DIỄN ĐÀN TOÁN HỌC

MỚI

TRẮC NGHIỆM

NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN - ỨNG DỤNG

TRONG CÁC ĐỀ THI THỬ THPT QUỐC GIA

MÔN TOÁN 2018

- Rèn kĩ năng tư duy và giải nhanh các dạng toán trắc nghiệm.
- 465 bài toán chọn lọc.
- Hướng dẫn giải rõ ràng, dễ hiểu.

A B C D

Dành cho HS
ôn thi THPT Quốc gia
và xét tuyển vào ĐHCĐ

TỦ SÁCH LUYỆN THI

Câu 1: **(THPT Lê Hồng Phong-Nam Định-lần 1-năm 2017-2018)** Trong các hàm số sau, hàm số nào có một nguyên hàm là hàm số $F(x)=\ln|x|$?

A. $f(x)=x.$ **B.** $f(x)=\frac{1}{x}.$ **C.** $f(x)=\frac{x^3}{2}.$ **D.** $f(x)=|x|.$

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức SGK

Câu 2: **(THPT Lê Hồng Phong-Nam Định-lần 1-năm 2017-2018)** Cho $f(x)$, $g(x)$ là các hàm số xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. $\int f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x.\int g(x)\mathrm{d}x$. **B.** $\int 2f(x)\mathrm{d}x=2\int f(x)\mathrm{d}x$.

C. $\int\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x+\int g(x)\mathrm{d}x$. **D.** $\int\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x-\int g(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn A

Nguyên hàm không có tính chất nguyên hàm của tích bằng tích các nguyên hàm.
Hoặc B, C, D đúng do đó là các tính chất cơ bản của nguyên hàm nên A sai.

Câu 3: **(THPT Lê Hồng Phong-Nam Định-lần 1-năm 2017-2018)** Nếu $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{x}+\ln x+C$ thì $f(x)$ là

A. $f(x)=\sqrt{x}+\ln x+C$. **B.** $f(x)=-\sqrt{x}+\frac{1}{x}+\ln x+C$.

C. $f(x)=-\frac{1}{x^2}+\ln x+C$. **D.** $f(x)=\frac{x-1}{x^2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\left(\frac{1}{x}+\ln x+C\right)'=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x^2}$, suy ra $f(x)=\frac{x-1}{x^2}$ là hàm số cần tìm.

Câu 4: **(THPT Lê Hồng Phong-Nam Định-lần 1-năm 2017-2018)** Hàm số $F(x)=e^{x^3}$ là một nguyên hàm của hàm số:

A. $f(x)=e^{x^3}$. **B.** $f(x)=3x^2.e^{x^3}$. **C.** $f(x)=\frac{e^{x^3}}{3x^2}$. **D.** $f(x)=x^3.e^{x^3-1}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $F'(x)=\left(e^{x^3}\right)'=\left(x^3\right)'.e^{x^3}=3x^2.e^{x^3},\forall x\in\mathbb{R}$.

Câu 5: **(THPT Lê Hồng Phong-Nam Định-lần 1-năm 2017-2018)** Nếu $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+e^x+C$ thì $f(x)$ bằng:

A. $f(x)=x^2+e^x$. **B.** $f(x)=\frac{x^4}{3}+e^x$. **C.** $f(x)=3x^2+e^x$. **D.** $f(x)=\frac{x^4}{12}+e^x$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}+e^x+C\Rightarrow f(x)=\left(\dfrac{x^3}{3}+e^x+C\right)'=x^2+e^x$.

Câu 6: (THPT Yên Lạc-Vĩnh Phúc-lần 1-năm 2017-2018) Tìm m để phương trình sau có nghiệm $\left(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}\right)^3-6\sqrt{16-x^2}+2m+1=0$.

A. $m\in\mathbb{R}$. **B.** $m>\dfrac{-1-16\sqrt{2}}{2}$.

C. $-\dfrac{41}{2}\le m\le\dfrac{-1-16\sqrt{2}}{2}$. **D.** $m<-\dfrac{41}{2}$.

Lời giải

Chọn C

ĐK $x\in[-4;4]$. Đặt $t=\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}$, ta có $t\in\left[2\sqrt{2};4\right]$.

Ta có $t^2=2\sqrt{16-x^2}+8\Leftrightarrow 2\sqrt{16-x^2}=t^2-8$.

Phương trình đã cho trở thành $t^3-3\left(t^2-8\right)+2m+1=0\Leftrightarrow 2m=-t^3+3t^2-25$.

Xét hàm số $f(t)=-t^3+3t^2-25\Rightarrow f'(t)=-3t^2+6t$.

Ta có $f'(t)=-3t^2+6t<0,\forall t\in\left[2\sqrt{2};4\right]$ nên phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$f(4)\le 2m\le f\left(2\sqrt{2}\right)\Leftrightarrow -41\le 2m\le -1-16\sqrt{2}\Leftrightarrow -\dfrac{41}{2}\le m\le\dfrac{-1-16\sqrt{2}}{2}$.

Câu 7: (THPT Yên Lạc-Vĩnh Phúc-lần 1-đề 2-năm 2017-2018) Tìm m để phương trình sau có nghiệm $\left(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}\right)^3-6\sqrt{16-x^2}+2m+1=0$.

A. $m\in\mathbb{R}$. B. $m>\dfrac{-1-16\sqrt{2}}{2}$.

C. $-\dfrac{41}{2}\le m\le\dfrac{-1-16\sqrt{2}}{2}$. D. $m<-\dfrac{41}{2}$.

Lời giải

Chọn C

ĐK $x\in[-4;4]$. Đặt $t=\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}$, ta có $t\in\left[2\sqrt{2};4\right]$.

Ta có $t^2=2\sqrt{16-x^2}+8\Leftrightarrow 2\sqrt{16-x^2}=t^2-8$.

Phương trình đã cho trở thành $t^3-3\left(t^2-8\right)+2m+1=0\Leftrightarrow 2m=-t^3+3t^2-25$.

Xét hàm số $f(t)=-t^3+3t^2-25\Rightarrow f'(t)=-3t^2+6t$.

Ta có $f'(t)=-3t^2+6t<0,\forall t\in\left[2\sqrt{2};4\right]$ nên phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$f(4)\le 2m\le f\left(2\sqrt{2}\right)\Leftrightarrow -41\le 2m\le -1-16\sqrt{2}\Leftrightarrow -\dfrac{41}{2}\le m\le\dfrac{-1-16\sqrt{2}}{2}$.

Câu 8: (THPT Hai Bà Trưng-Vĩnh Phúc-lần 1-năm 2017-2018) Tìm tập xác định của hàm số $y=(x-1)^{\frac{1}{3}}$.

A. $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. **B.** $D=(1;+\infty)$. **C.** $D=\mathbb{R}$. **D.** $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Lời giải

Chọn B

Do $\frac{1}{3}\in\mathbb{Q}$ nên điều kiện xác định là $x-1>0\Leftrightarrow x>1$. Vậy TXĐ $\mathrm{D}=(1;+\infty)$.

Câu 9: (TT Diệu Hiền-Cần Thơ-tháng 11-năm 2017-2018) Nguyên hàm của hàm số $y=x^2-3x+\frac{1}{x}$ là

A. $\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}-\ln|x|+C$.
B. $\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+\frac{1}{x^2}+C$.
C. $\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+\ln x+C$.
D. $\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+\ln|x|+C$.

Lời giải

Chọn D

Áp dụng công thức nguyên hàm ta có $\int\left(x^2-3x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+\ln|x|+C$.

Câu 10: (TT Diệu Hiền-Cần Thơ-tháng 11-năm 2017-2018) Cho hình (H) giới hạn bởi các đường $y=-x^2+2x$, trục hoành. Quay hình phẳng (H) quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích là:

A. $\frac{496\pi}{15}$.
B. $\frac{32\pi}{15}$.
C. $\frac{4\pi}{3}$.
D. $\frac{16\pi}{15}$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm của (H) và trục hoành $-x^2+2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Thể tích khối tròn xoay cần tìm là

$$V=\pi\int_0^2\left(-x^2+2x\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^2\left(x^4-4x^3+4x^2\right)\mathrm{d}x=\pi\left.\left(\frac{x^5}{5}-x^4+\frac{4}{3}x^3\right)\right|_0^2=\frac{16\pi}{15}.$$

Câu 11: (TT Diệu Hiền-Cần Thơ-tháng 11-năm 2017-2018) Cho $I=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=3$. Khi đó $J=\int_0^2\left[4f(x)-3\right]\mathrm{d}x$ bằng:

A. 2.
B. 6.
C. 8.
D. 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $J=\int_0^2\left[4f(x)-3\right]\mathrm{d}x=4\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x-3\int_0^2\mathrm{d}x=4.3-3x\big|_0^2=6$.

Câu 12: (THPT Hậu Lộc 2-Thanh Hóa-ần 1-năm 2017-2018) Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x-1}$.

A. $x+\frac{1}{x-1}+C$.
B. $1+\frac{1}{(x-1)^2}+C$.
C. $\frac{x^2}{2}+\ln|x-1|+C$.
D. $x^2+\ln|x-1|+C$.

Lời giải:

Chọn C

Ta có $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}=x+\dfrac{1}{x-1}$

$\Rightarrow \int f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{x^2}{2}+\ln|x-1|+C$.

Câu 13: (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ $(a<b)$. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức.

A. $V=\pi\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $V=2\pi\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **C.** $V=\pi^2\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $V=\pi^2\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn A

Theo công thức tính thể tích vật tròn xoay khi quay hình (H) quanh trục hoành ta có

$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Câu 14: (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+1$ là

A. x^3+C. **B.** $\dfrac{x^3}{3}+x+C$. **C.** $6x+C$. **D.** x^3+x+C.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int(3x^2+1)\,\mathrm{d}x=3.\dfrac{x^3}{3}+x+C=x^3+x+C$.

Câu 15: (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Tích phân $\int_0^2\dfrac{\mathrm{d}x}{x+3}$ bằng

A. $\dfrac{16}{225}$. **B.** $\log\dfrac{5}{3}$. **C.** $\ln\dfrac{5}{3}$. **D.** $\dfrac{2}{15}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int_0^2\dfrac{\mathrm{d}x}{x+3}=\ln|x+3|\Big|_0^2=\ln|2+3|-\ln|0+3|=\ln\dfrac{5}{3}$.

Câu 1: (THPT Đoàn Thượng-Hải Dương-lần 2 năm 2017-2018) Tích phân $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\sin^2 x}$ bằng?

A. $\cot\frac{\pi}{3}-\cot\frac{\pi}{4}$. **B.** $\cot\frac{\pi}{3}+\cot\frac{\pi}{4}$. **C.** $-\cot\frac{\pi}{3}+\cot\frac{\pi}{4}$. **D.** $-\cot\frac{\pi}{3}-\cot\frac{\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\sin^2 x}=-\cot x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=-\cot\frac{\pi}{3}+\cot\frac{\pi}{4}$.

Câu 2: (THPT Đoàn Thượng-Hải Dương-lần 2 năm 2017-2018) Tìm nguyên hàm $F(x)=\int\pi^2 dx$.

A. $F(x)=\pi^2 x+C$. **B.** $F(x)=2\pi x+C$. **C.** $F(x)=\frac{\pi^3}{3}+C$. **D.** $F(x)=\frac{\pi^2x^2}{2}+C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $F(x)=\int\pi^2 dx=\pi^2 x+C$ (vì π^2 là hằng số).

Câu 3: (THPT Hà Huy Tập-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Rút gọn biểu thức $P=x^{\frac{1}{3}}.\sqrt[6]{x}$ với $x>0$.

A. $P=x^{\frac{1}{8}}$. **B.** $P=x^2$. **C.** $P=\sqrt{x}$. **D.** $P=x^{\frac{2}{9}}$.

Lời giải

Chọn C

$P=x^{\frac{1}{3}}.x^{\frac{1}{6}}=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$

Câu 4: (THPT Lương Thế Vinh-Hà Nội năm 2017-2018) Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

A. $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ với $k\in\mathbb{R}$.

B. $\int[f(x)+g(x)]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$ với $f(x)$; $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

C. $\int x^\alpha dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ với $\alpha\neq-1$.

D. $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ với $k\in\mathbb{R}$ sai vì tính chất đúng khi $k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Câu 5: (THPT Chuyên Thái Bình-lần 2 năm học 2017-2018) Nếu $\int f(x)dx=\frac{1}{x}+\ln|2x|+C$ với $x\in(0;+\infty)$ thì hàm số $f(x)$ là

A. $f(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}$. **B.** $f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{2x}$.

C. $f(x)=\frac{1}{x^2}+\ln(2x)$. **D.** $f(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2x}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C \Rightarrow F'(x) = f(x)$

Do đó $f(x) = \left(\frac{1}{x} + \ln|2x|\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)' + \left(\ln|2x|\right)' = -\frac{1}{x^2} + \frac{(2x)'}{2x} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$ với $x \in (0; +\infty)$.

Câu 6: (THPT Chuyên Thái Bình-lần 2 năm học 2017-2018) Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\int 3^{2x}\mathrm{d}x = \frac{3^{2x}}{\ln 3} + C$.

B. $\int 3^{2x}\mathrm{d}x = \frac{9^x}{\ln 3} + C$.

C. $\int 3^{2x}\mathrm{d}x = \frac{3^{2x}}{\ln 9} + C$.

D. $\int 3^{2x}\mathrm{d}x = \frac{3^{2x+1}}{2x+1} + C$.

Lời giải

Chọn C

Vì $\int 3^{2x}\mathrm{d}x = \int 9^x\mathrm{d}x = \frac{9^x}{\ln 9} + C = \frac{3^{2x}}{\ln 9} + C$.

Câu 7: (THPT Chuyên ĐH KHTN-Hà Nội năm 2017-2018) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + \sin 2x$ là

A. $x^2 - \frac{1}{2}\cos 2x + C$. **B.** $x^2 + \frac{1}{2}\cos 2x + C$. **C.** $x^2 - 2\cos 2x + C$. **D.** $x^2 + 2\cos 2x + C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x = \int (2x + \sin 2x)\mathrm{d}x = x^2 - \frac{1}{2}\cos 2x + C$.

Câu 8: (THPT Chuyên Hạ Long-Quảng Ninh-lần 1 năm 2017-2018) Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^{2018x}$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2018}.\mathrm{e}^{2018x} + C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{2018x} + C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x = 2018\mathrm{e}^{2018x} + C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{2018x}\ln 2018 + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Theo công thức nguyên hàm mở rộng.

Câu 9: (THPT Chuyên Hạ Long-Quảng Ninh-lần 1 năm 2017-2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;\ 3;\ 4)$, $B(6;\ 2;\ 2)$. Tìm tọa độ véctơ $\overrightarrow{AB}$.

A. $\overrightarrow{AB} = (4;3;4)$. **B.** $\overrightarrow{AB} = (4;-1;-2)$. **C.** $\overrightarrow{AB} = (-2;3;4)$. **D.** $\overrightarrow{AB} = (4;-1;4)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (4;-1;-2)$.

Câu 10: (THPT Chuyên Phan Bội Châu-Nghệ An- lần 1 năm 2017-2018) Hàm số $F(x) = \cos 3x$ là nguyên hàm của hàm số:

A. $f(x) = \frac{\sin 3x}{3}$. **B.** $f(x) = -3\sin 3x$. **C.** $f(x) = 3\sin 3x$. **D.** $f(x) = -\sin 3x$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $F(x)=\cos 3x \Rightarrow F'(x)=-3\sin 3x$.

Vậy hàm số $F(x)=\cos 3x$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=-3\sin 3x$.

Câu 11: (THPT Chuyên Quốc Học-Huế năm 2017-2018) Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=5^{2x}$.

A. $\int 5^{2x}\mathrm{d}x=2.\dfrac{5^{2x}}{\ln 5}+C$.

B. $\int 5^{2x}\mathrm{d}x=\dfrac{25^x}{2\ln 5}+C$.

C. $\int 5^{2x}\mathrm{d}x=2.5^{2x}\ln 5+C$.

D. $\int 5^{2x}\mathrm{d}x=\dfrac{25^{x+1}}{x+1}+C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int 5^{2x}\mathrm{d}x=\int 25^x\mathrm{d}x=\dfrac{25^x}{\ln 25}+C=\dfrac{25^x}{2\ln 5}+C$.

Câu 12: (THPT Chuyên Thái Bình-lần 3 năm 2017-2018) Tìm nguyên hàm $I=\int x\cos x\mathrm{d}x$.

A. $I=x^2\sin\dfrac{x}{2}+C$.

B. $I=x\sin x+\cos x+C$.

C. $I=x\sin x-\cos x+C$.

D. $I=x^2\cos\dfrac{x}{2}+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $u=x \Rightarrow \mathrm{d}u=\mathrm{d}x$ và $\mathrm{d}v=\cos x\mathrm{d}x \Rightarrow v=\sin x$.

$I=\int x\cos x\mathrm{d}x=x\sin x-\int \sin x\mathrm{d}x=x\sin x+\cos x+C$.

Câu 13: (THPT Chuyên Thái Bình-lần 3 năm 2017-2018) Biết $\int_a^b(2x-1)\mathrm{d}x=1$. Khẳng định nào sau đây là **đúng?**

A. $b-a=1$. **B.** $a^2-b^2=a-b-1$. **C.** $b^2-a^2=b-a+1$. **D.** $a-b=1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có: $\int_a^b(2x-1)\mathrm{d}x=\left(x^2-x\right)\Big|_a^b=b^2-b-\left(a^2-a\right)$.

Mà $\int_a^b(2x-1)\mathrm{d}x=1 \Leftrightarrow b^2-b-a^2+a=1 \Leftrightarrow b^2-a^2=b-a+1$.

Câu 14: (THPT Chuyên Vĩnh Phúc - lần 3 năm 2017-2018) Tính thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng (H) được giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ xung quanh trục Ox.

A. $\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$. **B.** $\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$. **C.** $\pi\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. **D.** $2\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn A

Công thức tính thể tích khối tròn xoay $V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.

Câu 15: (THPT Chuyên Vĩnh Phúc-lần 3 MĐ 234 năm học 2017-2018) Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin 3x$ là:

A. $\frac{1}{3}\cos 3x+C$. **B.** $\cos 3x+C$. **C.** $-\frac{1}{3}\cos 3x+C$. **D.** $-\cos 3x+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int \sin 3x\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\cos 3x+C$.

Câu 16: (THPT Chuyên Vĩnh Phúc-lần 3 MĐ 234 năm học 2017-2018) Viết công thức tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục Ox và các đường thẳng $x=a, x=b\ (a<b)$.

A. $\int\limits_a^b |f(x)|dx$. **B.** $\int\limits_a^b f^2(x)dx$. **C.** $\int\limits_a^b f(x)dx$. **D.** $\pi\int\limits_a^b f(x)dx$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Câu 17: (THPT Chuyên Vĩnh Phúc-lần 3 MĐ 234 năm học 2017-2018) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\ln^2 x+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln^2 x+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\ln x+C$ **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=e^x+C$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int \ln x\mathrm{d}(\ln x)=\frac{1}{2}\ln^2 x+C$.

Câu 18: (THPT Hồng Quang-Hải Dương năm 2017-2018) Tính $I=\int 3^x\,\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{3^x}{\ln 3}+C$. **B.** $I=3^x\ln 3+C$. **C.** $I=3^x+C$. **D.** $I=3^x+\ln 3+C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int a^x\,\mathrm{d}x=\frac{a^x}{\ln a}+C$ nên $I=\frac{3^x}{\ln 3}+C$.

Câu 19: (THPT Kinh Môn 2-Hải Dương năm 2017-2018) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;10]$ và $\int\limits_0^{10} f(x)\mathrm{d}x=7$ và $\int\limits_2^6 f(x)\mathrm{d}x=3$. Tính $P=\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_6^{10} f(x)\mathrm{d}x$.

A. $P=7$. **B.** $P=-4$. **C.** $P=4$. **D.** $P=10$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int_{0}^{10} f(x)\mathrm{d}x = 7 \Leftrightarrow \int_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x + \int_{2}^{6} f(x)\mathrm{d}x + \int_{6}^{10} f(x)\mathrm{d}x = 7$

$\Leftrightarrow \int_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x + \int_{6}^{10} f(x)\mathrm{d}x = 7 - 3 = 4$.

Vậy $P = 4$.

Câu 20: (THPT Kinh Môn 2-Hải Dương năm 2017-2018) Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x^3 - 9$ là:

A. $\frac{1}{2}x^4 - 9x + C$. **B.** $4x^4 - 9x + C$. **C.** $\frac{1}{4}x^4 + C$. **D.** $4x^3 - 9x + C$.

Lời giải

Chọn A

$\int (2x^3 - 9)\mathrm{d}x = 2.\frac{x^4}{4} - 9x + C = \frac{x^4}{2} - 9x + C$.

Câu 21: (THPT Quãng Xương 1-Thanh Hóa năm 2017-2018) Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau

A. $\int x^3\mathrm{d}x = \frac{x^4 + C}{4}$. **B.** $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln x + C$.

C. $\int \sin x\mathrm{d}x = C - \cos x$. **D.** $\int 2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = 2(\mathrm{e}^x + C)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$.

Câu 22: (THPT Trần Quốc Tuấn năm 2017-2018) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 8\sin x$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x = 6x - 8\cos x + C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x = 6x + 8\cos x + C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x = x^3 - 8\cos x + C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x = x^3 + 8\cos x + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x = \int (3x^2 + 8\sin x)\mathrm{d}x = x^3 - 8\cos x + C$.

Câu 23: (THPT Trần Quốc Tuấn năm 2017-2018) Hàm số 25cm là một nguyên hàm của hàm số nào sau đây?

A. $f(x) = 4 - \frac{1}{x^2} + C$. **B.** $f(x) = 4 - \frac{1}{x^2}$.

C. $f(x) = 4 + \frac{1}{x^2}$. **D.** $f(x) = 2x^2 + \ln|x| + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Hàm số $F(x) = 4x + \frac{1}{x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4 - \frac{1}{x^2}$, vì

$F'(x) = \left(4x + \frac{1}{x}\right)' = 4 - \frac{1}{x^2}$.

Câu 24: (THPT Trần Hưng Đạo-TP HCM năm 2017-2018) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^x$.

A. $\int 3^x dx = \dfrac{3^x}{\ln 3} + C$. **B.** $\int 3^x dx = 3^x \ln 3 + C$. **C.** $\int 3^x dx = 3^{x+1} + C$. **D.** $\int 3^x dx = \dfrac{3^{x+1}}{x+1} + C$.

Lời giải

Chọn A

$\int 3^x\, dx = \dfrac{3^x}{\ln 3} + C$.

Câu 25: (THPT Tứ Kỳ-Hải Dương năm 2017-2018) Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{2x+1}$, biết $F\left(\dfrac{e-1}{2}\right) = \dfrac{3}{2}$ là:

A. $F(x) = 2\ln|2x+1| - \dfrac{1}{2}$.

B. $F(x) = 2\ln|2x+1| + 1$.

C. $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln|2x+1| + 1$.

D. $F(x) = \ln|2x+1| + \dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Áp dụng công thức nguyên hàm mở rộng

$F(x) = \int \dfrac{1}{2x+1} dx = \dfrac{1}{2}\ln|2x+1| + C$.

Mà $F\left(\dfrac{e-1}{2}\right) = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\ln\left|2\left(\dfrac{e-1}{2}\right)+1\right| + C = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow C = 1$.

Câu 26: (THPT Tứ Kỳ-Hải Dương năm 2017-2018) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K và $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $f'(x) = F(x)$, $\forall x \in K$.

B. $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in K$.

C. $F(x) = f(x)$, $\forall x \in K$.

D. $F'(x) = f'(x)$, $\forall x \in K$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $F(x) = \int f(x) dx$, $\forall x \in K \Rightarrow \left[F(x)\right]' = f(x)$, $\forall x \in K$.

Câu 27: (THPT Tứ Kỳ-Hải Dương năm 2017-2018) Viết công thức tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ trục Ox và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$, $(a < b)$ xung quanh trục Ox.

A. $V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$. **B.** $V = \int_a^b f^2(x)dx$. **C.** $V = \pi\int_a^b f(x)dx$. **D.** $V = \int_a^b |f(x)| dx$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Theo lý thuyết.

Câu 28: (THPT Đô Lương 4-Nghệ An năm 2017-2018) Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $\int \cos 2x dx = -2\sin 2x + C$.

B. $\int \cos 2x dx = 2\sin 2x + C$.

C. $\int \cos 2x dx = -\dfrac{1}{2}\sin 2x + C$.

D. $\int \cos 2x dx = \dfrac{1}{2}\sin 2x + C$.

Lời giảiS

Chọn C

Áp dụng công thức nguyên hàm: $\int \cos(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b)+C$.

Ta có: $\int \cos 2x dx = \frac{1}{2}\sin 2x + C$.

Câu 29: (THPT Đô Lương 4-Nghệ An năm 2017-2018) Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $\int e^x \sin x dx = e^x \cos x - \int e^x \cos x dx.$.
B. $\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx.$.
C. $\int e^x \sin x dx = e^x \cos x + \int e^x \cos x dx.$.
D. $\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x - \int e^x \cos x dx.$

Lời giải

Chọn B

Đặt

$$\begin{cases} u = e^x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = -\cos x \end{cases}$$

$\Rightarrow \int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx.$.

Câu 30: (THPT Chuyên Hoàng Văn Thụ-Hòa Bình năm 2017-2018) Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2$ là ?

A. $\int x^2 dx = \frac{x^2}{2} + C$.
B. $\int x^2 dx = 2x + C$.
C. $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$.
D. $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$.

Câu 31: (THPT Chuyên Hoàng Văn Thụ-Hòa Bình năm 2017-2018) Nếu $\int_1^2 f(x)dx = 3$, $\int_2^5 f(x)dx = -1$ thì $\int_1^5 f(x)dx$ bằng

A. -2.
B. 2.
C. 3.
D. 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_1^5 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^5 f(x)dx = 3 - 1 = 2$.

Câu 32: (THPT Hậu Lộc 2-Thanh Hóa năm 2017-2018) Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$, trục hoành Ox, các đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ là

A. $S = \frac{7}{3}$.
B. $S = \frac{8}{3}$.
C. $S = 7$.
D. $S = 8$.

Lời giải

Chọn A

Diện tích hình phẳng là $S=\int\limits_1^2\left|x^2\right|\mathrm{d}x=\int\limits_1^2 x^2\mathrm{d}x=\left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$.

Câu 33: (THPT Chuyên Biên Hòa-Hà Nam-lần 1 năm 2017-2018) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a,b]$. Diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a;x=b$ được tính theo công thức

A. $S=\pi\int\limits_a^b\left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x$ **B.** $S=\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ **C.** $S=\pi\int\limits_a^b\left|f(x)\right|\mathrm{d}x$ **D.** $S=\int\limits_a^b\left|f(x)\right|\mathrm{d}x$

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a;x=b$ được tính theo công thức $S=\int\limits_a^b\left|f(x)\right|\mathrm{d}x$.

Câu 34: (THPT Chuyên Biên Hòa-Hà Nam-lần 1 năm 2017-2018) Tính $I=\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{3x}.\mathrm{d}x$.

A. $I=\mathrm{e}^3-1$. **B.** $I=\mathrm{e}-1$. **C.** $\frac{\mathrm{e}^3-1}{3}$. **D.** $I=\mathrm{e}^3+\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $I=\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{3x}.\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}\Big|_{x=0}^{x=1}=\frac{\mathrm{e}^3-1}{3}$.

Câu 35: (THPT Trần Nhân Tông-Quảng Ninh-lần 1 năm 2017-2018) Tìm nguyên hàm của hàm số $y=\sin(2x-1)$.

A. $\frac{1}{2}\cos(2x-1)+C$. **B.** $-\cos(2x-1)+C$.

C. $-\frac{1}{2}\cos(2x-1)+C$. **D.** $-\frac{1}{2}\sin(2x-1)+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có: $\int\sin(2x-1)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\cos(2x-1)+C$.

Câu 36: (THPT Trần Nhân Tông-Quảng Ninh-lần 1 năm 2017-2018) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$, biết $\int\limits_0^9 f(x)\mathrm{d}x=9$ và $F(0)=3$. Tính $F(9)$.

A. $F(9)=-6$. **B.** $F(9)=6$. **C.** $F(9)=12$. **D.** $F(9)=-12$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có: $I=\int\limits_0^9 f(x)\mathrm{d}x=F(x)\big|_0^9=F(9)-F(0)=9\Leftrightarrow F(9)=12$.

Câu 37: **(THPT Yên Định-Thanh Hóa-lần 1 năm 2017-2018)** Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{x-1}$ và $F(2)=1$. Tính $F(3)$.

A. $F(3)=\ln 2-1$. **B.** $F(3)=\ln 2+1$. **C.** $F(3)=\frac{1}{2}$. **D.** $F(3)=\frac{7}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có: $F(x)=\int \frac{1}{x-1}\mathrm{d}x=\ln|x-1|+C$.

Theo đề $F(2)=1 \Leftrightarrow \ln 1+C=1 \Leftrightarrow C=1$.

Vậy $F(3)=\ln 2+1$.

Câu 38: **(THPT Mộ Đức-Quãng Ngãi-lần 1 năm 2017-2018)** Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos 2x$.

A. $F(x)=2\sin 2x+C$. **B.** $F(x)=-\frac{1}{2}\sin 2x+C$.

C. $F(x)=\frac{1}{2}\sin 2x+C$. **D.** $F(x)=-2\sin 2x+C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $F(x)=\int \cos 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sin 2x+C$.

Câu 39: **(THPT Hoàng Hoa Thám-Hưng Yên-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$, $f(-1)=3$ và $\int_{-1}^{3} f'(x)\mathrm{d}x=10$ giá trị của $f(3)$ bằng

A. -13. **B.** -7. **C.** 13. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int_{-1}^{3} f'(x)\mathrm{d}x=10 \Rightarrow f(x)\Big|_{-1}^{3}=10 \Leftrightarrow f(3)-f(-1)=10 \Leftrightarrow f(3)=f(-1)+10=13$.

Câu 1: (SGD Bà Rịa Vũng Tàu-đề 2 năm 2017-2018) Hàm số nào sau đây không phải là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=(3x+1)^5$?

A. $F(x)=\dfrac{(3x+1)^6}{18}+8$. **B.** $F(x)=\dfrac{(3x+1)^6}{18}-2$.

C. $F(x)=\dfrac{(3x+1)^6}{18}$. **D.** $F(x)=\dfrac{(3x+1)^6}{6}$.

Lời giải

Chọn D

Áp dụng $\int (ax+b)^{\alpha}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{a}\dfrac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$ với $\alpha\neq -1$ và C là hằng số.

Vậy hàm số ở phương án D thỏa yêu cầu đề.

Câu 2: (THPT Lê Quý Đôn-Hà Nội năm 2017-2018) Cho các hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a;b]$, $(a,b\in\mathbb{R},a<b)$. Gọi S là diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y=f(x)$; trục hoành Ox; $x=a$; $x=b$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $S=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $S=\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$. **C.** $S=\int_b^a |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **D.** $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn D

Ta có diện tích hình phẳng $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Câu 3: (THPT Lê Quý Đôn-Hà Nội năm 2017-2018) Hàm số nào sau đây là một nguyên hàm của hàm số $y=12x^5$.

A. $y=12x^6+5$. **B.** $y=2x^6+3$. **C.** $y=12x^4$. **D.** $y=60x^4$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int 12x^5\mathrm{d}x=12.\dfrac{x^6}{6}+C=2x^6+C$.

Do đó **Chọn B**

Câu 4:* (THPT Hà Huy Tập-Hà Tĩnh-lần 2 năm 2017-2018)** Khẳng định nào sau đây ***sai?

A. $\int 0\,\mathrm{d}x=C$. **B.** $\int x^4\,\mathrm{d}x=\dfrac{x^5}{5}+C$. **C.** $\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x+C$. **D.** $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C\Rightarrow$ C sai.

Câu 5: (THPT Hà Huy Tập-Hà Tĩnh-lần 2 năm 2017-2018) Khẳng định nào đây **sai**?

A. $\int \cos x\,\mathrm{d}x=-\sin x+C$. **B.** $\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$.

C. $\int 2x\,\mathrm{d}x=x^2+C$. **D.** $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int \cos x\,dx = \sin x + C \Rightarrow$ A sai.

Câu 6: (THPT Hà Huy Tập-Hà Tĩnh-lần 2 năm 2017-2018) Khẳng định nào đây đúng?

A. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$.

B. $\int \sin x\,dx = \frac{1}{2}\sin^2 x + C$.

C. $\int \sin x\,dx = \cos x + C$.

D. $\int \sin x\,dx = -\sin x + C$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int \sin x\,dx = -\cos x + C \Rightarrow A$ đúng.

Câu 7: (THPT Hà Huy Tập-Hà Tĩnh-lần 2 năm 2017-2018) Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ với trục Ox là

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - 1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Vậy đồ thị hàm số và trục hoành có 2 giao điểm.

Câu 8: (THPT Lý Thái Tổ-Bắc Ninh-lần 1 năm 2017-2018) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x - \sin 6x$

A. $\int f(x)\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{\cos 6x}{6} + C$.

B. $\int f(x)\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{\sin 6x}{6} + C$.

C. $\int f(x)\,dx = \frac{x^2}{2} + \frac{\cos 6x}{6} + C$.

D. $\int f(x)\,dx = \frac{x^2}{2} + \frac{\sin 6x}{6} + C$.

Lời giải

Chọn C

$\int f(x)\,dx = \int (x - \sin 6x)\,dx = \frac{x^2}{2} + \frac{\cos 6x}{6} + C$.

Câu 9: (THPT Lý Thái Tổ-Bắc Ninh-lần 1 năm 2017-2018) Khoảng đồng biến của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 1$ là

A. $(-3;1)$. **B.** $(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$. **C.** $(-1;3)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

Lời giải

Chọn C

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$y' = -3x^2 + 6x + 9$.

$y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \Rightarrow y = 8 \\ x = -1 \Rightarrow y = 12 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	8	$\nearrow$	12	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào BBT, hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;3)$.

Câu 10: (THPT Phan Châu Trinh-DakLak-lần 2 năm 2017-2018) Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, liên tục trên $[a\ ;\ b]$ trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ cho bởi công thức:

A. $S=\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$. **B.** $S=\pi\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$. **C.** $S=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$. **D.** $S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn A

Diện tích S của hình phẳng là $S=\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$.

Câu 11: (THPT Phan Châu Trinh-DakLak-lần 2 năm 2017-2018) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^x+\cos x+2018$ là

A. $F(x)=\mathrm{e}^x+\sin x+2018x+C$. **B.** $F(x)=\mathrm{e}^x-\sin x+2018x+C$.

C. $F(x)=\mathrm{e}^x+\sin x+2018x$. **D.** $F(x)=\mathrm{e}^x+\sin x+2018+C$.

Lời giải

Chọn A

Câu 12: (THPT Chuyên Lam Sơn-Thanh Hóa-lần 2 năm 2017-2018) Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$, $(a\le b)$ có diện tích S là

A. $S=\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$. **B.** $S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. **C.** $S=\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$. **D.** $S=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn A

Câu 13: (THPT Can Lộc-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2+2$, $x=1$, $x=2$, $y=0$.

A. $S=\frac{10}{3}$. **B.** $S=\frac{8}{3}$. **C.** $S=\frac{13}{3}$. **D.** $S=\frac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi S là diện tích cần tìm. Ta có $S=\int_1^2 (x^2+2)\mathrm{d}x=\frac{13}{3}$.

Câu 14: (THPT Can Lộc-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Cho hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ là hàm số liên tục, có $F(x)$, $G(x)$ lần lượt là nguyên hàm của $f(x)$, $g(x)$. Xét các mệnh đề sau:

(I). $F(x)+G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)+g(x)$.

(II). $k.F(x)$ là một nguyên hàm của $k.f(x)$ với $k\in\mathbb{R}$.

(III). $F(x).G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x).g(x)$.

Các mệnh đề đúng là

A. (II) và (III). **B.** Cả 3 mệnh đề. **C.** (I) và (III). **D.** (I) và (II).

Lời giải

Chọn D

Theo tính chất nguyên hàm thì (I) và (II) là đúng, (III) sai.

Câu 15: **(THPT Can Lộc-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Viết công thức tính diện tích S của hình cong được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x=a$; $x=b$.

A. $S=\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$. **B.** $S=\pi\int\limits_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$. **C.** $S=\int\limits_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$. **D.** $S=\pi\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn C

Hình cong được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x=a$;

$x=b$ có diện tích là $S=\int\limits_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$.

Câu 16: **(THPT Hồng Lĩnh-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và số thực k tùy ý. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int\limits_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

B. $\int\limits_a^b xf(x)\mathrm{d}x=x\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

C. $\int\limits_a^a kf(x)\mathrm{d}x=0$.

D. $\int\limits_a^b [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào tính chất của tích phân, A, C, D đúng nên B sai.

Câu 17: **(THPT Hồng Lĩnh-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018)** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2-2x+1$ là

A. $F(x)=\frac{1}{3}x^3-2+x+C$.

B. $F(x)=2x-2+C$.

C. $F(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+x+C$.

D. $F(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+x+C$.

Lời giải

Chọn C

$F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x\ n=\frac{1}{3}x^3-x^2+x+C$.

Câu 18: **(THPT Lê Quý Đôn-Quãng Trị-lần 1 năm 2017-2018)** Trong các khẳng định sau, khẳng đinh nào **sai**?

A. $\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$. **B.** $\int 0\,\mathrm{d}x=C$. **C.** $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x+C$. **D.** $\int \mathrm{d}x=x+C$.

Lời giải

Chọn C

Khẳng định **C** sai do $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$.

Câu 19: (THPT Chuyên Tiền Giang-lần 1 năm 2017-2018) Cho hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. $\int\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$.

B. $\int\left[f(x).g(x)\right]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x.\int g(x)\mathrm{d}x$.

C. $\int\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x - \int g(x)\mathrm{d}x$.

D. $\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x \ (k \neq 0; k \in \mathbb{R})$.

Lời giải

Chọn B

Câu 20: (THPT Phan Đình Phùng-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Cho hàm số $f(t)$ liên tục trên K và $a,b \in K$, $F(t)$ là một nguyên hàm của $f(t)$ trên K. Chọn khẳng định sai trong các khẳng định sau.

A. $F(a)-F(b) = \int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

B. $\int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(t)\Big|_a^b$.

C. $\int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t = \left(\int f(t)\mathrm{d}t\right)\Bigg|_a^b$.

D. $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Bài giải

Chọn A

Theo định nghĩa ta có: $\int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(t)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$. Suy ra phương án A sai.

Câu 21: (THPT Phan Đình Phùng-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Một nguyên hàm của hàm số $y = \cos 2x$ là

A. $-2\sin 2x$.

B. $\frac{1}{2}\sin 2x$.

C. $\frac{-1}{2}\sin 2x$.

D. $2\sin 2x$.

Lời giải

Chọn B

$\int \cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin 2x + C$.

Câu 22: (THPT Đức THọ-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^{2018}$, $(x \in \mathbb{R})$ là hàm số nào trong các hàm số dưới đây?

A. $F(x) = 2017.x^{2018} + C$, $(C \in \mathbb{R})$.

B. $F(x) = \frac{x^{2019}}{2019} + C$, $(C \in \mathbb{R})$.

C. $F(x) = x^{2019} + C, (C \in \mathbb{R})$.

D. $F(x) = 2018.x^{2017} + C$, $(C \in \mathbb{R})$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int x^{2018}\mathrm{d}x = \frac{x^{2019}}{2019} + C$.

Câu 23: (THPT Đức THọ-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Cho $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)$. Khi đó hiệu số $F\left(0\right)-F\left(1\right)$ bằng

A. $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$. **B.** $\int\limits_0^1 -F\left(x\right)\mathrm{d}x$. **C.** $\int\limits_0^1 -F\left(x\right)\mathrm{d}x$. **D.** $\int\limits_0^1 -f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int\limits_0^1 -f\left(x\right)\mathrm{d}x=-F\left(x\right)\Big|_0^1=-\left[F\left(1\right)-F\left(0\right)\right]=F\left(0\right)-F\left(1\right)$.

Câu 24: (THPT Đức THọ-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[1;2\right]$. Gọi $\left(D\right)$ là hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, $y=0$, $x=1$ và $x=2$. Công thức tính diện tích S của $\left(D\right)$ là công thức nào trong các công thức dưới đây?

A. $S=\int\limits_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x$. **B.** $S=\int\limits_1^2 f^2\left(x\right)\mathrm{d}x$. **C.** $S=\int\limits_1^2 \left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x$. **D.** $S=\pi\int\limits_1^2 f^2\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn C

Câu 25: (THPT Chuyên Hùng Vương-Phú Thọ-lần 2 năm 2017-2018) Giá trị của $\int\limits_0^3 \mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

$\int\limits_0^3 \mathrm{d}x=x\Big|_0^3=3$.

Câu 26: (THPT Chuyên Hùng Vương-Phú Thọ-lần 2 năm 2017-2018) Nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\cos x$ là

A. $-\sin x+C$. **B.** $\sin x+C$. **C.** $\cos x+C$. **D.** $-\cos x+C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int \cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$.

Câu 27: (THPT Lục Ngạn-Bắc Giang-lần 1 năm 2017-2018) Họ nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=3x^2+2x+5$ là

A. $F\left(x\right)=x^3+x^2+5$. **B.** $F\left(x\right)=x^3+x+C$.

C. $F\left(x\right)=x^3+x^2+5x+C$. **D.** $F\left(x\right)=x^3+x^2+C$.

Lời giải

Chọn C

Nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=3x^2+2x+5$ là $F\left(x\right)=x^3+x^2+5x+C$.

Câu 28: (THPT Lục Ngạn-Bắc Giang-lần 1 năm 2017-2018) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ $\left(a<b\right)$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức

A. $V=\pi\int\limits_a^b f^2\left(x\right)\mathrm{d}x$. **B.** $V=\pi^2\int\limits_a^b f^2\left(x\right)\mathrm{d}x$. **C.** $V=\pi^2\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$. **D.** $V=2\pi\int\limits_a^b f^2\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn D

Theo lý thuyết.

Câu 29: (THPT Nguyễn Trãi-Đà Nẵng-lần 1 năm 2017-2018) Họ nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\frac{1}{x^2}-x^2-\frac{1}{3}$ là

A. $\frac{-x^4+x^2+3}{3x}+C$. **B.** $\frac{-2}{x^2}-2x+C$. **C.** $-\frac{x^4+x^2+3}{3x}+C$. **D.** $\frac{-x^3}{3}-\frac{1}{x}-\frac{x}{3}+C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int\left(\frac{1}{x^2}-x^2-\frac{1}{3}\right)\mathrm{d}x=\int\left(x^{-2}-x^2-\frac{1}{3}\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}-\frac{x^3}{3}-\frac{x}{3}+C$.

Câu 30: (THPT Lê Xoay-Vĩnh phúc-lần 1 năm 2017-2018) Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\int\mathrm{d}x=x+2C$ (C là hằng số).

B. $\int x^n\mathrm{d}x=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$ (C là hằng số; $n\in\mathbb{Z}$).

C. $\int 0\mathrm{d}x=C$ (C là hằng số).

D. $\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x-C$ (C là hằng số).

Lời giải

Chọn B

Đáp án B sai vì công thức trên chỉ đúng khi bổ sung thêm điều kiện $n\neq -1$.

Câu 31: (THPT Lê Xoay-Vĩnh phúc-lần 1 năm 2017-2018) Cho $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=F\left(x\right)+C$. Khi đó với $a\neq 0$, a, b là hằng số ta có $\int f\left(ax+b\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\int f\left(ax+b\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}F\left(ax+b\right)+C$.

B. $\int f\left(ax+b\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{a+b}F\left(ax+b\right)+C$.

C. $\int f\left(ax+b\right)\mathrm{d}x=F\left(ax+b\right)+C$.

D. $\int f\left(ax+b\right)\mathrm{d}x=aF\left(ax+b\right)+C$.

Lời giải

Chọn A

Theo công thức nguyên hàm mở rộng ta có: $\int f\left(ax+b\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}F\left(ax+b\right)+C$.

Câu 32: (THPT Chuyên Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Tích phân $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\mathrm{e}-1$. **B.** $\frac{1}{\mathrm{e}}-1$. **C.** $\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}$. **D.** $\frac{1}{\mathrm{e}}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^1=-\left(\frac{1}{\mathrm{e}}-1\right)=\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}$.

Câu 33: (THPT Chuyên Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường thẳng $x=0$, $x=\pi$, đồ thị hàm số $y=\cos x$ và trục Ox là

A. $S=\int_0^{\pi}\cos x\,dx$. **B.** $S=\int_0^{\pi}\cos^2 x\,dx$. **C.** $S=\int_0^{\pi}|\cos x|\,dx$. **D.** $S=\pi\int_0^{\pi}|\cos x|\,dx$.

Lời giải

Chọn C

Lý thuyết.

Câu 34: (THPT Chuyên Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Họ nguyên hàm của hàm số $y=\cos 3x$ là

A. $\frac{\sin 3x}{3}+C$ (C là hằng số). **B.** $-\frac{\sin 3x}{3}+C$ (C là hằng số).

C. $\sin 3x+C$ (C là hằng số). **D.** $-\sin 3x+C$ (C là hằng số).

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int\cos 3x\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\cos 3x\mathrm{d}(3x)=\frac{1}{3}\sin 3x+C$.

Câu 35: (THPT Đặng Thúc Hứa-Nghệ An-lần 1 năm 2017-2018) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f'(x)=x+\sin x$ và $f(0)=1$. Tìm $f(x)$.

A. $f(x)=\frac{x^2}{2}-\cos x+2$. **B.** $f(x)=\frac{x^2}{2}-\cos x-2$.

C. $f(x)=\frac{x^2}{2}+\cos x$. **D.** $f(x)=\frac{x^2}{2}+\cos x+\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x)=x+\sin x\Rightarrow f(x)=\frac{x^2}{2}-\cos x+C$; $f(0)=1\Leftrightarrow -1+C=1\Leftrightarrow C=2$.

Vậy $f(x)=\frac{x^2}{2}-\cos x+2$.

Câu 36: (THPT Đặng Thúc Hứa-Nghệ An-lần 1 năm 2017-2018) Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\mathrm{e}^x$, $y=2$, $x=0$, $x=1$.

A. $S=4\ln 2+\mathrm{e}-5$. **B.** $S=4\ln 2+\mathrm{e}-6$. **C.** $S=\mathrm{e}^2-7$. **D.** $S=\mathrm{e}-3$.

Lời giải

Chọn A

Gọi S là diện tích cần tìm. Ta có $S=\int_0^1\left|\mathrm{e}^x-2\right|\mathrm{d}x$.

Xét $\mathrm{e}^x-2=0\Leftrightarrow x=\ln 2$.

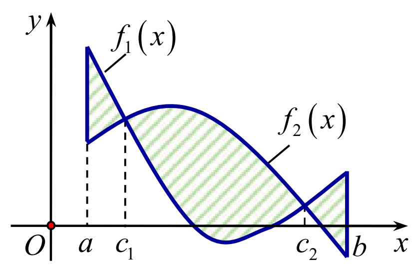
Bảng xét dấu e^x-2:

x	0		$\ln 2$		1
e^x-2		$-$	0	$+$	

Ta có $S=\int\limits_0^1\left|e^x-2\right|dx=-\int\limits_0^{\ln 2}\left(e^x-2\right)dx+\int\limits_{\ln 2}^1\left(e^x-2\right)dx=\left(2x-e^x\right)\Big|_0^{\ln 2}+\left(e^x-2x\right)\Big|_{\ln 2}^1$

$=4\ln 2+e-5$. Vậy $S=4\ln 2+e-5$.

Câu 37: (THPT Chuyên Hạ Long-Quãng Ninh lần 2 năm 2017-2018) Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $f_1(x)$ và $f_2(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ (tham khảo hình vẽ dưới). Công thức tính diện tích của hình (H) là



A. $S=\int\limits_a^b\left|f_1(x)-f_2(x)\right|dx$.

B. $S=\int\limits_a^b\left(f_1(x)-f_2(x)\right)dx$.

C. $S=\int\limits_a^b\left|f_1(x)+f_2(x)\right|dx$.

D. $S=\int\limits_a^b f_2(x)dx-\int\limits_a^b f_1(x)dx$.

Lời giải

Chọn A

Theo định nghĩa ứng dụng tích phân tích diện tích hình phẳng.

Câu 38: (THPT Chuyên Hạ Long-Quãng Ninh lần 2 năm 2017-2018) Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin 2018x$.

A. $\frac{\cos 2018x}{2018}+C$.

B. $-\frac{\cos 2018x}{2019}+C$.

C. $-\frac{\cos 2018x}{2018}+C$.

D. $2018\cos 2018x+C$.

Lời giải

Chọn C

Theo công thức nguyên hàm mở rộng ta có: $\int\sin 2018x dx=-\frac{\cos 2018x}{2018}+C$.

Câu 39: (THPT Chuyên Hạ Long-Quãng Ninh lần 2 năm 2017-2018) Tính tích phân $\int\limits_0^\pi\sin 3x dx$.

A. $-\frac{1}{3}$.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $-\frac{2}{3}$.

D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int_0^{\pi}\sin 3x\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\cos 3x\Big|_0^{\pi}=-\frac{1}{3}(-1-1)=\frac{2}{3}$.

Câu 40: (THPT Chuyên Phan Bội Châu-lần 2 năm 2017-2018) Mệnh đề nào dưới đây là **sai**?

A. $\int\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x+\int g(x)\mathrm{d}x$ với mọi hàm $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

B. $\int\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x-\int g(x)\mathrm{d}x$ với mọi hàm $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

C. $\int\left[f(x)g(x)\right]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x.\int g(x)\mathrm{d}x$ với mọi hàm $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

D. $\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C$ với mọi hàm $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C

Câu 41: (THPT Chuyên Phan Bội Châu-lần 2 năm 2017-2018) Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=x$ và $y=\mathrm{e}^x$, trục tung và đường thẳng $x=1$ được tính theo công thức:

A. $S=\int_0^1\left|\mathrm{e}^x-1\right|\mathrm{d}x$. **B.** $S=\int_0^1\left(\mathrm{e}^x-x\right)\mathrm{d}x$. **C.** $S=\int_0^1\left(x-\mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}x$. **D.** $S=\int_{-1}^1\left|\mathrm{e}^x-x\right|\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn B

Vì trong khoảng $(0;1)$ phương trình $\mathrm{e}^x=x$ không có nghiệm và $\mathrm{e}^x>x$, $\forall x\in(0;1)$ nên

$S=\int_0^1\left|\mathrm{e}^x-x\right|\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\mathrm{e}^x-x\right)\mathrm{d}x$.

Câu 42: (THPT Chuyên Phan Bội Châu-lần 2 năm 2017-2018) Tích phân $I=\int_0^1\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$ bằng

A. e^2-1. **B.** $\mathrm{e}-1$. **C.** $\frac{\mathrm{e}^2-1}{2}$. **D.** $\mathrm{e}+\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $I=\int_0^1\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\Big|_0^1=\frac{\mathrm{e}^2-1}{2}$.

Câu 43: (THPT Chuyên Hùng Vương-Gia Lai-lần 1 năm 2017-2018) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos x$

A. $\int\cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$. **B.** $\int\cos x\mathrm{d}x=-\sin x+C$.

C. $\int\cos x\mathrm{d}x=\sin 2x+C$. **D.** $\int\cos x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\sin x+C$.

Lời giải

Chọn A

$\int\cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$.

Câu 44: (THPT Chuyên Hùng Vương-Gia Lai-lần 1 năm 2017-2018) Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}$, trục Ox và hai đường thẳng $x=1$; $x=4$ khi quay quanh trục hoành được tính bởi công thức nào?

A. $V=\pi\int_1^4 x\mathrm{d}x$. **B.** $V=\int_1^4\left|\sqrt{x}\right|\mathrm{d}x$. **C.** $V=\pi^2\int_1^4 x\mathrm{d}x$. **D.** $V=\pi\int_1^4\sqrt{x}\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn A

Thể tích khối tròn xoay giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục Ox, $x=a$ và $x=b$ được tính bởi công thức $V=\pi\int_a^b\left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x$.

Câu 45: (THPT Chuyên Hùng Vương-Gia Lai-lần 1 năm 2017-2018) Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=5^x+1$.

A. $5^x\ln x+x+C$. **B.** 5^x+x+C. **C.** $\dfrac{5^x}{\ln 5}+x+C$. **D.** 5^x+x+C.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int\left(5^x+1\right)\mathrm{d}x=\dfrac{5^x}{\ln 5}+x+C$.

Câu 46: (THPT Chuyên Trần Phú-Hải Phòng-lần 2 năm 2017-2018) Viết công thức tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ có diện tích thiết diện bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(a\le x\le b)$ là $S(x)$.

A. $V=\int_b^a S(x)\mathrm{d}x$. **B.** $V=\pi\int_a^b S(x)\mathrm{d}x$. **C.** $V=\pi\int_a^b S^2(x)\mathrm{d}x$. **D.** $V=\int_a^b S(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn D

$V=\int_a^b S(x)\mathrm{d}x$.

Câu 47: (SGD Phú Thọ – lần 1 - năm 2017 – 2018) Hàm số nào dưới đây không là nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^3$?

A. $y=\dfrac{x^4}{4}-2^{2018}$. **B.** $y=\dfrac{x^4}{4}-2018$. **C.** $y=3x^2$. **D.** $y=\dfrac{1}{4}x^4+2018$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $F(x)=\int x^3\mathrm{d}x=\dfrac{x^4}{4}+C$ nên các đáp án A, B, D đều đúng.

Câu 48: (SGD Phú Thọ – lần 1 - năm 2017 – 2018) Cho a là số thực dương bất kỳ khác 1. Tính $S=\log_a\left(a^3.\sqrt[4]{a}\right)$.

A. $S=\dfrac{3}{4}$. **B.** $S=7$. **C.** $S=12$. **D.** $S=\dfrac{13}{4}$.

Lời giải

Chọn D

$S=\log_a\left(a^3.\sqrt[4]{a}\right)=\log_a\left(a^3.a^{\frac{1}{4}}\right)=\log_a a^{\frac{13}{4}}=\frac{13}{4}$.

Câu 49: (SGD Phú Thọ – lần 1 - năm 2017 – 2018) Cho hai số thực a, b tùy ý, $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên tập $\mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(b)-f(a)$. **B.** $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$.

C. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(a)-F(b)$. **D.** $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)+F(a)$.

Lời giải

Chọn B

Theo định nghĩa, ta có $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$.

Câu 50: Tích phân $\int_1^2 3^{x-1}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{2}{\ln 3}$. **B.** $2\ln 3$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int_1^2 3^{x-1}\mathrm{d}x=\int_1^2 3^{x-1}\mathrm{d}(x-1)=\left.\frac{3^{x-1}}{\ln 3}\right|_1^2=\frac{2}{\ln 3}$.

Câu 51: (SGD Phú Thọ – lần 1 - năm 2017 – 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):\frac{1}{2}x-2y+z+5=0$. Vectơ nào dưới đây là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P)?

A. $\overrightarrow{n_2}=(1;-2;1)$. **B.** $\overrightarrow{n_3}=(1;-4;2)$. **C.** $\overrightarrow{n_1}=(2;-2;1)$. **D.** $\overrightarrow{n_4}=(-2;1;5)$.

Lời giải

Chọn B

Từ phương trình của (P) suy ra một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}=\left(\frac{1}{2};-2;1\right)$.

Mặt khác $\overrightarrow{n_3}=(1;-4;2)=2\left(\frac{1}{2};-2;1\right)=2\vec{n}$ nên $\overrightarrow{n_3}=(1;-4;2)$ cũng là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

Câu 52: (SGD Phú Thọ – lần 1 - năm 2017 – 2018) Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua ba điểm $A(2;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;-4)$ có phương trình là

A. $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{-4}=1$. **B.** $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{-4}=1$. **C.** $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$. **D.** $\frac{x}{-4}+\frac{y}{3}+\frac{z}{2}=1$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{-4}=1$.

Câu 53: Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos 2x$ là

A. $2\sin 2x + C$. **B.** $\sin 2x + C$. **C.** $\frac{1}{2}\sin 2x + C$. **D.** $-\frac{1}{2}\sin 2x + C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int \cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin 2x + C$.

Câu 54: (THPT Chuyên ĐH Vinh – lần 1 - năm 2017 – 2018) Cho hình phẳng (D) được giới hạn bởi các đường $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ và $y = \sqrt{2x+1}$. Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) xung quanh trục Ox được tính theo công thức?

A. $V = \pi\int\limits_0^1 \sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x$. **B.** $V = \pi\int\limits_0^1 (2x+1)\,\mathrm{d}x$. **C.** $V = \int\limits_0^1 (2x+1)\,\mathrm{d}x$. **D.** $V = \int\limits_0^1 \sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $V = \pi\int\limits_0^1 \left(\sqrt{2x+1}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi\int\limits_0^1 (2x+1)\,\mathrm{d}x$.

Câu 55: (THPT Tây Thụy Anh – Thái Bình – lần 1 - năm 2017 – 2018) Họ nguyên hàm $\int x.\sqrt[3]{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{8}.\sqrt[3]{(x^2+1)} + C.$ **B.** $\frac{3}{8}.\sqrt[3]{(x^2+1)} + C.$ **C.** $\frac{3}{8}.\sqrt[3]{(x^2+1)^4} + C.$ **D.** $\frac{1}{8}.\sqrt[3]{(x^2+1)^4} + C.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int x.\sqrt[3]{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \left(x^2+1\right)^{\frac{1}{3}} \mathrm{d}\left(x^2+1\right) = \frac{3}{8}\left(x^2+1\right)^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)^4} + C$.

Câu 56: (THPT Tây Thụy Anh – Thái Bình – lần 1 - năm 2017 – 2018) Họ nguyên hàm $\int \sin x\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\cos x + C$. **B.** $-\sin x + C$. **C.** $-\cos x + C$. **D.** $\sin x + C$.

Lời giải

Chọn C

$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$.

Câu 57: (THPT Yên Lạc – Vĩnh Phúc – lần 4 - năm 2017 – 2018) Kết luận nào sau đây đúng?

A. $\int \sin x\mathrm{d}x = -\sin x + C$. **B.** $\int \sin x\mathrm{d}x = \sin x + C$.

C. $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$. **D.** $\int \sin x\mathrm{d}x = \cos x + C$.

Lời giải

Chọn C

Nguyên hàm cơ bản.

Câu 58: (THPT Quảng Xương I – Thanh Hóa – năm 2017 – 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, xác định trên đoạn $[a;b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được tính theo công thức:

A. $S=\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$. **B.** $S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. **C.** $S=-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. **D.** $S=\int_b^a |f(x)|\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn A

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ là $S=\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$.

Câu 59: (THPT Quảng Xương I – Thanh Hóa – năm 2017 – 2018) Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=3-\frac{1}{\sin^2 x}$ là

A. $F(x)=3x-\tan x+C$. **B.** $F(x)=3x+\tan x+C$.

C. $F(x)=3x+\cot x+C$. **D.** $F(x)=3x-\cot x+C$.

Lời giải

Chọn C

Nguyên hàm của hàm số $f(x)=3-\frac{1}{\sin^2 x}$ là $F(x)=3x+\cot x+C$.

Câu 60: (SGD Bắc Giang – năm 2017 – 2018) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=2\cos 2x$ là

A. $-2\sin 2x+C$. **B.** $\sin 2x+C$. **C.** $2\sin 2x+C$. **D.** $\sin 2x+C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int 2\cos 2x\,\mathrm{d}x=2.\frac{1}{2}\sin 2x+C=\sin 2x+C$.

Câu 61: (Chuyên ĐB Sông Hồng –Lần 1 năm 2017 – 2018) Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{\pi}{4}$. **B.** $I=-1$. **C.** $I=0$. **D.** $I=1$.

Lời giải

Chọn C

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\mathrm{d}x=\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=0.$$

Câu 62: (THPT Chuyên Thoại Ngọc Hầu – An Giang - Lần 3 năm 2017 – 2018) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ $(a<b)$. Diện tích hình phẳng D được tính bởi công thức.

A. $S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. **B.** $S=\pi\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. **C.** $S=\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$. **D.** $S=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $S=\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$.

Câu 63: **(THPT Chuyên Thoại Ngọc Hầu – An Giang - Lần 3 năm 2017 – 2018)** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=5x^4+2$ là

A. x^5+2x+C. **B.** $\frac{1}{5}x^5+2x+C$. **C.** $10x+C$. **D.** x^5+2.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x=\int(5x^4+2)\mathrm{d}x=x^5+2x+C$.

Câu 64: Tích phân $I=\int_0^1 \mathrm{e}^{x+1}\mathrm{d}x$ bằng

A. e^2-1. **B.** $\mathrm{e}^2-\mathrm{e}$. **C.** $\mathrm{e}^2+\mathrm{e}$. **D.** $\mathrm{e}-\mathrm{e}^2$.

Câu 65: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin 5x+2$ là

A. $5\cos 5x+C$. **B.** $-\frac{1}{5}\cos 5x+2x+C$. **C.** $\frac{1}{5}\cos 5x+2x+C$. **D.** $\cos 5x+2x+C$.

Câu 66: Cho hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Gọi (H) là hình giới hạn bởi hai đồ thị $y=f(x)$, $y=g(x)$ và các đường thẳng $x=a$, $x=b$. Diện tích hình (H) được tính theo công thức:

A. $S_H=\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x-\int_a^b|g(x)|\mathrm{d}x$. **B.** $S_H=\int_a^b|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x$.

C. $S_H=\left|\int_a^b[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x\right|$. **D.** $S_H=\int_a^b[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$.

Câu 67: **(THPT Chuyên Ngữ – Hà Nội - Lần 1 năm 2017 – 2018)** Tích phân $I=\int_0^1 \mathrm{e}^{x+1}\mathrm{d}x$ bằng

A. e^2-1. **B.** $\mathrm{e}^2-\mathrm{e}$. **C.** $\mathrm{e}^2+\mathrm{e}$. **D.** $\mathrm{e}-\mathrm{e}^2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $I=\int_0^1 \mathrm{e}^{x+1}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x+1}\Big|_0^1=\mathrm{e}^2-\mathrm{e}$.

Câu 68: **(THPT Chuyên Ngữ – Hà Nội - Lần 1 năm 2017 – 2018)** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin 5x+2$ là

A. $5\cos 5x+C$. **B.** $-\frac{1}{5}\cos 5x+2x+C$. **C.** $\frac{1}{5}\cos 5x+2x+C$. **D.** $\cos 5x+2x+C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int(\sin 5x+2)\mathrm{d}x=-\frac{1}{5}\cos 5x+2x+C$.

Câu 69: **(THPT Chuyên Ngữ – Hà Nội - Lần 1 năm 2017 – 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ liên tục trên $\left[a;b\right]$. Gọi $\left(H\right)$ là hình giới hạn bởi hai đồ thị $y=f\left(x\right)$, $y=g\left(x\right)$ và các đường thẳng $x=a$, $x=b$. Diện tích hình $\left(H\right)$ được tính theo công thức:

A. $S_H=\int\limits_a^b\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x-\int\limits_a^b\left|g\left(x\right)\right|\mathrm{d}x$.
B. $S_H=\int\limits_a^b\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|\mathrm{d}x$.
C. $S_H=\left|\int\limits_a^b\left[f\left(x\right)-g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x\right|$.
D. $S_H=\int\limits_a^b\left[f\left(x\right)-g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn B

Câu 70: (THPT Chuyên ĐHSP – Hà Nội - Lần 1 năm 2017 – 2018) Trong các hàm số sau, hàm số nào không phải là nguyên hàm của $f\left(x\right)=x^3$?

A. $\dfrac{x^4}{4}-1$.
B. $3x^2$.
C. $\dfrac{x^4}{4}+1$.
D. $\dfrac{x^4}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Họ nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=x^3$ là $F\left(x\right)=\dfrac{x^4}{4}+C$ nên hàm số $3x^2$ không phải là nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=x^3$.

Câu 71: (THPT Chuyên ĐHSP – Hà Nội - Lần 1 năm 2017 – 2018) Một quả bóng bàn có mặt ngoài là mặt cầu bán kính $2\,\text{cm}$. Diện tích mặt ngoài của quả bóng bàn là

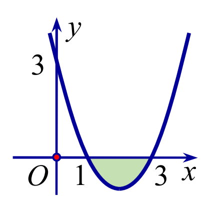
A. $4\left(\text{cm}^2\right)$.
B. $4\pi\left(\text{cm}^2\right)$.
C. $16\pi\left(\text{cm}^2\right)$.
D. $16\left(\text{cm}^2\right)$.

Lời giải

Chọn C

Diện tích mặt cầu là $S=4\pi R^2=16\pi\left(\text{cm}^2\right)$.

Câu 72: (THPT Chuyên ĐHSP – Hà Nội - Lần 1 năm 2017 – 2018) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục và có đồ thị như hình bên. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số đã cho và trục Ox. Quay hình phẳng D quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích V được xác định theo công thức



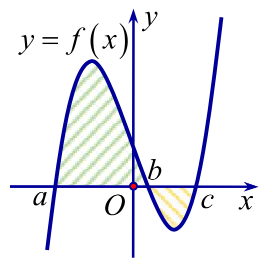
A. $V=\pi\int\limits_1^3\left[f\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x$.
B. $V=\dfrac{1}{3}\int\limits_1^3\left[f\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x$.
C. $V=\pi^2\int\limits_1^3\left[f\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x$.
D. $V=\int\limits_1^3\left[f\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục Ox tại hai điểm có hoành độ lần lượt là $x=1$, $x=3$ nên thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng D quanh trục Ox được tính theo công thức $V=\pi\int_1^3\left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x$.

Câu 73: (THPT Chuyên ĐHSP – Hà Nội - Lần 1 năm 2017 – 2018) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Hình phẳng được đánh dấu trong hình vẽ bên có diện tích là



A. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_b^c f(x)\mathrm{d}x$. **B.** $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_b^c f(x)\mathrm{d}x$.

C. $-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_b^c f(x)\mathrm{d}x$. **D.** $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x)\ge 0\ \forall x\in[a;\mathrm{b}]$ và $f(x)\le 0\ \forall x\in[b;c]$ nên diện tích của hình phẳng là

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_b^c f(x)\mathrm{d}x$

Câu 74: (THPT Chuyên Vĩnh Phúc – Vĩnh Phúc - Lần 4 năm 2017 – 2018) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos 2x$.

A. $\int\cos 2x\mathrm{d}x=2\sin 2x+C$. **B.** $\int\cos 2x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\sin 2x+C$.

C. $\int\cos 2x\mathrm{d}x=\sin 2x+C$. **D.** $\int\cos 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sin 2x+C$.

Lời giải

Chọn D

Theo công thức nguyên hàm mở rộng: $\int f(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$.

$\Rightarrow\int\cos 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sin 2x+C$.

Câu 75: (THPT Kim Liên – Hà Nội - Lần 2 năm 2017 – 2018) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=3\cos x+\frac{1}{x^2}$ trên $(0;+\infty)$.

A. $-3\sin x+\frac{1}{x}+C$. **B.** $3\sin x-\frac{1}{x}+C$. **C.** $3\cos x+\frac{1}{x}+C$. **D.** $3\cos x+\ln x+C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \left(3\cos x + \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = 3\sin x - \frac{1}{x} + C$.

Câu 76: (THPT Kim Liên – Hà Nội - Lần 2 năm 2017 – 2018)Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}.x^{\mathrm{e}} + 4$ là

A. 101376. **B.** $\mathrm{e}^2.x^{\mathrm{e}-1} + C$. **C.** $\frac{x^{\mathrm{e}+1}}{\mathrm{e}+1} + 4x + C$. **D.** $\frac{\mathrm{e}.x^{\mathrm{e}+1}}{\mathrm{e}+1} + 4x + C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x = \int(\mathrm{e}.x^{\mathrm{e}} + 4)\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}.x^{\mathrm{e}+1}}{\mathrm{e}+1} + 4x + C$.

Câu 77: (THPT Kim Liên – Hà Nội - Lần 2 năm 2017 – 2018)Tính tích phân $I = \int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{x+2}$.

A. $I = \frac{4581}{5000}$. **B.** $I = \log\frac{5}{2}$. **C.** $I = \ln\frac{5}{2}$. **D.** $I = -\frac{21}{100}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $I = \int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{x+2} = \ln|x+2|\Big|_0^3 = \ln\frac{5}{2}$.

Câu 78: (THPT Kim Liên – Hà Nội - Lần 2 năm 2017 – 2018) Cho hàm số $y = \pi^x$ có đồ thị (C). Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi (C), trục hoành và hai đường thẳng $x = 2$, $x = 3$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính bởi công thức:

A. $V = \pi\int_3^2 \pi^{2x}\mathrm{d}x$. **B.** $V = \pi^3\int_2^3 \pi^x\mathrm{d}x$. **C.** $V = \pi\int_2^3 \pi^{2x}\mathrm{d}x$. **D.** $V = \pi^2\int_2^3 \pi^x\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn C

Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính bởi công thức:

$V = \pi\int_2^3 (\pi^x)^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_2^3 \pi^{2x}\mathrm{d}x$.

Câu 79: (THPT Trần Phú – Hà Tĩnh - Lần 2 năm 2017 – 2018) Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x)$ liên tục, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được tính bằng công thức nào dưới đây?

A. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $\pi\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **C.** $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$. **D.** $\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $S = \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$.

Câu 80: (THPT Trần Phú – Hà Tĩnh - Lần 2 năm 2017 – 2018) Khẳng định nào sau đây **sai?**

A. $\int\limits_a^b \left[f(x)+g(x) \right] dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx$. **B.** $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_c^b f(x)dx + \int\limits_a^c f(x)dx$.

C. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_b^a f(x)dx$. **D.** $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(t)dt$.

Lời giải

Chọn C

Câu 81: (THPT Trần Phú – Hà Tĩnh - Lần 2 năm 2017 – 2018) Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x)=5x^4-6x^2+1$ là

A. $20x^3-12x+C$. **B.** x^5-2x^3+x+C. **C.** $20x^5-12x^3+x+C$. **D.** $\dfrac{x^4}{4}+2x^2-2x+C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int (5x^4-6x^2+1)dx = x^5-2x^3+x+C$.

Câu 82: (THPT Thuận Thành 2 – Bắc Ninh - Lần 2 năm 2017 – 2018) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin x-1$ bằng

A. $\cos x+C$. **B.** $-\cos x-x+C$. **C.** $-\cos x+C$. **D.** $\cos x-x+C$.

Lời giải.

Chọn B

Ta có $\int (\sin x-1)dx = -\cos x - x + C$.

Câu 83: (THPT Chuyên Lương Thế Vinh – Đồng Nai – Lần 2 năm 2017 – 2018) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành, đường thẳng $x=a$ và đường thẳng $x=b$. Khi đó diện tích S của hình phẳng D được tính theo công thức

A. $S=\int\limits_a^b |f(x)|dx$. **B.** $S=\int\limits_a^b f(x)dx$. **C.** $S=\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right|$. **D.** $S=\pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$.

Lời giải

Chọn A

Theo công thức tính diện tích hình phẳng ta có $S=\int\limits_a^b |f(x)|dx$.

Câu 84: (THPT Chuyên Lương Thế Vinh – Đồng Nai – Lần 2 năm 2017 – 2018) Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{1-2x}$ là

A. $\int f(x)dx = -2\ln|1-2x|+C$. **B.** $\int f(x)dx = 2\ln|1-2x|+C$.

C. $\int f(x)dx = -\dfrac{1}{2}\ln|1-2x|+C$. **D.** $\int f(x)dx = \ln|1-2x|+C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int \dfrac{1}{1-2x}dx = -\dfrac{1}{2}\ln|1-2x|+C$.

Câu 85: (THPT Quỳnh Lưu 1 – Nghệ An – Lần 2 năm 2017 – 2018) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, $y=g\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$ và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ được xác định theo công thức

A. $S=\pi\int\limits_a^b\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|\mathrm{d}x$.

B. $S=\int\limits_a^b\left[f\left(x\right)-g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x$.

C. $S=\int\limits_a^b\left[g\left(x\right)-f\left(x\right)\right]\mathrm{d}x$.

D. $S=\int\limits_a^b\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn D

Lý thuyết.

Câu 86: (THPT Quỳnh Lưu 1 – Nghệ An – Lần 2 năm 2017 – 2018) Họ nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=2x^2+x+1$ là

A. $\dfrac{2x^3}{3}+x^2+x+C$. **B.** $4x+1$. **C.** $\dfrac{2x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+x$. **D.** $\dfrac{2x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+x+C$.

Lời giải

Chọn D

$\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\left(2x^2+x+1\right)\mathrm{d}x=\dfrac{2x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+x+C$.

Câu 87: (THPT Quỳnh Lưu 1 – Nghệ An – Lần 2 năm 2017 – 2018) Tích phân $\int\limits_0^2\dfrac{x}{x^2+3}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{7}{3}$. **B.** $\ln\dfrac{7}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{7}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{7}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int\limits_0^2\dfrac{x}{x^2+3}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^2\dfrac{1}{x^2+3}\mathrm{d}\left(x^2+3\right)=\dfrac{1}{2}\ln\left|x^2+3\right|\Big|_0^2=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{7}{3}$.

Câu 88: (SGD Quảng Nam – năm 2017 – 2018) Tìm $\int\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x$.

A. $\int\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{x}+C$. **B.** $\int\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{x}+C$. **C.** $\int\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2x}+C$. **D.** $\int\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\ln x^2+C$.

Lời giải

Chọn B

$\int\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{x}+C$.

Câu 89: (SGD Quảng Nam – năm 2017 – 2018) Cho hai hàm số $y=f\left(x\right),y=g\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$ và nhận giá trị bất kỳ. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số đó và các đường thẳng $x=a;x=b$ được tính theo công thức

A. $S=\int\limits_a^b\left[f\left(x\right)-g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x$.

B. $S=\int\limits_a^b\left[g\left(x\right)-f\left(x\right)\right]\mathrm{d}x$.

C. $S=\int\limits_a^b\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|\mathrm{d}x$.

D. $S=\left|\int\limits_a^b\left[f\left(x\right)-g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x\right|$.

Lời giải

Chọn C

Theo lý thuyết thì diện tích được tính theo công thức $S=\int_a^b\left|f(x)-g(x)\right|dx$

Câu 90: (ĐHQG TPHCM – Cơ Sở 2 – năm 2017 – 2018) Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ và $F(0)=2$ thì $F(1)$ bằng.

A. $\ln 2$. **B.** $2+\ln 2$. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

$F(x)=\int\dfrac{1}{x+1}dx=\ln|x+1|+C$ mà $F(0)=2$ nên $F(x)=\ln|x+1|+2$.

Do đó $F(1)=2+\ln 2$.

Câu 91: (THPT Trần Phú – Đà Nẵng - Lần 2 – năm 2017 – 2018) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+\sin x$ là

A. $x^3+\cos x+C$. **B.** $x^3+\sin x+C$. **C.** $x^3-\cos x+C$. **D.** $3x^3-\sin x+C$.

Lời giải

Chọn C

Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+\sin x$ là $x^3-\cos x+C$.

Câu 92: (THPT Trần Phú – Đà Nẵng - Lần 2 – năm 2017 – 2018) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Tìm khẳng định **sai**.

A. $\int_a^b f(x)dx=F(a)-F(b)$. **B.** $\int_a^a f(x)dx=0$.

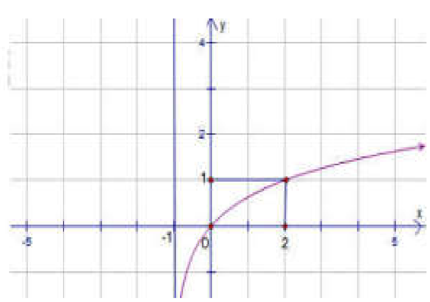
C. $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$. **D.** $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

Lời giải

Chọn A

Định nghĩa và tính chất của tích phân.

Câu 93: (THPT Trần Phú – Đà Nẵng - Lần 2 – năm 2017 – 2018) Đồ thị cho bởi hình bên là của hàm số nào?



A. $y=\log_2 x+1$. **B.** $y=\log_3(x+1)$. **C.** $y=\log_3 x$. **D.** $y=\log_2(x+1)$.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị ta thấy khi $x=0$ thì $y=0$ và khi $x=2$ thì $y=1$. Nên ta thấy đáp án B thỏa mãn.

Câu 94: (THPT Trần Phú – Đà Nẵng - Lần 2 – năm 2017 – 2018) Tích phân $I=\int\limits_{0}^{2018} 2^x \mathrm{d}x$ bằng

A. $2^{2018}-1$. **B.** $\dfrac{2^{2018}-1}{\ln 2}$. **C.** $\dfrac{2^{2018}}{\ln 2}$. **D.** 2^{2018}.

Lời giải

Chọn D

$$I=\int\limits_{0}^{2018} 2^x \mathrm{d}x=\left.\frac{2^x}{\ln 2}\right|_0^{2018}=\frac{2^{2018}-1}{\ln 2}.$$

Câu 95: (THPT Chuyên ĐH Vinh – Lần 2 – năm 2017 – 2018) Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x\mathrm{e}^x$, $y=0$, $x=0$, $x=1$ xung quanh trục Ox là

A. $V=\int\limits_0^1 x^2\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$. **B.** $V=\pi\int\limits_0^1 x\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x$. **C.** $V=\pi\int\limits_0^1 x^2\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$. **D.** $V=\pi\int\limits_0^1 x^2\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn C

Thể tích khối tròn xoay giới hạn bởi $y=f(x)$, $y=0$, $x=a$, $x=b$ ($a<b$) xác định bởi:

$$V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

Vậy, $V=\pi\int\limits_0^1 x^2\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$.

Câu 96: (THPT Chuyên ĐH Vinh – Lần 2 – năm 2017 – 2018) Tất cả nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{2x+3}$ là

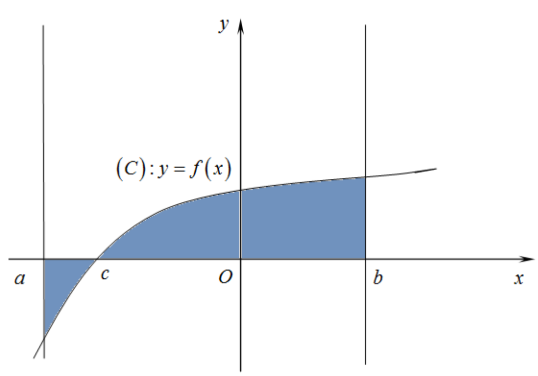
A. $\dfrac{1}{2}\ln(2x+3)+C$. **B.** $\dfrac{1}{2}\ln|2x+3|+C$. **C.** $\ln|2x+3|+C$. **D.** $\dfrac{1}{\ln 2}\ln|2x+3|+C$.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức nguyên hàm mở rộng: $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{2x+3}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\ln|2x+3|+C$.

Câu 97: (SGD Nam Định – năm 2017 – 2018) Diện tích của hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ (phần tô đậm trong hình vẽ) tính theo công thức:



A. $S=\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $S=-\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $S=\left|\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$.

D. $S=\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức tính diện tích hình phẳng ta có:

$$S=\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^c \left[0-f(x)\right]\mathrm{d}x+\int\limits_c^b \left[f(x)-0\right]\mathrm{d}x=-\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Câu 1: (SGD Thanh Hóa – năm 2017 – 2018) Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Nếu $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$ thì $\int f(u)\mathrm{d}u = F(u)+C$.

B. $\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x$ (k là hằng số và $k \neq 0$).

C. Nếu $F(x)$ và $G(x)$ đều là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì $F(x)=G(x)$.

D. $\int [f_1(x)+f_2(x)]\mathrm{d}x = \int f_1(x)\mathrm{d}x + \int f_2(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn C

Mệnh đề C sai, ví dụ $f(x)=1$ thì $F(x)=x$ và $G(x)=x+1$ cũng đều là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ mà $F(x)\neq G(x)$.

Câu 2: (SGD Thanh Hóa – năm 2017 – 2018) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Diện tích hình phẳng S giới hạn bởi đường cong $y=f(x)$, trục hoành và các đường thẳng $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ được xác định bởi công thức nào sau đây?

A. $S=\int_b^a |f(x)|\mathrm{d}x$. **B.** $S=\left|\int_b^a f(x)\mathrm{d}x\right|$. **C.** $S=\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$. **D.** $S=\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn D

Diện tích hình phẳng S là: $S=\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$.

Câu 3: (SGD Thanh Hóa – năm 2017 – 2018) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=x-\sin 2x$ là

A. $\frac{x^2}{2}+\cos 2x+C$. **B.** $\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x+C$. **C.** $x^2+\frac{1}{2}\cos 2x+C$. **D.** $\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x+C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x = \int (x-\sin 2x)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x + C$.

Câu 4: (THPT Chuyên Nguyễn Quang Diệu – Đồng Tháp – Lần 5 năm 2017 – 2018) Giả sử f là hàm số liên tục trên khoảng K và a, b, c là ba số bất kỳ trên khoảng K. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\int_a^a f(x)dx = 1$. **B.** $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

C. $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx,\ c\in(a;b)$. **D.** $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int_a^a f(x)dx = F(a)-F(a)=0$.

Câu 5: (THPT Chuyên Nguyễn Quang Diệu – Đồng Tháp – Lần 5 năm 2017 – 2018) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x\left(1+e^{-x}\right)$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=e^x+1+C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x=e^x+x+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=-e^x+x+C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x=e^x+C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(e^x+1\right)\mathrm{d}x=e^x+x+C$.

Câu 6: (THPT Chuyên Thái Bình – Thái Bình – Lần 5 năm 2017 – 2018) Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=x+\cos x$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{x^2}{2}+\sin x+C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x=1-\sin x+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=x\sin x+\cos x+C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{x^2}{2}-\sin x+C$.

Lời giải

Chọn A

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int(x+\cos x)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}+\sin x+C.$$

Câu 7: (THPT Chuyên Thái Bình – Thái Bình – Lần 5 năm 2017 – 2018) Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{x}$ và các đường thẳng $y=0$, $x=1$, $x=4$. Thể tích V của khối tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox.

A. $2\pi\ln 2$.

B. $\dfrac{3\pi}{4}$.

C. $\dfrac{3}{4}-1$.

D. $2\ln 2$.

Lời giải

Chọn B

Thể tích V của khối tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox là

$$V=\pi\int_1^4\left(\frac{1}{x}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^4=\pi\left(-\frac{1}{4}+1\right)=\frac{3\pi}{4}.$$

Câu 8: (THPT Chuyên Hùng Vương – Gia Lai – Lần 2 năm 2017 – 2018) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^x\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-x}+C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+x+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}+C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(\mathrm{e}^x+1\right)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+x+C$.

Câu 9: (THPT Chuyên Lương Thế Vinh - Hà Nội – Lần 2 năm 2017 – 2018) Họ nguyên hàm của hàm số $y=\sin 2x$ là

A. $-\frac{1}{2}\cos 2x+C$. **B.** $-\frac{1}{2}\cos 2x$. **C.** $-\cos 2x+C$. **D.** $\frac{1}{2}\cos 2x+C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int \sin 2x\mathrm{d}x=\int \sin 2x\frac{1}{2}\mathrm{d}(2x)=\frac{1}{2}\int \sin 2x\mathrm{d}(2x)=\frac{1}{2}\cos 2x+C$.

Câu 10: (THPT Chuyên Lương Thế Vinh - Hà Nội – Lần 2 năm 2017 – 2018) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$; $x=b$ được tính theo công thức:

A. $S=\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$. **B.** $S=\pi\int\limits_a^b \left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x$. **C.** $S=\int\limits_0^1 \left|f(x)\right|\mathrm{d}x$. **D.** $S=\pi\int\limits_0^1 \left|f(x)\right|\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn C

Theo công thức ta có phương án C.

Câu 11: (SGD Hà Tĩnh – Lần 2 năm 2017 – 2018) Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên K, $a,\, b\in K$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. $\int\limits_a^b \left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$. **B.** $\int\limits_a^b kf(x)\mathrm{d}x=k\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

C. $\int\limits_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x.\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$. **D.** $\int\limits_a^b \left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Câu 12: (SGD Hà Tĩnh – Lần 2 năm 2017 – 2018) Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^{2x+3}$ là

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{2x+3}+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{2x+3}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x+3}+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=2\mathrm{e}^{2x+3}+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Áp dụng công thức nguyên hàm cơ bản ta được: $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x+3}+C$.

Câu 13: (THPT Nghèn – Hà Tĩnh – Lần 2 năm 2017 – 2018) Cho $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2$, $\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x=4$, khi đó $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=?$

A. 6. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 6$.

Câu 14: (THPT Nghèn – Hà Tĩnh – Lần 2 năm 2017 – 2018) Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ là:

A. $\ln|x+2| + C$. **B.** $\dfrac{1}{2}\ln|x+2| + C$. **C.** $\ln(x+2) + C$. **D.** $\dfrac{1}{2}\ln(x+2) + C$.

Lời giải

Chọn A

Câu 15: (THPT Chu Văn An – Hà Nội - năm 2017-2018) Nguyên hàm $I = \int \dfrac{1}{2x+1}\mathrm{d}x$ bằng:

A. $-\dfrac{1}{2}\ln|2x+1| + C$. **B.** $-\ln|2x+1| + C$. **C.** $\dfrac{1}{2}\ln|2x+1| + C$. **D.** $\ln|2x+1| + C$.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng công thức $I = \int \dfrac{1}{ax+1}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a}\ln|ax+b| + C$ ta được đáp án C.

Câu 16: (THPT Chuyên Võ Nguyên Giáp – Quảng Bình - năm 2017-2018) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ $(a < b)$. Diện tích hình D được tính theo công thức

A. $S = \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$. **B.** $S = \int_a^b f|x|\mathrm{d}x$. **C.** $S = \left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$. **D.** $S = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Câu 17: (THPT Chuyên Võ Nguyên Giáp – Quảng Bình - năm 2017-2018) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 2x$ là

A. $\int \cos 2x\,\mathrm{d}x = 2\sin 2x + C$. **B.** $\int \cos 2x\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{2}\sin 2x + C$.

C. $\int \cos 2x\,\mathrm{d}x = \sin 2x + C$. **D.** $\int \cos 2x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\sin 2x + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$\int \cos 2x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\sin 2x + C$.

Câu 18: (THPT Chuyên Võ Nguyên Giáp – Quảng Bình - năm 2017-2018) Cho $\int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int_{-1}^{2} g(x)\mathrm{d}x = -1$. Tính $I = \int_{-1}^{2}\left[x + 2f(x) + 3g(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=\dfrac{11}{2}$. **B.** $I=\dfrac{7}{2}$. **C.** $I=\dfrac{17}{2}$. **D.** $I=\dfrac{5}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có: $I=\left.\dfrac{x^2}{2}\right|_{-1}^{2}+2\int\limits_{-1}^{2}f(x)\,\mathrm{d}x+3\int\limits_{-1}^{2}g(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{3}{2}+4-3=\dfrac{5}{2}$.

Câu 19: (SGD Bắc Ninh – Lần 2 - năm 2017-2018) Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $\int\left[f(x)-g(x)\right]dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$, với mọi hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

B. $\int f'(x)dx=f(x)+C$ với mọi hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

C. $\int\left[f(x)+g(x)\right]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$, với mọi hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

D. $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ với mọi hằng số k và với mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn D

Mệnh đề: $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ với mọi hằng số k và với mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ là mệnh đề sai vì khi $k=0$ thì $\int kf(x)dx\neq k\int f(x)dx$.

Câu 20: (SGD Bắc Ninh – Lần 2 - năm 2017-2018) Tích phân $f(x)=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}\cos x\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}\cos x\mathrm{d}x=\sin x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 21: (SGD Bắc Ninh – Lần 2 - năm 2017-2018) Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int\dfrac{1}{1-4x}\mathrm{d}x=-4.\ln\dfrac{1}{|1-4x|}+C$. **B.** $\int\dfrac{1}{1-4x}\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{4}.\ln|1-4x|+C$.

C. $\int\dfrac{1}{1-4x}\mathrm{d}x=\ln|1-4x|+C$. **D.** $\int\dfrac{1}{1-4x}\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{4}.\ln|8x-2|+C$.

Lời giải

Chọn B

$\int\dfrac{1}{1-4x}\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{4}\int\dfrac{1}{1-4x}\mathrm{d}(1-4x)=-\dfrac{1}{4}.\ln|1-4x|+C$.

Câu 22: (Chuyên Lê Hồng Phong – Nam Đinh - năm 2017-2018) Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+3z+5=0$. Tính $|z_1+z_2|$

A. 3. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** 5. **D.** $\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Theo định lý vi-et ta có $z_1+z_2=-3 \Rightarrow |z_1+z_2|=|-3|=3$.

Câu 23: (THPT Đặng Thúc Hứa – Nghệ An - năm 2017-2018) Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=e^x$ và các đường thẳng $y=0$, $x=0$ và $x=1$ được tính bởi công thức nào sau đây?

A. $V=\int_0^1 e^{2x}dx$. **B.** $V=\pi\int_0^1 e^{x^2}dx$. **C.** $V=\int_0^1 e^{x^2}dx$. **D.** $V=\pi\int_0^1 e^{2x}dx$.

Lời giải

Chọn D

Thể tích khối tròn xoay cần tìm là: $V=\pi\int_0^1 (e^x)^2 dx=\pi\int_0^1 e^{2x}dx$.

Câu 24: (THPT Đặng Thúc Hứa – Nghệ An - năm 2017-2018) Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{2x+3}$

A. $\int f(x)dx=\frac{2}{3}x\sqrt{2x+3}+C$. **B.** $\int f(x)dx=\frac{1}{3}(2x+3)\sqrt{2x+3}+C$.

C. $\int f(x)dx=\frac{2}{3}(2x+3)\sqrt{2x+3}+C$. **D.** $\int f(x)dx=\sqrt{2x+3}+C$.

Lời giải

Chọn B

Xét $I=\int\left(\sqrt{2x+3}\right)dx$.

Đặt $\sqrt{2x+3}=t \Leftrightarrow t^2=2x+3 \Leftrightarrow 2tdt=2dx$.

$I=\int t.tdt=\int t^2 dt=\frac{1}{3}t^3+C=\frac{1}{3}\left(\sqrt{2x+3}\right)^3+C \Leftrightarrow \int f(x)dx=\frac{1}{3}(2x+3)\sqrt{2x+3}+C$.

Câu 25: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$.

A. $\int f(x)dx=3\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)+C$. **B.** $\int f(x)dx=-\frac{1}{3}\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)+C$.

C. $\int f(x)dx=6\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)+C$. **D.** $\int f(x)dx=\frac{1}{3}\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)+C$.

Câu 26: Cho $\vec{a}=(-1;\ 2;\ 3)$, $\vec{b}=(2;\ 1;\ 0)$, với $\vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}$ thì tọa độ của $\vec{c}$ là

A. $(-1;\ 3;\ 5)$. **B.** $(-4;\ 1;\ 3)$. **C.** $(-4;\ 3;\ 6)$. **D.** $(-4;\ 3;\ 3)$.

Câu 27: Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2-3x+\frac{1}{x}$ là:

A. $F(x)=2x-3-\frac{1}{x^2}+C$. **B.** $F(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+\ln|x|+C$.

C. $F\left(x\right)=\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+\ln x+C$. **D.** $F\left(x\right)=\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+\ln x+C$.

Câu 28: Tìm nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$.

A. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=3\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)+C$. **B.** $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)+C$.

C. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=6\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)+C$. **D.** $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)+C$.

Lời giải

Chọn D

Áp dụng công thức: $\int\cos\left(ax+b\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\sin\left(ax+b\right)+C$.

Câu 29: Cho $\vec{a}=\left(-1;\ 2;\ 3\right)$, $\vec{b}=\left(2;\ 1;\ 0\right)$, với $\vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}$ thì tọa độ của $\vec{c}$ là

A. $\left(-1;\ 3;\ 5\right)$. **B.** $\left(-4;\ 1;\ 3\right)$. **C.** $\left(-4;\ 3;\ 6\right)$. **D.** $\left(-4;\ 3;\ 3\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $2\vec{a}=\left(-2;\ 4;\ 6\right)$, $\vec{b}=\left(2;\ 1;\ 0\right)$ nên $\vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}=\left(-4;\ 3;\ 6\right)$.

Câu 30: Họ các nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=x^2-3x+\frac{1}{x}$ là:

A. $F\left(x\right)=2x-3-\frac{1}{x^2}+C$. **B.** $F\left(x\right)=\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+\ln\left|x\right|+C$.

C. $F\left(x\right)=\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+\ln x+C$. **D.** $F\left(x\right)=\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+\ln x+C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int\left(x^2-3x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+\ln\left|x\right|+C$.

Câu 31: Cho $f\left(x\right)$ là hàm số liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$ và $c\in\left[a;b\right]$. Tìm mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau.

A. $\int_a^c f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int_c^b f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_b^a f\left(x\right)\mathrm{d}x$. **B.** $\int_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int_a^c f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_c^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

C. $\int_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x-\int_a^c f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_c^c f\left(x\right)\mathrm{d}x$. **D.** $\int_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int_c^a f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_c^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Câu 32: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\tan^2 2x+\frac{1}{2}$.

A. $\int\left(\tan^2 2x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x=2\tan 2x-2x+C$. **B.** $\int\left(\tan^2 2x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x=\tan 2x-\frac{x}{2}+C$.

C. $\int\left(\tan^2 2x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x=\tan 2x-x+C$.

D. $\int\left(\tan^2 2x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{\tan 2x}{2}-\frac{x}{2}+C$.

Câu 33: Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $c\in[a;b]$. Tìm mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau.

A. $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x=\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

B. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_a^c f(x)\mathrm{d}x=\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

C. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_a^c f(x)\mathrm{d}x=\int_c^c f(x)\mathrm{d}x$.

D. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_c^a f(x)\mathrm{d}x=\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn D

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_c^a f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)+F(a)-F(c)=F(b)-F(c)=\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 34: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\tan^2 2x+\frac{1}{2}$.

A. $\int\left(\tan^2 2x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x=2\tan 2x-2x+C$.

B. $\int\left(\tan^2 2x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x=\tan 2x-\frac{x}{2}+C$.

C. $\int\left(\tan^2 2x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x=\tan 2x-x+C$.

D. $\int\left(\tan^2 2x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{\tan 2x}{2}-\frac{x}{2}+C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int\left(\tan^2 2x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{\cos^2 2x}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{\tan 2x}{2}-\frac{x}{2}+C$.

Câu 35: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=x(x+1)$.

A. $x(x+1)+C$.

B. $2x+1+C$.

C. x^3+x^2+C.

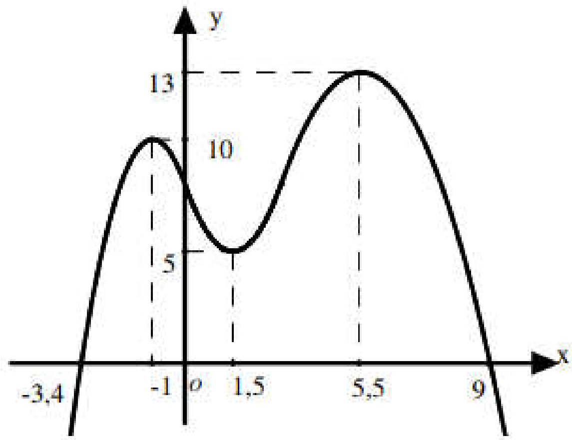
D. $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+C$.

Lời giải

Chọn D

$I=\int f(x)\mathrm{d}x=\int x(x+1)\mathrm{d}x=\int(x^2+x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+C$.

Câu 36: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ và $f'(x)<0\ \forall x\in(-\infty;-3,4)\cup(9;+\infty)$. Đặt $g(x)=f(x)-mx+5$ với $m\in\mathbb{N}$. Có bao nhiêu giá trị của m để hàm số $y=g(x)$ có đúng hai điểm cực trị?



A. 8. B. 11. C. 9. D. 10.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x) = f'(x) - m$. Suy ra: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = m$.

Do đó: Số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ tương đương với số giao điểm của đồ thị hàm số $f'(x)$ và đường thẳng $y = m$.

Nhận xét: Hàm số $y = g(x)$ có đúng hai điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $g'(x) = 0$ có số nghiệm lớn hơn bằng 2, trong đó có đúng 2 nghiệm đơn.

Dựa vào đồ thị và các lập luận trên, suy ra $\left[\begin{array}{l} m \le 5 \\ 10 \le m < 13 \end{array}\right.$,

mà $m \in \mathbb{N}$ nên $m \in \{0;1;2;3;4;5;10;11;12\}$.

Vậy có 9 giá trị m thỏa mãn.

Câu 37: Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = f(x), y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ $(a > b)$ diện tích của D được theo công thức

A. $S = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$. **B.** $\int\limits_a^b |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x$.

C. $\int\limits_b^a |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x$. **D.** $\int\limits_a^b (f(x) - g(x))\mathrm{d}x$.

Câu 38: Tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\mathrm{d}x$ bằng.

A. $\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$. **B.** $1-\sqrt{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$. **D.** $\sqrt{2}-1$.

Câu 39: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x-1)^3$ là

A. $\frac{1}{4}(x-1)^4 + C$. **B.** $\frac{1}{4}(x-1)^3 + C$. **C.** $3(x-1) + C$. **D.** $4(x-1)^4 + C$.

Câu 40: Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=f(x), y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ $(a>b)$ diện tích của D được theo công thức

A. $S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.
B. $\int_a^b |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x$.

C. $\int_b^a |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x$.
D. $\int_a^b (f(x)-g(x))\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn C

Theo công thức tính diện tích hình phẳng kết hợp với điều kiện $a>b$, vậy a là cận trên và b là cận dưới $\Rightarrow$ Diện tích $S=\int_b^a |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x$.

Câu 41: Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{d}x$ bằng.

A. $\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.
B. $1-\sqrt{2}$.
C. $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$.
D. $\sqrt{2}-1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\mathrm{d}x=-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$.

Câu 42: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=(x-1)^3$ là

A. $\frac{1}{4}(x-1)^4+C$.
B. $\frac{1}{4}(x-1)^3+C$.
C. $3(x-1)+C$.
D. $4(x-1)^4+C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int (x-1)^3\mathrm{d}x=\frac{(x-1)^4}{4}+C$.

Câu 43: Tích phân $I=\int_0^2 \frac{1}{2\sqrt{x+2}}dx$ bằng

A. $I=1-\frac{1}{\sqrt{2}}$.
B. $I=2\sqrt{2}$.
C. $I=2-\frac{1}{\sqrt{2}}$.
D. $I=2-\sqrt{2}$.

Câu 44: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{2x+1}+\cos x$ là:

A. $\frac{1}{2}\ln|2x+1|+\sin x+C$.
B. $\frac{1}{2}\ln|2x+1|-\sin x+C$.

C. $\frac{1}{2(2x+1)^2}+\sin x+C$.
D. $\ln|2x+1|+\sin x+C$.

Câu 45: Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi (H) là hình phẳng giời hạn bởi hai đồ thị hàm số và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ $(a<b)$. Khi đó, diện tích S của (H) được tính bằng công thức:

A. $S=\int\limits_a^b\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x$.

B. $S=\int\limits_a^b\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x$.

C. $S=\int\limits_a^b\left|f(x)\right|\mathrm{d}x-\int\limits_a^b\left|g(x)\right|\mathrm{d}x$.

D. $S=\int\limits_a^b\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x$.

Câu 46: Tích phân $I=\int\limits_0^2\frac{1}{2\sqrt{x+2}}dx$ bằng

A. $I=1-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

B. $I=2\sqrt{2}$.

C. $I=2-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

D. $I=2-\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có : $I=\int\limits_0^2\frac{1}{2\sqrt{x+2}}dx=\sqrt{x+2}\Big|_0^2=2-\sqrt{2}$.

Câu 47: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{2x+1}+\cos x$ là:

A. $\frac{1}{2}\ln|2x+1|+\sin x+C$.

B. $\frac{1}{2}\ln|2x+1|-\sin x+C$.

C. $\frac{1}{2(2x+1)^2}+\sin x+C$.

D. $\ln|2x+1|+\sin x+C$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức cơ bản của nguyên hàm ta có: $\int\left(\frac{1}{2x+1}+\cos x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln|2x+1|+\sin x+C$.

Câu 48: Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi (H) là hình phẳng giời hạn bởi hai đồ thị hàm số và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ $(a<b)$. Khi đó, diện tích S của (H) được tính bằng công thức:

A. $S=\int\limits_a^b\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x$.

B. $S=\int\limits_a^b\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x$.

C. $S=\int\limits_a^b\left|f(x)\right|\mathrm{d}x-\int\limits_a^b\left|g(x)\right|\mathrm{d}x$.

D. $S=\int\limits_a^b\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức diện tích hình phẳng ta có $S=\int\limits_a^b\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x$.

Câu 49: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên khoảng K và $a,b,c\in K$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_c^b f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_a^c f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

B. $\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f\left(t\right)\mathrm{d}t$.

C. $\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x=-\int\limits_b^a f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

D. $\int\limits_a^a f\left(x\right)\mathrm{d}x=0$.

Câu 50: Biết $\int\limits_1^8 f\left(x\right)\mathrm{d}x=-2$; $\int\limits_1^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x=3$; $\int\limits_1^4 g\left(x\right)\mathrm{d}x=7$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\int\limits_4^8 f\left(x\right)\mathrm{d}x=1$.

B. $\int\limits_1^4\left[f\left(x\right)+g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=10$.

C. $\int\limits_4^8 f\left(x\right)\mathrm{d}x=-5$.

D. $\int\limits_1^4\left[4f\left(x\right)-2g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=-2$.

Câu 51: Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=2-x^2$ và $y=x$ bằng

A. $\frac{11}{6}$. **B.** 3. **C.** $\frac{9}{2}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 52: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên khoảng K và $a,b,c\in K$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_c^b f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_a^c f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

B. $\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f\left(t\right)\mathrm{d}t$.

C. $\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x=-\int\limits_b^a f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

D. $\int\limits_a^a f\left(x\right)\mathrm{d}x=0$.

Lời giải

Chọn A

Mệnh đề đúng là: $\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_b^c f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_a^c f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Câu 53: Biết $\int\limits_1^8 f\left(x\right)\mathrm{d}x=-2$; $\int\limits_1^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x=3$; $\int\limits_1^4 g\left(x\right)\mathrm{d}x=7$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\int\limits_4^8 f\left(x\right)\mathrm{d}x=1$.

B. $\int\limits_1^4\left[f\left(x\right)+g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=10$.

C. $\int\limits_4^8 f\left(x\right)\mathrm{d}x=-5$.

D. $\int\limits_1^4\left[4f\left(x\right)-2g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=-2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int\limits_4^8 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_1^8 f\left(x\right)\mathrm{d}x-\int\limits_1^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x=-2-3=-5$

Câu 54: Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=2-x^2$ và $y=x$ bằng

A. $\frac{11}{6}$. **B.** 3. **C.** $\frac{9}{2}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Giao của hai đồ thị $2-x^2=x \Leftrightarrow x=1; x=-2$

Diện tích cần tính $S=\int_{-2}^{1}\left|2-x^2-x\right|\mathrm{d}x=\dfrac{9}{2}$.

Câu 55: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\int_{a}^{b} f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_{a}^{b} f\left(t\right)\mathrm{d}t$.

B. $\int_{a}^{b} f\left(x\right)\mathrm{d}x=-\int_{b}^{a} f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

C. $\int_{a}^{b} k\mathrm{d}x=k\left(a-b\right)$, $\forall k\in\mathbb{R}$.

D. $\int_{a}^{b} f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_{a}^{c} f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int_{c}^{b} f\left(x\right)\mathrm{d}x$, $\forall c\in\left(a;b\right)$.

Câu 56: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\int_{a}^{b} f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_{a}^{b} f\left(t\right)\mathrm{d}t$.

B. $\int_{a}^{b} f\left(x\right)\mathrm{d}x=-\int_{b}^{a} f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

C. $\int_{a}^{b} k\mathrm{d}x=k\left(a-b\right)$, $\forall k\in\mathbb{R}$.

D. $\int_{a}^{b} f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_{a}^{c} f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int_{c}^{b} f\left(x\right)\mathrm{d}x$, $\forall c\in\left(a;b\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int_{a}^{b} k\mathrm{d}x=kx\Big|_{a}^{b}=kb-ka=k\left(b-a\right)$.

Câu 57: Giả sử $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{1}{3x+1}$ trên khoảng $\left(-\infty;-\dfrac{1}{3}\right)$ Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $F\left(x\right)=\dfrac{1}{3}\ln\left(3x+1\right)+C$.

B. $F\left(x\right)=\dfrac{1}{3}\ln\left(-3x-1\right)+C$.

C. $F\left(x\right)=\ln\left|3x+1\right|+C$.

D. $F\left(x\right)=\ln\left(-3x-1\right)+C$.

Câu 58: Cho hình phẳng $\left(D\right)$ được giới hạn bởi các đường $x=0$, $x=\pi$, $y=0$ và $y=-\sin x$. Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay $\left(D\right)$ xung quanh trục Ox được tính theo công thức

A. $V=\pi\int_{0}^{\pi}\left|\sin x\right|\mathrm{d}x$.

B. $V=\pi\int_{0}^{\pi}\sin^2 x\mathrm{d}x$.

C. $V=\pi\left|\int_{0}^{\pi}\left(-\sin x\right)\mathrm{d}x\right|$.

D. $V=\int_{0}^{\pi}\sin^2 x\mathrm{d}x$.

Câu 59: Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{3x+1}$ trên khoảng $\left(-\infty;-\dfrac{1}{3}\right)$ Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $F(x)=\dfrac{1}{3}\ln(3x+1)+C.$ **B.** $F(x)=\dfrac{1}{3}\ln(-3x-1)+C.$

C. $F(x)=\ln|3x+1|+C.$ **D.** $F(x)=\ln(-3x-1)+C.$

Lời giải

Chọn B

$F(x)=\int\dfrac{1}{3x+1}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}\ln|3x+1|+C=\dfrac{1}{3}\ln(-3x-1)+C$ (do $x\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{3}\right)$ nên $3x+1<0$).

Câu 60: Cho hình phẳng (D) được giới hạn bởi các đường $x=0$, $x=\pi$, $y=0$ và $y=-\sin x$. Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) xung quanh trục Ox được tính theo công thức

A. $V=\pi\int\limits_0^\pi|\sin x|\mathrm{d}x$. **B.** $V=\pi\int\limits_0^\pi\sin^2 x\mathrm{d}x$.

C. $V=\pi\left|\int\limits_0^\pi(-\sin x)\mathrm{d}x\right|$. **D.** $V=\int\limits_0^\pi\sin^2 x\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn B

Ta có thể tích của khối tròn xoay cần tính là $V=\pi\int\limits_0^\pi\sin^2 x\mathrm{d}x$.

Câu 61: Cho miền phẳng (D) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$, hai đường thẳng $x=1$, $x=2$ và trục hoành. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) quanh trục hoành.

A. $\dfrac{3\pi}{2}$. **B.** 3π. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** $\dfrac{2\pi}{3}$.

Câu 62: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2$; $\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x=6$. Tính $I=\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=8$. **B.** $I=12$. **C.** $I=36$. **D.** $I=4$.

Câu 63: Cho hàm số $f(x)=4x^3+2x+1$. Tìm $\int f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=12x^4+2x^2+x+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=12x^2+2$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=x^4+x^2+x+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=12x^2+2+C$.

Câu 64: Cho miền phẳng (D) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$, hai đường thẳng $x=1$, $x=2$ và trục hoành. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) quanh trục hoành.

A. $\dfrac{3\pi}{2}$. **B.** 3π. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** $\dfrac{2\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) quanh trục hoành: $V=\pi\int\limits_1^2\left(\sqrt{x}\right)^2\mathrm{d}x=\dfrac{3\pi}{2}$.

Câu 65: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2$; $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = 6$. Tính $I = \int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I = 8$. **B.** $I = 12$. **C.** $I = 36$. **D.** $I = 4$.

Lời giải

Chọn A

$I = \int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = 2 + 6 = 8$.

Câu 66: Cho hàm số $f(x) = 4x^3 + 2x + 1$. Tìm $\int f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x = 12x^4 + 2x^2 + x + C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x = 12x^2 + 2$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x = x^4 + x^2 + x + C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x = 12x^2 + 2 + C$.

Lời giải

Chọn C

Theo công thức nguyên hàm.

Câu 67: Cho hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ được tính theo công thức:

A. $S = \left|\int_a^b [f(x) - g(x)]\mathrm{d}x\right|$. **B.** $S = \pi\int_a^b [f(x) - g(x)]\mathrm{d}x$.

C. $S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x$. **D.** $S = \int_a^b [f(x) - g(x)]\mathrm{d}x$.

Câu 68: Cho hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ được tính theo công thức:

A. $S = \left|\int_a^b [f(x) - g(x)]\mathrm{d}x\right|$. **B.** $S = \pi\int_a^b [f(x) - g(x)]\mathrm{d}x$.

C. $S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x$. **D.** $S = \int_a^b [f(x) - g(x)]\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn C

Câu 69: . Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = 1 - 2\sin 2t\,(\mathrm{m/s})$. Quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ thời điểm $t = 0(\mathrm{s})$ đến thời điểm $t = \frac{3\pi}{4}(\mathrm{s})$

A. $\frac{3\pi}{4}(\mathrm{m})$. **B.** $\frac{3\pi}{4} - 1(\mathrm{m})$. **C.** $\frac{\pi}{4} - 2(\mathrm{m})$. **D.** $\frac{3\pi}{4} + 1(\mathrm{m})$.

Câu 70: . Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{3x - 1}{x - 3}$ trên $[0;2]$ là

A. $\frac{-1}{3}$. **B.** -5. **C.** 5. **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 71: Tính $\int_1^e x^2 \ln x dx$

A. $\frac{2e^3+1}{9}$. B. $\frac{2e^3-1}{9}$. C. $\frac{e^3-2}{9}$. D. $\frac{e^3+2}{9}$.

Câu 72: Một vật chuyển động với vận tốc $v(t)=1-2\sin 2t\,(\text{m/s})$. Quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ thời điểm $t=0(\text{s})$ đến thời điểm $t=\frac{3\pi}{4}(\text{s})$ là

A. $\frac{3\pi}{4}(\text{m})$. B. $\frac{3\pi}{4}-1(\text{m})$. C. $\frac{\pi}{4}-2(\text{m})$. D. $\frac{3\pi}{4}+1(\text{m})$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $s=\int_0^{\frac{3\pi}{4}} v(t)dt=\int_0^{\frac{3\pi}{4}}(1-2\sin 2t)dt=(t+\cos 2t)\Big|_0^{\frac{3\pi}{4}}=\frac{3\pi}{4}-1$.

Câu 73: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\frac{3x-1}{x-3}$ trên $[0;2]$ là

A. $\frac{-1}{3}$. B. -5. C. 5. D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=\frac{-8}{(x-3)^2}<0,\ \forall x\neq 3 \Rightarrow \max\limits_{[0;2]} y=y(0)=\frac{1}{3}$.

Câu 74: Tính $\int_1^e x^2 \ln x dx$

A. $\frac{2e^3+1}{9}$. B. $\frac{2e^3-1}{9}$. C. $\frac{e^3-2}{9}$. D. $\frac{e^3+2}{9}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $u=\ln x \Rightarrow du=\frac{1}{x}dx$, $dv=x^2dx \Rightarrow v=\frac{x^3}{3}$

Suy ra $\int_1^e x^2\ln x dx=\frac{x^3}{3}\ln x\Big|_1^e-\frac{1}{3}\int_1^e x^2dx=\frac{e^3}{3}-\frac{x^3}{9}\Big|_1^e=\frac{e^3}{3}-\left(\frac{e^3}{9}-\frac{1}{9}\right)=\frac{2e^3+1}{9}$.

Câu 75: Cho $\int_a^b f'(x)dx=7$ và $f(b)=5$. Khi đó $f(a)$ bằng

A. 12. B. 0. C. 2. D. -2.

Câu 76: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x.\ln x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1$; $x=2$. Thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi (H) khi nó quay quanh trục hoành có thể tích V được xác định bởi

A. $V=\pi\int_1^2 (x.\ln x)^2\,dx$. **B.** $V=\int_1^2 (x.\ln x)\,dx$.

C. $V=\int_1^2 (x.\ln x)^2\,dx$. **D.** $V=\pi\int_1^2 (x.\ln x)\,dx$.

Câu 77: Cho $\int_a^b f'(x)\,dx=7$ và $f(b)=5$. Khi đó $f(a)$ bằng

A. 12. **B.** 0. **C.** 2. **D.** -2.

Lời giải

Chọn D

$\int_a^b f'(x)\,dx=7 \Leftrightarrow f(b)-f(a)=7 \Leftrightarrow f(a)=f(b)-7=-2$.

Câu 78: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x.\ln x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1$; $x=2$. Thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi (H) khi nó quay quanh trục hoành có thể tích V được xác định bởi

A. $V=\pi\int_1^2 (x.\ln x)^2\,dx$. **B.** $V=\int_1^2 (x.\ln x)\,dx$.

C. $V=\int_1^2 (x.\ln x)^2\,dx$. **D.** $V=\pi\int_1^2 (x.\ln x)\,dx$.

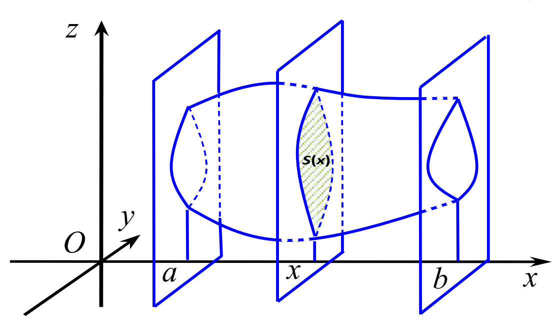
Lời giải

Chọn A

Thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi $(H):\begin{cases} y=x.\ln x \\ y=0 \\ x=1; x=2 \end{cases}$ khi nó quay quanh trục hoành có thể tích

V được xác định bởi $V=\pi\int_1^2 (x.\ln x)^2\,dx$.

Câu 79: Trong không gian $Oxyz$, cho vật thể được giới hạn bởi hai mặt phẳng (P), (Q) vuông góc với trục Ox lần lượt tại $x=a$, $x=b$ $(a<b)$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với Ox tại điểm có hoành độ x, $(a\le x\le b)$ cắt vật thể theo thiết diện có diện tích là $S(x)$ với $y=S(x)$ là hàm số liên tục trên $[a;b]$. Thể tích V của thể tích đó được tính theo công thức



A. $V=\int\limits_a^b S^2(x)\,dx$. **B.** $V=\pi\int\limits_a^b S^2(x)\,dx$. **C.** $V=\pi\int\limits_a^b S(x)\,dx$. **D.** $V=\int\limits_a^b S(x)\,dx$.

Câu 80: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=3\sqrt{x}+x^{2018}$ là

A. $\sqrt{x}+\dfrac{x^{2019}}{673}+C$.

B. $2\sqrt{x^3}+\dfrac{x^{2019}}{2019}+C$.

C. $\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{x^{2019}}{673}+C$.

D. $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+6054x^{2017}+C$.

Câu 81: Tích phân $\int\limits_{-1}^{0}\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}\mathrm{d}x$ bằng

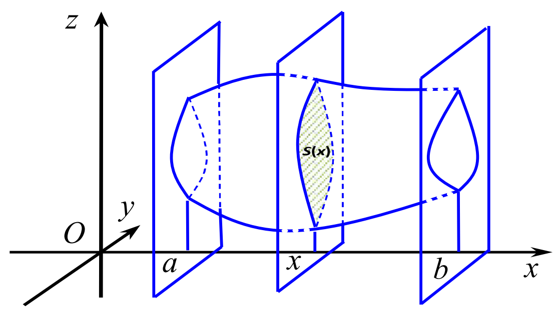
A. $1-\sqrt{3}$.

