BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ❄ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ

NĂM THỨ 35 - RA HÀNG THÁNG
Số 3 (249)
1998

ĐẠI SỐ LÀ GÌ?

NHỮNG KHÍA CẠNH THÚ VỊ CỦA NHỮNG BÀI TOÁN ĐƠN GIẢN

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
MATHEMATICS AND YOUTH

MỤC LỤC

Trụ sở tòa soạn :
25 Hàn Thuyên, Hà Nội ĐT : 8.262477
231 Nguyễn Văn Cừ, TP Hồ Chí Minh ĐT: 8.356111

Biên tập và trị sự : VŨ KIM THỦY
LÊ THỐNG NHẤT
Trình bày : NGUYỄN THỊ OANH

Dành cho các bạn

TRUNG HỌC CƠ SỞ

Khai thác một BÀI TOÁN

ĐÀM HIẾU CHIẾN
(THCS Trưng Vương - Hà Nội)

Để có thể phát triển khả năng tư duy và sáng tạo trong việc học toán và giải toán, thì việc tìm ra kết quả của một bài toán chưa có thể coi là kết thúc được, mà cần phải tiến hành khai thác, "mổ xẻ" và phân tích bài toán đó.

Nhưng khai thác một bài toán như thế nào lại là một vấn đề. Chúng ta có thể bắt đầu từ một bài toán sau:

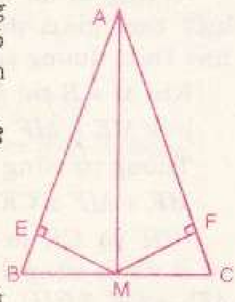
Từ một điểm M thuộc đáy BC của tam giác cân ABC, vẽ ME, MF vuông góc với AB, AC ($E \in AB$, $F \in AC$). Chứng minh rằng: $ME + MF = const$

A) Vài cách giải tóm tắt của bài toán trên

Để chứng minh ME + MF = const, ta có thể theo hai hướng giải như sau:

1. Hướng giải thứ nhất (Đặc biệt hóa)

• Chọn M là trung điểm BC, ta không có được một kết luận gì thêm (h. 1)



Hình 1

• Chọn M trùng với B (hoặc trùng với C)

$M \equiv B \to$

$$\to \begin{cases} ME \perp AB \to ME = O \\ MF \perp AC \to MF = BH \end{cases}$$

(BH là đường cao vẽ từ B của ΔABC)

Ta có $ME + MF = BH$ (h.2)

Tương tự, nếu $M \equiv C$ thì $ME = CK$ và $MF = O$ (CK là đường cao vẽ từ C của ΔABC) và ta có:

$$ME + MF = CK.$$

Hình 2

Trong tam giác cân ABC đỉnh A, thì $BH = CK$, và từ đó ta có thể dự đoán $ME + MF = BH$ (mà với một tam giác cho trước thì đường cao BH = const). Ta có các cách giải như sau:

Vẽ đường cao BH và vẽ $MI \perp BH$

$\Delta BME = \Delta MBI$

$\to ME = BI$

$ME + MF = BI + IH$

$= BH$ = const (đpcm).

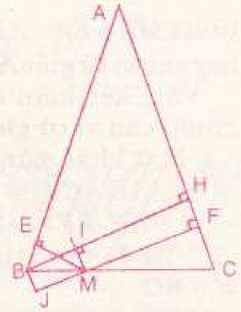
b) *Cách giải hai* (C2) (h.3)

Vẽ đường cao BH và vẽ $BJ \perp$ tia FM.

$\Delta BME = \Delta BMJ$

$\to ME = MJ$

$ME + MF = MJ + MF = JF = BH$ = const.



Hình 3

c) *Cách giải ba* (C3) (h.1)

Vẽ đường cao BH và nối AM.

$S_{\Delta MAB} + S_{\Delta MAC} = S_{\Delta ABC}$

$\to ME.AB + MF.AC = BH.AC$

$\to ME + MF = BH$ = const. (do $AB = AC$)

2) Hướng giải thứ hai

* *Cách giải bốn* (h.4)

Vẽ $MI \perp M'E'$, $M'I' \perp MF$

$\Delta MIM'' = \Delta M'I'M$

$\to MI' = M'I$

$ME + MF =$

$= E'I + MI' + I'F$

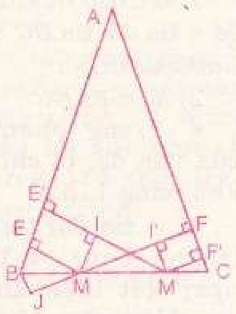
$M'E' + M'F' =$

$= E'I + M'I + I'F$

Từ đó suy ra

$ME + MF =$

$= M'E' + M'F'$



Hình 4

Do M và M' là hai điểm bất kì thuộc BC, nên ta kết luận được

$$ME + MF = \text{const}.$$

Bây giờ, ta chuyển sang trọng tâm của vấn đề là Khai thác bài toán trên như thế nào?

B) Khai thác bài toán trên

Trước hết, ta viết lại giả thiết của bài toán như sau:

$M \in BC$ (1)
$\Delta ABC\ (AB = AC)$ (2)
$ME \perp AB,\ MF \perp AC$ (3)

Để khai thác bài toán trên, ta có thể tiến hành phân tích, "mổ xẻ" và biến đổi các giả thiết và kết luận.

1. Khai thác kết luận

• Theo cách giải (C1), khi chứng minh $\Delta BME = \Delta MBI$ ta còn có được: $BE = MI \rightarrow BE = HF\ (= MI)$

• Do đó: $AE + AF = (AB - BE) + (AH + HF)$
$= AB + AH = \text{const}$

tức là $ME + EA + AF + FM = \text{const}$
hay chu vi tứ giác $AEMF$ là không đổi

Vậy, kết luận có thể thay bằng (chứng minh) chu vi tứ giác $AEMF$ không đổi.

• Mặt khác, cũng từ cách giải (C1) ta có:
$|AE - CF| = |(AB - BE) - (AC - AF)| =$
$= |AF - BE| = |AF - HF| = AH = const.$

* Từ đó ta có thể kết luận:

$$\left.\begin{array}{l} M \in BC \\ \Delta ABC\ (AB = AC) \\ ME \perp AB, MF \perp AC \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{1) Chu vi tứ giác } AEMF \\ \quad \text{không đổi} \\ \text{2) } |AE - CF| = \text{const} \end{array}$$

2. Thay đổi giả thiết (1)

• Giữ nguyên giả thiết (2) và (3). Kiểm tra kết luận.

• Giả thiết (1) được thay như thế nào?

Ta bỏ dữ kiện $M \in BC$ và thay bằng $M \notin BC$.

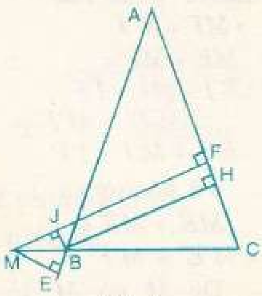
Để không phức tạp hóa vấn đề, ta xét hai khả năng:

1) $M \in (BC)$ nhưng $M \notin [BC]$ (tức là $M \in$ tia đối tia BC hoặc tia đối tia CB).

2) $M \in \Delta ABC$

• Trong phạm vi của vấn đề, ta chỉ xét khả năng 1 (h.5)

$M \in$ tia đối tia BC (chẳng hạn) ta thấy ngay kết luận không còn đúng nữa. M càng dời xa thì tổng ME, MF càng lớn.



Hình 5

Theo cách giải (C2) vẽ $BJ \perp MF$ ta được: $MJ = ME$ và $JF = BH$. Hay $MF - ME = MF - MJ = BH = \text{const}$

Nếu lấy $M \in$ tia đối tia CB, ta cũng có kết quả $ME - MF = \text{const}$.

* Và ta có kết luận:

$M \in$ Đường thẳng BC, $M \notin$ đoạn BC
$\Delta ABC\ (AB = AC)$
$ME \perp AB, MF \perp AC \rightarrow$
$|ME - MF| = \text{const}$

3. Thay đổi giả thiết (2)

• Giữ nguyên giả thiết (1) và (3). Kiểm tra kết luận.

• Giả thiết (2) được thay như thế nào?

Ta bỏ dữ kiện ΔABC cân đỉnh A

• Để không phức tạp hóa vấn đề, ta chỉ xét hai khả năng

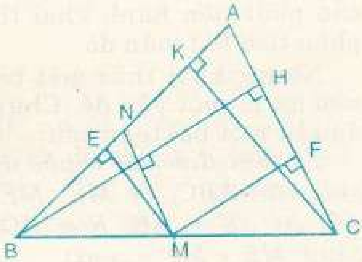
1) Đặc biệt hóa giả thiết (2), ta có ΔABC đều.

2) Tổng quát hóa giả thiết (2), ta có ΔABC không cân.

• Trong phạm vi của vấn đề, ta chỉ xét khả năng 2 (h.6)

Xét ΔABC không cân (giả sử $AB > AC$)

Theo cách giải (C_1) vẽ MI $\perp$ BH ta được $MF = IH$ ta còn phải so sánh ME với BI.



Hình 6

Dễ dàng chỉ ra được:

$AB > AC \rightarrow \hat{B} < \hat{C} \rightarrow \hat{B} < \hat{M} \rightarrow BN > NM \rightarrow ME < BI$

(chúng ta đã đề cập đến định lí "Trong một tam giác, đường cao thuộc cạnh lớn nhỏ thua đường cao thuộc cạnh nhỏ").

Khi $M \equiv B$ thì $ME + MF = BH$
hay $ME + MF \leq BH$
Tương tự cũng có
$ME + MF \geq CK$

(BH và CK là đường cao của ΔABC vẽ từ B và C, cũng dễ dàng ta thấy được $AB > AC \rightarrow CK < BH$)

Ta có bất đẳng thức kép $CK \leq ME + MF \leq BH$

* Và ta có bài toán:

$$\left.\begin{array}{l} M \in BC \\ \Delta ABC: AB > AC \\ ME \perp AB, MF \perp AC \end{array}\right\} \begin{array}{l} CK \leq ME + MF \leq BH \\ BH, CK \text{ là đường cao của} \\ \quad \Delta ABC \text{ vẽ từ } B, C) \end{array}$$

từ đó có thể đề xuất bài toán:

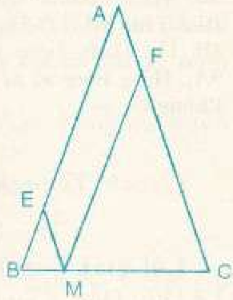
Tìm $M \in BC$ sao cho
$(ME + MF)_{max}$ hoặc $(ME + MF)_{min}$.

4. Thay đổi giả thiết (3)

• Giữ nguyên giả thiết (1) và (2). Kiểm tra kết luận.

• Thay giả thiết (3) như thế nào?

Ta bỏ dữ kiện trên $ME \perp AB, MF \perp AC$ và thay bằng một dữ kiện tương đương $ME // AC, MF // AB$ (h.7)



Hình 7

Dễ dàng chứng minh được tứ giác $AEMF$ là hình bình hành, nên $ME = AF$. Cũng như ΔFMC cân nên $MF = FC$.

Suy ra $ME + MF = AF + FC = AC = \text{const}$

* Từ đó ta có được bài toán

$$\left.\begin{array}{l} M \in BC \\ \Delta ABC(AB = AC) \\ ME // AB,\ MF // AC \end{array}\right\} ME + MF = \text{const}.$$

Ta cũng nhận thấy

- Chu vi tứ giác $AEMF$ không đổi
- $|AE - CF| = |AE - MF| = 0 = \text{const}$

C) Nhận xét việc khai thác các giả thiết (1), (2), và (3)

Chỉ riêng việc thay đổi giả thiết (3), thay $ME \perp AB$, $MF \perp AC$ bằng $ME // AC$, $MF // AB$ là kết luận của bài toán là không thay đổi $ME + MF = \text{const}$. Như vậy, ta có hai bài toán sau tương đượng nhau:

Bài 1.

$$\left.\begin{array}{l} M \in BC,\ \Delta ABC(AB = AC) \\ ME \perp AB, MF \perp AC \end{array}\right\} ME + MF = \text{const}.$$

Bài 2.

$$\left.\begin{array}{l} M \in BC,\ \Delta ABC(AB = AC) \\ ME // AC, MF // AB \end{array}\right\} ME + MF = \text{const}.$$

Do bài 1 và bài 2 tương đương nhau, nên ta có thể đổi vị trí của bài 2 cho bài 1 (bài toán xuất phát) và như vậy ta lại có một mô hình khai thác bài toán theo trình tự như trên. (Phần này được coi như là một bài tập dưới dạng một chuyên đề).

Trong quá trình khai thác giả thiết (1), giả thiết (2) ta đều dành phần "đất trống" để có thể tiếp tục giải quyết, đó là:

- Trường hợp đặc biệt hóa giả thiết (2), ta có ΔABC đều
- Trường hợp tổng quát hóa giả thiết (1), ta lấy vị trí của điểm $M \in \Delta ABC$.

Cơ sở lí luận của phương pháp khai thác một bài toán như trên là ở chỗ: thay đổi dữ kiện của giả thiết bằng phương pháp đặc biệt hóa, tổng quát hóa và phương pháp tương tự.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN VÀ LỜI GIẢI

BÀI SỐ 3

Problem. Find the least number which begins with the digit 1 and increases 3 times if the initial digit 1 is moved to the end of the number.

Solution. Let x be the least number which satisfies the conditions of the problem. Assume that x has m digits. Then

$$3x = 10[x - 10^{m-1}] + 1.$$

Therefore,

$$7x = 10^m - 1.$$

The least number m for which $10^m - 1$ is divisible by 7 is 6. So we obtain

$$x = (10^6 - 1)/7 = 142857$$

Từ mới:

find = tìm (động từ)
least = nhỏ nhất
begin = bắt đầu (động từ)
digit = chữ số
increase = tăng (động từ)
3 times = 3 lần
initial = đầu tiên (tính từ)
move = chuyển (động từ)
let = cho (động từ)
satisfy = thỏa mãn (động từ)
condition = điều kiện
assume that = giả sử rằng
then = khi đó
so = như thế
obtain = nhận được

T1/245. *Cho $x_0 = 1$, xét dãy số*

$$x_0,\quad x_1 = \frac{\sqrt{3}+x_0}{1-\sqrt{3}x_0},\quad x_2 = \frac{\sqrt{3}+x_1}{1-\sqrt{3}x_1},\quad \ldots$$

$$x_n = \frac{\sqrt{3}+x_{n-1}}{1-\sqrt{3}x_{n-1}}$$

Tính x_{1997}.

Lời giải: (của bạn *Ngô Thế Hùng*, 8C, Hà Nội - Amsterdam và *Trần Quang Vinh*, $9A_1$, THCS Lê Quý Đôn, ý Yên, Nam Định.

Ta sẽ chứng minh: $x_{3k} = x_0$ với mọi số tự nhiên k bằng phương pháp quy nạp toán học:

* Với $k = 0$ thì $x_{3.0} = x_0$, hiển nhiên đúng

* Giả sử mệnh đề đúng với $k = n - 1$ tức là

$$x_{3(n-1)} = x_0 = 1 \text{ thì } x_{3n-2} = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}} = -2-\sqrt{3}$$

$$x_{3n-1} = \frac{\sqrt{3}+x_{3n-2}}{1-\sqrt{3}x_{3n-2}} = \frac{\sqrt{3}+(-2-\sqrt{3})}{1-\sqrt{3}(-2-\sqrt{3})} = \frac{-2}{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{3}-2$$

$$\Rightarrow x_{3n} = \frac{\sqrt{3}+x_{3n-1}}{1-\sqrt{3}x_{3n-1}} = \frac{\sqrt{3}+(\sqrt{3}-2)}{1-\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)} = \frac{2\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}-2} = 1 = x_0$$

Do đó, mệnh đề đúng với $k = n$.

Từ đó $x_{1995} = x_{3.665} = x_0 = 1$

Suy ra: $x_{1996} = -2 - \sqrt{3}$ và $x_{1997} = \sqrt{3} - 2$.

Nhận xét. Nhiều bạn nhận thấy bài này tương tự đề **T1/244**. Tuy nhiên rất ít bạn lí luận chặt chẽ, thậm chí có đến 32 bạn tính sai x_{1997}. Một điều cần lưu ý với các bạn là kết quả nên khử căn thức ở mẫu, nhiều bạn để kết quả $x_{1997} = \frac{-1}{2+\sqrt{3}}$, $x_{1997} = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$. Đôi bạn sử dụng phương pháp lượng giác và cho được công thức tổng quát tính x_n bất kì.

Các bạn có lời giải tốt hơn: *Phạm Kim Anh*, 8A, Tư Nghĩa II, **Quảng Ngãi**: *Lê Đình Tiến*, 8A, Nguyễn Trãi, **Hải Dương**: *Trần Thị Phú*, 7B, Diễn Quảng, Diễn Châu, **Nghệ An** và *Trần Thị Hồng Tính*, 9A cùng trường: *Phan Minh Trường*, 8_1, Hồng Bàng, Q.5, **Tp. Hồ Chí Minh**: *Đinh Trung Hiếu*, 9A, Phú Bài, Hương Thủy, **Thừa Thiên Huế**: *Lương Thế Nhân*, 9A, chuyên **Bạc Liêu** và *Võ Hữu Tín*, 8AI, THCS thực hành Sư phạm, **Bạc Liêu**: *Trần Thị Anh Thi*, 9/11, Trưng Vương, **Đà Nẵng**: *Nguyễn Trà Mến*, 9B, THCS Thanh Tân, Kiến Xương, **Thái Bình**: *Kim Đình Thái*, 8B, TTCLC Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**: *Hoàng Kim*, 8B, Hải Đình, Đồng Hới, **Quảng Bình**: *Lê Anh Minh*, $9A_1$, Hồng Bàng và *Lê Văn Thanh*, $9A_1$, Ngô Quyền, **Hải Phòng** v.v...

