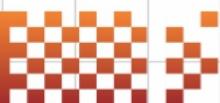
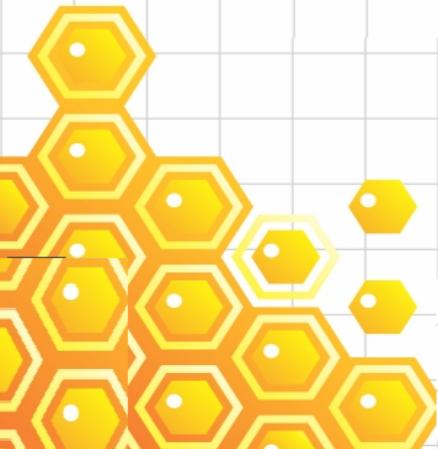




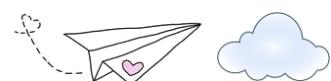
CHUYÊN ĐỀ:

LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC 11



MỤC LỤC

PHẦN 1 – ĐỀ BÀI	2
DẠNG 1. XÁC ĐỊNH ĐỒ THỊ HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC.....	2
DẠNG 2. XÁC ĐỊNH CHU KỲ HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC	7
DẠNG 3. TÍNH ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC.	8
DẠNG 4: XÁC ĐỊNH SỐ ĐIỂM BIỂU DIỄN CỦA PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CHO TRƯỚC TRÊN ĐƯỜNG TRÒN LƯỢNG GIÁC.....	12
DẠNG 5. BIỆN LUẬN NGHIỆM PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC KHÔNG CHỨA THAM SỐ	19
5.1. Tìm số nghiệm của phương trình lượng giác trên tập K	19
5.2. Tìm nghiệm dương nhỏ nhất và nghiệm âm lớn nhất của phương trình lượng giác:.....	21
5.3. Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình lượng giác trên tập K	23
DẠNG 6. TÌM ĐIỀU KIỆN CỦA THAM SỐ m ĐỂ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CHO TRƯỚC CÓ NGHIỆM.....	35
DẠNG 7. TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC	40
7.1. Tìm GTLN, GTNN sử dụng điều kiện $-1 \leq \sin x, \cos x \leq 1$	40
7.2. Tìm GTLN, GTNN dạng $y = a\sin x + b\cos x + c$	43
7.3. Tìm GTLN, GTNN sử dụng bất đẳng thức cổ điển..	47
PHẦN 2: BẢNG ĐÁP ÁN	50
PHẦN 3: ĐÁP ÁN CHI TIẾT	51
DẠNG 1. XÁC ĐỊNH ĐỒ THỊ HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC.....	51
DẠNG 2. XÁC ĐỊNH CHU KỲ HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC	56
DẠNG 3. TÍNH ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC.	58
DẠNG 4: XÁC ĐỊNH SỐ ĐIỂM BIỂU DIỄN CỦA PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CHO TRƯỚC TRÊN ĐƯỜNG TRÒN LƯỢNG GIÁC.....	62
DẠNG 5. BIỆN LUẬN NGHIỆM PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC KHÔNG CHỨA THAM SỐ	70
5.1. Tìm số nghiệm của phương trình lượng giác trên tập K	70
5.2. Tìm nghiệm dương nhỏ nhất và nghiệm âm lớn nhất của phương trình lượng giác:.....	73
5.3. Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình lượng giác trên tập K	76
DẠNG 6. TÌM ĐIỀU KIỆN CỦA THAM SỐ m ĐỂ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CHO TRƯỚC CÓ NGHIỆM.....	93
DẠNG 7. TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC	97



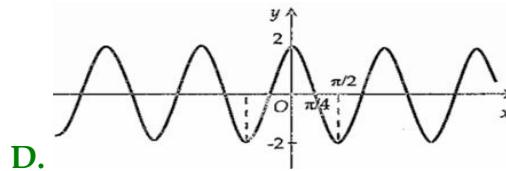
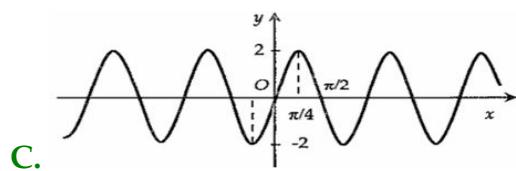
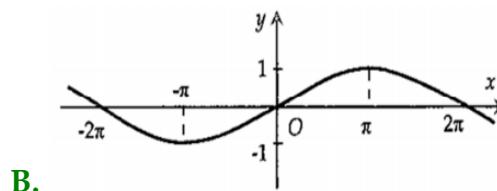
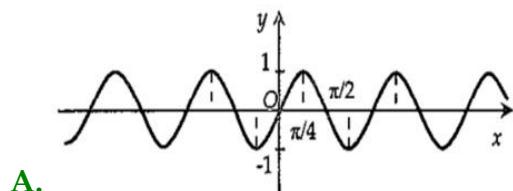
7.1. Tìm GTLN, GTNN sử dụng điều kiện $-1 \leq \sin x, \cos x \leq 1$	97
7.2. Tìm GTLN, GTNN dạng $y = a\sin x + b\cos x + c$	101
7.3. Tìm GTLN, GTNN sử dụng bất đẳng thức cổ điển.....	105



PHẦN 1 – ĐỀ BÀI

DẠNG 1. XÁC ĐỊNH ĐỒ THỊ HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC.

Câu 1: Hình nào dưới đây biểu diễn đồ thị hàm số $y = f(x) = 2 \sin 2x$?



Lời giải:

.....

.....

.....

.....

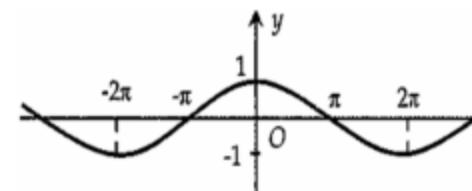
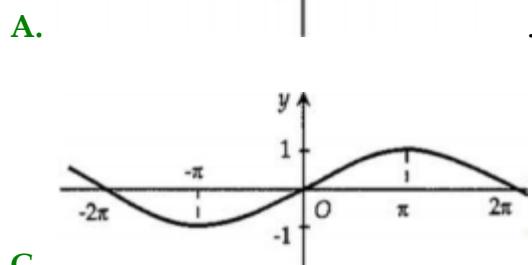
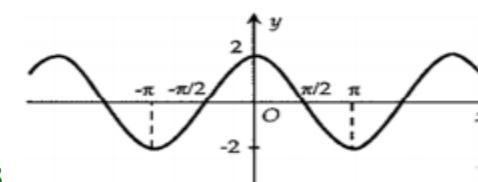
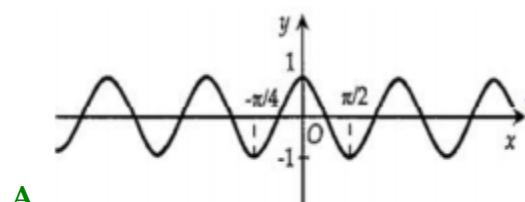
.....

.....

.....

.....

Câu 2: Hình vẽ nào sau đây biểu diễn đồ thị hàm số $y = \cos \frac{x}{2}$?

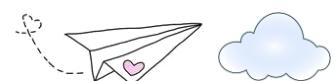


Lời giải:

.....

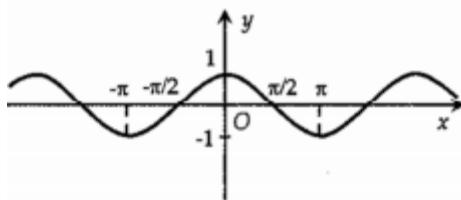
.....

.....

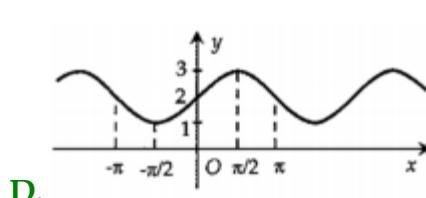
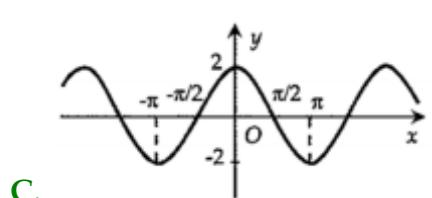
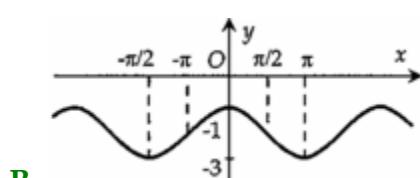
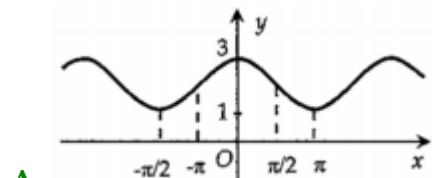




Câu 3: Cho đồ thị hàm số $y = \cos x$ như hình vẽ:

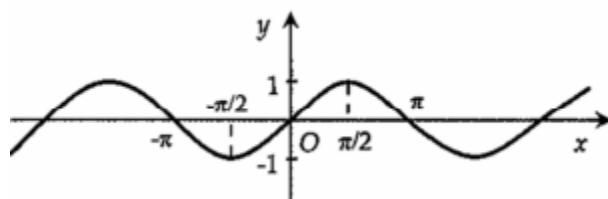


Hình vẽ nào sau đây là đồ thị hàm số $y = \cos x + 2$?

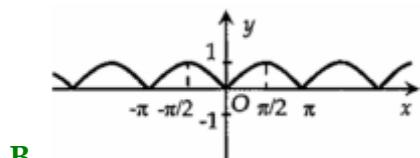
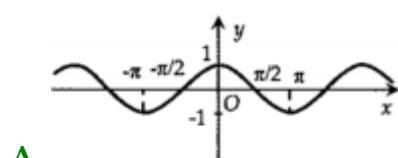


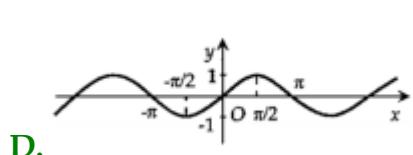
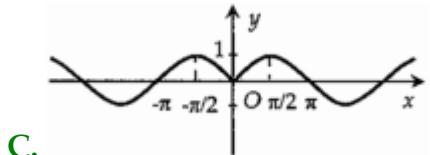
Lời giải:

Câu 4: Cho đồ thị hàm số $y = \sin x$ như hình vẽ:



Hình nào sau đây là đồ thị hàm số $y = \sin|x|$?

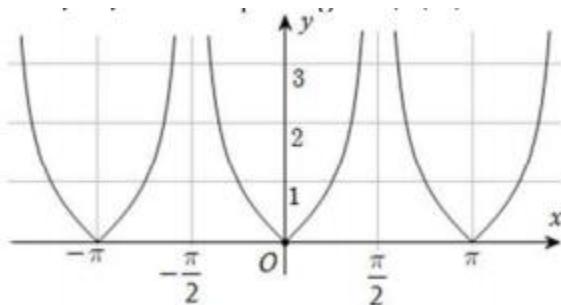




Lời giải:



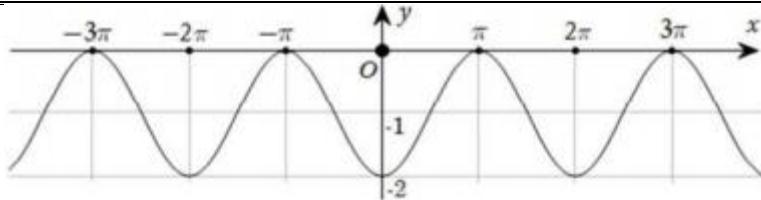
Câu 5: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D.



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = \tan x$. B. $y = \cot x$. C. $y = |\tan x|$. D. $y = |\cot x|$.

Lời giải:



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$. B. $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.
- C. $y = -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$. D. $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$.

Lời giải:

.....

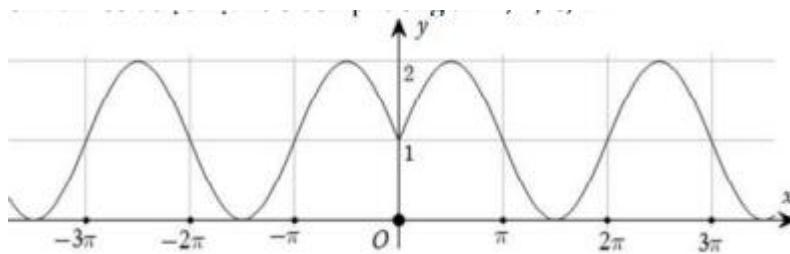
.....

.....

.....



Câu 7: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D.



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = 1 + \sin|x|$. B. $y = |\sin x|$. C. $y = 1 + |\cos x|$. D. $y = 1 + |\sin x|$.

Lời giải:

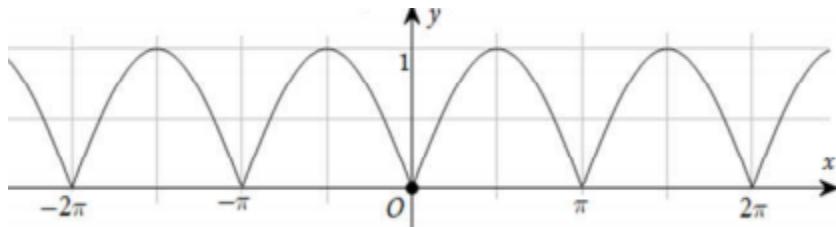
.....

.....

.....

.....

Câu 8: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D.



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = 1 + \sin|x|$. B. $y = |\sin x|$. C. $y = 1 + |\cos x|$. D. $y = 1 + |\sin x|$.

Lời giải:

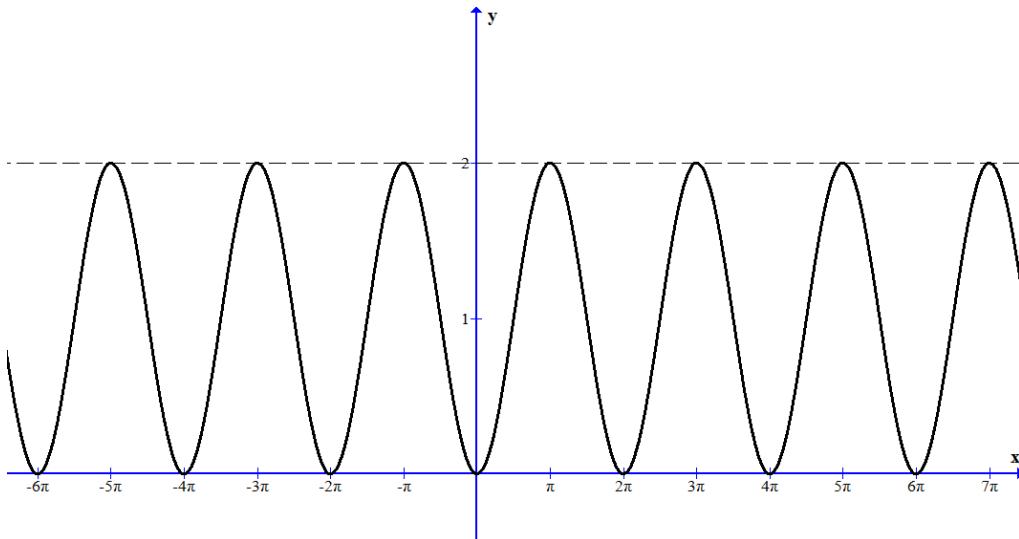
.....

.....

.....

.....

Câu 9: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C,. D. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



- A. $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. B. $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.
 C. $y = -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$. D. $y = -\cos x + 1$.

Lời giải:

.....

.....

.....



**DẠNG 2. XÁC ĐỊNH CHU KỲ HÀM SỐ LUỢNG GIÁC.****Câu 10:** Chu kỳ tuần hoàn của hàm số $y = \sin x \cos x \cos 2x \cos 4x$ là

- A. 2π . B. 4π . C. $\frac{\pi}{4}$. D. $\frac{\pi}{8}$.

Lời giải:**Câu 11:** Tìm chu kỳ tuần hoàn của hàm số $y = \sqrt{3} \sin 4x + 4(\sin^4 x + \cos^4 x) + 2$.

- A. 2π . B. $\frac{\pi}{2}$. C. $\frac{\pi}{4}$. D. π .

Lời giải:**Câu 12:** Tìm chu kỳ tuần hoàn của hàm số $f(x) = \sin^3 4x - \sin^3 x \cos 3x - \cos^3 x \sin 3x$.

- A. $\frac{\pi}{6}$. B. $\frac{\pi}{12}$. C. $\frac{2\pi}{3}$. D. 2π .

Lời giải:



Câu 13: Tìm chu kỳ tuần hoàn của hàm số $f(x) = \cos^3 x \cdot \cos 3x - \sin^3 x \cdot \sin 3x$.

- A. $\frac{\pi}{6}$. B. 2π . C. π . D. $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải:

DẠNG 3. TÍNH ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC.

Câu 14: Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

- A. Hàm số $y = \cot x$ đồng biến trên khoảng $(0; \pi)$.
- B. Hàm số $y = \sin x$ nghịch biến trên khoảng $(3\pi; 4\pi)$.
- C. Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right)$.

D. Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải:



Câu 15: Cho các hàm số $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = \tan x$; $y = \cot x$. Có bao nhiêu hàm số nghịch biến trên $\left(-3\pi; -\frac{5\pi}{2}\right)$?

- A. 1. B. 3. C. 0. D. 2.

Lời giải:

Câu 16: Cho hàm số $y = \tan x$. Khẳng định nào dưới đây sai?

- A. Hàm số đã cho là hàm lẻ.

B. Hàm số đã cho có tập giá trị là $[-1;1]$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

D. Hàm số đã cho có tập xác định $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 17: Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $y = \sin x$ là hàm số nghịch biến trên $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$.

B. $y = \cos x$ là hàm số nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$.

C. $y = \sin x$ là hàm số nghịch biến trên $\left(0; \frac{2\pi}{3}\right)$.

D. $y = \tan x$ là hàm số nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Câu 18: Hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $\left(\frac{19\pi}{2}; 10\pi\right)$. B. $\left(-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. C. $\left(\frac{11\pi}{2}; 7\pi\right)$. D. $\left(-\frac{11\pi}{2}; -5\pi\right)$.

Lời giải:

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 19: Để hàm số $y = \sin x + \cos x$ tăng, ta chọn x thuộc khoảng nào?

- A. $\left(-\frac{3\pi}{4} + k2\pi; \frac{\pi}{4} + k2\pi\right)$. B. $\left(-\frac{3\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi\right)$.
 C. $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$. D. $(\pi + k2\pi; 2\pi + k2\pi)$.

Lời giải:

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 20: Xét hai mệnh đề sau:

(I): $\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$: Hàm số $y = \tan^2 x$ tăng.

(II): $\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$: Hàm số $y = \sin^2 x$ tăng.

Chọn câu đúng?

- A. Chỉ (I) đúng. B. Chỉ (II) đúng. C. Cả hai đúng. D. Cả hai sai.

Lời giải:

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....



DẠNG 4: XÁC ĐỊNH SỐ ĐIỂM BIỂU DIỄN CỦA PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CHO TRƯỚC TRÊN ĐƯỜNG TRÒN LƯỢNG GIÁC.

Câu 21: Biểu diễn các nghiệm của phương trình $\cos^2 x = 0$ trên đường tròn lượng giác được bao nhiêu điểm?

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 4.

Lời giải:

Câu 22: Nghiệm của phương trình $\cos x = -1$ là:

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 4.

Lời giải:



Câu 23: Cho phương trình $2\cos x - \sqrt{3} = 0$. Số điểm biểu diễn tất cả các nghiệm của phương trình trên đường tròn lượng giác là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải:

Câu 24: Số điểm biểu diễn các nghiệm của phương trình $\cos x = \frac{1}{2}$ trên đường tròn lượng giác là

- A. 3. B. 1. C. 4. D. 2.

Lời giải:

Câu 25: Biểu diễn tất cả các nghiệm của phương trình $3\cos x - 1 = 0$ trên đường tròn lượng giác, số điểm biểu diễn là

- A. 3. B. 0. C. 2. D. 4.

Lời giải:

Câu 26: Biểu diễn nghiệm của phương trình $\cos 3x = \cos x$ trên đường tròn lượng giác. Số điểm biểu diễn là

- A. 3. B. 0. C. 2. D. 4.

Lời giải:



Câu 27: Biểu diễn nghiệm của phương trình $\cos^2 x + \cos x = 0$ trên đường tròn lượng giác. Số điểm biểu diễn là

A. 3.

B. 5.

C. 2.

D. 4.

Lời giải:



Câu 28: Số điểm biểu diễn nghiệm của phương trình $\cos^2 x = \frac{1}{2}$ trên đường tròn lượng giác là

A. 8.

B. 2.

C. 4.

D. 6.

Lời giải:



Câu 29: Biểu diễn tập nghiệm của phương trình $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$ trên đường tròn lượng giác ta được số điểm cuối là

A. 4.

B. 2.

C. 6.

D. 5

Lời giải:





Câu 30: Biểu diễn các nghiệm của phương trình $\cos(\sin x) = 1$ trên đường tròn lượng giác là

A. 3.

B. 1.

C. 0.

D. 2.

Lời giải:

A. 8.

B. 10.

C. 4.

D. 15.

Lời giải:

Câu 32: Số vị trí biểu diễn các nghiệm của phương trình $4\cos^2 x - 4\cos x - 3 = 0$ trên đường tròn lượng giác là?

A. 4.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Lời giải:



Câu 33: Số điểm biểu diễn các họ nghiệm của phương trình $\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = \sqrt{3}$ trên đường tròn lượng giác là:

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 1.