B. $\sqrt{3}-1$.

C. $\sqrt{3}+1$.

D. $-\sqrt{3}-1$.

Câu 82: Trong không gian $Oxyz$, cho vật thể được giới hạn bởi hai mặt phẳng (P), (Q) vuông góc với trục Ox lần lượt tại $x=a$, $x=b$ $(a<b)$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với Ox tại điểm có hoành độ x, $(a\le x\le b)$ cắt vật thể theo thiết diện có diện tích là $S(x)$ với $y=S(x)$ là hàm số liên tục trên $[a;b]$. Thể tích V của thể tích đó được tính theo công thức



A. $V=\int\limits_a^b S^2(x)\mathrm{d}x$.

B. $V=\pi\int\limits_a^b S^2(x)\mathrm{d}x$.

C. $V=\pi\int\limits_a^b S(x)\mathrm{d}x$.

D. $V=\int\limits_a^b S(x)\mathrm{d}x$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Theo định nghĩa ta có: $V=\int\limits_a^b S(x)\mathrm{d}x$

Câu 83: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=3\sqrt{x}+x^{2018}$ là

A. $\sqrt{x}+\dfrac{x^{2019}}{673}+C$.

B. $2\sqrt{x^3}+\dfrac{x^{2019}}{2019}+C$.

C. $\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{x^{2019}}{673}+C$.

D. $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+6054x^{2017}+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có:

$$\int\left(3\sqrt{x}+x^{2018}\right)\mathrm{d}x=\int\left(3x^{\frac{1}{2}}+x^{2018}\right)\mathrm{d}x=3.\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\dfrac{x^{2019}}{2019}+C=2\sqrt{x^3}+\dfrac{x^{2019}}{2019}+C.$$

Câu 84: Tích phân $\int\limits_{-1}^{0}\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}\mathrm{d}x$ bằng

A. $1-\sqrt{3}$.

B. $\sqrt{3}-1$.

C. $\sqrt{3}+1$.

D. $-\sqrt{3}-1$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\int_{-1}^{0}\frac{1}{\sqrt{1-2x}}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\frac{1}{\sqrt{1-2x}}\mathrm{d}\left(1-2x\right)=-\frac{1}{2}.2\sqrt{1-2x}\Big|_{-1}^{0}=-\sqrt{1-2x}\Big|_{-1}^{0}=-1+\sqrt{3}.$$

Câu 85: Nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\sin x+\cos x$ là

A. $\sin x+\cot x+C$. **B.** $\sin x+\cos x+C$. **C.** $\sin x-\cos x+C$. **D.** $\cos x-\sin x+C$.

Câu 86: Nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\sin x+\cos x$ là

A. $\sin x+\cot x+C$. **B.** $\sin x+\cos x+C$. **C.** $\sin x-\cos x+C$. **D.** $\cos x-\sin x+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $\int\left(\sin x+\cos x\right)\mathrm{d}x=-\cos x+\sin x+C$.

Câu 87: Tích phân $\int_{0}^{1}\sqrt{2x+1}\mathrm{d}x$ có giá trị bằng

A. $3\sqrt{3}-\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{3\sqrt{3}-1}{3}$. **C.** S. **D.** $3\sqrt{3}-\frac{3}{2}$.

Câu 88: Cho $\int_{1}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x=1$ và $\int_{2}^{3}f\left(x\right)\mathrm{d}x=-2$. Giá trị của $\int_{1}^{3}f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** -3. **C.** -1. **D.** 3.

Câu 89: Hàm số $y=\ln x+\frac{1}{x}$ là nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

A. $y=\ln x+1$. **B.** $y=\frac{1}{2}\ln^2 x-\frac{1}{x^2}$.

C. $y=\frac{1}{2}\ln^2 x-\frac{1}{x}$. **D.** $y=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$.

Câu 90: Tích phân $\int_{0}^{1}\sqrt{2x+1}\mathrm{d}x$ có giá trị bằng

A. $3\sqrt{3}-\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{3\sqrt{3}-1}{3}$. **C.** S. **D.** $3\sqrt{3}-\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_{0}^{1}\sqrt{2x+1}\mathrm{d}x=\frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_{0}^{1}=\frac{\sqrt{3^3}-\sqrt{1^3}}{3}=\frac{3\sqrt{3}-1}{3}$.

Câu 91: Cho $\int_{1}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x=1$ và $\int_{2}^{3}f\left(x\right)\mathrm{d}x=-2$. Giá trị của $\int_{1}^{3}f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** -3. **C.** -1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

$\int_{1}^{3}f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_{1}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int_{2}^{3}f\left(x\right)\mathrm{d}x=-1$.

Câu 92: Hàm số $y=\ln x+\dfrac{1}{x}$ là nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

A. $y=\ln x+1$. **B.** $y=\dfrac{1}{2}\ln^2 x-\dfrac{1}{x^2}$. **C.** $y=\dfrac{1}{2}\ln^2 x-\dfrac{1}{x}$. **D.** $y=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y=\ln x+\dfrac{1}{x}\Rightarrow y'=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}$ nên chọn đáp án **D.**

Câu 93: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^{2x}$ là

A. e^x+C. **B.** $\dfrac{e^x}{2}+C.$ **C.** $e^{2x}+C$. **D.** $\dfrac{e^{2x}}{2}+C$.

Câu 94: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x=-\int\limits_b^a f\left(x\right)\mathrm{d}x$. **B.** $\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_a^c f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_c^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$, $\forall c\in\mathbb{R}$.

C. $\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f\left(t\right)\mathrm{d}t$. **D.** $\int\limits_a^a f\left(x\right)\mathrm{d}x=0$.

Câu 95: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^{2x}$ là

A. e^x+C. **B.** $\dfrac{e^x}{2}+C.$ **C.** $e^{2x}+C$. **D.** $\dfrac{e^{2x}}{2}+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$\int e^{2x}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}e^{2x}+C$.

Câu 96: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x=-\int\limits_b^a f\left(x\right)\mathrm{d}x$. **B.** $\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_a^c f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_c^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$, $\forall c\in\mathbb{R}$.

C. $\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f\left(t\right)\mathrm{d}t$. **D.** $\int\limits_a^a f\left(x\right)\mathrm{d}x=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

B sai vì c phải thỏa điều kiện $a<c<b$.

Câu 97: Công thức nào sau đây **sai**?

A. $\int\cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$. **B.** $\int\tan x\mathrm{d}x=-\cot x+C$.

C. $\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$. **D.** $\int\sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$.

Câu 98: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[0;1\right]$ và $f\left(1\right)-f\left(0\right)=2$. Tính tích phân $\int\limits_0^1 f'\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=-1$. **B.** $I=1$. **C.** $I=2$. **D.** $I=0$.

Câu 99: Công thức nào sau đây **sai**?

A. $\int\cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$. **B.** $\int\tan x\mathrm{d}x=-\cot x+C$.

C. $\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$. **D.** $\int\sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$.

Lời giải

Chọn B

Vì $\int \tan x\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{\cos x}\mathrm{d}(\cos x) = -\ln|\cos x| + C$.

Câu 100: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và $f(1) - f(0) = 2$. Tính tích phân $\int\limits_0^1 f'(x)\mathrm{d}x$.

A. $I = -1$. **B.** $I = 1$. **C.** $I = 2$. **D.** $I = 0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int\limits_0^1 f'(x)\mathrm{d}x = f(x)\Big|_0^1 = f(1) - f(0) = 2$.

Câu 101: Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $\int (f(x) + g(x))\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$, với mọi hàm số $f(x)$; $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

B. $\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x) + C$ với mọi hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

C. $\int (f(x) - g(x))\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x - \int g(x)\mathrm{d}x$, với mọi hàm số $f(x)$; $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

D. $\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x$ với mọi hằng số k và với mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 102: Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $\int (f(x) + g(x))\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$, với mọi hàm số $f(x)$; $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

B. $\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x) + C$ với mọi hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

C. $\int (f(x) - g(x))\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x - \int g(x)\mathrm{d}x$, với mọi hàm số $f(x)$; $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

D. $\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x$ với mọi hằng số k và với mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn D

k phải là hằng số khác 0 thì biểu thức này mới đúng.

Khi ta có $\int kf(x)\mathrm{d}x = \int 0\mathrm{d}x = C$ còn $k\int f(x)\mathrm{d}x = 0$.

Câu 103: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = -3\sin 2x + 2\cos x - \mathrm{e}^x$ là

A. $-6\cos 2x + 2\sin x - \mathrm{e}^x + C$. **B.** $6\cos 2x - 2\sin x - \mathrm{e}^x + C$.

C. $\frac{3}{2}\cos 2x - 2\sin x - \mathrm{e}^x + C$. **D.** $\frac{3}{2}\cos 2x + 2\sin x - \mathrm{e}^x + C$.

Câu 104: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = -3\sin 2x + 2\cos x - \mathrm{e}^x$ là

A. $-6\cos 2x + 2\sin x - \mathrm{e}^x + C$. **B.** $6\cos 2x - 2\sin x - \mathrm{e}^x + C$.

C. $\frac{3}{2}\cos 2x - 2\sin x - \mathrm{e}^x + C$. **D.** $\frac{3}{2}\cos 2x + 2\sin x - \mathrm{e}^x + C$.

Lời giải

Chọn D

$\int (-3\sin 2x + 2\cos x - \mathrm{e}^x)\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\cos 2x + 2\sin x - \mathrm{e}^x + C$.

Câu 105: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + \cos x$ là

A. $e^x - \sin x + C$. **B.** $\frac{e^{x+1}}{x+1} - \sin x + C$. **C.** $e^x + \sin x + C$. **D.** $\frac{e^{x+1}}{x+1} + \sin x + C$.

Câu 106: Cắt một vật thể ϑ bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với trục Ox lần lượt tại $x = a$ và $x = b$ $(a < b)$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với Ox tại điểm x $(a \le x \le b)$ cắt ϑ theo thiết diện có diện tích là $S(x)$. Giả sử $S(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó phần vật thể ϑ giới hạn bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) có thể tích bằng

A. $V = \int_a^b S^2(x)\mathrm{d}x$. **B.** $V = \pi\int_a^b S(x)\mathrm{d}x$. **C.** $V = \int_a^b S(x)\mathrm{d}x$. **D.** $V = \pi\int_a^b S^2(x)\mathrm{d}x$.

Câu 107: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Nếu hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì với mỗi hằng số C, hàm số $G(x) = F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K.

B. Nếu $f(x)$ liên tục trên K thì nó có nguyên hàm trên K.

C. Hàm số $F(x)$ được gọi là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in K$.

D. Nếu hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì hàm số $F(-x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K.

Câu 108: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + \cos x$ là

A. $e^x - \sin x + C$. **B.** $\frac{e^{x+1}}{x+1} - \sin x + C$. **C.** $e^x + \sin x + C$. **D.** $\frac{e^{x+1}}{x+1} + \sin x + C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có : $\int(e^x + \cos x)\mathrm{d}x = e^x + \sin x + C$.

Câu 109: Cắt một vật thể ϑ bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với trục Ox lần lượt tại $x = a$ và $x = b$ $(a < b)$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với Ox tại điểm x $(a \le x \le b)$ cắt ϑ theo thiết diện có diện tích là $S(x)$. Giả sử $S(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó phần vật thể ϑ giới hạn bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) có thể tích bằng

A. $V = \int_a^b S^2(x)\mathrm{d}x$. **B.** $V = \pi\int_a^b S(x)\mathrm{d}x$. **C.** $V = \int_a^b S(x)\mathrm{d}x$. **D.** $V = \pi\int_a^b S^2(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn C

Định nghĩa SGK.

Câu 110: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Nếu hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì với mỗi hằng số C, hàm số $G(x) = F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K.

B. Nếu $f(x)$ liên tục trên K thì nó có nguyên hàm trên K.

C. Hàm số $F(x)$ được gọi là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K nếu $F'(x)=f(x)$ với mọi $x\in K$.

D. Nếu hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì hàm số $F(-x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K.

Lời giải

Chọn D

Dựa theo định lí 1 trang 95 SGK 12 CB suy ra khẳng định A đúng.
Dựa theo định lí 3 Sự tồn tại nguyên hàm trang 97 SGK 12 CB kết luận B đúng.
Và C đúng dựa vào định nghĩa của nguyên hàm.

Câu 111: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin x-\cos x$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=-\sin x+\cos x+C$.
B. $\int f(x)\mathrm{d}x=\sin x+\cos x+C$.
C. $\int f(x)\mathrm{d}x=-\sin x-\cos x+C$.
D. $\int f(x)\mathrm{d}x=\sin x-\cos x+C$.

Câu 112: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin x-\cos x$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=-\sin x+\cos x+C$.
B. $\int f(x)\mathrm{d}x=\sin x+\cos x+C$.
C. $\int f(x)\mathrm{d}x=-\sin x-\cos x+C$.
D. $\int f(x)\mathrm{d}x=\sin x-\cos x+C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x=\int(\sin x-\cos x)\mathrm{d}x=-\sin x-\cos x+C$.

Câu 113: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\int 0\mathrm{d}x=C$ (C là hằng số).
B. $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$ (C là hằng số).
C. $\int x^{\alpha}\mathrm{d}x=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$ (C là hằng số).
D. $\int \mathrm{d}x=x+C$ (C là hằng số).

Câu 114: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos(2x+3)$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=-\sin(2x+3)+C$.
B. $\int f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\sin(2x+3)+C$.
C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\sin(2x+3)+C$.
D. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sin(2x+3)+C$.

Câu 115: Giá trị nào của b để $\int_1^b(2x-6)\mathrm{d}x=0$?

A. $b=0$ hoặc $b=3$.
B. $b=0$ hoặc $b=1$
C. $b=5$ hoặc $b=0$.
D. $b=1$ hoặc $b=5$.

Câu 116: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\int 0\mathrm{d}x=C$ (C là hằng số).
B. $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$ (C là hằng số).
C. $\int x^{\alpha}\mathrm{d}x=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$ (C là hằng số).
D. $\int \mathrm{d}x=x+C$ (C là hằng số).

Lời giải

Chọn C

Kết quả câu C không đúng với trường hợp $\alpha=-1$.

Câu 117: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos(2x+3)$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=-\sin(2x+3)+C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\sin(2x+3)+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\sin(2x+3)+C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sin(2x+3)+C$.

Lời giải

Chọn D

$\int\cos(2x+3)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sin(2x+3)+C$.

Câu 118: Giá trị nào của b để $\int_1^b(2x-6)\mathrm{d}x=0$?

A. $b=0$ hoặc $b=3$. **B.** $b=0$ hoặc $b=1$ **C.** $b=5$ hoặc $b=0$. **D.** $b=1$ hoặc $b=5$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int_1^b(2x-6)\mathrm{d}x=\left(x^2-6x\right)\Big|_1^b=\left(b^2-6b\right)-(1-6)=b^2-6b+5$.

Theo bài ra, có $b^2-6b+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=1\\b=5\end{array}\right.$.

Câu 119: Tính tích phân $I=\int_0^2\sqrt{4x+1}\,\mathrm{d}x$.

A. 13. **B.** $\frac{13}{3}$. **C.** 4. **D.** $\frac{4}{3}$.

Câu 120: Tính tích phân $I=\int_0^2\sqrt{4x+1}\,\mathrm{d}x$.

A. 13. **B.** $\frac{13}{3}$. **C.** 4. **D.** $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $I=\int_0^2\sqrt{4x+1}\,\mathrm{d}x=\int_0^2(4x+1)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}.\frac{2}{3}(4x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2=\frac{13}{3}$.

Câu 121: Trong các khẳng định dưới đây, có bao nhiêu khẳng định đúng?

(1): Mọi hàm số liên tục trên $[a;b]$ đều có đạo hàm trên $[a;b]$.

(2): Mọi hàm số liên tục trên $[a;b]$ đều có nguyên hàm trên $[a;b]$.

(3): Mọi hàm số đạo hàm trên $[a;b]$ đều có nguyên hàm trên $[a;b]$.

(4): Mọi hàm số liên tục trên $[a;b]$ đều có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $[a;b]$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 122: Hàm số nào dưới đây là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{x}-1$ trên $(0;+\infty)$.

A. $F(x)=\frac{2}{3}\sqrt[3]{x^2}-x+1$.
B. $F(x)=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-x+2$.

C. $F(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.
D. $F(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-x$.

Câu 123: Trong các khẳng định dưới đây, có bao nhiêu khẳng định đúng?

(1): Mọi hàm số liên tục trên $[a;b]$ đều có đạo hàm trên $[a;b]$.

(2): Mọi hàm số liên tục trên $[a;b]$ đều có nguyên hàm trên $[a;b]$.

(3): Mọi hàm số đạo hàm trên $[a;b]$ đều có nguyên hàm trên $[a;b]$.

(4): Mọi hàm số liên tục trên $[a;b]$ đều có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $[a;b]$.

A. 2.
B. 3.
C. 1.
D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Khẳng định (1): Sai, vì hàm số $y=|x|$ liên tục trên $[-1;1]$ nhưng không có đạo hàm tại $x=0$ nên không thể có đạo hàm trên $[-1;1]$

Khẳng định (2): đúng vì mọi hàm số **liên tục** trên $[a;b]$ đều có **nguyên hàm** trên $[a;b]$.

Khẳng định (3): Đúng vì mọi hàm số có **đạo hàm** trên $[a;b]$ thì đều liên tục trên $[a;b]$ nên đều có **nguyên hàm** trên $[a;b]$.

Khẳng định (4): Đúng vì mọi hàm số liên tục trên $[a;b]$ đều có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $[a;b]$.

Câu 124: Hàm số nào dưới đây là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{x}-1$ trên $(0;+\infty)$.

A. $F(x)=\frac{2}{3}\sqrt[3]{x^2}-x+1$.
B. $F(x)=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-x+2$.

C. $F(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.
D. $F(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-x$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có : $\int(\sqrt{x}-1)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-x+C$.

Câu 125: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=5^x$ là

A. $\frac{5^x}{\ln 5}+C$.
B. $5^x\ln 5+C$.
C. $\frac{5^{x+1}}{x+1}+C$.
D. $5^{x+1}+C$.

Câu 126: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=5^x$ là

A. $\frac{5^x}{\ln 5}+C$.
B. $5^x\ln 5+C$.
C. $\frac{5^{x+1}}{x+1}+C$.
D. $5^{x+1}+C$.

Lời giải

Chọn A

$\int 5^x \mathrm{d}x = \dfrac{5^x}{\ln 5} + C$.

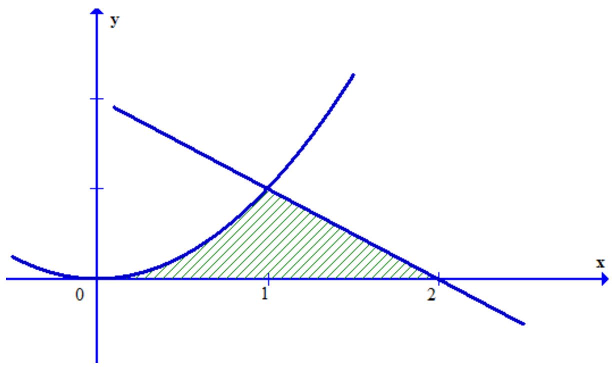
Câu 127: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được tính theo công thức

A. $S = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$. **B.** $S = \int\limits_b^a |f(x)|\mathrm{d}x$. **C.** $S = \int\limits_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$. **D.** $S = -\int\limits_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 128: Cho $F(x) = \cos 2x - \sin x + C$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Tính $f(\pi)$.

A. $f(\pi) = -3$. **B.** $f(\pi) = 1$. **C.** $f(\pi) = -1$. **D.** $f(\pi) = 0$.

Câu 129: Tính diện tích hình phẳng tạo thành bởi parabol $y = x^2$, đường thẳng $y = -x + 2$ và trục hoành trên đoạn $[0;2]$ (phần gạch sọc trong hình vẽ)



A. $\dfrac{3}{5}$. **B.** $\dfrac{5}{6}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{7}{6}$.

Câu 130: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được tính theo công thức

A. $S = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$. **B.** $S = \int\limits_b^a |f(x)|\mathrm{d}x$. **C.** $S = \int\limits_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$. **D.** $S = -\int\limits_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn C

Câu 131: Cho $F(x) = \cos 2x - \sin x + C$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Tính $f(\pi)$.

A. $f(\pi) = -3$. **B.** $f(\pi) = 1$. **C.** $f(\pi) = -1$. **D.** $f(\pi) = 0$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f(x) = F'(x) \Rightarrow f(x) = -2\sin 2x - \cos x$

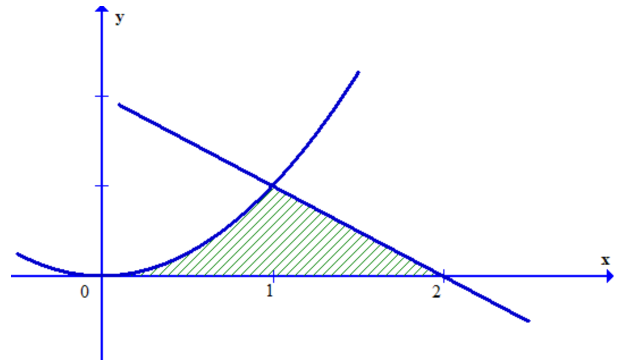
Do đó: $f(\pi) = 1$.

Câu 15: Cho phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$ có hai nghiệm phức là z_1, z_2. Tính $A = |z_1| + |z_2| + z_1.z_2$.

A. $A = 25 + 2\sqrt{5}$. **B.** $A = 0$. **C.** $A = 5 - 2\sqrt{5}$. **D.** $A = 5 + 2\sqrt{5}$.

.

Câu 132: Tính diện tích hình phẳng tạo thành bởi parabol $y = x^2$, đường thẳng $y = -x + 2$ và trục hoành trên đoạn $[0;2]$ (phần gạch sọc trong hình vẽ)



A. $\frac{3}{5}$. **B.** $\frac{5}{6}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{7}{6}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $S=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x+\int_1^2(-x+2)\mathrm{d}x=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1+\left.\left(-\frac{x^2}{2}+2x\right)\right|_1^2=\frac{5}{6}$.

Câu 133: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$. Diện tích S của D được tính theo công thức

A. $S=\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$. **B.** $S=\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$. **C.** $S=\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$. **D.** $S=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.

Câu 134: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos x$ là

A. $\tan x+C$. **B.** $\cot x+C$. **C.** $-\sin x+C$. **D.** $\sin x+C$.

Câu 135: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$. Diện tích S của D được tính theo công thức

A. $S=\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$. **B.** $S=\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$. **C.** $S=\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$. **D.** $S=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn B

Câu 136: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos x$ là

A. $\tan x+C$. **B.** $\cot x+C$. **C.** $-\sin x+C$. **D.** $\sin x+C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int\cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$.

Câu 137: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;2]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1$, $x=2$. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức:

A. $V=\pi\int_1^2 f^2(x)\mathrm{d}x$. **B.** $V=2\pi\int_1^2 f^2(x)\mathrm{d}x$. **C.** $V=\pi^2\int_1^2 f^2(x)\mathrm{d}x$. **D.** $V=\pi^2\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 138: Tích phân $\int\limits_1^2 2x\mathrm{d}x$ có giá trị là:

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 139: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 5x$

A. $\int \cos 5x\mathrm{d}x = \frac{\sin 5x}{5} + C$. **B.** $\int \cos 5x\mathrm{d}x = \frac{-\sin 5x}{5} + C$.

C. $\int \cos 5x\mathrm{d}x = 5\sin 5x + C$. **D.** $\int \cos 5x\mathrm{d}x = \sin 5x + C$.

Câu 140: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;2]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức:

A. $V = \pi\int\limits_1^2 f^2(x)\mathrm{d}x$. **B.** $V = 2\pi\int\limits_1^2 f^2(x)\mathrm{d}x$. **C.** $V = \pi^2\int\limits_1^2 f^2(x)\mathrm{d}x$. **D.** $V = \pi^2\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Câu 141: Tích phân $\int\limits_1^2 2x\mathrm{d}x$ có giá trị là:

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có: $\int\limits_1^2 2x\mathrm{d}x = x^2\Big|_1^2 = 3$.

Câu 142: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 5x$

A. $\int \cos 5x\mathrm{d}x = \frac{\sin 5x}{5} + C$. **B.** $\int \cos 5x\mathrm{d}x = \frac{-\sin 5x}{5} + C$.

C. $\int \cos 5x\mathrm{d}x = 5\sin 5x + C$. **D.** $\int \cos 5x\mathrm{d}x = \sin 5x + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

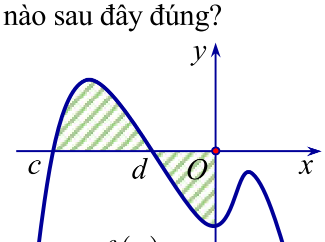
Ta có $\int \cos 5x.\mathrm{d}x = \frac{\sin 5x}{5} + C$.

Câu 143: Tìm tất cả nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = x - \frac{1}{x}$.

A. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln x + C$. **B.** $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln|x|$.

C. $F(x) = 1 - \ln|x| + C$. **D.** $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln|x| + C$.

Câu 144: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$, trục hoành và trục tung. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $S=\int_c^d f(x)\mathrm{d}x-\int_d^0 f(x)\mathrm{d}x$. **B.** $S=-\int_c^d f(x)\mathrm{d}x-\int_d^0 f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S=-\int_c^d f(x)\mathrm{d}x+\int_d^0 f(x)\mathrm{d}x$. **D.** $S=\int_c^d f(x)\mathrm{d}x+\int_d^0 f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 145: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a)=-2$, $f(b)=-4$. Tính $T=\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x$.

A. $T=-6$. **B.** $T=2$. **C.** $T=6$. **D.** $T=-2$.

Câu 146: Tìm tất cả nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=x-\frac{1}{x}$.

A. $F(x)=\frac{1}{2}x^2-\ln x+C$. **B.** $F(x)=\frac{1}{2}x^2-\ln|x|$.

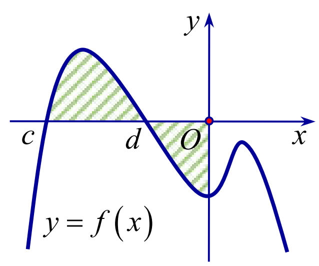
C. $F(x)=1-\ln|x|+C$. **D.** $F(x)=\frac{1}{2}x^2-\ln|x|+C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int\left(x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2-\ln|x|+C$.

Câu 147: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$, trục hoành và trục tung. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $S=\int_c^d f(x)\mathrm{d}x-\int_d^0 f(x)\mathrm{d}x$. **B.** $S=-\int_c^d f(x)\mathrm{d}x-\int_d^0 f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S=-\int_c^d f(x)\mathrm{d}x+\int_d^0 f(x)\mathrm{d}x$. **D.** $S=\int_c^d f(x)\mathrm{d}x+\int_d^0 f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $S=\int_c^0 |f(x)|\mathrm{d}x=\int_c^d |f(x)|\mathrm{d}x+\int_d^0 |f(x)|\mathrm{d}x$.

Quan sát đồ thị hàm số ta thấy $f(x)\ge 0$ với $x\in[c;d]$ và $f(x)\le 0$ với $x\in[d;0]$.

Do đó $S=\int_c^d f(x)\mathrm{d}x-\int_d^0 f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 148: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a)=-2$, $f(b)=-4$. Tính $T=\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x$.

A. $T=-6$. **B.** $T=2$. **C.** $T=6$. **D.** $T=-2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $T=\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = f(x)\Big|_a^b = f(b)-f(a)=-2$.

Câu 149: Tìm họ nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=x^3+x+1$.

A. $F(x)=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{2}+C$.

B. $F(x)=\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+x+C$.

C. $F(x)=x^4+\frac{x^3}{2}+x+C$.

D. $F(x)=3x^3+C$.

Câu 150: Tính tích phân $I=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{3-2x}$

A. $-\frac{1}{2}\ln 3$. **B.** $-\ln 3$. **C.** $\frac{1}{2}\ln 3$. **D.** $\frac{1}{2}\log 3$.

Câu 151: Cho hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và các đường thẳng $x=a$, $x=b$. Diện tích S của hình D được tính theo công thức nào dưới đây?

A. $S=\pi\int_a^b |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x$.

B. $S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x$.

C. $S=\int_a^b [f(x)-g(x)]^2\mathrm{d}x$.

D. $S=\int_a^b [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x$.

Câu 152: Tìm họ nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=x^3+x+1$.

A. $F(x)=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{2}+C$.

B. $F(x)=\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+x+C$.

C. $F(x)=x^4+\frac{x^3}{2}+x+C$.

D. $F(x)=3x^3+C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int(x^3+x+1)\mathrm{d}x=\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+x+C$.

Câu 153: Tính tích phân $I=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{3-2x}$

A. $-\frac{1}{2}\ln 3$. **B.** $-\ln 3$. **C.** $\frac{1}{2}\ln 3$. **D.** $\frac{1}{2}\log 3$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $I=\int_0^1 \frac{dx}{3-2x}=-\frac{1}{2}\ln|3-2x|\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln 3$.

Câu 154: Cho hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và các đường thẳng $x=a$, $x=b$. Diện tích S của hình D được tính theo công thức nào dưới đây?

A. $S=\pi\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$.

B. $S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$.

C. $S=\int_a^b [f(x)-g(x)]^2 dx$.

D. $S=\int_a^b [f(x)+g(x)]dx$.

Lời giải

Chọn B

Câu 155: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=7x^6+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-2$ là

A. $x^7+\ln|x|-\frac{1}{x}-2x$.

B. $x^7+\ln|x|+\frac{1}{x}-2x+C$.

C. $x^7+\ln x+\frac{1}{x}-2x+C$.

D. $x^7+\ln|x|-\frac{1}{x}-2x+C$.

Câu 156: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=7x^6+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-2$ là

A. $x^7+\ln|x|-\frac{1}{x}-2x$.

B. $x^7+\ln|x|+\frac{1}{x}-2x+C$.

C. $x^7+\ln x+\frac{1}{x}-2x+C$.

D. $x^7+\ln|x|-\frac{1}{x}-2x+C$.

Lời giải

Chọn D

$\int f(x)dx=x^7+\ln|x|-\frac{1}{x}-2x+C$.

Câu 157: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-x^2+3x-2$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1$, $x=2$. Quay (H) xung quanh trục hoành được khối tròn xoay có thể tích là

A. $V=\int_1^2 |x^2-3x+2|dx$.

B. $V=\int_1^2 |x^2-3x+2|^2 dx$.

C. $V=\pi\int_1^2 (x^2-3x+2)^2 dx$.

D. $V=\pi\int_1^2 |x^2-3x+2|dx$.

Câu 158: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=3^x$ là

A. $3^x.\ln 3+C$.

B. $\frac{3^x}{\ln 3}+C$.

C. $\frac{3^{x+1}}{x+1}+C$.

D. $3^{x+1}+C$.

Câu 159: Cho $\int_0^2 f(x)dx=3$. Tính $\int_0^2 (f(x)+1)dx$?

A. 4.

B. 5.

C. 7.

D. 1.

Câu 160: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-x^2+3x-2$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1$, $x=2$. Quay (H) xung quanh trục hoành được khối tròn xoay có thể tích là

A. $V=\int_1^2\left|x^2-3x+2\right|\mathrm{d}x$.
B. $V=\int_1^2\left|x^2-3x+2\right|^2\mathrm{d}x$.
C. $V=\pi\int_1^2\left(x^2-3x+2\right)^2\mathrm{d}x$.
D. $V=\pi\int_1^2\left|x^2-3x+2\right|\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn C

Câu 161: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=3^x$ là

A. $3^x.\ln 3+C$. **B.** $\dfrac{3^x}{\ln 3}+C$. **C.** $\dfrac{3^{x+1}}{x+1}+C$. **D.** $3^{x+1}+C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x=\int 3^x\mathrm{d}x=\dfrac{3^x}{\ln 3}+C$.

Câu 162: Cho $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=3$. Tính $\int_0^2\left(f(x)+1\right)\mathrm{d}x$?

A. 4. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 1.

Lời giải.

Chọn B

Ta có $\int_0^2\left(f(x)+1\right)\mathrm{d}x=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^2\mathrm{d}x=3+2=5$.

Câu 163: Tính $\int\sin 3x\mathrm{d}x$

A. $-\cos 3x+C$. **B.** $-\dfrac{1}{3}\cos 3x+C$. **C.** $\dfrac{1}{3}\cos 3x+C$. **D.** $\cos 3x+C$.

Câu 164: Họ nguyên hàm của hàm số $y=2x+1$ là

A. $\dfrac{x^2}{2}+x+C$. **B.** $2x+1+C$. **C.** x^2+x+C. **D.** $2x+C$.

Câu 165: Tính $\int\sin 3x\mathrm{d}x$

A. $-\cos 3x+C$. **B.** $-\dfrac{1}{3}\cos 3x+C$. **C.** $\dfrac{1}{3}\cos 3x+C$. **D.** $\cos 3x+C$.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng trực tiếp công thức nguyên hàm cơ bản.

Câu 166: Họ nguyên hàm của hàm số $y=2x+1$ là

A. $\dfrac{x^2}{2}+x+C$. **B.** $2x+1+C$. **C.** x^2+x+C. **D.** $2x+C$.

Lời giải

Chọn C

$\int(2x+1)\mathrm{d}x = x^2+x+C$.

Câu 167: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin 2x$ là:

A. $F(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x+C$. **B.** $F(x)=\cos 2x+C$.

C. $F(x)=\frac{1}{2}\cos 2x+C$. **D.** $F(x)=-\cos 2x+C$.

Câu 168: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin 2x$ là:

A. $F(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x+C$. **B.** $F(x)=\cos 2x+C$.

C. $F(x)=\frac{1}{2}\cos 2x+C$. **D.** $F(x)=-\cos 2x+C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int \sin 2x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\cos 2x+C$.

Câu 169: Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{x}{x+1}$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x = x-\ln|x+1|+1$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\ln|x+1|+x+1$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x = x-\ln(x+1)$. **D.** $x+\ln(x+1)$.

Câu 170: Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{x}{x+1}$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x = x-\ln|x+1|+1$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\ln|x+1|+x+1$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x = x-\ln(x+1)$. **D.** $x+\ln(x+1)$.

Lời giải

Chọn A

$\int\frac{x}{x+1}\mathrm{d}x=\int\frac{x+1-1}{x+1}\mathrm{d}x=\int\left(1-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=x-\ln|x+1|+C$

Vậy $\int f(x)\mathrm{d}x=x-\ln|x+1|+1$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

Câu 171: Tìm $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{2x+1}$

A. $\frac{1}{2}\ln(2x+1)+C$. **B.** $-\frac{2}{(2x+1)^2}+C$. **C.** $\ln|2x+1|+C$. **D.** $\frac{1}{2}\ln|2x+1|+C$.

Câu 172: Tìm $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{2x+1}$

A. $\frac{1}{2}\ln(2x+1)+C$. **B.** $-\frac{2}{(2x+1)^2}+C$. **C.** $\ln|2x+1|+C$. **D.** $\frac{1}{2}\ln|2x+1|+C$.

Lời giải

Chọn D

$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{2x+1}=\frac{1}{2}\ln|2x+1|+C$.

Câu 173: Tích phân $\int_0^1 (3x^2+1)\,dx$ bằng

A. 6. **B.** -6. **C.** -2. **D.** 2.

Câu 174: Diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$ và $x=b$ $(a<b)$ được tính theo công thức nào dưới đây?

A. $S=\pi\int_a^b f(x)\,dx$. **B.** $S=\int_a^b f(x)\,dx$. **C.** $S=\int_a^b |f(x)|\,dx$. **D.** $S=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$.

Câu 175: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ là.

A. $-\ln|1-x|+C$. **B.** $\ln|1-x|+C$. **C.** $\dfrac{1}{2}\ln(1-x)^2+C$. **D.** $-\dfrac{1}{2}\ln|1-x|+C$.

Câu 176: Tích phân $\int_0^1 (3x^2+1)\,dx$ bằng

A. 6. **B.** -6. **C.** -2. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int_0^1 (3x^2+1)\,dx = (x^3+x)\Big|_0^1 = 2$

Câu 177: Diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$ và $x=b$ $(a<b)$ được tính theo công thức nào dưới đây?

A. $S=\pi\int_a^b f(x)\,dx$. **B.** $S=\int_a^b f(x)\,dx$. **C.** $S=\int_a^b |f(x)|\,dx$. **D.** $S=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$.

Lời giải

Chọn C

Câu 178: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ là.

A. $-\ln|1-x|+C$. **B.** $\ln|1-x|+C$. **C.** $\dfrac{1}{2}\ln(1-x)^2+C$. **D.** $-\dfrac{1}{2}\ln|1-x|+C$.

Lời giải

Chọn A

$\int \dfrac{1}{1-x}\,dx = -\ln|1-x|+C$.

Câu 179: Đổi biến $x=2\sin t$ thì tích phân $\int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ trở thành

A. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} t\,dt$. **B.** $\int_0^{\frac{\pi}{3}} t\,dt$. **C.** $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \dfrac{dt}{t}$. **D.** $\int_0^{\frac{\pi}{6}} dt$.

Câu 180: Hàm số $F(x)=\ln|\sin x-3\cos x|$ là một nguyên hàm của hàm số nào trong các hàm số sau đây?

A. $f\left(x\right)=\dfrac{\sin x-3\cos x}{\cos x+3\sin x}$.

B. $f\left(x\right)=\dfrac{-\cos x-3\sin x}{\sin x-3\cos x}$.

C. $f\left(x\right)=\dfrac{\cos x+3\sin x}{\sin x-3\cos x}$.

D. $f\left(x\right)=\cos x+3\sin x$.

Câu 181: Đổi biến $x=2\sin t$ thì tích phân $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ trở thành

A. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} t\,dt$.

B. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} t\,dt$.

C. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \dfrac{dt}{t}$.

D. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} dt$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt $x=2\sin t$, khi đó $dx=2\cos t\,dt$. Đổi cận $\left[\begin{array}{l} x=0\Rightarrow t=0 \\ x=1\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{6} \end{array}\right.$

$$I=\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\cos t}{\sqrt{4-4\sin^2 t}}dt=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\cos t}{\sqrt{4\cos^2 t}}dt=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\cos t}{2\cos t}dt=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} dt.$$

Câu 182: Hàm số $F\left(x\right)=\ln\left|\sin x-3\cos x\right|$ là một nguyên hàm của hàm số nào trong các hàm số sau đây?

A. $f\left(x\right)=\dfrac{\sin x-3\cos x}{\cos x+3\sin x}$.

B. $f\left(x\right)=\dfrac{-\cos x-3\sin x}{\sin x-3\cos x}$.

C. $f\left(x\right)=\dfrac{\cos x+3\sin x}{\sin x-3\cos x}$.

D. $f\left(x\right)=\cos x+3\sin x$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $f\left(x\right)=F'\left(x\right)=\left(\ln\left|\sin x-3\cos x\right|\right)'=\dfrac{\cos x+3\sin x}{\sin x-3\cos x}$.

Câu 1: (THTT Số 1-484 tháng 10 năm 2017-2018) Cho hai hàm số $F(x)=(x^2+ax+b)e^{-x}$ và $f(x)=(-x^2+3x+6)e^{-x}$. Tìm a và b để $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

A. $a=1, b=-7$. **B.** $a=-1, b=-7$. **C.** $a=-1, b=7$. **D.** $a=1, b=7$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $F'(x)=(-x^2+(2-a)x+a-b)e^{-x}=f(x)$ nên $\begin{cases}2-a=3\\ a-b=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\ b=-7\end{cases}$.

Câu 2: (THTT Số 1-484 tháng 10 năm 2017-2018) Tính diện tích S của hình phẳng (H) giới hạn bởi đường cong $y=-x^3+12x$ và $y=-x^2$.

A. $S=\frac{343}{12}$ **B.** $S=\frac{793}{4}$ **C.** $S=\frac{397}{4}$ **D.** $S=\frac{937}{12}$

Lời giải

Chọn D

Hoành độ giao điểm của hai đường cong là nghiệm của phương trình;

$$-x^3+12x=-x^2\Leftrightarrow -x^3+12x+x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\ x=-3\\ x=0\end{array}\right.$$

Ta có $S=\int\limits_{-3}^{0}\left|-x^3+12x+x^2\right|\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{4}\left|-x^3+12x+x^2\right|\mathrm{d}x$

$$=\int\limits_{-3}^{0}\left(x^3-12x-x^2\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{4}\left(-x^3+12x+x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{99}{4}+\frac{160}{3}=\frac{937}{12}.$$

Câu 3: (THPT Lê Hồng Phong-Nam Định-lần 1-năm 2017-2018) $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=xe^{x^2}$. Hàm số nào sau đây không phải là $F(x)$?

A. $F(x)=\frac{1}{2}e^{x^2}+2$. **B.** $F(x)=\frac{1}{2}\left(e^{x^2}+5\right)$.

C. $F(x)=-\frac{1}{2}e^{x^2}+C$. **D.** $F(x)=-\frac{1}{2}\left(2-e^{x^2}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta thấy ở đáp án C thì $\left(-\frac{1}{2}e^{x^2}+C\right)'=-xe^{x^2}\neq xe^{x^2}$ nên hàm số ở đáp án C không là một nguyên hàm của hàm $y=xe^{x^2}$.

Câu 4: (THPT Lê Hồng Phong-Nam Định-lần 1-năm 2017-2018) Biết $\int xe^{2x}\mathrm{d}x=axe^{2x}+be^{2x}+C$ $(a,\ b\in\mathbb{Q})$. Tính tích ab.

A. $ab=-\frac{1}{4}$. **B.** $ab=\frac{1}{4}$. **C.** $ab=-\frac{1}{8}$. **D.** $ab=\frac{1}{8}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \dfrac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

Suy ra : $\int xe^{2x}dx = \dfrac{1}{2}xe^{2x} - \dfrac{1}{2}\int e^{2x}dx = \dfrac{1}{2}xe^{2x} - \dfrac{1}{4}e^{2x} + C$

Vậy: $a = \dfrac{1}{2}$; $b = -\dfrac{1}{4} \Rightarrow ab = -\dfrac{1}{8}$.

Câu 5: (THPT Lê Hồng Phong-Nam Định-lần 1-năm 2017-2018) Kết quả của $I = \int xe^x dx$ là

A. $I = xe^x - e^x + C$. **B.** $I = e^x + xe^x + C$. **C.** $I = \dfrac{x^2}{2}e^x + C$. **D.** $I = \dfrac{x^2}{2}e^x + e^x + C$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Sử dụng tích phân từng phần ta có

$$I = \int xe^x dx = \int x\, de^x = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

Cách 2: Ta có $I' = \left(xe^x - e^x + C\right)' = e^x + xe^x - e^x = xe^x$.

Câu 6: (THPT Lê Hồng Phong-Nam Định-lần 1-năm 2017-2018) Cho $I = \int\limits_0^4 x\sqrt{1+2x}\,dx$ và $u = \sqrt{2x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $I = \dfrac{1}{2}\int\limits_1^3 x^2\left(x^2-1\right)dx$. **B.** $I = \int\limits_1^3 u^2\left(u^2-1\right)du$.

C. $I = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{u^5}{5} - \dfrac{u^3}{3}\right)\Bigg|_1^3$. **D.** $I = \dfrac{1}{2}\int\limits_1^3 u^2\left(u^2-1\right)du$.

Lời giải

Chọn B

$I = \int\limits_0^4 x\sqrt{1+2x}\,dx$

Đặt $u = \sqrt{2x+1}$ $\Rightarrow x = \dfrac{1}{2}\left(u^2-1\right) \Rightarrow dx = u\,du$, đổi cận: $x = 0 \Rightarrow u = 1$, $x = 4 \Rightarrow u = 3$.

Khi đó $I = \dfrac{1}{2}\int\limits_1^3 \left(u^2-1\right)u^2 du$.

Câu 7: (THPT Lê Hồng Phong-Nam Định-lần 1-năm 2017-2018) Biết $\int\limits_3^5 \dfrac{x^2+x+1}{x+1}dx = a + \ln\dfrac{b}{2}$ với a, b là các số nguyên. Tính $S = a - 2b$.

A. $S = -2$. **B.** $S = 5$. **C.** $S = 2$. **D.** $S = 10$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int\limits_3^5 \dfrac{x^2+x+1}{x+1}dx = \int\limits_3^5\left(x + \dfrac{1}{x+1}\right)dx = \left(\dfrac{1}{2}x^2 + \ln\left|x+1\right|\right)\Bigg|_3^5 = \dfrac{25}{2} + \ln 6 - \dfrac{9}{2} - \ln 4 = 8 + \ln\dfrac{3}{2}$.

Vậy $a = 8$, $b = 3$. Suy ra $S = a - 2b = 8 - 2.3 = 2$.

Câu 8: (THPT Lê Hồng Phong-Nam Định-lần 1-năm 2017-2018) Kết quả của tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-1-\sin x)\mathrm{d}x$ được viết ở dạng $\pi\left(\frac{\pi}{a}-\frac{1}{b}\right)-1$ a, $b\in\mathbb{Z}$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $a+2b=8$. **B.** $a+b=5$. **C.** $2a-3b=2$. **D.** $a-b=2$.

Lời giải

Chọn B

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-1-\sin x)\mathrm{d}x = \left(x^2-x+\cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi}{2}-1=\pi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)-1$.

Vậy $a=4$, $b=2$. Suy ra $a+b=6$. Vậy B sai.

Câu 9: (THPT Chuyên Bắc Ninh-lần 1-năm 2017-2018) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x)=3-5\cos x$ và $f(0)=5$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f(x)=3x+5\sin x+2$. **B.** $f(x)=3x-5\sin x-5$.

C. $f(x)=3x-5\sin x+5$. **D.** $f(x)=3x+5\sin x+5$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x)=\int(3-5\cos x)\mathrm{d}x=3x-5\sin x+C$.

Lại có: $f(0)=5\Leftrightarrow 3.0-5\sin 0+C=5\Leftrightarrow C=5$. Vậy $f(x)=3x-5\sin x+5$.

Câu 10: (THTT Số 2-485 tháng 11-năm học 2017-2018) Hàm số nào dưới đây là một nguyên hàm của hàm số $y=2^{\sin x}.2^{\cos x}(\cos x-\sin x)$?

A. $y=2^{\sin x+\cos x}+C$. **B.** $y=\frac{2^{\sin x}.2^{\cos x}}{\ln 2}$. **C.** $y=\ln 2.2^{\sin x+\cos x}$. **D.** $y=-\frac{2^{\sin x+\cos x}}{\ln 2}+C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $I=\int 2^{\sin x}.2^{\cos x}(\cos x-\sin x)\mathrm{d}x$ $=\int 2^{\sin x+\cos x}(\cos x-\sin x)\mathrm{d}x$.

Đặt: $t=\sin x+\cos x$ $\Rightarrow \mathrm{d}t=(\cos x-\sin x)\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow I=\int 2^t\mathrm{d}t=\frac{2^t}{\ln 2}+C$ $=\frac{2^{\sin x+\cos x}}{\ln 2}+C=\frac{2^{\sin x}.2^{\cos x}}{\ln 2}+C$.

Vậy hàm số đã cho có 1 nguyên hàm là hàm số: $y=\frac{2^{\sin x}.2^{\cos x}}{\ln 2}$.

Câu 11: (THTT Số 2-485 tháng 11-năm học 2017-2018) Hàm số $F(x)$ nào dưới đây là nguyên hàm của hàm số $y=\sqrt[3]{x+1}$?

A. $F(x)=\frac{3}{8}(x+1)^{\frac{4}{3}}+C$. **B.** $F(x)=\frac{4}{3}\sqrt[3]{(x+1)^4}+C$.

C. $F(x)=\frac{3}{4}(x+1)\sqrt[3]{x+1}+C$. **D.** $F(x)=\frac{3}{4}\sqrt[4]{(x+1)^3}+C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $I=\int\sqrt[3]{x+1}\mathrm{d}x$.

Đặt: $t=\sqrt[3]{x+1}\Rightarrow t^3=x+1\Rightarrow 3t^2\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow I=\int t.3t^2\mathrm{d}t=\int 3t^3\mathrm{d}t=\frac{3}{4}t^4+C=\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+1)^4}+C=\frac{3}{4}(x+1)\sqrt[3]{x+1}+C$.

Vậy $F(x)=\frac{3}{4}(x+1)\sqrt[3]{x+1}+C$.

Câu 12: (Trường BDVH218LTT-khoa 1-năm 2017-2018) Cho $\alpha\in\mathbb{R}$. Hàm số nào sau đây không phải nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin x$.

A. $F_1(x)=-\cos x$.

B. $F_2(x)=2\sin\frac{x+\alpha}{2}\sin\frac{x-\alpha}{2}$.

C. $F_3(x)=-2\sin\left(\alpha+\frac{x}{2}\right)\sin\left(\alpha-\frac{x}{2}\right)$.

D. $F_4(x)=2\cos\frac{\alpha+x}{2}\sin\frac{\alpha-x}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int\sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$. Đáp án A là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin x$.

$2\sin\frac{x+\alpha}{2}\sin\frac{x-\alpha}{2}=\cos\alpha-\cos x$. Đáp án B là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin x$.

$-2\sin\left(\alpha+\frac{x}{2}\right)\sin\left(\alpha-\frac{x}{2}\right)=\cos(2\alpha)-\cos x$. Đáp án C là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin x$.

$2\cos\frac{\alpha+x}{2}.\sin\frac{\alpha-x}{2}=\sin\alpha-\sin x$. Đáp án D không phải là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin x$.

Câu 13: (Trường BDVH218LTT-khoa 1-năm 2017-2018) Hàm số nào sau đây không là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$.

A. $F_1(x)=\frac{x^2-x-1}{x+1}$. **B.** $F_2(x)=\frac{x^2+x-1}{x+1}$. **C.** $F_3(x)=\frac{x^2+x+1}{x+1}$. **D.** $F_4(x)=\frac{x^2}{x+1}$.

Lời giải

Chọn C

$(F_1(x))'=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$, đáp án A là nguyên hàm của $f(x)$.

$(F_2(x))'=\frac{x^2+2x+2}{(x+1)^2}$, đáp án B không phải là nguyên hàm của $f(x)$.

$(F_3(x))'=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$, đáp án C là nguyên hàm của $f(x)$.

$(F_4(x))'=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$, đáp án D là nguyên hàm của $f(x)$.

Câu 14: (Trường BDVH218LTT-khoa 1-năm 2017-2018) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{2x+3}$

A. $\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{3}(2x+3)\sqrt{2x+3} + \mathrm{C}$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(2x+3)\sqrt{2x+3} + \mathrm{C}$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}(2x+3)\sqrt{2x+3} + \mathrm{C}$

D. $\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{2x+3} + \mathrm{C}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x = \int (2x+3)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.\frac{(3x+2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}(2x+3)\sqrt{2x+3} + \mathrm{C}$.

Câu 15: (Trường BDVH218LTT-khoa 1-năm 2017-2018) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$

A. $\int f(x)\mathrm{d}x = x + \sin x + C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x = x - \sin x + C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin x + C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin x + C$.

Lời giải

Chọn **C**

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x = \int\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin x + C$.

Câu 16: (TT Diệu Hiền-Cần Thơ-tháng 11-năm 2017-2018) Trong các hàm số sau:

(I) $f(x) = \tan^2 x + 2$.

(II) $f(x) = \frac{2}{\cos^2 x}$.

(III) $f(x) = \tan^2 x + 1$.

Hàm số nào có nguyên hàm là hàm số $g(x) = \tan x$?

A. Chỉ (II).

B. Chỉ (III).

C. Chỉ (II), (III).

D. (I), (II), (III).

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int(\tan^2 x + 2)\mathrm{d}x = \int\left(1 + \frac{1}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x = x + \tan x + C$.

Và: $\int \frac{2}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = 2\int\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = 2\tan x + C$.

Và: $\int(\tan^2 x + 1)\mathrm{d}x = \int\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan x + C$.

Câu 17: (TT Diệu Hiền-Cần Thơ-tháng 11-năm 2017-2018) Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y = 2x$. Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox bằng:

A. $\frac{32\pi}{15}$.

B. $\frac{64\pi}{15}$.

C. $\frac{21\pi}{15}$.

D. $\frac{16\pi}{15}$.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Khi quay (H) xung quanh trục Ox ta được khối tròn xoay giới hạn bởi $\begin{cases} y=x^2 \\ y=2x \\ x=0 \\ x=2 \end{cases}$.

Do đó thể tích của khối tròn xoay là: $V=\pi\int_0^2\left|\left(x^2\right)^2-(2x)^2\right|\mathrm{d}x=\dfrac{64\pi}{15}$.

Câu 18: **(THPT Hậu Lộc 2-Thanh Hóa-lần 1-năm 2017-2018)** Tìm giá trị của a để $\int_3^4\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}\mathrm{d}x=\ln a$.

A. 12. **B.** $\dfrac{4}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{3}{4}$.

Lời giải:

Chọn B

$$\int_3^4\frac{1}{(x-1)(x-2)}\mathrm{d}x=\int_3^4\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x=\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\Bigg|_3^4=\ln\frac{2}{3}-\ln\frac{1}{2}=\ln\left(\frac{2}{3}.\frac{2}{1}\right)=\ln\frac{4}{3}=\ln a$$

$\Rightarrow a=\dfrac{4}{3}$.

Câu 19: **(THPT Hậu Lộc 2-Thanh Hóa-lần 1-năm 2017-2018)** Tính thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=3x-x^2$ và trục hoành, quanh trục hoành.

A. $\dfrac{81\pi}{10}$ (đvtt). **B.** $\dfrac{85\pi}{10}$ (đvtt). **C.** $\dfrac{41\pi}{7}$ (đvtt). **D.** $\dfrac{8\pi}{7}$ (đvtt).

Lời giải

Chọn A

Ta có $3x-x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Thể tích khối tròn xoay cần tìm là:

$$V=\pi\int_0^3\left(3x-x^2\right)^2dx=\pi\int_0^3\left(9x^2-6x^3+x^4\right)dx=\pi\left(3x^3-\frac{3x^4}{2}+\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^3=\frac{81\pi}{10}\text{ (đvtt).}$$

Câu 20: **(THTT Số 3-486 tháng 12 năm 2017-2018)** Tìm công thức tính thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $d: y=2x$ quay xung quanh trục Ox.

A. $\pi\int_0^2\left(x^2-2x\right)^2\mathrm{d}x$. **B.** $\pi\int_0^2 4x^2\mathrm{d}x-\pi\int_0^2 x^4\mathrm{d}x$.

C. $\pi\int_0^2 4x^2\mathrm{d}x+\pi\int_0^2 x^4\mathrm{d}x$. **D.** $\pi\int_0^2\left(2x-x^2\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Vậy thể tích khối tròn xoay được tính: $V=\pi\int\limits_0^2 \left(x^2-2x\right)^2 \mathrm{d}x$.

Câu 21: **(THPT Chuyên Lê Hồng Phong-Nam Định-lần 2 năm 2017-2018)** Cho hai số phức $z_1=2+3i$ và $z_2=-3-5i$. Tính tổng phần thực và phần ảo của số phức $w=z_1+z_2$.

A. 3. **B.** 0. **C.** $-1-2i$. **D.** -3.

Lời giải

Chọn D

$w=z_1+z_2=2+3i-3-5i=-1-2i$. Vậy tổng phần thực và phần ảo của số phức w là -3.

Câu 22: **(THPT Chuyên Lê Hồng Phong-Nam Định-lần 2 năm 2017-2018)** Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{2+\cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=\pi-1$. **B.** $V=\pi+1$. **C.** $V=\pi(\pi-1)$. **D.** $V=\pi(\pi+1)$.

Lời giải

Chọn D

Thể tích khối tròn xoay khi quay D quanh trục hoành có thể tích là:

$$V=\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} y^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(2+\cos x)\mathrm{d}x=\pi(2x+\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi(\pi+1).$$

Câu 23: **(THPT Chuyên Lê Hồng Phong-Nam Định-lần 2 năm 2017-2018)** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin 3x$.

A. $\int \sin 3x\mathrm{d}x=-\frac{\cos 3x}{3}+C$. **B.** $\int \sin 3x\mathrm{d}x=\frac{\cos 3x}{3}+C$.

C. $\int \sin 3x\mathrm{d}x=-\frac{\sin 3x}{3}+C$. **D.** $\int \sin 3x\mathrm{d}x=-\cos 3x+C$.

Lời giải

Chọn A

Theo công thức nguyên hàm $\int \sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$ ta có $\int \sin 3x\mathrm{d}x=-\frac{\cos 3x}{3}+C$

Vậy $\int \sin 3x\mathrm{d}x=-\frac{\cos 3x}{3}+C$.

Câu 1: (THPT Đoàn Thượng-Hải Dương-lần 2 năm 2017-2018) Tìm tất cả các giá trị thực của x thỏa mãn đẳng thức $\log_3 x = 3\log_3 2 + \log_9 25 - \log_{\sqrt{3}} 3$.

A. $\frac{20}{3}$. **B.** $\frac{40}{9}$. **C.** $\frac{25}{9}$. **D.** $\frac{28}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $3\log_3 2 + \log_9 25 - \log_{\sqrt{3}} 3 = \log_3 2^3 + \log_{3^2} 5^2 - 2\log_3 3 = \log_3 8 + \log_3 5 - \log_3 9 = \log_3 \frac{40}{9}$.

Mà $\log_3 x = 3\log_3 2 + \log_9 25 - \log_{\sqrt{3}} 3$ nên $\log_3 x = \log_3 \frac{40}{9} \Leftrightarrow x = \frac{40}{9}$.

Câu 2: (THPT Đoàn Thượng-Hải Dương-lần 2 năm 2017-2018) Hàm số $F(x) = \frac{1}{27}\mathrm{e}^{3x+1}\left(9x^2 - 24x + 17\right) + C$ là nguyên hàm của hàm số nào dưới đây.

A. $f(x) = \left(x^2 + 2x - 1\right)\mathrm{e}^{3x+1}$. **B.** $f(x) = \left(x^2 - 2x - 1\right)\mathrm{e}^{3x+1}$.

C. $f(x) = \left(x^2 - 2x + 1\right)\mathrm{e}^{3x+1}$. **D.** $f(x) = \left(x^2 - 2x - 1\right)\mathrm{e}^{3x-1}$.

Lời giải

Chọn C

$$F'(x) = \left(\frac{1}{27}\mathrm{e}^{3x+1}\left(9x^2 - 24x + 17\right)\right)' = \frac{1}{27}\left[3.\mathrm{e}^{3x+1}\left(9x^2 - 24x + 17\right) + \mathrm{e}^{3x+1}\left(9x^2 - 24x + 17\right)'\right]$$

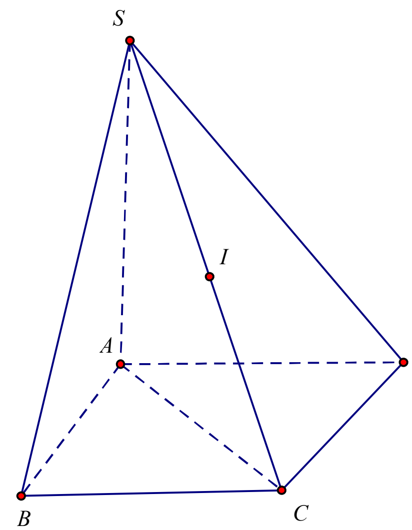
$$= \frac{1}{27}\left[3.\mathrm{e}^{3x+1}\left(9x^2 - 24x + 17\right) + \mathrm{e}^{3x+1}\left(18x - 24\right)\right] = \frac{1}{27}\mathrm{e}^{3x+1}\left(27x^2 - 54x + 27\right) = \mathrm{e}^{3x+1}\left(x^2 - 2x + 1\right).$$

Câu 3: (THPT Đoàn Thượng-Hải Dương-lần 2 năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a\sqrt{3}$ và $AD = a$. Đường thẳng SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.BCD$ bằng

A. $\frac{5\pi a^3\sqrt{5}}{6}$. **B.** $\frac{5\pi a^3\sqrt{5}}{24}$. **C.** $\frac{3\pi a^3\sqrt{5}}{25}$. **D.** $\frac{3\pi a^3\sqrt{5}}{8}$.

Lời giải

Chọn A



Dễ thấy các tam giác SAC, SBC, SDC là tam giác vuông (SC là cạnh huyền). Suy ra mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$ có tâm là trung điểm của SC và bán kính là $R=\dfrac{SC}{2}$

$=\dfrac{\sqrt{SA^2+AC^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{SA^2+AB^2+AD^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{a^2+3a^2+a^2}}{2}=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Do đó, thể tích khối cầu là: $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{4}{3}\pi.\left(\dfrac{a\sqrt{5}}{2}\right)^3=\dfrac{5\pi a^3\sqrt{5}}{6}$.

Câu 4: (THPT Hà Huy Tập-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Số nghiệm của phương trình $2^{2x^2-7x+5}=1$ là

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $2^{2x^2-7x+5}=1\Leftrightarrow 2x^2-5x+7=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\dfrac{5}{2}\end{array}\right.$.

Câu 5: (THPT Lương Thế Vinh-Hà Nội năm 2017-2018) Biết $\int\limits_0^4 x\ln\left(x^2+9\right)\mathrm{d}x=a\ln 5+b\ln 3+c$, trong đó a, b, c là các số nguyên. Giá trị của biểu thức $T=a+b+c$ là

A. $T=10$. **B.** $T=9$. **C.** $T=8$. **D.** $T=11$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases}u=\ln\left(x^2+9\right)\\ \mathrm{d}v=x\mathrm{d}x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{2x}{\left(x^2+9\right)}\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{x^2+9}{2}\end{cases}$

Suy ra $\int\limits_0^4 x\ln\left(x^2+9\right)\mathrm{d}x=\dfrac{x^2+9}{2}\ln\left(x^2+9\right)\Big|_0^4-\int\limits_0^4\dfrac{x^2+9}{2}.\dfrac{2x}{x^2+9}\mathrm{d}x=25\ln 5-9\ln 3-8$.

Do đó $a=25$, $b=-9$, $c=-8$ nên $T=8$.

Câu 6: **(THPT Đức Thọ-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018)** Tính thể tích V của vật thể tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\frac{1}{x}$, $y=0$, $x=1$, $x=a$, $(a>1)$ quay xung quanh trục Ox.

A. $V=\left(1-\frac{1}{a}\right)$. **B.** $V=\left(1-\frac{1}{a}\right)\pi$. **C.** $V=\left(1+\frac{1}{a}\right)\pi$. **D.** $V=\left(1+\frac{1}{a}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Thể tích V của vật thể tròn xoay cần tìm là

$$V=\pi\int_1^a\left(\frac{1}{x}\right)^2\mathrm{d}x=-\pi\frac{1}{x}\Big|_1^a=-\pi\left(\frac{1}{a}-1\right)\Leftrightarrow V=\left(1-\frac{1}{a}\right)\pi.$$

Câu 7: **(THPT Đức Thọ-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018)** Bạn Minh ngồi trên máy bay đi du lịch thế giới và vận tốc chuyển động của máy bay là $v(t)=3t^2+5$ (m/s). Tính quãng đường máy bay đi được từ giây thứ 4 đến giây thứ 10.

A. 246 m. **B.** 252 m. **C.** 1134 m. **D.** 966 m.

Lời giải

Chọn D

$$S=\int_4^{10}\left(3t^2+5\right)\mathrm{d}t=\left(t^3+5t\right)\Big|_4^{10}=1050-84=996.$$

Câu 8: **(THPT Đức Thọ-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018)** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^{5x}$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{5x}\ln 5+\mathrm{C}$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\mathrm{e}^{5x}+\mathrm{C}$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=5\mathrm{e}^{5x}+\mathrm{C}$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{5x}+\mathrm{C}$.

Lời giải

Chọn B

Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^{5x}$ là $\int \mathrm{e}^{5x}\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\mathrm{e}^{5x}+\mathrm{C}$.

Câu 9: **(THPT Đức Thọ-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018)** Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của của hàm số $f(x)=\sin x$ và đồ thị hàm số $y=F(x)$ đi qua điểm $M(0;1)$. Tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

A. $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$. **B.** $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$. **C.** $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$. **D.** $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

Lời giải

Chọn A

* Ta có $F(x)=-\cos x+C$, với C là hằng số tùy ý.

* Đồ thị hàm số $y=F(x)$ đi qua điểm $M(0;1)$ nên

$1=-\cos 0+C\Leftrightarrow C=2\Rightarrow F(x)=-\cos x+2$. Do đó $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$.

Câu 10: (THPT Đức Thọ-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Cho $\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x = 10$ và $\int_2^4 g(x)\mathrm{d}x = 5$. Tính

$I = \int_2^4 [3f(x) - 5g(x)]\mathrm{d}x$

A. $I = 5$. **B.** $I = 15$. **C.** $I = -5$. **D.** $I = 10$.

Lời giải

Chọn A

Có: $I = \int_2^4 [3f(x) - 5g(x)]\mathrm{d}x = 3\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x - 5\int_2^4 g(x)\mathrm{d}x = 5$.

Câu 11: (THPT Đức Thọ-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Khi đổi biến $x = \sqrt{3}\tan t$, tích phân $I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+3}$ trở thành tích phân nào?

A. $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{3}\mathrm{d}t$. **B.** $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{d}t$ **C.** $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{3}t\mathrm{d}t$. **D.** $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $x = \sqrt{3}\tan t \Rightarrow \mathrm{d}x = \sqrt{3}(1+\tan^2 t)\mathrm{d}t$.

Khi $x = 0$ thì $t = 0$; Khi $x = 1$ thì $t = \frac{\pi}{6}$.

Ta có $I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+3} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3}(1+\tan^2 t)}{3(1+\tan^2 t)}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{d}t$.

Câu 12: (THPT Chuyên Thái Bình-lần 2 năm học 2017-2018) Tính $F(x) = \int x\cos x\,\mathrm{d}x$ ta được kết quả

A. $F(x) = x\sin x - \cos x + C$. **B.** $F(x) = -x\sin x - \cos x + C$.

C. $F(x) = x\sin x + \cos x + C$. **D.** $F(x) = -x\sin x + \cos x + C$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \cos x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \sin x \end{cases}$

Khi đó $F(x) = x\sin x - \int \sin x\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + C$.

Câu 13: (THPT Chuyên Thái Bình-lần 2 năm học 2017-2018) Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x$ và đồ thị hàm số $y = F(x)$ đi qua điểm $M(0;1)$. Tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$

A. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. **B.** $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. **C.** $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$. **D.** $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $F(x) = \int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$.

Đồ thị hàm số $y=F(x)$ đi qua điểm $M(0;1) \Leftrightarrow 1=-\cos 0+C \Rightarrow C=2$.

$\Rightarrow F(x)=-\cos x+2 \Rightarrow F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2$.

Câu 14: (THPT Chuyên Thái Bình-lần 2 năm học 2017-2018) Biết $\int f(x)\mathrm{d}x=2x\ln(3x-1)+C$ với $x\in\left(\dfrac{1}{9};+\infty\right)$.

Đề nghị sửa đề bài : Biết $\int f(x)\mathrm{d}x=2x\ln(3x-1)+C$ với $x\in\left(\dfrac{1}{3};+\infty\right)$

Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. $\int f(3x)\mathrm{d}x=2x\ln(9x-1)+C$.

B. $\int f(3x)\mathrm{d}x=6x\ln(3x-1)+C$.

C. $\int f(3x)\mathrm{d}x=6x\ln(9x-1)+C$.

D. $\int f(3x)\mathrm{d}x=3x\ln(9x-1)+C$.

Lời giải

Chọn A

$\int f(x)\mathrm{d}x=2x\ln(3x-1)+C \Rightarrow \int f(3x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}\int f(3x)\mathrm{d}(3x)=\dfrac{1}{3}2.(3x)\ln(3.3x-1)+C$

$=2x\ln(9x-1)+C$

Cách 2:

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=2x\ln(3x-1)+C \Rightarrow f(x)=\left(2x\ln(3x-1)+C\right)'=2\ln(3x-1)+\dfrac{6x}{3x-1}$.

Khi đó $f(3x)=2\ln(9x-1)+\dfrac{18x}{9x-1}$.

$\int f(3x)\mathrm{d}x=\int\left[2\ln(9x-1)+\dfrac{18x}{9x-1}\right]\mathrm{d}x=2\int\ln(9x-1)\mathrm{d}x+\int\left(2+\dfrac{2}{9x-1}\right)\mathrm{d}x$

$=\dfrac{2}{9}\left[(9x-1)\ln(9x-1)-9x\right]+2x+\dfrac{2}{9}\ln(9x-1)+C=2\ln(9x-1)+C$.

Câu 15: (THTT Số 4-487 tháng 1 năm 2017-2018) Nguyên hàm của hàm số $f(x)=x.\mathrm{e}^{2x}$ là

A. $F(x)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+C$.

B. $F(x)=2\mathrm{e}^{2x}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+C$.

C. $F(x)=2\mathrm{e}^{2x}(x-2)+C$.

D. $F(x)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}(x-2)+C$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\end{cases}$.

Khi đó: $F(x)=\int x.\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}x.\mathrm{e}^{2x}-\dfrac{1}{2}\int \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}x.\mathrm{e}^{2x}-\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}+C=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+C$.

Câu 16: **(THTT Số 4-487 tháng 1 năm 2017-2018)** Biết $\int\limits_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x = \frac{b}{c} + a\ln 2$ (với a là số thực, b, c là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản). Tính giá trị của $2a+3b+c$.

A. 4. **B.** -6. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Đặt $u = \ln x \Rightarrow \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x$

$\mathrm{d}v = \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \Rightarrow v = -\frac{1}{x}$.

$\Rightarrow \int\limits_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{x}\ln x\Big|_1^2 + \int\limits_1^2 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{x}\ln x\Big|_1^2 - \frac{1}{x}\Big|_1^2 = -\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{b}{c} + a\ln 2$.

$\Rightarrow a = -\frac{1}{2}$, $b = 1$, $c = 2$.

$\Rightarrow 2a+3b+c = 2.\left(-\frac{1}{2}\right) + 3.1 + 2 = 4$.

Câu 17: **(THTT Số 4-487 tháng 1 năm 2017-2018)** Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(H): y = \frac{x-1}{x+1}$ và các trục tọa độ. Khi đó giá trị của S bằng

A. $S = \ln 2 - 1$ (đvdt). **B.** $S = 2\ln 2 - 1$ (đvdt).

C. $S = 2\ln 2 + 1$ (đvdt). **D.** $S = \ln 2 + 1$ (đvdt).

Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ cắt trục hoành tại điểm $(1;0)$.

Ta có $S = \int\limits_0^1 \left|\frac{x-1}{x+1}\right|\mathrm{d}x = -\int\limits_0^1 \frac{x-1}{x+1}\mathrm{d}x = -\int\limits_0^1 \left(1 - \frac{2}{x+1}\right)\mathrm{d}x = -\left(x - 2\ln|x+1|\right)\Big|_0^1 = 2\ln 2 - 1$.

Câu 18: **(THPT Chuyên ĐH KHTN-Hà Nội năm 2017-2018)** Cho $\int\limits_0^3 \frac{x}{4+2\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x = \frac{a}{3} + b\ln 2 + c\ln 3$ với a, b, c là các số nguyên. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow t^2 = x+1 \Rightarrow x = t^2 - 1 \Rightarrow \mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 2$; $x = 3 \Rightarrow t = 4$.

Khi đó:

$$\int\limits_1^2 \frac{t^2-1}{4+2t}.2t\mathrm{d}t = \int\limits_1^2 \frac{t^3-t}{t+2}\mathrm{d}t = \int\limits_1^2 \left(t^2 - 2t + 3 - \frac{6}{t+2}\right)\mathrm{d}t = \left(\frac{t^3}{3} - t^2 + 3t - 6\ln|t+2|\right)\Bigg|_1^2 = \frac{7}{3} - 12\ln 2 + 6\ln 3$$

Suy ra $\begin{cases} a = 7 \\ b = -12 \\ c = 6 \end{cases} \Rightarrow a+b+c = 1$.

Câu 19: (THPT Chuyên ĐH KHTN-Hà Nội năm 2017-2018) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=x\cos 2x$ là

A. $\frac{x\sin 2x}{2}-\frac{\cos 2x}{4}+C$.
B. $x\sin 2x-\frac{\cos 2x}{2}+C$.

C. $x\sin 2x+\frac{\cos 2x}{2}+C$.
D. $\frac{x\sin 2x}{2}+\frac{\cos 2x}{4}+C$.

Lời giải

Chọn D

$I=\int x\cos 2x\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u=x \\ \mathrm{d}v=\cos 2x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=\frac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$.

Khi đó $I=\frac{1}{2}x\sin 2x-\frac{1}{2}\int \sin 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$.

Câu 20: (THPT Chuyên ĐH KHTN-Hà Nội năm 2017-2018) Với cách đổi biến $u=\sqrt{1+3\ln x}$ thì tích phân $\int\limits_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+3\ln x}}\mathrm{d}x$ trở thành

A. $\frac{2}{3}\int\limits_1^2\left(u^2-1\right)\mathrm{d}u$.
B. $\frac{2}{9}\int\limits_1^2\left(u^2-1\right)\mathrm{d}u$.
C. $2\int\limits_1^2\left(u^2-1\right)\mathrm{d}u$.
D. $\frac{2}{9}\int\limits_1^2\frac{u^2-1}{u}\mathrm{d}u$.

Lời giải

Chọn B

$u=\sqrt{1+3\ln x}\Rightarrow u^2=1+3\ln x\Rightarrow \ln x=\frac{u^2-1}{3}\Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{2u}{3}\mathrm{d}u$.

Khi đó $\int\limits_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+3\ln x}}\mathrm{d}x=\int\limits_1^2\frac{\frac{u^2-1}{3}}{u}\frac{2u}{3}\mathrm{d}u=\frac{2}{9}\int\limits_1^2\left(u^2-1\right)\mathrm{d}u$.

Câu 21: (THPT Chuyên Hạ Long-Quảng Ninh-lần 1 năm 2017-2018) Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2x+1}}$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{2x+1}+C$.
B. $\int f(x)\mathrm{d}x=\sqrt{2x+1}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=2\sqrt{2x+1}+C$.
D. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đặt $\sqrt{2x+1}=t\Rightarrow 2x+1=t^2\Rightarrow \mathrm{d}x=t\mathrm{d}t$.

Khi đó ta có $\int\frac{1}{2}\sqrt{2x+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{t\mathrm{d}t}{t}==\frac{1}{2}\int\mathrm{d}t=\frac{1}{2}t+C=\frac{1}{2}\sqrt{2x+1}+C$.

Câu 22: (THPT Chuyên Hạ Long-Quảng Ninh-lần 1 năm 2017-2018) Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=6x+\sin 3x$, biết $F(0)=\frac{2}{3}$.

A. $F(x)=3x^2-\frac{\cos 3x}{3}+\frac{2}{3}$.
B. $F(x)=3x^2-\frac{\cos 3x}{3}-1$.

C. $F(x)=3x^2+\dfrac{\cos 3x}{3}+1$. **D.** $F(x)=3x^2-\dfrac{\cos 3x}{3}+1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có:

□ $\int f(x)\mathrm{d}x=\int(6x+\sin 3x)\mathrm{d}x=3x^2-\dfrac{\cos 3x}{3}+C=F(x)$.

□ $F(0)=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow 0-\dfrac{1}{3}.1+C=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow C=1$.

Vậy $F(x)=3x^2-\dfrac{\cos 3x}{3}+1$.

Câu 23: (THPT Chuyên Hạ Long-Quảng Ninh-lần 1 năm 2017-2018) Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2e^{x^3+1}$

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=e^{x^3+1}+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=3e^{x^3+1}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}e^{x^3+1}+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}e^{x^3+1}+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $t=x^3+1\Rightarrow \mathrm{d}t=3x^2\mathrm{d}x$

Do đó, ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int x^2e^{x^3+1}\mathrm{d}x=\int e^t.\dfrac{1}{3}\mathrm{d}t=\dfrac{1}{3}e^t+C=\dfrac{1}{3}e^{x^3+1}+C$.

Vậy $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}e^{x^3+1}+C$.

Câu 24: (THPT Chuyên Hạ Long-Quảng Ninh-lần 1 năm 2017-2018) Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\tan^5 x$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}\tan^4 x-\dfrac{1}{2}\tan^2 x+\ln|\cos x|+C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}\tan^4 x+\dfrac{1}{2}\tan^2 x-\ln|\cos x|+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}\tan^4 x+\dfrac{1}{2}\tan^2 x+\ln|\cos x|+C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}\tan^4 x-\dfrac{1}{2}\tan^2 x-\ln|\cos x|+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$I=\int f(x)\mathrm{d}x=\int \tan^5 x\mathrm{d}x=\int\dfrac{\sin^5 x}{\cos^5 x}\mathrm{d}x$

$=\int\dfrac{\sin^2 x.\sin^2 .\sin x}{\cos^5 x}\mathrm{d}x=\int\dfrac{(1-\cos^2 x).(1-\cos^2 x).\sin x}{\cos^5 x}\mathrm{d}x$

Đặt $t=\cos x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\sin x\mathrm{d}x$ $I=\int\dfrac{(1-t^2).(1-t^2)}{t^5}(-\mathrm{d}t)=\int\dfrac{1-2t^2+t^4}{t^5}(-\mathrm{d}t)$

$$=\int\left(-\frac{1}{t^5}+\frac{2}{t^3}-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t=\int\left(-t^{-5}+2t^{-3}-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{4}t^{-4}-t^{-2}-\ln|t|+C$$

$$=\frac{1}{4}\cos x^{-4}-\cos x^{-2}-\ln|\cos x|+C=\frac{1}{4}.\frac{1}{\cos x^4}-\frac{1}{\cos x^2}-\ln|\cos x|+C$$

$$=\frac{1}{4}.\left(\tan^2 x+1\right)^2-\left(\tan^2 x+1\right)-\ln|\cos x|+C$$

$$=\frac{1}{4}\left(\tan^4 x+2\tan^2 x+1\right)-\left(\tan^2 x+1\right)-\ln|\cos x|+C$$

$$=\frac{1}{4}\tan^4 x-\frac{1}{2}\tan^2 x-\ln|\cos x|+\frac{1}{4}+C$$

$$=\frac{1}{4}\tan^4 x-\frac{1}{2}\tan^2 x-\ln|\cos x|+C.$$

Câu 25: (THPT Chuyên Lê Quý Đôn-Đà Nẵng năm 2017-2018) Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. $\int_0^1 \sin(1-x)\mathrm{d}x=\int_0^1 \sin x\mathrm{d}x$. **B.** $\int_0^1 \cos(1-x)\mathrm{d}x=-\int_0^1 \cos x\mathrm{d}x$.

C. $\int_0^{\pi} \cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\mathrm{d}x$. **D.** $\int_0^{\pi} \sin\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn A

Xét tích phân $\int_0^1 \sin(1-x)\mathrm{d}x$

Đặt $1-x=t\Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$. Khi $x=0\Rightarrow t=1$; Khi $x=1\Rightarrow t=0$.

Do đó $\int_0^1 \sin(1-x)\mathrm{d}x=\int_1^0 \sin t(-\mathrm{d}t)=\int_0^1 \sin t\mathrm{d}t=\int_0^1 \sin x\mathrm{d}x$.

Câu 26: (THPT Chuyên Lê Quý Đôn-Đà Nẵng năm 2017-2018) Nguyên hàm của hàm số $y=\mathrm{e}^{-3x+1}$ là

A. $\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x+1}+C$. **B.** $-3\mathrm{e}^{-3x+1}+C$. **C.** $-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x+1}+C$. **D.** $3\mathrm{e}^{-3x+1}+C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int \mathrm{e}^{-3x+1}\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\int \mathrm{e}^{-3x+1}\mathrm{d}(-3x+1)=-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x+1}+C$.

Câu 27: (THPT Chuyên Phan Bội Châu-Nghệ An- lần 1 năm 2017-2018) Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^{2x}$, biết $F(0)=1$.

A. $F(x)=\mathrm{e}^{2x}$. **B.** $F(x)=\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}+\frac{1}{2}$. **C.** $F(x)=2\mathrm{e}^{2x}-1$. **D.** $F(x)=\mathrm{e}^{x}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+C$.

Theo giả thiết: $F(0)=1\Rightarrow C=\frac{1}{2}$. Vậy $F(x)=\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}+\frac{1}{2}$.

Câu 28: (THPT Chuyên Phan Bội Châu-Nghệ An- lần 1 năm 2017-2018) Cho $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=x\ln x$. Tính $F''\left(x\right)$.

A. $F''\left(x\right)=1-\ln x$. **B.** $F''\left(x\right)=\frac{1}{x}$. **C.** $F''\left(x\right)=1+\ln x$. **D.** $F''\left(x\right)=x+\ln x$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $F\left(x\right)=\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int x\ln x\mathrm{d}x \Rightarrow F'\left(x\right)=x\ln x\Rightarrow F''\left(x\right)=\ln x+1$.

Câu 29: (THPT Chuyên Phan Bội Châu-Nghệ An- lần 1 năm 2017-2018) Nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=x\sin x$ là:

A. $F\left(x\right)=-x\cos x-\sin x+C$. **B.** $F\left(x\right)=x\cos x-\sin x+C$.

C. $F\left(x\right)=-x\cos x+\sin x+C$. **D.** $F\left(x\right)=x\cos x+\sin x+C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $I=\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int x\sin x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u=x \\ \mathrm{d}v=\sin x\,\mathrm{d}x \end{cases}$ Ta có $\begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=-\cos x \end{cases}$.

$I=\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int x\sin x\,\mathrm{d}x=-x\cos x+\int \cos x\,\mathrm{d}x=-x\cos x+\sin x+C$.

Câu 30: (THPT Chuyên Quốc Học-Huế năm 2017-2018) Tìm họ của nguyên hàm $f\left(x\right)=\tan 2x$.

A. $\int \tan 2x\ \mathrm{d}x=2\left(1+\tan^2 2x\right)+C$. **B.** $\int \tan 2x\ \mathrm{d}x=-\ln\left|\cos 2x\right|+C$.

C. $\int \tan 2x\ \mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(1+\tan^2 2x\right)+C$. **D.** $\int \tan 2x\ \mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\ln\left|\cos 2x\right|+C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int \tan 2x\ \mathrm{d}x=\int \frac{\sin 2x}{\cos 2x}\ \mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\left(\cos 2x\right)}{\cos 2x}=-\frac{1}{2}\ln\left|\cos 2x\right|+C$.

Câu 31: (THPT Chuyên Thái Bình-lần 3 năm 2017-2018) Cho $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=a$, $\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x=b$. Khi đó $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng:

A. $-a-b$. **B.** $b-a$. **C.** $a+b$. **D.** $a-b$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Do $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x-\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=a-b$

Câu 32: (THPT Chuyên Thái Bình-lần 3 năm 2017-2018) Một đám vi khuẩn ngày thứ x có số lượng là $N\left(x\right)$. Biết rằng $N'\left(x\right)=\frac{2000}{1+x}$ và lúc đầu số lượng vi khuẩn là 5000 con. Vậy ngày thứ 12 số lượng vi khuẩn (sau khi làm tròn) là bao nhiêu con?

A. 10130. **B.** 5130. **C.** 5154. **D.** 10132.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có: $\int N'(x)\mathrm{d}x=\int \frac{2000}{1+x}\mathrm{d}x=2000\ln|1+x|+C\Rightarrow N(x)=2000\ln|1+x|+C$.

Khi $x=0$ $\Rightarrow N(0)=2000\ln|1+0|+C=5000\Rightarrow C=5000$.

Khi $x=12$ $\Rightarrow N(12)=2000\ln|1+12|+5000=1030$.

Câu 33: (THPT Chuyên Thái Bình-lần 3 năm 2017-2018) Cho $\int\limits_1^2 f(x^2+1)x\mathrm{d}x=2$. Khi đó $I=\int\limits_2^5 f(x)\mathrm{d}x$ bằng:

A. 2. **B.** 1. **C.** -1. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt $t=x^2+1\Rightarrow dt=2xdx$.

Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=2$, $x=2\Rightarrow t=5$.

Khi đó: $\int\limits_1^2 f(x^2+1)x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_2^5 f(t)\mathrm{d}t\Rightarrow\int\limits_2^5 f(t)\mathrm{d}t=2\int\limits_1^2 f(x^2+1)x\mathrm{d}x=4$.

Mà tích phân không phụ thuộc vào biến nên: $I=\int\limits_2^5 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_2^5 f(t)\mathrm{d}t=4$.

Câu 34: (THPT Chuyên Vĩnh Phúc - lần 3 năm 2017-2018) Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\mathrm{d}x$.

A. $I=1-\frac{\pi}{4}$. **B.** $I=2$. **C.** $I=\ln 2$. **D.** $I=\frac{\pi}{12}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\mathrm{d}x$

$=(\tan x-x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{\pi}{4}$.

Câu 35: (THPT Chuyên Vĩnh Phúc - lần 3 năm 2017-2018) Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=ax+\frac{b}{x^2}$ $(x\neq 0)$ biết rằng $F(-1)=1$; $F(1)=4$; $f(1)=0$.

A. $F(x)=\frac{3x^2}{4}+\frac{3}{2x}+\frac{7}{4}$. **B.** $F(x)=\frac{3x^2}{4}-\frac{3}{2x}-\frac{7}{4}$.

C. $F(x)=\frac{3x^2}{2}+\frac{3}{4x}-\frac{7}{4}$. **D.** $F(x)=\frac{3x^2}{2}-\frac{3}{2x}-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có họ các nguyên hàm của hàm số $f(x)=ax+\frac{b}{x^2}$ $(x\neq 0)$ có dạng: $F(x)=\frac{ax^2}{2}-\frac{b}{x}+C$.

Theo giả thiết ta có hệ:

$$\begin{cases}\dfrac{a}{2}+b+C=1\\ \dfrac{a}{2}-b+C=4\\ a+b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{3}{2}\\ b=-\dfrac{3}{2}\\ C=\dfrac{7}{4}\end{cases}$$. Từ đó hàm số $f(x)$ có một nguyên hàm là $F(x)=\dfrac{3x^2}{4}+\dfrac{3}{2x}+\dfrac{7}{4}$.

Câu 36: (THPT Chuyên Vĩnh Phúc - lần 3 năm 2017-2018) Một ô tô đang chạy với tốc độ $10(m/s)$ thì người lái đạp phanh, từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với $v(t)=-5t+10(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét.

A. $8m$. **B.** $10m$. **C.** $5m$. **D.** $20m$.

Lời giải

Chọn B

Khi ô tô có vận tốc $10(\text{m/s})$ tương ứng với $t=0(\text{s})$.

Lúc ô tô dừng lại thì $v(t)=0\Leftrightarrow -5t+10=0\Leftrightarrow t=2(\text{s})$.

Quãng đường ô tô di chuyển được từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn là:

$$S=\int_0^2(-5t+10)\,\text{d}t=\left.\left(-\frac{5}{2}t^2+10t\right)\right|_0^2=10(\text{m}).$$

Câu 37: (THPT Hồng Quang-Hải Dương năm 2017-2018) Tính $I=\int_1^2 x\text{e}^x\,\text{d}x$.

A. $I=\text{e}^2$. **B.** $I=-\text{e}^2$. **C.** $I=3\text{e}^2-2\text{e}$. **D.** $I=\text{e}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \text{d}v=\text{e}^x\,\text{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\text{d}u=\text{d}x\\ v=\text{e}^x\end{cases}$.

Khi đó $I=x\text{e}^x\Big|_1^2-\int_1^2\text{e}^x\,\text{d}x=2\text{e}^2-\text{e}-\text{e}^x\Big|_1^2=2\text{e}^2-\text{e}-\text{e}^2+\text{e}=\text{e}^2$.

Câu 38: (THPT Kinh Môn 2-Hải Dương năm 2017-2018) Kết quả của $\int_0^4\frac{1}{\sqrt{2x+1}}\text{d}x$ bằng

A. 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\sqrt{2x+1}\Rightarrow t^2=2x+1\Rightarrow 2t\text{d}t=2\text{d}x\Rightarrow t\text{d}t=\text{d}x$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$, $x=4\Rightarrow t=3$.

Khi đó, ta có $\int_0^4\frac{1}{\sqrt{2x+1}}\text{d}x=\int_1^3\frac{t\text{d}t}{t}=\int_1^3\text{d}t=t\Big|_1^3=2$.

Câu 39: (THPT Ninh Giang-Hải Dương năm 2017-2018) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=x\ln(x+2)$.

A. $\int f(x)\text{d}x=\frac{x^2}{2}\ln(x+2)-\frac{x^2+4x}{4}+C$. **B.** $\int f(x)\text{d}x=\frac{x^2-4}{2}\ln(x+2)-\frac{x^2-4x}{4}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\ln(x+2)-\frac{x^2+4x}{2}+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^2-4}{2}\ln(x+2)-\frac{x^2+4x}{2}+C$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\begin{cases} u=\ln(x+2) \\ \mathrm{d}v=x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}x}{x+2} \\ v=\dfrac{x^2}{2} \end{cases}$

suy ra $\int f(x)\mathrm{d}x=\int x\ln(x+2)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\ln(x+2)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x+2}\mathrm{d}x$

$=\frac{x^2}{2}\ln(x+2)-\frac{1}{2}\int\left(x-2+\frac{4}{x+2}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^2-4}{2}\ln(x+2)-\frac{x^2-4x}{2}+C$.

Câu 40: (THPT Ninh Giang-Hải Dương năm 2017-2018) Tích phân $I=\int_1^{\mathrm{e}}\frac{1}{x+3}\mathrm{d}x$ bằng:

A. $\ln\left[4(\mathrm{e}+3)\right]$. **B.** $\ln(\mathrm{e}-2)$. **C.** $\ln(\mathrm{e}-7)$. **D.** $\ln\left(\frac{3+\mathrm{e}}{4}\right)$.

Lời giải

Chọn D

$I=\int_1^{\mathrm{e}}\frac{1}{x+3}\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}(x+3)}{x+3}=\ln|x+3|\Big|_1^{\mathrm{e}}=\ln\left(\frac{3+\mathrm{e}}{4}\right)$.

Câu 41: (THPT Ninh Giang-Hải Dương năm 2017-2018) Xét $I=\int x^3\left(4x^4-3\right)^5\mathrm{d}x$. Bằng cách đặt: $u=4x^4-3$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $I=\frac{1}{16}\int u^5\mathrm{d}u$. **B.** $I=\frac{1}{12}\int u^5\mathrm{d}u$. **C.** $I=\int u^5\mathrm{d}u$. **D.** $I=\frac{1}{4}\int u^5\mathrm{d}u$.

Lời giải

Chọn A

$u=4x^4-3\Rightarrow\mathrm{d}u=16x^3\mathrm{d}x\Rightarrow\frac{1}{16}\mathrm{d}u=x^3\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow I=\frac{1}{16}\int u^5\mathrm{d}u$.

Câu 42: (THPT Ninh Giang-Hải Dương năm 2017-2018) Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=\mathrm{e}^{3x}$ thỏa mãn $F(0)=1$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $F(x)=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}+\frac{2}{3}$. **B.** $F(x)=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}$. **C.** $F(x)=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}+1$. **D.** $F(x)=-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}+\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $F(x)=\int\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}+C$.

Lại có $F(0)=1\Leftrightarrow\frac{1}{3}+C=1\Leftrightarrow C=\frac{2}{3}$

Câu 43: (THPT Ninh Giang-Hải Dương năm 2017-2018) Tập hợp nghiệm của bất phương trình $\int_0^x\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\mathrm{d}t>0$ (ẩn x) là:

A. $(-\infty;+\infty)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(-\infty;+\infty)\setminus\{0\}$. **D.** $(0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int\limits_0^x \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\mathrm{d}t>0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\int\limits_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\mathrm{d}\left(t^2+1\right)>0 \Leftrightarrow \left.\sqrt{t^2+1}\right|_0^x>0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}-1>0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}>1 \Leftrightarrow x^2>0 \Leftrightarrow x\neq 0$

Câu 44: **(THPT Ninh Giang-Hải Dương năm 2017-2018)** Giả sử $\int\limits_0^9 f(x)\mathrm{d}x=37$ và $\int\limits_9^0 g(x)\mathrm{d}x=16$.

Khi đó, $I=\int\limits_0^9\left[2f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng:

A. $I=26$. **B.** $I=58$. **C.** $I=143$. **D.** $I=122$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $I=\int\limits_0^9\left[2f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_0^9 2f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_0^9 3g(x)\mathrm{d}x=2\int\limits_0^9 f(x)\mathrm{d}x-3\int\limits_9^0 g(x)\mathrm{d}x=26$.

Câu 45: **(THPT Quãng Xương 1-Thanh Hóa năm 2017-2018)** Đặt $I=\int\limits_1^2(2mx+1)\mathrm{d}x$ (m là tham số thực). Tìm m để $I=4$.

A. $m=-1$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $I=\int\limits_1^2(2mx+1)\mathrm{d}x=\left.\left(mx^2+x\right)\right|_1^2=(4m+2)-(m+1)=3m+1$.

$I=4 \Leftrightarrow 3m+1=4 \Leftrightarrow m=1$.

Câu 46: **(THPT Quãng Xương 1-Thanh Hóa năm 2017-2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[0;2]$ và $f(2)=3$, $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=3$. Tính $\int\limits_0^2 x.f'(x)\mathrm{d}x$.

A. -3. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int\limits_0^2 x.f'(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 x\mathrm{d}\left(f(x)\right)=\left.x.f(x)\right|_0^2-\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=2f(2)-3=3$.

Câu 47: **(THPT Quãng Xương 1-Thanh Hóa năm 2017-2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(0)<0<f(-1)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, $y=0$, $x=-1$ và $x=1$. Xét các mệnh đề sau

Câu 48: $S=\int\limits_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_0^1\left|f(x)\right|\mathrm{d}x$. 2. $S=\int\limits_{-1}^1\left|f(x)\right|\mathrm{d}x$.

Câu 49: $S=\int\limits_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x$. 4. $S=\left|\int\limits_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x\right|$.

Số mệnh đề đúng là

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f\left(x\right)$, $y=0$, $x=-1$ và $x=1$ là $S=\int\limits_{-1}^{1}\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x$ nên (2) đúng.

Do $f\left(0\right)<0<f\left(-1\right)$ nên $S=\int\limits_{-1}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x$ sai.

Tương tự $S=\left|\int\limits_{-1}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x\right|$ sai. và $S=\int\limits_{-1}^{0}f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{1}\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x$ sai.

Câu 50: **(THPT Trần Quốc Tuấn năm 2017-2018)** Cho biết $\int\frac{2x-13}{(x+1)(x-2)}\mathrm{d}x=a\ln\left|x+1\right|+b\ln\left|x-2\right|+C$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a+2b=8$. **B.** $a+b=8$. **C.** $2a-b=8$. **D.** $a-b=8$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có

$$\int\frac{2x-13}{(x+1)(x-2)}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{5}{x+1}-\frac{3}{x-2}\right)\mathrm{d}x=5\int\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x-3\int\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x=5\ln\left|x+1\right|-3\ln\left|x-2\right|+C.$$

Vậy $\begin{cases}a=5\\b=-3\end{cases}\Rightarrow a-b=8$.

Câu 51: **(THPT Trần Quốc Tuấn năm 2017-2018)** Tính tích phân $I=\int\limits_{-1}^{1}(4x^3-3)\mathrm{d}x$.

A. $I=6$. **B.** $I=-6$. **C.** $I=4$. **D.** $I=-4$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $I=\int\limits_{-1}^{1}(4x^3-3)\mathrm{d}x=\left(x^4-3x\right)\Big|_{-1}^{1}=6$.

Câu 52: **(THPT Trần Quốc Tuấn năm 2017-2018)** Cho $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\frac{2x+1}{2x-3}$ thỏa mãn $F(2)=3$. Tìm $F\left(x\right)$:

A. $F(x)=x+4\ln\left|2x-3\right|+1$. **B.** $F(x)=x+2\ln(2x-3)+1$.

C. $F(x)=x+2\ln\left|2x-3\right|+1$. **D.** $F(x)=x+2\ln|2x-3|-1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $F\left(x\right)=\int\frac{2x+1}{2x-3}\mathrm{d}x=\int\left(1+\frac{4}{2x-3}\right)\mathrm{d}x=x+2\ln\left|2x-3\right|+C$.

Lại có $F(2)=3\Leftrightarrow 2+2\ln\left|1\right|+C=3\Leftrightarrow C=1$.

Câu 53: (THPT Trần Quốc Tuấn năm 2017-2018) Hàm số $y=f(x)$ có một nguyên hàm là $F\left(x\right)=\mathrm{e}^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $\dfrac{f(x)+1}{\mathrm{e}^{x}}$.

A. $\int\dfrac{f(x)+1}{\mathrm{e}^{x}}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}+C$.

B. $\int\dfrac{f(x)+1}{\mathrm{e}^{x}}\mathrm{d}x=2\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}+C$.

C. $\int\dfrac{f(x)+1}{\mathrm{e}^{x}}\mathrm{d}x=2\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}+C$.

D. $\int\dfrac{f(x)+1}{\mathrm{e}^{x}}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Vì hàm số $y=f(x)$ có một nguyên hàm là $F\left(x\right)=\mathrm{e}^{2x}$ nên ta có: $f\left(x\right)=\left(F\left(x\right)\right)'=2\mathrm{e}^{2x}$.

Khi đó: $\int\dfrac{f(x)+1}{\mathrm{e}^{x}}\mathrm{d}x=\int\dfrac{2\mathrm{e}^{2x}+1}{\mathrm{e}^{x}}\mathrm{d}x=\int\left(2\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}\right)dx\ =2\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}+C$.

Câu 54: (THPT Thanh Miện 1-Hải Dương-lần 1 năm 2017-2018) Khi tính nguyên hàm $\int\dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$, bằng cách đặt $u=\sqrt{x+1}$ ta được nguyên hàm nào?

A. $\int 2u\left(u^{2}-4\right)\mathrm{d}u$.

B. $\int\left(u^{2}-4\right)\mathrm{d}u$.

C. $\int 2\left(u^{2}-4\right)\mathrm{d}u$.

D. $\int\left(u^{2}-3\right)\mathrm{d}u$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $u=\sqrt{x+1}$, $u\geq 0$ nên $u^{2}=x+1\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}x=2u\mathrm{d}u\\ x=u^{2}-1\end{cases}$.

Khi đó $\int\dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x=\int\dfrac{u^{2}-1-3}{u}.2u\mathrm{d}u=\int 2\left(u^{2}-4\right)\mathrm{d}u$.

Câu 55: (THPT Thanh Miện 1-Hải Dương-lần 1 năm 2017-2018) Nguyên hàm $\int\sin 2x dx$ bằng:

A. $-\dfrac{1}{2}\cos 2x+C$.

B. $\cos 2x+C$.

C. $\dfrac{1}{2}\cos 2x+C$.

D. $-\cos 2x+C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int\sin 2x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int\sin 2x\mathrm{d}2x=-\dfrac{1}{2}\cos 2x+C$.

Câu 56: (THPT Thanh Miện 1-Hải Dương-lần 1 năm 2017-2018) Trong hệ trục tọa độ Oxy cho elip $\left(E\right)$ có phương trình $\dfrac{x^{2}}{25}+\dfrac{y^{2}}{9}=1$. Hình phẳng $\left(H\right)$ giới hạn bởi nửa elip nằm trên trục hoành và trục hoành. Quay hình $\left(H\right)$ xung quanh trục Ox ta được khối tròn xoay, tính thể tích khối tròn xoay đó:

A. $V=60\pi$.

B. 30π.

C. $\dfrac{1188}{25}\pi$.

D. $\dfrac{1416}{25}\pi$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\dfrac{y^{2}}{9}=1-\dfrac{x^{2}}{25}\Leftrightarrow y=\sqrt{9\left(1-\dfrac{x^{2}}{25}\right)}$ với $\left(-5\leq x\leq 5\right)$.

Gọi V là thể tích cần tìm, ta có: $V=\pi\int\limits_{-5}^{5}\left(9-\dfrac{9x^2}{25}\right)\mathrm{d}x=60\pi$.

Câu 57: (THPT Trần Hưng Đạo-TP HCM năm 2017-2018) Tính tích phân $I=\int\limits_{1}^{\mathrm{e}}\dfrac{\sqrt{1+3\ln x}}{x}\mathrm{d}x$ bằng cách đặt $t=\sqrt{1+3\ln x}$, mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $I=\dfrac{2}{9}t^3\Big|_1^2$. **B.** $I=\dfrac{2}{3}\int\limits_1^2 t\mathrm{d}t$. **C.** $I=\dfrac{2}{3}\int\limits_1^2 t^2\mathrm{d}t$. **D.** $I=\dfrac{14}{9}$.

Lời giải

Chọn B

$I=\int\limits_1^{\mathrm{e}}\dfrac{\sqrt{1+3\ln x}}{x}\mathrm{d}x$, đặt $t=\sqrt{1+3\ln x}\Rightarrow t^2=1+3\ln x\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=\dfrac{3}{x}\mathrm{d}x\Rightarrow\dfrac{2t}{3}\mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$.

Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=1$; $x=\mathrm{e}\Rightarrow t=2$.

$I=\int\limits_1^2\dfrac{2t^2}{3}\mathrm{d}t=\dfrac{2}{9}t^3\Big|_1^2=\dfrac{14}{9}$.

Câu 58: (THPT Trần Hưng Đạo-TP HCM năm 2017-2018) Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{2x-1}}$ thỏa mãn $F(5)=7$.

A. $F(x)=2\sqrt{2x-1}$. **B.** $F(x)=2\sqrt{2x-1}+1$.

C. $F(x)=\sqrt{2x-1}+4$. **D.** $F(x)=\sqrt{2x-1}-10$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int\dfrac{2}{\sqrt{2x-1}}\mathrm{d}x=2\int\dfrac{\mathrm{d}(2x-1)}{2\sqrt{2x-1}}=2\sqrt{2x-1}+C$;

Do $F(5)=7$ nên $6+C=7\Rightarrow C=1$.

Câu 59: (THPT Trần Hưng Đạo-TP HCM năm 2017-2018) Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=(5x+1)\mathrm{e}^x$ và $F(0)=3$. Tính $F(1)$.

A. $F(1)=11\mathrm{e}-3$. **B.** $F(1)=\mathrm{e}+3$. **C.** $F(1)=\mathrm{e}+7$. **D.** $F(1)=\mathrm{e}+2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $F(x)=\int(5x+1)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=5x+1\\ \mathrm{d}v=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=5\mathrm{d}x\\ v=\mathrm{e}^x\end{cases}$.

$F(x)=(5x+1)\mathrm{e}^x-\int 5\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=(5x+1)\mathrm{e}^x-5\mathrm{e}^x+C=(5x-4)\mathrm{e}^x+C$.

Mặt khác $F(0)=3\Leftrightarrow -4+C=3\Leftrightarrow C=7$.

$\Rightarrow F(x)=(5x-4)\mathrm{e}^x+7$.

Vậy $F(1)=\mathrm{e}+7$.

Câu 60: **(THPT Trần Hưng Đạo-TP HCM năm 2017-2018)** Cho $y=f(x)$, $y=g(x)$ là các hàm số có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$ và $\int_0^2 g(x).f'(x)\mathrm{d}x=2$, $\int_0^2 g'(x).f(x)\mathrm{d}x=3$. Tính tích phân $I=\int_0^2 \left[f(x).g(x)\right]'\mathrm{d}x$.

A. $I=-1$. **B.** $I=6$. **C.** $I=5$. **D.** $I=1$.

Lời giải

Chọn C

Xét tích phân $I=\int_0^2 \left[f(x).g(x)\right]'\mathrm{d}x=\int_0^2 \left[f'(x).g(x)+f(x).g'(x)\right]\mathrm{d}x$

$=\int_0^2 g'(x).f(x)\mathrm{d}x+\int_0^2 g(x).f'(x)\mathrm{d}x=5$.

Câu 61: **(THPT Tứ Kỳ-Hải Dương năm 2017-2018)** Một chiếc ô tô chuyển động với vận tốc $v(t)$ (m/s), có gia tốc $a(t)=v'(t)=\dfrac{3}{t+1}$ $\left(\text{m/s}^2\right)$. Biết vận tốc của ô tô tại giây thứ 6 bằng 6 (m/s). Tính vận tốc của ô tô tại giây thứ 20 .

A. $v=3\ln 3$. **B.** $v=14$. **C.** $v=3\ln 3+6$. **D.** $v=26$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có: $v(t)=\int a(t)\mathrm{d}t=\int \dfrac{3}{t+1}=3\ln|t+1|+C$.

Lại có: $v(6)=6\Leftrightarrow 3\ln 7+c=6\Leftrightarrow c=6-3\ln 7$.

Suy ra $v(20)=3\ln 21+6-3\ln 7=3\ln 3+6$.

Vậy vận tốc của ôtô tại giây thứ 20 bằng $3\ln 3+6$.

Câu 62: **(THPT Tứ Kỳ-Hải Dương năm 2017-2018)** Tính tích phân $I=\int_4^5 (x+1)\ln(x-3)\mathrm{d}x$?

A. $10\ln 2$. **B.** $10\ln 2+\dfrac{19}{4}$. **C.** $\dfrac{19}{4}-10\ln 2$. **D.** $10\ln 2-\dfrac{19}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt $\begin{cases} u=\ln(x-3) \\ \mathrm{d}v=x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\dfrac{1}{x-3}\mathrm{d}x \\ v=\dfrac{1}{2}x^2+x \end{cases}$.

$I=\left(\dfrac{1}{2}x^2+x\right)\ln(x-3)\Big|_4^5-\int_4^5 \dfrac{\frac{1}{2}x^2+x}{x-3}\mathrm{d}x=\dfrac{35}{2}\ln 2-\dfrac{1}{2}\int_4^5 \dfrac{x^2-9+9}{x-3}dx-\int_4^5 \dfrac{x-3+3}{x-3}dx$

$=\dfrac{35}{2}\ln 2-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{9}{2}+3+9\ln 2\right)-(1+3\ln 2)$

$=10\ln 2-\dfrac{19}{4}$.

Câu 63: (THPT Tứ Kỳ-Hải Dương năm 2017-2018) Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[-4;+\infty\right)$ và $\int\limits_0^5 f\left(\sqrt{x+4}\right)\mathrm{d}x=8$. Tính $I=\int\limits_3^2 x.f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=8$. **B.** $I=4$. **C.** $I=-16$. **D.** $I=-4$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt $\sqrt{x+4}=t\Rightarrow x=t^2-4$.

Khi $\begin{cases} x=0\Rightarrow t=2 \\ x=5\Rightarrow t=3 \end{cases}\Rightarrow 8=\int\limits_2^3 f\left(t\right)\mathrm{d}\left(t^2-4\right)\Leftrightarrow\int\limits_2^3 2t.f\left(t\right)\mathrm{d}t=8$.

Mà $\int\limits_2^3 2t.f\left(t\right)\mathrm{d}t=\int\limits_2^3 2x.f\left(x\right)\mathrm{d}x\Rightarrow\int\limits_2^3 x.f\left(x\right)\mathrm{d}x=4\Rightarrow I=-4$.

Câu 64: (THPT Lương Văn ChasnhPhus Yên năm 2017-2018) Tìm nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{2}{4x-3}$.

A. $\int\dfrac{2\mathrm{d}x}{4x-3}=2\ln\left(2x-\dfrac{3}{2}\right)+\mathrm{C}$. **B.** $\int\dfrac{2\mathrm{d}x}{4x-3}=\dfrac{1}{2}\ln\left|2x-\dfrac{3}{2}\right|+C$.

C. $\int\dfrac{2\mathrm{d}x}{4x-3}=\dfrac{1}{2}\ln\left(2x-\dfrac{3}{2}\right)+C$. **D.** $\int\dfrac{2\mathrm{d}x}{4x-3}=\dfrac{1}{4}\ln\left|4x-3\right|+C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{2}{4x-3}$ là: $\int\dfrac{2\mathrm{d}x}{4x-3}=\dfrac{1}{2}\ln\left|2x-\dfrac{3}{2}\right|+C$, vì:

$$\left[\frac{1}{2}\ln\left|2x-\frac{3}{2}\right|+C\right]'=\frac{1}{2}.\frac{2}{2x-\frac{3}{2}}=\frac{2}{4x-3}=f\left(x\right).$$

Câu 65: (THPT Lương Văn ChasnhPhus Yên năm 2017-2018) Cho $F\left(x\right)=\left(ax^2+bx-c\right)\mathrm{e}^{2x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\left(2018x^2-3x+1\right)\mathrm{e}^{2x}$ trên khoảng $\left(-\infty;+\infty\right)$. Tính $T=a+2b+4c$.

A. $T=-3035$. **B.** $T=1007$. **C.** $T=-5053$. **D.** $T=1011$.

Lời giải

Chọn A

Vì $F\left(x\right)=\left(ax^2+bx-c\right)\mathrm{e}^{2x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\left(2018x^2-3x+1\right)\mathrm{e}^{2x}$ trên khoảng $\left(-\infty;+\infty\right)$ nên ta có: $\left(F\left(x\right)\right)'=f\left(x\right)$, với mọi $x\in\left(-\infty;+\infty\right)$.

$\Leftrightarrow\left(2ax^2+x\left(2b+2a\right)-2c+b\right)\mathrm{e}^{2x}=\left(2018x^2-3x+1\right)\mathrm{e}^{2x}$, với mọi $x\in\left(-\infty;+\infty\right)$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 2a=2018 \\ 2b+2a=-3 \\ -2c+b=1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=1009 \\ b=-\dfrac{2021}{2} \\ c=-\dfrac{2023}{4} \end{cases}.$$

Vậy $T = a + 2b + 4c \; = 1009 + 2.\left(-\dfrac{2021}{2}\right) + 4.\left(-\dfrac{2023}{4}\right) = -3035$.

Câu 66: **(THPT Lương Văn ChasnhPhus Yên năm 2017-2018)** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{2e^x + 3}$ thỏa mãn $F(0) = 10$. Tìm $F(x)$.

A. $F(x) = \dfrac{1}{3}\left(x - \ln\left(2e^x + 3\right)\right) + 10 + \dfrac{\ln 5}{3}$.

B. $F(x) = \dfrac{1}{3}\left(x + 10 - \ln\left(2e^x + 3\right)\right)$.

C. $F(x) = \dfrac{1}{3}\left(x - \ln\left(e^x + \dfrac{3}{2}\right)\right) + 10 + \ln 5 - \ln 2$.

D. $F(x) = \dfrac{1}{3}\left(x - \ln\left(e^x + \dfrac{3}{2}\right)\right) + 10 - \dfrac{\ln 5 - \ln 2}{3}$.

Lời giải

Chọn A

$F(x) = \int f(x)\,dx = \int \dfrac{1}{2e^x + 3}\,dx = \int \dfrac{e^x}{\left(2e^x + 3\right)e^x}\,dx$.

Đặt $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$. Suy ra

$F(x) = \int \dfrac{1}{(2t + 3)t}\,dt = \dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{t}{2t + 3}\right| + C = \dfrac{1}{3}\ln\left(\dfrac{e^x}{2e^x + 3}\right) + C = \dfrac{1}{3}\left(x - \ln\left(2e^x + 3\right)\right) + C$.

Vì $F(0) = 10$ nên $10 = \dfrac{1}{3}(0 - \ln 5) + C \Leftrightarrow C = 10 + \dfrac{\ln 5}{3}$.

Vậy $F(x) = \dfrac{1}{3}\left(x - \ln\left(2e^x + 3\right)\right) + 10 + \dfrac{\ln 5}{3}$.

Câu 67: **(THPT Đô Lương 4-Nghệ An năm 2017-2018)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 2018^x \ln 2018 - \cos x$ và $f(0) = 2$. Phát biểu nào sau đúng?

A. $f(x) = 2018^x + \sin x + 1$.

B. $f(x) = \dfrac{2018^x}{\ln 2018} + \sin x + 1$.

C. $f(x) = \dfrac{2018^x}{\ln 2018} - \sin x + 1$.

D. $f(x) = 2018^x - \sin x + 1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x) = \int\left(2018^x \ln 2018 - \cos x\right)dx \; = 2018^x - \sin x + C$

Mà $f(0) = 2 \; \Leftrightarrow 2018^0 - \sin 0 + C = 2 \Leftrightarrow C = 1$

Vậy $f(x) = 2018^x - \sin x + 1$.

Câu 68: **(THPT Chuyên Hoàng Văn Thụ-Hòa Bình năm 2017-2018)** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 - 2x + 3$ thỏa mãn $F(0) = 2$, giá trị của $F(1)$ bằng

A. 4.

B. $\dfrac{13}{3}$.

C. 2.

D. $\dfrac{11}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int x^2 - 2x + 3dx = \dfrac{x^3}{3} - x^2 + 3x + C$.

$F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ có $F(0)=2 \Rightarrow C=2$.

Vậy $F(x)=\dfrac{x^3}{3}-x^2+3x+2 \Rightarrow F(1)=\dfrac{13}{3}$.

Câu 69: (THPT Chuyên Hoàng Văn Thụ-Hòa Bình năm 2017-2018) Thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}\mathrm{e}^x$, trục hoành và đường thẳng $x=1$ là:

A. $\dfrac{\pi}{4}\left(\mathrm{e}^2+1\right)$. **B.** $\dfrac{1}{4}\left(\mathrm{e}^2+1\right)$. **C.** $\dfrac{\pi}{4}\left(\mathrm{e}^4-1\right)$. **D.** $\dfrac{1}{4}\left(\mathrm{e}^4-1\right)$.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\sqrt{x}\mathrm{e}^x=0 \Leftrightarrow x=0$.

Thể tích khối tròn xoay thu được là:

$$V=\pi\int_0^1\left(\sqrt{x}\mathrm{e}^x\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^1 x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x}-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}\right)\Bigg|_0^1=\frac{\pi}{4}\left(\mathrm{e}^2+1\right).$$

Câu 70: (THPT Hậu Lộc 2-Thanh Hóa năm 2017-2018) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin(2x+1)$ là:

A. $F(x)=-\dfrac{1}{2}\cos(2x+1)+C$. **B.** $F(x)=\dfrac{1}{2}\cos(2x+1)+C$.

C. $F(x)=-\dfrac{1}{2}\cos(2x+1)$. **D.** $F(x)=\cos(2x+1)$.

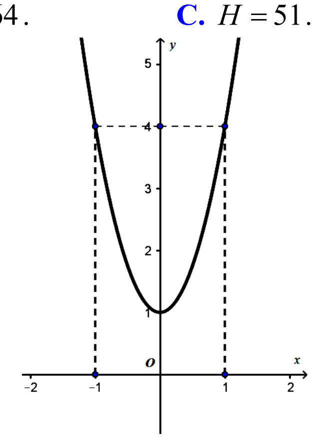
Lời giải

Chọn A

$$\int\sin(2x+1)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\sin(2x+1)\mathrm{d}(2x+1)=-\frac{1}{2}\cos(2x+1)+C.$$

Câu 71: (THPT Hậu Lộc 2-Thanh Hóa năm 2017-2018) Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R},a\neq 0)$ có đồ thị là (C). Biết rằng đồ thị (C) đi qua gốc tọa độ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Tính giá trị $H=f(4)-f(2)$?

A. $H=45$. **B.** $H=64$. **C.** $H=51$. **D.** $H=58$.



Lời giải

Chọn D

Theo bài ra $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $\left(a,b,c,d\in\mathbb{R},a\neq 0\right)$ do đó $y=f'\left(x\right)$ là hàm bậc hai có dạng $y=f'\left(x\right)=a'x^2+b'x+c'$.

Dựa vào đồ thị ta có: $\begin{cases}c'=1\\a'-b'+c'=4\\a'+b'+c'=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a'=3\\b'=0\\c'=1\end{cases}\Rightarrow y=f'\left(x\right)=3x^2+1$.

Gọi S là diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f'\left(x\right)$, trục Ox, $x=4$, $x=2$.

Ta có $S=\int\limits_2^4\left(3x^2+1\right)\mathrm{d}x=58$.

Lại có: $S=\int\limits_2^4 f'\left(x\right)\mathrm{d}x=f\left(x\right)\Big|_2^4=f\left(4\right)-f\left(2\right)$.

Do đó: $H=f\left(4\right)-f\left(2\right)=58$.

Câu 72: (THPT Chuyên Biên Hòa-Hà Nam-lần 1 năm 2017-2018) Tìm $\int x\cos 2x\mathrm{d}x$.

A. $\frac{1}{2}x.\sin 2x-\frac{1}{4}\cos 2x+C$. **B.** $x.\sin 2x+\cos 2x+C$.

C. $\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x+C$. **D.** $\frac{1}{2}x.\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$.

Lời giải

Chọn D

Đặt: $\begin{cases}u=x\\\mathrm{d}v=\cos 2x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\v=\frac{1}{2}\sin 2x\end{cases}$.

Khi đó: $\int x\cos 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x\sin 2x-\frac{1}{2}\int\sin 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$.

Câu 73: (THPT Chuyên Biên Hòa-Hà Nam-lần 1 năm 2017-2018) Biết $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=a+b\sqrt{3}$, với a, b là các số hữu tỉ. Tính $T=2a+6b$.

