TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

2 2013 Số 428

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 50

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.

ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606

Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

CÔNG TY CỔ PHẦN DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC HÀ NỘI

HEPS

• Địa chỉ: 187B Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội. • ĐT: (04).362.101.96 - Fax (04).362.102.01
• MST: 0103.488.607 • TK: 1261.00.00.00.6147 Ngân hàng BIDV chi nhánh Ba Đình

Giới thiệu bộ sách

ÔN THI VÀO LỚP 10 TRUNG HỌC PHỔ THÔNG CHUYÊN

Nhằm giúp các em học sinh, các thầy cô giáo, các bậc phụ huynh có một bộ tài liệu ôn thi vào THPT chuyên, NXBGD Việt Nam đã tổ chức biên soạn bộ sách "*Ôn thi vào lớp 10 Trung học phổ thông chuyên*" gồm các môn học: Toán, Vật lí, Hóa học, Sinh học, Ngữ văn, Tiếng Anh. Cuốn sách "*Ôn thi vào lớp 10 Trung học phổ thông chuyên - Môn Toán*" là một cuốn trong bộ sách này.

Nội dung cuốn sách gồm ba phần: *Phần thứ nhất gồm 20 chuyên đề* bao quát toàn bộ các nội dung cơ bản của môn Toán THCS và nội dung các đề thi môn Toán tuyển sinh vào các trường THPT chuyên. Mỗi chuyên đề gồm 3 nội dung: *Kiến thức cơ bản*, *Một số kĩ thuật đặc trưng và ví dụ minh hoạ*, và *Bài tập đề nghị*. *Phần thứ hai giới thiệu 12 đề thi vào lớp 10 THPT chuyên* của Hà Nội, Đà Nẵng,.... *Phần thứ ba là Hướng dẫn giải các bài tập ở các chuyên đề và đáp án của các đề thi tham khảo.*

Cuốn sách tập trung trình bày những nội dung điển hình nhất thuộc hai loại:

★ Các nội dung cơ bản sát với nội dung bài thi môn Toán Vòng 1 cho tất cả các thí sinh dự thi vào THPT chuyên.

★ Một số nội dung nâng cao đòi hỏi những kĩ năng đặc biệt, hướng tới bài thi môn Toán Vòng 2 cho các học sinh thi vào chuyên Toán.

Các tác giả là những giáo viên dạy Toán có nhiều kinh nghiệm của một số trường chuyên có tiếng trên cả nước tham gia biên soạn như các thầy giáo *Doãn Minh Cường* (CB) (THPT chuyên ĐHSP Hà Nội), *Đỗ Thanh Sơn* (THPT chuyên KHTN - ĐHQG Hà Nội), *Trần Văn Khải* và *Trịnh Hoài Dương* (THPT chuyên Amsterdam - Hà Nội).

Hi vọng rằng, cuốn sách *Ôn thi vào lớp 10 Trung học phổ thông chuyên - Môn Toán* nói riêng và bộ sách *Ôn thi vào lớp 10 Trung học phổ thông chuyên* gồm 6 môn nói chung sẽ là tài liệu tham khảo hữu ích để các giáo viên và các em học sinh cuối cấp THCS sử dụng và chuẩn bị tốt nhất cho kì thi vào lớp 10 trường THPT chuyên sắp tới của mình.

DÀNH CHO TRUNG HỌC CƠ SỞ

CÁC BÀI TOÁN CÓ PHẦN GIẢ THIẾT GIỐNG NHAU

ĐỖ QUANG MINH
(GV THCS Nguyễn Bá Ngọc, Tuy An, Phú Yên)

Khi học toán cùng với việc tìm hiểu lời giải cho mỗi bài toán trên cơ sở khai thác các kiến thức toán học với nhiều hình thức khác nhau thì việc tổng hợp các bài toán có phần giả thiết giống nhau để hình thành một bài toán có nhiều câu hỏi cũng là một cách không kém phần thú vị. Trong bài viết này, chúng tôi sẽ giới thiệu đến các bạn một bài toán như thế.

✪ **BÀI TOÁN.** *Cho tam giác ABC và một điểm O nằm trong tam giác đó. Các tia AO, BO, CO cắt các cạnh BC, CA, AB theo thứ tự tại M, N, P. Chứng minh rằng*

1) $\frac{OM}{AM}+\frac{ON}{BN}+\frac{OP}{CP}=1$; **2)** $\frac{OA}{AM}+\frac{OB}{BN}+\frac{OC}{CP}=2$;

3) $\frac{AM}{OM}+\frac{BN}{ON}+\frac{CP}{OP}\geq 9$; **4)** $\frac{OA}{OM}+\frac{OB}{ON}+\frac{OC}{OP}\geq 6$;

5) $\frac{AM}{OA}+\frac{BN}{OB}+\frac{CP}{OC}\geq\frac{9}{2}$; **6)** $\frac{OM}{OA}+\frac{ON}{OB}+\frac{OP}{OC}\geq\frac{3}{2}$;

7) *Trong ba tỉ số* $\frac{OA}{OM};\frac{OB}{ON};\frac{OC}{OP}$ *có ít nhất một tỉ số không nhỏ hơn 2 và ít nhất một tỉ số không lớn hơn 2.*

8) $\frac{OA}{OM}.\frac{OB}{ON}.\frac{OC}{OP}\geq 8$; **9)** $\frac{AM}{OM}.\frac{BN}{ON}.\frac{CP}{OP}\geq 27$;

10) $\frac{AM}{OA}.\frac{BN}{OB}.\frac{CP}{OC}\geq\frac{27}{8}$;

11) $\sqrt{\frac{OA}{OM}}+\sqrt{\frac{OB}{ON}}+\sqrt{\frac{OC}{OP}}\geq 3\sqrt{2}$;

12) $\sqrt{\frac{AM}{OA}}+\sqrt{\frac{BN}{OB}}+\sqrt{\frac{CP}{OC}}\geq\frac{3}{2}\sqrt{6}$;

13) $\sqrt{\frac{OM}{AM}}+\sqrt{\frac{ON}{BN}}+\sqrt{\frac{OP}{CP}}\leq\sqrt{3}$;

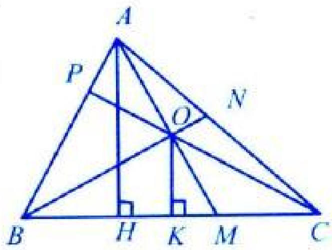
14) *Xác định vị trí của điểm O để OA.BC + OB.CA + OC.AB đạt giá trị nhỏ nhất.*

15) *Đặt BC = a, AC = b, AB = c và gọi* d_a, d_b, d_c *tương ứng là các khoảng cách từ O đến các cạnh BC, CA, AB. Xác định vị trí của điểm O để*

a) Tích $d_a.d_b.d_c$ *đạt giá trị lớn nhất.*

b) Tổng $\frac{a}{d_a}+\frac{b}{d_b}+\frac{c}{d_c}$ *đạt giá trị nhỏ nhất.*

Lời giải (hình vẽ)



Gọi S_1, S_2, S_3, S lần lượt là diện tích các tam giác OBC, OCA, OAB và ABC. Dựng $AH\perp BC (H\in BC)$, $OK\perp BC$ $(K\in BC)$ thì $AH // OK$.

1) Áp dụng định lí Thales, ta có

$$\frac{OM}{AM}=\frac{OK}{AH}=\frac{OK.BC}{AH.BC}=\frac{S_1}{S}.$$

Tương tự $\frac{ON}{BN}=\frac{S_2}{S}$; $\frac{OP}{CP}=\frac{S_3}{S}$. Từ đó

$$\frac{OM}{AM}+\frac{ON}{BN}+\frac{OP}{CP}=\frac{S_1+S_2+S_3}{S}=1 \text{ (đpcm).}$$

2) Từ $\frac{OM}{AM}+\frac{ON}{BN}+\frac{OP}{CP}=1$, suy ra

$$\frac{AM-OA}{AM}+\frac{BN-OB}{BN}+\frac{CP-OC}{CP}=1$$

$$\Leftrightarrow 3-\left(\frac{OA}{AM}+\frac{OB}{BN}+\frac{OC}{CP}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow\frac{OA}{AM}+\frac{OB}{BN}+\frac{OC}{CP}=2 \text{ (đpcm).}$$ ❐

3) Áp dụng BĐT Bunyakovsky và câu **1,** ta có

$$\left(\sqrt{\frac{OM}{AM}}.\sqrt{\frac{AM}{OM}}+\sqrt{\frac{ON}{BN}}.\sqrt{\frac{BN}{ON}}+\sqrt{\frac{OP}{CP}}.\sqrt{\frac{CP}{OP}}\right)^2$$

$$\le\left(\frac{OM}{AM}+\frac{ON}{BN}+\frac{OP}{CP}\right).\left(\frac{AM}{OM}+\frac{BN}{ON}+\frac{CP}{OP}\right)$$

$$\Leftrightarrow 3^2\le 1.\left(\frac{AM}{OM}+\frac{BN}{ON}+\frac{CP}{OP}\right)\Leftrightarrow\frac{AM}{OM}+\frac{BN}{ON}+\frac{CP}{OP}\ge 9$$

(đpcm).

4) Từ câu **3** ta thấy

$$\frac{OM+OA}{OM}+\frac{ON+OB}{ON}+\frac{OP+OC}{OP}\ge 9$$

$$\Leftrightarrow\frac{OA}{OM}+\frac{OB}{ON}+\frac{OC}{OP}\ge 6 \text{ (đpcm).}$$

5) Áp dụng BĐT Bunyakovsky và câu **2,** ta có

$$\left(\sqrt{\frac{OA}{AM}}.\sqrt{\frac{AM}{OA}}+\sqrt{\frac{OB}{BN}}.\sqrt{\frac{BN}{OB}}+\sqrt{\frac{OC}{CP}}.\sqrt{\frac{CP}{OC}}\right)^2$$

$$\le\left(\frac{OA}{AM}+\frac{OB}{BN}+\frac{OC}{CP}\right)\left(\frac{AM}{OA}+\frac{BN}{OB}+\frac{CP}{OC}\right)$$

$$\Leftrightarrow 9\le 2.\left(\frac{AM}{OA}+\frac{BN}{OB}+\frac{CP}{OC}\right) \text{ suy ra đpcm.}$$

6) Theo câu **5** ta có

$$\frac{OM+OA}{OA}+\frac{ON+OB}{OB}+\frac{OP+OC}{OC}\ge\frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{OM}{OA}+\frac{ON}{OB}+\frac{OP}{OC}\ge\frac{9}{2}-3=\frac{3}{2} \text{ (đpcm).}$$

7) Ta chứng minh bằng phương pháp phản chứng.

• Giả sử $\frac{OA}{OM}>2, \frac{OB}{ON}>2, \frac{OC}{OP}>2$. Suy ra $\frac{OM}{OA}<\frac{1}{2}, \frac{ON}{OB}<\frac{1}{2}, \frac{OP}{OC}<\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{OM}{OA}+\frac{ON}{OB}+\frac{OP}{OC}<\frac{3}{2}$ (trái với câu **6**).

• Giả sử $\frac{OA}{OM}<2, \frac{OB}{ON}<2, \frac{OC}{OP}<2$. Suy ra $\frac{OA}{OM}+\frac{OB}{ON}+\frac{OC}{OP}<6$ (trái với câu **4**).

Từ đó suy ra điều cần chứng minh.

8) Áp dụng BĐT Cauchy, ta có

$\frac{AM}{OM}=\frac{S}{S_1}\Leftrightarrow\frac{OA+OM}{OM}=\frac{S_1+S_2+S_3}{S_1}$, suy ra

$$\frac{OA}{OM}=\frac{S_2}{S_1}+\frac{S_3}{S_1}\ge 2\sqrt{\frac{S_2.S_3}{S_1^2}}.$$

Tương tự $\frac{OB}{ON}\ge 2\sqrt{\frac{S_3.S_1}{S_2^2}}$; $\frac{OC}{OP}\ge 2\sqrt{\frac{S_1.S_2}{S_3^2}}$.

Nhân theo vế ba BĐT trên, ta được

$$\frac{OA}{OM}.\frac{OB}{ON}.\frac{OC}{OP}\ge 8 \text{ (đpcm).}$$

9) Ta có $\frac{AM}{OM}=\frac{S}{S_1}=\frac{S_1}{S_1}+\frac{S_2}{S_1}+\frac{S_3}{S_1}\ge 3\sqrt[3]{\frac{S_1.S_2.S_3}{S_1^3}}$.

Tương tự $\frac{BN}{ON}\ge 3\sqrt[3]{\frac{S_2.S_3.S_1}{S_2^3}}$; $\frac{CP}{OP}\ge 3\sqrt[3]{\frac{S_3.S_1.S_2}{S_3^3}}$.

Nhân theo vế ba BĐT trên thu được

$$\frac{AM}{OM}.\frac{BN}{ON}.\frac{CP}{OP}\ge 27 \text{ (đpcm).}$$

10) Áp dụng BĐT Cauchy và câu **2**, ta có

$$3\sqrt[3]{\frac{OA}{AM}.\frac{OB}{ON}.\frac{OC}{OP}}\le\frac{OA}{AM}+\frac{OB}{ON}+\frac{OC}{CP}=2$$

$$\Leftrightarrow\frac{OA}{AM}.\frac{OB}{ON}.\frac{OC}{OP}\le\frac{8}{27} \text{ suy ra đpcm.}$$

11) Áp dụng BĐT Cauchy và câu **8**, ta có

$$\sqrt{\frac{OA}{OM}}+\sqrt{\frac{OB}{ON}}+\sqrt{\frac{OC}{OP}}\ge 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{OA}{OM}.\frac{OB}{ON}.\frac{OC}{OP}}}$$

$$\ge 3\sqrt[3]{\sqrt{8}}=3\sqrt{2} \text{ (đpcm).}$$

12) Áp dụng BĐT Cauchy và câu **10**, ta có

$$\sqrt{\frac{AM}{OA}}+\sqrt{\frac{BN}{OB}}+\sqrt{\frac{CP}{OC}}\ge 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{AM}{OA}.\frac{BN}{OB}.\frac{CP}{OC}}}$$

$$\ge 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{27}{8}}}=\frac{3}{2}\sqrt{6} \text{ (đpcm).}$$

13) Áp dụng BĐT Bunyakovsky và câu **1**, ta có

$$\left(\sqrt{\frac{OM}{AM}}+\sqrt{\frac{ON}{BN}}+\sqrt{\frac{OP}{CP}}\right)^2\le 3\left(\frac{OM}{AM}+\frac{ON}{BN}+\frac{OP}{CP}\right)$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{\frac{OM}{AM}}+\sqrt{\frac{ON}{BN}}+\sqrt{\frac{OP}{CP}}\le 3 \text{ (đpcm).}$$

(*Xem tiếp trang 10*)

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN LỚP 9 TỈNH THANH HÓA

NĂM HỌC 2011 - 2012

(Đề thi đã đăng trên TH&TT số 427, tháng 1 năm 2013)

Câu I.

1) ĐK $x>1, x\neq 10$ và $x\neq 5$.

Đặt $\sqrt{x-1}=a\,(a\geq 0)$ thì

$$P=\left(\frac{a}{3+a}+\frac{a^2+9}{9-a^2}\right):\left(\frac{3a-1}{a^2-3a}-\frac{1}{a}\right)$$

$$=\frac{3a-9}{9-a^2}:\frac{2a+4}{a(a-3)}=-\frac{3a}{2(a+2)}.$$

Vậy $P=-\dfrac{3\sqrt{x-1}}{2\left(\sqrt{x-1}+2\right)}$.

2) Tính $x=\sqrt[4]{\left(3+2\sqrt{2}\right)^2}-\sqrt[4]{\left(3-2\sqrt{2}\right)^2}$

$=\sqrt[4]{\left(\sqrt{2}+1\right)^4}-\sqrt[4]{\left(\sqrt{2}-1\right)^4}=\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1=2$.

Suy ra $a=1$. Do đó $P=-\dfrac{1}{2}$.

Câu II.

1) Hoành độ giao điểm của d và (P) là nghiệm của PT $x-2=-x^2 \Leftrightarrow x^2+x-2=0$

$\Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=-2$.

Do đó $A(1;-1), B(-2;-4)$;

$AB=\sqrt{(-2-1)^2+(-4+1)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}.$

2) Điều kiện để d' cắt (P) tại hai điểm phân biệt là PT $x^2-x+m=0$ có hai nghiệm phân biệt, tức là $\Delta=1-4m>0 \Leftrightarrow m<\dfrac{1}{4}$.

Gọi $C(x_1, x_1-2), D(x_2, x_2-2)$ với $x_2+x_1=1$, $x_1.x_2=m$. Ta có

$CD=AB \Leftrightarrow CD^2=AB^2 \Leftrightarrow 2(x_1-x_2)^2=18$

$\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1x_2=9 \Rightarrow 1-4m=9 \Leftrightarrow m=-2$ (thỏa mãn điều kiện).

Câu III.

1) ĐK $x\neq 0, y\neq 0$.

Từ PT thứ nhất của hệ ta có $y=\dfrac{x^2}{2-x}$, rồi thế vào PT thứ hai của hệ ta được

$3x^3+4x^2-4x=0 \Leftrightarrow x(3x^2+4x-4)=0$

$\Leftrightarrow 3x^2+4x-4=0$ (do $x\neq 0$)

$\Leftrightarrow x=-2$ hoặc $x=\dfrac{2}{3}$.

HPT có hai nghiệm $(x;y)$ là $(-2;1);\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3}\right)$.

2) Coi PT là bậc hai với ẩn y

$$y^2-2x^3y+(2x^6-320)=0.$$

$\Delta'=320-x^6\geq 0 \Leftrightarrow x^6\leq 320<3^6$. Do $x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\{\pm 1, 0, \pm 2\}$.

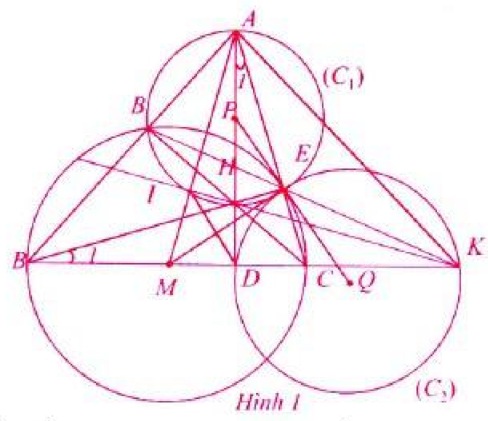
Với $x=0;\pm 1$ thì $y\notin\mathbb{Z}$.

Với $x=2$ thì $y=-8$ hoặc 24.

Với $x=-2$ thì $y=8$ hoặc -24.

Vậy $(x;y)=(2;-8);(2;24);(-2;8);(-2;-24)$.

Câu IV. (h.1)



Hình 1

1) Dễ thấy tứ giác $AEHF$ nội tiếp đường tròn (C_1) đường kính AH. Gọi P là trung điểm

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN LỚP 9 TP.HÀ NỘI

NĂM HỌC 2011 - 2012

(Thời gian làm bài: 150 phút)

Câu 1. (*5 điểm*)

1) Cho biểu thức

$A = (a^{2012} + b^{2012} + c^{2012}) - (a^{2008} + b^{2008} + c^{2008})$

với a, b, c là các số nguyên dương. Chứng minh rằng A chia hết cho 30.

2) Cho $f(x) = (2x^3 - 21x - 29)^{2012}$. Tính $f(x)$ tại $x = \sqrt[3]{7 + \sqrt{\frac{49}{8}}} + \sqrt[3]{7 - \sqrt{\frac{49}{8}}}$.

Câu 2. (*5 điểm*)

1) Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 12} + 5 = 3x + \sqrt{x^2 + 5}$.