Lời giải:



Câu 34: Số điểm biểu diễn các họ nghiệm của phương trình $\sin 5x + \sqrt{3} \cos 5x = 2 \sin 7x$ trên đường tròn lượng giác là:

A. 12.

B. 8.

C. 14.

D. 7.

Lời giải:



Câu 35: Số điểm biểu diễn của phương trình $(\sin x - \cos x)\sin 2x + 12(\cos x - \sin x) + 12\cos 2x = 0$ là:

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Lời giải:



Câu 36: Nghiệm của phương trình $\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos x + 2 \sin 2x (\sin x - 1) = 1$ thoả điều kiện $\frac{\pi}{2} < \left| 3x - \frac{\pi}{2} \right| \leq \pi$ có số điểm biểu diễn là:

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải:





Câu 37: Số điểm biểu diễn các nghiệm của phương trình $\frac{\cos^2 x - \sin 2x - \sqrt{2} - \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{2 \sin\left(x + \frac{7\pi}{24}\right) - 1} = 0$

trên đường tròn lượng giác là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải:

Câu 38: Số điểm biểu diễn các nghiệm của phương trình $\frac{\sin x \sin 2x + 2 \sin x \cos^2 x + \sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} = \sqrt{3} \cos 2x$ trên đường tròn lượng giác là

- A. 2. B. 4. C. 3. D. 5.

Lời giải:



DẠNG 5. BIỆN LUẬN NGHIỆM PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC KHÔNG CHỨA THAM SỐ

5.1. Tìm số nghiệm của phương trình lượng giác trên tập K .

Câu 39: Tìm số nghiệm của phương trình $\cos 5x \cdot \cos x = \cos 4x$ trên $(0; 10\pi)$ là

- A. 49. B. 50. C. 52. D. 48.

Lời giải:

Câu 40: Số nghiệm thuộc khoảng $(0; 100\pi)$ của phương trình $\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 + \sqrt{3} \cos x = 3$ là

- A. 49. B. 50. C. 52. D. 48.

Lời giải:

Câu 41: Số nghiệm của phương trình $\cos^2 x - \sin 2x = \sqrt{2} + \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ trên khoảng $(0; 3\pi)$ là

- A. 2. B. 3. C. 4.. D. 1.

Lời giải:



Câu 42: Gọi n là số nghiệm thuộc khoảng $(0; 2023)$ của phương trình lượng giác

$$\sqrt{3}(1 - \cos 2x) + \sin 2x - 4\cos x + 8 = 4(\sqrt{3} + 1)\sin x. \text{ Tìm } n \text{ là }$$

A. 322.

B. 320.

C. 300.

D. 321.

Lời giải:

Câu 43: Số nghiệm của phương trình $2\cos^2 x + \sqrt{3}\sin 2x = 3$ trên $(0; 2020\pi]$ là:

A. 1010.

B. 2019.

C. 2020.

D. 2021.

Lời giải:

Câu 44: Huyết áp là đại lượng để đo độ lớn của lực tác dụng lên thành mạch máu. Nó được đo bằng hai chỉ số: huyết áp tâm thu (lúc tim đập) và huyết áp tâm trương (lúc tim nghỉ). Huyết áp của mỗi người thường khác nhau, nhưng huyết áp tiêu chuẩn là $120/80$, nó có nghĩa là huyết áp tâm thu là 120mmHg và huyết áp tâm trương là 80 mmHg . Giả sử rằng trái tim của một người đập 70 lần một phút, huyết áp P sau t giây có thể được mô tả bằng hàm số $P(t) = 100 + 20\sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right)$. Với $t \in [0; 60]$, có bao nhiêu lần huyết áp người đó bằng 100 mmHg ?

A. 139.

B. 140.

C. 141.

D. 142.

Lời giải:

Câu 45: Năm 1893, George Ferris chế tạo vòng đu quay. Nó có đường kính 250 foot. Nếu với mỗi 40 giây vòng đu quay quay 1 vòng thì chiều cao h (foot) của một chỗ ngồi trên vòng đu quay là một hàm số của thời gian t (giây) được xác định như sau

$$h(t) = 125 \sin\left(0,157t - \frac{\pi}{2}\right) + 125.$$

Vòng quay bắt đầu tính từ thời điểm $t = 0$. Trong 40 giây đầu tiên của chuyến đi, tại thời điểm nào sau đây (làm tròn đến hàng đơn vị) thì người ngồi trên ghế đu quay đó cách mặt đất 125 foot? (Chú thích: 1 foot xấp xỉ 30,48 cm).

- A. 20 giây. B. 25 giây. C. 30 giây. D. 35 giây.

Lời giải:



5.2. Tìm nghiệm dương nhỏ nhất và nghiệm âm lớn nhất của phương trình lượng giác:

Câu 46: Nghiệm lớn nhất của phương trình $2\cos 2x - 1 = 0$ trong đoạn $[0; \pi]$ là:

- A. $x = \pi$. B. $x = \frac{11\pi}{12}$. C. $x = \frac{2\pi}{3}$. D. $x = \frac{5\pi}{6}$.

Lời giải:

Câu 47: Phương trình $\cos 2x + 2\cos x - 3 = 0$ có nghiệm lớn nhất trong khoảng $(0; 2019)$?

- A. 644π . B. 2π . C. 640π . D. 642π .

Lời giải:

Câu 48: Nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $\sin(\cos 2x) = 0$ là

- A. π . B. $\frac{\pi}{2}$. C. $\frac{\pi}{4}$. D. $\frac{3\pi}{4}$.

Lời giải:

Câu 49: Gọi x_0 là nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $3\sin^2 x + 2\sin x \cos x - \cos^2 x = 0$.

Chọn khẳng định đúng?

- A. $x_0 \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$. B. $x_0 \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. C. $x_0 \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. D. $x_0 \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.

Lời giải:

Câu 50: Cho phương trình $\sin^2 x \cdot \tan x + \cos^2 x \cdot \cot x + 2 \sin x \cos x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. Tính hiệu nghiệm âm lớn nhất và nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình.

- A. $-\frac{3\pi}{2}$. B. $\frac{5\pi}{6}$. C. $-\frac{5\pi}{6}$. D. π .



Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Câu 51: Hằng ngày, mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu $h(m)$ của mực nước trong kênh tính theo thời gian $t(h)$ được cho bởi công thức $h = 3 \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + 12$.

Khi nào mực nước của kênh là cao nhất với thời gian ngắn nhất?

- A. $t = 22(h)$. B. $t = 15(h)$. C. $t = 14(h)$. D. $t = 10(h)$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5.3. Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình lượng giác trên tập K .

Câu 52: Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\sin x + \sin 2x = 0$ trên đoạn $[0; 2\pi]$.

- A. 4π . B. 5π . C. 3π . D. 2π .

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 53: Tính tổng các nghiệm trong đoạn $[0; 30]$ của phương trình: $\tan x = \tan 3x$ (1)

- A. 55π . B. $\frac{171\pi}{2}$. C. 45π . D. $\frac{190\pi}{2}$.

Lời giải:



Câu 54: Tổng nghiệm âm lớn nhất và nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình

$$\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ bằng}$$

- A. $\frac{\pi}{9}$. B. $\frac{\pi}{6}$. C. $-\frac{\pi}{6}$. D. $-\frac{\pi}{9}$.

Lời giải:



Câu 55: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\cos 2x - \cos x = 0$ trong khoảng $(0; 2\pi)$ bằng T

. Vậy T bằng bao nhiêu?

- A. $T = \pi$. B. $T = \frac{7\pi}{6}$. C. $T = \frac{4\pi}{3}$. D. $T = 2\pi$.

Lời giải:



Câu 56: Tổng các nghiệm của phương trình $\sin 2x + 3 = 6\sin x + \cos x$ trong khoảng $\left(0; \frac{5\pi}{2}\right)$ là

- A. π . B. $\frac{2\pi}{3}$. C. $\frac{5\pi}{6}$. D. $\frac{19\pi}{6}$.

Lời giải:



Câu 57: Tổng tất cả các nghiệm thuộc $(0; 10\pi)$ của phương trình $2\sin^2 x - 5\sin x - 3 = 0$ là

- A. 50π . B. 55π . C. 45π . D. 60π .

Lời giải:

Câu 58: Tổng các nghiệm trong đoạn $[0; 2\pi]$ của phương trình $\sin^3 x - \cos^3 x = 1$ bằng

- A. $\frac{5\pi}{2}$. B. $\frac{7\pi}{2}$. C. 2π . D. $\frac{3\pi}{2}$.

Lời giải:



Câu 59: Phương trình $6\sin^2 x + 7\sqrt{3}\sin 2x - 8\cos^2 x = 6$ có tổng hai nghiệm dương nhỏ nhất bằng

- A. $\frac{17\pi}{12}$. B. $\frac{2\pi}{3}$. C. $\frac{5\pi}{24}$. D. $\frac{7\pi}{12}$.

Lời giải:



Câu 60: Gọi S là tổng các nghiệm của phương trình $\frac{\sin x}{\cos x + 1} = 0$ trên đoạn $[0; 2017\pi]$. Tính S .

- A. $S = 2035153\pi$. B. $S = 1001000\pi$. C. $S = 1017072\pi$. D. $S = 2000200\pi$.

Lời giải:



Câu 61: Tìm tổng các nghiệm của phương trình $\sin 3x + \cos x = 0$ trên $(0; \pi)$.

- A. $\frac{5\pi}{8}$. B. $\frac{\pi}{3}$. C. π . D. 2π .

Lời giải:



Câu 62: Tìm tổng tất cả các nghiệm thuộc đoạn $[0;30]$ của phương trình $\cos 3x - 4\cos 2x + 3\cos x - 4 = 0$ là

- A. 45π . B. $\frac{121}{2}\pi$. C. $\frac{99}{2}\pi$. D. 50π .

Lời giải

Chọn D

$$\text{PT } \cos 3x - 4\cos 2x + 3\cos x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 x - 3\cos x - 4(2\cos^2 x - 1) + 3\cos x - 4 = 0 \Leftrightarrow 4\cos^3 x - 8\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = 2 \end{cases} \text{ (vn)}$$

+ Với $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Theo giải thiết, $x \in [0;30] \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{2} + k \leq \frac{30}{\pi} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{30}{\pi} - \frac{1}{2}$ mà $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{0;1;2;3;\dots;9\}$.

Vậy tổng các nghiệm thỏa mãn yêu cầu bài toán là

$$\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) + \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right) + \dots + \left(\frac{\pi}{2} + 9\pi\right) = 5\pi + (1+2+\dots+9)\pi = 5\pi + 45\pi = 50\pi.$$

Câu 63: Tính tổng S tất cả các nghiệm của phương trình $(2\cos 2x + 5)(\sin^4 x - \cos^4 x) + 3 = 0$ trên khoảng $(0;2\pi)$.

- A. $S = \frac{7\pi}{6}$. B. $S = \frac{11\pi}{6}$. C. $S = 4\pi$. D. $S = 5\pi$.

Lời giải:



Câu 64: Cho phương trình $(2\sin x - 1)(\sqrt{3}\tan x + 2\sin x) = 3 - 4\cos^2 x$. Gọi T là tập hợp các nghiệm thuộc đoạn $[0; 20\pi]$ của phương trình trên. Tính tổng các phần tử của T .

A. $\frac{570}{3}\pi$.

B. $\frac{875}{3}\pi$.

C. $\frac{880}{3}\pi$.

D. $\frac{1150}{3}\pi$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Câu 65: Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\cos 2x - \tan^2 x = \frac{\cos^2 x - \cos^3 x - 1}{\cos^2 x}$ trên đoạn $[1; 70]$

A. 188π .

B. 263π .

C. 363π .

D. 365π .

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....





Câu 66: Tổng các nghiệm của phương trình $\sin^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin^4\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{5}{4}$ trong khoảng $(0; 2\pi)$ bằng

- A. 2π . B. 4π . C. π . D. 3π .

Lời giải:

Câu 67: Tổng nghiệm âm lớn nhất và nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $\left(1 + \tan x \tan \frac{x}{2}\right) \sin x + \cot x = 4$ là

- A. $-\frac{\pi}{6}$. B. $\frac{\pi}{2}$. C. $\frac{\pi}{6}$. D. $-\frac{\pi}{2}$.

Lời giải:

Câu 68: Tính tổng các nghiệm thuộc $[\pi; 3\pi]$ của phương trình: $\frac{\sin 2x}{\cos x - 1} = 0$.

- A. 8π . B. 9π . C. 10π . D. $\frac{3\pi}{2}$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Câu 69: Tính tổng T các nghiệm của phương trình $\cos^2 x = \sin x \cos x + 2 \sin x - \cos x - 2$ trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; 5\pi\right)$.

- A. $T = \frac{15\pi}{2}$. B. $T = \frac{21\pi}{8}$. C. $T = 7\pi$. D. $T = \frac{3\pi}{4}$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 70: Tính tổng các nghiệm trên $(-4\pi; 4\pi)$ của phương trình $\sin^3 x - 3\sqrt[3]{3\sin x - 2} + 2 = 0$

- A. π . B. -2π . C. $-\pi$. D. 0 .

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....





Câu 71: Phương trình $\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin 2x} = \frac{1}{\sin 4x}$ có tổng các nghiệm trên $(0; \pi)$ là:

- A. $\frac{\pi}{6}$. B. $\frac{\pi}{6}$. C. $\frac{2\pi}{3}$. D. π

Lời giải:

Câu 72: Phương trình $\frac{\sin 2x + 2\cos x - \sin x - 1}{\tan x + \sqrt{3}} = 0$ có bao nhiêu nghiệm trên $(0; 3\pi)$?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4

Lời giải:

Câu 73: Gọi S là tổng tất cả các nghiệm thuộc $[0; 20\pi]$ của phương trình $2\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$.

Khi đó giá trị của S bằng:

- A. $S = 570\pi$. B. $S = 295\pi$. C. $S = 590\pi$. D. $S = \frac{200}{3}\pi$.

Lời giải:



Câu 74: Tính tổng T các nghiệm của phương trình $\cos^2 x - \sin 2x = \sqrt{2} + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ trên khoảng $(0; 2\pi)$.

- A. $T = \frac{7\pi}{8}$. B. $T = \frac{21\pi}{8}$. C. $T = \frac{11\pi}{4}$. D. $T = \frac{3\pi}{4}$.

Lời giải:

Câu 75: Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\sqrt{3} \cos x - \sin x = 1$ trên $[0; 2\pi]$.

- A. $\frac{5\pi}{3}$. B. $\frac{11\pi}{6}$. C. $\frac{\pi}{6}$. D. $\frac{3\pi}{2}$.

Lời giải:

Câu 76: Gọi S là tập hợp các nghiệm thuộc khoảng $(0; 100\pi)$ của phương trình

$$\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 + \sqrt{3} \cos x = 3.$$

Tổng các phần tử của S là

- A. $\frac{7400\pi}{3}$. B. $\frac{7525\pi}{3}$. C. $\frac{7375\pi}{3}$. D. $\frac{7550\pi}{3}$.



Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Câu 77: Gọi S là tập hợp tất cả các nghiệm thuộc khoảng $(0; 2018)$ của phương trình sau:

$$\sqrt{3}(1-\cos 2x) + \sin 2x - 4\cos x + 8 = 4(\sqrt{3}+1)\sin x. \text{ Tính tổng tất cả các phần tử của } S.$$

- A. 103255π . B. $\frac{310408\pi}{3}$. C. $\frac{312341\pi}{3}$. D. 102827π .

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 78: Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\sin 2x + 4\sin x - 2\cos x - 4 = 0$ trong đoạn $[0; 100\pi]$ của phương trình.

- A. 100π . B. 2476π . C. 25π . D. 2475π .

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 79: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\cos(\sin x) = 1$ trên $[0; 2\pi]$ bằng

- A. 0. B. π . C. 2π . D. 3π .

Lời giải:



Câu 80: Tính tổng S các nghiệm của phương trình $(2\cos 2x + 5)(\sin^4 x - \cos^4 x) + 3 = 0$ trong khoảng $(0; 2\pi)$.

- A. $S = \frac{11\pi}{6}$. B. $S = 4\pi$. C. $S = 5\pi$. D. $S = \frac{7\pi}{6}$.

Lời giải:



Câu 81: Cho phương trình $\sin^{2018} x + \cos^{2018} x = 2(\sin^{2020} x + \cos^{2020} x)$. Tính tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng $(0; 2018)$

- A. $\left(\frac{1285}{4}\right)^2 \pi$. B. $(643)^2 \pi$. C. $(642)^2 \pi$. D. $\left(\frac{1285}{2}\right)^2 \pi$.

Lời giải:





Câu 82: Phương trình lượng giác: $\cos 3x - \cos 2x + 9 \sin x - 4 = 0$ trên khoảng $(0; 3\pi)$. Tổng số nghiệm của phương trình trên là:

- A. $\frac{25\pi}{6}$. B. 6π . C. Kết quả khác. D. $\frac{11\pi}{3}$.

Lời giải:

DẠNG 6. TÌM ĐIỀU KIỆN CỦA THAM SỐ m ĐỂ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CHO TRƯỚC CÓ NGHIỆM.

Câu 83: Tính tổng S tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 5 - m$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{4}\right)$.

- A. $S = -25$. B. $S = -22$. C. $S = 22$. D. $S = 25$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Câu 84: Tìm m để phương trình $(3\cos x + 4)(3\cos x + 1 - 3m) = 0$ có số nghiệm trên đoạn $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$

là lớn nhất.

- A. $-\frac{2}{3} \leq m \leq \frac{1}{3}$. B. $-\frac{2}{3} < m \leq \frac{4}{3}$. C. $-\frac{2}{3} < m < \frac{1}{3}$. D. $-\frac{2}{3} < m \leq \frac{1}{3}$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 85: Tìm điều kiện của tham số m để phương trình $\sin^2 x + 2(m+1)\sin x - 3m(m-2) = 0$ có nghiệm

- A. $\begin{cases} -\frac{1}{2} \leq m < \frac{1}{2} \\ 1 \leq m \leq 2 \end{cases}$. B. $\begin{cases} -\frac{1}{3} \leq m \leq \frac{1}{3} \\ 1 \leq m \leq 3 \end{cases}$. C. $\begin{cases} -2 \leq m \leq -1 \\ 0 \leq m \leq 1 \end{cases}$. D. $\begin{cases} -1 \leq m \leq 1 \\ 3 \leq m \leq 4 \end{cases}$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....





Câu 86: Tìm điều kiện của tham số m để phương trình $\cos 2x - (2m-1)\cos x - m + 1 = 0$ có đúng hai nghiệm trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

- A. $-1 < m \leq 0$. B. $0 \leq m < 1$. C. $0 \leq m \leq 1$. D. $-1 < m < 1$.

Lời giải:

Câu 87: Cho phương trình $2\sin^2 x + (m-1)\sin 2x + (m+6)\cos^2 x = 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình vô nghiệm?

- A. 4. B. 6. C. 5. D. 2.

Lời giải:

Câu 88: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $2\cos^2 x + 4m\sin x \cos x = m$ có nghiệm:

- A. $m < -\frac{2}{3}$. B. $m \leq -\frac{2}{3}$ hoặc $m \geq 0$.
 C. $-\frac{2}{3} \leq m \leq 0$. D. $m \geq 0$.

Lời giải:

Câu 89: Số các giá trị nguyên m để phương trình

$$\sqrt{4m-4} \cdot \sin x \cdot \cos x + \sqrt{m-2} \cdot \cos 2x = \sqrt{3m-9}$$

- A. 7. B. 6. C. 5. D. 4

Lời giải:



Câu 90: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sqrt{3} \cos x + m - 1 = 0$ có nghiệm?

- A. 1.. B. 2.. C. 3.. D. Vô số.

Lời giải:

Câu 91: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $(m+1) \sin x + 2 - m = 0$ có nghiệm.

A. $m \leq -1$..B. $m \geq \frac{1}{2}$..C. $-1 < m \leq \frac{1}{2}$..D. $m > -1$.*Lời giải:*

Câu 92: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sqrt{3} \cos x + m - 1 = 0$ có nghiệm?

A. 1..

B. 2..

C. 3..

D. Vô số.

Lời giải:*Lời giải:*

Câu 93: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $(m+1) \sin x + 2 - m = 0$ có nghiệm.

A. $m \leq -1$..B. $m \geq \frac{1}{2}$..C. $-1 < m \leq \frac{1}{2}$..D. $m > -1$.*Lời giải:*

DẠNG 7. TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ LUỢNG GIÁC

7.1. Tìm GTLN, GTNN sử dụng điều kiện $-1 \leq \sin x, \cos x \leq 1$.

Câu 94: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$

- A. -1. B. 0. C. -2. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 95: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \sin^4 x + \cos^4 x$

- A. 1. B. 0. C. 2. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 96: Tập giá trị của hàm số $y = \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x + 1$ là đoạn $[a; b]$. Tính tổng $T = a + b$.

- A. $T = 1$. B. $T = 2$. C. $T = 0$. D. $T = -1$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....



Câu 97: Hàng ngày, mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu h (m) của mực nước trong kênh tính theo thời gian t (h) được cho bởi công thức $h = 3\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + 12$.

Khi nào mực nước của kênh là cao nhất với thời gian ngắn nhất?

- A. $t = 22$ (h). B. $t = 15$ (h). C. $t = 14$ (h). D. $t = 10$ (h).