LÊ THỐNG NHẤT

T2/245. *Tìm nghiệm nguyên của phương trình*

$$x^2(y-5) - xy = x - y + 1$$

Lời giải. của *Trần Anh Dũng*, 8A, THCS Lê Quý Đôn, Cầu Giấy, Hà Nội.

$$x^2(y-5) - xy = x - y + 1$$

$$\Leftrightarrow y(x^2 - x + 1) = 5x^2 + x + 1$$

$$\Rightarrow y = \frac{5x^2+x+1}{x^2-x+1} = 5 + \frac{6x-4}{x^2-x+1} \qquad (1)$$

(Để ý rằng: $x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$ và

$x^2 - x + 1 = x(x - 1) + 1$ là một số lẽ)

Mà y là một số nguyên nên phải có

$(3x - 2) \vdots (x^2 - x + 1) \qquad (2)$

Hay $(3x^2 - 2x) \vdots (x^2 - x + 1) \qquad (3)$

Nhưng ta có: $3(x^2 - x + 1) \vdots (x^2 - x + 1) \qquad (4)$

Từ (3) và (4) suy ra

$(x - 3) \vdots (x^2 - x + 1)$

Hay $(3x - 9) \vdots (x^2 - x + 1) \qquad (5)$

Từ (2) và (5) ta suy ra

$7 \vdots (x^2 - x + 1) \qquad (6)$

- Nếu $x^2 - x + 1 = 1 \Rightarrow x = 0$ hoặc $x = 1$

Với $x = 0$ ta có $y = 1$ (theo (1))

$x = 1$ ta có $y = 7$

- Nếu $x^2 - x + 1 = 7 \Rightarrow x = -2$ hoặc $x = 3$

Với $x = -2$ ta có $y = 5 - \frac{16}{7}$ (loại)

$x = 3$ ta có $y = 7$

Thử các cặp nghiệm tìm được $(x, y) = (0, 1)$, $(1, 7)$, $(3, 7)$ vào phương trình ta thấy được thỏa mãn. Vậy nghiệm của phương trình là $(x, y) = (0, 1), (1, 7), (3, 7)$.

Nhận xét. Các bạn sau đây cũng có lời giải tốt: *Đào Thị Chi*, 7B, Song Khê, Yên Dũng: *Hàn Thế Anh*, 9 NK Lạng Giang, **Bắc Giang**: *Phạm Thanh Hoa*, 9B Nguyễn Thượng Hiền, ứng Hòa, *Khương anh Tuấn*, $9A_1$, THCS Mĩ Đức, **Hà Tây**: *Vương Giang Vũ*, 8H, Trưng Vương, Hoàn Kiếm, *Bùi Tuấn Phương*, *Nguyễn Hoài Anh*, 8A, Lê Quý Đôn, Cầu Giấy, **Hà Nội**: *Phạm Lam Quy*, 9A, TĐ, Uông Bí, **Quảng Ninh**: *lê Đình Tiến*, 9A, *Hoàng Thị Nguyệt Ánh*, 9A, Nguyễn Trãi, Tp. **Hải Dương**: *Đặng Đình Trình*, 8B, NK Yên Mô, **Ninh Bình**: *Đinh Thanh Thương*, 9A, Nguyễn Trãi, Tân Kì: *Phan Thanh Minh*, 9B, Đặng Thai Mai, Vinh, **Nghệ An**: *Huỳnh Minh Việt*, 9A, Nguyễn Thiền, Điện Bàn, **Quảng Nam**: *Vũ Xuân Ngọc Tín*, 6, Quang Trung, Tân Phú, **Đồng Nai**.

TÔ NGUYÊN

T3/245. *Tìm các số nguyên (a, b, c) thỏa mãn hệ phương trình:*

$$\begin{cases} ac - 3bd = 4 \\ ad + bc = 3 \end{cases}$$

Lời giải. (Dựa theo *Vũ Đức Nghĩa*, 9B THCS Đông Cương, Tp. Thanh Hóa) Ta có:

$25 = (ac - 3bd)^2 + (ad + bc)^2 = 8(bd)^2 + (ac - bd)^2 + (ad^2 - bc)^2 \; 8(bd)^2$.

Suy ra $(bd)^2 \le 25 : 8 < 4$, mà bd nguyên nên $|bd| < 1$.

Với $|bd| = 1$ thì không có giá trị nguyên nào của a, b, c, d thỏa mãn hệ. Với $|bd| = 0$ ta dễ dàng tính ra các bộ số sau đây:

(1, 0, 4, 3), (-1, 0, -4, -3), (4, 3, 1, 0), (-4, -3, -1, 0). Thử lại, ta được các bộ số này đều là nghiệm của hệ đã cho.

Nhận xét. Có 133 bài giải, tất cả đều giải đúng nhưng hầu như không có bạn nào thử lại nghiệm mặc dù chúng chỉ là nghiệm của một phương trình (hay bất phương trình) hệ quả của phương trình đã cho. Lời giải tốt gồm có: *Trần Đức Hiệu*, 9I Hàn Thuyên, Tp Nam Định, **Nam Định**; *Trần Đình Khiêm*, 9_1 PTCS Nguyễn Tri Phương, Tp Huế, **Thừa Thiên Huế**; *Lê Đình Tiến*, 8A, PTCS Nguyễn Trãi, Trần Quang Khải, 9A, THCS Phú Thứ, huyện Kim Môn, **Hải Dương**; *Hà Quang Đạt* 8T THCS Trần Hưng Đạo, **Quảng Ngãi**; *Huỳnh Công Thành*, 9^1 THCS Nguyễn Du, Q. 1, **Tp Hồ Chí Minh**; *Dương Anh Tuấn*, 9/2 PTCS Lê Văn Thiêm, Tx hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**; *Phạm Tuấn*, 7A PTTH Thạch Thất, **Hà Tây**; *Lương Thế Nhân*, 9A PTTH chuyên Bạc Liêu, **Bạc Liêu**; *Vương Nguyễn Tấn Lợi*, 8_4 PTCS Tam Phước, huyện Long Thành, **Đồng Nai**.

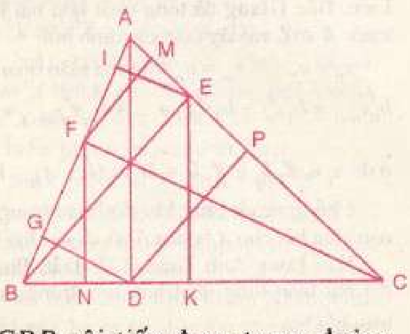
ĐẶNG VIỄN

T4/245. *AB, BE, CE là ba đường cao của ΔABC. G, P là hình chiếu của D lên AB, AC. I, K là hình chiếu của E lên AB, BC. M, N là hình chiếu của F lên AC, BC. Chứng minh 6 điểm G, P, I, K, M, N cùng nằm trên một đường tròn.*

Lời giải.

• Nếu ΔABC vuông, bài toán hiển nhiên đúng.

• Ta xét trường hợp ΔABC có 3 góc nhọn.



Tứ giác $AGDP$ nội tiếp được trong đường tròn. Suy ra $\widehat{GAD} = \widehat{GDP}$. Từ đó $\widehat{GPC} + \widehat{GBC} = 180^\circ$, do vậy tứ giác $BCPG$ nội tiếp đường tròn (1)

Rõ ràng $BCEF$, $EFIM$ cũng là những tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{FEC} + \widehat{FBC} = 180^\circ$ nên $\widehat{FEC} = GPB$ suy ra $FE//GP$.

Mặt khác $\widehat{MIF} + \widehat{MEF} = 180^\circ$ nên $\widehat{MIF} + \widehat{MPG} = 180^\circ$ (2)

Do đó tứ giác $GPMI$ nội tiếp được trong (O_1)

Tương tự $MNPK$ nội tiếp được trong (O_2)

Chứng minh tương tự (1) được $AIKC$ là tứ giác nội tiếp.

Từ (1) suy ra $\widehat{MPG} = \widehat{GBC}$, kết hợp với (2) có $\widehat{MIF} + \widehat{GBC} = 180^\circ \Rightarrow IM//BC$. Tương tự được $KP//BA$.

Từ đó ta có $\widehat{IMP} + \widehat{MCK} = \widehat{MCK} + \widehat{AIK} = \widehat{AIK} + \widehat{IKP} (=180^\circ) \Rightarrow \widehat{IMP} + \widehat{IKP} = 180^\circ$ nên $KPMI$ nội tiếp được trong (O_3). Qua 3 điểm không thẳng hàng chỉ có duy nhất 1 đường tròn nên $(O_3) \equiv (O_2) \equiv (O_1)$.

Vậy G, P, I, K, M, N cùng nằm trên một đường tròn.

• Khi ΔABC có góc tù chứng minh tương tự.

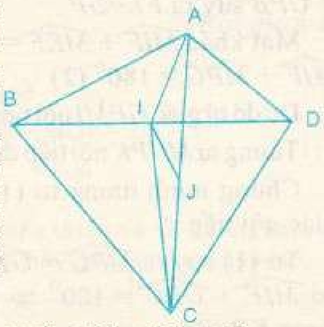
Nhận xét. Giải tốt bài này có các bạn: **Quảng Ninh:** *Đỗ Quang Khánh*, 7A₂, Trọng điểm Uông Bí. Thái Nguyên; *Mai Nguyên Dũng*, $9A_1$, THCS Chu Văn An; **Phú Thọ:** *Nguyễn Ngọc Thắng*, $9A_1$, cấp II Phong Châu; **Yên Bái:** *Lê Minh Huệ*, 9D, cấp II Quang Trung; **Vĩnh Phúc:** *Trương Hải Duyên*, 9A PTTH Vĩnh Tường; **Bắc Ninh:** *Lê Sơn Tùng*, 9A NK Gia Lương; **Hải Phòng:** *Phạm Đức Hiệp*, 8T Chu Văn An, *Nguyễn Hoàng Long*, $9A_1$, THCS Hồng Bàng; **Hà Tây:** *Lưu Tiến Đức*, 9B THCS Nguyễn Thượng Hiền, ứng Hòa; **Hải Dương:** *Hà Thị Mai Dung*, 8A Nguyễn Trãi; **Thái Bình:** *Đặng Ngọc Trang*, 8B Nguyễn Công Trứ II, Tiền Hải; **Hà Nội:** *Lê Thị Bích Hạnh*, 9A, Lê Quý Đôn; **Nam Định:** Nguyễn Đức Chinh, *9B THCS Hải Hậu*, *Trần Quang Vinh*, $9A_1$ THCS Lê Quý Đôn, *Doãn Quý Hiếu*, $9A_6$, *Trần Thanh Tùng*, $8a_6$, Trần Đăng Ninh, *Phùng Văn Huan*, 9A THCS Giao Thủy, *Trần Đức Hiệu*, 9I, Hàn Thuyên; **Thanh Hóa:** *Phạm Tuấn Anh*, 8C, NKTP; **Nghệ An:** *Vũ Ngọc Dũng*, 9B Đặng Thai Mai, *Nguyễn Xuân Toàn*, 9A TTCLC Diễn Châu, *Nguyễn Thị Giang*, 9 Trường Thi; **Hà Tĩnh:** *Dương Tuấn Anh*, 92 Lê Văn Thiêm; **Thừa Thiên - Huế:** *Đinh Trung Hiếu*, 9A, Phú Bài, Hương Thủy; **Đà Nẵng:** *Nguyễn Quang Thiện*, 8/4 Nguyễn Khuyến; **Quảng Nam:** *Huỳnh Minh Việt*, 9A, Nguyễn Hiền, Điện Bàn; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Thị Phương Uyên*, 8B TĐ Nghĩa Hành, *Hà Quang Đạt*, 8T, Trần Hưng Đạo, *Phạm Tuấn Anh*, 9A chuyên Lê Khiết; **Bình Định:** Nguyễn Thị Thanh Thủy, 9C PTTH Tăng Bạt Hổ, Hoài Nhơn; **Đắc Lắc:** *Dương Thành An*, 9T, *Ngô Quốc Anh*, 9C Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Trần Giang*, 81 Nguyễn An Ninh; **Tp. Hồ Chí Minh:** *Vũ Thanh Hà*, *Huỳnh Công Thành*, *Ngô Trung Hiếu*, 9^1, Nguyễn Du.

VŨ KIM THỦY

T5/245. *Cho tứ giác ABCD. Chứng minh rằng*

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 \geq$$
$$\geq 2\sqrt{3}\ S(ABCD) + \frac{AC^2 - BD^2}{2}$$

Lời giải. (của nhiều bạn). Trước hết ta chứng minh bổ đề sau:



Bổ đề: *Cho tứ giác ABCD. I, J theo thứ tự là trung điểm các đường chéo AC, BD. Khi đó:*

$$AB^2+BC^2+CD^2+DB^2=AC^2+BD^2+4IJ^2$$

Chứng minh: Vì IJ, IA, IC là trung tuyến của các tam giác: AIC, ABD, CBD nên ta có:

$$4IJ^2 = 2(IA^2 + IC^2) - AC^2$$

$$2IA^2 = AB^2 + AD^2 - \frac{BD^2}{2}$$

$$2IC^2 = CB^2 + CD^2 - \frac{BD^2}{2}$$

$$\Rightarrow 4IJ^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 - AC^2 - BD^2$$

$$\Rightarrow AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4IJ^2$$

Trở lại bài toán của ta: Theo bổ đề ta có:

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 \geq AC^2 + BD^2$$

$$= \frac{AC^2}{2} + \frac{3BD^2}{2} + \frac{AC - BD^2}{2}$$

$$\geq \sqrt{3}AC.BD + \frac{AC^2 - BD^2}{2}$$

$$\geq 2\sqrt{3}\,S(ABCD) + \frac{AC^2 - BD^2}{2}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} I \equiv J \\ AC = \sqrt{3}BD \\ AC \perp BD \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ $ABCD$ là hình thoi có $\hat{A} = \hat{C} = 60^0$; $\hat{B} = \hat{D} = 120^0$.

Nhận xét. 1) Các bạn có lời giải tốt là: *Phan Vũ Toàn*, Lê Quý Đôn, Nghĩa Tân, **Hà Nội**; *Lưu Tiến Đức*, Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa, **Hà Tây**; *Lê Đình Tiến*, 8A Nguyễn, **Hải Dương**; *Mai Nguyên Dũng*, 9A1 - Chu Văn An, **Thái Nguyên**; *Nguyễn Minh Đức*, **Nghệ An**; *Trần Mạnh Hùng*, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**)...

2) Nhiều bạn giải quá dài. Quên không xét hoặc xét không chính xác trường hợp xảy ra đẳng thức.

3) Bạn *Phan Vũ Toàn*, Lê Quý Đôn, Nghĩa Tân, **Hà Nội** đã sử dụng các bất đẳng thức: $2IJ \geq |AB - CD|$; $2IJ \geq |AD - BC|$ để đạt được bất đẳng thức mạnh hơn:

$$(AB + CD)^2 + (AD + BC)^2 \geq 4\sqrt{3}S(ABCD) + (AC^2 - BD^2)$$

4) Một số bạn dùng bất đẳng thức trong tam giác: $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$, cũng đi đến kết quả.

NGUYỄN MINH HÀ

T6/245. *Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định như sau:*

$$x_0 = a,\ x_1 = b \text{ và với } n > 1$$

thì $\quad x_{n+1} = 5x_n^2 - 3x_{n-1}$

Chứng minh rằng với mọi cách chọn các số nguyên a, b thì dãy trên hoặc không có số nào chia hết cho 1997 hoặc có vô số số chia hết cho 1997.

Lời giải. Với mỗi $i \in N$ gọi r_i là số dư của phép chia x_i cho 1997 $(0 \leq r_i < 1997)$.

Xét dãy các cặp số $(r_0, r_1), (r_1, r_2), \ldots$ vì tập giá trị của dãy này hữu hạn nên tồn tại $0 \leq i < j \in \mathbf{N}^*$ sao cho $r_i = r_j$, $r_{i+1} = r_{j+1}$ $\Leftrightarrow$ $x_i \equiv x_j$ (mod1997), $x_{i+1} \equiv x_{j+1}$; (mod 1997). Từ cách xác định x_n suy ra

$$x_{i+k} \equiv x_{j+k} \text{ (mod 197) } \forall\ k \in \mathbf{N} \quad (1)$$

Mặt khác cũng từ công thức truy hồi suy ra

$$3x_{i-1} \equiv 3x_{j-1} \text{ (mod 1997)}$$

$$\Rightarrow \quad x_{i-1} \equiv x_{j-1} \text{ (mod 1997)},$$

tiếp tục ta được $x_{i-k} \equiv x_{j-k}$ (mod 1997) $\quad$ (2) $\forall\ 0 \leq k \leq i$.

Vậy từ (1) và (2) rút ra

$$x_{j+k} \equiv x_{i+k+(j-i)} \text{ với mọi } k \geq i$$

hay $\quad x_n \equiv x_{n+T}$ (mod 1997) với mọi $n \in \mathbf{N}$

ở đó $\quad T = j - i$.

Nếu tập $\{x_0, x_1, \ldots, x_{T-1}\}$ không có số nào chia hết cho 1997 thì với mọi n ta có $x_n \not\equiv 0$ (mod 1997) (bởi vì $x_n \equiv x_r$ nếu $n = lT + r$ $0 \leq r \leq T - 1$. Nếu tồn tại $0 \leq r \leq T-1$ để $x_r \equiv 0$ (mod 1997) thì $x_n \equiv 0$ (mod 1997) với $\forall n = lT + r$ $(l \in \mathbf{N})$.

Nhận xét. 1) Bạn Phạm Việt Ngọc 12A PTN Ngô Sĩ Liên, **Bắc Giang** đã tổng quát hóa bài toán như sau: Cho trước $A \in \mathbf{Z}$ và dãy (x_n) xác định bởi

$x_0 = a, \ldots, x_m = a_m$ và thỏa mãn quan hệ

$$b_0x_{n+1} = b_1x_n^{k_1} + b_2x_{n-1}^{k_2} + \ldots + b_mx_{n-m+1}^{p} + b_{m+1}x_{n-m} \quad \forall\ n \geq m$$

ở đó $a_i \in \mathbf{Z}$, $b_j \in \mathbf{Z}$, $k_i \in N$ và $(b_0, A) = 1$, $(b_{m+1}, A) = 1$

Chứng minh rằng khi đó hoặc trong dãy không có số nào chia hết cho A hoặc có vô số số chia hết cho A.

Bạn Đặng Anh Tuấn, 12T Trần Phú **Hải Phòng** còn đặt bài toán tổng quát hơn nữa trong đó dãy x_n xác định truy hồi bởi

$$x_{n+1} = P(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-m})$$

ở đó P là đa thức m+1 biến với hệ số nguyên.

Tuy nhiên cách đặt này quá tổng quát nên không đúng bởi lẽ dãy r_n (ở đó $x_n \equiv r_n$ (mod A) không nhất thiết tuần hoàn ngay từ đầu mà có thể chỉ tuần hoàn kể từ chỉ số $n \geq n_0$.

