+m)V^2}{2}+mgh_{max} \; ; \; mu = (M+m)V \quad (2).$$

Từ (1) và (2) rút ra :

$$h_{max} = \left(\frac{M}{M+m}\right)^2 h < h.$$

Nhận xét. Nhiều bạn không thấy rõ giai đoạn vật m chuyển động đều trên mặt ngang. Các bạn có lời giải đầy đủ và đúng :

Bắc Ninh : *Vũ Tuấn Linh*, 12 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh ; **Bắc Giang :** *Dương Trung Hiếu*, 11B, THPTNK Ngô Sĩ Liên ; **Đồng Nai :** *Nguyễn Huy Linh*, 11 Lí 2, THPT Lương Thế Vinh, Biên Hòa ; **Hà Tây :** *Lê Đắc Hải*, 11L2, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông ; **Bạc Liêu :** *Nguyễn Hồng Mai*, 11T, THPT chuyên Bạc Liêu ; **Thanh Hóa :** *Bùi Văn Trung*, 10F, THPT Lam Sơn ; **Thái Nguyên:** *Nguyễn Tất Hùng*, 11A1, THPT Lương Ngọc Quyến; **Ninh Bình :** *Đinh Xuân Khuê*, 10 Lí, THPT Lương Văn Tuy ; **Tp. Hồ Chí Minh :** *Hoàng Nguyễn Anh Tuấn*, 11 Lí, PTNK, ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh ; **Gia Lai :** *Lê Thanh Cường*, 11C, THPT Hùng Vương, Pleiku ; **Hà Tĩnh :** *Hoàng Nguyễn Việt Cường*, 12 Lí, K7, THPT chuyên Hà Tĩnh ; **Phú Thọ :** *Nguyễn Ngọc Thạch*, 11B, *Nguyễn Bảo Trung*, 12H, THPT chuyên Hùng Vương ; **Nghệ An :** *Thái Bá Sơn*, K30A3, *Phan Thanh Trường*, 10A3, THPT chuyên Phan Bội Châu ; **Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Ngọc Hưng*, *Trần Văn Phú*, 10A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc, *Nguyễn Phú Thành*, 12A1, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch ; **Hưng Yên :** *Trần Quốc Việt*, *Hoàng Huy Đạt*, 11 Lí, THPT chuyên Hưng Yên.

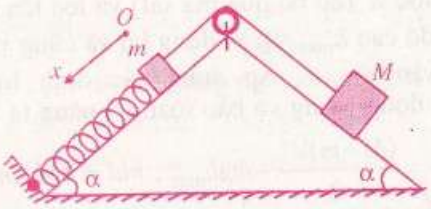
MAI ANH

Bài L2/316. *Một lò xo có độ cứng k = 75(N/m) độ dài tự nhiên l_0 = 20 (cm), một đầu cố định, đầu kia mắc vào một vật khối lượng m = 300 (g) và vật m được nối với vật M = 450 (g) bằng một sợi dây không dãn qua một ròng rọc. Hai vật nằm trên hai mặt phẳng nghiêng đều có góc nghiêng $\alpha = 53,13^0$ (xem hình). Lò xo, sợi*

dây và ròng rọc đều có khối lượng không đáng kể. Giữ vật M sao cho lò xo có độ dài $l_1 = 21$ (cm) rồi thả nhẹ nhàng.

1. Chứng minh rằng hệ dao động điều hòa. Viết phương trình dao động của vật M. (Chọn trục tọa độ có phương trùng với phương dao động của vật. Chiều dương hướng xuống dưới. Lấy gốc thời gian tại thời điểm vật bắt đầu chuyển động).

2. Giả sử hệ đang dao động như ở câu trên, khi độ dài lò xo là 21cm và vật M đang đi xuống thì



dây nối hai vật bị đứt. Chứng minh vật m tiếp tục dao động điều hòa. Tìm biên độ dao động của vật m (lấy $g = 10(m/s^2)$ và $\pi^2 = 10$).

Lời giải. Vì hai vật được nối với nhau bằng một sợi dây không dãn nên chỉ cần xét chuyển động của vật m. Xét trục Ox có gốc O tại vị trí cân bằng của m và có phương song song với mặt phẳng nghiêng. Khi m ở vị trí cân bằng, lò xo bị dãn một đoạn $\Delta l_0 = \dfrac{(M-m)g\sin\alpha}{k} \approx 1{,}6$cm.

Tại vị trí x, hợp lực tác dụng lên hệ là : $F = -mg\sin\alpha - k(x + \Delta l_0) + Mg\sin\alpha = -kx$. Áp dụng định luật II Niutơn ta có : $(M + m)x'' = F = -kx \Rightarrow x'' + \omega^2 x = 0$, với $\omega^2 = \dfrac{k}{m+M}$.