Lời giải:

Câu 98: Gọi M và N lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -1 + 2\cos x \left[(2 - \sqrt{3})\sin x + \cos x \right]$ trên \mathbb{R} . Biểu thức $M + N + 2$ có giá trị bằng

- A. 0. B. $4\sqrt{2 - \sqrt{3}}$. C. 2. D. $\sqrt{2 + \sqrt{3}} + 2$.

Lời giải:

Câu 99: Số giờ có ánh sáng của một thành phố X ở vĩ độ 40° bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số: $d(t) = 3\sin\left[\frac{\pi}{182}(t - 80)\right] + 12$, $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \leq 365$.

Vào ngày nào trong năm thì thành phố X có nhiều giờ ánh sáng nhất?

- A. 262. B. 353. C. 80. D. 171.

Lời giải:



Câu 100: Hàm số $y = 2\cos 3x + 3\sin 3x - 2$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

- A. 7. B. 3. C. 5. D. 6.

Lời giải:



Câu 101: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 2\sin^2 x + \cos^2 2x$.

- A. max $y = 4$, min $y = \frac{3}{4}$. B. max $y = 3$, min $y = 2$.
 C. max $y = 4$, min $y = 2$. D. max $y = 3$, min $y = \frac{3}{4}$.

Lời giải:



Câu 102: Gọi M và m lần lượt là GTLN và GTNN của hàm số $y = \sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x$. Tổng $M + m$ là

- A. $\frac{-3}{2}$. B. $-\frac{1}{2}$. C. $\frac{3}{2}$. D. 1.

Lời giải:





7.2. Tìm GTLN, GTNN dạng $y = a\sin x + b\cos x + c$.

Câu 103: Cho hàm số $y = \frac{\sin x - 2\cos x}{\sin x + \cos x + 3}$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số đã cho. Tính $7m - 5M$ bằng?

- A. 10. B. 1. C. 0. D. -10.

Lời giải:

Câu 104: Hàm số $y = \frac{3\sin 4x - 4(\sin^4 x + \cos^4 x)}{2\cos^2 2x - \sin 4x + 2}$ có giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m . Khi đó tổng $M + m$ bằng?

- A. 0. B. $-\frac{5}{7}$. C. $-\frac{10}{7}$. D. $\frac{3}{7}$.

Lời giải:



Câu 105: Giá trị lớn nhất M , giá trị nhỏ nhất m của hàm số: $y = 2\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x \cos x + 1$ là
A. $M = 4; m = 0$. **B.** $M = 3; m = 0$. **C.** $M = 3; m = 1$. **D.** $M = 4; m = 1$.

Lời giải:



Câu 106: Cho hàm số $y = \frac{\sin x + 2\cos x + 1}{\sin x + \cos x + 2}$. Gọi $M; m$ lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất
 của hàm số. Tổng $M + m$ bằng

- A.** 1. **B.** -2. **C.** -1. **D.** 2.

Lời giải:



Câu 107: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{\cos x + 2\sin x + 3}{2\cos x - \sin x + 4}$ là

- A.** $3 - 2\sqrt{3}$. **B.** 2. **C.** -1. **D.** 0.

Lời giải:

Câu 108: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{m\sin x + 1}{\cos x + 2}$ nhỏ hơn 2.

- A. 4. B. 6. C. 5. D. 3.

Lời giải:



Câu 109: Giả sử M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{\sin x + 2\cos x + 1}{\sin x + \cos x + 2}$ trên \mathbb{R} . Tìm $2M - 3m$

- A. $1 + \sqrt{2}$. B. 0. C. 1. D. 8

Lời giải:

Câu 110: Gọi M , m tương ứng là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2\sin x + 2}{\cos x - 2}$.

Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $3m + M = 8$. B. $3m + M = -8$. C. $3m + M = 0$. D. $3m + M = -\frac{8}{3}$

Lời giải:

Câu 111: Tập giá trị của hàm số $y = \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x + 1$ là đoạn $[a; b]$. Tính tổng $T = a + b$.

- A. $T = 0$. B. $T = -1$. C. $T = 1$. D. $T = 2$.

Lời giải:



Câu 112: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3\sin x + 4\cos x - 1$.

- A. max $y = 6$, min $y = -4$. B. max $y = 8$, min $y = -6$.
 C. max $y = 4$, min $y = -6$. D. max $y = 6$, min $y = -8$.

Lời giải:



7.3. Tìm GTLN, GTNN sử dụng bất đẳng thức cổ điển.

Câu 113: Cho hàm số $y = \sqrt{1+2\sin^2 x} + \sqrt{1+2\cos^2 x} - 1$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số. Khi đó giá trị của $M+m$ bằng

- A. $\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$. B. $\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1$. C. $\sqrt{3} + 2\sqrt{2} - 1$. D. $-\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - 1$.

Lời giải:



Câu 114: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{2\sin x + 3\cos x + 1}{\sin x - \cos x + 2}$

- A. $\frac{3+\sqrt{33}}{2}$. B. $\frac{3-\sqrt{33}}{2}$. C. 3. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải:

Câu 115: Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \sin^{2018} x + \cos^{2018} x$ lần lượt là

- A. $\frac{1}{2^{1008}}$ và 2. B. $\frac{1}{2^{1009}}$ và 1. C. 0 và 1. D. $\frac{1}{2^{1008}}$ và 1.

Lời giải:



Câu 116: Cho x, y là các số thực thỏa mãn $\cos 2x + \cos 2y = 1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \tan^2 x + \tan^2 y$ bằng

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{8}{3}$. D. 3.

Lời giải:



Câu 117: Cho hai số thực x, y thuộc $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ và thỏa mãn $\cos 2x + \cos 2y + 2\sin(x+y) = 2$. Giá trị

$$P = \frac{\cos^4 x}{y} + \frac{\cos^4 y}{x}$$

nhỏ nhất của bằng

- A. $\frac{2}{3\pi}$. B. $\frac{3}{\pi}$. C. $\frac{2}{\pi}$. D. $\frac{5}{\pi}$.

Lời giải:



Câu 118: Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 4$. Tìm giá trị lớn nhất M trong tất cả các hàm số $y = a + b\sqrt{\sin x} + c\sqrt{\cos x}$ với $x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right]$.

- A. $M = \sqrt{1+\sqrt{2}}$. B. $M = 1+\sqrt{2}$. C. $M = 2\sqrt{1+\sqrt{2}}$. D. $M = 2(1+\sqrt{2})$.

Lời giải:



PHẦN 2: BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.D	3.A	4.C	5.C	6.A	7.A	8.B	9.D	10.C
11.B	12.A	13.D	14.C	15.B	16.B	17.B	18.D	19.A	20.D
21.B	22.A	23.B	24.D	25.C	26.D	27.A	28.C	29.C	30.D
31.B	32.D	33.C	34.C	35.B	36.B	37.A	38.B	39.A	40.B
41.B	42.A	43.C	44.C	45.C	46.D	47.D	48.C	49.C	50.C
51.D	52.B	53.C	54.C	55.D	56.D	57.B	58.D	59.B	60.C
61.D	62.D	63.C	64.B	65.D	66.B	67.D	68.A	69.C	70.B
71.D	72.B	73.B	74.C	75.A	76.C	77.B	78.D	79.B	80.B
81.D	82.B	83.C	84.D	85.B	86.B	87.A	88.B	89.D	90.C
91.B	92.C	93.B	94.A	95.A	96.B	97.D	98.C	99.D	100.A
101.D	102.D	103	104.C	105.A	106.C	107.B	108.C	109.D	110.B
111.D	112.C	113.C	114.A	115.D	116.B	117.C	118.C	119.B	



<https://luyenthitracnghiem.vn>

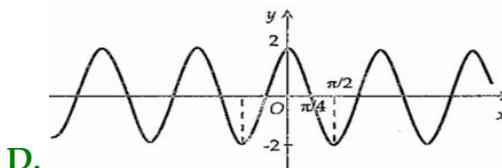
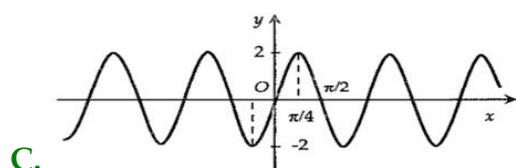
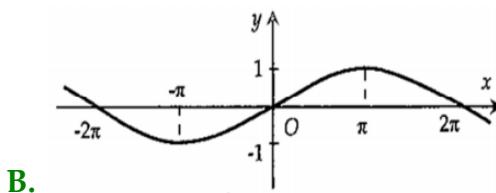
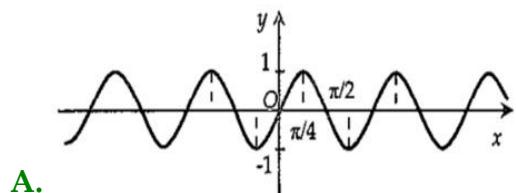


<https://www.facebook.com/tintapold>

PHẦN 3: ĐÁP ÁN CHI TIẾT

DẠNG 1. XÁC ĐỊNH ĐỒ THỊ HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC.

Câu 1: Hình nào dưới đây biểu diễn đồ thị hàm số $y = f(x) = 2 \sin 2x$?



Lời giải

Chọn C

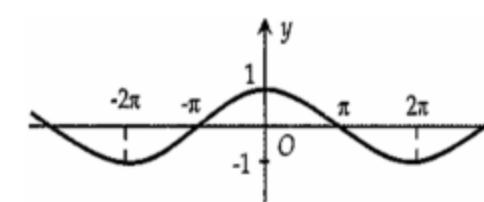
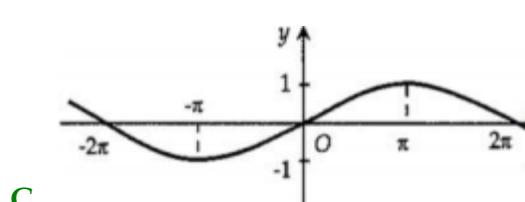
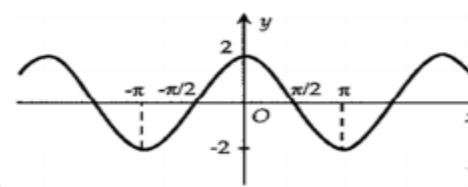
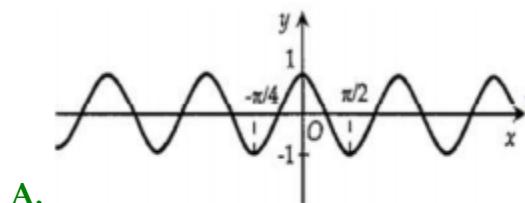
Ta thấy $-2 \leq 2 \sin 2x \leq 2$ nên ta có loại Hình 2 và Hình 3.

f Tiếp theo với Hình 1 và Hình 4 ta có:

Từ phần lý thuyết ở trên ta có hàm số tuần hoàn với chu kỳ $\frac{2\pi}{|2|} = \pi$.

Ta thấy $x=0$ thì $y=0$ nên đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ. Từ đây ta chọn đáp án Hình 1.

Câu 2: Hình vẽ nào sau đây biểu diễn đồ thị hàm số $y = \cos \frac{x}{2}$?



Lời giải

Chọn D

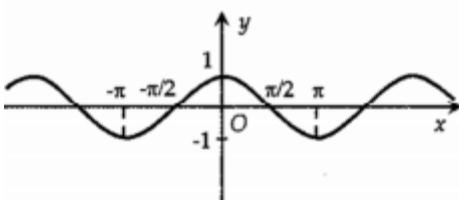
Ta thấy $-1 \leq \cos \frac{x}{2} \leq 1$ nên ta có loại Hình 2.

Tiếp theo ta có hàm số $y = \cos \frac{x}{2}$ có chu kỳ tuần hoàn là $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.



Ta thấy $x=0$ thì $y = \cos \frac{x}{2} = \cos 0 = 1$ nên ta chọn Hình 4.

Câu 3: Cho đồ thị hàm số $y = \cos x$ như hình vẽ:



Hình vẽ nào sau đây là đồ thị hàm số $y = \cos x + 2$?

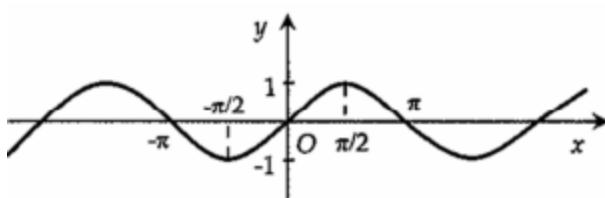
- A. Đồ thị hàm số $y = \cos x + 2$ trên trục Oy lén 2 đơn vị. Trục x có các giá trị $-\pi/2, \pi/2, \pi$. Trục y có các giá trị $1, 3$. Điểm cực đại là $(0, 3)$, điểm cực tiểu là $(\pi, 1)$.
- B. Đồ thị hàm số $y = \cos x - 2$ trên trục Oy lén 2 đơn vị. Trục x có các giá trị $-\pi/2, \pi/2, \pi$. Trục y có các giá trị $-3, -1$. Điểm cực đại là $(0, -1)$, điểm cực tiểu là $(\pi, -3)$.
- C. Đồ thị hàm số $y = 2 \cos x$ trên trục Oy lén 2 đơn vị. Trục x có các giá trị $-\pi/2, \pi/2, \pi$. Trục y có các giá trị $-2, 2$. Điểm cực đại là $(0, 2)$, điểm cực tiểu là $(\pi, -2)$.
- D. Đồ thị hàm số $y = 2 \cos x + 1$ trên trục Oy lén 2 đơn vị. Trục x có các giá trị $-\pi/2, \pi/2, \pi$. Trục y có các giá trị $1, 3$. Điểm cực đại là $(0, 3)$, điểm cực tiểu là $(\pi, 1)$.

Lời giải

Chọn A

Ta thực hiện phép tịnh tiến đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên trục Oy lên trên 2 đơn vị.

Câu 4: Cho đồ thị hàm số $y = \sin x$ như hình vẽ:



Hình nào sau đây là đồ thị hàm số $y = \sin|x|$?

- A. Đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên trục Oy lén 1 đơn vị. Trục x có các giá trị $-\pi/2, \pi/2, \pi$. Trục y có các giá trị $-1, 1$. Điểm cực đại là $(0, 1)$, điểm cực tiểu là $(\pi, -1)$.
- B. Đồ thị hàm số $y = \sin|x|$ trên trục Oy lén 1 đơn vị. Trục x có các giá trị $-\pi/2, \pi/2, \pi$. Trục y có các giá trị $-1, 1$. Điểm cực đại là $(0, 1)$, điểm cực tiểu là $(\pi, -1)$.
- C. Đồ thị hàm số $y = -\sin x$ trên trục Oy lén 1 đơn vị. Trục x có các giá trị $-\pi/2, \pi/2, \pi$. Trục y có các giá trị $-1, 1$. Điểm cực đại là $(0, -1)$, điểm cực tiểu là $(\pi, 1)$.
- D. Đồ thị hàm số $y = -\sin|x|$ trên trục Oy lén 1 đơn vị. Trục x có các giá trị $-\pi/2, \pi/2, \pi$. Trục y có các giá trị $-1, 1$. Điểm cực đại là $(0, -1)$, điểm cực tiểu là $(\pi, 1)$.

Lời giải

Chọn C

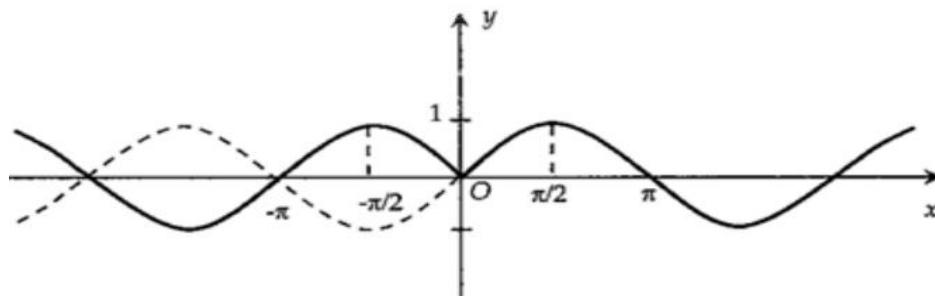
Suy diện đồ thị hàm số $y = \sin|x|$ từ đồ thị hàm số $y = \sin x$



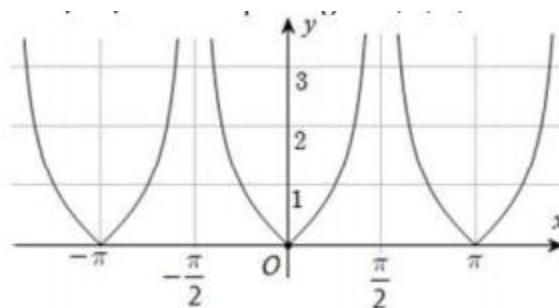
Giữ nguyên phần đồ thị của hàm số $y = \sin x$ nằm bên phải trục Oy .

Lấy đối xứng phần đồ thị trên qua trục Oy .

Dưới đây là đồ thị ta thu được sau khi thực hiện các bước suy diễn ở trên. Phần đồ thị nét đứt là phần bỏ đi của hàm số $y = \sin x$.



Câu 5: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D.



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = \tan x$. B. $y = \cot x$. C. $y = |\tan x|$. D. $y = |\cot x|$.

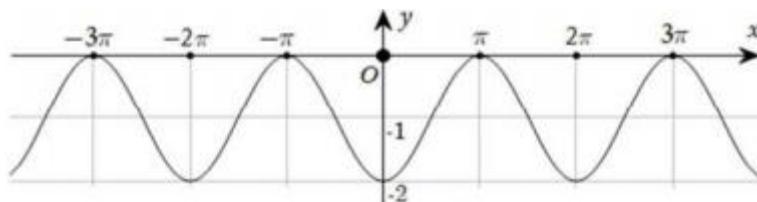
Lời giải

Chọn C

Ta thấy hàm số có GTNN bằng 0.

Hàm số xác định tại $x = \pi$ và tại $x = \pi$ thì $y = 0$.

Câu 6: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D.



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$. B. $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.
 C. $y = -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$. D. $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$.



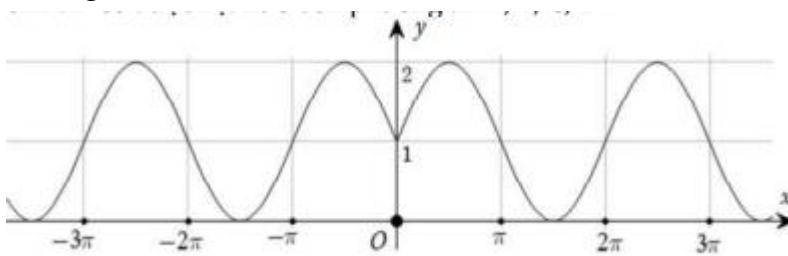
Lời giải**Chọn A**

Ta thấy hàm số có GTLN bằng 0, GTNN bằng -2. Do đó ta loại đáp án $y = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. Vì

$$y = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \in [-2; 2].$$

Tại $x=0$ thì $y=-2$. Thử vào các đáp án còn lại chỉ có $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$ thỏa mãn.

Câu 7: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D.



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

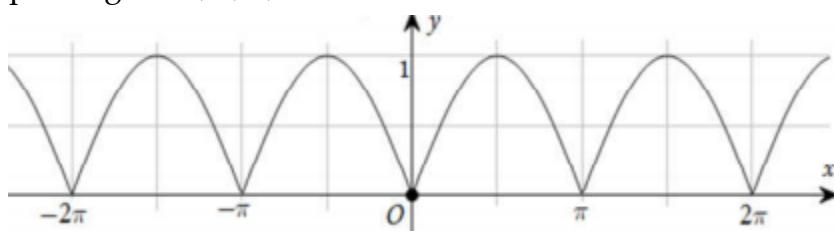
- A. $y = 1 + \sin|x|$. B. $y = |\sin x|$. C. $y = 1 + |\cos x|$. D. $y = 1 + |\sin x|$.

Lời giải**Chọn A**

Ta có: $y = 1 + |\cos x| \geq 1$ và $y = 1 + |\sin x| \geq 1$ nên loại $y = 1 + |\cos x|$ và $y = 1 + |\sin x|$.

Ta thấy tại $x=0$ thì $y=1$. Thay vào hai đáp án: $y = 1 + \sin|x|$ và $y = |\sin x|$ thì chỉ có $y = 1 + \sin|x|$ thỏa.

Câu 8: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D.



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

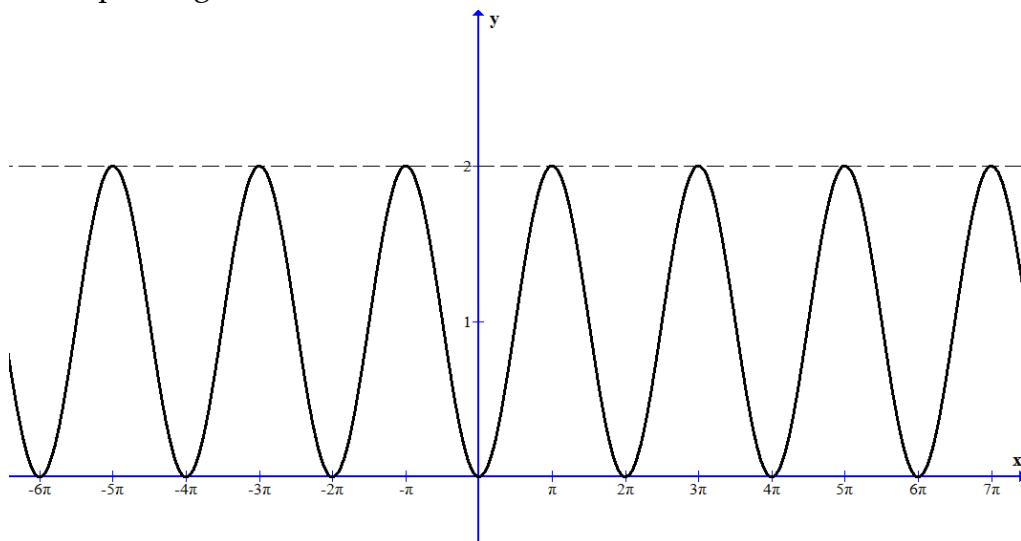
- A. $y = 1 + \sin|x|$. B. $y = |\sin x|$. C. $y = 1 + |\cos x|$. D. $y = 1 + |\sin x|$.