A. $T=3$. **B.** $T=-1$ **C.** $T=-4$. **D.** $T=2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=\sin x\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Vậy $2a+6b=2-3=-1$.

Câu 74: (THPT Chuyên Biên Hòa-Hà Nam-lần 1 năm 2017-2018) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(2\right)=-2$; $\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=1$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^4 f'\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$.

A . $I=-10$. **B.** $I=-5$. **C.** $I=0$. **D.** $I=-18$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\sqrt{x}$, ta có: $t^2=x$ và $2t\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$. Khi $x=0\Rightarrow t=0$; $x=4\Rightarrow t=2$.

$$I=\int_0^4 f'\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=\int_0^2 2tf'(t)\mathrm{d}t.$$

Đặt $u=2t$; $\mathrm{d}v=f'(t)\mathrm{d}t$ ta được: $\mathrm{d}u=2\mathrm{d}t$; $v=f(t)$.

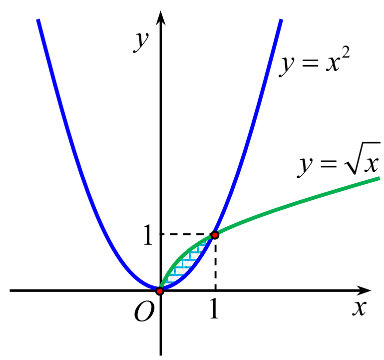
Khi đó: $I=\left(2tf(t)\right)\Big|_0^2-2\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t=4f(2)-2.1=4.(-2)-2=-10$.

Câu 75: (THPT Chuyên Biên Hòa-Hà Nam-lần 1 năm 2017-2018) Tính thể tích V của vật tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2$; $y=\sqrt{x}$ quanh trục Ox.

A. $V=\dfrac{9\pi}{10}$. **B.** $V=\dfrac{3\pi}{10}$. **C.** $V=\dfrac{\pi}{10}$. **D.** $V=\dfrac{7\pi}{10}$.

Lời giải

Chọn B



Phương trình hoành độ giao điểm $x^2=\sqrt{x}\Leftrightarrow x^4-x=0$

$\Leftrightarrow x(x-1)\left(x^2+x+1\right)=0\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=1$

Khi đó:

Thể tích khối tròn xoay sinh bởi hình (H) là $V=\pi\int_0^1\left(\sqrt{x}\right)^2\mathrm{d}x-\pi\int_0^1\left(x^2\right)^2\mathrm{d}x=\dfrac{3\pi}{10}$

Câu 76:

(THPT Trần Nhân Tông-Quảng Ninh-lần 1 năm 2017-2018) Cho $\int\limits_0^6 f\left(x\right)\mathrm{d}x=12$. Tính $I=\int\limits_0^2 f\left(3x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=6$. **B.** $I=36$. **C.** $I=2$. **D.** $I=4$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $I=\int\limits_0^2 f\left(3x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 f\left(3x\right)\frac{\mathrm{d}\left(3x\right)}{3}=\frac{1}{3}\int\limits_0^6 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{12}{3}=4$.

Câu 77: (THPT Trần Nhân Tông-Quảng Ninh-lần 1 năm 2017-2018) Cho $\int\limits_0^1\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx=a\ln 2+b\ln 3$ với a, b là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $a+b=2$. **B.** $a-2b=0$. **C.** $a+b=-2$. **D.** $a+2b=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có: $\int\limits_0^1\frac{dx}{x+1}=\ln\left|x+1\right|\Big|_0^1=\ln 2$ và $\int\limits_0^1\frac{dx}{x+2}=\ln\left|x+2\right|\Big|_0^1=\ln 3-\ln 2$

Do đó $\int\limits_0^1\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx=\ln 2-\left(\ln 3-\ln 2\right)=2\ln 2-\ln 3\Rightarrow a=2,\ b=-1$.

Vậy $a+2b=0$.

Câu 78: (THPT Trần Nhân Tông-Quảng Ninh-lần 1 năm 2017-2018) Cho $F(x)=\frac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tính $\int\limits_1^{\mathrm{e}} f'(x)\ln x\mathrm{d}x$ bằng:

A. $I=\frac{\mathrm{e}^2-3}{2\mathrm{e}^2}$. **B.** $I=\frac{2-\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^2}$. **C.** $I=\frac{\mathrm{e}^2-2}{\mathrm{e}^2}$. **D.** $I=\frac{3-\mathrm{e}^2}{2\mathrm{e}^2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Do $F(x)=\frac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$ nên $\frac{f(x)}{x}=\left(\frac{1}{2x^2}\right)'\Leftrightarrow f\left(x\right)=-\frac{1}{x^2}$.

Tính $I=\int\limits_1^{\mathrm{e}} f'(x)\ln x\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases}\ln x=u\\ f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\mathrm{d}v\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}u\\ f\left(x\right)=v\end{cases}$.

Khi đó $I=f\left(x\right).\ln\left(x\right)\Big|_1^{\mathrm{e}}-\int\limits_1^{\mathrm{e}}\frac{f'\left(x\right)}{x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{x^2}.\ln\left(x\right)\Big|_1^{\mathrm{e}}-\frac{1}{2x^2}\Big|_1^{\mathrm{e}}=\frac{\mathrm{e}^2-3}{2\mathrm{e}^2}$.

Câu 79: (THPT Trần Nhân Tông-Quảng Ninh-lần 1 năm 2017-2018) Một chiếc xe đua đang chạy 180 km/h. Tay đua nhấn ga để về đích kể từ đó xe chạy với gia tốc $a\left(t\right)=2t+1$ (m/s^2). Hỏi rằng 5 s sau khi nhấn ga thì xe chạy với vận tốc bao nhiêu km/h.

A. 200. **B.** 243. **C.** 288. **D.** 300.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $v(t)=\int a(t)\mathrm{d}t=\int(2t+1)\mathrm{d}t=t^2+t+C$.

Mặt khác vận tốc ban đầu là 180 km/h hay 50 m/s nên ta có $v(0)=50\Leftrightarrow C=50$.

Khi đó vận tốc của vật sau 5 giây là $v(5)=5^2+5+50=80$ m/s hay 288 km/h.

Câu 80: **(THPT Yên Định-Thanh Hóa-lần 1 năm 2017-2018)** Biến đổi $\int\limits_0^3\frac{x}{1+\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x$ thành $\int\limits_1^2 f(t)\mathrm{d}t$ với $t=\sqrt{1+x}$. Khi đó $f(t)$ là hàm số nào trong các hàm số sau đây?

A. $f(t)=2t^2-2t$. **B.** $f(t)=t^2+t$. **C.** $f(t)=2t^2+2t$. **D.** $f(t)=t^2-t$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$t=\sqrt{1+x}\Rightarrow t^2=1+x\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.

$\frac{x}{1+\sqrt{1+x}}=\frac{t^2-1}{1+t}=t-1$.

Vậy $f(t)=2t(t-1)=2t^2-2t$.

Câu 81: **(THPT Yên Định-Thanh Hóa-lần 1 năm 2017-2018)** Cho phần vật thể $(\Im)$ giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình $x=0$ và $x=2$. Cắt phần vật thể $(\Im)$ bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0\le x\le 2)$, ta được thiết diện là một tam giác đều có độ dài cạnh bằng $x\sqrt{2-x}$. Tính thể tích V của phần vật thể $(\Im)$.

A. $V=\frac{4}{3}$. **B.** $V=\frac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V=4\sqrt{3}$. **D.** $V=\sqrt{3}$.

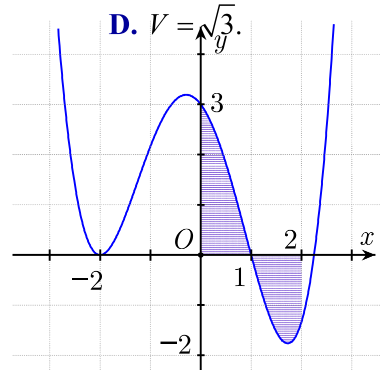
Hướng dẫn giải

Chọn B

Diện tích thiết diện: $S_\Delta=\frac{x^2(2-x)\sqrt{3}}{4}$.

$V_\Im=\int\limits_0^2\frac{x^2(2-x)\sqrt{3}}{4}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{4}\int\limits_0^2 x^2(2-x)\mathrm{d}x$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\int\limits_0^2 x^2(2-x)\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^2=\frac{\sqrt{3}}{3}$.



Câu 82: **(THPT Mộ Đức-Quãng Ngãi-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị (C) là đường cong như hình bên. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C), trục hoành và hai đường thẳng $x=0$, $x=2$ (phần tô đen) là

A. $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

B. $-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

C. $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

D. $\left|\int_0^2 f(x)\,dx\right|$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào hình vẽ ta nhận thấy: khi $x\in(0;1)$ thì $f(x)>0$, khi $x\in(1;2)$ thì $f(x)<0$.

Vậy $S=\int_0^1 f(x)\,dx-\int_1^2 f(x)\,dx$.

Câu 83: (THPT Mộ Đức-Quãng Ngãi-lần 1 năm 2017-2018) Tính tích phân: $I=\int\limits_1^2 \frac{x+1}{x}dx$.

A. $I=1-\ln 2$. **B.** $I=2\ln 2$. **C.** $I=1+\ln 2$. **D.** $I=\frac{7}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $I=\int\limits_1^2 \frac{x+1}{x}dx=\int\limits_1^2\left(1+\frac{1}{x}\right)dx=\left(x+\ln x\right)\Big|_1^2=1+\ln 2$.

Câu 84: (THPT Mộ Đức-Quãng Ngãi-lần 1 năm 2017-2018) Biết rằng $\int\limits_2^3 x\ln x\,dx=m\ln 3+n\ln 2+p$, trong đó m, n, $p\in\mathbb{Q}$. Khi đó số m là

A. $\frac{9}{2}$. **B.** 18. **C.** 9. **D.** $\frac{27}{4}$.

Lời giải

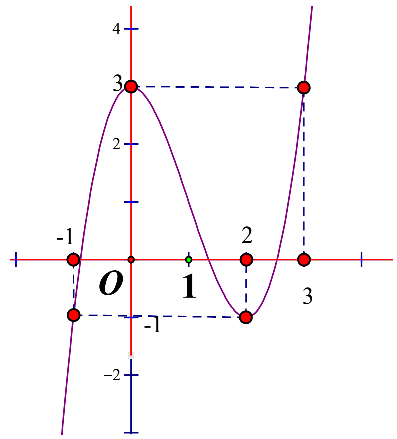
Chọn A

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ dv=xdx\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}du=dx\\ v=\frac{x^2}{2}\end{cases}$

$$\Rightarrow\int\limits_2^3 x\ln x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_2^3-\int\limits_2^3\frac{x^2}{2}dx=\frac{9}{2}\ln 3-2\ln 2-\frac{x^3}{6}\Big|_2^3=\frac{9}{2}\ln 3-2\ln 2-\frac{19}{6}\Rightarrow\begin{cases}m=\frac{9}{2}\\ n=-2\\ p=-\frac{19}{6}\end{cases}$$

Vậy $m=\frac{9}{2}$.

Câu 85: (THPT Mộ Đức-Quãng Ngãi-lần 1 năm 2017-2018) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hình bên. Tính tích phân $I=\int\limits_1^2 f'(2x-1)\,dx$.



A. $I=-2$.
B. $I=-1$.
C. $I=1$.
D. $I=2$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị hàm số ta có đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ đi qua các điểm $\left(-1;-1\right)$, $\left(0;3\right)$, $\left(2;-1\right)$, $\left(3;3\right)$ nên hàm số $y=f\left(x\right)=x^3-3x^2+3$.

Ta có: $I=\int\limits_1^2 f'\left(2x-1\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_1^2 f'\left(2x-1\right)\mathrm{d}\left(2x-1\right)=\frac{1}{2}f\left(2x-1\right)\Big|_1^2=\frac{1}{2}\left[f\left(3\right)-f\left(1\right)\right]=1$

Câu 86: (THPT Hoàng Hoa Thám-Hưng Yên-lần 1 năm 2017-2018) Chọn mệnh đề đúng?

A. $\int\sin\left(3-5x\right)\mathrm{d}x=5\cos\left(3-5x\right)+C$.
B. $\int\sin\left(3-5x\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{5}\cos\left(3-5x\right)+C$.
C. $\int\sin\left(3-5x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\cos\left(5x-3\right)+C$.
D. $\int\sin\left(3-5x\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\cos\left(3-5x\right)+C$.

Lời giải

Chọn C

$\int\sin\left(3-5x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\cos\left(3-5x\right)+C=\cos\left(5x-3\right)+C$.

Câu 87: (THPT Hoàng Hoa Thám-Hưng Yên-lần 1 năm 2017-2018) Tính diện tích miền hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2-2x$, $y=0$, $x=-10$, $x=10$.

A. $S=\frac{2000}{3}$.
B. $S=2008$.
C. $S=\frac{2008}{3}$.
D. 2000.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y=x^2-2x$ và $y=0$ là $x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Trên đoạn $\left[-10;10\right]$ ta có

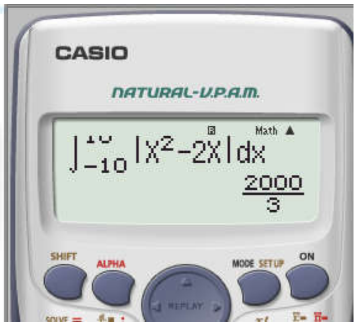
$x^2-2x\ge 0$, $\forall x\in\left[-10;0\right]$ và $\left[2;10\right]$.

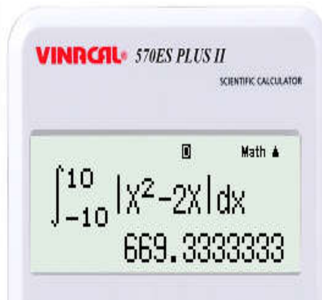
$x^2-2x\le 0$, $\forall x\in\left[0;2\right]$.

Do đó $S=\int\limits_{-10}^{10}\left|x^2-2x\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-10}^{0}\left(x^2-2x\right)\mathrm{d}x-\int\limits_{0}^{2}\left(x^2-2x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{2}^{10}\left(x^2-2x\right)\mathrm{d}x=\frac{2008}{3}$ (đvdt).

Nhận xét:

Nếu học sinh sử dụng MTCT tính tích phân mà không chia khoảng thì có sự sai khác về kết quả giữa máy **casio** và **vinacal. Trong trường hợp này máy vinacal cho đáp số đúng.**





Câu 88: (THPT Hoàng Hoa Thám-Hưng Yên-lần 1 năm 2017-2018) Cho hàm số $f\left(x\right)=2017\mathrm{e}^{x^2-1}$ và biểu thức $T=f'\left(x\right)-2xf\left(x\right)+\dfrac{1}{2017}f\left(1\right)-f'\left(1\right)$. Chọn mệnh đề đúng?

A. $T=-4033$. **B.** $T=-4035$. **C.** $T=4033$. **D.** $T=-1$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Đạo hàm $f'\left(x\right)=2017.\left(\mathrm{e}^{x^2-1}\right)'=2017.\left(x^2-1\right)'.\mathrm{e}^{x^2-1}=2017.2x.\mathrm{e}^{x^2-1}$.

Ta có $f'\left(1\right)=4034$ và $f\left(1\right)=2017$.

Do đó $T=2017.2x.\mathrm{e}^{x^2-1}-2x.2017\mathrm{e}^{x^2-1}+\dfrac{1}{2017}.2017-4034=-4033$.

Câu 89: (THPT Hoàng Hoa Thám-Hưng Yên-lần 1 năm 2017-2018) Biết $\int\limits_2^3\dfrac{5x+12}{x^2+5x+6}\mathrm{d}x=a\ln2+b\ln5+c\ln6$. Tính $S=3a+2b+c$.

A. 3. **B.** -14. **C.** -2. **D.** -11.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\dfrac{5x+12}{x^2+5x+6}=\dfrac{5x+12}{\left(x+2\right)\left(x+3\right)}=\dfrac{A}{x+2}+\dfrac{B}{x+3}=\dfrac{\left(A+B\right)x+3A+2B}{x^2+5x+6}$.

$\begin{cases}A+B=5\\3A+2B=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=2\\B=3\end{cases}$.

Nên $\int\limits_2^3\dfrac{5x+12}{x^2+5x+6}\mathrm{d}x=\int\limits_2^3\dfrac{2}{x+2}\mathrm{d}x+\int\limits_2^3\dfrac{3}{x+3}\mathrm{d}x=2\ln\left|x+2\right|\Big|_2^3+3\ln\left|x+3\right|\Big|_2^3$

$=3\ln6-\ln5-2\ln4=-4\ln2-\ln5+3\ln6$. Vậy $S=3a+2b+c=-11$.

Câu 1: **(SGD Bà Rịa Vũng Tàu-đề 1 năm 2017-2018)** Hàm số nào sau đây không phải là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=(2x-3)^3$?

A. $F(x)=\dfrac{(2x-3)^4}{8}+8$. **B.** $F(x)=\dfrac{(2x-3)^4}{8}-3$.

C. $F(x)=\dfrac{(2x-3)^4}{8}$. **D.** $F(x)=\dfrac{(2x-3)^4}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int (2x-3)^3\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}.\dfrac{(2x-3)^4}{4}+C$.

Câu 2: **(THPT Lê Quý Đôn-Hà Nội năm 2017-2018)** Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{5}{2}$. **B.** $I=\dfrac{3}{2}$. **C.** $I=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{9}{20}$. **D.** $I=\dfrac{9}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\cos x \Rightarrow \mathrm{d}t=-\sin x\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$; $x=\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow t=\dfrac{1}{2}$.

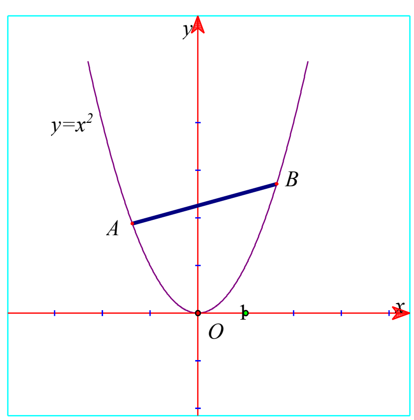
Khi đó: $I=\int_1^{\frac{1}{2}}\dfrac{-1}{t^3}\mathrm{d}t=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\dfrac{1}{t^3}\mathrm{d}t=\left.\dfrac{-1}{2t^2}\right|_{\frac{1}{2}}^{1}=-\dfrac{1}{2}+2=\dfrac{3}{2}$.

Câu 3: **(THPT Lê Quý Đôn-Hà Nội năm 2017-2018)** Cho parabol $(P): y=x^2$ và hai điểm A, B thuộc (P) sao cho $AB=2$. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng AB.

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{4}{3}$. **C.** $\dfrac{3}{4}$. **D.** $\dfrac{5}{6}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi $A(a;a^2)$ và $B(b;b^2)$ là hai điểm thuộc (P) sao cho $AB=2$.

Không mất tính tổng quát giả sử $a<b$.

Theo giả thiết ta có $AB=2$ nên $(b-a)^2+(b^2-a^2)^2=4 \Leftrightarrow (b-a)^2\left[(b-a)^2+1\right]=4$.

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm A và B là $y=(b+a)x-ab$.

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng AB ta có

$$S=\int_a^b\left[(a+b)x-ab-x^2\right]\mathrm{d}x=\left[(a+b)\frac{x^2}{2}-abx-\frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_a^b=\frac{(b-a)^3}{6}.$$

Mặt khác $(b-a)^2\left[(b-a)^2+1\right]=4$ nên $|b-a|=b-a\le 2$ do $(b-a)^2+1\ge 1$.

Vậy $S=\dfrac{(b-a)^3}{6}\le\dfrac{2^3}{6}$. Vậy $S_{\max}=\dfrac{4}{3}$.

Câu 4: (THPT Lê Quý Đôn-Hà Nội năm 2017-2018) Tích phân $I=\displaystyle\int_0^1\frac{(x-1)^2}{x^2+1}\mathrm{d}x=a\ln b+c$, trong đó a, b, c là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $a+b+c$?

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

$$I=\int_0^1\frac{(x-1)^2}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int_0^1\left(1-\frac{2x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x=\left(x-\ln\left|x^2+1\right|\right)\Big|_0^1=1-\ln 2.$$

Khi đó $a=-1$, $b=2$, $c=1$.

Vậy $a+b+c=2$.

Câu 5: (THPT Hà Huy Tập-Hà Tĩnh-lần 2 năm 2017-2018) Nguyên hàm của $f(x)=\sin 2x.\mathrm{e}^{\sin^2 x}$ là

A. $\sin^2 x.\mathrm{e}^{\sin^2 x-1}+C$. **B.** $\dfrac{\mathrm{e}^{\sin^2 x+1}}{\sin^2 x+1}+C$. **C.** $\mathrm{e}^{\sin^2 x}+C$. **D.** $\dfrac{\mathrm{e}^{\sin^2 x-1}}{\sin^2 x-1}+C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int\sin 2x.\mathrm{e}^{\sin^2 x}dx=\int\mathrm{e}^{\sin^2 x}\mathrm{d}\left(\sin^2 x\right)=\mathrm{e}^{\sin^2 x}+C$

Câu 6: (THPT Hà Huy Tập-Hà Tĩnh-lần 2 năm 2017-2018) Nguyên hàm của $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x.\ln x}$ là

A. $\displaystyle\int\frac{1+\ln x}{x.\ln x}\mathrm{d}x=\ln|\ln x|+C$. **B.** $\displaystyle\int\frac{1+\ln x}{x.\ln x}\mathrm{d}x=\ln\left|x^2.\ln x\right|+C$.

C. $\displaystyle\int\frac{1+\ln x}{x.\ln x}\mathrm{d}x=\ln|x+\ln x|+C$. **D.** $\displaystyle\int\frac{1+\ln x}{x.\ln x}\mathrm{d}x=\ln|x.\ln x|+C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $I=\int f(x)\mathrm{d}x=\displaystyle\int\frac{1+\ln x}{x.\ln x}\mathrm{d}x$.

Đặt $x\ln x=t\Rightarrow(\ln x+1)\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$. Khi đó ta có

$$I=\int\frac{1+\ln x}{x.\ln x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\ln|t|+C=\ln|x.\ln x|+C.$$

Câu 7: (THPT Hà Huy Tập-Hà Tĩnh-lần 2 năm 2017-2018) Khẳng định nào đây **sai.**

A. $\int \frac{2}{2x+3}\mathrm{d}x=\ln|2x+3|+C.$

B. $\int \tan x\mathrm{d}x=-\ln|\cos x|+C.$

C. $\int \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{2x}+C.$

D. $\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\sqrt{x}+C.$

Lời giải

Chọn C

$\int \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+C.$

Câu 8: (THPT Lý Thái Tổ-Bắc Ninh-lần 1 năm 2017-2018) Cho tích phân $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos x+2}\mathrm{d}x=a\ln 5+b\ln 2$ với $a,\ b\in\mathbb{Z}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $2a+b=0.$ **B.** $a-2b=0.$ **C.** $2a-b=0.$ **D.** $a+2b=0.$

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\cos x+2\Rightarrow \mathrm{d}t=-\sin x\mathrm{d}x$

Đổi cận $x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow t=\frac{5}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=2$

$\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos x+2}\mathrm{d}x=-\int\limits_{\frac{5}{2}}^{2}\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\int\limits_{2}^{\frac{5}{2}}\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\ln t\Big|_{2}^{\frac{5}{2}}=\ln\frac{5}{2}-\ln 2=\ln 5-2\ln 2$

Vậy ta được $a=1;b=-2$.

Câu 9: (THPT Lý Thái Tổ-Bắc Ninh-lần 1 năm 2017-2018) Tính nguyên hàm $I=\int\frac{2x^2-7x+5}{x-3}\mathrm{d}x$.

A. $I=x^2-x+2\ln|x-3|+C.$

B. $I=x^2-x-2\ln|x-3|+C.$

C. $I=2x^2-x+2\ln|x-3|+C.$

D. $I=2x^2-x-2\ln|x-3|+C.$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $I=\int\frac{2x^2-7x+5}{x-3}\mathrm{d}x=\int\left(2x-1+\frac{2}{x-2}\right)\mathrm{d}x=x^2-x+2\ln|x-2|+C$.

Câu 10: (THPT Lý Thái Tổ-Bắc Ninh-lần 1 năm 2017-2018) Cho hai tích phân $\int\limits_{-2}^{5}f(x)\mathrm{d}x=8$ và $\int\limits_{5}^{-2}g(x)\mathrm{d}x=3$. Tính $I=\int\limits_{-2}^{5}\left[f(x)-4g(x)-1\right]\mathrm{d}x$.

A. $I=-11$. **B.** $I=13$. **C.** $I=27$. **D.** $I=3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $I=\int\limits_{-2}^{5}\left[f(x)-4g(x)-1\right]\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{5}f(x)\mathrm{d}x+4\int\limits_{5}^{-2}g(x)\mathrm{d}x-x\Big|_{-2}^{5}=8+4.3-(5+2)=13$.

Câu 11: (THPT Lý Thái Tổ-Bắc Ninh-lần 1 năm 2017-2018) Tính tích phân $I=\int_0^{\pi} x^2\cos 2x\mathrm{d}x$ bằng cách đặt $\begin{cases} u=x^2 \\ \mathrm{d}v=\cos 2x\mathrm{d}x \end{cases}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $I=\frac{1}{2}x^2\sin 2x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi} x\sin 2x\mathrm{d}x$.

B. $I=\frac{1}{2}x^2\sin 2x\Big|_0^{\pi}-2\int_0^{\pi} x\sin 2x\mathrm{d}x$.

C. $I=\frac{1}{2}x^2\sin 2x\Big|_0^{\pi}+2\int_0^{\pi} x\sin 2x\mathrm{d}x$.

D. $I=\frac{1}{2}x^2\sin 2x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi} x\sin 2x\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\begin{cases} u=x^2 \\ \mathrm{d}v=\cos 2x\mathrm{d}x \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \mathrm{d}u=2x\mathrm{d}x \\ v=\frac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$.

Khi đó: $I=\int_0^{\pi} x^2\cos 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\sin 2x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi} x\sin 2x\mathrm{d}x$.

Câu 12: (THPT Lý Thái Tổ-Bắc Ninh-lần 1 năm 2017-2018) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)-2018f(x)=2018.x^{2017}.\mathrm{e}^{2018x}$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2018$. Tính giá trị $f(1)$.

A. $f(1)=2019\mathrm{e}^{2018}$. **B.** $f(1)=2018.\mathrm{e}^{-2018}$. **C.** $f(1)=2018.\mathrm{e}^{2018}$. **D.** $f(1)=2017.\mathrm{e}^{2018}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f'(x)-2018f(x)=2018.x^{2017}.\mathrm{e}^{2018x}\Leftrightarrow\frac{f'(x)-2018.f(x)}{\mathrm{e}^{2018x}}=2018.x^{2017}$

$\Leftrightarrow\int_0^1\frac{f'(x)-2018.f(x)}{\mathrm{e}^{2018x}}\mathrm{d}x=\int_0^1 2018.x^{2017}\mathrm{d}x\quad(1)$

Xets $I=\int_0^1\frac{f'(x)-2018.f(x)}{\mathrm{e}^{2018x}}\mathrm{d}x=\int_0^1 f'(x).\mathrm{e}^{-2018x}\mathrm{d}x-\int_0^1 2018.f(x).\mathrm{e}^{-2018x}\mathrm{d}x$

Xét $I_1=\int_0^1 2018.f(x).\mathrm{e}^{-2018x}\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases} u=f(x) \\ \mathrm{d}v=2018.\mathrm{e}^{-2018x}\mathrm{d}x \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x \\ v=-\mathrm{e}^{-2018x} \end{cases}$.

Do đó $I_1=f(x).\left(-\mathrm{e}^{-2018x}\right)\Big|_0^1+\int_0^1 f'(x).\mathrm{e}^{-2018x}\mathrm{d}x\Rightarrow I=f(1).\mathrm{e}^{-2018x}-2018$

Khi đó $(1)\Leftrightarrow f(1).\mathrm{e}^{-2018x}-2018=x^{2018}\Big|_0^1\Rightarrow f(1)=2019.\mathrm{e}^{2018}$.

Câu 13: (THPT Phan Châu Trinh-DakLak-lần 2 năm 2017-2018) Tính tích phân $I=\int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{1}{2}$. **B.** $I=\frac{\mathrm{e}^2-2}{2}$. **C.** $I=\frac{\mathrm{e}^2+1}{4}$. **D.** $I=\frac{\mathrm{e}^2-1}{4}$.

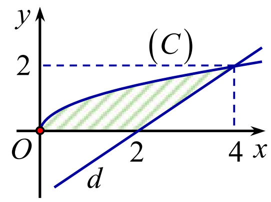
Lời giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \Rightarrow \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = x\mathrm{d}x \Rightarrow v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$.

$\Rightarrow I = \frac{1}{2}x^2 \ln x\Big|_1^{\mathrm{e}} - \frac{1}{2}\int_1^{\mathrm{e}} x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 \ln x\Big|_1^{\mathrm{e}} - \frac{1}{4}x^2\Big|_1^{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^2 - 1\right) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^2 + \frac{1}{4} = \frac{\mathrm{e}^2 + 1}{4}$.

Câu 14: **(THPT Phan Châu Trinh-DakLak-lần 2 năm 2017-2018)** Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi $(C): y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$ và trục hoành (hình vẽ). Diện tích của (H) bằng



A. $\frac{10}{3}$. **B.** $\frac{16}{3}$. **C.** $\frac{7}{3}$. **D.** $\frac{8}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ và $y = x - 2$:

$\sqrt{x} = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x = (x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4$.

Diện tích hình phẳng (H) là

$$S = \int_0^2 \sqrt{x}\mathrm{d}x + \int_2^4 \left|\sqrt{x} - (x-2)\right|\mathrm{d}x = \int_0^2 \sqrt{x}\mathrm{d}x + \int_2^4 \left(\sqrt{x} - x + 2\right)\mathrm{d}x = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_0^2 + \left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Bigg|_2^4 = \frac{10}{3}.$$

Câu 15: **(THPT Kinh Môn-Hải Dương lần 1 năm 2017-2018)** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^x + 2x$ thỏa mãn $F(0) = \frac{3}{2}$. Tìm $F(x)$.

A. $F(x) = \mathrm{e}^x + x^2 + \frac{5}{2}$. **B.** $F(x) = 2\mathrm{e}^x + x^2 - \frac{1}{2}$.

C. $F(x) = \mathrm{e}^x + x^2 + \frac{3}{2}$. **D.** $F(x) = \mathrm{e}^x + x^2 + \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$F(x) = \int\left(\mathrm{e}^x + 2x\right)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + x^2 + C$.

$F(0) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \mathrm{e}^0 + C = \frac{3}{2} \Leftrightarrow C = \frac{1}{2}$.

$F(x) = \mathrm{e}^x + x^2 + \frac{1}{2}$.

Câu 16: **(THPT Kinh Môn-Hải Dương lần 1 năm 2017-2018)** Cho lập phương có cạnh bằng a và một hình trụ có hai đáy là hai hình tròn nội tiếp hai mặt đối diện của hình lập phương. Gọi S_1 là diện tích 6 mặt của hình lập phương, S_2 là diện tích xung quanh của hình trụ. Hãy tính tỉ số $\frac{S_2}{S_1}$.

A. $\frac{S_2}{S_1}=\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{S_2}{S_1}=\frac{\pi}{2}$. **C.** $\frac{S_2}{S_1}=\pi$. **D.** $\frac{S_2}{S_1}=\frac{\pi}{6}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $S_1=6a^2$, $S_2=2\pi rh=\pi a^2$

Vậy $\frac{S_1}{S_2}=\frac{6a^2}{\pi a^2}=\frac{6}{\pi}\Rightarrow\frac{S_2}{S_1}=\frac{\pi}{6}$

Câu 17: (THPT Kinh Môn-Hải Dương lần 1 năm 2017-2018) Cho hàm số $y=f(x)$ với $f(0)=f(1)=1$. Biết rằng: $\int\limits_0^1 e^x\left[f(x)+f'(x)\right]dx=ae+b$ Tính $Q=a^{2017}+b^{2017}$.

A. $Q=2^{2017}+1$. **B.** $Q=2$. **C.** $Q=0$. **D.** $Q=2^{2017}-1$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\ dv=e^x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=f'(x)dx\\ v=e^x\end{cases}$.

$\int\limits_0^1 e^x\left[f(x)+f'(x)\right]dx=e^x f(x)\Big|_1^2-\int\limits_0^1 e^x f'(x)dx+\int\limits_0^1 e^x f'(x)dx=ef(1)-f(0)=e-1$.

Do đó $a=1$, $b=-1$.

Suy ra $Q=a^{2017}+b^{2017}=1^{2017}+(-1)^{2017}=0$.

Vậy $Q=0$.

Câu 18: (THPT Kinh Môn-Hải Dương lần 1 năm 2017-2018) Cho hàm $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[2;3]$ đồng thời $f(2)=2$, $f(3)=5$. Tính $\int\limits_2^3 f'(x)dx$ bằng

A. -3. **B.** 7. **C.** 10 **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int\limits_2^3 f'(x)dx=f(x)\Big|_2^3=f(3)-f(2)=3$.

Câu 19: (THPT Chuyên Lam Sơn-Thanh Hóa-lần 2 năm 2017-2018) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin 3x$ là

A. $-\frac{1}{3}\cos 3x+C$. **B.** $\frac{1}{3}\cos 3x+C$. **C.** $3\cos 3x+C$. **D.** $-3\cos 3x+C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int\sin 3x dx=\frac{1}{3}\int\sin 3x d3x=-\frac{1}{3}\cos 3x+C$.

Câu 20: (THPT Chuyên Lam Sơn-Thanh Hóa-lần 2 năm 2017-2018) Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int\limits_{-5}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x = 9$. Tính tích phân $\int\limits_{0}^{2}\left[f\left(1-3x\right)+9\right]\mathrm{d}x$.

A. 27. **B.** 21. **C.** 15. **D.** 75.

Lời giải

Chọn B

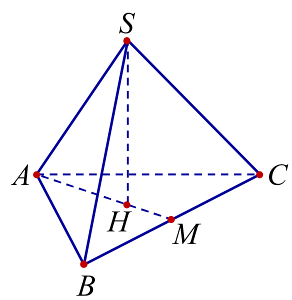
Đặt $t = 1-3x \Rightarrow \mathrm{d}t = -3\mathrm{d}x$.

Với $x = 0 \to t = 1$ và $x = 2 \to t = -5$.

Ta có $\int\limits_{0}^{2}\left[f\left(1-3x\right)+9\right]\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{2} f\left(1-3x\right)\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{2} 9\mathrm{d}x = \int\limits_{1}^{-5}\left[f\left(t\right)\right]\frac{\mathrm{d}t}{-3} + 9x\Big|_{0}^{2} = \frac{1}{3}\int\limits_{-5}^{1}\left[f\left(x\right)\right]\mathrm{d}x + 18$

$= \frac{1}{3}.9 + 18 = 21$.

Câu 21: (THPT Chuyên Lam Sơn-Thanh Hóa-lần 2 năm 2017-2018) Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng 1 và chiều cao $h = \sqrt{3}$ (hình vẽ). Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là



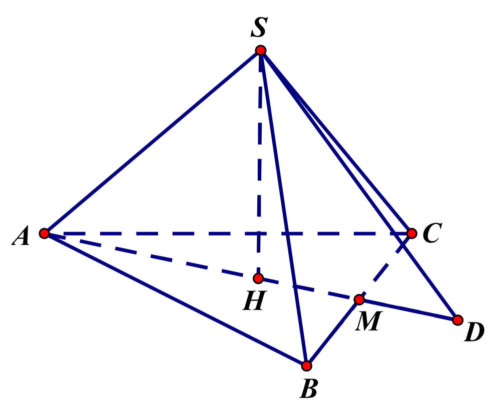
A. $\frac{100\pi}{3}$. **B.** $\frac{25\pi}{3}$. **C.** $\frac{100\pi}{27}$. **D.** 100π.

Lời giải

Chọn C

* Gọi D là điểm đối xứng của A qua tâm H khi đó D thuộc mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

* Do $\left(SAD\right)$ là mặt phẳng đối xứng của hình chóp nên đường tròn ngoại tiếp tam giác SAD là đường tròn lớn của mặt cầu.



* Ta có: $AD = \frac{4}{3}AM = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $SA = SD = \sqrt{SH^2 + AH^2} = \sqrt{\frac{10}{3}}$, bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là

$$R = \frac{SA.SD.AD}{4S_{\Delta SAD}} = \frac{SA.SD.AD}{2AD.SH} = \frac{SA^2}{2SH} = \frac{5}{3\sqrt{3}}$$

Diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = \dfrac{100\pi}{27}$.

Câu 22: (THPT Chuyên Lam Sơn-Thanh Hóa-lần 2 năm 2017-2018) Tích phân $\int\limits_0^1 \dfrac{1}{2x+5}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{7}{5}$. **B.** $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{7}{5}$. **C.** $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{7}$. **D.** $-\dfrac{4}{35}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int\limits_0^1 \dfrac{1}{2x+5}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 \dfrac{1}{2x+5}\mathrm{d}(2x+5) = \dfrac{1}{2}\ln(2x+5)\Big|_0^1 = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{7}{5}$.

Câu 23: (THPT Can Lộc-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Cho biết $\int x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}(ax+b)+C$, trong đó $a,b\in\mathbb{Z}$ và C là hằng số bất kì. Mệnh đề nào dưới đây là đúng.

A. $a+2b=0$. **B.** $b>a$. **C.** ab. **D.** $2a+b=0$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $u = x \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}x$,

$\mathrm{d}v = \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x \Rightarrow v = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2}$.

Ta có $\int x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = \dfrac{x\mathrm{e}^{2x}}{2} - \int\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\mathrm{d}x = \dfrac{x\mathrm{e}^{2x}}{2} - \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{4} + C = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{4}(2x-1)+C$. Suy ra $a=2$, $b=-1$.

Câu 24: (THPT Can Lộc-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x)>0$ khi $x\in[0;5]$. Biết $f(x).f(5-x)=1$, tính tích phân $I=\int_0^5 \dfrac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}$.

A. $I=\dfrac{5}{4}$. **B.** $I=\dfrac{5}{3}$. **C.** $I=\dfrac{5}{2}$. **D.** $I=10$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $x=5-t \Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$

$x=0\Rightarrow t=5$; $x=5\Rightarrow t=0$

$I=-\int_5^0 \dfrac{\mathrm{d}t}{1+f(5-t)} = \int_0^5 \dfrac{f(t)\mathrm{d}t}{1+f(t)}$ (do $f(5-t)=\dfrac{1}{f(t)}$)

$\Rightarrow 2I=\int_0^5 \mathrm{d}t = 5 \Rightarrow I=\dfrac{5}{2}$.

Câu 25: (THPT Can Lộc-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Biết rằng hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$ thỏa mãn $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\dfrac{7}{2}$, $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=-2$ và $\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{13}{2}$ (với a, b, $c\in\mathbb{R}$). Tính giá trị của biểu thức $P=a+b+c$.

A. $P=-\dfrac{3}{4}$. **B.** $P=-\dfrac{4}{3}$. **C.** $P=\dfrac{4}{3}$. **D.** $P=\dfrac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_0^d f(x)\,dx = \left(\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx\right)\Big|_0^d = \frac{a}{3}d^3 + \frac{b}{2}d^2 + cd$.

Do đó: $\begin{cases} \int_0^1 f(x)\,dx = -\frac{7}{2} \\ \int_0^2 f(x)\,dx = -2 \\ \int_0^3 f(x)\,dx = \frac{13}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = -\frac{7}{2} \\ \frac{8}{3}a + 2b + 2c = -2 \\ 9a + \frac{9}{2}b + 3c = \frac{13}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = -\frac{16}{3} \end{cases}$. Vậy $P = a + b + c = -\frac{4}{3}$

Câu 26: (THPT Hồng Lĩnh-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Tích phân $\int_0^2 2e^{2x}\,dx$ bằng

A. e^4. **B.** $e^4 - 1$. **C.** $4e^4$. **D.** $3e^4 - 1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $I = \int_0^2 2e^{2x}\,dx = \int_0^2 e^{2x}\,d2x = e^{2x}\Big|_0^2 = e^4 - 1$.

Câu 27: (THPT Hồng Lĩnh-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Tích phân $\int_0^2 \min\left\{x^2, 3x-2\right\}dx$ bằng

A. $\frac{-2}{3}$. **B.** $\frac{11}{6}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{17}{6}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $x^2 = 3x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Suy ra $x^2 - 3x + 2$ âm trên khoảng $(0,1)$; dương trên $(1,2)$.

Vậy $\min\limits_{[0,1]}\left\{x^2, 3x-2\right\} = 3x - 2$, $\min\limits_{[1,2]}\left\{x^2, 3x-2\right\} = x^2$

Vậy $\int_0^2 \min\left\{x^2, 3x-2\right\}dx = \int_0^1 (3x-2)\,dx + \int_1^2 x^2\,dx = -\frac{1}{2} + \frac{7}{3} = \frac{11}{6}$.

Câu 28: (THPT Hồng Lĩnh-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ và tiếp tuyến với đồ thị tại $M(4,2)$ và trục hoành là

A. $\frac{8}{3}$. **B.** $\frac{3}{8}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi d là phương trình tiếp tuyến của hàm số $y = \sqrt{x}$ tại $M(4,2) \Rightarrow d: y = \frac{1}{4}x + 1$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, d và trục Ox là

$S = \int_{-4}^0 \left(\frac{1}{4}x + 1\right)dx + \int_0^4 \left(\frac{1}{4}x + 1 - \sqrt{x}\right)dx = \frac{8}{3}$.

Câu 29: (THPT Lê Quý Đôn-Hải Phòng lần 1 năm 2017-2018) Tìm $\int \frac{6x+2}{3x-1}\mathrm{d}x$.

A. $F(x)=2x+\frac{4}{3}\ln|3x-1|+C$. **B.** $F(x)=2x+4\ln|3x-1|+C$.

C. $F(x)=\frac{4}{3}\ln|3x-1|+C$. **D.** $F(x)=2x+4\ln(3x-1)+C$.

Lời giải

Chọn A

$\int \frac{6x+2}{3x-1}\mathrm{d}x=\int\left(2+\frac{4}{3x-1}\right)\mathrm{d}x=2x+\frac{4}{3}\ln|3x-1|+C$.

Câu 30: (THPT Lê Quý Đôn-Hải Phòng lần 1 năm 2017-2018) Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\sin 3x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$.

A. $F(x)=-\frac{\cos 3x}{3}+\frac{5}{3}$. **B.** $F(x)=-\frac{\cos 3x}{3}+2$.

C. $F(x)=-\cos 3x+2$. **D.** $F(x)=\cos 3x+2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int \sin 3x\mathrm{d}x=-\frac{\cos 3x}{3}+C$, vì $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$ nên $C=2$.

Câu 31: (THPT Lê Quý Đôn-Hải Phòng lần 1 năm 2017-2018) Cho $\int\left(\frac{ax+b+ce^x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\right)\mathrm{d}x=9\sqrt{x^2+1}+2\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+5e^x+C$. Tính giá trị biểu thức $M=a+b+c$.

A. 6. **B.** 20. **C.** 16. **D.** 10.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\left[9\sqrt{x^2+1}+2\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+5e^x\right]'=\frac{9x}{\sqrt{x^2+1}}+2\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}+5e^x=\frac{9x+2+5e^x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$.

Do đó $a=9$, $b=2$, $c=5$. Suy ra $M=a+b+c=16$.

Câu 32: (THPT Lê Quý Đôn-Quãng Trị-lần 1 năm 2017-2018) Tính tích phân $I=\int_1^{2^{2018}}\frac{\mathrm{d}x}{x}$.

A. $I=2018.\ln 2-1$. **B.** $I=2^{2018}$. **C.** $I=2018.\ln 2$. **C.** $I=2018$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $I=\ln|x|\Big|_1^{2^{2018}}=\ln\left(2^{2018}\right)-\ln 1=2018.\ln 2$.

Câu 33: (THPT Lê Quý Đôn-Quãng Trị-lần 1 năm 2017-2018) Cho biết $\int\limits_0^{\sqrt{7}}\frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^2}}\mathrm{d}x=\frac{m}{n}$ với $\frac{m}{n}$ là một phân số tối giản. Tính $m-7n$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 91.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\sqrt[3]{1+x^2}\Rightarrow t^3=1+x^2\Rightarrow 3t^2\mathrm{d}t=2x\mathrm{d}x\Rightarrow x\mathrm{d}x=\frac{3t^2\mathrm{d}t}{2}$.

Đổi cận: khi $x=0\Rightarrow t=1$; khi $x=\sqrt{7}\Rightarrow t=2$

$\int\limits_0^{\sqrt{7}}\frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^2}}\mathrm{d}x=\int\limits_1^2\frac{t^3-1}{t}.\frac{3t^2}{2}\mathrm{d}t=\frac{3}{2}.\int\limits_1^2\left(t^4-t\right)\mathrm{d}t=\frac{3}{2}.\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_1^2=\frac{141}{20}$.

$\Rightarrow m-7n=141-7.20=1$.

Câu 34: (THPT Chuyên Tiền Giang-lần 1 năm 2017-2018) Tìm hàm số $F(x)$ biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{x}$ và $F(1)=1$.

A. $F(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}$. **B.** $F(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{1}{3}$.

C. $F(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}2}+\frac{1}{2}$. **D.** $F(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $F(x)=\int\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

Đặt $t=\sqrt{x}$ suy ra $t^2=x$ và $\mathrm{d}x=2\mathrm{d}t$. Khi đó $I=\int t.2t\mathrm{d}t=\frac{2}{3}t^3+C\Rightarrow I=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$.

Vì $F(1)=1$ nên $C=\frac{1}{3}$.Vậy $F(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{1}{3}$.

Câu 35: (THPT Chuyên Tiền Giang-lần 1 năm 2017-2018) Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2-3z+4=0$. Tính $w=\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+iz_1z_2$.

A. $w=-\frac{3}{4}+2i$. **B.** $w=\frac{3}{4}+2i$. **C.** $w=2+\frac{3}{2}i$. **D.** $w=\frac{3}{2}+2i$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $w=\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+iz_1z_2\Leftrightarrow w=\frac{z_1+z_2}{z_1z_2}+iz_1z_2$.

Theo định lý Vi-et ta có $\begin{cases}z_1+z_2=\frac{3}{2}\\ z_1z_2=2\end{cases}$ khi đó ta có $w=\frac{3}{4}+2i$.

Câu 36: **(THPT Chuyên Tiền Giang-lần 1 năm 2017-2018)** Cho $F(x)=\frac{a}{x}(\ln x+b)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1+\ln x}{x^2}$, trong đó a, $b\in\mathbb{Z}$. Tính $S=a+b$.

A. $S=-2$. **B.** $S=1$. **C.** $S=2$. **D.** $S=0$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $I=\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1+\ln x}{x^2}\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}1+\ln x=u\\ \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\mathrm{d}v\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}u\\ -\frac{1}{x}=v\end{cases}$ khi đó

$I=-\frac{1}{x}(1+\ln x)+\int\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}(1+\ln x)-\frac{1}{x}+C=-\frac{1}{x}(\ln x+2)+C\Rightarrow a=-1;b=2$.

Vậy $S=a+b=1$.

Câu 37: **(THPT Phan Đình Phùng-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018)** Tích phân $I=\int\limits_0^2 x.\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$ là

A. $I=\frac{3\mathrm{e}^4-1}{4}$. **B.** $I=\frac{\mathrm{e}^4}{4}$. **C.** $I=\frac{1-3\mathrm{e}^4}{4}$. **D.** $I=\frac{3\mathrm{e}^4+1}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\end{cases}$.

$I=\frac{1}{2}x.\mathrm{e}^{2x}\Big|_0^2-\frac{1}{2}\int\limits_0^2\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x.\mathrm{e}^{2x}\Big|_0^2-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}\Big|_0^2=\mathrm{e}^4-\frac{1}{4}\mathrm{e}^4+\frac{1}{4}=\frac{3\mathrm{e}^4+1}{4}$.

Câu 38: **(THPT Phan Đình Phùng-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018)** Cho $G(t)=\int\limits_1^t\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x$. Khi đó $G'(t)$ bằng

A. $\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. **C.** $(t^2+1)\sqrt{t^2+1}$. **D.** $\sqrt{1+t^2}$.

Lời giải

Chọn D

Theo định nghĩa tích phân nếu gọi $F(x)=\int\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x$ thì $F'(x)=\sqrt{1+x^2}$

và $G(t)=\int\limits_1^t\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x=F(t)-F(1)$.

Do đó $G'(t)=F'(t)=\sqrt{1+t^2}$.

Câu 39: **(THPT Đức THọ-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018)** Biết $\int\limits_3^5 \frac{x^2+x+1}{x+1}\mathrm{d}x = a+\ln\frac{b}{2}$ với a, b là các số nguyên. Tính $S=b^2-a$.

A. $S=-1$. **B.** $S=1$. **C.** $S=-5$. **D.** $S=2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int\limits_3^5 \frac{x^2+x+1}{x+1}\mathrm{d}x = \int\limits_3^5 \left(x+\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \left.\left(\frac{x^2}{2}+\ln|x+1|\right)\right|_3^5 = 8+\ln\frac{3}{2}$.

Suy ra $a=8$, $b=3$, $S=3^2-8=1$.

Câu 40: **(THPT Chuyên Thái Bình-lần 4 năm 2017-2018)** Cho hàm số

$f(x)=x^4-4x^3+2x^2-x+1, \forall x\in\mathbb{R}$. Tính $\int\limits_0^1 f^2(x).f'(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{2}{3}$. **B.** 2. **C.** $-\frac{2}{3}$. **D.** -2.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int\limits_0^1 f^2(x).f'(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f^2(x).\mathrm{d}\left[f(x)\right] = \left.\frac{f^3(x)}{3}\right|_0^1 = \frac{f^3(1)-f^3(0)}{3} = -\frac{2}{3}$.

Câu 41: **(THPT Chuyên Thái Bình-lần 4 năm 2017-2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;5]$ và $f(5)=10$, $\int\limits_0^5 xf'(x)\mathrm{d}x=30$. Tính $\int\limits_0^5 f(x)\mathrm{d}x$.

A. 20. **B.** -30. **C.** -20. **D.** 70.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases} u=x \Rightarrow \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x \Rightarrow v=f(x) \end{cases}$

$\int\limits_0^5 x.f'(x)\mathrm{d}x = \left.\left(x.f(x)\right)\right|_0^5 - \int\limits_0^5 f(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow 30 = 5f(5) - \int\limits_0^5 f(x)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \int\limits_0^5 f(x)\mathrm{d}x = 5f(5)-30=20$.

Câu 42: **(THPT Chuyên Thái Bình-lần 4 năm 2017-2018)** Thể tích của vật tròn xoay có được khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm $y=\tan x$, trục Ox, đường thẳng $x=0$, đường thẳng $x=\frac{\pi}{3}$ quanh trục Ox là

A. $V=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$. **B.** $V=\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}$. **C.** $V=\pi\sqrt{3}+\frac{\pi^2}{3}$. **D.** $V=\pi\sqrt{3}-\frac{\pi^2}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Thể tích của vật tròn xoay là

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan^2 x\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\mathrm{d}x=\pi\left(\tan x-x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\pi\left(\tan\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=\pi\sqrt{3}-\frac{\pi^2}{3}.$$

Câu 43: (THPT Chuyên Thái Bình-lần 4 năm 2017-2018) Đường thẳng nào dưới đây là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3-2x}{x-1}$?

A. $y=-2$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=1$. **D.** $y=3$.

Lời giải

Chọn A

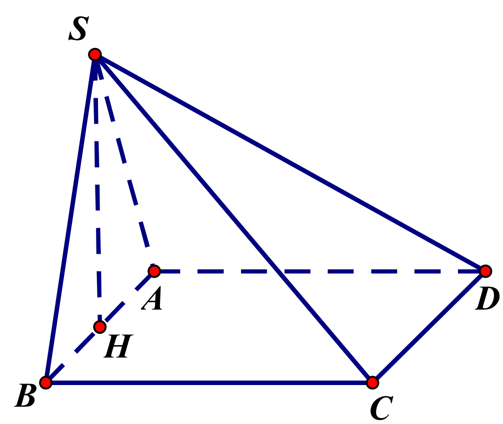
Ta có: $\lim\limits_{x\to\infty} y=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-2x}{x-1}=-2\Rightarrow y=-2$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 44: (THPT Chuyên Thái Bình-lần 4 năm 2017-2018) Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy, $SA=2a$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{15}}{6}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{15}}{12}$. **C.** $V=\dfrac{2a^3}{3}$. **D.** $V=2a^3$.

Lời giải

Chọn A



* Diện tích đáy là $S_{ABCD}=a^2$.

* Gọi H là trung điểm của AB ta có $SH\perp AB$. Do $SH\perp\left(ABCD\right)$ nên chiều cao hình chóp là $h=SH$.

* Xét tam giác SAH ta có: $SH=\sqrt{SA^2-AH^2}=\dfrac{a\sqrt{15}}{2}\Rightarrow h=\dfrac{a\sqrt{15}}{2}$.

* Thể tích hình chóp là $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\dfrac{a^3\sqrt{15}}{6}$.

Câu 45: (THPT Chuyên Thái Bình-lần 4 năm 2017-2018) Tính $I=\displaystyle\int_0^1\left(\frac{1}{2x+1}+3\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$.

A. $2+\ln\sqrt{3}$. **B.** $4+\ln 3$. **C.** $2+\ln 3$. **D.** $1+\ln\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $I=\int\limits_0^1\left(\frac{1}{2x+1}+3\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\frac{1}{2x+1}\mathrm{d}x+3\int\limits_0^1\sqrt{x}\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}\ln|2x+1|\Big|_0^1+3.\frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln 3+2=\ln\sqrt{3}+2$.

Câu 46: (THPT Chuyên Thái Bình-lần 4 năm 2017-2018) Số nghiệm của phương trình $2^{\log_5(x+3)}=x$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Đk: $x>-3$

Đặt $t=\log_5(x+3)\Rightarrow x=5^t-3$, phương trình đã cho trở thành

$2^t=5^t-3\Leftrightarrow 2^t+3=5^t\Leftrightarrow\left(\frac{2}{5}\right)^t+3.\left(\frac{1}{5}\right)^t=1$ (1)

Dễ thấy hàm số $f(t)=\left(\frac{2}{5}\right)^t+3.\left(\frac{1}{5}\right)^t$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và $f(1)=1$ nên phương trình (1) có nghiệm duy nhất $t=1$.

Với $t=1$, ta có $\log_5(x+3)=1\Leftrightarrow x=2$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=2$.

Câu 47: (THPT Chuyên Hùng Vương-Phú Thọ-lần 2 năm 2017-2018) Cho $\int\limits_0^4 f(x)\mathrm{d}x=16$. Tính $\int\limits_0^2 f(2x)\mathrm{d}x$

A. 16. **B.** 4. **C.** 32. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D

Xét tích phân $\int\limits_0^2 f(2x)\mathrm{d}x$ ta có

Đặt $2x=t\Rightarrow\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}t$. Khi $x=0$ thì $t=0$; khi $x=2$ thì $t=4$.

Do đó $\int\limits_0^2 f(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_0^4 f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\limits_0^4 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.16=8$.

Câu 48: (THPT Chuyên Hùng Vương-Phú Thọ-lần 2 năm 2017-2018) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(-2;3)$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên khoảng $(-2;3)$. Tính $I=\int\limits_{-1}^2\left[f(x)+2x\right]\mathrm{d}x$, biết $F(-1)=1$ và $F(2)=4$.

A. $I=6$. **B.** $I=10$. **C.** $I=3$. **D.** $I=9$.

Lời giải

Chọn A

$I=\int\limits_{-1}^2\left[f(x)+2x\right]\mathrm{d}x=F(x)\Big|_{-1}^2+x^2\Big|_{-1}^2=F(2)-F(-1)+(4-1)=4-1+3=6$.

Câu 49: (THPT Chuyên Hùng Vương-Phú Thọ-lần 2 năm 2017-2018) Biết $\int\limits_0^3 \frac{dx}{(x+2)(x+4)} = a\ln 2 + b\ln 5 + c\ln 7$, $(a,b,c \in \mathbb{Q})$. Giá trị của biểu thức $2a+3b-c$ bằng

A. 5. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

$\int\limits_0^3 \frac{dx}{(x+2)(x+4)} = \frac{1}{2}\int\limits_0^3 \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4}\right)dx = \frac{1}{2}\left(\ln|x+2| - \ln|x+4|\right)\Big|_0^3 = \frac{1}{2}\ln 5 - \frac{1}{2}\ln 7 + \frac{1}{2}\ln 2$.

Khi đó: $2a+3b-c = 2.\frac{1}{2} + 3.\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3$.

Câu 50: (SGD Hà Nội-lần 11 năm 2017-2018) Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{x}{4}$, $y=0$, $x=1$, $x=4$ quay quanh trục Ox bằng

A. $\frac{15}{16}$. **B.** $\frac{15\pi}{8}$. **C.** $\frac{21}{16}$. **D.** $\frac{21\pi}{16}$.

Lời giải

Chọn D

$V = \pi\int\limits_1^4 \frac{x^2}{16}dx = \pi\frac{x^3}{48}\Big|_1^4 = \frac{21}{16}\pi$.

Câu 51: (SGD Hà Nội-lần 11 năm 2017-2018) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2\sqrt{4+x^3}$ là

A. $\frac{2}{9}\sqrt{\left(4+x^3\right)^3} + C$. **B.** $2\sqrt{4+x^3} + C$. **C.** $\frac{1}{9}\sqrt{\left(4+x^3\right)^3} + C$. **D.** $2\sqrt{\left(4+x^3\right)^3} + C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int x^2\sqrt{4+x^3}dx = \frac{1}{3}\int\sqrt{4+x^3}\,d\left(4+x^3\right) \to \frac{1}{3}\int\left(4+x^3\right)^{\frac{1}{2}}d\left(4+x^3\right) = \frac{1}{3}.\frac{2}{3}\left(4+x^3\right)^{\frac{3}{2}} + C$

$= \frac{2}{9}\sqrt{\left(4+x^3\right)^3} + C$.

Chú ý: Trong lời giải viết dấu "$\to$" thay cho dấu "$=$" vì $\sqrt{4+x^3} \neq \left(4+x^3\right)^{\frac{1}{2}}$ nhưng ta mượn tạm công thức nguyên hàm của $\left(4+x^3\right)^{\frac{1}{2}}$ để tính nguyên hàm của $\sqrt{4+x^3}$.

Câu 52: (SGD Hà Nội-lần 11 năm 2017-2018) Tích phân $\int\limits_0^{100} x.e^{2x}dx$ bằng

A. $\frac{1}{4}\left(199e^{200} - 1\right)$. **B.** $\frac{1}{2}\left(199e^{200} - 1\right)$. **C.** $\frac{1}{4}\left(199e^{200} + 1\right)$. **D.** $\frac{1}{2}\left(199e^{200} + 1\right)$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

Khi đó:

$$\int_0^{100} x.e^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x}\Big|_0^{100} - \frac{1}{2}\int_0^{100} e^{2x}dx = 50e^{200} - \frac{1}{4}e^{2x}\Big|_0^{100} = 50e^{200} - \frac{1}{4}e^{200} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\left(199e^{200}+1\right).$$

Câu 53: (SGD Hà Nội-lần 11 năm 2017-2018) Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^{x^2}\left(x^3-4x\right)$. Hàm số $F(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $F'(x)=f(x)=e^{x^2}.x(x-2)(x+2)$.

$F'(x)$ đổi dấu qua các điểm $x=0$; $x=\pm 2$ nên hàm số $F(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 54: (THPT Lục Ngạn-Bắc Giang-lần 1 năm 2017-2018) Biết rằng $\int_1^2 \ln(x+1)dx = a\ln 3 + b\ln 2 + c$ với a, b, c là các số nguyên. Tính $S=a+b+c$

A. $S=0$. **B.** $S=1$. **C.** $S=2$. **D.** $S=-2$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases} u=\ln(x+1) \\ dv=dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{1}{x+1}dx \\ v=x \end{cases}$

Khi đó, ta có: $\int_1^2 \ln(x+1)dx = x\ln(x+1)\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{x+1}dx$

$=2\ln 3-\ln 2-\int_1^2\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx = 2\ln 3-\ln 2-\left(x-\ln|x+1|\right)\Big|_1^2$

$=2\ln 3-\ln 2-\left(2-\ln 3-1+\ln 2\right)=3\ln 3-2\ln 2-1$.

Suy ra $S=a+b+c=3-2-1=0$.

Câu 55: (THPT Lục Ngạn-Bắc Giang-lần 1 năm 2017-2018) Cho $\int_{-1}^2 f(x)dx=2$ và $\int_{-1}^2 g(x)dx=-1$. Tính $I=\int_{-1}^2\left[x+2f(x)-3g(x)\right]dx$

A. $I=\frac{11}{2}$. **B.** $I=\frac{7}{2}$. **C.** $I=\frac{17}{2}$. **D.** $I=\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $I=\int_{-1}^2\left[x+2f(x)-3g(x)\right]dx = \int_{-1}^2 xdx + 2\int_{-1}^2 f(x)dx - 3\int_{-1}^2 g(x)dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^2 + 4 + 3 = \frac{17}{2}$.

Câu 56: (THPT Lục Ngạn-Bắc Giang-lần 1 năm 2017-2018) Tích phân $I=\int_0^2(2x-1)dx$ có giá trị bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

$$I=\int_0^2 (2x-1)\,\mathrm{d}x=\left(x^2-x\right)\Big|_0^2=2.$$

Câu 57: (THTT số 6-489 tháng 3 năm 2018) Tính nguyên hàm của hàm số

$$f(x)=\mathrm{e}^x\left(2017-\frac{2018\mathrm{e}^{-x}}{x^5}\right).$$

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=2017\mathrm{e}^x+\frac{2018}{x^4}+C$.

B. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=2017\mathrm{e}^x+\frac{504,5}{x^4}+C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=2017\mathrm{e}^x-\frac{504,5}{x^4}+C$.

D. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=2017\mathrm{e}^x-\frac{2018}{x^4}+C$.

Lời giải

Chọn B

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\left(2017\mathrm{e}^x-2018x^{-5}\right)\mathrm{d}x=2017\mathrm{e}^x+\frac{504,5}{x^4}+C.$$

Câu 58: (THTT số 6-489 tháng 3 năm 2018) Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường cong $y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, trục hoành và đường thẳng $x=\mathrm{e}$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=\frac{\pi}{2}$. **B.** $V=\frac{\pi}{3}$. **C.** $V=\frac{\pi}{6}$. **D.** $V=\pi$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ và trục hoành là $\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=0\Leftrightarrow x=1$

Khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành có thể tích

$$V=\pi\int_1^{\mathrm{e}}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{\ln^3 x}{3}\right)\Big|_1^{\mathrm{e}}=\frac{\pi}{3}.$$

Câu 59: (THPT Nguyễn Trãi-Đà Nẵng-lần 1 năm 2017-2018) Tính $\int_2^4\left(x+\frac{1}{x}\right)^2\mathrm{d}x$.

A. $\frac{208}{17}$. **B.** $\frac{196}{15}$. **C.** $\frac{305}{16}$. **D.** $\frac{275}{12}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int_2^4\left(x+\frac{1}{x}\right)^2\mathrm{d}x=\int_2^4\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^3}{3}+2x-\frac{1}{x}\right)\Big|_2^4$

$$=\left(\frac{4^3}{3}+8-\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{2^3}{3}+4-\frac{1}{2}\right)=\frac{275}{12}.$$

Câu 60: (THPT Nguyễn Trãi-Đà Nẵng-lần 1 năm 2017-2018) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2$ và $y=x+2$ là

A. $S=9$. **B.** $S=\frac{9}{4}$. **C.** $S=\frac{9}{2}$. **D.** $S=\frac{8}{9}$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm là $x^2 = x + 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Ta có $S = \int\limits_{-1}^{2} \left|x^2 - x - 2\right| \mathrm{d}x = \left|\left(\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - 2x\right)\Bigg|_{-1}^{2}\right| = \dfrac{9}{2}$.

Câu 61: (THPT Nguyễn Trãi-Đà Nẵng-lần 1 năm 2017-2018) Tính $J = \int\limits_{0}^{\pi} x \sin x \,\mathrm{d}x$.

A. $-\pi$. **B.** π. **C.** $\dfrac{\pi}{4}$. **D.** $\dfrac{\pi}{2}$.

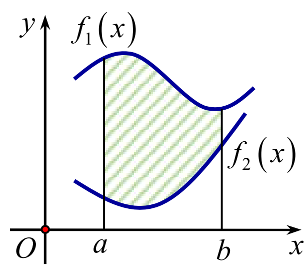
Lời giải

Chọn B

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \sin x \,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = -\cos x \end{cases}$.

Ta có $J = -x \cos x\Big|_0^{\pi} + \int\limits_{0}^{\pi} \cos x \,\mathrm{d}x = \pi - \sin x\Big|_0^{\pi} = \pi$.

Câu 62: (THPT Nguyễn Trãi-Đà Nẵng-lần 1 năm 2017-2018) Cho hình phẳng trong hình (phần tô đậm) quay quanh trục hoành. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành được tính theo công thức nào?



A. $V = \int\limits_{a}^{b} \left[f_1^2(x) - f_2^2(x)\right] \mathrm{d}x$.

B. $V = \pi \int\limits_{a}^{b} \left[f_1^2(x) - f_2^2(x)\right] \mathrm{d}x$.

C. $V = \pi \int\limits_{a}^{b} \left[f_2^2(x) - f_1^2(x)\right] \mathrm{d}x$.

D. $V = \pi \int\limits_{a}^{b} \left[f_1(x) - f_2(x)\right]^2 \mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn B

Do $f_1(x) > f_2(x) \forall x \in (a;b)$ nên Chọn B

Câu 63: (THPT Nguyễn Trãi-Đà Nẵng-lần 1 năm 2017-2018) Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $y' = xy^2$ và $f(-1) = 1$ thì giá trị $f(2)$ là

A. e^2. **B.** $2\mathrm{e}$. **C.** $\mathrm{e} + 1$. **D.** e^3.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = xy^2 \Rightarrow \dfrac{y'}{y} = x^2 \Rightarrow \int \dfrac{y'}{y} \mathrm{d}x = \int x^2 \mathrm{d}x \Leftrightarrow \ln y = \dfrac{x^3}{3} + C \Leftrightarrow y = \mathrm{e}^{\frac{x^3}{3} + C}$.

Theo giả thiết $f(-1)=1$ nên $\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}+C}=1 \Leftrightarrow C=\frac{1}{3}$.

Vậy $y=f(x)=\mathrm{e}^{\frac{x^3}{3}+\frac{1}{3}}$. Do đó $f(2)=\mathrm{e}^3$.

Câu 64: (THPT Nguyễn Trãi-Đà Nẵng-lần 1 năm 2017-2018) Giả sử rằng $\int\limits_{-1}^{0}\frac{3x^2+5x-1}{x-2}\mathrm{d}x=a\ln\frac{2}{3}+b$. Khi đó, giá trị của $a+2b$ là

A. 30. **B.** 60. **C.** 50. **D.** 40.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$I=\int\limits_{-1}^{0}\frac{3x^2+5x-1}{x-2}\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{0}\left(3x+11+\frac{21}{x-2}\right)\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow I=\left[\frac{3x^2}{2}+11x+21.\ln|x-2|\right]\Bigg|_{-1}^{0}=21.\ln 2+\frac{19}{2}-21.\ln 3$$

$$\Rightarrow I=21\ln\frac{2}{3}+\frac{19}{2}\Rightarrow\begin{cases}a=21\\ b=\frac{19}{2}\end{cases}\Rightarrow a+2b=40.$$

Câu 65: (THPT Lê Xoay-Vĩnh phúc-lần 1 năm 2017-2018) Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=-\cos 2x$ là

A. $F(x)=\frac{1}{2}\sin 2x+C$. **B.** $F(x)=-\frac{1}{2}\sin 2x$.

C. $F(x)=-\sin 2x+C$. **D.** $F(x)=-\frac{1}{2}\sin 2x+C$.

Lời giải

Chọn D

Áp dụng công thức nguyên hàm cơ bản ta có

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int(-\cos 2x)\mathrm{d}x=-\int\cos 2x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\sin 2x+C.$$

Câu 66: (THPT Đặng Thúc Hứa-Nghệ An-lần 1 năm 2017-2018) Tính tích phân $I=\int\limits_{1}^{\mathrm{e}}\frac{1+x}{x^2}\mathrm{d}x$.

A. $I=1+\frac{1}{\mathrm{e}}$. **B.** $I=2-\frac{1}{\mathrm{e}}$. **C.** $I=2+\frac{1}{\mathrm{e}}$. **D.** $I=1-\frac{1}{\mathrm{e}}$.

Lời giải

Chọn B

$$I=\int\limits_{1}^{\mathrm{e}}\frac{1+x}{x^2}\mathrm{d}x=\int\limits_{1}^{\mathrm{e}}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\left(-\frac{1}{x}+\ln|x|\right)\Bigg|_{1}^{\mathrm{e}}=2-\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Câu 67: (THPT Đặng Thúc Hứa-Nghệ An-lần 1 năm 2017-2018) Tính thể tích V của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x=0$ và $x=\pi$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0\le x\le\pi)$ là một tam giác đều cạnh $2\sqrt{\sin x}$.

A. $V=3$. **B.** $V=3\pi$. **C.** $V=2\pi\sqrt{3}$. **D.** $V=2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D

Diện tích tam giác đều $S(x)=\dfrac{\sqrt{3}\left(2\sqrt{\sin x}\right)^2}{4}=\sqrt{3}\sin x$.

Vậy thể tích $V=\int\limits_0^{\pi} S(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\pi}\sqrt{3}\sin x\mathrm{d}x=2\sqrt{3}$.

Câu 68: (THPT Đặng Thúc Hứa-Nghệ An-lần 1 năm 2017-2018) Biết rằng $\int\limits_2^3\dfrac{x^2-x+1}{x+\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x=\dfrac{a-4\sqrt{b}}{c}$, với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $T=a+b+c$.

A. 31. **B.** 29. **C.** 33. **D.** 27.

Lời giải

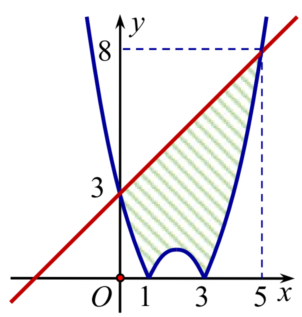
Chọn C

$$\int\limits_2^3\frac{x^2-x+1}{x+\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x=\int\limits_2^3\frac{\left(x-\sqrt{x-1}\right)\left(x^2-x+1\right)}{x^2-x+1}\mathrm{d}x$$

$$=\int\limits_2^3\left(x-\sqrt{x-1}\right)\mathrm{d}x=\left.\left(\frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1}\right)\right|_2^3=\frac{19-4\sqrt{8}}{6}\Rightarrow\begin{cases}a=19\\ b=8\\ c=6\end{cases}.$$

Vậy $T=a+b+c=33$.

Câu 69: (THPT Chuyên Hạ Long-Quãng Ninh lần 2 năm 2017-2018) Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=\left|x^2-4x+3\right|$, $y=x+3$ (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng



A. $\dfrac{37}{2}$. **B.** $\dfrac{109}{6}$. **C.** $\dfrac{454}{25}$. **D.** $\dfrac{91}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Diện tích của (H) là

$$S=\int\limits_0^5\left|\left|x^2-4x+3\right|-(x+3)\right|\mathrm{d}x=\int\limits_0^5\left(x+3-\left|x^2-4x+3\right|\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int\limits_0^5(x+3)\mathrm{d}x-\left[\int\limits_0^1\left(x^2-4x+3\right)\mathrm{d}x-\int\limits_1^3\left(x^2-4x+3\right)\mathrm{d}x+\int\limits_3^5\left(x^2-4x+3\right)\mathrm{d}x\right]$$

$=\left(\frac{x^2}{2}+3x\right)\Bigg|_0^5-\left[\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right)\Bigg|_0^1-\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right)\Bigg|_1^3+\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right)\Bigg|_3^5\right]$

$=\frac{55}{2}-\left(\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{20}{3}\right)=\frac{109}{6}$.

Câu 70: **(THPT Chuyên Hạ Long-Quãng Ninh lần 2 năm 2017-2018)** Biết rằng trên khoảng $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$, hàm số $f(x)=\frac{20x^2-30x+7}{\sqrt{2x-3}}$ có một nguyên hàm $F(x)=\left(ax^2+bx+c\right)\sqrt{2x-3}$ (a, b, c là các số nguyên). Tổng $S=a+b+c$ bằng

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\sqrt{2x-3}\Rightarrow t^2=2x-3\Rightarrow \mathrm{d}x=t\mathrm{d}t$

Khi đó

$$\int\frac{20x^2-30x+7}{\sqrt{2x-3}}\mathrm{d}x=\int\frac{20\left(\frac{t^2+3}{2}\right)^2-30\left(\frac{t^2+3}{2}\right)+7}{t}t\mathrm{d}t=\int\left(5t^4+15t^2+7\right)\mathrm{d}t=t^5+5t^3+7t+C$$

$=\sqrt{(2x-3)^5}+5\sqrt{(2x-3)^3}+7\sqrt{2x-3}+C$

$=(2x-3)^2\sqrt{2x-3}+5(2x-3)\sqrt{2x-3}+7\sqrt{2x-3}+C=\left(4x^2-2x+1\right)\sqrt{2x-3}+C$

Vậy $F(x)=\left(4x^2-2x+1\right)\sqrt{2x-3}$. Suy ra $S=a+b+c=3$.

Câu 71: **(THPT Chuyên Phan Bội Châu-lần 2 năm 2017-2018)** Cho $\int_1^2 f\left(x^2+1\right)x\mathrm{d}x=2$. Khi đó

$I=\int_2^5 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** -1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=x^2+1\Rightarrow \mathrm{d}t=2x\mathrm{d}x$

Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=2$; $x=2\Rightarrow t=5$.

Khi đó: $2=\frac{1}{2}\int_2^5 f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_2^5 f(x)\mathrm{d}x\Rightarrow I=\int_2^5 f(x)\mathrm{d}x=4$..

Câu 72: **(THPT Chuyên Phan Bội Châu-lần 2 năm 2017-2018)** Một chiếc máy bay chuyển động trên đường băng với vận tốc $v(t)=t^2+10t\,(\mathrm{m/s})$ với t là thời gian được tính theo đơn vị giây kể từ khi máy bay bắt đầu chuyển động. Biết khi máy bay đạt vận tốc $200\,(\mathrm{m/s})$ thì nó rời đường băng. Quãng đường máy bay đã di chuyển trên đường băng là

A. $\frac{2500}{3}(\mathrm{m})$. **B.** $2000(\mathrm{m})$. **C.** $500(\mathrm{m})$. **D.** $\frac{4000}{3}(\mathrm{m})$.

Lời giải

Chọn A

Gọi t là thời gian máy bay chuyển động trên đường băng $(t>0)$.

Khi máy bay rời đường bằng thì $v(t)=200 \Rightarrow t^2+10t-200=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=10 \\ t=-20(L) \end{array}\right.$

Quãng đường máy bay đã di chuyển trên đường băng là

$$S=\int_0^{10} v(t)\mathrm{d}t=\int_0^{10}\left(t^2+10t\right)\mathrm{d}t=\left(\frac{t^3}{3}+5t^2\right)\Bigg|_0^{10}=\frac{10^3}{3}+5.10^2=\frac{2500}{3}(\mathrm{m}).$$

Câu 73: (THPT Chuyên Phan Bội Châu-lần 2 năm 2017-2018) Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{2}{15}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=1-x \Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$.

Suy ra $\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x=-\int_1^0 f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

$$2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x} \Leftrightarrow 5\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 \sqrt{1-x}\mathrm{d}x=-\frac{2}{3}\sqrt{(1-x)^3}\Big|_0^1=\frac{2}{3}.$$

Suy ra $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{15}$.

Chú ý: Ta có thể dùng công thức $\int_{x_1}^{x_2} f(ax+b)\mathrm{d}x=\int_{ax_1+b}^{ax_2+b} f(x)\mathrm{d}x$. Khi đó:

Từ $2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x}$ suy ra: $2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+3\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1-x}\mathrm{d}x$

$$\Leftrightarrow 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-3\int_1^0 f(1-x)\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1-x}\mathrm{d}x \Leftrightarrow 5\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{3} \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{15}.$$

Câu 74: (THPT Chuyên Hùng Vương-Gia Lai-lần 1 năm 2017-2018) Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{2x-1}$; biết $F(1)=2$. Tính $F(2)$.

A. $F(2)=\frac{1}{2}\ln 3-2$. **B.** $F(2)=\frac{1}{2}\ln 3+2$. **C.** $F(2)=\ln 3+2$. **D.** $F(2)=2\ln 3-2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $F(x)=\frac{1}{2}\ln|2x-1|+C$; $F(1)=2 \Rightarrow C=2$

$\Rightarrow F(x)=\frac{1}{2}\ln|2x-1|+2 \Rightarrow F(2)=\frac{1}{2}\ln 3+2$.

Câu 75: (THPT Chuyên Hùng Vương-Gia Lai-lần 1 năm 2017-2018) Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y=x^2-4x+6$ và $y=-x^2-2x+6$.

A. π. **B.** $\pi-1$. **C.** 3π. **D.** 2π.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^2-4x+6=-x^2-2x+6 \Leftrightarrow 2x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Thể tích vật thể tròn xoay sinh ra khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị là

$$V=\pi\int_0^1\left|\left(x^2-4x-6\right)^2-\left(-x^2-2x+6\right)^2\right|\mathrm{d}x=\pi\int_0^1\left|-12x^3+36x^2-24x\right|\mathrm{d}x$$

$$=\pi\left|\int_0^1\left(-12x^3+36x^2-24x\right)\mathrm{d}x\right|=\pi\left|\left(-3x^3+12x^3-12x^2\right)\Big|_0^1\right|=3\pi.$$

Câu 76: (THPT Chuyên Hùng Vương-Gia Lai-lần 1 năm 2017-2018) Cho $I=\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\ln x}{x(\ln x+2)^2}\mathrm{d}x$ có kết quả dạng $I=\ln a+b$ với $a>0$, $b\in\mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $2ab=-1$. **B.** $2ab=1$. **C.** $-b+\ln\frac{3}{2a}=-\frac{1}{3}$. **D.** $-b+\ln\frac{3}{2a}=\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\ln x+2=t \Leftrightarrow \ln x=t-2 \Rightarrow \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$.

Đổi cận: khi $x=1$ thì $t=2$; khi $x=\mathrm{e}$ thì $t=3$.

Khi đó $I=\int_2^3\frac{t-2}{t^2}\mathrm{d}t=\int_2^3\left(\frac{1}{t}-\frac{2}{t^2}\right)\mathrm{d}t=\left(\ln|t|+\frac{2}{t}\right)\Big|_2^3=\ln\frac{3}{2}-\frac{1}{3}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} a=\frac{3}{2} \\ b=-\frac{1}{3} \end{array}\right.$.

Vậy $2ab=-1$.

Câu 77: (THPT Chuyên Trần Phú-Hải Phòng-lần 2 năm 2017-2018) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=4x^5-\frac{1}{x}+2018$ là

A. $\frac{4}{6}x^6+\ln|x|+2018x+C$. **B.** $\frac{2}{3}x^6-\ln x+2018x+C$.

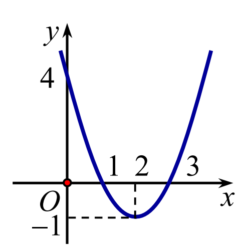
C. $20x^4+\frac{1}{x^2}+C$. **D.** $\frac{2}{3}x^6-\ln|x|+2018x+C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int\left(4x^5-\frac{1}{x}+2018\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}x^6-\ln|x|+2018x+C$

Câu 78: (THPT Chuyên Trần Phú-Hải Phòng-lần 2 năm 2017-2018) Cho parabol (P) có đồ thị như hình vẽ:



Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) với trục hoành.

A. 4. **B.** 2. **C.** $\frac{8}{3}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị ta có phương trình của parabol là $y = x^2 - 4x + 3$.

Parabol (P) cắt Ox tại hai điểm có hoành độ lần lượt là $x = 1$, $x = 3$.

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) với trục hoành ta có

$$S = \int_1^3 \left|x^2 - 4x + 3\right| \mathrm{d}x = \left|\int_1^3 \left(x^2 - 4x + 3\right) \mathrm{d}x\right| = \left|\left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right)\Big|_1^3\right| = \frac{4}{3}.$$

Câu 79: (THPT Chuyên Trần Phú-Hải Phòng-lần 2 năm 2017-2018) Biết $\int_1^2 \frac{x}{3x + \sqrt{9x^2 - 1}} \mathrm{d}x = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{35}$ với a, b, c là các số hữu tỷ, tính $P = a + 2b + c - 7$.

A. $-\frac{1}{9}$. **B.** $\frac{86}{27}$. **C.** -2. **D.** $\frac{67}{27}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Ta có $\int_1^2 \frac{x}{3x + \sqrt{9x^2 - 1}} \mathrm{d}x = \int_1^2 x\left(3x + \sqrt{9x^2 - 1}\right) \mathrm{d}x = \int_1^2 \left(3x^2 - x\sqrt{9x^2 - 1}\right) \mathrm{d}x$

$= \int_1^2 3x^2 \mathrm{d}x - \int_1^2 x\sqrt{9x^2 - 1} \mathrm{d}x = x^3\Big|_1^2 + \int_1^2 x\sqrt{9x^2 - 1} \mathrm{d}x = 7 - \int_1^2 x\sqrt{9x^2 - 1} \mathrm{d}x$.

Tính $\int_1^2 x\sqrt{9x^2 - 1} \mathrm{d}x$.

Đặt $\sqrt{9x^2 - 1} = t \Rightarrow 9x^2 - 1 = t^2 \Rightarrow x\mathrm{d}x = \frac{t\mathrm{d}t}{9}$.

Khi $x = 1$ thì $t = 2\sqrt{2}$; khi $x = 2$ thì $t = \sqrt{35}$.

Khi đó $\int_1^2 x\sqrt{9x^2 - 1} \mathrm{d}x = \int_{2\sqrt{2}}^{\sqrt{35}} t \frac{t\mathrm{d}t}{9} = \frac{t^3}{27}\Big|_{2\sqrt{2}}^{\sqrt{35}} = \frac{35}{27}\sqrt{35} - \frac{16}{27}\sqrt{2}$.

Vậy $\int_1^2 \frac{x}{3x + \sqrt{9x^2 - 1}} \mathrm{d}x = 7 - \frac{35}{27}\sqrt{35} + \frac{16}{27}\sqrt{2} \Rightarrow a = 7$, $b = \frac{16}{27}$, $c = -\frac{35}{27}$.

Vậy $P = a + 2b + c - 7 = 7 + \frac{32}{27} - \frac{35}{27} - 7 = -\frac{1}{9}$.

Cách 2: $\int_1^2 x\sqrt{9x^2 - 1} \mathrm{d}x = \frac{1}{18}\int_1^2 \left(9x^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}\left(9x^2 - 1\right) = \frac{1}{27}\left(9x^2 - 1\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2 = \frac{35\sqrt{35}}{27} - \frac{16\sqrt{2}}{27}$

$\Rightarrow \int_1^2 \frac{x}{3x + \sqrt{9x^2 - 1}} \mathrm{d}x = 7 - \frac{35}{27}\sqrt{35} + \frac{16}{27}\sqrt{2} \Rightarrow a = 7$, $b = \frac{16}{27}$, $c = -\frac{35}{27}$.

Vậy $P = a + 2b + c - 7 = 7 + \frac{32}{27} - \frac{35}{27} - 7 = -\frac{1}{9}$.

Câu 80: (PTNK-ĐHQG TP HCM-lần 1 năm 2017-2018) Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=2^{2x}\left(3^x-\dfrac{\sqrt{x}}{4^x}\right)$.

A. $F(x)=\dfrac{12^x}{\ln 12}-\dfrac{2x\sqrt{x}}{3}+C$.

B. $F(x)=12^x+x\sqrt{x}+C$.

C. $F(x)=\dfrac{2^{2x}}{\ln 2}\left(\dfrac{3^x}{\ln 3}-\dfrac{x\sqrt{x}}{4^x}\right)$.

D. $F(x)=\dfrac{2^{2x}}{\ln 2}\left(\dfrac{3^x}{\ln 3}-\dfrac{x\sqrt{x}\ln 4}{4^x}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x)=2^{2x}\left(3^x-\dfrac{\sqrt{x}}{4^x}\right)=12^x-\sqrt{x}$

Nên $F(x)=\int\left(12^x-\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{12^x}{\ln 12}-\dfrac{2x\sqrt{x}}{3}+C$.

Câu 81: (PTNK-ĐHQG TP HCM-lần 1 năm 2017-2018) Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=2x^2$ và $y=5x-2$.

A. $S=\dfrac{5}{4}$.

B. $S=\dfrac{5}{8}$.

C. $S=\dfrac{9}{8}$.

D. $S=\dfrac{9}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y=2x^2$ và $y=5x-2$:

$$2x^2-5x+2=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \text{ hoặc } x=2$$

Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị là

$$S=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left|2x^2-5x+2\right|\mathrm{d}x=\left|\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(2x^2-5x+2\right)\mathrm{d}x\right|=\left|-\frac{9}{8}\right|=\frac{9}{8}.$$

Câu 82: (PTNK-ĐHQG TP HCM-lần 1 năm 2017-2018) Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x^2+x & \text{khi } x\ge 0\\ x.\sin x & \text{khi } x\le 0\end{cases}$.

Tích tích phân $I=\int_{-\pi}^{1}f(x)\mathrm{d}x$

A. $I=\dfrac{7}{6}+\pi$.

B. $I=\dfrac{2}{3}+\pi$.

C. $I=-\dfrac{1}{3}+3\pi$.

D. $I=\dfrac{2}{5}+2\pi$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=f(0)=0$ nên hàm số liên tục tại $x=0$. Do đó hàm số liên tục trên đoạn $[-\pi;1]$.

Ta có: $I=\int_{-\pi}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{0}x.\sin x\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}\left(2x^2+x\right)\mathrm{d}x=I_1+I_2$.

- $I_1 = \int\limits_{-\pi}^{0} x.\sin x\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \sin x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = -\cos x \end{cases}$

$I_1 = \left(-x\cos x\right)\Big|_{-\pi}^{0} + \int\limits_{-\pi}^{0} \cos x\mathrm{d}x = \left(-x\cos x\right)\Big|_{-\pi}^{0} + \sin x\Big|_{-\pi}^{0} = \pi$.

- $I_2 = \int\limits_{0}^{1} \left(2x^2 + x\right)\mathrm{d}x = \left(\dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2}\right)\Big|_{0}^{1} = \dfrac{7}{6}$.

Vậy $I = I_1 + I_2 = \dfrac{7}{6} + \pi$.

Câu 83: (PTNK-ĐHQG TP HCM-lần 1 năm 2017-2018) Cho $I = \int\limits_{0}^{2} \left(2x^2 - x - m\right)\mathrm{d}x$ và $J = \int\limits_{0}^{1} \left(x^2 - 2mx\right)\mathrm{d}x$. Tìm điều kiện của m để $I \le J$.

A. $m \ge 3$. **B.** $m \ge 2$. **C.** $m \ge 1$. **D.** $m \ge 0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $I = \int\limits_{0}^{2} \left(2x^2 - x - m\right)\mathrm{d}x = \left(\dfrac{2x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - mx\right)\Big|_{0}^{2} = \dfrac{10}{3} - 2m$.

$J = \int\limits_{0}^{1} \left(x^2 - 2mx\right)\mathrm{d}x = \left(\dfrac{x^3}{3} - mx^2\right)\Big|_{0}^{1} = \dfrac{1}{3} - m$.

Do đó $I \le J \Leftrightarrow \dfrac{10}{3} - 2m \le \dfrac{1}{3} - m \Leftrightarrow m \ge 3$

Câu 84: (SGD Phú Thọ – lần 1 - năm 2017 – 2018) Tích tất cả các nghiệm thực của phương trình $\log_2^2 x - \log_2 x.\log_3\left(81x\right) + \log_{\sqrt{3}} x^2 = 0$ bằng

A. 18. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 15.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $x > 0$.

Ta có $\log_2^2 x - \log_2 x.\log_3\left(81x\right) + \log_{\sqrt{3}} x^2 = 0 \Leftrightarrow \log_2^2 x - \log_2 x.\left(4 + \log_3 x\right) + 4\log_3 x = 0$

$\Leftrightarrow \log_2^2 x - 4\log_2 x - \log_2 x.\log_3 x + 4\log_3 x = 0 \Leftrightarrow \log_2 x\left(\log_2 x - 4\right) - \log_3 x\left(\log_2 x - 4\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(\log_2 x - \log_3 x\right)\left(\log_2 x - 4\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = \log_3 x \\ \log_2 x = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 16 \end{array}\right.$.

Câu 85: (THPT Chuyên ĐH Vinh – lần 1 - năm 2017 – 2018) Tích phân $\int\limits_{0}^{1} \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3x+1}}$ bằng

A. $\dfrac{4}{3}$. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=\sqrt{3x+1}\Rightarrow t^2=3x+1\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=3\mathrm{d}x\Rightarrow \frac{2t}{3}\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$; $x=1\Rightarrow t=2$

Khi đó $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3x+1}}=\frac{2}{3}\int_1^2 \frac{1}{t}.t\mathrm{d}t=\frac{2}{3}\int_1^2 \mathrm{d}t=\frac{2}{3}t\Big|_1^2=\frac{2}{3}$.

Cách khác: Sử dụng công thức $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax+b}}=\frac{2}{a}\sqrt{ax+b}+C$ thì $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3x+1}}=\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}\Big|_0^1=\frac{2}{3}$.

Câu 86: (THPT Tây Thụy Anh – Thái Bình – lần 1 - năm 2017 – 2018) Một vật chuyển động với vận tốc $v(t)(\mathrm{m/s})$, có gia tốc $v'(t)=\frac{3}{t+1}(\mathrm{m/s^2})$. Với vận tốc ban đầu của vật là $6\mathrm{m/s}$. Vận tốc của vật sau 10 giây bằng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

A. $11\mathrm{m/s}$. **B.** $12\mathrm{m/s}$. **C.** $13\mathrm{m/s}$. **D.** $14\mathrm{m/s}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $v(t)=\int \frac{3}{t+1}\mathrm{d}t=3\ln|t+1|+C$.

Theo giả thiết ta có $v(0)=6\Leftrightarrow C=6$. Suy ra $v(t)=3\ln|t+1|+6$.

Vận tốc của vật sau 10 giây là $v(10)=3\ln|10+1|+6\approx 13\mathrm{m/s}$.

Câu 87: (THPT Tây Thụy Anh – Thái Bình – lần 1 - năm 2017 – 2018) Tìm a để diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi $(P): y=\frac{x^2-2x}{x-1}$, đường thẳng $d: y=x-1$ và $x=a,\ x=2a\ (a>1)$ bằng $\ln 3$?

A. $a=1$. **B.** $a=4$. **C.** $a=3$. **D.** $a=2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $S=\int_a^{2a}\left|\frac{x^2-2x}{x-1}-(x-1)\right|\mathrm{d}x=\int_a^{2a}\left|\frac{1}{x-1}\right|\mathrm{d}x=\int_a^{2a}\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x$ (vì $a>1$) $=\ln(x-1)\Big|_a^{2a}$ (vì $a>1$)

$=\ln(2a-1)-\ln(a-1)=\ln\frac{2a-1}{a-1}$.

Ta có: $\ln\frac{2a-1}{a-1}=\ln 3\Leftrightarrow \frac{2a-1}{a-1}=3\Leftrightarrow a=2.$

Câu 88: (THPT Tây Thụy Anh – Thái Bình – lần 1 - năm 2017 – 2018) Tính thể tích của phần vật thể tạo nên khi quay quanh trục Ox hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị $(P): y=2x-x^2$ và trục Ox bằng

A. $V=\frac{19\pi}{15}$. **B.** $V=\frac{13\pi}{15}$. **C.** $V=\frac{17\pi}{15}$. **D.** $V=\frac{16\pi}{15}$.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình $2x-x^2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

Vì $2x-x^2\ge 0\,\forall x\in[0;2]$ nên thể tích của phần vật thể tạo nên khi quay quanh trục Ox hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị $(P): y=2x-x^2$ và trục Ox là $V=\pi\int_0^2\left(2x-x^2\right)^2\mathrm{d}x=\frac{16\pi}{15}$.

Câu 89: (THPT Tây Thụy Anh – Thái Bình – lần 1 - năm 2017 – 2018) Cho $\int_1^2\left[3f(x)+2g(x)\right]\mathrm{d}x=1$, $\int_1^2\left[2f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=-3$. Khi đó, $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{11}{7}$. **B.** $-\frac{5}{7}$. **C.** $\frac{6}{7}$. **D.** $\frac{16}{7}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $a=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$, $b=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$, ta có hệ phương trình $\begin{cases}3a+2b=1\\2a-b=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\frac{5}{7}\\b=\frac{11}{7}\end{cases}$

Vậy $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=-\frac{5}{7}$.

Câu 90: (THPT Tây Thụy Anh – Thái Bình – lần 1 - năm 2017 – 2018) Tính $I=\int 8\sin 3x\cos x\mathrm{d}x=a\cos 4x+b\cos 2x+C$. Khi đó, $a-b$ bằng

A. 3. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

$I=\int 8\sin 3x\cos x\mathrm{d}x=4\int(\sin 4x+\sin 2x)\mathrm{d}x=-\cos 4x-2\cos 2x+C\Rightarrow a=-1, b=-2$.

Vậy $a-b=1$.

Câu 91: (THPT Yên Lạc – Vĩnh Phúc – lần 4 - năm 2017 – 2018) Tính tích phân $I=\int_0^1(2x+1)\mathrm{d}x$.

A. $I=3$. **B.** $I=2$. **C.** $I=-3$. **D.** $I=1$.

Lời giải

Chọn B

$I=\int_0^1(2x+1)\mathrm{d}x=\left(x^2+x\right)\Big|_0^1=2$.

Câu 92: (THPT Yên Lạc – Vĩnh Phúc – lần 4 - năm 2017 – 2018) Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y=x^2, y=x$.

A. $S=\frac{1}{6}$. **B.** $S=\frac{5}{6}$. **C.** $S=\frac{1}{3}$. **D.** $S=\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2=x\to x=0\ \vee x=1$

Diện tích hình phẳng là $S=\int_0^1\left|x^2-x\right|dx=\frac{1}{6}$

Câu 93: (THPT Yên Lạc – Vĩnh Phúc – lần 4 - năm 2017 – 2018) $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = 2\sin x\cos 3x$ và $F(0) = 0$, khi đó

A. $F(x) = \cos 4x - \cos 2x$.

B. $F(x) = \frac{\cos 2x}{4} - \frac{\cos 4x}{8} - \frac{1}{8}$.

C. $F(x) = \frac{\cos 2x}{2} - \frac{\cos 4x}{4} - \frac{1}{4}$.

D. $F(x) = \frac{\cos 4x}{4} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y = \sin 4x - \sin 2x \Rightarrow F(x) = -\frac{\cos 4x}{4} + \frac{\cos 2x}{2} + C$, vì $F(0) = 0$ nên $C = -\frac{1}{4}$.

Nên $F(x) = \frac{\cos 2x}{2} - \frac{\cos 4x}{4} - \frac{1}{4}$.

Câu 94: (THPT Hồng Bàng – Hải Phòng – năm 2017 – 2018) Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^3 x.\cos x$ và $F(0) = \pi$. Tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

A. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi$.

B. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$.

C. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \pi$.

D. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4} + \pi$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = \sin x \Rightarrow \mathrm{d}t = \cos x\mathrm{d}x$.

$$F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x = \int \sin^3 x\cos x\mathrm{d}x = \int t^3\mathrm{d}t = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

$$F(0) = \pi \Rightarrow \frac{\sin^4 \pi}{4} + C = \pi \Leftrightarrow C = \pi \Rightarrow F(x) = \frac{\sin^4 x}{4} + \pi.$$

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin^4 \frac{\pi}{2}}{4} = \frac{1}{4} + \pi.$$

Câu 95: (THPT Hồng Bàng – Hải Phòng – năm 2017 – 2018) Cho $f(x)$, $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên đoạn $[-1;1]$ và $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ. Biết $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 5; \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = 7$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. $\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x = 10$.

B. $\int_{-1}^1 \left[f(x) + g(x)\right]\mathrm{d}x = 10$.

C. $\int_{-1}^1 \left[f(x) - g(x)\right]\mathrm{d}x = 10$.

D. $\int_{-1}^1 g(x)\mathrm{d}x = 14$.

Lời giải

Chọn D

Vì $f(x)$ là hàm số chẵn nên $\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2.5 = 10$.

Vì $g(x)$ là hàm số lẻ nên $\int_{-1}^1 g(x)\mathrm{d}x = 0$.

$\Rightarrow \int_{-1}^{1}\left[f(x)+g(x)\right]dx=10$ và $\int_{-1}^{1}\left[f(x)-g(x)\right]dx=10$.

Vậy đáp án D sai.

Câu 96: (THPT Hồng Bàng – Hải Phòng – năm 2017 – 2018) Cho tích phân $I=\int_{0}^{3}\frac{x}{1+\sqrt{x+1}}dx$ nếu đặt $t=\sqrt{x+1}$ thì I là

A. $I=\int_{1}^{2}\left(2t^2-t\right)dt$. **B.** $I=\int_{1}^{2}\left(2t^2+2t\right)dt$. **C.** $I=\int_{1}^{2}\left(2t^2-2t\right)dt$. **D.** $I=\int_{1}^{2}\left(t^2-2t\right)dt$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\sqrt{x+1}\Rightarrow t^2=x+1\Leftrightarrow x=t^2-1$ $dx=2tdt$.

Đổi cận: Khi $x=0$ thì $t=1$; khi $x=3$ thì $t=2$.

$I=\int_{0}^{3}\frac{x}{1+\sqrt{x+1}}dx=\int_{1}^{2}\frac{t^2-1}{1+t}2tdt=\int_{1}^{2}2t\left(t-1\right)dt=\int_{1}^{2}\left(2t^2-t\right)dt$.

Câu 97: (THPT Hồng Bàng – Hải Phòng – năm 2017 – 2018) Hàm số nào dưới đây không là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{x(2+x)}{(x+1)^2}$?

A. $y=\frac{x^2}{x+1}$. **B.** $y=\frac{x^2+x-1}{x+1}$. **C.** $y=\frac{x^2-x-1}{x+1}$. **D.** $y=\frac{x^2+x+1}{x+1}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

- $\left(\frac{x^2}{x+1}\right)'=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}=f(x)$ nên A thỏa.
- $\left(\frac{x^2+x-1}{x+1}\right)'=\frac{x^2+2x+2}{(x+1)^2}\neq f(x)$ nên B không thỏa.
- $\left(\frac{x^2-x-1}{x+1}\right)'=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}=f(x)$ nên C thỏa.
- $\left(\frac{x^2+x+1}{x+1}\right)'=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}=f(x)$ nên D thỏa.

Câu 98: (THPT Hồng Bàng – Hải Phòng – năm 2017 – 2018) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[-1;4]$, $f(4)=2018$, $\int_{-1}^{4}f'(x)dx=2017$. Tính $f(-1)$?

A. $f(-1)=-1$. **B.** $f(-1)=1$. **C.** $f(-1)=3$. **D.** $f(-1)=2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int\limits_{-1}^{4} f'(x)\mathrm{d}x = f(x)\Big|_{-1}^{4} = f(4) - f(-1) \Rightarrow f(-1) = f(4) - \int\limits_{-1}^{4} f'(x)\mathrm{d}x = 2018 - 2017 = 1$.

Câu 99: (THPT Quảng Xương I – Thanh Hóa – năm 2017 – 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[1;4]$, $f(1) = 12$ và $\int\limits_{1}^{4} f'(x)\mathrm{d}x = 17$. Giá trị của $f(4)$ bằng

A. 29. **B.** 5. **C.** 19. **D.** 9.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int\limits_{1}^{4} f'(x)\mathrm{d}x = 17 \Leftrightarrow f(x)\Big|_{1}^{4} = 17 \Leftrightarrow f(4) - f(1) = 17 \Leftrightarrow f(4) = 29$.

Câu 100: (THPT Quảng Xương I – Thanh Hóa – năm 2017 – 2018) Cho hình phẳng (S) giới hạn bởi đường cong có phương trình $y = \sqrt{2 - x^2}$ và trục Ox, quay (S) xung quang trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành bằng

A. $V = \dfrac{8\sqrt{2}\pi}{3}$. **B.** $V = \dfrac{4\sqrt{2}\pi}{3}$. **C.** $V = \dfrac{4\pi}{3}$. **D.** $V = \dfrac{8\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của đường cong và trục Ox:

$$\sqrt{2 - x^2} = 0 \Leftrightarrow 2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{array}\right..$$

Thể tích khối tròn xoay tạo thành là

$$V = \pi \int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\sqrt{2 - x^2}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(2 - x^2\right)\mathrm{d}x = \pi\left(2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{3}\pi.$$

Câu 101: (THPT Quảng Xương I – Thanh Hóa – năm 2017 – 2018) Cho $\int\limits_{0}^{1} \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} = a\sqrt{b} - \dfrac{8}{3}\sqrt{a} + \dfrac{2}{3}$, $\left(a, b \in \mathbb{N}^*\right)$. Tính $a + 2b$.

A. $a + 2b = 7$. **B.** $a + 2b = 8$. **C.** $a + 2b = -1$. **D.** $a + 2b = 5$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int\limits_{0}^{1} \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} = \int\limits_{0}^{1} \left(\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}\right)\mathrm{d}x = \dfrac{2}{3}\left(\sqrt{(x+2)^3} - \sqrt{(x+1)^3}\right)\Bigg|_{0}^{1} = 2\sqrt{3} - \dfrac{8}{3}\sqrt{2} + \dfrac{2}{3}$.

Do đó $a = 2$, $b = 3$, $a + 2b = 8$.

Câu 102: (SGD Bắc Giang – năm 2017 – 2018) Tích phân $\int\limits_{1}^{2} (x+3)^2\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 61. **B.** $\dfrac{61}{3}$. **C.** 4. **D.** $\dfrac{61}{9}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_1^2 (x+3)^2\,\mathrm{d}x = \int_1^2 (x^2+6x+9)\,\mathrm{d}x = \left.\left(\frac{x^3}{3}+6.\frac{x^2}{2}+9x\right)\right|_1^2 = \frac{61}{3}$.

Câu 103: (SGD Bắc Giang – năm 2017 – 2018) Cho $\int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 3$. Tính tích phân $I = \int_{-2}^{1}\left[2f(x)-1\right]\mathrm{d}x$.

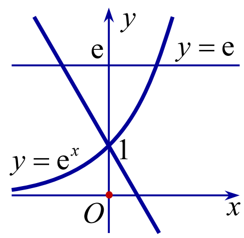
A. -9. **B.** -3. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Ta có $I = \int_{-2}^{1}\left[2f(x)-1\right]\mathrm{d}x = 2\int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-2}^{1}\mathrm{d}x = 6 - x\big|_{-2}^{1} = 3$.

Câu 104: (SGD Bắc Giang – năm 2017 – 2018) Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=\mathrm{e}$, $y=\mathrm{e}^x$ và $y=(1-\mathrm{e})x+1$ (tham khảo hình vẽ bên).



Diện tích hình phẳng (H) là

A. $S=\frac{\mathrm{e}+1}{2}$. **B.** $S=\mathrm{e}+\frac{3}{2}$. **C.** $S=\frac{\mathrm{e}-1}{2}$. **D.** $S=\mathrm{e}+\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y=\mathrm{e}^x$ với đường thẳng $y=\mathrm{e}$ là $\mathrm{e}^x=\mathrm{e} \Leftrightarrow x=1$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y=\mathrm{e}^x$ với đường thẳng $y=(1-\mathrm{e})x+1$ là $\mathrm{e}^x=(1-\mathrm{e})x+1 \Leftrightarrow x=0$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y=\mathrm{e}$ với đường thẳng $y=(1-\mathrm{e})x+1$ là $\mathrm{e}=(1-\mathrm{e})x+1 \Leftrightarrow x=-1$.

Diện tích hình phẳng (H) là $S=\int_{-1}^{0}\left|\mathrm{e}-(1-\mathrm{e})x-1\right|\mathrm{d}x+\int_0^1\left|\mathrm{e}-\mathrm{e}^x\right|\mathrm{d}x$

$$=\left|\int_{-1}^{0}\left(\mathrm{e}-(1-\mathrm{e})x-1\right)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_0^1\left(\mathrm{e}-\mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}x\right| = \left|\left.\left((\mathrm{e}-1)x-\frac{(1-\mathrm{e})x^2}{2}\right)\right|_{-1}^{0}\right|+\left|\left.\left(\mathrm{e}x-\mathrm{e}^x\right)\right|_0^1\right| = \frac{\mathrm{e}+1}{2}.$$

Cách 2: Xem x là hàm theo biến y.

Hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $x=\ln y$, $x=\frac{1}{1-\mathrm{e}}(y-1)$, $y=1$, $y=\mathrm{e}$.

Diện tích hình (H) là $S=\int_1^{\mathrm{e}}\left[\ln y-\frac{1}{1-\mathrm{e}}(y-1)\right]\mathrm{d}y=\int_1^{\mathrm{e}}\ln y\,\mathrm{d}y-\frac{1}{1-\mathrm{e}}\int_1^{\mathrm{e}}(y-1)\,\mathrm{d}y$

Tính $A=\int_1^{\mathrm{e}}\ln y\,\mathrm{d}y=\left.(y\ln y-y)\right|_1^{\mathrm{e}}=1$

Tính $B=\frac{1}{1-e}\int_1^e (y-1)\,dy=\frac{1}{1-e}\left(\frac{y^2}{2}-y\right)\Bigg|_1^e=\frac{1}{1-e}\left(\frac{e^2}{2}-e+\frac{1}{2}\right)=\frac{1-e}{2}$

Vậy $S=1-\frac{1-e}{2}=\frac{e+1}{2}$.

Câu 105: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $y=\frac{1}{(1+x)^2}$.

A. $\int\frac{1}{(x+1)^2}dx=\frac{2}{(x+1)^3}+C$.

B. $\int\frac{1}{(x+1)^2}dx=-\frac{1}{x+1}+C$.

C. $\int\frac{1}{(x+1)^2}dx=\frac{1}{x+1}+C$.

D. $\int\frac{1}{(x+1)^2}dx=\frac{-2}{(x+1)^3}+C$.

Lời giải

Chọn B

$\int\frac{1}{(x+1)^2}dx=\int(x+1)^{-2}dx=-(x+1)^{-1}+C=\frac{-1}{x+1}+C$.

Câu 106: **(Chuyên ĐB Sông Hồng –Lần 1 năm 2017 – 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a,b]$. Giả sử hàm số $u=u(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[a,b]$ và $u(x)\in[\alpha,\beta]\ \forall x\in[a,b]$, hơn nữa $f(u)$ liên tục trên đoạn $[\alpha,\beta]$.

Mệnh đề nào sau đây là đúng? $x=a$

A. $\int_a^b f[u(x)]u'(x)dx=\int_a^b f(u)du$.

B. $\int_{u(a)}^{u(b)} f[u(x)]u'(x)dx=\int_a^b f(u)du$.

C. $\int_a^b f[u(x)]u'(x)dx=\int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du$.

D. $\int_a^b f[u(x)]u'(x)dx=\int_a^b f(x)du$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $u(x)=t\Rightarrow u'(x)dx=dt$.

Đổi cận

Khi $x=a$ thì $t=u(x)$; khi $x=b$ thì $t=u(b)$.

Do đó $\int_a^b f[u(x)]u'(x)dx=\int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt=\int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du$.

Câu 107: **(Chuyên ĐB Sông Hồng –Lần 1 năm 2017 – 2018)** Cho số thực $a>0$. Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục và luôn dương trên $[0;a]$ thỏa mãn $f(x).f(a-x)=1$, $\forall x\in[0;a]$. Tính tích phân $I=\int_0^a\frac{dx}{1+f(x)}$.

A. $I=\frac{2a}{3}$.

B. $I=\frac{a}{2}$.

C. $I=a$.

D. $I=\frac{a}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=a-x\Rightarrow dx=-dt$.

Đổi cận

$x=0\Rightarrow t=a$; $x=a\Rightarrow t=0$. Suy ra.

$I=-\int_a^0\frac{\mathrm{d}t}{1+f(a-t)}=\int_0^a\frac{f(t)\mathrm{d}t}{1+f(t)}$ (do $f(a-t)=\frac{1}{f(t)}$)

$\Rightarrow 2I=\int_0^a \mathrm{d}t=a\ \Rightarrow I=\frac{a}{2}$.

Câu 108: (THPT Chuyên Thoại Ngọc Hầu – An Giang - Lần 3 năm 2017 – 2018) Cho $f(x)$, $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên đoạn $[-1;1]$ và $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ. Biết $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=5$; $\int\limits_0^1 g(x)\mathrm{d}x=7$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. $\int\limits_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x=10$.

B. $\int\limits_{-1}^1 [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=10$.

C. $\int\limits_{-1}^1 [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x=10$.

D. $\int\limits_{-1}^1 g(x)\mathrm{d}x=14$.

Lời giải

Chọn D

Vì $f(x)$ là hàm số chẵn nên $\int\limits_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x=2\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2.5=10$.

Vì $g(x)$ là hàm số lẻ nên $\int\limits_{-1}^1 g(x)\mathrm{d}x=0$.

$\Rightarrow \int\limits_{-1}^1 [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=10$ và $\int\limits_{-1}^1 [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x=10$.

Câu 109: (THPT Chuyên Thoại Ngọc Hầu – An Giang - Lần 3 năm 2017 – 2018) Cho $\int\limits_1^2\frac{1}{x^2+5x+6}\mathrm{d}x=a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5$ với a, b, c là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a+b+c=4$. **B.** $a+b+c=-3$. **C.** $a+b+c=2$. **D.** $a+b+c=6$.

Lời giải

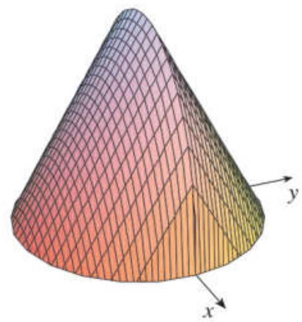
Chọn C

Ta có: $\int\limits_1^2\frac{1}{x^2+5x+6}\mathrm{d}x=\int\limits_1^2\left(\frac{1}{x+2}+\frac{-1}{x+3}\right)\mathrm{d}x=\left(\ln|x+2|-\ln|x+3|\right)\Big|_1^2$

$=(\ln 4-\ln 5)-(\ln 3-\ln 4)=2\ln 4-\ln 3-\ln 5=4\ln 2-\ln 3-\ln 5$.

Vậy $a+b+c=4+(-1)+(-1)=2$.

Câu 110: (THPT Chuyên Thoại Ngọc Hầu – An Giang - Lần 3 năm 2017 – 2018) Cho vật thể có mặt đáy là hình tròn có bán kính bằng 1 (hình vẽ). Khi cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(-1\le x\le 1)$ thì được thiết diện là một tam giác đều. Tính thể tích V của vật thể đó.



A. $V=\sqrt{3}$. **B.** $V=3\sqrt{3}$. **C.** $V=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V=\pi$.

Lời giải

Chọn C

Tại vị trí có hoành độ x $(-1\le x\le 1)$ thì tam giác thiết diện có cạnh là $2\sqrt{1-x^2}$.

Do đó tam giác thiết diện có diện tích $S(x)=\left(2\sqrt{1-x^2}\right)^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}\left(1-x^2\right)$.

Vậy thể tích V của vật thể là $\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{3}\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

Câu 111: **(THPT Chuyên Thoại Ngọc Hầu – An Giang - Lần 3 năm 2017 – 2018)** Tích phân $\int\limits_0^4\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\sqrt{2}$. **B.** 3. **C.** 2. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int\limits_0^4\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x=\int\limits_0^4(2x+1)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=\left.(2x+1)^{\frac{1}{2}}\right|_0^4=2$.

Câu 112: Cho f là hàm số liên tục thỏa $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=7$. Tính $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x.f(\sin x)\mathrm{d}x$.

A. 1. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=\sin x\Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\mathrm{d}x$. Đổi cận $x=0\Rightarrow t=0$, $x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=1$.

Ta có $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x.f(\sin x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=7$.

Câu 113: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=x^2-2x$ và đường thẳng $y=x$.

A. $\dfrac{9}{2}$. **B.** $\dfrac{11}{6}$. **C.** $\dfrac{27}{6}$. **D.** $\dfrac{17}{6}$.

Câu 114: Biết tích phân $\int\limits_0^1\dfrac{x}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x=\dfrac{a+b\sqrt{3}}{9}$ với a, b là các số thực. Tính tổng $T=a+b$.

A. $T=-10$. **B.** $T=-4$. **C.** $T=15$. **D.** $T=8$.

Câu 115: **(THPT Chuyên Ngữ – Hà Nội - Lần 1 năm 2017 – 2018)** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2 - 2x$ và đường thẳng $y = x$.

A. $\dfrac{9}{2}$. **B.** $\dfrac{11}{6}$. **C.** $\dfrac{27}{6}$. **D.** $\dfrac{17}{6}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $x^2 - 2x = x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng cần tìm bằng $S = \int\limits_0^3 \left|x^2 - 2x - x\right| \mathrm{d}x = \left|\int\limits_0^3 \left(x^2 - 3x\right) \mathrm{d}x\right| = \dfrac{9}{2}$.

Câu 116: **(THPT Chuyên Ngữ – Hà Nội - Lần 1 năm 2017 – 2018)** Biết tích phân $\int\limits_0^1 \dfrac{x}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{2x+1}} \mathrm{d}x = \dfrac{a + b\sqrt{3}}{9}$ với a, b là các số thực. Tính tổng $T = a + b$.

A. $T = -10$. **B.** $T = -4$. **C.** $T = 15$. **D.** $T = 8$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int\limits_0^1 \dfrac{x}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{2x+1}} \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \dfrac{x\left(\sqrt{3x+1} - \sqrt{2x+1}\right)}{x} \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(\sqrt{3x+1} - \sqrt{2x+1}\right) \mathrm{d}x$

$= \int\limits_0^1 \left[(3x+1)^{\frac{1}{2}} - (2x+1)^{\frac{1}{2}}\right] \mathrm{d}x = \left[\dfrac{2}{9}(3x+1)^{\frac{3}{2}} - \dfrac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_0^1$

$= \left(\dfrac{16}{9} - \sqrt{3}\right) - \left(\dfrac{2}{9} - \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{17}{9} - \sqrt{3} = \dfrac{17 - 9\sqrt{3}}{9}$.

Câu 117: **(THPT Chuyên ĐHSP – Hà Nội - Lần 1 năm 2017 – 2018)** Cho số dương a thỏa mãn hình phẳng giới hạn bởi các đường parabol $y = ax^2 - 2$ và $y = 4 - 2ax^2$ có diện tích bằng 16. Giá trị của a bằng

A. 2. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình: $ax^2 - 2 = 4 - 2ax^2 \Leftrightarrow 3ax^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{2}{a}}$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = ax^2 - 2$ và $y = 4 - 2ax^2$ là

$$S = \int\limits_{-\sqrt{\frac{2}{a}}}^{\sqrt{\frac{2}{a}}} \left|3ax^2 - 6\right| \mathrm{d}x = \left|\int\limits_{-\sqrt{\frac{2}{a}}}^{\sqrt{\frac{2}{a}}} \left(3ax^2 - 6\right) \mathrm{d}x\right| = \dfrac{8\sqrt{2}}{\sqrt{a}}.$$

Theo giả thiết $S = 16 \Leftrightarrow \dfrac{8\sqrt{2}}{\sqrt{a}} = 16 \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{2}$.

Câu 118: (THPT Chuyên ĐHSP – Hà Nội - Lần 1 năm 2017 – 2018) Cho số dương a và hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f(-x)=a$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của biểu thức $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $2a^2$. **B.** a. **C.** a^2. **D.** $2a$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $x=-t \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=\int_{a}^{-a} f(-t)(-\mathrm{d}t)=\int_{-a}^{a} f(-t)\mathrm{d}t=\int_{-a}^{a} f(-x)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow 2\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{a}\left[f(x)+f(-x)\right]\mathrm{d}x=\int_{-a}^{a} a\mathrm{d}x \Leftrightarrow 2\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=2a^2 \Leftrightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=a^2$.