Phương trình này có nghiệm : $x = A\sin(\omega t + \varphi)$: chứng tỏ vật m (hệ) dao động điều hòa với tần số góc $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m+M}} = 10$rad/s. Theo đề bài, lúc $t = 0$, $x_0 = 21 - (20 + 1{,}6) = -0{,}6$ (cm) và $v_0 = 0$. Từ đó, phương trình dao động là :

$$x = 0{,}6\sin\left(10t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ (cm)}.$$

2) Ngay trước khi dây đứt, vật m có vị trí $x_1 = -0{,}6$cm và vận tốc $v_1 = 0$. Lập luận tương tự như trên, ta thấy tại vị trí x hợp lực tác dụng lên vật m là $F = -kx$. Áp dụng định luật II Niutơn ta có:

$$mx'' = -kx \Rightarrow x'' + \omega_1 x = 0, \text{ với } \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

(Xem tiếp trang 7)

DIỄN ĐÀN DẠY HỌC TOÁN

2. Lời giải của Phéc–ma

Trong bài trước, tiếp theo bài toán của Đi–ô–phăng ta đã nêu bài toán Phéc–ma : *"Tìm bốn số nguyên sao cho tích của hai số bất kì cộng thêm 1 là một số chính phương"*.

Phéc–ma đã tìm ra ba số có tính chất đó : 1, 3 và 8. Ông đặt vấn đề tìm số nguyên dương n sao cho 1, 3, 8, n là một lời giải của bài toán. Muốn thế, chỉ cần các số $n+1$, $3n+1$, $8n+1$ là số chính phương. Đặt $n = x^2 + 2x$, thì $n + 1 = (x + 1)^2$ là số chính phương nếu x nguyên. Do đó chỉ cần tìm số nguyên dương x sao cho $3x^2 + 6x + 1 = u^2$ và $8x^2 + 16x + 1 = v^2$ với u, v nguyên (1).

Trừ theo từng vế của hai đẳng thức trên ta được $5x(x+2) = v^2 - u^2$. Bằng cách lấy $v + u = 5x$ và $v - u = x + 2$, ta được $v = 3x + 1$ và $u = 2x - 1$. Thay các kết quả này vào một trong hai phương trình của (1) ta được $x(x - 10) = 0 \Rightarrow x = 10$ (vì $x > 0$). Do đó $n = 120$.

Việc tìm n dưới dạng $x^2 + 2x$ làm cho ta nghi ngờ rằng còn có thể tìm được n dưới dạng khác và do đó còn có những giá trị $n \neq 120$ để cùng với 1, 3, 8 làm thành một lời giải của bài toán. Song bằng máy tính người ta đã kiểm tra rằng cho tới số $10^{1700000}$ thì $n = 120$ là duy nhất. Ngày nay, người ta đã chứng minh được 120 là số duy nhất để 1, 3, 8, 120 là một nghiệm của bài toán.

Nhận xét. Nếu xuất phát từ ba số 1, 3, 8 thì tìm được số 120 để bốn số là nghiệm của bài toán Phéc–ma. Thay thế vai trò của ba số xuất phát ta có :

– Nếu đã cho 1, 3, 120 thì tìm được $n = 8$ và $n = 1680$,

– Nếu đã cho 1, 8, 120 thì tìm được $n = 3$ và $n = 4095$,

– Nếu đã cho 3, 8, 120 thì tìm được $n = 1$ và $n = 11781$.

Như vậy, phép tương tự hóa cho phép ta thiết lập những bài toán tương tự song kết quả có thể không tương tự như kết quả của bài toán ban đầu.

TƯƠNG TỰ HÓA và TỔNG QUÁT HÓA

(Tiếp theo số 318 tháng 12/2003)

PHAN DOÃN THOẠI
(NXB Giáo dục)

3. Bài toán Ơ–le.

Ơ–le đã tổng quát hóa bài toán Đi–ô–phăng như sau : *"Cho số hữu tỉ a, tìm bốn số hữu tỉ x, y, z, v sao cho mỗi số sau xy+a, xz+a, yz+a, xv+a, yv+a, zv+a đều là bình phương của một số hữu tỉ"*.

Khi $a = 1$, Ơ–le đã đưa ra một lời giải cho bài toán Đi–ô–phăng khác với kết quả của Đi–ô–phăng đã nêu ở bài trước. Lời giải đó như sau. Giả sử $x = r$, $y = s$ là hai số nguyên tùy ý sao cho $rs+1 = t^2$. Đặt $z = r + s + 2t$, giả sử điều kiện đối với x, y, z được thỏa mãn : $xy + 1 = t^2$, $xz + 1 = (t + r)^2$, $yz + 1 = (t + s)^2$.

Ta còn phải tìm điều kiện của r, s sao cho các số sau là số chính phương :

$rv+1$, $sv+1$, $(r+s+2t)v + 1$.