2) Các bạn cho lời giải tốt: *Nguyễn Kim Sở*, 12A Thanh Ba, **Phú Thọ**; *Trần Chí Hòa*, 11T PTNK **Quảng Bình**; *Lê Anh Dũng*, 12CT Nguyễn Du **Đắc Lắc**; *Nguyễn Đức Mạnh*, 12A PTTH Đông Anh, **Hà Nội**; *Lê Quang Nẫm*, 12T ĐHQG **Tp Hồ Chí Minh**; *Hà Minh Ngọc*, 11 Toán, Lương Thế Vinh, **Đồng Nai**; *Nguyễn Phong Thiên*, 10B **ĐHBK TN Hà Nội**; *Nguyễn Trọng Kiên*, 10CT Lê Hồng Phong, **Nam Định**; *Vũ Tuấn Anh*, 11T, PTNK **Thái Nguyên**; *Trần Đại Nghĩa*, 11T, Nguyễn Trãi, **Hải Dương**; *Vũ Biên Cương*, 10T PTTH Lê Hồng Phong, **Nam Định**; *Lê Văn Cường*, 11T Lương Văn Tụy, **Ninh Bình**; *Hoàng Tùng*, 10A **ĐHKHTN Hà Nội**; *Bùi Văn Bình*, 11T Lam Sơn, **Thanh Hóa**; *Nguyễn Mạnh Hà*, 11T Nguyễn Huệ, **Hà Đông**

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T7/245. *Cho các số tự nhiên m, n, p thỏa mãn điều kiện:*

$$p \leq m + n.$$

Chứng minh rằng: $(m+n-\beta)!p!\sum_{i=\alpha}^{\beta} C_n^i C_m^{p-i}$ *chia hết cho* $(m+n-\alpha)!$ *trong đó:* $\alpha = \max\{0, p-m\}$ *và* $\beta = \min\{p, n\}$.

Lời giải. Ta có:

$$(x+1)^n.(x+1)^m = (x+1)^{m+n}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{i=0}^{n} C_n^i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m} C_m^j x^j\right) = \sum_{k=0}^{m+n} C_{m+n}^k x^k$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} C_n^i C_m^j x^{i+j} = \sum_{k=0}^{m+n} C_{m+n}^k x^k$$

Suy ra:

$$\sum_{\substack{0\leq i\leq n\\ 0\leq p-i\leq m}} C_n^i C_m^{p-i} = C_{m+n}^p \quad (1)$$

(do $p \leq m+n$)

Mà: $\begin{cases} 0 \leq i \leq n \\ 0 \leq p-i \leq m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq i \leq n \\ p-m \leq i \leq p \end{cases}$

$\Leftrightarrow \alpha \leq i \leq \beta$

Nên: $(1) \Leftrightarrow \sum_{i=\alpha}^{\beta} C_n^i C_m^{p-i} = C_{m+n}^p$

$$\Leftrightarrow (m+n-p)!p!\sum_{i=\alpha}^{\beta} C_n^i C_m^{p-i} = (m+n)! \quad (2).$$

Do $\alpha \geq 0$ nên $(m+n)! \,\vdots\, (m+n-\alpha)!$. Vì thế, từ (2) ta có:

$$(m+n-p)!p!\sum_{i=\alpha}^{\beta} C_n^i C_m^{p-i} \,\vdots\, (m+n-\alpha)!.$$

Mà $(m+n-\beta)! \,\vdots\, (m+n-p)$ (do $\beta \leq p \leq m+n$) nên $(m+n-\beta)!p!\sum_{i=\alpha}^{\beta} C_n^i C_m^{p-i} \,\vdots\, (m+n-\alpha)!$ (Đpcm).

Nhận xét. Số bạn gửi lời giải cho bài toán không nhiều. Không ít bạn cho lời giải hoặc quá vắn tắt hoặc quá dài dòng. Các bạn sau đây có lời giải tốt: **Yên Bái:** *Lê Minh Đức, Tạ Xuân Hưng*, 12A$_1$, 11A$_2$, PTTH chuyên Yên Bái; **Hải Phòng:** *Đặng Anh Tuấn*, 12T PTTH Trần Phú; **Hải Dương:** *Phùng Đức Tuấn, Phạm Văn Hải*, 12CT PTTH Nguyễn Trãi; **Hòa Bình:** *Đỗ Quang Dương*, 11T PTTH Hoàng Văn Thụ; **Quảng Bình:** *Trần Chí Hòa*, 11T PTTHNK; **ĐHQGHN:** *Nguyễn Minh Hoài*, 10 Khối PTCT-Tin ĐHKHTN; **ĐHQGTPHCM:** *Lê Quang Nẫm, Nguyễn Lê Lực*, 12CT trường PTNK.

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T8/245. *Cho* $n \in \mathbb{N}^*$. *Chứng minh rằng*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(2k-1)} < 2\ln 2$$

Lời giải. (của đa số các bạn). Sử dụng các tính chất

$$\frac{1}{2k(2k-1)} = \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k};$$

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{2n-1}(-t)^k + \frac{t^{2n}}{1+t}\ (t \neq -1), \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t}dt > 0,$$

ta có:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t}dt = \sum_{k=0}^{2n-1}\int_0^1 (-t)^k dt + \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t}dt > \sum_{k=0}^{2n-1}\int_0^1 (-t)^k dt$$

$$\Rightarrow \ln 2 > -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{2n}$$

$$\Leftrightarrow \ln 2 > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k(2k-1)} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2(2k-1)} < 2\ln 2.$$

Cách 2. (của nhiều bạn)

Xét hàm số

$$f(x) = \ln(x+1) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} - \frac{x^{2n}}{2n}\right)$$

Ta có:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - (1 - x + x^2 - \ldots + x^{2n-2} - x^{2n-1}) =$$

$$= \frac{x^{2n}}{1+x} \geq 0\ \forall x \geq 0$$

Suy ra $f(x)$ đồng biến trong đoạn $[0, 1]$ và $f(1) > f(0)$ (đpcm)

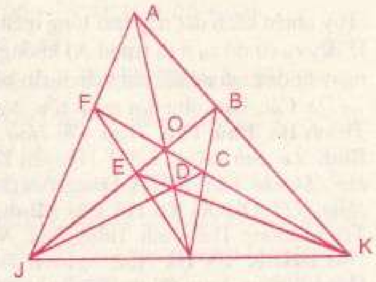
Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Hà Nội:** *Nguyễn Đức Mạnh*, 12A Cổ Loa, *Kiều Tú Anh*, 11T

Amsterdam, *Phạm Ngọc Huy*, 11B ĐHQGHN; **Hải Phòng:** *Trần Văn Hà, Nguyễn Mai Hưng, Trịnh Việt Anh, Vũ Huy Toàn, Nguyễn Bắc Hải, Đặng Anh Tuấn, Trần Trung Hiếu*, PTTH Trần Phú, *Nguyễn Hữu Tuấn*, PTTH Lý Thường Kiệt . **Hải Dương:** *Nguyễn Huy Khương, Trần Thế Vinh, Nguyễn Văn Luật, Phùng Đức Tuấn, Phạm Văn Hảo, Đào Thu Mai, Ngô Dũng*, PTTH Nguyễn Trãi, *Phạm Đình Dương*, PTTH Bình Giang, **Hà Tây:** *Bùi Xuân Hảo, Nguyễn Mạnh Hà*, PTTH Nguyễn Huệ; **Lào Cai:** *Nguyễn Hồng Quang*, PTTH Lào Cai; **Nghệ An:** *Văn Đình Thanh, Đinh Sỹ Thạc Chi*, ĐH Vinh, *Trần Nam Dũng, Trần Khoa Văn*, PTTH Phan Bội Châu; **Thanh Hóa:** *Lê Duy Diễn, Phạm Văn Thành, Lê Văn Phùng, Lê Xuân Trung, Hoàng Hạnh Quyết*, PTTH Lam Sơn; **Thái Nguyên:** *Vũ Tuấn Anh*, NK Thái Nguyên; **Bắc Giang:** *Phạm Việt Ngọc, Nguyễn Tiến Mạnh, Đặng Hoàng Việt Hà*; **Vĩnh Long:** *Nguyễn Minh Trường, Trần Hữu Nhơn, Cao Minh Quang*, PTTH Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Quảng Bình:** *Trần Hữu Lực, Nguyễn Viết Thanh, Trần Mai Sơn, Trần Chí Hòa, Trần Đức Thuận*, PTTH năng khiếu; **Quảng Trị:** *Lê Thọ Kha, Trần Nhật Hòa*, PTTH Lê Quý Đôn; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Hoàng Anh, Lê Xuân Khoa, Cao Thế Thu*, PTTH chuyên; **Nam Định:** *Vũ Việt Tài, Nguyễn Trọng Kiên, Nguyễn Trường Công*, PTTH Lê Hồng Phong; **TP Hồ Chí Minh:** *Lê Quang Nẫm, Nguyễn Lê Lực*, PTNK ĐHQG Tp HCM; **Yên Bái:** *Lê Minh Đức, Nguyễn Đăng Trung*, PTTH chuyên; **Đắc Lắc:** *Lê Đình Bình, Lê Anh Dũng*, PTTH Nguyễn Du; **Ninh Bình:** *Lê Văn Cương, Vũ Hải Châu*, PTTH Lương Văn Tụy; **Quảng Ngãi:** *Lê Hoàng Đức Khánh*, PTTH Đức Phổ; **Vũng Tàu:** *Nhâm Xuân Ngọc*, 11A3 THCD; **Thừa Thiên - Huế:** *Trần Bá Đôn, Huỳnh Trọng Nhật Minh* (ĐH KH Huế); **Kontum:** *Hoàng Phi Dũng*, PTTH chuyên ban; **Khánh Hòa:** *Nguyễn Hoàng Khâm*, PTTH Lê Quý Đôn, Nha Trang; **Trà Vinh:** *Nguyễn Vĩnh Trà*, THCB Trà Vinh; **Hoà Bình:** *Nguyễn Minh Đức*, PTTH Hoàng Văn Thụ; **Quảng Ninh:** *Đặng Thế Hùng*, chuyên Hạ Long; **Thái Bình:** *Nguyễn Hiệp Đồng*, Quỳnh Thọ, Quỳnh Phụ; **Bình Định:** *Phạm Văn Sỹ*, QH Quy Nhơn, *Mai Xuân Hiến*, QH Quy Nhơn; **Phú Thọ:** *Nguyễn Kim Sở*, PTTH Thanh Ba; **Đà Nẵng:** *Nguyễn Tấn Phong*, PTTH Hoàng Hoa Thám.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T9/245. *Tồn tại hay không một hình lục giác ABCDEF sao cho ba đường chéo AD, BE, CF đồng quy, đồng thời các đường thẳng AD, BC, FE đồng quy tại điểm I; các đường thẳng BE, CD, AF đồng quy tại điểm J, các đường thẳng CF, DE, BA đồng quay tại điểm K sao cho ba điểm I, J, K thẳng hàng hay không? Tại sao?*

Lời giải. Dựng tam giác AJK (hình vẽ). Lấy các điểm : F trên cạnh AJ và B trên cạnh AK. Gọi O là giao điểm của JB, KF; I là giao điểm của AO, JK; E là giao điểm của JB, IF; C là giao điểm của OK, IB; D là giao điểm của EK, IO. Ta có tia JC là đối cực của A đối với hai tia JB, JK (*); tia JD là đối cực của F đối với hai tia JB, JK. Suy ra JC, JD tương ứng liên hợp với JA, JF đối với JB, JK. Mà hai tia JA, JF trùng nhau nên hai tia JC, JD cũng trùng nhau, hay J, D, C thẳng hàng.



Dễ dàng kiểm tra hình lục giác $ABCDEF$ là hình cần dựng, đồng thời lời giải này cũng trả lời tập hợp các lục giác đó là vô hạn.

Nhận xét. Trừ một bài giải trả lời phủ định còn thì đều trả lời đúng, phần lớn dựa vào định lí Thales, phép đối xứng trục, ... để nêu ra một ví dụ cụ thể. Một số bạn dựa vào các định lí Ménélaus và Céva cũng chứng minh được có vô số các lục giác như thế. Lời giải tốt gồm có: **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Lê Huyền Đức*, 11A1 chuyên ban Vũng Tàu; **Đắc Lắc:** *Lê Anh Dũng*, 12CT chuyên Nguyễn Du; **Quảng Bình:** *Trần Đức Thuận*, 12T PTNK Quảng Bình, *Trần Hữu Lực*, 12CT PTTH Đồng Hới; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Viết Tú*, 10 Toán, năng khiếu Hà Tĩnh; **Khánh Hóa:** *Trần Tuấn Anh*, 10 toán PTTH Lê Quý Đôn, Nha Trang; **Hà Nội:** *Nguyễn Thị Minh Thoa*, 10A khối PTTH chuyên Hóa ĐHKHTN-ĐHQG; **Hải Phòng:** *Vũ Huy Toàn*, 11 Toán NK Trần Phú.

ĐẶNG VIỄN

Bài T10/245. *Cho tứ diện gần đều ABCD (AD = BC = AB = CD = b; AC = DB = c). R, r lần lượt là bán ksnh mặt cầu ngoại tiếp, nội tiếp, tứ diện. V là thể tích của nó. Chứng minh rằng:*

$$V \le \frac{\sqrt{2}abcr}{R}$$

Lời giải. (của nhiều bạn)

Trong tứ diện gần đều, tâm cầu ngoại tiếp, tâm cầu nội tiếp, trọng tâm trùng nhau và $h = 4r$ (h là đường cao của tứ diện).

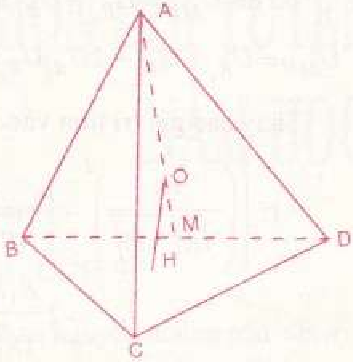
Đối với tứ diện bất kì ta có bất đẳng thức : $R \ge 3r$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ tứ diện gần đều. Tuy nhiên, đối với tứ diện gần đều, bất đẳng thức trên được chứng minh đơn giản hơn.

Gọi O là tâm cầu ngoại tiếp tứ diện, H là hình chiếu của O trên mặt phẳng (BCD), M là giao điểm của AO với mặt phẳng (BCD). Ta có:

$$R = OA = 3OM \ge OH = r.$$

(*) Bạn đọc có thể tham khảo: Phạm Văn Hoàn "Đường đối cực của một điểm đối với hai đường thẳng đồng quy, đối với đường cong" (THTT số 120 tháng 4-1981)

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow AO \perp (BCD) \Leftrightarrow ABCD$ là tứ diện đều. Trở lại bài toán của ta. Đặt $R' = HB = HC = HD$. Ta có:



$$V \le \frac{\sqrt{2}abcr}{R} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{3}hS(BCD) \le \frac{\sqrt{2}abcr}{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4r}{3}\cdot\frac{abc}{4R'} \le \frac{\sqrt{2}abcr}{R} \Leftrightarrow 4R \le 3\sqrt{2}R'$$

$$\Leftrightarrow 16R^2 \le 18R'^2 \Leftrightarrow 8R^2 \le 9R'^2$$

$$\Leftrightarrow 8R^2 \le 9(R^2 - r) \Leftrightarrow 9r^2 \le R^2$$

$$\Leftrightarrow 3r \le R \text{ (đúng).}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow ABCD$ là tứ diện đều

Nhận xét. 1) Có 135 bạn giải bài này, đa số giải đúng. Có một số bạn sau khi đi đến bất đẳng thức $8R^2 \le 9R'^2$ đã dùng biến đổi: $8R^2 \le 9R'^2 \Leftrightarrow \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \le \frac{9}{4}$ cũng cho kết quả tốt. Một số bạn giải quá dài. Một vài bạn không xét hoặc xét không đúng trường hợp xảy ra đẳng thức.

2) Hoan nghênh hai bạn học sinh PTCS: *Vũ Ngọc Hưng, Phạm Đức Hiệp* (8T, Chu Văn An, Hải Phòng) đã cho lời giải đúng. Mặc dù còn dài.

3) Bài toán này dễ vì giả thiết tứ diện gần đều là quá mạnh. Các bạn hãy tìm cách mở rộng kết quả trên cho tứ diện bất kì. Chẳng hạn ta có thể mở rộng như sau:

Cho tứ diện $ABCD$, R, r theo thứ tự là bán kính cầu ngoại tiếp và nội tiếp tứ diện. V là thể tích của nó. Chứng minh rằng:

$$V^2 \le \frac{1}{8}\left(\frac{r}{R}\right)^2 AB.AC.AD.BC.CD.DE$$

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/245. *Một cầu thủ ghi bàn thắng bằng một quả phạt đền 11m. Bóng bay sát xà ngang vào gôn. Xà ngang cao h = 2,5m, khối lượng quả bóng m = 0,5kg. Bỏ qua sức cản của không khí. Hỏi phải truyền cho quả bóng một năng lượng cần thiết bằng bao nhiêu? Lấy g = 10m/s².*

Lời giải. Gọi α là góc bắn ("góc đá"). Từ phương trình chuyển động của bóng

$x = v_0\cos\alpha.t$, $y = v_0\sin\alpha t - \frac{gt^2}{2}$ và biết khi $x = L = 11m$ thì $y = h = 2,5m$, suy ra

$v_0^2 = \frac{gL^2(1 + tg^2\alpha)}{2(Ltg\alpha - h)}$ và năng lượng truyền cho bóng $W_đ = \frac{mv_0^2}{2}$. Muốn cho $W_đ$ đạt min thì phải có v_0^2 đạt min hay $t = \frac{1 + tg^2\alpha}{Ltg\alpha - h}$ min, rút ra phương trình

$$tg^2\alpha - 11ttg\alpha + 2,5t + 1 = 0.$$

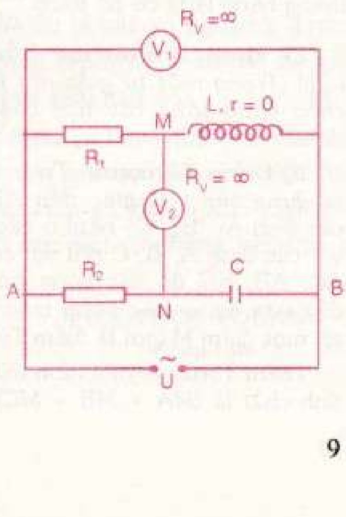
Với điều kiện $\Delta \ge 0$, tìm được $t \ge \frac{\sqrt{509} + 5}{121}$ hay $t_{min} = \frac{\sqrt{509} + 5}{121}$ và từ đó tìm được $W_{min} \approx 34J$.