Câu 119: (THPT Chuyên Vĩnh Phúc – Vĩnh Phúc - Lần 4 năm 2017 – 2018) Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=\mathrm{e}^x$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=\dfrac{\mathrm{e}^2-1}{2}$. **B.** $V=\dfrac{\pi\left(\mathrm{e}^2+1\right)}{2}$. **C.** $V=\dfrac{\pi\left(\mathrm{e}^2-1\right)}{2}$. **D.** $\dfrac{\pi\mathrm{e}^2}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Thể tích khối tròn xoay cần tính là $V=\pi\int_0^1\left(\mathrm{e}^x\right)^2\mathrm{d}x=\pi\left(\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\right)\Bigg|_0^1=\dfrac{\pi\left(\mathrm{e}^2-1\right)}{2}$.

Câu 120: (THPT Chuyên Vĩnh Phúc – Vĩnh Phúc - Lần 4 năm 2017 – 2018) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)=2x+1$ và $f(1)=5$. Phương trình $f(x)=5$ có hai nghiệm x_1, x_2. Tính tổng $S=\log_2|x_1|+\log_2|x_2|$.

A. $S=1$. **B.** $S=2$. **C.** $S=0$. **D.** $S=4$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int(2x+1)\mathrm{d}x=x^2+x+C$.

Mà $f(1)=5 \Leftrightarrow 1+1+C=5 \Leftrightarrow C=3 \Rightarrow f(x)=x^2+x+3$.

Xét phương trình: $f(x)=5 \Leftrightarrow x^2+x+3=5 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=-2\end{array}\right.$.

$S=\log_2|x_1|+\log_2|x_2|=\log_2|1|+\log_2|-2|=1$.

Câu 121: (THPT Chuyên Vĩnh Phúc – Vĩnh Phúc - Lần 4 năm 2017 – 2018) Cho hàm số $f(x)=x^4+4x^3-3x^2-x+1, \forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int_0^1 f^2(x).f'(x)\mathrm{d}x$.

A. 2. **B.** -2. **C.** $-\dfrac{7}{3}$. **D.** $\dfrac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=f(x)\Rightarrow \mathrm{d}t=f'(x)\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=f(0)=1$, $x=1\Rightarrow t=f(1)=2$.

Khi đó $I=\int\limits_1^2 t^2\mathrm{d}t=\left.\frac{t^3}{3}\right|_1^2=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$.

Câu 122: (THPT Kim Liên – Hà Nội - Lần 2 năm 2017 – 2018) Biết $\int\limits_0^1 \frac{\pi x^3+2^x+\mathrm{e}x^3.2^x}{\pi+\mathrm{e}.2^x}\mathrm{d}x=\frac{1}{m}+\frac{1}{\mathrm{e}\ln n}\ln\left(p+\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+\pi}\right)$ với m, n, p là các số nguyên dương. Tính tổng $S=m+n+p$.

A. $S=6$. **B.** $S=5$. **C.** $S=7$. **D.** $S=8$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int\limits_0^1 \frac{\pi x^3+2^x+\mathrm{e}x^3.2^x}{\pi+\mathrm{e}.2^x}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(x^3+\frac{2^x}{\pi+\mathrm{e}.2^x}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}+\int\limits_0^1\frac{2^x}{\pi+\mathrm{e}.2^x}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}+J$.

Tính $J=\int\limits_0^1\frac{2^x}{\pi+\mathrm{e}.2^x}\mathrm{d}x$. Đặt $\pi+\mathrm{e}.2^x=t\Rightarrow \mathrm{e}.2^x\ln 2\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\Leftrightarrow 2^x\mathrm{d}x=\frac{1}{\mathrm{e}.\ln 2}\mathrm{d}t$.

Đổi cận: Khi $x=0$ thì $t=\pi+\mathrm{e}$; khi $x=1$ thì $t=\pi+2\mathrm{e}$.

$J=\int\limits_0^1\frac{2^x}{\pi+\mathrm{e}.2^x}\mathrm{d}x=\frac{1}{\mathrm{e}\ln 2}\int\limits_{\pi+\mathrm{e}}^{\pi+2\mathrm{e}}\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\frac{1}{\mathrm{e}\ln 2}\ln|t|\Big|_{\pi+\mathrm{e}}^{\pi+2\mathrm{e}}=\frac{1}{\mathrm{e}\ln 2}\ln\left(1+\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+\pi}\right)$.

Khi đó $\int\limits_0^1 \frac{\pi x^3+2^x+\mathrm{e}x^3.2^x}{\pi+\mathrm{e}.2^x}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}+\frac{1}{\mathrm{e}\ln 2}\ln\left(1+\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+\pi}\right)\Rightarrow m=4$, $n=2$, $p=1$. Vậy $S=7$.

Câu 123: (THPT Trần Phú – Hà Tĩnh - Lần 2 năm 2017 – 2018) Biết tích phân $\int\limits_1^2(4x-1)\ln x\mathrm{d}x=a\ln 2+b$ với a, $b\in Z$. Tổng $2a+b$ bằng

A. 5. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 13.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\Rightarrow \mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}v=(4x-1)\mathrm{d}x.\end{cases}$.

Ta có $\int\limits_1^2(4x-1)\ln x\mathrm{d}x=x(2x-1)\ln x\Big|_1^2-\int\limits_1^2(2x-1)\mathrm{d}x=6\ln 2-\left(x^2-x\right)\Big|_1^2=6\ln 2-2$.

Vậy $2a+b=10$.

Câu 124: (THPT Trần Phú – Hà Tĩnh - Lần 2 năm 2017 – 2018) Biết $\int\limits_{-1}^{11}f(x)\mathrm{d}x=18$. Tính $I=\int\limits_0^2 x\left(2+f\left(3x^2-1\right)\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=5$. **B.** $I=7$. **C.** $I=8$ **D.** $I=10$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=3x^2-1\Rightarrow \mathrm{d}t=6x\mathrm{d}x$. Đổi cận $x=0\Rightarrow t=-1$, $x=2\Rightarrow t=11$

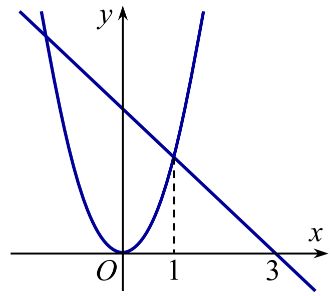
$I=\int\limits_0^2 x\left(2+f\left(3x^2-1\right)\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 2x\mathrm{d}x+\int\limits_0^2 xf\left(3x^2-1\right)\mathrm{d}x=4+\frac{1}{6}\int\limits_{-1}^{11}f(t)\mathrm{d}t=4+\frac{1}{6}.18=7$.

Câu 125: (THPT Trần Phú – Hà Tĩnh - Lần 2 năm 2017 – 2018) Gọi (H) là hình được giới hạn bởi nhánh parabol $y=2x^2$ (với $x\geq 0$), đường thẳng $y=-x+3$ và trục hoành. Thể tích của khối tròn xoay tạo bởi hình (H) khi quay quanh trục Ox bằng

A. $V=\frac{52\pi}{15}$. **B.** $V=\frac{17\pi}{5}$. **C.** $V=\frac{51\pi}{17}$. **D.** $V=\frac{53\pi}{17}$.

Lời giải

Chọn A



Phương trình hoành độ giao điểm: $2x^2=-x+3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-\frac{3}{2}\end{array}\right.$

Thể tích khối tròn xoay tạo bởi $(H): V=\pi\int_1^3(-x+3)^2\,\mathrm{d}x+\pi\int_0^1 4x^4\,\mathrm{d}x=\frac{52}{15}\pi$.

Câu 126: (THPT Thuận Thành 2 – Bắc Ninh - Lần 2 năm 2017 – 2018) Diện tích S hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^3+2x+1$, trục hoành, $x=1$ và $x=2$ là

A. $S=\frac{31}{4}$. **B.** $S=\frac{49}{4}$. **C.** $S=\frac{21}{4}$. **D.** $S=\frac{39}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S=\int_1^2\left|x^3+2x+1\right|\mathrm{d}x=\frac{31}{4}$.

Câu 127: (THPT Thuận Thành 2 – Bắc Ninh - Lần 2 năm 2017 – 2018) Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{2x+1}$, biết $F(0)=1$. Giá trị của $F(-2)$ bằng

A. $1+\frac{1}{2}\ln 3$. **B.** $1+\frac{1}{2}\ln 5$. **C.** $1+\ln 3$. **D.** $\frac{1}{2}(1+\ln 3)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{2x+1}=\frac{1}{2}\ln|2x+1|+C$.

$F(0)=1\Leftrightarrow\frac{1}{2}\ln 1+C=1\Leftrightarrow C=1\Rightarrow F(x)=\frac{1}{2}\ln|2x+1|+1\Rightarrow F(-2)=1+\frac{1}{2}\ln 3$.

Câu 128: (THPT Thuận Thành 2 – Bắc Ninh - Lần 2 năm 2017 – 2018) $\int_{-3}^0\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x$ bằng

A. $-2\ln 2$. **B.** $2\ln 2-1$. **C.** $\ln 2$. **D.** $2\ln 2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int\limits_{-3}^{0}\frac{1}{1-x}\text{d}x=\left(-\ln\left|1-x\right|\right)\Big|_{-3}^{0}=\ln 4=2\ln 2$.

Câu 129: (THPT Thuận Thành 2 – Bắc Ninh - Lần 2 năm 2017 – 2018) Cho phần vật thể B giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình $x=0$ và $x=\frac{\pi}{3}$. Cắt phần vật thể B bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $\left(0\le x\le\frac{\pi}{3}\right)$ ta được thiết diện là một tam giác vuông có độ dài hai cạnh góc vuông lần lượt là $2x$ và $\cos x$. Thể tích vật thể B bằng

A. $\frac{\sqrt{3}\pi+3}{6}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}\pi-3}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}\pi-3}{6}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{6}$.

Lời giải

Chọn C

Thể tích vật thể B là $V=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}x\cos x\text{d}x=x\sin x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{3}}-\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}\sin x\text{d}x=x\sin x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{3}}+\cos x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}\pi-3}{6}$.

Câu 130: (THPT Thuận Thành 2 – Bắc Ninh - Lần 2 năm 2017 – 2018) Biết $\int\limits_{1}^{3}\frac{3+\ln x}{(x+1)^2}\text{d}x=\frac{a+\ln b-\ln c}{4}$ với a, b, c là các số nguyên dương. Giá trị của biểu thức $P=a+b+c$ bằng?

A. 46. **B.** 35. **C.** 11. **D.** 48.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int\limits_{1}^{3}\frac{3+\ln x}{(x+1)^2}\text{d}x=-\int\limits_{1}^{3}(3+\ln x)\text{d}\left(\frac{1}{x+1}\right)=-\frac{3+\ln x}{x+1}\Bigg|_{1}^{3}+\int\limits_{1}^{3}\frac{1}{x+1}\text{d}(3+\ln x)$

$=-\frac{3+\ln 3}{4}+\frac{3}{2}+\int\limits_{1}^{3}\frac{1}{x+1}.\frac{1}{x}\text{d}x=\frac{3-\ln 3}{4}+\int\limits_{1}^{3}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)\text{d}x=\frac{3-\ln 3}{4}+\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\Bigg|_{1}^{3}$

$=\frac{3-\ln 3}{4}+\ln\frac{3}{4}-\ln\frac{1}{2}=\frac{3-\ln 3}{4}+\ln 3-\ln 4+\ln 2=\frac{3-\ln 3}{4}+\ln 3-\ln 2$

$=\frac{3+3\ln 3-4\ln 2}{4}=\frac{3+\ln 27-\ln 16}{4}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\b=27\Rightarrow P=46.\\c=16\end{cases}$

Câu 131: (THPT Chuyên Lương Thế Vinh – Đồng Nai – Lần 2 năm 2017 – 2018) . Gọi $F(t)$ là số lượng vi khuẩn phát triển sau t giờ. Biết $F(t)$ thỏa mãn $F'(t)=\frac{10000}{1+2t}$ với $\forall t>0$ và ban đầu có 1000 con vi khuẩn. Hỏi sau 2 giờ số lượng vi khuẩn là

A. 17094. **B.** 9047. **C.** 8047. **D.** 32118.

Lời giải

Chọn B

Ta có $F(t)=\int F'(t)\mathrm{d}t=\int \frac{10000}{1+2t}\mathrm{d}t=5000\ln(1+2t)+C$.

Ban đầu có 1000 con vi khuẩn$\Rightarrow F(0)=C=1000 \Rightarrow F(t)=5000\ln(1+2t)+1000$.

Suy ra số vi khuẩn sau 2 giờ là $F(2)=5000\ln 5+1000\simeq 9047$.

Câu 132: (THPT Chuyên Lương Thế Vinh – Đồng Nai – Lần 2 năm 2017 – 2018) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_0^1 f(2x)\mathrm{d}x=8$. Tính $I=\int\limits_0^{\sqrt{2}} xf(x^2)\mathrm{d}x$

A. 4. **B.** 16. **C.** 8. **D.** 32.

Lời giải

Chọn C

Đặt $x^2=2t\Rightarrow 2x\mathrm{d}x=2\mathrm{d}t\Rightarrow x\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0$, $x=\sqrt{2}\Rightarrow t=1$.

Ta có: $I=\int\limits_0^1 f(2t)\mathrm{d}t=8$.

Câu 133: (THPT Chuyên Lương Thế Vinh – Đồng Nai – Lần 2 năm 2017 – 2018) Biết $\int\limits_1^4 \sqrt{\frac{1}{4x}+\frac{\sqrt{x}+\mathrm{e}^x}{\sqrt{x}\mathrm{e}^{2x}}}\mathrm{d}x=a+\mathrm{e}^b-\mathrm{e}^c$ với a, b, c là các số nguyên. Tính $T=a+b+c$.

A. $T=-3$. **B.** $T=3$. **C.** $T=-4$. **D.** $T=-5$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\frac{1}{4x}+\frac{\sqrt{x}+\mathrm{e}^x}{\sqrt{x}\mathrm{e}^{2x}}=\frac{1}{4x}+\frac{1}{\mathrm{e}^{2x}}+\frac{1}{\sqrt{x}\mathrm{e}^x}=\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{\mathrm{e}^x}\right)^2$ nên

$\int\limits_1^4 \sqrt{\frac{1}{4x}+\frac{\sqrt{x}+\mathrm{e}^x}{\sqrt{x}\mathrm{e}^{2x}}}\mathrm{d}x=\int\limits_1^4\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{\mathrm{e}^x}\right)\mathrm{d}x=\left(\sqrt{x}-\mathrm{e}^{-x}\right)\Big|_1^4=1+\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-4}$.

Vậy $a=1$, $b=-1$, $c=-4$. Suy ra $T=-4$.

Câu 134: (THPT Chuyên Lương Thế Vinh – Đồng Nai – Lần 2 năm 2017 – 2018) Cho hàm số $f(x)=\frac{a}{x^2}+\frac{b}{x}+2$, với a, b là các số hữu tỉ thỏa điều kiện $\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\mathrm{d}x=2-3\ln 2$. Tính $T=a+b$.

A. $T=-1$. **B.** $T=2$. **C.** $T=-2$. **D.** $T=0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{1}{2}}^1\left(\frac{a}{x^2}+\frac{b}{x}+2\right)\mathrm{d}x=\left(-\frac{a}{x}+b\ln|x|+2x\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^1=a+1+b\ln 2$.

Theo giả thiết, ta có $2-3\ln 2=a+1+b\ln 2$. Từ đó suy ra $a=1$, $b=-3$.

Vậy $T=a+b=-2$.

Câu 135: (SGD Quảng Nam – năm 2017 – 2018) Tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\cos 2x\mathrm{d}x$ bằng.

A. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \cos 2x\text{d}x = \dfrac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Câu 136: (SGD Quảng Nam – năm 2017 – 2018) Biết $\int x\cos 2x\text{d}x = ax\sin 2x + b\cos 2x + C$ với a, b là các số hữu tỉ. Tính tích ab?

A. $ab = \dfrac{1}{8}$. **B.** $ab = \dfrac{1}{4}$. **C.** $ab = -\dfrac{1}{8}$. **D.** $ab = -\dfrac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \text{d}v = \cos 2x\text{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{d}u = \text{d}x \\ v = \dfrac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$

Khi đó $\int x\cos 2x\text{d}x = \dfrac{1}{2}x\sin 2x - \dfrac{1}{2}\int \sin 2x\text{d}x = \dfrac{1}{2}x\sin 2x + \dfrac{1}{4}\cos 2x + C$

$\Rightarrow a = \dfrac{1}{2}$, $b = \dfrac{1}{4}$.

Vậy $ab = \dfrac{1}{8}$.

Câu 137: (SGD Quảng Nam – năm 2017 – 2018) Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2$ và đường thẳng $y = 2x$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình (H) xung quanh trục hoành.

A. $\dfrac{64\pi}{15}$. **B.** $\dfrac{16\pi}{15}$. **C.** $\dfrac{20\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{4\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình hoành độ giao điểm của paraboly $y = x^2$ và đường thẳng $y = 2x$ ta có $x^2 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Do $x^2 - 2x < 0$ với $0 < x < 2$ nên $2x - x^2 > 0$ với $0 < x < 2$.

Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình (H) xung quanh trục hoành thì

$$V = \pi\int\limits_0^2 \left((2x)^2 - \left(x^2\right)^2\right)dx = \pi\left(\dfrac{4}{3}x^3 - \dfrac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^2 = \dfrac{64\pi}{15}.$$

Câu 138: (ĐHQG TPHCM – Cơ Sở 2 – năm 2017 – 2018) Cho hai hàm số liên tục f và g có nguyên hàm lần lượt là F và G trên đoạn $[1;2]$. Biết rằng $F(1) = 1$, $F(2) = 4$, $G(1) = \dfrac{3}{2}$, $G(2) = 2$ và $\int\limits_1^2 f(x)G(x)\text{d}x = \dfrac{67}{12}$. Tính $\int\limits_1^2 F(x)g(x)\text{d}x$

A. $\dfrac{11}{12}$. **B.** $-\dfrac{145}{12}$. **C.** $-\dfrac{11}{12}$. **D.** $\dfrac{145}{12}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases} u = F(x) \\ dv = g(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f(x)\mathrm{d}x \\ v = G(x) \end{cases}$

$\int\limits_1^2 F(x)g(x)\mathrm{d}x = \left(F(x)G(x)\right)\Big|_1^2 - \int\limits_1^2 f(x)G(x)\mathrm{d}x = F(2)G(2) - F(1)G(1) - \int\limits_1^2 f(x)G(x)\mathrm{d}x$

$= 4.2 - 1.\dfrac{3}{2} - \dfrac{67}{12} = \dfrac{11}{12}$.

Câu 139: (ĐHQG TPHCM – Cơ Sở 2 – năm 2017 – 2018) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3$ và $y = x^5$ bằng

A. 0. **B.** 4. **C.** $\dfrac{1}{6}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm $x^5 = x^3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^5$ và $y = x^3$ bằng

$S = \int\limits_{-1}^{1} \left|x^5 - x^3\right| \mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{0} \left(x^5 - x^3\right)\mathrm{d}x - \int\limits_{0}^{1} \left(x^5 - x^3\right)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{6}$.

Câu 140: (ĐHQG TPHCM – Cơ Sở 2 – năm 2017 – 2018) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa điều kiện $f(x) + f(-x) = 2\sin x$. Tính $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Giả sử $I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$.

Đặt $t = -x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$, đổi cận $x = -\dfrac{\pi}{2} \to t = \dfrac{\pi}{2}$ $x = \dfrac{\pi}{2} \to t = -\dfrac{\pi}{2}$.

Khi đó $I = -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f(t)\mathrm{d}t = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\mathrm{d}t$.

Suy ra $2I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[f(x) + f(-x)\right]\mathrm{d}x = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow 2I = 0 \Rightarrow I = 0$

Câu 141: (THPT Trần Phú – Đà Nẵng - Lần 2 – năm 2017 – 2018) Một người gửi 20 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất $0,8\%/$ tháng. Biết rằng nếu không rút tiền thì cứ sau mỗi tháng , số tiền lãi sẽ được cộng dồn vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng, người đó lãnh được số tiền nhiều hơn 50 triệu đồng bao gồm cả tiền gốc và lãi, nếu trong thời gian này người đó không rút tiền và lãi suất không thay đổi?

A. 115 tháng. **B.** 114 tháng. **C.** 143 tháng. **D.** 12 tháng.

Lời giải

Chọn A

Giả sử sau n tháng người đó thu được số tiền hơn 50 triệu đồng.

Ta có: $20.10^6\left(1+0,008\right)^n > 50.10^6 \Leftrightarrow n > 114,994$.

Vậy sau ít nhất 115 tháng người đó lãnh được số tiền nhiều hơn 50 triệu đồng bao gồm cả tiền gốc và lãi.

Câu 142: (THPT Trần Phú – Đà Nẵng - Lần 2 – năm 2017 – 2018) Cho hàm số $f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'\left(x\right)=\dfrac{2}{2x-1}$ và $f\left(0\right)=1$. Giá trị của biểu thức $f\left(-1\right)+f\left(3\right)$ bằng

A. $4+\ln 15$. **B.** $3+\ln 15$. **C.** $2+\ln 15$. **D.** $\ln 15$.

Lời giải

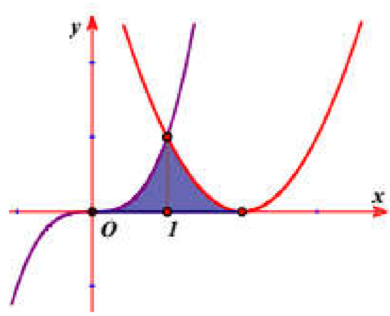
Chọn C

Ta có $f\left(x\right)=\int f'\left(x\right)dx=\int\dfrac{2}{2x-1}dx=\int\dfrac{2.\frac{1}{2}d\left(2x-1\right)}{2x-1}=\ln\left|2x-1\right|+c$.

$f\left(0\right)=1\Leftrightarrow c=1 \Leftrightarrow f\left(x\right)=\ln\left|2x-1\right|+1$.

$\begin{cases} f\left(-1\right)=\ln 3+1 \\ f\left(3\right)=\ln 5+1 \end{cases} \Leftrightarrow f\left(-1\right)+f\left(3\right)=2+\ln 15$.

Câu 143: (THPT Trần Phú – Đà Nẵng - Lần 2 – năm 2017 – 2018) Cho hình $\left(H\right)$ là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=x^2-4x+4$, đường cong $y=x^3$ và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ). Tính diện tích S của hình $\left(H\right)$.



A. $S=\dfrac{11}{2}$. **B.** $S=\dfrac{7}{12}$. **C.** $S=\dfrac{20}{3}$. **D.** $S=-\dfrac{11}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Parabol $y=x^2-4x+4$ có đỉnh $I\left(2;0\right)$.

Phương trình hoành độ giao điểm của $y=x^2-4x+4$ và $y=x^3$ là $x^3-x^2+4x-4=0\Leftrightarrow x=1$.

Câu 144: Ta có $S=\int_0^1 x^3\mathrm{d}x+\int_1^2\left(x^2-4x+4\right)\mathrm{d}x=\dfrac{7}{12}$.**(THPT Chuyên ĐH Vinh – Lần 2 – năm 2017 – 2018)**

Tích phân $\int_0^1 x\left(x^2+3\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** $\dfrac{4}{7}$. **D.** $\dfrac{7}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=x^2+3\Rightarrow \mathrm{d}t=2x\mathrm{d}x$.

$x=0\Rightarrow t=3$, $x=1\Rightarrow t=4$.

Khi đó: $\int_0^1 x\left(x^2+3\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int_3^4 t\mathrm{d}t=\left.\dfrac{t^2}{4}\right|_3^4=\dfrac{7}{4}$.

Câu 145: **(THPT Chuyên ĐH Vinh – Lần 2 – năm 2017 – 2018)** Cho biết $F\left(x\right)=\dfrac{1}{3}x^3+2x-\dfrac{1}{x}$ là một nguyên hàm của $f\left(x\right)=\dfrac{\left(x^2+a\right)^2}{x^2}$. Tìm nguyên hàm của $g\left(x\right)=x\cos ax$.

A. $x\sin x-\cos x+C$. **B.** $\dfrac{1}{2}x\sin 2x-\dfrac{1}{4}\cos 2x+C$.

C. $x\sin x+\cos x+C$. **D.** $\dfrac{1}{2}x\sin 2x+\dfrac{1}{4}\cos 2x+C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $F'\left(x\right)=x^2+2+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{\left(x^2+1\right)^2}{x^2}$. Suy ra $a=1$.

Khi đó $\int g\left(x\right)\mathrm{d}x=\int x\cos x\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}\sin x=x.\sin x-\int \sin x\mathrm{d}x=x.\sin x+\cos x+C$.

Câu 146: **(SGD Nam Định – năm 2017 – 2018)** $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=3x^2+\dfrac{1}{2x+1}$. Biết $F\left(0\right)=0$, $F\left(1\right)=a+\dfrac{b}{c}\ln 3$ trong đó a, b, c là các số nguyên dương và $\dfrac{b}{c}$ là phân số tối giản. Khi đó giá trị biểu thức $a+b+c$ bằng.

A. 4. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 12.

Lời giải

Chọn A

Ta có $F\left(x\right)=\int\left(3x^2+\dfrac{1}{2x+1}\right)\mathrm{d}x=x^3+\dfrac{1}{2}\ln\left|2x+1\right|+C$.

Do $F\left(0\right)=0\Rightarrow C=0\Rightarrow F\left(x\right)=x^3+\dfrac{1}{2}\ln\left|2x+1\right|$.

Vậy $F\left(1\right)=1+\dfrac{1}{2}\ln 3\Rightarrow a=1;\ b=1;\ c=2\Rightarrow a+b+c=4$.

Câu 147: **(SGD Nam Định – năm 2017 – 2018)** Biết $\int_e^{e^4} f\left(\ln x\right)\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=4$. Tính tích phân $I=\int_1^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=8$. **B.** $I=16$. **C.** $I=2$. **D.** $I=4$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = \ln x \Rightarrow \mathrm{d}t = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$.

x	e	e^4
t	1	4

$$\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^4} f(\ln x)\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \int_1^4 f(t)\mathrm{d}t = \int_1^4 f(x)\mathrm{d}x.$$

Suy ra $I = \int_1^4 f(x)\mathrm{d}x = 4$.

Câu 1: **(SGD Thanh Hóa – năm 2017 – 2018)** Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm phân biệt của phương trình $z^4+z^2+1=0$ trên tập số phức. Tính giá trị của biểu thức $P=|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2+|z_4|^2$.

A. 2. **B.** 8. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có $z^4+z^2+1=0 \Leftrightarrow (z^2+1)^2-z^2=0 \Leftrightarrow (z^2+z+1)(z^2-z+1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2+z+1=0 \\ z^2-z+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(z+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}i^2 \\ \left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}i^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_{1,2}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \\ z_{3,4}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \end{array}\right. \Rightarrow |z_1|=|z_2|=|z_3|=|z_4|=1.$$

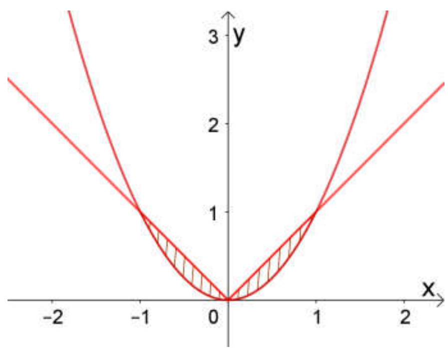
Vậy $P=|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2+|z_4|^2=4$.

Câu 2: **(Tạp chí THTT – Tháng 4 năm 2017 – 2018)** Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y=|x|$ và $y=x^2$ quay quanh trục tung tạo nên một vật thể tròn xoay có thể tích bằng

A. $\frac{\pi}{6}$. **B.** $\frac{\pi}{3}$. **C.** $\frac{2\pi}{15}$. **D.** $\frac{4\pi}{15}$.

Lời giải

Chọn A



Phương trình hoành độ giao điểm $|x|=x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=0 \\ x=\pm 1 \Rightarrow y=1 \end{array}\right.$.

Ta có đồ thị hai hàm số $y=|x|$ và $y=x^2$ đều đối xứng qua Oy nên hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y=|x|$ và $y=x^2$ quay quanh trục tung tạo nên một vật thể tròn xoay có thể tích bằng thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $x=y$ và $x=\sqrt{y}$ quay xung quanh trục Oy.

Thể tích vật thể tròn xoay cần tìm là:

$$V=\pi\int_0^1 |y-y^2|\,\mathrm{d}y=\pi\int_0^1 (y-y^2)\,\mathrm{d}y=\pi.\left(\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3\right)\Big|_0^1=\frac{\pi}{6}.$$

Câu 3: **(Tạp chí THTT – Tháng 4 năm 2017 – 2018)** Giá trị của tích phân $\int_0^{100} x(x-1)...(x-100)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 100. **D.** một giá trị khác.

Lời giải

Chọn A

Tính $I=\int\limits_0^{100} x(x-1)...(x-100)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t=100-x \Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$.

Đổi cận: Khi $x=0$ thì $t=100$; khi $x=100$ thì $t=0$.

Do $x(x-1)...(x-100)=(100-t)(99-t)...(1-t)(-t)=-t(t-1)...(t-99)(t-100)$ nên

$I=\int\limits_0^{100} x(x-1)...(x-100)\,\mathrm{d}x=-\int\limits_0^{100} t(t-1)...(t-100)\,\mathrm{d}t=-I \Leftrightarrow 2I=0 \Leftrightarrow I=0$.

Câu 4: (THPT Chuyên Nguyễn Quang Diệu – Đồng Tháp – Lần 5 năm 2017 – 2018) Có bao nhiêu giá trị thực của a để có $\int\limits_0^{a}(2x+5)\,\mathrm{d}x=a-4$

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int\limits_0^{a}(2x+5)\,\mathrm{d}x=a-4 \Leftrightarrow \left(x^2+5x\right)\Big|_0^a=a-4 \Leftrightarrow a^2+4a+4=0 \Leftrightarrow a=-2$

Câu 5: (THPT Chuyên Nguyễn Quang Diệu – Đồng Tháp – Lần 5 năm 2017 – 2018) Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}-1$, trục hoành và đường thẳng $x=4$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=\frac{7}{6}$. **B.** $V=\frac{7\pi^2}{6}$. **C.** $V=\frac{7\pi}{6}$. **D.** $V=\frac{7\pi}{3}$.

Lời giải

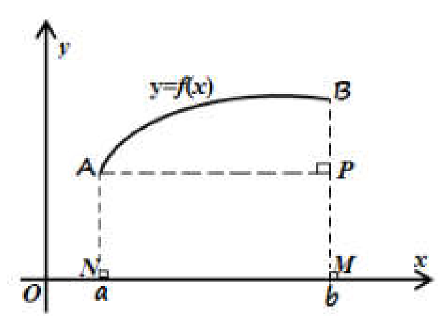
Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm $\sqrt{x}-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

Thể tích khối tròn xoay tạo thành $V=\pi\int\limits_1^4\left(\sqrt{x}-1\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_1^4\left(x-2\sqrt{x}+1\right)\mathrm{d}x$

$=\pi\left(\frac{x^2}{2}-\frac{4}{3}x\sqrt{x}+x\right)\Bigg|_1^4=\frac{7\pi}{6}$.

Câu 6: (THPT Chuyên Thái Bình – Thái Bình – Lần 5 năm 2017 – 2018) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a;b]$, có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ sau:



Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x$ là diện tích hình thang $ABMN$.

B. $\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x$ là độ dài đoạn BP.

C. $\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x$ là độ dài đoạn MN.

D. $\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x$ là độ dài đoạn cong AB.

Lời giải

Chọn B

$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = f(x)\Big|_a^b = f(b) - f(a) = BM - PM = BP$.

Câu 7: (THPT Chuyên Thái Bình – Thái Bình – Lần 5 năm 2017 – 2018) Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{khi } 0 \le x \le 1 \\ 4 - x & \text{khi } 1 \le x \le 2 \end{cases}$. Tính tích phân $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{7}{2}$. **B.** 1. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 (3x^2)\mathrm{d}x + \int_1^2 (4-x)\mathrm{d}x = \frac{3x^3}{3}\Big|_1^2 + \left(4x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2 = = \frac{7}{2}.$$

Câu 8: (THPT Chuyên Hùng Vương – Gia Lai – Lần 2 năm 2017 – 2018) Cho hình phẳng H giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$; $y = 0$; $x = 4$. Diện tích S của hình phẳng H bằng

A. $S = \frac{16}{3}$. **B.** $S = 3$. **C.** $S = \frac{15}{4}$. **D.** $S = \frac{17}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình $\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Ta có $S = \int_0^4 \sqrt{x}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_0^4 = \frac{16}{3}$.

Câu 9: (THPT Chuyên Hùng Vương – Gia Lai – Lần 2 năm 2017 – 2018) Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x+1} & \text{khi } 0 \le x \le 1 \\ 2x - 1 & \text{khi } 1 \le x \le 3 \end{cases}$. Tính tích phân $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $6 + \ln 4$. **B.** $4 + \ln 4$. **C.** $6 + \ln 2$. **D.** $2 + 2\ln 2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{2}{x+1}\mathrm{d}x + \int_1^3 (2x-1)\mathrm{d}x$

$= 2\ln|x+1|\Big|_0^1 + (x^2 - x)\Big|_1^3 = \ln 4 + 6$.

Câu 10: (THPT Chuyên Hùng Vương – Gia Lai – Lần 2 năm 2017 – 2018) Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_2(9 - x) \le 3$.

A. 7. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_2(9-x)\le 3 \Leftrightarrow 0<9-x\le 8 \Leftrightarrow 1\le x<9$. Vì $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{1;2;3;4;5;6;7;8\}$.

Vậy có 8 nghiệm nguyên.

Câu 11: (THPT Chuyên Hùng Vương – Gia Lai – Lần 2 năm 2017 – 2018) Xác định số thực dương m để tích phân $\int_0^m (x-x^2)\mathrm{d}x$ có giá trị lớn nhất.

A. $m=1$. **B.** $m=2$. **C.** $m=3$. **D.** $m=4$

Lời giải

Chọn A

$$P=\int_0^m (x-x^2)\mathrm{d}x=\left.\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\right|_0^m=\frac{m^2}{2}-\frac{m^3}{3}.$$

Đặt $f(m)=\frac{m^2}{2}-\frac{m^3}{3}\Rightarrow f'(m)=m-m^2\Rightarrow f'(m)=0\Leftrightarrow m=0$ hoặc $m=1$

Lập bảng biến thiên

m	0		1		$+\infty$
$f'(m)$		$+$	0	$-$	
$f(m)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{6}$	$\searrow$	$-\infty$

Vậy $f(m)$ đạt GTLN tại $m=1$.

Câu 12: (THPT Chuyên Hùng Vương – Gia Lai – Lần 2 năm 2017 – 2018) Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $xy=4$, $x=0$, $y=1$ và $y=4$. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình (H) quanh trục tung.

A. $V=8\pi$. **B.** $V=16\pi$. **C.** $V=10\pi$. **D.** $V=12\pi$.

Lời giải

Chọn D

Ta có thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình (H) quanh trục tung là

$$V=\pi\int_1^4\left(\frac{4}{y}\right)^2\mathrm{d}y=\pi\int_1^4\frac{16}{y^2}\mathrm{d}y=\pi\left.\left(-\frac{16}{y}\right)\right|_1^4=12\pi.$$

Câu 13: (THPT Chuyên Lương Thế Vinh - Hà Nội – Lần 2 năm 2017 – 2018) Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{\cos x}.\sin x\mathrm{d}x$ bằng .

A. $1-\mathrm{e}$. **B.** $\mathrm{e}-1$. **C.** $\mathrm{e}+1$. **D.** e.

Lời giải

Chọn B

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{\cos x}.\sin x\mathrm{d}x=-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{\cos x}\mathrm{d}(\cos x)=\left.\mathrm{e}^{\cos x}\right|_{\frac{\pi}{2}}^{0}=\mathrm{e}-1.$$

Câu 14: (SGD Hà Tĩnh – Lần 2 năm 2017 – 2018) Biết $f\left(x\right)$ làm hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_0^9 f\left(x\right)\mathrm{d}x = 9$.

Khi đó giá trị của $\int\limits_1^4 f\left(3x-3\right)\mathrm{d}x$ là

A. 27. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 24.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$I = \int\limits_1^4 f\left(3x-3\right)\mathrm{d}x$. Đặt $t = 3x-3 \Rightarrow \mathrm{d}t = 3\mathrm{d}x$

Đổi cận: $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = 0 \\ x = 4 \Rightarrow t = 9 \end{cases}$

$I = \dfrac{1}{3}\int\limits_0^9 f\left(t\right)\mathrm{d}t = \dfrac{1}{3}\int\limits_0^9 f\left(x\right)\mathrm{d}x = 3$.

Câu 15: (SGD Hà Tĩnh – Lần 2 năm 2017 – 2018) Tích phân $I = \int\limits_{-1}^2 3x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ nhận giá trị nào sau đây:

A. $I = \dfrac{3\mathrm{e}^3+6}{\mathrm{e}^{-1}}$. **B.** $I = \dfrac{3\mathrm{e}^3-6}{\mathrm{e}^{-1}}$. **C.** $I = \dfrac{3\mathrm{e}^3+6}{\mathrm{e}}$. **D.** $I = \dfrac{3\mathrm{e}^3+6}{-\mathrm{e}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $u = 3x \Rightarrow \mathrm{d}u = 3\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}v = \mathrm{e}^x\mathrm{d}x \Rightarrow v = \mathrm{e}^x$.

$I = \int\limits_{-1}^2 3x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = 3x\mathrm{e}^x\Big|_{-1}^2 - \int\limits_{-1}^2 3\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = 6\mathrm{e}^2+3\mathrm{e}^{-1}-3\mathrm{e}^x\Big|_{-1}^2 = 6\mathrm{e}^2+3\mathrm{e}^{-1}-\left(3\mathrm{e}^2-3\mathrm{e}^{-1}\right) = 3\mathrm{e}^2+6\mathrm{e}^{-1}$.

Câu 16: (SGD Hà Tĩnh – Lần 2 năm 2017 – 2018) Cho hình thang cong $\left(H\right)$ giới hạn bởi các đường $y = \ln\left(x+1\right)$, trục hoành và đường thẳng $x = \mathrm{e}-1$. Tính thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình $\left(H\right)$ quanh trục Ox.

A. $\mathrm{e}-2$. **B.** 2π. **C.** $\pi\mathrm{e}$. **D.** $\pi\left(\mathrm{e}-2\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Thể tích khối tròn xoay $\left(H\right)$ là: $V = \pi\int\limits_0^{\mathrm{e}-1}\ln^2\left(x+1\right)\mathrm{d}x = \pi\int\limits_1^{\mathrm{e}}\ln^2 x\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases} u = \ln^2 x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{2\ln x}{x}\mathrm{d}x \\ v = x \end{cases}$

Ta có $V = \pi\left(x\ln^2 x\Big|_1^{\mathrm{e}} - 2\int\limits_1^{\mathrm{e}}\ln x\mathrm{d}x\right)$. Đặt $\begin{cases} u' = \ln x \\ \mathrm{d}v' = \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u' = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v' = x \end{cases}$

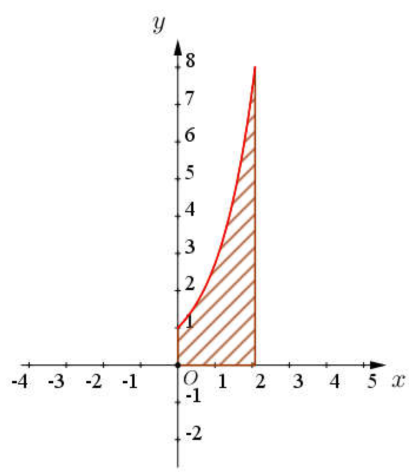
Suy ra $V=\pi\left(x\ln^2 x\Big|_1^{e}-2x\ln x\Big|_1^{e}+2\int\limits_1^{e}\mathrm{d}x\right)=\pi\left(x\ln^2 x\Big|_1^{e}-2x\ln x\Big|_1^{e}+2x\Big|_1^{e}\right)=\pi(\mathrm{e}-2)$.

Câu 17: (THPT Nghèn – Hà Tĩnh – Lần 2 năm 2017 – 2018) Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y=\mathrm{e}^x$, $y=0$, $x=0$, $x=\ln 8$. Đường thẳng $x=k$ $(0<k<\ln 8)$ chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2. Tìm k để $S_1=S_2$.

A. $k=\ln\frac{9}{2}$. **B.** $k=\ln 4$. **C.** $k=\frac{2}{3}\ln 4$. **D.** $k=\ln 5$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $S_1+S_2=\int\limits_0^{\ln 8}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\left(\mathrm{e}^x\right)\Big|_0^{\ln 8}=7$; $S_1=\int\limits_0^{k}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\left(\mathrm{e}^x\right)\Big|_0^{k}=\mathrm{e}^k-1$.

Mà $S_1=S_2\Rightarrow S_1=\frac{7}{2}\Rightarrow \mathrm{e}^k-1=\frac{7}{2}\Rightarrow k=\ln\frac{9}{2}$.

Câu 18: (THPT Nghèn – Hà Tĩnh – Lần 2 năm 2017 – 2018) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=10$. Tính $\int\limits_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$.

A. $\int\limits_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{5}{2}$. **B.** $\int\limits_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=20$. **C.** $\int\limits_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=10$. **D.** $\int\limits_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=5$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\frac{x}{2}\Rightarrow \mathrm{d}t=\frac{1}{2}\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0$; $x=2\Rightarrow t=1$.

Ta có: $\int\limits_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=2.\int\limits_0^1 f(t)\mathrm{d}t=2.10=20$.

Câu 19: (THPT Nghèn – Hà Tĩnh – Lần 2 năm 2017 – 2018) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị của các hàm số $y=x^2$ và $y=x$ là:

A. $\frac{\pi}{6}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{5}{6}$. **D.** $-\frac{1}{6}$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm là: $x^2 = x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Ta có diện tích hình phẳng cần tính là: $S = \int_0^1 \left|x^2 - x\right| \mathrm{d}x = \left|\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1\right| = \frac{1}{6}$.

Câu 20: (THPT Chu Văn An – Hà Nội - năm 2017-2018) Cho hàm số $y = f(x)$ thoả mãn điều kiện $f(1) = 12$, $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_1^4 f'(x)\mathrm{d}x = 17$. Khi đó $f(4)$ bằng

A. 5. **B.** 29. **C.** 19. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_1^4 f'(x)\mathrm{d}x = 17 \Leftrightarrow f(x)\big|_1^4 = 17 \Leftrightarrow f(4) - f(1) = 17 \Leftrightarrow f(4) = 29$.

Câu 21: (THPT Chu Văn An – Hà Nội - năm 2017-2018) Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ với $a < b$. Kí hiệu S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 3f(x)$, $y = 3g(x)$, $x = a$, $x = b$; S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x) - 2$, $y = g(x) - 2$, $x = a$, $x = b$. Khẳng định nào sau đây **đúng?**

A. $S_1 = 2S_2$. **B.** $S_1 = 3S_2$. **C.** $S_1 = 2S_2 - 2$. **D.** $S_1 = 2S_2 + 2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $S_1 = \int_a^b \left|3f(x) - 3g(x)\right| \mathrm{d}x = 3\int_a^b \left|f(x) - g(x)\right| \mathrm{d}x = 3\int_a^b \left|\left[\left(f(x) - 2\right) - \left(g(x) - 2\right)\right]\right| \mathrm{d}x = 3S_2$.

Câu 22: (THPT Chu Văn An – Hà Nội - năm 2017-2018) Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = \mathrm{e}^x$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$. Thể tích vật thể tròn xoay được tạo ra khi cho hình (H) quay quanh trục hoành bằng

A. $\frac{\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-2}}{2}$. **B.** $\frac{\left(\mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^{-2}\right)\pi}{2}$. **C.** $\frac{\mathrm{e}^4\pi}{2}$. **D.** $\frac{\left(\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-2}\right)\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Thể tích vật thể cần tính là $V = \pi\int_{-1}^1 \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^1 \mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{2x}\right) = \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{2x}\Big|_{-1}^1 = \frac{\pi\left(\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-2}\right)}{2}$.

Câu 23: (THPT Chu Văn An – Hà Nội - năm 2017-2018) Biết tích phân $\int_0^1 \frac{2x+3}{2-x}\mathrm{d}x = a\ln 2 + b$ (a, $b \in \mathbb{Z}$), giá trị của a bằng:

A. 7. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

$\int\limits_0^1 \frac{2x+3}{2-x}\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(-2+\frac{7}{2-x}\right)\mathrm{d}x = \left(-2x-7\ln|2-x|\right)\Big|_0^1 = 7\ln 2 - 2$.

Câu 24: (SGD Bắc Ninh – Lần 2 - năm 2017-2018) Cho hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị $y=(2x-1)\sqrt{\ln x}$, trục hoành và đường thẳng $x=\mathrm{e}$. Khi hình phẳng D quay quanh trục hoành được vật thể tròn xoay có thể tích V được tính theo công thức

A. $V=\int\limits_1^{\mathrm{e}}(2x-1)^2\ln x\mathrm{d}x$.

B. $V=\pi\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\mathrm{e}}(2x-1)^2\ln x\mathrm{d}x$.

C. $V=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\mathrm{e}}(2x-1)^2\ln x\mathrm{d}x$.

D. $V=\pi\int\limits_1^{\mathrm{e}}(2x-1)^2\ln x\mathrm{d}x$.

Lời giải

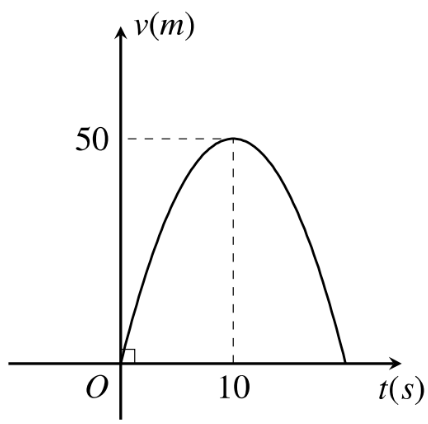
Chọn D

Hàm số $y=(2x-1)\sqrt{\ln x}$ có tập xác định là $D=[1;+\infty)$.

Phương trình hoành độ giao điểm là $(2x-1)\sqrt{\ln x}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}\ (\text{loại}) \\ x=1 \end{array}\right.$.

Thể tích vật thể tròn xoay là: $V=\pi\int\limits_1^{\mathrm{e}}(2x-1)^2\ln x\mathrm{d}x$.

Câu 25: (Chuyên Lê Hồng Phong – Nam Đinh - năm 2017-2018) Một vật chuyển động vận tốc tăng liên tục được biểu thị bằng đồ thị là đường cong parabol có hình bên dưới.



Biết rằng sau $10\,\text{s}$ thì vật đó đạt đến vận tốc cao nhất và bắt đầu giảm tốc. Hỏi từ lúc bắt đầu đến lúc đạt vận tốc cao nhất thì vật đó đi được quãng đường bao nhiêu mét?

A. $300\,\text{m}$.

B. $\frac{1400}{3}\,\text{m}$.

C. $\frac{1100}{3}\,\text{m}$.

D. $\frac{1000}{3}\,\text{m}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Giả sử vận tốc của vật biểu diễn bởi hàm số $(P): v(t)=at^2+bt+c\ \ (a\neq 0)$.

Dựa vào đồ thị hàm số ta có (P) đi qua $O(0;0)$ và có đỉnh $I(10;50)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} c=0 \\ 100a+10b=50 \\ -\dfrac{b}{2a}=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ 10a+b=5 \\ 20a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ a=-\dfrac{1}{2} \\ b=10 \end{cases} \Rightarrow (P): v(t)=-\frac{1}{2}t^2+10t.$$

Lúc bắt đầu: $t=0$ s; lúc đạt vận tốc cao nhất: $t=10$ s.

Vậy quãng đường vận đó đi được kể từ lúc bắt đầu đến lúc đạt vận tốc cao nhất là:

$$s=\int_0^{10} v(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{10}\left(-\frac{1}{2}t^2+10t\right)\mathrm{d}t=\frac{1000}{3}.$$

Câu 26: (Chuyên Lê Hồng Phong – Nam Đinh - năm 2017-2018) Giá trị của $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{a}{b}\pi$ trong đó $a,\ b\in\mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $T=ab$.

A. $T=35$. **B.** $T=24$. **C.** $T=12$. **D.** $T=36$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt $x=3\sin t \Leftrightarrow \mathrm{d}x=3\cos t\mathrm{d}t$. Đổi cận: $x=0\to t=0;\ x=3\to t=\frac{\pi}{2}$.

$$\Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9-(3\sin t)^2}.3\cos t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}9\cos^2 t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}9.\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t=\frac{9}{4}\pi.$$ Vậy $T=9.4=36$.

Câu 27: (Chuyên Lê Hồng Phong – Nam Đinh - năm 2017-2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x+y=0$ và $(\alpha'): 2x-y+z-15=0$ và đường thẳng d' có phương trình $\begin{cases} x=1-t \\ y=2+2t \\ z=3 \end{cases}$ cắt nhau. Tìm tọa độ giao điểm I của hai đường thẳng d và d'.

A. $I(4;-4;3)$. **B.** $I(0;0;2)$. **C.** $I(1;2;3)$. **D.** $I(0;0;-1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Do đường thẳng $d=(\alpha)\cap(\alpha')$ nên giao điểm của d và d' cũng là giao điểm của d' và mặt phẳng (α) hoặc của d' và mặt phẳng (α').

Ta tìm $I\in d'\cap(\alpha)\Rightarrow (1-t)+(2+2t)=0\Leftrightarrow t=-3$.

Vậy tọa độ giao điểm I của hai đường thẳng d và d' là $I(4;-4;3)$.

Câu 28: (THPT Đặng Thúc Hứa – Nghệ An - năm 2017-2018) Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,\mathrm{d}x$.

A. $\frac{\pi}{2}-1$. **B.** $\frac{\pi}{2}+1$. **C.** 1. **D.** $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$\begin{cases} u = x \\ dv = \cos x\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}$.

$I = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x = \left(x\sin x + \cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}-1$.

Câu 29: (THPT Đặng Thúc Hứa – Nghệ An - năm 2017-2018) Cho $I = \int_1^2 \frac{x+\ln x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x = \frac{a}{b}\ln 2 - \frac{1}{c}$ với a, b, m là các số nguyên dương và là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $S = \frac{a+b}{c}$.

A. $S = \frac{2}{3}$. **B.** $S = \frac{5}{6}$. **C.** $S = \frac{1}{2}$. **D.** $S = \frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Tính $I = \int_1^2 \frac{x+\ln x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} x+\ln x = u \\ \frac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x = \mathrm{d}v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1+x}{x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}u \\ -\frac{1}{x+1} = v \end{cases}$.

Khi đó $I = \int_1^2 \frac{x+\ln x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{x+1}(x+\ln x)\Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{1+x}{x}.\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}(2+\ln 2)+\frac{1}{2}+\int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$

$= -\frac{1}{3}(2+\ln 2)+\frac{1}{2}+\ln|x|\Big|_1^2 = \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{1}{6}$

Vậy $a = 2; b = 3; c = 6 \Rightarrow S = \frac{a+b}{c} = \frac{5}{6}$.

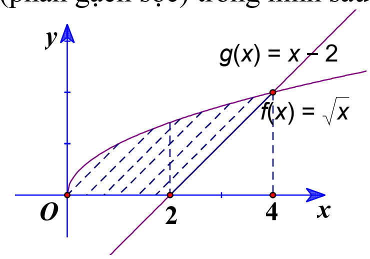
Câu 30: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x+2}$, trục hoành và đường thẳng $x = 2$ là.

A. $3+2\ln 2$. **B.** $3+\ln 2$. **C.** $3-2\ln 2$. **D.** $3-\ln 2$.

Câu 31: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 x\left[f'(x)-2\right]\mathrm{d}x = f(1)$. Giá trị của $I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. -2. **B.** 2. **C.** -1. **D.** 1.

Câu 32: Tích diện tích S của hình phẳng (phần gạch sọc) trong hình sau



A. $S=\dfrac{8}{3}$. **B.** $S=\dfrac{10}{3}$. **C.** $S=\dfrac{11}{3}$. **D.** $S=\dfrac{7}{3}$.

Câu 33: Nguyên hàm $\int \dfrac{1+\ln x}{x}\mathrm{d}x\,(x>0)$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}\ln^2 x+\ln x+C$. **B.** $x+\ln^2 x+C$. **C.** $\ln^2 x+\ln x+C$. **D.** $x+\dfrac{1}{2}\ln^2 x+C$.

Câu 34: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x+2}$, trục hoành và đường thẳng $x=2$ là.

A. $3+2\ln 2$. **B.** $3+\ln 2$. **C.** $3-2\ln 2$. **D.** $3-\ln 2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\dfrac{x+1}{x+2}=0\Leftrightarrow x=-1$. Vậy $S=\int\limits_{-1}^{2}\left|\dfrac{x+1}{x+2}\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{2}\left(1-\dfrac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x=\left(x-\ln|x+2|\right)\Big|_{-1}^{2}=3-2\ln 2$.

Câu 35: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $\int\limits_0^1 x\left[f'(x)-2\right]\mathrm{d}x=f(1)$. Giá trị của $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. -2. **B.** 2. **C.** -1. **D.** 1.

Lời giải

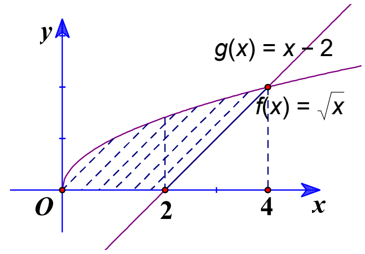
Chọn C

Ta có $\int\limits_0^1 x\left[f'(x)-2\right]\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 x.f'(x)\mathrm{d}x-\int\limits_0^1 2x\mathrm{d}x$

$=\int\limits_0^1 x\mathrm{d}\left[f(x)\right]-x^2\Big|_0^1=x.f(x)\Big|_0^1-\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x-1=f(1)-I-1$.

Theo đề bài $\int\limits_0^1 x\left[f'(x)-2\right]\mathrm{d}x=f(1)\Rightarrow I=-1$.

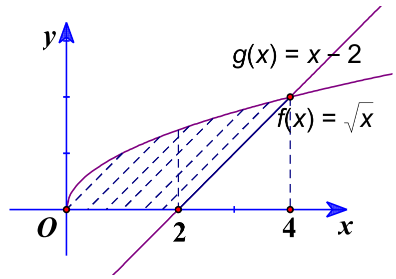
Câu 36: Tích diện tích S của hình phẳng (phần gạch sọc) trong hình sau



A. $S=\dfrac{8}{3}$. **B.** $S=\dfrac{10}{3}$. **C.** $S=\dfrac{11}{3}$. **D.** $S=\dfrac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Dựa và hình vẽ, ta có hình phẳng được giới hạn bởi các đường: $\begin{cases} y=\sqrt{x} \\ y=x-2 \\ y=0 \end{cases}$.

Suy ra $S=\int\limits_0^2 \sqrt{x}\mathrm{d}x+\int\limits_2^4\left(\sqrt{x}-x+2\right)\mathrm{d}x=\dfrac{10}{3}$.

Câu 37: Nguyên hàm $\int \dfrac{1+\ln x}{x}\mathrm{d}x\left(x>0\right)$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}\ln^2 x+\ln x+C$. **B.** $x+\ln^2 x+C$. **C.** $\ln^2 x+\ln x+C$. **D.** $x+\dfrac{1}{2}\ln^2 x+C$.

Lời giải

Chọn A

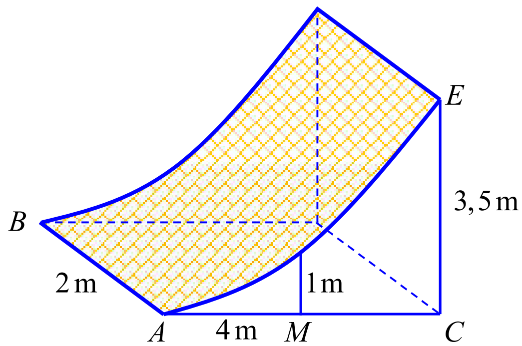
Ta có $\int \dfrac{1+\ln x}{x}\mathrm{d}x=\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x+\int \dfrac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x+\int \ln x\mathrm{d}\left(\ln x\right)=\ln x+\dfrac{1}{2}\ln^2 x+C$.

Câu 38: Cho $a>b>-1$. Tích phân $I=\int\limits_a^b \ln\left(x+1\right)\mathrm{d}x$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $I=\left(x+1\right)\ln\left(x+1\right)\Big|_a^b-a+b$. **B.** $I=\left(x+1\right)\ln\left(x+1\right)\Big|_a^b-b+a$.

C. $I=\dfrac{1}{\left(x+1\right)}\Bigg|_a^b$. **D.** $I=x\ln\left(x+1\right)\Big|_a^b+\int\limits_a^b \dfrac{x}{x+1}\mathrm{d}x$.

Câu 39: Chướng ngại vật "tường cong" trong một sân thi đấu X-Game là một khối bê tông có chiều cao từ mặt đất lên là $3,5\,\text{m}$. Giao của mặt tường cong và mặt đất là đoạn thẳng $AB=2\,\text{m}$. Thiết diện của khối tường cong cắt bởi mặt phẳng vuông góc với AB tại A là một hình tam giác vuông cong ACE với $AC=4\,\text{m}$, $CE=3,5\,\text{m}$ và cạnh cong AE nằm trên một đường parabol có trục đối xứng vuông góc với mặt đất. Tại vị trí M là trung điểm của AC thì tường cong có độ cao $1\,\text{m}$ (xem hình minh họa bên). Tính thể tích bê tông cần sử dụng để tạo nên khối tường cong đó.



A. $9,75\,\text{m}^3$. **B.** $10,5\,\text{m}^3$. **C.** $10\,\text{m}^3$. **D.** $10,25\,\text{m}^3$.

Câu 40: Cho $a > b > -1$. Tích phân $I = \int\limits_a^b \ln(x+1)\,\mathrm{d}x$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $I = (x+1)\ln(x+1)\Big|_a^b - a + b$. **B.** $I = (x+1)\ln(x+1)\Big|_a^b - b + a$.

C. $I = \dfrac{1}{(x+1)}\Bigg|_a^b$. **D.** $I = x\ln(x+1)\Big|_a^b + \int\limits_a^b \dfrac{x}{x+1}\mathrm{d}x$.

Lời giải

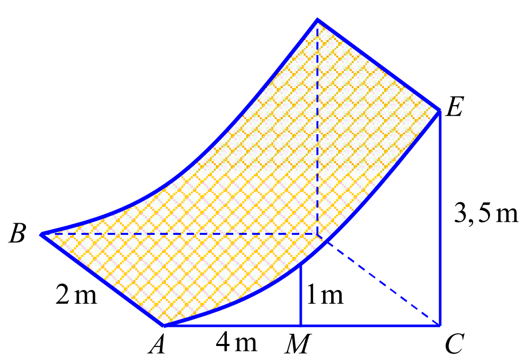
Chọn B

Đặt $\begin{cases} u = \ln(x+1) \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x+1}\mathrm{d}x \\ v = x+1 \end{cases}$

Do đó $I = \int\limits_a^b \ln(x+1)\,\mathrm{d}x = (x+1)\ln(x+1)\Big|_a^b - \int\limits_a^b \mathrm{d}x = (x+1)\ln(x+1)\Big|_a^b - x\Big|_a^b$

$= (x+1)\ln(x+1)\Big|_a^b - b + a$

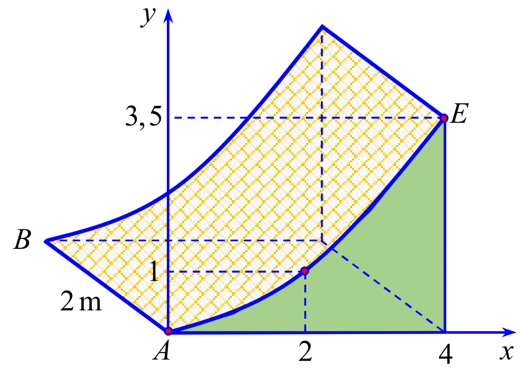
Câu 41: Chướng ngại vật "tường cong" trong một sân thi đấu X-Game là một khối bê tông có chiều cao từ mặt đất lên là $3,5\,\text{m}$. Giao của mặt tường cong và mặt đất là đoạn thẳng $AB = 2\,\text{m}$. Thiết diện của khối tường cong cắt bởi mặt phẳng vuông góc với AB tại A là một hình tam giác vuông cong ACE với $AC = 4\,\text{m}$, $CE = 3,5\,\text{m}$ và cạnh cong AE nằm trên một đường parabol có trục đối xứng vuông góc với mặt đất. Tại vị trí M là trung điểm của AC thì tường cong có độ cao $1\,\text{m}$ (xem hình minh họa bên). Tính thể tích bê tông cần sử dụng để tạo nên khối tường cong đó.



A. $9,75\,\text{m}^3$. **B.** $10,5\,\text{m}^3$. **C.** $10\,\text{m}^3$. **D.** $10,25\,\text{m}^3$.

Lời giải

Chọn C



Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ sao cho $A \equiv O$

$\Rightarrow$ cạnh cong AE nằm trên parabol $(P): y = ax^2 + bx$ đi qua các điểm $(2;1)$ và $\left(4;\frac{7}{2}\right)$ nên

$(P): y = \frac{3}{16}x^2 + \frac{1}{8}x$

Khi đó diện tích tam giác cong ACE có diện tích $S = \int_0^4 \left(\frac{3}{16}x^2 + \frac{1}{8}x\right)\mathrm{d}x = 5\,\mathrm{m}^2$.

Vậy thể tích khối bê tông cần sử dụng là $V = 5.2 = 10\,\mathrm{m}^3$.

Câu 42: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;3;4)$. Gọi A, B, C lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên các trục Ox, Oy, Oz. Viết phương trình mặt phẳng (ABC).

A. $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{2} = 1$. B. $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1$. **C.** $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$. D. $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $A(2;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;4)$.

Vậy $(ABC): \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$.

Câu 43: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, $x = 0$, $x = 1$ và trục hoành. Tính thể tích V của khối tròn xoay sinh bởi hình (H) quay quanh trục Ox.

A. $\frac{\pi}{3}$. **B.** $\frac{\pi}{2}$. C. π. D. $\sqrt{\pi}$.

Lời giải

Chọn B

Thể tích khối tròn xoay là $V = \pi\int_0^1 x\mathrm{d}x = \pi\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{\pi}{2}$.

Câu 44: Tính tích phân $I = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.

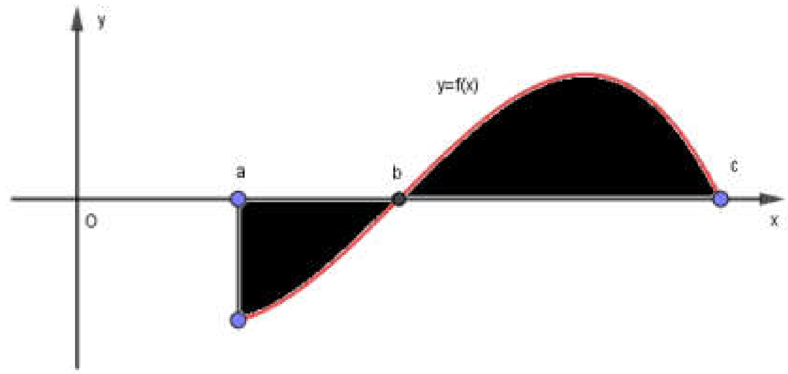
A. $-\frac{1}{\mathrm{e}} + 1$. B. 1. C. $\frac{1}{\mathrm{e}}$. D. $-1 + \frac{1}{\mathrm{e}}$.

Lời giải

Chọn A

$I=\int_0^1 e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_0^1=-\frac{1}{e}+1$.

Câu 45: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Diện tích S của miền hình phẳng (miền tô đen trong hình vẽ bên) được tính bởi công thức



A. $S=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx$.

B. $S=\int_a^b f(x)dx-\int_b^c f(x)dx$.

C. $S=-\int_a^b f(x)dx-\int_b^c f(x)dx$.

D. $S=-\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx$.

Lời giải

Chọn D

$S=\int_a^b[0-f(x)]dx+\int_b^c[f(x)-0]dx=-\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx$.

Câu 46: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin 2x+\cos x$ là

A. $-\cos 2x+\sin x+C$. **B.** $\cos^2 x-\sin x+C$. **C.** $\sin^2 x+\sin x+C$. **D.** $\cos 2x-\sin x+C$.

Câu 47: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^{\sqrt[3]{x}}$ và $F(0)=2$. Hãy tính $F(-1)$.

A. $6-\frac{15}{e}$. **B.** $4-\frac{10}{e}$. **C.** $\frac{15}{e}-4$. **D.** $\frac{10}{e}$.

Câu 48: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=x^2-6x+12$ và các tiếp tuyến tại các điểm $A(1;7)$ và $B(-1;19)$.

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** 2.

Câu 49: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin 2x+\cos x$ là

A. $-\cos 2x+\sin x+C$. **B.** $\cos^2 x-\sin x+C$. **C.** $\sin^2 x+\sin x+C$. **D.** $\cos 2x-\sin x+C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int(\sin 2x+\cos x)dx=-\frac{1}{2}\cos 2x+\sin x+C'=-\frac{1}{2}(1-2\sin^2 x)+\sin x+C'$

$=\sin^2 x+\sin x+C$. $\left(C=C'-\frac{1}{2}\right)$

Câu 50: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^{\sqrt[3]{x}}$ và $F(0)=2$. Hãy tính $F(-1)$.

A. $6-\dfrac{15}{e}$. **B.** $4-\dfrac{10}{e}$. **C.** $\dfrac{15}{e}-4$. **D.** $\dfrac{10}{e}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $I=\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int \mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$.

Đặt $\sqrt[3]{x}=t\Rightarrow x=t^3\Rightarrow \mathrm{d}x=3t^2\mathrm{d}t$ khi đó $I=\int \mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x=3\int \mathrm{e}^t t^2\mathrm{d}t$.

Đặt $\begin{cases}t^2=u\\ \mathrm{e}^t\mathrm{d}t=\mathrm{d}v\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2t\mathrm{d}t=\mathrm{d}u\\ \mathrm{e}^t=v\end{cases}\Rightarrow I=3\left(\mathrm{e}^t t^2-2\int \mathrm{e}^t t\mathrm{d}t\right)=3\mathrm{e}^t t^2-6\int \mathrm{e}^t t\mathrm{d}t$.

Tính $\int \mathrm{e}^t t\mathrm{d}t$.

Đặt $\begin{cases}t=u\\ \mathrm{e}^t\mathrm{d}t=\mathrm{d}v\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}t=\mathrm{d}u\\ \mathrm{e}^t=v\end{cases}\Rightarrow \int \mathrm{e}^t t\mathrm{d}t=t\mathrm{e}^t-\int \mathrm{e}^t\mathrm{d}t=t\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^t$.

Vậy $\Rightarrow I=3\mathrm{e}^t t^2-6\left(\mathrm{e}^t t-\mathrm{e}^t\right)+C\Rightarrow F\left(x\right)=3\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}\sqrt[3]{x^2}-6\left(\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}\sqrt[3]{x}-\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}\right)+C$.

Theo giả thiết ta có $F\left(0\right)=2\Rightarrow C=-4$

$\Rightarrow F\left(x\right)=3\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}\sqrt[3]{x^2}-6\left(\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}\sqrt[3]{x}-\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}\right)-4\Rightarrow F\left(-1\right)=\dfrac{15}{e}-4$.

Câu 51: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=x^2-6x+12$ và các tiếp tuyến tại các điểm $A(1;7)$ và $B(-1;19)$.

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=2x-6$.

Gọi tiếp tuyến tại điểm $A(1;7)$ là d_1

Suy ra $d_1:\ y=y'(1)(x-1)+7=-4x+11$.

Gọi tiếp tuyến tại điểm $B(-1;19)$ là d_2

Suy ra $d_2:\ y=y'(-1)(x+1)+19=-8x+11$.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm giữa d_1 và parabol là

$$x^2-6x+12=-4x+11\Leftrightarrow x=1.$$

Ta có phương trình hoành độ giao điểm giữa d_2 và parabol là

$$x^2-6x+12=-8x+11\Leftrightarrow x=-1.$$

Ta có phương trình hoành độ giao điểm giữa d_2 và d_1 là

$$-4x+11=-8x+11\Leftrightarrow x=0.$$

Vậy diện tích hình phẳng cần tính là

$$S=\int_{-1}^{0}\left|x^2-6x+12+8x-11\right|\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}\left|x^2-6x+12+4x-11\right|\mathrm{d}x=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.$$

Câu 52: Biết $\displaystyle\int_1^2\frac{(3x+1)}{3x^2+x\ln x}\mathrm{d}x=\ln\left(a+\frac{\ln b}{c}\right)$ với a, b, c là các số nguyên dương và $c\le 4$. Tổng $a+b+c$ bằng

A. 6. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 8.

Câu 53: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$. Biết $f(3)+f(-3)=4$ và $f\left(\dfrac{1}{3}\right)+f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=2$. Giá trị của biểu thức $f(-5)+f(0)+f(2)$ bằng:

A. $5-\dfrac{1}{2}\ln 2$ **B.** $6-\dfrac{1}{2}\ln 2$ **C.** $5+\dfrac{1}{2}\ln 2$ **D.** $6+\dfrac{1}{2}\ln 2$

Câu 54: Biết $\displaystyle\int_1^2 \frac{(3x+1)}{3x^2+x\ln x}\mathrm{d}x=\ln\left(a+\frac{\ln b}{c}\right)$ với a, b, c là các số nguyên dương và $c\le 4$. Tổng $a+b+c$ bằng

A. 6. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\displaystyle\int_1^2 \frac{(3x+1)}{3x^2+x\ln x}\mathrm{d}x=\int_1^2 \frac{3+\frac{1}{x}}{3x+\ln x}\mathrm{d}x$. Đặt $t=3x+\ln x$, $\mathrm{d}t=\left(3+\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$

Đổi cận $x=1\Rightarrow t=3$, $x=2\Rightarrow t=6+\ln 2$.

$$\int_1^2 \frac{3+\frac{1}{x}}{3x+\ln x}\mathrm{d}x=\int_3^{6+\ln 2}\frac{\mathrm{d}t}{t}=\ln t\Big|_3^{6+\ln 2}=\ln(6+\ln 2)-\ln 3=\ln\left(2+\frac{\ln 2}{3}\right)$$

$\Rightarrow a=2$, $b=2$, $c=3$. Vậy tổng $a+b+c=7$.

Câu 55: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$. Biết $f(3)+f(-3)=4$ và $f\left(\dfrac{1}{3}\right)+f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=2$. Giá trị của biểu thức $f(-5)+f(0)+f(2)$ bằng:

A. $5-\dfrac{1}{2}\ln 2$ **B.** $6-\dfrac{1}{2}\ln 2$ **C.** $5+\dfrac{1}{2}\ln 2$ **D.** $6+\dfrac{1}{2}\ln 2$

Lời giải

Chọn A

$$f(-5)+f(2)=\left[f(-5)-f(-3)\right]+f(-3)+\left[f(2)-f(3)\right]+f(3)=\int_{-3}^{-5}f'(x)\mathrm{d}x+\int_3^2 f'(x)\mathrm{d}x+4$$

$$2f(0)-2=f(0)-f\left(\frac{1}{3}\right)+f(0)-f\left(-\frac{1}{3}\right)=\int_{\frac{1}{3}}^{0}f'(x)\mathrm{d}x+\int_{-\frac{1}{3}}^{0}f'(x)\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow f(0)=\frac{1}{2}\left[\int_{\frac{1}{3}}^{0}f'(x)\mathrm{d}x+\int_{-\frac{1}{3}}^{0}f'(x)\mathrm{d}x+2\right]$$

$$\Rightarrow f(-5)+f(0)+f(2)=\int_{-3}^{-5}f'(x)\mathrm{d}x+\int_3^2 f'(x)\mathrm{d}x+4+\frac{1}{2}\left[\int_{\frac{1}{3}}^{0}f'(x)\mathrm{d}x+\int_{-\frac{1}{3}}^{0}f'(x)\mathrm{d}x+2\right]$$

$$=5-\frac{1}{2}\ln 2$$

Câu 56: Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi $(P): y = x^2 - 4$, tiếp tuyến của (P) tại $M(2;0)$ và trục Oy là

A. $S = \frac{4}{3}$. **B.** $S = 2$. **C.** $S = \frac{8}{3}$. **D.** $S = \frac{7}{3}$.

Câu 57: Cho $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x = 2018$. Tính $\int_0^{\frac{\pi}{12}} \cos 2x.f(\sin 2x)\mathrm{d}x$.

A. $I = \frac{1009}{2}$. **B.** $I = 1009$. **C.** $I = 4036$. **D.** $I = 2018$.

Câu 58: Cho tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{1+\sin x}\mathrm{d}x = a + b\pi$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $P = 1 + a^3 + b^2$

A. $P = 9$. **B.** $P = 29$. **C.** $P = 11$. **D.** $P = -25$.

Câu 59: Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi $(P): y = x^2 - 4$, tiếp tuyến của (P) tại $M(2;0)$ và trục Oy là

A. $S = \frac{4}{3}$. **B.** $S = 2$. **C.** $S = \frac{8}{3}$. **D.** $S = \frac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn A .

$y' = 2x$.

$y'(2) = 4$.

Phương trình tiếp tuyến của (P) tại $M(2;0)$

$y = 2(x-2) = 2x - 4$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S = \int_0^2 \left|x^2 - 4 - (2x-4)\right|\mathrm{d}x = \left|\int_0^2 \left(x^2 - 2x\right)\mathrm{d}x\right|$

$= \left|\left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)\Big|_0^2\right| = \frac{4}{3}$.

Câu 60: Cho $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x = 2018$. Tính $\int_0^{\frac{\pi}{12}} \cos 2x.f(\sin 2x)\mathrm{d}x$.

A. $I = \frac{1009}{2}$. **B.** $I = 1009$. **C.** $I = 4036$. **D.** $I = 2018$.

Lời giải

Chọn B

Xét $I = \int_0^{\frac{\pi}{12}} \cos 2x.f(\sin 2x)\mathrm{d}x$.

Đặt $u = \sin 2x \Rightarrow \mathrm{d}u = 2\cos 2x\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow u = 0$ và $x = \frac{\pi}{12} \Rightarrow u = \frac{1}{2}$.

Khi đó $I = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} f(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.2018 = 1009$.

Câu 61: Cho tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{1+\sin x}\mathrm{d}x = a + b\pi$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $P = 1 + a^3 + b^2$

A. $P = 9$. **B.** $P = 29$. **C.** $P = 11$. **D.** $P = -25$.

Lời giải

Chọn D

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{1+\sin x}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-2\sin^2 x}{1+\sin x}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-2\sin x + 2 - \frac{1}{1+\sin x}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-2\sin x + 2 - \frac{1}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}\right)\mathrm{d}x.$$

$$= \left(2\cos x + 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}\mathrm{d}x$$

$$= -2 + \pi - \frac{1}{2}.2\tan\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -3 + \pi.$$

Vậy $a = -3, b = 1$.

$P = 1 + a^3 + b^2 = -25$.

Câu 62: Cho a là số thực thỏa mãn $|a| < 2$ và $\int_a^2 (2x+1)\mathrm{d}x = 4$. Giá trị biểu thức $1 + a^3$ bằng.

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 63: Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x}\ln x$, trục hoành và đường thẳng $x = \mathrm{e}$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** 2.

Câu 64: Nếu $\int_0^6 f(x)\mathrm{d}x = 12$ thì $\int_0^2 f(3x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 6. **B.** 36. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 65: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = \tan x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$. Quay (H) xung quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích bằng

A. $1 - \frac{\pi}{4}$. **B.** π^2. **C.** $\pi - \frac{\pi^2}{4}$. **D.** $\frac{\pi^2}{4} + \pi$.

Câu 66: Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin^2 2x.\cos^3 2x$ thỏa $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ là

A. $F(x) = \frac{1}{6}\sin^3 2x - \frac{1}{10}\sin^5 2x + \frac{1}{15}$. **B.** $F(x) = \frac{1}{6}\sin^3 2x + \frac{1}{10}\sin^5 2x - \frac{1}{15}$.

C. $F(x)=\frac{1}{6}\sin^3 2x-\frac{1}{10}\sin^5 2x-\frac{1}{15}$. **D.** $F(x)=\frac{1}{6}\sin^3 2x+\frac{1}{10}\sin^5 2x-\frac{4}{15}$.

Câu 67: Cho $\int 2x(3x-2)^6\,dx = A(3x-2)^8+B(3x-2)^7+C$ với A, $B\in\mathbb{Q}$ và $C\in\mathbb{R}$. Giá trị của biểu thức $12A+7B$ bằng

A. $\frac{23}{252}$. **B.** $\frac{241}{252}$. **C.** $\frac{52}{9}$. **D.** $\frac{7}{9}$.

Câu 68: Cho a là số thực thỏa mãn $|a|<2$ và $\int_a^2 (2x+1)\,dx=4$. Giá trị biểu thức $1+a^3$ bằng.

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int_a^2 (2x+1)\,dx=\left(x^2+x\right)\Big|_a^2=6-a^2-a$. Theo đề: $\begin{cases}|a|<2\\ 6-a^2-a=4\end{cases}\Rightarrow a=1$.

Vậy $1+a^3=2$.

Câu 69: Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\frac{1}{x}\ln x$, trục hoành và đường thẳng $x=\mathrm{e}$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{1}{x}\ln x=0\Leftrightarrow x=1$.

Diện tích của hình phẳng giới hạn là: $\int_1^{\mathrm{e}}\left|\frac{1}{x}\ln x\right|dx=\left|\int_1^{\mathrm{e}}\ln x\,d(\ln x)\right|=\left|\frac{\ln^2 x}{2}\Big|_1^{\mathrm{e}}\right|=\frac{1}{2}$.

Câu 70: Nếu $\int_0^6 f(x)\,dx=12$ thì $\int_0^2 f(3x)\,dx$ bằng

A. 6. **B.** 36. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=3x\Rightarrow dt=3dx$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0$, $x=2\Rightarrow t=6$

Khi đó: $\int_0^2 f(3x)\,dx=\frac{1}{3}\int_0^6 f(t)\,dt=\frac{1}{3}.12=4$.

Câu 71: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=\tan x$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=\frac{\pi}{4}$. Quay (H) xung quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích bằng

A. $1-\frac{\pi}{4}$. **B.** π^2. **C.** $\pi-\frac{\pi^2}{4}$. **D.** $\frac{\pi^2}{4}+\pi$.

Lời giải

Chọn C

Thể tích của (H) là : $V=\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\mathrm{d}x=\pi(\tan x-x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\pi-\frac{\pi^2}{4}$.

Câu 72: Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\sin^2 2x.\cos^3 2x$ thỏa $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$ là

A. $F(x)=\frac{1}{6}\sin^3 2x-\frac{1}{10}\sin^5 2x+\frac{1}{15}$.

B. $F(x)=\frac{1}{6}\sin^3 2x+\frac{1}{10}\sin^5 2x-\frac{1}{15}$.

C. $F(x)=\frac{1}{6}\sin^3 2x-\frac{1}{10}\sin^5 2x-\frac{1}{15}$.

D. $F(x)=\frac{1}{6}\sin^3 2x+\frac{1}{10}\sin^5 2x-\frac{4}{15}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\sin 2x\Rightarrow \mathrm{d}t=2.\cos 2x\mathrm{d}x\Rightarrow \frac{1}{2}\mathrm{d}t=\cos 2x\mathrm{d}x$.

Ta có:

$F(x)=\int\sin^2 2x.\cos^3 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int t^2.(1-t^2)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int(t^2-t^4)\mathrm{d}t=\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{10}t^5+C$

$=\frac{1}{6}\sin^3 2x-\frac{1}{10}\sin^5 2x+C$.

$F\left(\frac{\pi}{4}\right)=0\Leftrightarrow\frac{1}{6}\sin^3\frac{\pi}{2}-\frac{1}{10}\sin^5\frac{\pi}{2}+C=0\Leftrightarrow C=-\frac{1}{15}$.

Vậy $F(x)=\frac{1}{6}\sin^3 2x-\frac{1}{10}\sin^5 2x-\frac{1}{15}$.

Câu 73: Cho $\int 2x(3x-2)^6\mathrm{d}x=A(3x-2)^8+B(3x-2)^7+C$ với A, $B\in\mathbb{Q}$ và $C\in\mathbb{R}$. Giá trị của biểu thức $12A+7B$ bằng

A. $\frac{23}{252}$.

B. $\frac{241}{252}$.

C. $\frac{52}{9}$.

D. $\frac{7}{9}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=3x-2\Rightarrow x=\frac{t+2}{3}\Rightarrow\frac{1}{3}\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.

Ta có: $\frac{2}{3}\int\frac{t+2}{3}.t^6\mathrm{d}t=\frac{2}{9}\int(t^7+2t^6)\mathrm{d}t=\frac{2}{9}.\frac{t^8}{8}+\frac{4}{9}.\frac{t^7}{7}+C=\frac{1}{36}.(3x-2)^8+\frac{4}{63}.(3x-2)^7+C$.

Suy ra $A=\frac{1}{36}$, $B=\frac{4}{63}$, $12.\frac{1}{36}+7.\frac{4}{63}=\frac{7}{9}$.

Câu 74: Biết $I=\int\limits_1^{e}\frac{\ln x}{x(\ln x+2)}\mathrm{d}x=a\ln\frac{3}{2}+b,\ (a,b\in Q)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

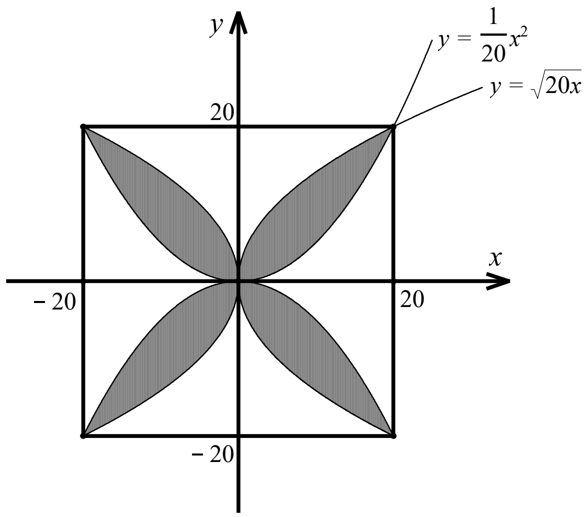
A. $a-b=1$.

B. $2a+b=1$.

C. $a^2+b^2=4$.

D. $a+2b=0$.

Câu 75: Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 40 cm được thiết kế như hình bên dưới. Diện tích mỗi cánh hoa (phần tô đậm) bằng



A. $\frac{800}{3}\ \text{cm}^2$. **B.** $\frac{400}{3}\ \text{cm}^2$. **C.** $250\ \text{cm}^2$. **D.** $800\ \text{cm}^2$.

Câu 76: Một ô tô đang chạy với vận tốc $20\ \text{m/s}$ thì người lái xe phát hiện có hàng rào chắn ngang đường ở phía trước cách xe $45\ \text{m}$ (tính từ đầu xe tới hàng rào) nên người lái đạp phanh. Từ thời điểm đó, xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-5t+20\ (\text{m/s})$, trong đó t là thời gian được tính từ lúc người lái đạp phanh. Khi xe dừng hẳn, khoảng cách từ xe đến hàng rào là bao nhiêu?

A. $4\ \text{m}$. **B.** $5\ \text{m}$. **C.** $3\ \text{m}$. **D.** $6\ \text{m}$.

Câu 77: Một chất điểm chuyển động có phương trình $s(t)=t^3+\frac{9}{2}t^2-6t$, trong đó t được tính bằng giây, s được tính bằng mét. Gia tốc của chất điểm tại thời điểm vận tốc bằng $24\ (\text{m/s})$ là

A. $21\ (\text{m/s}^2)$. **B.** $12\ (\text{m/s}^2)$. **C.** $39\ (\text{m/s}^2)$. **D.** $20\ (\text{m/s}^2)$.

Câu 78: Biết hàm số $y=f(x)$ có $f'(x)=3x^2+2x-m+1$, $f(2)=1$ và đồ thị của hàm số $y=f(x)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -5. Hàm số $f(x)$ là

A. x^3+x^2-3x-5. **B.** x^3+2x^2-5x-5. **C.** $2x^3+x^2-7x-5$. **D.** x^3+x^2+4x-5.

Câu 79: Biết $I=\int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln x+2)}dx = a\ln\frac{3}{2}+b,\ (a,b\in Q)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a-b=1$. **B.** $2a+b=1$. **C.** $a^2+b^2=4$. **D.** $a+2b=0$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=\ln x+2$, suy ra $dt=\frac{1}{x}dx$.

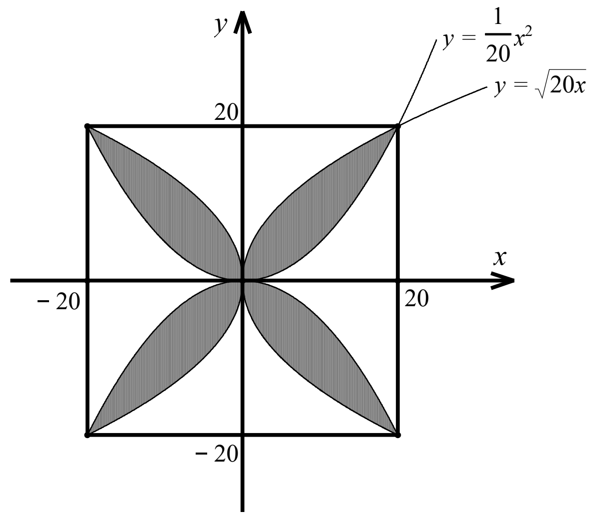
Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=2$

$x=e\Rightarrow t=3$

Khi đó, $I=\int_2^3 \frac{t-2}{t}dt=(t-2\ln t)\Big|_2^3=1+2\ln\frac{2}{3}=1-2\ln\frac{3}{2}$.

Vậy $a=-2; b=1$, nên $a+2b=0$.

Câu 80: Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 40 cm được thiết kế như hình bên dưới. Diện tích mỗi cánh hoa (phần tô đậm) bằng



A. $\frac{800}{3}\ \text{cm}^2$. **B.** $\frac{400}{3}\ \text{cm}^2$. **C.** $250\ \text{cm}^2$. **D.** $800\ \text{cm}^2$.

Lời giải

Chọn B

Diện tích một cánh hoa là diện tích hình phẳng được tính theo công thức sau:

$$S=\int_0^{20}\left(\sqrt{20x}-\frac{1}{20}x^2\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{2}{3}.\sqrt{20}.\sqrt{x^3}-\frac{1}{60}x^3\right)\Bigg|_0^{20}=\frac{400}{3}\ \left(\text{cm}^2\right).$$

Câu 81: Một ô tô đang chạy với vận tốc 20 m/s thì người lái xe phát hiện có hàng rào chắn ngang đường ở phía trước cách xe 45 m (tính từ đầu xe tới hàng rào) nên người lái đạp phanh. Từ thời điểm đó, xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-5t+20\ (\text{m/s})$, trong đó t là thời gian được tính từ lúc người lái đạp phanh. Khi xe dừng hẳn, khoảng cách từ xe đến hàng rào là bao nhiêu?

A. 4 m. **B.** 5 m. **C.** 3 m. **D.** 6 m.

Lời giải

Chọn B

* Xe dừng lại khi $v(t)=0\Leftrightarrow -5t+20=0\Leftrightarrow t=4\ (\text{s})$.

* Quãng đường xe đi được kể từ lúc đạp phanh đến khi dừng lại là:

$$\int_0^4 v(t)\,dt=\int_0^4(-5t+20)\,dt=\left(20t-\frac{5t^2}{2}\right)\Bigg|_0^4=40\text{ m}$$

* Khi xe dừng hẳn, khoảng cách từ xe đến hàng rào là: $45-40=5$ m.

Câu 82: Một chất điểm chuyển động có phương trình $s(t)=t^3+\frac{9}{2}t^2-6t$, trong đó t được tính bằng giây, s được tính bằng mét. Gia tốc của chất điểm tại thời điểm vận tốc bằng $24\ (\text{m/s})$ là

A. $21\ (\text{m/s}^2)$. **B.** $12\ (\text{m/s}^2)$. **C.** $39\ (\text{m/s}^2)$. **D.** $20\ (\text{m/s}^2)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $v(t)=s'(t)=3t^2+9t-6=24\Rightarrow t=2\ (\text{s})$.

Lại có $a(t)=s''(t)=6t+9\Rightarrow a(2)=21\ (\text{m/s}^2)$.

Câu 83: Biết hàm số $y=f(x)$ có $f'(x)=3x^2+2x-m+1$, $f(2)=1$ và đồ thị của hàm số $y=f(x)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -5. Hàm số $f(x)$ là

A. x^3+x^2-3x-5. **B.** x^3+2x^2-5x-5. **C.** $2x^3+x^2-7x-5$. **D.** x^3+x^2+4x-5.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x)=\int(3x^2+2x-m+1)\,\mathrm{d}x=x^3+x^2+(1-m)x+C$.

Theo đề bài, ta có $\begin{cases} f(2)=1 \\ f(0)=-5 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 2(1-m)+C+12=1 \\ C=-5 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} m=4 \\ C=-5 \end{cases}\Rightarrow f(x)=x^3+x^2-3x-5$.

Câu 84: Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x=a$, $(a\in\mathbb{R})$. Tích phân $I=\int_1^2 f(2x+1)\,\mathrm{d}x$ có giá trị là

A. $I=\frac{1}{2}a+1$. **B.** $I=2a+1$. **C.** $I=2a$. **D.** $I=\frac{1}{2}a$.

Câu 85: Goi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=e^x$, trục Ox và hai đường thẳng $x=0$, $x=1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox là

A. $\frac{\pi}{2}(e^2-1)$. **B.** $\pi(e^2+1)$. **C.** $\frac{\pi}{2}(e^2+1)$. **D.** $\pi(e^2-1)$.

Câu 86: Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2+x-2$ và trục hoành bằng

A. 9. **B.** $\frac{13}{6}$. **C.** $\frac{9}{2}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 87: Nếu $\int_2^3\frac{x+2}{2x^2-3x+1}\,\mathrm{d}x=a\ln5+b\ln3+3\ln2\ (a,b\in\mathbb{Q})$ thì giá trị của $P=2a-b$ là

A. $P=1$. **B.** $P=7$. **C.** $P=-\frac{15}{2}$. **D.** $P=\frac{15}{2}$.

Câu 88: Một vật chuyển động có phương trình $v(t)=t^3-3t+1\ (\text{m/s})$. Quãng đường vật đi được kể từ khi bắt đầu chuyển động đến khi gia tốc bằng $24\ \text{m/s}^2$ là

A. $\frac{15}{4}\,\text{m}$. **B.** $20\,\text{m}$. **C.** $19\,\text{m}$. **D.** $\frac{39}{4}\,\text{m}$.

Câu 89: Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+m-1$ thỏa mãn $F(0)=0$ và $F(3)=7$. Khi đó, giá trị của tham số m bằng

A. -2. **B.** 3. **C.** -3. **D.** 2.

Câu 90: Họ nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=4^x+\sin^2 x$ là

A. $\dfrac{4^x}{\ln 4}-\dfrac{1}{4}\sin 2x+C$.

B. $4^x\ln x+\dfrac{\sin^3 x}{3}+C$.

C. $4^x\ln x-\dfrac{\sin^3 x}{3}+C$.

D. $\dfrac{4^x}{\ln 4}+\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{4}\sin 2x+C$.

----------**HẾT**----------

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
C	C	B	D	B	C	A	C	D	A	A	D	C	C	C	D	A	A	A	B	A	D	A	D	D

26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
A	B	B	C	C	C	D	B	A	B	B	A	C	B	B	A	D	A	B	D	D	C	B	B	D

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 91: Giả sử hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_{3}^{5}f\left(x\right)\mathrm{d}x=a$, $\left(a\in\mathbb{R}\right)$. Tích phân $I=\int\limits_{1}^{2}f\left(2x+1\right)\mathrm{d}x$ có giá trị là

A. $I=\frac{1}{2}a+1$. **B.** $I=2a+1$. **C.** $I=2a$. **D.** $I=\frac{1}{2}a$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt $t=2x+1\Rightarrow \mathrm{d}t=2\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=3$; $x=2\Rightarrow t=5$.

$\Rightarrow I=\int\limits_{3}^{5}\frac{1}{2}f\left(t\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\limits_{3}^{5}f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}a$.

Câu 92: Goi $\left(H\right)$ là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=e^{x}$, trục Ox và hai đường thẳng $x=0$, $x=1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay $\left(H\right)$ xung quanh trục Ox là

A. $\frac{\pi}{2}\left(e^{2}-1\right)$. **B.** $\pi\left(e^{2}+1\right)$. **C.** $\frac{\pi}{2}\left(e^{2}+1\right)$. **D.** $\pi\left(e^{2}-1\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Thể tích khối tròn xoay $V=\pi\int\limits_{0}^{1}e^{2x}dx=\frac{\pi}{2}e^{2x}\Big|_{0}^{1}=\frac{\pi}{2}\left(e^{2}-1\right)$.

Câu 93: Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^{2}+x-2$ và trục hoành bằng

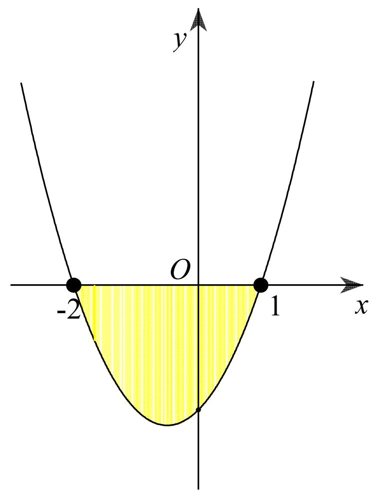
A. 9. **B.** $\frac{13}{6}$. **C.** $\frac{9}{2}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số và trục hoành là nghiệm của phương trình:

$$x^{2}+x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-2\end{array}\right..$$



Diện tích hình phẳng $S=\int_{-2}^{1}\left|x^2+x-2\right|\mathrm{d}x\ =-\int_{-2}^{1}\left(x^2+x-2\right)\mathrm{d}x=\frac{9}{2}$.

Câu 94: Nếu $\int_{2}^{3}\frac{x+2}{2x^2-3x+1}\mathrm{d}x=a\ln 5+b\ln 3+3\ln 2\ \ (a,b\in\mathbb{Q})$ thì giá trị của $P=2a-b$ là

A. $P=1$. **B.** $P=7$. **C.** $P=-\frac{15}{2}$. **D.** $P=\frac{15}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có

$$\int_{2}^{3}\frac{x+2}{2x^2-3x+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int_{2}^{3}\frac{4x-3}{2x^2-3x+1}\mathrm{d}x+\frac{11}{4}\int_{2}^{3}\frac{1}{2x^2-3x+1}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{4}\int_{2}^{3}\frac{1}{2x^2-3x+1}\mathrm{d}\left(2x^2-3x+1\right)+\frac{11}{4}\int_{2}^{3}\frac{1}{(x-1)(2x-1)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|2x^2-3x+1\right|\Big|_{2}^{3}+\frac{11}{4}\int_{2}^{3}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{2x-1}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|2x^2-3x+1\right|\Big|_{2}^{3}+\frac{11}{4}\ln\left|\frac{x-1}{2x-1}\right|\Big|_{2}^{3}$$

$$=\frac{1}{4}(\ln 10-\ln 3)+\frac{11}{4}\left(\ln\frac{2}{5}-\ln\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{10}{3}+\frac{11}{4}\ln\frac{6}{5}$$

$$=\frac{1}{4}(\ln 5+\ln 2-\ln 3)+\frac{11}{4}(\ln 2+\ln 3-\ln 5)$$

$$=-\frac{5}{2}\ln 5+\frac{5}{2}\ln 3+3\ln 2.$$

Do đó $a=-\frac{5}{2}$, $b=\frac{5}{2}$, $P=-\frac{15}{2}$.

Câu 95: Một vật chuyển động có phương trình $v(t)=t^3-3t+1\ \ (\mathrm{m/s})$. Quãng đường vật đi được kể từ khi bắt đầu chuyển động đến khi gia tốc bằng $24\ \mathrm{m/s^2}$ là

A. $\frac{15}{4}\text{ m}$.   **B.** 20 m.   **C.** 19 m.   **D.** $\frac{39}{4}\text{ m}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Gia tốc $a(t)=v'(t)=3t^2-3$. Tại thời điểm vật có gia tốc 24 m/s^2 thì $24=3t^2-3 \Leftrightarrow t=3$.

Quãng đường vật đi được kể từ khi bắt đầu chuyển động đến khi gia tốc bằng 24 m/s^2 là quãng đường vật đi từ vị trí $t=0$ đến vị trí $t=3$.

$S(3)=\int\limits_0^3\left(t^3-3t+1\right)\mathrm{d}t=\frac{39}{4}$.

Câu 96: Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+m-1$ thỏa mãn $F(0)=0$ và $F(3)=7$.

Khi đó, giá trị của tham số m bằng

A. -2.   **B.** 3.   **C.** -3.   **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $F(x)=\int\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+m-1\right)\mathrm{d}x=\sqrt{x+1}+(m-1)x+C$.

Theo giả thiết, ta có $\begin{cases}F(0)=0\\F(3)=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C+1=0\\C+3m=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C=-1\\m=3\end{cases}$.

Vậy $F(x)=\sqrt{x+1}+2x-1$.

Câu 97: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=4^x+\sin^2 x$ là

A. $\frac{4^x}{\ln 4}-\frac{1}{4}\sin 2x+C$.   **B.** $4^x\ln x+\frac{\sin^3 x}{3}+C$.

C. $4^x\ln x-\frac{\sin^3 x}{3}+C$.   **D.** $\frac{4^x}{\ln 4}+\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có:

$\int f(x)dx=\int\left(4^x+\sin^2 x\right)dx=\int\left(4^x+\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx$

$=\int\left(4^x+\frac{1}{2}-\frac{\cos 2x}{2}\right)dx=\frac{4^x}{\ln 4}+\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x+C$.

----------**HẾT**----------

Câu 98: Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ xác định trên K. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\left(x\int f(x)\mathrm{d}x\right)'=f'(x)$.   **B.** $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)'=f(x)$.

C. $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)'=F'(x)$.   **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$.

Câu 99: Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{\tan x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=\frac{\pi}{4}$ quanh trục hoành là

A. $V=\frac{\sqrt{\pi}}{4}$. **B.** $V=\frac{\pi\ln 2}{2}$. **C.** $V=\frac{\pi^2}{4}$. **D.** $V=\frac{\pi}{4}$.

Câu 100: Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=(x-2)^2-1$ và trục hoành bằng

A. $\frac{25}{4}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 101: Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=(2x-3)^2$ thỏa mãn $F(0)=\frac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $\log_2\left[3F(1)-2F(2)\right]$ bằng

A. 10. **B.** -4. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 102: Một chiếc ô tô đang chuyển động với vận tốc $v(t)=2+\frac{t^2-4}{t+4}$ (m/s). Quãng đường ô tô đi được từ thời điểm $t=5(\text{s})$ đến thời điểm $t=10(\text{s})$ là

A. $12,23$ m. **B.** $32,8$ m. **C.** $45,03$ m. **D.** $10,24$ m.

Câu 103: Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ xác định trên K. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\left(x\int f(x)\mathrm{d}x\right)'=f'(x)$. **B.** $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)'=f(x)$.

C. $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)'=F'(x)$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $F'(x)=f(x)$.

$\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)'=f(x)=F'(x)$ nên B và C đúng.

$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$ nên D đúng. Vậy A sai.

Câu 104: Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{\tan x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=\frac{\pi}{4}$ quanh trục hoành là

A. $V=\frac{\sqrt{\pi}}{4}$. **B.** $V=\frac{\pi\ln 2}{2}$. **C.** $V=\frac{\pi^2}{4}$. **D.** $V=\frac{\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Thể tích khối tròn xoay cần tính là $V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x=-\pi\ln\left|\cos x\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi\ln 2}{2}$.

Câu 105: Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=(x-2)^2-1$ và trục hoành bằng

A. $\frac{25}{4}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $(x-2)^2-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng $S=\int\limits_1^3\left|(x-2)^2-1\right|\mathrm{d}x=\left|\int\limits_1^3\left(x^2-4x+3\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\left.\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right)\right|_1^3\right|=\frac{4}{3}$.

Câu 106: Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=(2x-3)^2$ thỏa mãn $F(0)=\frac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $\log_2\left[3F(1)-2F(2)\right]$ bằng

A. 10. **B.** -4. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$3F(1)-2F(2)=3\left[F(1)-F(2)\right]+F(2)-F(0)+F(0)=3\int\limits_2^1 f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{3}=4$.

$\Rightarrow \log_2\left[3F(1)-2F(2)\right]=\log_2 4=2$.

Câu 107: Một chiếc ô tô đang chuyển động với vận tốc $v(t)=2+\frac{t^2-4}{t+4}$ $(\mathrm{m/s})$. Quãng đường ô tô đi được từ thời điểm $t=5(\mathrm{s})$ đến thời điểm $t=10(\mathrm{s})$ là

A. $12,23$ m. **B.** $32,8$ m. **C.** $45,03$ m. **D.** $10,24$ m.

Lời giải

Chọn B

Quãng đường ô tô đi được là: $s=\int\limits_5^{10}\left(2+\frac{t^2-4}{t+4}\right)\mathrm{d}t=32,8\,\mathrm{m}$.

Câu 108: Tính $\int\limits_0^1 3^{2x+1}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{9}{\ln 9}$. **B.** $\frac{12}{\ln 3}$. **C.** $\frac{4}{\ln 3}$. **D.** $\frac{27}{\ln 9}$.

Câu 109: Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=\frac{\ln(x+3)}{x^2}$ sao cho $F(-2)+F(1)=0$. Giá trị của $F(-1)+F(2)$ bằng

A. $\frac{10}{3}\ln 2-\frac{5}{6}\ln 5$. **B.** 0. **C.** $\frac{7}{3}\ln 2$. **D.** $\frac{2}{3}\ln 2+\frac{3}{6}\ln 5$.

Câu 110: Tính $\int\limits_0^1 3^{2x+1}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{9}{\ln 9}$. **B.** $\frac{12}{\ln 3}$. **C.** $\frac{4}{\ln 3}$. **D.** $\frac{27}{\ln 9}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_0^1 3^{2x+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{3^{2x+1}}{\ln 3}\Big|_0^1 = \frac{1}{2\ln 3}\left(3^3-3\right) = \frac{12}{\ln 3}$.

Câu 111: Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=\frac{\ln(x+3)}{x^2}$ sao cho $F(-2)+F(1)=0$. Giá trị của $F(-1)+F(2)$ bằng

A. $\frac{10}{3}\ln 2-\frac{5}{6}\ln 5$. **B.** 0. **C.** $\frac{7}{3}\ln 2$. **D.** $\frac{2}{3}\ln 2+\frac{3}{6}\ln 5$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Ta có hàm số $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-3;0)$ và $(0;+\infty)$.

Tính $\int \frac{\ln(x+3)}{x^2}\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u=\ln(x+3) \\ \mathrm{d}v=\frac{\mathrm{d}x}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\frac{1}{x+3}\mathrm{d}x \\ v=-\frac{1}{x}-\frac{1}{3}=-\frac{x+3}{3x} \end{cases}$ (Chọn $C=-\frac{1}{3}$)

Suy ra: $F(x)=\int\frac{\ln(x+3)}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{x+3}{3x}\ln(x+3)+\int\frac{1}{3x}\mathrm{d}x=-\frac{x+3}{3x}\ln(x+3)+\frac{1}{3}\ln|x|+C$.

- Xét trên khoảng $(-3;0)$, ta có: $F(-2)=\frac{1}{3}\ln 2+C_1$; $F(-1)=\frac{2}{3}\ln 2+C_1$
- Xét trên khoảng $(0;+\infty)$, ta có:

$$F(1)=-\frac{4}{3}\ln 4+C_2=-\frac{8}{3}\ln 2+C_2;\ F(2)=-\frac{5}{6}\ln 5+\frac{1}{3}\ln 2+C_2$$

Suy ra: $F(-2)+F(1)=0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\ln 2+C_1\right)+\left(-\frac{8}{3}\ln 2+C_2\right)=0 \Leftrightarrow C_1+C_2=\frac{7}{3}\ln 2$.

Do đó: $F(-1)+F(2)=\left(\frac{2}{3}\ln 2+C_1\right)+\left(-\frac{5}{6}\ln 5+\frac{1}{3}\ln 2+C_2\right)$

$=\frac{2}{3}\ln 2-\frac{5}{6}\ln 5+\frac{1}{3}\ln 2+\frac{7}{3}\ln 2=\frac{10}{3}\ln 2-\frac{5}{6}\ln 5$.

Cách 2: (Tận dụng máy tính)

- Xét trên khoảng $(-3;0)$, ta có:

$F(-1)-F(-2)=\int_{-2}^{-1}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-2}^{-1}\frac{\ln(x+3)}{x^2}\mathrm{d}x\approx 0,231\to A$ (lưu vào A) (1)

- Xét trên khoảng $(0;+\infty)$, ta có:

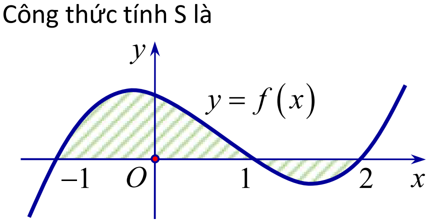
$F(2)-F(1)=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{\ln(x+3)}{x^2}\mathrm{d}x\approx 0,738\to B$ (lưu vào A) (2)

- Lấy (1) cộng (2) theo vế ta được:

$F(-1)+F(2)-F(-2)-F(1)=A+B \Leftrightarrow F(-1)+F(2)=A+B\approx 0,969$.

So các phương án ta **Chọn A**

Câu 112: Gọi S là diện tích miền hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ bên. Công thức tính S là



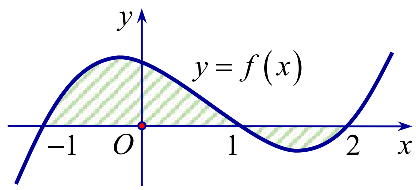
A. $S=\int\limits_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}f(x)\mathrm{d}x$. **B.** $S=\int\limits_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_{1}^{2}f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S=\int\limits_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x$. **D.** $S=-\int\limits_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 113: Biết $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x+x\cos x-\sin^3 x}{1+\cos x}\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{a}-\frac{b}{c}$. Trong đó a, b, c là các số nguyên dương, phân số $\frac{b}{c}$ tối giản. Tính $T=a^2+b^2+c^2$.

A. $T=16$. **B.** $T=59$. **C.** $T=69$. **D.** $T=50$.

Câu 114: Gọi S là diện tích miền hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ bên. Công thức tính S là



A. $S=\int\limits_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}f(x)\mathrm{d}x$. **B.** $S=\int\limits_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_{1}^{2}f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S=\int\limits_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x$. **D.** $S=-\int\limits_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn B

Ta thấy miền hình phẳng giới hạn từ $x=-1$ đến $x=1$ ở trên trục hoành $\to$ mang dấu dương

$\Rightarrow S_1=+\int\limits_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x$

Miền hình phẳng giới hạn từ $x=1$ đến $x=2$ ở dưới trục hoành $\to$ mang dấu âm

$\Rightarrow S_2=-\int\limits_{1}^{2}f(x)\mathrm{d}x$

Vậy $S=\int\limits_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_{1}^{2}f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 115: Biết $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x+x\cos x-\sin^3 x}{1+\cos x}\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{a}-\frac{b}{c}$. Trong đó a, b, c là các số nguyên dương, phân số $\frac{b}{c}$ tối giản. Tính $T=a^2+b^2+c^2$.

A. $T=16$. **B.** $T=59$. **C.** $T=69$. **D.** $T=50$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x+x\cos x-\sin^3 x}{1+\cos x}\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\sin^3 x}{1+\cos x}\right)\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)\sin x\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{8}+\left(\cos x-\frac{1}{2}\cos^2 x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{2}.$$

Như vậy $a=8$, $b=1$, $c=2$. Vậy $T=a^2+b^2+c^2=69$.

Câu 116: Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$

A. $x+\dfrac{1}{x-1}+C$. **B.** $\dfrac{1}{(x-1)^2}+C$. **C.** $\dfrac{x^2}{2}+\ln|x-1|+C$. **D.** $x^2+\ln|x-1|+C$.

Câu 117: Nếu $\int_0^{10} f(z)\mathrm{d}z=17$ và $\int_0^8 f(t)\mathrm{d}t=12$ thì $\int_8^{10} -3f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. -15. **B.** 29. **C.** 15. **D.** 5.

Câu 118: Thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y=1-x^2$, $y=0$ quanh trục Ox là $V=\dfrac{a\pi}{b}$ với a, b là số nguyên. Khi đó $a+b$ bằng

A. 11. **B.** 17. **C.** 31. **D.** 25.

Câu 119: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-x^3+3x+3$ và đường thẳng $y=5$.

A. $\dfrac{5}{4}$. **B.** $\dfrac{45}{4}$. **C.** $\dfrac{27}{4}$. **D.** $\dfrac{21}{4}$.

Câu 120: Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$

A. $x+\dfrac{1}{x-1}+C$. **B.** $\dfrac{1}{(x-1)^2}+C$. **C.** $\dfrac{x^2}{2}+\ln|x-1|+C$. **D.** $x^2+\ln|x-1|+C$.

Lời giải

Chọn C

$$\int\frac{x^2-x+1}{x-1}\mathrm{d}x=\int\left(x+\frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}+\ln|x-1|+C.$$

Câu 121: Nếu $\int_0^{10} f(z)\mathrm{d}z=17$ và $\int_0^8 f(t)\mathrm{d}t=12$ thì $\int_8^{10} -3f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. -15. **B.** 29. **C.** 15. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

$$I=-3\int_8^{10} f(x)\mathrm{d}x=-3\left(\int_8^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^{10} f(x)\mathrm{d}x\right)=-3(-12+17)=-15.$$

Câu 122: Thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y=1-x^2$, $y=0$ quanh trục Ox là $V=\dfrac{a\pi}{b}$ với a, b là số nguyên. Khi đó $a+b$ bằng

A. 11. **B.** 17. **C.** 31. **D.** 25.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm $1-x^2=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

Ta có $V=\pi\int\limits_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^2\mathrm{d}x=\dfrac{16\pi}{15} \Rightarrow a=16,\ b=15$.

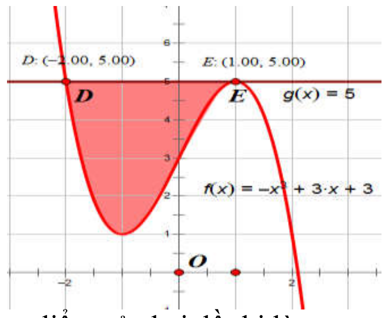
Vậy $a+b=31$.

Câu 123: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-x^3+3x+3$ và đường thẳng $y=5$.

A. $\dfrac{5}{4}$. **B.** $\dfrac{45}{4}$. **C.** $\dfrac{27}{4}$. **D.** $\dfrac{21}{4}$.

Lời giải

Chọn C



+ Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị là

$-x^3+3x+3=5 \Leftrightarrow x^3-3x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Vậy diện tích hình phẳng cần tính là $S=\int\limits_{-2}^{1}\left|x^3-3x+2\right|\mathrm{d}x=\dfrac{27}{4}$.

Câu 124: Biết rằng $\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{2\pi}{3}+a$. Khi đó a bằng:

A. $\sqrt{2}$. **B.** 1. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** 2.

Câu 125: Hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2-1$, $x=3$ và Ox có diện tích là

A. 8. **B.** $\dfrac{4}{3}$. **C.** $\dfrac{16}{3}$. **D.** $\dfrac{20}{3}$.

Câu 126: Biết rằng $\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{2\pi}{3}+a$. Khi đó a bằng:

A. $\sqrt{2}$. **B.** 1. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Đặt $x=2\sin t \Rightarrow \mathrm{d}x=2\cos t\,\mathrm{d}t$.

Khi đó :

$$\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}4\cos t\left|\cos t\right|\mathrm{d}t=\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}4\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\left(2+2\cos 2t\right)\mathrm{d}t=\left(2t+\sin 2t\right)\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}=\dfrac{2\pi}{3}+\sqrt{3}.$$

Câu 127: Hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2-1$, $x=3$ và Ox có diện tích là

A. 8. **B.** $\dfrac{4}{3}$. **C.** $\dfrac{16}{3}$. **D.** $\dfrac{20}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của các đường $y = x^2 - 1$ và Ox là: $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Diện tích hình phẳng là:

$$S = \int_{-1}^{3} \left| x^2 - 1 \right| dx = \int_{-1}^{1} \left(-x^2 + 1 \right) dx + \int_{1}^{3} \left(x^2 - 1 \right) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_{-1}^{1} + \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_{1}^{3} = 8.$$

Câu 128: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{-1}^{1} f(x) dx = 12$, $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} f(2\cos x) \sin x dx$ bằng

A. -12. **B.** 12. **C.** 6. **D.** -6.

Câu 129: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{-1}^{1} f(x) dx = 12$, $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} f(2\cos x) \sin x dx$ bằng

A. -12. **B.** 12. **C.** 6. **D.** -6.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $t = 2\cos x \Rightarrow dt = -2\sin x dx$.

Đổi cận

x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$
t	1	-1

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} f(2\cos x) \sin x dx = \int_{1}^{-1} f(t) \left(-\frac{1}{2} \right) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} f(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) dx = 6.$$

Câu 130: Cho $\int_{-1}^{2} f(x) dx = 2$, $\int_{-1}^{7} f(t) dt = 9$. Giá trị của $\int_{2}^{7} f(z) dz$ là

A. 11. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 9.

Câu 131: Tìm hàm số $f(x)$, biết rằng $f'(x) = 4\sqrt{x} - x$ và $f(4) = 0$.

A. $f(x) = \frac{8x\sqrt{x}}{3} - \frac{x^2}{2} - \frac{40}{3}$. **B.** $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - 1$.

C. $f(x) = \frac{8x\sqrt{x}}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{88}{3}$. **D.** $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{x^2}{2} + 1$.

Câu 132: Một vật đang chuyển động với vận tốc 10 m/s thì bắt đầu tăng tốc với gia tốc

$$a(t) = 6t + 12t^2 \ \left(\text{m/s}^2 \right)$$

Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là

A. $\frac{4300}{3}$ m. **B.** 11100 m. **C.** 4300 m. **D.** $\frac{98}{3}$ m.

Câu 133: Cho $\int\limits_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 2$, $\int\limits_{-1}^{7} f(t)\mathrm{d}t = 9$. Giá trị của $\int\limits_{2}^{7} f(z)\mathrm{d}z$ là

A. 11. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 9.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $\int\limits_{-1}^{7} f(t)\mathrm{d}t = \int\limits_{-1}^{7} f(x)\mathrm{d}x$ và $\int\limits_{2}^{7} f(z)\mathrm{d}z = \int\limits_{2}^{7} f(x)\mathrm{d}x$ nên $\int\limits_{-1}^{7} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{2}^{7} f(x)\mathrm{d}x$.

Vậy $\int\limits_{2}^{7} f(z)\mathrm{d}z = 7$.

Câu 134: Tìm hàm số $f(x)$, biết rằng $f'(x) = 4\sqrt{x} - x$ và $f(4) = 0$.

A. $f(x) = \frac{8x\sqrt{x}}{3} - \frac{x^2}{2} - \frac{40}{3}$. **B.** $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - 1$.

C. $f(x) = \frac{8x\sqrt{x}}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{88}{3}$. **D.** $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{x^2}{2} + 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có: $f(x) = \int f'(x)\mathrm{d}x = \int \left(4\sqrt{x} - x\right)\mathrm{d}x = \frac{8x\sqrt{x}}{3} - \frac{x^2}{2} + C$.

$f(4) = 0 \Leftrightarrow \frac{8.4\sqrt{4}}{3} - \frac{4^2}{2} + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{40}{3}$.