Nếu ba số này là số chính phương thì tích của chúng cũng là số chính phương :

$1 + 2(r+s+t)v + [(r+s+t)^2 - 1]v^2 + rs(r+s+st)v^3$.

Ơ–le đã đồng nhất tích trên với số chính phương : $\left[1+(r+s+t)v-\frac{1}{2}v^2\right]^2$.

Khi đó đồng nhất thức thu được tương đương với : $v = 4t(t + r)(t+s)$.

Chú ý rằng $rs = t^2 - 1$, ta có thể kiểm tra :

$rv+1 = (2t^2 + 2tr - 1)^2$

$sv + 1 = (2t^2 + 2ts - 1)^2$

$(r+s+2t)v + 1 = (4t^2 + 2tr + 2ts - 1)^2$.

Tóm lại, với r và s là hai số nguyên tùy ý đã cho sao cho $rs + 1 = t^2$ thì ta tìm được các số nguyên z, v thỏa mãn điều kiện bài toán. Trong trường hợp đặc biệt $r = 3$ và $s = 8$, ta có $t = 5$ hoặc $t = -5$. Với $t = 5$, một nghiệm của bài toán là : 3, 8, 21, 2080. Với $t = -5$, một nghiệm của bài toán là 3, 8, 1, 120.

Bạn có suy nghĩ gì về bài toán Ơ–le khi $a \neq 1$?

4. Bài toán tương tự đối với các số Phi–bô–na–xi

Dãy số Phi–bô–na–xi (Fibonacci) được cho bằng công thức truy hồi $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ với $n = 0, 1, 2, ...$

Đó là một dãy số có nhiều tính chất lí thú và có rất nhiều ứng dụng trong toán học. Chẳng hạn, bằng phép quy nạp theo các số tự nhiên n, r người ta đã chứng minh được :

$$F_nF_{n+2r} + (-1)^2 F_r^2 = F_{n+r}^2,\ n \in N^*,\ r \in N \quad (2).$$

Vào năm 1977, V. E. Hoggat và G.E. Bergum (Viết tắt là H–B) đã trở lại với bài toán Phéc–ma. Họ đã nhận thấy rằng các số nguyên 1, 3, 8 tương ứng bằng các số hạng F_2, F_4, F_8 của dãy Phi–bô–na–xi, và $120 = 4.2.3.5 = 4.F_3.F_4.F_5$. Từ kết quả này H–B xét bài toán tổng quát sau : *"Với mỗi số nguyên $t \geq 0$ tìm số nguyên dương n, sao cho mỗi số sau đây:*

$$nF_{2t}+1,\ nF_{2t+2}+1,\ nF_{2t+4}+1 \quad (3)$$

là một số chính phương"

Từ (2) ta suy ra rằng với mọi số nguyên $t \geq 0$, các số nguyên

$$F_{2t}F_{2t+2}+1,\ F_{2t+2}F_{2t+4}+1,\ F_{2t+4}F_{2t}+1 \quad (4)$$

là những số chính phương. Do đó H–B đã chọn $n = 4.F_{2t+1}.F_{2t+2}.F_{2t+3}$. Bạn đọc có thể kiểm tra rằng n thỏa mãn (3).

Như vậy, với mỗi số nguyên $t \geq 0$, bốn số F_{2t}, F_{2t+2}, F_{2t+4}, $4.F_{2t+1}.F_{2t+2}.F_{2t+3}$ là một nghiệm của bài toán Ơ–le. Kết quả thú vị này chứng tỏ tập nghiệm của bài toán Ơ–le là vô hạn và nghiệm {1, 3, 8, 120} mà Ơ–le chỉ ra chỉ là một trường hợp đặc biệt.

Sự tổng quát hóa bài toán Ơ–le cho thấy rằng bài toán được giải trong trường hợp tổng quát bao giờ cũng sáng sủa hơn về mặt phương pháp và kết quả thu được cũng cho thấy rõ bản chất của vấn đề. Tuy nhiên bạn đọc cũng cần lưu ý rằng đứng trước một bài toán cụ thể người ta luôn có xu hướng tổng quát hóa và việc làm này không phải lúc nào cũng thực hiện được.

Xung quanh bài toán Ơ–le cho dãy Phi–bô–na–xi còn nhiều bài toán tương tự lí thú khác. Bạn hãy thử bắt đầu sáng tạo xem, chắc chắn sẽ thu được những kết quả đẹp.

Kết quả cuộc thi thơ

MỪNG XUÂN GIÁP THÂN

Đúng là trong mỗi một người làm toán đều có một nhà thơ. Cuộc thi được mọi lứa tuổi bạn đọc hưởng ứng. Thơ người lớn viết chắc ý, đắt từ. Thơ các bạn trẻ hồn nhiên và rất lạ. Chỉ có hai bạn chẳng theo tám chữ đầu tiên (!). Chắc là mừng xuân vui quá hóa nhầm.