Nhận xét. Các em có lời giải đầy đủ và gọn: *Thi Trần Anh Tuấn*, 12A₂, PTTH chuyên **Trà Vinh**; *Đặng Trần Trí*, 10CL, PTTH Lê Hồng phong, **Tp Hồ Chí Minh**; *Nguyễn Văn Đồng*, 11A₁, THCB Đào Duy Từ, Đồng Hới, **Quảng Bình**; *Nguyễn Thái Hà*, 12A₁, PTTH chuyên **Yên Bái**; *Trần Anh Tuấn*, 12A₂, PTTH Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng**; *Phạm Doanh Tuyen*, 11A chuyên **Vĩnh Phú**; *Nguyễn Thị Hương Loan*, 10TN1, trường năng khiếu **Hưng Yên**; *Lê Thanh Bình*, 11L, PTTH Lương Văn Tụy, **Ninh Bình**; *Hoàng Minh Tuấn*, 10C chuyên **Vĩnh Phúc**; *Phùng Đức Tuấn*, 12CT, PTTH Nguyễn Trãi, **Hải Dương**; *Lưu Văn Mạnh*, 11A₂ PTTH chuyên ban Ba Đình, Nga Sơn, **Thanh Hóa**; *Đỗ Văn Bảo*, 11A PTTH chuyên ban **Vĩnh Phúc**; *Phạm Mạnh Hùng*, 11A₂, chuyên **Yên Bái**; *Trần Thanh Thọ*, 10C, chuyên **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Hữu Quân*, 10 toán 1, PTTH chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định**; *Trần Nam Dũng*, 12CT, trường Phan Bội Châu, **Nghệ An**; *Võ Như Phương*, 12TT, trường Lê Quý Đôn, **Quảng Trị**; *Nguyễn Trung Dũng*, 10 lí, trường Lê Hồng Phong, **Nam Định**; *Nguyễn Khắc Chiến*, 12A, PTTH chuyên **Vĩnh Phúc**.

MAI ANH

Bài L2/245. *Cho mạch điện xoay chiều như hình vẽ. Hãy tìm công thức liên hệ giữa R_1, R_2, L, C sao cho hai vôn kế V_1 và V_2 chỉ cùng một giá trị.*

Hướng dẫn: Có thể giải bài toán bằng phương pháp giản đồ véctơ (đại đa số các em đều làm theo cách này) và bằng phương pháp áp dụng định luật Ôm. Dưới đây là cách giải bằng phương pháp tính toán theo định luật Ôm.



Xét nhánh AMB:

$I_1 = \dfrac{U}{\sqrt{R_1^2 + Z_L^2}}$, $tg\alpha_1 = \dfrac{Z_L}{R_1}$

suy ra $U_{R_1} = \dfrac{UR_1}{\sqrt{R_1^2 + Z_L^2}}$, $\cos\varphi_1 = \dfrac{R_1}{\sqrt{R_1^2 + Z_L^2}}$;

$\sin\varphi_1 = \dfrac{Z_L}{\sqrt{R_1^2 + Z_L^2}}$;

Xét nhánh ANB: $I_2 = \dfrac{U}{\sqrt{R_2^2 + Z_c^2}}$, $tg\alpha_2 = -\dfrac{Z_c}{R_z}$;

suy ra $U_{R_2} = \dfrac{UR_2}{\sqrt{R_2^2 + Z_c^2}}$, $\cos\varphi_2 = \dfrac{R_2}{\sqrt{R_2^2 + Z_c^2}}$,

$\sin\varphi_1 = \dfrac{-Z_c}{\sqrt{R_2^2 + Z_c^2}}$.

Từ đó $\vec{U}_{MN} = \vec{U}_{R_1} - \vec{U}_{R_2}$ hay

$U_{MN}^2 = U_{R_1}^2 + U_{R_2}^2 - 2U_{R_1}U_{R_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$

Thay các giá trị trên vào U_{MN}^2=

$$= U\left[\left(\frac{R_1}{\sqrt{R_1^2 + Z_L^2}}\right)^2 + \left(\frac{R_2}{\sqrt{R_2^2 + Z_c^2}}\right)^2 - 2\frac{R_1R_2(R_1R_2 - Z_LZ_c)}{(R_1^2 + Z_L^2)(R_2^2 + Z_c^2)}\right]$$

Theo đề bài $U_{MN} = U$, rút ra công thức cần tìm: $L = R_1R_2C$.

Nhận xét. Có 3 em đã giải bằng cả hai cách: Nguyễn Ngọc Tuấn, 11F chuyên Lí, PTTH chuyên Hùng Vương, Việt Trì, **Phú Thọ;** Nguyễn Nam Hải, 12A$_1$, PTTH Lê Quý Đôn, **Thái Bình;** Chu Mạnh Hoàng, 12A, PTTH Nghĩa Đàn, **Nghệ An.**

MAI ANH

BẠN CÓ BIẾT

MỘT SỐ ĐỊNH LÝ CỦA HÌNH HỌC PHẲNG

VŨ QUỐC LƯƠNG

(Trường THCS Chu Văn An - Hà Nội)

LTS. Ngoài những định lí quen biết đã được chính thức giới thiệu trong chương trình hình học phẳng ở phổ thông, tác giả giới thiệu với các bạn một số định lí thú vị thường được trình bày trong các buổi sinh hoạt ngoại khóa và bồi dưỡng học sinh giỏi. Tất cả các định lí này đều có thể chứng minh được chỉ bằng các kiến thức phổ thông.

1) Định lí Mênêlauýt (Nhà bác học cổ Hy Lạp - Thế kỷ I): *Nếu α, β, γ là 3 điểm nằm trên 3 cạnh BC, CA, AB* (hoặc phần kéo dài của các cạnh) của ΔBAC thì điều kiện cần và đủ để α, β, γ thẳng hàng là ta có hệ thức: $\dfrac{\alpha B}{\alpha C}\cdot\dfrac{\beta C}{\beta A}\cdot\dfrac{\gamma A}{\gamma B} = 1$

2) Định lí Ptôlêmê (Nhà bác học cổ Hy Lạp) :*Trong một tứ giác nội tiếp, tích hai đường chéo bằng tổng các tích của các cặp cạnh đối diện.*

3) Điểm Tôrixenli: *Trên các cạnh của ΔABC, ta dựng các tam giác đều ABC_1, BCA_1* sao cho các đỉnh A_1, B_1, C_1 nằm ở các phía khác nhau đối với các đỉnh A, B, C đối với các đường thẳng BC, AC, AB. Khi đó các vòng tròn ngoại tiếp các Δ đều vừa dựng (các vòng tròn Tôrixenli) đồng quy tại một điểm M (gọi là điểm Tôrixenli).

Điểm Tôrixenli nếu nằm trong ΔABC thì còn có tính chất là $(MA + MB + MC)$ là nhỏ nhất so với mọi điểm M khác nằm trong tam giác. Tôrixenli (1608 - 1647) là nhà bác học người Ý, người mà tên tuổi gắn liền với thí nghiệm ống Tôrixenli đo áp suất khí quyển.

4) Định lí Pascal (Nhà toán học và vật lí người Pháp: 1623 - 1662): Ba giao điểm của ba cặp cạnh đối diện của một lục giác nội tiếp trong một đường tròn nằm trên một đường thẳng.

Định lí được chứng minh nhờ định lí Mênelauýt. Pascal còn mở rộng định lí cho một hàng điểm bậc hai (đường cong bậc hai, thiết diện cônic) và định lí Pascal là một định lí cơ bản của hình học xạ ảnh sau này.

5) Định lí Briăngsôn (nhà toán học Pháp): Các đường chéo nối các đỉnh đối diện của một lục giác ngoại tiếp một đường tròn thì đồng quy tại một điểm (điểm Briăngsôn).

6) Định lí Đesacgơ: *Nếu hai tam giác ABC và A'B'C' có các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy tại O thì giao điểm các cạnh BC và B'C'; CA và C'A'; AB và A'B' thẳng hàng.*

7) Định lí Xêva (Nhà hình học Ý, chứng minh định lí năm 1678)

(Xem tiếp trang 14)

ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/249. Kí hiệu p_n là số nguyên tố thứ n ($n \geq 2$). Chứng minh rằng :

$$\frac{p_1 + p_2 + \dots + p_n}{n} \leq p_n - \frac{n^2 - n - 1}{n}$$

ĐOÀN QUANG MẠNH
(Hải Phòng)

Bài T2/249. Tồn tại bao nhiêu bộ ba các số tự nhiên x, y, z ($x < y < z$) sao cho $xyz = 10000$?

NGUYỄN ĐỄ
(Hải Phòng)

Bài T3/249. Tìm hai số nguyên m, n để hệ phương trình ẩn x sau đây có nghiệm nguyên:

$$\begin{cases} 4x^3 + mx^2 + 2x + 2m + 3n = 0 & (1) \\ nx^2 - 2x + 3n = 0 & (2) \end{cases}$$

NGUYỄN HỮU DỰ
(Nghệ An)

Bài T4/249. Cho ΔABC, I là tâm đường tròn nội tiếp. d là đường thẳng qua I cắt tia BC và các đoạn CA, AB theo thứ tự A_1, B_1, C_1. Chứng minh rằng:

$$\frac{BC}{IA_1} + \frac{CA}{IB_1} = \frac{AB}{IC_1}$$

NGUYỄN MINH HÀ
(Hà Nội)

Bài T5/249. Trên các cạnh BC, CD của hình vuông đơn vị $ABCD$ ta lấy các điểm M, N tương ứng sao cho $MC + CN + NM = 2$. Đường chéo BD cắt các đoạn AM, AN lần lượt tại các điểm P và Q. Chứng minh rằng các đoạn thẳng BP, PQ, QD lập thành 3 cạnh của một tam giác vuông.

ĐỖ THANH SƠN
(Hà Nội)

CÁC LỚP PTTH

Bài T6/249. Giải và biện luận phương trình

$$\operatorname{arctg}\frac{2x}{1 - x^2} = m\sqrt{1 - x^2} + 2\operatorname{arctg}x \quad m \in \mathbf{R}.$$

NGUYỄN ĐỨC TƯỞNG
(Gia Lai)

Bài T7/249. Cho số nguyên $m \geq 2$ và cho $n \in \mathbf{N}^*$. Chứng minh rằng:

$$\int_0^{\frac{1}{n}} \left(\sum_{k=1}^{n} (\cos x)^{km} + n\sin x \right) dx < \frac{5}{4}$$

TRẦN QUỐC QUANG
(Nghệ An)

Bài T8/249. Cho số nguyên $n \geq 8$ và cho một n-giác lồi. Giả sử có thể phân chia n-giác lồi đó thành các bát giác lồi sao cho mỗi cạnh của n-giác lồi là cạnh của một bát giác lồi. Chứng minh rằng, tồn tại 5 đỉnh liên tiếp của n-giác lồi là 5 đỉnh của cùng một bát giác lồi trong phân chia nói trên.

NGUYỄN KHẮC MINH
(Hà Nội)

Bài T9/249. Mệnh đề "Giao điểm hai đường phân giác trong của góc tạo bởi hai cặp cạnh đối diện kéo dài của một tứ giác lồi nằm trên đường thẳng nối trung điểm của hai đường chéo" (nếu một cặp cạnh đối diện nào đó song song với nhau thì coi *đường trung bình của chúng là đường phân giác trong*) đúng cho trường hợp nào:

1) Hình thang
2) Tứ giác ngoại tiếp
3) Tứ giác nội tiếp
4) Tứ giác lồi bất kì

Hãy giải thích câu trả lời.

VŨ ĐÌNH HÒA
(Hà Nội)

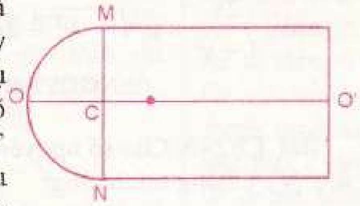
Bài T10/249. Gọi r và R lần lượt là bán kính các mặt cầu nội, ngoại tiếp một tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. Giả sử (O_i, p) ($i = 1, 2, 3, 4$) là bốn mặt cầu bằng nhau, cùng đi qua một điểm O' và cùng nằm trong tứ diện sao cho mặt cầu (O_i) tiếp xúc với ba mặt của tam diện đỉnh A_i của tứ diện $A_1A_2A_3A_4$.

Tính p theo R và r; từ đó suy ra cách dựng bốn mặt cầu nói trên

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT
(Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

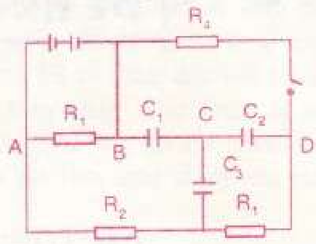
Bài L1/249. Hình vẽ bên là một khối thủy tinh hình trụ MM'NN', có một đầu M'N' phẳng, còn đầu kia có dạng bán cầu và bán kính CM = CO = 6cm. Toàn bộ mặt ngoài được bôi đen, chỉ để hở 2 lỗ nhỏ ở 2 đầu trên trục OO'.



Có 1 điểm sáng S trên trục, cách O một khoảng d = OS = 10cm. Biết chiết suất thủy tinh là n = 1,5, hãy tính độ dài OO' sao cho 2 ảnh của S khi mắt đặt tại O và khi mắt đặt tại O' cùng ở một vị trí S'.

TRẦN VĂN MINH
(Hà Nội)

Bài L2/249. Một mạch điện được mắc như hình vẽ:



Mỗi pin suất điện động e = 1,5V và điện trở trong r = 0,5Ω. R_1 = 3Ω, $R_2 = R_3 = R_4$ = 2Ω. $C_1 = C_2 = C_3 = 3.10^{-6}$F. Tìm điện lượng trên mỗi tụ khi k mở và khi k đóng

PHẠM HÙNG QUYẾT
(Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/249. Let p_n be the n^{th} prime number ($n \geq 2$). Prove that

$$\frac{p_1 + p_2 + ... + p_n}{n} \leq p_n - \frac{n^2 - n - 1}{n}$$

T2/249. How many are there triplets of whole numbers x, y, z ($x < y < z$) satisfying $zyz = 10000$?

T3/249. Find two integers m, n so that the following system of equations with unknown x has integer solution:

$4x^3 + mx^2 + 2x + 2m + n = 0$

$nx^2 - 2x + 3n = 0$

T4/249. Let I be the incenter of a triangle ABC. d is a line passing through I cutting the ray BC and the sides CA, AB respectively at A_1, B_1, C_1. Prove that

$$\frac{BC}{IA_1} + \frac{CA}{IB_1} = \frac{AB}{IC_1}$$

T5/249. On the sides BC, CD a unit square $ABCD$, take respectively the points M, N so that $MC + CN + NM = 2$. The diagonal BD cuts the segments AM, AN respectively at P, Q. Prove that the segments BP, PQ, QD form three sides of a right - angled triangle.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/249. Solve the following equation, where m is a parameter:

$$\text{arctg}\frac{2x}{1 - x^2} = m\sqrt{1 - x^2} + 2\text{arctg}x, \; m \in \mathbf{R}.$$

T7/249. Let be given integers $m \geq 2$, $n \in \mathbf{N}^*$. Prove that

$$\int_0^{1/n}\left(\sum_{k=1}^{n}(\cos x)^{km} + n\sin x\right)dx < \frac{5}{4}$$

T8/249. Let be given an integer $n \geq 8$ and a convex n-polygon. Suppose that this n-polygon is partitioned in convex octagons so that each side of the n-polygon is a side of a such octagon. Prove that there exist five consecutive vertices of the n-polygon which are five vertices of a such octagon.

T9.249. Consider the proposition: "the point of intersection of two inner angled-bisectors of the angles formed by the two extended opposite sides of a convex quadrilateral lies on the line joining the midpoints of its two dagonals" (if a pair of opposite sides are parallel, their midline is considered as its inner angled-bisector). Is this proposition true when the considered quadrilateral is:

1) a trapezium,
2) an circumscibable quadrilateral,
3) an isscribable quadrilateral,
4) an arbitrary quadrilateral?

Justify your answer.

T10/249. Let r and R be respectively the radii of the inscribed and circumscribed spheres of a tetrahedron $A_1A_2A_3A_4$. Let (O_i, p) (i = 1, 2, 3, 4) be four equal spheres lying inside the tetrahedron, passing through a common pont O' and so that the sphere (O_i) is tangent to three faces passing though vertex S_i of the tetrahedron $A_1A_2A_3A_4$.

Calculate p in terms of R and r and deduce from it, the construction of these four spheres.

Bước đầu làm quen VỚI TOÁN HỌC HIỆN ĐẠI

ĐẠI SỐ là gì?

NGÔ VIỆT TRUNG

ĐẠI số là một ngành lớn của toán học. Đối tượng nghiên cứu của Đại số là các phép tính, ví dụ như cộng trừ nhân chia, cụ thể hơn là các mối quan hệ giữa các phép tính được thể hiện qua các phương trình. Ví dụ như luật giao hoán của phép cộng được thể hiện qua các đẳng thức:

$$a + b = b + a$$

hay luận kết hợp qua đẳng thức

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Các phép tính không nhất thiết phải là các phép tính trên các số thông thường mà chúng có thể là các phép tính trên các vật hay các khái niệm. Ví dụ như ta có thể xét các phép quay theo một góc quanh một điểm cho trước. Khi đó ta có thể coi việc thực hiện liên tiếp hai phép quay là tổng của hai phép quay. Nếu ta coi các phép quay ngược chiều kim đồng hồ là các phép quay dương, còn theo chiều kim đồng hồ là các phép quay âm thì ta cũng có thể làm tính trừ với các phép quay.

Có thể nói môn Đại số có lịch sử lâu đời nhất trong toán học. Ví dụ như ngay từ đầu con người đã phải giải các bài toán cộng đại loại như "A có ba con gà, B có năm con gà, hỏi A và B có bao nhiêu con gà?" hay các bài toán so sánh như "A có ba con gà, B có hơn A hai con gà hỏi B có bao nhiêu con gà?". Tuy nhiên phần lớn các kiến thức cơ bản về Đại số đều được phát hiện ra trong những thế kỉ gần đây. Ví dụ như phương pháp tọa độ mà chúng ta quen dùng được nhà toán học Đêcác đưa ra ở đầu thế kỉ mười bảy. Phương pháp này đã thúc đẩy sự phát triển toán học nói chung và ngành đại số nói riêng lên một bước nhảy vọt. Nó cho phép ta biểu diễn các hình hình học dưới dạng một phương trình. Ví dụ như một đường thẳng bất kì có thể biểu diễn bởi tập nghiệm của phương trình

$$ax + by = c$$

Một đường tròn có thể hiểu là tập nghiệm của phương trình

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Giao điểm của đường thẳng và đường tròn có thể hiểu là tập nghiệm của hệ phương trình bao gồm hai phương trình trên.