Vậy $f(x) = \frac{8x\sqrt{x}}{3} - \frac{x^2}{2} - \frac{40}{3}$.

Câu 135: Một vật đang chuyển động với vận tốc 10 m/s thì bắt đầu tăng tốc với gia tốc

$$a(t) = 6t + 12t^2 \ \left(\mathrm{m/s^2}\right)$$

Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là

A. $\frac{4300}{3}$ m. **B.** 11100 m. **C.** 4300 m. **D.** $\frac{98}{3}$ m.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Vật tốc $v(t) = \int a(t)\mathrm{d}t = \int \left(6t + 12t^2\right)\mathrm{d}t = 3t^2 + 4t^3 + C$

Tại thời điểm $t = 0$ (lúc bắt đầu tăng tốc) thì $v(t) = 10$ m/s $\Leftrightarrow v(0) = 10$ $\Leftrightarrow 3.0^2 + 4.0^3 + C = 10 \Leftrightarrow C = 10$. Vậy $v(t) = 3t^2 + 4t^3 + 10$.

Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là

$S = \int\limits_{0}^{10} v(t)\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{10} \left(3t^2 + 4t^3 + 10\right)\mathrm{d}t = 11100$ m.

Câu 136: Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi $y = 2x$; $y = x^2$; $y = 1$ trên miền $x \geq 0$; $y \leq 1$

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{5}{12}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 137: Cho $\int_1^3 \frac{x+3}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x = m\ln 2 + n\ln 3 + p\ln 5$, với m, n, p là các số hữu tỉ. Tính $S = m^2 + n + p^2$.

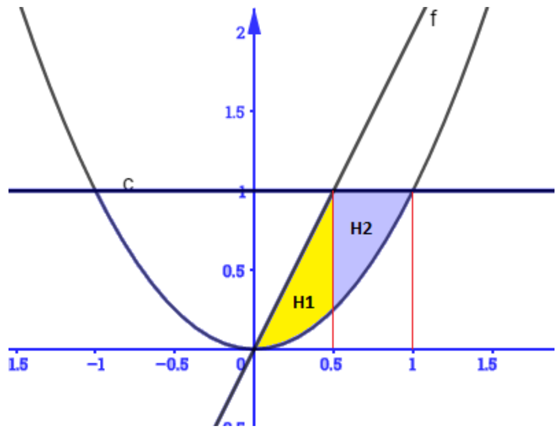
A. $S = 6$. **B.** $S = 4$. **C.** $S = 3$. **D.** $S = 5$.

Câu 138: Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi $y = 2x$; $y = x^2$; $y = 1$ trên miền $x \geq 0$; $y \leq 1$

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{5}{12}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$; $2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Hình phẳng cần tính được tạo từ hai hình (H_1) và (H_2)

Trong đó $(H_1)\begin{cases} y = 2x \\ y = x^2 \\ x = 0;\ \ x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow S_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \left|2x - x^2\right|\mathrm{d}x = \frac{5}{24}$.

Và $(H_2) = \begin{cases} y = 1 \\ y = x^2 \\ x = \frac{1}{2};\ \ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow S_2 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left|1 - x^2\right|\mathrm{d}x = \frac{5}{24}$.

Vậy diện tích hình phẳng cần tính là $S = S_1 + S_2 = \frac{5}{24} + \frac{5}{24} = \frac{5}{12}$.

Câu 139: Cho $\int_1^3 \frac{x+3}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x = m\ln 2 + n\ln 3 + p\ln 5$, với m, n, p là các số hữu tỉ. Tính $S = m^2 + n + p^2$.

A. $S = 6$. **B.** $S = 4$. **C.** $S = 3$. **D.** $S = 5$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int\limits_1^3 \frac{x+3}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x = \int\limits_1^3 \frac{x+3}{(x+1)(x+2)}\mathrm{d}x = \int\limits_1^3 \frac{2x+4-(x+1)}{(x+1)(x+2)}\mathrm{d}x$

$= \int\limits_1^3 \left[\frac{2x+4}{(x+2)(x+1)} - \frac{x+1}{(x+2)(x+1)}\right]\mathrm{d}x$

$= \int\limits_1^3 \frac{2}{x+1}\mathrm{d}x - \int\limits_1^3 \frac{1}{x+2}\mathrm{d}x = 2\ln(x+1)\Big|_1^3 - \ln(x+2)\Big|_1^3 = 2\ln 4 - 2\ln 2 - (\ln 5 - \ln 3)$

$= 2\ln\left(\frac{4}{2}\right) - \ln 5 + \ln 3 = 2\ln 2 + \ln 3 - \ln 5 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = 1 \\ p = -1 \end{cases} \Leftrightarrow S = 2^2 + 1 + (-1)^2 = 6$.

Câu 140: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và thỏa mãn $f(-1) = 4$; $f(3) = 7$. Giá trị của $I = \int\limits_{-1}^3 5f'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $I = 20$. **B.** $I = 3$. **C.** $I = 10$. **D.** $I = 15$.

Câu 141: Cho $\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x = 12$, giá trị của $\int\limits_2^6 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 24. **B.** 10. **C.** 6. **D.** 14.

Câu 142: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và thỏa mãn $f(-1) = 4$; $f(3) = 7$. Giá trị của $I = \int\limits_{-1}^3 5f'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $I = 20$. **B.** $I = 3$. **C.** $I = 10$. **D.** $I = 15$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$I = \int\limits_{-1}^3 5f'(x)\mathrm{d}x = 5f(x)\Big|_{-1}^3 = 5f(3) - 5f(-1) = 5.7 - 5.4 = 15$.

Câu 143: Cho $\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x = 12$, giá trị của $\int\limits_2^6 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 24. **B.** 10. **C.** 6. **D.** 14.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $t = \frac{x}{2} \Rightarrow \mathrm{d}x = 2\mathrm{d}t$.

Đổi cận $x = 2 \Rightarrow t = 1$

$x = 6 \Rightarrow t = 3$

Khi đó $\int\limits_2^6 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x = 2\int\limits_1^3 f(t)\mathrm{d}t = 2\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x = 24$.

Câu 144: Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$, $(a,b,c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ có hai nghiệm thực phân biệt x_1, x_2. Tính tích phân $I = \int_{x_1}^{x_2} (2ax+b)e^{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x$.

A. $I = x_1 - x_2$. **B.** $I = \frac{x_1 - x_2}{4}$. **C.** $I = 0$. **D.** $I = \frac{x_1 - x_2}{2}$.

Câu 145: Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c, \ (a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ có hai nghiệm thực phân biệt x_1, x_2. Tính tích phân $I = \int_{x_1}^{x_2} (2ax + b) e^{ax^2 + bx + c} \mathrm{d}x$.

A. $I = x_1 - x_2$. **B.** $I = \frac{x_1 - x_2}{4}$. **C.** $I = 0$. **D.** $I = \frac{x_1 - x_2}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = ax^2 + bx + c \Rightarrow dt = (2ax + b)\mathrm{d}x$

Khi $\begin{cases} x = x_1 \Rightarrow t = ax_1^2 + bx_1 + c = 0 \\ x = x_2 \Rightarrow t = ax_2^2 + bx_2 + c = 0 \end{cases}$. Do đó $I = \int_{x_1}^{x_2} (2ax + b) e^{ax^2 + bx + c} \mathrm{d}x = \int_0^0 e^t \mathrm{d}t = 0$.

Câu 146: Cho tích phân $\int_1^e (2x - 5) \ln x \mathrm{d}x$. Chọn khẳng định đúng?

A. $I = -(x^2 - 5x) \ln x \Big|_1^e - \int_1^e (x - 5) \mathrm{d}x$. **B.** $I = (x^2 - 5x) \ln x \Big|_1^e + \int_1^e (x - 5) \mathrm{d}x$.

C. $I = (x^2 - 5x) \ln x \Big|_1^e - \int_1^e (x - 5) \mathrm{d}x$. **D.** $I = (x - 5) \ln x \Big|_1^e - \int_1^e (x^2 - 5x) \mathrm{d}x$.

Câu 147: Biết rằng $\int_0^2 \frac{x^2}{x+1} \mathrm{d}x = a + \ln b$ với a, $b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$. Hỏi giá trị $2a + b$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(8;10)$. **B.** $(6;8)$. **C.** $(4;6)$. **D.** $(2;4)$.

Câu 148: Cho tích phân $\int_1^e (2x - 5) \ln x \mathrm{d}x$. Chọn khẳng định đúng?

A. $I = -(x^2 - 5x) \ln x \Big|_1^e - \int_1^e (x - 5) \mathrm{d}x$. **B.** $I = (x^2 - 5x) \ln x \Big|_1^e + \int_1^e (x - 5) \mathrm{d}x$.

C. $I = (x^2 - 5x) \ln x \Big|_1^e - \int_1^e (x - 5) \mathrm{d}x$. **D.** $I = (x - 5) \ln x \Big|_1^e - \int_1^e (x^2 - 5x) \mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $u = \ln x \Rightarrow \mathrm{d}u = \frac{1}{x} \mathrm{d}x$; $\mathrm{d}v = (2x - 5) \mathrm{d}x \Rightarrow v = x^2 - 5x$.

Ta có: $I = (x^2 - 5x) \ln x \Big|_1^e - \int_1^e (x^2 - 5x) \frac{1}{x} \mathrm{d}x = (x^2 - 5x) \ln x \Big|_1^e - \int_1^e (x - 5) \mathrm{d}x$.

Câu 149: Biết rằng $\int_0^2 \frac{x^2}{x+1} \mathrm{d}x = a + \ln b$ với a, $b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$. Hỏi giá trị $2a + b$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(8;10)$. **B.** $(6;8)$. **C.** $(4;6)$. **D.** $(2;4)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int_0^2 \frac{x^2}{x+1}dx = \int_0^2 \left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx = \left(\frac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|\right)\Big|_0^2 = \ln 3 \Rightarrow a=0,\ b=3 \Rightarrow 2a+b=3$.

Câu 150: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\cos x$, trục tung, trục hoành và đường thẳng $x=\pi$ bằng

A. 3 . **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 151: Tính tích phân $I=\int_1^2 \left(2019\log_2 x+\frac{1}{\ln 2}\right)x^{2018}dx$.

A. $I=2^{2017}$. **B.** $I=2^{2019}$. **C.** $I=2^{2018}$. **D.** $I=2^{2020}$.

Câu 152: Tính tích phân $I=\int_0^{2018} \frac{\ln\left(1+2^x\right)}{\left(1+2^{-x}\right)\log_4 e}dx$.

A. $I=\ln\left(1+2^{2018}\right)-\ln 2$. **B.** $I=\ln^2\left(1+2^{2018}\right)-\ln^2 2$.

C. $I=\ln^2\left(1+2^{2018}\right)-\ln 4$. **D.** $I=\ln^2\left(1+2^{-2018}\right)-\ln^2 2$.

Câu 153: Xét hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)=a\sin x+b\cos x$ (với a, b là các hằng số thực dương), trục hoành, trục tung và đường thăng $x=\pi$. Nếu vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay (H) quanh trục Ox có thể tích bằng $\frac{5\pi^2}{2}$ và $f'(0)=2$ thì $2a+5b$ bằng

A. 8. **B.** 11. **C.** 9. **D.** 10.

Câu 154: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\cos x$, trục tung, trục hoành và đường thẳng $x=\pi$ bằng

A. 3 . **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=\cos x$ và trục hoành là nghiệm phương trình

$\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi$. Xét trên $[0;\pi]$ suy ra $x=\frac{\pi}{2}$

Diện tích hình phẳng cần tính là $S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x dx=2$.

Câu 155: Tính tích phân $I=\int_1^2 \left(2019\log_2 x+\frac{1}{\ln 2}\right)x^{2018}dx$.

A. $I=2^{2017}$. **B.** $I=2^{2019}$. **C.** $I=2^{2018}$. **D.** $I=2^{2020}$.

Lời giải

Chọn B

$I=\int_1^2 \left(2019\log_2 x+\frac{1}{\ln 2}\right)x^{2018}dx = 2019\int_1^2 x^{2018}\log_2 x dx+\frac{1}{\ln 2}\int_1^2 x^{2018}dx = 2019I_1+\frac{1}{\ln 2}I_2$.

Trong đó $I_2=\int_1^2 x^{2018}dx=\frac{x^{2019}}{2019}\Big|_1^2=\frac{2^{2019}-1}{2019}$.

và $I_1=\int\limits_1^2 x^{2018}\log_2 x\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases}u=\log_2 x\\ \mathrm{d}v=x^{2018}\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{1}{x.\ln 2}\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{x^{2019}}{2019}\end{cases}$.

Khi đó $I_1=\left(\dfrac{x^{2019}}{2019}.\log_2 x\right)\Bigg|_1^2-\dfrac{1}{2019.\ln 2}I_2=\dfrac{2^{2019}}{2019}-\dfrac{1}{2019.\ln 2}.\dfrac{2^{2019}-1}{2019}=\dfrac{2^{2019}}{2019}-\dfrac{2^{2019}-1}{2019^2.\ln 2}$.

Vậy $I=2^{2019}$.

Câu 156: Tính tích phân $I=\int\limits_0^{2018}\dfrac{\ln\left(1+2^x\right)}{\left(1+2^{-x}\right)\log_4 \mathrm{e}}\mathrm{d}x$.

A. $I=\ln\left(1+2^{2018}\right)-\ln 2$.

B. $I=\ln^2\left(1+2^{2018}\right)-\ln^2 2$.

C. $I=\ln^2\left(1+2^{2018}\right)-\ln 4$.

D. $I=\ln^2\left(1+2^{-2018}\right)-\ln^2 2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $I=\int\limits_0^{2018}\dfrac{\ln\left(1+2^x\right)}{\left(1+2^{-x}\right)\log_4 \mathrm{e}}\mathrm{d}x=2\int\limits_0^{2018}\ln\left(1+2^x\right)\dfrac{2^x\ln 2}{1+2^x}\mathrm{d}x=2\int\limits_0^{2018}\ln\left(1+2^x\right)\mathrm{d}\left[\ln\left(1+2^x\right)\right]$

Do đó $I=\ln^2\left(1+2^x\right)\Big|_0^{2018}=\ln^2\left(1+2^{2018}\right)-\ln^2 2$.

Câu 157: Xét hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)=a\sin x+b\cos x$ (với a, b là các hằng số thực dương), trục hoành, trục tung và đường thăng $x=\pi$. Nếu vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay (H) quanh trục Ox có thể tích bằng $\dfrac{5\pi^2}{2}$ và $f'(0)=2$ thì $2a+5b$ bằng

A. 8.

B. 11.

C. 9.

D. 10.

Lời giải

Chọn C

Ta có thể tích của vật thể là

$$V=\pi\int\limits_0^{\pi}\left(a\sin x+b\cos x\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^{\pi}\left(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x+2ab\sin x\cos x\right)\mathrm{d}x$$

$$=\pi\int\limits_0^{\pi}\left(a^2\dfrac{1-\cos 2x}{2}+b^2\dfrac{1+\cos 2x}{2}+ab\sin 2x\right)\mathrm{d}x=\pi\left[a^2\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\sin 2x}{4}\right)+b^2\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\sin 2x}{4}\right)-\dfrac{ab}{2}\cos 2x\right]_0^{\pi}$$

$$=\pi\left(a^2+b^2\right)\dfrac{\pi}{2}.$$

Theo giả thiết ta có $a^2+b^2=5(1)$.

Ta có $f'(x)=a\cos x-b\sin x\Rightarrow f'(0)=a$. Theo giả thiết ta có $a=2$ và $b=1$. Ta được $2a+5b=9$.

Câu 158: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=3^x+\dfrac{1}{x^2}$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=3^x+\dfrac{1}{x}+C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{3^x}{\ln 3}+\dfrac{1}{x}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=3^x-\dfrac{1}{x}+C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{3^x}{\ln 3}-\dfrac{1}{x}+C$.

Câu 159: Tính tích phân $I=\int\limits_0^2 \sqrt{4x+1}\mathrm{d}x$.

A. 13 **B.** $\frac{13}{3}$ **C.** 4 **D.** $\frac{4}{3}$

Câu 160: Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 x^{2018}(1+x)\mathrm{d}x$

A. $I=\frac{1}{2018}+\frac{1}{2019}$. **B.** $I=\frac{1}{2020}+\frac{1}{2021}$. **C.** $I=\frac{1}{2019}+\frac{1}{2020}$. **D.** $I=\frac{1}{2017}+\frac{1}{2018}$.

Câu 161: Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{2x}$; $y=2x-2$ và trục hoành. Tính diện tích của (H).

A. $\frac{5}{3}$. **B.** $\frac{16}{3}$. **C.** $\frac{10}{3}$. **D.** $\frac{8}{3}$.

Câu 162: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=3^x+\frac{1}{x^2}$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=3^x+\frac{1}{x}+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{3^x}{\ln 3}+\frac{1}{x}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=3^x-\frac{1}{x}+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{3^x}{\ln 3}-\frac{1}{x}+C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(3^x+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{3^x}{\ln 3}-\frac{1}{x}+C$.

Câu 163: Tính tích phân $I=\int\limits_0^2 \sqrt{4x+1}\mathrm{d}x$.

A. 13 **B.** $\frac{13}{3}$ **C.** 4 **D.** $\frac{4}{3}$

Lời giải

Chọn B

Ta có $I=\int\limits_0^2 \sqrt{4x+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int\limits_0^2 (4x+1)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}(4x+1)=\frac{1}{4}.\frac{2}{3}.(4x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2=\frac{13}{3}$.

Câu 164: Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 x^{2018}(1+x)\mathrm{d}x$

A. $I=\frac{1}{2018}+\frac{1}{2019}$. **B.** $I=\frac{1}{2020}+\frac{1}{2021}$. **C.** $I=\frac{1}{2019}+\frac{1}{2020}$. **D.** $I=\frac{1}{2017}+\frac{1}{2018}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $I=\int\limits_0^1 x^{2018}(1+x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(x^{2018}+x^{2019}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^{2019}}{2019}+\frac{x^{2020}}{2020}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2019}+\frac{1}{2020}$.

Câu 165: Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{2x}$; $y=2x-2$ và trục hoành. Tính diện tích của (H).

A. $\frac{5}{3}$. **B.** $\frac{16}{3}$. **C.** $\frac{10}{3}$. **D.** $\frac{8}{3}$.

Lời giải

Chọn A

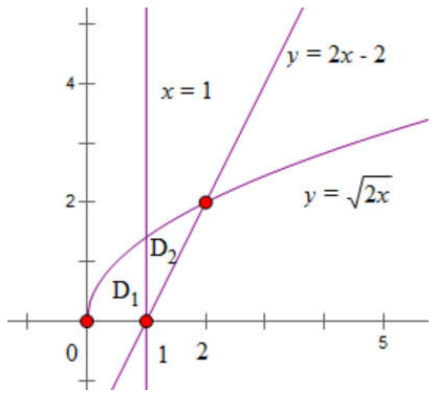
Phương trình hoành độ giao điểm :

□ $\sqrt{2x} = 2x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ 2x = (2x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ 4x^2 - 10x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$.

□ $2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

□ $\sqrt{2x} = 0 \Rightarrow x = 0$.

Đồ thị:



Diện tích hình (H): $S = S_{D_1} + S_{D_2} = \int_0^1 \sqrt{2x}\,dx + \int_1^2 \left(\sqrt{2x} - 2x + 2\right)dx = \frac{5}{3}$

Câu 166: Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - x$ và đồ thị hàm số $y = x - x^2$.

A. $S = 13$. **B.** $S = \frac{81}{12}$. **C.** $S = \frac{9}{4}$. **D.** $S = \frac{37}{12}$.

Câu 167: Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - x$ và đồ thị hàm số $y = x - x^2$.

A. $S = 13$. **B.** $S = \frac{81}{12}$. **C.** $S = \frac{9}{4}$. **D.** $S = \frac{37}{12}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $x^3 - x = x - x^2 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$

Ta có $S = \left|\int_{-2}^{0} \left(x^3 + x^2 - 2x\right)dx\right| + \left|\int_0^1 \left(x^3 + x^2 - 2x\right)dx\right| = \frac{37}{12}$.

Câu 168: Hàm số nào sau đây **không phải** là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x+1}$?

A. $F(x) = \ln|2x+1| + 1$. **B.** $F(x) = \frac{1}{2}\ln|2x+1| + 2$.

C. $F(x) = \frac{1}{2}\ln|4x+2| + 3$. **D.** $F(x) = \frac{1}{4}\ln\left(4x^2 + 4x + 1\right) + 3$.

Câu 169: Hàm số nào sau đây **không phải** là nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2x+1}$?

A. $F\left(x\right)=\ln\left|2x+1\right|+1$. **B.** $F\left(x\right)=\dfrac{1}{2}\ln\left|2x+1\right|+2$.

C. $F\left(x\right)=\dfrac{1}{2}\ln\left|4x+2\right|+3$. **D.** $F\left(x\right)=\dfrac{1}{4}\ln\left(4x^2+4x+1\right)+3$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int\dfrac{1}{2x+1}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\ln\left|2x+1\right|+C$.

Do đó $F\left(x\right)=\ln\left|2x+1\right|+1$ **không phải** nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2x+1}$.

Với $C=2$, ta có $F\left(x\right)=\dfrac{1}{2}\ln\left|2x+1\right|+2$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2x+1}$.

Với $C=3+\dfrac{1}{2}\ln 2$, ta có $F\left(x\right)=\dfrac{1}{2}\ln\left|4x+2\right|+3$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2x+1}$.

Với $F\left(x\right)=\dfrac{1}{4}\ln\left(4x^2+4x+1\right)+3=\dfrac{1}{4}\ln\left(2x+1\right)^2+3=\dfrac{1}{2}\ln\left|2x+1\right|+3$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2x+1}$.

Câu 170: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $x=4$, $x=9$ và đường cong có phương trình $y^2=8x$.

A. $\dfrac{76\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\dfrac{152}{3}$. **C.** $76\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{152\sqrt{2}}{3}$.

Câu 171: Hai người A, B đang chạy xe ngược chiều nhau thì xảy ra va chạm, hai xe tiếp tục di chuyển theo chiều của mình thêm một quãng đường nữa thì dừng hẳn. Biết rằng sau khi va chạm, một người di chuyển tiếp với vận tốc $v_1\left(t\right)=6-3t$ mét trên giây, người còn lại di chuyển với vận tốc $v_2\left(t\right)=12-4t$ mét trên giây. Tính khoảng cách hai xe khi đã dừng hẳn.

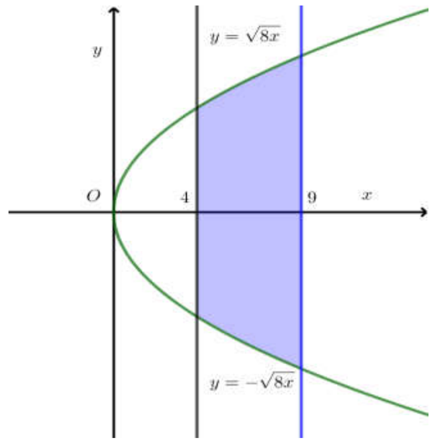
A. 25 mét. **B.** 22 mét. **C.** 20 mét. **D.** 24 mét.

Câu 172: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $x=4$, $x=9$ và đường cong có phương trình $y^2=8x$.

A. $\dfrac{76\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\dfrac{152}{3}$. **C.** $76\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{152\sqrt{2}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D



Vì $x \in [4;9] \Rightarrow y = \pm\sqrt{8x}$

Vậy $S = 2\int\limits_4^9 \sqrt{8x}\mathrm{d}x = \dfrac{152\sqrt{2}}{3}$

Câu 173: Hai người A, B đang chạy xe ngược chiều nhau thì xảy ra va chạm, hai xe tiếp tục di chuyển theo chiều của mình thêm một quãng đường nữa thì dừng hẳn. Biết rằng sau khi va chạm, một người di chuyển tiếp với vận tốc $v_1(t) = 6 - 3t$ mét trên giây, người còn lại di chuyển với vận tốc $v_2(t) = 12 - 4t$ mét trên giây. Tính khoảng cách hai xe khi đã dừng hẳn.

A. 25 mét. **B.** 22 mét. **C.** 20 mét. **D.** 24 mét.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Thời gian người thứ nhất di chuyển sau khi va chạm là: $6 - 3t = 0 \Leftrightarrow t = 2$ giây.

Quãng đường người thứ nhất di chuyển sau khi va chạm là:

$$S_1 = \int\limits_0^2 (6-3t)\mathrm{d}t = \left.\left(6t - \frac{3t^2}{2}\right)\right|_0^2 = 6 \text{ mét.}$$

Thời gian người thứ hai di chuyển sau khi va chạm là: $12 - 4t = 0 \Leftrightarrow t = 3$ giây.

Quãng đường người thứ hai di chuyển sau khi va chạm là:

$$S_2 = \int\limits_0^3 (12-4t)\mathrm{d}t = \left.\left(12t - 2t^2\right)\right|_0^3 = 18 \text{ mét.}$$

Khoảng cách hai xe khi đã dừng hẳn là: $S = S_1 + S_2 = 6 + 18 = 24$ mét.

Câu 174: Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = x^2 - 4x + 3$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1; x = 3$. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành bằng

A. $\dfrac{16\pi}{15}$. **B.** $\dfrac{16}{15}$. **C.** $\dfrac{4\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{4}{3}$.

Câu 175: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;2]$ và $\int\limits_1^2 (x-1)f'(x)\mathrm{d}x = a$. Tính $\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ theo a và $b = f(2)$.

A. $b - a$. **B.** $a - b$. **C.** $a + b$. **D.** $-a - b$.

Câu 176: Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = x^2 - 4x + 3$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1; x = 3$. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành bằng

A. $\frac{16\pi}{15}$. **B.** $\frac{16}{15}$. **C.** $\frac{4\pi}{3}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn A

* Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành là:

$$V=\pi\int_1^3\left[x^2-4x+3\right]^2dx=\pi\int_1^3\left[x^4-5x^3+19x^2-12x+9\right]dx=\frac{16\pi}{15}\text{ (đvtt).}$$

Câu 177: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;2]$ và $\int_1^2(x-1)f'(x)\mathrm{d}x=a$. Tính $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ theo a và $b=f(2)$.

A. $b-a$. **B.** $a-b$. **C.** $a+b$. **D.** $-a-b$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $u=x-1\Rightarrow \mathrm{d}u=\mathrm{d}x$; $\mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x$ chọn $v=f(x)$.

$\int_1^2(x-1)f'(x)\mathrm{d}x=(x-1)f(x)\Big|_1^2-\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=f(2)-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=b-\int_1^2 f(x)$.

Ta có $\int_1^2(x-1)f'(x)\mathrm{d}x=a\Leftrightarrow b-\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=a\Leftrightarrow\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=b-a$.

Câu 178: Tích phân $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\sqrt{2}-1$. **B.** $2\left(\sqrt{2}-1\right)$. **C.** $\ln 2$. **D.** $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$.

Câu 179: Tích phân $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\sqrt{2}-1$. **B.** $2\left(\sqrt{2}-1\right)$. **C.** $\ln 2$. **D.** $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x=2\int_0^1\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\mathrm{d}(x+1)=2\sqrt{x+1}\Big|_0^1=2\left(\sqrt{2}-1\right)$.

Câu 180: Cho $\int_2^5 f(x)\mathrm{d}x=10$. Kết quả $\int_5^2\left[2-4f(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng:

A. 34. **B.** 36. **C.** 40. **D.** 32.

Câu 181: Tính diện tích hình phẳng S giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=x^2+2$ và $y=3x$.

A. $S=\frac{1}{6}$. **B.** $S=2$. **C.** $S=3$. **D.** $S=\frac{1}{2}$.

Câu 182: Cho $\int_2^5 f(x)\mathrm{d}x=10$. Kết quả $\int_5^2\left[2-4f(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng:

A. 34. **B.** 36. **C.** 40. **D.** 32.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Taco $\int\limits_{5}^{2}\left[2-4f\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=2\int\limits_{5}^{2}\mathrm{d}x-4\int\limits_{5}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x=-2x\Big|_{2}^{5}+4\int\limits_{2}^{5}f\left(x\right)\mathrm{d}x=-2.\left(5-2\right)+4.10=34$.

Câu 183: Tính diện tích hình phẳng S giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=x^2+2$ và $y=3x$.

A. $S=\dfrac{1}{6}$. **B.** $S=2$. **C.** $S=3$. **D.** $S=\dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Xét phương trình hoành độ giao điểm : $x^2+2=3x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$.

Vậy $S=\int\limits_{1}^{2}\left|x^2+2-3x\right|\mathrm{d}x=\left|\int\limits_{1}^{2}\left(x^2+2-3x\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\left(\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3}{2}x^2+2x\right)\Bigg|_{1}^{2}\right|=\dfrac{1}{6}$.

Câu 184: Cho $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x-1}$ thỏa mãn $F\left(5\right)=2$ và $F\left(0\right)=1$.

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $F\left(-1\right)=2-\ln 2$. **B.** $F\left(2\right)=2-2\ln 2$. **C.** $F\left(3\right)=1+\ln 2$. **D.** $F\left(-3\right)=2$.

Câu 185: Cho $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x-1}$ thỏa mãn $F\left(5\right)=2$ và $F\left(0\right)=1$.

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $F\left(-1\right)=2-\ln 2$. **B.** $F\left(2\right)=2-2\ln 2$. **C.** $F\left(3\right)=1+\ln 2$. **D.** $F\left(-3\right)=2$.

Lời giải

Chọn B

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{1\right\}$.

Ta có: $F\left(x\right)=\int\dfrac{1}{x-1}\mathrm{d}x=\ln\left|x-1\right|+C=\begin{cases}\ln\left(x-1\right)+C_1 & \text{khi} \quad x>1\\ \ln\left(1-x\right)+C_2 & \text{khi} \quad x<1\end{cases}$.

$F\left(5\right)=2\Leftrightarrow\ln 4+C_1=2\Leftrightarrow C_1=2-\ln 4=2-2\ln 2$.

$F\left(0\right)=1\Leftrightarrow\ln 1+C_2=1\Leftrightarrow C_2=1$.

Do đó: $F\left(x\right)=\int\dfrac{1}{x-1}\mathrm{d}x=\begin{cases}\ln\left(x-1\right)+2-2\ln 2 & \text{khi} \quad x>1\\ \ln\left(1-x\right)+1 & \text{khi} \quad x<1\end{cases}$.

$F\left(-1\right)=\ln 2+1$.

$F\left(2\right)=2-2\ln 2$.

$F\left(3\right)=2-\ln 2$.

$F\left(-3\right)=2\ln 2+1$.

Câu 186: Tính tích phân $I=\int\limits_{0}^{1}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2-9}$.

A. $I=\frac{1}{6}\ln\frac{1}{2}$. **B.** $I=-\frac{1}{6}\ln\frac{1}{2}$. **C.** $I=\frac{1}{6}\ln 2$. **D.** $I=\ln\sqrt[6]{2}$.

Câu 187: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$. Gọi S là diện tích của (H). Chọn mệnh đề sai.

A. $S=-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. **B.** $S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. **C.** $S=\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$. **D.** $S=\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$.

Câu 188: Biết $I=\int_1^3 \frac{3+\ln x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x=a(1+\ln 3)-b\ln 2$, $(a,b\in\mathbb{Q})$. Khi đó a^2+b^2 bằng

A. $a^2+b^2=\frac{7}{16}$. **B.** $a^2+b^2=\frac{16}{9}$. **C.** $a^2+b^2=\frac{25}{16}$. **D.** $a^2+b^2=\frac{3}{4}$.

Câu 189: Tính tích phân $I=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-9}$.

A. $I=\frac{1}{6}\ln\frac{1}{2}$. **B.** $I=-\frac{1}{6}\ln\frac{1}{2}$. **C.** $I=\frac{1}{6}\ln 2$. **D.** $I=\ln\sqrt[6]{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $I=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-9}=I=\frac{1}{6}\int_0^1\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+3}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|\Bigg|_0^1=\frac{1}{6}\left(\ln\frac{1}{2}-\ln 1\right)=\frac{1}{6}\ln\frac{1}{2}$.

Câu 190: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$. Gọi S là diện tích của (H). Chọn mệnh đề sai.

A. $S=-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. **B.** $S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. **C.** $S=\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$. **D.** $S=\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn A

Vì hàm số $y=f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$ nên

$S=\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$.

Do đó A sai.

Câu 191: Biết $I=\int_1^3 \frac{3+\ln x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x=a(1+\ln 3)-b\ln 2$, $(a,b\in\mathbb{Q})$. Khi đó a^2+b^2 bằng

A. $a^2+b^2=\frac{7}{16}$. **B.** $a^2+b^2=\frac{16}{9}$. **C.** $a^2+b^2=\frac{25}{16}$. **D.** $a^2+b^2=\frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn C

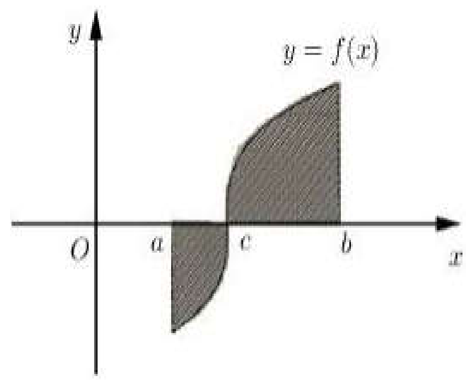
Đặt: $\begin{cases} u = 3+\ln x \\ dv = \dfrac{dx}{(x+1)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x}dx \\ v = -\dfrac{1}{x+1} \end{cases}$

Khi đó:

$$I = -\frac{3+\ln x}{x+1}\Big|_1^3 + \int_1^3 \frac{1}{x(x+1)}dx = -\frac{3+\ln 3}{4} + \frac{3}{2} + \int_1^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{3-\ln 3}{4} + \left(\ln|x| - \ln|x+1|\right)\Big|_1^3$$

$$= \frac{3-\ln 3}{4} + \ln 3 - \ln 4 + \ln 2 = \frac{3}{4}(1+\ln 3) - \ln 2 \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{4} \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 = \frac{25}{16}.$$

Câu 192: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và cắt trục hoành tại điểm $x = c$ $(a < c < b)$ (như hình vẽ bên). Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $S = \int_a^b f(x)dx$.

B. $S = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$.

C. $S = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

D. $S = -\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

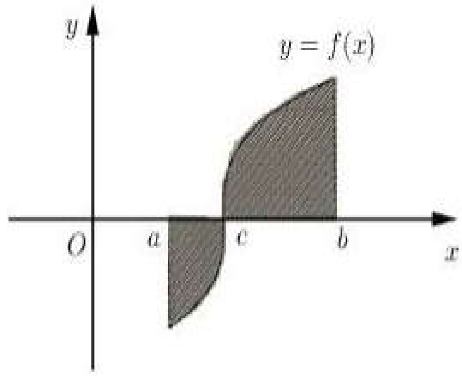
Câu 193: Biết $\int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{x-5}{2x+2}dx = a + \ln b$ với a, b là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $ab = \frac{8}{81}$. **B.** $a+b = \frac{7}{24}$. **C.** $ab = \frac{9}{8}$. **D.** $a+b = \frac{3}{10}$.

Câu 194: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[1;+\infty)$ và $\int_0^3 f\left(\sqrt{x+1}\right)dx = 8$. Tích phân $I = \int_1^2 xf(x)dx$ bằng:

A. $I = 16$. **B.** $I = 2$. **C.** $I = 8$. **D.** $I = 4$

Câu 195: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và cắt trục hoành tại điểm $x = c$ $(a < c < b)$ (như hình vẽ bên). Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $S=\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

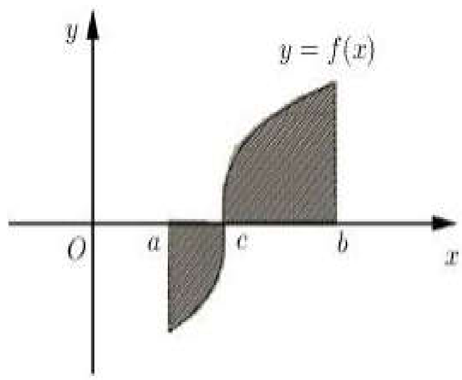
B. $S=\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $S=\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

D. $S=-\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Lời giải

Chọn D



Ta có $S=\int\limits_a^c |f(x)|\,\mathrm{d}x+\int\limits_c^b |f(x)|\,\mathrm{d}x=-\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Câu 196: Biết $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{1}\frac{x-5}{2x+2}\mathrm{d}x=a+\ln b$ với a, b là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $ab=\frac{8}{81}$. **B.** $a+b=\frac{7}{24}$. **C.** $ab=\frac{9}{8}$. **D.** $a+b=\frac{3}{10}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{1}\frac{x-5}{2x+2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{3}}^{1}\left(1-\frac{6}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(x-6\ln|x+1|\right)\Big|_{\frac{1}{3}}^{1}=\frac{1}{2}\left(1-6\ln 2-\frac{1}{3}+6\ln\frac{4}{3}\right)$

$=\frac{1}{3}+\ln\frac{8}{27}$. Vậy $ab=\frac{1}{3}.\frac{8}{27}=\frac{8}{81}$.

Câu 197: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[1;+\infty)$ và $\int\limits_0^3 f\left(\sqrt{x+1}\right)\mathrm{d}x=8$. Tích phân $I=\int\limits_1^2 xf(x)\,\mathrm{d}x$ bằng:

A. $I=16$. **B.** $I=2$. **C.** $I=8$. **D.** $I=4$

Lời giải

Chọn D

$I=\int\limits_0^3 f\left(\sqrt{x+1}\right)\mathrm{d}x=8$. Đặt $t=\sqrt{x+1}\Rightarrow t^2=x+1\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$;

đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$; $x=3\Rightarrow t=2$.

Khi đó $I=\int\limits_1^2 2tf\left(t\right)\mathrm{d}t=8\Rightarrow\int\limits_1^2 tf\left(t\right)\mathrm{d}t=4$. Vậy $I=\int\limits_1^2 xf\left(x\right)\mathrm{d}x=4$.

Câu 198: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2x$, $y=x^2$, $y=1$ trên miền $x\geq 0, y\leq 1$ là

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{5}{12}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 199: Biết $I=\int\limits_3^4\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x}=a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5$ với a,b,c là các số nguyên. Tính $S=a+b+c$

A. $S=6$. **B.** $S=2$. **C.** $S=-2$. **D.** $S=0$.

Câu 200: Một ô tô đang chạy với tốc độ $36\left(\mathrm{km/h}\right)$ thì người lái xe đạp phanh, từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v\left(t\right)=-5t+10\left(\mathrm{m/s}\right)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến lúc dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A. $10\left(\mathrm{m}\right)$. **B.** $20\left(\mathrm{m}\right)$. **C.** $2\left(\mathrm{m}\right)$. **D.** $0{,}2\left(\mathrm{m}\right)$.

Câu 201: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2x$, $y=x^2$, $y=1$ trên miền $x\geq 0, y\leq 1$ là

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{5}{12}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

Ta có: $y=2x\Leftrightarrow x=\frac{y}{2}$; $y=x^2\Leftrightarrow x=\sqrt{y}$ (do $x\geq 0$).

Suy ra:

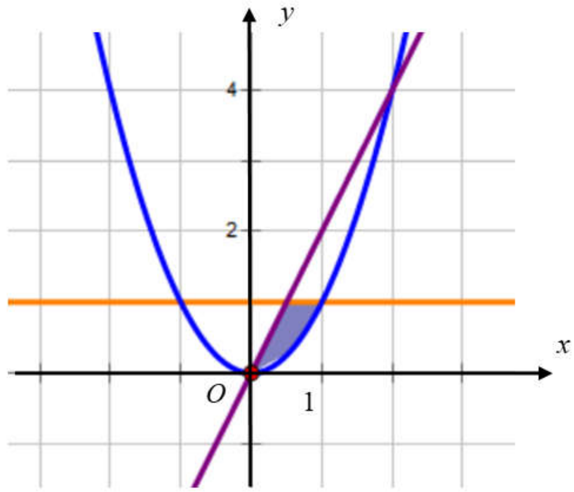
$$S=\int_0^1\left|\sqrt{y}-\frac{y}{2}\right|\mathrm{d}y=\frac{5}{12}\text{ (Bấm máy trực tiếp hoặc xét dấu bỏ }|\ |\text{)}$$

Cách 2:

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2=2x\Leftrightarrow x^2-2x=0\ \left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$.

Phương trình hoành độ giao điểm: $2x=1\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.



Từ hình vẽ ta có diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(2x-x^2\right)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x=\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}+\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{5}{12}.$$

Câu 202: Biết $I=\int_3^4\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x}=a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5$ với a,b,c là các số nguyên. Tính $S=a+b+c$

A. $S=6$. **B.** $S=2$. **C.** $S=-2$. **D.** $S=0$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

$$I=\int_3^4\frac{1}{x^2+x}\mathrm{d}x=\int_3^4\frac{1}{x(x+1)}\mathrm{d}x=\ln\frac{x}{x+1}\Bigg|_3^4=\ln\frac{4}{5}-\ln\frac{3}{4}=4\ln 2-\ln 3-\ln 5.$$

Suy ra $a=4,b=c=-1\Rightarrow S=2$.

Cách 2:

Ta có:

$$I=\int_3^4\frac{1}{x^2+x}\mathrm{d}x=\int_3^4\frac{1}{x(x+1)}\mathrm{d}x=\int_3^4\frac{1}{x}\mathrm{d}x-\int_3^4\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x=\ln 4-\ln 3-\ln 5+\ln 4=4\ln 2-\ln 3-\ln 5$$

Suy ra $a=4,b=c=-1\Rightarrow S=2$.

Câu 203: Một ô tô đang chạy với tốc độ $36(\mathrm{km/h})$ thì người lái xe đạp phanh, từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-5t+10(\mathrm{m/s})$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến lúc dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A. $10(\mathrm{m})$. **B.** $20(\mathrm{m})$. **C.** $2(\mathrm{m})$. **D.** $0,2(\mathrm{m})$.

Lời giải

Chọn A

$36\,\text{km/h} = 10\,\text{m/s}$.

Khi xe dừng thì vận tốc bằng $0 \Rightarrow -5t + 10 = 0 \Rightarrow t = 2(\text{s})$.

Quãng đường xe đi đường từ lúc đạp phanh đến lúc dừng hẳn là

$$s = \int_0^2 v(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^2 (-5t + 10)\,\mathrm{d}t = \left(-\frac{5t^2}{2} + 10t\right)\Bigg|_0^2 = 10(\text{m}).$$

Câu 204: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 4x + \sin 3x$, biết $F(0) = \frac{2}{3}$.

A. $F(x) = 2x^2 + \cos 3x - \frac{1}{3}$.

B. $F(x) = 2x^2 - \cos 3x + \frac{5}{3}$.

C. $F(x) = 2x^2 + \frac{\cos 3x}{3} + \frac{1}{3}$.

D. $F(x) = 2x^2 - \frac{\cos 3x}{3} + 1$.

Câu 205: Tìm một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x-1}}$.

A. $F(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$. **B.** $F(x) = 4\sqrt{x-1}$. **C.** $F(x) = 2\sqrt{x-1}$. **D.** $F(x) = \sqrt{x-1}$.

Câu 206: Cho f, g là hai hàm liên tục trên $[1;3]$ thỏa mãn điều kiện $\int_1^3 [f(x) + 3g(x)]\mathrm{d}x = 10$ đồng thời $\int_1^3 [2f(x) - g(x)]\mathrm{d}x = 6$. Tính $\int_1^3 [f(x) + g(x)]\mathrm{d}x$.

A. 9. B. 6. C. 7. D. 8.

Câu 207: Biết $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x = a\ln 2 + \frac{b}{c}$ (với a là số hữu tỉ, b, c là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản). Tính giá trị của $S = 2a + 3b + c$.

A. $S = 4$. **B.** $S = -6$. **C.** $S = 6$. **D.** $S = 5$.

Câu 208: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 4x + \sin 3x$, biết $F(0) = \frac{2}{3}$.

A. $F(x) = 2x^2 + \cos 3x - \frac{1}{3}$.

B. $F(x) = 2x^2 - \cos 3x + \frac{5}{3}$.

C. $F(x) = 2x^2 + \frac{\cos 3x}{3} + \frac{1}{3}$.

D. $F(x) = 2x^2 - \frac{\cos 3x}{3} + 1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x = \int (4x + \sin 3x)\mathrm{d}x = 2x^2 - \frac{\cos 3x}{3} + C$.

$F(0) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} + C = \frac{2}{3} \Leftrightarrow C = 1$.

Vậy $F(x) = 2x^2 - \frac{\cos 3x}{3} + 1$.

Câu 209: Tìm một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x-1}}$.

A. $F(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$. **B.** $F(x)=4\sqrt{x-1}$. **C.** $F(x)=2\sqrt{x-1}$. **D.** $F(x)=\sqrt{x-1}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\sqrt{x-1}\Rightarrow t^2=x-1\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.

Ta có:

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{2}{\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x=\int\frac{4t}{t}\mathrm{d}t=\int 4\mathrm{d}t=4t+C=4\sqrt{x-1}+C.$$

Vậy một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x-1}}$ là $F(x)=4\sqrt{x-1}$.

Câu 210: Cho f,g là hai hàm liên tục trên $[1;3]$ thỏa mãn điều kiện $\int_1^3\left[f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x=10$ đồng thời $\int_1^3\left[2f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=6$. Tính $\int_1^3\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x$.

A. 9. B. 6. C. 7. D. 8.

Lời giải

Chọn B

Đặt $a=\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$, $b=\int_1^3 g(x)\mathrm{d}x$. Khi đó $\int_1^3\left[f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x=10\Leftrightarrow a+3b=10$,

$\int_1^3\left[2f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=6\Leftrightarrow 2a-b=6$.

Do đó: $\begin{cases}a+3b=10\\2a-b=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\b=2\end{cases}$. Vậy $\int_1^3\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=a+b=6$.

Câu 211: Biết $\int_1^2\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x=a\ln 2+\frac{b}{c}$ (với a là số hữu tỉ, b, c là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản). Tính giá trị của $S=2a+3b+c$.

A. $S=4$. **B.** $S=-6$. **C.** $S=6$. **D.** $S=5$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ \mathrm{d}v=\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x\\ v=-\dfrac{1}{x}\end{cases}$.

Khi đó, ta có:

$$=\int_1^2\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{\ln x}{x}\Big|_1^2+\int_1^2\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{x}\Big|_1^2=-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}.$$

Từ giả thiết suy ra $a=-\frac{1}{2}$, $b=1$, $c=2$.

Vậy giá trị của $S=4$.

Câu 212: Cho tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4x-1+\cos x)\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{\pi}{a}-\frac{1}{b}\right)+c$, $(a,b,c\in\mathbb{Q})$. Tính $a-b+c$

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** -2. **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 213: Cho tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4x-1+\cos x)\,\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{\pi}{a}-\frac{1}{b}\right)+c$, $(a,b,c\in\mathbb{Q})$. Tính $a-b+c$

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** -2. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4x-1+\cos x)\,\mathrm{d}x=\left(2x^2-x+\sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\right)+1$.

Suy ra $a=2$, $b=2$, $c=1$ nên $a-b+c=1$.

Câu 214: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a;b]$, nếu $\int_a^d f(x)\,\mathrm{d}x=5$ và $\int_b^d f(x)\,\mathrm{d}x=2$ (với $a<d<b$) thì $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng.

A. 3. **B.** 7. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** 10.

Câu 215: Cho $\int_0^1\frac{2x+3}{2-x}\,\mathrm{d}x=a\ln 2+b$ (a và b là các số nguyên). Khi đó giá trị của a là

A. -7. **B.** 7. **C.** 5. **D.** -5.

Câu 216: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a;b]$, nếu $\int_a^d f(x)\,\mathrm{d}x=5$ và $\int_b^d f(x)\,\mathrm{d}x=2$ (với $a<d<b$) thì $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng.

A. 3. **B.** 7. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** 10.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{cases}\int_a^d f(x)\,\mathrm{d}x=5\\ \int_b^d f(x)\,\mathrm{d}x=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}F(d)-F(a)=5\\ F(d)-F(b)=2\end{cases}\Rightarrow F(b)-F(a)=3=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Câu 217: Cho $\int_0^1\frac{2x+3}{2-x}\,\mathrm{d}x=a\ln 2+b$ (a và b là các số nguyên). Khi đó giá trị của a là

A. -7. **B.** 7. **C.** 5. **D.** -5.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_0^1\frac{2x+3}{2-x}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left(-\frac{7}{x-2}-2\right)\mathrm{d}x=\left(-2x-7\ln|x-2|\right)\Big|_0^1=-2+7\ln 2$. Vậy $a=7$.

Câu 218: Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=e^x+e^{-x}$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x=-2$.

A. $S=\dfrac{e^4+1}{e^2}$ (đvdt). **B.** $S=\dfrac{e^4-1}{e}$ (đvdt). **C.** $S=\dfrac{e^2-1}{e}$ (đvdt). **D.** $S=\dfrac{e^4-1}{e^2}$ (đvdt).

Câu 219: Cho $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$, chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

A. Trên $(-2;+\infty)$, nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là $F(x)=\ln(x+2)+C_1$; trên khoảng $(-\infty;-2)$, nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là $F(x)=\ln(-x-2)+C_2$ (C_1, C_2 là các hằng số).

B. Trên khoảng $(-\infty;-2)$, một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là $G(x)=\ln(-x-2)-3$.

C. Trên $(-2;+\infty)$, một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là $F(x)=\ln(x+2)$.

D. Nếu $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của của $f(x)$ thì chúng sai khác nhau một hằng số.

Câu 220: Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=e^x+e^{-x}$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x=-2$.

A. $S=\dfrac{e^4+1}{e^2}$ (đvdt). **B.** $S=\dfrac{e^4-1}{e}$ (đvdt). **C.** $S=\dfrac{e^2-1}{e}$ (đvdt). **D.** $S=\dfrac{e^4-1}{e^2}$ (đvdt).

Lời giải

Chọn D

Ta có: $S=\int\limits_{-2}^{0}\left|e^x+e^{-x}\right|dx=\left(e^x-e^{-x}\right)\Big|_{-2}^{0}=e^2-\dfrac{1}{e^2}=\dfrac{e^4-1}{e^2}$ (đvdt).

Câu 221: Cho $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$, chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

A. Trên $(-2;+\infty)$, nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là $F(x)=\ln(x+2)+C_1$; trên khoảng $(-\infty;-2)$, nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là $F(x)=\ln(-x-2)+C_2$ (C_1, C_2 là các hằng số).

B. Trên khoảng $(-\infty;-2)$, một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là $G(x)=\ln(-x-2)-3$.

C. Trên $(-2;+\infty)$, một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là $F(x)=\ln(x+2)$.

D. Nếu $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của của $f(x)$ thì chúng sai khác nhau một hằng số.

Lời giải

Chọn D

D sai vì $F(x)=\ln(x+2)$ và $G(x)=\ln(-x-2)-3$ đều là các nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nhưng trên các khoảng khác nhau thì khác nhau.

Câu 222: Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên đoạn $[1;3]$, thỏa mãn:

$\int\limits_1^3\left[f(x)+3g(x)\right]dx=10$ và $\int\limits_1^3\left[2f(x)-g(x)\right]dx=6$. Tính $I=\int\limits_1^3\left[f(x)+g(x)\right]dx$

A. $I=8$. **B.** $I=9$. **C.** $I=6$. **D.** $I=7$.

Câu 223: Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=1$ và $x=3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(1\le x\le 3)$ thì được thiết diện là hình chữ nhật có hai cạnh là $3x$ và $\sqrt{3x^2-2}$.

A. $32+2\sqrt{15}$. **B.** $\dfrac{124\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{124}{3}$. **D.** $\left(32+2\sqrt{15}\right)\pi$.

Câu 224: Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}\mathrm{e}^{x}$, trục hoành và đường thẳng $x=1$ là:

A. $\frac{\pi}{4}\left(\mathrm{e}^2+1\right)$. **B.** $\frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^2+1\right)$. **C.** $\frac{\pi}{4}\left(\mathrm{e}^4-1\right)$. **D.** $\frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^4-1\right)$.

Câu 225: Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên đoạn $[1;3]$, thỏa mãn:

$\int_1^3\left[f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x=10$ và $\int_1^3\left[2f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=6$. Tính $I=\int_1^3\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x$

A. $I=8$. **B.** $I=9$. **C.** $I=6$. **D.** $I=7$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\begin{cases}\int_1^3\left[f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x=10\\ \int_1^3\left[2f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=4\\ \int_1^3 g(x)\mathrm{d}x=2\end{cases}\Rightarrow I=\int_1^3\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=6$.

Câu 226: Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=1$ và $x=3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(1\le x\le 3)$ thì được thiết diện là hình chữ nhật có hai cạnh là $3x$ và $\sqrt{3x^2-2}$.

A. $32+2\sqrt{15}$. **B.** $\frac{124\pi}{3}$. **C.** $\frac{124}{3}$. **D.** $\left(32+2\sqrt{15}\right)\pi$.

Lời giải

Chọn C

Thể tích vật thể cần tìm là $V=\int_1^3 3x\sqrt{3x^2-2}\mathrm{d}x=\int_1^5 t.t\mathrm{d}t=\left.\frac{t^3}{3}\right|_1^5=\frac{124}{3}$.

Câu 227: Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}\mathrm{e}^{x}$, trục hoành và đường thẳng $x=1$ là:

A. $\frac{\pi}{4}\left(\mathrm{e}^2+1\right)$. **B.** $\frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^2+1\right)$. **C.** $\frac{\pi}{4}\left(\mathrm{e}^4-1\right)$. **D.** $\frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^4-1\right)$.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}\mathrm{e}^{x}$ và trục hoành:

$\sqrt{x}\mathrm{e}^{x}=0\Leftrightarrow x=0$.

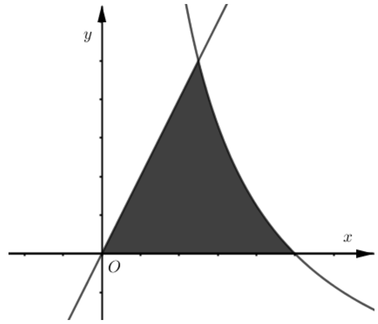
Khi đó $V=\pi\int_0^1 x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\end{cases}$.

Khi đó: $V=\pi\left[\left.\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x}\right|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x\right]=\pi\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^2-\left.\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}\right|_0^1\right]=\pi\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^2-\frac{1}{4}\mathrm{e}^2+\frac{1}{4}\right]=\frac{\pi}{4}\left(\mathrm{e}^2+1\right)$.

Câu 228: Cho $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx=a-\sqrt{b}+\ln\frac{c+\sqrt{d}}{\sqrt{e}}$ với c nguyên dương và a, b, c, d, e là các số nguyên tố. Giá trị của biểu thức $a+b+c+d+e$ bằng.

A. 14. **B.** 17. **C.** 10. **D.** 24.

Câu 229: Gọi (H) là hình phẳng được giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = 2x, y = \dfrac{1-x}{x}, y = 0$ (phần tô đậm màu đen ở hình vẽ bên).



Thể tích của vật thể tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành bằng.

A. $V = \pi\left(\dfrac{5}{3} - 2\ln 2\right)$. **B.** $V = \pi\left(\dfrac{5}{3} + 2\ln 2\right)$. **C.** $V = \pi\left(2\ln 2 - \dfrac{2}{3}\right)$. **D.** $V = \pi\left(2\ln 2 + \dfrac{2}{3}\right)$.

Câu 230: Cho $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx = a - \sqrt{b} + \ln\dfrac{c+\sqrt{d}}{\sqrt{e}}$ với c nguyên dương và a, b, c, d, e là các số nguyên tố. Giá trị của biểu thức $a+b+c+d+e$ bằng.

A. 14. **B.** 17. **C.** 10. **D.** 24.

Lời giải

Chọn C

$I = \int\limits_1^{\sqrt{3}} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx = \int\limits_1^{\sqrt{3}} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}x\mathrm{d}x$.

Đặt $t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2 = x^2 + 1 \Rightarrow 2t\mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x \Rightarrow t\mathrm{d}t = x\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{2} \\ x = \sqrt{3} \Rightarrow t = 2 \end{cases}$.

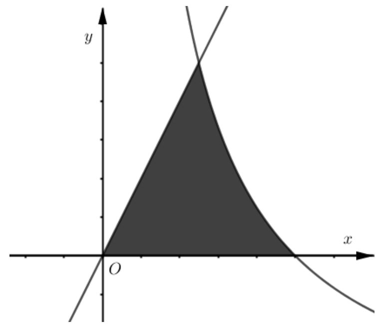
$I = \int\limits_{\sqrt{2}}^{2} \dfrac{t^2}{t^2-1}\mathrm{d}t = \int\limits_{\sqrt{2}}^{2}\left[1 + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{t-1} - \dfrac{1}{t+1}\right)\right]\mathrm{d}t = \int\limits_{\sqrt{2}}^{2}\mathrm{d}t + \dfrac{1}{2}\int\limits_{\sqrt{2}}^{2}\left(\dfrac{1}{t-1} - \dfrac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t$

$= t\Big|_{\sqrt{2}}^{2} + \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_{\sqrt{2}}^{2} = 2 - \sqrt{2} + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2}\ln\left(3 - 2\sqrt{2}\right) = 2 - \sqrt{2} + \ln\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{8}}{3}}$

$= 2 - \sqrt{2} + \ln\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Vậy $a+b+c+d+e = 10$.

Câu 231: Gọi (H) là hình phẳng được giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = 2x, y = \dfrac{1-x}{x}, y = 0$ (phần tô đậm màu đen ở hình vẽ bên).



Thể tích của vật thể tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành bằng.

A. $V=\pi\left(\dfrac{5}{3}-2\ln 2\right)$. B. $V=\pi\left(\dfrac{5}{3}+2\ln 2\right)$. C. $V=\pi\left(2\ln 2-\dfrac{2}{3}\right)$. D. $V=\pi\left(2\ln 2+\dfrac{2}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của $y=2x$ và $y=\dfrac{1-x}{x}$ là:

$$2x=\frac{1-x}{x}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\2x^2+x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\\x=-1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$$

Phương trình hoành độ giao điểm của $y=2x$ và $y=0$ là: $2x=0\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\2x^2+x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=0$.

Phương trình hoành độ giao điểm của $y=0$ và $y=\dfrac{1-x}{x}$ là:

$$\frac{1-x}{x}=0\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\1-x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\x=1\end{cases}\Leftrightarrow x=1.$$

$$V=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}4x^2\mathrm{d}x+\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{1-x}{x}\right)^2\mathrm{d}x=\pi.\frac{4x^3}{3}\Big|_0^{\frac{1}{2}}+\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{1}{x}-1\right)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\pi+\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+1\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{6}\pi+\pi\left(-\frac{1}{x}-2\ln|x|+x\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{1}{6}\pi+\pi\left(\frac{3}{2}-2\ln 2\right)=\pi\left(\frac{5}{3}-2\ln 2\right).$$

Câu 232: Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{1-2x}$ là:

A. $\dfrac{3}{2}(2x-1)\sqrt{1-2x}$. B. $-\dfrac{3}{2}(1-2x)\sqrt{1-2x}$. C. $\dfrac{3}{4}(2x-1)\sqrt{1-2x}$. D. $-\dfrac{1}{3}(1-2x)\sqrt{1-2x}$.

Câu 233: Biết $\displaystyle\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{4x^2-4x+1}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$, với a, b là các số nguyên thuộc khoảng $(-7;3)$ thì a và b là nghiệm của phương trình nào sau đây?

A. $2x^2-x-1=0$. B. $x^2+4x-12=0$. C. $x^2-5x+6=0$. D. $x^2-9=0$.

Câu 234: Tính thể tích của khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2-4$, $y=2x-4$, $x=0$, $x=2$ quanh trục Ox.

A. $\dfrac{32\pi}{5}$. B. $\dfrac{32\pi}{7}$. C. $\dfrac{32\pi}{15}$. D. $\dfrac{22\pi}{5}$.

Câu 235: Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\int\limits_{-1}^{5}\left[2f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x=16$ và $\int\limits_{-1}^{5}\left[f(x)-3g(x)\right]\mathrm{d}x=-1$. Tính $\int\limits_{-1}^{2}f(2x+1)\mathrm{d}x$.

A. 1. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 5.

Câu 236: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng (ABC) là điểm H trên cạnh AB sao cho $HA=2HB$. Góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a.

A. $\dfrac{a\sqrt{42}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{7}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{42}}{8}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{8}$.

Câu 237: Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{1-2x}$ là:

A. $\dfrac{3}{2}(2x-1)\sqrt{1-2x}$. **B.** $-\dfrac{3}{2}(1-2x)\sqrt{1-2x}$. **C.** $\dfrac{3}{4}(2x-1)\sqrt{1-2x}$. **D.** $-\dfrac{1}{3}(1-2x)\sqrt{1-2x}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\sqrt{1-2x}\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{2}\int\sqrt{1-2x}\mathrm{d}(1-2x)$, với $x\le\dfrac{1}{2}$.

$\Leftrightarrow \int f(x)\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{3}\sqrt{(1-2x)^3}+C=-\dfrac{1}{3}(1-2x)\sqrt{1-2x}+C$

Câu 238: Biết $\int\limits_{1}^{2}\dfrac{\mathrm{d}x}{4x^2-4x+1}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$, với a, b là các số nguyên thuộc khoảng $(-7;3)$ thì a và b là nghiệm của phương trình nào sau đây?

A. $2x^2-x-1=0$. **B.** $x^2+4x-12=0$. **C.** $x^2-5x+6=0$. **D.** $x^2-9=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $\int\limits_{1}^{2}\dfrac{\mathrm{d}x}{4x^2-4x+1}=\int\limits_{1}^{2}\dfrac{\mathrm{d}x}{(2x-1)^2}=\dfrac{1}{2}\int\limits_{1}^{2}(2x-1)^{-2}\,\mathrm{d}(2x-1)=-\dfrac{1}{2}\cdot\left.\dfrac{1}{2x-1}\right|_{1}^{2}=-\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{-6}+\dfrac{1}{2}$.

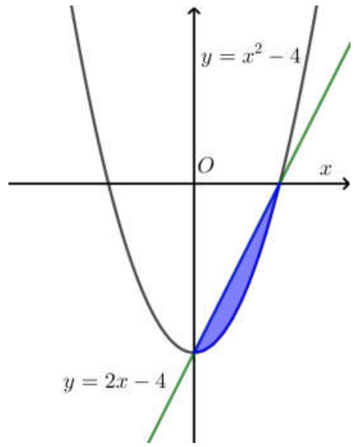
Suy ra $\begin{cases}a=-6\\b=2\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a=2\\b=-6\end{cases}$ và a, b là nghiệm của phương trình $x^2+4x-12=0$.

Câu 239: Tính thể tích của khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2-4$, $y=2x-4$, $x=0$, $x=2$ quanh trục Ox.

A. $\dfrac{32\pi}{5}$. **B.** $\dfrac{32\pi}{7}$. **C.** $\dfrac{32\pi}{15}$. **D.** $\dfrac{22\pi}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A



Ta có $V_1 = \pi\int\limits_0^2 \left(x^2-4\right)^2 \mathrm{d}x = \dfrac{256}{15}\pi$, $V_2 = \pi\int\limits_0^2 \left(2x-4\right)^2 \mathrm{d}x = \dfrac{32}{3}\pi$.

Vậy thể tích cần tìm $V = V_1 - V_2 = \dfrac{32\pi}{5}$.

Câu 240: Cho $f\left(x\right)$ và $g\left(x\right)$ là hai hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\int\limits_{-1}^{5}\left[2f\left(x\right)+3g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x = 16$ và $\int\limits_{-1}^{5}\left[f\left(x\right)-3g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x = -1$. Tính $\int\limits_{-1}^{2} f\left(2x+1\right)\mathrm{d}x$.

A. 1. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 5.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Theo giả thiết, ta có $\begin{cases} \int\limits_{-1}^{5}\left[2f\left(x\right)+3g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x = 16 \\ \int\limits_{-1}^{5}\left[f\left(x\right)-3g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \int\limits_{-1}^{5} f\left(x\right)\mathrm{d}x = 5 \\ \int\limits_{-1}^{5} g\left(x\right)\mathrm{d}x = 2 \end{cases}$.

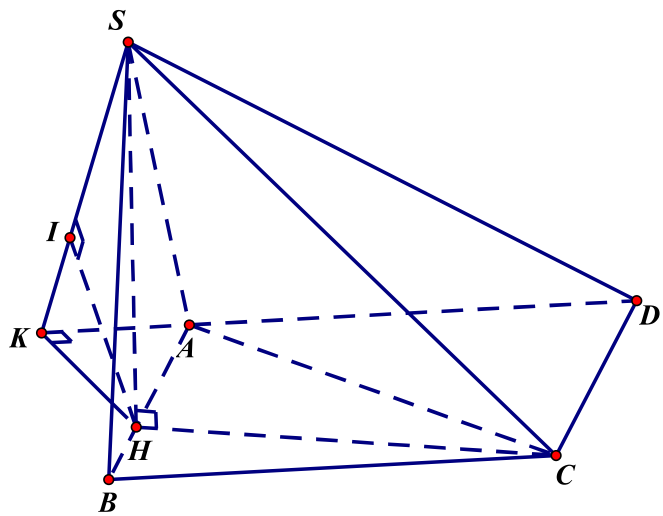
Đặt $u = 2x+1$, khi đó ta có $\int\limits_{-1}^{2} f\left(2x+1\right)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int\limits_{-1}^{5} f\left(t\right)\mathrm{d}t = \dfrac{5}{2}$.

Câu 241: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng $\left(ABC\right)$ là điểm H trên cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa SC và mặt phẳng $\left(ABC\right)$ bằng $60°$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a.

A. $\dfrac{a\sqrt{42}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{7}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{42}}{8}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{8}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C



Ta có $SH \perp (ABC)$ nên suy ra $(SC,(ABC)) = (SC, HC) = \widehat{SCH} \Rightarrow \widehat{SCH} = 60°$.

$CH^2 = AH^2 + AC^2 - 2AH.AC.\cos\widehat{HAC}$

$= \left(\frac{2a}{3}\right)^2 + a^2 - 2.\frac{2a}{3}.a.\cos 60° = \frac{7a^2}{9} \Rightarrow CH = \frac{a\sqrt{7}}{3}$.

$SH = CH.\tan\widehat{SCH} = \frac{a\sqrt{7}}{3}.\tan 60° = \frac{a\sqrt{21}}{3}$.

Dựng hình bình hành $ABCD$, khi đó

$d(SA, BC) = d(B,(SAD)) = \frac{3}{2}d(H,(SAD))$.

Kẻ $HK \perp AD \Rightarrow HK = \frac{2}{3}d(B, AD) = \frac{2}{3}d(A, BC) = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Kẻ $HI \perp SK \Rightarrow HI \perp (SAD) \Rightarrow d(SA, BC) = \frac{3}{2}d(H,(SAD)) = \frac{3}{2}HI$.

Ta có $HI = \frac{SH.HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}} = \frac{a\sqrt{42}}{12} \Rightarrow d(SA, BC) = \frac{3}{2}HI = \frac{3}{2}.\frac{a\sqrt{42}}{12} = \frac{a\sqrt{42}}{8}$.

Câu 1: (THTT Số 1-484 tháng 10 năm 2017-2018) Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=2;\ \int_0^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x=6$. Tính $I=\int_{-1}^1 f\left(\left|2x-1\right|\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{2}{3}$. **B.** $I=4$. **C.** $I=\dfrac{3}{2}$. **D.** $I=6$.

Lời giải

Chọn B

Có $I=\int_{-1}^1 f\left(\left|2x-1\right|\right)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{\frac{1}{2}} f\left(1-2x\right)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1 f\left(2x-1\right)\mathrm{d}x=I_1+I_2$

Tính $I_1=\int_{-1}^{\frac{1}{2}} f\left(1-2x\right)\mathrm{d}x$.Đặt $u=1-2x\Rightarrow \mathrm{d}u=-2\,\mathrm{d}x$. Đổi cận : $\begin{cases} x=-1\Rightarrow u=3 \\ x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow u=0 \end{cases}$.

$\Rightarrow I_1=\dfrac{-1}{2}\int_3^0 f\left(u\right)\mathrm{d}u=\dfrac{1}{2}\int_0^3 f\left(u\right)\mathrm{d}u=3$

Tính $I_2=\int_{\frac{1}{2}}^1 f\left(2x-1\right)\mathrm{d}x$. Đặt $u=2x-1\Rightarrow \mathrm{d}u=2\,\mathrm{d}x$. Đổi cận : $\begin{cases} x=1\Rightarrow u=1 \\ x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow u=0 \end{cases}$.

$\Rightarrow I_2=\dfrac{1}{2}\int_0^1 f\left(u\right)\mathrm{d}u=\dfrac{1}{2}\int_0^1 f\left(u\right)\mathrm{d}u=1$

Vậy $I=I_1+I_2=4$.

Câu 2: (THTT Số 1-484 tháng 10 năm 2017-2018) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số k để có $\int_1^k \left(2x-1\right)\mathrm{d}x=4\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$. \

A. $\left[\begin{array}{l} k=1 \\ k=2 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} k=1 \\ k=-2 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} k=-1 \\ k=-2 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} k=-1 \\ k=2 \end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int_1^k \left(2x-1\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int_1^k \left(2x-1\right)\mathrm{d}\left(2x-1\right)=\left.\dfrac{\left(2x-1\right)^2}{4}\right|_1^k=\dfrac{\left(2k-1\right)^2}{4}-\dfrac{1}{4}$

Mà $4\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}=4\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=4\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1}=2$

Khi đó: $\int_1^k \left(2x-1\right)\mathrm{d}x=4\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}\Leftrightarrow \dfrac{\left(2k-1\right)^2-1}{4}=2\Leftrightarrow \left(2k-1\right)^2=9\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=2 \\ k=-1 \end{array}\right.$.

Câu 3: (THPT Lê Hồng Phong-Nam Định-lần 1-năm 2017-2018) Biết $\int_1^e \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=a\sqrt{e}+b$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính $P=a.b$.

A. $P=4$. **B.** $P=-8$. **C.** $P=-4$. **D.** $P=8$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \dfrac{dx}{\sqrt{x}} \end{cases} \to \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = 2\sqrt{x} \end{cases}$

Suy ra $\int\limits_1^e \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \ln x \Big|_1^e - 2\int\limits_1^e \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \ln x \Big|_1^e - 4\sqrt{x}\Big|_1^e = -2\sqrt{e} + 4 \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 4 \end{cases}$.

Vậy $P = ab = -8$.

Câu 4: (THPT Lê Hồng Phong-Nam Định-lần 1-năm 2017-2018) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x$, thỏa mãn $F(0) = \dfrac{1}{\ln 2}$. Tính giá trị biểu thức $T = F(0) + F(1) + F(2) + ... + F(2017)$.

A. $T = 1009.\dfrac{2^{2017}+1}{\ln 2}$. **B.** $T = 2^{2017.2018}$. **C.** $T = \dfrac{2^{2017}-1}{\ln 2}$. **D.** $T = \dfrac{2^{2018}-1}{\ln 2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $F(x) = \int f(x)dx = \int 2^x dx = \dfrac{2^x}{\ln 2} + C$.

Mà $F(0) = \dfrac{1}{\ln 2} \Rightarrow \dfrac{1}{\ln 2} + C = \dfrac{1}{\ln 2} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow F(x) = \dfrac{2^x}{\ln 2}$.

Khi đó:

$T = F(0) + F(1) + F(2) + ... + F(2017) = \dfrac{2^0}{\ln 2} + \dfrac{2}{\ln 2} + \dfrac{2^2}{\ln 2} + ... + \dfrac{2^{2017}}{\ln 2} = \dfrac{1}{\ln 2}.\dfrac{1-2^{2018}}{1-2} = \dfrac{2^{2018}-1}{\ln 2}$

Câu 5: (THTT Số 2-485 tháng 11-năm học 2017-2018) Cho $\int\limits_1^2 f(x)dx = 2$. Tính $I = \int\limits_1^4 \dfrac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$ bằng

A. $I = 1$. **B.** $I = 2$. **C.** $I = 4$. **D.** $I = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} dx$; đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = 1$, $x = 4 \Rightarrow t = 2$

$I = \int\limits_1^4 \dfrac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = \int\limits_1^2 f(t) 2dt = 2\int\limits_1^2 f(t)dt = 2.2 = 4$.

Câu 6: (THTT Số 2-485 tháng 11-năm học 2017-2018) Cho $f(x)$ là hàm số chẵn liên tục trong đoạn $[-1;\ 1]$ và $\int\limits_{-1}^1 f(x)dx = 2$. Kết quả $I = \int\limits_{-1}^1 \dfrac{f(x)}{1+e^x} dx$ bằng

A. $I = 1$. **B.** $I = 3$. **C.** $I = 2$. **D.** $I = 4$.

Lời giải

Chọn A

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{1+e^x}dx=\int_{-1}^{0}\frac{f(x)}{1+e^x}dx+\int_{0}^{1}\frac{f(x)}{1+e^x}dx=I_1+I_2$$

Xét $I_1=\int_{-1}^{0}\frac{f(x)}{1+e^x}dx$

Đặt $x=-t\Rightarrow dx=-dt$, đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0$, $x=-1\Rightarrow t=1$

$$I_1=\int_{1}^{0}\frac{f(x)}{1+e^{-t}}(-dt)=\int_{0}^{1}\frac{e^t.f(x)}{1+e^t}dt.$$

Lại có $\int_{0}^{1}\frac{e^t.f(t)}{1+e^t}dt=\int_{0}^{1}\frac{e^x.f(x)}{1+e^x}dx$.

Suy ra: $I=\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{1+e^x}dx=\int_{0}^{1}\frac{e^t.f(t)}{1+e^t}dt+\int_{0}^{1}\frac{f(t)}{1+e^t}dx=\int_{0}^{1}\frac{(1+e^t).f(t)}{1+e^t}dt=\int_{0}^{1}f(t)dt=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(t)dt=1$.

Câu 7: (THTT Số 2-485 tháng 11-năm học 2017-2018) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trong đoạn $[1;e]$, biết $\int_{1}^{e}\frac{f(x)}{x}dx=1$, $f(e)=1$. Khi đó $I=\int_{1}^{e}f'(x).\ln x dx$ bằng

A. $I=4$. **B.** $I=3$. **C.** $I=1$. **D.** $I=0$.

Lời giải

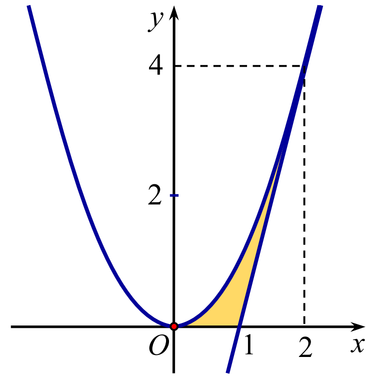
Chọn D

Cách 1: Ta có $I=\int_{1}^{e}f'(x).\ln x dx=f(x).\ln x\Big|_1^e-\int_{1}^{e}f(x).\frac{1}{x}dx=f(e)-1=1-1=0$.

Cách 2: Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ dv=f'(x)dx\end{cases}\rightarrow\begin{cases}du=\frac{dx}{x}\\ v=f(x)\end{cases}$.

Suy ra $I=\int_{1}^{e}f'(x).\ln x dx=f(x)\ln x\Big|_1^e-\int_{1}^{e}\frac{f(x)}{x}dx=f(e)-1=1-1=0$.

Câu 8: (THTT Số 2-485 tháng 11-năm học 2017-2018) Cho hình (H) giới hạn bởi trục hoành, đồ thị của một Parabol và một đường thẳng tiếp xúc với Parabol đó tại điểm $A(2;4)$, như hình vẽ bên. Thể tích vật thể tròn xoay tạo bởi khi hình (H) quay quanh trục Ox bằng



A. $\dfrac{16\pi}{15}$.　　B. $\dfrac{32\pi}{5}$.　　C. $\dfrac{2\pi}{3}$.　　D. $\dfrac{22\pi}{5}$.

Lời giải

Chọn A

Parabol có đỉnh là gốc tọa độ như hình vẽ và đi qua $A(2;4)$ nên có phương trình $y=x^2$.

Tiếp tuyến của Parabol đó tại $A(2;4)$ có phương trình là $y=4(x-2)+4=4x-4$.

Suy ra thể tích vật thể tròn xoay cần tìm là $V=\pi\int\limits_0^2(x^2)^2\,\mathrm{d}x-\pi\int\limits_1^2(4x-4)^2\,\mathrm{d}x$.

$\int\limits_0^2(x^2)^2\,\mathrm{d}x=\left.\dfrac{x^5}{5}\right|_0^2=\dfrac{32}{5}$; $\int\limits_1^2(4x-4)^2\,\mathrm{d}x=16\int\limits_1^2(x^2-2x+1)\,\mathrm{d}x=16\left.\left(\dfrac{x^3}{3}-x^2+x\right)\right|_1^2=\dfrac{16}{3}$.

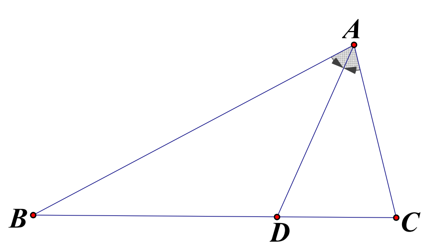
Vậy $V=\pi\int\limits_0^2(x^2)^2\,\mathrm{d}x-\pi\int\limits_1^2(4x-4)^2\,\mathrm{d}x=\pi\left(\dfrac{32}{5}-\dfrac{16}{3}\right)=\dfrac{16\pi}{15}$.

Câu 9: **(TT Diệu Hiền-Cần Thơ-tháng 10-năm 2017-2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-2;2)$, $B(-5;6;4)$ và $C(0;1;-2)$. Độ dài đường phân giác trong của góc A của ΔABC là:

A. $\dfrac{3\sqrt{74}}{2}$.　　B. $\dfrac{3}{2\sqrt{74}}$.　　C. $\dfrac{2}{3\sqrt{74}}$.　　D. $\dfrac{2\sqrt{74}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi D là chân đường phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$, ta có $\dfrac{DB}{DC}=\dfrac{AB}{AC}$. Ta có $AB=2\sqrt{26}$; $AC=\sqrt{26}$. Suy ra $\overrightarrow{DB}=-2\overrightarrow{DC}$. Gọi $D(x;y;z)$.

Từ $\overrightarrow{DB}=-2\overrightarrow{DC}$ $\Rightarrow \begin{cases}-5-x=-2(-x)\\6-y=-2(1-y)\\4-z=-2(-2-z)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-\dfrac{5}{3}\\y=\dfrac{8}{3}\\z=0\end{cases} \Rightarrow D\left(-\dfrac{5}{3};\dfrac{8}{3};0\right)$.

Vậy $AD=\dfrac{2\sqrt{74}}{3}$.

Câu 10: (Trường BDVH218LTT-khoa 1-năm 2017-2018) Hàm số $F(x)=(ax+b)\sqrt{4x+1}$ (a,b là các hằng số thực) là một nguyên hàm của $f(x)=\dfrac{12x}{\sqrt{4x+1}}$. Tính $a+b$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có $F'(x)=a\sqrt{4x+1}+(ax+b).\dfrac{2x}{\sqrt{4x+1}}=\dfrac{6ax+a+2b}{\sqrt{4x+1}}$.

Để $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì $\dfrac{6ax+a+2b}{\sqrt{4x+1}}=\dfrac{12x}{\sqrt{4x+1}} \Leftrightarrow \begin{cases}6a=12\\a+2b=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2\\b=-1\end{cases}$.

Do đó $a+b=1$.

Câu 11: (THPT Hậu Lộc 2-Thanh Hóa-ần 1-năm 2017-2018) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-1$, $x=2$ biết rằng mỗi đơn vị dài trên các trục tọa độ là 2 cm.

A. $15\ (\text{cm}^2)$. **B.** $\dfrac{15}{4}(\text{cm}^2)$. **C.** $\dfrac{17}{4}(\text{cm}^2)$. **D.** $17\,(\text{cm}^2)$.

Lời giải

Chọn D

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-1$, $x=2$ là $S=\int\limits_{-1}^{2}\left|x^3\right|dx=-\int\limits_{-1}^{0}x^3dx+\int\limits_{0}^{2}x^3dx=-\dfrac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{0}+\dfrac{x^4}{4}\Big|_{0}^{2}=\dfrac{17}{4}(\text{dvdt})$.

Do mỗi đơn vị dài trên các trục tọa độ là 2 cm nên diện tích cần tìm là $S=17\left(\text{cm}^2\right)$.

Câu 12: (THTT Số 3-486 tháng 12 năm 2017-2018) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{x}\ln x$.

A. $\int f(x)\text{d}x=\dfrac{1}{9}x^{\frac{3}{2}}(3\ln x-2)+C$. **B.** $\int f(x)\text{d}x=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}(3\ln x-2)+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}(3\ln x-1)+C$.   **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}(3\ln x-2)+C$.

Lời giải

Chọn A

$I=\int f(x)\mathrm{d}x=\int\sqrt{x}\ln x.\mathrm{d}x$.

Đặt: $t=\sqrt{x}\Rightarrow \mathrm{d}t=\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow I=2\int t^2\ln t^2.\mathrm{d}t=4\int t^2\ln t.\mathrm{d}t$.

Đặt: $\begin{cases}u=\ln t\\ \mathrm{d}v=t^2\mathrm{d}t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\frac{1}{t}\mathrm{d}t\\ v=\frac{t^3}{3}\end{cases}$.

$\Rightarrow I=2\left(\frac{1}{3}t^3\ln t-\frac{1}{3}\int t^2\mathrm{d}t\right)=2\left(\frac{1}{3}t^3\ln t-\frac{1}{9}t^3+C\right)=\frac{2}{9}t^3(3\ln t-1)+C$

$=\frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}\left(3\ln\sqrt{x}-1\right)+C$

$=\frac{1}{9}x^{\frac{3}{2}}(3\ln x-2)+C$.

Câu 13: (THTT Số 3-486 tháng 12 năm 2017-2018) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(\tan x)=\cos^4 x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{\pi+2}{8}$.   **B.** 1.   **C.** $\frac{2+\pi}{4}$.   **D.** $\frac{\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\tan x$. Ta có $\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x=1+t^2$ $\Rightarrow\cos^4 x=\frac{1}{(1+t^2)^2}\Rightarrow f(t)=\frac{1}{(1+t^2)^2}$

$I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$.

Đặt $x=\tan u,\left(\frac{-\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow \mathrm{d}x=(1+\tan^2 u)\mathrm{d}u$; đổi cận: $x=0\Rightarrow u=0$; $x=1\Rightarrow u=\frac{\pi}{4}$.

$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\tan^2 u}{(1+\tan^2 u)^2}\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\left(\frac{1}{\cos^2 u}\right)^2}.\frac{1}{\cos^2 u}\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 u\mathrm{d}u=\left.\left(\frac{1}{2}u+\frac{1}{4}\sin 2u\right)\right|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{2+\pi}{8}$

Câu 14: (THTT Số 3-486 tháng 12 năm 2017-2018) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}^+$ thỏa mãn $f'(x)\ge x+\frac{1}{x}$, $\forall x\in\mathbb{R}^+$ và $f(1)=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $f(2)$.

A. 3.   **B.** 2.   **C.** $\frac{5}{2}+\ln 2$.   **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Theo giả thiết $f'(x) \ge x + \frac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}^+$ nên lấy tích phân 2 vế với cận từ 1 đến 2 ta được

$\int_1^2 f'(x)\mathrm{d}x \ge \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \frac{3}{2} + \ln 2$

Mà $\int_1^2 f'(x)\mathrm{d}x = f(x)\Big|_1^2 = f(2) - f(1) = f(2) - 1$ nên $f(2) - 1 \ge \frac{3}{2} + \ln 2 \Rightarrow f(2) \ge \frac{5}{2} + \ln 2$

Đẳng thức xảy ra khi $f'(x) = x + \frac{1}{x}, x > 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{2} + \ln x + C$.

Mà $f(1) = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{2}$. Vậy $f(x) = \frac{x^2}{2} + \ln x + \frac{1}{2}$.

KL: giá trị nhỏ nhất của $f(2)$ bằng $\frac{5}{2} + \ln 2$ khi $f(x) = \frac{x^2}{2} + \ln x + \frac{1}{2}$.

Câu 15: **(THPT Chuyên Lê Hồng Phong-Nam Định-lần 2 năm 2017-2018)** Cho $\int_{-1}^{5} f(x)\mathrm{d}x = 4$. Tính $I = \int_{-1}^{2} f(2x+1)\mathrm{d}x$.

A. $I = 2$. **B.** $I = \frac{5}{2}$. **C.** $I = 4$. **D.** $I = \frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = 2x + 1 \Rightarrow dt = 2\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}t$.

Với $x = -1 \Rightarrow t = -1$, với $x = 2 \Rightarrow t = 5$.

Khi đó ta có $I = \int_{-1}^{2} f(2x+1)\mathrm{d}x \Rightarrow I = \int_{-1}^{5} f(t).\frac{1}{2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-1}^{5} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-1}^{5} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.4 = 2$.

Câu 16: **(THPT Chuyên Lê Hồng Phong-Nam Định-lần 2 năm 2017-2018)** Cho bốn mệnh đề sau:

(I): $\int \cos^2 x.\mathrm{d}x = \frac{\cos^3 x}{3} + C$

(II): $\int \frac{2x+1}{x^2 + x + 2018}\mathrm{d}x = \ln\left(x^2 + x + 2018\right) + C$.

(III): $\int 3^x\left(2^x + 3^{-x}\right)\mathrm{d}x = \frac{6^x}{\ln 6} + x + C$.

(IV): $\int 3^x \mathrm{d}x = 3^x.\ln 3 + C$.

Trong các mệnh đề trên có bao nhiêu mệnh đề sai?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

(I): $\int \cos^2 x.\mathrm{d}x = \int \frac{1+\cos 2x}{2}.\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C$.

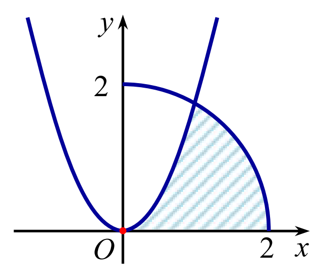
(II): $\int \frac{2x+1}{x^2+x+2018}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^2+x+2018}\mathrm{d}\left(x^2+x+2018\right) = \ln\left(x^2+x+2018\right)+C$.

(III): $\int 3^x\left(2^x+3^{-x}\right)\mathrm{d}x = \int\left(6^x+1\right)\mathrm{d}x = \frac{6^x}{\ln 6}+x+C$.

(IV): $\int 3^x\mathrm{d}x = \frac{3^x}{\ln 3}+C$.

Vậy các mệnh đề (I), (IV) sai.

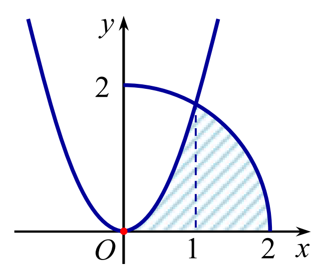
Câu 17: (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=\sqrt{3}x^2$, cung tròn có phương trình $y=\sqrt{4-x^2}$ (với $0\le x\le 2$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng



A. $\frac{4\pi+\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\frac{4\pi-\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{4\pi+2\sqrt{3}-3}{6}$. **D.** $\frac{5\sqrt{3}-2\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Phương trình hoành độ giao điểm của parabol $y=\sqrt{3}x^2$ và cung tròn $y=\sqrt{4-x^2}$ (với $0\le x\le 2$) là

$$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{3}x^2 \Leftrightarrow 4-x^2=3x^4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=1 \\ x^2=-\frac{4}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow x=1 \text{ (vì } 0\le x\le 2).$$

Cách 1: Diện tích của (H) là

$$S=\int_0^1 \sqrt{3}x^2\mathrm{d}x+\int_1^2\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{3}x^3\Big|_0^1+I = \frac{\sqrt{3}}{3}+I \text{ với } I=\int_1^2\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x.$$

Đặt: $x=2\sin t$, $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \mathrm{d}x=2\cos t.\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{6}$, $x=2\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{2}$.

$$I=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4\sin^2 t}.2\cos t.\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}4\cos^2 t.\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}2\left(1+\cos 2t\right).\mathrm{d}t=\left(2x+\sin 2t\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy $S=\dfrac{\sqrt{3}}{3}+I=\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{4\pi-\sqrt{3}}{6}$.

Cách 2: Diện tích của (H) bằng diện tích một phần tư hình tròn bán kính 2 trừ diện tích hình phẳng giới hạn bởi cung tròn, parabol và trục Oy.

Tức là $S=\pi-\displaystyle\int\limits_0^1\left(\sqrt{4-x^2}-\sqrt{3}x^2\right)\mathrm{d}x$.

Câu 18: **(Đề tham khảo BGD năm 2017-2018)** Biết $I=\displaystyle\int\limits_1^2\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}-c$ với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=24$. **B.** $P=12$. **C.** $P=18$. **D.** $P=46$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\neq 0$, $\forall x\in[1;2]$ nên:

$$I=\int\limits_1^2\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}=\int\limits_1^2\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}$$

$$=\int\limits_1^2\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)}=\int\limits_1^2\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)}}$$

$$=\int\limits_1^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)\mathrm{d}x=\left(2\sqrt{x}-2\sqrt{x+1}\right)\Big|_1^2=4\sqrt{2}-2\sqrt{3}-2=\sqrt{32}-\sqrt{12}-2.$$

Mà $I=\sqrt{a}-\sqrt{b}-c$ nên $\begin{cases}a=32\\b=12\\c=2\end{cases}$. Suy ra: $P=a+b+c=32+12+2=46$.

Câu 19:

(Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Cho hàm số $f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'\left(x\right)=\frac{2}{2x-1}$, $f\left(0\right)=1$ và $f\left(1\right)=2$. Giá trị của biểu thức $f\left(-1\right)+f\left(3\right)$ bằng

A. $4+\ln 15$. **B.** $2+\ln 15$. **C.** $3+\ln 15$. **D.** $\ln 15$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f\left(x\right)=\int f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\frac{2}{2x-1}\mathrm{d}x=\ln\left|2x-1\right|+C$, với mọi $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

+ Xét trên $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$. Ta có $f\left(0\right)=1$, suy ra $C=1$.

Do đó, $f\left(x\right)=\ln\left|2x-1\right|+1$, với mọi $x\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$. Suy ra $f\left(-1\right)=1+\ln 3$.

+ Xét trên $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. Ta có $f\left(1\right)=2$, suy ra $C=2$.

Do đó, $f\left(x\right)=\ln\left|2x-1\right|+2$, với mọi $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. Suy ra $f\left(3\right)=2+\ln 5$.

Vậy $f\left(-1\right)+f\left(3\right)=3+\ln 3+\ln 5=3+\ln 15$.

Câu 1: (THPT Triệu Sơn 1-lần 1 năm 2017-2018) Một ô tô đang chạy với vận tốc 20 m/s thì người lái xe đạp phanh. Sau khi đạp phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-4t+20$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét?

A. 150 mét. **B.** 5 mét. **C.** 50 mét. **D.** 100 mét.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t_0=0$ là thời điểm người lái xe ô tô bắt đầu đạp phanh, khi ô tô dừng hẳn thì vận tốc triệt tiêu nên $-4t+20=0 \Leftrightarrow t=5$.

Từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được quãng đường:

$$\int^{5}(-4t+20)\,\mathrm{d}t=50 \text{ mét.}$$

Câu 2: (THPT Đoàn Thượng-Hải Dương-lần 2 năm 2017-2018) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, luôn dương trên $[0;3]$ và thỏa mãn $I=\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x=4$. Khi đó giá trị của tích phân $K=\int_0^3\left(e^{1+\ln(f(x))}+4\right)\mathrm{d}x$ là:

A. $4+12\mathrm{e}$. **B.** $12+4\mathrm{e}$. **C.** $3\mathrm{e}+14$. **D.** $14+3\mathrm{e}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $K=\int_0^3\left(\mathrm{e}^{1+\ln(f(x))}+4\right)\mathrm{d}x=\int_0^3 \mathrm{e}^{1+\ln(f(x))}\mathrm{d}x+\int_0^3 4\mathrm{d}x=\mathrm{e}.\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^3 4\mathrm{d}x=4\mathrm{e}+4x\Big|_0^3=4\mathrm{e}+12$.

Vậy $K=4\mathrm{e}+12$.

Câu 3: (THPT Đoàn Thượng-Hải Dương-lần 2 năm 2017-2018) Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)=\sin 2x$ và $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$. Tính $F\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

A. $F\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{5}{4}$. **B.** $F\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$. **C.** $F\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{4}$. **D.** $F\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Vì $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)=\sin 2x$ nên

$F(x)=\int \sin 2x.\mathrm{d}x \Leftrightarrow F(x)=\frac{-1}{2}\cos 2x+C$.

Ta có $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-1}{2}\cos\frac{\pi}{2}+C=1 \Rightarrow C=1 \Rightarrow F(x)=\frac{-1}{2}\cos 2x+1 \Rightarrow F\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{-1}{2}\cos\frac{\pi}{3}+1$

$\Rightarrow F\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{4}$.

Câu 4: (THPT Lương Thế Vinh-Hà Nội năm 2017-2018) Biết $f(x)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_0^9 f(x)\,\mathrm{d}x = 9$. Khi đó giá trị của $\int\limits_1^4 f(3x-3)\,\mathrm{d}x$ là

A. 27. **B.** 3. **C.** 24. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Gọi $I = \int\limits_1^4 f(3x-3)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = 3x-3 \Rightarrow \mathrm{d}t = 3\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\mathrm{d}t$. Đổi cận: $x=1 \Rightarrow t=0$; $x=4 \Rightarrow t=9$.

Khi đó: $I = \frac{1}{3}\int\limits_0^9 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}.9 = 3$.

Câu 5: (THPT Lương Thế Vinh-Hà Nội năm 2017-2018) Có bao nhiêu số thực b thuộc khoảng $(\pi;3\pi)$ sao cho $\int\limits_\pi^b 4\cos 2x\,\mathrm{d}x = 1$?

A. 8. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int\limits_\pi^b 4\cos 2x\,\mathrm{d}x = 1 \Leftrightarrow 2\sin 2x\Big|_\pi^b = 1 \Leftrightarrow \sin 2b = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = \frac{\pi}{12}+k\pi \\ b = \frac{5\pi}{12}+k\pi \end{array}\right.$.

Do đó, có 4 số thực b thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 6: (THPT Lương Thế Vinh-Hà Nội năm 2017-2018) Biết $\int\limits_1^e \frac{(x+1)\ln x + 2}{1+x\ln x}\,\mathrm{d}x = a.\mathrm{e} + b\ln\left(\frac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}}\right)$ trong đó a, b là các số nguyên. Khi đó tỉ số $\frac{a}{b}$ là

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

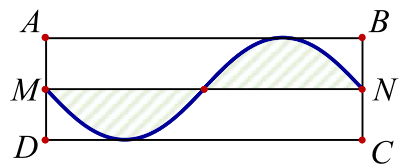
Chọn B

Ta có: $\int\limits_1^e \frac{(x+1)\ln x+2}{1+x\ln x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^e \frac{1+x\ln x+1+\ln x}{1+x\ln x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^e \mathrm{d}x + \int\limits_1^e \frac{\mathrm{d}(1+x\ln x)}{1+x\ln x}$

$= x\Big|_1^e + \ln(1+x\ln x)\Big|_1^e = \mathrm{e}-1+\ln(1+\mathrm{e}) = \mathrm{e}+\ln\frac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}}$.

Suy ra $a = b = 1$. Vậy $\frac{a}{b} = 1$.

Câu 7: (THPT Đức Thọ-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Người ta trồng hoa vào phần đất được tô màu đen Được giới hạn bởi cạnh AB, CD đường trung bình MN của mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ và một đường cong hình sin (như hình vẽ). Biết $AB = 2\pi(m)$, $AD = 2(m)$. Tính diện tích phần còn lại.

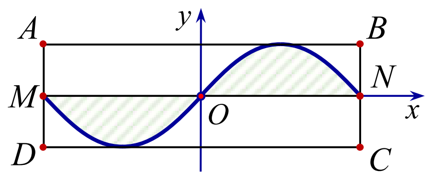


A. $4\pi - 1$. **B.** $4(\pi - 1)$. **C.** $4\pi - 2$. **D.** $4\pi - 3$.

Lời giải

Chọn B

Chọn hệ tọa độ Oxy (như hình bên). Khi đó



Diện tích hình chữ nhật là $S_1 = 4\pi$.

Diện tích phần đất được tô màu đen là $S_2 = 2\int\limits_0^{\pi} \sin x\mathrm{d}x = 4$.

Tính diện tích phần còn lại: $S = S_1 - S_2 = 4\pi - 4 = 4(\pi - 1)$.

Câu 8: (THPT Đức Thọ-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Biết $\int\limits_2^3 \ln\left(x^3 - 3x + 2\right)\mathrm{d}x = a\ln 5 + b\ln 2 + c$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính $S = a.b + c$

A. $S = 60$. **B.** $S = -23$. **C.** $S = 12$. **D.** $S = -2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int\limits_2^3 \ln\left(x^3 - 3x + 2\right)\mathrm{d}x = x.\ln\left(x^3 - 3x + 2\right)\Big|_2^3 - \int\limits_2^3 x\mathrm{d}\ln\left(x^3 - 3x + 2\right)$

$= 3\ln 20 - 4\ln 2 - \int\limits_2^3 \dfrac{x\left(3x^2 - 3\right)}{(x-1)^2(x+2)}\mathrm{d}x$

$= 3\ln 20 - 4\ln 2 - \int\limits_2^3 \dfrac{3x(x+1)}{(x-1)(x+2)}\mathrm{d}x = 3\ln 5 + 2\ln 2 - \int\limits_2^3 \dfrac{3(x-1)(x+2) + 6}{(x-1)(x+2)}\mathrm{d}x$

$= 3\ln 5 + 2\ln 2 - (3x)\Big|_2^3 - 2\int\limits_2^3 \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x = 3\ln 5 + 2\ln 2 - 3 - 2\ln|x-1|\Big|_2^3 + 2\ln|x+2|\Big|_2^3$

$= 5\ln 5 - 4\ln 2 - 3$.

Suy ra $a = 5; b = -4; c = -3$. Do đó $S = ab + c = -23$.

Câu 9: (THTT Số 4-487 tháng 1 năm 2017-2018) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\mathrm{d}x = 4$ và $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x = 2$. Tính tích phân $I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. 6. B. 2. C. 3. D. 1.

Lời giải

Chọn A

Xét $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\mathrm{d}x = 4$.

Đặt $t = \tan x \Rightarrow \mathrm{d}t = \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x \Rightarrow \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$.

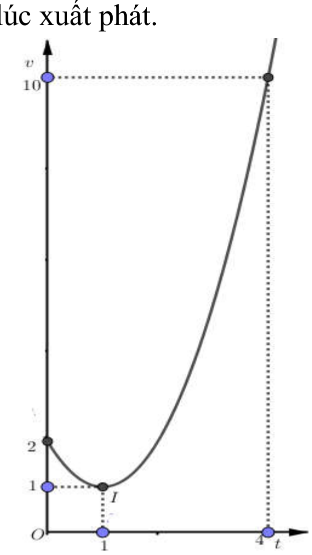
$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 1$.

$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{f(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t = 4$.

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x = 4$.

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x^2}(1+x^2)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 4+2 = 6$.

Câu 10: (THPT Chuyên Hạ Long-Quảng Ninh-lần 1 năm 2017-2018) Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/ h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(1;1)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát.



A. $s = 6$ (km). B. $s = 8$ (km). C. $s = \frac{40}{3}$ (km). D. $s = \frac{46}{3}$ (km).

Hướng dẫn giải

Chọn C

Hàm biểu diễn vận tốc có dạng $v(t) = at^2 + bt + c$. Dựa vào đồ thị ta có:

$$\begin{cases} c=2 \\ \dfrac{-b}{2a}=1 \\ a+b+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \Leftrightarrow v(t)=t^2-2t+2. \\ c=2 \end{cases}$$

Với $t=4 \Rightarrow v(4)=10$ (thỏa mãn).

Từ đó $s=\int\limits_0^4 \left(t^2-2t+2\right)dt=\dfrac{40}{3}(km)$.

----------**HẾT**----------

Câu 11: (THPT Chuyên Lê Quý Đôn-Đà Nẵng năm 2017-2018) Cho hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên $[0;1]$. Biết $f(x).f(1-x)=1$ với $\forall x\in[0;1]$. Tính giá trí $I=\int\limits_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}$

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $1+f(x)=f(x)f(1-x)+f(x) \Rightarrow \dfrac{f(x)}{1+f(x)}=\dfrac{1}{f(1-x)+1}$

Xét $I=\int\limits_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}$.

Đặt $t=1-x \Leftrightarrow x=1-t \Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$. Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=1$; $x=1 \Rightarrow t=0$.

Khi đó $I=-\int\limits_1^0 \dfrac{\mathrm{d}t}{1+f(1-t)}=\int\limits_0^1 \dfrac{\mathrm{d}t}{1+f(1-t)}=\int\limits_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{1+f(1-x)}=\int\limits_0^1 \dfrac{f(x)\mathrm{d}x}{1+f(x)}$

Mặt khác $\int\limits_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}+\int\limits_0^1 \dfrac{f(x)\mathrm{d}x}{1+f(x)}=\int\limits_0^1 \dfrac{1+f(x)}{1+f(t)}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 \mathrm{d}x=1$ hay $2I=1$. Vậy $I=\dfrac{1}{2}$.

Câu 12: (THPT Chuyên Lê Quý Đôn-Đà Nẵng năm 2017-2018) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int\limits_0^{2018} f(x)\mathrm{d}x=2$. Khi đó tích phân $\int\limits_0^{\sqrt{e^{2018}-1}} \dfrac{x}{x^2+1} f\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Xét $I=\int\limits_0^{\sqrt{e^{2018}-1}} \dfrac{x}{x^2+1} f\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\ln\left(x^2+1\right) \Rightarrow \mathrm{d}t=\dfrac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=0$; $x=\sqrt{e^{2018}-1} \Rightarrow t=2018$.

Suy ra $I=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^{2018} f(t)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^{2018} f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}.2=1$.

Câu 13: (THPT Chuyên Lê Quý Đôn-Đà Nẵng năm 2017-2018) Cho các số thực a, b khác không. Xét hàm số $f(x)=\dfrac{a}{(x+1)^3}+bxe^x$ với mọi x khác -1. Biết $f'(0)=-22$ và $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=5$. Tính $a+b$?

A. 19. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 10.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x)=\dfrac{-3a}{(x+1)^4}+be^x+bxe^x$ nên $f'(0)=-3a+b=-22$ (1).

$\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left[\dfrac{a}{(x+1)^3}+bxe^x\right]\mathrm{d}x=a\int\limits_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{(x+1)^3}+b\int\limits_0^1 xe^x\mathrm{d}x=aI+bJ$.

Tính $I=\int\limits_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{(x+1)^3}=-\left.\dfrac{1}{2(x+1)^2}\right|_0^1=\dfrac{3}{8}$.

Tính $J=\int\limits_0^1 xe^x\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=e^x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=e^x\end{cases}$.

Khi đó $J=\left.(xe^x)\right|_0^1-\int\limits_0^1 e^x\mathrm{d}x=e^x-\left.e^x\right|_0^1=1$. Suy ra $\dfrac{3}{8}a+b=5$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $\begin{cases}-3a+b=-22\\ \dfrac{3a}{8}+b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=8\\ b=2\end{cases}$. Vậy $a+b=10$.

Câu 14: (THPT Chuyên Quốc Học-Huế năm 2017-2018) Cho a là số thực dương. Biết rằng $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x\left(\ln(ax)+\dfrac{1}{x}\right)$ thỏa mãn $F\left(\dfrac{1}{a}\right)=0$ và $F(2018)=e^{2018}$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $a\in\left(\dfrac{1}{2018};1\right)$. **B.** $a\in\left(0;\dfrac{1}{2018}\right]$. **C.** $a\in[1;2018)$. **D.** $a\in[2018;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

$I=\int e^x\left(\ln(ax)+\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\int e^x\ln(ax)\mathrm{d}x+\int\dfrac{e^x}{x}\mathrm{d}x$ (1)

• Tính $\int e^x\ln(ax)\mathrm{d}x$:

Đặt $\begin{cases}u=\ln(ax)\\ \mathrm{d}v=e^x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x\\ v=e^x\end{cases}\Rightarrow\int e^x\ln(ax)\mathrm{d}x=e^x\ln(ax)-\int\dfrac{e^x}{x}\mathrm{d}x$

• Thay vào (1), ta được: $F(x)=e^x\ln(ax)+C$.

Với $\begin{cases}F\left(\dfrac{1}{a}\right)=0\\ F(2018)=e^{2018}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}e^{\frac{1}{a}}.\ln 1+C=0\\ e^{2018}\ln(a.2018)+C=e^{2018}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C=0\\ \ln(a.2018)=1\end{cases}\Rightarrow a=\dfrac{e}{2018}$.

• Vậy $a \in \left(\dfrac{1}{2018};1\right)$.

Câu 15: (THPT Chuyên Quốc Học-Huế năm 2017-2018) Biết rằng $F(x)$ là một nguyên hàm trên $\mathbb{R}$ của hàm số $f(x)=\dfrac{2017x}{\left(x^2+1\right)^{2018}}$ thỏa mãn $F(1)=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của $F(x)$.

A. $m=-\dfrac{1}{2}$. **B.** $m=\dfrac{1-2^{2017}}{2^{2018}}$. **C.** $m=\dfrac{1+2^{2017}}{2^{2018}}$. **D.** $m=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int f(x)dx=\int \dfrac{2017x}{\left(x^2+1\right)^{2018}}dx$ $=\dfrac{2017}{2}\int\left(x^2+1\right)^{-2018}d\left(x^2+1\right)$ $=\dfrac{2017}{2}.\dfrac{\left(x^2+1\right)^{-2017}}{-2017}+C$

$=-\dfrac{1}{2\left(x^2+1\right)^{2017}}+C=F(x)$

Mà $F(1)=0\Rightarrow -\dfrac{1}{2.2^{2017}}+C=0\Rightarrow C=\dfrac{1}{2^{2018}}$

Do đó $F(x)=-\dfrac{1}{2.\left(x^2+1\right)^{2017}}+\dfrac{1}{2^{2018}}$ suy ra

$F(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $\dfrac{1}{2\left(x^2+1\right)^{2017}}$ lớn nhất $\Leftrightarrow \left(x^2+1\right)$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow x=0$

Vậy $m=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^{2018}}=\dfrac{1-2^{2017}}{2^{2018}}$.

Câu 16: (THPT Chuyên Thái Bình-lần 3 năm 2017-2018) Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa $2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x^2}$ .Tính $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{\pi}{4}$. **B.** $\dfrac{\pi}{6}$. **C.** $\dfrac{\pi}{20}$. **D.** $\dfrac{\pi}{16}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có: $\int\limits_0^1\left[2f(x)+3f(1-x)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow A+B=C$.

Tính: $C=\int\limits_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

Đặt $x=\sin t$ suy ra $\mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0$; $x=1\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{2}$.

Vậy: $C=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t=\left.\left(\dfrac{1}{2}t+\dfrac{1}{4}\sin 2t\right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\pi}{4}$.

Tính: $B=\int\limits_0^1 3f\left(1-x\right)\,\mathrm{d}x$

Đặt: Đặt $t=1-x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=-1$; $x=1\Rightarrow t=0$.

Vậy: $B=\int\limits_0^1 3f\left(t\right)\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^1 3f\left(x\right)\,\mathrm{d}x$.

Do đó: $\int\limits_0^1\left[2f\left(x\right)+3f\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow 5\int\limits_0^1 f\left(x\right)\,\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow \int\limits_0^1 f\left(x\right)\,\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{20}$.

Câu 17: (THPT Chuyên Vĩnh Phúc-lần 3 MĐ 234 năm học 2017-2018) Biết $F\left(x\right)=\left(ax^2+bx+c\right)e^{-x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\left(2x^2-5x+2\right)e^{-x}$ trên $\mathbb{R}$. Tính giá trị của biểu thức $f\left[F\left(0\right)\right]$.

A. $-e^{-1}$. **B.** $20e^2$. **C.** $9e$. **D.** $3e$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có

$F'\left(x\right)=\left(ax^2+bx+c\right)'e^{-x}+\left(ax^2+bx+c\right)\left(e^{-x}\right)'=\left(2ax+b\right)e^{-x}-\left(ax^2+bx+c\right)e^{-x}$

$F'\left(x\right)=\left[-ax^2+\left(2a-b\right)x+b-c\right]e^{-x}$

Vì $F\left(x\right)=\left(ax^2+bx+c\right)e^{-x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\left(2x^2-5x+2\right)e^{-x}$ trên $\mathbb{R}$ nên:

$F'\left(x\right)=f\left(x\right),\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\left[-ax^2+\left(2a-b\right)x+b-c\right]e^{-x}=\left(2x^2-5x+2\right)e^{-x},\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-a=2\\2a-b=-5\\b-c=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2\\b=1\\c=-1\end{cases}$.

Như vậy $F\left(x\right)=\left(-2x^2+x-1\right)e^{-x}\Rightarrow F\left(0\right)=\left(-2.0^2+0-1\right)e^{-0}=-1$.

Bởi vậy $f\left[F\left(0\right)\right]=f\left(-1\right)=\left(2.1^2+5.1+2\right)e=9e$.

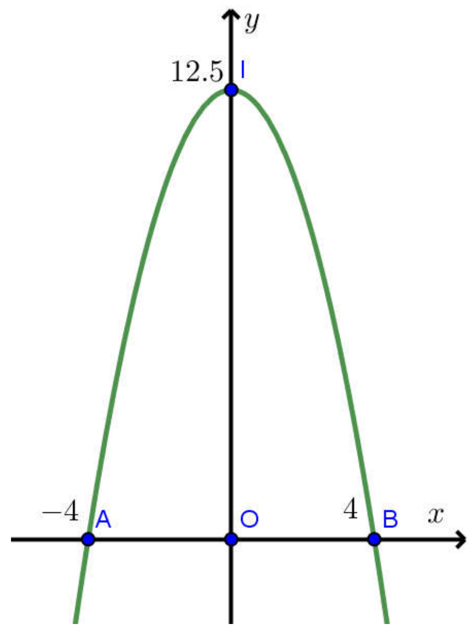
Câu 18: (THPT Chuyên Vĩnh Phúc-lần 3 MĐ 234 năm học 2017-2018) Cổng trường Đại học Bách Khoa Hà Nội có hình dạng Parabol, chiều rộng $8\,m$, chiều cao $12,5\,m$. Diện tích của cổng là:

A. $100\left(\mathrm{m}^2\right)$. **B.** $200\left(\mathrm{m}^2\right)$. **C.** $\dfrac{100}{3}\left(\mathrm{m}^2\right)$. **D.** $\dfrac{200}{3}\left(\mathrm{m}^2\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Cách 1:



Xét hệ trục tọa độ như hình vẽ mà trục đối xứng của Parabol trùng với trục tung, trục hoành trùng với đường tiếp đất của cổng.

Khi đó Parabol có phương trình dạng $y = ax^2 + c$.

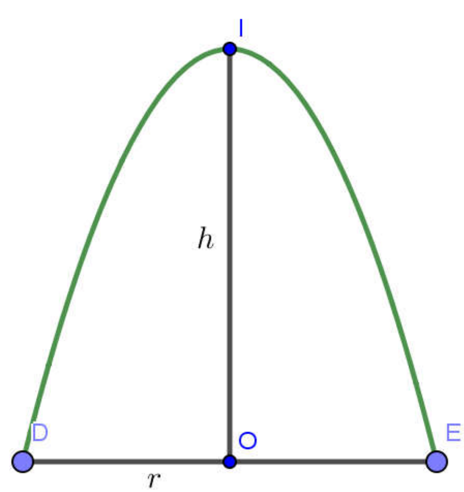
Vì (P) đi qua đỉnh $I(0;12,5)$ nên ta có $c = 12,5$.

(P) cắt trục hoành tại hai điểm $A(-4;0)$ và $B(4;0)$ nên ta có $0 = 16a + c \Rightarrow a = \frac{-c}{16} = -\frac{25}{32}$.

Do đó $(P): y = -\frac{25}{32}x^2 + 12,5$.

Diện tích của cổng là: $S = \int_{-4}^{4}\left(-\frac{25}{32}x^2 + 12,5\right)dx = \frac{200}{3}\left(m^2\right)$.

Cách 2:



Ta có parabol đã cho có chiều cao là $h = 12,5m$ và bán kính đáy $OD = OE = 4m$.

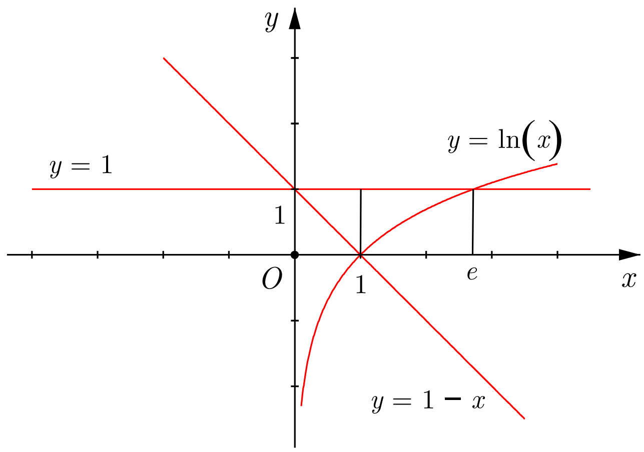
Do đó diện tích parabol đã cho là: $S = \frac{4}{3}rh = \frac{200}{3}\left(m^2\right)$.

Câu 19: (THPT Hồng Quang-Hải Dương năm 2017-2018) Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị các hàm số $y = \ln x$, $y = 1$, $y = 1 - x$.

A. $S=\mathrm{e}-\dfrac{3}{2}$. **B.** $S=\mathrm{e}-\dfrac{1}{2}$. **C.** $S=\mathrm{e}+\dfrac{1}{2}$. **D.** $S=\mathrm{e}+\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $S=\int\limits_0^1\left[1-\left(1-x\right)\right]\mathrm{d}x+\int\limits_1^{\mathrm{e}}\left(1-\ln x\right)\mathrm{d}x=\left.\dfrac{x^2}{2}\right|_0^1+\left.x\left(1-\ln x\right)\right|_1^{\mathrm{e}}-\int\limits_1^{\mathrm{e}}x\mathrm{d}\left(1-\ln x\right)$

$=\dfrac{1}{2}-1-\int\limits_1^{\mathrm{e}}x.\dfrac{-1}{x}\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{2}+\left.x\right|_1^{\mathrm{e}}=-\dfrac{1}{2}+\left(\mathrm{e}-1\right)=\mathrm{e}-\dfrac{3}{2}$.

Câu 20: **(THPT Hồng Quang-Hải Dương năm 2017-2018)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[-\ln 2;\ln 2\right]$ và thỏa mãn $f\left(x\right)+f\left(-x\right)=\dfrac{1}{e^x+1}$.

Biết $\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2}f\left(x\right)\mathrm{d}x=a\ln 2+b\ln 3$ $\left(a;b\in\mathbb{Q}\right)$. Tính $P=a+b$.

A. $P=\dfrac{1}{2}$. **B.** $P=-2$. **C.** $P=-1$. **D.** $P=2$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $I=\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2}f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $t=-x$ $\Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$.

Đổi cận: Với $x=-\ln 2$ $\Rightarrow$ $t=\ln 2$; Với $x=\ln 2\Rightarrow$ $t=-\ln 2$.

Ta được $I=-\int\limits_{\ln 2}^{-\ln 2}f\left(-t\right)\mathrm{d}t=\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2}f\left(-t\right)\mathrm{d}t=\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2}f\left(-x\right)\mathrm{d}x$.

Khi đó ta có: $2I=\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2}f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2}f\left(-x\right)\mathrm{d}x==\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2}\left[f\left(x\right)+f\left(-x\right)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2}\dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x$.

Xét $\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2}\dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x$. Đặt $u=\mathrm{e}^x$ $\Rightarrow \mathrm{d}u=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

Đổi cận: Với $x=-\ln 2\Rightarrow u=\dfrac{1}{2}$; $x=\ln 2$ $\Rightarrow u=2$.