Các bạn đã làm nên một cuộc thi vui, nhiều ý nghĩa chào đón năm kỉ niệm 40 năm THTT.

"Rằng thơ chưa thật chắc tay
Nhưng tình với báo làm say lòng người".

Rất tiếc do khuôn khổ tờ báo chỉ chọn đăng được tiếp 6 bài. Các bạn Lương Thị Hồng Diễm, giáo viên trường TH thị trấn Tiên Lãng, Hải Phòng, Phan Xuân Đài, khối II, thị trấn Hương Khê, Hà Tĩnh, Trịnh Đức Thắng, Viện Chiến lược và Phát triển giao thông vận tải, 162 Trần Quang Khải, Hà Nội, Nguyễn Quang Huy, 10A10, THPT ch. Vĩnh Phúc, Nguyễn Xuân Lanh và Bùi Quốc Khánh, 11A1, THPT Lương Đắc Bằng, Hoằng Hóa, Nguyễn Thị Hường, 11A3, THPT Hoằng Hóa II, Thanh Hóa có bài đạt từng ý, từng câu. Bạn Hường có hai câu đầu:

"Bốn mươi năm danh đã nổi như cồn
Mươi năm nữa tiếng còn vang bốn bể..."

Hi vọng THTT tiệm cận được như vậy. Hẹn gặp lại các bạn yêu thơ vào Xuân Ất Dậu 2005.

Các bạn được giải cuộc thi thơ đầu xuân này :

Lê Hải Minh, thị trấn Liên Quan, Thạch Thất, Hà Tây; *Nguyễn Thạc Dũng*, lớp 2A, Cao học Toán, ĐHKHTN Hà Nội, *Phạm Hùng Quyết*, GV THPT Việt Đức, Hà Nội, *Nguyễn Đức Doanh*, Thư viện Đại học Quốc gia Hà Nội, *Nguyễn Thị Thu Hà*, 10A14, THPT Lục Nam, Bắc Giang, *Đào Văn Dũng*, khoa Toán Cơ Tin, ĐHKHTN Hà Nội , *Nguyễn Minh Hằng*, 6B, THCS Thành Công, Hà Nội, *Hoàng Việt Hòa*, 11K1, THPT Mĩ Đức A, Hà Tây.

Sau đây là sáu bài thơ :

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Bốn *thập kỉ tràn đầy sức trẻ*
Mươi *ngàn trang, ươm ước mơ xanh*
Năm *Thân tới, tuổi Xuân vừa chẵn*
Vì *gái, trai - bao lớp trưởng thành*
Bạn *trí thức, người thầy mẫu mực*
Trẻ, *già coi Tạp chí - Người thân !*
Yêu *khoa học, mê từng chuyên mục*
Toán *với Thơ, Xuân đã chấp vần.*

LÊ HẢI MINH
(TT. Liên Quan, Thạch Thất, Hà Tây)

TOÁN LÀ TRI ÂM

Bốn *phương ngời câu chúc*
Mươi *mốt Báo vào Xuân*
Năm *mới cùng nâng cốc*
Vì *Toán xây tình thâm.*
Bạn *báo Bốn mươi tuổi*
Trẻ *lắm ! Sức đang căng*
Yêu *nhau không hẹn ước*
Toán *đã là tri âm*

NGUYỄN THẠC DŨNG
(Lớp 2A, Cao học Toán, ĐHKHTN Hà Nội)

MỪNG 40 NĂM "TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ"

Bốn *phương náo nức thả thơ xuân*
Mươi *phút thảnh thơi lựa mấy vần :*
Năm *tháng thoi đưa, vừa bốn chục*
Vì *sao gân sức vẫn còn săn ?*

Bạn *đọc gần xa Bắc Trung Nam*
Trẻ *già trai gái thấy đều ham*
Yêu *tờ báo nhỏ, yêu tri thức*
*"**Toán** và Tuổi trẻ" sức trường xuân*

PHẠM HÙNG QUYẾT
(GV THPT Việt Đức, Hà Nội)

CHO TA BAO ĐIỀU

Bốn *mươi năm bền tựa núi non,*
Mươi *lăm năm nữa chắc còn tiến xa*
Năm *tháng Báo nở rộ hoa*
Vì *cây Toán học nước nhà tươi xanh*
Bạn *bè xa cũng nhiệt tình*
Trẻ *già đóng góp công mình, công ta.*
Yêu *mong báo đến mọi nhà*
*"**Toán** học Tuổi trẻ" cho ta bao điều.*

NGUYỄN ĐỨC DOANH
(Thư viện Đại học Quốc gia Hà Nội)

BÁO TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Bốn *chục năm cống hiến*
Mươi *mười đã thành công*