Đại số hiện đại được bắt đầu với công trình của Galoa về nghiệm các phương trình bậc cao ở đầu thế kỉ hai mươi. Qua những phát hiện của Galoa người ta thấy rằng nếu các phép tính trên các đối tượng khác nhau tuân thủ một số nguyên tắc tính toán cơ bản thì các đối tượng đó sẽ có một số tính chất giống nhau. Ví dụ như việc thực hiện các phép quay cũng giống như việc tính toán các con số. Trước tiên, tổng hai phép quay cũng có tính chất giao hoán vì kết quả việc thực hiện liên tiếp các phép quay không phụ thuộc vào thứ tự thực hiện các phép quay đó. Do đó người ta có thể đồng nhất một phép quay theo góc α với số α. Các phép tính cộng và trừ hai phép quay theo hai góc α và β sẽ ứng với tổng hay hiệu của hai số α và β. Chỉ khác là hai phép quay sẽ trùng nhau nếu hiệu hai góc quay là 360 (độ) và ta không có phép nhân hai phép quay như phép nhân hai số.

Chuyên ngành cơ sở nhất của đại số là Đại số tuyến tính. Đối tượng nghiên cứu chuyên ngành này là các phương trình tuyến tính có dạng:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

Nhiều người trong chúng ta chắc đã biết đến các véctơ. Khái niệm này đóng một vai trò chủ đạo trong Đại số tuyến tính. Có thể coi các véctơ như là các điểm của một hệ tọa độ (hay là các đoạn thẳng có định hướng). Với quan niệm này thì mỗi một nghiệm của một phương trình tuyến tính là một véctơ và bản thân một phương trình tuyến tính như trên cũng có thể coi như là véctơ có tọa độ $(a_1, \ldots, a_n)$. Người ta có thể tính tổng hai véctơ và nhân một số với một véctơ như sau:

$$(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) =$$
$$= (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n),$$
$$c(a_1, \ldots, a_n) = (ca_1, \ldots, ca_n)$$

Việc nghiên cứu hai phép tính này đã làm nên cả một lí thuyết toán học. Đại số tuyến tính có ứng dụng trong hầu hết các ngành khoa học tự nhiên, kĩ thuật và trong cả kinh tế.

Để tiện nghiên cứu các phép tính giống nhau trên các đối tượng khác nhau người ta đã đưa ra các khái niệm *nhóm*, *vành*, *trường*. Có thể hiểu *nhóm* là một tập hợp các đối tượng nào đó mà trên đó người ta có thể thực hiện được hai phép tính tương tự như các phép tính cộng và trừ các số. Ví dụ như tập hợp các phép quay làm thành một *nhóm*. Nếu một *nhóm* có phép nhân thì nó là một *vành*. Ví dụ như tập hợp các số là một *vành*, còn tập hợp các phép quay không phải là một *vành*. Một *vành* có thêm phép chia thì được gọi là một *trường*. Chú ý là phép chia phải cho hai kết quả trong tập hợp cho trước. Ví dụ như tập hợp các số nguyên là một *vành* nhưng không phải là một *trường* vì phép chia hai số nguyên không phải là lúc nào cũng cho ta một số nguyên. Trong lúc đó tập hợp các số hữu tỉ hay các số thực là một *trường*. Từ những khái niệm trên đã sinh ra các chuyên ngành của Đại số như là Lí thuyết nhóm, Lí thuyết vành, Lí thuyết trường. Đây cũng là những chuyên ngành cơ bản của Đại số.

Ngoài các chuyên ngành cơ bản trên, Đại số còn có nhiều chuyên ngành khác. Một trong những chuyên ngành đó là Đại số giao hoán. Đối tượng nghiên cứu chính của chuyên ngành này là các vành trong đó phép nhân thỏa mãn luật giao hoán, chủ yếu là vành các đa thức nhiều biến. Các đa thức này có dạng

$$\sum c_{i_1 \ldots i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}$$

với $c_{i1 \ldots in}$ là các số và $x_1, \ldots, x_n$ là các biến số không xác định. Mỗi một đa thức ứng với một phương trình nhiều biến bậc cao. Như ta đã thấy ở trên mỗi một hình hình học đều có thể coi như là tập nghiệm của một hệ các đa thức. Vì vậy Đại số giao hoán có mối liên quan chặt chẽ đến việc giải các phương trình nhiều biến bậc cao là đối tượng của một chuyên ngành khác là Hình học đại số.

Ở Việt Nam các chuyên ngành Lí thuyết vành, Đại số giao hoán và Hình học đại số được nghiên cứu chủ yếu ở Viện toán học (Trung tâm khoa học tự nhiên và công nghệ quốc gia). Các nhà toán học Việt Nam trong các chuyên ngành này đã công bố gần 200 công trình ở các tạp chí quốc tế, trong đó có hầu hết các tạp chí toán học hàng đầu của thế giới. Nhiều công trình đã mở đầu một số hướng nghiên cứu mới. Đặc biệt là tất cả các sách chuyên khảo về Đại số giao hoán được viết trên thế giới trong khoảng 12 năm trở lại đây đều có trích dẫn một số công trình của các nhà toán học Việt Nam. Vì những thành tựu này mà họ đã được mời báo cáo tại nhiều hội nghị quốc tế và nhiều trường đại học ở Mỹ, Anh, Pháp, Đức, Nhật, Italia, v.v... Ngay tại Việt Nam ta cũng đã tổ chức được hai hội nghị quốc tế về Đại số và Hình học (Hà Nội, 8/1996) và về Lí thuyết vành và modun (Huế, 8/1997) với sự tham gia của nhiều chuyên gia quốc tế đầu ngành. Tất cả những điều trên chỉ là một trong nhiều ví dụ chứng tỏ sự trưởng thành vượt bậc của ngành Đại số ở Việt Nam trong những năm gần đây.

Bạn nào có ý định tìm hiểu sâu thêm về môn Đại số có thể liên hệ với phòng Đại số và Lí thuyết số của Viện Toán học (địa chỉ gửi thư: Hòm thư 631, Bưu điện Bờ Hồ, Hà Nội), tel: 8361317.

MỘT SỐ ĐỊNH LÝ... *(Tiếp theo trang 10)*

... Cho 3 điểm α, β, γ theo thứ tự nằm trên các cạnh BC, CA, AB (hoặc phần kéo dài của các cạnh ấy) của một $\triangle BAC$. Điều kiện cần và đủ để các đường thẳng Aα, Bβ, Cγ đồng quy là ta có hệ thức:

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \cdot \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = -1.$$

8) Đường thẳng Ole: *Trong một tam giác, trực tâm H, trọng tâm G, tâm vòng tròn ngoại tiếp O thẳng hàng và thỏa mãn hệ thức HG = 2GO* (đường thẳng ole).

9) Đường tròn Ole: *Trong một tam giác, 3 trung điểm của 3 cạnh, 3 chân của các đường cao và 3 trung điểm của các đoạn thẳng nối trực tâm với đỉnh nằm trên một đường tròn (Gọi là đường tròn Ole).*

10) Hệ thức Ole: *Gọi R, r, d lần lượt là bán kính đường tròn ngoạ tiếp, bán kính đường tròn nội tiếp và khoảng cách giữa hai tâm vòng tròn nội tiếp và ngoại tiếp của một $\triangle ABC$. Khi đó ta có hệ thức:* $R^2 - d^2 = 2Rr$.

11) Định lí Stiva (nhà toán học Anh, công bố năm 1746) *Nếu D là một điểm tùy ý nằm trên cạnh BC của $\triangle BAC$ thì khi cho AD* là trung tuyến; phân giác của $\triangle BAC$ ta có được công thức tính đường trung tuyến đường phân giác theo 3 cạnh *a*, *b*, *c* ngay ở trình độ lớp 8, 9 PTCS:

$$m_a = \frac{1}{a}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

$$d_a = \frac{1}{b+c}\sqrt{bc(b+c+a)(b+c-a)}$$

12) Đường thẳng Simson (Rôbe Simson - nhà toán học Anh: 1687 - 1768). *Cho $\triangle BAC$ nội tiếp đường tròn O. M là một điểm tùy ý trên đường tròn. Chứng minh rằng chân các đường vuông góc hạ từ M tới 3 cạnh của $\triangle BAC$ thẳng hàng.*

Một điều thú vị là Simson chính là thầy dạy của Stivatơ và đã thông báo cho học trò biết kết quả của hệ thức 11 ở trên, sau đó Stivatơ mới chứng minh.

13) Định lí Niutơn (Ixắc Niutơn - nhà vật lí và toán học vĩ đại người Anh: 1643 - 1727): *Chứng minh rằng trong một tứ giác ngoại tiếp đường tròn. Các trung điểm của hai đường chéo thẳng hàng với tâm đường tròn.*

14) Định lí Gauxơ (Kaclow Gauxơ - nhà toán học Đức: 1777 - 1853). *Chứng minh rằng đường thẳng nối trung điểm hai đường chéo của một tứ giác lồi (không phải là hình bình hành hay hình thang) đi qua trung điểm của đoạn thẳng nối giao điểm của các cặp cạnh đối diện.*

15) Định lí Feuerbach (Nhà triết học và toán học Đức): *Trong một tam giác, đường tròn ole tiếp xúc với vòng tròn nội tiếp và ba vòng tròn bàng tiếp của tam giác.*

16) Công thức Lépnít (Nhà triết học, toán học Đức: 1646 - 1716): *Nếu G là trọng tâm của $\triangle BAC$, M là một điểm tùy ý trong mặt phẳng chứa tam giác thì:*

$$MG^2 = \frac{1}{3}(Ma^2 + MB^2 + MC^2) - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2).$$

18) Điểm Brôka (Nhà toán học Pháp: 1845 - 1922): *Tìm điểm N trong $\triangle BAC$ sao cho : NBC = NAB = NCA.*

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN TOÁN TỈNH THANH HÓA NĂM HỌC 1996-1997

A- LỚP 9

Bài 1: a) Với giá trị nguyên dương nào của n thì $(n-1)! \vdots n$

b) Chứng minh rằng hai số tự nhiên lẻ n và $n+2$ là cặp số nguyên tố song đôi khi và chỉ khi $(n-1)!$ không chia hết cho cả n và $n+2$.

Bài 2: Giả sử x_0 là một nghiệm dương của phương trình $x^n = x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1$. Với n là số nguyên và $n \geq 2$. Chứng minh rằng $2 - \frac{1}{n} < x_0 < 2$.

Bài 3: Giải hệ phương trình 9 ẩn số sau:

$$\begin{cases} x_1(x_2 - x_3 + x_4) < 0 & (1) \\ x_2(x_3 - x_4 + x_5) < 0 & (2) \\ \dots\dots\dots\dots & \\ x_8(x_9 - x_1 + x_2) < 0 & (8) \\ x_9(x_1 - x_2 + x_3) < 0 & (9) \end{cases}$$

Bài 4: Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn tâm O và có các cạnh đối không song song. Hãy dựng hình bình hành $MNPQ$ sao cho các đỉnh M, N, P, Q tương ứng nằm trên các cạnh AB, BC, CD, DA và có các đường chéo gặp nhau tại O. Chứng minh rằng bài toán luôn luôn có một nghiệm hình.

Bài 5: Trên đường tròn có độ dài bằng $6k$ (k nguyên dương ta đánh dấu $3k$ điểm chia đường tròn thành $3k$ cung trong đó có k cung độ dài bằng 1, k cung độ dài bằng 2, và k cung độ dài bằng 3. Chứng minh rằng trong số các điểm được đánh dấu luôn có hai điểm đầu là hai đầu của một đường kính.

B- LỚP 12

Ngày thứ nhất

Bài 1: Tại mỗi đỉnh của một tứ diện người ta viết một số thực. Trên mỗi cạnh của nó ta viết tổng các số tại các đầu mút của các cạnh đó. Biết rằng tổng các số trên tất cả các cạnh bằng 6 và tổng các lập phương của các số trên các cạnh cũng bằng 6. Hãy tính tổng các lũy thừa bậc 1996 của các số trên các cạnh của tứ diện.

Bài 2: Giả sử k là một số nguyên dương không vượt quá 1996. Dọc theo một đường tròn người ta viết 1997 số thực sao cho tổng của k số liên tiếp bất kì không vượt quá k. Chứng minh rằng tổng của tất cả các số đã cho được giá trị lớn nhất khi và chỉ khi mỗi số bằng 1.

Bài 3: Cho lục giác $ABCDEF$ có AB song song với DE, BC song song với EF và CD song song với FA. Chứng minh rằng nếu tổng các bán kính các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, BCD, CDE, DEF, EFA và FAB bằng chu vi của lục giác thì nó là lục giác đều.

Ngày thứ hai

Bài 4: Cho đa thức $P(x, y) = x^4 + y^4$

a) $P(x, y)$ có thể phân tích thành tích các đa thức hệ số nguyên của x, y với bậc thấp hơn được không?

b) Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của đa thức khi x, y thay đổi trong tập hợp các số nguyên dương sao cho $P(x, y)$ chia hết cho tích 1997×1999

Bài 5: Cho dãy số $x_0, x_1, x_2, ...$ thỏa mãn $x_0 = a$ và $3x_n + \frac{1}{x_n} = x_{n-1} + \frac{3}{x_{n-1}}$ với $n = 1, 2, ...$

Tìm tập hợp các giá trị của a sao cho các số hạng của dãy trên đều là các số nguyên. Trong trường hợp đó chứng minh rằng dãy số có giới hạn và tìm giá trị của giới hạn đó.

Bài 6: Một tứ diện có bán kính mặt cầu nội tiếp bằng 1. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của bán kính mặt cầu ngoại tiếp và giá trị nhỏ nhất của tổng các bán kính các mặt cầu bàng tiếp của tứ diện đó.

PHẠM NGỌC QUANG
(Sưu tầm)

THỬ ĐI TÌM SỐ e... TRONG NGÂN HÀNG

HOÀNG CHÚNG
(TP Hồ Chí Minh)

Trong toán học, có ba hằng số rất quan trọng là π, i, và e. Mọi người đều quen thuộc với số $\pi = 3.14159...$ và biết ít nhiều chuyện thú vị về hằng số này. Số $i = \sqrt{-1}$ là đơn vị ảo; mọi số phức có thể viết dưới dạng $a + bi$, trong đó a, b là hai số thực (số thực là trường hợp đặc biệt của số phức khi $b = 0$); ngày nay khó mà hình dung nổi sự phát triển nhiều ngành của toán học mà không có số i.

Còn số e? Các bạn lớp 11 có thể biết rằng $e = 2.71828...$ là giới hạn của dãy số $(1 + 1/n)^n$ khi n tăng vô cùng.

$$e = \lim_{n \to \infty} (1 + 1/n)^n = 2.71828..$$

e là một số vô tỉ, hơn nữa là một số siêu việt (không là nghiệm của bất kì đa thức có hệ số nguyên nào). Bảng sau đây cho một số giá trị gần đúng của e (bạn có thể kiểm tra lại, nhờ một máy tính bỏ túi, loại máy khoa học).

n	$(1 + 1/n)^n$
1	2.000
2	2.25000
5	2.48832
10	2.59374...
100	2.70481...
250	2.71286...
1000	2.71688...
7500	2.71810...
10000	2.71815
100000	2.71825...
150000	2.71827
....	....

Với $n = 100$, $n = 1000$, $n = 10000$, ta có giá trị gần đúng của e, chính xác tương ứng đến 1, 2, 3 chữ số thập phân.

Điều thú vị là giữa ba hằng số π, i, e có *hệ thức Euler* sau đây:

$$e^{2\pi i} = 1.$$

và cả ba kí hiệu π, i, e đều do nhà toán học vĩ đại *L.Euler* (1707-1783) đưa ra.

Số e có vai trò quan trọng trong nhiều lĩnh vực của toán học và cả khoa học khác. ở trường phổ thông, chúng ta đã biết đến vai trò của *lôgarit cơ số e*.

Sau đây, ta tìm hiểu sự xuất hiện số e trong một việc quen thuộc là *gửi tiền tiết kiệm vào ngân hàng*.

Trong ngân hàng, có hai cách tính lãi tiền gửi tiết kiệm: *lãi đơn và lãi kép*. Giả sử lãi suất là r / đơn vị thời gian (đơn vị thời gian có thể là năm, tháng, ngày...). Nếu tính lãi đơn thì cứ 1 đồng gửi tiết kiệm, sau k đơn vị thời gian ta sẽ được:

$$1 + k.r.$$

Nếu tính *lãi kép* thì *tiền lãi sau mỗi đơn vị thời gian được gộp vào vốn để tính lãi cho đơn vị thời gian tiếp sau đó*, vì vậy sau k đơn vị thời gian, với mỗi đồng gửi tiết kiệm, ta sẽ được

$$(1 + r)^k = (1 + 1/n)^k \ (*) \quad \text{với } r = 1/n.$$

Trong trường hợp $k = n$ thì (*) cho ta

$$(1 + 1/n)^n.$$

Hiện nay, nếu ta gửi tiền tiết kiệm theo *thể thức có kì hạn* (3 tháng, 6 tháng...) thì ta sẽ được lãi đơn (theo 3 tháng). Nếu lãi suất là 0.8%/tháng (0.8% = 0.08 = 1/125) thì gửi 1 đồng sau 3 tháng ta sẽ có được số tiền cả vốn lẫn lãi là:

$$1 + 3.0.08 = 1 + 3/125.$$

Nếu ta gửi tiền tiết kiệm theo *thể thức không kì hạn* thì ta sẽ được *lãi kép theo tháng* và lãi đơn theo ngày, với số ngày dôi ra chưa đủ tháng. Giả sử lãi suất là 0.4%/tháng (0.4% = 0.04 = 1/250). Với 1 đồng tiền gửi, sau 3 tháng, theo (*) ta có được số tiền cả vốn lẫn lãi là:

$$(1 + 0.004)^3 = (1 + 1/250)^3$$

Nếu gửi 3 tháng 12 ngày thì với 12 ngày sau, số tiền $(1 + 1/250)^3$ được tính lãi đơn theo ngày, lãi suất là $1 : (250 \times 30)$ / ngày.

Nếu ta gửi tiền tiết kiệm không kì hạn, với tiền lãi mỗi tháng là 0.4%, 1/250, thì sau 250 tháng ta có được số tiền.

$$(1 + 1/250)^{250} = 2.71286...$$

tức là *xấp xỉ e đồng* (chính xác đến 2 chữ số thập phân).

Bây giờ, giả sử cũng với lãi suất 0.4%/tháng.