Lời giải**Chọn B**

Ta có: $y = 1 + |\cos x| \geq 1$ và $y = 1 + |\sin x| \geq 1$ nên loại $y = 1 + |\cos x|$ và $y = 1 + |\sin x|$.

Ta thấy tại $x = \pi$ thì $y = 0$. Thay vào hai đáp án còn lại thì chỉ có $y = |\sin x|$ thỏa mãn.

Câu 9: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C,. **D.** Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



- A. $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. B. $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.
- f. C. $y = -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$. D. $y = -\cos x + 1$.

Lời giải

Chọn D

Lấy đối xứng qua trục hoành đồ thị hàm số $y = \cos x$ ta được đồ thị hàm số $y = -\cos x$. Sau đó tịnh tiến đồ thị hàm số $y = -\cos x$ lên trên ta được đồ thị hàm số $y = -\cos x + 1$.



DẠNG 2. XÁC ĐỊNH CHU KỲ HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC.

Câu 10: Chu kỳ tuần hoàn của hàm số $y = \sin x \cos x \cos 2x \cos 4x$ là

- A. 2π . B. 4π . C. $\frac{\pi}{4}$. D. $\frac{\pi}{8}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y = \sin x \cos x \cos 2x \cos 4x = \frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x \cos 4x = \frac{1}{4} \sin 4x \cos 4x = \frac{1}{8} \sin 8x.$$

$$\text{Do đó chu kỳ của hàm số là } T = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}.$$

Câu 11: Tìm chu kỳ tuần hoàn của hàm số $y = \sqrt{3} \sin 4x + 4(\sin^4 x + \cos^4 x) + 2$.

- A. 2π . B. $\frac{\pi}{2}$. C. $\frac{\pi}{4}$. D. π .

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = 1 - \frac{1}{4}(1 - \cos 2x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x.$$

$$\text{Do đó } y = \sqrt{3} \sin 4x + 3 + \cos 4x + 2 = 2 \sin \left(4x + \frac{\pi}{6}\right) + 5.$$

$$\text{Vậy chu kỳ tuần hoàn của hàm số là } T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Câu 12: Tìm chu kỳ tuần hoàn của hàm số $f(x) = \sin^3 4x - \sin^3 x \cos 3x - \cos^3 x \sin 3x$.

- A. $\frac{\pi}{6}$. B. $\frac{\pi}{12}$. C. $\frac{2\pi}{3}$. D. 2π .

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$\sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x = \sin^3 x (4 \cos^3 x - 3 \cos x) + \cos^3 x (3 \sin x - 4 \sin^3 x)$$

$$= 4 \sin^3 x \cos^3 x - 3 \sin^3 x \cos x + 3 \cos^3 x \sin x - 4 \sin^3 x \cos^3 x = 3 \sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$= \frac{3}{2} \sin 2x \cos 2x = \frac{3}{4} \sin 4x.$$

$$\text{Do đó } f(x) = \sin^3 4x - \frac{3}{4} \sin 4x = -\frac{1}{4} (3 \sin 4x - 4 \sin^3 4x) = -\frac{1}{4} \sin 12x.$$

$$\text{Vậy chu kỳ tuần hoàn của hàm số là } T = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}.$$



Câu 13: Tìm chu kỳ tuần hoàn của hàm số $f(x) = \cos^3 x \cdot \cos 3x - \sin^3 x \cdot \sin 3x$.

A. $\frac{\pi}{6}$.

B. 2π .

C. π .

D. $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$\begin{aligned} f(x) &= (\cos 3x \cdot \cos x) \cdot \cos^2 x - (\sin 3x \cdot \sin x) \cdot \sin^2 x \\ &= \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x) \cdot \cos^2 x - \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x) \cdot \sin^2 x \\ &= \frac{1}{2}[\cos 4x \cdot \cos^2 x + \cos 2x \cdot \cos^2 x - \cos 2x \cdot \sin^2 x + \cos 4x \cdot \sin^2 x] \\ &= \frac{1}{2}[\cos 4x + \cos^2 2x] = \frac{1}{2}\left[\cos 4x + \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)\right] = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos 4x \end{aligned}$$

Vậy chu kỳ tuần hoàn của hàm số là $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.



DẠNG 3. TÍNH ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC.

Câu 14: Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

- A. Hàm số $y = \cot x$ đồng biến trên khoảng $(0; \pi)$.
- B. Hàm số $y = \sin x$ nghịch biến trên khoảng $(3\pi; 4\pi)$.
- C. Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right)$.
- D. Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải**Chọn C**

* Hàm số $y = \cot x$ nghịch biến trên mỗi khoảng mà nó xác định.

* Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$.

* Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$.

Vậy đáp án đúng là **C**.

Câu 15: Cho các hàm số $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = \tan x$; $y = \cot x$. Có bao nhiêu hàm số nghịch biến trên $\left(-3\pi; -\frac{5\pi}{2}\right)$?

- A. 1.
- B. 3.**
- C. 0.
- D. 2.

Lời giải**Chọn B**

Hàm số $y = \sin x$ nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$ nên nghịch biến trên khoảng $\left(-3\pi; -\frac{5\pi}{2}\right)$.

Hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$ nên nghịch biến trên khoảng $\left(-3\pi; -\frac{5\pi}{2}\right)$.

Hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

Hàm số $y = \cot x$ trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi)$ nên nghịch biến trên khoảng $\left(-3\pi; -\frac{5\pi}{2}\right)$.



Vậy có 3 hàm số nghịch biến trên $\left(-3\pi; -\frac{5\pi}{2}\right)$.

Câu 16: Cho hàm số $y = \tan x$. Khẳng định nào dưới đây sai?

- A. Hàm số đã cho là hàm lẻ.
 B. Hàm số đã cho có tập giá trị là $[-1; 1]$.

- C. Hàm số đã cho đồng biến trên $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.
 D. Hàm số đã cho có tập xác định $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Lời giải

Chọn B

- Hàm số $y = \tan x$ có tập xác định: $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ nên D đúng.
 - Hàm số $y = \tan x$ có tập giá trị: $T = \mathbb{R}$.
- f Ta có: $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$. Mà $f(-x) = \tan(-x) = -\tan x = -f(x)$.

Do đó hàm số $y = f(x) = \tan x$ là hàm lẻ. Suy ra A đúng.

- Hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ và nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$. Do đó C đúng.

Vậy đáp án B sai.

Câu 17: Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $y = \sin x$ là hàm số nghịch biến trên $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$.
 B. $y = \cos x$ là hàm số nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$.
 C. $y = \sin x$ là hàm số nghịch biến trên $\left(0; \frac{2\pi}{3}\right)$.
 D. $y = \tan x$ là hàm số nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đường tròn lượng giác ta thấy $y = \cos x$ là hàm số nghịch biến trên $(0; \pi)$ nên $y = \cos x$ là hàm số nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$.



Câu 18: Hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $\left(\frac{19\pi}{2}; 10\pi\right)$. B. $\left(-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. C. $\left(\frac{11\pi}{2}; 7\pi\right)$. D. $\left(-\frac{11\pi}{2}; -5\pi\right)$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đường tròn lượng giác ta thấy $y = \cos x$ là hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$ nên $y = \cos x$ là hàm số nghịch biến trên $\left(-\frac{11\pi}{2}; -5\pi\right)$.

Câu 19: Để hàm số $y = \sin x + \cos x$ tăng, ta chọn x thuộc khoảng nào?

- A. $\left(-\frac{3\pi}{4} + k2\pi; \frac{\pi}{4} + k2\pi\right)$. B. $\left(-\frac{3\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi\right)$.
 C. $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$. D. $(\pi + k2\pi; 2\pi + k2\pi)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Để hàm số $y = \sin x + \cos x$ tăng thì

$$-\frac{\pi}{2} + k2\pi < x + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -\frac{3\pi}{4} + k2\pi < x < \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 20: Xét hai mệnh đề sau:

- (I): $\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$: Hàm số $y = \tan^2 x$ tăng.
 (II): $\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$: Hàm số $y = \sin^2 x$ tăng.

Chọn câu đúng?

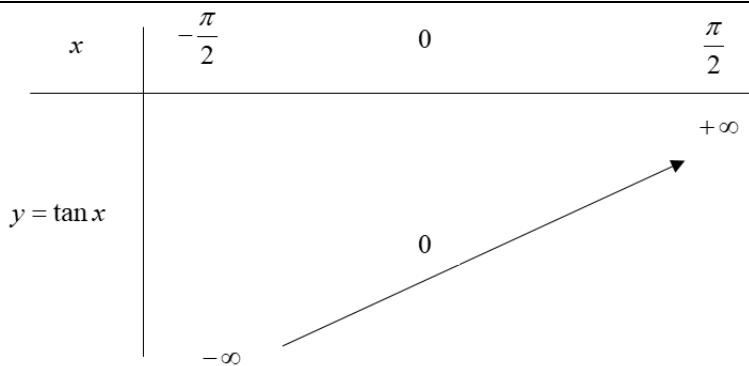
- A. Chỉ (I) đúng. B. Chỉ (II) đúng. C. Cả hai đúng. D. Cả hai sai.

Lời giải

Chọn D

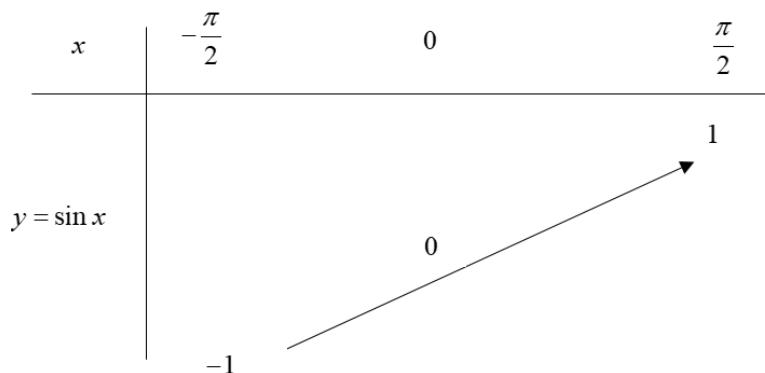
Ta có $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Hàm số $y = \tan x$ có bảng biến thiên:





Suy ra trên $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ hàm số $y = \tan^2 x$ giảm.

Xét bảng biến thiên:



Suy ra trên $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ hàm số $y = \sin^2 x$ giảm.

Vậy cả hai kết luận trên đều sai.

DẠNG 4: XÁC ĐỊNH SỐ ĐIỂM BIỂU DIỄN CỦA PHƯƠNG TRÌNH LUỢNG GIÁC CHO TRƯỚC TRÊN ĐƯỜNG TRÒN LUỢNG GIÁC.

Câu 21: Biểu diễn các nghiệm của phương trình $\cos^2 x = 0$ trên đường tròn lượng giác được bao nhiêu điểm?

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Biểu diễn họ nghiệm trên đường tròn lượng giác ta được 2 điểm.

Câu 22: Nghiệm của phương trình $\cos x = -1$ là:

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Biểu diễn họ nghiệm trên đường tròn lượng giác được 1 điểm.

Câu 23: Cho phương trình $2\cos x - \sqrt{3} = 0$. Số điểm biểu diễn tất cả các nghiệm của phương trình trên đường tròn lượng giác là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $2\cos x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

Mỗi họ nghiệm $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$ biểu diễn được 1 điểm trên đường tròn lượng giác, do đó số điểm biểu diễn của tất cả các nghiệm của phương trình là 2.

Câu 24: Số điểm biểu diễn các nghiệm của phương trình $\cos x = \frac{1}{2}$ trên đường tròn lượng giác là

- A. 3. B. 1. C. 4. D. 2.

Lời giải

Chọn D



Ta có $\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

Mỗi họ nghiệm $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$ biểu diễn được 1 điểm trên đường tròn lượng giác, do đó số điểm biểu diễn của tất cả các nghiệm của phương trình là 2.

Câu 25: Biểu diễn tất cả các nghiệm của phương trình $3\cos x - 1 = 0$ trên đường tròn lượng giác, số điểm biểu diễn là

- A. 3. B. 0. C. 2. D. 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $3\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \pm \arccos \frac{1}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Mỗi họ nghiệm trên biểu diễn được 1 điểm trên đường tròn lượng giác, do đó số điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác của phương trình là 2.

Câu 26: Biểu diễn nghiệm của phương trình $\cos 3x = \cos x$ trên đường tròn lượng giác. Số điểm biểu diễn là

- A. 3. B. 0. C. 2. D. 4.

Lời giải

Chọn D

$$\cos 3x = \cos x \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = x + k2\pi \\ 3x = -x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = k2\pi \\ 4x = k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = k\frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}).$$

Biểu diễn họ nghiệm

trên đường tròn lượng giác được 4 điểm.

Câu 27: Biểu diễn nghiệm của phương trình $\cos^2 x + \cos x = 0$ trên đường tròn lượng giác. Số điểm biểu diễn là

- A. 3. B. 5. C. 2. D. 4.

Lời giải

Chọn A

$$\cos^2 x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Họ nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ biểu diễn trên đường tròn lượng giác được 2 điểm, họ nghiệm

$x = \pi + k2\pi$ biểu diễn trên đường tròn lượng giác được 1 điểm, do đó số điểm biểu diễn là 3.



Câu 28: Số điểm biểu diễn nghiệm của phương trình $\cos^2 x = \frac{1}{2}$ trên đường tròn lượng giác là

A. 8.

B. 2.

C. 4.

D. 6.

Lời giải**Chọn C**

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Biểu diễn họ nghiệm trên đường tròn lượng giác được 4 điểm.

Câu 29: Biểu diễn tập nghiệm của phương trình $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$ trên đường tròn lượng giác ta được số điểm cuối là

A. 4.

B. 2.

C. 6.

D. 5

Lời giải**Chọn C**

$$\text{Ta có } \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0 \Leftrightarrow (\cos 3x + \cos x) + \cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 2x \cdot \cos x + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x(2\cos x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy biểu diễn tập nghiệm của phương trình $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$ trên đường tròn lượng giác ta được số điểm cuối là 6.

Câu 30: Biểu diễn các nghiệm của phương trình $\cos(\sin x) = 1$ trên đường tròn lượng giác là

A. 3.

B. 1.

C. 0.

D. 2.

Lời giải**Chọn D**

$$\text{Ta có } x \in [0; 2\pi] \Rightarrow \sin x \in [-1; 1]$$

Khi đó: $\cos(\sin x) = 1 \Leftrightarrow \sin x = k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) với $-1 \leq k2\pi \leq 1 \Leftrightarrow k = 0$.

$$\text{Phương trình trở thành } \sin x = 0 \Leftrightarrow x = m\pi \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \end{cases} (m \in \mathbb{Z}).$$

Vậy số điểm biểu diễn nghiệm của phương trình trên đường tròn lượng giác là 2.

Câu 31: Biểu diễn tất cả các nghiệm của phương trình $\cos 5x \cdot \cos x = \cos 4x$ trên đường tròn lượng giác. Số điểm biểu diễn là

A. 8.

B. 10.

C. 4.

D. 15.



Lời giải**Chọn B**

Ta có $\cos 5x \cdot \cos x = \cos 4x \Leftrightarrow \frac{1}{2} [\cos 4x + \cos 6x] = \cos 4x \Leftrightarrow \cos 6x = \cos 4x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x = 4x + k2\pi \\ 6x = -4x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{k\pi}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{5}.$$

Vậy số điểm biểu diễn nghiệm của phương trình trên đường tròn lượng giác là 10.

Câu 32: Số vị trí biểu diễn các nghiệm của phương trình $4\cos^2 x - 4\cos x - 3 = 0$ trên đường tròn lượng giác là?

A. 4.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Lời giải**Chọn D**

Ta có $4\cos^2 x - 4\cos x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{3}{2} & (\text{L}) \\ \cos x = -\frac{1}{2} & (\text{N}) \end{cases}$.

Với $\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy số vị trí biểu diễn các nghiệm của phương trình trên đường tròn lượng giác là 2.

Câu 33: Số điểm biểu diễn các họ nghiệm của phương trình $\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = \sqrt{3}$ trên đường tròn lượng giác là:

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 1.

Lời giải**Chọn C**

Ta có $\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases}; k \in \mathbb{Z}.$$

Họ nghiệm $x = k\pi$ được biểu diễn bởi 2 điểm trên đường tròn lượng giác.

Họ nghiệm $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ được biểu diễn bởi 2 điểm trên đường tròn lượng giác không trùng với các điểm biểu diễn của họ nghiệm thứ nhất.

Vậy nghiệm của phương trình được biểu diễn bởi 4 điểm trên đường tròn lượng giác.



Câu 34: Số điểm biểu diễn các họ nghiệm của phương trình $\sin 5x + \sqrt{3} \cos 5x = 2 \sin 7x$ trên đường tròn lượng giác là:

A. 12.

B. 8.

C. 14.

D. 7.

Lời giải**Chọn C**

Ta có:

$$\sin 5x + \sqrt{3} \cos 5x = 2 \sin 7x \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin 5x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 5x = \sin 7x \Leftrightarrow \sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin 7x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 5x + \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 7x = \pi - \left(5x + \frac{\pi}{3}\right) + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{6} \end{cases}; k \in \mathbb{Z}$$

Họ nghiệm $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ được biểu diễn bởi 2 điểm trên đường tròn lượng giác.

Họ nghiệm $x = \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{6}$ được biểu diễn bởi 12 điểm trên đường tròn lượng giác không trùng với các điểm biểu diễn của họ nghiệm thứ nhất.

Vậy nghiệm của phương trình được biểu diễn bởi 14 điểm trên đường tròn lượng giác.

Câu 35: Số điểm biểu diễn của phương trình $(\sin x - \cos x)\sin 2x + 12(\cos x - \sin x) + 12 \cos 2x = 0$ là:

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải**Chọn B**

Ta có: $(\sin x - \cos x)\sin 2x + 12(\cos x - \sin x) + 12 \cos 2x = 0$

$$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)\sin 2x + 12(\cos x - \sin x) + 12(\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(\sin 2x - 12(\sin x + \cos x) - 12) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - \cos x = 0 & (1) \\ \sin 2x - 12(\sin x + \cos x) - 12 = 0 & (2) \end{cases}.$$

(1) $\sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ nên phương trình có 2 điểm biểu diễn.

$$(2) \sin 2x - 12(\sin x + \cos x) - 12 = 0.$$

Đặt $t = \sin x + \cos x$ (điều kiện $|t| \leq \sqrt{2}$) $\Rightarrow \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$.



$$(2) \Leftrightarrow t^2 - 12t - 13 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 13 \end{cases}.$$

Đổi chiều điều kiện ta có $\sin x + \cos x = -1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi & (k \in \mathbb{Z}) \\ x = \pi + k2\pi \end{cases}$ nên

phương trình có 2 điểm biểu diễn.

Vậy phương trình có 4 điểm biểu diễn nghiệm.

Câu 36: Nghiệm của phương trình $\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos x + 2 \sin 2x(\sin x - 1) = 1$ thoả điều kiện

$$\frac{\pi}{2} < \left|3x - \frac{\pi}{2}\right| \leq \pi \text{ có số điểm biểu diễn là:}$$

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\frac{\pi}{2} < \left|3x - \frac{\pi}{2}\right| \leq \pi \quad \begin{cases} \left|3x - \frac{\pi}{2}\right| \leq \pi \\ \left|3x - \frac{\pi}{2}\right| > \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\pi \leq 3x - \frac{\pi}{2} \leq \pi \\ 3x - \frac{\pi}{2} > \frac{\pi}{2} \\ 3x - \frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ x > \frac{\pi}{3} \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{6} \leq x < 0 \\ \frac{\pi}{3} < x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (*)$.

$$\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos x + 2 \sin 2x(\sin x - 1) = 1$$

$$\Leftrightarrow (\sin^2 x - 1) - \cos x(\sin x - 1) + 2 \sin 2x(\sin x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x - 1)(\sin x + 1 - \cos x + 2 \sin 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - 1 = 0 & (1) \\ \sin x - \cos x + 2 \sin 2x + 1 = 0 & (2) \end{cases}.$$

$$(1) \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$(2) \sin x - \cos x + 2 \sin 2x + 1 = 0.$$

Đặt $t = \sin x - \cos x$ (điều kiện $|t| \leq \sqrt{2}$) $\Rightarrow \sin x \cos x = \frac{1-t^2}{2}$.

$$t + 2(1-t^2) + 1 = 0 \Leftrightarrow -2t^2 + t + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Đổi chiều điều kiện của t ta có: $\sin x - \cos x = -1 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Đổi chiều điều kiện (*) ta có $x = \frac{\pi}{2}$ nên có 1 điểm biểu diễn.