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + xy + x - y - 2y^2 = 0 \\ x^2 - y^2 + x + y = 6. \end{cases}$$

Câu 3. (*2 điểm*)

Tìm tất cả các số nguyên dương x, y thỏa mãn

$$2x^2 + 3y^2 - 5xy - x + 3y - 4 = 0.$$

Câu 4. (*4 điểm*)

Cho A là điểm thuộc nửa đường tròn tâm O đường kính BC (A không trùng với B, C). Gọi H là hình chiếu của A trên BC. Đường kính AH cắt AB, AC lần lượt tại M, N.

1) Chứng minh rằng $AO \perp MN$.

2) Cho $AH = 2\text{cm}, BC = \sqrt{7}$ cm. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác MNC.

Câu 5. (*4 điểm*)

1) Gọi h_1, h_2, h_3, r lần lượt là độ dài các đường cao và bán kính đường tròn nội tiếp của một tam giác. Chứng minh rằng tam giác đó là tam giác đều khi và chỉ khi

$$\frac{1}{h_1 + 2h_2} + \frac{1}{h_2 + 2h_3} + \frac{1}{h_3 + 2h_1} = \frac{1}{3r}.$$

2) Trong mặt phẳng cho 8045 điểm mà diện tích của mọi tam giác với các đỉnh là các điểm đã cho không lớn hơn 1. Chứng minh rằng trong số các điểm đã cho có thể tìm được 2012 điểm nằm trong hoặc nằm trên cạnh của một tam giác có diện tích không lớn hơn 1.

THANH LOAN (Hà Nội)

Sưu tầm và giới thiệu

điểm của AH thì P là tâm của (C_1). Do $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc) nên $\widehat{MEB} = \widehat{PEA}$. Suy ra $\widehat{MEP} = \widehat{BEA} = 90^\circ$. Do đó ME là tiếp tuyến của đường tròn (C_1). Chứng minh tương tự có ME là tiếp tuyến của đường tròn (C_2).

2) Gọi $AM \cap (C_1) = I$, ta có $\Delta MEI \backsim \Delta MAE$ (g.g). Suy ra $ME^2 = MI.MA$, tương tự $ME^2 = MD.MK$. Do đó $MI.MA = MD.MK$, suy ra $\Delta MID \backsim \Delta MKA \Rightarrow \widehat{MDI} = \widehat{MAK}$ nên tứ giác $AIDK$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AIK} = \widehat{ADK} = 90^o$

$\Rightarrow KI \perp AM$. Lại có $HI \perp AM$ nên I, H, K thẳng hàng và $KH \perp AM$.

Câu V. ĐK $x + y + z \neq 0$.

Do $0 \le x, y, z \le 1$ nên $(z-1)(1-x) \le 0$

$\Leftrightarrow 1 + zx \ge x + z \Leftrightarrow 1 + y + zx \ge x + y + z$

$\Leftrightarrow \frac{x}{1 + y + zx} \le \frac{x}{x + y + z}$.

Tương tự

$\frac{y}{1 + z + xy} \le \frac{y}{x + y + z}; \frac{z}{1 + x + yz} \le \frac{z}{x + y + z}$.

Suy ra VT $\le \frac{x + y + z}{x + y + z} = 1$.

Mà VP $= \frac{3}{x + y + z} \ge \frac{3}{3} = 1$ nên

VT=VP $\Leftrightarrow x = y = z = 1$. Vậy PT có nghiệm duy nhất $(x; y; z) = (1; 1; 1)$.

Chuẩn bị cho kì thi tốt nghiệp THPT và thi vào Đại học

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

$\int f(x)dx$

LÊ HỒ QUÝ
(GV THPT Duy Tân, Kon Tum)

Trong bài viết này chúng tôi xin giới thiệu một số phương pháp tính tích phân thường gặp nhằm giúp các bạn học sinh chuẩn bị cho kì thi tốt nghiệp THPT và thi vào các trường Đại học, Cao đẳng sắp tới.

I. SỬ DỤNG PHÉP BIẾN ĐỔI VI PHÂN

1. Tính tích phân dạng $\int f\left(u(x)\right)u'(x)\mathrm{d}x = \int f\left(u(x)\right)\mathrm{d}u(x)$

★ **Thí dụ 1.** (Khối B-2010). *Tính tích phân*

$$I = \int_1^e \frac{\ln x}{x(2+\ln x)^2}\mathrm{d}x.$$

Lời giải. Ta có

$$I = \int_1^e \frac{(2+\ln x)-2}{x(2+\ln x)^2}\mathrm{d}x = \int_1^e \frac{\mathrm{d}x}{x(2+\ln x)} - 2\int_1^e \frac{\mathrm{d}x}{x(2+\ln x)^2}$$

$$= \int_1^e \frac{\mathrm{d}(2+\ln x)}{2+\ln x} - 2\int_1^e \frac{\mathrm{d}(2+\ln x)}{(2+\ln x)^2}$$

$$= \ln|2+\ln x|\Big|_1^e + \frac{2}{2+\ln x}\Big|_1^e = \ln\frac{3}{2} - \frac{1}{3}. \ \square$$

2. Tính tích phân dạng $\int (u'v+uv')\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}(uv)$ hoặc $\int \frac{u'v-uv'}{v^2}\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right)$, với $u = u(x)$, $v = v(x)$.

★ **Thí dụ 2.** *Tính tích phân* $I = \int_0^1 \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2}\mathrm{d}x.$

Lời giải. Ta có

$$I = \int_0^1 \left(e^x - \frac{(4x+4)e^x}{(x+2)^2}\right)\mathrm{d}x = e^x\Big|_0^1 - 4\int_0^1 \frac{x+2-1}{(x+2)^2}e^x\mathrm{d}x$$

$$= e - 1 - 4\int_0^1 \frac{(x+2)(e^x)' - (x+2)'e^x}{(x+2)^2}\mathrm{d}x$$

$$= e - 1 - 4\int_0^1 \left(\frac{e^x}{x+2}\right)'\mathrm{d}x = e - 1 - \frac{4e^x}{x+2}\Big|_0^1 = \frac{3-e}{3}. \ \square$$

Bài luyện tập. Tính các tích phân sau

a) $\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{e^x - 1}$; b) $\int_e^{e^2} \left(2\sqrt{\ln x} + \frac{1}{\sqrt{\ln x}}\right)\mathrm{d}x.$

II. PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

1. Tính tích phân có chứa biểu thức dạng $\sqrt[n]{f(x)}$

Cách giải. Ta thường sử dụng phép đổi biến số $t = \sqrt[n]{f(x)}$.

★ **Thí dụ 3** (Khối A-2005). *Tính tích phân*

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}\mathrm{d}x.$$

Lời giải. Đặt $t = \sqrt{1+3\cos x} \Rightarrow t^2 = 1 + 3\cos x$

$\Rightarrow 2t\mathrm{d}t = -3\sin x\mathrm{d}x$ và $\cos x = \frac{t^2-1}{3}$.

Khi $x = 0 \Rightarrow t = 2$; khi $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$. Do đó

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x(2\cos x+1)\mathrm{d}x}{\sqrt{1+3\cos x}} = -\frac{2}{3}\int_2^1 \frac{t\left(2.\frac{t^2-1}{3}+1\right)}{t}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2}{9}\int_1^2 (2t^2+1)\mathrm{d}t = \frac{2}{9}\left(\frac{2t^3}{3}+t\right)\Big|_1^2 = \frac{34}{27}. \ \square$$

2. Tính tích phân có chứa biểu thức dạng $\sqrt{a^2 - x^2}$ $(a > 0)$

Cách giải. Đặt $x = a\sin t$ hoặc $x = a\cos t$.

★ **Thí dụ 4.** *Tính tích phân* $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}.$

Lời giải. Đặt $x = \cos t$, $t \in [0;\pi] \Rightarrow \mathrm{d}x = -\sin t\mathrm{d}t$.

Khi $x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$; khi $x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}$. Ta có

$$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{-\cos^3 t\sin t\mathrm{d}t}{\sqrt{\sin^2 t}}=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 t\mathrm{d}t=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 t)\mathrm{d}(\sin t)$$

$$=\left(\sin t-\frac{\sin^3 t}{3}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}-\frac{3\sqrt{3}}{8}\ \square$$

3. Tính tích phân có chứa biểu thức dạng $(a^2+x^2)^k$ $(a>0)$

Cách giải. Đặt $x=a\tan t$ hoặc $x=a\cot t$.

★**Thí dụ 5.** *Tính tích phân*

$$I=\int_{-\sqrt{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

Lời giải. Đặt $x=\tan t$, $t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t}$.

Khi $x=-\sqrt{3}\Rightarrow t=-\frac{\pi}{3}$; khi $x=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow t=\frac{\pi}{6}$.

Do đó

$$I=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t.\frac{1}{\cos^3 t}}=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\cos t\mathrm{d}t=\sin t\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}.\ \square$$

4. Tính tích phân dạng

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x,$$

với $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$.

Cách giải. Đặt $x=a+b-t$. Với các tích phân dạng này, thường dẫn đến việc giải một PT đơn giản mà ẩn số chính là tích phân cần tính.

★**Thí dụ 6.** *Tính tích phân* $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)\mathrm{d}x.$

Lời giải. Đặt $x=\frac{\pi}{4}-t\Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t.$

Khi $x=0\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$; khi $x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow t=0$. Do đó

$$I=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1+\frac{1-\tan t}{1+\tan t}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\frac{2}{1+\tan t}\mathrm{d}t=\ln 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)\mathrm{d}t$$

Vậy $I=\frac{\pi}{4}\ln 2-I$ hay $I=\frac{\pi}{8}\ln 2.$ $\square$

Bài luyện tập. Tính các tích phân sau

a) $\int_1^e\frac{\sqrt{1+3\ln x}\ln x}{x}\mathrm{d}x$; b) $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}(3-x^2)\sqrt{3-x^2}\mathrm{d}x$;

c) $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\mathrm{d}x$; d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 x\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$.

III. PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

1. Tính tích phân dạng $\int_a^b p(x)q(x)\mathrm{d}x$, trong đó $p(x)$ là một đa thức, $q(x)$ là một hàm số lượng giác

Cách giải. Đặt $\begin{cases}u=p(x)\\ \mathrm{d}v=q(x)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=p'(x)\mathrm{d}x\\ v=\int q(x)\mathrm{d}x.\end{cases}$

★**Thí dụ 7.** *Tính tích phân*

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\cos 2x\mathrm{d}x.$$

Lời giải. Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{2}(\cos 3x+\cos x)\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=\frac{x}{2}\\ \mathrm{d}v=\cos 3x+\cos x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{2}\\ v=\frac{1}{3}\sin 3x+\sin x\end{cases}$

Khi đó

$$I=\frac{x}{2}\left(\frac{1}{3}\sin 3x+\sin x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{3}\sin 3x+\sin x\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{6}+\left(\frac{1}{18}\cos 3x+\frac{1}{2}\cos x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{6}-\frac{5}{9}.\ \square$$

2. Tính tích phân dạng $\int_a^b p(x)q(e^x)dx$, trong đó $p(x)$ là một đa thức

Cách giải. Đặt $\begin{cases} u = p(x) \\ dv = q(e^x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = p'(x)dx \\ v = \int q(e^x)dx. \end{cases}$

★ **Thí dụ 8.** *Tính tích phân* $I = \int_0^1 (x^2 - 3x)e^x dx$.

Lời giải. Đặt $\begin{cases} u = x^2 - 3x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (2x-3)dx \\ v = e^x. \end{cases}$

$$I = (x^2 - 3x)e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 (2x-3)e^x dx = -2e - I_1.$$

Ta tính $I_1 = \int_0^1 (2x-3)e^x dx$.

Đặt $\begin{cases} u_1 = 2x - 3 \\ dv_1 = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du_1 = 2dx \\ v_1 = e^x. \end{cases}$

Khi đó $I_1 = (2x-3)e^x\Big|_0^1 - 2\int_0^1 e^x dx = 3 - e - 2e^x\Big|_0^1$

$= 5 - 3e$. Vậy $I = -2e - (5 - 3e) = e - 5$. ❑

3. Tính tích phân dạng $\int_a^b p(x)q(e^x)dx$, trong đó $p(x)$ là một hàm lượng giác

Cách giải. Đặt $\begin{cases} u = q(e^x) \\ dv = p(x)dx \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u = p(x) \\ dv = q(e^x)dx. \end{cases}$

Thường dẫn đến PT đơn giản mà ẩn số chính là tích phân cần tìm.

★ **Thí dụ 9.** *Tính tích phân* $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos 3x dx$.

Lời giải. Đặt $\begin{cases} u = e^{2x} \\ dv = \cos 3x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2e^{2x}dx \\ v = \frac{1}{3}\sin 3x \end{cases}$

Khi đó $I = \frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin 3x dx$

$= -\frac{e^\pi}{3} - \frac{2}{3}I_1$. Tính $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin 3x dx$.

Đặt $\begin{cases} u_1 = e^{2x} \\ dv_1 = \sin 3x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du_1 = 2e^{2x}dx \\ v_1 = -\frac{1}{3}\cos 3x \end{cases}$

$$\Rightarrow I_1 = -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos 3x dx = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}I.$$

Vậy $I = -\frac{e^\pi}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}I\right)$ hay $I = \frac{-3e^\pi - 2}{13}$. ❑

4. Tính tích phân dạng $\int_a^b p(x)\ln^k q(x)dx$, trong đó $p(x)$ là một đa thức hoặc có dạng $\frac{1}{g^n(x)}$ hoặc là một hàm lượng giác

Cách giải

Đặt $\begin{cases} u = \ln^k q(x) \\ dv = p(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = k\ln^{k-1} q(x).\frac{q'(x)}{q(x)}dx \\ v = \int p(x)dx. \end{cases}$

★ **Thí dụ 10.** *Tính tích phân* $I = \int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{(x+2)^2}dx$.

Lời giải. Đặt $\begin{cases} u = \ln(x+1) \\ dv = \frac{dx}{(x+1)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x+1} \\ v = \frac{-1}{x+2} + 1 = \frac{x+1}{x+2}. \end{cases}$

$$I = \frac{x+1}{x+2}\ln(x+1)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{dx}{x+2}$$

$$= \frac{2}{3}\ln 2 - \ln|x+2|\Big|_0^1 = \frac{5}{3}\ln 2 - \ln 3. \ ❑$$

Nhận xét. Việc chọn hằng số $C = 1$ sao cho $v = \frac{-1}{x+2} + 1$, giúp ta chuyển việc tính $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$ phức tạp về tính $\int_0^1 \frac{dx}{x+2}$ đơn giản hơn. Đây chính là kĩ thuật chọn $v(x)$ thông qua hệ số điều chỉnh C (Xem TH&TT số 424, tháng 10 năm 2012).

Bài luyện tập. Tính các tích phân sau

a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x(2\cos^2 x - 1)dx$; b) $\int_0^1 (x-2)e^{2x}dx$;

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\sin 2x dx$; d) $I = \int_1^3 \frac{3 + \ln x}{(x+1)^2}dx$.

Thử sức TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 5

(Thời gian làm bài: 180 phút)

PHẦN CHUNG

Câu I (2 *điểm*)

Cho hàm số $y=\frac{2x+m}{x-1}$ (*m* là tham số thực).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số trên khi $m=1$.

2) Xác định các tham số *m* để đồ thị có tiếp tuyến song song và cách đường thẳng d: $3x+y-1=0$ một khoảng cách bằng $\sqrt{10}$.

Câu II (2 *điểm*)

1) Giải phương trình

$8\sqrt{2}\sin x\cos 2x+1=\tan x+\tan 4x+\tan x\tan 4x.$

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}(x+1)^2+(x+1)\sqrt{y+1}+y=6\\ x+(2+x)\sqrt{y+1}=4.\end{cases}$$

Câu III (1 *điểm*) Tính tích phân

$$I=\int_0^e \ln\left(\sqrt{1+\ln^2 x}+\ln x\right)^{\frac{1}{x}}dx.$$

Câu IV (1 *điểm*)

Cho hình chóp tứ giác *S.ABCD* có các cạnh bên $SA=SB=SD=a$; đáy *ABCD* là hình thoi có $\widehat{BAD}=60^\circ$ và mặt phẳng (*SDC*) tạo với mặt phẳng (*ABCD*) một góc 30°. Tính thể tích hình chóp *S.ABCD*.

Câu V (1 *điểm*)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{2+4a}+\frac{1}{3+9b}+\frac{1}{6+36c}$$

trong đó *a*, *b*, *c* là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$.

PHẦN RIÊNG

(Thí sinh chỉ được chọn một trong hai phần A hoặc B)

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu VI.a (2 *điểm*)

1) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Descartes *Oxy* cho hai điểm $A(3;5)$, $B(5;3)$. Xác định điểm *M* trên đường tròn $(C):(x-1)^2+(y+2)^2=2$ sao cho diện tích tam giác *MAB* có giá trị lớn nhất.

2) Trong không gian với hệ tọa độ Descartes *Oxyz*, cho tam giác *ABC* có $A(1;1;1)$, $B(0;-1;-1)$, $C(3;5;-3)$. Lập phương trình đường phân giác trong góc *A* của tam giác *ABC*.

Câu VII.a (1 *điểm*)

Cho các số phức *z* thỏa mãn $|z-1+2i|=\sqrt{5}$. Tìm số phức *w* có môđun lớn nhất, biết rằng $w=z+1+i$.

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu VI.b (2 *điểm*)

1) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Descartes *Oxy* cho hai điểm $A(3\ ;\ 4)$, $B(5\ ;\ 3)$. Xác định điểm *M* trên đường elip $(E):\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$ sao cho diện tích tam giác *MAB* có giá trị nhỏ nhất.

2) Trong không gian với hệ tọa độ Descartes *Oxyz*, cho hai đường thẳng

$d_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{2}$ và $d_2:\frac{x}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-2}$.

cắt nhau nằm trong mặt phẳng (*P*). Lập phương trình đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d_1 và d_2 nằm trong mặt phẳng (*P*).

Câu VII.b (1 *điểm*)

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\dfrac{1+x}{1+y}=2013^{x-y}\\ 2+4^y.\log_2 x=0\end{cases}\quad \text{với ẩn } x>0, y>0.$$

NGUYỄN LÁI

(GV THPT chuyên Lương Văn Chánh, Tuy Hòa, Phú Yên)

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 4

Câu I. 1) Bạn đọc tự giải.

2) Điểm cực đại $Đ(1;5)$; điểm cực tiểu $T(3;1)$. Gọi $\S_1$ là điểm đối xứng của $Đ(1;5)$ qua trục Ox, khi đó $\S_1(1;-5)$, dễ thấy $\S_1T\cap Ox = A\left(\frac{8}{3};0\right)$ cần tìm.

Câu II. 1) PT đã cho tương đương với

$$\cos 6x+2\cos 6x\sin x+\cos 2x=2\cos 5x\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos 6x+\sin 7x-\sin 5x+\cos 2x=\sin 7x-\sin 3x$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 4x(\cos 2x-\sin 2x)=0.$$

Đáp số. $x=\frac{\pi}{8}$, $x=\frac{3\pi}{8}, x=\frac{\pi}{6}$.

2) Điều kiện $-1<x\neq 1$.

$$\text{PT}\Leftrightarrow \log_3(x+1)+\log_4(x+2)=\frac{5x-2}{4(x-1)}.$$

Với $x>1$, VT là hàm đồng biến, VP là hàm nghịch biến. Suy ra PT có nghiệm duy nhất $x=2$.

Với $-1<x<1$. VT là hàm đồng biến, VP là hàm nghịch biến. Suy ra PT có nghiệm duy nhất $x=0$.