+ Nếu ngân hàng *trả lãi kép theo ngày* (coi mỗi tháng có 30 ngày, mỗi ngày tính lãi 0.004/30 = 1/7500) thì sau 7500 ngày (250 tháng) ta có số tiền $(1 + 1/7500)^{7500} = 2.71810...$

(Xem tiếp trang 17)

Nhị thức NIU-TƠN với các hàm số SIN và COSIN

NGUYỄN CÔNG SỨ
(Hà Nội)

Trong rất nhiều các công thức lượng giác đã biết, ta lưu ý đến hai công thức:

$$\mathrm{Cos}(A+B) = \mathrm{Cos}A\,\mathrm{Cos}B - \mathrm{Sin}A\,\mathrm{Sin}B \quad (1)$$

$$\mathrm{Sin}(A+B) = \mathrm{Sin}A\,\mathrm{Cos}B + \mathrm{Cos}A\,\mathrm{Sin}B \quad (1')$$

Từ đó ta có:

$$\mathrm{Cos}2X = \mathrm{Cos}^2X - \mathrm{Sin}^2X \quad (2)$$

$$\mathrm{Sin}2X = 2\mathrm{Sin}X\,\mathrm{Cos}X \quad (2')$$

Với các phân tích liên tiếp, có thể dẫn đến

$$\mathrm{Cos}3X = \mathrm{Cos}(2X+X) = \mathrm{Cos}^3X - 3\mathrm{Sin}^2X\mathrm{Cos}X \quad (3)$$

$$\mathrm{Sin}3X = \mathrm{Sin}(2X+X) = 3\mathrm{Cos}^2X - \mathrm{Sin}^3X \quad (3')$$

$$\mathrm{Cos}4X = \mathrm{Cos}(3X+X) = \mathrm{Cos}^4X - 6\mathrm{Cos}^2X\mathrm{Sin}^2X + \mathrm{Sin}^4X \quad (4)$$

$$\mathrm{Sin}4X = \mathrm{Sin}(3X+X) = 4\mathrm{Cos}^3X\mathrm{Sin}X - 4\mathrm{Cos}X\mathrm{Sin}^3X \quad (4')$$

$$\mathrm{Cos}5x = \mathrm{Cos}(4X+X) = \mathrm{Cos}^5X - 10\mathrm{Cos}^3X\mathrm{Sin}^2X + 5\mathrm{Cos}X\,\mathrm{Sin}X \quad (5)$$

$$\mathrm{Sin}5X = \mathrm{Sin}(4X+X) = 5\mathrm{Cos}^4X\mathrm{Sin}X - 10\mathrm{Cos}^2X\mathrm{Sin}^3X + \mathrm{Sin}^5X \quad (5')$$

Các công thức trên và các biến đổi tương đương của chúng thường được sử dụng trong việc giải các bài tập lượng giác, đặc biệt là trong các bài thi tuyển roman (Sin) h vào các trường đại học, cao đẳng và trung học chuyên nghiệp. Để làm giảm nhẹ việc nhớ các công thức trên ta có thể lưu ý tới tính quy luật được rút ra trên cơ sở viết lại các công thức đó dưới dạng bảng sau:

Sin2X	=	$2\mathrm{Sin}X\,\mathrm{Cos}X$
Cos2X	=	$\mathrm{Cos}^2X - \mathrm{Sin}^2X$
Sin3X	=	$3\mathrm{Cos}^2X\,\mathrm{Sin}X - \mathrm{Sin}^3X$
Cos3X	=	$\mathrm{Cos}^3X - 3\mathrm{Cos}X - \mathrm{Sin}^2X$
Sin4X	=	$4\mathrm{Cos}^3X\,\mathrm{Sin}X - 4\mathrm{Cos}X\,\mathrm{Sin}^3X$
Cos4X	=	$\mathrm{Cos}^4X - 6\mathrm{Cos}^2X\,\mathrm{Sin}^2X + \mathrm{Sin}^4X$
Sin5X	=	$5\mathrm{Cos}^4X\,\mathrm{Sin}X - 10\mathrm{Cos}^3X\,\mathrm{Sin}^3X + \mathrm{Sin}^5X$
Cos5X	=	$\mathrm{Cos}^5X - 10\mathrm{Cos}^3X\,\mathrm{Sin}^2X + 5\mathrm{Cos}X\,\mathrm{Sin}^2X$

(Xem tiếp trang 19)

THỬ ĐI TÌM... *(Tiếp theo trang 16)*

...tức là *gần hơn e đồng* (chính xác đến 3 chữ số thập phân).

– Nếu ngân hàng *trả lãi kép theo giờ*, tiền lãi mỗi giờ là 1/(750 × 24) = 1/150000, thì sau 150000 giờ (250 tháng) ta có số tiền

$$(1 + 1/150000)^{150000} = 2.71827...$$

+ Nếu *trả lãi kép theo giây* (tiền lãi mỗi giây là 1/(150000 × 60 × 60 = 1/540000000) thì sau 540000000 giây (250 tháng), ta có số tiền càng gần hơn đến *e* đồng.

$$(1 + 1/540000000)^{540000000} = 2.71828...$$

Từ đó, có thể hình dung rằng nếu được *trả lãi kép liên tục* với lãi suất 0.4%/tháng (0.4% = 1/250) thì sau 250 tháng, ta có số tiền

$$(1 + 1/n)^n \text{ với } n \to \infty$$

tức là có *đúng e đồng*.

Tổng quát, dễ thấy rằng *nếu ta gửi tiết kiệm A đồng và được trả lãi kép liên tục với lãi suất r/tháng (r = 1/n) thì sau thời gian t tháng ta sẽ được số tiền là*

$$p = Ae^{rt} = Ae^{t/n}.$$

Trong thí dụ trên đây, $r = 0{,}4\% = 1/250$, do đó sau 250 tháng ($t = 250$), ta có số tiền $p = Ae$.

Vì vậy, chúng ta hiểu vì sao số *e* có khi được gọi là *hằng số ngân hàng*.

HỌC SINH TÌM TÒI

Các bạn thân mến, chắc các bạn đã biết có những định lí đẹp trong toán học lại bắt nguồn từ những bài toán khá đơn giản. Do đó, trong quá trình học toán nếu chúng ta biết lật đi lật lại những bài toán đó thì có thể thu được rất nhiều điều mới mẻ và bổ ích. Sau đây tôi xin trình bày một số kết quả khá thú vị mà tôi đã tìm được trong quá trình giải toán.

CÁC KHÍA CẠNH THÚ VỊ CỦA NHỮNG BÀI TOÁN ĐƠN GIẢN

LƯU MINH ĐỨC
Lớp 12 PTNK, ĐHQG Tp Hồ Chí Minh

Bài toán sau đây rất quen thuộc với chúng ta : "*Cho A, B, C là 3 góc của một tam giác. Chứng minh rằng:* $\sin A + \sin B + \sin C \le 3\sqrt{3}/2$ (1)"

Chứng minh:

Ta chứng minh *kết luận mạnh hơn*:

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \le \frac{9}{4}$$

Thật vậy, ta có:

$$\frac{9}{4} - (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) =$$

$$= (\frac{1}{2} - \sin^2 A) + (\frac{1}{2} - \sin^2 B) + (1 - \sin^2 C) + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{\cos 2A}{2} + \frac{\cos 2B}{2} + \cos^2 C + \frac{1}{4}$$

$$= \cos(A+B)\,.\,\cos(A-B) + \cos^2 C + \frac{1}{4}$$

$$= \cos^2 C - \cos C.\cos(A-B) + \frac{1}{4} =$$

$$= (\cos C - \frac{1}{2}\,.\,\cos(A-B))^2 + (\frac{1}{4} - \frac{1}{4}.\cos^2(A-B)) \ge 0$$

Sau khi giải bài toán này tôi nghĩ: mình thử biểu diễn sinA, sinB, sinC qua các đại lượng khác trong tam giác để xem sẽ thu được gì? Cụ thể là:

$\sin A = 2S/bc$; $\sin B = 2S/ac$; $\sin C = 2S/ab$
(với S, a, b, c lần lượt là diện tích và độ dài 3 cạnh của tam giác)
và ta được:

$(1) \Leftrightarrow 2S(1/ab + 1/bc + 1/ca) \le 3\sqrt{3}/2$

$\Leftrightarrow 2S(1/ab + 1/bc + 1/ca)(ab + bc + ca)$
$\le 3\sqrt{3}/2(ab + bc + ca)$ (2)

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacốpxki ta được:

$$(ab + bc + ca)(1/ab + 1/bc + 1/ca) \ge 9 \quad (3)$$

Từ (2), (3) ta suy ra:

$$3\sqrt{3}/2(ab + bc + ca) \ge 18S \Rightarrow ab + bc + ca \ge 4S\sqrt{3}$$

Kết quả ta thu được chính là trường hợp mạnh hơn của bài toán :"*Nếu a, b, c là 3 cạnh của một tam giác và S là diện tích của tam giác đó thì* $a^2 + b^2 + c^2 \ge 4S\sqrt{3}$". Bài toán này được đề cập trong khá nhiều tài liệu.

Bằng cách tương tự, từ những bất đẳng thức lượng giác khác trong tam giác bạn có thể tìm được các bất đẳng thức giữa các cạnh, giữa cạnh và diện tích. Chẳng hạn từ:

$$\cos A + \cos B + \cos C \le 3/2$$

bạn sẽ thu được bất đẳng thức:

$$a(b^2 + c^2 - a^2) + b(c^2 + a^2 - b^2) + c(a^2 + b^2 - c^2) \le 3abc$$

Có lần tôi gặp phải bài toán :"Cho tam giác nhọn ABC. Gọi H, O lần lượt là trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác. Chứng minh rằng $\widehat{HAO} = |\hat{B} - \hat{C}|$".

Lời giải của bài toán trên khá đơn giản, nhưng tôi nhận thấy $\hat{B} - \hat{C}$ là một góc đặc biệt nên thử áp dụng định lí hàm số cosin cho tam giác HAO thì tôi được:

$\cos(B-C) = \cos(|B-C|) = \cos HAO$
$= (HA^{2w} + OA^2 - OH^2)\,/\,(2HA.OA)$
$\Leftrightarrow \cos(B-C) = (HA^2 + R^2 - OH^2)\,/\,(2R.HA)$
$\Leftrightarrow AH\,.\cos(B-C) = (HA^2 + R^2 - OH^2)\,/\,2R.$

Tương tự:

$BH\cos(C-A) = (HB^2 + R^2 - OH^2)\,/\,2R$
$CH\cos(A-B) = (HC^2 + R^2 - OH^2)\,/\,2R$

Cộng các đẳng thức trên vế với vế, ta được:

$AH\cos(B-C) + BH.\cos(C-A) + CH.\cos(A-B) =$
$= (HA^2 + HB^2 + HC^2 + 3R^2 - 3OH^2)\,/\,2R\ (*)$

Nhận xét rằng $HG \ge OG$ nên

$$HA^2 + HB^2 + HC^2 \ge OA^2 + OB^2 + OC^2 = 3R^2$$

và hơn nữa: $OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$

Kết hợp với (*) ta thu được:

$$\frac{HA^2+HB^2+HC^2+3R^2-3OH^2}{2R} \geq$$

$$\geq \frac{3R^2+3R^2-3(9R^2-(a^2+b^2+c^2))}{2R} =$$

$$= \frac{3(a^2+b^2+c^2)-21R^2}{2R}$$

$$\Rightarrow AH.\cos(B-C)+Bh.\cos(C-A)+CH.\cos(A-B) \geq$$

$$\geq \frac{3(a^2+b^2+c^2)-21R^2}{2R}$$

Vậy ta đã có bài toán :"*Cho tam giác nhọn ABC. Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp, H là trực tâm của tam giác. Chứng minh rằng:*

$$AH.\cos(B-C)+BH.\cos(C-A)+CH.\cos(A-B) \geq$$

$$\geq \frac{3(a^2+b^2+c^2)-21R^2}{2R}$$

Dấu "bằng" xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều".

Nếu tam giác ABC tù thì kết quả sẽ ra sao? Và với những điểm đặc biệt khác trong tam giác thì ta sẽ thu được những hệ thức gì? Câu trả lời thuộc về các bạn, dưới đây là hai kết quả mà tôi đã tìm được:

Cho tam giác ABC. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác, S là diện tích tam giác. Ta có:

$$aIA.\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)+bIB.\cos\left(\frac{C-A}{2}\right)+cIC.\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)=4S$$

$$IA.\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)+IB.\cos\left(\frac{C-A}{2}\right)+IC.\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\geq$$

$$\geq (18Rr+a^2+b^2+c^2)/6R$$

(R, r: bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác.

Chúc các bạn tìm được nhiều bài toán đẹp hơn!

(Trích từ tập san "Chuyên đề toán học" số 2 của học sinh trường Phổ thông năng khiếu Đại học Quốc gia Tp Hồ Chí Minh).

NHỊ THỨC NIUTƠN. *(tiếp trang 17)*

Nếu trong mỗi ô bị chắn bởi hai đường kẻ ngang ở trên ta tiến hành liệt kê các hệ số của các hạng tử (không kể đến dấu) theo trật tự của chiều mũi tên có trong bảng ta được.

```
          1    2    1
        1    3    3    1
      1    4    6    4    1
    1    5   10   10    5    1
```

Có thể thấy ngay rằng đây chính là tam giác số học (hay tam giác Pascal) trong công thức khai triển Niutơn quen thuộc của:

$(\mathrm{Cos}X+\mathrm{Sin}X)^m$ với $m = 2, 3, 4, 5$.

Ngoài ra biểu thức trong vế phải của $\mathrm{Sin}mX$, $\mathrm{Cos}mX$ là hai nửa của khai triển Niutơn mà ứng với $\mathrm{Sin}mX$ là các hạng thức đứng ở vị trí chẵn, còn ứng với $\mathrm{Cos}mX$ là vị trí lẻ, chỉ khác là dấu của các hạng tử đó được gán lại theo trật tự luân phiên từ + đến -.

Ví dụ: Chẳng hạn với $m = 5$ ta có

$$(\mathrm{Cos}X+\mathrm{Sin}X)^5 =$$
$$= \mathrm{Cos}^5X+5\mathrm{Cos}^4X\,\mathrm{Sin}X+10\mathrm{Cos}^3X\,\mathrm{Sin}^2X+$$
$$+10\mathrm{Cos}^2X\,\mathrm{Sin}^3X+5\mathrm{Cos}X\,\mathrm{Sin}^4X+\mathrm{Sin}^5X$$

thì theo quy luật trên ứng với $\mathrm{Sin}5X$ sẽ là: $5\mathrm{Cos}^4X\,\mathrm{Sin}X$, $10\mathrm{Cos}^2X\,\mathrm{Sin}X$, Sin^5X và ứng với $\mathrm{Cos}5X$ sẽ là Cos^5X, $10\mathrm{Cos}^3X\,\mathrm{Sin}^2X$, $5\mathrm{Cos}X\,\mathrm{Sin}^4X$.

Theo quy luật luân phiên của dấu ta được.

$$\mathrm{Sin}X = 5\mathrm{Cos}^4X\,\mathrm{Sin}X-10\mathrm{Cos}^2X\,\mathrm{Sin}X+\mathrm{Sin}^5X$$

$$\mathrm{Cos}5X = \mathrm{Cos}^5X-10\mathrm{Cos}^3X\,\mathrm{Sin}^2X+5\mathrm{Cos}X\,\mathrm{Sin}^4X$$

Hoàn toàn có thể chứng minh bằng quy nạp toán học cho một quy luật tổng quát sau:

Quy tắc: Nếu viết biểu thức khai triển Niutơn cho $(\mathrm{Cos}X+\mathrm{Sin}X)^{m)}$ thì các hạng tử đứng ở vị trí lẻ được viết với dấu theo trật tự luân phiên + - + ... sẽ cho ta biểu thức của $\mathrm{Cos}mx$ còn các hạng tử đứng ở vị trí chẵn cùng với quy luật dấu luân phiên như trên sẽ cho ta biểu thức của $\mathrm{Sin}mx$.

Thử áp dụng quy tắc trên để tính $\mathrm{Cos}6X$ và $\mathrm{Sin}6X$:

Trước hết ta có:

$$(\mathrm{Cos}X+\mathrm{Sin}X)^6 = \mathrm{Cos}^6X+6\mathrm{Cos}^5X\,\mathrm{Sin}X+$$
$$+15\mathrm{Cos}^6X\,\mathrm{Sin}^2X+10\mathrm{Cos}^3X\,\mathrm{Sin}^3X$$
$$+15\mathrm{Cos}^2X\,\mathrm{Sin}^4X+6\mathrm{Cos}X\,\mathrm{Sin}^5X+\mathrm{Sin}^6X$$

ở đây đứng ở vị trí lẻ sẽ là:

Cos^6X, $15\mathrm{Cos}^4X\,\mathrm{Sin}^2X$, $15\mathrm{Cos}^2X\,\mathrm{Sin}^4X$, Sin^6X

và ở vị trí chẵn là:

$6\mathrm{Cos}^5X\,\mathrm{Sin}X$, $20\mathrm{Cos}^3X\mathrm{Sin}^3X$, $6\mathrm{Cos}X\mathrm{Sin}^5X$

Như vậy khi gán dấu ta được:

$$\mathrm{Cos}6X = \mathrm{Cos}^6X-15\mathrm{Cos}^4X\mathrm{Sin}^2X+$$
$$+15\mathrm{Cos}^2X\,\mathrm{Sin}^4X-\mathrm{Sin}^6X$$

$$\mathrm{Sin}^{6X} = 6\mathrm{Cos}^5X\,\mathrm{Sin}X-20\mathrm{Cos}^3X\mathrm{Sin}^3X+6\mathrm{Cos}X\,\mathrm{Sin}^5X$$

Với m là một nguyên dương bất kì ta có:

$$\mathrm{Cos}mX = \mathrm{Cos}^mX-\frac{m(m-1)}{1.2}\mathrm{Cos}^{m-2}X\,\mathrm{Sin}^2X+$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\mathrm{Cos}^{m-4}X\,\mathrm{Sin}^4X-\ldots$$

$$\mathrm{Sin}mX = \frac{m}{1}\mathrm{Cos}^{m-1}X\,\mathrm{Sin}X-$$
$$-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\mathrm{Cos}^{m-3}X\,\mathrm{Sin}^3X+$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5}\mathrm{Cos}^{m-5}X\,\mathrm{Sin}^5X-\ldots$$

Như vậy đó cũng là một ứng dụng thú vị của công thức khai triển Niutơn trong lượng giác.

LTS: Các bạn hiểu biết về số phức có thể dùng công thức Moivre: $(\cos x+i\sin x)^n = \cos(4x)+i\sin(nx)$ và khai triển nhị thức Niutơn để thấy ngay các kết quả trên.

ĐỀ THI TUYỂN SINH MÔN TOÁN TRƯỜNG ĐẠI HỌC XÂY DỰNG NĂM 1997

(Thời gian làm bài 180 phút)

Câu I. Cho hàm số

$$y = \frac{mx^2 + (2 - m^2)x - 2m - 1}{x - m} \qquad (1)$$

với m là tham số.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi $m = -1$. Từ đó hãy suy ra đồ thị hàm số

$$y_1 = \left|\frac{-x^2 - x + 1}{-x + 1}\right|$$

2) Tìm giá trị của m để hàm số (1) có cực trị. Chứng minh rằng với m tìm được, trên đồ thị hàm số (1) luôn tìm được hai điểm mà tiếp tuyến với đồ thị tại hai điểm đó vuông góc với nhau.