Năm này qua năm khác
Vì bạn đọc hiến dâng

***Bạn** nào say đọc báo*
***Trẻ** lâu và thông minh*
***Yêu** Số, Đại, yêu Hình*
***Toán** học và Tuổi trẻ*

NGUYỄN THỊ THU HÀ
(10A14, THPT Lục Nam, Bắc Giang)

BÁO BẠN THÂN

***Bốn** tuần mới có một tờ*
***Mươi** hôm đọc hết lại chờ số sau*
***Năm** Mùi mong hết thật mau*
***Vì** nghe báo mới rất giàu thông tin*
***Bạn** bè thường đọc đều khen*
***Trẻ** trung, bổ ích lại thêm nhiều quà*
***Yêu** báo, một cách thiết tha*
***Toán** học tuổi trẻ mãi là bạn thân*

HOÀNG VIỆT HÒA
(11K1, THPT Mĩ Đức A, Hà Tây)

VŨ THANH THÀNH

Giải đáp :

Ô CHỮ NĂM GIÁP THÂN

B	A	N	H	C	H	U	N	G
	D	U	A	H	A	N	H	
		N	G	U	Q	U	A	
				C	A	N	H	D	A	O
B	O	N	G	M	A	I				
			C	U	N	G	T	A	T	N	I	E	N
				N	A	M	Q	U	Y	M	U	I	
				G	I	A	O	T	H	U	A		
		B	A	N	P	H	A	O	H	O	A		
X	O	N	G	N	H	A							
				M	U	N	G	T	U	O	I		
		M	U	A	M	U	O	I					
				B	O	N	G	B	A	Y			
	C	H	O	V	I	E	N	G					

Ô chữ trình bày từ trên xuống dưới là các món ăn, phong tục... diễn ra theo thời gian của Tết :

1. Biểu tượng của đất theo sự tích trời tròn đất vuông : *bánh chưng*.

2. Món ăn chuẩn bị khá lâu trước Tết : *dưa hành*.

3. Mâm được bày trên bàn thờ suốt từ ngày ông Táo đến hết Tết Nguyên đán : *ngũ quả*.

4. Các gia đình miền Bắc thích có *cành đào* trong phòng khách.

5. Các gia đình ở phương Nam thích có *bông mai* trong ngày Xuân.

6. Việc mọi gia đình thường làm trước giao thừa : *cúng tất niên*.

7. Chúng ta chào tạm biệt *năm Quý Mùi*.

8. Đã đến giờ phút *giao thừa*.

9. Tưng bừng chào đón năm mới những phút đầu tiên : *bắn pháo hoa*.

10. Nếu bạn là người đến đầu tiên : *xông nhà*.

11. Phong tục mà trẻ nhỏ rất thích: *mừng tuổi*.

12. Nhiều bà mẹ ở Đồng bằng Trung du Bắc Bộ còn giữ phong tục này trong những ngày đầu năm âm lịch : *mua muối*. Tục ngữ : Đầu năm mua muối, cuối năm mua vôi.

13. Thứ đồ chơi bán nhiều trong ngày Mùng Một Tết : *bóng bay*.

14. Đông người, độc đáo vì họp đầu xuân và chỉ đúng 1 ngày : *chợ Viềng* (chỉ đúng 1 ngày mồng Tám tháng Giêng âm lịch). Các lễ hội khác hoặc hội hoa xuân đều nhiều ngày hơn.

Cột tô màu là CHÚC MỪNG NĂM MỚI.

Nhiều bạn không giải được dòng 12 và dòng 14. Ở dòng 12 chú ý là *nhiều bà mẹ*, dòng 14 cần chú ý *chỉ đúng 1 ngày*.

Các bạn được nhận quà của Câu lạc bộ : *Phan Đức Trung*, 11B6, THPT Sông Công, **Thái Nguyên** ; *Ngô Thị Nguyên*, 9A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông, **Phú Thọ** ; *Nguyễn Anh Tú*, 8B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa, **Hà Tây** ; *Nguyễn Tiến Thành*, 6A, THCS Võ Thị Sáu, **Yên Bái** ; *Nguyễn Đức Tâm*, 8E, THCS Cao Minh, Tx. Phúc Yên, **Vĩnh Phúc** ; *Vũ Thị Ngọc Ánh*, 12A3, THPT Yên Khánh A, **Ninh Bình**.

BÍNH NAM HÀ

Ai biết nhiều hơn ?

Năm 2004 này là 200 năm Quốc hiệu Việt Nam, 50 năm chiến thắng Điện Biên, 50 năm giải phóng Thủ đô Hà Nội. Bạn còn biết những sự kiện nào kỉ niệm chẵn chục năm trong năm 2004 này hay không ? Nếu bạn kể được nhiều nhất sẽ được giải của Câu lạc bộ. Sẽ có 5 giải cho 5 bạn biết nhiều nhất.