Vậy PT có hai nghiệm $x=0$ và $x=2$.

Câu III. Ta có

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\frac{1}{x^2+1}+\sin^2 x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{x^2+1}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin^2 x dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{x^2}{4}-\frac{x\sin 2x}{4}-\frac{\cos 2x}{4}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{\pi^2}{4}\right)+\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{4}.$$

Câu IV. Ta có

$S_{A'AH}=\frac{1}{2}AH.A'A=\frac{2a^2\sqrt{1-5\sin^2\alpha}}{5\sin\alpha}$. Mặt khác $d(E;(A'AH))=CH$. Tìm được $CH=\frac{AC^2}{BC}=\frac{4a}{\sqrt{5}}$.

Vậy $V_{EAA'H}=\frac{1}{3}CH.S_{A'AH}=\frac{8a^3\sqrt{1-5\sin^2\alpha}}{15.\sqrt{5}\sin\alpha}$.

Câu V. Ta có

$$b^2-2b+3\geq 2\Rightarrow \frac{a^3}{b^2-2b+3}\leq\frac{a^3}{2} \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(c)=c^3-3c+a^2-2a+7$ trên khoảng $(0;+\infty)$ (xem a là tham số) ta có

$f'(c)=3c^2-3=0$ khi $c=1$. Lập bảng biến thiên của hàm số, suy ra $f(c)\geq f(1)=a^2-2a+5\geq 4$. Đẳng thức xảy ra khi $a=1$ và $c=1$. Khi đó $\frac{2b^3}{c^3+a^2-2a-3c+7}\leq\frac{2b^3}{4}=\frac{b^3}{2}$ (2)

Xét hàm số $g(a)=a^4+b^4+a^2-2b^2-6a+11$ trên $(0;+\infty)$ (xem b là tham số). Lập bảng biến thiên, ta có $g(a)\geq g(1)=b^4-2b^2+7\geq 6$, với $\forall a,b>0$. Đẳng thức xảy ra khi $a=1$ và $b=1$. Từ đó $\frac{3c^2}{a^4+b^4+a^2-2b^2-6a+11}\leq\frac{3c^3}{6}=\frac{c^3}{2}$.(3)

Cộng ba BĐT (1), (2), (3) theo vế ta có điều cần chứng minh.

Câu VI.a 1) Tìm được $H\left(\frac{16}{27};\frac{23}{9}\right), G(1;2)$.

PT đường tròn đi qua A, G, H là

$$x^2+y^2+\frac{49}{54}x-\frac{49}{18}y-\frac{25}{54}=0.$$

2) Gọi I là trung điểm của AB thì $MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{AB^2}{2}$. Suy ra MA^2+MB^2 bé nhất $\Leftrightarrow$ MI bé nhất $\Leftrightarrow$ $MI\perp(P)$. Lại có $I(2;3;1)$, VTPT $\overrightarrow{n_{(P)}}(2;1;2)$ nên PT của IM là

$$\begin{cases}x=2+2t\\ y=3+t\\ z=1+2t\end{cases} t\in\mathbb{R}.$$ Thay vào PT (P) ta được $t=-2$. Vậy $M(-2;1;-3)$ là điểm cần tìm. ☛

Câu VII.a Số phần tử không gian mẫu $|\Omega|=15!$. Gọi A là biến cố mà người đứng đầu hàng, và cuối hàng là nữ thì $|\Omega_A|=A_6^2.13!$

Suy ra $P(A)=\dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|}=\dfrac{A_6^2.13!}{15!}=\dfrac{1}{7}$.

Câu VI.b 1) PT tham số của (d) là $\begin{cases} x=t \\ y=5-t \end{cases}$

Xét $M\in(d)$ thì $M(t;5-t)$. Gọi N là điểm đối xứng với M qua O thì $N(-t;t-5)$ và $N\in(C)$. Từ đó

$t^2+(t-5)^2-8t+4t-20+16=0 \Leftrightarrow t_1=\dfrac{7-\sqrt{7}}{2}$; $t_2=\dfrac{7+\sqrt{7}}{2}$. Vậy $M_1\left(\dfrac{7-\sqrt{7}}{2};\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}\right)\in(d)$ thì $N_1\left(\dfrac{7-\sqrt{7}}{-2};\dfrac{3+\sqrt{7}}{-2}\right)\in(C)$; $M_2\left(\dfrac{7+\sqrt{7}}{2};\dfrac{3-\sqrt{7}}{2}\right)\in(d)$ thì $N_2\left(\dfrac{7+\sqrt{7}}{-2};\dfrac{3-\sqrt{7}}{-2}\right)\in(C)$.

2) Viết PT tham số của hai đường thẳng sau đó tìm PT đường vuông góc chung. Đường vuông góc chung đó cắt d_1, d_2 ở $A(7;3;9)$, $B(3;1;1)$. Mặt cầu cần tìm chính là mặt cầu có đường kính AB. PT mặt cầu có dạng

$$(x-5)^2+(y-2)^2+(z-5)^2=21.$$

Câu VII.b. Xét một khả năng xảy ra khi sút xa 5 lần có 3 lần ghi bàn thắng. Khi đó xác suất cho khả năng này là $(0{,}7)^3.(0{,}3)^2=0{,}03087$. Mặt khác, số khả năng xảy ra trong 5 lần sút có 3 lần ghi bàn thắng, 2 lần không là C_5^3. Vậy xác suất để Đội Việt Nam ghi 3 bàn thắng trong 5 lần sút xa là $C_5^3.0{,}03087=0{,}3087$.

NGUYỄN QUANG MINH
(GV THPT Trần Thủ Độ, Thái Bình)

CÁC BÀI TOÁN.....*(Tiếp trang 2)*

14) Ta có

$OA+OK\ge AH \Leftrightarrow (OA+OK).BC\ge AH.BC$ $\Leftrightarrow OA.BC\ge 2S-2S_1$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi điểm O thuộc đường cao AH.

Tương tự $OB.CA\ge 2S-2S_2$; $OC.AB\ge 2S-2S_3$.

Do đó

$OA.BC+OB.CA+OC.AB\ge 6S-2(S_1+S_2+S_3)$
$\Leftrightarrow OA.BC+OB.CA+OC.AB\ge 4S.$

Vậy $\min(OA.BC+OB.CA+OC.AB)=4S$, đạt được khi và chỉ khi điểm O là trực tâm của tam giác ABC.

15) a) Ta có $(d_ad_bd_c)(abc)=(ad_a)(bd_b)(cd_c)\le$ $\left(\dfrac{ad_a+bd_b+cd_c}{3}\right)^3=\left(\dfrac{2S}{3}\right)^3 \Rightarrow d_ad_bd_c\le\dfrac{8S^3}{27abc}$.

Do đó tích $d_ad_bd_c$ lớn nhất khi và chỉ khi $ad_a=bd_b=cd_c$, hay điểm O là trọng tâm tam giác ABC.

b) Ta có

$2S=a.d_a+b.d_b+c.d_c \Leftrightarrow \left(\dfrac{a}{d_a}+\dfrac{b}{d_b}+\dfrac{c}{d_c}\right).2S=$

$\left(\dfrac{a}{d_a}+\dfrac{b}{d_b}+\dfrac{c}{d_c}\right).(a.d_a+b.d_b+c.d_c)=(a^2+b^2+c^2)$

$+ab\left(\dfrac{d_a}{d_b}+\dfrac{d_b}{d_a}\right)+bc\left(\dfrac{d_b}{d_c}+\dfrac{d_c}{d_b}\right)+ca\left(\dfrac{d_c}{d_a}+\dfrac{d_a}{d_c}\right)\ge$

$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$

$\Leftrightarrow \dfrac{a}{d_a}+\dfrac{b}{d_b}+\dfrac{c}{d_c}\ge\dfrac{(a+b+c)^2}{2S}$ (không đổi).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $d_a=d_b=d_c$ hay O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. ❑

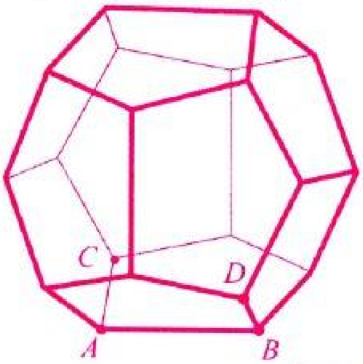
Bây giờ chúng ta hãy tự tìm phần kết luận của những bài toán có phần giả thiết như sau:

Cho tam giác ABC nhọn và M là một điểm bất kì nằm trong tam giác đó. Gọi H, K, L lần lượt là hình chiếu của M trên các cạnh BC, CA, AB.

Chúc các bạn thành công.

LẮP ĐẶT ĐÈN MÀU

Để chuẩn bị đón Xuân Quý Tỵ bạn *Mai* làm một hình (khung) đa diện như hình vẽ (cạnh phía trước có nét đậm hơn). Bạn *Mai* dự định lắp ở mỗi đỉnh một bóng đèn màu và đặt một đường dây điện đi theo các cạnh đến tất cả các bóng đèn, bắt đầu ở đỉnh *A* và kết thúc ở đỉnh *B*, sao cho đường dây điện đi qua mỗi đỉnh chỉ một lần. Bạn *Mai* đã đặt dây ở đoạn *AC*, nhưng chưa biết đặt tiếp ra sao để đến được đỉnh *D*, rồi qua đoạn *DB* tới đỉnh *B*. Bạn hãy giúp bạn *Mai* đặt dây điện và thử xem có mấy cách đặt như thế.



HOÀNG NGUYỄN

Giải đáp

(Đề đăng trên THTT số 425 tháng 11 năm 2012)

Bài 1. ĐẾM SỐ THEO VÒNGTRÒN

Gọi số thứ tự các học sinh đứng theo chiều kim đồng hồ trong một vòng tròn ở một thời điểm nào đó là 1, 2,..., n.

• Nếu $n=2m$ và bạn mang số 1 đếm 1 thì sau khi đếm hết một vòng tròn sẽ còn lại m bạn đều mang số lẻ. Ở vòng sau bạn mang số k ($k = 1, 2, 3,..., m$) là bạn mang số $2k-1$ của vòng trước và bạn mang số 1 ở vòng sau đếm 1 là bạn mang số 1 của vòng trước.

• Nếu $n=2m+1$ và bạn mang số 1 đếm 1 thì sau khi đếm hết một vòng tròn sẽ còn lại $m+1$ bạn đều mang số lẻ. Ở vòng sau bạn mang số k ($k = 2, 3,...,m+1$) là bạn mang số $2k-3$ của vòng trước, còn bạn mang số 1 ở vòng sau và đếm 1 là bạn mang số $n=2m+1$ của vòng trước.

Trong lần đầu có 60 bạn, lần thứ hai có 30 bạn, lần thứ ba có 15 bạn, lần thứ tư có 8 bạn, lần thứ năm có 4 bạn, lần thứ sáu có 2 bạn, lần thứ bảy có 1 bạn. Giả sử bạn ở lại cuối cùng tên là *A*, từ lần thứ sáu đến lần thứ tư mỗi vòng tròn đều có một số chẵn bạn nên bạn *A* đều mang số 1 trong các lần đó. Bạn *A* là người mang số 15 trong lần thứ ba (số lẻ bạn), tương ứng với số $2.15-1=29$ trong lần thứ hai (số chẵn bạn) và tương ứng với số $2.29-1=57$ trong lần đầu (số chẵn bạn). Vậy bạn *A* mang số 57, tính từ lớp trưởng mang số 1 trong lần đầu, là bạn ở lại cuối cùng và được nhận tặng phẩm.

Nhận xét. Tuyên dương bạn *Nguyễn Văn Tuyến*, 11A1, K66, THPT Lương Ngọc Quyến, TP Thái Nguyên, **Thái Nguyên** đã giải đúng bài này.

Bài 2. BÀI TOÁN VỀ NGÀY NHÀ GIÁO VIỆT NAM

Xét số nguyên $n>2$ và $2\le k\le n-1$, ta có $k(n-k+1)=(n-k)(k-1)+n>n$. Từ đó $(n!)^2=(n!)(n!)=(1.2.3...n)(n(n-1)...2.1)$ $=(1.n)(2.(n-1)).(3.(n-2))...((n-1).2).(n.1)$ $>n^2.n^{n-2}=n^n$. Với $n=20112012$ thì

$$(20112012!)^2>(20112012)^{20112012}.$$

Nhận xét. Tuyên dương bạn *Phan Thanh Hào*, 9A1, THCS Bùi Thị Xuân, TP Quy Nhơn, **Bình Định** đã giải đúng bài này.

ĐAN QUỲNH

TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC SƠ CẤP

THÊM TÍNH CHẤT cho HÌNH TAM GIÁC

HỒ QUANG VINH
(Hà Nội)

Các bạn trẻ yêu toán thân mến! Xuất phát từ một kết quả thú vị, hoặc một bài toán quen thuộc, nhờ vào những hệ thức liên hệ giữa các yếu tố trong tam giác đôi khi chúng ta có thể tìm được các công thức hoặc các bất đẳng thức mới. Trong bài viết này chúng tôi giới thiệu thêm một số tính chất khá thú vị trong hình tam giác xoay quanh *Công thức Euler*, hay còn gọi là *Công thức Pedal* để minh hoạ cho ý kiến trên.

I. CÔNG THỨC EULER

Cho tam giác ABC. M là một điểm bất kì trong tam giác đó. Gọi M_a, M_b, M_c theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của điểm M lên các cạnh BC, CA và AB; O, R lần lượt là tâm, bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Khi đó ta có hệ thức

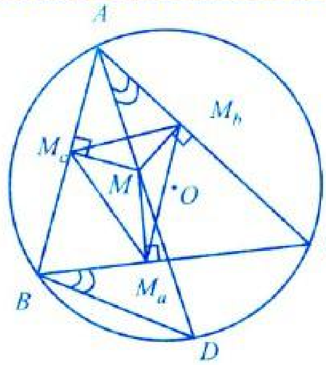
$$OM^2 = R^2 - 4R^2\left(\frac{S_{M_aM_bM_c}}{S_{ABC}}\right) \quad (1)$$

(*Công thức* (1) *đôi khi còn được gọi là* ***công thức Pedal***).

Chứng minh. *Cách 1.* Nối MA cắt lại đường tròn (O) tại điểm D (h.1), ta có

$S_{M_aM_bM_c} = \frac{1}{2}M_bM_c.M_cM_a.\sin\widehat{M_bM_cM_a}$.

Sử dụng định lí sin cho tam giác MM_bM_c ta thấy $\frac{M_bM_c}{\sin A} = MA$. Hay $M_bM_c = MA.\sin A$. Tương tự $M_cM_a = MB.\sin B$. Từ đó $S_{M_aM_bM_c}$ $= \frac{1}{2}MA.MB.\sin A.\sin B.\sin\widehat{M_bM_cM_a}$. Chú ý rằng $\widehat{M_bM_cM_a} = \widehat{MBD}$ và từ định lí sin cho tam giác BMD ta thấy $MB.\sin\widehat{MBD} = MD.\sin C$.



Hình 1

Suy ra $S_{M_aM_bM_c} = \frac{1}{2}MA.MD.\sin A.\sin B.\sin C$

$= \frac{1}{2}\mathscr{P}_{M/(O)}.\sin A.\sin B.\sin C = \frac{1}{2}\left(R^2 - OM^2\right).\frac{abc}{8R^3}$

$(BC = a;\ AC = b;\ AB = c)$.

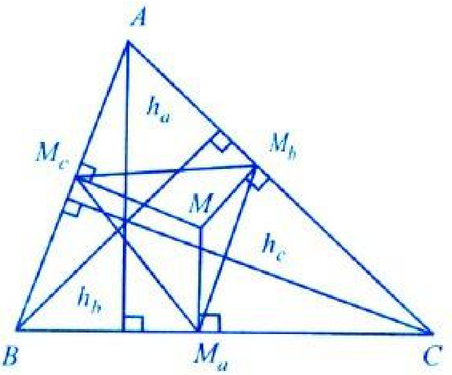
Vì $S_{ABC} = \frac{abc}{4R}$ nên ta có công thức cần chứng minh $OM^2 = R^2 - 4R^2\left(\frac{S_{M_aM_bM_c}}{S_{ABC}}\right)$.

Cách 2. Sử dụng kết quả: *Với mọi tam giác ABC ta có công thức sau*

$OM^2 = R^2(1 - 4\lambda_1\lambda_2\sin^2 C - 4\lambda_2\lambda_3\sin^2 A$ $-4\lambda_3\lambda_1\sin^2 B)$ (*), *trong đó O là tâm đường tròn ngoại tiếp, M là điểm bất kì trong mặt phẳng chứa tam giác ABC,* $\lambda_i \in \mathbb{R}$ *và* $\sum_{i=1}^{3}\lambda_i = 1$.

(Xem phép chứng minh kết quả này trong *Tạp chí TH&TT số* 376, *tháng* 10 *năm* 2008). *Trở lại việc chứng minh hệ thức Euler.*

Gọi r_a, r_b, r_c lần lượt là khoảng cách từ điểm M đến các cạnh BC, CA, AB, còn h_a, h_b, h_c là độ dài các đường cao kẻ từ các đỉnh A, B, C của tam giác ABC (h.2). Khi đó nếu ta chọn



Hình 2

$\lambda_1 = \frac{r_a}{h_a}$; $\lambda_2 = \frac{r_b}{h_b}$; $\lambda_3 = \frac{r_c}{h_c}$ thì $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 1$.

Áp dụng công thức (*) ta có

$$OM^2 = R^2\left(1 - \frac{4r_a.r_b.\sin^2 C}{h_a h_b} - \frac{4r_b.r_c.\sin^2 A}{h_b h_c}\right.$$

$$\left. - \frac{4r_a.r_c.\sin^2 B}{h_a h_c}\right) = R^2\left(1 - \frac{4.(2S_{MM_aM_b}.\sin C)}{h_a h_b}\right.$$

$$\left. - \frac{4.(2S_{MM_bM_c}.\sin A)}{h_b h_c} - \frac{4.(2S_{MM_aM_c}.\sin B)}{h_a h_c}\right)$$

$$= R^2\left(1 - \frac{4.(2S_{MM_aM_b}.2S_{ABC})}{4S^2_{ABC}} - \frac{4.(2S_{MM_bM_c}.2S_{ABC})}{4S^2_{ABC}}\right.$$

$$\left. - \frac{4.(2S_{MM_aM_c}.2S_{ABC})}{4S^2_{ABC}}\right) = R^2\left(1 - 4.\frac{S_{M_aM_bM_c}}{S_{ABC}}\right).$$

Nhận xét. 1) Hệ thức (1) đúng với mọi điểm M nằm trong hình tròn $(O; R)$ $(OM^2 < R^2)$.