Ta được $\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{e^x+1}dx = \int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x\left(e^x+1\right)}dx = \int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{u(u+1)}du$

$= \int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}\right)du = \left(\ln|u|-\ln|u+1|\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{2} = \ln 2$

Vậy ta có $a=\frac{1}{2}$, $b=0 \Rightarrow a+b=\frac{1}{2}$.

Câu 21: (THPT Kinh Môn 2-Hải Dương năm 2017-2018) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2)=16$, $\int\limits_0^2 f(x)dx=4$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 x.f'(2x)dx$.

A. $I=13$. **B.** $I=12$. **C.** $I=20$. **D.** $I=7$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\begin{cases} u=x \\ dv=f'(2x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=\frac{1}{2}f(2x) \end{cases}$.

Khi đó, $I=x.\frac{1}{2}f(2x)\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 f(2x)dx = \frac{1}{2}f(2)-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 f(2x)dx = 8-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 f(2x)dx$.

Đặt $t=2x \Rightarrow dt=2dx$.

Với $x=0 \Rightarrow t=0$; $x=1 \Rightarrow t=2$.

Suy ra $I=8-\frac{1}{4}\int\limits_0^2 f(t)dt = 8-1=7$.

Câu 22: (THPT Kinh Môn 2-Hải Dương năm 2017-2018) Một ôto đang chuyển động đều với vận tốc $20\ (\text{m/s})$ rồi hãm phanh chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-2t+20\ (\text{m/s})$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu hãm phanh. Tính quãng đường mà ôto đi được trong 15 giây cuối cùng đến khi dừng hẳn.

A. $100\ (\text{m})$. **B.** $75\ (\text{m})$. **C.** $200\ (\text{m})$. **D.** $125\ (\text{m})$.

Lời giải

Chọn C

Thời gian từ lúc hãm phanh đến dừng hẳn là: $-2t+20=0 \Leftrightarrow t=10\ (\text{s})$.

Quãng đường ôto đi được trong 15 giây cuối cùng là:

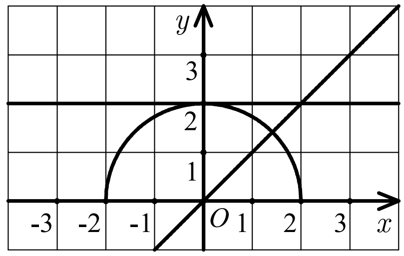
$s=20.5+\int\limits_0^{10}(-2t+20)dt = 100+\left(-t^2+20t\right)\Big|_0^{10} = 100+(-100+200)=200\ (\text{m})$.

Câu 23: (THPT Kinh Môn 2-Hải Dương năm 2017-2018) Cho hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{4-x^2}$, $y=2$, $y=x$ có diện tích là $S=a+b.\pi$. Chọn kết quả đúng:

A. $a>1$, $b>1$. **B.** $a+b<1$. **C.** $a+2b=3$. **D.** $a^2+4b^2\geq 5$.

Lời giải

Chọn D



Các phương trình hoành độ giao điểm:

* $\sqrt{4-x^2}=x \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 4-x^2=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x=\sqrt{2} \end{cases}.$

* $\sqrt{4-x^2}=2 \Leftrightarrow x=0$.

* $x=2$.

Diện tích cần tính là: $S=\int\limits_0^{\sqrt{2}}\left(2-\sqrt{4-x^2}\right)dx+\int\limits_{\sqrt{2}}^2(2-x)dx=\int\limits_0^{\sqrt{2}}2dx+\int\limits_{\sqrt{2}}^2(2-x)dx-\int\limits_0^{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}dx$

$=(2x)\Big|_0^{\sqrt{2}}+\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{\sqrt{2}}^2-\int\limits_0^{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}dx=2\sqrt{2}+3-2\sqrt{2}-\int\limits_0^{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}dx=3-\int\limits_0^{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}dx$.

Đặt $x=2\sin t \Rightarrow dx=2\cos t dt$. Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=0$; $x=\sqrt{2} \Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$.

Ta có $\int\limits_0^{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{4-4\sin^2 t}.2\cos t dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}4\cos^2 t dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}2(1+\cos 2t)dx$

$=2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}+1$.

Vậy $S=3-\frac{\pi}{2}-1=2-\frac{1}{2}.\pi$.

Theo kí hiệu của bài toán ta suy ra $a=2$, $b=-\frac{1}{2}$. Do đó mệnh đề đúng là $a^2+4b^2\ge 5$.

----------HẾT----------

Câu 24: (THPT Ninh Giang-Hải Dương năm 2017-2018) Biết rằng $\int\limits_1^5\frac{3}{x^2+3x}dx=a\ln 5+b\ln 2\ (a,b\in Z)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a+2b=0$. **B.** $2a-b=0$. **C.** $a-b=0$. **D.** $a+b=0$.

Lời giải

Chọn D

$\int\limits_1^5\frac{3}{x^2+3x}dx=\int\limits_1^5\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right)dx=\left(\ln|x|-\ln|x+3|\right)\Big|_1^5=\ln 5-\ln 2 \Rightarrow a=1$ và $b=-1$.

Ta có: $a+b=0$.

Câu 25: (THPT Quãng Xương 1-Thanh Hóa năm 2017-2018) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong $y=\sin x$, $y=\cos x$ và các đường thẳng $x=0$, $x=\pi$ bằng ?

A. $\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $-2\sqrt{2}$. **D.** $3\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $S=\int\limits_{0}^{\pi}\left|\sin x-\cos x\right|\mathrm{d}x$.

Phương trình $\sin x-\cos x=0\Leftrightarrow \tan x=1\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Cho $\dfrac{\pi}{4}+k\pi\in\left[0;\pi\right]\Rightarrow k=0\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{4}$.

Biến đổi $S=\int\limits_{0}^{\pi}\left|\sin x-\cos x\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left|\sin x-\cos x\right|\mathrm{d}x+\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\left|\sin x-\cos x\right|\mathrm{d}x$

$=\left|\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin x-\cos x\right)\mathrm{d}x\right|+\left|\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\left(\sin x-\cos x\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\left(-\cos x-\sin x\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}\right|+\left|\left(-\cos x-\sin x\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\right|=2\sqrt{2}$.

Câu 26: (THPT Quãng Xương 1-Thanh Hóa năm 2017-2018) Giả sử $\int\limits_{1}^{2}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{c}\left(a\sqrt{a}-\dfrac{b}{b+c}\sqrt{b}\right)$ với $a,b,c\in\mathbb{N}$; $1\le a,b,c\le 9$. Tính giá trị của biểu thức C_{2a+c}^{b-a}.

A. 165. **B.** 715. **C.** 5456. **D.** 35.

Lời giải

Chọn D

$I=\int\limits_{1}^{2}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}\mathrm{d}x=\int\limits_{1}^{2}\dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}}{x^3}\mathrm{d}x$

Đặt $t^2=1+\dfrac{1}{x^2}\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=-\dfrac{2}{x^3}\mathrm{d}x\Rightarrow -t\mathrm{d}t=\dfrac{1}{x^3}\mathrm{d}x$

Ta được $I=-\int\limits_{\sqrt{2}}^{\frac{\sqrt{5}}{2}}t^2\mathrm{d}t=\dfrac{1}{3}t^3\Big|_{\frac{\sqrt{5}}{2}}^{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-\dfrac{5}{5+3}\sqrt{5}\right)$.

Vậy $a=2$, $b=5$, $c=3$, suy ra $C_{2a+c}^{b-a}=C_7^3=35$.

Câu 27: (THPT Trần Quốc Tuấn năm 2017-2018) Biết $\int\limits_{-1}^{4}f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}$ và. $\int\limits_{-1}^{0}f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{-1}{2}$. Tính tích phân $I=\int\limits_{0}^{4}\left[4\mathrm{e}^{2x}+2f(x)\right]\mathrm{d}x$.

A. $I=2\mathrm{e}^8$. **B.** $I=4\mathrm{e}^8-2$. **C.** $I=4\mathrm{e}^8$. **D.** $I=2\mathrm{e}^8-4$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $I=\int\limits_{0}^{4}\left[4\mathrm{e}^{2x}+2f(x)\right]\mathrm{d}x=4.\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\Big|_{0}^{4}+2\int\limits_{0}^{-1}f\left(x\right)\mathrm{d}x+2\int\limits_{-1}^{4}f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

$$\Leftrightarrow I=2\left(\mathrm{e}^8-1\right)+2.\dfrac{1}{2}+2.\dfrac{1}{2}=2.\mathrm{e}^8.$$

Câu 28: (THPT Trần Quốc Tuấn năm 2017-2018) Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(t)=\int_0^t\left(2\sqrt{3}\cos 2x+2\sin 2x\right)\mathrm{d}x$ trong khoảng $(0;+\infty)$.

A. $M=3\sqrt{3}$. **B.** $M=3$. **C.** $M=2\sqrt{3}$. **D.** $M=2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

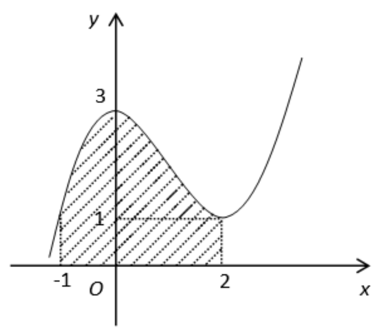
Ta có: $f(t)=\int_0^t\left(2\sqrt{3}\cos 2x+2\sin 2x\right)\mathrm{d}x=\left(\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x\right)\Big|_0^t=\sqrt{3}\sin 2t-\cos 2t+1$.

$f(t)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2t-\frac{1}{2}\cos 2t\right)+1=2\sin\left(2t-\frac{\pi}{6}\right)+1\le 3$.

Dấu bằng xảy ra khi $t=\frac{\pi}{3}$.

Vậy giá trị lớn nhất M của hàm số là 3.

Câu 29: (THPT Trần Quốc Tuấn năm 2017-2018) Tính diện tích S của miền hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+c$, các đường thẳng $x=1$, $x=2$ và trục hoành (miền gạch chéo) cho trong hình dưới đây.



A. $S=\frac{51}{8}$. **B.** $S=\frac{52}{8}$. **C.** $S=\frac{50}{8}$. **D.** $S=\frac{53}{8}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+c$, các đường thẳng $x=-1$, $x=2$ và trục hoành được chia thành hai phần:

□ Miền D_1 là hình chữ nhật có hai kích thước lần lượt là 1 và 3 $\Rightarrow S_1=3$.

□ Miền D_2 gồm: $\begin{cases} f(x)=ax^3+bx^2+c \\ y=1 \\ x=-1; x=2 \end{cases}$.

Dễ thấy (C) đi qua 3 điểm $A(-1;1)$, $B(0;3)$, $C(2;1)$ nên đồ thị (C) có phương trình $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2+3$.

$\Rightarrow S_2=\int_{-1}^{2}\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2+3-1\right)\mathrm{d}x=\frac{27}{8}$.

Vậy diện tích hình phẳng cần tìm là $S=S_1+S_2=\frac{51}{8}$.

Câu 30: **(THPT Trần Quốc Tuấn năm 2017-2018)** Biết $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\left(3+4\sin^2 x\right)\mathrm{d}x=\frac{a\pi}{b}-\frac{c\sqrt{3}}{6}$, trong đó a,b nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $a+b+c$.

A. 8. **B.** 16. **C.** 12. **D.** 14.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\left(3+4\sin^2 x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\left[3+2\left(1-\cos 2x\right)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\left(5-2\cos 2x\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{5\pi}{6}-\frac{3\sqrt{3}}{6}.$$

Suy ra $a=5$, $b=6$, $c=3$.

Vậy $a+b+c=14$.

Câu 31: **(THPT Thanh Miện 1-Hải Dương-lần 1 năm 2017-2018)** Cho biết tích phân $I=\int\limits_0^1(x+2)\ln(x+1)\mathrm{d}x=a\ln 2+\frac{-7}{b}$ trong đó a, b là các số nguyên dương. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. $a=b$. **B.** $a<b$. **C.** $a>b$. **D.** $a=b+3$.

Lời giải.

Chọn A

Đặt $\begin{cases}u=\ln(x+1)\\ \mathrm{d}v=(x+2)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x\\ v=\frac{x^2}{2}+2x\end{cases}$.

$$I=\left[\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\ln(x+1)\right]\Bigg|_0^1-\frac{1}{2}\int\limits_0^1\frac{x^2+4x}{x+1}\mathrm{d}x=\frac{5}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left(x+3-\frac{3}{x+1}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{5}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}+3x-3\ln(x+1)\right]\Bigg|_0^1=4\ln 2+\frac{-7}{4}.$$

Suy ra $a=4$, $b=4$.

Vậy $a=b$.

Câu 32: **(THPT Trần Hưng Đạo-TP HCM năm 2017-2018)** Biết m là số thực thỏa mãn $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}x\left(\cos x+2m\right)dx=2\pi^2+\frac{\pi}{2}-1$. Mệnh đề nào sau dưới đây đúng?

A. $m\le 0$. **B.** $0<m\le 3$. **C.** $3<m\le 6$. **D.** $m>6$.

Lời giải

Chọn D

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\cos x+2m)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x.\cos x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2mx\,dx = I+J$$

+) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x.\cos x\,dx$

Đặt $\begin{cases} u=x \\ dv=\cos x\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=\sin x \end{cases}$

Khi đó $I=x.\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx = x.\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}-1$.

+) $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2mx\,dx \ = mx^2\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \ =\frac{\pi^2}{4}m$.

Suy ra $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\cos x+2m)\,dx=\frac{\pi^2}{4}m+\frac{\pi}{2}-1$

Theo giả thiết ta có $\frac{\pi^2}{4}m+\frac{\pi}{2}-1=2\pi^2+\frac{\pi}{2}-1 \ \Rightarrow m=8$.

Câu 33: (THPT Tứ Kỳ-Hải Dương năm 2017-2018) Cho $y=f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}$ biết đồ thị hàm số $y=f(x)$ đi qua điểm $M\left(-\frac{1}{2};4\right)$ và $\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t=3$, tính $I=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0}\sin 2x.f'(\sin x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=10$. **B.** $I=-2$. **C.** $I=1$. **D.** $I=-1$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Xét tích phân $I=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0}\sin 2x.f'(\sin x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0}2\sin x.f'(\sin x).\cos x\,\mathrm{d}x$.

Đặt: $t=\sin x\Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\,\mathrm{d}x$. Đổi cận: $\begin{cases} x=-\frac{\pi}{6}\Rightarrow t=-\frac{1}{2} \\ x=0\Rightarrow t=0 \end{cases}$.

$\Rightarrow I=2\int_{-\frac{1}{2}}^{0} t.f'(t)\,\mathrm{d}t$.

Đăt: $\begin{cases} u=2t \\ \mathrm{d}v=f'(t)\,\mathrm{d}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=2\mathrm{d}t \\ v=f(t) \end{cases}$.

$\Rightarrow I=2t.f(t)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0}-2\int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t=f\left(-\frac{1}{2}\right)-2\int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$.

□ Đồ thị hàm số $y=f(x)$ đi qua điểm $M\left(-\frac{1}{2};4\right) \ \Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right)=4$.

□ Hàm số $y=f\left(x\right)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}$ $\Rightarrow \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{0} f\left(t\right)\mathrm{d}t=\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} f\left(t\right)\mathrm{d}t=\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} f\left(x\right)\mathrm{d}x=3$.

Vậy $I=4-2.3=-2$.

Câu 34: (THPT Hậu Lộc 2-Thanh Hóa năm 2017-2018) Cho số thực $x>0$. Chọn đẳng thức **đúng** trong các đẳng thức sau:

A. $\int \frac{\ln x}{x}.\mathrm{d}x=2\ln x+C$.

B. $\int \frac{\ln x}{x}.\mathrm{d}x=2\ln^2 x+C$.

C. $\int \frac{\ln x}{x}.\mathrm{d}x=\ln^2 x+C$.

D. $\int \frac{\ln x}{x}.\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln^2 x+C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int \frac{\ln x}{x}.\mathrm{d}x=\int \ln x.\mathrm{d}\left(\ln x\right)=\frac{1}{2}\ln^2 x+C$.

Câu 35: (THPT Hậu Lộc 2-Thanh Hóa năm 2017-2018) Biết rằng $\int\limits_0^1 x\cos 2x dx=\frac{1}{4}\left(a\sin 2+b\cos 2+c\right)$, với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Khẳng định nào sau đây **đúng** ?

A. $a+b+c=1$.

B. $a-b+c=0$.

C. $2a+b+c=-1$.

D. $a+2b+c=1$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $I=\int\limits_0^1 x\cos 2x\mathrm{d}x$ Đặt $\begin{cases} u=x \\ dv=cos2x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=\frac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$.

$\Rightarrow I=\frac{1}{2}x\sin 2x\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \sin 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sin 2+\frac{1}{4}cos2x\Big|_0^1=\frac{1}{2}\sin 2+\frac{1}{4}cos2-\frac{1}{4}$.

$=\frac{1}{4}\left(2\sin 2+cos2-1\right)\Rightarrow a-b+c=0$.

Câu 36: (THPT Hậu Lộc 2-Thanh Hóa năm 2017-2018) Cho số thực $a>0$. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục và luôn dương trên đoạn $\left[0;a\right]$ thỏa mãn $f(x).f(a-x)=1$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^a \frac{1}{1+f\left(x\right)}\mathrm{d}x$?

A. $I=\frac{2a}{3}$.

B. $I=\frac{a}{2}$.

C. $I=\frac{a}{3}$.

D. $I=a$.

Lời giải

Chọn B

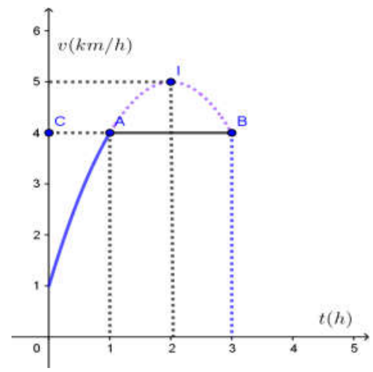
Đặt $t=a-x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$.

Thay vào ta được $I=\int\limits_0^a \frac{1}{1+f\left(x\right)}\mathrm{d}x=\int\limits_0^a \frac{1}{1+f\left(a-t\right)}\mathrm{d}t=\int\limits_0^a \frac{1}{1+f\left(a-x\right)}\mathrm{d}x$.

Suy ra $0=\int\limits_0^a \left[\frac{f\left(a-x\right)-f\left(x\right)}{\left(1+f\left(x\right)\right)\left(1+f\left(a-x\right)\right)}\right]\mathrm{d}x$, do hàm số $f(x)$ liên tục và luôn dương trên đoạn $\left[0;a\right]$. Suy ra $f\left(a-x\right)=f\left(x\right)$, trên đoạn $\left[0;a\right]$.

Mà $f(x).f(a-x)=1\Rightarrow f\left(x\right)=1$. Vậy $I=\int\limits_0^a \frac{1}{2}\mathrm{d}x=\frac{a}{2}$.

Câu 37: **(THPT Chuyên Biên Hòa-Hà Nam-lần 1 năm 2017-2018)** Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v\left(\text{km/h}\right)$ phụ thuộc vào thời gian $t\left(\text{h}\right)$ có đồ thị vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I\left(2;5\right)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó.



A. $15\left(\text{km}\right)$. **B.** $\dfrac{32}{3}\left(\text{km}\right)$. **C.** $12\left(\text{km}\right)$. **D.** $\dfrac{35}{3}\left(\text{km}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Parabol có đỉnh $I\left(2;5\right)$ và đi qua điểm $\left(0;1\right)$ có phương trình $y=-x^2+4x+1$.

Quãng đường vật đi được trong 1 giờ đầu là:

$$S_1=\int_0^1\left(-x^2+4x+1\right)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+2x^2+x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1}=\frac{8}{3}$$

Quãng đường vật đi được trong 2 giờ sau là $S_2=2.4=8$

Vậy trong ba giờ vật đi được quãng đường là $S=S_1+S_2=\dfrac{8}{3}+8=\dfrac{32}{3}\left(\text{km}\right)$.

Câu 38: **(THPT Trần Nhân Tông-Quảng Ninh-lần 1 năm 2017-2018)** Biết rằng tích phân $\displaystyle\int_0^4\frac{\left(x+1\right)e^x}{\sqrt{2x+1}}dx=ae^4+b$. Tính $T=a^2-b^2$

A. $T=1$. **B.** $T=2$. **C.** $T=\dfrac{3}{2}$. **D.** $T=\dfrac{5}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $I=\displaystyle\int_0^4\frac{x+1}{\sqrt{2x+1}}e^xdx=\frac{1}{2}\int_0^4\frac{2x+2}{\sqrt{2x+1}}e^xdx=\frac{1}{2}\left(\int_0^4\sqrt{2x+1}.e^xdx+\int_0^4\frac{e^x}{\sqrt{2x+1}}dx\right)$.

Xét $I_1=\displaystyle\int_0^4\frac{e^x}{\sqrt{2x+1}}dx$.

Đặt $\begin{cases} u = e^x \\ dv = \dfrac{dx}{\sqrt{2x+1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = \displaystyle\int \dfrac{dx}{\sqrt{2x+1}} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{(2x+1)^{\frac{1}{2}}}{\dfrac{1}{2}} = \sqrt{2x+1} \end{cases}$

Do đó $I_1 = e^x.\sqrt{2x+1}\Big|_0^4 - \displaystyle\int_0^4 e^x.\sqrt{2x+1}dx$.

Suy ra $I = \dfrac{3e^4 - 1}{2}$. Khi đó $a = \dfrac{3}{2}, b = \dfrac{-1}{2} \Rightarrow T = \dfrac{9}{4} - \dfrac{1}{4} = 2$.

Câu 39: (THTT số 5-488 tháng 2 năm 2018) Với mỗi số nguyên dương n ta kí hiệu $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^2(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x$. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{I_{n+1}}{I_n}$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Cách 1. Tự luận:

Xét $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^2(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = x(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \dfrac{-(1-x^2)^{n+1}}{2(n+1)} \end{cases}$.

$$I_n = \frac{-x(1-x^2)^{n+1}}{n+1}\Bigg|_0^1 + \frac{1}{2(n+1)}\int_0^1 (1-x^2)^{n+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2(n+1)}\int_0^1 (1-x^2)^{n+1}\,\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow I_{n+1} = \frac{1}{2(n+2)}\int_0^1 (1-x^2)(1-x^2)^{n+1}\,\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow I_{n+1} = \frac{1}{2(n+2)}\left[\int_0^1 (1-x^2)^{n+1}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x^2(1-x^2)^{n+1}\,\mathrm{d}x\right]$$

$$\Rightarrow I_{n+1} = \frac{1}{2(n+2)}\left[2(n+1)I_n - I_{n+1}\right] \Rightarrow \frac{I_{n+1}}{I_n} = \frac{2n+1}{2n+5} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n} = 1.$$

Cách 2. Trắc nghiệm:

Ta thấy $0 \le (1-x^2) \le 1$ với mọi $x \in [0;1]$, nên

$$I_{n+1} = \int_0^1 x^2(1-x^2)^{n+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2(1-x^2)^n(1-x^2)\,\mathrm{d}x \le \int_0^1 x^2(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x = I_n,$$

suy ra $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} \le 1$, nên $\lim \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \le 1$. Dựa vào các đáp án, ta chọn A.

Câu 40: (THTT số 5-488 tháng 2 năm 2018) Tìm tất cả các giá trị dương của m để $\displaystyle\int_0^3 x(3-x)^m\,dx = -f''\left(\frac{10}{9}\right)$, với $f(x) = \ln x^{15}$.

A. $m = 20$. **B.** $m = 4$. **C.** $m = 5$. **D.** $m = 3$.

Lời giải

Chọn D

+ Từ $f(x)=\ln x^{15} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{15x^{14}}{x^{15}}=\dfrac{15}{x} \Rightarrow f''(x)=\dfrac{-15}{x^2}$ do đó $f''\left(\dfrac{10}{9}\right)=\dfrac{-243}{20}$.

+ Tính tích phân $I=\int\limits_0^3 x(3-x)^m\,\mathrm{d}x$:

• Đặt $t=3-x \Rightarrow x=3-t$, $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$, $\begin{array}{c|cc} x & 0 & 3 \\ \hline t & 3 & 0 \end{array}$

• Do đó $I=\int\limits_3^0 (3-t)t^m(-\mathrm{d}t) = \int\limits_0^3 (3t^m-t^{m+1})\mathrm{d}t = \left.\dfrac{3t^{m+1}}{m+1}-\dfrac{t^{m+2}}{m+2}\right|_0^3 = \dfrac{3^{m+2}}{(m+1)(m+2)}$

+ Ta có $\int\limits_0^3 x(3-x)^m\,dx=-f''\left(\dfrac{10}{9}\right) \Leftrightarrow \dfrac{3^{m+2}}{(m+1)(m+2)}=\dfrac{243}{20} \Leftrightarrow \dfrac{3^{m+2}}{(m+1)(m+2)}=\dfrac{3^5}{4.5}$

Thay lần lượt các giá trị m ở 4 đáp án, nhận giá trị $m=3$.

Chú ý:

- Việc giải phương trình $\dfrac{3^m}{(m+1)(m+2)}=\dfrac{3^3}{4.5}$ không cần thiết nên chọn phương pháp thế đáp để làm trắc nghiệm trong bài này.
- Để giải phương trình $\dfrac{3^m}{(m+1)(m+2)}=\dfrac{3^3}{4.5}$ ta xét hàm trên $f(m)=\dfrac{3^m}{(m+1)(m+2)}-\dfrac{3^3}{4.5}$ với $m>0$ thì chứng minh được phương trình có nghiệm duy nhất $m=3$.

Câu 41: **(THTT số 5-488 tháng 2 năm 2018)** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(P): y=x^2-4x+5$ và các tiếp tuyến của (P) tại $A(1;2)$ và $B(4;5)$.

A. $\dfrac{9}{4}$. **B.** $\dfrac{4}{9}$. **C.** $\dfrac{9}{8}$. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

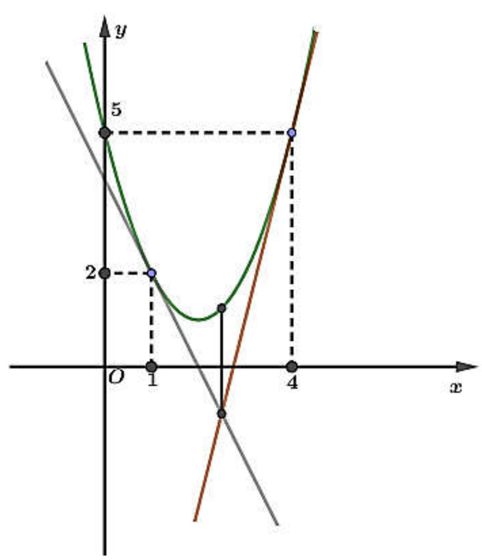
Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=2x-4$.

Tiếp tuyến của (P) tại A và B lần lượt là $y=-2x+4$; $y=4x-11$.

Giao điểm của hai tiếp tuyến là $M\left(\dfrac{5}{2};-1\right)$.



Khi đó, dựa và hình vẽ ta có diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S=\int_1^{\frac{5}{2}}\left(x^2-4x+5+2x-4\right)\mathrm{d}x+\int_{\frac{5}{2}}^{4}\left(x^2-4x+5-4x+11\right)\mathrm{d}x=\frac{9}{4}.$$

Câu 42: (THTT số 5-488 tháng 2 năm 2018) Cho tích phân $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0}\cos 2x\cos 4x\mathrm{d}x=a+b\sqrt{3}$, trong đó a, b là các hằng số hữu tỉ. Tính $\mathrm{e}^a+\log_2|b|$.

A. -2. **B.** -3. **C.** $\frac{1}{8}$. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0}\cos 2x\cos 4x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0}(\cos 6x+\cos 2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\sin 6x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{0}=\frac{1}{8}\sqrt{3}$.

Do đó ta có $a=0$, $b=-\frac{1}{8}$. Vậy $\mathrm{e}^a+\log_2|b|=\mathrm{e}^0+\log_2\frac{1}{8}=-2$.

Câu 43: (THPT Mộ Đức-Quãng Ngãi-lần 1 năm 2017-2018) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;4]$, đồng biến trên đoạn $[1;4]$ và thỏa mãn đẳng thức $x+2x.f(x)=\left[f'(x)\right]^2, \forall x\in[1;4]$. Biết rằng $f(1)=\frac{3}{2}$, tính $I=\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x$?

A. $I=\frac{1186}{45}$. **B.** $I=\frac{1174}{45}$. **C.** $I=\frac{1222}{45}$. **D.** $I=\frac{1201}{45}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $x+2x.f(x)=\left[f'(x)\right]^2\Rightarrow\sqrt{x}.\sqrt{1+2f(x)}=f'(x)\Rightarrow\frac{f'(x)}{\sqrt{1+2f(x)}}=\sqrt{x}$, $\forall x\in[1;4]$.

Suy ra $\int\frac{f'(x)}{\sqrt{1+2f(x)}}\mathrm{d}x=\int\sqrt{x}\mathrm{d}x+C \Leftrightarrow \int\frac{\mathrm{d}f(x)}{\sqrt{1+2f(x)}}\mathrm{d}x=\int\sqrt{x}\mathrm{d}x+C$

$\Rightarrow\sqrt{1+2f(x)}=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$. Mà $f(1)=\frac{3}{2}\Rightarrow C=\frac{4}{3}$. Vậy $f(x)=\frac{\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{4}{3}\right)^2-1}{2}$.

Vậy $I=\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1186}{45}$.

Câu 1: (THPT Lê Quý Đôn-Hà Nội năm 2017-2018) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn

$\int\limits_0^1 (x+1)f'(x)\mathrm{d}x = 10$ và $2f(1)-f(0)=2$. Tính $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=1$. **B.** $I=8$. **C.** $I=-12$. **D.** $I=-8$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $f(x)=ax+b$, $(a\neq 0) \Rightarrow f'(x)=a$.

Theo giả thiết ta có:

+) $\int\limits_0^1 (x+1)f'(x)\mathrm{d}x = 10 \Leftrightarrow a\int\limits_0^1 (x+1)\mathrm{d}x = 10 \Leftrightarrow \int\limits_0^1 (x+1)\mathrm{d}x = \frac{10}{a} \Leftrightarrow \frac{3}{2}=\frac{10}{a} \Rightarrow a=\frac{20}{3}$.

+) $2f(1)-f(0)=2 \Leftrightarrow 2.\left(\frac{20}{3}+b\right)-b=2 \Leftrightarrow b=-\frac{34}{3}$.

Do đó, $f(x)=\frac{20}{3}x-\frac{34}{3}$.

Vậy $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1\left(\frac{20}{3}x-\frac{34}{3}\right)\mathrm{d}x = -8$.

Câu 2: (THPT Lý Thái Tổ-Bắc Ninh-lần 1 năm 2017-2018) Cho tích phân

$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2+(2x+\cos x)\cos x+1-\sin x}{x+\cos x}\mathrm{d}x = a\pi^2+b-\ln\frac{c}{\pi}$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Tính giá trị của biểu thức $P=ac^3+b$.

A. $P=3$. **B.** $P=\frac{5}{4}$. **C.** $P=\frac{3}{2}$. **D.** $P=2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2+(2x+\cos x)\cos x+1-\sin x}{x+\cos x}\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(x+\cos x)^2+1-\sin x}{x+\cos x}\mathrm{d}x$

$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x+\cos x+\frac{1-\sin x}{x+\cos x}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2}+\sin x+\ln|x+\cos x|\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8}+1+\ln\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{8}+1-\ln\frac{2}{\pi}$

$\Rightarrow a=\frac{1}{8}$, $b=1$, $c=2$. $P=ac^3+b=\frac{1}{8}.8+1=2$.

Câu 3: (THPT Phan Châu Trinh-DakLak-lần 2 năm 2017-2018) Biết $\int\limits_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+1}+(x+1)\sqrt{x}} = \sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}$

với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=44$. **B.** $P=42$. **C.** $P=46$. **D.** $P=48$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $I=\int\limits_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+1}+(x+1)\sqrt{x}} = \int\limits_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}$.

Đặt $t=\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\Rightarrow dt=\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2\sqrt{x(x+1)}}dx\Leftrightarrow\dfrac{dx}{\sqrt{x(x+1)}}=2\dfrac{dt}{t}$.

Khi $x=1$ thì $t=\sqrt{2}+1$, khi $x=2$ thì $t=\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

$$I=\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}=2\int_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\frac{dt}{t^2}=-2\frac{1}{t}\Bigg|_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=-2\left(\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)=4\sqrt{2}-2\sqrt{3}-2$$

$=\sqrt{32}-\sqrt{12}-\sqrt{4}\Rightarrow a=32$, $b=12$, $c=4$

Vậy $P=a+b+c=48$

Câu 4: (THPT Phan Châu Trinh-DakLak-lần 2 năm 2017-2018) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ và thỏa mãn: $f'(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$. Biết rằng $f(-3)+f(3)=0$ và $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2$. Tính $T=f(-2)+f(0)+f(4)$.

A. $T=1+\ln\dfrac{9}{5}$. **B.** $T=1+\ln\dfrac{6}{5}$. **C.** $T=1+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{9}{5}$. **D.** $T=1+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{6}{5}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x)=\displaystyle\int\frac{1}{x^2-1}dx=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$

Với $x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$: $f(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C_1$.

Mà $f(-3)+f(3)=0\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{-3-1}{-3+1}\right|+C_1+\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{3-1}{3+1}\right|+C_1=0$

$\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\ln 2+C_1+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{2}+C_1=0\Leftrightarrow C_1=0$.

Do đó với $x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$: $f(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|\Rightarrow f(-2)=\dfrac{1}{2}\ln 3$; $f(4)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{5}$.

Với $x\in(-1;1)$: $f(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C_2$.

Mà $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{-\frac{1}{2}-1}{-\frac{1}{2}+1}\right|+C_2+\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}+1}\right|+C_2=2$

$\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\ln 3+C_2+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{3}+C_2=2\Leftrightarrow C_2=1$.

Do đó với $x\in(-1;1)$: $f(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+1\Rightarrow f(0)=1$.

Vậy $T=f(-2)+f(0)+f(4)=1+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{9}{5}$.

Câu 5: (THPT Kinh Môn-Hải Dương lần 1 năm 2017-2018) Cho $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin^2 x-5\sin x+6}dx=a\ln\frac{4}{c}+b$, tính tổng $S=a+b+c$.

A. $S=1$. **B.** $S=4$. **C.** $S=3$. **D.** $S=0$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\sin x \Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\mathrm{d}x$. $x=0\Rightarrow t=0$, $x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=1$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin^2 x-5\sin x+6}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{t^2-5t+6}\mathrm{d}t=\int_0^1\left(\frac{1}{t-3}-\frac{1}{t-2}\right)\mathrm{d}t=\ln\left|\frac{t-3}{t-2}\right|\Bigg|_0^1=\ln 2-\ln\frac{3}{2}=\ln\frac{4}{3}$$

$\Rightarrow a=1, \mathrm{b}=0, c=3 \Rightarrow S=a+b+c=4$.

Câu 6: (THPT Kinh Môn-Hải Dương lần 1 năm 2017-2018) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và các tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\mathrm{d}x=4$ và $\int_0^1\dfrac{x^2 f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x=2$, tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. 2. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Xét $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{f(\tan x)}{1+\tan^2 x}\left(1+\tan^2 x\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $u=\tan x\Rightarrow \mathrm{d}u=\left(1+\tan^2 x\right)\mathrm{d}x$

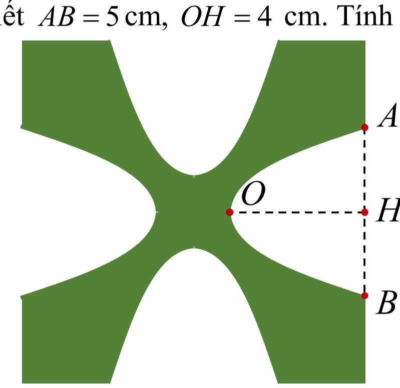
Khi $x=0$ thì $u=0$; khi $x=\dfrac{\pi}{4}$ thì $u=1$.

Nên $I=\int_0^1\dfrac{f(u)}{1+u^2}\mathrm{d}u=\int_0^1\dfrac{f(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$. Suy ra $\int_0^1\dfrac{f(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x=4$.

Mặt khác $\int_0^1\dfrac{x^2 f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int_0^1\dfrac{\left[\left(x^2+1\right)-1\right]f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\int_0^1\dfrac{f(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

Do đó $2=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-4\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=6$.

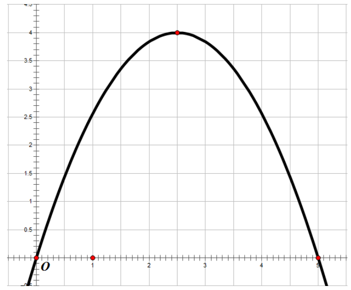
Câu 7: (THPT Kinh Môn-Hải Dương lần 1 năm 2017-2018) Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa mỏng hình vuông cạnh bằng 10 cm bằng cách khoét đi bốn phần bằng nhau có hình dạng parabol như hình bên. Biết $AB=5$ cm, $OH=4$ cm. Tính diện tích bề mặt hoa văn đó.



A. $\dfrac{160}{3}\text{cm}^2$. **B.** $\dfrac{140}{3}\text{cm}^2$. **C.** $\dfrac{14}{3}\text{cm}^2$. **D.** $50\ \text{cm}^2$.

Lời giải

Chọn B



Đưa parabol vào hệ trục Oxy ta tìm được phương trình là $(P): y = -\frac{16}{25}x^2 + \frac{16}{5}x$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(P): y = -\frac{16}{25}x^2 + \frac{16}{5}x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = 5$ là $S = \int_0^5 \left(-\frac{16}{25}x^2 + \frac{16}{5}x\right)\mathrm{d}x = \frac{40}{3}$.

Tổng diện tích phần bị khoét đi: $S_1 = 4S = \frac{160}{3}$ cm^2.

Diện tích của hình vuông là $S_{hv} = 100\ \text{cm}^2$.

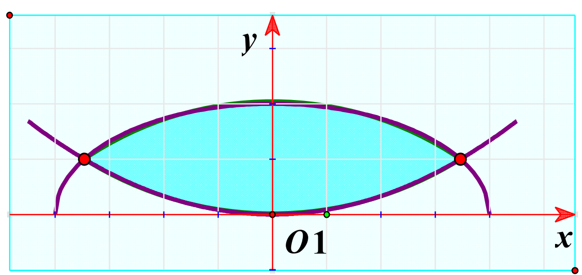
Vậy diện tích bề mặt hoa văn là $S_2 = S_{hv} - S_1 = 100 - \frac{160}{3} = \frac{140}{3}$ cm^2.

Câu 8: (THPT Chuyên Lam Sơn-Thanh Hóa-lần 2 năm 2017-2018) Hình phẳng (H) giới hạn bởi parabol $y = \frac{x^2}{12}$ và đường cong có phương trình $y = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}$. Diện tích của hình phẳng (H) bằng

A. $\frac{2\left(4\pi + \sqrt{3}\right)}{3}$. **B.** $\frac{4\pi + \sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{4\sqrt{3} + \pi}{6}$. **D.** $\frac{4\pi + \sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Phương trình hoành độ giao điểm là $\sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} = \frac{x^2}{12} \Leftrightarrow 4 - \frac{x^2}{4} = \frac{x^4}{144}$

$\Leftrightarrow \frac{x^4}{144} + \frac{x^2}{4} - 4 = 0 \Leftrightarrow x^4 + 36x^2 - 576 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 12 \\ x^2 = -48 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{3}$.

Diện tích hình phẳng (H) là $S = \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \left(\sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} - \frac{x^2}{12}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \sqrt{16 - x^2}\,\mathrm{d}x - \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \frac{x^2}{12}\mathrm{d}x$.

Xét $I = \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \sqrt{16 - x^2}\,\mathrm{d}x$. Đặt $x = 4\sin t$, với $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ $\Rightarrow \mathrm{d}x = 4\cos t\,\mathrm{d}t$.

Với $x=-2\sqrt{3}\ \Rightarrow t=-\dfrac{\pi}{3}$

Với $x=2\sqrt{3}\ \Rightarrow t=\dfrac{\pi}{3}$

Khi đó: $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{16-16\sin^2 t}.4\cos t\,\mathrm{d}t=\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}16\cos^2 t\,\mathrm{d}t=8\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t$

$=8\left(t+\dfrac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}=\dfrac{16\pi}{3}+4\sqrt{3}$.

Vậy:

$S=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{16\pi}{3}+4\sqrt{3}\right)-\dfrac{x^3}{36}\Bigg|_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}=\dfrac{8\pi}{3}+2\sqrt{3}-\left(\dfrac{24\sqrt{3}+24\sqrt{3}}{36}\right)=\dfrac{8\pi}{3}+2\sqrt{3}-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}=\dfrac{2\left(4\pi+\sqrt{3}\right)}{3}$.

Câu 9: (THPT Chuyên Lam Sơn-Thanh Hóa-lần 2 năm 2017-2018) Biết $\int\limits_0^2 2x\ln(x+1)\,\mathrm{d}x=a.\ln b$, với $a,b\in\mathbb{N}^*$, b là số nguyên tố. Tính $6a+7b$.

A. 33. **B.** 25. **C.** 42. **D.** 39.

Lời giải

Chọn D

Xét $I=\int\limits_0^2 2x\ln(x+1)\,\mathrm{d}x=6$.

Đặt $\begin{cases}u=\ln(x+1)\\ \mathrm{d}v=2x\mathrm{d}x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{1}{x+1}\mathrm{d}x\\ v=x^2-1\end{cases}$.

Ta có $I=(x^2-1)\ln(x+1)\Big|_0^2-\int\limits_0^2\dfrac{x^2-1}{x+1}\mathrm{d}x=3\ln 3-\int\limits_0^2(x-1)\,\mathrm{d}x=3\ln 3-\left(\dfrac{x^2}{2}-x\right)\Bigg|_0^2=3\ln 3$.

Vậy $a=3$, $b=3\Rightarrow 6a+7b=39$.

Câu 10: (THPT Hồng Lĩnh-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int\limits_1^{16}\dfrac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=6$ và $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x=3$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=-2$. **B.** $I=6$. **C.** $I=9$. **D.** $I=2$.

Lời giải

Chọn B

- Xét $I=\int\limits_1^{16}\dfrac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=6$, đặt $\sqrt{x}=t\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}=\mathrm{d}t$

  Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=1$; $x=16\Rightarrow t=4$

  $I=2\int\limits_1^4 f(t)\,\mathrm{d}t=6\ \Rightarrow\int\limits_1^4 f(t)\,\mathrm{d}t=\dfrac{6}{2}=3$.

- $J=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x=3$, đặt $\sin x=u\Rightarrow \cos x\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$

  Đổi cận: $x=0\Rightarrow u=0$; $x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow u=1$

  $J=\int\limits_0^1 f(u)\mathrm{d}u=3$

Vậy $I=\int\limits_0^4 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_1^4 f(x)\mathrm{d}x=3+3=6$.

Câu 11: (THPT Lê Quý Đôn-Quãng Trị-lần 1 năm 2017-2018) Cho $\int\limits_0^3 \mathrm{e}^{\sqrt{x+1}}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}}=a.\mathrm{e}^2+b.\mathrm{e}+c$. Với a, b, c là các số nguyên. Tính $S=a+b+c$.

A. $S=1$. **B.** $S=2$. **C.** $S=0$. **D.** $S=4$.

Lời giải

Chọn C

Xét $I=\int\limits_0^3 \mathrm{e}^{\sqrt{x+1}}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}}$; đặt $u=\sqrt{x+1}\Rightarrow \mathrm{d}u=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow u=1$; $x=3\Rightarrow u=2$

$\Rightarrow I=\int\limits_1^2 \mathrm{e}^u 2\mathrm{d}u=\left.2\mathrm{e}^u\right|_1^2=2\mathrm{e}^2-2\mathrm{e}\Rightarrow a=2$, $b=-2$, $c=0$, $S=a+b+c=0$.

Câu 12: (THPT Lê Quý Đôn-Quãng Trị-lần 1 năm 2017-2018) Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x.f(x)\mathrm{d}x=f(0)=1$. Tính $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x.f'(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=1$. **B.** $I=0$. **C.** $I=2$. **D.** $I=-1$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases} u=f(x)\Rightarrow \mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v=\sin x\mathrm{d}x\Rightarrow v=-\cos x \end{cases}$

$\Rightarrow \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x.f(x)\mathrm{d}x=\left.\left(-\cos x.f(x)\right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x.f'(x)\mathrm{d}x$.

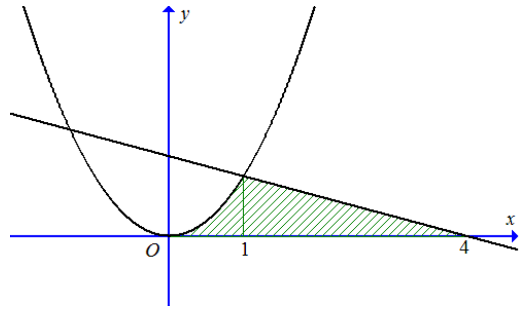
$\Rightarrow I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x.f'(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x.f(x)\mathrm{d}x+\left.\cos x.f(x)\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=1-1=0$.

Câu 13: (THPT Chuyên Tiền Giang-lần 1 năm 2017-2018) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2$, $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{4}{3}$ và trục hoành.

A. $\dfrac{11}{6}$. **B.** $\dfrac{61}{3}$. **C.** $\dfrac{343}{162}$. **D.** $\dfrac{39}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Phương trình hoành độ giao điểm của các đường $y = x^2$, $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ là

$$x^2 = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3x^2 + x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\frac{4}{3} \end{array}\right..$$

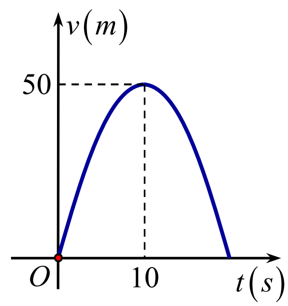
Hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ với trục hoành là $x = 4$.

Hoành độ giao điểm của parabol $y = x^2$ với trục hoành là $x = 0$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x + \int_1^4 \left(-\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}\right)\mathrm{d}x = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 + \left.\left(-\frac{1}{6}x^2 + \frac{4}{3}x\right)\right|_1^4 = \frac{11}{6}.$$

Câu 14: **(THPT Chuyên Tiền Giang-lần 1 năm 2017-2018)** Một xe ô tô sau khi chờ hết đèn đỏ đã bắt đầu phóng nhanh với vận tốc tăng liên tục được biểu thị bằng đồ thị là đường cong parabol có hình bên dưới.



Biết rằng sau $10\mathrm{s}$ thì xe đạt đến vận tốc cao nhất $50\,\mathrm{m/s}$ và bắt đầu giảm tốc. Hỏi từ lúc bắt đầu đến lúc đạt vận tốc cao nhất thì xe đã đi được quãng đường bao nhiêu mét?

A. $\frac{1000}{3}\,\mathrm{m}$. **B.** $\frac{1100}{3}\,\mathrm{m}$. **C.** $\frac{1400}{3}\,\mathrm{m}$. **D.** $300\,\mathrm{m}$.

Lời giải

Chọn A

Quãng đường xe đi được chính bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi Parabol và trục Ox.

Gọi $(P): y = ax^2 + bx + c$. Do (P) qua gốc tọa độ nên $c = 0$.

Đỉnh (P) là $I(10;50)$ nên $\begin{cases} \frac{-b}{2a} = 10 \\ -\frac{\Delta}{4a} = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -20a \\ b^2 = -200a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 10 \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases}.$

Ta có $\int_0^{10} \left(-\frac{1}{2}x^2 + 10x\right)\mathrm{d}x = \frac{1000}{3}$.

Vậy quãng đường xe đi được bằng $\dfrac{1000}{3}\,\text{m}$.

Câu 15: (THPT Phan Đình Phùng-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Một vật chuyển động với vận tốc $10\,\text{m/s}$ thì tăng tốc với gia tốc được tính theo thời gian là $a(t)=t^2+3t$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 6 giây kể từ khi vật bắt đầu tăng tốc.

A. $136\,\text{m}$. **B.** $126\,\text{m}$. **C.** $276\,\text{m}$. **D.** $216\,\text{m}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $v(0)=10\,\text{m/s}$ và $v(t)=\int\limits_0^t a(t)\,\text{d}t=\int\limits_0^t\left(t^2+3t\right)\text{d}t=\left.\left(\dfrac{t^3}{3}+\dfrac{3t^2}{2}\right)\right|_0^t=\dfrac{1}{3}t^3+\dfrac{3}{2}t^2$.

Quãng đường vật đi được là $S=\int\limits_0^6 v(t)\,\text{d}t=\int\limits_0^6\left(\dfrac{1}{3}t^3+\dfrac{3}{2}t^2\right)\text{d}t=\left.\left(\dfrac{1}{12}t^4+\dfrac{1}{2}t^3\right)\right|_0^6=216\,\text{m}$.

Câu 16: (THPT Phan Đình Phùng-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-x)+2018f(x)=2x\sin x$. Tính $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\text{d}x$?

A. $\dfrac{2}{2019}$. **B.** $\dfrac{2}{2018}$. **C.** $\dfrac{2}{1009}$. **D.** $\dfrac{4}{2019}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(f(-x)+2018f(x)\right)\text{d}x=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2x\sin x\text{d}x$

$\Leftrightarrow \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x)\,\text{d}x+2018\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\text{d}x=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2x\sin x\text{d}x \Leftrightarrow 2019\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\text{d}x=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2x\sin x\text{d}x\ \ (1)$

+ Xét $P=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2x\sin x\text{d}x$

Đặt $\begin{cases}u=2x\\ \text{d}v=\sin x\text{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\text{d}u=2\text{d}x\\ v=-\cos x\end{cases}$

$P=2x.(-\cos x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=4$

Từ (1) suy ra $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\text{d}x=\dfrac{4}{2019}$.

Câu 17: (THPT Phan Đình Phùng-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Cho hàm số $y=f(x)$ có $f'(x)$ liên tục trên nửa khoảng $[0;+\infty)$ thỏa mãn $3f(x)+f'(x)=\sqrt{1+3.\text{e}^{-2x}}$. Khi đó:

A. $e^3f(1)-f(0)=\frac{1}{\sqrt{e^2+3}}-\frac{1}{2}$. **B.** $e^3f(1)-f(0)=\frac{1}{2\sqrt{e^2+3}}-\frac{1}{4}$.

C. $e^3f(1)-f(0)=\frac{(e^2+3)\sqrt{e^2+3}-8}{3}$. **D.** $e^3f(1)-f(0)=(e^2+3)\sqrt{e^2+3}-8$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $3f(x)+f'(x)=\sqrt{1+3.e^{-2x}}=\frac{\sqrt{e^{2x}+3}}{e^x}\Rightarrow 3e^{3x}f(x)+e^{3x}f'(x)=e^{2x}\sqrt{e^{2x}+3}$.

$\Leftrightarrow\left[e^{3x}f(x)\right]'=e^{2x}\sqrt{e^{2x}+3}$.

Lấy tích phân từ 0 đến 1 hai vế ta được $\int_0^1\left[e^{3x}f(x)\right]'\,dx=\int_0^1 e^{2x}\sqrt{e^{2x}+3}\,dx$

$\Leftrightarrow\left[e^{3x}f(x)\right]\Big|_0^1=\frac{1}{3}\left(\sqrt{e^{2x}+3}\right)^3\Big|_0^1\Leftrightarrow e^3f(1)-f(0)=\frac{(e^2+3)\sqrt{e^2+3}-8}{3}$.

Câu 18: (THPT Đức THọ-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(x)=6x^2f(x^3)-\frac{6}{\sqrt{3x+1}}$. Tính $\int_0^1 f(x)\,dx$.

A. 2. **B.** 4. **C.** -1. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

$f(x)=6x^2f(x^3)-\frac{6}{\sqrt{3x+1}}\Rightarrow\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 6x^2f(x^3)\,dx-\int_0^1\frac{6}{\sqrt{3x+1}}\,dx$

Đặt $t=x^3\Rightarrow dt=3x^2dx$, đổi cận $x=0\Rightarrow t=0$, $x=1\Rightarrow t=1$.

Ta có: $\int_0^1 6x^2f(x^3)\,dx=\int_0^1 2f(t)\,dt=\int_0^1 2f(x)\,dx$, $\int_0^1\frac{6}{\sqrt{3x+1}}dx=4$.

Vậy $\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 2f(x)\,dx-4\Rightarrow\int_0^1 f(x)\,dx=4$

Câu 19: (THPT Đức THọ-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(0).f'(2)\neq 0$ và $g(x)f'(x)=x(x-2)e^x$. Tính giá trị của tích phân $I=\int_0^2 f(x).g'(x)\,dx$?

A. -4. **B.** $e-2$. **C.** 4. **D.** $2-e$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g(x)f'(x)=x(x-2)e^x\Rightarrow g(0)=g(2)=0$ (vì $f'(0).f'(2)\neq 0$)

$I=\int_0^2 f(x).g'(x)\,dx=\int_0^2 f(x)\,dg(x)=\left(f(x).g(x)\right)\Big|_0^2-\int_0^2 g(x).f'(x)\,dx=-\int_0^2\left(x^2-2x\right)e^x\,dx=4$.

Câu 20: (THPT Chuyên Thái Bình-lần 4 năm 2017-2018) Cho $\int\limits_0^1 \frac{\left(x^2+x\right)e^x}{x+e^{-x}}dx = a.e + b\ln\left(e+c\right)$ với a, b, $c \in \mathbb{Z}$. Tính $P = a + 2b - c$.

A. $P = 1$. **B.** $P = -1$. **C.** $P = 0$. **D.** $P = -2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $I = \int\limits_0^1 \frac{\left(x^2+x\right)e^x}{x+e^{-x}}dx = \int\limits_0^1 \frac{\left(x+1\right)e^x xe^x}{xe^x+1}dx$.

Đặt $t = xe^x + 1 \Rightarrow dt = \left(1+x\right)e^x dx$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = 1 \Rightarrow t = e+1$.

Khi đó: $I = \int\limits_1^{e+1} \frac{t-1}{t}dt = \int\limits_1^{e+1} \left(1 - \frac{1}{t}\right)dt = \left(t - \ln|t|\right)\Big|_1^{e+1} = e - \ln\left(e+1\right)$.

Suy ra: $a = 1$, $b = -1$, $c = 1$.

Vậy: $P = a + 2b - c = -2$.

Câu 21: (THPT Chuyên Thái Bình-lần 4 năm 2017-2018) Cho $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = \frac{1}{1+\sin 2x}$ với $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{-\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$, biết $F\left(0\right) = 1$; $F(\pi) = 0$. Tính $P = F\left(-\frac{\pi}{12}\right) - F\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

A. $P = 2 - \sqrt{3}$. **B.** $P = 0$. **C.** Không tồn tại P. **D.** $P = 1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $P = F\left(\frac{-\pi}{12}\right) - F\left(\frac{11\pi}{12}\right) = -\left[F\left(0\right) - F\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right] + \left[F\left(\pi\right) - F\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right] + F\left(0\right) - F\left(\pi\right)$

$= -\int\limits_{-\frac{\pi}{12}}^{0} \frac{1}{1+\sin 2x}dx + \int\limits_{\frac{11\pi}{12}}^{\pi} \frac{1}{1+\sin 2x}dx + 1$.

Ta có $\frac{1}{1+\sin 2x} = \frac{1}{\left(\sin x + \cos x\right)^2} = \frac{1}{2\cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$ nên

$\int\limits_{-\frac{\pi}{12}}^{0} \frac{1}{1+\sin 2x}dx = \frac{1}{2}\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{12}}^{0} = \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{3}\right)$;

$\int\limits_{\frac{11\pi}{12}}^{\pi} \frac{1}{1+\sin 2x}dx = \frac{1}{2}\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\Big|_{\frac{11\pi}{12}}^{\pi} = \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{3}\right)$.

Vậy $P = 1$.

Câu 22: (THPT Chuyên Thái Bình-lần 4 năm 2017-2018) Một chiếc máy bay chuyển động trên đường băng với vận tốc $v\left(t\right) = t^2 + 10t\left(\text{m/s}\right)$ với t là thời gian được tính theo đơn vị giây kể từ khi máy bay bắt đầu chuyển động. Biết khi máy bay đạt vận tốc $200\left(\text{m/s}\right)$ thì nó rời đường băng. Quãng đường máy bay đã di chuyển trên đường băng là

A. $500\left(\text{m}\right)$. **B.** $2000\left(\text{m}\right)$. **C.** $\dfrac{4000}{3}\left(\text{m}\right)$. **D.** $\dfrac{2500}{3}\left(\text{m}\right)$.

Lời giải

Chọn D

- Thời điểm máy bay đạt vận tốc $200\left(\text{m/s}\right)$ là nghiệm của phương trình:

$$t^2+10t=200 \Leftrightarrow t^2+10t-200=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=10 \\ t=-20 \end{array}\right. \Rightarrow t=10\left(\text{s}\right).$$

- Quãng đường máy bay di chuyển trên đường băng là:

$$s=\int_0^{10}\left(t^2+10t\right)\text{d}t=\left.\left(\frac{t^3}{3}+5t^2\right)\right|_0^{10}=\frac{2500}{3}\left(\text{m}\right).$$

Câu 23: (THPT Chuyên Thái Bình-lần 4 năm 2017-2018) Gọi M, N là hai điểm di động trên đồ thị $\left(C\right)$ của hàm số $y=-x^3+3x^2-x+4$ sao cho tiếp tuyến của $\left(C\right)$ tại M và N luôn song song với nhau. Khi đó đường thẳng MN luôn đi qua điểm cố định nào dưới đây?

A. $\left(-1;5\right)$. **B.** $\left(1;-5\right)$. **C.** $\left(-1;-5\right)$. **D.** $\left(1;5\right)$.

Lời giải

Chọn D

* Gọi tọa độ điểm M, N lần lượt là $M\left(x_1;y_1\right)$, $N\left(x_2;y_2\right)$.

* Hệ số góc tiếp tuyến của $\left(C\right)$ tại M và N lần lượt là

$$k_1=y'\left(x_1\right)=-3{x_1}^2+6x_1-1;\ k_2=y'\left(x_2\right)=-3{x_2}^2+6x_2-1$$

* Để tiếp tuyến của $\left(C\right)$ tại M và N luôn song song với nhau điều kiện là

$$\begin{cases} k_1=k_2 \\ x_1\neq x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x_1-x_2\right)\left[-3\left(x_1+x_2\right)+6\right]=0 \\ x_1\neq x_2 \end{cases} \Leftrightarrow x_1+x_2=2.$$

* Ta có: $y_1+y_2=-\left(x_1+x_2\right)\left[\left(x_1+x_2\right)^2-3x_1x_2\right]+3\left[\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2\right]-\left(x_1+x_2\right)+8$

Do $x_1+x_2=2$ nên $y_1+y_2=-2\left(4-3x_1x_2\right)+3\left(4-2x_1x_2\right)+8=10$.

* Trung điểm của đoạn MN là $I\left(1;5\right)$. Vậy đường thẳng MN luôn đi qua điểm cố định $I\left(1;5\right)$.

Câu 24: (THPT Chuyên Hùng Vương-Phú Thọ-lần 2 năm 2017-2018) Biết $F\left(x\right)$ là nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$. Hỏi đồ thị của hàm số $y=F\left(x\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị trong khoảng $\left(0;\ 2018\pi\right)$?

A. 2019. **B.** 1. **C.** 2017. **D.** 2018.

Lời giải

Chọn C

Ta có $F'\left(x\right)=f\left(x\right)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$

$F'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x\cos x-\sin x=0$, $\left(x\neq 0\right)$ (1)

Ta thấy $\cos x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình nên $(1) \Leftrightarrow x = \tan x$ (2).

Xét $g(x) = x - \tan x$ trên $(0;\ 2018\pi) \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2} \right\}, k \in \mathbb{Z}^+$

có $g'(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 x} = -\tan^2 x \le 0,\ \forall (0;\ 2018\pi) \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2} \right\}, k \in \mathbb{Z}^+$.

+ Xét $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, ta có $g(x)$ nghịch biến nên $g(x) < g(0) = 0$ nên phương trình $x = \tan x$ vô nghiệm.

+ Vì hàm số $\tan x$ có chu kỳ tuần hoàn là π nên ta xét $g(x) = x - \tan x$, với $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Do đó $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ và $g(\pi).g\left(\frac{23}{16}\pi\right) < 0$ nên phương trình $x = \tan x$ có duy nhất một nghiệm x_0.

Do đó, $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{4035}{2}\pi\right)$ có 2017 khoảng rời nhau có độ dài bằng π. Suy ra phương trình $x = \tan x$ có 2017 nghiệm trên $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{4035}{2}\pi\right)$.

+ Xét $x \in \left(\frac{4035\pi}{2}; 2018\pi\right)$, ta có $g(x)$ nghịch biến nên $g(x) > g(2018\pi) = 2018\pi$ nên phương trình $x = \tan x$ vô nghiệm.

Vậy phương trình $F'(x) = 0$ có 2017 nghiệm trên $(0;\ 2018\pi)$. Do đó đồ thị hàm số $y = F(x)$ có 2017 điểm cực trị trong khoảng $(0;\ 2018\pi)$.

Câu 25: (SGD Hà Nội-lần 11 năm 2017-2018) Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm lẻ và liên tục trên $[-4;4]$ biết $\int\limits_{-2}^{0} f(-x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_{1}^{2} f(-2x)\mathrm{d}x = 4$. Tính $I = \int\limits_{0}^{4} f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I = -10$. **B.** $I = -6$. **C.** $I = 6$. **D.** $I = 10$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Sử dụng công thức: $\int\limits_{x_1}^{x_2} f(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int\limits_{x_1}^{x_2} f(ax)\mathrm{d}x$ và tính chất $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$ với $f(x)$ là hàm số lẻ trên đoạn $[-a;a]$.

Áp dụng, ta có:

- $4 = \int\limits_{1}^{2} f(-2x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_{-2}^{-4} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-4}^{-2} f(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_{-4}^{-2} f(x)\mathrm{d}x = 8$.
- $2 = \int\limits_{-2}^{0} f(-x)\mathrm{d}x = -\int_{2}^{0} f(x) = \int_{0}^{2} f(x) \Leftrightarrow \int_{0}^{2} f(x) = 2$

Suy ra: $0 = \int_{-4}^{4} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-4}^{-2} f(x)\mathrm{d}x + \int_{-2}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{4} f(x)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow 0 = 8 + \left(\int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x - \int_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x\right) + I \Leftrightarrow 0 = 8 + (0-2) + I \Leftrightarrow I = -6$.

Cách 2: Xét tích phân $\int_{-2}^{0} f(-x)\,dx = 2$.

Đặt $-x = t \Rightarrow dx = -dt$.

Đổi cận: khi $x = -2$ thì $t = 2$; khi $x = 0$ thì $t = 0$ do đó

$\int_{-2}^{0} f(-x)\,dx = -\int_{2}^{0} f(t)\,dt = \int_{0}^{2} f(t)\,dt \Rightarrow \int_{0}^{2} f(t)\,dt = 2 \Rightarrow \int_{0}^{2} f(x)\,dx = 2$.

Do hàm số $y = f(x)$ là hàm số lẻ nên $f(-2x) = -f(2x)$.

Do đó $\int_{1}^{2} f(-2x)\,dx = -\int_{1}^{2} f(2x)\,dx \Rightarrow \int_{1}^{2} f(2x)\,dx = -4$.

Xét $\int_{1}^{2} f(2x)\,dx$.

Đặt $2x = t \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dt$.

Đổi cận: khi $x = 1$ thì $t = 2$; khi $x = 2$ thì $t = 4$ do đó $\int_{1}^{2} f(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{2}^{4} f(t)\,dt = -4$

$\Rightarrow \int_{2}^{4} f(t)\,dt = -8 \Rightarrow \int_{2}^{4} f(x)\,dx = -8$.

Do $I = \int_{0}^{4} f(x)\,dx = \int_{0}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{4} f(x)\,dx = 2 - 8 = -6$.

Câu 26: (THPT Lục Ngạn-Bắc Giang-lần 1 năm 2017-2018) Cho parabol $(P): y = x^2 + 2$ và hai tiếp tuyến của (P) tại các điểm $M(-1;3)$ và $N(2;6)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và hai tiếp tuyến đó bằng

A. $\frac{9}{4}$. **B.** $\frac{13}{4}$. **C.** $\frac{7}{4}$. **D.** $\frac{21}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình tiếp tuyến tại $M(-1;3)$ là $d_1: y = -2x + 1$.

Phương trình tiếp tuyến tại $N(2;6)$ là $d_2: y = 4x - 2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của d_1 và d_2: $-2x + 1 = 4x - 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Vậy $S = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \left|x^2 + 2 + 2x - 1\right|dx + \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left|x^2 + 2 - 4x + 2\right|dx = \frac{9}{4}$.

Câu 27: (THPT Lục Ngạn-Bắc Giang-lần 1 năm 2017-2018) Bổ dọc một quả dưa hấu ta được thiết diện là hình elip có trục lớn $28\,\text{cm}$, trục nhỏ $25\,\text{cm}$. Biết cứ $1000\,\text{cm}^3$ dưa hấu sẽ làm được cốc sinh tố giá 20000 đồng. Hỏi từ quả dưa hấu trên có thể thu được bao nhiêu tiền từ việc bán nước sinh tố? Biết rằng bề dày vỏ dưa không đáng kể.

A. 183000 đồng. **B.** 180000 đồng. **C.** 185000 đồng. **D.** 190000 đồng.

Lời giải

Chọn A

Đường elip có trục lớn 28cm, trục nhỏ 25cm có phương trình

$$\frac{x^2}{14^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{25}{2}\right)^2}=1 \Leftrightarrow y^2=\left(\frac{25}{2}\right)^2\left(1-\frac{x^2}{14^2}\right) \Leftrightarrow y=\pm\frac{25}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{14^2}}.$$

Do đó thể tích quả dưa là $V=\pi\int_{-14}^{14}\left(\frac{25}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{14^2}}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{25}{2}\right)^2\int_{-14}^{14}\left(1-\frac{x^2}{14^2}\right)^2\mathrm{d}x$

$$=\pi\left(\frac{25}{2}\right)^2\cdot\left(x-\frac{x^3}{3.14^2}\right)\Bigg|_{-14}^{14}=\pi\left(\frac{25}{2}\right)^2\cdot\frac{56}{3}=\frac{8750\pi}{3}\text{cm}^3.$$

Do đó tiền bán nước thu được là $\dfrac{8750\pi.20000}{3.1000}\approx 183259$ đồng.

Câu 28: (THPT Lục Ngạn-Bắc Giang-lần 1 năm 2017-2018) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{3}{3x-1}$, $f(0)=1$ và $f\left(\frac{2}{3}\right)=2$. Giá trị của biểu thức $f(-1)+f(3)$ bằng

A. $5\ln 2+3$. **B.** $5\ln 2-2$. **C.** $5\ln 2+4$. **D.** $5\ln 2+2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\frac{3}{3x-1}\mathrm{d}x=\ln|3x-1|+C=\begin{cases}\ln(-3x+1)+C & \left(\text{khi } x<\frac{1}{3}\right)\\ \ln(3x-1)+C & \left(\text{khi } x>\frac{1}{3}\right)\end{cases}$.

$f(0)=1\Rightarrow \ln(-3.0+1)+C=1\Leftrightarrow C=1; f(-1)=\ln(3+1)+1=2\ln 2+1$.

$f\left(\frac{2}{3}\right)=2\Rightarrow \ln(2-1)+C=2\Leftrightarrow C=2; f(3)=\ln(9-1)+2=2\ln 2+2$.

Vậy: $f(-1)+f(3)=2\ln 2+1+2\ln 2+2=5\ln 2+3$.

Câu 29: (THPT Lục Ngạn-Bắc Giang-lần 1 năm 2017-2018) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(4-x)=f(x)$. Biết $\int_1^3 xf(x)\mathrm{d}x=5$. Tính $I=\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{5}{2}$. **B.** $I=\frac{7}{2}$. **C.** $I=\frac{9}{2}$. **D.** $I=\frac{11}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Dùng tính chất để tính nhanh

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và thỏa mãn điều kiện $f(a+b-x)=f(x),\forall x[a;b]$. Khi đó $\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x=\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

Chứng minh:

Đặt $t=a+b-x\Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$, với $x\in[a;b]$. Đổi cận: khi $x=a\Rightarrow t=b$; khi $x=b\Rightarrow t=b$

Ta có $\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x = \int_a^b xf(a+b-x)\mathrm{d}x = -\int_b^a (a+b-t)f(t)\mathrm{d}t$

$= \int_a^b (a+b-t)f(t)\mathrm{d}t = (a+b)\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - \int_a^b tf(t)\mathrm{d}t = (a+b)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow 2\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x = (a+b)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \Rightarrow \boxed{\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}$.

Áp dụng tính chất trên với $a=1$, $b=3$.

$f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và thỏa mãn $f(1+3-x)=f(x)$.

Khi đó $\int_1^3 xf(x)\mathrm{d}x = \frac{1+3}{4}\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x \Rightarrow \int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = \frac{5}{2}$.

Cách 2: Đổi biến trực tiếp:

Đặt $t=4-x$, với $x\in[1;3]$.

Ta có $\int_1^3 xf(x)\mathrm{d}x = \int_1^3 xf(4-x)\mathrm{d}x = \int_1^3 (4-t)f(t)\mathrm{d}t = 4\int_1^3 f(t)\mathrm{d}t - \int_1^3 t.f(t)\mathrm{d}t$

$\Rightarrow 5 = 4\int_1^3 f(t)\mathrm{d}t - 5 \Rightarrow \int_1^3 f(t)\mathrm{d}t = \frac{5}{2}$.

Câu 30: (THTT số 6-489 tháng 3 năm 2018) Biết $\int_0^1 \frac{x^3+2x^2+3}{x+2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a} + b\ln\frac{3}{2}$ $(a,b>0)$ tìm các giá trị của k để $\int_8^{ab}\mathrm{d}x < \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(k^2+1)x+2017}{x+2018}$.

A. $k<0$. **B.** $k\neq 0$. **C.** $k>0$. **D.** $k\in\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int_0^1 \frac{x^3+2x^2+3}{x+2}\mathrm{d}x = \int_0^1\left(x^2+\frac{3}{x+2}\right)\mathrm{d}x = \left.\frac{1}{3}x^3+3\ln|x+2|\right|_0^1 = \frac{1}{3}+3\ln\frac{3}{2}$

$\Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow \int_8^{ab}\mathrm{d}x = \int_8^9 \mathrm{d}x = 1$

Mà $\int_8^{ab}\mathrm{d}x < \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(k^2+1)x+2017}{x+2018} \Rightarrow 1 < \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(k^2+1)x+2017}{x+2018}$

Mặt khác ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(k^2+1)x+2017}{x+2018} = k^2+1$.

Vậy để $\int_8^{ab}\mathrm{d}x < \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(k^2+1)x+2017}{x+2018}$ thì $1<k^2+1 \Rightarrow k^2>0 \Rightarrow k\neq 0$.

Câu 31: (THTT số 6-489 tháng 3 năm 2018) Giả sử a, b, c là các số nguyên thỏa mãn $\int_0^4 \frac{2x^2+4x+1}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^3 (au^4+bu^2+c)\mathrm{d}u$, trong đó $u=\sqrt{2x+1}$. Tính giá trị $S=a+b+c$.

A. $S=3$. **B.** $S=0$. **C.** $S=1$. **D.** $S=2$.

Lời giải

Chọn D

$$u=\sqrt{2x+1}\Rightarrow u^2=2x+1\Rightarrow\begin{cases}u\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ x=\dfrac{u^2-1}{2}\end{cases}$$

Khi đó $\int\limits_0^4\frac{2x^2+4x+1}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x=\int\limits_1^3\frac{2\left(\frac{u^2-1}{2}\right)^2+4\left(\frac{u^2-1}{2}\right)+1}{u}u.\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int\limits_1^3\left(u^4+2u^2-1\right).\mathrm{d}u$

Vậy $S=a+b+c=1+2-1=2$.

Câu 32: (THTT số 6-489 tháng 3 năm 2018) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ thỏa mãn

$f'(x)=\frac{1}{x-1}$, $f(0)=2017$, $f(2)=2018$. Tính $S=f(3)-f(-1)$.

A. $S=1$. **B.** $S=\ln 2$. **C.** $S=\ln 4035$. **D.** $S=4$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x=\ln(|x-1|)+C$.

Theo giả thiết $f(0)=2017$, $f(2)=2018$ nên $\begin{cases}f(x)=\ln(|x-1|)+2017 & \text{khi } x<1\\ f(x)=\ln(|x-1|)+2018 & \text{khi } x>1\end{cases}$.

Do đó $S=f(3)-f(-1)=\ln 2+2018-\ln 2-2017=1$.

Câu 33: (THTT số 6-489 tháng 3 năm 2018) Biết luôn có hai số a và b để $F(x)=\frac{ax+b}{x+4}$ $(4a-b\neq 0)$

là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn: $2f^2(x)=[F(x)-1]f'(x)$.

Khẳng định nào dưới đây đúng và đầy đủ nhất?

A. $a=1$, $b=4$. **B.** $a=1$, $b=-1$. **C.** $a=1$, $b\in\mathbb{R}\setminus\{4\}$. **D.** $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $F(x)=\frac{ax+b}{x+4}$ là nguyên hàm của $f(x)$ nên $f(x)=F'(x)=\frac{4a-b}{(x+4)^2}$ và

$f'(x)=\frac{2b-8a}{(x+4)^3}$.

Do đó: $2f^2(x)=(F(x)-1)f'(x)\Leftrightarrow\frac{2(4a-b)^2}{(x+4)^4}=\left(\frac{ax+b}{x+4}-1\right)\frac{2b-8a}{(x+4)^3}$

$\Leftrightarrow 4a-b=-(ax+b-x-4)\Leftrightarrow(x+4)(1-a)=0\Leftrightarrow a=1$ (do $x+4\neq 0$)

Với $a=1$ mà $4a-b\neq 0$ nên $b\neq 4$.

Vậy $a=1$, $b\in\mathbb{R}\setminus\{4\}$.

Chú ý: Ta có thể làm trắc nghiệm như sau:

+ Vì $4a-b\neq 0$ nên loại được ngay phương án A: $a=1$, $b=4$ và phương án D: $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$.

+ Để kiểm tra hai phương án còn lại, ta lấy $b=0$, $a=1$. Khi đó, ta có

$F(x)=\frac{x}{x+4}$, $f(x)=\frac{4}{(x+4)^2}$, $f'(x)=-\frac{8}{(x+4)^3}$.

Thay vào $2f^2(x)=(F(x)-1)f'(x)$ thấy đúng nên Chọn C

Câu 34: (THPT Nguyễn Trãi-Đà Nẵng-lần 1 năm 2017-2018) Tính tích phân $\int_1^5 \frac{dx}{x\sqrt{3x+1}}$ được kết quả $I=a\ln 3+b\ln 5$. Giá trị $a^2+ab+3b^2$ là

A. 4. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\sqrt{3x+1}\Rightarrow t^2=3x+1\Rightarrow x=\frac{t^2-1}{3}\Rightarrow dx=\frac{2tdt}{3}$.

Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=2$; $x=5\Rightarrow t=4$.

Khi đó

$I=\int_2^4 \frac{2}{t^2-1}dt=\int_2^4\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_2^4=2\ln 3-\ln 5$. Suy ra $\begin{cases}a=2\\b=-1\end{cases}$.

Do đó $a^2+ab+3b^2=5$.

Câu 35: (THPT Lê Xoay-Vĩnh phúc-lần 1 năm 2017-2018) Cho tích phân $I=\int_0^4 \frac{dx}{3+\sqrt{2x+1}}=a+b\ln\frac{2}{3}$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a-b=3$. **B.** $a-b=5$. **C.** $a+b=5$. **D.** $a+b=3$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\sqrt{2x+1}\Rightarrow t^2=2x+1\Rightarrow dx=tdt$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$; $x=4\Rightarrow t=3$

Khi đó $I=\int_0^4\frac{dx}{3+\sqrt{2x+1}}=\int_1^3\frac{tdt}{3+t}=\int_1^3\left(1-\frac{3}{t+3}\right)dt=\left(t-3\ln|t+3|\right)\Big|_1^3=2+3\ln\frac{2}{3}$

Do đó $a+b=5$.

Câu 36: (THPT Lê Xoay-Vĩnh phúc-lần 1 năm 2017-2018) Giả sử $S=(a,b]$ là tập nghiệm của bất phương trình $5x+\sqrt{6x^2+x^3-x^4}\log_2 x>(x^2-x)\log_2 x+5+5\sqrt{6+x-x^2}$. Khi đó $b-a$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{7}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $\begin{cases}x>0\\6+x-x^2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\-2\le x\le 3\end{cases}$. $D=(0;3]$.

$5x+\sqrt{6x^2+x^3-x^4}\log_2 x>(x^2-x)\log_2 x+5+5\sqrt{6+x-x^2}$

$\Leftrightarrow 5x+x\sqrt{6+x-x^2}\log_2 x>x(x-1)\log_2 x+5+5\sqrt{6+x-x^2}$

$\Leftrightarrow (x-1)(5-x\log_2 x)+\sqrt{6+x-x^2}(x\log_2 x-5)>0$

$\Leftrightarrow (5-x\log_2 x)\left(x-1-\sqrt{6+x-x^2}\right)>0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}5-x\log_2 x>0\\ x-1-\sqrt{6+x-x^2}>0\end{cases}(I)\\ \begin{cases}5-x\log_2 x<0\\ x-1-\sqrt{6+x-x^2}<0\end{cases}(II)\end{array}\right..$$

□ Giải hệ (I).

$$\begin{cases}5-x\log_2 x>0(1)\\ x-1-\sqrt{6+x-x^2}>0(2)\end{cases}$$

Giải (1) $5-x\log_2 x>0$.

Xét hàm số $f(x)=x\left(\dfrac{5}{x}-\log_2 x\right)=xg(x)$ với $x\in(0;3]$

Ta có $g'(x)=-\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{1}{x\ln 2}<0\forall x\in(0;3]$.

Lập bảng biến thiên

x	0	3
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	$\searrow$	$\dfrac{5}{3}-\log_2 3\approx 0,08$

Vậy $f(x)=x\left(\dfrac{5}{x}-\log_2 x\right)>0\forall x\in(0;3]$.

Xét bất phương trình (2): $\sqrt{6+x-x^2}<x-1\Leftrightarrow\begin{cases}6+x-x^2<(x-1)^2\\ x>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2-3x-5>0\\ x>1\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x<-1\\ x>\dfrac{5}{2}\end{array}\right.\\ x>1\end{cases}\Leftrightarrow x>\frac{5}{2}.$$

Vậy nghiệm của hệ (I) là $D=\left(\dfrac{5}{2};3\right]$.

□ Hệ (II) vô nghiệm.

Vậy $S=\left(\dfrac{5}{2},3\right]$.

$b-a=3-\dfrac{5}{2}=\dfrac{1}{2}$.

Câu 37: (THPT Chuyên Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Biết $\displaystyle\int_0^1\frac{2x^2+3x+3}{x^2+2x+1}\mathrm{d}x=a-\ln b$ với a, b là các số nguyên dương. Tính $P=a^2+b^2$.

A. 13. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 10.

Lời giải

Chọn A

Ta có $I=\int\limits_0^1 \frac{2x^2+3x+3}{x^2+2x+1}\mathrm{d}x$

Đặt $t=x+1 \Rightarrow \begin{cases}\mathrm{d}t=\mathrm{d}x\\ x=t-1\end{cases}$ suy ra $\begin{cases}x=0 \leftrightarrow t=1\\ x=1 \leftrightarrow t=2\end{cases}$

Khi đó

$I=\int\limits_1^2 \frac{2(t-1)^2+3(t-1)+3}{t^2}\mathrm{d}t=\int\limits_1^2 \frac{2t^2-t+2}{t^2}\mathrm{d}t=\int\limits_1^2\left(2-\frac{1}{t}+\frac{2}{t^2}\right)\mathrm{d}t=\left(2t-\ln t-\frac{2}{t}\right)\Big|_1^2=3-\ln 2$.

Suy ra $P=3^2+2^2=13$.

Câu 38: (THPT Chuyên Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Cho $I=\int\limits_0^m (2x-1)\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để $I<m$ là khoảng $(a;b)$. Tính $P=a-3b$.

A. $P=-3$. **B.** $P=-2$. **C.** $P=-4$. **D.** $P=-1$.

Lời giải

Chọn A

$I=\int\limits_0^m (2x-1)\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases}u=2x-1\\ \mathrm{d}v=\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\mathrm{d}u=2\mathrm{d}x\\ v=\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\end{cases}$.

$I=\int\limits_0^m (2x-1)\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\frac{(2x-1)\mathrm{e}^{2x}}{2}\Big|_0^m-\int\limits_0^m \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\frac{(2m-1)\mathrm{e}^{2m}}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\Big|_0^m=m\mathrm{e}^m-\mathrm{e}^{2m}+1$

$I<m \Leftrightarrow m\mathrm{e}^{2m}-\mathrm{e}^{2m}+1<m \Leftrightarrow (m-1)\left(\mathrm{e}^{2m}-1\right)<0 \Leftrightarrow 0<m<1$.

Suy ra $a=0, b=1 \Rightarrow a-3b=-3$.

Câu 39: (THPT Chuyên Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $x+y-2=0$; $y=\sqrt{x}$; $y=0$ quay quanh trục Ox bằng

A. $\frac{5}{6}$. **B.** $\frac{6\pi}{5}$. **C.** $\frac{2\pi}{3}$. **D.** $\frac{5\pi}{6}$.

Lời giải

Chọn D

Hình phẳng đã cho được chia làm 2 phần sau:

Phần 1: Hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}$; $y=0$; $x=0$; $x=1$.

Khi quay trục Ox phần 1 ta được khối tròn xoay có thể tích $V_1=\pi\int\limits_0^1 x\,\mathrm{d}x=\pi.\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}$.

Phần 2: Hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2-x$; $y=0$; $x=1$; $x=2$.

Khi quay trục Ox phần 2 ta được khối tròn xoay có thể tích

$V_2=\pi\int\limits_1^2 (2-x)^2\,\mathrm{d}x=\pi.\frac{(x-2)^3}{3}\Big|_1^2=\frac{\pi}{3}$.

Vậy thể tích khối tròn xoay cần tính là $V = V_1 + V_2 = \dfrac{5\pi}{6}$.

Câu 40: (THPT Chuyên Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $2f(2x) + f(1-2x) = 12x^2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1 là

A. $y = 2x + 2$. **B.** $y = 4x - 6$. **C.** $y = 2x - 6$. **D.** $y = 4x - 2$.

Lời giải

Chọn D

Từ $2f(2x) + f(1-2x) = 12x^2$ (*), cho $x = 0$ và $x = \dfrac{1}{2}$ ta được $\begin{cases} 2f(0) + f(1) = 0 \\ f(0) + 2f(1) = 3 \end{cases} \Rightarrow f(1) = 2$

Lấy đạo hàm hai vế của (*) ta được $4f'(2x) - 2f'(1-2x) = 24x$, cho $x = 0$ và $x = \dfrac{1}{2}$ ta được

$\begin{cases} 4f'(0) - 2f'(1) = 0 \\ 4f'(1) - 2f'(0) = 12 \end{cases} \Rightarrow f'(1) = 4$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x = 1$ là

$y = f'(1)(x-1) + f(1) \Leftrightarrow y = 4(x-1) + 2 \Leftrightarrow y = 4x - 2$.

Câu 41: (THPT Chuyên Hạ Long-Quãng Ninh lần 2 năm 2017-2018) Biết $\displaystyle\int_1^2 \frac{x+1}{x^2 + x\ln x}\,\mathrm{d}x = \ln(\ln a + b)$ với a, b là các số nguyên dương. Tính $P = a^2 + b^2 + ab$.

A. 10. **B.** 8. **C.** 12. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\displaystyle\int_1^2 \frac{x+1}{x^2 + x\ln x}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{x+1}{x(x + \ln x)}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = x + \ln x \Rightarrow \mathrm{d}t = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \dfrac{x+1}{x}\mathrm{d}x$.

Khi $x = 1 \Rightarrow t = 1$; $x = 2 \Rightarrow t = 2 + \ln 2$.

Khi đó $I = \displaystyle\int_1^{2+\ln 2} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t|\Big|_1^{2+\ln 2} = \ln(\ln 2 + 2)$. Suy ra $\begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}$.

Vậy $P = 8$.

Câu 42: (THPT Chuyên Phan Bội Châu-lần 2 năm 2017-2018) Hàm số $f(x) = \dfrac{7\cos x - 4\sin x}{\cos x + \sin x}$ có một nguyên hàm $F(x)$ thỏa mãn $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{3\pi}{8}$. Giá trị $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ bằng?

A. $\dfrac{3\pi - 11\ln 2}{4}$. **B.** $\dfrac{3\pi}{4}$. **C.** $\dfrac{3\pi}{8}$. **D.** $\dfrac{3\pi - \ln 2}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x)=\dfrac{\frac{3}{2}(\sin x+\cos x)+\frac{11}{2}(-\sin x+\cos x)}{\cos x+\sin x}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{11}{2}.\dfrac{-\sin x+\cos x}{\cos x+\sin x}$

$\Rightarrow F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{11}{2}.\dfrac{-\sin x+\cos x}{\cos x+\sin x}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{3}{2}x+\int\dfrac{11}{2}.\dfrac{-\sin x+\cos x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x$

$=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{11}{2}\int\dfrac{1}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}(\cos x+\sin x)=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{11}{2}\ln|\cos x+\sin x|+C$.

Mà $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{3\pi}{8}\Rightarrow\dfrac{3\pi}{8}+\dfrac{11}{2}\ln\sqrt{2}+C=\dfrac{3\pi}{8}\Rightarrow C=-\dfrac{11}{4}\ln 2$

Do đó $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{3\pi}{4}+C=\dfrac{3\pi}{4}-\dfrac{11}{4}\ln 2$.

Câu 43: **(THPT Chuyên Hùng Vương-Gia Lai-lần 1 năm 2017-2018)** Giả sử $\int\dfrac{(2x+3)\mathrm{d}x}{x(x+1)(x+2)(x+3)+1}=-\dfrac{1}{g(x)}+C$ (C là hằng số).

Tính tổng các nghiệm của phương trình $g(x)=0$.

A. -1. **B.** 1. **C.** 3. **D.** -3.

Lời giải

Chọn D

Ta có $x(x+1)(x+2)(x+3)+1=(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1=\left[(x^2+3x)+1\right]^2$.

Đặt $t=x^2+3x$, khi đó $\mathrm{d}t=(2x+3)\mathrm{d}x$.

Tích phân ban đầu trở thành $\int\dfrac{\mathrm{d}t}{(t+1)^2}=-\dfrac{1}{t+1}+C$.

Trở lại biến x, ta có $\int\dfrac{(2x+3)\mathrm{d}x}{x(x+1)(x+2)(x+3)+1}=-\dfrac{1}{x^2+3x+1}+C$.

Vậy $g(x)=x^2+3x+1$.

$g(x)=0\Leftrightarrow x^2+3x+1=0\Leftrightarrow x=\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$ hoặc $x=\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$.

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình bằng -3.

Câu 44: **(THPT Chuyên Hùng Vương-Gia Lai-lần 1 năm 2017-2018)** Giá trị $I=\int\limits_{\frac{1}{\sqrt[3]{6}}}^{\frac{9}{\sqrt[3]{4}}}x^2\sin(\pi x^3)e^{\cos(\pi x^3)}\mathrm{d}x$

gần bằng số nào nhất trong các số sau đây:

A. $0,046$. **B.** $0,036$. **C.** $0,037$. **D.** $0,038$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $u=\cos(\pi x^3)\Rightarrow\mathrm{d}u=-3\pi x^2\sin(\pi x^3)\mathrm{d}x\Rightarrow x^2\sin(\pi x^3)\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{3\pi}\mathrm{d}u$.

Khi $x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{6}}$ thì $u=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Khi $x=\dfrac{9}{\sqrt[3]{4}}$ thì $u=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $I=-\dfrac{1}{3\pi}\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u=\dfrac{1}{3\pi}\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u=\dfrac{1}{3\pi}\mathrm{e}^u\Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{1}{3\pi}\left(\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}-\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)\approx 0,037$.

Câu 45: (THPT Chuyên Trần Phú-Hải Phòng-lần 2 năm 2017-2018) Dòng điện xoay chiều hình sin chạy qua mạch dao động LC lí tưởng có phương trình $i=I_0\sin\left(wt+\dfrac{\pi}{2}\right)$. Ngoài ra $i=q'(t)$ với q là điện tích tức thời trong tụ. Tính từ lúc $t=0$, điện lượng chuyển qua tiết diện thẳng của dây dẫn của mạch trong thời gian $\dfrac{\pi}{2w}$ là

A. $\dfrac{\pi I_0}{w\sqrt{2}}$. **B.** 0. **C.** $\dfrac{\pi\sqrt{2}I_0}{w}$. **D.** $\dfrac{I_0}{w}$.

Lời giải

Chọn D

Tính từ lúc $t=0$, điện lượng chuyển qua tiết diện thẳng của dây dẫn của mạch trong thời gian $\dfrac{\pi}{2w}$ là

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2w}} I_0\sin\left(wt+\frac{\pi}{2}\right)dt=-\frac{I_0}{w}\cos\left(wt+\frac{\pi}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2w}}$$

$$=-\frac{I_0}{w}\left[\cos\left(w.\frac{\pi}{2w}+\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(w.0+\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$=-\frac{I_0}{w}\left[\cos(\pi)-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{I_0}{w}.$$

Câu 46: (THPT Chuyên Trần Phú-Hải Phòng-lần 2 năm 2017-2018) Tích phân $\displaystyle\int_0^{\pi}(3x+2)\cos^2 x\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{3}{4}\pi^2-\pi$. **B.** $\dfrac{3}{4}\pi^2+\pi$. **C.** $\dfrac{1}{4}\pi^2+\pi$. **D.** $\dfrac{1}{4}\pi^2-\pi$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $I=\displaystyle\int_0^{\pi}(3x+2)\cos^2 x\,\mathrm{d}x$. Ta có:

□ $I=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi}(3x+2)(1+\cos 2x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\left[\int_0^{\pi}(3x+2)\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}(3x+2)\cos 2x\,\mathrm{d}x\right]=\dfrac{1}{2}(I_1+I_2)$.

□ $I_1=\displaystyle\int_0^{\pi}(3x+2)\mathrm{d}x=\left(\frac{3}{2}x^2+2x\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{3}{2}\pi^2+2\pi$.

□ $I_2=\displaystyle\int_0^{\pi}(3x+2)\cos 2x\,\mathrm{d}x$. Dùng tích phân từng phần

Đặt $\begin{cases}u=3x+2\\ \mathrm{d}v=\cos 2x\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=3\,\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{1}{2}\sin 2x\end{cases}$.

Khi đó $I_2=\frac{1}{2}(3x+2)\sin 2x\Big|_0^{\pi}-\frac{3}{2}\int_0^{\pi}\sin 2x\,\mathrm{d}x=0+\frac{3}{4}(\cos 2x)\Big|_0^{\pi}=0$.

□ Vậy $I=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\pi^2+2\pi\right)=\frac{3}{4}\pi^2+\pi$.

Câu 47: (THPT Chuyên Trần Phú-Hải Phòng-lần 2 năm 2017-2018) Thể tích vật thể tròn xoay sinh ra khi hình phẳng giới hạn bởi các đường $x=\sqrt{y}$, $y=-x+2$ và $x=0$ quay quanh trục Ox có giá trị là kết quả nào sau đây?

A. $V=\frac{1}{3}\pi$. **B.** $V=\frac{3}{2}\pi$. **C.** $V=\frac{32}{15}\pi$. **D.** $V=\frac{11}{6}\pi$.

Lời giải

Chọn C

Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường: $\begin{cases}x=\sqrt{y}\\ y=-x+2\\ x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x^2\ (x\ge 0)\\ y=-x+2\\ x=0\end{cases}$

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2=-x+2\Leftrightarrow x^2+x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\ (nhaän)\\ x=-2\ (loaïi)\end{array}\right.$

Thể tích vật tròn xoay sinh ra khi hình (H) quay quanh trục Ox là:

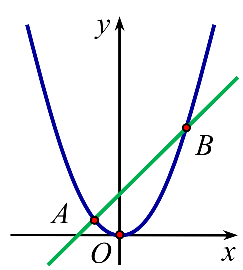
$$V=\pi\int_0^1\left((-x+2)^2-\left(x^2\right)^2\right)\mathrm{d}x=\pi\int_0^1\left(x^2-4x+4-x^4\right)\mathrm{d}x=\frac{32}{15}\pi\ \text{(đvtt)}$$

Câu 48: (PTNK-ĐHQG TP HCM-lần 1 năm 2017-2018) Cho Parabol $(P): y=x^2$ và hai điểm A, B thuộc (P) sao cho $AB=2$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng AB đạt giá trị lớn nhất bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Cách 1: Gọi $A(a;a^2)$, $B(b;b^2)$ với $a<b$.

Ta có: $AB=2\Leftrightarrow(b-a)^2+\left(b^2-a^2\right)^2=4$

$AB:\frac{x-a}{b-a}=\frac{y-a^2}{b^2-a^2}\Leftrightarrow\frac{x-a}{1}=\frac{y-a^2}{b+a}$

$\Leftrightarrow y=(a+b)(x-a)+a^2\Leftrightarrow y=(a+b)x-ab$

$$S=\int_a^b\left((a+b)x-ab-x^2\right)\mathrm{d}x=\int_a^b(x-a)(b-x)\mathrm{d}x$$

Đặt $t = x - a$. Suy ra:

$$S = \int_0^{b-a} t(b-a-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{b-a} \left((b-a)t - t^2\right)\mathrm{d}t = \left.\frac{(b-a)t^2}{2}\right|_0^{b-a} - \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^{b-a} = \frac{(b-a)^3}{6}$$

Ta có:

$$(b-a)^2 + \left(b^2 - a^2\right)^2 = 4 \Leftrightarrow (b-a)^2\left(1 + (b+a)^2\right) = 4 \Leftrightarrow (b-a)^2 = \frac{4}{1+(a+b)^2} \le 4$$

Suy ra: $b - a \le 2 \Rightarrow S = \dfrac{(b-a)^3}{6} \le \dfrac{2^3}{6} = \dfrac{4}{3}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a+b=0 \\ b-a=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=-1 \end{cases} \Leftrightarrow A(-1;1);\ B(1;1)$.

Vậy giá trị lớn nhất của AB bằng $\dfrac{4}{3}$.

Chú ý: Khi làm trắc nghiệm ta có thể dự đoán (linh cảm :D) a, b đối nhau, nghĩa là: $a + b = 0$. Từ đó, thay vào $(b-a)^2 + \left(b^2 - a^2\right)^2 = 4$, tìm được $a = -1$, $b = 1$. Suy ra: $A(-1;1)$; $B(1;1)$.

Viết phương trình: $AB: y = 1$. Từ đó: $S = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{4}{3}$.

Hoặc cũng linh cảm, đặc biệt hóa AB song song với Ox, từ đó cũng tìm được $a + b = 0$.

Cách 2: Sử dụng công thức diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(P): y = ax^2 + bx + c$ và $(d): y = mx + n$.

Đầu tiên ta lập phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d):

$$ax^2 + bx + c = mx + n \Leftrightarrow ax^2 + (b-m)x + c - n = 0.$$

Khi đó diện tích hình phẳng là: $S^2 = \dfrac{\Delta^3}{36a^4}$, với $\Delta = (b-m)^2 - 4a(c-n)$.

Áp dụng:

Tương tự, ta có $(AB): y = (a+b)x - ab$, $a < b$.

PTHĐGĐ: $x^2 = (a+b)x - ab \Leftrightarrow x^2 - (a+b)x + ab = 0$, có $\Delta = (b-a)^2$.

Suy ra: $S^2 = \dfrac{\Delta^3}{36} = \dfrac{(b-a)^6}{36} \Rightarrow S = \dfrac{(b-a)^3}{6}$ và đánh giá như cách 1.

Câu 49: (SGD Phú Thọ – lần 1 - năm 2017 – 2018) Biết $F(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)\sqrt{2x-3}$ $(a,\ b,\ c \in \mathbb{Z})$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{20x^2 - 30x + 11}{\sqrt{2x-3}}$ trên khoảng $\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$. Tính $T = a + b + c$.

A. $T = 8$. **B.** $T = 5$. **C.** $T = 6$. **D.** $T = 7$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $F'(x) = f(x)$.

Tính $F'(x) = (2ax + b)\sqrt{2x-3} + \left(ax^2 + bx + c\right).\dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}$

$$= \frac{(2ax+b)(2x-3) + ax^2 + bx + c}{\sqrt{2x-3}} = \frac{5ax^2 + (3b-6a)x - 3b + c}{\sqrt{2x-3}}.$$

Do đó $\frac{5ax^2+(3b-6a)x-3b+c}{\sqrt{2x-3}}=\frac{20x^2-30x+11}{\sqrt{2x-3}}$

$\Rightarrow 5ax^2+(3b-6a)x-3b+c=20x^2-30x+11$

$\Rightarrow \begin{cases}5a=20\\3b-6a=-30\\-3b+c=11\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}a=4\\b=-2\\c=5\end{cases}\Rightarrow T=7$.

Câu 50: (SGD Phú Thọ – lần 1 - năm 2017 – 2018) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{2}{x^2-1}$, $f(-2)+f(2)=0$ và $f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=2$. Tính $f(-3)+f(0)+f(4)$ được kết quả

A. $\ln\frac{6}{5}+1$. **B.** $\ln\frac{6}{5}-1$. **C.** $\ln\frac{4}{5}+1$. **D.** $\ln\frac{4}{5}-1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x)=\int f'(x)\,\mathrm{d}x=\int\frac{2}{x^2-1}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\begin{cases}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C_1 \text{ khi } x<-1\\ \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C_2 \text{ khi } -1<x<1\\ \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C_3 \text{ khi } x>1\end{cases}$.

Khi đó $\begin{cases}f(-2)+f(2)=0\\ f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\ln 3+C_1+\ln\frac{1}{3}+C_3=0\\ \ln 3+C_2+\ln\frac{1}{3}+C_2=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1+C_3=0\\C_2=1\end{cases}$

Do đó $f(-3)+f(0)+f(4)=\ln 2+C_1+C_2+\ln\frac{3}{5}+C_3=\ln\frac{6}{5}+1$.

Câu 51: (SGD Phú Thọ – lần 1 - năm 2017 – 2018) Biết $\int_0^4\frac{\sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x}{2x+3\sqrt{2x+1}+3}=a+b\ln 2+c\ln\frac{5}{3}\ (a,b,c\in\mathbb{Z})$. Tính $T=2a+b+c$.

A. $T=4$. **B.** $T=2$. **C.** $T=1$. **D.** $T=3$.

Lời giải

Chọn C

$I=\int_0^4\frac{\sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x}{2x+3\sqrt{2x+1}+3}=\int_0^4\frac{\sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x}{\left(\sqrt{2x+1}+1\right)\left(\sqrt{2x+1}+2\right)}=\int_0^4\frac{2\left(\sqrt{2x+1}+1\right)-\left(\sqrt{2x+1}+2\right)\mathrm{d}x}{\left(\sqrt{2x+1}+1\right)\left(\sqrt{2x+1}+2\right)}$

$=\int_0^4\frac{2\mathrm{d}x}{\left(\sqrt{2x+1}+2\right)}-\int_0^4\frac{\mathrm{d}x}{\left(\sqrt{2x+1}+1\right)}$.

Đặt $u=\sqrt{2x+1}\Rightarrow u\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$. Với $x=0\Rightarrow u=1$, với $x=4\Rightarrow u=3$.

Suy ra $I=\int_1^3\frac{2u\mathrm{d}u}{u+2}-\int_1^3\frac{u\mathrm{d}u}{u+1}=\int_1^3\left(2-\frac{4}{u+2}\right)\mathrm{d}u-\int_1^3\left(1-\frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u$

$=\left(u-4\ln|u+2|+\ln|u+1|\right)\Big|_1^3=2-4\ln\frac{5}{3}+\ln 2$

$\Rightarrow a=2,\ b=1,\ c=1 \Rightarrow T=2.1+1-4=1$.

Câu 52: (THPT Chuyên ĐH Vinh – lần 1 - năm 2017 – 2018) Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(2)=16$, $\int_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x=2$. Tích phân $\int_0^2 xf'(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 30. **B.** 28. **C.** 36. **D.** 16.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=2x \Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{2}$, ta có $\int_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t=2 \Rightarrow \int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t=4 \Rightarrow \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=4$.

$\int_0^2 xf'(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^2 x\,\mathrm{d}\left(f(x)\right)=xf(x)\Big|_0^2-\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=2f(2)-4=28$.

✎ Chú ý: Ta có thể tính nhanh $\int_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x=2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=2 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=4$.

Cách tính $\int_0^2 xf'(x)\,\mathrm{d}x$ ở trên là viết tắt của phương pháp từng phần với $u=x$, $\mathrm{d}v=f'(x)\,\mathrm{d}x$

Câu 53: (THPT Yên Lạc – Vĩnh Phúc – lần 4 - năm 2017 – 2018) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2)=16$, $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=4$. Tính $I=\int_0^4 xf'\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$

A. $I=12$. **B.** $I=112$. **C.** $I=28$. **D.** $I=144$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\begin{cases} u=x \\ \mathrm{d}v=f'\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=2f\left(\frac{x}{2}\right) \end{cases}$.

Khi đó

$I=\int_0^4 xf'\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=2xf\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_0^4-2\int_0^4 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=128-2I_1$ với $I_1=\int_0^4 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $u=\frac{x}{2} \Rightarrow \mathrm{d}x=2\mathrm{d}u$, khi đó $I_1=\int_0^4 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=2\int_0^2 f(u)\,\mathrm{d}u=2\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=8$.

Vậy $I=128-2I_1=128-16=112$.

Câu 54: (THPT Quảng Xương I – Thanh Hóa – năm 2017 – 2018) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x^2+x-2}$, $f(-3)-f(3)=0$ và $f(0)=\frac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $f(-4)+f(-1)-f(4)$ bằng

A. $\frac{1}{3}\ln 2+\frac{1}{3}$. **B.** $\ln 80+1$. **C.** $\frac{1}{3}\ln\frac{4}{5}+\ln 2+1$. **D.** $\frac{1}{3}\ln\frac{8}{5}+1$.

Lời giải

Chọn A

$$f(x)=\int\frac{1}{x^2+x-2}\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C_1,\forall x\in(-\infty;-2)\\ \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C_2,\forall x\in(-2;1)\\ \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C_3,\forall x\in(1;+\infty)\end{cases}.$$

Ta có $f(-3)=\frac{1}{3}\ln 4+C_1,\forall x\in(-\infty;2)$, $f(0)=\frac{1}{3}\ln\frac{1}{2}+C_1,\forall x\in(-2;1)$,

$f(3)=\frac{1}{3}\ln\frac{2}{5}+C_3,\forall x\in(1;+\infty)$,

Theo giả thiết ta có $f(0)=\frac{1}{3}\Leftrightarrow C_2=\frac{1}{3}(1+\ln 2)$.

$\Rightarrow f(-1)=\frac{2}{3}\ln 2+\frac{1}{3}$.

Và $f(-3)-f(3)=0\Leftrightarrow C_1-C_3=\frac{1}{3}\ln\frac{1}{10}$.

Vậy $f(-4)+f(-1)-f(4)=\frac{1}{3}\ln\frac{5}{2}+C_1+\frac{1}{3}\ln 2+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\ln 2+\frac{1}{3}\ln 2-C_2=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{1}{3}$.

Câu 55: (THPT Quảng Xương I – Thanh Hóa – năm 2017 – 2018) Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau $f(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=-\mathrm{e}^x.f^2(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=\frac{1}{2}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm có hoành độ $x_0=\ln 2$ là

A. $2x+9y-2\ln 2-3=0$.
B. $2x-9y-2\ln 2+3=0$.
C. $2x-9y+2\ln 2-3=0$.
D. $2x+9y+2\ln 2-3=0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x)=-\mathrm{e}^x.f^2(x)\Leftrightarrow -\frac{f'(x)}{f^2(x)}=\mathrm{e}^x\Rightarrow\int\limits_0^{\ln 2}\left[-\frac{f'(x)}{f^2(x)}\right]\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\ln 2}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\Rightarrow\left.\left(\frac{1}{f(x)}\right)\right|_0^{\ln 2}=\left.\left(\mathrm{e}^x\right)\right|_0^{\ln 2}$

$\Rightarrow\frac{1}{f(\ln 2)}-\frac{1}{f(0)}=1\Rightarrow f(\ln 2)=\frac{1}{3}$.

Từ đó ta có $f'(\ln 2)=-\mathrm{e}^{\ln 2}f^2(\ln 2)=-2.\left(\frac{1}{3}\right)^2=-\frac{2}{9}$.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=-\frac{2}{9}(x-\ln 2)+\frac{1}{3}\Leftrightarrow 2x+9y-2\ln 2-3=0$.

Câu 56: (SGD Bắc Giang – năm 2017 – 2018) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ và thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x^2-1}$, $f(-3)+f(3)=0$ và $f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=2$. Tính giá trị của biểu thức $P=f(0)+f(4)$.

A. $P=\ln\frac{3}{5}+2$.
B. $P=1+\ln\frac{3}{5}$.
C. $P=1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}$.
D. $P=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{(x-1)(x+1)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}(\ln|x-1|-\ln|x+1|)+C=\begin{cases}\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}+C_1,|x|>1\\ \frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{x+1}+C_2,|x|<1\end{cases}.$

$f(-3)=\frac{1}{2}\ln 2+C_1$; $f(3)=-\frac{1}{2}\ln 2+C_1$, do đó $f(-3)+f(3)=0\Rightarrow C_1=0$.

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\ln 3+C_2$; $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\ln 3+C_2$, do đó $f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=2\Rightarrow C_2=1$.

$f(0)=C_2=1$; $f(4)=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}$. Do đó $f(0)+f(4)=1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}$.

Câu 57: (SGD Bắc Giang – năm 2017 – 2018) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[0;+\infty)$ và $\int\limits_0^{x^2}f(t)\mathrm{d}t=x.\sin(\pi x)$. Tính $f(4)$

A. $f(\pi)=\frac{\pi-1}{4}$. **B.** $f(\pi)=\frac{\pi}{2}$. **C.** $f(\pi)=\frac{\pi}{4}$. **D.** $f(\pi)=\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int f(t)\mathrm{d}t=F(t)\Rightarrow F'(t)=f(t)$

Khi đó $\int\limits_0^{x^2}f(t)\mathrm{d}t=x.\sin(\pi x)\Leftrightarrow F(t)\Big|_0^{x^2}=x.\sin(\pi x)\Leftrightarrow F(x^2)-F(0)=x.\sin(\pi x)$

$\Rightarrow F'(x^2).2x=\sin(\pi x)+\pi x.\cos(\pi x)\Leftrightarrow f(x^2).2x=\sin(\pi x)+\pi x.\cos(\pi x)$

$\Rightarrow f(4)=\frac{\pi}{2}$.

Câu 58: (Chuyên ĐB Sông Hồng –Lần 1 năm 2017 – 2018) Biết diện tích hình phẳng giới bởi các đường $y=\sin x$, $y=\cos x$, $x=0$, $x=a$ (với $a\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$ là $\frac{1}{2}\left(-3+4\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$. Hỏi số a thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(\frac{7}{10},1\right)$. **B.** $\left(\frac{51}{50},\frac{11}{10}\right)$. **C.** $\left(\frac{11}{10};\frac{3}{2}\right)$. **D.** $\left(1,\frac{51}{50}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\sin x<\cos x$ với $x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, $\sin x>\cos x$ với $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$

Diện tích hình phẳng giới bởi các đường $y=\sin x$, $y=\cos x$, $x=0,x=a$ với $a\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$ là

$$S=\int_0^a\left|\sin x-\cos x\right|\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left|\sin x-\cos x\right|\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^a\left|\sin x-\cos x\right|\mathrm{d}x=$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos x-\sin x\right)\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^a\left(\sin x-\cos x\right)\mathrm{d}x$$

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^a\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}-\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^a$$

$$\Rightarrow S=\frac{-3+4\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$$

$$S=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}-\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^a=\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{2}\left(\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\cos 0\right)$$

$$S=\sqrt{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\sqrt{2}\left(\cos\left(a-\frac{\pi}{4}\right)-1\right)=2\sqrt{2}-1-\sqrt{2}\cos\left(a-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-3+4\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow\cos\left(a-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\Rightarrow a-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}\Rightarrow a=\frac{\pi}{3}\approx 1,047\Rightarrow a\in\left(\frac{51}{50};\frac{11}{10}\right).$$

Câu 59: (Chuyên ĐB Sông Hồng –Lần 1 năm 2017 – 2018) Cho $f\left(x\right)=\frac{x}{\cos^2 x}$ trên $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ và $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của $xf'\left(x\right)$ thỏa mãn $F\left(0\right)=0$. Biết $a\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ thỏa mãn $\tan a=3$. Tính $F\left(a\right)-10a^2+3a$.

A. $-\frac{1}{2}\ln 10$. **B.** $-\frac{1}{4}\ln 10$. **C.** $\frac{1}{2}\ln 10$. **D.** $\ln 10$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $F\left(x\right)=\int xf'\left(x\right)\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}f\left(x\right)=xf\left(x\right)-\int f\left(x\right)\mathrm{d}x$

Ta lại có: $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}\left(\tan x\right)=x\tan x-\int\tan x\mathrm{d}x=x\tan x-\int\frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x$

$=x\tan x+\int\frac{1}{\cos x}\mathrm{d}\left(\cos x\right)=x\tan x+\ln\left|\cos x\right|+C\Rightarrow F\left(x\right)=xf\left(x\right)-x\tan x-\ln\left|\cos x\right|+C$

Lại có: $F\left(0\right)=0\Rightarrow C=0$, do đó: $F\left(x\right)=xf\left(x\right)-x\tan x-\ln\left|\cos x\right|$.

$\Rightarrow F\left(a\right)=af\left(a\right)-a\tan a-\ln\left|\cos a\right|$

Khi đó $f\left(a\right)=\frac{a}{\cos^2 a}=a\left(1+\tan^2 a\right)=10a$ và

$\frac{1}{\cos^2 a}=1+\tan^2 a=10\Leftrightarrow\cos^2 a=\frac{1}{10}\Leftrightarrow\left|\cos a\right|=\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Vậy $F\left(a\right)-10a^2+3a=10a^2-3a-\ln\left|\frac{1}{\sqrt{10}}\right|-10a^2+3a=\frac{1}{2}\ln 10$.

Câu 60: (Chuyên ĐB Sông Hồng –Lần 1 năm 2017 – 2018) Cho $I_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} dx$ với $n \in \mathbb{N}$.

Đặt $u_n = 1.(I_1 + I_2) + 2(I_2 + I_3) + 3(I_3 + I_4) + ... + n(I_n + I_{n+1}) - n$.

Biết $\lim u_n = L$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $L \in (-1;0)$. **B.** $L \in (-2;-1)$. **C.** $L \in (0;1)$. **D.** $L \in (1;2)$.

Lời giải

Chọn A

Với $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} dx = \int_0^1 \frac{e^{-nx}.e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = \int_0^1 e^{-nx} dx - \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} dx = \int_0^1 e^{-nx} dx - I_n$

$\Rightarrow I_{n+1} = \int_0^1 e^{-nx} dx - I_n \Rightarrow I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n}(1 - e^{-n})$

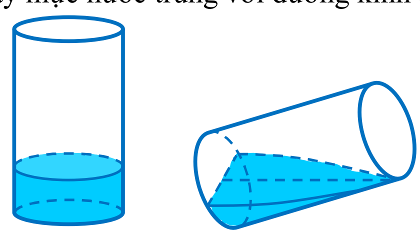
Do đó $u_n = (1 - e^{-1}) + (1 - e^{-2}) + (1 - e^{-3}) + ... + (1 - e^{-n}) - n$

$\Rightarrow u_n = -e^{-1} - e^{-2} - e^{-3} - ... - e^{-n}$

Ta thấy u_n là tổng n số hạng đầu của một cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = -e^{-1}$ và $q = \frac{1}{e}$, nên

$\lim u_n = \frac{-e^{-1}}{1 - \frac{1}{e}} \Rightarrow L = \frac{-1}{e-1} \Rightarrow L \in (-1;0)$.

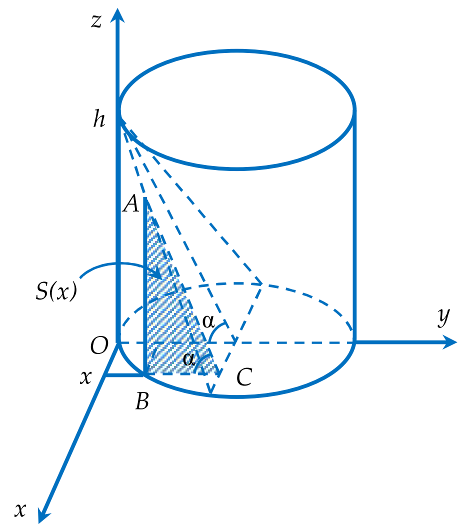
Câu 61: (THPT Chuyên Thoại Ngọc Hầu – An Giang - Lần 3 năm 2017 – 2018) Có một cốc thủy tinh hình trụ, bán kính trong lòng đáy cốc là $6\,\text{cm}$, chiều cao trong lòng cốc là $10\,\text{cm}$ đang đựng một lượng nước. Tính thể tích lượng nước trong cốc, biết khi nghiêng cốc nước vừa lúc khi nước chạm miệng cốc thì ở đáy mực nước trùng với đường kính đáy.



A. $240\,\text{cm}^3$. **B.** $240\pi\,\text{cm}^3$. **C.** $120\,\text{cm}^3$. **D.** $120\pi\,\text{cm}^3$.

Lời giải

Chọn A



Đặt $R = 6\,(\text{cm})$, $h = 10\,(\text{cm})$. Gán hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm x $(-6 \le x \le 6)$ cắt vật thể theo thiết diện có diện tích là $S(x)$.

Ta thấy thiết diện đó là một tam giác vuông, giả sử là tam giác ABC vuông tại B như trong hình vẽ.

Ta có $S(x) = S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.BC = \dfrac{1}{2}BC^2\tan\alpha = \dfrac{1}{2}(R^2 - x^2)\dfrac{h}{R} = \dfrac{5(36 - x^2)}{6}$.

Vậy thể tích lượng nước trong cốc là $V = \int\limits_{-6}^{6} S(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-6}^{6} \dfrac{5(36 - x^2)}{6}\,\mathrm{d}x = 240\,(\text{cm}^3)$.

Câu 62: (THPT Chuyên Thoại Ngọc Hầu – An Giang - Lần 3 năm 2017 – 2018) Cho hàm số f liên tục, $f(x) > -1$, $f(0) = 0$ và thỏa $f'(x)\sqrt{x^2+1} = 2x\sqrt{f(x)+1}$. Tính $f(\sqrt{3})$.

A. 0. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải

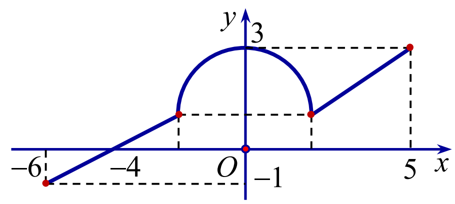
Chọn B

Ta có $f'(x)\sqrt{x^2+1} = 2x\sqrt{f(x)+1} \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)+1}} = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$

$\Leftrightarrow \int\limits_0^{\sqrt{3}} \dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)+1}}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\sqrt{3}} \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \sqrt{f(x)+1}\Big|_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{x^2+1}\Big|_0^{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sqrt{f(x)+1}\Big|_0^{\sqrt{3}} = 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{f(\sqrt{3})+1} - \sqrt{f(0)+1} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{f(\sqrt{3})+1} = 2 \Leftrightarrow f(\sqrt{3}) = 3$.

Câu 63: (THPT Chuyên Thoại Ngọc Hầu – An Giang - Lần 3 năm 2017 – 2018) Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[-6;5]$, có đồ thị gồm hai đoạn thẳng và nửa đường tròn như hình vẽ. Tính giá trị $I = \int\limits_{-6}^{5}[f(x)+2]\,\mathrm{d}x$.