VŨ ĐÔ QUAN

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

Toán học và Tuổi trẻ
Mathematics and Youth

NĂM THỨ 41
Số 320 (2-2004)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT - Fax : 04.5144272
Email : toanhoctt@yahoo.com

TRONG SỐ NÀY

1 **Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary Schools**
Nguyễn Đức Trường – Ứng dụng của một hệ thức truy hồi

3 **Toán học và đời sống – Mathematics and Life**
Phan Thanh Quang – Toán học và cơ cấu các loại đồng tiền

4 *Nguyễn Khắc Minh* – Đề thi chọn học sinh giỏi quốc gia môn Toán lớp 12 THPT năm học 2002–2003 bảng A

8 **Chuẩn bị thi vào Đại học – University Entrance Preparation**
Đặng Vũ Hà – Hướng dẫn giải đề tự ôn thi số 1
Nguyễn Thanh Giang – Đề tự ôn thi số 2

10 Hướng dẫn giải đề thi tuyển sinh lớp 10 hệ THPT chuyên trường ĐHKHTN Hà Nội năm 2003

12 **Phương pháp giải toán – Math Problem Solving**
Phạm Quốc Phong – Phương trình cát tuyến của đường cong.

14 **Đề ra kì này – Problems in This Issue**
T1/320, ..., T12/320, L1, L2/320.

16 **Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems**
Giải các bài của số 316.

24 **Diễn đàn dạy học toán – Math Teaching Forum**
Phan Doãn Thoại – Tương tự hóa và tổng quát hóa (tiếp theo)

26 **Câu lạc bộ – Math Club**

Bìa 2 : Đường cong Hy-pô-xy-clô-it
Bìa 3 : **Toán học muôn màu – Multifarious Mathematics**
Chia hình thành 3 phần bằng nhau
Bìa 4 : **Giải trí toán học - Math Recreation**

Tổng biên tập :
NGUYỄN CẢNH TOÀN

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NXB Giáo dục
NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NXB Giáo dục
VŨ DƯƠNG THỤY

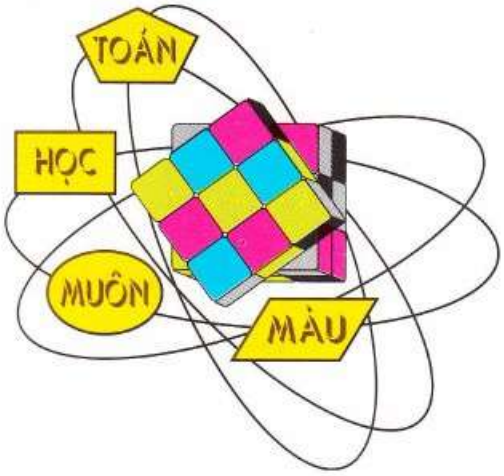
Trưởng ban biên tập : NGUYỄN VIỆT HẢI.
Biên tập : VŨ KIM THỦY, HỒ QUANG VINH.
Trị sự : VŨ ANH THƯ.
Trình bày : NGUYỄN THỊ OANH.
Đại diện phía Nam : TRẦN CHÍ HIẾU; 231 Nguyễn Văn Cừ, Q. 5, Tp. Hồ Chí Minh. ĐT : 08.8309049

ĐÓN ĐỌC THTT SỐ 321 (3/2004)

- Đề thi Cuộc thi giải toán đặc biệt kỉ niệm 40 năm THTT
- Đề tự ôn thi ĐH, CĐ số 3. Hướng dẫn giải các đề tự ôn thi số 1, số 2.
- Về một bài toán tính tổng trong kì thi ĐH.
- Đề thi tuyển sinh lớp 10 PTCTT ĐHSP Hà Nội 2003
- Phỏng đoán Kepler đã được chứng minh ?
- Phương trình cát tuyến của đường cong (tiếp theo)

Mời các bạn đặt mua TUYỂN TẬP 5 NĂM TẠP CHÍ TOÁN HỌC TUỔI TRẺ theo địa chỉ : Trung tâm Phát hành sách tham khảo NXB Giáo dục, 187B Giảng Võ, Hà Nội, ĐT: (04)5141253 hoặc liên hệ trực tiếp với Tòa soạn tạp chí THTT, 187B Giảng Võ, Hà Nội, ĐT : (04)5144272.

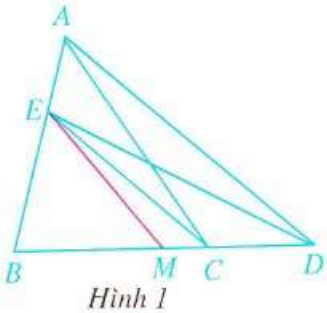
THTT



CHIA HÌNH THÀNH 3 PHẦN BẰNG NHAU

Ai cũng biết rằng trong tam giác ABD đường trung tuyến AM chia tam giác đó thành 2 hình có diện tích bằng nhau. Từ một điểm E trên cạnh AB ($EA < EB$) của ΔABC có thể chỉ kẻ 1 đường thẳng EM chia ΔABC thành hai hình có diện tích bằng nhau như ở hình 1 : Kẻ $AD//EC$, lấy trung điểm M của BD, nối EM. Ta có $S_{EBM} = S_{EMD} =$

$= S_{EMC} + S_{ECD} = S_{EMC} + S_{EAC} = S_{EMCA}$.