2) Nếu M nằm ngoài hình tròn tâm O, bán kính R $(OM^2 > R^2)$ thì ta có hệ thức

$$OM^2 = R^2 + 4R^2\left(\frac{S_{M_aM_bM_c}}{S_{ABC}}\right) \quad (2)$$

II. MỘT SỐ KÍ HIỆU VÀ NHỮNG HỆ THỨC QUEN THUỘC

Với mỗi tam giác ABC ($BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, $\widehat{BAC}=\alpha$, $\widehat{ABC}=\beta$, $\widehat{ACB}=\gamma$) ta gọi R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp. Còn O, I, E, N, L, G, H, J theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp, tâm đường tròn nội tiếp, tâm *đường tròn Euler*, *điểm Nagel*, *điểm Lemoine*, trọng tâm, trực tâm, *điểm Gergonne* của tam giác ABC. $(O_a; O_b; O_c)$, $(I_a; I_b; I_c)$, $(E_a; E_b; E_c)$, $(N_a; N_b; N_c)$, $(L_a; L_b; L_c)$, $(G_a; G_b; G_c)$, $(H_a; H_b; H_c)$, $(J_a; J_b; J_c)$ theo thứ tự là các bộ hình chiếu vuông góc của các điểm O, I, E, N, L, G, H, J lên các cạnh BC, CA, AB. Ngoài ra, ta gọi K là tâm đường tròn bàng tiếp tương ứng với đỉnh A của tam giác ABC và K_a, K_b, K_c theo thứ tự là hình chiếu của K lên BC, CA, AB; còn p là nửa chu vi tam giác ABC. Chúng ta đã được làm quen với các hệ thức sau (*xem Tạp chí TH&TT số* 376, *tháng* 10 *năm* 2008)

$$OG^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) \quad (3)$$

$$OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \quad (4)$$

$OI^2 = R^2 - 2Rr$ (*Hệ thức Euler*) (5)

$OK^2 = R^2 + 2Rr_a$ (r_a là bán kính đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC) (6)

$$OJ^2 = R^2 - \frac{4p^2 r(r+R)}{(4R+r)^2} \quad (7)$$

$$ON^2 = (R - 2r)^2 \quad (8)$$

$$OL^2 = R^2 - \frac{3a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2} \quad (9)$$

III. MỘT SỐ HỆ THỨC TRONG TAM GIÁC

Kết quả 1. Cho điểm M trùng với điểm O, từ công thức (1) ta nhận được

$$S_{ABC} = 4S_{O_aO_bO_c}.$$

Kết quả 2. Cho điểm M trùng với điểm I, từ công thức (1) ta có $OI^2 = R^2 - 4R^2\left(\frac{S_{I_aI_bI_c}}{S_{ABC}}\right)$.

Mặt khác, theo (5) thì $OI^2 = R^2 - 2Rr$. Đồng nhất hai vế hai đẳng thức trên đi đến kết quả

$$\frac{S_{I_aI_bI_c}}{S_{ABC}} = \frac{r}{2R}.$$

Kết quả 3. Cho điểm M trùng với điểm G. Từ hệ thức (1) ta có $OG^2 = R^2 - 4R^2\left(\frac{S_{G_aG_bG_c}}{S_{ABC}}\right)$.

Mặt khác, theo (3) ta có

$OG^2 = R^2 - \dfrac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)$. Suy ra

$$\frac{S_{G_aG_bG_c}}{S_{ABC}} = \frac{a^2+b^2+c^2}{36R^2}.$$

Kết quả 4. 1) Với tam giác ABC nhọn, cho điểm M trùng với điểm H, từ hệ thức (1) ta được

$OH^2 = R^2 - 4R^2\left(\dfrac{S_{H_aH_bH_c}}{S_{ABC}}\right)$. Mặt khác, từ (4) có $OH^2 = 9R^2 - (a^2+b^2+c^2)$.

Từ đó, đồng nhất hai vế của hai hệ thức trên ta thu được

$$\frac{S_{H_aH_bH_c}}{S_{ABC}} = \frac{a^2+b^2+c^2}{4R^2} - 2.$$

2) Với tam giác ABC có một góc tù thì từ các công thức (2) và (4) ta nhận được kết quả

$$\frac{S_{H_aH_bH_c}}{S_{ABC}} = 2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{4R^2}.$$

Kết quả 5. Cho điểm M trùng với điểm E. Từ công thức (1) ta có $OE^2 = R^2 - 4R^2\left(\dfrac{S_{E_aE_bE_c}}{S_{ABC}}\right)$.

Do ba điểm O, E, G thẳng hàng và $\overrightarrow{OE} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{OG}$, nên

$$OE^2 = \frac{9}{4}R^2 - \frac{1}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

Suy ra $\dfrac{S_{E_aE_bE_c}}{S_{ABC}} = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{16R^2} - \dfrac{5}{6}$.

Kết quả 6. Cho điểm M trùng với điểm J. Từ công thức (1), ta có $OJ^2 = R^2 - 4R^2\left(\dfrac{S_{J_aJ_bJ_c}}{S_{ABC}}\right)$.

Theo công thức (7) ta thấy

$OJ^2 = R^2 - \dfrac{4p^2r(r+R)}{(4R+r)^2}$. Từ đó có kết quả

$$\frac{S_{J_aJ_bJ_c}}{S_{ABC}} = \frac{p^2r(r+R)}{R^2(4R+r)^2}.$$

Kết quả 7. Cho điểm M trùng với điểm L. Từ công thức (1) ta có

$$OL^2 = R^2 - 4R^2\left(\frac{S_{L_aL_bL_c}}{S_{ABC}}\right).$$

Theo công thức (9) ta thấy

$$OL^2 = R^2 - \frac{3a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}.$$

Suy ra $\dfrac{S_{L_aL_bL_c}}{S_{ABC}} = \dfrac{3a^2b^2c^2}{4R^2(a^2+b^2+c^2)^2}$.

Kết quả 8. Cho điểm M trùng với điểm K. Từ công thức (2), lưu ý K nằm ngoài đường tròn $(O; R)$ ta thấy $OK^2 = R^2 + 4R^2\left(\dfrac{S_{K_aK_bK_c}}{S_{ABC}}\right)$. Từ công thức (6) có $OK^2 = R^2 + 2Rr_a$, nên

$$\frac{S_{J_aJ_bJ_c}}{S_{ABC}} = \frac{r_a}{2R}.$$

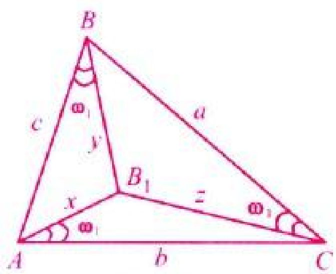
Kết quả 9. Cho điểm M trùng với điểm N. Từ công thức (1) ta thấy

$$ON^2 = R^2 - 4R^2\left(\frac{S_{N_aN_bN_c}}{S_{ABC}}\right).$$

Mặt khác theo công thức (8) thì

$ON^2 = (R-2r)^2$. Từ đó $\dfrac{S_{N_aN_bN_c}}{S_{ABC}} = \dfrac{r}{R}\left(1 - \dfrac{r}{R}\right)$.

Điểm Brocard. Xét tam giác ABC, khi đó có đúng hai điểm B_1 và B_2 nằm trong tam giác ABC sao cho $\widehat{BCB_1} = \widehat{CAB_1} = \widehat{ABB_1} = \omega_1$ (h.3); $\widehat{BCB_2} = \widehat{CAB_2} = \widehat{ABB_2} = \omega_2$.



Hình 3

B_1, B_2 được gọi là các *điểm Brocard* của tam giác ABC; ω_1, ω_2 được gọi là *góc Brocard* tương ứng với các điểm B_1, B_2.

Ta tính khoảng cách từ O đến điểm B_1.

Đặt $AB_1 = x$, $BB_1 = y$, $CB_1 = z$. Ta thấy

$$\widehat{CAB_1} + \widehat{ACB_1} = \widehat{BCB_1} + \widehat{ACB_1} = \widehat{ACB} = \gamma.$$

Từ đó $\sin\widehat{AB_1C} = \sin\gamma$. Sử dụng định lí sin cho tam giác AB_1C, ta có

$$\frac{b}{\sin\widehat{AB_1C}} = \frac{z}{\sin\omega_1} \Rightarrow z = \frac{b.\sin\omega_1}{\sin\gamma}.$$

Tương tự có $x = \dfrac{c.\sin\omega_1}{\sin\alpha}$; $y = \dfrac{a.\sin\omega_1}{\sin\beta}$.

Mặt khác, $S_{AB_1C} = \dfrac{1}{2}zx.\sin\widehat{AB_1C} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{b\sin\omega_1}{\sin\gamma}$

$$.\frac{c.\sin\omega_1}{\sin\alpha}.\sin\gamma = S_{ABC}.\frac{\sin^2\omega_1}{\sin^2\alpha} \quad (1)$$

Tương tự $S_{CB_1B} = S_{ABC}.\dfrac{\sin^2\omega_1}{\sin^2\gamma}$ (2)

$$S_{BB_1A} = S_{ABC}.\frac{\sin^2\omega_1}{\sin^2\beta} \quad (3)$$

Cho điểm M trùng với điểm B_1 và chọn

$$\lambda_1 = \frac{S_{CB_1B}}{S_{ABC}} = \frac{\sin^2\omega_1}{\sin^2\gamma}; \quad \lambda_2 = \frac{S_{AB_1C}}{S_{ABC}} = \frac{\sin^2\omega_1}{\sin^2\alpha};$$

$$\lambda_3 = \frac{S_{BB_1A}}{S_{ABC}} = \frac{\sin^2\omega_1}{\sin^2\beta}.$$

Từ công thức (*) ta thu được $OB_1^2 = R^2 - \sin^4\omega_1$

$$\times\left(\frac{c^2}{\sin^2\gamma.\sin^2\alpha} + \frac{a^2}{\sin^2\alpha.\sin^2\beta} + \frac{b^2}{\sin^2\beta.\sin^2\gamma}\right)$$

$$= R^2 - 16R^4.\sin^4\omega_1.\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \quad (4)$$

Chú ý rằng $S_{ABC} = S_{AB_1C} + S_{CB_1B} + S_{BB_1A}$, nên từ (1), (2), (3) suy ra

$$\frac{1}{\sin^2\omega_1} = \frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\beta} + \frac{1}{\sin^2\gamma}$$

$$\Leftrightarrow 4R^2.\sin^2\omega_1 = \frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \quad (5)$$

Từ (4) và (5) nhận được

$$OB_1^2 = R^2 - \frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} = R^2(1 - 4\sin^2\omega_1).$$

Kết quả 10. Gọi B_{1a}, B_{1b}, B_{1c} lần lượt là hình chiếu vuông góc của *điểm Brocard* B_1 lên các cạnh BC, CA, AB.

Cho điểm M trùng với điểm B_1. Từ công thức (1) có $OB_1^{\ 2} = R^2 - 4R^2\left(\dfrac{S_{B_{1a}B_{1b}B_{1c}}}{S_{ABC}}\right)$.

Mặt khác $OB_1^{\ 2} = R^2 - \dfrac{a^2b^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$

$= R^2 - 4R^2.\sin^2\omega_1$. Từ đó ta có

$$\frac{S_{B_{1a}B_{1b}B_{1c}}}{S_{ABC}} = \sin^2\omega_1 = \frac{a^2b^2c^2}{4R^2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)}.$$

Chúng tôi xin được kết thúc bài viết tại đây. Một vấn đề đặt ra cho bạn đọc là trong số mười tam giác $O_aO_bO_c$, $I_aI_bI_c$, $E_aE_bE_c$, $N_aN_bN_c$, $L_aL_bL_c$, $G_aG_bG_c$, $H_aH_bH_c$, $J_aJ_bJ_c$, $K_aK_bK_c$, $B_{1a}B_{1b}B_{1c}$ hãy thử sắp thứ tự về mặt diện tích mười tam giác đó theo quan hệ "≤" hoặc "≥" . Chúc các bạn thành công!

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Chứng minh rằng với mỗi tam giác ABC ta có các kết quả sau:

1. $S_{G_aG_bG_c} = \dfrac{4S_{ABC}^3\left(a^2+b^2+c^2\right)}{9a^2b^2c^2}$;

2. $S_{L_aL_bL_c} = \dfrac{48S_{ABC}^3}{a^2+b^2+c^2}$;

3. $S_{ABC}^2 \le \dfrac{9a^2b^2c^2}{16\left(a^2+b^2+c^2\right)}$;

4. $S_{ABC} \le \dfrac{1}{4\sqrt{3}}\left(a^2+b^2+c^2\right)$.

5. Chứng minh lại định lí về đường thẳng R.Simson.

6. Giả sử ω_1 là góc *Brocard* của tam giác ABC tương ứng với *điểm Brocard* B_1. Chứng minh rằng $\sin\omega_1 \ge 2\left(\dfrac{r}{R}\right)^2$.

7. Giả sử M là điểm nằm trong tam giác ABC sao cho $\widehat{MAB} = \widehat{MBC} = \widehat{MCA} = \omega$. Chứng minh rằng

a) $\cot\omega = \cot A + \cot B + \cot C$;

b) $\sin^3\omega = \sin(A-\omega).\sin(B-\omega).\sin(C-\omega)$;

c) Xác định góc ω lớn nhất thoả mãn câu a).

CÁC LỚP THCS

Bài T1/428. (Lớp 6). Tìm tất cả các bộ ba số nguyên tố a, b, c (có thể bằng nhau) sao cho

$$abc < ab + bc + ca.$$

LƯU LÝ TƯỞNG

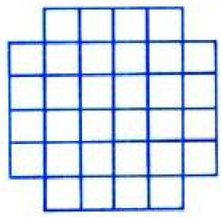
(GV THCS Văn Lang, Việt Trì, Phú Thọ)

Bài T2/428. (Lớp 7) Cho tam giác ABC vuông tại A với đường cao AH, $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Dựng tam giác đều ACD (D và B khác phía đối với AC). Gọi K là hình chiếu vuông góc của H trên AC. Đường thẳng qua H và song song với AD cắt AB kéo dài tại M. Chứng minh rằng ba điểm D, K, M thẳng hàng.

CAO NGỌC TOẢN

(GV THPT Tam Giang, Phong Điền, Thừa Thiên-Huế)

Bài T3/428. Xét bàn cờ có dạng hình vuông 6×6 ô vuông bị khoét đi 4 ô ở 4 góc (hình vẽ). Hãy tính số ô vuông nhỏ nhất có thể bôi đen sao cho 5 ô vuông tùy ý tạo thành một hình dấu + luôn có ít nhất một ô được tô đen.



VŨ ĐÌNH HÒA

(GV ĐHSP Hà Nội)

Bài T4/428. Cho a, b, c là các số thực nằm trong đoạn $[1;2]$. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3\sqrt[3]{(abc)^2} \ge 2(ab + bc + ca).$$

TRẦN TUẤN ANH

(GV ĐHKHTN, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh)

Bài T5/428. Cho tam giác không vuông ABC ($AB < AC$) với đường cao AH. Gọi E, F theo thứ tự là hình chiếu của H trên AB và AC. Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại D. Trên nửa mặt phẳng bờ CD chứa điểm A vẽ nửa đường tròn đường kính CD. Qua B vẽ đường thẳng vuông góc với CD cắt nửa đường tròn trên tại K. Chứng minh rằng DK là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác KEF.

LÊ XUÂN DƯƠNG

(GV THCS Lý Thường Kiệt, Yên Mỹ, Hưng Yên)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/428. Cho phương trình $ax^3 - x^2 + ax - b = 0$ $(a \ne 0, a \ne b)$ có ba nghiệm thực dương. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{11a^2 - 3\sqrt{3}ab - \dfrac{1}{3}}{9b - 10\left(\sqrt{3}a - 1\right)}$.

PHẠM ĐÌNH HẢI

(TP. Hồ Chí Minh)

Bài T7/428. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x - \dfrac{1}{4}} + \sqrt{y - \dfrac{1}{4}} = \sqrt{3} \\ \sqrt{y - \dfrac{1}{16}} + \sqrt{z - \dfrac{1}{16}} = \sqrt{3} \\ \sqrt{z - \dfrac{9}{16}} + \sqrt{x - \dfrac{9}{16}} = \sqrt{3}. \end{cases}$$

PHẠM HÙNG

(Hà Nội)

Bài T8/428. Cho hai hằng số thực a, b thỏa mãn $ab > 0$. Xét dãy số (u_n) với $n = 1, 2, 3, \ldots$ được cho bởi $u_1 = a$; $u_{n+1} = u_n + bu_n^2$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_1}{u_2} + \dfrac{u_2}{u_3} + \ldots + \dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)$.

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong Số 2, Bắc Ninh)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/428. Tìm tất cả các số nguyên dương k thỏa mãn điều kiện: Tồn tại đa thức $f(x)$ với các hệ số đều nguyên và có bậc lớn hơn 1 sao cho với mọi số nguyên tố p và với mọi số tự nhiên a, b ta có nếu p là ước của $(ab - k)$ thì p là ước của $(f(a)f(b) - k)$.

TRẦN NGỌC THẮNG

(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T10/428. Cho $a_i \in [0;\alpha]$ $(i=\overline{1,n})$, $(\alpha>0)$. Chứng minh rằng

$$\prod_{i=1}^{n}(\alpha - a_i) \le \alpha^n\left(1-\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{S_i+\alpha}\right)$$

trong đó $S_i = \sum_{k=1}^{n} a_k - a_i$ với mọi $i = \overline{1,n}$.

ĐỖ THANH HÂN

(GV THPT chuyên Bạc Liêu)

Bài T11/428. Cho tam giác ABC và điểm O nằm trong tam giác. Tia Ox song song với AB và cắt BC tại D, tia Oy song song với BC và cắt CA tại E, tia Oz song song với CA và cắt AB tại F. Chứng minh rằng

a) $S_{DEF} \le \frac{1}{3} S_{ABC}$;

b) $OD.OE.OF \le 27.AB.BC.CA$.

LỤC ĐỨC BÌNH

(GV THPT Trưng Vương Đông Hà, Quảng Trị)

Bài T12/428. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A, B. Điểm C cố định thuộc (O) và điểm D cố định thuộc (O'). P di chuyển trên tia đối của tia BA. Đường tròn ngoại tiếp các tam giác PBC, PBD theo thứ tự cắt BD, BC tại điểm thứ hai E, F. Chứng minh rằng trung điểm của đoạn thẳng EF luôn thuộc đường thẳng cố định khi P di chuyển.

TRẦN QUANG HÙNG

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/428. Đặt điện áp $u=400\cos 100\pi t$ (u tính bằng V, t tính bằng s) vào hai đầu đoạn mạch AB gồm điện trở thuần 50Ω mắc nối tiếp với đoạn mạch X. Cường độ dòng điện hiệu dụng qua đoạn mạch là 2A. Biết ở thời điểm t, điện áp tức thời giữa hai đầu AB có giá trị 400V; ở thời điểm $t+\frac{1}{400}$ (s), cường độ dòng điện tức thời qua đoạn mạch bằng không và đang giảm. Hỏi công suất tiêu thụ điện của đoạn mạch X là bao nhiêu ?

NGUYỄN QUANG HẬU

(Hà Nội)

Bài L2/428. Trên trục chính của một thấu kính có điểm sáng S cách quang tâm 30cm. Di chuyển thấu kính ra xa vật với vận tốc không đổi $v = 5$cm/s.

a) Tính tiêu cự của thấu kính, biết rằng khi thấu kính di chuyển được 2 giây thì vận tốc ảnh của S bắt đầu đổi chiều.

b) Chứng minh lúc đó khoảng cách từ ảnh đến vật ngắn nhất.

NGUYỄN VĂN THUẬN

(GV ĐHSP Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

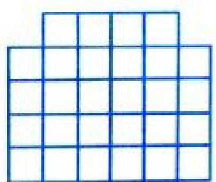
FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/428. (For 6th grade). Determine all triple of prime numbers a, b, c (not necessarily distict) such that

$$abc < ab + bc + ca.$$

T2/428. (For 7th grade) Let ABC be a right triangle, with right angle at A and AH is the altitude from A, $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Construct an equilateral triangle ACD (D and B are in opposite side AC). K is the foot of the perpendicular line from H onto AC. The line through H and parallel to AD meets AB at M. Prove the points D, K, M are colinear.

T3/428. Consider a 6×6 board of squares with 4 corner squares being deleted (see picture). Find the smallest number of squares that can be painted black given that among the 5 squares in any figure +, there is at least one black.