A. $I = 2\pi + 35$. **B.** $I = 2\pi + 34$. **C.** $I = 2\pi + 33$. **D.** $I = 2\pi + 32$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x + 2 & \text{khi } -6 \le x \le -2 \\ 1 + \sqrt{4 - x^2} & \text{khi } -2 \le x \le 2 \\ \dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{3} & \text{khi } 2 \le x \le 5 \end{cases}$.

$I = \int\limits_{-6}^{5} \left[f(x) + 2 \right] \mathrm{d}x = \int\limits_{-6}^{5} f(x)\mathrm{d}x + 2\int\limits_{-6}^{5} \mathrm{d}x$

$= \int\limits_{-6}^{-2} \left(\dfrac{1}{2}x + 2 \right) \mathrm{d}x + \int\limits_{-2}^{2} \left(1 + \sqrt{4 - x^2} \right) \mathrm{d}x + \int\limits_{2}^{5} \left(\dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{3} \right) \mathrm{d}x + 22$

$= \left(\dfrac{1}{4}x^2 + 2x \right) \Bigg|_{-6}^{-2} + J + \left(\dfrac{1}{3}x^2 - \dfrac{x}{3} \right) \Bigg|_{2}^{5} + 22 = J + 28$.

Tính $J = \int\limits_{-2}^{2} \left(1 + \sqrt{4 - x^2} \right) \mathrm{d}x$

Đặt $x = 2\sin t \Rightarrow \mathrm{d}x = 2\cos t \mathrm{d}t$.

Đổi cận: Khi $x = 2$ thì $t = -\dfrac{\pi}{2}$; khi $x = 2$ thì $t = \dfrac{\pi}{2}$.

$J = \int\limits_{-2}^{2} \left(1 + \sqrt{4 - x^2} \right) \mathrm{d}x = 4 + 4\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \mathrm{d}t = 4 + 2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) \mathrm{d}t = 4 + 2\pi$. Vậy $I = 32 + 2\pi$.

Câu 64: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = |1 + x| - |1 - x|$ trên tập $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $F(1) = 3$. Tính tổng $F(0) + F(2) + F(-3)$.

A. 8. **B.** 12. **C.** 14. **D.** 10.

Câu 65: **(THPT Chuyên Ngữ – Hà Nội - Lần 1 năm 2017 – 2018)** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = |1 + x| - |1 - x|$ trên tập $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $F(1) = 3$. Tính tổng $F(0) + F(2) + F(-3)$.

A. 8. **B.** 12. **C.** 14. **D.** 10.

Lời giải

Chọn C

Bảng khử dấu giá trị tuyệt đối:

x	$-\infty$ $\quad$ -1 $\quad$ 1 $\quad$ $+\infty$
$1+x$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$ $\mid$ $+$
$1-x$	$+$ $\quad$ $\mid$ $\quad$ $+$ 0 $\quad$ $-$
$f(x)$	-2 $\quad$ $\mid$ $\quad$ $2x$ $\mid$ $\quad$ 2

Ta có: $\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x = F(2)-F(1)=F(2)-3$ mà $\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_1^2 2\mathrm{d}x=2$ nên $F(2)=5$.

➢ $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = F(1)-F(0)=3-F(0)$ mà $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 2x\mathrm{d}x=x^2\big|_0^1=1$ nên $F(0)=2$.

➢ $\int\limits_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x = F(0)-F(-1)=2-F(-1)$ mà $\int\limits_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^0 2x\mathrm{d}x=x^2\big|_{-1}^0=-1$ nên $F(-1)=3$.

➢ $\int\limits_{-3}^{-1} f(x)\mathrm{d}x = F(-1)-F(-3)=3-F(-3)$ mà $\int\limits_{-3}^{-1} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-3}^{-1} -2\mathrm{d}x=-4$ nên $F(-3)=7$.

Vậy $F(0)+F(2)+F(-3)=2+5+7=14$.

Câu 66: (THPT Chuyên Vĩnh Phúc – Vĩnh Phúc - Lần 4 năm 2017 – 2018) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\mathrm{d}x=3$ và $\int\limits_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x=1$. Tính $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=2$. **B.** $I=6$. **C.** $I=3$. **D.** $I=4$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $K=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\mathrm{d}x=3$. Đặt $\tan x=t \Rightarrow \mathrm{d}t=\mathrm{d}\tan x=\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=(t^2+1)\mathrm{d}x$.

Vậy $K=\int\limits_0^1 f(t).\frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t=\int\limits_0^1 f(x).\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x=3$.

Lại có $\int\limits_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left[f(x)-\frac{1}{x^2+1}f(x)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_0^1\frac{1}{x^2+1}f(x)\mathrm{d}x$.

Vậy suy ra $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=4$.

Câu 67: (THPT Chuyên Vĩnh Phúc – Vĩnh Phúc - Lần 4 năm 2017 – 2018) Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t)=7t$ $(\mathrm{m/s})$. Đi được $5\mathrm{s}$, người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a=-70$ $(\mathrm{m/s^2})$. Tính quãng đường S đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

A. $S=96,25$ (m). **B.** $S=87,5$ (m). **C.** $S=94$ (m). **D.** $S=95,7$ (m).

Lời giải

Chọn A

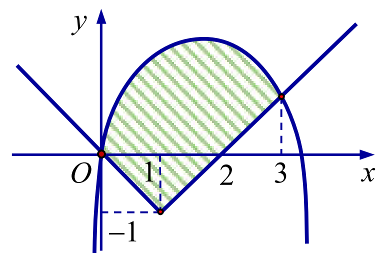
Chọn gốc thời gian là lúc ô tô bắt đầu đi. Sau $5\mathrm{s}$ ô tô đạt vận tốc là $v(5)=35(\mathrm{m/s})$.

Sau khi phanh vận tốc ô tô là $v(t)=35-70(t-5)$.

Ô tô dừng tại thời điểm $t = 5,5\text{s}$.

Quãng đường ô tô đi được là $S = \int_0^5 7t\mathrm{d}t + \int_5^{5,5} \left[35 - 70(t-5)\right]\mathrm{d}t = 96,25(\text{m})$.

Câu 68: (THPT Kim Liên – Hà Nội - Lần 2 năm 2017 – 2018) Cho (H) là hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ và được giới hạn bởi các đường có phương trình $y = \frac{10}{3}x - x^2$, $y = \begin{cases} -x & \text{khi } x \le 1 \\ x - 2 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Diện tích của (H) bằng?



A. $\frac{11}{6}$. **B.** $\frac{13}{2}$. **C.** $\frac{11}{2}$. **D.** $\frac{14}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = -x$ và $y = x - 2$ là $-x = x - 2 \Leftrightarrow x = 1$.

Diện tích hình phẳng cần tính là

$$S = \int_0^1 \left(\frac{10}{3}x - x^2 + x\right)\mathrm{d}x + \int_1^3 \left(\frac{10}{3}x - x^2 - x + 2\right)\mathrm{d}x.$$

$$\Leftrightarrow S = \int_0^1 \left(\frac{13}{3}x - x^2\right)\mathrm{d}x + \int_1^3 \left(\frac{7}{3}x - x^2 + 2\right)\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow S = \int_0^1 \left(\frac{13}{3}x - x^2\right)\mathrm{d}x + \int_1^3 \left(\frac{7}{3}x - x^2 + 2\right)\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow S = \left.\left(\frac{13}{6}x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\right|_0^1 + \left.\left(\frac{7}{6}x^2 - \frac{x^3}{3} + 2x\right)\right|_1^3 = \frac{13}{2}.$$

Câu 69: (THPT Kim Liên – Hà Nội - Lần 2 năm 2017 – 2018) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(0; +\infty)\setminus\{e\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x(\ln x - 1)}$, $f\left(\frac{1}{\mathrm{e}^2}\right) = \ln 6$ và $f\left(\mathrm{e}^2\right) = 3$. Giá trị của biểu thức $f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) + f\left(\mathrm{e}^3\right)$ bằng

A. $3\ln 2 + 1$. **B.** $2\ln 2$. **C.** $3(\ln 2 + 1)$. **D.** $\ln 2 + 3$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x) = \int f'(x)\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x(\ln x - 1)}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\ln x - 1}\mathrm{d}(\ln x) = \ln\left|\ln x - 1\right| + C$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \ln\left|\ln x - 1\right| + C_1 & \text{khi } 0 < x < \mathrm{e} \\ \ln\left|\ln x - 1\right| + C_2 & \text{khi } x > \mathrm{e} \end{cases}.$$

Do $f\left(\frac{1}{e^2}\right)=\ln 6\Rightarrow \ln\left|\ln\frac{1}{e^2}-1\right|+C_1=\ln 6\Leftrightarrow \ln 3+C_1=\ln 6\Leftrightarrow C_1=\ln 2$

Đồng thời $f\left(e^2\right)=3\Rightarrow \ln\left|\ln e^2-1\right|+C_2=3\Leftrightarrow C_2=3$

Khi đó: $f\left(\frac{1}{e}\right)+f\left(e^3\right)=\ln\left|\ln\frac{1}{e}-1\right|+\ln 2+\ln\left|\ln e^3-1\right|+3=3\left(\ln 2+1\right)$.

Câu 70: (THPT Thuận Thành 2 – Bắc Ninh - Lần 2 năm 2017 – 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên dương n thỏa mãn $\int\limits_0^2\left(1-n^2+2x+3x^2+4x^3+...+nx^{n-1}\right)dx=-2$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int\limits_0^2\left(1-n^2+2x+3x^2+4x^3+...+nx^{n-1}\right)dx=-2\Leftrightarrow\left.\left(x-n^2x+x^2+x^3+x^4+...+x^n\right)\right|_0^2=-2$

$\Leftrightarrow 2-2n^2+2^2+2^3+2^4+...+2^n=-2\Leftrightarrow 1+2+2^2+...+2^{n-1}=n^2+1$

$\Leftrightarrow 2^n-1=n^2+1\Leftrightarrow 2^n-n^2-2=0$.

Thử với các giá trị $n\in\{1;2;3;4\}$ đều không thỏa mãn.

Với $n\in\mathbb{Z}$, $n\geq 5$ ta chứng minh $2^n>n^2+2$ (1). Dễ thấy $n=5$ thì (1) đúng.

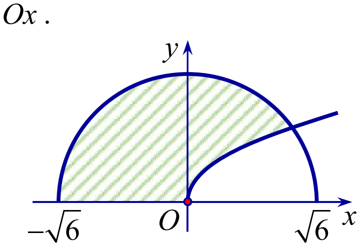
Giả sử (1) đúng với $n=k$ với $k\in\mathbb{Z}$, $k\geq 5$. Khi đó $2^k>k^2+2$.

Khi đó: $2^{k+1}>2\left(k^2+2\right)=k^2+k^2+2+2>k^2+2k+1+2=(k+1)^2+2$.

Do đó (1) đúng với $n=k+1$. Theo nguyên lý quy nạp thì (1) đúng.

Vậy không tồn tại số nguyên n.

Câu 71: (THPT Chuyên Lương Thế Vinh – Đồng Nai – Lần 2 năm 2017 – 2018) Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$, cung tròn có phương trình $y=\sqrt{6-x^2}$ $\left(-\sqrt{6}\leq x\leq\sqrt{6}\right)$ và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ bên). Tính thể tích V của vật thể tròn xoay sinh bởi khi quay hình phẳng D quanh trục Ox.



A. $V=8\pi\sqrt{6}-2\pi$. **B.** $V=8\pi\sqrt{6}+\frac{22\pi}{3}$. **C.** $V=8\pi\sqrt{6}-\frac{22\pi}{3}$. **D.** $V=4\pi\sqrt{6}+\frac{22\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1. Cung tròn khi quay quanh Ox tạo thành một khối cầu có thể tích

$$V=\frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{6}\right)^3=8\pi\sqrt{6}.$$

Thể tích nửa khối cầu là $V_1 = 4\pi\sqrt{6}$.

Xét phương trình: $\sqrt{x} = \sqrt{6-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 + x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$.

Thể tích khối tròn xoay có được khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = \sqrt{x}$, cung tròn có phương trình $y = \sqrt{6-x^2}$, và hai đường thẳng $x = 0,\ x = 2$ quanh Ox là $V_2 = \pi\int\limits_0^2 \left(6 - x^2 - x\right)\mathrm{d}x = \frac{22\pi}{3}$.

Vậy thể tích vật thể tròn xoay cần tìm là $V = V_1 + V_2 = 4\pi\sqrt{6} + \frac{22\pi}{3}$.

Cách 2. Cung tròn khi quay quanh Ox tạo thành một khối cầu có thể tích

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{6}\right)^3 = 8\pi\sqrt{6}.$$

Xét phương trình: $\sqrt{x} = \sqrt{6-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 + x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$.

Thể tích khối tròn xoay có được khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = \sqrt{x}$, cung tròn có phương trình $y = \sqrt{6-x^2}$ và đường thẳng $y = 0$ quanh Ox là $V_2 = \pi\int\limits_0^2 x\mathrm{d}x + \pi\int\limits_2^{\sqrt{6}} \left(6 - x^2\right)\mathrm{d}x = 2\pi + \frac{12\sqrt{6} - 28}{3}\pi = 4\pi\sqrt{6} - \frac{22\pi}{3}$.

Vậy thể tích vật thể tròn xoay cần tìm là $V = V_1 - V_2 = 8\pi\sqrt{6} - \left(4\pi\sqrt{6} - \frac{22\pi}{3}\right) = 4\sqrt{6}\pi + \frac{22\pi}{3}$.

Câu 72: (THPT Quỳnh Lưu 1 – Nghệ An – Lần 2 năm 2017 – 2018) Biết

$\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2} + x}\mathrm{d}x = a + \frac{\pi^2}{b} + \frac{\sqrt{3}\pi}{c}$ với a, b, c, d là các số nguyên. Tính $M = a - b + c$.

A. $M = 35$. **B.** $M = 41$. **C.** $M = -37$. **D.** $M = -35$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2} + x}\mathrm{d}x = \int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{0} \frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2} + x}\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2} + x}\mathrm{d}x = I + J$

Xét $I = \int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{0} \frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2} + x}\mathrm{d}x$. Đặt $t = -x$ $\left(C_m\right)$; Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = -\frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$.

Suy ra $I = \int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{0} \frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2} + x}\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{0} \frac{-t\cos(-t)}{\sqrt{1+(-t)^2} - t}\left(-\mathrm{d}t\right) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{-t\cos t}{\sqrt{1+t^2} - t}\mathrm{d}t = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{-x\cos x}{\sqrt{1+x^2} - x}\mathrm{d}x$.

Khi đó $\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2} + x}\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{-x\cos x}{\sqrt{1+x^2} - x}\mathrm{d}x + \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2} + x}\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}} x\cos x\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{6}} -2x^2\cos x\,\mathrm{d}x.$$

u	$\mathrm{d}v$
$-2x^2$	$\cos x$
$-4x$	$\sin x$
-4	$-\cos x$
0	$-\sin x$

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}\mathrm{d}x=\left(-2x^2\sin x-4x\cos x+4\sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=2+\frac{\pi^2}{-36}+\frac{\pi\sqrt{3}}{-3}.$$

Khi đó $a=2$; $b=-36$; $c=-3$.

Vậy $M=a-b+c=35$.

Câu 73: (THPT Quỳnh Lưu 1 – Nghệ An – Lần 2 năm 2017 – 2018) Thể tích V của khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường tròn $(C): x^2+(y-3)^2=1$ xung quanh trục hoành là

A. $V=6\pi$. **B.** $V=6\pi^3$. **C.** $V=3\pi^2$. **D.** $V=6\pi^2$.

Lời giải

Chọn D

$(C): x^2+(y-3)^2=1 \Leftrightarrow (y-3)^2=1-x^2 \Rightarrow y=3\pm\sqrt{1-x^2}$.

$(y-3)^2=1-x^2\geq 0 \Rightarrow -1\leq x\leq 1$.

Thể tích của khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường tròn $(C): x^2+(y-3)^2=1$ xung quanh trục hoành là

$$V=\pi\int_{-1}^{1}\left[3+\sqrt{1-x^2}\right]^2\mathrm{d}x-\pi\int_{-1}^{1}\left[3-\sqrt{1-x^2}\right]^2\mathrm{d}x=6\pi^2.$$

Câu 74: (THPT Quỳnh Lưu 1 – Nghệ An – Lần 2 năm 2017 – 2018) Gọi x_1, x_2 lần lượt là điểm cực đại và điểm cực tiểu của hàm số $f(x)=\int_{\mathrm{e}^x}^{\mathrm{e}^{2x}} t\ln t\,\mathrm{d}t$. Tính $S=x_1+x_2$.

A. $\ln 2\mathrm{e}$. **B.** $\ln 2$. **C.** $-\ln 2$. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Đặt $g'(t)=t\ln t$. Ta có $f(x)=\int_{\mathrm{e}^x}^{\mathrm{e}^{2x}} t\ln t\,\mathrm{d}t=g\left(\mathrm{e}^{2x}\right)-g\left(\mathrm{e}^x\right)$

Ta có $f'(x)=\left(\mathrm{e}^{2x}\right)'.g'\left(\mathrm{e}^{2x}\right)-\left(\mathrm{e}^x\right)'.g'\left(\mathrm{e}^x\right)=2\mathrm{e}^{2x}.\mathrm{e}^{2x}.\ln\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x.\mathrm{e}^x.\ln\mathrm{e}^x$

$=4x\mathrm{e}^{4x}-x\mathrm{e}^{2x}=x\mathrm{e}^{2x}\left(4\mathrm{e}^{2x}-1\right)$.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=0\\x_2=-\ln 2\end{array}\right..$$

$x_1+x_2=-\ln 2$.

Câu 75: (THPT Quỳnh Lưu 1 – Nghệ An – Lần 2 năm 2017 – 2018) Cho hàm số $f(x)\neq 0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x)=(2x+3)f^2(x)$ và $f(0)=-\dfrac{1}{2}$. Biết rằng tổng $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2017)+f(2018)=\dfrac{a}{b}$ với $\left(a\in\mathbb{Z},\, b\in\mathbb{N}^*\right)$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $\dfrac{a}{b}<-1$. **B.** $\dfrac{a}{b}>1$. **C.** $a+b=1010$. **D.** $b-a=3029$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x)=(2x+3)f^2(x)\Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=2x+3$

$\Leftrightarrow \displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int(2x+3)\mathrm{d}x \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)}=x^2+3x+C$.

Vì $f(0)=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow C=2$.

Vậy $f(x)=-\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+1}$.

Do đó $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2017)+f(2018)=\dfrac{1}{2020}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1009}{2020}$.

Vậy $a=-1009$; $b=2020$. Do đó $b-a=3029$.

Câu 76: (SGD Quảng Nam – năm 2017 – 2018) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$, $f(x)$ và $f'(x)$ đều nhận giá trị dương trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(0)=2$, $\displaystyle\int_0^1\left[f'(x).[f(x)]^2+1\right]\mathrm{d}x=2\int_0^1\sqrt{f'(x)}.f(x)\mathrm{d}x$. Tính $\displaystyle\int_0^1[f(x)]^3\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{15}{4}$. **B.** $\dfrac{15}{2}$. **C.** $\dfrac{17}{2}$. **D.** $\dfrac{19}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Theo giả thiết, ta có $\displaystyle\int_0^1\left[f'(x).[f(x)]^2+1\right]\mathrm{d}x=2\int_0^1\sqrt{f'(x)}.f(x)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \displaystyle\int_0^1\left[f'(x).[f(x)]^2+1\right]\mathrm{d}x-2\int_0^1\sqrt{f'(x)}.f(x)\mathrm{d}x=0$

$\Leftrightarrow \displaystyle\int_0^1\left[f'(x).[f(x)]^2-2\sqrt{f'(x)}.f(x)+1\right]\mathrm{d}x=0 \Leftrightarrow \int_0^1\left[\sqrt{f'(x)}.f(x)-1\right]^2\mathrm{d}x=0$

$\Rightarrow \sqrt{f'(x)}.f(x)-1=0\Rightarrow f^2(x).f'(x)=1\Rightarrow \dfrac{f^3(x)}{3}=x+C$. Mà $f(0)=2\Rightarrow C=\dfrac{8}{3}$.

Vậy $f^3(x)=3x+8$.

Vậy $\displaystyle\int_0^1[f(x)]^3\,\mathrm{d}x=\int_0^1(3x+8)\mathrm{d}x=\left.\left(\frac{3x^2}{2}+8x\right)\right|_0^1=\frac{19}{2}$.

Câu 77: (ĐHQG TPHCM – Cơ Sở 2 – năm 2017 – 2018) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\mathrm{d}x = 4$ và $\int_0^1 \frac{x^2.f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x = 2$. Tính $I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

Ta có $2 = \int_0^1 \left(f(x) - \frac{f(x)}{x^2+1} \right)\mathrm{d}x = I - \int_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x \Rightarrow I = 2 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

Đặt $x = \tan t \Rightarrow I = 2 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(\tan t)}{\tan^2 t + 1} d(\tan t) = 2 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(\tan t)}{\frac{1}{\cos^2 t}}.\frac{1}{\cos^2 t}\mathrm{d}t$

$\Rightarrow I = 2 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\mathrm{d}x = 2 + 4 = 6$.

Câu 78: (ĐHQG TPHCM – Cơ Sở 2 – năm 2017 – 2018) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int_0^2 f(6x)\mathrm{d}x = 14$. Tính $\int_{-2}^2 f(5|x|+2)\mathrm{d}x$.

A. 30. **B.** 32. **C.** 34. **D.** 36.

Lời giải

Chọn B

+ Xét $\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}x = 2$.

Đặt $u = 2x \Rightarrow \mathrm{d}u = 2\mathrm{d}x$; $x = 0 \Rightarrow u = 0$; $x = 1 \Rightarrow u = 2$.

Nên $2 = \int_0^1 f(2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^2 f(u)\mathrm{d}u \Rightarrow \int_0^2 f(u)\mathrm{d}u = 4$.

+ Xét $\int_0^2 f(6x)\mathrm{d}x = 14$.

Đặt $v = 6x \Rightarrow \mathrm{d}v = 6\mathrm{d}x$; $x = 0 \Rightarrow v = 0$; $x = 2 \Rightarrow v = 12$.

Nên $14 = \int_0^2 f(6x)\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\int_0^{12} f(v)\mathrm{d}v \Rightarrow \int_0^{12} f(v)\mathrm{d}v = 84$.

+ Xét $\int_{-2}^2 f(5|x|+2)\mathrm{d}x = \int_{-2}^0 f(5|x|+2)\mathrm{d}x + \int_0^2 f(5|x|+2)\mathrm{d}x$.

□ Tính $I_1 = \int_{-2}^0 f(5|x|+2)\mathrm{d}x$.

Đặt $t = 5|x| + 2$.

Khi $-2 < x < 0$, $t = -5x + 2 \Rightarrow \mathrm{d}t = -5\mathrm{d}x$; $x = -2 \Rightarrow t = 12$; $x = 0 \Rightarrow t = 2$.

$I_1 = \frac{-1}{5}\int_{12}^2 f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{5}\left[\int_0^{12} f(t)\mathrm{d}t - \int_0^2 f(t)\mathrm{d}t\right] = \frac{1}{5}(84-4) = 16$.

□ Tính $I_1=\int_0^2 f\left(5|x|+2\right)\mathrm{d}x$.

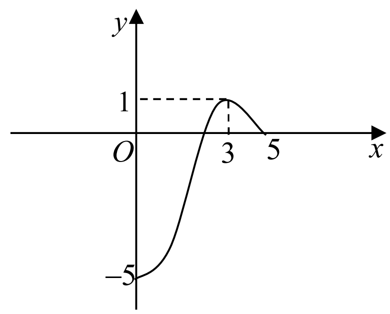
Đặt $t=5|x|+2$.

Khi $0<x<2$, $t=5x+2\Rightarrow \mathrm{d}t=5\mathrm{d}x$; $x=2\Rightarrow t=12$; $x=0\Rightarrow t=2$.

$I_2=\frac{1}{5}\int_2^{12} f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{5}\left[\int_0^{12} f(t)\mathrm{d}t-\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{5}(84-4)=16$.

Vậy $\int_{-2}^2 f\left(5|x|+2\right)\mathrm{d}x=32$.

Câu 79: (ĐHQG TPHCM – Cơ Sở 2 – năm 2017 – 2018) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0;5]$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ trên đoạn $[0;5]$ được cho như hình bên.



Tìm mệnh đề đúng

A. $f(0)=f(5)<f(3)$.
B. $f(3)<f(0)=f(5)$.
C. $f(3)<f(0)<f(5)$.
D. $f(3)<f(5)<f(0)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int_3^5 f'(x)\mathrm{d}x=f(5)-f(3)>0$, do đó $f(5)>f(3)$.

$\int_0^3 f'(x)\mathrm{d}x=f(3)-f(0)<0$, do đó $f(3)<f(0)$

$\int_0^5 f'(x)\mathrm{d}x=f(5)-f(0)<0$, do đó $f(5)<f(0)$

Câu 80: (THPT Trần Phú – Đà Nẵng - Lần 2 – năm 2017 – 2018) Biết $\int_0^1 \frac{\left(x^2+5x+6\right)\mathrm{e}^x}{x+2+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x=a\mathrm{e}-b-\ln\frac{a\mathrm{e}+c}{3}$ với a, b, c là các số nguyên và e là cơ số của logarit tự nhiên. Tính $S=2a+b+c$.

A. $S=10$.
B. $S=0$.
C. $S=5$.
D. $S=9$.

Lời giải

Chọn D

Ta có : $I=\int_0^1 \frac{\left(x^2+5x+6\right)\mathrm{e}^x}{x+2+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{(x+2)(x+3)\mathrm{e}^{2x}}{(x+2)\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x$.

Đặt $t=(x+2)\mathrm{e}^x\Rightarrow \mathrm{d}t=(x+3)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$. Đổi cận : $x=0\Rightarrow t=2$, $x=1\Rightarrow t=3\mathrm{e}$.

$$I=\int_{2}^{3e}\frac{t\mathrm{d}t}{t+1}=\int_{2}^{3e}\left(1-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t=\left(t-\ln\left|t+1\right|\right)\Big|_{2}^{3e}=3e-2-\ln\frac{3e+1}{3}.$$

Vậy $a=3$, $b=2$, $c=1\Rightarrow S=9$.

Câu 81: (THPT Trần Phú – Đà Nẵng - Lần 2 – năm 2017 – 2018) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm và liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=3$, $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{f\left(x\right)}{\cos x}\mathrm{d}x=1$ và $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left[\sin x.\tan x.f\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=2$.

Tích phân $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin x.f'\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng:

A. 4. **B.** $\frac{2+3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{1+3\sqrt{2}}{2}$. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin x.f'\left(x\right)\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases}u=\sin x\\ \mathrm{d}v=f'\left(x\right)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\cos x\mathrm{d}x\\ v=f\left(x\right)\end{cases}$.

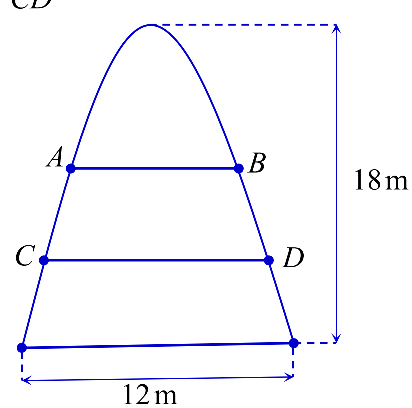
$$I=\sin x.f\left(x\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}-\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos x.f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{3\sqrt{2}}{2}-I_1.$$

$$2=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left[\sin x.\tan x.f\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left[\sin^2 x.\frac{f\left(x\right)}{\cos x}\right]\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left[\left(1-\cos^2 x\right).\frac{f\left(x\right)}{\cos x}\right]\mathrm{d}x.$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{f\left(x\right)}{\cos x}\right]\mathrm{d}x-\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos x.f\left(x\right)\mathrm{d}x=1-I_1.$$

$$\Rightarrow I_1=-1\Rightarrow I=\frac{3\sqrt{2}}{2}+1=\frac{3\sqrt{2}+2}{2}.$$

Câu 82: (THPT Chuyên ĐH Vinh – Lần 2 – năm 2017 – 2018) Một cổng chào có dạng hình Parabol chiều cao 18 m, chiều rộng chân đế 12 m. Người ta căng hai sợi dây trang trí AB, CD nằm ngang đồng thời chia hình giới hạn bởi Parabol và mặt đất thành ba phần có diện tích bằng nhau (xem hình vẽ bên). Tỉ số $\frac{AB}{CD}$ bằng

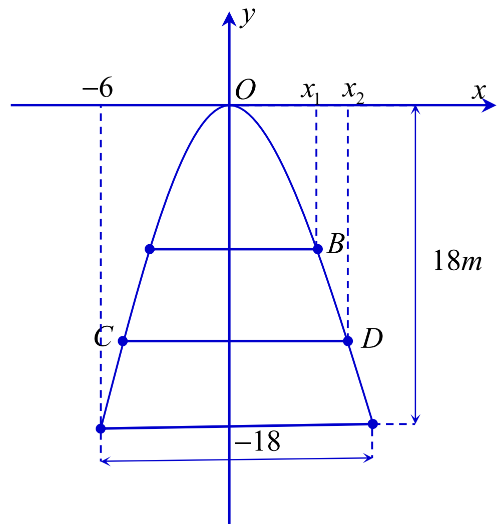


A. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **B.** $\dfrac{4}{5}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$. **D.** $\dfrac{3}{1+2\sqrt{2}}$.

Lời giải

Chọn C

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.



Phương trình Parabol có dạng $y = a.x^2$ (P).

(P) đi qua điểm có tọa độ $(-6;-18)$ suy ra: $-18 = a.(-6)^2 \Leftrightarrow a = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow (P): y = -\dfrac{1}{2}x^2$.

Từ hình vẽ ta có: $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{x_1}{x_2}$.

Diện tích hình phẳng giới bạn bởi Parabol và đường thẳng $AB: y = -\dfrac{1}{2}x_1^2$ là

$$S_1 = 2\int_0^{x_1}\left[-\frac{1}{2}x^2 - \left(-\frac{1}{2}x_1^2\right)\right]\mathrm{d}x = 2\left(-\frac{1}{2}.\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x_1^2x\right)\Bigg|_0^{x_1} = \frac{2}{3}x_1^3.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi Parabol và đường thẳng CD $y = -\dfrac{1}{2}x_2^2$ là

$$S_2 = 2\int_0^{x_2}\left[-\frac{1}{2}x^2 - \left(-\frac{1}{2}x_2^2\right)\right]\mathrm{d}x = 2\left(-\frac{1}{2}.\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x_2^2x\right)\Bigg|_0^{x_2} = \frac{2}{3}x_2^3$$

Từ giả thiết suy ra $S_2 = 2S_1 \Leftrightarrow x_2^3 = 2x_1^3 \Leftrightarrow \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Vậy $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Câu 83: **(THPT Chuyên ĐH Vinh – Lần 2 – năm 2017 – 2018)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;2]$ thỏa mãn $f(1) = 4$ và $f(x) = xf'(x) - 2x^3 - 3x^2$. Tính $f(2)$

A. 5. **B.** 20. **C.** 10. **D.** 15.

Lời giải

Chọn B

Do $x \in [1;2]$ nên $f(x) = xf'(x) - 2x^3 - 3x^2 \Leftrightarrow \dfrac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = 2x + 3 \Leftrightarrow \left(\dfrac{f(x)}{x}\right)' = 2x + 3$

$\Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x} = x^2 + 3x + C$.

Do $f(1)=4$ nên $C=0 \Rightarrow f(x)=x^3+3x^2$.

Vậy $f(2)=20$.

Câu 84: (SGD Nam Định – năm 2017 – 2018) Biết tích phân $\int\limits_0^{\ln 6} \frac{e^x}{1+\sqrt{e^x+3}}dx = a+b\ln 2+c\ln 3$, với a, b, c là các số nguyên. Tính $T=a+b+c$.

A. $T=-1$. **B.** $T=0$. **C.** $T=2$. **D.** $T=1$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\sqrt{e^x+3} \Rightarrow t^2=e^x+3 \Rightarrow 2tdt=e^x dx$.

Đổi cận $\begin{cases} x=\ln 6 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=3 \\ t=2 \end{cases}$.

Suy ra $\int\limits_0^{\ln 6} \frac{e^x}{1+\sqrt{e^x+3}}dx = \int\limits_2^3 \frac{2tdt}{1+t} = \int\limits_2^3 \left(2-\frac{2}{1+t}\right)dt = \left(2t-2\ln|t+1|\right)\Big|_2^3 = (6-2\ln 4)-(4-2\ln 3)$

$=2-4\ln 2+2\ln 3 \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-4 \\ c=2 \end{cases}$.

Vậy $T=0$.

Câu 85: (SGD Nam Định – năm 2017 – 2018) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;4]$ và thỏa mãn $f(x)=\frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}+\frac{\ln x}{x}$. Tính tích phân $I=\int\limits_3^4 f(x)dx$.

A. $I=3+2\ln^2 2$. **B.** $I=2\ln^2 2$. **C.** $I=\ln^2 2$. **D.** $I=2\ln 2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int\limits_1^4 f(x)dx = \int\limits_1^4 \left[\frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}+\frac{\ln x}{x}\right]dx = \int\limits_1^4 \frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}dx + \int\limits_1^4 \frac{\ln x}{x}dx$.

Xét $K=\int\limits_1^4 \frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}dx$.

Đặt $2\sqrt{x}-1=t \Rightarrow \sqrt{x}=\frac{t+1}{2} \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}}=dt$.

$\Rightarrow K=\int\limits_1^3 f(t)dt=\int\limits_1^3 f(x)dx$.

Xét $M=\int\limits_1^4 \frac{\ln x}{x}dx = \int\limits_1^4 \ln x\, d(\ln x) = \frac{\ln^2 x}{2}\Big|_1^4 = 2\ln^2 2$.

Do đó $\int\limits_1^4 f(x)dx = \int\limits_1^3 f(x)dx + 2\ln^2 2 \Rightarrow \int\limits_3^4 f(x)dx = 2\ln^2 2$.

Câu 1: (SGD Thanh Hóa – năm 2017 – 2018) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x.f\left(\sin^2 x\right)\mathrm{d}x = \int_{1}^{16} \frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{x}\mathrm{d}x = 1.$$ Tính tích phân $\int_{\frac{1}{8}}^{1} \frac{f(4x)}{x}\mathrm{d}x$.

A. $I = 3$. **B.** $I = \frac{3}{2}$. **C.** $I = 2$. **D.** $I = \frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $I_1 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x.f\left(\sin^2 x\right)\mathrm{d}x = 1$, $I_2 == \int_{1}^{16} \frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{x}\mathrm{d}x = 1$.

□ Đặt $t = \sin^2 x \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\sin x.\cos x\mathrm{d}x = 2\sin^2 x.\cot x\mathrm{d}x = 2t.\cot x\mathrm{d}x$.

x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
t	$\frac{1}{2}$	1

$$I_1 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x.f\left(\sin^2 x\right)\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(t).\frac{1}{2t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}} \frac{f(4x)}{4x}\mathrm{d}(4x) = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}} \frac{f(4x)}{x}\mathrm{d}x.$$

Suy ra $\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}} \frac{f(4x)}{x}\mathrm{d}x = 2I_1 = 2$

□Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow 2t\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$.

x	1	16
t	1	4

$$I_2 = \int_{1}^{16} \frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{x}\mathrm{d}x = \int_{1}^{4} \frac{f(t)}{t^2}2t\mathrm{d}t = 2\int_{1}^{4} \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t = 2\int_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{f(4x)}{4x}\mathrm{d}(4x) = 2\int_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{f(4x)}{x}\mathrm{d}x.$$

Suy ra $\int_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{f(4x)}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}I_2 = \frac{1}{2}$

Khi đó, ta có:

$$\int_{\frac{1}{8}}^{1} \frac{f(4x)}{x}\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}} \frac{f(4x)}{x}\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{f(4x)}{x}\mathrm{d}x = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

Câu 2: (SGD Thanh Hóa – năm 2017 – 2018) Cho $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x \ln(\tan x + 1)\mathrm{d}x = a\pi + b\ln 2 + c$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Tính $T = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - c$.

A. $T = 2$. **B.** $T = 4$. **C.** $T = 6$. **D.** $T = -4$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x \ln(\tan x+1)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\tan x+1)\mathrm{d}(\cos 2x)$

$= -\frac{1}{2}\cos 2x \ln(\tan x+1)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \mathrm{d}\left[\ln(\tan x+1)\right]$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x.\frac{1}{\tan x+1}.\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\frac{\sin x+\cos x}{\cos x}}.\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1-\frac{\sin x}{\cos x}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x}\mathrm{d}(\cos x)$

$= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\ln|\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{8}\pi - \frac{1}{4}\ln 2 \Rightarrow T = 8-4+0 = 4$.

Câu 3: (Tạp chí THTT – Tháng 4 năm 2017 – 2018) Cho hàm số $g(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\mathrm{d}t$ với $x>0$. Đạo hàm của $g(x)$ là

A. $g'(x) = \frac{x-1}{\ln x}$. **B.** $g'(x) = \frac{1-x}{\ln x}$. **C.** $g'(x) = \frac{1}{\ln x}$. **D.** $g'(x) = \ln x$.

Lời giải

Chọn A

Giả sử $F(t)$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{1}{\ln t}$.

Khi đó $F'(t) = \frac{1}{\ln t}$ hay $F'(x) = \frac{1}{\ln x}$.

Ta có $g(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\mathrm{d}t = F(x^2) - F(x)$.

Suy ra $g'(x) = \left(F(x^2)-F(x)\right)' = F'(x^2) - F'(x) = \frac{1}{\ln x^2}.2x - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}$.

Chú ý: ta có công thức $\left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt\right)' = v'(x).f\left[v(x)\right] - u'(x).f\left[u(x)\right]$

Câu 4: (Tạp chí THTT – Tháng 4 năm 2017 – 2018) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = |x-1|$ và nửa trên của đường tròn $x^2+y^2=1$ bằng?

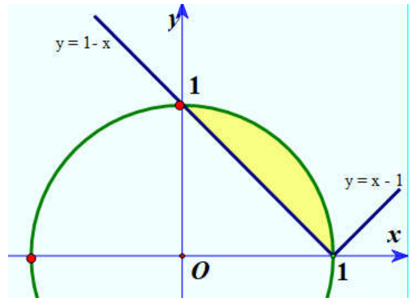
A. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{\pi-1}{2}$. **C.** $\frac{\pi}{2}-1$. **D.** $\frac{\pi}{4}-1$.

Lời giải

Chọn A

$y = |x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{khi } x\ge 1 \\ 1-x & \text{khi } x<1 \end{cases}$.

$x^2+y^2=1 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{1-x^2}$ do chỉ tính nửa trên của đường tròn nên ta lấy $y=\sqrt{1-x^2}$.



Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=|x-1|$ và nửa trên của đường tròn $x^2+y^2=1$ là phần tô màu vàng như hình vẽ.

Cách 1:

Diện tích hình phẳng trên là:

$S=\frac{1}{4}.\pi R^2-\frac{1}{2}.1.1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{4}$ diện tích hình tròn – diện tích tam giác vuông cân)

Cách 2:

Diện tích hình phẳng trên là:

$$S=\int_0^1\left[\sqrt{1-x^2}-(1-x)\right]\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x+\int_0^1(x-1)\mathrm{d}x=I_1+\left.\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\right|_0^1=I_1-\frac{1}{2}.$$

Tính $I_1=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $x=\sin t$, $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; $\mathrm{d}x=\cos t.\mathrm{d}t$.

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=0$; $x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$.

$$I_1=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}.\cos t.\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos t|\cos t.\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t.\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\left.\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$$

Vậy $S=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$.

Câu 5: **(Tạp chí THTT – Tháng 4 năm 2017 – 2018)** Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\max\{\sin x;\cos x\}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có phương trình $\sin x-\cos x=0$ có một nghiệm trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ là $x=\frac{\pi}{4}$.

Bảng xét dấu

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$\sin x-\cos x$		$-$	0	$+$	

Suy ra $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\max\left\{\sin x;\cos x\right\}\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos x\mathrm{d}x+\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x=\left(\sin x\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}-\left(\cos x\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\sqrt{2}$.

Câu 6: (THPT Chuyên Nguyễn Quang Diệu – Đồng Tháp – Lần 5 năm 2017 – 2018) Cho hàm số $f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\left\{1\right\}$ thỏa mãn $f'\left(x\right)=\frac{1}{x-1}$, $f\left(0\right)=2017$,, $f\left(2\right)=2018$. Tính $S=\left(f\left(3\right)-2018\right)\left(f\left(-1\right)-2017\right)$.

A. $S=1$. **B.** $S=1+\ln^2 2$. **C.** $S=2\ln 2$. **D.** $S=\ln^2 2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f\left(x\right)=\int\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x=\ln\left|x-1\right|+C=\begin{cases}\ln\left(x-1\right)+C_1 & \text{khi } x>1\\ \ln\left(1-x\right)+C_2 & \text{khi } x<1\end{cases}$.

Lại có $f\left(0\right)=2017\Rightarrow\ln\left(1-0\right)+C_2=2017\Rightarrow C_2=2017$.

$f\left(2\right)=2018$ $\ln\left(2-1\right)+C_1=2018\Rightarrow C_1=2018$.

Do đó $S=\left[\ln\left(3-1\right)+2018-2018\right]\left[\ln\left(1-\left(-1\right)\right)+2017-2017\right]=\ln^2 2$.

Câu 7: (THPT Chuyên Nguyễn Quang Diệu – Đồng Tháp – Lần 5 năm 2017 – 2018) Biết $\int\limits_{1}^{e}\frac{\sqrt{3+\ln x}}{x}\mathrm{d}x=\frac{a-b\sqrt{c}}{3}$, trong đó a, b, c là các số nguyên dương và $c<4$. Tính giá trị $S=a+b+c$.

A. $S=13$. **B.** $S=28$. **C.** $S=25$. **D.** $S=16$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\sqrt{3+\ln x}\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}x}{x}$.

Đổi : Với $x=1\Rightarrow t=\sqrt{3}$; $x=e\Rightarrow t=2$.

$\Rightarrow I=\int\limits_{1}^{e}\frac{\sqrt{3+\ln x}}{x}\mathrm{d}x=2\int\limits_{\sqrt{3}}^{2}t^2\mathrm{d}t=\frac{2}{3}t^3\Big|_{\sqrt{3}}^{2}=\frac{16-6\sqrt{3}}{3}$.

$\Rightarrow a=16$, $b=6$, $c=3\Rightarrow S=a+b+c=25$.

Câu 8: (THPT Chuyên Thái Bình – Thái Bình – Lần 5 năm 2017 – 2018) Cho $I=\int\limits_{1}^{e}x\ln x\mathrm{d}x=\frac{a.\mathrm{e}^2+b}{c}$ với a, b, $c\in\mathbb{Z}$. Tính $T=a+b+c$.

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases}$ nên $\begin{cases} du = \dfrac{1}{x} dx \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$.

$I = \int_1^e x \ln x dx = \dfrac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \dfrac{1}{2}\int_1^e x dx = \dfrac{e^2+1}{4}$.

$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 4 \end{cases}$.

Vậy $T = a + b + c = 6$.

Câu 9: (THPT Chuyên Thái Bình – Thái Bình – Lần 5 năm 2017 – 2018) Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trên đường, các xe ô tô khi dừng đèn đỏ phải cách nhau tối thiểu $1\,m$. Một ô tô A đang chạy với vận tốc $16\,m/s$ bỗng gặp ô tô B đang dừng đèn đỏ nên ô tô A hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với vận tốc được biểu thị bởi công thức $v_A(t) = 16 - 4t$ (đơn vị tính bằng m/s), thời gian tính bằng giây. Hỏi rằng để có 2 ô tô A và B đạt khoảng cách an toàn khi dừng lại thì ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là bao nhiêu?

A. 33. **B.** 12. **C.** 31. **D.** 32.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $v_A(0) = 16\,m/s$.

Khi xe A dừng hẳn: $v_A(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4\,s$.

Quãng đường từ lúc xe A hãm phanh đến lúc dừng hẳn là $s = \int_0^4 (16 - 4t) dt = 32\,m$.

Do các xe phải cách nhau tối thiểu $1\,m$ để đảm bảo an toàn nên khi dừng lại ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là $33\,m$.

Câu 10: (THPT Chuyên Hùng Vương – Gia Lai – Lần 2 năm 2017 – 2018) Cho $f(x)$ là một hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + f(-x) = \sqrt{2 - 2\cos 2x}$. Tính tích phân $I = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx$.

A. $I = 3$. **B.** $I = 4$. **C.** $I = 6$. **D.** $I = 8$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $I = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{0} f(x) dx + \int_{0}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx$.

Xét $\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{0} f(x) dx$ Đặt $t = -x \Rightarrow dt = -dx$; Đổi cận: $x = -\dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow t = \dfrac{3\pi}{2}$; $x = 0 \Rightarrow t = 0$.

Suy ra $\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{0} f(x) dx = -\int_{\frac{3\pi}{2}}^{0} f(-t) dt = \int_{0}^{\frac{3\pi}{2}} f(-t) dt = \int_{0}^{\frac{3\pi}{2}} f(-x) dx$.

Theo giả thiết ta có: $f\left(x\right)+f\left(-x\right)=\sqrt{2-2\cos 2x}\Leftrightarrow\int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}}\left(f\left(x\right)+f\left(-x\right)\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}}\sqrt{2-2\cos x}\mathrm{d}x$

$$\Leftrightarrow\int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}}f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}}f\left(-x\right)\mathrm{d}x=2\int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}}\left|\sin x\right|\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow\int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}}f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{0}f\left(x\right)\mathrm{d}x=2\int\limits_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x-2\int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x$$

Câu 11: $\Leftrightarrow\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}f\left(x\right)\mathrm{d}x=6$.**(THPT Chuyên Lương Thế Vinh - Hà Nội – Lần 2 năm 2017 – 2018)** Gọi S là tập hợp tất cả các số nguyên dương k thỏa mãn $\int\limits_1^2\mathrm{e}^{kx}\mathrm{d}x<\frac{2018.\mathrm{e}^k-2018}{k}$. Số phần tử của tập hợp S bằng.

A. 7. **B.** 8. **C.** Vô số. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int\limits_1^2\mathrm{e}^{kx}\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{k}\mathrm{e}^{kx}\right)\Big|_1^2=\frac{\mathrm{e}^{2k}-\mathrm{e}^k}{k}$.

$$\int\limits_1^2\mathrm{e}^{kx}\mathrm{d}x<\frac{2018.\mathrm{e}^k-2018}{k}\Leftrightarrow\frac{\mathrm{e}^{2k}-\mathrm{e}^k}{k}<\frac{2018.\mathrm{e}^k-2018}{k}$$

$\Leftrightarrow\mathrm{e}^k\left(\mathrm{e}^k-1\right)<2018\left(\mathrm{e}^k-1\right)$ (do k nguyên dương).

$\Leftrightarrow\left(\mathrm{e}^k-1\right)\left(\mathrm{e}^k-2018\right)<0\Leftrightarrow 1<\mathrm{e}^k<2018\Leftrightarrow 0<k<\ln 2018\approx 7.6$.

Do k nguyên dương nên ta chọn được $k\in S$ (với $S=\left\{1;2;3;4;5;6;7\right\}$).

Suy ra số phần tử của S là 7.

Câu 12: **(THPT Chuyên Lương Thế Vinh - Hà Nội – Lần 2 năm 2017 – 2018)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\left[1;+\infty\right)$ thỏa mãn $f\left(1\right)=1$ và $f'\left(x\right)\geq 3x^2+2x-5$ trên $\left[1;+\infty\right)$. Tìm số nguyên dương lớn nhất m sao cho $\min\limits_{x\in[3;10]}f\left(x\right)\geq m$ với mọi hàm số $y=f\left(x\right)$ thỏa điều kiện đề bài.

A. $m=15$. **B.** $m=20$. **C.** $m=25$. **D.** $m=30$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f'\left(x\right)\geq 3x^2+2x-5$ trên $\left[1;+\infty\right)$

Do $3x^2+2x-5\geq 0$, $\forall x\in\left[1;+\infty\right)$ nên $f'\left(x\right)\geq 0$, $\forall x\in\left[1;+\infty\right)$.

Do đó hàm số $f\left(x\right)$ đồng biến trên $\left[1;+\infty\right)$. Suy ra $\min\limits_{x\in[3;10]}f\left(x\right)=f\left(3\right)$.

Ta lại có:

$$\int\limits_1^3 f'\left(x\right)\mathrm{d}x\geq\int\limits_1^3\left(3x^2+2x-5\right)\mathrm{d}x\Leftrightarrow f\left(x\right)\Big|_1^3\geq\left(x^3+x^2-5x\right)\Big|_1^3$$

$\Leftrightarrow f(3)-f(1)\ge 24 \Leftrightarrow f(3)\ge 25$

Vậy $\min\limits_{x\in[3;10]} f(x)\ge 25$. Hay $m=25$.

Câu 13: (SGD Hà Tĩnh – Lần 2 năm 2017 – 2018) Một vật đang chuyển động với vận tốc $v=20\,(\text{m/s})$ thì thay đổi vận tốc với gia tốc được tính theo thời gian t là $a(t)=-4+2t\,(\text{m/s}^2)$. Tính quãng đường vật đi được kể từ thời điểm thay đổi gia tốc đến lúc vật đạt vận tốc bé nhất

A. $\frac{104}{3}\,\text{m}$. **B.** $104\,\text{m}$. **C.** $208\,\text{m}$. **D.** $\frac{104}{6}\,\text{m}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Vận tốc của vật khi thay đổi là $v(t)=\int(-4+2t)\,\mathrm{d}t=t^2-4t+C$.

Tại thời điểm $t=0$ (khi vật bắt đầu thay đổi vận tốc) có $v_0=20\Rightarrow C=20$

Suy ra $v(t)=t^2-4t+20$.

Có $v(t)=(t-2)^2+16\ge 16$, suy ra vận tốc của vật đạt bé nhất khi $t=2$

Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó là

$$S=\int_0^2 v(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^2\left(t^2-4t+20\right)\mathrm{d}t=\left.\left(\frac{1}{3}t^3-2t^2+20t\right)\right|_0^2=\frac{104}{3}\ (\text{m}).$$

Câu 14: (THPT Nghèn – Hà Tĩnh – Lần 2 năm 2017 – 2018) Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{(\cos x)^2-5\cos x+6}\,\mathrm{d}x=a\ln\frac{4}{c}+b$, với a, b là các số hữu tỉ, $c>0$. Tính tổng $S=a+b+c$.

A. $S=3$. **B.** $S=0$. **C.** $S=1$. **D.** $S=4$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=\cos x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\sin x\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$; $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=0$

Ta có:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{(\cos x)^2-5\cos x+6}\,\mathrm{d}x=-\int_1^0\frac{1}{t^2-5t+6}\,\mathrm{d}t=\int_0^1\left(\frac{1}{t-3}-\frac{1}{t-2}\right)\mathrm{d}t=\ln\left.\left|\frac{t-3}{t-2}\right|\right|_0^1=\ln 2-\ln\frac{3}{2}=\ln\frac{4}{3}$$

$=a\ln\frac{4}{c}+b$.

Do đó: $\begin{cases}a=1\\ c=3\\ b=0\end{cases}$.

Vậy $S=a+b+c=4$.

Câu 15: (THPT Chu Văn An – Hà Nội - năm 2017-2018) Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện $4x.f(x^2)+3f(1-x)=\sqrt{1-x^2}$. Tích phân $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng:

A. $I=\dfrac{\pi}{4}$. **B.** $I=\dfrac{\pi}{6}$. **C.** $I=\dfrac{\pi}{20}$. **D.** $I=\dfrac{\pi}{16}$.

Lời giải

Chọn C

Vì $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và $4x.f(x^2)+3f(1-x)=\sqrt{1-x^2}$ nên ta có

$$\int\limits_0^1\left[4x.f(x^2)+3f(1-x)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int\limits_0^1 4x.f(x^2)\mathrm{d}x+\int\limits_0^1 3f(1-x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x \ (1).$$

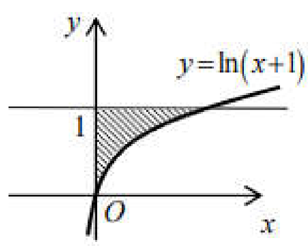
Mà $\int\limits_0^1 4x.f(x^2)\mathrm{d}x=2\int\limits_0^1 f(x^2)\mathrm{d}(x^2)\xrightarrow{t=x^2}2\int\limits_0^1 f(t)\mathrm{d}t=2I$

và $\int\limits_0^1 3f(1-x)\mathrm{d}x=-3\int\limits_0^1 f(1-x)\mathrm{d}(1-x)\xrightarrow{u=1-x}3\int\limits_0^1 f(u)\mathrm{d}u=3I$

Đồng thời $\int\limits_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\xrightarrow{x=\sin t}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}.\cos t\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t=\dfrac{\pi}{4}$.

Do đó, $(1)\Leftrightarrow 2I+3I=\dfrac{\pi}{4}$ hay $I=\dfrac{\pi}{20}$.

Câu 16: (THPT Chuyên Võ Nguyên Giáp – Quảng Bình - năm 2017-2018) Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\ln(x+1)$, đường thẳng $y=1$ và trục tung (phần tô đậm trong hình vẽ).



Diện tích của (H) bằng

A. $\mathrm{e}-2$. **B.** $\mathrm{e}-1$. **C.** 1. **D.** $\ln 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của hàm số $y=\ln(x+1)$ và đường thẳng $y=1$ là $\ln(x+1)=1\Leftrightarrow x=\mathrm{e}-1$.

Diện tích của (H) là $S=\int\limits_0^{\mathrm{e}-1}\ln(x+1)\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=\ln(x+1)\\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{1}{x+1}\mathrm{d}x\\ v=x+1\end{cases}$. Khi đó $S=(x+1)\ln(x+1)\Big|_0^{\mathrm{e}-1}-\int\limits_0^{\mathrm{e}-1}\mathrm{d}x=\mathrm{e}-(\mathrm{e}-1)=1$.

Câu 17: (THPT Chuyên Võ Nguyên Giáp – Quảng Bình - năm 2017-2018) Biết $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x+2}+(x+2)\sqrt{x}} = \sqrt{a}+\sqrt{b}-c$ với a,b,c là các số nguyên dương. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=2$. **B.** $P=8$. **C.** $P=46$. **D.** $P=22$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

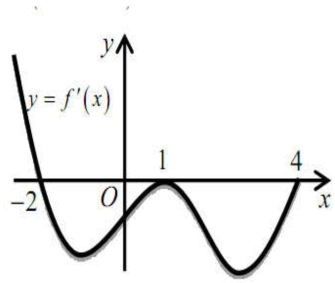
Ta có

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x+2}+(x+2)\sqrt{x}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{x+2}\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)} = \int_1^2 \frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}\sqrt{x+2}}dx$$

$$=\int_1^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x+2}}\right)dx = \left(\sqrt{x}-\sqrt{x+2}\right)\Big|_1^2 = \sqrt{2}+\sqrt{3}-3.$$

Vậy $a=2;b=3;c=3$ nên $P=a+b+c=8$.

Câu 18: (THPT Chuyên Võ Nguyên Giáp – Quảng Bình - năm 2017-2018) Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Biết rằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục Ox và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ trên đoạn $[-2;1]$ và $[1;4]$ lần lượt bằng 9 và 12. Cho $f(1)=3$. Giá trị biểu thức $f(-2)+f(4)$ bằng

A. 21 **B.** 9. **C.** 3. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Theo giả thiết ta có $\int_{-2}^{1}\left|f'(x)\right|dx=9$ và $\int_{1}^{4}\left|f'(x)\right|dx=12$.

Dựa vào đồ thị ta có: $\int_{-2}^{1}\left|f'(x)\right|dx=-\int_{-2}^{1}f'(x)dx=-f(x)\Big|_{-2}^{1}=-f(-1)+f(-2)$

$\Rightarrow -f(1)+f(-2)=9$.

Tương tự ta có $-f(4)+f(1)=12$.

Như vậy $\left[-f(1)+f(-2)\right]-\left[-f(4)+f(1)\right]=-3 \Leftrightarrow f(-2)+f(4)-2f(1)=-3$

$\Leftrightarrow f(-2)+f(4)-6=-3 \Leftrightarrow f(-2)+f(4)=3$.

Câu 19: (THPT Chuyên Võ Nguyên Giáp – Quảng Bình - năm 2017-2018) Biết hàm số $f(x)-f(2x)$ có đạo hàm bằng 5 tại $x=1$ và đạo hàm 7 tại $x=2$. Tính đạo hàm của hàm số $f(x)-f(4x)$ tại $x=1$.

A. 8. **B.** 12. **C.** 16. **D.** 19.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Có $\left(f(x)-f(2x)\right)'=f'(x)-2f'(2x)$

$\begin{cases} f'(1)-2f'(2)=5 \\ f'(2)-2f'(4)=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(1)-2f'(2)=5 \\ 2f'(2)-4f'(4)=14 \end{cases} \Rightarrow f'(1)-4f'(4)=19.$

Vậy $f'(1)-f'(4)=19$.

Câu 20: (THPT Chuyên Võ Nguyên Giáp – Quảng Bình - năm 2017-2018) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2x)=3f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Biết rằng $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu?

A. $I=5$. **B.** $I=3$. **C.** $I=8$. **D.** $I=2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Xét tích phân $J=\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$, đặt $x=2t\Rightarrow \mathrm{d}x=2\mathrm{d}t$.

Với $x=2\Rightarrow t=1$, $x=0\Rightarrow t=0$.

Ta có $J=\int\limits_0^1 f(2t)2\mathrm{d}t=2\int\limits_0^1 f(2t)\mathrm{d}t=2\int\limits_0^1 3f(t)\mathrm{d}t=6\int\limits_0^1 f(t)\mathrm{d}t=6\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=6$.

Mặt khác, ta có $J=\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow I=\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=J-\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=5$.

Câu 21: (SGD Bắc Ninh – Lần 2 - năm 2017-2018) Biết $\int\limits_1^2\left(\sqrt[3]{x-\frac{1}{x^2}}+2\sqrt[3]{\frac{1}{x^8}-\frac{1}{x^{11}}}\right)\mathrm{d}x=\frac{a}{b}\sqrt[3]{c}$, với a,b,c nguyên dương, $\frac{a}{b}$ tối giản và $c<a$. Tính $S=a+b+c$

A. $S=51$. **B.** $S=67$. **C.** $S=39$. **D.** $S=75$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int\limits_1^2\left(\sqrt[3]{x-\frac{1}{x^2}}+2\sqrt[3]{\frac{1}{x^8}-\frac{1}{x^{11}}}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_1^2\sqrt[3]{x-\frac{1}{x^2}}\left(1+\frac{2}{x^3}\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\sqrt[3]{x-\frac{1}{x^2}}\Rightarrow t^3=x-\frac{1}{x^2}\Rightarrow 3t^2\mathrm{d}t=\left(1+\frac{2}{x^3}\right)\mathrm{d}x$.

Khi đó: $\int\limits_1^2\left(\sqrt[3]{x-\frac{1}{x^2}}+2\sqrt[3]{\frac{1}{x^8}-\frac{1}{x^{11}}}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\sqrt[3]{\frac{7}{4}}}3t^3\mathrm{d}t=\frac{3}{4}t^4\Big|_0^{\sqrt[3]{\frac{7}{4}}}=\frac{21}{32}\sqrt[3]{14}$.

Vậy $S=67$.

Câu 22: (SGD Bắc Ninh – Lần 2 - năm 2017-2018) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình tròn $(C):x^2+y^2=8$ và parabol $(P);y=\frac{x^2}{2}$ chia hình tròn thành hai phần. Gọi S_1 là diện tích phần nhỏ, S_2 là diện tích phần lớn. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$?

A. $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3\pi+2}{9\pi-2}$.

B. $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3\pi-2}{9\pi+2}$.

C. $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3\pi+2}{9\pi+2}$.

D. $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3\pi+1}{9\pi-1}$.

Lời giải

Chọn A

Giao điểm của (P) và (C) là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2=8\,(1) \\ y=\frac{x^2}{2}\,(2) \end{cases}$

Thay (2) vào (1) ta được: $x^2+\frac{x^4}{4}=8 \Leftrightarrow x^4+4x^2-32=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=4 \\ x^2=-8\,(L) \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\pm 2$

Phần nhỏ giới hạn bởi các đường $y=\frac{x^2}{2}$; $y=\sqrt{8-x^2}$; $x=-2$; $x=2$ nên ta có:

$$S_1=\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{8-x^2}-\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x=\underbrace{\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{8-x^2}\right)\mathrm{d}x}_{A}-\underbrace{\int_{-2}^{2}\frac{x^2}{2}\mathrm{d}x}_{B}$$

Tính $A=\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{8-x^2}\right)\mathrm{d}x$

Đặt $x=2\sqrt{2}\sin t \Rightarrow \mathrm{d}x=2\sqrt{2}\cos t\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x=-2 \Rightarrow t=-\frac{\pi}{4}$; $x=2 \Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$.

$$A=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{8-8\sin^2 t}.2\sqrt{2}\cos t\mathrm{d}t=8\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 t\mathrm{d}t=4\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t=4\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=2\pi+4.$$

$$B=\int_{-2}^{2}\frac{x^2}{2}\mathrm{d}x=\frac{8}{3}.$$

$$\Rightarrow S_1=2\pi+\frac{4}{3} \Rightarrow S_2=\pi R^2-S_1=6\pi-\frac{4}{3}.$$

Vậy $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3\pi+2}{9\pi-2}$.

Câu 23: (SGD Bắc Ninh – Lần 2 - năm 2017-2018) Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm tại mọi $x\in(0;+\infty)$ đồng thời thỏa mãn điều kiện: $f(x)=x(\sin x+f'(x))+\cos x$ và $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}f(x)\sin x\mathrm{d}x=-4$. Khi đó, $f(\pi)$ nằm trong khoảng nào?

A. $(6;7)$.

B. $(5;6)$.

C. $(12;13)$.

D. $(11;12)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$f(x)=x(\sin x+f'(x))+\cos x$

$\Rightarrow \dfrac{f(x)-xf'(x)}{x^2}=\dfrac{\sin x}{x}+\dfrac{\cos x}{x^2}$

$\Rightarrow \left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'=\left(\dfrac{1}{x}\cos x\right)' \Rightarrow \dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{1}{x}\cos x+c$

$\Rightarrow f(x)=\cos x+cx$

Khi đó:

$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\sin x\mathrm{d}x=-4 \Leftrightarrow \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (\cos x+cx)\sin x\mathrm{d}x=-4$

$\Leftrightarrow \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x\sin x\mathrm{d}x+c\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} x\sin x\mathrm{d}x=-4 \Leftrightarrow 0+c(-2)=-4 \Leftrightarrow c=2$

$\Rightarrow f(x)=\cos x+2x \;\Rightarrow f(\pi)=2\pi-1\in(5;6)$.

Câu 24: (Chuyên Lê Hồng Phong – Nam Đinh - năm 2017-2018) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-2)=1$, $\int\limits_1^2 f(2x-4)\mathrm{d}x=1$. Tính $\int\limits_{-2}^0 xf'(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=1$. **B.** $I=0$. **C.** $I=-4$. **D.** $I=4$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $t=2x-4\Rightarrow \mathrm{d}t=2\mathrm{d}x$, đổi cận $x=1\Rightarrow t=-2$, $x=2\Rightarrow t=0$.

$1=\int\limits_1^2 f(2x-4)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int\limits_{-2}^0 f(t)\mathrm{d}t \Rightarrow \int\limits_{-2}^0 f(t)\mathrm{d}t=2\Rightarrow \int\limits_{-2}^0 f(x)\mathrm{d}x=2$.

Đặt $u=x\Rightarrow \mathrm{d}u=\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x\Rightarrow v=f(x)$.

Vậy $\int\limits_{-2}^0 xf'(x)\mathrm{d}x=xf(x)\Big|_{-2}^0-\int\limits_{-2}^0 f(x)\mathrm{d}x=2f(-2)-2=2.1-2=0$.

Câu 25: (Chuyên Lê Hồng Phong – Nam Đinh - năm 2017-2018) Tính diện tích hình phẳng giới han bởi các đường $y=x^2-2$ và $y=-|x|$

A. $\dfrac{13}{3}$. **B.** $\dfrac{7}{3}$. **C.** 3. **D.** $\dfrac{11}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2-2=-|x| \Leftrightarrow |x|^2+|x|-2=0 \Leftrightarrow |x|=1\Leftrightarrow x=\pm1$.

Diện tích hình phẳng là:

$S=\int\limits_{-1}^1 \left|x^2-2+|x|\right|\mathrm{d}x=\left|\int\limits_{-1}^1 \left(x^2-2+|x|\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\int\limits_{-1}^0 \left(x^2-2-x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_0^1 \left(x^2-2+x\right)\mathrm{d}x\right|$

$=\left|\left(\dfrac{x^3}{3}-2x-\dfrac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^0+\left(\dfrac{x^3}{3}-2x+\dfrac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1\right|=\left|-\dfrac{7}{6}-\dfrac{7}{6}\right|=\dfrac{7}{3}$.

Câu 26: (THPT Đặng Thúc Hứa – Nghệ An - năm 2017-2018) Cho $\int\limits_0^1 f(2x+1)\,dx = 12$ và $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin^2 x)\sin 2x\,dx = 3$. Tính $\int\limits_0^3 f(x)\,dx$.

A. 26. **B.** 22. **C.** 27. **D.** 15.

Lời giải

Chọn C

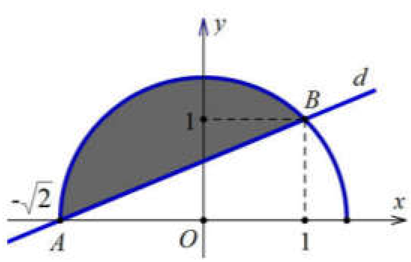
Đặt $2x+1=t \Rightarrow 12 = \int\limits_1^3 f(t)\,d\left(\frac{t-1}{2}\right) = \frac{1}{2}\int\limits_1^3 f(t)\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_1^3 f(x)\,dx \Rightarrow \int\limits_1^3 f(x)\,dx = 24$.

Ta có $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin^2 x)\sin 2x\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin^2 x).2\sin x\cos x\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x.f(\sin^2 x)\,d(\sin x)$

$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin^2 x)\,d(\sin^2 x) = \int\limits_0^1 f(u)\,du = \int\limits_0^1 f(x)\,dx = 3$

$\Rightarrow \int\limits_0^3 f(x)\,dx = \int\limits_0^1 f(x)\,dx + \int\limits_1^3 f(x)\,dx = 3+24 = 27$.

Câu 27: **(THPT Đặng Thúc Hứa – Nghệ An - năm 2017-2018)** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi nửa đường tròn $y=\sqrt{2-x^2}$ và đường thẳng d đi qua hai điểm $A\left(-\sqrt{2};0\right)$ và $B(1;1)$ (*phần tô đậm như hình vẽ)*



A. $\frac{\pi+2\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\frac{3\pi+2\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\frac{\pi-2\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\frac{3\pi-2\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có d đi qua $B(1;1)$ có VTCP $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=\left(1+\sqrt{2};1\right)$ (VTPT là $\vec{n}=\left(-1;1+\sqrt{2}\right)$

Suy phương trình tổng quát của $d: -1(x-1)+\left(1+\sqrt{2}\right)(y-1)=0 \Leftrightarrow -x+\left(1+\sqrt{2}\right)y-\sqrt{2}=0$

$y=\frac{1}{1+\sqrt{2}}x+\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$

Từ hình vẽ ta có diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S=\int_{-\sqrt{2}}^{1}\left(\sqrt{2-x^2}-\frac{1}{1+\sqrt{2}}x-\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)dx=\int_{-\sqrt{2}}^{1}\sqrt{2-x^2}dx-\int_{-\sqrt{2}}^{1}\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}x+\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)dx=A-B$$

Ta có $B=\int_{-\sqrt{2}}^{1}\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}x+\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)dx=\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}\frac{x^2}{2}+\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}x\right)\Bigg|_{-\sqrt{2}}^{1}=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

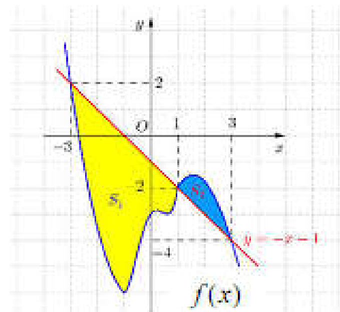
Xét tích phân $A=\int_{-\sqrt{2}}^{1}\sqrt{2-x^2}dx$

Đặt $x=\sqrt{2}\sin t\Rightarrow dx=\sqrt{2}\cos t dt$; Đổi cận: $x=-\sqrt{2}\Rightarrow t=-\frac{\pi}{2}$. $x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$.

Khi đó $A=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}2\cos^2 t dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2t)dt=\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{3\pi}{4}+\frac{1}{2}$

Vậy $S=\frac{3\pi}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\pi-2\sqrt{2}}{4}$.

Câu 28: **(THPT Đặng Thúc Hứa – Nghệ An - năm 2017-2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-3;3]$. Biết rằng diện tích hình phẳng S_1, S_2 giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=-x-1$ lần lượt là M, m. Tính tích phân $\int_{-3}^{3}f(x)dx$ bằng



A. $6+m-M$.

B. $6-m-M$.

C. $M-m+6$.

D. $m-M-6$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $M=S_1=\int_{-3}^{1}(-x-1-f(x))dx=\int_{-3}^{1}(-x-1)dx-\int_{-3}^{1}f(x)dx=\left(-\frac{x^2}{2}-x\right)\Bigg|_{-3}^{1}=-\int_{-3}^{1}f(x)dx$.

$$m=S_2=\int_{1}^{3}(f(x)+x+1)dx=\int_{1}^{3}f(x)dx+\int_{1}^{3}(x+1)dx=\int_{1}^{3}f(x)dx+\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_{1}^{3}=\int_{1}^{3}f(x)dx+6.$$

$$S_1-S_2=-\int_{-3}^{1}f(x)dx-\int_{1}^{3}f(x)dx-6\Leftrightarrow M-m=-6-\left(\int_{-3}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{3}f(x)dx\right)$$

$$\Leftrightarrow M-m=-6-\int_{-3}^{3}f(x)dx\Leftrightarrow\int_{-3}^{3}f(x)dx=m-M+6$$

Câu 29: Diện tích hình phẳng nằm trong góc phần tư thứ nhất, giới hạn bởi các đường thẳng $y=8x$, $y=x$ và đồ thị hàm số $y=x^3$ là phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Khi đó $a+b$ bằng

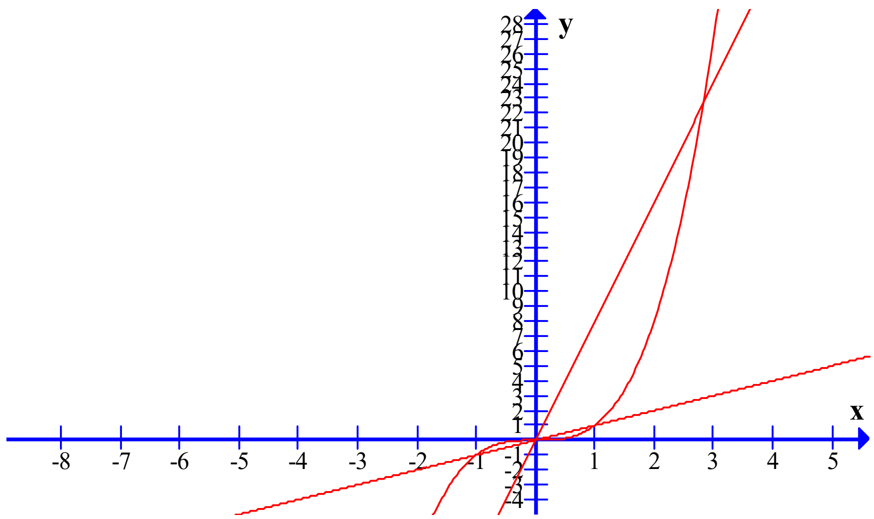
A. 62. **B.** 67. **C.** 33. **D.** 66.

Câu 30: Diện tích hình phẳng nằm trong góc phần tư thứ nhất, giới hạn bởi các đường thẳng $y = 8x$, $y = x$ và đồ thị hàm số $y = x^3$ là phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Khi đó $a + b$ bằng

A. 62. **B.** 67. **C.** 33. **D.** 66.

Lời giải

Chọn B



Ta có

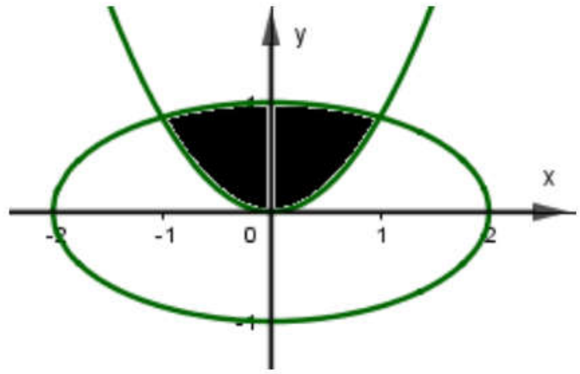
$x^3 = 8x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 2\sqrt{2} \end{array}\right.$ loại $x = -2\sqrt{2}$

$x^3 = x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$ loại $x = -1$

Suy ra $S = \int\limits_0^{2\sqrt{2}} \left(8x - x^3\right)\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 \left(x - x^3\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{8x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^{2\sqrt{2}} - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = 16 - \frac{1}{4} = \frac{63}{4}$

Khi đó $a + b = 67$.

Câu 31: Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2$ và đường Elip có phương trình $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng



$\underline{\text{A}}$. $\dfrac{2\pi+\sqrt{3}}{6}$.　　B. $\dfrac{2\pi}{3}$.　　C. $\dfrac{\pi+\sqrt{3}}{4}$.　　D. $\dfrac{3\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \Rightarrow y=\pm\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đường cong nửa trên của Elip và Parabol là

$$\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}x^2 \Leftrightarrow 3x^4+x^2-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=1 \\ x^2=-\dfrac{4}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right..$$

Suy ra diện tích hình phẳng (H) cần tính là

$$S_{(H)}=\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}-\frac{\sqrt{3}}{2}x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Xét $I=\int_{-1}^{1}\sqrt{4-x^2}\,dx$, đặt $x=2\sin t$ ta được

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{4-4\sin^2 t}\,2\cos t\,\mathrm{d}t=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}2\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t=\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Do đó $S_{(H)}=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{2\pi+\sqrt{3}}{6}$.

Chú ý: Ta có thể bấm máy $S_{(H)}=\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2\right)\mathrm{d}x$ rồi so sánh kết quả với các phương án.

Câu 32: Cho $\int_{0}^{1}x\left[\ln(x+2)+\dfrac{1}{x+2}\right]\mathrm{d}x=\dfrac{a^2\ln 2-bc\ln 3+c}{4}$ với $a, b, c\in\mathbb{N}$. Tính $T=a+b+c$.

$\underline{\text{A}}$. $T=13$.　　B. $T=15$.　　C. $T=17$.　　D. $T=11$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases} u=\ln(x+2) \\ \mathrm{d}v=x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\dfrac{1}{x+2} \\ v=\dfrac{x^2-4}{2} \end{cases}$.

$$\int_0^1 x\left[\ln(x+2)+\frac{1}{x+2}\right]dx=\frac{x^2-4}{2}\ln(x+2)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x-2}{2}dx+\int_0^1\frac{x}{x+2}dx$$

$$=\frac{-3}{2}\ln 3+2\ln 2-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)\Big|_0^1+\left(x-2\ln(x+2)\right)\Big|_0^1$$

$$=\frac{-3}{2}\ln 3+2\ln 2+\frac{3}{4}+1-2(\ln 3-\ln 2)=\frac{-14\ln 3+16\ln 2+7}{4}$$. Suy ra: $\begin{cases}a=4\\b=2\\c=7\end{cases}$.

Vậy $T=a+b+c=13$.

Câu 33: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $3f(-x)-2f(x)=\tan^2 x$. Tính $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$

A. $1-\frac{\pi}{2}$. **B.** $\frac{\pi}{2}-1$. **C.** $1+\frac{\pi}{4}$. **D.** $2-\frac{\pi}{2}$.

Câu 34: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x).\left[f(x)\right]^{2018}=x.e^x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f(1)=1$. Hỏi phương trình $f(x)=-\frac{1}{e}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 35: Có bao nhiêu giá trị của tham số m trong khoảng $(0;6\pi)$ thỏa mãn $\int_0^m \frac{\sin x}{5+4\cos x}dx=\frac{1}{2}$?

A. 6. **B.** 12. **C.** 8. **D.** 4.

Câu 36: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $3f(-x)-2f(x)=\tan^2 x$. Tính $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$

A. $1-\frac{\pi}{2}$. **B.** $\frac{\pi}{2}-1$. **C.** $1+\frac{\pi}{4}$. **D.** $2-\frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1 : Ta có $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=(\tan x-x)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{\pi}{4}-\left(-1+\frac{\pi}{4}\right)=2-\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow 2-\frac{\pi}{2}=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left[3f(-x)-2f(x)\right]dx$.

Đặt $t=-x\Rightarrow dt=-dx$, đổi cận $x=-\frac{\pi}{4}\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow t=-\frac{\pi}{4}$.

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left[3f(-x)-2f(x)\right]dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left[3f(t)-2f(-t)\right]dt=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left[3f(x)-2f(-x)\right]dx$$

Suy ra, $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(-x)\mathrm{d}x \Rightarrow 2-\frac{\pi}{2} = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[3f(x)-2f(x)\right]\mathrm{d}x \Leftrightarrow 2-\frac{\pi}{2} = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x$

Vậy $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x = 2-\frac{\pi}{2}$

Cách 2: (Trắc nghiệm)

Chọn $f(x)=f(-x)=\tan^2 x$ (Thỏa mãn giả thiết).

Khi đó $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\mathrm{d}x = 2-\frac{\pi}{2}$

Câu 37: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x).\left[f(x)\right]^{2018} = x.\mathrm{e}^x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f(1)=1$. Hỏi phương trình $f(x)=-\frac{1}{\mathrm{e}}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int f'(x).\left[f(x)\right]^{2018}\mathrm{d}x = \int x.\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int \left[f(x)\right]^{2018}\mathrm{d}f(x) = (x-1).\mathrm{e}^x + C$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2019}.\left[f(x)\right]^{2019} = (x-1).\mathrm{e}^x + C \Leftrightarrow \left[f(x)\right]^{2019} = 2019(x-1).\mathrm{e}^x + 2019C$.

Do $f(1)=1$ nên $2019C=1$ hay $\left[f(x)\right]^{2019} = 2019(x-1).\mathrm{e}^x+1$.

Ta có: $f(x)=-\frac{1}{\mathrm{e}} \Leftrightarrow \left[f(x)\right]^{2019} = -\frac{1}{\mathrm{e}^{2019}} \Leftrightarrow 2019(x-1).\mathrm{e}^x + 1 + \frac{1}{\mathrm{e}^{2019}} = 0$.

Xét hàm số $g(x) = 2019(x-1).\mathrm{e}^x + 1 + \frac{1}{\mathrm{e}^{2019}}$ trên $\mathbb{R}$.

$g'(x) = 2019x.\mathrm{e}^x$, $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$, $g(0) = -2019+1+\frac{1}{\mathrm{e}^{2019}} < 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$,

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1+\frac{1}{\mathrm{e}^{2019}} > 0$.

Bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$1+\mathrm{e}^{-2019}$	$\searrow$	$g(0)$	$\nearrow$	$+\infty$

Do đó phương trình $f(x)=-\frac{1}{\mathrm{e}}$ có đúng 2 nghiệm.

Câu 38: Có bao nhiêu giá trị của tham số m trong khoảng $(0;6\pi)$ thỏa mãn $\int\limits_0^m \frac{\sin x}{5+4\cos x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$?

A. 6. **B.** 12. **C.** 8. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\frac{1}{2}=\int\limits_0^m \frac{\sin x}{5+4\cos x}\mathrm{d}x=-\int\limits_0^m \frac{1}{5+4\cos x}\mathrm{d}(\cos x)$

$=-\frac{1}{4}\int\limits_0^m \frac{1}{5+4\cos x}\mathrm{d}(5+4\cos x)=-\frac{1}{4}\ln|5+4\cos x|\Big|_0^m$.

Mà $5+4\cos x\ge 5-4>0 \Rightarrow \frac{1}{2}=-\frac{1}{4}\ln(5+4\cos x)\Big|_0^m=-\frac{1}{4}\ln\frac{5+4\cos m}{9}$

$\Rightarrow \ln\frac{5+4\cos m}{9}=-2 \Leftrightarrow \frac{5+4\cos m}{9}=\mathrm{e}^{-2} \Leftrightarrow \cos m=\frac{9\mathrm{e}^{-2}-5}{4}$

$\Leftrightarrow m=\pm\arccos\frac{9\mathrm{e}^{-2}-5}{4}+k2\pi \ (k\in\mathbb{Z})$.

Theo đề bài $m\in(0;6\pi)\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \arccos\frac{9\mathrm{e}^{-2}-5}{4}+k2\pi\in(0;6\pi)\Rightarrow \left[\begin{array}{l}k=0\\k=1\\k=2\end{array}\right.\\ -\arccos\frac{9\mathrm{e}^{-2}-5}{4}+k2\pi\in(0;6\pi)\Rightarrow \left[\begin{array}{l}k=1\\k=2\\k=3\end{array}\right.\end{array}\right.$.

Với mỗi giá trị k trong hai trường hợp trên ta được một giá trị m thỏa mãn.
Vậy có 6 giá trị của m thỏa mãn bài toán.

Câu 39: Biết rằng $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+4x+3}}=2\ln\left(\frac{2+\sqrt{a}}{1+\sqrt{b}}\right)$ với a, b là các số nguyên dương. Giá trị của $a+b$ bằng

A. 3. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 7.

Câu 40: Biết rằng $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+4x+3}}=2\ln\left(\frac{2+\sqrt{a}}{1+\sqrt{b}}\right)$ với a, b là các số nguyên dương. Giá trị của $a+b$ bằng

A. 3. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+4x+3}}=\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+1)(x+3)}}$

Đặt $t=\sqrt{x+3}+\sqrt{x+1}$

$\Rightarrow \mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x+3}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{(x+1)(x+3)}}\right)$

$$\Leftrightarrow \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sqrt{(x+1)(x+3)}}\right)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \frac{2\mathrm{d}t}{t} = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+1)(x+3)}}.$$

Khi $x=0$ thì $t=1+\sqrt{3}$; khi $x=1$ thì $t=2+\sqrt{2}$.

$$\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+4x+3}} = 2\int\limits_{1+\sqrt{3}}^{2+\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t} = 2\ln|t|\Big|_{1+\sqrt{3}}^{2+\sqrt{2}} = 2\ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow a+b=5.$$

Câu 41: Cho M, N là các số thực, xét hàm số $f(x)=M.\sin\pi x+N.\cos\pi x$ thỏa mãn $f(1)=3$ và $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{\pi}$. Giá trị của $f'\left(\frac{1}{4}\right)$ bằng

A. $\frac{5\pi\sqrt{2}}{2}$. **B.** $-\frac{5\pi\sqrt{2}}{2}$. **C.** $-\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

Câu 42: Cho M, N là các số thực, xét hàm số $f(x)=M.\sin\pi x+N.\cos\pi x$ thỏa mãn $f(1)=3$ và $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{\pi}$. Giá trị của $f'\left(\frac{1}{4}\right)$ bằng

A. $\frac{5\pi\sqrt{2}}{2}$. **B.** $-\frac{5\pi\sqrt{2}}{2}$. **C.** $-\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

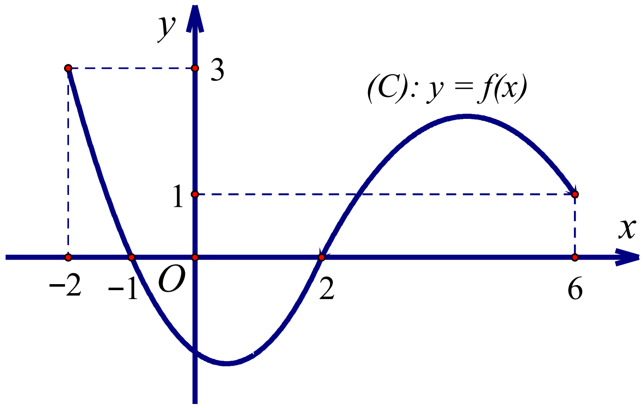
Ta có $f(1)=3 \Leftrightarrow M.\sin\pi + N.\cos\pi = 3 \Leftrightarrow N=-3$.

Mặt khác $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{\pi} \Leftrightarrow \int\limits_0^{\frac{1}{2}} (M.\sin\pi x - 3.\cos\pi x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{\pi}$

$$\Leftrightarrow \left(-\frac{M}{\pi}\cos\pi x - \frac{3}{\pi}\sin\pi x\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\pi} \Leftrightarrow -\frac{3}{\pi}+\frac{M}{\pi} = -\frac{1}{\pi} \Leftrightarrow M=2.$$

Vậy $f(x)=2\sin\pi x-3\cos\pi x$ nên $f'(x)=2\pi\cos\pi x+3\pi\sin\pi x \Rightarrow f'\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{5\pi\sqrt{2}}{2}$.

Câu 43: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của $f'(x)$ trên đoạn $[-2;6]$ như hình bên dưới. Khẳng định nào dưới đây đúng?



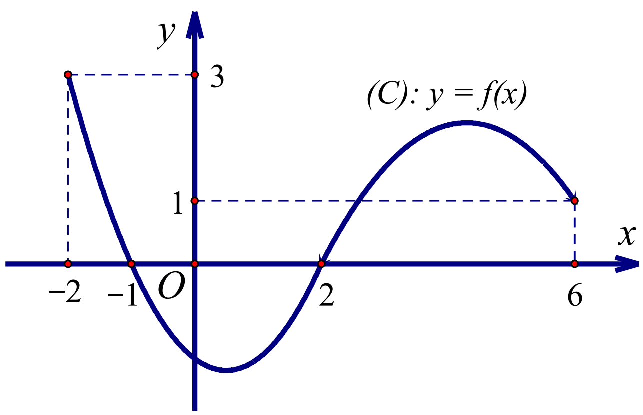
A. $f(-2)<f(-1)<f(2)<f(6)$. **B.** $f(2)<f(-2)<f(-1)<f(6)$.

C. $f(-2)<f(2)<f(-1)<f(6)$. **D.** $f(6)<f(2)<f(-2)<f(-1)$.

Câu 44: Biết $\int(\sin 2x-\cos 2x)^2\,\mathrm{d}x=x+\frac{a}{b}\cos 4x+C$, với a, b là các số nguyên dương, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và $C\in\mathbb{R}$. Giá trị của $a+b$ bằng

A. 5. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 45: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của $f'(x)$ trên đoạn $[-2;6]$ như hình bên dưới. Khẳng định nào dưới đây đúng?



A. $f(-2)<f(-1)<f(2)<f(6)$. **B.** $f(2)<f(-2)<f(-1)<f(6)$.

C. $f(-2)<f(2)<f(-1)<f(6)$. **D.** $f(6)<f(2)<f(-2)<f(-1)$.

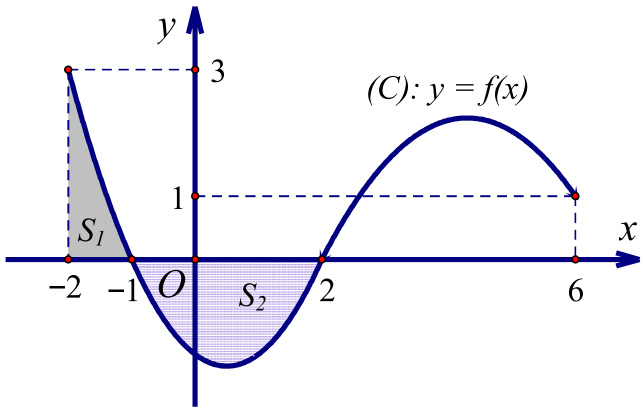
Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị của hàm $f'(x)$ trên đoạn $[-2;6]$ ta suy ra bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-2;6]$ như sau:

x	-2		-1		2		6
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(-2)$	$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$f(6)$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\begin{cases} f(-2) < f(-1) \\ f(2) < f(-1) \\ f(2) < f(6) \end{cases}$ nên A, D sai.



Chỉ cần so sánh $f(-2)$ và $f(2)$ nữa là xong.

Gọi S_1, S_2 là diện tích hình phẳng được tô đậm như trên hình vẽ.

Ta có:

$S_1 = \int_{-2}^{-1} |f'(x)| \mathrm{d}x = \int_{-2}^{-1} f'(x) dx = f(-1) - f(-2)$.

$S_2 = \int_{-1}^{2} |f'(x)| \mathrm{d}x = -\int_{-1}^{2} f'(x) \mathrm{d}x = f(-1) - f(2)$.

Dựa vào đồ thị ta thấy $S_1 < S_2$ nên $f(-1) - f(-2) < f(-1) - f(2) \Leftrightarrow f(-2) > f(2)$.

Câu 46: Biết $\int (\sin 2x - \cos 2x)^2 \mathrm{d}x = x + \frac{a}{b}\cos 4x + C$, với a, b là các số nguyên dương, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và $C \in \mathbb{R}$. Giá trị của $a+b$ bằng

A. 5. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int (\sin 2x - \cos 2x)^2 \mathrm{d}x = \int (1 - 2\sin 2x \cos 2x) \mathrm{d}x = \int (1 - \sin 4x) \mathrm{d}x = x + \frac{1}{4}\cos 4x + C$.

Mà $\int (\sin 2x - \cos 2x)^2 \mathrm{d}x = x + \frac{a}{b}\cos 4x + C$ nên $\begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow a + b = 5$.

Câu 47: Cho $y = f(x)$ là hàm số chẵn và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\int_0^1 f(x) \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^2 f(x) \mathrm{d}x = 1$. Giá trị của $\int_{-2}^{2} \frac{f(x)}{3^x + 1} \mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 48: Cho $y=f(x)$ là hàm số chẵn và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=1$. Giá trị của $\int_{-2}^{2}\frac{f(x)}{3^x+1}\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Sử dụng tính chất của hàm số chẵn

Ta có: $\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{b^x+1}\mathrm{d}x=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$, với $f(x)$ là hàm số chẵn và liên tục trên $[-a;a]$.

Áp dụng ta có:

$$\int_{-2}^{2}\frac{f(x)}{3^x+1}\mathrm{d}x=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=1+2=3$$

Cách 2: Do $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=1\Rightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$ và $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=2$

$$\Rightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=3.$$

Mặt khác $\int_{-2}^{2}\frac{f(x)}{3^x+1}\mathrm{d}x=\int_{-2}^{0}\frac{f(x)}{3^x+1}\mathrm{d}x+\int_0^2\frac{f(x)}{3^x+1}\mathrm{d}x$ và $y=f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}$

$\Rightarrow f(-x)=f(x)\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Xét $I=\int_{-2}^{0}\frac{f(x)}{3^x+1}\mathrm{d}x$. Đặt $t=-x\Rightarrow\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$

Suy ra $I=\int_{-2}^{0}\frac{f(x)}{3^x+1}\mathrm{d}x=-\int_2^0\frac{f(-t)}{3^{-t}+1}\mathrm{d}t=\int_0^2\frac{f(-t)}{\frac{1}{3^t}+1}\mathrm{d}t=\int_0^2\frac{3^t f(t)}{3^t+1}\mathrm{d}t=\int_0^2\frac{3^x f(x)}{3^x+1}\mathrm{d}x$

$$\Rightarrow\int_{-2}^{2}\frac{f(x)}{3^x+1}\mathrm{d}x=\int_{-2}^{0}\frac{f(x)}{3^x+1}\mathrm{d}x+\int_0^2\frac{f(x)}{3^x+1}\mathrm{d}x=\int_0^2\frac{3^x f(x)}{3^x+1}\mathrm{d}x+\int_0^2\frac{f(x)}{3^x+1}\mathrm{d}x=\int_0^2\frac{(3^x+1)f(x)}{3^x+1}\mathrm{d}x=$$
$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=3.$$

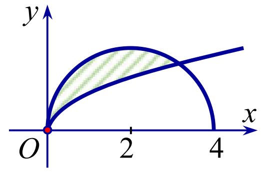
Câu 49: Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{x}$ và nửa đường tròn có phương trình $y=\sqrt{4x-x^2}$ (với $0\le x\le 4$) (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng

A. $\frac{4\pi+15\sqrt{3}}{24}$. **B.** $\frac{8\pi-9\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{10\pi-9\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{10\pi-15\sqrt{3}}{6}$.

Câu 50: Biết $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}x}{1+x+\sqrt{1+x^2}}=a\sqrt{3}+b\sqrt{2}+c+\frac{1}{2}\ln\left(3\sqrt{2}-3\right)$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=\frac{1}{2}$. **B.** $P=-1$. **C.** $P=-\frac{1}{2}$. **D.** $P=\frac{5}{2}$.

Câu 51: Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{x}$ và nửa đường tròn có phương trình $y=\sqrt{4x-x^2}$ (với $0\le x\le 4$) (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng



A. $\dfrac{4\pi+15\sqrt{3}}{24}$.   **B.** $\dfrac{8\pi-9\sqrt{3}}{6}$.   **C.** $\dfrac{10\pi-9\sqrt{3}}{6}$.   **D.** $\dfrac{10\pi-15\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\sqrt{4x-x^2}=\sqrt{x}\Leftrightarrow x^2-3x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\end{array}\right.$.

Vậy diện tích hình phẳng (H) là $S=\int\limits_0^3\left(\sqrt{4x-x^2}-\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^3\sqrt{4x-x^2}\,\mathrm{d}x-\int\limits_0^3\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

$=\int\limits_0^3\sqrt{4-(x-2)^2}\,\mathrm{d}x-2\sqrt{3}$.

Đặt $x-2=2\sin t$, $t\in\left[\dfrac{-\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]\Rightarrow \mathrm{d}x=2\cos t\,\mathrm{d}t$

Khi $x=0\Rightarrow t=-\dfrac{\pi}{2}$; $x=3\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{6}$.

Suy ra $S=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}2\sqrt{1-\sin^2 t}.2\cos t\,\mathrm{d}t-2\sqrt{3}=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}2(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t-2\sqrt{3}$

$=(2t+\sin 2t)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}-2\sqrt{3}$.

Câu 52: Biết $\int\limits_1^{\sqrt{3}}\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x+\sqrt{1+x^2}}=a\sqrt{3}+b\sqrt{2}+c+\dfrac{1}{2}\ln\left(3\sqrt{2}-3\right)$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=\dfrac{1}{2}$.   **B.** $P=-1$.   **C.** $P=-\dfrac{1}{2}$.   **D.** $P=\dfrac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int\limits_1^{\sqrt{3}}\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x+\sqrt{1+x^2}}=\int\limits_1^{\sqrt{3}}\dfrac{\left(1+x-\sqrt{1+x^2}\right)\mathrm{d}x}{2x}=\left(\dfrac{1}{2}\ln x+\dfrac{1}{2}x\right)\Big|_1^{\sqrt{3}}-\int\limits_1^{\sqrt{3}}\dfrac{x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x}{2x^2}$.

$=\dfrac{1}{2}\ln\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}-I$

Xét $I=\int\limits_1^{\sqrt{3}}\dfrac{x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x}{2x^2}$

Đặt $t=\sqrt{1+x^2}\Rightarrow t\,\mathrm{d}t=x\,\mathrm{d}x$

$$I=\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{t^2\mathrm{d}t}{2\left(t^2-1\right)}=\frac{1}{2}\left[t+\frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{2}\left[t+\frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1}\right]\Bigg|_{\sqrt{2}}^{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left[2-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[2-\sqrt{2}-\frac{1}{2}\ln 3-\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{2}-1\right)^2\right]=\frac{1}{2}\left[2-\sqrt{2}-\ln\sqrt{3}-\ln\left(\sqrt{2}-1\right)\right]$$

Vậy $\int_{1}^{\sqrt{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{2}\ln\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}-\frac{1}{2}\left[2-\sqrt{2}-\ln\sqrt{3}-\ln\left(\sqrt{2}-1\right)\right]$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(3\sqrt{2}-3\right)$$

Vậy $P=a+b+c=-\frac{1}{2}$.

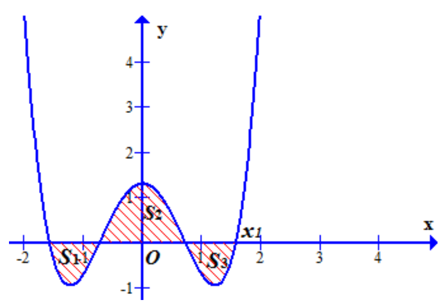
Câu 53: Hàm số $f\left(x\right)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm là $f'\left(x\right)=\left|x-1\right|$. Biết rằng $f\left(0\right)=3$. Tính $f\left(2\right)+f\left(4\right)$?

A. 10. **B.** 12. **C.** 4. **D.** 11.

Câu 54: Một chất điểm đang chuyển động với vận tốc $v_0=15\ m/s$ thì tăng tốc với gia tốc $a\left(t\right)=t^2+4t\left(m/s^2\right)$. Quãng đường chất điểm đó đi được trong khoảng thời gian 3 giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc là

A. $68,25\,m$. B. $67,25\,m$. C. $69,75\,m$. D. $70,25\,m$.

Câu 55: Cho hàm số $y=x^4-3x^2+m$ có đồ thị $\left(C_m\right)$, với m là tham số thực. Giả sử $\left(C_m\right)$ cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt như hình vẽ



Gọi S_1, S_2, S_3 là diện tích các miền gạch chéo được cho trên hình vẽ. Giá trị của m để $S_1+S_3=S_2$ là

A. $-\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $-\frac{5}{4}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

Câu 56: Hàm số $f\left(x\right)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm là $f'\left(x\right)=\left|x-1\right|$. Biết rằng $f\left(0\right)=3$. Tính $f\left(2\right)+f\left(4\right)$?

A. 10. **B.** 12. **C.** 4. **D.** 11.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=\begin{cases} x-1 & \text{khi } x\ge 1 \\ -(x-1) & \text{khi } x<1 \end{cases}$.

Khi $x\ge 1$ thì $f(x)=\int (x-1)\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}-x+C_1$.

Khi $x<1$ thì $f(x)=-\int (x-1)\,\mathrm{d}x=-\left(\frac{x^2}{2}-x\right)+C_2$.

Theo đề bài ta có $f(0)=3$ nên $C_2=3 \Rightarrow f(x)=-\left(\frac{x^2}{2}-x\right)+3$ khi $x<1$.

Mặt khác do hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=1$ nên

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1) \Leftrightarrow \lim_{x\to 1^-}\left[-\left(\frac{x^2}{2}-x\right)+3\right]=\lim_{x\to 1^+}\left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)+C_1\right]$$

$$\Leftrightarrow -\left(\frac{1}{2}-1\right)+3=\frac{1}{2}-1+C_1 \Leftrightarrow C_1=4.$$

Vậy khi $x\ge 1$ thì $f(x)=\frac{x^2}{2}-x+4 \Rightarrow f(2)+f(4)=12$.

Câu 57: Một chất điểm đang chuyển động với vận tốc $v_0=15\ m/s$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t)=t^2+4t\left(m/s^2\right)$. Quãng đường chất điểm đó đi được trong khoảng thời gian 3 giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc là

A. $68,25\,m$. B. $67,25\,m$. C. $69,75\,m$. D. $70,25\,m$.

Lời giải

Chọn C

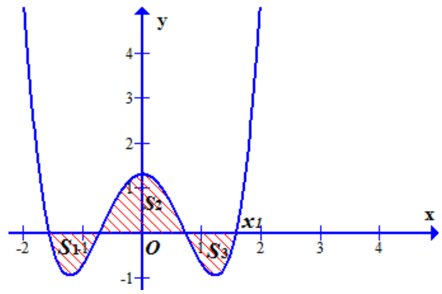
Ta có $v(t)=\int \left(t^2+4t\right)\mathrm{d}t=\frac{t^3}{3}+2t^2+C$.

Theo giả thiết $v_0=15\ m/s \Rightarrow C=15$.

Quãng đường chất điểm đó đi được trong khoảng thời gian 3 giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc là

$$S=\int_0^3\left(\frac{t^3}{3}+2t^2+15\right)\mathrm{d}t=\left.\left(\frac{t^4}{12}+\frac{2}{3}t^3+15t\right)\right|_0^3=69,75.$$

Câu 58: Cho hàm số $y=x^4-3x^2+m$ có đồ thị (C_m), với m là tham số thực. Giả sử (C_m) cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt như hình vẽ



Gọi S_1, S_2, S_3 là diện tích các miền gạch chéo được cho trên hình vẽ. Giá trị của m để $S_1+S_3=S_2$ là

A. $-\dfrac{5}{2}$. **B.** $\dfrac{5}{4}$. **C.** $-\dfrac{5}{4}$. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi x_1 là nghiệm dương lớn nhất của phương trình $x^4-3x^2+m=0$, ta có $m=-x_1^4+3x_1^2 \quad (1)$.

Vì $S_1+S_3=S_2$ và $S_1=S_3$ nên $S_2=2S_3$ hay $\int\limits_0^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x=0$.

Mà $\int\limits_0^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{x_1}\left(x^4-3x^2+m\right)\mathrm{d}x=\left.\left(\dfrac{x^5}{5}-x^3+mx\right)\right|_0^{x_1}=\dfrac{x_1^5}{5}-x_1^3+mx_1=x_1\left(\dfrac{x_1^4}{5}-x_1^2+m\right)$.

Do đó, $x_1\left(\dfrac{x_1^4}{5}-x_1^2+m\right)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x_1^4}{5}-x_1^2+m=0 \quad (2)$. (vì $x_1>0$)

Từ (1) và (2), ta có phương trình $\dfrac{x_1^4}{5}-x_1^2-x_1^4+3x_1^2=0 \Leftrightarrow -4x_1^4+10x_1^2=0 \Leftrightarrow x_1^2=\dfrac{5}{2}$.

Vậy $m=-x_1^4+3x_1^2=\dfrac{5}{4}$.

Câu 59: Ba Tí muốn làm cửa sắt được thiết kế như hình bên. Vòm cổng có hình dạng là một parabol. Giá $1\,\mathrm{m}^2$ cửa sắt là 660.000 đồng. Cửa sắt có giá (nghìn đồng) là:

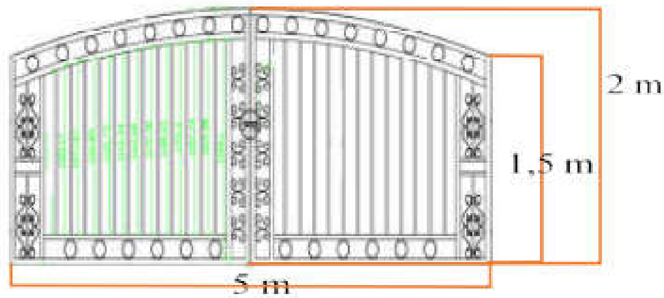
A. 6500. **B.** $\dfrac{55}{6}.10^3$. **C.** 5600. **D.** 6050.

Câu 60: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;\pi]\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x)=\tan x$, $\forall x\in\left(-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{5\pi}{4}\right)\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$, $f(0)=0$, $f(\pi)=1$. Tỉ số giữa $f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ và $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ bằng:

A. $2\left(\log_2 e+1\right)$. **B.** 2. **C.** $\dfrac{1(1+\ln 2)}{2+\ln 2}$. **D.** $2\left(1-\log_2 e\right)$.

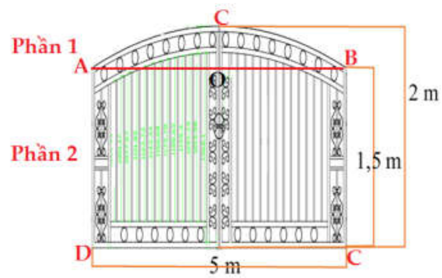
Câu 61: Ba Tí muốn làm cửa sắt được thiết kế như hình bên. Vòm cổng có hình dạng là một parabol. Giá 1m^2 cửa sắt là 660.000 đồng. Cửa sắt có giá (nghìn đồng) là:

A. 6500. **B.** $\frac{55}{6}.10^3$. **C.** 5600. **D.** 6050.



Hướng dẫn giải

Chọn D



Từ hình vẽ ta chia cửa rào sắt thành 2 phần như sau:

Khi đó $S = S_1 + S_2 = S_1 + 5.1,5 = S_1 + 7,5$

Để tính S_1 ta vận dụng kiến thức diện tích hình phẳng của tích phân.

Gắn hệ trục Oxy trong đó O trùng với trung điểm AB, $OB \subset Ox, OC \subset Oy$,

Theo đề bài ta có đường cong có dạng hình Parabol. Giả sử $(P): y = ax^2 + bx + c$

Khi đó: $\begin{cases} A\left(-\frac{5}{2};0\right) \in (P) \\ B\left(\frac{5}{2};0\right) \in (P) \\ C\left(0,\frac{1}{2}\right) \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{25}{4}a - \frac{5}{2}b + c = 0 \\ \frac{25}{4}a + \frac{5}{2}b + c = 0 \\ c = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{25} \\ b = 0 \\ c = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow (P): y = -\frac{2}{25}x^2 + \frac{1}{2}$

Diện tích $S_2 = 2\int_0^{2,5}\left(-\frac{2}{25}x^2 + \frac{1}{2}\right)\text{d}x = \frac{10}{6}\left(\text{m}^2\right) \Rightarrow S = \frac{55}{6}\left(\text{m}^2\right)$.

Vậy giá tiền cửa sắt là: $\frac{55}{6}$ x $660.000 = 6.050.000$ (đồng).

Câu 62: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[0;\pi\right]\backslash\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'\left(x\right)=\tan x$, $\forall x\in\left(-\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right)\backslash\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, $f\left(0\right)=0$, $f\left(\pi\right)=1$. Tỉ số giữa $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ và $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ bằng:

A. $2\left(\log_2 e+1\right)$. **B.** 2. **C.** $\frac{1\left(1+\ln 2\right)}{2+\ln 2}$. **D.** $2\left(1-\log_2 e\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $f\left(x\right)=\int \tan x\,dx=-\ln\left|\cos x\right|+C=\begin{cases}-\ln\cos x+C_1 & \text{khi } 0\le x<\frac{\pi}{2}\\ -\ln\left(-\cos x\right)+C_2 & \text{khi } \frac{\pi}{2}<x\le\pi\end{cases}$.

$f\left(0\right)=0\Rightarrow C_1=0$ và $f\left(\pi\right)=1\Rightarrow C_2=1$.

Khi đó $f\left(x\right)==\begin{cases}-\ln\cos x & \text{khi } 0\le x<\frac{\pi}{2}\\ -\ln\left(-\cos x\right)+1 & \text{khi } \frac{\pi}{2}<x\le\pi\end{cases}$.

Suy ra $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\left(\ln 2+1\right)$ và $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\ln 2$.

Vậy tỉ số cần tìm là $2\left(\log_2 e+1\right)$

Câu 63: Cho hàm số $y=\frac{x-m^2}{x+1}$ (với m là tham số khác 0) có đồ thị là $\left(C\right)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $\left(C\right)$ và hai trục tọa độ. Có bao nhiêu giá trị thực của m thỏa mãn $S=1$?

A. Không. **B.** Một. **C.** Ba. **D.** Hai.

Câu 64: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và với $\forall x\in\left[0;2018\right]$ ta có $f\left(x\right)>0$ và $f\left(x\right).f\left(2018-x\right)=1$. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_0^{2018}\frac{1}{1+f\left(x\right)}dx$ là

A. 2018. **B.** 0. **C.** 1009. **D.** 4016.

Câu 65: Cho hàm số $y=\frac{x-m^2}{x+1}$ (với m là tham số khác 0) có đồ thị là $\left(C\right)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $\left(C\right)$ và hai trục tọa độ. Có bao nhiêu giá trị thực của m thỏa mãn $S=1$?

A. Không. **B.** Một. **C.** Ba. **D.** Hai.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$x=0\ \Rightarrow y=-m^2<0$ (do $m\ne 0$).

$y=0\Rightarrow x=m^2>0$.

Vậy $S=\int\limits_0^{m^2}\left|\dfrac{x-m^2}{x+1}\right|\mathrm{d}x=\int\limits_0^{m^2}\left|1-\dfrac{1+m^2}{x+1}\right|\mathrm{d}x=\int\limits_0^{m^2}\left(\dfrac{1+m^2}{x+1}-1\right)\mathrm{d}x=\left(\left(1+m^2\right)\ln|x+1|-x\right)\Big|_0^{m^2}$

$=\left(1+m^2\right)\ln\left(m^2+1\right)-m^2$

Để $S=1$ thì $\left(1+m^2\right)\ln\left(m^2+1\right)-m^2=1\Leftrightarrow\left(1+m^2\right)\left(\ln\left(m^2+1\right)-1\right)=0$.

$\Leftrightarrow\ln\left(m^2+1\right)=1\Leftrightarrow m^2+1=e\Leftrightarrow m=\pm\sqrt{e-1}$

Câu 66: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và với $\forall x\in[0;2018]$ ta có $f(x)>0$ và $f(x).f(2018-x)=1$. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_0^{2018}\dfrac{1}{1+f(x)}\mathrm{d}x$ là

A. 2018. **B.** 0. **C.** 1009. **D.** 4016.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Xét tích phân $I=\int\limits_0^{2018}\dfrac{1}{1+f(x)}\mathrm{d}x$ (1).

Đặt $x=2018-t$, ta có $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$. Khi $x=0\Rightarrow t=2018$ và khi $x=2018\Rightarrow t=0$.

Khi đó $I=\int\limits_0^{2018}\dfrac{1}{1+f(2018-t)}\mathrm{d}t=\int\limits_0^{2018}\dfrac{1}{1+f(2018-x)}\mathrm{d}x$.

Mà $f(x).f(2018-x)=1$ nên $f(2018-x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

Suy ra $I=\int\limits_0^{2018}\dfrac{1}{1+f(2018-x)}\mathrm{d}x=\int\limits_0^{2018}\dfrac{f(x)}{1+f(x)}\mathrm{d}x$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $2I=\int\limits_0^{2018}\mathrm{d}x$ hay $I=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^{2018}\mathrm{d}x=1009$.

Câu 67: Cho hàm số $y=f(x)$, $\forall x\geq 0$, thỏa mãn $\begin{cases}f''(x).f(x)-2\left[f'(x)\right]^2+xf^3(x)=0\\ f'(0)=0;\ f(0)=1\end{cases}$. Tính $f(1)$.

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{6}{7}$. **D.** $\dfrac{7}{6}$.

Câu 68: Biết $\int\limits_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\left(\dfrac{1}{\ln^2 x}-\dfrac{1}{\ln x}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{a\mathrm{e}^2+b\mathrm{e}+c}{2}$, trong đó a, b, c là các số nguyên. Giá trị của $a^2+b^2+c^2$ bằng

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 9.

Câu 69: Cho hàm số $y=f(x)$, $\forall x\geq 0$, thỏa mãn $\begin{cases}f''(x).f(x)-2\left[f'(x)\right]^2+xf^3(x)=0\\ f'(0)=0;\ f(0)=1\end{cases}$. Tính $f(1)$.

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{6}{7}$. **D.** $\dfrac{7}{6}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f''(x).f(x)-2\left[f'(x)\right]^2+xf^3(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{f''(x).f(x)-2\left[f'(x)\right]^2}{f^3(x)}=-x$

$\Rightarrow \left[\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}\right]'=-x$

$\Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=-\dfrac{x^2}{2}+C$

$\Rightarrow \dfrac{f'(0)}{f^2(0)}=-\dfrac{0^2}{2}+C \Rightarrow C=0$.

Do đó $\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=-\dfrac{x^2}{2}$

$\Rightarrow \int\limits_0^1 \dfrac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=-\int\limits_0^1 \dfrac{x^2}{2}\mathrm{d}x$

$\Rightarrow -\dfrac{1}{f(x)}\bigg|_0^1=\left(-\dfrac{x^3}{6}\right)\bigg|_0^1$

$\Rightarrow -\dfrac{1}{f(1)}+\dfrac{1}{f(0)}=-\dfrac{1}{6}$

$\Rightarrow f(1)=\dfrac{6}{7}$.

Câu 70: Biết $\int\limits_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\left(\dfrac{1}{\ln^2 x}-\dfrac{1}{\ln x}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{a\mathrm{e}^2+b\mathrm{e}+c}{2}$, trong đó a, b, c là các số nguyên. Giá trị của $a^2+b^2+c^2$ bằng

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 9.

Lời giải

Chọn A

Xét tích phân: $\int\limits_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\dfrac{1}{\ln x}\mathrm{d}x$.

Đặt $u=\dfrac{1}{\ln x}\Rightarrow$; $\mathrm{d}u=-\dfrac{1}{x\ln^2 x}\mathrm{d}x$. $\mathrm{d}v=\mathrm{d}x$ chọn $v=x$.

Khi đó $\int\limits_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\dfrac{1}{\ln x}\mathrm{d}x=\dfrac{x}{\ln x}\bigg|_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}+\int\limits_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\dfrac{1}{\ln^2 x}\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int\limits_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\left(\dfrac{1}{\ln^2 x}-\dfrac{1}{\ln x}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{-\mathrm{e}^2+2\mathrm{e}}{2}$.

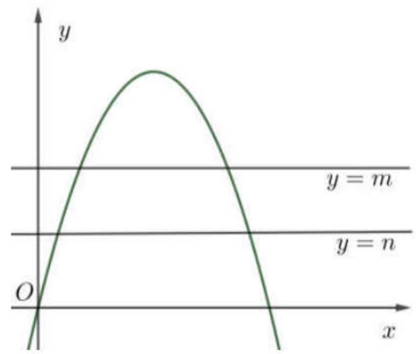
Do đó $\begin{cases} a=-1 \\ b=2 \\ c=0 \end{cases}$.

Vậy $a^2+b^2+c^2=5$

Câu 71: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=x^2-4x+3$ (P) và các tiếp tuyến kẻ từ điểm $A\left(\dfrac{3}{2};-3\right)$ đến đồ thị (P). Giá trị của S bằng

A. 9. **B.** $\frac{9}{8}$. **C.** $\frac{9}{4}$. **D.** $\frac{9}{2}$.

Câu 72: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-x^2+4x$ và trục hoành. Hai đường thẳng $y=m$ và $y=n$ chia (H) thành 3 phần có diện tích bằng nhau (tham khảo hình vẽ).



Giá trị biểu thức $T=(4-m)^3+(4-n)^3$ bằng

A. $T=\frac{320}{9}$. **B.** $T=\frac{75}{2}$. **C.** $T=\frac{512}{15}$. **D.** $T=450$.

Câu 73: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int \frac{f\left(\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x=\frac{2\left(\sqrt{x+1}+3\right)}{x+5}+C$. Nguyên hàm của hàm số $f(2x)$ trên tập $\mathbb{R}^+$ là:

A. $\frac{x+3}{2\left(x^2+4\right)}+C$. **B.** $\frac{x+3}{x^2+4}+C$. **C.** $\frac{2x+3}{4\left(x^2+1\right)}+C$. **D.** $\frac{2x+3}{8\left(x^2+1\right)}+C$.

Câu 74: Biết rằng $\int\limits_4^{a+\sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{-x^2+6x-5}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{6}$ trong đó a, b là các số nguyên dương và $4<a+\sqrt{b}<5$. Tổng $a+b$ bằng

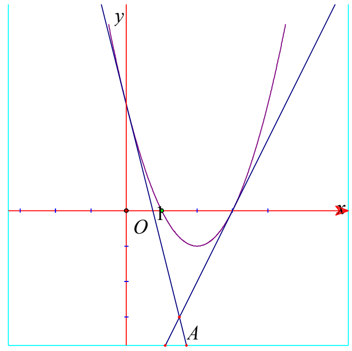
A. 5. **B.** 7. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 75: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=x^2-4x+3$ (P) và các tiếp tuyến kẻ từ điểm $A\left(\frac{3}{2};-3\right)$ đến đồ thị (P). Giá trị của S bằng

A. 9. **B.** $\frac{9}{8}$. **C.** $\frac{9}{4}$. **D.** $\frac{9}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C



Giả sử Δ là đường thẳng đi qua $A\left(\frac{3}{2};-3\right)$ và có hệ số góc k, khi đó $\Delta: y=k\left(x-\frac{2}{3}\right)-3$.