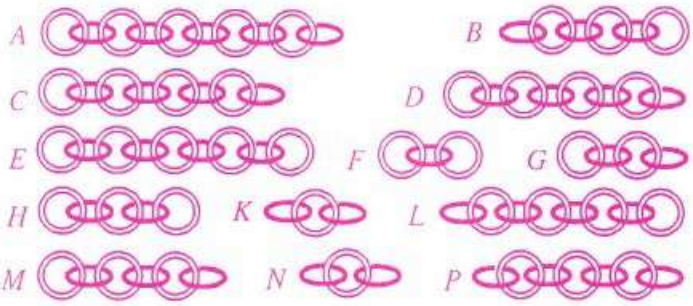
Hình 1

Dành cho bạn đọc

1) Từ điểm E trên cạnh AB của ΔABC hãy kẻ hai đường thẳng chia ΔABC thành ba hình có diện tích bằng nhau.

2) Làm như câu trên khi thay ΔABC bởi tứ giác $ABCD$.

Giải đáp : NỐI CHUỖI DÂY CHUYỀN



Hình 2

Kí hiệu các chuỗi với số vòng của nó như sau :

$A_{10}, B_6, C_8, D_8, E_9, F_3, G_4, H_5, K_3, L_8, M_6, N_3, P_7$ (h. 2)

Để tạo thành dây chuyền kín thì số vòng phải làm hở phải bằng số chuỗi còn lại (sau khi làm hở các vòng), gọi số đó là n ($n \le 13$). Số chuỗi bị làm hở tất cả các vòng (*chuỗi hở*) là $13-n$. Mỗi chuỗi có ít nhất 3 vòng nên xét số vòng làm hở thì $3.(13-n) \le n \Rightarrow 4n \ge 39 \Rightarrow n \ge 10$.

Số chuỗi còn lại càng ít thì số chuỗi hở càng nhiều $\Rightarrow$ số vòng của từng chuỗi hở càng ít. Khi hàn chú ý nối xen kẽ vòng to với vòng nhỏ.

1) Có nhiều cách nối dây chuyền trong 33 phút = (1 + 2) phút × 11 (vòng). Lúc đó $n = 11$, số chuỗi hở là 2. Chẳng hạn là các cặp chuỗi (H_5, B_6), (H_5, M_6), (G_4, P_7), (F_3, C_8), (F_3, D_8), (F_3, L_8), (K_3, C_8), (K_3, D_8), (K_3, L_8), (N_3, C_8), (N_3, D_8), (N_3, L_8). Có thể lấy cặp chuỗi (F_3, P_7), ..., và làm hở 1 vòng ở một chuỗi khác.

2) Thời gian ít nhất để nối dây chuyền là 30 phút = (1 + 2) phút × 10 (vòng)

Số chuỗi hở là 3, đó là các chuỗi (F_3, K_3, G_4), (F_3, N_3, G_4), (N_3, K_3, G_4). Có thể lấy 3 chuỗi hở F_3, K_3, N_3 và 1 vòng hở ở một chuỗi khác.

Nhiều bạn đã cho đáp số đúng, các bạn sau trình bày lời giải tốt, sớm, được nhận tặng phẩm :

1) *Chu Tiến Anh*, 11A1, THPT Yên Phong I, **Bắc Ninh**
2) *Trần Minh Tuấn*, 12K1, THPT Mỹ Đức A, **Hà Tây**
3) *Nguyễn Sao Mai*, 12I1, THPT Lam Sơn, **Tp. Thanh Hóa**
4) *Nguyễn Khánh Tùng*, 10T, THPT NK **Hà Tĩnh**
5) *Nguyễn Thị Thanh Thủy*, 9A1, THCS Vĩnh Niệm, Q. Lê Chân, **Hải Phòng**
6) *Lê Thị Huệ*, Sử 2A, ĐHSP Huế, **Thừa Thiên – Huế**