(Xem tiếp trang 27)

★Bài T1/424. (Lớp 6). *Tìm tất cả các số gồm hai chữ số sao cho khi nhân số đó với 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 thì tổng các chữ số của chúng đều bằng nhau.*

Lời giải. Gọi số phải tìm là x thì các số sau có tổng các chữ cố đều bằng nhau: $2x$, $3x$, $4x$, $5x$, $6x$, $7x$, $8x$, $9x$ (*). Vì $9x$ chia hết cho 9 nên tổng các chữ số của nó chia hết cho 9, do đó tổng các chữ số của $2x$ cũng chia hết cho 9. Do 2 và 9 nguyên tố cùng nhau nên x phải chia hết cho 9, nghĩa là x thuộc tập hợp $\{18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99\}$. Theo điều kiện của đề bài ta thấy các số 27, 36, 54, 63, 72, 81 có ít nhất một số trong dạng (*) không thỏa mãn. Thử với các số 18, 45, 90, 99 thì thấy thỏa mãn đề bài.

➤**Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải đúng: **Phú Thọ**: *Trần Minh Hiếu*, *Lê Nguyễn Quỳnh Trang*, *Nguyễn Phương Thảo*, *Nguyễn Hoàng Hải*, 6C, THCS Văn Lang, TP Việt Trì, *Nguyễn Kiên Chung*, 6A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông; **Vĩnh Phúc**: *Đỗ Minh Trung*, *Nguyễn Tường Vy*, *Nguyễn Thị Thùy Dung*, *Trần Thanh Huyền*, *Nguyễn Thành Vinh*, *Nguyễn Ngọc Bảo Linh*, *Nguyễn Vương Huy*, *Nguyễn Ngọc Xuân Huy*, 6A1, THCS Hai Bà Trưng, TX Phúc Yên, *Trần Quang Đức*, 6A1, *Nguyễn Minh Hiếu*, *Bùi Thị Liễu Dương*, 6A5, THCS Yên Lạc; **Hà Nội**: *Tạ Lê Ngọc Sáng*, 6E, THPT chuyên Hà Nội-Amsterdam; **Nghệ An**: *Nguyễn Văn Toàn*, 6A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Ngãi**: *Đinh Thị Ngọc Hà*, *Đỗ Trần Công Phương*, 6A, *Nguyễn Tấn Duy*, *Nguyễn Hiếu Ngân*, *Hồ Thị Ánh Tuyết*, 6B, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; **Bình Định**: *Trần Cả Bảo*, 6A1, THCS Phước Lộc, Tuy Phước.

VIỆT HẢI

★Bài T2/424. (Lớp 7)

Cho $S=\frac{2}{2013+1}+\frac{2^2}{2013^2+1}+\frac{2^3}{2013^{2^2}+1}+...$
$+\frac{2^{n+1}}{2013^{2^n}+1}+...+\frac{2^{2014}}{2013^{2^{2013}}+1}$.

So sánh S với $\frac{1}{1006}$.

Lời giải. Nhận xét với $k\neq\pm1$, ta có

$$\frac{m}{k-1}-\frac{m}{k+1}=\frac{2m}{k^2-1}.$$

Do đó $\frac{m}{k+1}=\frac{m}{k-1}-\frac{2m}{k^2-1}$ (với $k\neq\pm1$).

Thay (m,k) lần lượt là $(2;2013),(2^2;2013^2)$, $...,(2^{2014};2013^{2^{2013}})$ vào đẳng thức trên được

$$S=\left(\frac{2}{2013-1}-\frac{2^2}{2013^2-1}\right)+\left(\frac{2^2}{2013^2-1}-\frac{2^3}{2013^{2^2}-1}\right)$$
$$+...+\left(\frac{2^{2014}}{2013^{2^{2013}}-1}-\frac{2^{2015}}{2013^{2^{2014}}-1}\right).$$ Từ đó

$$S=\frac{2}{2013-1}-\frac{2^{2015}}{2013^{2^{2014}}-1}=\frac{1}{1006}-\frac{2^{2015}}{2013^{2^{2014}}-1}.$$

Suy ra $S<\frac{1}{1006}$. □

➤**Nhận xét.** Trong 38 lời giải mà Tòa soạn nhận được có hai bài giải sai và một chưa chính xác. Các bạn còn lại làm đúng và phần lớn làm theo phương pháp trên hoặc tương tự. Tuyên dương các bạn sau đây: **Phú Thọ**: *Nguyễn Vũ Nguyên Tùng*, 7A, THCS Phong Châu; **Nghệ An**: *Cao Đức Bảo*, *Võ Thị Thu Hà*, *Nguyễn Thanh Lâm*, *Ngô Trí Nguyên*, *Nguyễn Trọng Nghĩa*, 7C, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Hà Tĩnh**: *Nghiêm Thị Ngọc Ánh*, *Nguyễn Lệ Giang*, *Trần Minh Hiếu*, *Võ Thị Hồng Liệu*, *Bùi Minh Thúy*, *Lê Thị Ngọc Trâm*, *Trần Thị Tường Vy*, *Lê Thị Thu Uyên*, 7B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ; **Quảng Ngãi**: *Nguyễn Thị Mỹ Chi*, *Cao Thị Thúy Điểm*, *Đinh Thị Ngọc Hà*, *Nguyễn Thị Hạnh*, *Phạm Thị Mỹ Hằng*, *Nguyễn Tấn Phúc*, *Nguyễn Thúy Phượng*, *Đặng Lưu Việt Quý*, *Vũ Thi Thi*, *Phạm Thiên Trang*, *Nguyễn Thị*

Hà Vy, 7A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; *Nguyễn Đại Dương*, THCS Nguyễn Kim Vang, Nghĩa Hành; *Trần Thị Mỹ Linh, Phạm Quốc Trung*, 7A THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa; **Tiền Giang**: *Trần Thị Ánh Trinh*, 7^2, THCS Tân Mỹ Chánh, Mỹ Tho.

TẠ NGỌC TRÍ

★ Bài T3/424. *Tìm nghiệm nguyên của phương trình*

$$(y-2)x^2+(y^2-6y+8)x=y^2-5y+62$$

Lời giải. PT đã cho tương đương với

$$(y-2)x^2+(y-2)(y-4)x=(y-2)(y-3)+56$$

$$\Leftrightarrow (y-2)\big(x^2+(y-4)x-(y-3)\big)=56$$

$$\Leftrightarrow (y-2)(x-1)(x+y-3)=56 \quad (*)$$

Nhận thấy $(x-1)+(y-2)=x+y-3$, nên ta phân tích 56 thành tích của 3 số nguyên sao cho tổng hai số đầu bằng số còn lại. Như vậy ta có $56=1.7.8=7.1.8=(-8).1.(-7)=1.(-8).(-7)$ $=(-8).7.(-1)=7.(-8).(-1)$. Từ đó ta tìm được các số nguyên $(x;y)$ là $(2;9)$, $(8;3)$, $(-7;3)$, $(2;-6)$, $(-7;9)$, $(8;-6)$. ❐

➢**Nhận xét.** 1) Nhiều bạn tham gia giải bài này. Tất cả biến đổi được đến (*), nhưng chỉ có ít bạn tìm được đầy đủ 6 nghiệm của PT, phần lớn đều thiếu hai nghiệm $(x;y)$ là $(-7;9), (8;-6)$. Lí do là các bạn đã phân tích 56 thiếu hai trường hợp là $56=(-8).7.(-1)=7.(-8).(-1)$. Một số bạn không để ý $(x-1)+(y-2)=x+y-3$ nên lời giải còn dài.

2) Các bạn sau có lời giải tốt: **Bắc Ninh**: *Nguyễn Chí Trung, Nguyễn Quang Minh*, 9A, THCS Yên Phong; **Vĩnh Phúc**: *Nguyễn Thị Nga*, 9A, THCS Yên Lạc; **Phú Thọ**: *Nguyễn Đức Thuận*, 8A3, THCS Lâm Thao; **Hà Nam**: *Nguyễn Thanh Tùng*, 9A1, THCS Nguyễn Khuyến, Bình Lục; **Thanh Hóa**: *Lê Văn Duẩn*, 8D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Bút Sơn; **Quảng Ngãi**: *Nguyễn Thị Mỹ Chi, Phạm Thị Mỹ Hằng*, 8A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành, *Trần Thị Mỹ Linh*, 9A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa; **TP.Hồ Chí Minh**: *Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy*, 9A1, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, Quận 1.

TRẦN HỮU NAM

★ Bài T4/424. *Cho x, y là các số hữu tỉ thỏa mãn đẳng thức* $x^2+y^2+\left(\frac{xy+1}{x+y}\right)^2=2$. *Chứng minh rằng* $\sqrt{1+xy}$ *là một số hữu tỉ.*

Lời giải. Với điều kiện $x+y\neq 0$, ta có

$$x^2+y^2+\left(\frac{xy+1}{x+y}\right)^2=2$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2-2(xy+1)+\left(\frac{xy+1}{xy}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+y-\frac{xy+1}{x+y}\right)^2=0 \Leftrightarrow x+y-\frac{xy+1}{x+y}=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2=xy+1 \Leftrightarrow \sqrt{x+y}=|x+y|.$$

Do x, y là các số hữu tỉ nên $|x+y|$ là số hữu tỉ. Vậy $\sqrt{xy+1}$ là một số hữu tỉ. ❐

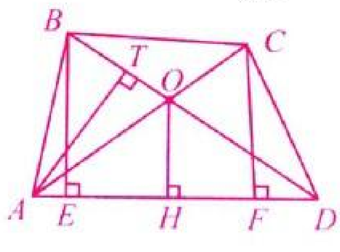
➢**Nhận xét.** 1) Bài này có nhiều bạn tham gia giải. Tuy nhiên đa số các bạn đều mắc sai lầm khi suy luận $(x+y)^2=xy+1 \Rightarrow \sqrt{xy+1}=x+y$ (!) và quên đặt điều kiện $x+y\neq 0$.

2) Các bạn sau có lời giải tốt: **Phú Thọ**: *Nguyễn Quang Khải*, 9B, THCS Văn Lang, Việt Trì, *Thạch Hoàng Tiến, Nguyễn Tiến Dũng*, 9A3, THCS Lâm Thao; **Bắc Ninh**: *Nguyễn Quang Minh, Nguyễn Thu Hiền*, 9A, THCS Yên Phong; **Vĩnh Phúc**: *Nguyễn Thanh Thủy*, 8A; *Nguyễn Thị Nga, Nguyễn Thị Khánh Huyền*, 9A, THCS Yên Lạc; **Hà Nam**: *Đỗ Đăng Dương, Hoàng Đức Mạnh*, 9A, THCS Đinh Công Tráng, Thanh Liêm; **Nghệ An**: *Phạm Việt Anh, Phạm Phương Ngọc*, 9A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Hà Tĩnh**: *Thân Văn Hòa, Trần Đoan Trang*, 9C, THCS Xuân Diệu, Can Lộc; **Phú Yên**: *Trần Đỗ Bảo Huân*, 9B, THCS Nguyễn Thị Định, Tây Hòa; **Quảng Ngãi**: *Phạm Thiên Trang*, 7A; *Đặng Lưu Việt Quý, Vũ Thi Thi*, 8A; *Nguyễn Thị Mỹ Chi, Đinh Thị Ngọc Hà*, 9A, THCS Hành Phước; **TP. Hồ Chí Minh**: *Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy*, 9A1, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, Quận 1.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★ Bài T5/424. *Giả sử O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD của tứ giác lồi ABCD. Gọi E, F, H lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ B, C, O đến AD. Chứng minh rằng* $AD.BE.CF \le AC.BD.OH$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Lời giải. Kẻ $AT\perp BD$, $(T\in BD)$ ta có $AT\le AO$ nên $AD.BE=BD.AT(=2S_{ABD})$ $\le BD.AO$. Suy ra $AD.BE\le AC.BD.\frac{AO}{AC}$ (1)



Mặt khác, vì $OH // CF$ nên $\frac{AO}{AC}=\frac{OH}{CF}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AD.BE \le AC.BD.\frac{OH}{CF} \Leftrightarrow AD.BE.CF\le AC.BD.OH$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $AT = AO \Leftrightarrow T \equiv O$, tức là $AC \perp BD$.❒

➢**Nhận xét.** Tất cả các bạn tham gia đều cho lời giải đúng. Một số bạn quên không nêu điều kiện xảy ra đẳng thức. Các bạn sau đây có lời giải tốt: **Bắc Ninh**: *Nguyễn Thị Mừng, Nguyễn Hữu Nghĩa, Nguyễn Quang Minh*, 9A, THCS Yên Phong; **Vĩnh Phúc**: *Nguyễn Thị Quỳnh Trang*, 9A, THCS Lập Thạch; **Phú Thọ**: *Trần Thị Hồng Ngọc Huyền, Đinh Mạnh Hà*, 8A1; *Nguyễn Đức Thuận*, 8A3; *Nguyễn Đình Mậu, Nguyễn Tiến Dũng, Nguyễn Thanh Quang, Trương Anh Tú, Nguyễn Huy Tuyển*, 9A3, THCS Lâm Thao; **Hà Nam**: *Đào Thu Hiền*, 9B, THCS Đinh Công Tráng, Thanh Liêm; **Thanh Hóa**: *Nguyễn Hữu Hoàng*, 8B, THCS Trần Phú, Nông Cống; **Nghệ An**: *Hoàng Thị Khánh Linh*, 9B, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Hà Tĩnh**: *Nguyễn Thị Trà*, 9D, THCS Liên Hương, Vũ Quang; **Phú Yên**: *Nguyễn Trần Hậu*, 9C, THCS Trần Quốc Toản, TP Tuy Hòa, *Trần Đỗ Bảo Huân*, 9B, THCS Nguyễn Thị Định, Tây Hòa; **Quảng Ngãi**: *Vũ Thi Thi, Nguyễn Thúy Phượng*, 8A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; **TP. Hồ Chí Minh**: *Trang Vĩ Hùng*, 9A1, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, Quận 1.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★**Bài T6/424.** *Xét các số thực dương a, b, c thỏa mãn abc = 1. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^3+5}{a^3(b+c)}+\frac{b^3+5}{b^3(c+a)}+\frac{c^3+5}{c^3(a+b)}\geq 9.$$

Lời giải. Đặt $x=bc$, $y=ca$, $z=ab$ thì $x,y,z>0$; $xyz=1$.

Áp dụng BĐT Cauchy, ta có

$a^3+1+1\geq 3\sqrt[3]{a^3.1.1}\Rightarrow a^3+2\geq 3a$.

Suy ra $\dfrac{a^3+5}{a^3(b+c)}\geq\dfrac{3a}{a^3(b+c)}+\dfrac{3}{a^3(b+c)}$

$$=\frac{3a^2bc}{a^3(b+c)}+\frac{3a^2b^2c^2}{a^3(b+c)}=\frac{3(x+x^2)}{y+z}.$$

Tương tự

$$\frac{b^3+5}{b^3(c+a)}\geq\frac{3(y+y^2)}{z+x};\quad \frac{c^3+5}{c^3(a+b)}\geq\frac{3(z+z^2)}{x+y}.$$

Do đó $\dfrac{a^3+5}{a^3(b+c)}+\dfrac{b^3+5}{b^3(c+a)}+\dfrac{c^3+5}{c^3(a+b)}$

$$\geq 3\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}+\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\right)\ (1)$$

Với các số thực dương x, y, z ta có hai bất đẳng thức quen thuộc

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\geq\frac{3}{2}\ (2)\ \text{(BĐT Nesbit)};$$

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\geq\frac{x+y+z}{2}\ (3)$$

Lại có $x+y+z\geq 3\sqrt[3]{xyz}=3$, kết hợp với (3) suy ra $\dfrac{x^2}{y+z}+\dfrac{y^2}{z+x}+\dfrac{z^2}{x+y}\geq\dfrac{3}{2}$ (4)

Từ (1), (2) và (4) thu được

$$\frac{a^3+5}{a^3(b+c)}+\frac{b^3+5}{b^3(c+a)}+\frac{c^3+5}{c^3(a+b)}\geq 9\ \text{(đpcm)}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.❒

➢**Nhận xét.** 1) Đây là bài toán không khó nên có rất nhiều bạn gửi bài giải và hầu hết làm đúng. Có thể chứng minh các BĐT (2) và (3) bằng cách đặt $A=y+z;\ B=z+x;\ C=x+y;\ P=x+y+z$. Sau khi biến đổi ta được cả hai BĐT (2) và (3) tương đương với $(A+B+C)\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right)\geq 9$; BĐT này được suy ra bằng cách nhân theo vế hai BĐT sau $A+B+C\geq 3\sqrt[3]{ABC}$ và $\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{ABC}}$.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Tiền Giang: *Châu Hoàng Long*, 10 Toán, THPT chuyên Tiền Giang; **Nghệ An**: *Dương Khánh Linh*, 10A1, THPT Cờ Đỏ, Nghĩa Đàn; **Hà Tĩnh**: *Nguyễn Hữu Đức, Nguyễn Thị Việt Hà, Võ Mỹ Linh*, 10 Toán 1; *Hoàng Đại Phú*, 10 Toán 2, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Nam**: *Nguyễn Thanh Hải, Nguyễn Thành Luân*, 10/1, THPT Nguyễn Bỉnh Khiêm, Tam Kỳ; **Bình Định**: *Nguyễn Hồng Tâm*, 10T, chuyên Lê Quý Đôn; **Hưng Yên**: *Phan Văn Quý, Bùi Gia Khánh*, 10T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thanh Hóa**: *Phạm Anh Thư*, 10A1, THPT Lê Văn Hưu; **Long An**: *Nguyễn Minh Trí, Lê Thành Nghĩa*, 10 T1, THPT chuyên Long An; **Bến Tre**: *Nguyễn Duy Linh, Từ Nhật Quang*, 10 Toán, THPT chuyên Bến Tre; **Quảng Ngãi**: *Trương Quang Huy*, 10 Toán 2, THPT chuyên Lê Khiết; **Quảng Bình**: *Ngô Hoàng Thanh Quang*, 10 Toán, THPT chuyên Quảng Bình.

NGUYỄN ANH DŨNG

★ Bài T7/424. *Giải phương trình*

$$\left(x^3+\frac{1}{x^3}+1\right)^4=3\left(x^4+\frac{1}{x^4}+1\right)^3.$$

Lời giải. Áp dụng BĐT Bunyakovsky cho hai bộ ba số $(1;1;1)$, $\left(x^4;\frac{1}{x^4};1\right)$ ta có

$$3\left(x^4+\frac{1}{x^4}+1\right)\geq\left(x^2+\frac{1}{x^2}+1\right)^2.$$

Áp dụng BĐT Bunyakovsky cho hai bộ ba số $\left(x^2;\frac{1}{x^2};1\right)$, $\left(x^4;\frac{1}{x^4};1\right)$, ta có

$$3\left(x^4+\frac{1}{x^4}+1\right)^3\geq\left(x^2+\frac{1}{x^2}+1\right)^2\left(x^4+\frac{1}{x^4}+1\right)^2$$

$$\geq\left(x^3+\frac{1}{x^3}+1\right)^4.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=1$.