Câu 37: Số điểm biểu diễn các nghiệm của phương trình $\frac{\cos^2 x - \sin 2x - \sqrt{2} - \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{2\sin\left(x + \frac{7\pi}{24}\right) - 1} = 0$

trên đường tròn lượng giác là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $\sin\left(x + \frac{7\pi}{24}\right) \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{\pi}{8} + k2\pi \\ x \neq \frac{13\pi}{24} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

Phương trình trở thành $\cos^2 x - \sin 2x - \sqrt{2} - \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x - \sin 2x = \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

So với điều kiện, ta được $x = \frac{7\pi}{8} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy có một điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác.

Câu 38: Số điểm biểu diễn các nghiệm của phương trình $\frac{\sin x \sin 2x + 2 \sin x \cos^2 x + \sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} = \sqrt{3} \cos 2x$ trên đường tròn lượng giác là

- A. 2. B. 4. C. 3. D. 5.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện

$$\sin x + \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Ta có:

$$\frac{\sin x \sin 2x + 2 \sin x \cos^2 x + \sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} = \sqrt{3} \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin 2x(\sin x + \cos x) + \sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} = \sqrt{3} \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sin 2x + 1)(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} = \sqrt{3} \cos 2x$$



$$\Leftrightarrow \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x = -1 \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vì mỗi họ nghiệm biểu diễn hai điểm trên đường tròn lượng giác nên các nghiệm phương trình có bốn điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác.



DẠNG 5. BIỆN LUẬN NGHIỆM PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC KHÔNG CHỦA THAM SỐ

5.1. Tìm số nghiệm của phương trình lượng giác trên tập K .

Câu 39: Tìm số nghiệm của phương trình $\cos 5x \cdot \cos x = \cos 4x$ trên $(0; 10\pi)$ là

A. 49.

B. 50.

C. 52.

D. 48.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \cos 5x \cdot \cos x = \cos 4x \Leftrightarrow \frac{1}{2} [\cos 4x + \cos 6x] = \cos 4x \Leftrightarrow \cos 6x = \cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x = 4x + k2\pi \\ 6x = -4x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{k\pi}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$$

Do $0 < x < 10\pi \Leftrightarrow 0 < \frac{k\pi}{5} < 10\pi \Leftrightarrow 0 < k < 50$. Vậy có 49 nghiệm thỏa điều kiện.

Câu 40: Số nghiệm thuộc khoảng $(0; 100\pi)$ của phương trình $\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 + \sqrt{3} \cos x = 3$ là

A. 49.

B. 50.

C. 52.

D. 48.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 + \sqrt{3} \cos x = 3 \Leftrightarrow 1 + \sin x + \sqrt{3} \cos x = 3 \Leftrightarrow \sin x + \sqrt{3} \cos x = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Theo đề bài cho ta có $0 < x < 100\pi \Leftrightarrow 0 < \frac{\pi}{6} + k2\pi < 100\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{12} < k < \frac{599}{12}$

Mà $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{0; 1; 2; 3; 4, \dots; 48; 49\}$.

Câu 41: Số nghiệm của phương trình $\cos^2 x - \sin 2x = \sqrt{2} + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ trên khoảng $(0; 3\pi)$ là

A. 2.

B. 3.

C. 4..

D. 1.

Lời giải

Chọn B

$$\cos^2 x - \sin 2x = \sqrt{2} + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \Leftrightarrow \cos^2 x - \sin 2x = \sqrt{2} + \sin^2 x \Leftrightarrow \cos 2x - \sin 2x = \sqrt{2}$$



$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Trên $(0;3\pi)$ $\Rightarrow x = \frac{7\pi}{8}, x = \frac{15\pi}{8}, x = \frac{23\pi}{8}$.

Câu 42: Gọi n là số nghiệm thuộc khoảng $(0;2023)$ của phương trình lượng giác $\sqrt{3}(1-\cos 2x) + \sin 2x - 4\cos x + 8 = 4(\sqrt{3}+1)\sin x$. Tìm n là

- A. 322. B. 320. C. 300. D. 321.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} &\text{Ta có } \sqrt{3}(1-\cos 2x) + \sin 2x - 4\cos x + 8 = 4(\sqrt{3}+1)\sin x \\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin^2 x + 2\sin x \cos x - 4\cos x + 8 = 4(\sqrt{3}+1)\sin x \\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin x(\sin x - 2) + 2\cos x(\sin x - 2) = 4(\sin x - 2) \\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin x + 2\cos x = 4 \quad (\text{vì } \sin x \leq 1 < 2) \\ &\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x + \cos x = 2 \Leftrightarrow \sin x \cos \frac{\pi}{6} + \cos x \sin \frac{\pi}{6} = 1 \\ &\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

$$\text{Theo đề bài } x \in (0;2023) \Rightarrow \frac{\pi}{3} + k2\pi \in (0;2023) \Rightarrow 2k + \frac{1}{3} \in \left(0; \frac{2023}{\pi}\right) \Rightarrow k \in \{0; 1; \dots; 321\}.$$

Vậy $n = 322$.

Câu 43: Số nghiệm của phương trình $2\cos^2 x + \sqrt{3}\sin 2x = 3$ trên $(0;2020\pi]$ là:

- A. 1010. B. 2019. C. 2020. D. 2021.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} &\text{Ta có: } 2\cos^2 x + \sqrt{3}\sin 2x = 3 \Leftrightarrow \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = 2 \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \\ &\Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

$$\text{Xét } 0 < x \leq 2020\pi \Leftrightarrow 0 < \frac{\pi}{6} + k\pi \leq 2020\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{6} < k \leq 2020 - \frac{1}{6} \Rightarrow k \in \{0; 1; \dots; 2019\}.$$

Vậy số nghiệm là 2020.

Câu 44: Huyết áp là đại lượng để đo độ lớn của lực tác dụng lên thành mạch máu. Nó được đo bằng hai chỉ số: huyết áp tâm thu (lúc tim đập) và huyết áp tâm trương (lúc tim nghỉ). Huyết áp của mỗi người thường khác nhau, nhưng huyết áp tiêu chuẩn là $120/80$, nó có nghĩa là huyết áp tâm thu là 120mmHg và huyết áp tâm trương là 80 mmHg . Giả sử rằng trái tim của một người đập 70 lần một phút, huyết áp P sau t giây có thể được



mô tả bằng hàm số $P(t) = 100 + 20 \sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right)$. Với $t \in [0; 60]$, có bao nhiêu lần huyết áp người đó bằng 100 mmHg?

A. 139.

B. 140.

C. 141.

D. 142.

Lời giải**Chọn C**

$$\begin{aligned} \text{Với } P(t) = 100 \Rightarrow 100 + 20 \sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right) = 100 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{7\pi}{3}t = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \Leftrightarrow t = \frac{3k}{7} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

$$\text{Với } t \in [0; 60] \Rightarrow 0 \leq \frac{3k}{7} \leq 60 \Leftrightarrow 0 \leq k \leq 140.$$

Do $k \in \mathbb{Z}$ nên có tất cả 141 giá trị k thỏa mãn.

Vậy với $t \in [0; 60]$ có 141 lần huyết áp người đó bằng 100 mmHg.

Câu 45: Năm 1893, George Ferris chế tạo vòng đu quay. Nó có đường kính 250 foot. Nếu với mỗi 40 giây vòng đu quay quay 1 vòng thì chiều cao h (foot) của một chỗ ngồi trên vòng đu quay là một hàm số của thời gian t (giây) được xác định như sau

$$h(t) = 125 \sin\left(0,157t - \frac{\pi}{2}\right) + 125.$$

Vòng quay bắt đầu tính từ thời điểm $t = 0$. Trong 40 giây đầu tiên của chuyến đi, tại thời điểm nào sau đây (làm tròn đến hàng đơn vị) thì người ngồi trên ghế đu quay đó cách mặt đất 125 foot? (Chú thích: 1 foot xấp xỉ 30,48 cm).

A. 20 giây.

B. 25 giây.

C. 30 giây.

D. 35 giây.

Lời giải**Chọn C**

$$\begin{aligned} h(t) = 125 \Rightarrow 125 \sin\left(0,157t - \frac{\pi}{2}\right) + 125 = 125 \Leftrightarrow \sin\left(0,157t - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ \text{Ta có: } \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 0,157t - \frac{\pi}{2} = k\pi \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{0,157} \left(\frac{1}{2} + k \right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Do } 0 \leq t \leq 40 \Rightarrow 0 \leq \frac{\pi}{0,157} \left(\frac{1}{2} + k \right) \leq 40 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{6,28}{\pi} - \frac{1}{2} \Rightarrow -0,5 \leq k < 1,499.$$

Do $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{0; 1\}$.

Với $k = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{0,157} \cdot \frac{1}{2} \approx 10$ giây.

Với $k = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{0,157} \cdot \frac{3}{2} \approx 30$ giây.



⇒ Trong 40 giây đầu tiên của chuyến đi, có 2 thời điểm người ngồi trên ghế đu quay đó cách mặt đất 125 foot, đó là lúc khoảng 10 giây và khoảng 30 giây.

5.2. Tìm nghiệm dương nhỏ nhất và nghiệm âm lớn nhất của phương trình lượng giác:

Câu 46: Nghiệm lớn nhất của phương trình $2\cos 2x - 1 = 0$ trong đoạn $[0; \pi]$ là:

A. $x = \pi$.

B. $x = \frac{11\pi}{12}$.

C. $x = \frac{2\pi}{3}$.

D. $x = \frac{5\pi}{6}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Phương trình } 2\cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases}.$$

$$\text{Xét } x \in [0; \pi] \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq \frac{\pi}{6} + k\pi \leq \pi \\ 0 \leq -\frac{\pi}{6} + k\pi \leq \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{6} \leq k \leq \frac{5}{6} \\ \frac{1}{6} \leq k \leq \frac{7}{6} \end{cases} \text{ mà } k \in \mathbb{Z} \text{ suy ra } \begin{cases} k = 0 \\ k = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \\ x = \frac{5\pi}{6} \end{cases}.$$

f Vậy nghiệm lớn nhất của phương trình $2\cos 2x - 1 = 0$ trong đoạn $[0; \pi]$ là $x = \frac{5\pi}{6}$.

Câu 47: Phương trình $\cos 2x + 2\cos x - 3 = 0$ có nghiệm lớn nhất trong khoảng $(0; 2019)$?

A. 644π .

B. 2π .

C. 640π .

D. 642π .

Lời giải

Chọn D

$$\cos 2x + 2\cos x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + 2\cos x - 4 = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1 \text{ hay } \cos x = -2 \text{ (loại)}$$

Với $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi; k \in \mathbb{Z}$.

Với $0 < x < 2019 \Leftrightarrow 0 < k2\pi < 2019 \Leftrightarrow 0 < k < 321.49 \Rightarrow k_{\max} = 321$.

Vậy nghiệm lớn nhất thuộc khoảng $(0; 2019)$ là $x = 642\pi$.

Câu 48: Nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $\sin(\cos 2x) = 0$ là

A. π .

B. $\frac{\pi}{2}$.

C. $\frac{\pi}{4}$.

D. $\frac{3\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\sin(\cos 2x) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$

Vì $\cos 2x \in [-1; 1] \Rightarrow k = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k_1\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k_1 \frac{\pi}{2} (k_1 \in \mathbb{Z})$.



$$\Rightarrow x_{\min} = \frac{\pi}{4}$$

Vậy phương trình có nghiệm dương nhỏ nhất là $\frac{\pi}{4}$.

Câu 49: Gọi x_0 là nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $3\sin^2 x + 2\sin x \cos x - \cos^2 x = 0$.

Chọn khẳng định đúng?

- A. $x_0 \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$. B. $x_0 \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. C. $x_0 \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. D. $x_0 \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.

Lời giải

Chọn C

$$3\sin^2 x + 2\sin x \cos x - \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow 3\sin^2 x + 3\sin x \cos x - \sin x \cos x - \cos^2 x = 0$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (3\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3\sin x - \cos x = 0 \\ \sin x + \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3\sin x}{\cos x} = 1 \\ \frac{\sin x}{\cos x} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = \frac{1}{3} \\ \tan x = -1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \arctan \frac{1}{3} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) . \end{aligned}$$

Do x_0 là nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $3\sin^2 x + 2\sin x \cos x - \cos^2 x = 0$ nên

$$x_0 = \arctan \frac{1}{3}.$$

Câu 50: Cho phương trình $\sin^2 x \cdot \tan x + \cos^2 x \cdot \cot x + 2\sin x \cos x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. Tính hiệu nghiệm âm lớn nhất và nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình.

- A. $-\frac{3\pi}{2}$. B. $\frac{5\pi}{6}$. C. $-\frac{5\pi}{6}$. D. π .

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}$.

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow \frac{\sin^3 x}{\cos x} + \frac{\cos^3 x}{\sin x} + 2\sin x \cos x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$



$$\Leftrightarrow \sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x = \frac{4\sqrt{3}}{3} \sin x \cos x \Leftrightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin 2x \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Suy ra nghiệm âm lớn nhất và nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình lần lượt là $-\frac{2\pi}{3}$ và $\frac{\pi}{6}$

Ta có: $-\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}$.

Câu 51: Hàng ngày, mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu $h(\text{m})$ của mực nước trong kênh tính theo thời gian $t(\text{h})$ được cho bởi công thức $h = 3\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + 12$.

Khi nào mực nước của kênh là cao nhất với thời gian ngắn nhất?

- A. $t = 22(\text{h})$. B. $t = 15(\text{h})$. C. $t = 14(\text{h})$. D. $t = 10(\text{h})$.

Lời giải



Chọn D

Ta có: $-1 \leq \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1 \Leftrightarrow 9 \leq h \leq 15$. Do đó mực nước cao nhất của kênh là 15m đạt được khi

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3} = k2\pi \Leftrightarrow t = -2 + 12k$$

Vì $t > 0 \Leftrightarrow -2 + 12k > 0 \Leftrightarrow k > \frac{1}{6}$

Chọn số k nguyên dương nhỏ nhất thoả $k > \frac{1}{6}$ là $k = 1 \Rightarrow t = 10$.



5.3. Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình lượng giác trên tập K .

Câu 52: Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\sin x + \sin 2x = 0$ trên đoạn $[0; 2\pi]$.

A. 4π .

B. 5π .

C. 3π .

D. 2π .

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \sin x + \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = \sin(-x) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -x + k2\pi \\ 2x = \pi + x + l2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} \\ x = \pi + 2l\pi \end{cases}, (k, l \in \mathbb{Z}).$$

Vì $x \in [0; 2\pi]$ nên $0 \leq x \leq 2\pi$.

$$\begin{aligned} &+ \text{Với } x = \frac{2k\pi}{3}. \text{ Ta có } 0 \leq \frac{2k\pi}{3} \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq k \leq 3. \text{ Suy ra} \\ &\quad \begin{cases} k=0 \Rightarrow x=0 \\ k=1 \Rightarrow x=\frac{2\pi}{3} \\ k=2 \Rightarrow x=\frac{4\pi}{3} \\ k=3 \Rightarrow x=2\pi \end{cases}. \end{aligned}$$

+ Với $x = \pi + 2l\pi$. Tương tự $0 \leq \pi + 2l\pi \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq l \leq \frac{1}{2}$. Suy ra $l=0 \Rightarrow x=\pi$.

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình đã cho trên $[0; 2\pi]$ là 5π .

Câu 53: Tính tổng các nghiệm trong đoạn $[0; 30]$ của phương trình: $\tan x = \tan 3x$ (1)

A. 55π ..

B. $\frac{171\pi}{2}$..

C. 45π ..

D. $\frac{190\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} &\text{Điều kiện để phương trình (1) có nghĩa} \quad \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos 3x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \end{cases} (*) \end{aligned}$$

Khi đó, phương trình (1) $3x = x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}$ so sánh với đk (*)

$$\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{cases}, x \in [0; 30] \Rightarrow k = \{0, \dots, 4\} \Rightarrow x \in \{0, \pi, 2\pi, \dots, 9\pi\}$$

Vậy, tổng các nghiệm trong đoạn $[0; 30]$ của phương trình (1) là: 45π .

Câu 54: Tổng nghiệm âm lớn nhất và nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình

$$\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ bằng}$$



A. $\frac{\pi}{9}$.

B. $\frac{\pi}{6}$.

C. $-\frac{\pi}{6}$.

D. $-\frac{\pi}{9}$.

Lời giải**Chọn C**

$$\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 3x - \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} + l2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7\pi}{36} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{11\pi}{36} + \frac{l2\pi}{3} \end{cases}; k, l \in \mathbb{Z}$$

TH1: $x < 0$; x lớn nhất

Chọn $\begin{cases} k = -1; x = -\frac{17\pi}{36} \\ l = -1; x = -\frac{13\pi}{36} \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{13\pi}{36}$ (nhận)

TH2: $x > 0$; x nhỏ nhất

Chọn $\begin{cases} k = 0; x = \frac{7\pi}{36} \\ l = 0; x = \frac{11\pi}{36} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{7\pi}{36}$ (nhận)

Khi đó tổng cần tìm là: $-\frac{13\pi}{36} + \frac{7\pi}{36} = -\frac{\pi}{6}$.

Câu 55: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\cos 2x - \cos x = 0$ trong khoảng $(0; 2\pi)$ bằng T . Vậy T bằng bao nhiêu?

A. $T = \pi$.

B. $T = \frac{7\pi}{6}$.

C. $T = \frac{4\pi}{3}$.

D. $T = 2\pi$.

Lời giải**Chọn D**

$$\cos 2x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \cos x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x + k2\pi \\ 2x = -x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = k\frac{2\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = k\frac{2\pi}{3}$$

Với $x \in (0; 2\pi) \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}; x = \frac{4\pi}{3}$.Vậy $T = \frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = 2\pi$.

Câu 56: Tổng các nghiệm của phương trình $\sin 2x + 3 = 6\sin x + \cos x$ trong khoảng $\left(0; \frac{5\pi}{2}\right)$ là

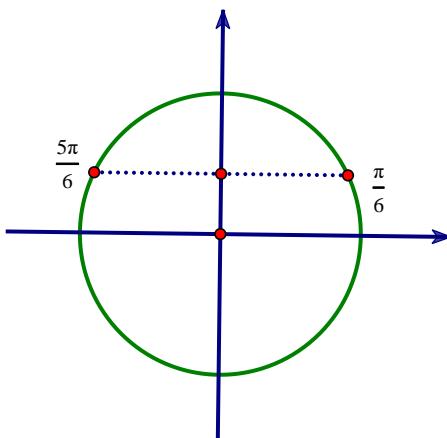
A. π .

B. $\frac{2\pi}{3}$.

C. $\frac{5\pi}{6}$.

D. $\frac{19\pi}{6}$.



Lời giải**Lời giải****Chọn D**

Ta có: $\sin 2x + 3 = 6\sin x + \cos x \Leftrightarrow 2\sin x \cos x - \cos x = 6\sin x - 3$

$$\Leftrightarrow 2\sin x \cos x - \cos x = 6\sin x - 3 \Leftrightarrow \cos x(2\sin x - 1) = 3(2\sin x - 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin x - 1 = 0 \\ \cos x = 3(L) \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Do $x \in \left(0; \frac{5\pi}{2}\right)$ suy ra $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5\pi}{6}$, $x = \frac{13\pi}{6}$.

Suy ra tổng các nghiệm là $\frac{19\pi}{6}$.

Câu 57: Tổng tất cả các nghiệm thuộc $(0; 10\pi)$ của phương trình $2\sin^2 x - 5\sin x - 3 = 0$ là

- A. 50π . B. 55π . C. 45π . D. 60π .

Lời giải**Chọn B**

$$\text{Ta có: } 2\sin^2 x - 5\sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 3 & (\text{VN}) \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

➤ Xét $0 < -\frac{\pi}{6} + k2\pi < 10\pi \Leftrightarrow \frac{1}{12} < k < \frac{61}{12}$ mà $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$

$$\Rightarrow x \in \left\{ \frac{11\pi}{6}; \frac{23\pi}{6}; \frac{35\pi}{6}; \frac{47\pi}{6}; \frac{59\pi}{6} \right\}.$$

Xét $0 < \frac{7\pi}{6} + k2\pi < 10\pi \Leftrightarrow -\frac{7}{12} < k < \frac{53}{12}$ mà $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$



$$\Rightarrow x \in \left\{ \frac{7\pi}{6}; \frac{19\pi}{6}; \frac{31\pi}{6}; \frac{43\pi}{6}; \frac{55\pi}{6} \right\}.$$

Vậy tổng tất cả các nghiệm thuộc $(0; 10\pi)$ của phương trình là 55π .

Câu 58: Tổng các nghiệm trong đoạn $[0; 2\pi]$ của phương trình $\sin^3 x - \cos^3 x = 1$ bằng

- A. $\frac{5\pi}{2}$. B. $\frac{7\pi}{2}$. C. 2π . D. $\frac{3\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$$\sin^3 x - \cos^3 x = 1 \Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cos x) = 1 \quad (1).$$

$$\text{Đặt } t = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \quad -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}.$$

$$\text{Có } t^2 = 1 - 2 \sin x \cos x \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{1}{2}(1 - t^2).$$

$$(1) \text{ trở thành: } t \left[1 + \frac{1}{2}(1 - t^2) \right] = 1 \Leftrightarrow t^3 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow (t - 1)(t^2 + t - 2) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -2 \end{cases} \quad (L) \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + l2\pi \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + l2\pi \end{cases} \quad k, l \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Có } x \in [0; 2\pi] \text{ nên ta có các nghiệm } x = \pi; x = \frac{\pi}{2}.$$

Vậy tổng các nghiệm $x \in [0; 2\pi]$ của phương trình đã cho là $\frac{3\pi}{2}$.