Câu II. 1) Giải bất phương trình

$$\frac{\sqrt{-3x^2 + x + 4} + 2}{x} < 2$$

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}(2x + y)^2 - 5(4x^2 - y^2) + 6(2x - y)^2 = 0\\ 2x + y + \dfrac{1}{2x - y} = 3\end{cases}$$

Câu III. 1) Giải phương trình

$$\frac{\sin^4 2x + \cos^4 2x}{tg(\frac{\pi}{4} - x)\, tg(\frac{\pi}{4} + x)} = \cos^4 4x$$

2) Cho $\sin x + \sin y + \sin z = 0$. Tìm giá trị lớn nhất, bé nhất của biểu thức

$$P = \sin^2 x + \sin^4 y + \sin^6 z$$

Câu IV. Hãy tính thể tích vật thể tròn xoay tạo nên khi ta quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường

$$y = x\ln x,\ y = 0,\ x = 1,\ x = e\ (1 \le x \le e)$$

Câu V. Cho hai đường thẳng (d) và (Δ), biết phương trình của chúng như sau:

$$(d): \begin{cases}2x - y - 11 = 0\\ x - y - z + 5 = 0\end{cases}$$

$$(\Delta): \frac{x - 5}{2} = \frac{y - 2}{1} = \frac{z - 6}{3}$$

1) Xác định véctơ chỉ phương của đường thẳng (d)

2) Chứng minh rằng hai đường thẳng (d) và (Δ) cùng thuộc một mặt phẳng, viết phương trình mặt phẳng đó.

3) Viết phương trình chính tắc hình chiếu song song của (d) theo phương (Δ) lên mặt phẳng $3x - 2y - 1 = 0$

ĐÁP ÁN

Câu I. (2.5 điểm)

1) a) Với $m = -1$

$$y = \frac{-x^2 + x + 1}{x + 1} = -x + 2 - \frac{1}{x + 1}$$

* MXĐ $\forall x \neq -1$.

* Chiều biến thiên $y' = \dfrac{-x^2 - 2x}{(x + 1)^2}$

Vậy $y' = 0$ và đổi dấu qua các giá trị $x_1 = -2$ và $x_2 = 0$

$y_{CT} = y(-2) = 5$, $y_{CĐ} = y(0) = 1$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	5	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	1	↘	$-\infty$

* Tiệm cận đứng $x = 1$ và tiệm cận xiên $y = -x - 2$

* Đồ thị bạn đọc tự vẽ.

b) Gọi hàm số vừa khảo sát là $y = f(x)$ thì $y_1 = |f(-x)|$. Trước hết vẽ đồ thị $y_2 = f(-x)$ bằng cách đối xứng đồ thị $y = f(x)$ qua trục Oy.

Ta có $y_1 = |y_2| = \begin{cases} y_2 \text{ nếu } y_2 \geq 0\\ -y_2 \text{ nếu } y_2\ 0\end{cases}$

Do đó đồ thị $y = \left|\dfrac{-x^2-x+1}{-x+1}\right|$ gồm hai phần:

* *Phần 1:* Phần đồ thị $y2 = f(-x)$ từ trục Ox trở lên.

* *Phần 2:* Đối xứng phần đồ thị $y_2 = f(-x)$ ở phía dưới trục Ox qua Ox.

(Bạn đọc tự thực hiện phép vẽ đồ thị).

2) * $m = 0$, $y = \dfrac{2x - 1}{x}$ hàm số không có cực trị. Xét $m \neq 0$, $y' = \dfrac{mx^2 - 2m^2 + m^3 + 1}{(x - m)^2}$ hàm y có cực trị khi và chỉ khi $mx^2 - 2m^2x + m^3 + 1 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt (khi đó y' đổi dấu nếu x biến thiên qua các nghiệm) $\Leftrightarrow$

$$\Delta' = -m > 0 \Leftrightarrow m < 0$$

* Khi $m < 0$, phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$. Xét tiếp tuyến bất kì với đồ thị hàm số (1) tại tiếp điểm có hoành độ x_o nằm ngoài khoảng (x_1, x_2).

Khi đó bài toán dẫn đến phải chứng minh tồn tại x sao cho $y'(x_o)y'(x) = -1 \Leftrightarrow$

$$y'(x_o)\frac{mx^2 - 2m^2x + m^3 + 1}{(x-m)^2} = -1$$

$\Leftrightarrow y'(x_o)\left(m + \frac{1}{(x-m)^2}\right) = -1$ có nghiệm. Do $m < 0$ và x_o nằm ngoài khoảng (x_1, x_2) nên $y'(x_o) < 0$ (cùng dấu với m) $\Leftrightarrow \frac{1}{(x-m)^2} = -\frac{1}{y'(x_o)} - m$ có nghiệm x vì vế phải dương $-\frac{1}{y'(x_o)} - m > 0$.

Câu II. (2,0 điểm)

1) Điều kiện để bất phương trình có nghĩa

$\begin{cases} -3x^2 + x + 4 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$ hay $-1 \leq x < 0$, $0 < x \leq 4/3$.

* Xét $-1 \leq x < 0$. Do tử > 0 nên bất phương trình đúng với mọi $-1 \leq x < 0$ * Xét $0 < x \leq 4/3$. Bất phương trình tương đương với

$\sqrt{-3x^2 + x + 4} + 2 < 2x$

$\Leftrightarrow \sqrt{-3x^2 + x + 4} < 2(x - 1)$

$\Rightarrow$ vế phải $2(x - 1) > 0$, vậy ta chỉ cần tìm nghiệm bất phương trình trong khoảng $1 < x \leq 4/3$.

Do 2 vế đều không âm, bình phương 2 vế ta được bất phương trình tương đương

$-3x^2 + x + 4 < 4(x-1)^2 \Leftrightarrow 7x^2 - 9x > 0$

$\Leftrightarrow x < 0$ hoặc $x > 9/7$. Kết hợp với $1 < x \leq 4/3$

$\Rightarrow 9/7 < x \leq 4/3$.

Vậy nghiệm bất phương trình đã cho là

$-1 \leq x < 0$ và $9/7 < x \leq 4/3$.

2) Điều kiện để hệ phương trình có nghĩa $2x - y \neq 0$. Chia cả 2 vế phương trình thứ nhất cho $(2x - y)^2$ và đặt $u = 2x + y$, $v = \frac{1}{2x - y}$ ta được

$\begin{cases} (uv)^2 - 5uv + 6 = 0 \\ u + v = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv = 3 \\ u + v = 3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} uv = 2 \\ u + v = 3 \end{cases}$

Vậy $u = 1$, $v = 2$ hoặc $v = 1$, $u = 2 \Rightarrow$

Nghiệm của các hệ sau là nghiệm của hệ phương trình đã cho

$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ \frac{1}{2x - y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3/8, y = 1/4$ và $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ \frac{1}{2x - y} = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = 3/4, y = 1/2$.

Câu III. (2,0 điểm)

1) Điều kiện để phương trình có nghĩa $x \neq \pi/4 + k\pi/2$ (*)

Khi đó $tg\left(\frac{\pi}{4} - x\right) tg\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 1 \Rightarrow$ phương trình đã cho tương đương với điều kiện (*) và

$\sin^4 2x + \cos^4 2x = \cos^4 4x$

$\Leftrightarrow 2\cos^4 4x - \cos^2 4x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (\cos^2 4x - 1)(2\cos^2 4x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \cos 4x = \pm 1$.

Kết hợp với điều kiện (*) nghiệm của $\cos 4x = -1$ bị loại $\Rightarrow$ nghiệm cần tìm là nghiệm của $\cos 4x = 1 \Leftrightarrow x = k\pi/2$ k là số nguyên.

2) Hiển nhiên $P \geq 0$ và đạt được giá trị 0 khi $\sin x = \sin y = \sin z = 0 \Rightarrow \min P = 0$.

* $P = \sin^2 x + \sin^4 y + \sin^6 z \leq |\sin x| + |\sin y| + |\sin z| = T$. Ta ước lược T như sau. Trong 3 số hạng $\sin x$, $\sin y$, $\sin z$ của biểu thức $\sin x + \sin y + \sin z = 0$ luôn luôn tồn tại ít nhất 2 số hạng không trái dấu, thí dụ $\sin x$, $\sin y$. Khi đó

$\sin x + \sin y = -\sin z$ và

$P \leq T = |\sin x| + |\sin y| + |\sin z| =$

$= |\sin x + \sin y| + |\sin z| = |-\sin z - \sin z| \leq 2$

P đạt giá trị 2 khi, thí dụ, $\sin x = -1$, $\sin y = 0$, $\sin z = 1$. Vậy $\max P = 2$.

Câu IV. (1,0 điểm)

$$V = \pi\int_1^e (x\ln x)^2 dx = \pi\left(\frac{x^3}{3}\ln^2 x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{2}{3}x^2 \ln x dx\right)$$

$$= \pi\left(\frac{e^3}{3} - \frac{2x^3}{9}\ln x\Big|_1^e + \int_1^e \frac{2}{9}x^2 dx\right) =$$

$$= \pi\left(\frac{e^3}{3} - 2\frac{e^3}{9} + 2\frac{e^3}{27} - \frac{2}{27}\right) = \pi\left(\frac{e^3}{27} - \frac{2}{27}\right)$$

Câu V. (2,5 điểm)

1) Dễ dàng tính được véctơ chỉ phương của (d) và $v(1, 2, -1)$

2) Ta sẽ chứng minh (d) và (Δ) cắt nhau. Thật vậy, phương trình tham số của (d) là $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 11 - t \end{cases}$.

Giải hệ phương trình sau để tìm giao của (d) và (Δ) $\begin{cases} 5 + t = 5 + 2s \\ -1 + 2t = 2 + s \\ 11 - t = 6 + 3s \end{cases}$.

$\Rightarrow t = 2s = 2 \Rightarrow$ giao điểm $A(7, 3, 9)$.

Vậy (d) và (Δ) cùng thuộc một mặt phẳng.

Dễ dàng tính được véctơ của mặt phẳng chứa (d) và (Δ) là $n(7, -5, -3) \Rightarrow$. Phương trình mặt phẳng đó :

$$7x - 5y - 3z - 7 = 0$$

3) Hình chiếu song song của (d) theo phương (Δ) lên mặt phẳng (P) $3x - 2y - 2z - 1 = 0$ chính là giao của hai mặt phẳng (P) và mặt phẳng chứa (d) và (Δ) nói trên $\Rightarrow$ Phương trình tổng quát của hình chiếu

$\begin{cases} 7x - 5y - 3z - 7 = 0 \\ 3x - 2y - 2z - 1 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Dễ dàng tính được phương trình chính tắc của hình chiếu:

$$\frac{x - 11}{4} = \frac{y - 11}{5} = \frac{z - 5}{1}$$

Diễn đàn DẠY VÀ HỌC TOÁN

Bàn thêm về "MỘT BÀI TOÁN NÊN XEM LẠI"

Sau khi đăng bài "Một bài toán nên xem lại" của tác giả Đoàn Mai (10/1997) tòa soạn nhận được 2 ý kiến cùng một nội dung trao đổi của các bạn Vũ Trọng Trí (K36-ĐHSP Vinh) và Trần Văn Minh (PTTH Nguyễn Hữu Cầu, Hóc môn, Tp Hồ Chí Minh). Dưới đây là ý kiến của bạn Trần Văn Minh.

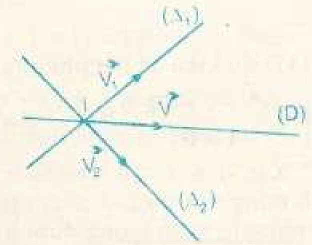
Nhân đọc bài "Một bài toán nên xem lại" (Mục "Ống kính cải cách dạy và học toán" - Số 10/1997) của Đoàn Mai - Hà Nội, tôi xin nêu thêm một cách phát biểu bài toán về chùm đường thẳng và cách chứng minh tổng quát nhằm giúp học sinh và đồng nghiệp có thêm tư liệu tham khảo.

Định lí. Nếu 2 đường thẳng (Δ_1): $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ và (Δ_2): $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ cắt nhau tại I thì phương trình của đường thẳng (D) bất kì qua I có dạng:

$m(A_1x + B_1y + C_1) + n(A_2x + B_2y + C_2) = 0$ (trong đó $m^2 + n^2 > 0$(1)

Chứng minh: Giả sử $I(x_0 y_0)$. Vì $I \in (\Delta_1) \cup (\Delta_2)$ nên:

$$\begin{cases} A_1s_0 + B_1y_0 + C_1 = 0 \\ A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -(A_1x_0 + B_1y_0) \\ C_2 = -A_2x_0 + B_2y_0) \end{cases} (*)$$



Tọa độ vectơ chỉ phương của (Δ_1) và (Δ_2) lần lượt là:

$$\vec{V_1} = (-B_1,\ A_1), \vec{V_2} = (-B_2,\ A_2).$$

Gọi $\vec{V}$ là vectơ chỉ phương của (D). Theo định lí vé vectơ phụ thuộc tuyến tính suy ra:

$$\vec{V} = m\vec{V_1} + n\vec{V_2} = (-mB_1 - nB_2; ma_1 + nA_2) \text{ (với } m^2 + n^2 > 0)$$

Phương trình của đường thẳng (D) (qua I và có vectơ chỉ phương $\vec{V}$ là:

$(mA_1 + nA_2)(x - x_0) + (mB_1 + nB_2)(y - y_0) = 0$

$\Leftrightarrow (m(A_1x + B_1y) + n(A_2x + B_2y) - m(A_1x_0 + B_1y_0) - n(A_2x_0 + B_2y_0) = 0$

$\Leftrightarrow m(A_1x + B_1y + C_1) + n(A_2x + B_2y + C_2) = 0$ (áp dụng (*)). (đpcm.).

Trường hợp đặc biệt:

Ở phương trình (1), nếu $m = 0$ thì $n \neq 0$ và $(D) \equiv (\Delta_2)$. Do đó, nếu $(D) \neq (\Delta_2)$ thì $m \neq 0$.

Khi đó (1) có thể viết:

$$A_1x + B_1y + C_1 + \frac{n}{m}(A_2x + B_2y + C_2) = 0 \text{ hay}$$

$$\boxed{A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0} \quad (2)$$

Nhận xét. 1) Phương trình (1) là phương trình đường thẳng bất kì qua I, kể cả (Δ_1) và (Δ_2) trong khi đó, phương trình (2) không thể nào là phương trình của (Δ_2).

2) Phương pháp chứng minh trên đây có thể vận dụng "nguyên si" để chứng minh phương trình của chùm mặt phẳng rất tốt.

Trả lời bạn đọc

• Bạn **Bùi Kim Hoàng** (PTTH Lê Khiết - Quảng Ngãi) và **Nguyễn Vĩnh Nguyên** ($12A_1$ - PTTHCB Đông Hà, Quảng Trị) : Các ý kiến góp ý của các bạn về bài báo "Chọn hệ trục Đề-Các thích hợp để giải một lớp các bài toán"đăng ở số 246 (12/1997) là hoàn toàn chính xác. Bài 1 chính là đề 75 câu Va (lỗi in ấn) và tác giả đã tính nhầm tọa độ điểm N (lẽ ra $N(0, a, \frac{a}{2})$. Không thể xảy ra $\vec{MN} \perp \vec{AC}$ (cuốn Đề thi tuyển sinh L.T.N có trong tay cũng bị in nhầm như vậy!) mà phải sửa lại là $\vec{MN} \perp \vec{A'C}$. Bài 4, tác giả mới chỉ giải bài toán khi $\vec{u} \perp \vec{v}$ mà thôi! Lời giải các bạn gửi về rất bổ ích, mong các bạn đọc của báo tự giải lại bài này. Rất cám ơn và xin lỗi bạn đọc.

• Ông **Nguyễn Sương** (Bắc Sơn, Vân Diên, Nam Đàn, Nghệ An). Ý kiến của ông góp ý cho đáp án đề thi tuyển sinh môn toán 1997 của trường ĐHGTVT Hà Nội chỉ đúng ở câu IV, có nghĩa là $\cos\alpha = \frac{9}{\sqrt{89}}$, ý kiến còn lại của ông thì... mong ông ngẫm kĩ lại. Cám ơn sự nhiệt tình của ông!

• Bạn **Nguyễn Xuân Giao** ($10A_1$, PTTH Phan Bội Châu - Nghệ An), **Nguyễn Như Thắng** (trường trọng điểm Thuận Thành - Bắc Ninh) và một số bạn đã phát hiện ra lời giải bài T2/243 đăng trên Tạp chí số 247 thừa nghiệm $x = \frac{56}{65}$. Đáp số đúng là phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{3}$. Xin cám ơn các bạn và thành thật xin lỗi bạn đọc.

LTN

TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC PHỔ THÔNG

Ngoài những tính chất và ứng dụng của hàm số ngược, đã được trình bày trong các tài liệu giáo khoa. Trong khuôn khổ bài báo này tôi xin được giới thiệu với bạn đọc một số tính chất khác của hàm số ngược và một ứng dụng của nó.

THÊM MỘT ỨNG DỤNG CỦA HÀM SỐ NGƯỢC

HỒ CÔNG DŨNG
(Trường chuyên Trần Hưng Đạo - Bình Thuận)

*** Các tính chất khác**

Mệnh đề 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có hàm số ngược $y = f^{-1}(y)$ Ta có: f là hàm đồng biến $\Leftrightarrow f^{-1}$ là hàm đồng biến

Chứng minh: Giả sử:

$$x_1, x_2 \in D_f : x_1 > x_2$$

Giả sử $y_1 = f(x_1)$; $y_2 = f(x_2)$. Theo định nghĩa hàm số ngược ta có:

$$x_1 = f^{-1}(y_1)\ ;\ x_2 = f^{-1}(y_2)$$

Nên ta có f đồng biến $\Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

$\Leftrightarrow f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2) \Leftrightarrow y_1 > y_2$

$\Leftrightarrow f^{-1}$: Hàm đồng biến

Mệnh đề 2: Cho $y = f(x)$ là hàm đồng biến; có hàm số ngược $y = f^{-1}(x)$. Đồ thị (c): $y = f(x)$ và (c'): $y = f^{-1}(x)$ có điểm chung $M_0(x_0, y_0)$ thì M_0 nằm trên đường phân giác (T): $y = x$.