Do đó phương trình đã cho có đúng một nghiệm $x=1$. ❐

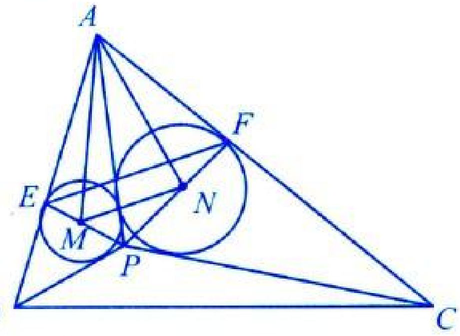
➤**Nhận xét.** Có nhiều bạn tham gia giải bài toán trên và đa số cho lời giải đúng. Bài toán trên cũng có thể giải được nhờ sử dụng BĐT Holder, BĐT Cauchy hoặc BĐT Jensen. Một số bạn khi áp dụng BĐT Holder với ba bộ số bất kì mà quên điều kiện các số phải không âm. Các bạn sau có lời giải tốt: **Thái Bình:** *Vũ Văn Dũng*, 10T2, THPT chuyên Thái Bình; **Hà Nội:** *Nguyễn Đình Thịnh*, 11A1, THPT Thanh Oai B; *Nguyễn Duy Khánh*, 12A1, THPT Ba Vì; **Nghệ An:** *Lê Hồng Đức*, *Trương Công Phú*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; *Phan Xuân Đức*, 11C4, THPT Nam Đàn 2; *Bùi Hoàng Đạt*, 11C1, THPT Nguyễn Đức Mậu, Quỳnh Lưu; **Hà Tĩnh:** *Thái Khắc Tiến*, *Nguyễn Thị Việt Hà*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Phương Ngọc*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Phú Yên:** *Lê Nhật Thăng*, 12 Toán, THPT chuyên Lương Văn Chánh.

NGUYỄN THANH HỒNG

★ Bài T8/424. *Cho tam giác ABC có góc BAC nhỏ hơn 90°. Giả sử P là một điểm thuộc miền trong tam giác ABC sao cho $\widehat{BAP}=\widehat{ACP}$ và $\widehat{CAP}=\widehat{ABP}$. Gọi M và N lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABP và ACP, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}+\frac{1}{AP}.$$

Lời giải. Gọi E là giao điểm của PM và AB; F là giao điểm của PN và AC. Từ giả thiết ta có $\Delta APB \backsim \Delta CPA$ (g.g), dẫn đến $\widehat{APB}=\widehat{APC}$ $=180^\circ-\widehat{BAC}$. Suy ra $\widehat{EPF}=\frac{1}{2}\left(\widehat{APB}+\widehat{APC}\right)$ $=180^\circ-\widehat{BAC}$. Do đó tứ giác $AEPF$ nội tiếp. Cũng từ $\widehat{APB}=\widehat{APC}$ ta thấy $\widehat{APE}=\widehat{APF}$ suy ra $AE=AF$.



Theo tính chất đường phân giác trong các tam giác AEP và AFP ta có $\frac{PM}{EM}=\frac{AP}{AE}=\frac{AP}{AF}=\frac{PN}{NF}\Rightarrow MN\,//\,EF$. Lại vì EF $=2AE.\sin\frac{\widehat{BAC}}{2}$ nên $MN=EF.\frac{PM}{PE}=\frac{EF.AP}{AP+AE}$ $=\frac{2AE.AP}{AP+AE}.\sin\frac{\widehat{BAC}}{2}$. Áp dụng định lí sin trong tam giác AMN ta được $\frac{1}{R}=\frac{2\sin\widehat{MAN}}{MN}$

$$=\frac{2}{MN}.\sin\frac{\widehat{BAC}}{2}=\frac{AP+AE}{AE.AP}=\frac{1}{AP}+\frac{1}{AE}\quad(1)$$

Mặt khác $AB.AP=AC.BP;\ AC.AP=AB.CP$ (do $\Delta APB \backsim \Delta CPA$), nên $AE=\frac{AB.AP}{BP+AP}$ $=AF=\frac{AC.AP}{AP+CP}$ (tính chất đường phân giác).

Từ đó suy ra

$$\frac{1}{AE}=\frac{1}{2}\left(\frac{BP+AP}{AB.AP}+\frac{AP+CP}{AC.AP}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}+\frac{BP}{AB.AP}+\frac{CP}{AC.AP}\right)=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}$$

(2). Từ (1) và (2) ta nhận được $\frac{1}{R}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}+\frac{1}{AP}$ (đpcm).❐

➤**Nhận xét.** Nhiều bạn giải đúng bài toán này. Xin nêu tên những bạn có lời giải gọn hơn cả:

Hà Nội: *Nguyễn Trọng Bách*, 12 Toán 1, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; **Hải Phòng**: *Lương Thế Sơn*, 10 Toán, THPT chuyên Trần Phú; **Hòa Bình**: *Đặng Hữu Hiếu*, 12 Toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ; **Vĩnh Phúc**: *Hoàng Đỗ Kiên*, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hưng Yên**: *Nguyễn Trung Hiếu*, *Nguyễn Thị Việt Hà*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Nam Định**: *Trần Phúc Tài*, 10 Toán 1; *Vũ Tuấn Anh*, 11 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thái Bình**: *Trịnh Thị Thùy Dương*, 11 Toán 1, THPT chuyên Thái Bình; **Nghệ An**: *Lê Kim Nhã*, *Lê Hồng Đức*, *Chu Thị Khánh Vân*, *Đậu Chi Mai*, *Nguyễn Văn Tiến*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; **Phú Yên**: *Lê Nhật Thăng*, 12 Toán, THPT chuyên Lương Văn Chánh, TP. Tuy Hòa; **Long An**: *Nguyễn Hữu Minh Nguyệt*, 11T; THPT chuyên Long An; **TP. Hồ Chí Minh**: *Đinh Đạt Thành*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

HỒ QUANG VINH

★ **Bài T9/424.** *Giải phương trình*

$$[x]^3 + 2x^2 = x^3 + 2[x]^2.$$

Kí hiệu $[t]$ chỉ số nguyên lớn nhất không lớn hơn số thực t.

Lời giải. Nhận thấy tất cả các số nguyên x đều là nghiệm của phương trình. Xét $x \notin \mathbb{Z}$, ta có

$$x^3 + 2[x]^2 - [x]^3 - 2x^2 = \left(x^3 - [x]^3\right) - 2\left(x^2 - [x]^2\right)$$
$= \left(x - [x]\right).A$, trong đó

$$A = x^2 + x.[x] + [x]^2 - 2\left(x + [x]\right).$$

Chú ý: +) Nếu $x < 0$ thì $[x] \le -1 \Rightarrow A > 0$.

+) Nếu $x \ge 2$ thì $[x] \ge 2$

nên $A = x(x-2) + [x]([x]-2) + x.[x] \ge x.[x] > 0$.

Từ đó suy ra nếu $x \notin \mathbb{Z}$ và x là nghiệm của phương trình thì $A = 0$ và $0 \le x < 2$. Bởi vậy hoặc $[x] = 0$ hoặc $[x] = 1$.

- $[x] = 0 \Rightarrow A = x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x \in \{0; 2\}$, loại vì $x \notin \mathbb{Z}$.
- $[x] = 1$ thì $1 \le x < 2$: $A = x^2 + x + 1 - 2x - 2$ $= x^2 - x - 1 = 0$

$\Rightarrow x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (thỏa mãn $1 \le x < 2$, $x \notin \mathbb{Z}$).

Vậy tất cả các nghiệm của phương trình là $x \in \mathbb{Z}$, $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. ❒

➤**Nhận xét.** Đây là bài toán phần nguyên dạng cơ bản, không quá khó. Hoan nghênh các bạn học sinh THCS sau tham gia và có lời giải đúng: **Phú Thọ**: *Nguyễn Quang Khải*, 9G, THCS Văn Lang, *Nguyễn Tiến Dũng*, *Phạm Minh Hải*, *Nguyễn Thanh Quang*, *Trương Anh Tú*, *Nguyễn Huy Tuyến*, 9A3, THCS Lâm Thao; **Hà Nội**: *Trịnh Huy Vũ*, 9A10, THCS Giảng Võ; **Vĩnh Phúc**: *Nguyễn Thị Nga*, 9A, THCS Yên Lạc.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★ **Bài T10/424.** *Cho một hình vuông có cạnh bằng 1. Bên trong hình vuông này có n $(n \in \mathbb{N}^*)$ hình tròn có tổng diện tích lớn hơn $n - 1$. Chứng minh rằng tồn tại một điểm của hình vuông nằm trong tất cả các hình tròn này.*

Lời giải. (Theo bạn *Chu Tự Tài*, 12A12, THPT Diễn Châu 2, **Nghệ An**).

Kí hiệu n hình tròn này là $C_1, C_2, \dots, C_n$ và H là hình vuông, theo giả thiết thì $C_i \subset H$ $(i = \overline{1,n})$. Kí hiệu $S(A)$ là diện tích của hình phẳng A. Ta có $S(C_i) = S(H) - S(H \setminus C_i) = 1 - S(H \setminus C_i)$.

Do đó $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} S(C_i) = n - \sum_{i=1}^{n} S(H \setminus C_i) > n - 1$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} S(H \setminus C_i) < 1 \quad (1)$$

Dễ thấy $S\left(\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \le \displaystyle\sum_{i=1}^{n} S(A_i)$. Do đó từ (1)

$$S\left(\bigcup_{i=1}^{n} (H \setminus C_i)\right) \le \sum_{i=1}^{n} S(H \setminus C_i) < 1 \quad (2)$$

Lại có $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} (H \setminus C_i) = H \setminus \bigcap_{i=1}^{n} C_i$. Do đó từ (2) ta có $S\left(H \setminus \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} C_i\right) < 1$.

Mà $S\left(H \setminus \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} C_i\right) = S(H) - S\left(\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} C_i\right) = 1 - S\left(\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} C_i\right)$.

Thành thử $S\left(\bigcap_{i=1}^{n} C_i\right) > 0$ nên $\bigcap_{i=1}^{n} C_i \neq \varnothing$.

Do đó tồn tại ít nhất một điểm $X \in \bigcap_{i=1}^{n} C_i$. Điểm X này nằm trong tất cả các hình tròn $C_1, C_2, ..., C_n$. ❒

➤**Nhận xét.** 1) Bạn *Hoàng Đỗ Kiên*, 12A1, THPT chuyên **Vĩnh Phúc** có nhận xét đúng rằng có thể thay hình tròn bởi một hình phẳng bất kì, vì trong chứng minh trên ta không cần dùng đến giả thiết C_i $(i=\overline{1,n})$ là các hình tròn.

2) Bài này có nhiều bạn tham gia giải và giải đúng nhưng đa số các lời giải là dài, phức tạp.

3) Các bạn sau đây có lời giải tốt: **Hà Nội**: *Nguyễn Trọng Bách*, 12 Toán 1, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; **Thừa Thiên-Huế**: *Nguyễn Quốc Hùng*, 11T1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Hải Phòng**: *Lương Thế Sơn*, 10 Toán, THPT chuyên Trần Phú; **Vĩnh Phúc**: *Nguyễn Đức Đại*, 10A1, *Hoàng Đỗ Kiên*, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★Bài T11/424. *Cho phương trình*

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0 \quad (1)$$

có n nghiệm số phân biệt. Chứng minh rằng

$$\frac{n-1}{n} > \frac{2a_0a_2}{a_1^2} \text{ (với } a_1 \neq 0\text{)}. \quad (2)$$

Lời giải. (Theo đa số các bạn).

Do phương trình (1) có n nghiệm nên $a_0 \neq 0$. Gọi $x_1, x_2, ..., x_n$ là các nghiệm của PT (1), khi đó PT (1) có dạng

$$a_0(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n) = 0 \quad (3)$$

Từ (1) và (3), suy ra

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + ... + x_n = -\dfrac{a_1}{a_0} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_1x_n + ... + x_{n-1}x_n = \dfrac{a_2}{a_0}. \end{cases} \quad (4)$$

Sử dụng đồng nhất thức

$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = (x_1 + x_2 + ... + x_n)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_1x_n + ... + x_{n-1}x_n)$, ta được

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = \frac{a_1^2 - 2a_0a_2}{a_0^2}. \quad (5)$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Bunyakovsky thì

$$n\left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2\right) > (x_1 + x_2 + ... + x_n)^2 \quad (6)$$

Đẳng thức không xảy ra vì các số $x_1, x_2, ..., x_n$ phân biệt. Từ (5) và (6), suy ra

$$\frac{n(a_1^2 - 2a_0a_2)}{a_0^2} \geq \left(-\frac{a_1}{a_0}\right)^2 \quad (7)$$

Do $a_1 \neq 0$ nên (7) $\Leftrightarrow \dfrac{n-1}{n} > \dfrac{2a_0a_2}{a_1^2}$.

Vậy bất đẳng thức (2) được chứng minh. ❒

➤**Nhận xét.** Đa số các bạn đều giải theo cách trên, tức là dựa vào công thức Viète để chứng minh bất đẳng thức (2). Bài toán đang xét chính là trường hợp riêng của bài toán cơ bản quen biết về ứng dụng định lí Rolle đối với đa thức thực. Có nhiều bạn đã biết về kết quả này nên đã ứng dụng đạo hàm liên tiếp bậc $n-2$ để đưa đa thức ở vế trái của (1) về tam thức bậc bai và sử dụng điều kiện để tam thức bậc hai có hai nghiệm phân biệt là $\Delta > 0$, đó chính là bất đẳng thức (2).

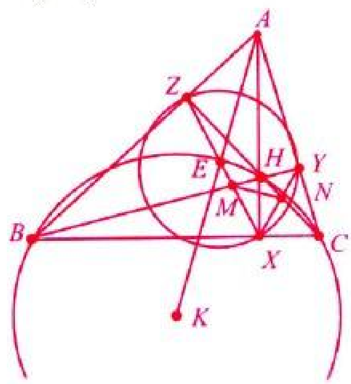
NGUYỄN VĂN MẬU

★Bài T12/424. *Cho tam giác ABC với đường tròn ngoại tiếp (O), đường tròn nội tiếp (I), tâm đường tròn bàng tiếp góc A là I_a. Đường thẳng AI cắt BC tại D. Đường thẳng BI cắt CA tại E. Đường thẳng qua I vuông góc với OI_a cắt AC tại M. Chứng minh rằng DE đi qua trung điểm của đoạn thẳng IM.*

Lời giải. Trước hết ta cần có hai bổ đề.

Bổ đề 1. Cho tam giác nhọn ABC, E là tâm đường tròn Euler. Các đường cao AX, BY, CZ đồng quy tại H. BH, CH theo thứ tự cắt XZ, XY tại M, N. Khi đó $AE \perp MN$.

Chứng minh (h.1).



Hình 1

Gọi (E) là đường tròn Euler của tam giác ABC; (K) là đường tròn ngoại tiếp của tam giác HBC.

Dễ thấy (E), A theo thứ tự là đường tròn Euler và trực tâm của tam giác HBC. Do đó, theo kết quả cơ bản về đường thẳng Euler, E là trung điểm của AK (1)

Mặt khác, vì $\widehat{BXH} = \widehat{BZH} = 90° = \widehat{CXH} = \widehat{CYH}$ nên các tứ giác $BXHZ$, $CXHY$ nội tiếp. Do đó

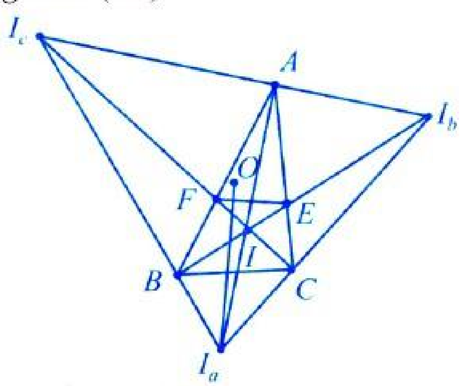
$$\begin{cases}\mathcal{P}_{M/(K)} = \overline{MB}.\overline{MH} = \overline{MX}.\overline{MZ} = \mathcal{P}_{M/(E)}\\ \mathcal{P}_{N/(K)} = \overline{NC}.\overline{NH} = \overline{NX}.\overline{NY} = \mathcal{P}_{N/(E)}\end{cases}$$

Suy ra $KE \perp MN$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AE \perp MN$.

***Bổ đề* 2.** Cho tam giác ABC; O, I_a theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp và tâm đường tròn bàng tiếp đối diện đỉnh A. Còn BE, CF là các đường phân giác trong của tam giác đó. Khi đó $I_aO \perp EF$.

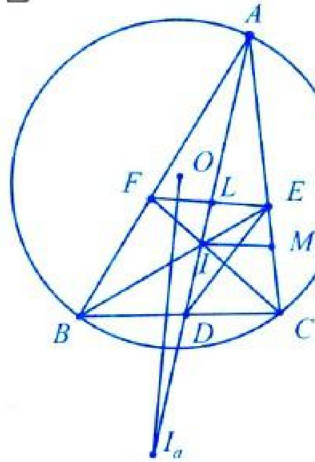
Chứng minh (h.2).



Hình 2

Gọi I, I_b, I_c theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp, tâm đường tròn bàng tiếp đối diện đỉnh B, tâm đường tròn bàng tiếp đối diện đỉnh C của tam giác ABC. Dễ thấy các điểm O, I theo thứ tự là tâm đường tròn Euler, trực tâm của tam giác $I_aI_bI_c$. Do đó, theo *Bổ đề* 1, $I_aO \perp EF$.

Trở lại giải bài toán **T12/424** (h.3). Gọi L là giao điểm của AD và EF. Dễ thấy $(IADL) = -1$ (kết quả quen thuộc). Do đó $E(BCDF) = E(IADL) = -1$ (*). Chú ý rằng, từ *Bổ đề* 2 có $I_aO \perp EF$, suy ra $IM \,//\, EF$. Từ (*), kết hợp với $IM \,//\, EF$, suy ra ED đi qua trung điểm của IM (theo tính chất của chùm điều hòa) (đpcm). ❐



Hình 3

➤**Nhận xét.** 1) Bài toán này không khó, nhiều bạn tham gia giải và có lời giải đúng, tuy nhiên, một số bạn cho lời giải quá dài.

2) Bổ đề 1 chính là bài toán **T9/355** (Tạp chí TH&TT số 355, tháng 1, năm 2007).

3) Không sử dụng Bổ đề 1, vẫn chứng minh được Bổ đề 2, bằng cách áp dụng kết quả sau đây cho các đường tròn (O), (I_a):

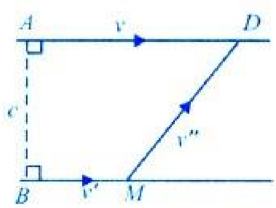
Cho hai đường tròn (O_1), (O_2) với trục đẳng phương Δ, M là điểm bất k,. H là hình chiếu của M trên Δ. Khi đó

$$\mathcal{P}_{M/(O_1)} - \mathcal{P}_{M/(O_2)} = 2\overline{O_1O_2}.\overline{HM}.$$

4) Xin nêu tên một số bạn có lời giải tương đối ngắn gọn: **Nghệ An:** *Lê Hồng Đức*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; **Hưng Yên**: *Dương Minh Cường*, 12T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thái Bình**: *Trịnh Thị Thuỳ Dương*, 11T1, THPT chuyên Thái Bình; **Thừa Thiên-Huế**: *Nguyễn Quốc Hùng*, 11T, *Phan Minh Châu*, 12T, THPT chuyên Quốc Học Huế; **Đà Nẵng**: *Nguyễn Tuấn Dũng*, 10T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Long An**: *Chu Thị Thu Hiền*, 11T, THPT chuyên Long An; **Hà Tĩnh**: *Phan Văn Trung*, 10T2, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Hà Nội**: *Nguyễn Đăng Quả*, 11T2, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; *Nguyễn Trọng Bách*, 12T1, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội.

NGUYỄN MINH HÀ

★Bài L1/424. *Cho sơ đồ như hình vẽ bên. Người thứ nhất đi từ A tới D với vận tốc* $v = 4$ m/s *và mất một khoảng thời gian*



là t. Người thứ hai đi từ B tới M với vận tốc $v' = 13$ m/s, rồi từ M tới D với vận tốc $v'' = 5$ m/s. Hai người khởi hành cùng một lúc và gặp nhau tại D. Cho $c = 540$m, $AD//BM$ và $AB \perp AD$. Hãy tìm

1) Khoảng thời gian t nhỏ nhất.