Câu 59: Phương trình $6\sin^2 x + 7\sqrt{3}\sin 2x - 8\cos^2 x = 6$ có tổng hai nghiệm dương nhỏ nhất bằng

- A. $\frac{17\pi}{12}$. B. $\frac{2\pi}{3}$. C. $\frac{5\pi}{24}$. D. $\frac{7\pi}{12}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } 6\sin^2 x + 7\sqrt{3}\sin 2x - 8\cos^2 x = 6 \Leftrightarrow 6\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right) + 7\sqrt{3}\sin 2x - 8\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right) = 6.$$

$$\Leftrightarrow 3(1 - \cos 2x) + 7\sqrt{3}\sin 2x - 4(1 + \cos 2x) = 6 \Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = 1.$$



$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

+ Trường hợp $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, do $x > 0 \Rightarrow \frac{\pi}{6} + k\pi > 0 \Leftrightarrow k > -\frac{1}{6}$. Lại có $k \in \mathbb{Z}$ nên nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình trong trường hợp này là nghiệm $x = \frac{\pi}{6}$ ứng với $k = 0$.

+ Trường hợp $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, do $x > 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi > 0 \Leftrightarrow k > -\frac{1}{2}$. Lại có $k \in \mathbb{Z}$ nên nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình trong trường hợp này là nghiệm $x = \frac{\pi}{2}$ ứng với $k = 0$.

Vậy hai nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình là: $x = \frac{\pi}{6}$; $x = \frac{\pi}{2}$ và tổng của chúng là $\frac{2\pi}{3}$.

Câu 60: Gọi S là tổng các nghiệm của phương trình $\frac{\sin x}{\cos x + 1} = 0$ trên đoạn $[0; 2017\pi]$. Tính S .

- A. $S = 2035153\pi$. B. $S = 1001000\pi$. C. $S = 1017072\pi$. D. $S = 2000200\pi$.

Lời giải

Chọn C

$$\frac{\sin x}{\cos x + 1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi.$$

Suy ra tập nghiệm là $\{0; 2\pi; 4\pi; \dots; 2n\pi, \dots\}$.

Vậy $S = (0 + 2 + 4 + \dots + 2016)\pi = 2\pi(1 + 2 + \dots + 1008) = 1017072\pi$.

Câu 61: Tìm tổng các nghiệm của phương trình $\sin 3x + \cos x = 0$ trên $(0; \pi)$.

- A. $\frac{5\pi}{8}$. B. $\frac{\pi}{3}$. C. π . D. 2π .

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \sin 3x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin 3x = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = x - \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ 3x = \frac{3\pi}{2} - x + l2\pi \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{3\pi}{8} + l\frac{\pi}{2} \end{cases} (k, l \in \mathbb{Z}).$$

Mà $x \in (0; \pi)$ nên $\begin{cases} 0 < -\frac{\pi}{4} + k\pi < \pi \\ 0 < \frac{3\pi}{8} + l\frac{\pi}{2} < \pi \end{cases}$. Do $\begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ l \in \mathbb{Z} \end{cases}$ nên $\begin{cases} k=1 \\ l=0 \\ l=1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} \\ x = \frac{3\pi}{8} \\ x = \frac{7\pi}{8} \end{cases} \Rightarrow T = \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{8} + \frac{7\pi}{8} = 2\pi.$$

Câu 62: Tìm tổng tất cả các nghiệm thuộc đoạn $[0; 30]$ của phương trình $\cos 3x - 4\cos 2x + 3\cos x - 4 = 0$ là

- A. 45π . B. $\frac{121}{2}\pi$. C. $\frac{99}{2}\pi$. D. 50π .

Lời giải

Chọn D

PT $\cos 3x - 4\cos 2x + 3\cos x - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 x - 3\cos x - 4(2\cos^2 x - 1) + 3\cos x - 4 = 0 \Leftrightarrow 4\cos^3 x - 8\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = 2 \end{cases} (\text{vn})$$

+ Với $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Theo giải thích, $x \in [0; 30] \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{2} + k \leq \frac{30}{\pi} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{30}{\pi} - \frac{1}{2}$ mà $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{0; 1; 2; 3; \dots; 9\}$.

Vậy tổng các nghiệm thỏa mãn yêu cầu bài toán là

$$\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) + \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right) + \dots + \left(\frac{\pi}{2} + 9\pi\right) = 5\pi + (1+2+\dots+9)\pi = 5\pi + 45\pi = 50\pi.$$

Câu 63: Tính tổng S tất cả các nghiệm của phương trình $(2\cos 2x + 5)(\sin^4 x - \cos^4 x) + 3 = 0$ trên khoảng $(0; 2\pi)$.

- A. $S = \frac{7\pi}{6}$. B. $S = \frac{11\pi}{6}$. C. $S = 4\pi$. D. $S = 5\pi$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $(2\cos 2x + 5)(\sin^4 x - \cos^4 x) + 3 = 0 \Leftrightarrow (2\cos 2x + 5)(\sin^2 x - \cos^2 x) + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow -(2\cos 2x + 5)\cos 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 2x + 5\cos 2x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = -3 \\ \cos 2x = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pm 2\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pm \pi}{3} + k\pi.$$

• Với $x = \frac{\pi}{3} + k\pi : x \in (0; 2\pi) \Leftrightarrow 0 < \frac{\pi}{3} + k\pi < 2\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < k < \frac{5}{3}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{0; 1\} \Rightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{3}; \frac{4\pi}{3} \right\}$.

• Với $x = \frac{-\pi}{3} + k\pi : x \in (0; 2\pi) \Leftrightarrow 0 < \frac{-\pi}{3} + k\pi < 2\pi \Leftrightarrow \frac{1}{3} < k < \frac{7}{3}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{1; 2\} \Rightarrow x \in \left\{ \frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} \right\}$.

Vậy tổng $S = 4\pi$.

Câu 64: Cho phương trình $(2\sin x - 1)(\sqrt{3}\tan x + 2\sin x) = 3 - 4\cos^2 x$. Gọi T là tập hợp các nghiệm thuộc đoạn $[0; 20\pi]$ của phương trình trên. Tính tổng các phần tử của T .

- A. $\frac{570}{3}\pi$. B. $\frac{875}{3}\pi$. C. $\frac{880}{3}\pi$. D. $\frac{1150}{3}\pi$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Phương trình đã cho tương đương với $(2\sin x - 1)(\sqrt{3}\tan x + 2\sin x) = 4\sin^2 x - 1$.

$$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)(\sqrt{3}\tan x - 1) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}) \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

*Trường hợp 1: Với $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$. (1)

$$x \in [0; 20\pi] \Leftrightarrow 0 \leq \frac{5\pi}{6} + k2\pi \leq 20\pi \Leftrightarrow -\frac{5}{12} \leq k \leq \frac{115}{12}. \text{ Mà } k \in \mathbb{Z} \text{ nên } k \in \{0; 1; 2; \dots; 9\}.$$

\Rightarrow Tổng tất cả các nghiệm thuộc đoạn $[0; 20\pi]$ của họ nghiệm (1) là:

$$S_1 = \sum_{k=0}^9 \left(\frac{5\pi}{6} + k2\pi \right) = \frac{295\pi}{3}.$$

*Trường hợp 2: Với $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$. (2)



$x \in [0; 20\pi] \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\pi}{6} + k\pi \leq 20\pi \Leftrightarrow \frac{-1}{6} \leq k \leq \frac{119}{6}$. Mà $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{0; 1; 2; \dots; 19\}$.

⇒ Tổng tất cả các nghiệm thuộc đoạn $[0; 20\pi]$ của họ nghiệm (2) là:

$$S_2 = \sum_{k=0}^{19} \left(\frac{\pi}{6} + k\pi \right) = \frac{580\pi}{3}.$$

Vậy tổng các phần tử của T là $S_1 + S_2 = \frac{875}{3}\pi$.

Câu 65: Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\cos 2x - \tan^2 x = \frac{\cos^2 x - \cos^3 x - 1}{\cos^2 x}$ trên đoạn $[1; 70]$

- A. 188π . B. 263π . C. 363π . D. 365π

Lời giải

Chọn D

Ta có điều kiện $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

f Phương trình đã cho trở thành: $2\cos^2 x - 1 - \tan^2 x = \frac{\cos^2 x - \cos^3 x - 1}{\cos^2 x}$.

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x - \cos^3 x - 1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow 2\cos^4 x + \cos^3 x - \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x(2\cos^2 x + \cos x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = -1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

So sánh điều kiện ta có

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + k2\pi \in [1; 70] \Rightarrow k = 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10 \\ x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \in [1; 70] \Rightarrow k = 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10 \\ x = \frac{-\pi}{3} + k2\pi \in [1; 70] \Rightarrow k = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11 \end{cases}$$

Tổng các nghiệm trên đoạn đã cho của họ thứ nhất là:

$$S_1 = \frac{11(\pi + 2.10\pi)}{2} = 121\pi$$

Tổng các nghiệm trên đoạn đã cho của họ thứ hai là:

$$S_2 = \frac{11(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + 2.10\pi)}{2} = \frac{341\pi}{3}$$



Tổng các nghiệm trên đoạn đã cho của họ thứ ba là:

$$S_3 = \frac{11\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi + \frac{-\pi}{3} + 2.11\pi\right)}{2} = \frac{385\pi}{3}$$

Vậy tổng các nghiệm trên đoạn đã cho của phương trình là:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = 363\pi$$

Câu 66: Tổng các nghiệm của phương trình $\sin^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin^4\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{5}{4}$ trong khoảng $(0; 2\pi)$ bằng

- A. 2π . B. 4π . C. π . D. 3π .

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \sin^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin^4\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow (1-\cos 2x)^2 + (1+\sin 2x)^2 + (1-\sin 2x)^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x + 2 + 2\sin^2 2x = 5$$

$$\Leftrightarrow -2\cos 2x + \sin^2 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow -2\cos 2x = 1 - \sin^2 2x \Leftrightarrow \cos^2 2x + 2\cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \cos 2x = -2 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}.$$

Theo bài ra ta có $0 < \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} < 2\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < k < \frac{7}{2}$, vì k nên $k = \{0; 1; 2; 3\}$.

Tổng các nghiệm là $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \pi + \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2} = 4\pi$.

Câu 67: Tổng nghiệm âm lớn nhất và nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $\left(1 + \tan x \tan \frac{x}{2}\right) \sin x + \cot x = 4$ là

- A. $-\frac{\pi}{6}$. B. $\frac{\pi}{2}$. C. $\frac{\pi}{6}$. D. $-\frac{\pi}{2}$.

Lời giải



Chọn D

Điều kiện $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

$$\left(1 + \tan x \tan \frac{x}{2}\right) \sin x + \cot x = 4 \Leftrightarrow \frac{\sin x \sin \frac{x}{2} + \cos x \cos \frac{x}{2}}{\cos x \cos \frac{x}{2}} \sin x + \cot x = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos \frac{x}{2}}{\cos x \cos \frac{x}{2}} \sin x + \cot x = 4 \Leftrightarrow \tan x + \cot x = 4 \Leftrightarrow \tan^2 x - 4 \tan x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 2 + \sqrt{3} \\ \tan x = 2 - \sqrt{3} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{12} + l\pi \end{cases}.$$

Với hai họ nghiệm trên dễ thấy nghiệm dương nhỏ nhất là $\frac{\pi}{12}$; để nghiệm âm lớn nhất ta

f) đều cho $k=l=-1$ được nghiệm âm $\frac{-7\pi}{12}; \frac{-11\pi}{12}$ khi đó nghiệm âm lớn nhất là $\frac{-7\pi}{12}$.

Ta có $\frac{-7\pi}{12} + \frac{\pi}{12} = -\frac{\pi}{2}$.

Câu 68: Tính tổng các nghiệm thuộc $[\pi; 3\pi]$ của phương trình: $\frac{\sin 2x}{\cos x - 1} = 0$.

- A. 8π . B. 9π . C. 10π . D. $\frac{3\pi}{2}$.

Lời giải**Chọn A**

ĐK: $\cos x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$PT \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Kết hợp với ĐK ta được $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Với } x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ mà } x \in [\pi; 3\pi] \Rightarrow \begin{cases} \pi \leq \frac{\pi}{2} + k\pi \leq 3\pi \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \leq k \leq \frac{5}{2} \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow k \in \{1; 2\}$$

suy ra $x \in \left\{ \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2} \right\}$.



$$\text{Với } x = \pi + k2\pi, \text{ mà } x \in [\pi; 3\pi] \Rightarrow \begin{cases} \pi \leq x \leq 3\pi \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq k \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow k \in \{0; 1\} \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

suy ra $x \in \{\pi; 3\pi\}$.

Vậy tổng các nghiệm bằng 8π .

Câu 69: Tính tổng T các nghiệm của phương trình $\cos^2 x = \sin x \cos x + 2 \sin x - \cos x - 2$ trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; 5\pi\right)$.

- A. $T = \frac{15\pi}{2}$. B. $T = \frac{21\pi}{8}$. C. $T = 7\pi$. D. $T = \frac{3\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= \sin x \cos x + 2 \sin x - \cos x - 2 \\ \Leftrightarrow -\sin^2 x - 2 \sin x + 3 + \cos x - \sin x \cos x &= 0 \\ \Leftrightarrow (1 - \sin x)(\sin x + 3) + \cos x(1 - \sin x) &= 0 \\ \Leftrightarrow (1 - \sin x)(\sin x + \cos x + 3) &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 & (1) \\ \sin x + \cos x + 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vì $x \in \left(\frac{\pi}{2}; 5\pi\right)$ nên phương trình có các nghiệm: $x_1 = \frac{5\pi}{2}$ và $x_2 = \frac{9\pi}{2}$.

$$(2) \Leftrightarrow \sin x + \cos x = -3 \text{ vô nghiệm vì } 1^2 + 1^2 < (-3)^2.$$

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình là: $T = x_1 + x_2 = \frac{5\pi}{2} + \frac{9\pi}{2} = 7\pi$.

Câu 70: Tính tổng các nghiệm trên $(-4\pi; 4\pi)$ của phương trình $\sin^3 x - 3\sqrt[3]{3\sin x - 2} + 2 = 0$

- A. π . B. -2π . C. $-\pi$. D. 0 .

Lời giải

Chọn B

$$\sin^3 x - 3\sqrt[3]{3\sin x - 2} + 2 = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \sin^3 x + 3\sin x = 3\sin x - 2 + 3\sqrt[3]{3\sin x - 2}$$

Đặt $t = \sqrt[3]{3\sin x - 2}$, phương trình trở thành $\sin^3 x - t^3 + 3(\sin x - t) = 0$

$$\Leftrightarrow (\sin x - t)(\sin^2 x + t \cdot \sin x + t^2 + 3) = 0$$



Dễ chứng minh $\sin^2 t + t \cdot \sin x + t^2 + 3 > 0$ nên $\sin x = t$

$$\Leftrightarrow \sin x = \sqrt[3]{3\sin x - 2}$$

$$\Leftrightarrow \sin^3 x - 3\sin x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = -2 \text{ (L)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Ta có: } -4\pi < \frac{\pi}{2} + k2\pi < 4\pi \Leftrightarrow -\frac{9}{4} < k < \frac{7}{4}$$

Vậy tổng các nghiệm trên $(-4\pi; 4\pi)$ của (1) $\sum_{k=-2}^1 \left(\frac{\pi}{2} + k2\pi \right) = -2\pi$.

Câu 71: Phương trình $\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin 2x} = \frac{1}{\sin 4x}$ có tổng các nghiệm trên $(0; \pi)$ là:

- A. $\frac{\pi}{6}$. B. $\frac{\pi}{6}$. C. $\frac{2\pi}{3}$. D. π

Lời giải

Chọn D

Chọn D

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \\ \sin 4x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \\ \sin x \neq \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq \pm 1 \\ \sin x \neq 0 \\ \sin x \neq \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} Pt &\Leftrightarrow \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{2\sin x \cos x} = \frac{1}{4\sin x \cos x \cos 2x} \\ &\Leftrightarrow 2\sin x \cos 2x + \cos 2x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2\sin x(1 - 2\sin^2 x) + 1 - 2\sin^2 x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2\sin x(1 - 2\sin^2 x - \sin x) = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0(l) \\ 1 - 2\sin^2 x - \sin x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1(l) \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Suy ra phương trình có 2 nghiệm trên $(0; \pi)$ là $x = \frac{\pi}{6}$ và $x = \frac{5\pi}{6}$

Vậy tổng các nghiệm trên $(0; \pi)$ là: $\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = \pi$.



Câu 72: Phương trình $\frac{\sin 2x + 2\cos x - \sin x - 1}{\tan x + \sqrt{3}} = 0$ có bao nhiêu nghiệm trên $(0; 3\pi)$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4

Lời giải

Chọn B

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \tan x \neq -\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}.$$

$$Pt \Leftrightarrow \sin 2x + 2\cos x - \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\sin x \cos x - \sin x + 2\cos x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Kết hợp điều kiện xác định ta được nghiệm của phương trình là $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$

Vậy phương trình có hai nghiệm thuộc $(0; 3\pi)$ là $x = \frac{\pi}{3}$ và $x = \frac{7\pi}{3}$.

Câu 73: Gọi S là tổng tất cả các nghiệm thuộc $[0; 20\pi]$ của phương trình $2\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$.

Khi đó giá trị của S bằng:

A. $S = 570\pi$.

B. $S = 295\pi$.

C. $S = 590\pi$.

D. $S = \frac{200}{3}\pi$.

Lời giải

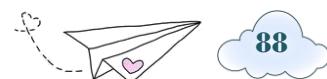
Chọn B

$$2\cos^2 x - \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow -2\sin^2 x - \sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k_1 2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k_2 2\pi \quad (k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}) \\ x = \frac{5\pi}{6} + k_3 2\pi \end{cases}$$

Do $x \in [0; 20\pi]$ nên:

$$\begin{cases} 0 \leq -\frac{\pi}{2} + k_1 2\pi \leq 20\pi \\ 0 \leq \frac{\pi}{6} + k_2 2\pi \leq 20\pi \\ 0 \leq \frac{5\pi}{6} + k_3 2\pi \leq 20\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4} \leq k_1 \leq \frac{41}{4} \\ -\frac{1}{12} \leq k_2 \leq \frac{119}{12} \\ -\frac{5}{12} \leq k_3 \leq \frac{115}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 \in \{1; 2; 3; \dots; 10\} \\ k_2 \in \{0; 1; 2; \dots; 9\} \\ k_3 \in \{0; 1; 2; \dots; 9\} \end{cases}$$

Ta thấy tất cả các nghiệm này không có hai nghiệm nào giống nhau nên tổng các nghiệm của phương trình trong đoạn $[0; 20\pi]$ là:



$$S = \sum_{k_1=1}^{10} \left(-\frac{\pi}{2} + k_1 2\pi \right) + \sum_{k_2=0}^9 \left(\frac{\pi}{6} + k_2 2\pi \right) + \sum_{k_3=0}^9 \left(\frac{5\pi}{6} + k_3 2\pi \right) = 295\pi.$$

Câu 74: Tính tổng T các nghiệm của phương trình $\cos^2 x - \sin 2x = \sqrt{2} + \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} + x \right)$ trên khoảng $(0; 2\pi)$.

- A. $T = \frac{7\pi}{8}$. B. $T = \frac{21\pi}{8}$. C. $T = \frac{11\pi}{4}$. D. $T = \frac{3\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\cos^2 x - \sin 2x = \sqrt{2} + \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} + x \right) \Leftrightarrow \cos^2 x - \sin 2x = \sqrt{2} + \sin^2 x$

$$\Leftrightarrow \cos 2x - \sin 2x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = 1 \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

f Vì $0 < x < 2\pi \Leftrightarrow 0 < -\frac{\pi}{8} + k\pi < 2\pi \Leftrightarrow \frac{1}{8} < k < \frac{17}{8}$

Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{1; 2\} \Rightarrow x_1 = \frac{7\pi}{8}; x_2 = \frac{15\pi}{8}$

Vậy $x_1 + x_2 = \frac{11\pi}{4}$.

Câu 75: Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\sqrt{3} \cos x - \sin x = 1$ trên $[0; 2\pi]$.

- A. $\frac{5\pi}{3}$. B. $\frac{11\pi}{6}$. C. $\frac{\pi}{6}$. D. $\frac{3\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\sqrt{3} \cos x - \sin x = 1 \Leftrightarrow \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

Do đó các nghiệm trên $[0; 2\pi]$ của phương trình là $x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{3\pi}{2}$.

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình trên $[0; 2\pi]$ bằng $\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{2} = \frac{5\pi}{3}$.