PHI PHI

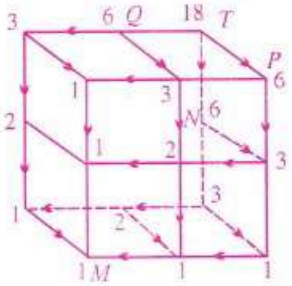
Giải đáp : KIẾN BÒ TRÊN BÁNH CHƯNG

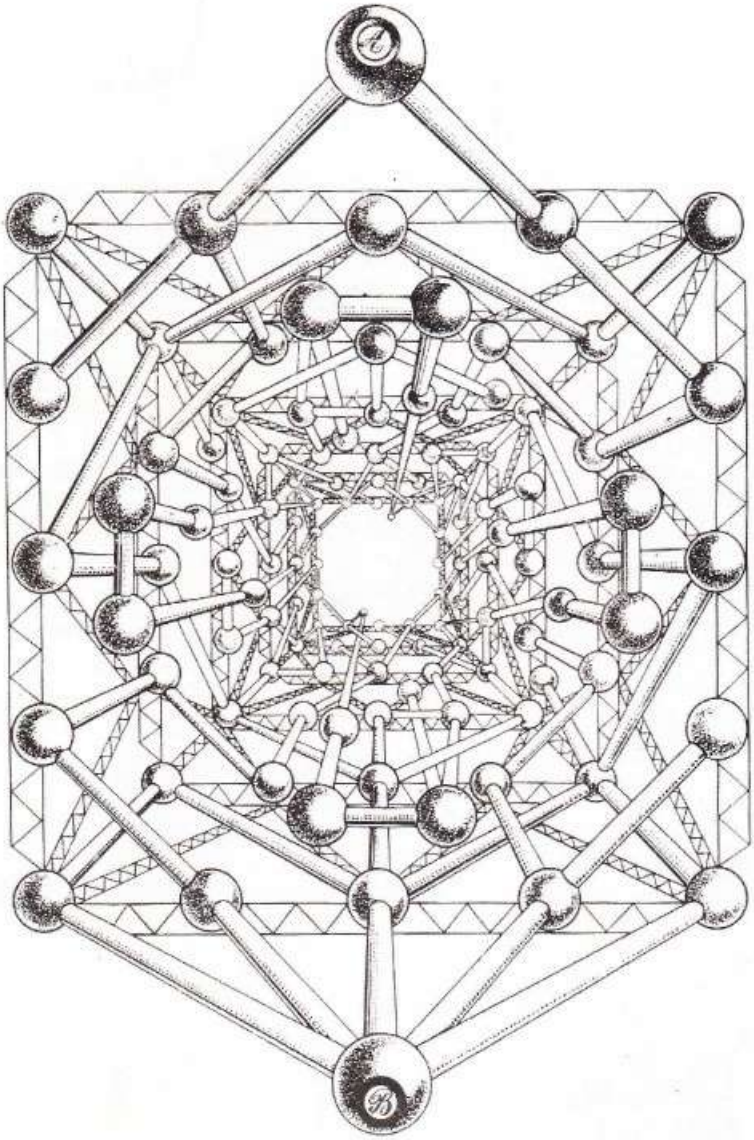
Từ điểm T có thể đến 3 đỉnh (điểm) gần nhất P, Q, N. Theo yêu cầu của đề bài từ mỗi điểm này chỉ có 6 cách đi đến M (hướng về M, ngắn nhất, không quay trở lại). Có thể tính được 6 cách đó khi xét các đỉnh tiếp theo (lần lượt có 3 cách rồi 2 hoặc 1 cách đi như con số ghi tại đỉnh đó).

Vậy từ T đến M có 18 cách đi.

Các bạn nhận được quà của Tòa soạn: *Đặng Việt Cường*, 10H1 Hà Nội - Amsterdam, *Lê Tuấn*, 10B2, THPT Sơn Tây, **Hà Tây**, *Phan Long Thành*, 12E, THPT Trần Nhật Duật, **Yên Bái**, *Vũ Văn Dũng*, K28E Toán, ĐHSP Hà Nội 2, Xuân Hòa, Mê Linh, **Vĩnh Phúc**.

VKT





DI CHUYỂN THEO TỌA ĐỘ

Hình bên biểu thị một tháp khổng lồ đang xây dựng hình chóp cụt đáy vuông nhìn ở phía trong từ dưới lên trên, bốn cạnh nằm về bốn hướng : Đông, Tây, Nam, Bắc. Tháp có nhiều tầng, các quả cầu rỗng bằng nhau thì cùng tầng. Một người cầm la-bàn di chuyển theo đường ống nối giữa các quả cầu từ quả cầu A ở phía Bắc đến quả cầu B. Bạn hãy soạn lệnh là dãy (x, y) biểu thị tọa độ cần di chuyển đến, trong đó x chỉ hướng (Đông, Tây, Nam, Bắc, Đông Bắc, Tây Bắc, Đông Nam, Tây Nam, Thẳng) (Thẳng là không chuyển hướng), còn y chỉ Lên hay Xuống tầng (Lên, Xuống) để hướng dẫn người đó đi được từ A đến B.

VÂN KHANH

ISSN : 0866-8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT22M4

Chế bản tại Tòa soạn
In tại Nhà máy in Diên Hồng, 187B phố Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 2 năm 2004

Giá : 3400 đồng
Ba nghìn bốn trăm đồng