2) Độ dài AD, BM và MD.

Lời giải. a) Gọi t là thời gian từ lúc hai người khởi hành đến khi gặp nhau (tại điểm D), t_1 là thời gian để người thứ hai đi hết đoạn BM, ta có

$$BM = v't_1 = 13t_1 \quad (1)$$

$$MD = v''(t - t_1) = 5(t - t_1) \quad (2)$$

$$AD = v.t = 4t \quad (3)$$

Từ hình vẽ, ta có

$$AD = BM + \sqrt{MD^2 - c^2} \quad (4)$$

Thay (1), (2), và (3) vào (4) ta được

$$4t = 13t_1 + \sqrt{25(t - t_1)^2 - 540^2}$$

suy ra $t = \sqrt{25t_1^2 + 32400} - 3t_1$.

Lấy đạo hàm biểu thức trên theo t_1 rồi cho bằng 0 ta tìm được $t_1 = 27$(s), khi đó có

$t = t_{\min} = 144$(s).

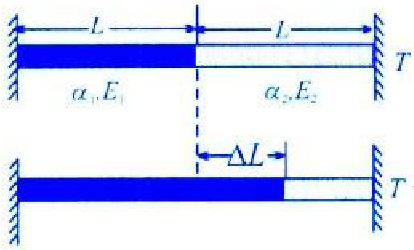
b) Thay t_1 và $t = t_{\min}$ vào (1), (2) và (3) ta tính được $AD = 576$(m), $BM = 351$(m),

$MD = 585$(m). ❐

➢Nhận xét. Các bạn sau có lời giải đúng và gọn: **Nghệ An**: *Trần Trung Hiếu*, 12A1, THPT Thái Hòa; *Nguyễn Xuân Cường*, 11T1, THPT Anh Sơn 1; *Hồ Sỹ Phương*, 11A1, THPT Hoàng Mai, *Nguyễn Thị Khánh Linh, Vũ Kiều Oanh*, 8A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Thanh Hóa**: *Lê Thị Quỳnh*, 11C1, THPT Hoằng Hóa IV; **Thái Nguyên**: *Tạ Văn Tuấn, Phạm Thanh Bình*, 11A1, THPT Lương Phú, Phú Bình; **Hòa Bình**: *Nguyễn Sỹ An* 10 Toán THPT chuyên Hoàng Văn Thụ; **Phú Yên**: *Lê Trường Hải*, 10T2, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Bắc Ninh**: *Nguyễn Đắc Nam*, 9C, THPT Nguyễn Cao, Quế Võ; **Hà Nội**: *Nguyễn Ngọc Linh*, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa; *Nguyễn Duy Khánh*, 12A1, THPT Ba Vì; **Đồng Tháp**: *Lê Duy Nhất, Nguyễn Quốc Chí*, 11A8, THPT Thành phố Cao Lãnh.

NGUYỄN XUÂN QUANG

★Bài L2/424. *Hai thanh vật liệu khác nhau nhưng có cùng một độ dài L và tiết diện ngang của S, được ghép hai đầu với nhau còn hai đầu kia cố định bằng các giá đỡ (hình vẽ). Nhiệt độ của chúng là T và không có sức căng ban đầu. Người ta nung chúng nóng lên để nhiệt độ cả hai thanh tăng lên thêm là ΔT.*



a) Chứng minh rằng mặt tiếp xúc giữa hai thanh di chuyển một đoạn $\Delta L = \left(\dfrac{\alpha_1 E_1 - \alpha_2 E_2}{E_1 + E_2}\right) L\Delta T$,

trong đó α_1, α_2 là hệ số nở dài và E_1, E_2 là suất Young của các vật liệu. Bỏ qua độ biến thiên của tiết diện ngang.

b) Tính lực căng tại mặt tiếp xúc khi tăng nhiệt độ lên ΔT.

Lời giải . a) Thanh thứ nhất nếu để nở tự do sẽ dài thêm là $\Delta L_{10} = \alpha_1 L\Delta T$. Ở đây nó chỉ dài thêm ΔL, vậy nó đã bị nén co lại là

$$\Delta L_1 = \Delta L_{10} - \Delta L = \alpha_1 L\Delta T - \Delta L \quad (1)$$

Thanh thứ hai nếu để nở tự do sẽ dài thêm là $\Delta L_{20} = \alpha_2 L\Delta T$. Ở đây nó lại bị co lại ΔL, vậy nó bị co lại tổng cộng là

$$\Delta L_2 = \Delta L_{20} + \Delta L = \alpha_2 L\Delta T + \Delta L \quad (2)$$

Mặt tiếp xúc giữa hai thanh nằm cân bằng nên áp suất ở hai bên của nó bằng nhau

$$\mathscr{P}_1 = \mathscr{P}_2 \quad (3)$$

Áp suất $\mathscr{P}_1$ do thanh bên trái đẩy lên thanh bên phải tại chỗ tiếp xúc là (chú ý tới (1))

$$\mathscr{P}_1 = \frac{F_1}{S} = \frac{\Delta L_1}{L}E_1 = E_1\alpha_1\Delta T - \frac{\Delta L}{L}E_1 \quad (4)$$

Áp suất $\mathscr{P}_2$ do thanh bên phải đẩy lên thanh bên trái tại chỗ tiếp xúc là (chú ý tới (2))

$$\mathscr{P}_2 = \frac{F_2}{S} = \frac{\Delta L_2}{L}E_2 = E_2\alpha_2\Delta T + \frac{\Delta L}{L}E_2 \qquad (5)$$

Thay (4), (5) vào (3), ta có

$$E_1\alpha_1\Delta T - \frac{\Delta L}{L}E_1 = E_2\alpha_2\Delta T + \frac{\Delta L}{L}E_2.$$

Qua vài phép biến đổi, ta được

$$\Delta L = \left(\frac{E_1\alpha_1 - E_2\alpha_2}{E_1 + E_2}\right)L.\Delta T \qquad (6)$$

b) Thay (6) vào (4) ta có

$$\mathscr{P}_1 = E_1\alpha_1\Delta T - E_1\Delta T\left(\frac{E_1\alpha_1 - E_2\alpha_2}{E_1 + E_2}\right).$$

Suy ra $\mathscr{P}_1 = \frac{F_1}{S} = \frac{E_1E_2\Delta T(\alpha_1 + \alpha_2)}{E_1 + E_2}.$

Vậy lực căng F_1 tại mặt tiếp xúc khi tăng nhiệt độ một khoảng ΔT là

$$F_1 = S\mathscr{P}_1 = \frac{SE_1E_2\Delta T(\alpha_1 + \alpha_2)}{E_1 + E_2}$$

➢**Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Quảng Ngãi: *Nguyễn Nhật Hãn*, 11 Lí, THPT chuyên Lê Khiết; **Tiền Giang:** *Võ Việt Tân*, 12 Lí, THPT chuyên Tiền Giang; **Hưng Yên:** *Nguyễn Hoài Nam*, 11A1, THPT Dương Quảng Hàm.

NGUYỄN VĂN THUẬN

CHUYỆN RẮN, CHUYỆN VĂN, CHUYỆN NGƯỜI

(Hoạ bài thơ xướng của tác giả Đào Tam đăng trên Tạp chí TH&TT số 427, tháng 1 năm 2013)

Rắn – Giặc đến nhà, đối sách đâu?
Trước tiên, hãy đánh dập bươu đầu!
"Đuổi Hươu, chém Rắn", tích Cao tổ[(1)]*,*
"Cõng Rắn cắn Gà", lụy My Châu![(2)]
"Thập cẩm" rau hoang, canh kẻ khó,
"Ngũ xà"[(3)] *rượu cốt, thuốc người giàu*[(4)]*!*
Chân thành mà sống, đừng gian trá
"Khẩu Phật tâm xà" dạ hiểm sâu!

NGUYỄN KHẮC PHI
(NXBGD Việt Nam)

Chú thích:

(1) *Đuổi Hươu, chém Rắn"*: Điển tích nói về việc Hán Cao tổ Lưu Bang diệt Tần. Xem bài "Về thành ngữ, điển tích *Chém Rắn, đuổi hươu"* của Nguyễn Khắc Phi trong Tạp chí Văn học &Tuổi trẻ số 1 năm 2013 và Tạp chí Ngôn ngữ số 2 năm 2013.

(2) Nhắc đến việc My Châu đã phải trả giá đắt cho tội "mất cảnh giác" vì mối tình giữa nàng với Trọng Thuỷ.

(3) *Ngũ xà* gồm 5 loại rắn (Hổ Mang, Hổ Thiếc, Cạp Nong, Cạp Nia, Rắn Ráo), bộ rắn thường được ngâm vào rượu tốt làm thuốc bổ, song cũng có ý kiến cho rằng nếu xử lí không đúng quy cách lại rất nguy hiểm tới sức khoẻ con người.

(4) "Kẻ khó", "người giàu": Mượn lối đối chữ trong câu thành ngữ "Kẻ khó giữ đầu, người giàu giữ của".

PROBLEMS...(*Tiếp trang 17*)

T4/428. Let a, b, c be real numbers in the interval $[1; 2]$. Prove the inequality

$$a^2+b^2+c^2+3\sqrt[3]{(abc)^2}\geq 2(ab+bc+ca).$$

T5/428. Let ABC be a non-right triangle, ($AB<AC$) with altitude AH. E, F are the orthorgonal projection of point H onto theo AB and AC respectively. EF meets BC at D. Draw a semicircle with diameter CD on the half-plane containing A with edge CD. The line through B and perpendicular to CD meets the semicircle at K. Prove that DK is tangent to the circumcircle of triangle KEF.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/428. Given that the equation

$ax^3-x^2+ax-b=0$ ($a\neq 0$, $a\neq b$) has three positive real roots. Determine the greatest value of the following expression

$$P=\frac{11a^2-3\sqrt{3}ab-\dfrac{1}{3}}{9b-10\left(\sqrt{3}a-1\right)}.$$

T7/428. Solve the following system of equations

$$\begin{cases}\sqrt{x-\dfrac{1}{4}}+\sqrt{y-\dfrac{1}{4}}=\sqrt{3}\\ \sqrt{y-\dfrac{1}{16}}+\sqrt{z-\dfrac{1}{16}}=\sqrt{3}\\ \sqrt{z-\dfrac{9}{16}}+\sqrt{x-\dfrac{9}{16}}=\sqrt{3}.\end{cases}$$

T8/428. Let a, b be real constants such that $ab>0$. Let (u_n) be a sequence where $n=1,2,3,\dots$ given by $u_1=a; u_{n+1}=u_n+bu_n^2$ $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$. Determine the limit

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{u_1}{u_2}+\frac{u_2}{u_3}+\dots+\frac{u_n}{u_{n+1}}\right).$$

TOWARD MATHEMATICAL OLYMPIAD

T9/428. Find all positive integers k with the property that there exists a polynomial $f(x)$ with integer coefficients of degree greater than 1 such that for all prime numbers p and natural numbers a, b, if p divides $(ab-k)$ then it also divides $(f(a)f(b)-k)$.

T10/428. Given $a_i\in[0;\alpha]$ $(i=\overline{1,n})$, $(\alpha>0)$. Prove the inequality

$$\prod_{i=1}^{n}(\alpha-a_i)\leq\alpha^n\left(1-\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{S_i+\alpha}\right)$$

where $S_i=\sum_{k=1}^{n}a_k-a_i$ for all $i=\overline{1,n}$.

T11/428. Point O is in the interior of triangle ABC. The ray Ox parallel to AB meets BC at D, ray Oy parallel to BC meets CA at E, ray Oz parallel to CA meets AB at F. Prove that

a) $S_{DEF}\leq\frac{1}{3}S_{ABC}$;

b) $OD.OE.OF\leq 27.AB.BC.CA$.

T12/428. The circles (O) and (O') meet at points A, B. Point C is fixed on (O) and point D is fixed on (O'). A moving point P is on the opposite ray of ray BA. The circumcircles of triangles PBC, PBD intersect BD, BC at second points E, F respectively. Prove that the midpoint of line segment EF is always on a fixed straight line.

Translated by LE MINH HA

DIỄN ĐÀN DẠY HỌC TOÁN

DÃY TRUY HỒI TRÊN MÁY TÍNH CẦM TAY

TẠ DUY PHƯỢNG
(Viện Toán học)

Dãy truy hồi là dạng toán thường gặp trong các kì thi học sinh giỏi *Giải toán trên máy tính*. Theo quy trình lập sẵn, máy tính cầm tay có thể dễ dàng tính chính xác các số hạng của dãy truy hồi đến 10 chữ số. Điều này trợ giúp nghiên cứu các tính chất của dãy số. Quy trình tính toán trên máy tính cầm tay là một bài toán lập trình đơn giản, vì vậy thành thạo tính truy hồi trên máy tính cầm tay giúp hình thành tư duy thuật toán và tiếp cận với lập trình trên máy tính lớn.

I DÃY TRUY HỒI DẠNG $x_{n+1} = f(x_n)$

Nhiều dãy số đã được học trong chương trình phổ thông có dạng $x_{n+1} = f(x_n)$. Thí dụ, *cấp số cộng* $x_{n+1} = x_n + d$ với d là một số không đổi (được gọi là *công sai*); *cấp số nhân* $x_{n+1} = qx_n$ với q là một số không đổi (được gọi là *công bội*),... Với x_1 cho trước, ta dễ dàng tính được $x_2 = f(x_1)$. Tiếp tục, bằng cách *lặp*, ta tính được các giá trị $x_3 = f(x_2)$, $x_4 = f(x_3)$,... theo *công thức truy hồi* $x_{n+1} = f(x_n)$.

★Thí dụ 1. *Tính các giá trị của x_n biết $x_1 = 1,5$ và $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$, $n = 1,2,...$ (*)*

Quy trình. *Bước 1.* Khai báo x_1 $\boxed{=}$: 1.5 $\boxed{=}$

Bước 2. Khai báo công thức $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$:

$\boxed{(}$ $\boxed{\text{Ans}}$ $\boxed{+}$ 2 $\boxed{\div}$ $\boxed{\text{Ans}}$ $\boxed{)}$ $\boxed{\div}$ 2

Bước 3. Tính x_2 : Bấm phím $\boxed{=}$

Giải thích 1) Máy được thiết kế để sau khi khai báo 1.5 $\boxed{=}$, dữ liệu $x_1 = 1,5$ *hiển thị trên màn hình* và được *lưu trong ô nhớ* $\boxed{\text{Ans}}$.

2) Bước 2 là một *quy trình* giúp máy hiểu và thực hiện *tính toán theo chương trình*. Công thức toán được chuyển sang ngôn ngữ máy.

3) Phím $\boxed{=}$: Máy tính giá trị $x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{2}{x_1}\right)$ với $x_1 = 1,5$. Kết quả $x_2 \approx 1.416666667$ được lưu vào ô nhớ $\boxed{\text{Ans}}$ (đè lên $x_1 = 1,5$). Bấm liên tiếp phím $\boxed{=}$ ta được $x_3 \approx 1.414215686$; $x_4 \approx 1.414213562$. Nếu bấm tiếp phím $\boxed{=}$, ta vẫn chỉ được đáp số trên. Như vậy, $\overline{x} \approx 1.414213562$ là *giá trị gần đúng* đến 10 chữ số *giới hạn* của dãy (*).

Nếu sử dụng máy tính với số chữ số trên màn hình nhiều hơn, thí dụ, *Calculator* cài đặt trên máy tính cá nhân hiển thị được 32 chữ số, thì có thể tính chính xác hơn giới hạn của dãy (*), tuy nhiên, cũng mất nhiều bước lặp hơn.

4) Công thức (*) chính là công thức Newton-Raphson tính gần đúng nghiệm dương của phương trình $x^2 = 2$, tức là tính gần đúng số vô tỉ $\overline{x} = \sqrt{2}$. Thay đổi giá trị ban đầu x_1, ta thấy số bước cần tính phụ thuộc vào x_1.

Thí dụ này trợ giúp hình thành *khái niệm số vô tỉ* (là *giới hạn* của dãy số hữu tỉ) cho học sinh lớp 9 và hình thành *khái niệm giải gần đúng* phương trình cho học sinh lớp 12.

II. DÃY TRUY HỒI DẠNG $x_{n+2} = f(x_n, x_{n+1})$

Để tính được x_3, sau đó là $x_4, x_5, ...$, ta phải biết hai dữ liệu đầu vào x_1 và x_2.

1. *Dãy Fibonacci* $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, $x_1 = x_2 = 1$.

Bằng quy nạp, có thể chứng minh công thức

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Quy trình tính số Fibonacci:

Gửi $x_2 = 1$ vào ô $\boxed{A}$: 1 $\boxed{SHIFT}$ $\boxed{STO}$ $\boxed{A}$

Tính $x_3 = x_2 + x_1$ và gửi vào ô nhớ $\boxed{B}$:

$\boxed{+}$ 1 $\boxed{SHIFT}$ $\boxed{STO}$ $\boxed{B}$ màn hình hiện $x_3 = 2$.

Tính $x_4 = x_3 + x_2$ và gửi vào ô nhớ $\boxed{A}$:

$\boxed{+}$ $\boxed{ALPHA}$ $\boxed{A}$ $\boxed{SHIFT}$ $\boxed{STO}$ $\boxed{A}$ màn hình hiện $x_4 = 3$.

Tính $x_5 = x_4 + x_3$ và gửi vào ô nhớ $\boxed{B}$:

$\boxed{+}$ $\boxed{ALPHA}$ $\boxed{B}$ $\boxed{SHIFT}$ $\boxed{STO}$ $\boxed{B}$ màn hình hiện $x_5 = 5$.

Lặp lại hai dãy phím trên, ta lần lượt tính được 49 số hạng đầu tiên của dãy Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,..., 7778742049.

2. *Dãy Lucas* $x_{n+2} = Ax_{n+1} + Bx_n$, $x_1 = a, x_2 = b$.

Quy trình 1. Tính số Lucas:

Gửi $x_2 = b$ vào $\boxed{A}$: b $\boxed{SHIFT}$ $\boxed{STO}$ $\boxed{A}$

Tính $x_3 = Ax_2 + Bx_1$ và gửi vào ô nhớ $\boxed{B}$:

$\boxed{\times}$ A $\boxed{+}$ B $\boxed{\times}$ a $\boxed{SHIFT}$ $\boxed{STO}$ $\boxed{B}$

Tính $x_4 = Ax_3 + Bx_2$ và gửi vào ô $\boxed{A}$:

$\boxed{\times}$ A $\boxed{+}$ $\boxed{ALPHA}$ $\boxed{A}$ $\boxed{\times}$ B $\boxed{SHIFT}$ $\boxed{STO}$ $\boxed{A}$

Tính $x_5 = Ax_4 + Bx_3$ và gửi vào ô $\boxed{B}$:

$\boxed{\times}$ A $\boxed{+}$ $\boxed{ALPHA}$ $\boxed{B}$ $\boxed{\times}$ B $\boxed{SHIFT}$ $\boxed{STO}$ $\boxed{B}$

Lặp lại hai dãy phím cuối để lần lượt tính các số hạng đầu của dãy Lucas.