Câu 76: Gọi S là tập hợp các nghiệm thuộc khoảng $(0; 100\pi)$ của phương trình

$$\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 + \sqrt{3} \cos x = 3. \text{ Tổng các phần tử của } S \text{ là}$$



A. $\frac{7400\pi}{3}$.

B. $\frac{7525\pi}{3}$.

C. $\frac{7375\pi}{3}$.

D. $\frac{7550\pi}{3}$.

Lời giải**Chọn C**

Ta có $\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 + \sqrt{3} \cos x = 3 \Leftrightarrow 1 + \sin x + \sqrt{3} \cos x = 3 \Leftrightarrow \sin x + \sqrt{3} \cos x = 2$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Theo đề bài cho ta có $0 < x < 100\pi \Leftrightarrow 0 < \frac{\pi}{6} + k2\pi < 100\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{12} < k < \frac{599}{12}$

Mà $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{0; 1; 2; 3; 4, \dots; 48; 49\}$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } S &= \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + 2\pi + \frac{\pi}{6} + 2 \times 2\pi + \dots + \frac{\pi}{6} + 49 \times 2\pi = \frac{50\pi}{6} + 2\pi(1+2+3+4+\dots+49) \\ &= \frac{50\pi}{6} + 2\pi \frac{49(49+1)}{2} = \frac{7375\pi}{3}. \end{aligned}$$

Câu 77: Gọi S là tập hợp tất cả các nghiệm thuộc khoảng $(0; 2018)$ của phương trình sau:

$$\sqrt{3}(1-\cos 2x) + \sin 2x - 4\cos x + 8 = 4(\sqrt{3}+1)\sin x. \text{ Tính tổng tất cả các phần tử của } S.$$

A. 103255π . B. $\frac{310408\pi}{3}$. C. $\frac{312341\pi}{3}$. D. 102827π .

Lời giải**Chọn B**

Ta có $\sqrt{3}(1-\cos 2x) + \sin 2x - 4\cos x + 8 = 4(\sqrt{3}+1)\sin x$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin^2 x + 2\sin x \cos x - 4\cos x - 4\sqrt{3}\sin x - 4\sin x + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x(\sqrt{3}\sin x + \cos x - 2) - 4(\sqrt{3}\sin x + \cos x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(\sin x - 2)(\sqrt{3}\sin x + \cos x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x + \cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vì $x \in (0; 2018)$ nên $0 < \frac{\pi}{3} + k2\pi < 2018 \Leftrightarrow -\frac{1}{6} < k < \frac{1009}{\pi} - \frac{1}{6} \Rightarrow k \in \{0; 1; 2; \dots; 321\}$.

Suy ra $S = \left\{ \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3} + 2\pi; \frac{\pi}{3} + 2.2\pi; \dots; \frac{\pi}{3} + 321.2\pi \right\}$

Vậy tổng tất cả các phần tử của S là $T = 322 \cdot \frac{\pi}{3} + 2\pi(1+2+3+\dots+321) = \frac{310408\pi}{3}$.



Câu 78: Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\sin 2x + 4\sin x - 2\cos x - 4 = 0$ trong đoạn $[0; 100\pi]$ của phương trình.

- A. 100π . B. 2476π . C. 25π . D. 2475π .

Lời giải

Chọn D

Ta có $\sin 2x + 4\sin x - 2\cos x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2\sin x \cos x + 4\sin x - 2\cos x - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow 2\sin x(\cos x + 2) - 2(\cos x + 2) = 0 \Leftrightarrow (\cos x + 2)(\sin x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos x = -2 \end{cases} \text{ (VN)} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Cách 1: Trong đoạn $[0; 100\pi]$, phương trình có các nghiệm

$$\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + 2\pi; \frac{\pi}{2} + 4\pi; \frac{\pi}{2} + 6\pi; \dots; \frac{\pi}{2} + 98\pi$$

Tổng các nghiệm bằng

$$S = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + 2\pi + \frac{\pi}{2} + 4\pi + \frac{\pi}{2} + 6\pi + \dots + \frac{\pi}{2} + 98\pi = 50 \cdot \frac{\pi}{2} + (2 + 4 + 6 + \dots + 98) \cdot \pi$$

$$S = 25\pi + \frac{(2+98) \cdot 49}{2} \cdot \pi = 2475\pi.$$

Cách 2: Tìm k thỏa mãn $0 \leq \frac{\pi}{2} + k2\pi \leq 100\pi \Rightarrow 0 \leq k \leq 49$

$$\text{Bấm máy } S = \sum_{k=0}^{49} \left(\frac{\pi}{2} + k2\pi \right) = 2475\pi.$$

Câu 79: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\cos(\sin x) = 1$ trên $[0; 2\pi]$ bằng

- A. 0 . B. π . C. 2π . D. 3π .

Lời giải

Chọn B

Ta có $x \in [0; 2\pi] \Rightarrow \sin x \in [-1; 1]$

Khi đó: $\cos(\sin x) = 1 \Leftrightarrow \sin x = k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ với $-1 \leq k2\pi \leq 1 \Leftrightarrow k = 0$.

Phương trình trở thành $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = m\pi \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \end{cases} \quad (m \in \mathbb{Z})$.

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\cos(\sin x) = 1$ trên $[0; 2\pi]$ bằng π .

Câu 80: Tính tổng S các nghiệm của phương trình $(2\cos 2x + 5)(\sin^4 x - \cos^4 x) + 3 = 0$ trong khoảng $(0; 2\pi)$.



A. $S = \frac{11\pi}{6}$.

B. $S = 4\pi$.

C. $S = 5\pi$.

D. $S = \frac{7\pi}{6}$.

Lời giải**Chọn B**

Ta có: $(2\cos 2x + 5)(\sin^4 x - \cos^4 x) + 3 = 0 \Leftrightarrow (2\cos 2x + 5)(\sin^2 x - \cos^2 x) + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow -(2\cos 2x + 5)\cos 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow -2\cos^2(2x) - 5\cos 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2}.$$

$$\cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6} \right\}.$$

Do đó: $S = \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} + \frac{7\pi}{6} + \frac{11\pi}{6} = 4\pi$.

Câu 81: Cho phương trình $\sin^{2018} x + \cos^{2018} x = 2(\sin^{2020} x + \cos^{2020} x)$. Tính tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng $(0; 2018)$

A. $\left(\frac{1285}{4}\right)^2 \pi$.

B. $(643)^2 \pi$.

C. $(642)^2 \pi$.

D. $\left(\frac{1285}{2}\right)^2 \pi$.

Lời giải**Chọn D**

$$\sin^{2018} x + \cos^{2018} x = 2(\sin^{2020} x + \cos^{2020} x) \Leftrightarrow \sin^{2018} x(1 - 2\sin^2 x) + \cos^{2018} x(1 - 2\cos^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^{2018} x \cdot \cos 2x - \cos^{2018} x \cdot \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \sin^{2018} x = \cos^{2018} x. \end{cases}$$

$$+ \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}) \quad (1)$$

$$+ \sin^{2018} x = \cos^{2018} x \Leftrightarrow \tan^{2018} x = 1 \quad (x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ không là nghiệm}) \Leftrightarrow \tan x = \pm 1$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \quad (2). \text{ Từ (1) và (2) ta có } x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}) \text{ là nghiệm của pt.}$$

$$\text{Do } x \in (0; 2018) \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} < 2018 \Rightarrow 0 \leq k \leq 1284, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng $(0; 2018)$ bằng

$$\frac{\pi}{4} \cdot 1285 + (1 + 2 + \dots + 1284) \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \cdot 1285 + \frac{1284 \cdot 1285}{4} \pi = \left(\frac{1285}{2}\right)^2 \pi.$$

Câu 82: Phương trình lượng giác: $\cos 3x - \cos 2x + 9\sin x - 4 = 0$ trên khoảng $(0; 3\pi)$. Tổng số nghiệm của phương trình trên là:



A. $\frac{25\pi}{6}$.

B. 6π .

C. Kết quả khác. D. $\frac{11\pi}{3}$.

Lời giải**Chọn B**

Ta có $\cos 3x - \cos 2x + 9 \sin x - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 x - 3\cos x + 2\sin^2 x + 9\sin x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x(1 - 4\sin^2 x) + (2\sin x - 1)(\sin x + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)(-\cos x - 2\sin x \cos x + \sin x + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin x - 1 = 0 & (1) \\ \sin x - \cos x - 2\sin x \cos x + 5 = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải (1), ta có (1) $\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$.

f Với $x \in (0; 3\pi)$ nên (1) có các nghiệm thoả bài toán là: $x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{13\pi}{6}, x = \frac{5\pi}{6}, x = \frac{17\pi}{6}$.

Giải (2), đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ với $|t| \leq \sqrt{2}$.

Khi đó $t^2 = 1 - 2\sin x \cos x \Rightarrow 2\sin x \cos x = 1 - t^2$;

Phương trình (2) trở thành $t - 1 + t^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow t^2 + t + 4 = 0$ phương trình vô nghiệm.

Vậy tổng các nghiệm là: $\frac{\pi}{6} + \frac{13\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} + \frac{17\pi}{6} = 6\pi$.

DẠNG 6. TÌM ĐIỀU KIỆN CỦA THAM SỐ m ĐỂ PHƯƠNG TRÌNH LUỢNG GIÁC CHO TRƯỚC CÓ NGHIỆM.

Câu 83: Tính tổng S tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình

$$2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 5 - m$$
 có nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{4}\right)$.

A. $S = -25$.

B. $S = -22$.

C. $S = 22$.

D. $S = 25$.

Lời giải**Chọn C**

Theo giả thiết, ta có $x \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{4}\right) \Rightarrow 2x - \frac{\pi}{3} \in \left(0; \frac{7\pi}{6}\right)$.

Phương trình $2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 5 - m \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{5-m}{2}$.

Với $2x - \frac{\pi}{3} \in \left(0; \frac{7\pi}{6}\right) \Leftrightarrow -1 \leq \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) < 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{5-m}{2} < 1 \Leftrightarrow -2 \leq 5-m < 2 \Leftrightarrow -7 \leq -m < -3 \Leftrightarrow 3 < m \leq 7.$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{4; 5; 6; 7\}$. Khi đó $S = 4+5+6+7=22$.

Câu 84: Tìm m để phương trình $(3\cos x + 4)(3\cos x + 1 - 3m) = 0$ có số nghiệm trên đoạn $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$ là lớn nhất.

- A. $-\frac{2}{3} \leq m \leq \frac{1}{3}$. B. $-\frac{2}{3} < m \leq \frac{4}{3}$. C. $-\frac{2}{3} < m < \frac{1}{3}$. D. $-\frac{2}{3} < m \leq \frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $(3\cos x + 4)(3\cos x + 1 - 3m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -\frac{4}{3} \\ \cos x = \frac{3m-1}{3} \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$ (*)

Vì phương trình $\cos x = -\frac{4}{3}$ vô nghiệm nên thỏa mãn yêu cầu bài toán khi (*) có số nghiệm trên đoạn $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$ nhiều nhất.

Khi đó $-1 < \frac{3m-1}{3} \leq 0 \Leftrightarrow -3 < 3m-1 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < m \leq \frac{1}{3}$.

Câu 85: Tìm điều kiện của tham số m để phương trình $\sin^2 x + 2(m+1)\sin x - 3m(m-2) = 0$ có nghiệm

- A. $\begin{cases} -\frac{1}{2} \leq m < \frac{1}{2} \\ 1 \leq m \leq 2 \end{cases}$. B. $\begin{cases} -\frac{1}{3} \leq m \leq \frac{1}{3} \\ 1 \leq m \leq 3 \end{cases}$. C. $\begin{cases} -2 \leq m \leq -1 \\ 0 \leq m \leq 1 \end{cases}$. D. $\begin{cases} -1 \leq m \leq 1 \\ 3 \leq m \leq 4 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \sin x$, $-1 \leq t \leq 1$.

Phương trình trở thành $t^2 + 2(m+1)t - 3m(m-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3m \\ t = m-2 \end{cases}$.

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq -3m \leq 1 \\ -1 \leq m-2 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3} \leq m \leq \frac{1}{3} \\ 1 \leq m \leq 3 \end{cases}$.

Câu 86: Tìm điều kiện của tham số m để phương trình $\cos 2x - (2m-1)\cos x - m + 1 = 0$ có đúng hai nghiệm trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.



A. $-1 < m \leq 0$.B. $0 \leq m < 1$.C. $0 \leq m \leq 1$.D. $-1 < m < 1$.**Lời giải****Chọn B**

Ta có $\cos 2x - (2m-1)\cos x - m + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - (2m-1)\cos x - m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} \\ \cos x = m \end{cases}$.

Với $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ thì $0 \leq \cos x \leq 1$.

Suy ra $\cos x = -\frac{1}{2}$ không thỏa bài toán.

Phương trình đã cho có 2 nghiệm trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow 0 \leq \cos x < 1 \Leftrightarrow 0 \leq m < 1$.

Câu 87: Cho phương trình $2\sin^2 x + (m-1)\sin 2x + (m+6)\cos^2 x = 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình vô nghiệm?

A. 4.B. 6.C. 5.D. 2.**Lời giải****Chọn A**

$$\begin{aligned} 2\sin^2 x + (m-1)\sin 2x + (m+6)\cos^2 x = 1 &\Leftrightarrow 1 - \cos 2x + (m-1)\sin 2x + (m+6)\frac{1+\cos 2x}{2} = 1 \\ &\Leftrightarrow 2 - 2\cos 2x + 2(m-1)\sin 2x + (m+6)(1+\cos 2x) = 2 \\ &\Leftrightarrow (m+4)\cos 2x + 2(m-1)\sin 2x = -(m+6). \end{aligned}$$

Phương trình vô nghiệm

$$\Leftrightarrow (m+4)^2 + 4(m-1)^2 < (m+6)^2 \Leftrightarrow 4m^2 - 12m - 16 < 0 \Leftrightarrow m \in (-1; 4).$$

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m để phương trình vô nghiệm.

Câu 88: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $2\cos^2 x + 4m\sin x \cos x = m$ có nghiệm:

- | | |
|--|---|
| <u>A.</u> $m < -\frac{2}{3}$. | <u>B.</u> $m \leq -\frac{2}{3}$ hoặc $m \geq 0$. |
| <u>C.</u> $-\frac{2}{3} \leq m \leq 0$. | <u>D.</u> $m \geq 0$. |

Lời giải**Chọn B**

Ta có

$$2\cos^2 x + 4m\sin x \cos x = m \Leftrightarrow 1 + \cos 2x + 2m\sin 2x = m \Leftrightarrow \cos 2x + 2m\sin 2x = m - 1$$

Phương trình $\cos 2x + 2m \sin 2x = m - 1$ có nghiệm $\Leftrightarrow 1 + 4m^2 \geq (m-1)^2 \Leftrightarrow 3m^2 + 2m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq -\frac{2}{3}$ hoặc $m \geq 0$.

Câu 89: Số các giá trị nguyên m để phương trình

$\sqrt{4m-4} \cdot \sin x \cdot \cos x + \sqrt{m-2} \cdot \cos 2x = \sqrt{3m-9}$ có nghiệm là

- A. 7. B. 6. C. 5. D. 4.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện xác định: $\begin{cases} 4m-4 \geq 0 \\ m-2 \geq 0 \\ 3m-9 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m \geq 2 \Leftrightarrow m \geq 3 \\ m \geq 3 \end{cases}$

$$\sqrt{4m-4} \cdot \sin x \cdot \cos x + \sqrt{m-2} \cdot \cos 2x = \sqrt{3m-9}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{m-1} \cdot (2 \sin x \cdot \cos x) + \sqrt{m-2} \cdot \cos 2x = \sqrt{3m-9}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{m-1} \cdot \sin 2x + \sqrt{m-2} \cdot \cos 2x = \sqrt{3m-9}$$

Phương trình có nghiệm khi $(\sqrt{m-1})^2 + (\sqrt{m-2})^2 \geq (\sqrt{3m-9})^2 \Leftrightarrow m-1+m-2 \geq 3m-9 \Leftrightarrow m \leq 6$.

Kết hợp điều kiện ta được $3 \leq m \leq 6$.

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{3; 4; 5; 6\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 90: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sqrt{3} \cos x + m - 1 = 0$ có nghiệm?

- A. 1.. B. 2.. C. 3.. D. Vô số.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\sqrt{3} \cos x + m - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1-m}{\sqrt{3}}$.

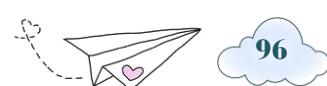
Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -1 \leq \frac{1-m}{\sqrt{3}} \leq 1 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{3} \leq m \leq 1 + \sqrt{3}$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{0; 1; 2\}$. Vậy có tất cả 3 giá trị nguyên của tham số m .

Câu 91: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $(m+1) \sin x + 2 - m = 0$ có nghiệm.

- A. $m \leq -1$.. B. $m \geq \frac{1}{2}$.. C. $-1 < m \leq \frac{1}{2}$.. D. $m > -1$.

Lời giải



Chọn B

Phương trình $(m+1)\sin x + 2 - m = 0 \Leftrightarrow (m+1)\sin x = m - 2 \Leftrightarrow \sin x = \frac{m-2}{m+1}$.

$$\text{Để phương trình có nghiệm} \Leftrightarrow -1 \leq \frac{m-2}{m+1} \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq 1 + \frac{m-2}{m+1} \\ \frac{m-2}{m+1} - 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2m-1}{m+1} \geq 0 \\ -\frac{3}{m+1} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{1}{2} \\ m < -1 \\ m > -1 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2}$$

Câu 92: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sqrt{3}\cos x + m - 1 = 0$ có nghiệm?

- A. 1.. B. 2.. C. 3.. D. Vô số.

Lời giải**Chọn C**

Ta có $\sqrt{3}\cos x + m - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1-m}{\sqrt{3}}$.

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -1 \leq \frac{1-m}{\sqrt{3}} \leq 1 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{3} \leq m \leq 1 + \sqrt{3}$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{0; 1; 2\}$. Vậy có tất cả 3 giá trị nguyên của tham số m .

Câu 93: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $(m+1)\sin x + 2 - m = 0$ có nghiệm.

- A. $m \leq -1$.. B. $m \geq \frac{1}{2}$.. C. $-1 < m \leq \frac{1}{2}$.. D. $m > -1$.

Lời giải**Chọn B**

Phương trình $(m+1)\sin x + 2 - m = 0 \Leftrightarrow (m+1)\sin x = m - 2 \Leftrightarrow \sin x = \frac{m-2}{m+1}$.

$$\text{Để phương trình có nghiệm} \Leftrightarrow -1 \leq \frac{m-2}{m+1} \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq 1 + \frac{m-2}{m+1} \\ \frac{m-2}{m+1} - 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2m-1}{m+1} \geq 0 \\ -\frac{3}{m+1} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{1}{2} \\ m < -1 \\ m > -1 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2}$$

DẠNG 7. TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

7.1. Tìm GTLN, GTNN sử dụng điều kiện $-1 \leq \sin x, \cos x \leq 1$.

Câu 94: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$

- A. -1. B. 0. C. -2. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Lời giải**Chọn A**

Ta có $A = \sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3} = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

$$-1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq A \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

Vậy $\min_{x \in \mathbb{R}} = -1$ khi $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 95: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \sin^4 x + \cos^4 x$

- A.** 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải**Chọn A**

Ta có $A = \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$

$$0 \leq \sin^2 2x \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

Vậy $\max_{x \in \mathbb{R}} = 1$ khi $\sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 96: Tập giá trị của hàm số $y = \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x + 1$ là đoạn $[a; b]$. Tính tổng $T = a + b$.

- A.** $T = 1$. **B.** $T = 2$. **C.** $T = 0$. **D.** $T = -1$.

Lời giải**Chọn B**

Cách 1: $y = \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x + 1 \Leftrightarrow \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = y - 1$

Để phương trình trên có nghiệm thì $1^2 + (\sqrt{3})^2 \geq (y-1)^2 \Leftrightarrow y^2 - 2y - 3 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq 3$.

Suy ra $y \in [-1; 3]$. Vậy $T = -1 + 3 = 2$.

Cách 2: $y = \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x + 1 = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 1$

Do $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \in [-1; 1]$ nên $2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 1 \in [-1; 3]$.

Vậy $-1 \leq y \leq 3$. (Ta thấy $y = -1$ khi $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$, $y = 3$ khi $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$).



Câu 97: Hàng ngày, mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu h (m) của mực nước trong kênh tính theo thời gian t (h) được cho bởi công thức $h = 3\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + 12$.

Khi nào mực nước của kênh là cao nhất với thời gian ngắn nhất?

- A. $t = 22$ (h). B. $t = 15$ (h). C. $t = 14$ (h). D. $t = 10$ (h).

Lời giải

Chọn D

Ta có: $-1 \leq \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1 \Leftrightarrow 9 \leq h \leq 15$. Do đó mực nước cao nhất của kênh là 15m đạt được khi

$$\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3} = k2\pi \Leftrightarrow t = -2 + 12k$$

Vì $t > 0 \Leftrightarrow -2 + 12k > 0 \Leftrightarrow k > \frac{1}{6}$. Chọn số k nguyên dương nhỏ nhất thoả $k > \frac{1}{6}$ là $k = 1 \Rightarrow t = 10$.

Câu 98: Gọi M và N lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -1 + 2\cos x \left[(2 - \sqrt{3})\sin x + \cos x \right]$ trên \mathbb{R} . Biểu thức $M + N + 2$ có giá trị bằng

- f. A. 0. B. $4\sqrt{2 - \sqrt{3}}$. C. 2. D. $\sqrt{2 + \sqrt{3}} + 2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y = -1 + 2\cos x \left[(2 - \sqrt{3})\sin x + \cos x \right] = -1 + 2(2 - \sqrt{3})\sin x \cos x + 2\cos^2 x$

$$= (2 - \sqrt{3})\sin 2x + (2\cos^2 x - 1) = (2 - \sqrt{3})\sin 2x + \cos 2x$$

$$= (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \left[\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \sin 2x + \frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} \cos 2x \right] = (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \sin(2x + \alpha)$$

$$(với \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \cos \alpha; \frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \sin \alpha)$$

Suy ra $-\sqrt{6} + \sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{6} - \sqrt{2}$. Do đó $\max_{\mathbb{R}} y = \sqrt{6} - \sqrt{2} = M$; $\min_{\mathbb{R}} y = -\sqrt{6} + \sqrt{2} = N$.

Vậy $M + N + 2 = 2$.

Câu 99: Số giờ có ánh sáng của một thành phố X ở vĩ độ 40° bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số: $d(t) = 3\sin\left[\frac{\pi}{182}(t - 80)\right] + 12$, $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \leq 365$.