Chứng minh: Giả sử

$$M_0(x_0 y_0) \in (c) \cap (c') \Rightarrow \begin{cases} M_0(x_0 y_0) \in (c) \\ M_0(x_0 y_0) \in (c') \end{cases}$$

Vì (c) và (c') đối xứng nhau qua đường phân giác (T): $y = x$

Nên ta có: $(x_0, y_0), (y_0, x_0) \in (c) \Rightarrow$

$$(x_0; y_0), (y_0; x_0) \in (c) \Rightarrow \begin{cases} y_0 = f(x_0) \\ x_0 = f(y_0) \end{cases}$$

Do f đồng biến nên: $x_0 \geq y_0 \Leftrightarrow f(x_0) \geq f(y_0)$ $\Leftrightarrow y_0 \geq x_0$.

Vì các bất đẳng thức trên là đúng nên ta phải có: $x_0 = y_0 \Rightarrow M_0 \in (T)$.

Như vậy từ 2 mệnh đề được chứng minh trên, xét dưới góc độ phương trình ta suy trực tiếp mệnh đề sau:

Mệnh đề 3: Cho $y = f(x)$ là hàm đồng biến, có hàm ngược $y = f^{-1}(x)$. Ta có phép biến đổi phương trình sau:

$$f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x \\ x \in D_f \cap D_{f^{-1}} \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{hoặc} \begin{cases} f^{-1}(x) = x \\ x \in D_f \cap D_{f^{-1}} \end{cases} \quad (2)$$

Như vậy việc giải phương trình: $f(x) = f^{-1}(x)$ ta thay thế được bởi các hệ tương đương (1) hoặc (2). Việc lựa chọn hệ (1) hoặc hệ (2) sao cho lời giải bài toán đơn giản gọn nhẹ thì tùy thuộc vào từng phương trình cụ thể.

Sau đây là một số bài tập minh họa. Vì các bài tập được xét ở phần này, các hàm số được đưa vào phương trình dễ chứng minh tính đồng biến nên tôi xin được chỉ ra, phần chứng minh bạn đọc tự kiểm tra

Bài toán 1. Giải phương trình

$$x^3 - 6 = \sqrt[3]{x + 6}$$

Giải. phương trình xác định $\forall x \in \mathbf{R}$

Xét hàm số $y = x^3 - 6 \Leftrightarrow y$ xác định $\forall x \in \mathbf{R}$ và có miền giá trị $T = R$

Ta có: $y = x^3 - 6 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y + 6} \Rightarrow$ $y = \sqrt[3]{x + 6}$ là hàm số ngược của $y = x^3 - 6$ trên tập $\mathbf{R}$.

Mặt khác: $y = x^3 - 6$ là hàm số đồng biến nên ta có:

$$x^3 - 6 = \sqrt[3]{x+6} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 6 = x \\ x \in \mathbf{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - x - 6 = 0 \\ x \in \mathbf{R} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-2)(x^2+2x+3) \\ x \in R\end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Bài toán 2. Giải phương trình: $\sin x = \arcsin x$

Giải:

Ta có tập xác định của phương trình: $D = [-1; 1]$

Ta có: $y = \sin x$ và $y \arcsin x$ là hai hàm số ngược nhau trên đoạn $[-1, 1]$. Mặt khác: $y = \sin x$ đồng biến trên đoạn $[-1, 1]$ nên ta có: $\sin x = \arcsin x \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x = x \\ x \in [1, 1]\end{cases}$

Xét hàm số: $\sin x - x$ trên đoạn $[-1, 1]$

$\Rightarrow y' = \cos x - 1 \le 0, \forall x \in [-1,. 1]$

$\Rightarrow y$ nghịch biến trên đoạn $[-1, 1]$.

Mặt khác vì: $y(0) = 0 \Rightarrow$ phương trình: $\sin x - x = 0$ có nghiệm duy nhất $x = 0 \in [-1, 1]$, hay: $\sin x = \arcsin x$ có nghiệm duy nhất $x = 0$

Bài toán 3: Giải phương trình: $a^5 + x = \sqrt[5]{a-x}$

Giải: Tập xác định của phương trình: $D = R$

Ta xét phương trình như phương trình của biến số a. Khi đó ta xét:

$$y = f(a) = a^5 + x$$

Ta có: $y = a^5 + x \Leftrightarrow a^5 = y - x \Leftrightarrow a = \sqrt[5]{y-x}$

$\Rightarrow$ Hàm số: $y = \sqrt[5]{a-x}$ là hàm ngược của $y = a^5 + x, \forall a \in \mathbf{R}$.

Mặt khác: $y = a^5 + x$ là hàm đồng biến trên $\mathbf{R}$ nên ta có:

$a^5 + x = \sqrt[5]{a-x} \Leftrightarrow \begin{cases}a^5 + x = a \\ a \in \mathbf{R}\end{cases} \Leftrightarrow x = a - a^5$

Vậy phương trình đã có nghiệm: $x = a - a^5, \forall a \in \mathbf{R}$

Bài toán 4. Định a để phương trình: $\sqrt{a + \sqrt{a+\sin x}} = \sin x$ có nghiệm.

Giải: Ta có: $\sqrt{a + \sqrt{a+\sin x}} = \sin x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \sin x \\ |t| \le 1 \\ \sqrt{a + \sqrt{a+t}} = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sin x \\ 0 \le t \le 1 \\ \sqrt{a+t} = t^2 - a \end{cases}$$

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi hệ

$\begin{cases} 0 \le t \le 1 \\ \sqrt{a+t} = t^2 - a \end{cases}$ có nghiệm

Xét hàm số: $y(t) = t^2 - a$ với $0 \le t \le 1$

Ta có: $y = t^2 - a \Leftrightarrow t^2 = y + a$

$\Leftrightarrow t = \sqrt{y+a}$ (Với $0 \le t \le 1$)

nên ta có: $y = \sqrt{t+a}$ là hàm số ngược của $y = t^2 - a$ trên đoạn $[0, 1]$.

Mặt khác: $y(t) = t^2 - a$ với $0 \le t \le 1$ là đồng biến

Vì vậy:

$$\begin{cases} 0 \le t \le 1 \\ \sqrt{a+t} = t^2 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le t \le 1 \\ t^2 - a = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le t \le 1 \\ a = t^2 - t \end{cases} (*)$$

Nên phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi hệ (*) có nghiệm $\Leftrightarrow$ $\min\limits_{[0,1]} f(t) \le a \le \max\limits_{[0,1]} f(t)$ (với $f(t) = t^2 - t$)

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{4} \le a \le 0$ (bạn đọc có thể tự kiểm tra bảng bảng biến thiên của $f(t) = t^2 - t$ trên $[0, 1]$).

Một số bài tập có thể giải được bằng phương pháp nêu trên:

Bài 5: Định a để phương trình: $x^3 - a = \sqrt[3]{x+a}$ có 3 nghiệm phân biệt

Bài 6. Giải phương trình:

$$5^x + \log_5(x + 1) = 1$$

Bài 7. Cho $0 < a < 1/4$. Giải phương trình

$$x^2 + 2a + \frac{1}{16} = -a + \sqrt{a^2 + x - \frac{1}{16}}$$

Bài 8. Định a sao cho phương trình $\sqrt{3a + \sqrt{3a+2x-x^2}} = 2x - x^2$ có nghiệm

THÔNG BÁO

• **Các bạn dự thi giải Toán - Vật lí:** Các lời giải dự thi *viết* chung trên một tờ giấy *chỉ được chấm một bài*. Mỗi bài dự thi cần ghi đầy đủ họ tên, lớp, trường, địa phương. Ngoài bì thư để rõ là lời giải của tạp chí số mấy". Mong các bạn lưu ý!

• Tòa soạn muốn chuyển Bằng danh dự Giải thưởng Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ tới các bạn đoạt giải cuộc thi (danh sách đã đăng trên báo năm 1997). Đề nghị các bạn gửi gấp địa chỉ liên lạc của mình về tòa soạn. Ngoài phong bì bạn nhớ đề vào góc bên trái phía dưới (**Thư gửi đến tòa soạn để báo địa chỉ**). Cám ơn các bạn.

• Kể từ tháng 3 năm 1998 trụ sở tòa soạn Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ chuyển về **25 Hàn Thuyên, Hà Nội.** Điện thoại **04.8.262477**. Vậy kính báo để các cộng tác viên và độc giả được biết.

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

BÀN TRÒN ĐỌC THƠ

Phó giáo sư toán Đặng Hấn hay nhà thơ Đặng Hấn, làng Toán và làng Thơ chắc nhiều bạn đã biết. Với tập thơ dành cho thiếu nhi: Cầu chữ Y, thầy giáo Đặng Hấn đã được giải thưởng của Hội Nhà văn Việt Nam. Thông minh và hóm hỉnh là nét dễ nhận thấy khi tiếp xúc với các bài giảng, các vần thơ và các cuộc tiếp xúc với thầy. Chọn một bài trong tập Hoa Ngẫu nhiên (mà thầy vừa gửi tới TS.), THTT xin trân trọng giới thiệu cùng các bạn.

ĐẶNG HẤN

DẤU VÔ CÙNG

Khi chưa yêu hai đứa
Trống không, có gì đâu
Niềm vui đã không có
Không cả nỗi âu sầu

0 ... 0

Yêu rồi thành vô hạn
Trời đất hóa mênh mông
Một tiếng chim nho nhỏ
Cũng vang lừng không trung

∞

Hai số không kết lại
Tạo nên dấu vô cùng!

BÀI THƠ LƯU BÚT

Một bạn gái học chuyên toán khoe tôi một bài thơ lưu bút (Vô đề) của một bạn trai chuyên văn tặng. Tôi xin chép ra đây và mong các bạn giúp bạn gái hoàn chỉnh bài thơ theo "cảm" của con nhà toán :

Hãy .... những niềm vui
Và .... đi hờn giận
Cùng .... ngọt, xẻ bùi
Để .... thêm tình bạn
Nỗi nhớ là ....
Luôn .... về tim
.... theo năm tháng
Vẫn vẹn .... nghĩa tình.

NGỌC MAI

Chú ý : *Mong các bạn gửi ý kiến của mình về Tòa soạn trước ngày 15.04.1997.*

HỌA THƠ KIỂU TOÁN

Đã biết rồi mà vẫn không ngờ dân nghiền toán lại còn "kết" cả thơ nữa. Tất nhiên đây chỉ là làm thơ cho vui thôi... gọi là thư dãn ít phút sau những lúc căng óc với những bài toán... hóc!

Nàng Toán học mê người đến mức độ... lạ lùng:

"Toán học trong trí người ta
Đắm say, lôi cuốn thật là hiếm thay !"

(Nguyễn Xuân Minh - PTTH Lê Quý Đôn, Vũng Tàu)

Tất nhiên "chơi" với người tình Toán học không phải lúc nào cũng êm ả, bởi vì bạn Minh chắc đã nhiều lần thấy :

"Tính sai người mệt nhoài ra
Chỗ sai, chỗ đúng thật là... bòng bong"

Hoa làm vương vấn lòng người... đã đành, còn nàng Toán thì sao? Bạn Võ Công Minh (12A6 - trường Huỳnh Thúc Kháng, Vinh, Nghệ An) khẳng định:

"Cành hoa vương vấn lòng ta
Còn khi học toán, toán là niềm mong".

Yêu Toán và Thơ sướng đến mức bạn Chu Văn Bền (10 Toán - Tin, PTTH Lê Việt Thuật, Vinh, Nghệ An) phải "reo" lên (đến nỗi quên cả gieo vần):

"Cuộc đời sướng quá người ơi
Làm Thơ, làm Toán lòng ta thắm nồng".

Nhiều người rất băn khoăn khi "kết duyên" với nàng Toán học, mặc dù Toán học có biết bao nhiêu điều làm mê người đến thế. Đối với bạn Đào Ngọc Minh (10A, PTNK Ngô Sĩ Liên, Bắc Giang) thì:

"Toán học trong đời chúng ta
Đắm say học Toán thật là... tinh khôn"

Bạn Phạm Công Phiệt (xóm 19, Nghi Trung, Nghi Lộc, Nghệ An), còn tưởng tượng ra khi mình vi vu trên tàu vũ trụ thì vẫn nhớ... giờ dạy Toán:

"Chơi vơi trong giải Ngân Hà
Nhớ giờ dạy Toán lòng ta buồn buồn"

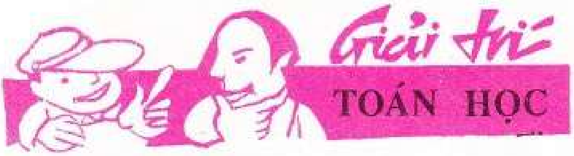
Không biết có khi nào bạn Phiệt say Toán đến quên... vợ hay chưa mà bạn "thú tội" với vợ:

"Trải qua nghìn dặm đường xa"
Bởi anh say Toán mình ta lạnh lùng"

Người xướng ra cuộc chơi Xuân này xin cảm ơn tất cả các bạn và xin tự họa lại mình:

"Trăm năm trong cõi... chúng ta
Đêm dài, đêm ngắn: Toán là... tình nhân".

LTN



Giải đáp bài

NHỮNG NĂM NÀO ?

Những năm từ 1010 đến hết thế kỉ 20 đều có chữ số đầu tiên là 1. Kí hiệu những năm đó là

$\overline{1abc}$ $(0 \le a, b, c \le 9;\ a, b, c \in N)$

Những chữ số khi quay đi 180° vẫn là các chữ số bình thường chỉ có thể là: 0, l, 6, 8, 9

Mặt khác $\overline{1abc}$: 54 (54 = 2.27) nên ta thấy $\overline{1abc}$ phải là *một số chẵn* và *(l+a+b+c)* : 9. Có nghĩa là *(a+b+c)* chỉ có thể bằng (l+l+*b*), (0+8+0), (0+0+8) , (8+0+0) hoặc bằng (l+8+8), (8+l+8), (0+9+8) hoặc bằng (9+9+8).

Thử và loại đi một số trường hợp không chia hết cho 54 ta được các năm thỏa mãn đề bài là:

1080, 1188, 1890, 1998

(Dựa theo: *Tống Anh Quân*, 9I, Hàn Thuyên, Tp Nam Định và *Đặng Ngọc Dương*, 8A, TT Hiệp Hòa, Bắc Giang).

Chú thích: Có nhiều bạn có đáp án đúng.

BÌNH PHƯƠNG

GẮN DẤU VÀO CÁC SỐ

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Các bạn hãy gắn vào trước mỗi số trong bảng sau đây một dấu âm (-) hoặc một dấu dương (+) để các số đó trở thành các số âm số dương sao cho khi cộng các số này trong mỗi hàng ngang, mỗi cột dọc đều được các kết quả bằng nhau, và cộng bốn số ở mỗi đường chéo cũng được hai kết quả bằng nhau.

NGÂN HỒ

Giải thưởng LÊ VĂN THIÊM

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM
$\Sigma\delta(a) \le 2$
GIẢI THƯỞNG
LÊ VĂN THIÊM

1. Mục đích, ý nghĩa

Giáo sư Lê Văn Thiêm (1918 - 1991) là Chủ tịch đầu tiên của Hội toán học Việt Nam, ông là nhà toán học nổi tiếng, đã có những đóng góp lớn trong nghiên cứu và ứng dụng toán học. Giáo sư Lê Văn Thiêm đã được Nhà nước tặng Huân chương độc lập hạng nhất Giải thưởng Hồ Chí Minh. Giải thưởng Lê Văn Thiêm do Hội toán học Việt Nam sáng lập ra nhằm góp phần ghi nhận những thành tích xuất sắc của những thầy giáo và học sinh phổ thông đã khắc phục khó khăn để dạy toán và học toán giỏi, động viên học sinh đi sâu vào môn học có vai trò đặc biệt quan trọng trong sự phát triển lâu dài của nền khoa học nước nhà. Giải thưởng Lê Văn Thiêm cũng là sự ghi nhận công lao của Giáo sư Lê Văn Thiêm, một nhà toán học lớn, một người thầy đã hết lòng vì sự nghiệp giáo dục.

2. Hình thức khen thưởng

Người được giải thưởng sẽ được Hội Toán học Việt Nam cấp một giấy chứng nhận, một huy chương và một khoản tiền.

Một phần tiền trong quỹ ban đầu để thành lập Giải thưởng là do Phu nhân của cố Giáo sư Lê Văn Thiêm tặng, trích từ tiền thưởng Giải thưởng Hồ Chí Minh của cố Giáo sư. Hội Toán học Việt Nam quyết định lập **Quỹ Lê Văn Thiêm**, và hi vọng nhận được sự ủng hộ của các tổ chức, cá nhân nhiệt tình với sự nghiệp phát triển toán học của nước nhà.

3. Đối tượng xét thưởng

Giải thưởng sẽ được trao hàng năm cho một hoặc hai thầy giáo dạy toán ở PTTH và hai học sinh PTTH.

Các thầy giáo được giải là những người có thành tích đặc biệt xuất sắc trong giảng dạy môn toán. Chú trọng những thầy giáo lâu năm trong nghề, những thầy giáo công tác ở các vùng khó khăn, vùng sâu, vùng xa.

Một giải giành cho học sinh được tặng cho học sinh có thành tích đặc biệt xuất sắc trong các kì thi toán quốc gia và quốc tế. Giải thứ hai được trao cho học sinh đã khắc phục nhiều khó khăn trong học tập và đạt thành tích xuất sắc trong môn toán.

4. Quy trình xét thưởng

Hồ sơ đăng kí xét thưởng cần gửi đến Ban giải thưởng trước ngày 30.09 hàng năm. Hồ sơ gồm có:

- Đối với giáo viên: Sơ yếu lí lịch, Bản giới thiệu thành tích do trường nơi giáo viên công tác cấp. Giấy đề nghị của Sở giáo dục hoặc Hội giảng dạy toán học phổ thông.

- Đối với học sinh: Sơ yếu lí lịch, Bản sao học bạ. Giấy giới thiệu về thành tích học tập do trường cấp, có chứng nhận của Sở Giáo dục và đào tạo hoặc của Vụ THPT. Bản sao các giấy chứng nhận đoạt giải (nếu có). Hội đồng "Giải thưởng Lê Văn Thiêm của Hội toán học bao gồm đại diện của các tổ chức sau: Hội toán học, Viện Toán học, Vụ trung học Phổ thông Bộ Giáo dục và đào tạo, Hội giảng dạy toán học phổ thông. Hội đồng giải thưởng sẽ tổ chức xét và công bố giải trên các phương tiện thông tin đại chúng và trao giải vào dịp đầu năm học mới.

(Theo Thông tin Toán học - Tập 1, số 1)

ISSN : 0866 - 0835
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT47M9

Sắp chữ tại Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ
In tại Nhà máy in Diên Hồng, 57 Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 3 năm 1998

Giá : 3.000đ
Ba nghìn đồng