Dưới đây là hai trong các quy trình khác:

Quy trình 2. Gửi biến đếm vào ô nhớ $\boxed{M}$ (bắt đầu đếm từ 0): 0 $\boxed{SHIFT}$ $\boxed{STO}$ $\boxed{M}$

Gửi $x_1 = a$ vào $\boxed{A}$: a $\boxed{SHIFT}$ $\boxed{STO}$ $\boxed{A}$

Gửi $x_2 = b$ vào $\boxed{B}$: b $\boxed{SHIFT}$ $\boxed{STO}$ $\boxed{B}$

Tăng biến đếm M:

$\boxed{ALPHA}$ $\boxed{M}$ $\boxed{ALPHA}$ $\boxed{=}$ $\boxed{ALPHA}$ $\boxed{M}$ $\boxed{+}$ 1

Tính x_3 theo công thức $x_3 = Ax_2 + Bx_1$:

$\boxed{ALPHA}$ $\boxed{:}$ $\boxed{ALPHA}$ $\boxed{A}$ $\boxed{ALPHA}$ $\boxed{=}$ $\boxed{ALPHA}$ $\boxed{B}$ $\boxed{+}$ B $\boxed{ALPHA}$ $\boxed{A}$

Tăng biến đếm M: $\boxed{ALPHA}$ $\boxed{:}$ $\boxed{ALPHA}$ $\boxed{M}$ $\boxed{ALPHA}$ $\boxed{=}$ $\boxed{ALPHA}$ $\boxed{M}$ $\boxed{+}$ 1

Tính x_4 theo công thức $x_4 = Ax_3 + Bx_2$:

$\boxed{ALPHA}$ $\boxed{:}$ $\boxed{ALPHA}$ $\boxed{B}$ $\boxed{ALPHA}$ $\boxed{=}$ $\boxed{ALPHA}$ $\boxed{A}$ $\boxed{+}$ B $\boxed{ALPHA}$ $\boxed{B}$

Liên tục bấm phím $\boxed{=}$ ta lần lượt tìm được thứ tự n (M = M+1) và giá trị x_n tương ứng.

Chú ý. Để làm việc trong *môi trường đại số* ta phải sử dụng phím $\boxed{ALPHA}$. Đặc biệt, phải khai báo dấu = bởi $\boxed{ALPHA}$ $\boxed{=}$. Nếu chỉ khai báo $\boxed{=}$ thì máy báo lỗi. Khai báo $\boxed{ALPHA}$ $\boxed{:}$ là để *ngăn cách* các biểu thức.

Quy trình 3. (Sử dụng phím $\boxed{CALC}$) Bấm:

$\boxed{ALPHA}$ $\boxed{A}$ $\boxed{ALPHA}$ $\boxed{=}$ A $\boxed{\times}$ $\boxed{ALPHA}$ $\boxed{B}$ $\boxed{+}$ B $\boxed{\times}$ $\boxed{ALPHA}$ $\boxed{A}$ $\boxed{ALPHA}$ $\boxed{:}$ $\boxed{ALPHA}$ $\boxed{B}$ $\boxed{ALPHA}$ $\boxed{=}$ A $\boxed{\times}$ $\boxed{ALPHA}$ $\boxed{A}$ $\boxed{+}$ B $\boxed{\times}$ $\boxed{ALPHA}$ $\boxed{B}$ $\boxed{CALC}$

Máy hỏi: B? Khai báo $x_2 = b$: b $\boxed{=}$

Máy hỏi: A? Khai báo $x_1 = a$: a $\boxed{=}$

Lặp lại phím $\boxed{=}$ được các số hạng x_n.

Tương tự, có thể viết quy trình tính các dãy truy hồi các dạng sau trên các máy *Casio fx-500MS*, *Vinacal 570-ES* và các máy tương đương.

3. *Dãy Fibonacci tuyến tính bậc ba*

$u_1 = u_2 = 1,\ u_3 = 2,\ u_{n+1} = u_n + u_{n-1} + u_{n-2}\ \ n \geq 3.$

4. *Dãy Lucas suy rộng tuyến tính không thuần nhất*

$u_1 = a,\ u_2 = b,\ u_{n+1} = Au_n + Bu_{n-1} + f(n).$

5. *Dãy Fibonacci bậc hai phi tuyến dạng*

$u_1 = a,\ u_2 = b,\ u_{n+1} = u_n^2 + u_{n-1}^2.$

BÀI TẬP

Dưới đây chỉ là *một số* trong *rất nhiều* đề thi về dãy truy hồi. Ngoài các câu hỏi về *lập công thức truy hồi* và *quy trình bấm phím* tính số hạng của dãy số, còn có những câu hỏi về *chuyển đổi công thức truy hồi* về *công thức nghiệm* và ngược lại, các câu hỏi về *tính chất của dãy số*,... Bạn đọc có thể tìm thêm đề thi trên mạng hoặc trong các sách về máy tính.

Bài 1 (**Bộ GD-ĐT, 2000, Lớp 9**) Cho dãy số

$$u_1 = 144;\quad u_2 = 233;\quad u_{n+1} = u_n + u_{n-1}.$$

1) Lập một quy trình bấm phím để tính u_{n+1}.

2) Tính u_{12}, u_{37}, u_{38} và u_{39}.

3) Tính chính xác đến 5 chữ số sau dấu phẩy các tỉ số $\frac{u_2}{u_1}, \frac{u_3}{u_2}, \frac{u_4}{u_3}, \frac{u_6}{u_5}$.

Bài 2 (**Bộ GD - ĐT, lớp 9, 2003**) Cho dãy số

$u_1 = 2, u_2 = 20, u_{n+1} = 2u_n + u_{n-1},\ n = 2,3,...$

1) Tính u_3, u_4, u_5, u_6, u_7.

2) Viết quy trình tính giá trị của u_n, $n = 3,...$

3) Tính $u_{22}, u_{23}, u_{24}, u_{25}$.

Bài 3 (**Bộ GD-ĐT, THCS, 2007**) Cho dãy số

$$u_n = \frac{(13+\sqrt{3})^n - (13-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}},\quad n = 1,2,3,...$$

1) Tính 8 số hạng đầu tiên của dãy.

2) Lập công thức tính u_{n+2} theo u_{n+1} và u_n.

3) Lập quy trình bấm phím liên tục tính u_n.

Bài 4 (**Bộ GD-ĐT, THCS, 2009**) Cho dãy số

$$U_n = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n}{2\sqrt{2}}\quad \text{với}\quad n = 1,2,...$$

1) Chứng minh rằng

$$U_{n+1} = 2U_n + U_{n-1}\quad \forall n \geq 2.$$

2) Lập quy trình bấm phím liên tục tính U_{n+1} theo U_n và U_{n-1} với $U_1 = 1, U_2 = 2$.

3) Tính các giá trị từ U_{11} đến U_{20}.

Bài 5 (**Bộ GD-ĐT, THCS, 2008**) Cho dãy số

$U_1 = 2,\ U_2 = 3,\ U_{n+1} = 3U_n + 2U_{n-1} + 3,\ n \geq 2.$

1) Lập quy trình bấm phím tính U_{n+1}.

2) Tính U_3, U_4, U_5, U_{10} và U_{19}.

Bài 6 (**Bộ GD-ĐT, lớp 12 TH Bổ túc, 2011**)

Tính tổng 12 số hạng đầu của dãy số

$a_1 = 5, a_2 = 3, a_{n+2} = 4a_{n+1} + 5a_n, n = 1,2,...$

Bài 7 (**Chọn đội tuyển, Sở GD-ĐT Lâm Đồng, 2004**)

Cho $u_1 = u_2 = 7$, $u_{n+1} = u_n^2 + u_{n-1}^2, \forall n \geq 2$.

Tính u_7.

Bài 8 (**Sở GD-ĐT Thừa Thiên - Huế, THCS, 2007**)

1) Cho dãy số

$$u_n = \frac{\left(6+2\sqrt{7}\right)^n - \left(6-2\sqrt{7}\right)^n}{4\sqrt{7}}\quad \text{với } n=1,2,3,...$$

1a) Tính $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8$.

1b) Lập công thức tính u_{n+1} theo u_n và u_{n-1}.

2) Hai dãy số được cho bởi

$$\begin{cases} u_1 = 1;\quad v_1 = 2 \\ u_{n+1} = 22v_n - 15u_n \quad \text{với } n = 1, 2, 3,\ldots \\ v_{n+1} = 17v_n - 12u_n \end{cases}$$

2a) Tính $u_5, u_{10}, u_{15}, u_{18}, u_{19}; v_5, v_{10}, v_{15}, v_{18}, v_{19}$.

2b) Viết quy trình tính u_{n+1} và v_{n+1} theo u_n và v_n.

Bài 9 (**Sở GD-ĐT Đồng Nai, lớp 9, 2004-2005**)

Cho dãy số $u_1, u_2, ..., u_n, u_{n+1}, ...$ thỏa mãn $u_n + u_{n+1} = u_{n+2}, \forall n \geq 1$ và $u_2 = 3; u_{50} = 30$.

Tính giá trị của $S = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{48}$.

CÔNG TRÌNH GIẢI MÃ của nhà toán học Francois Viète

PHAN THANH QUANG
(TP. Hồ Chí Minh)

Francois Viète (1540 - 1603) là một nhà toán học, luật sư, chính trị gia người Pháp. Ông là người đầu tiên đề ra cách giải thống nhất các phương trình bậc hai, ba và bốn. Là người sáng tạo nên cách dùng các chữ cái để thể hiện cho các ẩn số của một phương trình. Ông khám phá ra mối quan hệ giữa các nghiệm của một đa thức với các hệ số của đa thức đó, ngày nay được gọi là Định lí Viète. Ông tham gia làm ủy viên Hội đồng Cơ mật dưới thời Vua Henry III và Henry IV.

Theo sử sách thì vị tướng chỉ huy Moes dùng đến 500 chữ trong mật thư gửi đến Vua Tây Ban Nha Philip II vào ngày 28 tháng 10 năm 1589. Tháng 3 năm 1590 Viète gửi bản giải mã bức thư đó lên Vua Pháp Henry IV. Nhờ đó Pháp đã giành thắng lợi trong chiến tranh với Tây Ban Nha. Mật mã như thế nào? Giải mã ra sao? Sau đây trình bày cách lập *mã khóa* và *giải mã* của Viète đã được "Việt hóa" cho bạn đọc dễ hiểu.

Trước hết lập bảng ô vuông (23 hàng, 23 cột) với hàng trên cùng và cột bên trái ghi thứ tự 23 chữ cái là A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, X, Y. Theo quy luật đó viết được các chữ cái trong bảng như sau

A	B	C	D	E	F	G	H	I	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	X	Y
B	C	D	E	F	G	H	I	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	X	Y	A
C	D	E	F	G	H	I	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	X	Y	A	B
D	E	F	G	H	I	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	X	Y	A	B	C
E	F	G	H	I	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	X	Y	A	B	C	D
F	G	H	I	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	X	Y	A	B	C	D	E
G	H	I	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	X	Y	A	B	C	D	E	F
H	I	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	X	Y	A	B	C	D	E	F	G
I	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	X	Y	A	B	C	D	E	F	G	H
K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	X	Y	A	B	C	D	E	F	G	H	I
L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	X	Y	A	B	C	D	E	F	G	H	I	K
M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	X	Y	A	B	C	D	E	F	G	H	I	K	L
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	X	Y	A	B	C	D	E	F	G	H	I	K	L	M
O	P	Q	R	S	T	U	V	X	Y	A	B	C	D	E	F	G	H	I	K	L	M	N
P	Q	R	S	T	U	V	X	Y	A	B	C	D	E	F	G	H	I	K	L	M	N	O
Q	R	S	T	U	V	X	Y	A	B	C	D	E	F	G	H	I	K	L	M	N	O	P
R	S	T	U	V	X	Y	A	B	C	D	E	F	G	H	I	K	L	M	N	O	P	Q
S	T	U	V	X	Y	A	B	C	D	E	F	G	H	I	K	L	M	N	O	P	Q	R
T	U	V	X	Y	A	B	C	D	E	F	G	H	I	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
U	V	X	Y	A	B	C	D	E	F	G	H	I	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
V	X	Y	A	B	C	D	E	F	G	H	I	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
X	Y	A	B	C	D	E	F	G	H	I	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
Y	A	B	C	D	E	F	G	H	I	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	X

Giữa hai người cùng phe (bí mật) thống nhất với nhau một "mã khóa". Chẳng hạn mã khóa là "**HANOI**", từ đó có dãy khóa "**HANOIHA NOI**...". Giả sử thông điệp mật muốn gửi là "VE SAI GON GAP". Xét cột chữ bắt đầu bằng H (chữ đầu của khóa **HANOI**), ta thấy chữ V nằm ở hàng bắt đầu bằng chữ O. Do đó thay vì viết V thì mật mã viết O (Theo ngôn ngữ toán học thì V là tọa độ của điểm (**H**, O) hay viết V(**H**, O)). Tiếp tục muốn gửi chữ E thì xét cột chữ bắt đầu bằng A (chữ thứ hai của **HANOI**), ta thấy chữ E nằm ở hàng bắt đầu bằng chữ E, nên vẫn viết chữ E. Với cách làm như vậy thì thông điệp "VE SAI GON GAP" được viết thành "OE FLA YOA RQH". Khi nhận được dòng mật mã này, người giải mã đã dùng bảng trên và từ khóa để tìm ra thông điệp "VE SAI GON GAP" bằng cách V(**H**, O), E(**A**, E), S(**N**, F), A(**O**, L), I(**I**, A), G(**H**, Y), O(**A**, O), N(**N**, A), G(**O**, R), A(**I**, Q), P(**H**, H), trong đó các chữ in đậm nối với nhau tạo thành dãy khóa **HANOIHANOI**....Nói tóm lại, thuật toán ở đây là:

Người gửi: Gửi "tung độ"; *Người nhận*: Nhận tung độ rồi dùng mã khóa làm hoành độ để giải mã, xác định "tọa độ". Điều quan trọng ở đây là phải dò tìm được *mã khóa*. Không tìm được mã khóa xem như bó tay! Mời các bạn hãy thử đánh mật mã thông điệp "CHUC MUNG NAM MOI QUY TY" với mã khóa "**TOANHOCVATUOITRE**" nhé!

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 428 (2.2013)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.35121607
ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

Ảnh Bìa 1 (*từ trái sang phải*): GS. *Phạm Minh Hạc*, GS. *Trần Hồng Quân*, Phó Thủ Tướng *Nguyễn Thiện Nhân*, Nguyên Phó Chủ tịch nước *Nguyễn Thị Bình*, GS. *Nguyễn Minh Hiển*, GS. *Phạm Vũ Luận* (Sáu Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo qua các thời kì) và NGƯT *Ngô Trần Ái*.

Ảnh: *Phan Ngọc Quang*

Biên tập: NGUYỄN PHÚC *Mĩ thuật:* QUỐC HIỆP, THANH LONG
Trị sự, phát hành: NGUYỄN KHOA ĐIỀM, VŨ ANH THƯ *Chế bản:* NGUYỄN THỊ TRANG

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

BỘ SÁCH GIẢI TÍCH VECTƠ

Giải tích vectơ là một nội dung quan trọng và có nhiều ứng dụng trong chương trình Giải tích, nó bao gồm *Trường vectơ, Tích phân đường* và *Tích phân mặt*, ngoài ra nó còn đề cập đến *Phép tính vi phân của hàm vectơ nhiều biến số và các dạng vi phân*, mà một số giáo trình nước ngoài xem như là phần nghiên cứu nâng cao. Nhiều khái niệm và vấn đề trong Giải tích vectơ không dễ tiếp nhận, nhất là đối với bạn đọc mới làm quen với nội dung này.

Số trang : 468
Khổ sách : 17x24
Giá : 93.000 đồng

Tác giả PGS.TS. *Nguyễn Xuân Liêm* là một nhà khoa học có uy tín trong lĩnh vực này, đồng thời là một nhà sư phạm tâm huyết, sau nhiều năm giảng dạy và nghiên cứu đã biên soạn bộ sách gồm hai quyển ***Giải tích vectơ*** và ***Bài tập Giải tích vectơ*** theo một hướng tiếp cận mới, hiện đại, mang tính ứng dụng cao nhằm tạo thuận lợi và giảm bớt khó khăn cho bạn đọc trong việc tiếp cận, học tập và nghiên cứu các vấn đề của Giải tích vectơ. ***Giải tích vectơ*** gồm bảy chương và tương ứng với nó là ***Bài tập Giải tích vectơ*** với những bài tập có nội dung phong phú, được tuyển chọn công phu và sắp xếp khoa học, hỗ trợ bạn đọc hiểu vấn đề nêu ra trong lí thuyết một cách thực chất và sâu sắc hơn.

Bộ sách là tài liệu hữu ích, có thể được sử dụng rộng rãi cho nhiều đối tượng, từ sinh viên các khoa Toán, Lí và các khoa khác của các trường Đại học Sư phạm và các trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Bách khoa và các trường Kĩ thuật,... đến các nghiên cứu sinh, giáo viên các ngành Toán, Lí và tất cả bạn đọc yêu thích, quan tâm đến *Giải tích vectơ*.

Số trang : 380
Khổ sách : 17x24
Giá : 68.000 đồng

Bạn đọc có thể mua sách tại các Công ty Sách - Thiết bị trường học ở các địa phương hoặc các cửa hàng sách của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam:

*** Tại TP. Hà Nội:** 187 Giảng Võ ; 14/3 Nguyễn Khánh Toàn ; 232 Tây Sơn ; 25 Hàn Thuyên ; 51 Lò Đúc ; 45 Hàng Chuối ; 67B Cửa Bắc ; 45 Phố Vọng ; Ngõ 385 Hoàng Quốc Việt.

*** Tại TP. Đà Nẵng:** 78 Pasteur ; 247 Hải Phòng ; 71 Lý Thường Kiệt.

*** Tại TP. Hồ Chí Minh:** 2A Đinh Tiên Hoàng, quận 1; 231 Nguyễn Văn Cừ ; 240 Trần Bình Trọng, quận 5; 116 Đinh Tiên Hoàng, quận Bình Thạnh.

*** Tại TP. Cần Thơ:** 162D đường 3 tháng 2, quận Ninh Kiều.

*** Tại Website bán hàng trực tuyến: www.sach24.vn**

Website: www.nxbgd.vn

LỄ KỈ NIỆM 55 NĂM THÀNH LẬP NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Ngày 20 tháng 1 năm 2013 vừa qua, tại Hội trường A Bộ Giáo dục và Đào tạo, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam đã trọng thể tổ chức Lễ kỉ niệm 55 năm ngày thành lập và đón nhận **Huân chương Lao động hạng Nhất** lần thứ hai vì những thành tích đạt được trong 5 năm (2007 - 2012). Nguyên Phó Chủ tịch nước *Nguyễn Thị Bình* và Phó Thủ tướng *Nguyễn Thiện Nhân* đến dự. Buổi lễ còn có sự hiện diện của Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo *Phạm Vũ Luận*, các Thứ trưởng: *Nguyễn Vinh Hiển, Nguyễn Thị Nghĩa, Bùi Văn Ga* và Lãnh đạo Bộ qua các thời kì. Nhân dịp này, Chủ tịch nước CHDCND Lào đã trao tặng **Huân chương Hữu nghị Việt - Lào** cho NXBGD Việt Nam về những đóng góp quan trọng đối với sự nghiệp giáo dục - đào tạo của nước bạn Lào anh em.

Phó Thủ tướng Chính phủ *Nguyễn Thiện Nhân* trao Huân chương Lao động hạng Nhất cho NXBGD Việt Nam

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ xin trân trọng giới thiệu một số hình ảnh về Lễ Kỉ niệm và Hội thi Văn nghệ - Thể thao chào mừng Kỉ niệm 55 năm thành lập Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.

Thứ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo *Nguyễn Thị Nghĩa* động viên các vận động viên trước giờ thi đấu

Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam *Ngô Trần Ái* đón nhận Huân chương Hữu nghị Việt - Lào

Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam *Ngô Trần Ái* trao Cúp Vô địch Bóng đá cho đội miền Trung

Tiết mục múa "Những cánh hoa xuân" của đội miền Bắc đoạt giải Nhất trong Hội thi

ISSN : 0866-8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT02M3

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 2 năm 2013

Giá: 8000 đồng
Tám nghìn đồng