Vào ngày nào trong năm thì thành phố X có nhiều giờ ánh sáng nhất?

- A. 262. B. 353. C. 80. D. 171.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $d(t) = 3\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] + 12 \leq 3 + 12 = 15$

Dấu bằng xảy ra khi $\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{182}(t-80) = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$
 $\Leftrightarrow t = 171 + 364k$.

Mặt khác $t \in (0; 365]$ nên $0 < 171 + 364k \leq 365 \Leftrightarrow -\frac{171}{364} < k \leq \frac{194}{364}$.

Mà $k \in \mathbb{Z}$ nên $k = 0$.

Vậy $t = 171$.

Câu 100: Hàm số $y = 2\cos 3x + 3\sin 3x - 2$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

A. 7.

B. 3.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

TXD: $D = \mathbb{R}$

$$y = 2\cos 3x + 3\sin 3x - 2 = \sqrt{13}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\cos 3x + \frac{3}{\sqrt{13}}\sin 3x\right) - 2$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{13}\sin\left(3x + \arccos\frac{3}{\sqrt{13}}\right) - 2$$

Để hàm số y có giá trị nguyên $\Leftrightarrow \sqrt{13}\sin\left(3x + \arccos\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$ nguyên

$$+\Leftrightarrow \sin\left(3x + \arccos\frac{3}{\sqrt{13}}\right) = \frac{n}{\sqrt{13}} \text{ (với } n \text{ là một số nguyên)}$$

$$\text{Mà: } \sin\left(3x + \arccos\frac{3}{\sqrt{13}}\right) \in [-1; 1] \Rightarrow -1 \leq \frac{n}{\sqrt{13}} \leq 1 \Leftrightarrow -\sqrt{13} \leq n \leq \sqrt{13}$$

$$\text{Mà: } n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n = \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3\}$$

$\Rightarrow y$ có 7 giá trị nguyên.

Câu 101: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 2\sin^2 x + \cos^2 2x$.

A. max $y = 4$, min $y = \frac{3}{4}$. **B.** max $y = 3$, min $y = 2$.

C. max $y = 4$, min $y = 2$. **D.** max $y = 3$, min $y = \frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = \sin^2 x$, $0 \leq t \leq 1 \Rightarrow \cos 2x = 1 - 2t$.

$$\Rightarrow y = 2t + (1 - 2t)^2 = 4t^2 - 2t + 1 = \left(2t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$



Cách 1: Do $0 \leq t \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq 2t - \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2} \Rightarrow 0 \leq \left(2t - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{3}{4} \leq y \leq 3$.

Cách 2: Có $y' = 8t - 2 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4} \in [0;1]$.

Ta có: $y(0) = 1$; $y\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$; $y(1) = 3$.

Vậy $\max y = 3$ đạt được khi $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

$\min y = \frac{3}{4}$ đạt được khi $\sin^2 x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$.

Câu 102: Gọi M và m lần lượt là GTLN và GTNN của hàm số $y = \sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x$. Tổng $M + m$ là

- A. $-\frac{3}{2}$. B. $-\frac{1}{2}$. C. $\frac{3}{2}$. D. 1.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $y = \sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x + \sin 2x = -\frac{1}{2} \sin^2 2x + \sin 2x + 1$

Đặt $t = \sin 2x$ ($-1 \leq t \leq 1$).

$y = -\frac{1}{2}t^2 + t + 1$ ($-1 \leq t \leq 1$) là parabol có đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; y\left(\frac{-b}{2a}\right)\right) \Rightarrow I\left(1; \frac{3}{2}\right) \Rightarrow t = 1 \in [-1; 1]$

$y(-1) = -\frac{1}{2}$; $y(1) = \frac{3}{2}$. Suy ra $M = \frac{3}{2}$; $m = -\frac{1}{2}$.

Vậy $M + m = 1$.

7.2. Tìm GTLN, GTNN dạng $y = a \sin x + b \cos x + c$.

Câu 103: Cho hàm số $y = \frac{\sin x - 2 \cos x}{\sin x + \cos x + 3}$. Gọi m , M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số đã cho. Tính $7m - 5M$ bằng?

- A. 10. B. 1. C. 0. D. -10.

Lời giải

Chọn D

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y = \frac{\sin x - 2 \cos x}{\sin x + \cos x + 3} \Leftrightarrow (1-y)\sin x - (y+2)\cos x = 3y(1)$

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow (1-y)^2 + (y+2)^2 \geq 9y^2$



$$\Leftrightarrow 7y^2 - 2y - 5 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{7} \leq y \leq 1 \Rightarrow m = -\frac{5}{7}; M = 1$$

Vậy $7m - 5M = -5 - 5 = -10$.

Câu 104: Hàm số $y = \frac{3\sin 4x - 4(\sin^4 x + \cos^4 x)}{2\cos^2 2x - \sin 4x + 2}$ có giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m . Khi đó tổng $M + m$ bằng?

- A. 0. B. $-\frac{5}{7}$. C. $-\frac{10}{7}$. D. $\frac{3}{7}$.

Lời giải

Chọn C

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } 3\sin 4x - 4(\sin^4 x + \cos^4 x) &= 3\sin 4x - 4(1 - 2\sin^2 x \cos^2 x) = 2\sin^2 2x + 3\sin 4x - 4 \\ &= 3\sin 4x - \cos 4x - 3. \end{aligned}$$

Xét mẫu thức: $2\cos^2 2x - \sin 4x + 2 = \cos 4x - \sin 4x + 3$

$$\text{Suy ra } y = \frac{3\sin 4x - 4(\sin^4 x + \cos^4 x)}{2\cos^2 2x - \sin 4x + 2} = \frac{3\sin 4x - \cos 4x - 3}{\cos 4x - \sin 4x + 3}$$

$$\Leftrightarrow (3+y)\sin x - (y+1)\cos x = 3y + 3 \quad (2)$$

Phương trình (2) có nghiệm $\Leftrightarrow (3+y)^2 + (y+1)^2 \geq (3y+3)^2$

$$\Leftrightarrow 7y^2 + 10y - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-5 - 4\sqrt{2}}{7} \leq y \leq \frac{-5 + 4\sqrt{2}}{7} \Rightarrow m + M = -\frac{10}{7}.$$

Câu 105: Giá trị lớn nhất M , giá trị nhỏ nhất m của hàm số: $y = 2\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x \cos x + 1$ là
A. $M = 4; m = 0$. **B.** $M = 3; m = 0$. **C.** $M = 3; m = 1$. **D.** $M = 4; m = 1$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } y &= 2\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x \cos x + 1 = \cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x + 2 (*) = 2\left(\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right) + 2 \\ &= 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 2. \end{aligned}$$

$$\text{Mặt khác } 0 \leq 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 2 \leq 4, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 0 \leq y \leq 4, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là $M = 4$ khi $x = \frac{-\pi}{6} + k\pi$.



Và giá trị nhỏ nhất của hàm số là $m=0$ khi $x=\frac{\pi}{3}+k\pi$.

Câu 106: Cho hàm số $y=\frac{\sin x+2\cos x+1}{\sin x+\cos x+2}$. Gọi $M; m$ lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số. Tổng $M+m$ bằng

- A. 1. B. -2. C. -1. D. 2.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D=\mathbb{R}$ (do $\sin x+\cos x+2>0; \forall x \in \mathbb{R}$).

Xét phương trình: $y=\frac{\sin x+2\cos x+1}{\sin x+\cos x+2} \Leftrightarrow (1-y)\sin x+(2-y)\cos x+1-2y=0 (*)$.

Phương trình $(*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow (1-y)^2+(2-y)^2 \geq (1-2y)^2 \Leftrightarrow y^2+y-2 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq y \leq 1$.

Vậy $M=1; m=-2 \Rightarrow M+m=-1$.

Câu 107: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\frac{\cos x+2\sin x+3}{2\cos x-\sin x+4}$ là

- f. A. $3-2\sqrt{3}$. B. 2. C. -1. D. 0.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình: $2\cos x-\sin x+4=0$ $(*)$.

Ta có: $2^2+(-1)^2 < 4^2$ nên phương trình $(*)$ vô nghiệm, hay $2\cos x-\sin x+4 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó, hàm số đã cho có tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$$y=\frac{\cos x+2\sin x+3}{2\cos x-\sin x+4} \Leftrightarrow (2y-1)\cos x-(y+2)\sin x=3-4y \quad (**).$$

Để tồn tại giá trị lớn nhất của hàm số ban đầu thì phương trình $(**)$ phải có nghiệm $\Leftrightarrow (2y-1)^2+(y+2)^2 \geq (4y-3)^2 \Leftrightarrow 11y^2-24y+4 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{11} \leq y \leq 2$.

Vậy GTLN của hàm số đã cho là 2.

Câu 108: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\frac{m\sin x+1}{\cos x+2}$ nhỏ hơn 2.

- A. 4. B. 6. C. 5. D. 3.

Lời giải

Chọn C

Để thấy $\cos x \neq -2, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số có tập xác định là $D=\mathbb{R}$

Ta có $y = \frac{m \sin x + 1}{\cos x + 2} \Leftrightarrow y \cos x + 2y = m \sin x + 1 \Leftrightarrow m \sin x - y \cos x = 2y - 1$ (*)

(*) có nghiệm khi $m^2 + y^2 \geq (2y - 1)^2 \Leftrightarrow 3y^2 - 4y + 1 - m^2 \leq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{2 - \sqrt{1+3m^2}}{3} \leq y \leq \frac{2 + \sqrt{1+3m^2}}{3} \Rightarrow y_{\max} = \frac{2 + \sqrt{1+3m^2}}{3} < 2 \Leftrightarrow \sqrt{1+3m^2} < 4 \Leftrightarrow m^2 < 5$$

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2; -1; 0; 2; 1\}$. Vậy có 5 giá trị của m thỏa ycbt.

Câu 109: Giả sử M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{\sin x + 2 \cos x + 1}{\sin x + \cos x + 2}$

trên \mathbb{R} . Tìm $2M - 3m$

- A. $1 + \sqrt{2}$. B. 0. C. 1. D. 8

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\sin x + \cos x + 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -2 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$ (vô nghiệm).

Do đó, hàm số đã cho có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y = \frac{\sin x + 2 \cos x + 1}{\sin x + \cos x + 2} \Leftrightarrow (y-1)\sin x + (y-2)\cos x = 1 - 2y$ (*) .

Hàm số đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất khi (*) có nghiệm $\Leftrightarrow (1-2y)^2 \leq (y-1)^2 + (y-2)^2 \Leftrightarrow 2y^2 + 2y - 4 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq y \leq 1$. Do đó $m = -2$, $M = 1$. Vậy $2M - 3m = 8$.

Câu 110: Gọi M , m tương ứng là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2 \sin x + 2}{\cos x - 2}$.

Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $3m + M = 8$. B. $3m + M = -8$. C. $3m + M = 0$. D. $3m + M = -\frac{8}{3}$

Lời giải

Chọn B

Để thấy $\cos x \neq 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số có tập xác định là $D = \mathbb{R}$

Ta có $y = \frac{2 \sin x + 2}{\cos x - 2} \Leftrightarrow y \cos x - 2 \sin x = 2 + 2y$ (*) .

Để tồn tại giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số ban đầu thì phương trình (*) phải có

nghiệm $\Leftrightarrow y^2 + 4 \geq (2 + 2y)^2 \Leftrightarrow 3y^2 + 8y \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{8}{3} \leq y \leq 0$. Do đó $\begin{cases} M = 0 \\ m = -\frac{8}{3} \end{cases}$.

Vậy $3m + M = -8$.

Câu 111: Tập giá trị của hàm số $y = \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x + 1$ là đoạn $[a; b]$. Tính tổng $T = a + b$.

- A. $T = 0$. B. $T = -1$. C. $T = 1$. D. $T = 2$.



Lời giải**Chọn D**

Cách 1: $y = \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x + 1 \Leftrightarrow \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = y - 1$ (*)

Để tồn tại giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số ban đầu thì phương trình (*) phải có nghiệm thì $1^2 + (\sqrt{3})^2 \geq (y-1)^2 \Leftrightarrow y^2 - 2y - 3 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq 3$.

Suy ra $y \in [-1; 3]$. Vậy $T = -1 + 3 = 2$.

Cách 2: Ta có $y - 1 = \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x$. Một cách áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopskii ta có

$$(y-1)^2 = (\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x)^2 \leq (1+3)(\sin^2 2x + \cos^2 2x) = 4 \Leftrightarrow -2 \leq y-1 \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq 3.$$

Vậy $T = -1 + 3 = 2$.

Cách 3: $y = \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x + 1 = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 1$

Do $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \in [-1; 1]$ nên $2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 1 \in [-1; 3]$.



Vậy $-1 \leq y \leq 3$.

Câu 112: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3\sin x + 4\cos x - 1$.

- A. max $y = 6$, min $y = -4$.
- B. max $y = 8$, min $y = -6$.
- C. max $y = 4$, min $y = -6$.
- D. max $y = 6$, min $y = -8$.

Lời giải**Chọn C**

Ta có $y = 3\sin x + 4\cos x - 1 \Leftrightarrow 3\sin x + 4\cos x = y + 1$ (*)

Ta coi (*) như là phương trình cốt điển với $a = 3$, $b = 4$, $c = y + 1$.

Phương trình (*) có nghiệm khi và chỉ khi $a^2 + b^2 \geq c^2 \Leftrightarrow 9 + 16 \geq (y+1)^2 \Leftrightarrow -6 \leq y \leq 4$.

Vậy max $y = 4$, min $y = -6$.

Chú ý:

Ta có thể áp dụng bất đẳng thức BCS như sau:

$$|y+1| = |3\sin x + 4\cos x| \leq \sqrt{(3^2 + 4^2)(\sin^2 x + \cos^2 x)} = 5.$$

7.3. Tìm GTLN, GTNN sử dụng bất đẳng thức cốt điển.

Câu 113: Cho hàm số $y = \sqrt{1+2\sin^2 x} + \sqrt{1+2\cos^2 x} - 1$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số. Khi đó giá trị của $M+m$ bằng

A. $\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$.

B. $\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1$.

C. $\sqrt{3} + 2\sqrt{2} - 1$.

D. $-\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - 1$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } t = \sqrt{1+2\sin^2 x} + \sqrt{1+2\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow t^2 = (1+2\sin^2 x) + (1+2\cos^2 x) + 2\sqrt{(1+2\sin^2 x)(1+2\cos^2 x)} = 4 + 2\sqrt{3+\sin^2 2x}$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{4+2\sqrt{3+\sin^2 2x}} \geq \sqrt{4+2\sqrt{3}} = 1+\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{1+2\sin^2 x} + \sqrt{1+2\cos^2 x} - 1 \geq \sqrt{3}.$$

$$\text{Đầu } "=" \text{ xảy ra khi } \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}. \text{ Khi đó } m = \sqrt{3}.$$

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz, ta có

$$\sqrt{1+2\sin^2 x} + \sqrt{1+2\cos^2 x} \leq \sqrt{(1^2 + 1^2)(1+2\sin^2 x + 1+2\cos^2 x)} = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{1+2\sin^2 x} + \sqrt{1+2\cos^2 x} - 1 \leq 2\sqrt{2} - 1.$$

$$\text{Đầu } "=" \text{ xảy ra khi } \sin^2 x = \cos^2 x \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}. \text{ Khi đó } M = 2\sqrt{2} - 1.$$

$$\text{Vậy } M + m = \sqrt{3} + 2\sqrt{2} - 1.$$

Câu 114: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{2\sin x + 3\cos x + 1}{\sin x - \cos x + 2}$

$$\text{A. } \frac{3+\sqrt{33}}{2}. \quad \text{B. } \frac{3-\sqrt{33}}{2}. \quad \text{C. } 3. \quad \text{D. } \frac{1}{2}.$$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } y = \frac{2\sin x + 3\cos x + 1}{\sin x - \cos x + 2} \Leftrightarrow (y-2)\sin x - (y+3)\cos x = 1 - 2y.$$

$$(1-2y)^2 = [(y-2)\sin x - (y+3)\cos x]^2 \leq [(y-2)^2 + (y+3)^2](\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$\Leftrightarrow 2y^2 - 6y - 12 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{33}}{2} \leq y \leq \frac{3+\sqrt{33}}{2}.$$

Câu 115: Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \sin^{2018} x + \cos^{2018} x$ lần lượt là

$$\text{A. } \frac{1}{2^{1008}} \text{ và } 2.$$

$$\text{B. } \frac{1}{2^{1009}} \text{ và } 1.$$

$$\text{C. } 0 \text{ và } 1.$$

$$\text{D. } \frac{1}{2^{1008}} \text{ và } 1.$$



Lời giải**Chọn D**

Đặt $a = \sin^2 x$, $b = \cos^2 x$. Ta có

$$\sin^{2018} x + \cos^{2018} x \leq \sin^2 x + \cos^2 x = 1. \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x = k \frac{\pi}{2}.$$

$$\sin^{2018} x + \cos^{2018} x = 2 \left(\frac{a^{1009} + b^{1009}}{2} \right) \geq 2 \left(\frac{a+b}{2} \right)^{1009} = \frac{1}{2^{1008}}. \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{1}{2^{1008}}$; giá trị lớn nhất bằng 1.

Câu 116: Cho x, y là các số thực thỏa mãn $\cos 2x + \cos 2y = 1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \tan^2 x + \tan^2 y \text{ bằng}$$

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{8}{3}$. C. 3.

Lời giải**Chọn B**

$$\text{Ta có } P = \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) + \left(\frac{1}{\cos^2 y} - 1 \right) = 2 \left(\frac{1}{1 + \cos 2x} + \frac{1}{1 + \cos 2y} \right) - 2.$$

$$\text{Áp dụng BĐT cộng mẫu, ta được } P \geq 2 \left(\frac{(1+1)^2}{2 + \cos 2x + \cos 2y} \right) - 2 = 2 \cdot \frac{4}{2+1} - 2 = \frac{2}{3}..$$

Câu 117: Cho hai số thực x, y thuộc $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ và thỏa mãn $\cos 2x + \cos 2y + 2\sin(x+y) = 2$. Giá trị

$$P = \frac{\cos^4 x}{y} + \frac{\cos^4 y}{x} \text{ nhỏ nhất của } \text{ bằng}$$

- A. $\frac{2}{3\pi}$. B. $\frac{3}{\pi}$. C. $\frac{2}{\pi}$. D. $\frac{5}{\pi}$.

Lời giải**Chọn C**

Ta có $\cos 2x + \cos 2y + 2\sin(x+y) = 2 \Leftrightarrow \sin^2 x + \sin^2 y = \sin(x+y)$.

$$\text{Suy ra } x+y = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Áp dụng BĐT cộng mẫu } \frac{a^2}{m} + \frac{b^2}{n} \geq \frac{(a+b)^2}{m+n}, \text{ ta được}$$

$$P \geq \frac{(\cos^2 x + \cos^2 y)^2}{x+y} = \frac{\left[\cos^2 x + \cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]^2}{x+y} = \frac{\left[\cos^2 x + \sin^2 x\right]^2}{x+y} = \frac{2}{\pi}.$$

Dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow x = y = \frac{\pi}{4}$.

Nhận xét. Việc suy ra $x+y = \frac{\pi}{2}$ được chứng minh như sau:

Với $x, y \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ suy ra $\frac{\pi}{2} - x, \frac{\pi}{2} - y$ cùng thuộc $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, hàm $y = \sin x$ đồng biến.

$$\text{Nếu } x+y > \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{\pi}{2} - y \Rightarrow \sin x > \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \cos y \\ y > \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow \sin y > \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \end{cases}$$

$\Rightarrow \sin^2 x + \sin^2 y = \sin x \cdot \sin x + \sin y \cdot \sin y > \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x = \sin(x+y)$: mâu thuẫn.

Tương tự cho $x+y < \frac{\pi}{2}$.

Trường hợp $x+y = \frac{\pi}{2}$: thỏa mãn.

Câu 118: Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 4$. Tìm giá trị lớn nhất M trong tất cả

các hàm số $y = a + b\sqrt{\sin x} + c\sqrt{\cos x}$ với $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

- A. $M = \sqrt{1+\sqrt{2}}$. B. $M = 1+\sqrt{2}$. C. $M = 2\sqrt{1+\sqrt{2}}$. D. $M = 2(1+\sqrt{2})$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $(a + b\sqrt{\sin x} + c\sqrt{\cos x})^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(1 + \sin x + \cos x)$

$$= 4 \left[1 + \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \right] \leq 4(1 + \sqrt{2}).$$

Suy ra $a + b\sqrt{\sin x} + c\sqrt{\cos x} \leq 2\sqrt{1+\sqrt{2}}$.

$$\text{Dấu " $=$ " xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{b}{\sqrt{\sin x}} = \frac{c}{\sqrt{\cos x}} \\ a^2 + b^2 + c^2 = 4 \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1, x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}; b = c = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \\ x = \frac{\pi}{4} \end{cases}.$$



Câu 119: Tập giá trị của hàm số $y = \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x + 1$ là đoạn $[a; b]$. Tính tổng $T = a + b$.

A. $T = 1$.

B. $T = 2$.

C. $T = 0$.

D. $T = -1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y - 1 = \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x$. Một khía cạnh áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopskii ta có

$$(y - 1)^2 = (\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x)^2 \leq (1+3)(\sin^2 2x + \cos^2 2x) = 4 \Leftrightarrow -2 \leq y - 1 \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq 3.$$

Vậy $T = -1 + 3 = 2$.