Để đường thẳng Δ là tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=x^2-4x+3$ thì hệ phương trình
$\begin{cases} 2x-4=k & (1) \\ x^2-4x+3=k\left(x-\frac{3}{2}\right)-3 & (2) \end{cases}$ có nghiệm

Thay (1) vào (2) ta được $x^2-4x+3=(2x-4)\left(x-\frac{3}{2}\right)-3 \Leftrightarrow x^2-3x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Với $x=0$ thì $k=-4$, khi đó phương trình tiếp tuyến là $y=-4x+3$.

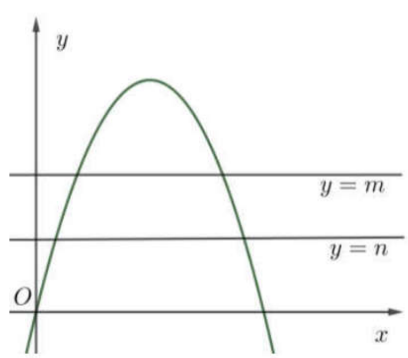
Với $x=3$ thì $k=2$, khi đó phương trình tiếp tuyến là $y=2x-9$.

Diện thích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=x^2-4x+3$ và hai tiếp tuyến $y=-4x+3$ và $y=2x-6$ là

$$S=\int_0^{\frac{3}{2}}\left(x^2-4x+3+4x-3\right)\mathrm{d}x+\int_{\frac{3}{2}}^{3}\left(x^2-4x+3-2x+6\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{3}{2}}x^2\mathrm{d}x+\int_{\frac{3}{2}}^{3}\left(x^2-6x+9\right)\mathrm{d}x$$

$$=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{\frac{3}{2}}+\left.\frac{(x-3)^3}{3}\right|_{\frac{3}{2}}^{3}=\frac{9}{4}.$$

Câu 76: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-x^2+4x$ và trục hoành. Hai đường thẳng $y=m$ và $y=n$ chia (H) thành 3 phần có diện tích bằng nhau (tham khảo hình vẽ).



Giá trị biểu thức $T=(4-m)^3+(4-n)^3$ bằng

A. $T=\dfrac{320}{9}$. **B.** $T=\dfrac{75}{2}$. **C.** $T=\dfrac{512}{15}$. **D.** $T=450$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Sử dụng công thức: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=ax^2+bx+c$ và trục hoành bằng $S=\dfrac{\sqrt{\Delta^3}}{6a^2}$, với $a\neq 0$ và $\Delta=b^2-4ac>0$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành $-x^2+4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=4\end{array}\right.$.

Diện tích hình (H) là $S=\int\limits_0^4\left(-x^2+4x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{32}{3}$.

Từ đó, diện tích S_1 giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-x^2+4x$ và đường thẳng $y=m$ là

$S_1=\dfrac{\sqrt{\Delta_1^3}}{6a}=\dfrac{\sqrt{(16-4m)^3}}{6}=\dfrac{1}{3}S$.

diện tích S_2 giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-x^2+4x$ và đường thẳng $y=n$ là

$S_2=\dfrac{\sqrt{\Delta_2^3}}{6a}=\dfrac{\sqrt{(16-4n)^3}}{6}=\dfrac{2}{3}S$.

Từ đó $\begin{cases}\dfrac{\sqrt{(16-4m)^3}}{6}=\dfrac{32}{9}\\ \dfrac{\sqrt{(16-4n)^3}}{6}=\dfrac{64}{9}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(4-m)^3=\dfrac{1}{4^3}\left(\dfrac{64}{3}\right)^2\\ (4-n)^3=\dfrac{1}{4^3}\left(\dfrac{128}{3}\right)^2\end{cases}$

Suy ra $T=(4-m)^3+(4-n)^3=\dfrac{320}{9}$.

Câu 77: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int\dfrac{f\left(\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x=\dfrac{2\left(\sqrt{x+1}+3\right)}{x+5}+C$. Nguyên hàm của hàm số $f(2x)$ trên tập $\mathbb{R}^+$ là:

A. $\dfrac{x+3}{2\left(x^2+4\right)}+C$. **B.** $\dfrac{x+3}{x^2+4}+C$. **C.** $\dfrac{2x+3}{4\left(x^2+1\right)}+C$. **D.** $\dfrac{2x+3}{8\left(x^2+1\right)}+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Theo đề ra ta có:

$\int\dfrac{f\left(\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x=\dfrac{2\left(\sqrt{x+1}+3\right)}{x+5}+C\Leftrightarrow 2\int f\left(\sqrt{x+1}\right)\mathrm{d}\left(\sqrt{x+1}\right)=\dfrac{2\left(\sqrt{x+1}+3\right)}{\left(\sqrt{x+1}\right)^2+4}+C$.

Hay $2\int f(t)\mathrm{d}t=\dfrac{2(t+3)}{t^2+4}+C\Rightarrow\int f(t)\mathrm{d}t=\dfrac{t+3}{t^2+4}+C'$.

Suy ra $\int f(2x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int f(2x)\mathrm{d}(2x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2x+3}{(2x)^2+4}+C_1\right)=\dfrac{2x+3}{8x^2+8}+C$

Câu 78: Biết rằng $\int\limits_4^{a+\sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{-x^2+6x-5}}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{6}$ trong đó a, b là các số nguyên dương và $4 < a+\sqrt{b} < 5$. Tổng $a+b$ bằng

A. 5. **B.** 7. **C.** 4. **D.** 6.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $\int\limits_4^{a+\sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{-x^2+6x-5}}\mathrm{d}x = \int\limits_4^{a+\sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{4-(x-3)^2}}\mathrm{d}x$.

Đặt $x-3 = 2\sin t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, $\mathrm{d}x = 2\cos t\mathrm{d}t$.

Đổi cận $x=4 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$, $x = a+\sqrt{b} \Rightarrow t = \arcsin\frac{a+\sqrt{b}-3}{2} = m$.

$\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{m} \frac{2\cos t}{\sqrt{4-4\sin^2 t}}\mathrm{d}t = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{m}\mathrm{d}t = t\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{m} = m - \frac{\pi}{6}$.

Theo đề ta có $\mathrm{m} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \arcsin\frac{a+\sqrt{b}-3}{2} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{a+\sqrt{b}-3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow a+\sqrt{b} = \sqrt{3}+3$.

Do đó $a=3$, $b=3$, $a+b=6$.

Câu 79: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_2^5 f(x)\mathrm{d}x = 4$, $f(5)=3$, $f(2)=2$. Tính

$I = \int\limits_1^2 x^3 f'(x^2+1)\mathrm{d}x$

A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 6.

Câu 80: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_2^5 f(x)\mathrm{d}x = 4$, $f(5)=3$, $f(2)=2$. Tính

$I = \int\limits_1^2 x^3 f'(x^2+1)\mathrm{d}x$

A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = x^2+1 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x$.

$x=1 \Rightarrow t=2$; $x=2 \Rightarrow t=5$. Khi đó $I = \frac{1}{2}\int\limits_2^5 (t-1)f'(t)\mathrm{d}t$.

Đặt $u = t-1 \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}t$; $\mathrm{d}v = f'(t)\mathrm{d}t$, chọn $v = f(t)$.

$I = \frac{1}{2}(t-1)f(t)\Big|_2^5 - \frac{1}{2}\int\limits_2^5 f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(4f(5)-f(2)\right) - 2 = 3$.

Câu 81: Biết $\int\limits_0^3 x\ln(x^2+16)\mathrm{d}x = a\ln 5 + b\ln 2 + \frac{c}{2}$ trong đó a,b,c là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $T = a+b+c$.

A. $T=2$. **B.** $T=-16$. **C.** $T=-2$. **D.** $T=16$.

Câu 82: Tính thể tích vật thể tròn xoay tạo bởi phép quay xung quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=0$, $y=\sqrt{x}$, $y=x-2$.

A. $\frac{8\pi}{3}$. **B.** $\frac{16\pi}{3}$. **C.** 10π. **D.** 8π.

Câu 83: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=11$ và hai đường thẳng (d_1): $\frac{x-5}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{2}$, (d_2): $\frac{x+1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$. Viết phương trình tất cả các mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) đồng thời song song với hai đường thẳng (d_1), (d_2).

A. (α): $3x-y-z-15=0$.

B. (α): $3x-y-z+7=0$.

C. (α): $3x-y-z-7=0$.

D. (α): $3x-y-z+7=0$ hoặc (α): $3x-y-z-15=0$.

Câu 84: Cho $f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2018$ và $g(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $g(x)+g(-x)=1\ \forall x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $\int_{-1}^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x$

A. $I=2018$. **B.** $I=\frac{1009}{2}$. **C.** $I=4036$. **D.** $I=1008$.

Câu 85: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x^2+x-2}$; $f(0)=\frac{1}{3}$ và $f(-3)-f(3)=0$. Tính giá trị biểu thức $T=f(-4)+f(-1)-f(4)$.

A. $\frac{1}{3}\ln 2+\frac{1}{3}$. **B.** $\ln 80+1$. **C.** $\frac{1}{3}\ln\left(\frac{4}{5}\right)+\ln 2+1$. **D.** $\frac{1}{3}\ln\left(\frac{8}{5}\right)+1$.

Câu 86: Biết $\int_0^1 \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{5x^2+4}}=\frac{a}{b}$ với a, b là các số nguyên dương và phân thức $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính giá trị của biểu thức $T=a^2+b^2$.

A. $T=13$. **B.** $T=26$. **C.** $T=29$. **D.** $T=34$.

Câu 87: Biết $\int_0^3 x\ln\left(x^2+16\right)\mathrm{d}x=a\ln 5+b\ln 2+\frac{c}{2}$ trong đó a,b,c là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $T=a+b+c$.

A. $T=2$. **B.** $T=-16$. **C.** $T=-2$. **D.** $T=16$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\begin{cases} u=\ln\left(x^2+16\right) \\ \mathrm{d}v=x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\frac{2x}{x^2+16}\mathrm{d}x \\ v=\frac{x^2+16}{2} \end{cases}$.

Ta có: $\int_0^3 x\ln\left(x^2+16\right)\mathrm{d}x = \frac{x^2+16}{2}\ln\left(x^2+16\right)\Big|_0^3 - \int_0^3 x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2+16}{2}\ln\left(x^2+16\right)\Big|_0^3 - \frac{x^2}{2}\Big|_0^3$

$= \frac{25}{2}\ln 25 - 8\ln 16 - \frac{9}{2} = 25\ln 5 - 32\ln 2 - \frac{9}{2}$. Do đó $a = 25, b = -32, c = -9 \Rightarrow T = -16$.

Câu 88: Tính thể tích vật thể tròn xoay tạo bởi phép quay xung quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 0$, $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$.

A. $\frac{8\pi}{3}$. **B.** $\frac{16\pi}{3}$. **C.** 10π. **D.** 8π.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\begin{cases} 0 = \sqrt{x} \Rightarrow x = 0 \\ 0 = x - 2 \Rightarrow x = 2 \\ \sqrt{x} = x - 2 \Rightarrow x = 4 \end{cases}$

Dựa vào hoành độ giao điểm của ba đường ta có diện tích hình phẳng gồm hai phần. Phần thứ nhất giới hạn bởi $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ và $x = 0$; $x = 2$. Phần thứ hai giới hạn bởi $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$ và $x = 2$; $x = 4$.

Thể tích vật thể bằng:

$$V = \pi\int_0^2 \left(\sqrt{x}\right)^2 \mathrm{d}x + \pi\int_2^4 \left|(x-2)^2 - \sqrt{x}^2\right| \mathrm{d}x = \pi\int_0^2 x\mathrm{d}x + \pi\int_2^4 \left(x - (x-2)^2\right)\mathrm{d}x$$

$$= \pi\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 + \pi\left(\frac{x^2}{2} - \frac{(x-2)^3}{3}\right)\Bigg|_2^4 = \frac{16\pi}{3}.$$

Câu 89: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 11$ và hai đường thẳng (d_1): $\frac{x-5}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{2}$, (d_2): $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$. Viết phương trình tất cả các mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) đồng thời song song với hai đường thẳng (d_1), (d_2).

A. (α): $3x - y - z - 15 = 0$.

B. (α): $3x - y - z + 7 = 0$.

C. (α): $3x - y - z - 7 = 0$.

D. (α): $3x - y - z + 7 = 0$ hoặc (α): $3x - y - z - 15 = 0$.

Lời giải

Chọn D

Mặt phẳng (α) song song với hai đường thẳng (d_1), (d_2) nên có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\overrightarrow{u_{d_2}}, \overrightarrow{u_{d_1}}\right] = (3;-1;-1)$ do đó (α): $3x - y - z + d = 0$.

Mặt khác: (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) tâm $I(1;-1;0)$, bán kính $R = \sqrt{11}$ nên:

$$d\left(I,(\alpha)\right) = R \Leftrightarrow \frac{|4+d|}{\sqrt{11}} = \sqrt{11} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4 + d = 11 \\ 4 + d = -11 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d = 7 \\ d = -15 \end{array}\right..$$

Vậy có 2 mặt phẳng thoả yêu cầu bài toán là: (α): $3x - y - z + 7 = 0$ hoặc (α): $3x - y - z - 15 = 0$.

Câu 90: Cho $f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2018$ và $g(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $g(x)+g(-x)=1\ \forall x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{g}(x)\mathrm{d}x$

A. $I=2018$. **B.** $I=\dfrac{1009}{2}$. **C.** $I=4036$. **D.** $I=1008$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $I=\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{g}(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{g}(-x)\mathrm{d}x$.

$2I=\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{g}(x)\mathrm{d}x+\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{g}(-x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^1 f(x)\left[\mathrm{g}(x)+g(-x)\right]\mathrm{d}x=\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

Vậy $\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{g}(x)\mathrm{d}x=2018$.

Câu 91: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+x-2}$; $f(0)=\dfrac{1}{3}$ và $f(-3)-f(3)=0$. Tính giá trị biểu thức $T=f(-4)+f(-1)-f(4)$.

A. $\dfrac{1}{3}\ln 2+\dfrac{1}{3}$. **B.** $\ln 80+1$. **C.** $\dfrac{1}{3}\ln\left(\dfrac{4}{5}\right)+\ln 2+1$. **D.** $\dfrac{1}{3}\ln\left(\dfrac{8}{5}\right)+1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$f'(x)=\frac{1}{(x-1)(x+2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right).$$

$$I=f(-3)-f(-4)=\int_{-4}^{-3} f'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|\Bigg|_{-4}^{-3}=\frac{1}{3}\ln\frac{8}{5}.$$

$$J=f(0)-f(-1)=\int_{-1}^{0} f'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|\Bigg|_{-1}^{0}=-\frac{2}{3}\ln 2.$$

$$K=f(4)-f(3)=\int_{3}^{4} f'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|\Bigg|_{3}^{4}=\frac{1}{3}\ln\frac{5}{4}.$$

$$-I-J-K=f(-4)-f(-3)+f(-1)-f(0)+f(3)-f(4)$$

$$=\left[f(-4)+f(-1)-f(4)\right]-f(0)-\left[f(-3)-f(3)\right].$$

$$f(-4)+f(-1)-f(4)=-I-J-K+f(0)+\left[f(-3)-f(3)\right].$$

$$T=f(-4)+f(-1)-f(4)=-\frac{1}{3}\ln\frac{8}{5}+\frac{2}{3}\ln 2-\frac{1}{3}\ln\frac{5}{4}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{1}{3}$$

Câu 92: Biết $\int\limits_0^1 \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{5x^2+4}} = \frac{a}{b}$ với a, b là các số nguyên dương và phân thức $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính giá trị của biểu thức $T = a^2 + b^2$.

A. $T = 13$. **B.** $T = 26$. **C.** $T = 29$. **D.** $T = 34$.

Lời giải

Chọn B

Xét $\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{5x^2+4}} = \frac{1}{10}\int \frac{\mathrm{d}\left(5x^2+4\right)}{\sqrt{5x^2+4}} = \frac{1}{5}\sqrt{5x^2+4} + C$.

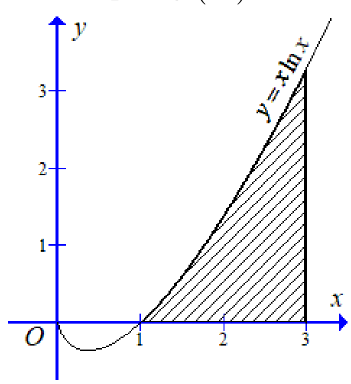
Suy ra $\int\limits_0^1 \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{5x^2+4}} = \frac{1}{5}\sqrt{5x^2+4}\Big|_0^1 = \frac{1}{5} = \frac{a}{b}$.

Do đó $T = a^2 + b^2 = 26$.

Câu 93: Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int\limits_1^9 \frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 4$ và $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x = 2$. Tính $I = \int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I = 10$. **B.** $I = 6$. **C.** $I = 4$. **D.** $I = 2$.

Câu 94: Cho hình phẳng (H) như hình vẽ. Tính diện tích hình phẳng (H).



A. $\frac{9}{2}\ln 3 - 2$. **B.** 1. **C.** $\frac{9}{2}\ln 3 - \frac{3}{2}$. **D.** $\frac{9}{2}\ln 3 + 2$.

Câu 95: Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int\limits_1^9 \frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 4$ và $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x = 2$. Tính $I = \int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I = 10$. **B.** $I = 6$. **C.** $I = 4$. **D.** $I = 2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int\limits_1^9 \frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 4$, đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x \Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$

đổi cận $x = 1 \Rightarrow t = 1$, $x = 9 \Rightarrow t = 3$

Do đó ta có: $\int\limits_1^3 \frac{f(t)}{t}2t\,\mathrm{d}t = 4 \Leftrightarrow \int\limits_1^3 f(t)\mathrm{d}t = 2$ (1)

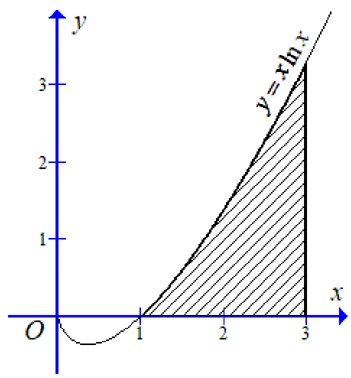
Ta có: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x.dx = 4$, đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x.dx$

đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$

Do đó ta có: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x.dx = 2 \Leftrightarrow \int_0^1 f(t)dt = 2$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 f(t)dt = 4.$.

Câu 96: Cho hình phẳng (H) như hình vẽ. Tính diện tích hình phẳng (H).



A. $\frac{9}{2}\ln 3 - 2$. **B.** 1. **C.** $\frac{9}{2}\ln 3 - \frac{3}{2}$. **D.** $\frac{9}{2}\ln 3 + 2$.

Lời giải

Chọn A

Diện tích hình phẳng (H) là: $S = \int_1^3 x\ln x dx$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}dx \\ v = \frac{1}{2}x^2 \end{cases}$, nên:

$$S = \int_1^3 x\ln x dx = \frac{1}{2}x^2\ln x\Big|_1^3 - \frac{1}{2}\int_1^3 x dx = \frac{1}{2}x^2\ln x\Big|_1^3 - \frac{1}{4}x^2\Big|_1^3 = \frac{9}{2}\ln 3 - 2.$$

Câu 97: Biết rằng $I = \int_3^4 \frac{x^2 - x + 2}{x + \sqrt{x-2}}dx = \frac{a - 4\sqrt{b}}{c}$. Với a, b, c là số nguyên dương. Tính $a + b + c$.

A. 39. **B.** 27. **C.** 33. **D.** 41.

Câu 98: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R và $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)dx = 4\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}dx = 2$. Tính $I = \int_0^1 f(x)dx$.

A. $I = 6$. **B.** $I = 2$. **C.** $I = 3$. **D.** $I = 1$.

Câu 99: Biết rằng $I = \int_3^4 \frac{x^2 - x + 2}{x + \sqrt{x-2}}dx = \frac{a - 4\sqrt{b}}{c}$. Với a, b, c là số nguyên dương. Tính $a + b + c$.

A. 39. **B.** 27. **C.** 33. **D.** 41.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int\limits_3^4 \frac{x^2-x+2}{x+\sqrt{x-2}}\mathrm{d}x = \int\limits_3^4\left(x-\sqrt{x-2}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}\left(\sqrt{x-2}\right)^3\right)\Bigg|_3^4 = \frac{25-8\sqrt{2}}{6} = \frac{25-4\sqrt{8}}{6}$

Suy ra $a=25$, $b=8$, $c=6$. Vậy $a+b+c=39$.

Câu 100: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R và $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\mathrm{d}x = 4\int\limits_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x = 2$. Tính $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=6$. **B.** $I=2$. **C.** $I=3$. **D.** $I=1$.

Lời giải

Chọn A

Từ $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\mathrm{d}x = 4$; Ta đặt $t=\tan x$ ta được $\int\limits_0^1 \frac{f(t)}{t^2+1}\mathrm{d}t = 4$

Từ $\int\limits_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x = 2 \Leftrightarrow \int\limits_0^1 \frac{\left(x^2+1-1\right)f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x = 2 \Leftrightarrow \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x = 2$

$\Rightarrow \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2 + \int\limits_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x = 2+4=6$.

Câu 101: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2$, $y=\frac{x^2}{8}$, $y=\frac{27}{x}$.

A. $\frac{63}{8}$. **B.** $27\ln 2-\frac{63}{8}$. **C.** $27\ln 2$. **D.** $27\ln 2-\frac{63}{4}$.

Câu 102: Cho số hữu tỷ dương m thỏa mãn $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2m}} x.\cos mx\mathrm{d}x = \frac{\pi-2}{2}$. Hỏi số m thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

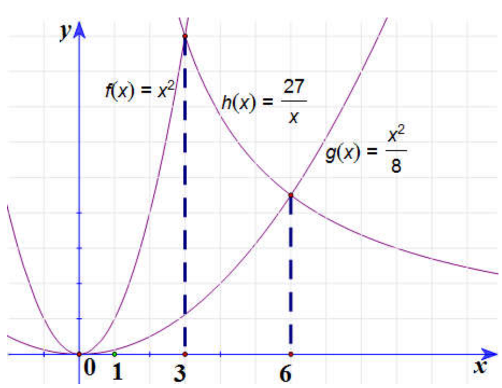
A. $\left(\frac{7}{4};2\right)$. **B.** $\left(0;\frac{1}{4}\right)$. **C.** $\left(1;\frac{6}{5}\right)$. **D.** $\left(\frac{5}{6};\frac{8}{7}\right)$.

Câu 103: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2$, $y=\frac{x^2}{8}$, $y=\frac{27}{x}$.

A. $\frac{63}{8}$. **B.** $27\ln 2-\frac{63}{8}$. **C.** $27\ln 2$. **D.** $27\ln 2-\frac{63}{4}$.

Lời giải

Chọn C



Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$x^2=\dfrac{27}{x}\Leftrightarrow x=3$; $x^2=\dfrac{x^2}{8}\Leftrightarrow x=0$; $\dfrac{x^2}{8}=\dfrac{27}{x}\Leftrightarrow x=6$.

Ta có : $S_{HP}=\int\limits_0^3\left(x^2-\dfrac{x^2}{8}\right)\mathrm{d}x+\int\limits_3^6\left(\dfrac{27}{x}-\dfrac{x^2}{8}\right)\mathrm{d}x$.

$S_{HP}=\left(\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^3}{24}\right)\Bigg|_0^3+\left(27\ln|x|-\dfrac{x^3}{24}\right)\Bigg|_3^6=\dfrac{63}{8}+27\ln 2-\dfrac{63}{8}=27\ln 2$.

Câu 104: Cho số hữu tỷ dương m thỏa mãn $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2m}}x.\cos mx\mathrm{d}x=\dfrac{\pi-2}{2}$. Hỏi số m thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $\left(\dfrac{7}{4};2\right)$. **B.** $\left(0;\dfrac{1}{4}\right)$. **C.** $\left(1;\dfrac{6}{5}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{5}{6};\dfrac{8}{7}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=\cos mx\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{1}{m}\sin mx\end{cases}$.

Suy ra $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2m}}x.\cos mx\mathrm{d}x=\dfrac{x}{m}\sin mx\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2m}}-\dfrac{1}{m}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2m}}\sin mx\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2m^2}+\dfrac{1}{m^2}.\cos mx\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2m}}=\left(\dfrac{\pi-2}{2}\right).\dfrac{1}{m^2}$.

Theo giả thiết ta có $\left(\dfrac{\pi-2}{2}\right).\dfrac{1}{m^2}=\dfrac{\pi-2}{2}\Leftrightarrow m=\pm1$.

Vì m là số hữu tỷ dương nên $m=1\in\left(\dfrac{5}{6};\dfrac{8}{7}\right)$.

Câu 105: Cho biết $\int\limits_0^1\dfrac{x^2e^x}{(x+2)^2}\mathrm{d}x=\dfrac{a}{b}.e+c$ với a, c là các số nguyên, b là số nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a-b+c$.

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** -3.

Câu 106: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=(x-3)^2$, trục tung và trục hoành. Gọi k_1, k_2 $(k_1>k_2)$ là hệ số góc của hai đường thẳng cùng đi qua điểm $A(0;9)$ và chia (H) làm ba phần có diện tích bằng nhau. Tính k_1-k_2.

A. $\dfrac{13}{2}$. **B.** 7. **C.** $\dfrac{25}{4}$. **D.** $\dfrac{27}{4}$.

Câu 107: Cho biết $\int\limits_0^1\dfrac{x^2e^x}{(x+2)^2}\mathrm{d}x=\dfrac{a}{b}.e+c$ với a, c là các số nguyên, b là số nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a-b+c$.

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** -3.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt $t=x+2\Rightarrow\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$, đổi cận $x=0\Rightarrow t=2$, $x=1\Rightarrow t=3$.

Ta có $I=\int\limits_0^1 \frac{x^2e^x}{(x+2)^2}dx=\int\limits_2^3 \frac{(t-2)^2e^{t-2}}{t^2}dt=\int\limits_2^3\left(1-\frac{4}{t}+\frac{4}{t^2}\right)e^{t-2}dt=\int\limits_2^3 e^{t-2}dt+\int\limits_2^3\left(-\frac{4}{t}+\frac{4}{t^2}\right)e^{t-2}dt$

+ Tính $I_1=\int\limits_2^3 e^{t-2}dt=e^{t-2}\Big|_2^3=e-1$.

+ Tính $I_2=\int\limits_2^3\left(-\frac{4}{t}+\frac{4}{t^2}\right)e^{t-2}dt$.

Đặt $u=\frac{4}{t}\Rightarrow du=-\frac{4}{t^2}dt$, $dv=e^{t-2}dt\Rightarrow v=e^{t-2}$

Ta có $\int\limits_2^3\frac{4}{t}e^{t-2}dt=\frac{4}{t}.e^{t-2}\Big|_2^3+\int\limits_2^3\frac{4}{t^2}e^{t-2}dt\Rightarrow I_2=\int\limits_2^3\left(-\frac{4}{t}+\frac{4}{t^2}\right)e^{t-2}dt=-\frac{4}{3}e+2$.

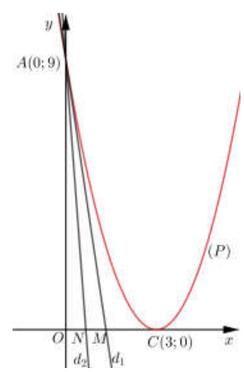
Suy ra $I=\frac{-1}{3}e+1\Rightarrow a=-1$, $b=3$, $c=1$. Vậy $a-b+c=3$.

Câu 108: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=(x-3)^2$, trục tung và trục hoành. Gọi k_1, k_2 $(k_1>k_2)$ là hệ số góc của hai đường thẳng cùng đi qua điểm $A(0;9)$ và chia (H) làm ba phần có diện tích bằng nhau. Tính k_1-k_2.

A. $\frac{13}{2}$. **B.** 7. **C.** $\frac{25}{4}$. **D.** $\frac{27}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D



Gọi $d_1: y=k_1x+9$, $d_2: y=k_2x+9$ $(k_1>k_2)$.

Gọi $M=d_1\cap Ox\Rightarrow M\left(-\frac{9}{k_1};0\right)$; $N=d_2\cap Ox\Rightarrow N\left(-\frac{9}{k_2};0\right)$ $\left(-\frac{9}{k_2}<-\frac{9}{k_1}\right)$

Giao điểm của $(P): y=(x-3)^2$ với hai trục tọa độ lần lượt là $C(3;0)$, $A(0;9)$.

Theo giả thiết ta có $S_{\Delta AON}=S_{\Delta ANM}\Leftrightarrow OM=2ON\Leftrightarrow -\frac{9}{k_1}=-\frac{18}{k_2}\Leftrightarrow k_2=2k_1$.

Lại có $S_{(H)}=3S_{\Delta AON}\Leftrightarrow \int\limits_0^3(x-3)^2dx=3.\frac{1}{2}.OA.ON\Leftrightarrow 9=-\frac{243}{2k_2}\Leftrightarrow k_2=-\frac{27}{2}$.

Suy ra $k_1=-\frac{27}{4}\Rightarrow k_1-k_2=\frac{27}{4}$.

Câu 109: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[1;3\right]$ thỏa mãn $f\left(4-x\right)=f\left(x\right),\forall x\in\left[1;3\right]$ và $\int_1^3 xf\left(x\right)\mathrm{d}x=-2$. Giá trị $\int_1^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 2. **B.** -1. **C.** -2. **D.** 1.

Câu 110: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[1;3\right]$ thỏa mãn $f\left(4-x\right)=f\left(x\right),\forall x\in\left[1;3\right]$ và $\int_1^3 xf\left(x\right)\mathrm{d}x=-2$. Giá trị $\int_1^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 2. **B.** -1. **C.** -2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Xét $I=\int_1^3 xf(x)\mathrm{d}x$ (1).

Đặt $x=4-t$, ta có $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$; $x=1\Rightarrow t=3$, $x=3\Rightarrow t=1$.

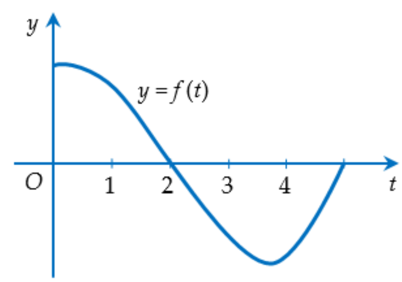
Suy ra $I=\int_1^3 (4-t)f(4-t)\mathrm{d}t=\int_1^3 (4-t)f(t)\mathrm{d}t$, hay $I=\int_1^3 (4-x)f(x)dx$ (2).

Cộng (1) và (2) vế theo vế ta được $2I=\int_1^3 4f(x)dx\Rightarrow\int_1^3 f(x)dx=\frac{I}{2}=-1$.

Câu 111: Biết $\int\frac{x^2+1}{x^3-6x^2+11x-6}\mathrm{d}x=\ln\left|(x-1)^m(x-2)^n(x-3)^p\right|+C$. Tính $4\left(m+n+p\right)$.

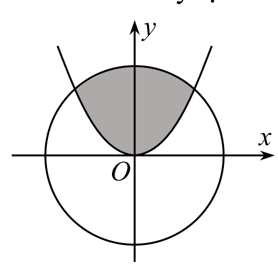
A. 5. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 112: Xét hàm số $F\left(x\right)=\int_2^x f\left(t\right)\mathrm{d}t$ trong đó hàm số $y=f\left(t\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Trong các giá trị dưới đây, giá trị nào là lớn nhất?



A. $F\left(1\right)$. **B.** $F\left(2\right)$. **C.** $F\left(3\right)$. **D.** $F\left(0\right)$.

Câu 113: Cho $\left(H\right)$ là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=x^2$ và đường tròn $x^2+y^2=2$ (phần tô đậm trong hình bên). Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay $\left(H\right)$ quanh trục hoành.



A. $V=\frac{44\pi}{15}$. **B.** $V=\frac{22\pi}{15}$. **C.** $V=\frac{5\pi}{3}$. **D.** $V=\frac{\pi}{5}$.

Câu 114: Cho $I_n=\int \tan^n x\mathrm{d}x$ với $n\in\mathbb{N}$. Khi đó $I_0+I_1+2\left(I_2+I_3+...+I_8\right)+I_9+I_{10}$ bằng

A. $\sum\limits_{r=1}^{9}\frac{(\tan x)^r}{r}+C$. **B.** $\sum\limits_{r=1}^{9}\frac{(\tan x)^{r+1}}{r+1}+C$. **C.** $\sum\limits_{r=1}^{10}\frac{(\tan x)^r}{r}+C$. **D.** $\sum\limits_{r=1}^{10}\frac{(\tan x)^{r+1}}{r+1}+C$.

Câu 115: Biết $\int\frac{x^2+1}{x^3-6x^2+11x-6}\mathrm{d}x=\ln\left|(x-1)^m(x-2)^n(x-3)^p\right|+C$. Tính $4(m+n+p)$.

A. 5. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\frac{x^2+1}{x^3-6x^2+11x-6}=\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}$

$\Leftrightarrow\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

$\Leftrightarrow x^2+1=A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)$

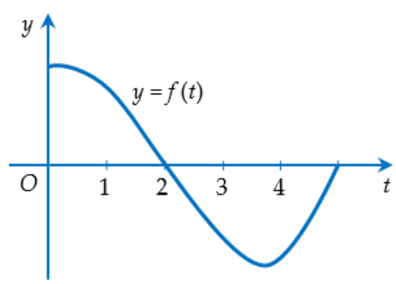
$\Rightarrow\begin{cases}A+B+C=1\\-5A-4B-3C=0\\6A+3B+2C=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=1\\B=-5\\C=5\end{cases}$.

Suy ra $\int\frac{x^2+1}{x^3-6x^2+11x-6}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x-5\int\frac{1}{x-2}\mathrm{d}x+5\int\frac{1}{x-3}\mathrm{d}x$

$=\ln\left|(x-1)(x-2)^{-5}(x-3)^5\right|+C$.

Vậy $4(m+n+p)=4$.

Câu 116: Xét hàm số $F(x)=\int\limits_2^x f(t)\mathrm{d}t$ trong đó hàm số $y=f(t)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Trong các giá trị dưới đây, giá trị nào là lớn nhất?



A. $F(1)$. **B.** $F(2)$. **C.** $F(3)$. **D.** $F(0)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $F'(x)=\left(\int\limits_2^x f(t)\mathrm{d}t\right)'=f(x)$.

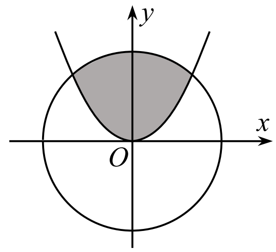
Xét trên đoạn $[0;3]$, ta thấy $F'(x)=0\Leftrightarrow f(x)=0\Leftrightarrow x=2$.

Dựa vào đồ thị, ta thấy trên $[0;2]$ hàm số $F(x)$ đồng biến nên $F(0)<F(2)$.

Dựa vào đồ thị, ta thấy trên $[2;3]$ hàm số $F(x)$ nghịch biến nên $F(3)<F(2)$.

Vậy $F(2)$ là giá trị lớn nhất.

Câu 117: Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=x^2$ và đường tròn $x^2+y^2=2$ (phần tô đậm trong hình bên). Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành.



A. $V=\frac{44\pi}{15}$. **B.** $V=\frac{22\pi}{15}$. **C.** $V=\frac{5\pi}{3}$. **D.** $V=\frac{\pi}{5}$.

Lời giải

Chọn A

Với $y=x^2$ thay vào phương trình đường tròn ta được $x^2+x^4=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=1 \\ x^2=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

Hơn nữa $x^2+y^2=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-\sqrt{2-x^2} \\ y=\sqrt{2-x^2} \end{array}\right.$.

Thể tích cần tìm chính là thể tích vật thể tròn xoay $(H_1):\begin{cases} y=\sqrt{2-x^2} \\ x=-1 \\ x=1 \\ Ox \end{cases}$ quay quanh Ox bỏ đi

phần thể tích $(H_2):\begin{cases} y=x^2 \\ x=-1 \\ x=1 \\ Ox \end{cases}$ quay quanh Ox.

Do đó $V=\pi\left[\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{2-x^2}\right)^2 \mathrm{d}x-\int_{-1}^{1}\left(x^2\right)^2 \mathrm{d}x\right]=\frac{44\pi}{15}$.

Câu 118: Cho $I_n=\int \tan^n x dx$ với $n\in\mathbb{N}$. Khi đó $I_0+I_1+2(I_2+I_3+...+I_8)+I_9+I_{10}$ bằng

A. $\sum_{r=1}^{9}\frac{(\tan x)^r}{r}+C$. **B.** $\sum_{r=1}^{9}\frac{(\tan x)^{r+1}}{r+1}+C$. **C.** $\sum_{r=1}^{10}\frac{(\tan x)^r}{r}+C$. **D.** $\sum_{r=1}^{10}\frac{(\tan x)^{r+1}}{r+1}+C$.

Lời giải

Chọn A

$I_n=\int \tan^{n-2}x.\tan^2 x dx=\int \tan^{n-2}x.\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\int \tan^{n-2}x.(\tan x)' dx-I_{n-2}$

$=\frac{\tan^{n-1}x}{n-1}-I_{n-2}+C$

$\Rightarrow I_n+I_{n-2}=\frac{\tan^{n-1}x}{n-1}+C$.

$I_0+I_1+2(I_2+I_3+...+I_8)+I_9+I_{10}=(I_{10}+I_8)+(I_9+I_7)+...+(I_3+I_1)+(I_2+I_0)$

$=\frac{\tan^9 x}{9}+\frac{\tan^8 x}{8}+....+\frac{\tan^2 x}{2}+\tan x+C=\sum_{r=1}^{9}\frac{\tan^r x}{r}+C$.

Câu 119: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;2]$ và thỏa mãn $f(2)=16$, $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=4$.

Tính tích phân $I=\int_0^1 x.f'(2x)\mathrm{d}x$.

A. $I=12$. **B.** $I=7$. **C.** $I=13$. **D.** $I=20$.

Câu 120: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;2]$ và thỏa mãn $f(2)=16$, $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=4$.

Tính tích phân $I=\int_0^1 x.f'(2x)\mathrm{d}x$.

A. $I=12$. **B.** $I=7$. **C.** $I=13$. **D.** $I=20$.

Hướng dẫn giải

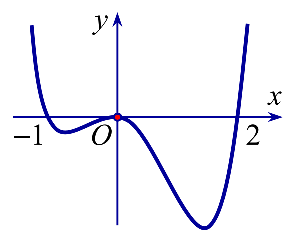
Chọn B

Đặt $\begin{cases} u=x \\ \mathrm{d}v=f'(2x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=\dfrac{f(2x)}{2} \end{cases}$.

Khi đó: $I=\left.\dfrac{x.f(2x)}{2}\right|_0^1-\dfrac{1}{2}\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}x=\dfrac{f(2)}{2}-\dfrac{1}{4}\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t=\dfrac{16}{2}-\dfrac{1}{4}.4=7$.

Câu 121: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ.

Khẳng định nào sau đây **sai**?



A. $\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x<\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$. **B.** $\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x<0$.

C. $-\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x>0$. **D.** $\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x<0$.

Câu 122: Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện $2f(x)-3f(1-x)=x\sqrt{1-x}$.

Tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

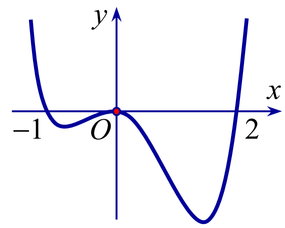
A. $I=\dfrac{1}{25}$. **B.** $I=-\dfrac{4}{15}$. **C.** $I=-\dfrac{1}{15}$. **D.** $I=\dfrac{4}{75}$.

Câu 123: Xét hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $f(1)=1$ và $f(2)=4$.

Tính $J=\int_1^2\left(\dfrac{f'(x)+2}{x}-\dfrac{f(x)+1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$.

A. $J=1+\ln 4$. **B.** $J=4-\ln 2$. **C.** $J=\ln 2-\dfrac{1}{2}$. **D.** $J=\dfrac{1}{2}+\ln 4$.

Câu 124: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây **sai**?



A. $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx < \int_{0}^{2} f(x)\,dx$.

B. $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{2} f(x)\,dx < 0$.

C. $-\int_{0}^{2} f(x)\,dx > 0$.

D. $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx < 0$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị hàm số ta có: $S_1 = \int_{-1}^{0} |f(x)|\,dx < S_2 = \int_{0}^{2} |f(x)|\,dx \quad (1)$

Mà $f(x) \le 0$ với mọi $x \in [-1;0]$ và $x \in [0;2]$.

Do đó ta có $(1) \Leftrightarrow -\int_{-1}^{0} f(x)\,dx < -\int_{0}^{2} f(x)\,dx \Leftrightarrow \int_{-1}^{0} f(x)\,dx > \int_{0}^{2} f(x)\,dx$. Vậy A sai.

Câu 125: Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện $2f(x) - 3f(1-x) = x\sqrt{1-x}$.

Tính tích phân $I = \int_{0}^{1} f(x)\,dx$.

A. $I = \frac{1}{25}$.

B. $I = -\frac{4}{15}$.

C. $I = -\frac{1}{15}$.

D. $I = \frac{4}{75}$.

Lời giải

Chọn B

Do $2f(x) - 3f(1-x) = x\sqrt{1-x} \Rightarrow \int_{0}^{1} 2f(x)\,dx - \underbrace{\int_{0}^{1} 3f(1-x)\,dx}_{I_1} = \underbrace{\int_{0}^{1} x\sqrt{1-x}\,dx}_{I_2} \quad (1)$.

+ Xét $I_1 = 3\int_{0}^{1} f(1-x)\,dx$:

Đặt $t = 1-x \Rightarrow dx = -dt$. Khi $x = 0 \Rightarrow t = 1; x = 1 \Rightarrow t = 0$.

Khi đó $I_1 = 3\int_{0}^{1} f(t)\,dt = 3I$.

+ Xét $I_2 = \int_{0}^{1} x\sqrt{1-x}\,dx$. Đặt $t = \sqrt{1-x} \Rightarrow x = 1-t^2 \Rightarrow dx = -2t\,dt$.

Khi $x = 0 \Rightarrow t = 1; x = 1 \Rightarrow t = 0$.

Khi đó $I_2 = \int_{1}^{0} (1-t^2)\,t(-2t)\,dt = \left.\left(\frac{2t^5}{5} - \frac{2t^3}{3}\right)\right|_{1}^{0} = \frac{4}{15}$.

Thây vào $(1): 2I - 3I = \frac{4}{15} \Leftrightarrow I = -\frac{4}{15}$.

Câu 126: Xét hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $f\left(1\right)=1$ và $f\left(2\right)=4$.

Tính $J=\int\limits_{1}^{2}\left(\dfrac{f'\left(x\right)+2}{x}-\dfrac{f\left(x\right)+1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$.

A. $J=1+\ln 4$. **B.** $J=4-\ln 2$. **C.** $J=\ln 2-\dfrac{1}{2}$. **D.** $J=\dfrac{1}{2}+\ln 4$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Ta có $J=\int\limits_{1}^{2}\left(\dfrac{f'\left(x\right)+2}{x}-\dfrac{f\left(x\right)+1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{1}^{2}\dfrac{f'\left(x\right)}{x}\mathrm{d}x-\int\limits_{1}^{2}\dfrac{f\left(x\right)}{x^2}\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=\dfrac{1}{x}\\ \mathrm{d}v=f'\left(x\right)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=-\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x\\ v=f\left(x\right)\end{cases}$

$$J=\int\limits_{1}^{2}\left(\dfrac{f'\left(x\right)+2}{x}-\dfrac{f\left(x\right)+1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{x}.f\left(x\right)\Big|_1^2+\int\limits_{1}^{2}\dfrac{f\left(x\right)}{x^2}\mathrm{d}x-\int\limits_{1}^{2}\dfrac{f\left(x\right)}{x^2}\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\dfrac{1}{2}f\left(2\right)-f\left(1\right)+\left(2\ln x+\dfrac{1}{x}\right)\Big|_1^2=\dfrac{1}{2}+\ln 4.$$

Cách 2: $J=\int\limits_{1}^{2}\left(\dfrac{f'\left(x\right)+2}{x}-\dfrac{f\left(x\right)+1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{1}^{2}\left(\dfrac{xf'\left(x\right)-f\left(x\right)}{x^2}+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$

$$=\int\limits_{1}^{2}\left(\dfrac{f\left(x\right)}{x}\right)'\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\left(\dfrac{f\left(x\right)}{x}+2\ln\left|x\right|+\dfrac{1}{x}\right)\Big|_1^2=\dfrac{1}{2}+\ln 4.$$

Cách 3: (Trắc nghiệm)

Chọn hàm số $f\left(x\right)=ax+b$. Vì $\begin{cases}f\left(1\right)=1\\ f\left(2\right)=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\ b=-2\end{cases}$, suy ra $f\left(x\right)=3x-2$.

Vậy $J=\int\limits_{1}^{2}\left(\dfrac{5}{x}-\dfrac{3x-1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\left(2\ln\left|x\right|-\dfrac{1}{x}\right)\Big|_1^2=\ln 4+\dfrac{1}{2}$.

Câu 127: Tính $I=\int\limits_{a}^{b}\dfrac{a-x^2}{\left(a+x^2\right)^2}\mathrm{d}x$ (với a, b là các số thực dương cho trước).

A. $I=\dfrac{2b}{a^2+b^2}$. **B.** $I=\dfrac{b}{a+b^2}$. **C.** $I=\dfrac{\left(a-1\right)\left(b-1\right)}{\left(a+b^2\right)\left(a+1\right)}$. **D.** $I=\dfrac{b}{a^2+b}$.

Câu 128: Cho hình phẳng D giới hạn bởi parabol $y=-\dfrac{1}{2}x^2+2x$, cung tròn có phương trình $y=\sqrt{16-x^2}$, với $\left(0\le x\le 4\right)$, trục tung (phần tô đậm trong hình vẽ). Tính diện tích của hình D.

A. $8\pi-\dfrac{16}{3}$. **B.** $2\pi-\dfrac{16}{3}$. **C.** $4\pi+\dfrac{16}{3}$. **D.** $4\pi-\dfrac{16}{3}$.

Câu 129: Cho hàm số $f(x)$ liên tục, $f(x)>0$ và $f(x).f(a-x)=1$ trên đoạn $[0;a]$. Tính $I=\int\limits_0^a \frac{dx}{1+f(x)}$ theo a.

A. $I=\frac{3a}{2}$. **B.** $I=2a$. **C.** $I=3a$. **D.** $I=\frac{a}{2}$.

Câu 130: Tính $I=\int\limits_a^b \frac{a-x^2}{\left(a+x^2\right)^2}\mathrm{d}x$ (với a, b là các số thực dương cho trước).

A. $I=\frac{2b}{a^2+b^2}$. **B.** $I=\frac{b}{a+b^2}$. **C.** $I=\frac{(a-1)(b-1)}{\left(a+b^2\right)(a+1)}$. **D.** $I=\frac{b}{a^2+b}$.

Lời giải

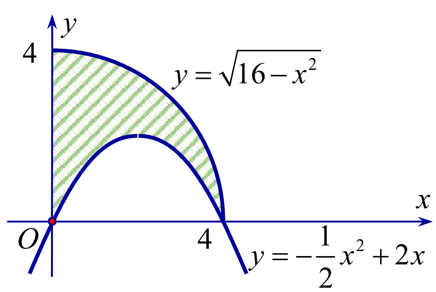
Chọn C

$$I=\int\limits_a^b \frac{a-x^2}{\left(a+x^2\right)^2}\mathrm{d}x=\int\limits_a^b \frac{\frac{a}{x^2}-1}{\left(\frac{a}{x}+x\right)^2}\mathrm{d}x.$$

Đặt $t=\frac{a}{x}+x \Rightarrow \mathrm{d}t=\left(-\frac{a}{x^2}+1\right)\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x=a \Rightarrow t=1+a$; $x=b \Rightarrow t=\frac{a}{b}+b$

Khi đó: $I=\int\limits_{1+a}^{\frac{a}{b}+b} \frac{-1}{t^2}\mathrm{d}t=\left.\frac{1}{t}\right|_{1+a}^{\frac{a}{b}+b}=\left.\frac{1}{t}\right|_{1+a}^{\frac{a+b^2}{b}}=\frac{b}{a+b^2}-\frac{1}{1+a}=\frac{(a-b)(b-1)}{\left(a+b^2\right)(a+1)}$

Câu 131: Cho hình phẳng D giới hạn bởi parabol $y=-\frac{1}{2}x^2+2x$, cung tròn có phương trình $y=\sqrt{16-x^2}$, với $(0\le x\le 4)$, trục tung (phần tô đậm trong hình vẽ). Tính diện tích của hình D.



A. $8\pi-\frac{16}{3}$. **B.** $2\pi-\frac{16}{3}$. **C.** $4\pi+\frac{16}{3}$. **D.** $4\pi-\frac{16}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Diện tích hình phẳng D là $S=\int\limits_0^4\left(\sqrt{16-x^2}-\left(-\frac{1}{2}x^2+2x\right)\right)\mathrm{d}x$.

Xét tích phân $I=\int\limits_0^4\sqrt{16-x^2}\mathrm{d}x$

Đặt $x=4\sin t$, $t\in\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Khi đó $I=\int\ \mathrm{d}t\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{16-16\sin^2 t}.4\cos t\mathrm{d}t=16\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t=16\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)=4\pi$.

$J=\int\limits_0^4\left(-\frac{1}{2}x^2+2x\right)\mathrm{d}x=\left(-\frac{1}{6}x^3+x^2\right)\Bigg|_0^4=\frac{16}{3}$.

Vậy $S=4\pi-\frac{16}{3}$.

Câu 132: Cho hàm số $f(x)$ liên tục, $f(x)>0$ và $f(x).f(a-x)=1$ trên đoạn $[0;a]$. Tính $I=\int\limits_0^a\frac{dx}{1+f(x)}$ theo a.

A. $I=\frac{3a}{2}$. **B.** $I=2a$. **C.** $I=3a$. **D.** $I=\frac{a}{2}$.

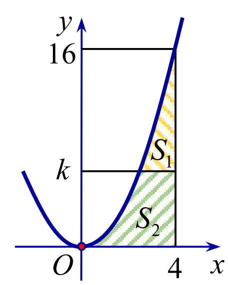
Lời giải

Chọn D

* Đặt $x=a-t$ ta có $I=-\int\limits_a^0\frac{dt}{1+f(a-t)}=\int\limits_0^a\frac{dx}{1+f(a-x)}=\int\limits_0^a\frac{f(x)dx}{1+f(x)}=\int\limits_0^a\left[1-\frac{1}{1+f(x)}\right]dx$

$\Rightarrow I=a-\int\limits_0^a\frac{dx}{1+f(x)}=a-I\Rightarrow I=\frac{a}{2}$.

Câu 133: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2$, $y=0$, $x=0$, $x=4$. Đường thẳng $y=k$ $(0<k<16)$ chia hình (H) thành hai phần có diện tích S_1, S_2 (hình vẽ). Tìm k để $S_1=S_2$.

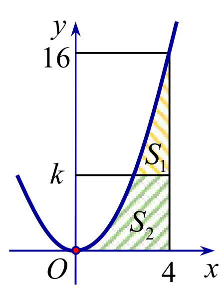


A. $k=8$. **B.** $k=4$.
C. $k=5$. **D.** $k=3$.

Câu 134: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)=\sqrt{e^x+e^{-x}-2}$, $f(0)=5$ và $f\left(\ln\frac{1}{4}\right)=0$. Giá trị của biểu thức $S=f(-\ln 16)+f(\ln 4)$ bằng

A. $S=\frac{31}{2}$. **B.** $S=\frac{9}{2}$. **C.** $S=\frac{5}{2}$. **D.** $f(0).f(2)=1$.

Câu 135: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2$, $y=0$, $x=0$, $x=4$. Đường thẳng $y=k$ $(0<k<16)$ chia hình (H) thành hai phần có diện tích S_1, S_2 (hình vẽ).



Tìm k để $S_1=S_2$.

A. $k=8$. **B.** $k=4$. **C.** $k=5$. **D.** $k=3$.

Lời giải

Chọn B

Hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số $y=x^2$ và $y=k$ là $x=\sqrt{k}$.

Do đó diện tích $S_1=\int_{\sqrt{k}}^{4}\left(x^2-k\right)\mathrm{d}x$, diện tích $S_2=\int_0^4 x^2\mathrm{d}x-S_1$.

Ta có

$$S_1=S_2\Leftrightarrow\int_{\sqrt{k}}^{4}\left(x^2-k\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^4 x^2\mathrm{d}x\Leftrightarrow\left.\left(\frac{x^3}{3}-kx\right)\right|_{\sqrt{k}}^{4}=\frac{32}{3}\Leftrightarrow\frac{64}{3}-4k-\frac{\sqrt{k^3}}{3}+\sqrt{k^3}=\frac{32}{3}$$

$$\Leftrightarrow 16=6k-\sqrt{k^3}\Leftrightarrow\left(\sqrt{k}\right)^3-6\left(\sqrt{k}\right)^2+16=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{k}=2+2\sqrt{3}\\ \sqrt{k}=2-2\sqrt{3}\\ \sqrt{k}=2\end{array}\right.\overset{k\in(0;16)}{\Rightarrow}k=4$$

Câu 136: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)=\sqrt{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-2}$, $f(0)=5$ và $f\left(\ln\frac{1}{4}\right)=0$.

Giá trị của biểu thức $S=f(-\ln 16)+f(\ln 4)$ bằng

A. $S=\frac{31}{2}$. **B.** $S=\frac{9}{2}$. **C.** $S=\frac{5}{2}$. **D.** $f(0).f(2)=1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)=\sqrt{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-2}=\frac{\left|\mathrm{e}^x-1\right|}{\sqrt{\mathrm{e}^x}}=\begin{cases}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} & \text{khi } x\ge 0\\ \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}-\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} & \text{khi } x<0\end{cases}$.

Do đó $f(x)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}+C_1 & \text{khi } x\ge 0\\ -2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}-2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+C_2 & \text{khi } x<0\end{cases}$.

Theo đề bài ta có $f(0)=5$ nên $2\mathrm{e}^0+2\mathrm{e}^0+C_1=5\Leftrightarrow C_1=1$.

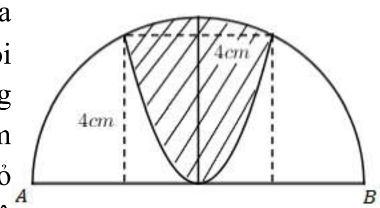
$\Rightarrow f(\ln 4)=2\mathrm{e}^{\frac{\ln 4}{2}}+2\mathrm{e}^{-\frac{\ln 4}{2}}+1=6$

Tương tự $f\left(\ln\frac{1}{4}\right)=0$ nên $-2\mathrm{e}^{-\frac{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}{2}}-2\mathrm{e}^{\frac{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}{2}}+C_2=0\Leftrightarrow C_2=5$.

$\Rightarrow f(-\ln 16)=-2\mathrm{e}^{-\frac{(-\ln 16)}{2}}-2\mathrm{e}^{\frac{(-\ln 16)}{2}}+5=-\frac{7}{2}$.

Vậy $S=f(-\ln 16)+f(\ln 4)=\frac{5}{2}$.

Câu 137: Cho nửa đường tròn đường kính $AB=4\sqrt{5}$. Trên đó người ta vẽ một parabol có đỉnh trùng với tâm của nửa hình tròn, trục đối xứng là đường kính vuông góc với AB. Parabol cắt nửa đường tròn tại hai điểm cách nhau 4 cm và khoảng cách từ hai điểm đó đến AB bằng nhau và bằng 4 cm. Sau đó người ta cắt bỏ phần hình phẳng giới hạn bởi đường tròn và parabol (phần tô màu trong hình vẽ). Đem phần còn lại quay xung quanh trục AB. Thể tích của khối tròn xoay thu được bằng:



A. $V=\frac{\pi}{15}\left(800\sqrt{5}-464\right)$ cm^3. **B.** $V=\frac{\pi}{3}\left(800\sqrt{5}-928\right)$ cm^3.

C. $V=\frac{\pi}{5}\left(800\sqrt{5}-928\right)$ cm^3. **D.** $V=\frac{\pi}{15}\left(800\sqrt{5}-928\right)$ cm^3.

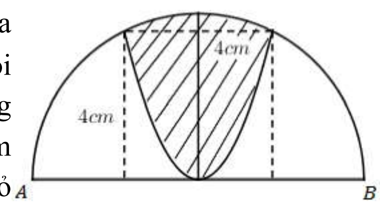
Câu 138: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x)\neq 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. $f'(x)=(2x+1)f^2(x)$ và $f(1)=-0,5$. Biết rằng tổng $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2017)=\frac{a}{b}$; $(a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{N})$ với $\frac{a}{b}$ tối giản. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a+b=-1$. **B.** $a\in(-2017;2017)$. **C.** $\frac{a}{b}<-1$. **D.** $b-a=4035$.

Câu 139: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x^2-1}$. Biết $f(-3)+f(3)=0$ và $f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=2$. Giá trị $T=f(-2)+f(0)+f(4)$ bằng:

A. $T=2+\frac{1}{2}\ln\frac{5}{9}$. **B.** $T=1+\frac{1}{2}\ln\frac{9}{5}$. **C.** $T=3+\frac{1}{2}\ln\frac{9}{5}$. **D.** $T=\frac{1}{2}\ln\frac{9}{5}$.

Câu 140: Cho nửa đường tròn đường kính $AB=4\sqrt{5}$. Trên đó người ta vẽ một parabol có đỉnh trùng với tâm của nửa hình tròn, trục đối xứng là đường kính vuông góc với AB. Parabol cắt nửa đường tròn tại hai điểm cách nhau 4 cm và khoảng cách từ hai điểm đó đến AB bằng nhau và bằng 4 cm. Sau đó người ta cắt bỏ phần hình phẳng giới hạn bởi đường tròn và parabol (phần tô màu trong hình vẽ). Đem phần còn lại quay xung quanh trục AB. Thể tích của khối tròn xoay thu được bằng:



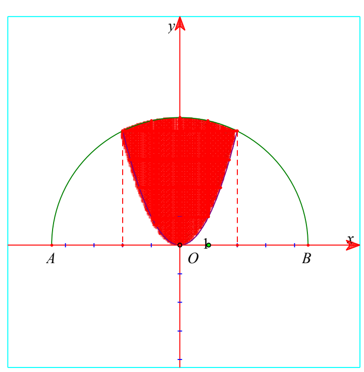
A. $V=\frac{\pi}{15}\left(800\sqrt{5}-464\right)$ cm^3. **B.** $V=\frac{\pi}{3}\left(800\sqrt{5}-928\right)$ cm^3.

C. $V=\frac{\pi}{5}\left(800\sqrt{5}-928\right)$ cm^3. **D.** $V=\frac{\pi}{15}\left(800\sqrt{5}-928\right)$ cm^3.

Lời giải

Chọn D

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ



Theo đề bài ta có phương trình đường tròn là $y=\sqrt{20-x^2}$ và phương trình của parabol là $y=x^2$.

Phương trình hoành độ giao điểm là $\sqrt{20-x^2}=x^2 \Leftrightarrow x^4-x^2-20=0 \Rightarrow x=\pm 2$.

Do tính chất đối xứng của hình vẽ nên ta có thể tích vật thể tròn xoay được tính theo công thức

$$V=2\left[\pi\int_0^{2\sqrt{5}}(20-x)^2\,\mathrm{d}x-\pi\int_0^2\left(20-x^2-x^4\right)\mathrm{d}x\right]=\frac{1}{15}\pi\left(800\sqrt{5}-928\right).$$

Câu 141: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x)\neq 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. $f'(x)=(2x+1)f^2(x)$ và $f(1)=-0,5$. Biết rằng tổng $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2017)=\frac{a}{b}$; $(a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{N})$ với $\frac{a}{b}$ tối giản. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a+b=-1$. **B.** $a\in(-2017;2017)$. **C.** $\frac{a}{b}<-1$. **D.** $b-a=4035$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x)=(2x+1)f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)}=(2x+1) \Rightarrow \int\frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=\int(2x+1)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)}=x^2+x+C$

Mà $f(1)=-\frac{1}{2}$ nên $C=0 \Rightarrow f(x)=-\frac{1}{x^2+x}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}$.

Mặt khác

$f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2017)=\left(\frac{1}{2}-1\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)+...+\left(\frac{1}{2018}-\frac{1}{2017}\right)$

$\Leftrightarrow f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2017)=-1+\frac{1}{2018}=\frac{-2017}{2018} \Rightarrow a=-2017$; $b=2018$.

Khi đó $b-a=4035$.

Câu 142: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x^2-1}$. Biết $f(-3)+f(3)=0$ và $f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=2$. Giá trị $T=f(-2)+f(0)+f(4)$ bằng:

A. $T=2+\frac{1}{2}\ln\frac{5}{9}$. **B.** $T=1+\frac{1}{2}\ln\frac{9}{5}$. **C.** $T=3+\frac{1}{2}\ln\frac{9}{5}$. **D.** $T=\frac{1}{2}\ln\frac{9}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$.

Do đó $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x-1}{x+1}+C_1 \text{ khi } x<-1, x>1\\ \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-x}{x+1}+C_2 \text{ khi } -1<x<1\end{cases}$.

Do $f(-3)+f(3)=0$ nên $C_1=0$, $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2$ nên $C_2=1$.

Nên $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x-1}{x+1} \quad \text{ khi } x<-1, x>1\\ \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-x}{x+1}+1 \text{ khi } -1<x<1\end{cases}$. $T=f(-2)+f(0)+f(4)=1+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{9}{5}$.

Câu 143: Tính diện tích S của hình phẳng (H) được giới hạn bởi các đồ thị $(d_1): y=2x-2$, $(d_2): y=\dfrac{x}{2}+1$, $(P): y=x^2-4x+3$.

A. $S=\dfrac{189}{16}$. **B.** $S=\dfrac{13}{3}$. **C.** $S=\dfrac{487}{48}$. **D.** $S=\dfrac{27}{4}$.

Câu 144: Cho số thực dương $k>0$ thỏa $\int\limits_0^2 \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+k}}=\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $k>\dfrac{3}{2}$. **B.** $0<k\le\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}<k\le 1$. **D.** $1<k\le\dfrac{3}{2}$.

Câu 145: Một chiếc xe đua thể thức I bắt đầu chuyển động tăng tốc với gia tốc không đổi, khi vận tốc $80\,\text{m/s}$ thì xe chuyển động với vận tốc không đổi trong thời gian $56\,\text{s}$, sau đó nó giảm với gia tốc không đổi đến khi dừng lại. Biết rằng thời gian chuyển động của xe là $74\,\text{s}$. Tính quảng đường đi được của xe.

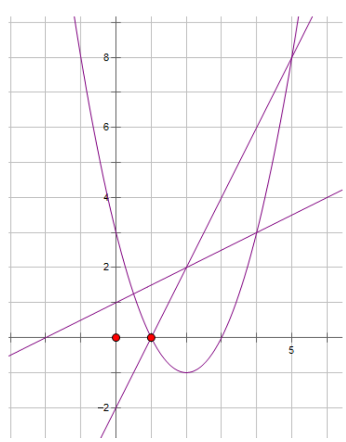
A. $5200\,\text{m}$. **B.** $5500\,\text{m}$. **C.** $5050\,\text{m}$. **D.** $5350\,\text{m}$.

Câu 146: Tính diện tích S của hình phẳng (H) được giới hạn bởi các đồ thị $(d_1): y=2x-2$, $(d_2): y=\dfrac{x}{2}+1$, $(P): y=x^2-4x+3$.

A. $S=\dfrac{189}{16}$. **B.** $S=\dfrac{13}{3}$. **C.** $S=\dfrac{487}{48}$. **D.** $S=\dfrac{27}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{x}{2}+1=x^2-4x+3 \Leftrightarrow x^2-\frac{9}{2}x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ x=4 \end{array}\right.$

Phương trình hoành độ giao điểm: $2x-2=x^2-4x+3 \Leftrightarrow x^2-6x+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=5 \end{array}\right.$

Phương trình hoành độ giao điểm: $2x-2=\frac{x}{2}+1 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x-3=0 \Leftrightarrow x=2$

Diện tích của hình **phẳng** (H):

$$S=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left[\frac{x}{2}+1-\left(x^2-4x+3\right)\right]\mathrm{d}x+\int_{2}^{5}\left[2x-2-\left(x^2-4x+3\right)\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(-x^2+\frac{9}{2}x-2\right)\mathrm{d}x+\int_{2}^{5}\left(-x^2+6x-5\right)\mathrm{d}x=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{9}{4}x^2-2x\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1}+\left(-\frac{x^3}{3}+3x^2-5x\right)\Bigg|_{2}^{5}=\frac{189}{16}.$$

Câu 147: Cho số thực dương $k>0$ thỏa $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}=\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $k>\frac{3}{2}$. **B.** $0<k\le\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}<k\le 1$. **D.** $1<k\le\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\ln\left(x+\sqrt{x^2+k}\right) \Rightarrow dt=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+k}}}{x+\sqrt{x^2+k}}dx \Leftrightarrow dt=\frac{1}{\sqrt{x^2+k}}dx$

Ta có $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}=\int_0^2 dt=\mathrm{t}\Big|_0^2 \Leftrightarrow \ln\left(x+\sqrt{x^2+k}\right)\Big|_0^2=\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$

$$\Leftrightarrow \ln\left(2+\sqrt{4+k}\right)-\ln\sqrt{k}=\ln\left(2+\sqrt{5}\right) \Leftrightarrow \ln\frac{2+\sqrt{4+k}}{\sqrt{k}}=\ln\left(2+\sqrt{5}\right) \Leftrightarrow \frac{2+\sqrt{4+k}}{\sqrt{k}}=2+\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow 2+\sqrt{4+k}=\left(2+\sqrt{5}\right)\sqrt{k} \Leftrightarrow 4+4+k+4\sqrt{4+k}=\left(2+\sqrt{5}\right)^2 k \Leftrightarrow \sqrt{4+k}=\left(2+\sqrt{5}\right)k-2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k>\frac{2}{2+\sqrt{5}} \\ 4+k=\left(2+\sqrt{5}\right)^2k^2+4-4\left(2+\sqrt{5}\right)k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k>\frac{2}{2+\sqrt{5}} \\ \left(2+\sqrt{5}\right)^2k^2-\left(9+4\sqrt{5}\right)k=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k>\frac{2}{2+\sqrt{5}} \\ \left[\begin{array}{l} k=0 \\ k=1 \end{array}\right. \end{cases}$$

$\Leftrightarrow k=1$.

Câu 148: Một chiếc xe đua thể thức I bắt đầu chuyển động tăng tốc với gia tốc không đổi, khi vận tốc $80\,\mathrm{m/s}$ thì xe chuyển động với vận tốc không đổi trong thời gian $56\,\mathrm{s}$, sau đó nó giảm với gia tốc không đổi đến khi dừng lại. Biết rằng thời gian chuyển động của xe là $74\,\mathrm{s}$. Tính quảng đường đi được của xe.

A. $5200\,\mathrm{m}$. **B.** $5500\,\mathrm{m}$. **C.** $5050\,\mathrm{m}$. **D.** $5350\,\mathrm{m}$.

Lời giải

Chọn A

Lần tăng tốc đầu tiên xe chuyển động với vận tốc $v(t)=a.t$, $(a>0)$.

Đến khi xe đạt vận tốc 80m/s thì xe chuyển động hết $t_1 = \frac{80}{a}(\text{s})$.

Lần giảm tốc, xe chuyển động với vận tốc $v_3 = 80 - bt$, $(b > 0)$.

Khi xe dừng lại thì xe chuyển động thêm được $t_3 = \frac{80}{b}(\text{s})$.

Theo yêu cầu bài toán ta có $\frac{80}{a} + 56 + \frac{80}{b} = 74 \Leftrightarrow \frac{80}{a} + \frac{80}{b} = 18$.

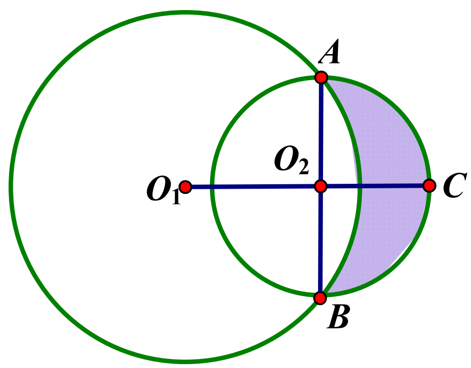
Ta có $\text{S}_1 = \int_0^{t_1} at\text{dt} = \int_0^{\frac{80}{a}} at\text{dt} = \frac{1}{2}.\frac{80^2}{a}(\text{m})$.

$\text{S}_2 = 80.56(\text{m})$.

$\text{S}_3 = b\int_0^{t_3}(80 - bt)\text{dt} = \int_0^{\frac{80}{b}}(80 - bt)\text{dt} = \frac{1}{2}.\frac{80^2}{b}(\text{m})$.

Vậy quảng đường xe chạy được là $\text{S}_3 = \frac{1}{2}.80.\left(\frac{80}{a} + \frac{80}{b}\right) + 80.56 = 40.18 + 80.56 = 5200(\text{m})$.

Câu 149: Cho hai đường tròn $(O_1;10)$ và $(O_2;8)$ cắt nhau tại hai điểm A,B sao cho AB là một đường kính của đường tròn (O_2). Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi hai đường tròn (phần được tô màu như hình vẽ). Quay (H) quanh trục O_1O_2 ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành.



A. $\frac{824\pi}{3}$. **B.** $\frac{608}{3}\pi$. **C.** $\frac{97}{3}\pi$. **D.** $\frac{145}{3}\pi$

Câu 150: Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 3x^2 + 2mx + m^2 + 1$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = \sqrt{2}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Mệnh đề nào sau đây đúng?

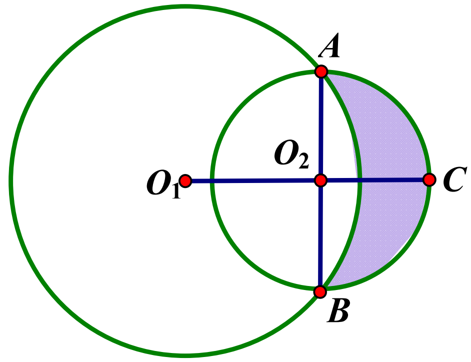
A. $m \in (-4;-1)$. **B.** $m \in (3;5)$. **C.** $m \in (0;3)$. **D.** $m \in (-2;1)$.

Câu 151: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thoả mãn $f(x) - 8x^3 f(x^4) + \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} = 0$.

Tích phân $I = \int_0^1 f(x)\text{d}x$ có kết quả dạng $\frac{a - b\sqrt{2}}{c}$, $a,b,c \in \mathbb{Z}$, $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ tối giản. Tính $a + b + c$.

A. 6. **B.** -4. **C.** 4. **D.** -10.

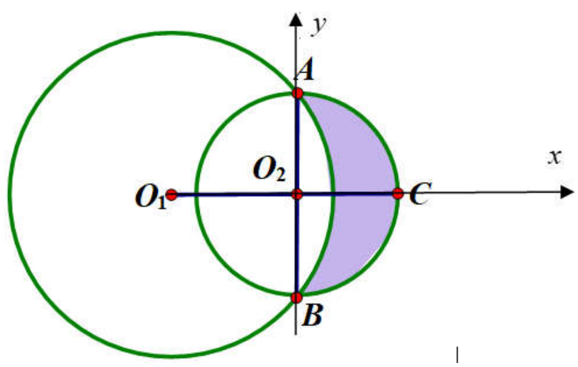
Câu 152: Cho hai đường tròn $(O_1;10)$ và $(O_2;8)$ cắt nhau tại hai điểm A,B sao cho AB là một đường kính của đường tròn (O_2). Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi hai đường tròn (phần được tô màu như hình vẽ). Quay (H) quanh trục O_1O_2 ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành.



A. $\frac{824\pi}{3}$. **B.** $\frac{608}{3}\pi$. **C.** $\frac{97}{3}\pi$. **D.** $\frac{145}{3}\pi$

Lời giải

Chọn B



Ta xây dựng hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ

Ta có $O_1O_2 = \sqrt{O_1A^2 - O_2A^2} = 6$.

Ta có $O_2(0;0), O_1(-6;0)$.

Đường tròn $(O_2;8)$ có phương trình là: $x^2 + y^2 = 64 \Rightarrow y = \sqrt{64 - x^2}$.

Đường tròn $(O_1;10)$ có phương trình là: $(x+6)^2 + y^2 = 100 \Rightarrow y = \sqrt{100 - (x+6)^2}$.

Thể tích cần tìm $V = \pi\int_0^8 (64 - x^2)dx - \pi\int_0^4 \left[100 - (x+6)^2\right]dx = \frac{608\pi}{3}$.

Câu 153: Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 3x^2 + 2mx + m^2 + 1$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = \sqrt{2}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m \in (-4;-1)$. **B.** $m \in (3;5)$. **C.** $m \in (0;3)$. **D.** $m \in (-2;1)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y = 3x^2 + 2mx + m^2 + 1 = x^2 + 2mx + 1 + 2x^2 + 1$ suy ra $y > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$S=\int_0^{\sqrt{2}}\left|3x^2+2mx+m^2+1\right|dx\ =\ S=\int_0^{\sqrt{2}}\left(3x^2+2mx+m^2+1\right)dx=\left(x^3+mx^2+m^2x+x\right)\Big|_0^{\sqrt{2}}$

$=2\sqrt{2}+2m+\sqrt{2}m^2+\sqrt{2}\ =\sqrt{2}\left(m^2+\sqrt{2}m+3\right)\ =\sqrt{2}\left[\left(m+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+3-\frac{1}{2}\right]$

$=\sqrt{2}\left(m+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Ta thấy $S\geq\frac{5\sqrt{2}}{2}$, suy ra S đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $m=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 154: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thoả mãn $f(x)-8x^3f\left(x^4\right)+\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}=0$.

Tích phân $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ có kết quả dạng $\frac{a-b\sqrt{2}}{c}$, $a,b,c\in\mathbb{Z}$, $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ tối giản. Tính $a+b+c$.

A. 6. **B.** -4. **C.** 4. **D.** -10.

Lời giải

Chọn A

$f(x)-8x^3f\left(x^4\right)+\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}=0\Rightarrow f(x)=8x^3f\left(x^4\right)-\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}$.

$I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 8x^3f\left(x^4\right)\mathrm{d}x-\int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x\ \ (1)$

Xét $\int_0^1 8x^3f\left(x^4\right)\mathrm{d}x=\int_0^1 2f\left(x^4\right)d\left(x^4\right)=2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2I$

Xét $\int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow t^2=x^2+1\Rightarrow t\mathrm{d}t=x\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=1$, $x=1\Rightarrow t=\sqrt{2}$.

Nên $\int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x=\int_1^{\sqrt{2}}\frac{\left(t^2-1\right)t\mathrm{d}t}{t}=\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Big|_1^{\sqrt{2}}=\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}$

Do đó $(1)\Rightarrow I=2I-\left(\frac{2-\sqrt{2}}{3}\right)\Rightarrow I=\frac{2-\sqrt{2}}{3}$.

Nên $a=2$, $b=1$, $c=3$.

Vậy $a+b+c=6$.

Câu 155: Một ô tô chạy với vận tốc $v_0\left(\mathrm{m/s}\right)$ thì gặp chướng ngại vật nên người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó ôtô chuyển động chậm dần với gia tốc $a=-8t\left(\mathrm{m/s^2}\right)$ trong đó t là thời gian tính bằng giây. Biết từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được $12\mathrm{m}$. Tính v_0?

A. $\sqrt[3]{1296}$. **B.** $\sqrt[3]{36}$. **C.** $\sqrt[3]{1269}$. **D.** 16.

Câu 156: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[0;4]$ và $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=1$; $\int\limits_0^4 f(x)\mathrm{d}x=3$; . Tính $\int\limits_{-1}^{1} f(|3x-1|)\mathrm{d}x$.

A. 4. **B.** 2. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** 1.

Câu 157: Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\mathrm{d}x=3$ và $\int\limits_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x=1$. Tính $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. 4. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 1.

Câu 158: Một ô tô chạy với vận tốc $v_0\,(\mathrm{m/s})$ thì gặp chướng ngại vật nên người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó ôtô chuyển động chậm dần với gia tốc $a=-8t\,(\mathrm{m/s^2})$ trong đó t là thời gian tính bằng giây. Biết từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được $12\mathrm{m}$. Tính v_0?

A. $\sqrt[3]{1296}$. **B.** $\sqrt[3]{36}$. **C.** $\sqrt[3]{1269}$. **D.** 16.

Lời giải

Chọn A

$a=-8t\left(m/s^2\right)\Rightarrow v=\int -8t\mathrm{d}t=-4t^2+C$.

Tại thời điểm $t=0$ thì vận tốc của vật là $v_0\,(\mathrm{m/s})$ nên ta có $v_0=C$, vậy $v=-4t^2+v_0$.

Tại thời điểm t_0 vận tốc của vật là 0 nên ta có $0=-4{t_0}^2+v_0 \Leftrightarrow 4{t_0}^2=v_0$.

Ta có

$$\int_0^{t_0}\left(-4t^2+v_0\right)\mathrm{d}t=12 \Leftrightarrow -\frac{4{t_0}^3}{3}+v_0t_0=12 \Leftrightarrow -\frac{4{t_0}^3}{3}+4{t_0}^3=12 \Leftrightarrow t_0=\frac{\sqrt[3]{36}}{2}.$$

$$\Rightarrow v_0=4.\left(\frac{\sqrt[3]{36}}{2}\right)^2=\sqrt[3]{1296}.$$

Câu 159: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[0;4]$ và $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=1$; $\int\limits_0^4 f(x)\mathrm{d}x=3$; . Tính $\int\limits_{-1}^{1} f(|3x-1|)\mathrm{d}x$.

A. 4. **B.** 2. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

$$\int\limits_{-1}^{1} f(|3x-1|)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1/3} f(1-3x)\mathrm{d}x+\int\limits_{1/3}^{1} f(3x-1)\mathrm{d}x.$$

$$=-\frac{1}{3}\int\limits_{-1}^{1/3} f(1-3x)\mathrm{d}(1-3x)+\frac{1}{3}\int\limits_{1/3}^{1} f(3x-1)\mathrm{d}(3x-1).$$

$$=-\frac{1}{3}\int_4^0 f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{3}\int_0^2 f(t)\mathrm{d}(t)=-\frac{1}{3}(-3)+\frac{1}{3}.1=\frac{4}{3}.$$

Câu 160: Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\mathrm{d}x=3$ và $\int_0^1 \frac{x^2f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x=1$. Tính $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. 4. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

$$\int_0^1 \frac{x^2f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{x^2f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x+\int_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

Đặt $\tan x=t$ suy ra $\mathrm{d}(\tan x)=\mathrm{d}t \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}t \Leftrightarrow (1+\tan^2 x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$.

$$\Leftrightarrow \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{(1+\tan^2 x)}=\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(t)\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\int_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x=3.$$

Vậy $\int_0^1 f(x)dx=4$.

Câu 161: Cho $F(x)=\int_0^{x^2} \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$. Tính $F'(2)$.

A. $F'(2)=4\mathrm{e}^4$. **B.** $F'(2)=8\mathrm{e}^{16}$. **C.** $F'(2)=4\mathrm{e}^{16}$. **D.** $F'(2)=\mathrm{e}^4$.

Câu 162: Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình tròn $(C):(x+2)^2+(y-3)^2\le 1$ quanh trục Ox.

A. $V=2\pi^2$ (đvtt). **B.** $V=6\pi^2$ (đvtt). **C.** $V=\pi^2$ (đvtt). **D.** $V=6\pi$ (đvtt).

----------**HẾT**----------

BẢNG ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
B	A	C	A	A	D	C	B	C	C	A	D	B	D	D	D	D	C	B	B	D	D	A	D	B

26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
D	A	B	D	B	C	B	B	B	C	D	A	D	D	D	C	C	C	A	D	D	A	D	A	D

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 163: Cho $F(x)=\int\limits_0^{x^2} e^{t^2}\,dt$. Tính $F'(2)$.

A. $F'(2)=4e^4$. **B.** $F'(2)=8e^{16}$. **C.** $F'(2)=4e^{16}$. **D.** $F'(2)=e^4$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $G(x)$ là nguyên hàm của hàm số e^{t^2}.

$\Rightarrow F(x)=G(x^2)-G(0)$

$\Rightarrow F'(x)=2x.G'(x^2)=2x.e^{x^4}$.

$\Rightarrow F'(2)=4.e^{16}$

Câu 164: Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình tròn $(C):(x+2)^2+(y-3)^2\le 1$ quanh trục Ox.

A. $V=2\pi^2$ (đvtt). **B.** $V=6\pi^2$ (đvtt). **C.** $V=\pi^2$ (đvtt). **D.** $V=6\pi$ (đvtt).

Lời giải

Chọn D

Tịnh tiến (C) theo $\vec{v}=(2;0)$ ta được hình tròn $(C'):x^2+(y-3)^2\le 1$.

Xét $x^2+(y-3)^2=1\Rightarrow y=3\pm\sqrt{1-x^2}$.

Khi đó thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quanh (C') quanh trục Ox là:

$$V=\pi\int\limits_{-1}^{1}\left[\left(3+\sqrt{1-x^2}\right)^2-\left(3-\sqrt{1-x^2}\right)^2\right]dx=4\pi\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Đặt $x=\sin t\Rightarrow dx=\cos t\,dt$. Đổi cận $x=-1\Rightarrow t=-\frac{\pi}{2}$, $x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$.

$$V=12\pi\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt=12\pi\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=12\pi\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt$$

$$=12\pi.\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=6\pi.$$

Câu 165: Cho $\int\limits_2^3\frac{x+8}{x^2+x-2}dx=a\ln 2+b\ln 5$ với a, b là các số nguyên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a+b=3$. **B.** $a-2b=11$. **C.** $a-b=5$. **D.** $a+2b=11$.

Câu 166: Tìm tất cả các giá trị dương của tham số m sao cho $\int_0^m xe^{\sqrt{x^2+1}}dx=2^{500}.e^{\sqrt{m^2+1}}$.

A. $m=2^{250}\sqrt{2^{500}-2}$. **B.** $m=\sqrt{2^{1000}+1}$. **C.** $m=2^{250}\sqrt{2^{500}+2}$. **D.** $m=\sqrt{2^{1000}-1}$.

Câu 167: Cho $\int\limits_2^3\frac{x+8}{x^2+x-2}dx=a\ln 2+b\ln 5$ với a, b là các số nguyên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a+b=3$. **B.** $a-2b=11$. **C.** $a-b=5$. **D.** $a+2b=11$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int\limits_2^3 \frac{x+8}{x^2+x-2}\mathrm{d}x=\int\limits_2^3\left(\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x+2}\right)\mathrm{d}x=3\ln|x-1|\Big|_2^3-2\ln|x+2|\Big|_2^3=7\ln 2-2\ln 5$.

Suy ra $\begin{cases}a=7\\ b=-2\end{cases}\Rightarrow a-2b=11$.

Câu 168: Tìm tất cả các giá trị dương của tham số m sao cho $\int_0^m x\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x=2^{500}.\mathrm{e}^{\sqrt{m^2+1}}$.

A. $m=2^{250}\sqrt{2^{500}-2}$. **B.** $m=\sqrt{2^{1000}+1}$. **C.** $m=2^{250}\sqrt{2^{500}+2}$. **D.** $m=\sqrt{2^{1000}-1}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int_0^m x\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x=\int_1^{\sqrt{m^2+1}} t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=\left(t\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^t\right)\Big|_1^{\sqrt{m^2+1}}=\left(\sqrt{m^2+1}-1\right)\mathrm{e}^{\sqrt{m^2+1}}$

Theo bài ra $\int_0^m x\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x=2^{500}.\mathrm{e}^{\sqrt{m^2+1}}\Leftrightarrow 2^{500}.\mathrm{e}^{\sqrt{m^2+1}}=\left(\sqrt{m^2+1}-1\right)\mathrm{e}^{\sqrt{m^2+1}}\Leftrightarrow 2^{500}=\sqrt{m^2+1}-1$

$\Leftrightarrow m^2+1=\left(2^{500}+1\right)^2\Leftrightarrow m^2=2^{1000}+2^{501}=2^{500}\left(2^{500}+2\right)\Rightarrow m=2^{250}\sqrt{2^{500}+2}$.

Câu 169: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai $f''(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thoả mãn $f(1)=f(0)=1, f'(0)=2018$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\int\limits_0^1 f''(x)(1-x)\mathrm{d}x=-2018$. **B.** $\int\limits_0^1 f''(x)(1-x)\mathrm{d}x=-1$.

C. $\int\limits_0^1 f''(x)(1-x)\mathrm{d}x=2018$. **D.** $\int\limits_0^1 f''(x)(1-x)\mathrm{d}x=1$.

Câu 170: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai $f''(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thoả mãn $f(1)=f(0)=1, f'(0)=2018$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\int\limits_0^1 f''(x)(1-x)\mathrm{d}x=-2018$. **B.** $\int\limits_0^1 f''(x)(1-x)\mathrm{d}x=-1$.

C. $\int\limits_0^1 f''(x)(1-x)\mathrm{d}x=2018$. **D.** $\int\limits_0^1 f''(x)(1-x)\mathrm{d}x=1$.

Lời giải

Chọn A

Xét $I=\int\limits_0^1 f''(x)(1-x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1(1-x)\mathrm{d}\left(f'(x)\right)$

Đặt $\begin{cases}u=1-x\\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}\left(f'(x)\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=-\mathrm{d}x\\ v=f'(x)\end{cases}$

$\Leftrightarrow I=(1-x)f'(x)\Big|_0^1+\int\limits_0^1 f'(x)\mathrm{d}x=\left[(1-1)f'(1)-f'(0)\right]+f(x)\Big|_0^1=-f'(0)+\left[f(1)-f(0)\right]$

$=-2018+(1-1)=-2018$.

Câu 171: Cho hàm số $y=x^4-4x^2+m$ có đồ thị (C_m). Giả sử (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt sao cho diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C_m) với trục hoành có diện tích phần phía trên trục hoành bằng diện tích phần phía dưới trục hoành. Khi đó m thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $m\in(-1;1)$. **B.** $m\in(3;5)$. **C.** $m\in(2;3)$. **D.** $m\in(5;+\infty)$.

Câu 172: Cho hàm số $y=x^4-4x^2+m$ có đồ thị (C_m). Giả sử (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt sao cho diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C_m) với trục hoành có diện tích phần phía trên trục hoành bằng diện tích phần phía dưới trục hoành. Khi đó m thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $m\in(-1;1)$. **B.** $m\in(3;5)$. **C.** $m\in(2;3)$. **D.** $m\in(5;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) với trục hoành là $x^4-4x^2+m=0\ (1)$.

Đặt $t=x^2\ (t\ge 0)$, phương trình (1) trở thành $t^2-4t+m=0\ (2)$.

Để (1) có bốn nghiệm phân biệt thì (2) phải có hai nghiệm dương phân biệt. Điều này xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\Delta>0\\ S=4>0\\ P=m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4-m>0\\ m>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<m<4\ (3)$.

Gọi t_1 và t_2 $(t_1<t_2)$ là hai nghiệm của (2), khi đó bốn nghiệm (theo thứ tự từ nhỏ đến lớn) của phương trình (1) là $x_1=-\sqrt{t_2}$, $x_2=-\sqrt{t_1}$, $x_3=\sqrt{t_1}$, $x_4=\sqrt{t_2}$.

Do tính đối xứng của (C_m) nên từ giả thiết ta có

$$\int_0^{x_3}\left(x^4-4x^2+m\right)\mathrm{d}x=\int_{x_3}^{x_4}\left(-x^4+4x^2-m\right)\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int_0^{x_4}\left(2x^4-8x^2+2m\right)\mathrm{d}x=0$$

$$\Leftrightarrow\left.\left(\frac{2x^5}{5}-\frac{8x^3}{3}+2mx\right)\right|_0^{x_4}=0\Leftrightarrow\frac{x_4^5}{5}-\frac{4x_4^3}{3}+mx_4=0\Leftrightarrow\frac{x_4^5}{5}-\frac{4x_4^3}{3}+mx_4=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x_4^5}{5}-\frac{4x_4^3}{3}+mx_4=0\Leftrightarrow 3x_4^4-20x_4^2+15m=0.$$

Vậy x_4 là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}x_4^4-4x_4^2+m=0\\ 3x_4^4-20x_4^2+15m=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}15x_4^4-60x_4^2+15m=0\\ 3x_4^4-20x_4^2+15m=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}12x_4^4-40x_4^2=0\\ 3x_4^4-20x_4^2+15m=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}12x_4^4-40x_4^2=0\\ 3x_4^4-20x_4^2+15m=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_4=0\\ m=0\end{cases}\\ \begin{cases}x_4^2=\dfrac{10}{3}\\ m=\dfrac{20}{9}\end{cases}\end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện (3) suy ra $m=\dfrac{20}{9}$.

Câu 1: (THTT Số 1-484 tháng 10 năm 2017-2018) Cho $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[0;a]$ thỏa mãn $\begin{cases} f(x).f(a-x)=1 \\ f(x)>0, \forall x\in[0;a] \end{cases}$ và $\int\limits_0^a \frac{dx}{1+f(x)}=\frac{ba}{c}$, trong đó b, c là hai số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Khi đó $b+c$ có giá trị thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(11;22)$. **B.** $(0;9)$. **C.** $(7;21)$. **D.** $(2017;2020)$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1. Đặt $t=a-x \Rightarrow dt=-dx$

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=a; x=a\Rightarrow t=0$.

Lúc đó $I=\int\limits_0^a \frac{dx}{1+f(x)}=\int\limits_a^0 \frac{-dt}{1+f(a-t)}=\int\limits_0^a \frac{dx}{1+f(a-x)}=\int\limits_0^a \frac{dx}{1+\frac{1}{f(x)}}=\int\limits_0^a \frac{f(x)dx}{1+f(x)}$

Suy ra $2I=I+I=\int\limits_0^a \frac{dx}{1+f(x)}+\int\limits_0^a \frac{f(x)dx}{1+f(x)}=\int\limits_0^a 1dx=a$

Do đó $I=\frac{1}{2}a\Rightarrow b=1;c=2\Rightarrow b+c=3$.

Cách 2. Chọn $f(x)=1$ là một hàm thỏa các giả thiết.

Dễ dàng tính được $I=\frac{1}{2}a\Rightarrow b=1;c=2\Rightarrow b+c=3$.

Câu 2: ----------HẾT----------(THPT Lê Hồng Phong-Nam Định-lần 1-năm 2017-2018) Một chất điểm đang chuyển động với vận tốc $v_0=15$ m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t)=t^2+4t\ (\text{m/s}^2)$. Tính quãng đường chất điểm đó đi được trong khoảng thời gian 3 giây kể từ lúc bắt đầu tăng vận tốc.

A. $70,25$ m. **B.** $68,25$ m. **C.** $67,25$ m. **D.** $69,75$ m.

Lời giải

Chọn D

$a(t)=t^2+4t \Rightarrow v(t)=\int a(t)dt=\frac{t^3}{3}+2t^2+C\ \ (C\in\mathbb{R})$.

Mà $v(0)=C=15 \Rightarrow v(t)=\frac{t^3}{3}+2t^2+15$.

Vậy $S=\int\limits_0^3\left(\frac{t^3}{3}+2t^2+15\right)dt=69,75$ m.

Câu 3: (THPT Yên Lạc 2-Vĩnh Phúc-lần 1-năm 2017-2018) Cho $m=\log_a\sqrt{ab}$ với $a,b>1$ và $P=\log_a^2 b+54\log_b a$. Khi đó giá trị của m để P đạt giá trị nhỏ nhất là ?

A. 2. **B.** 4. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Ta có $P=\log_a^2 b+54\log_b a=\log_a^2 b+\frac{54}{\log_a b}$

Đặt $P=\log_a^2 b+54\log_b a=\log_a^2 b+\frac{54}{\log_a b}=t^2+\frac{54}{t}$. (Với $t=\log_a b$)

Vì $a, b > 1$ nên $t = \log_a b > 0$. Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có

$$P = t^2 + \frac{54}{t} = t^2 + \frac{27}{t} + \frac{27}{t} \ge 3\sqrt[3]{27^2} = 27.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t^2 = \frac{27}{t} \Leftrightarrow t = 3$.

Ta có $m = \log_a \sqrt{ab} = \frac{1}{2}\log_a(ab) = \frac{1}{2}(1 + \log_a b) = \frac{1}{2}(1+t) = \frac{1}{2}(1+3) = 2$.

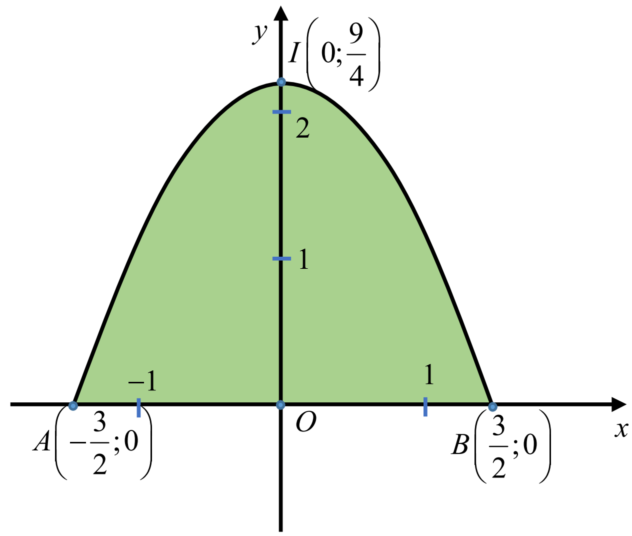
Câu 4: (TT Diệu Hiền-Cần Thơ-tháng 11-năm 2017-2018) Bác Năm làm một cái cửa nhà hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là $2,25$ mét, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét. Giá thuê mỗi mét vuông là 1500000 đồng. Vậy số tiền bác Năm phải trả là:

A. 33750000 đồng. **B.** 3750000 đồng. **C.** 12750000 đồng. **D.** 6750000 đồng.

Lời giải

Chọn D

Gọi phương trình parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$. Do tính đối xứng của parabol nên ta có thể chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho (P) có đỉnh $I \in Oy$ (như hình vẽ).



Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \frac{9}{4} = c, (I \in (P)) \\ \frac{9}{4}a - \frac{3}{2}b + c = 0\,(A \in (P)) \\ \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b + c = 0\,(B \in (P)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{9}{4} \\ a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$.

Vậy $(P): y = -x^2 + \frac{9}{4}$.

Dựa vào đồ thị, diện tích cửa parabol là:

$$S = \int_{\frac{-3}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(-x^2 + \frac{9}{4}\right)\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{3}{2}} \left(-x^2 + \frac{9}{4}\right)\mathrm{d}x = 2\left(\frac{-x^3}{3} + \frac{9}{4}x\right)\Bigg|_0^{\frac{9}{4}} = \frac{9}{2}\mathrm{m}^2.$$

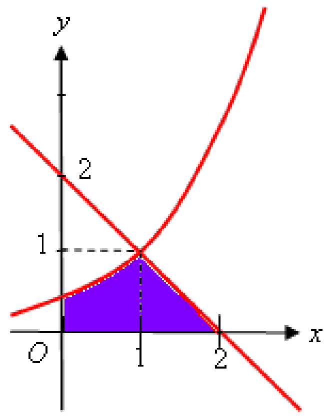
Số tiền phải trả là: $\frac{9}{2}.1500000 = 6750000$ đồng.

Câu 5: **(THTT Số 3-486 tháng 12 năm 2017-2018)** Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=e^{x-1}$, các trục tọa độ và phần đường thẳng $y=2-x$ với $x\ge 1$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành.

A. $V=\frac{1}{3}+\frac{e^2-1}{2e^2}$. **B.** $V=\frac{\pi\left(5e^2-3\right)}{6e^2}$. **C.** $V=\frac{1}{2}+\frac{e-1}{e}\pi$. **D.** $V=\frac{1}{2}+\frac{e^2-1}{2e^2}$.

Lời giải

Chọn B



Phương trình hoành độ giao điểm của đường cong $y=e^{x-1}$ và đường thẳng $y=2-x$: $e^{x-1}=2-x\Leftrightarrow x=1$. (Vì $y=e^{x-1}$ là hàm đồng biến và $y=2-x$ là hàm nghịch biến trên tập xác định $\mathbb{R}$ nên phương trình có tối đa 1 nghiệm. Mặt khác $x=1$ thỏa mãn pt nên đó là nghiệm duy nhất của pt đó).

Đường thẳng $y=2-x$ cắt trục hoành tại $x=2$.

$$V=\pi\int_0^1\left(e^{x-1}\right)^2dx+\pi\int_1^2(2-x)^2dx=\pi e^{2x-2}\Big|_0^1+\pi\left(\frac{x^3}{3}-2x+4\right)\Bigg|_1^2=\frac{\pi\left(5e^2-1\right)}{6e^2}$$

Câu 6: **(THTT Số 3-486 tháng 12 năm 2017-2018)** Xét hàm số $y=f(x)$ liên tục trên miền $D=[a,b]$ có đồ thị là một đường cong C. Gọi S là phần giới hạn bởi C và các đường thẳng $x=a$, $x=b$. Người ta chứng minh được rằng độ dài đường cong S bằng $\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx$. Theo kết quả trên, độ dài đường cong S là phần đồ thị của hàm số $f(x)=\ln x$ bị giới hạn bởi các đường thẳng $x=1$, $x=\sqrt{3}$ là $m-\sqrt{m}+\ln\frac{1+\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$ với m, $n\in\mathbb{Z}$ thì giá trị của m^2-mn+n^2 là bao nhiêu?

A. 6. **B.** 7. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=\frac{1}{x}$.

Khi đó, độ dài đường cong S là $l=\int_1^{\sqrt{3}}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}dx=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}xdx$.

Đặt $t=\sqrt{1+x^2}$. Suy ra: $t^2=1+x^2\Rightarrow tdt=xdx$.

Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=\sqrt{2}$; $x=\sqrt{3}\Rightarrow t=2$.

Suy ra: $I=\int\limits_{\sqrt{2}}^{2}\frac{t^2}{t^2-1}\mathrm{d}x=\int\limits_{\sqrt{2}}^{2}\left(1+\frac{1}{(t-1)(t+1)}\right)\mathrm{d}x=t\Big|_{\sqrt{2}}^{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_{\sqrt{2}}^{2}$.

Suy ra: $I=2-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{3}-\ln\left(3-2\sqrt{2}\right)\right)=2-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{3+2\sqrt{2}}{3}=2-\sqrt{2}+\ln\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Mà $I=m-\sqrt{m}+\ln\frac{1+\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$ nên suy ra $\begin{cases}m=2\\n=3\end{cases}$.

Vậy $m^2-mn+n^2=7$.

Câu 7: (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=7$ và $\int\limits_0^1 x^2f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$. Tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{7}{5}$. **B.** 1. **C.** $\frac{7}{4}$. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Tính: $\int\limits_0^1 x^2f(x)\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\\mathrm{d}v=x^2\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x\\v=\frac{x^3}{3}\end{cases}$.

Ta có: $\int\limits_0^1 x^2f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3f(x)}{3}\Bigg|_0^1-\frac{1}{3}\int\limits_0^1 x^3.f'(x)\mathrm{d}x$

$=\frac{1.f(1)-0.f(0)}{3}-\frac{1}{3}\int\limits_0^1 x^3.f'(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\int\limits_0^1 x^3.f'(x)\mathrm{d}x$.

Mà $\int\limits_0^1 x^2f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\Rightarrow-\frac{1}{3}\int\limits_0^1 x^3.f'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\Rightarrow\int\limits_0^1 x^3.f'(x)\mathrm{d}x=-1$.

Ta có $\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=7$ (1).

$\int\limits_0^1 x^6\mathrm{d}x=\frac{x^7}{7}\Bigg|_0^1=\frac{1}{7}\Rightarrow\int\limits_0^1 49x^6\mathrm{d}x=\frac{1}{7}.49=7$ (2).

$\int\limits_0^1 x^3.f'(x)\mathrm{d}x=-1\Rightarrow\int\limits_0^1 14x^3.f'(x)\mathrm{d}x=-14$ (3).

Cộng hai vế (1) (2) và (3) suy ra $\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x+\int\limits_0^1 49x^6\mathrm{d}x+\int\limits_0^1 14x^3.f'(x)\mathrm{d}x=7+7-14=0$.

$\Rightarrow\int\limits_0^1\left\{\left[f'(x)\right]^2+14x^3f'(x)+49x^6\right\}\mathrm{d}x=0\Rightarrow\int\limits_0^1\left[f'(x)+7x^3\right]^2\mathrm{d}x=0$.

Do $\left[f'(x)+7x^3\right]^2\geq0\Rightarrow\int\limits_0^1\left[f'(x)+7x^3\right]^2\mathrm{d}x\geq0$. Mà $\int\limits_0^1\left[f'(x)+7x^3\right]^2\mathrm{d}x=0\Rightarrow f'(x)=-7x^3$.

$f(x)=-\frac{7x^4}{4}+C$. Mà $f(1)=0\Rightarrow-\frac{7}{4}+C=0\Rightarrow C=\frac{7}{4}$.

Do đó $f(x) = -\frac{7x^4}{4} + \frac{7}{4}$.

Vậy $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(-\frac{7x^4}{4} + \frac{7}{4}\right) dx = \left(-\frac{7x^5}{20} + \frac{7}{4}x\right)\Big|_0^1 = \frac{7}{5}$.

Cách 2: Tương tự như trên ta có: $\int_0^1 x^3.f'(x)\,dx = -1$

Áp dụng BĐT Cauchy-Schwarz, ta có:

$$7 = 7\left(\int_0^1 x^3 f'(x)\,dx\right)^2 \le 7\left(\int_0^1 (x^3)^2\,dx\right)\cdot\left(\int_0^1 [f'(x)]^2\,dx\right) = 7\cdot\frac{1}{7}\cdot\int_0^1 [f'(x)]^2\,dx = \int_0^1 [f'(x)]^2\,dx$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $f'(x) = ax^3$, với $a \in \mathbb{R}$.

Ta có $\int_0^1 x^3.f'(x)\,dx = -1 \Rightarrow \int_0^1 x^3.ax^3\,dx = -1 \Rightarrow \frac{ax^7}{7}\Big|_0^1 = -1 \Rightarrow a = -7$.

Suy ra $f'(x) = -7x^3 \Rightarrow f(x) = -\frac{7x^4}{4} + C$, mà $f(1) = 0$ nên $C = \frac{7}{4}$

Do đó $f(x) = \frac{7}{4}(1 - x^4)\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(-\frac{7x^4}{4} + \frac{7}{4}\right) dx = \left(-\frac{7x^5}{20} + \frac{7}{4}x\right)\Big|_0^1 = \frac{7}{5}$.

Chú ý: Chứng minh bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$.

Khi đó, ta có $\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)\cdot\left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right)$.

Chứng minh:

Trước hết ta có tính chất:

Nếu hàm số $h(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$ thì $\int_a^b h(x)\,dx \ge 0$

Xét tam thức bậc hai $[\lambda f(x) + g(x)]^2 = \lambda^2 f^2(x) + 2\lambda f(x)g(x) + g^2(x) \ge 0$, với mọi $\lambda \in \mathbb{R}$

Lấy tích phân hai vế trên đoạn $[a;b]$ ta được

$$\lambda^2\int_a^b f^2(x)\,dx + 2\lambda\int_a^b f(x)g(x)\,dx + \int_a^b g^2(x)\,dx \ge 0,\ \text{với mọi } \lambda \in \mathbb{R} \qquad (*)$$

Coi $(*)$ là tam thức bậc hai theo biến λ nên ta có $\Delta' \le 0$

$$\Leftrightarrow \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)^2 - \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right) \le 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right) \text{ (đpcm)}$$

----------HẾT----------

Câu 1: (THPT Kim Liên-Hà Nội năm 2017-2018) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $5x^2+12x+16=m(x+2)\sqrt{x^2+2}$ có hai nghiệm thực phân biệt thỏa mãn điều kiện $2017^{2x+\sqrt{x+1}}-2017^{2+\sqrt{x+1}}+2018x\le 2018$.

A. $m\in\left(2\sqrt{6};3\sqrt{3}\right]$. **B.** $m\in\left[2\sqrt{6};3\sqrt{3}\right]$.

C. $m\in\left(3\sqrt{3};\frac{11}{3}\sqrt{3}\right)\cup\left\{2\sqrt{6}\right\}$. **D.** $m\in\left(2\sqrt{6};\frac{11}{3}\sqrt{3}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $2017^{2x+\sqrt{x+1}}-2017^{2+\sqrt{x+1}}+2018x\le 2018$

$\Leftrightarrow 2017^{2x+\sqrt{x+1}}+1009\left(2+\sqrt{x+1}\right)\le 2017^{2+\sqrt{x+1}}+1009\left(2+\sqrt{x+1}\right)$

$\Leftrightarrow f\left(2x+\sqrt{x+1}\right)\le f\left(2+\sqrt{x+1}\right)$.

Xét hàm số $f(u)=2017^u+1009u$

Ta có $f'(t)=2017^u\ln 2017+1009>0,\forall u\Rightarrow f(u)$ đồng biến.

Nên $2x+\sqrt{x+1}\le 2+\sqrt{x+1}\Leftrightarrow -1\le x\le 1$.

Ta lại có $5x^2+12x+16=m(x+2)\sqrt{x^2+2}\Leftrightarrow 3(x+2)^2+2\left(x^2+2\right)=m(x+2)\sqrt{x^2+2}$

$\Rightarrow 3\left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}\right)^2+2=m.\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}$.

Xét $t=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}\Rightarrow t'(x)=\frac{2-2x}{\left(\sqrt{x^2+2}\right)^3}\ge 0,\forall x\in[-1;1]$

Nên $\frac{\sqrt{3}}{3}\le t\le\sqrt{3}$.

Khi đó phương trình trở thành $3t^2+2=mt\Leftrightarrow 3t+\frac{2}{t}=m$.

Xét hàm số $f(t)=3t+\frac{2}{t}$. ta có $f'(t)=3-\frac{2}{t^2}=\frac{3t^2-2}{t^2}$.

Cho $f'(t)=0\Rightarrow t=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Bảng biến thiên

x	$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{6}}{3}$		$\sqrt{3}$
$f'(t)$		$-$		$+$	
$f(t)$	$3\sqrt{3}$	↘	$2\sqrt{6}$	↗	$\frac{11\sqrt{3}}{3}$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $2\sqrt{6}<m\le 3\sqrt{3}$.

----------HẾT----------

Câu 2: **(THPT Lương Thế Vinh-Hà Nội năm 2017-2018)** Một ô tô chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v(t)=7t\ \ (\text{m/s})$. Đi được $5\ (\text{s})$ người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a=-35\ \ (\text{m/s}^2)$. Tính quãng đường của ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn?

A. 87.5 mét. **B.** 96.5 mét. **C.** 102.5 mét. **D.** 105 mét.

Lời giải

Chọn D

Quãng đường ô tô đi được trong $5\ (\text{s})$ đầu là $s_1=\int\limits_0^5 7t\text{d}t=7\left.\dfrac{t^2}{2}\right|_0^5=87,5$ (mét).

Phương trình vận tốc của ô tô khi người lái xe phát hiện chướng ngại vật là $v_{(2)}(t)=35-35t$ (m/s). Khi xe dừng lại hẳn thì $v_{(2)}(t)=0 \Leftrightarrow 35-35t=0 \Leftrightarrow t=1$.

Quãng đường ô tô đi được từ khi phanh gấp đến khi dừng lại hẳn là

$s_2=\int\limits_0^1(35-35t)\text{d}t=\left.\left(35t-35\dfrac{t^2}{2}\right)\right|_0^1=17.5$ (mét).

Vậy quãng đường của ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn là $s=s_1+s_2=87.5+17.5=105$ (mét).

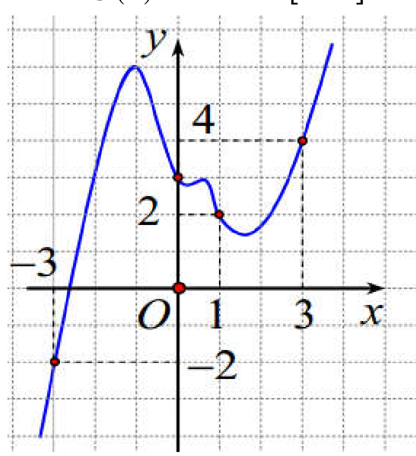
Câu 3: **(THPT Chuyên Thái Bình-lần 3 năm 2017-2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị $y=f'(x)$ cho như hình dưới đây. Đặt $g(x)=2f(x)-(x+1)^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng.

A. $\min\limits_{[-3;3]} g(x)=g(1)$.

B. $\max\limits_{[-3;3]} g(x)=g(1)$.

C. $\max\limits_{[-3;3]} g(x)=g(3)$.

D. Không tồn tại giá trị nhỏ nhất của $g(x)$ trên đoạn $[-3;3]$.



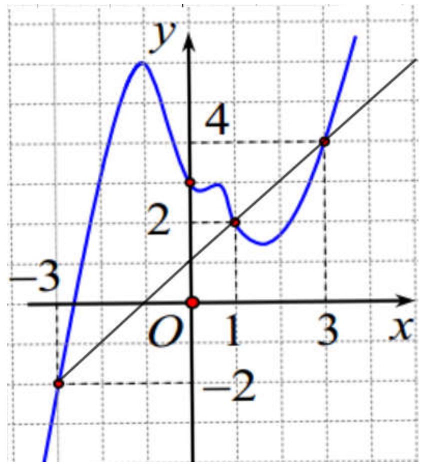
Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $g(x)=2f(x)-(x+1)^2$

$\Rightarrow g'(x)=2f'(x)-(2x+2)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x+1$. Quan sát trên đồ thị ta có hoành độ giao điểm của $f'(x)$ và $y=x+1$ trên khoảng $(-3;3)$ là $x=1$.

Vậy ta so sánh các giá trị $g(-3)$, $g(1)$, $g(3)$



Xét $\int\limits_{-3}^{1} g'(x)\mathrm{d}x = 2\int\limits_{-3}^{1}\left[f'(x)-(x+1)\right]\mathrm{d}x > 0$

$\Leftrightarrow g(1)-g(-3)>0 \Leftrightarrow g(1)>g(-3)$.

Tương tự xét $\int\limits_{1}^{3} g'(x)\mathrm{d}x = 2\int\limits_{1}^{3}\left[f'(x)-(x+1)\right]\mathrm{d}x < 0 \Leftrightarrow g(3)-g(1)<0 \Leftrightarrow g(3)<g(1)$.

Xét $\int\limits_{-3}^{3} g'(x)\mathrm{d}x = 2\int\limits_{-3}^{1}\left[f'(x)-(x+1)\right]\mathrm{d}x + 2\int\limits_{1}^{3}\left[f'(x)-(x+1)\right]\mathrm{d}x > 0$

$\Leftrightarrow g(3)-g(-3)>0 \Leftrightarrow g(3)>g(-3)$. Vậy ta có $g(1)>g(3)>g(-3)$.

Vậy $\max\limits_{[-3;3]} g(x)=g(1)$.

Câu 4: **(THPT Kinh Môn 2-Hải Dương năm 2017-2018)** Cho hàm số $f(x)\neq 0$; $f'(x)=(2x+1).f^2(x)$ và $f(1)=-0,5$.

Tính tổng $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2017)=\dfrac{a}{b}$; $(a\in\mathbb{Z};b\in\mathbb{N})$ với $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Chọn khẳng định đúng

A. $\dfrac{a}{b}<-1$. **B.** $a\in(-2017;2017)$. **C.** $b-a=4035$. **D.** $a+b=-1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f'(x)=(2x+1).f^2(x) \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=2x+1 \Leftrightarrow \int\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=\int(2x+1)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{f(x)}=x^2+x+C \Rightarrow \dfrac{1}{f(x)}=-x^2-x-C$.

Lại có: $f(1)=-0,5 \Rightarrow -2=-1^2-1-C \Rightarrow C=0$.

Vậy $\dfrac{1}{f(x)}=-(x^2+x)=-x(x+1)$ hay $-f(x)=\dfrac{1}{x(x+1)}$.

Ta có: $-f(1)-f(2)-f(3)-...-f(2017)=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{2017.2018}$

$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2017}-\frac{1}{2018}=1-\frac{1}{2018}=\frac{2017}{2018}$.

Vậy $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2017)=\frac{-2017}{2018}$ hay $a=-2017$, $b=2018$ $\Rightarrow b-a=4035$.

Câu 5: (THPT Tứ Kỳ-Hải Dương năm 2017-2018) Đặt S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=4-x^2$, trục hoành và đường thẳng $x=-2$, $x=m$, $(-2<m<2)$. Tìm số giá trị của tham số m để $S=\frac{25}{3}$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $S=\int\limits_{-2}^{m}\left|4-x^2\right|\mathrm{d}x=\frac{25}{3}$.

Phương trình $4-x^2=0\Leftrightarrow x=\pm 2$.

Bài ra $-2<m<2$ nên trên $(-2;m)$ thì $4-x^2=0$ vô nghiệm.

$\int\limits_{-2}^{m}\left|4-x^2\right|\mathrm{d}x=\frac{25}{3}\Leftrightarrow\left|\int\limits_{-2}^{m}\left(4-x^2\right)\mathrm{d}x\right|=\frac{25}{3}\Leftrightarrow\left|\left.\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\right|_{-2}^{m}\right|=\frac{25}{3}$

$\Leftrightarrow\left|\left(4m-\frac{m^3}{3}\right)-\left(-8+\frac{8}{3}\right)\right|=\frac{25}{3}\Leftrightarrow\left|4m-\frac{m^3}{3}+\frac{16}{3}\right|=\frac{25}{3}$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4m-\frac{m^3}{3}+\frac{16}{3}=\frac{25}{3}\\4m-\frac{m^3}{3}+\frac{16}{3}=-\frac{25}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{1}{3}m^3-4m+3=0\\\frac{1}{3}m^3-4m-\frac{41}{3}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m^3-12m+9=0\\m^3-12m-41=0\end{array}\right.\ (1)$

Xét hàm số $f(m)=m^3-12m$, với $m\in(-2;2)$ có

$$f'(m)=3m^2-12=3\left(m^2-4\right)<0,\ \forall m\in(-2;2).$$

Do đó $f(m)$ nghịch biến trên $(-2;2)\Rightarrow f(m)<f(-2)=16\Rightarrow m^3-12m-41<0$.

Khi đó $(1)\Leftrightarrow m^3-12m+9=0\Leftrightarrow(m-3)\left(m^2+3m-3\right)=0\Rightarrow m=\frac{\sqrt{21}-3}{2}$ thỏa mãn.

Vậy chỉ có $m=\frac{\sqrt{21}-3}{2}$ thỏa mãn bài toán.

Câu 6: (THPT Yên Định-Thanh Hóa-lần 1 năm 2017-2018) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $f(0)=1$ và $\frac{f'(x)}{f(x)}=2-2x$. Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x)=m$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. $m>e$. **B.** $0<m\le 1$. **C.** $0<m<e$. **D.** $1<m<e$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

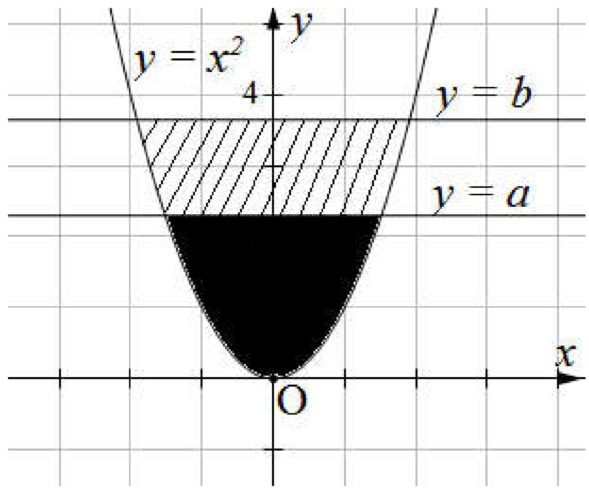
Ta có $\frac{f'(x)}{f(x)}=2-2x \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int(2-2x)\mathrm{d}x$.

$\Leftrightarrow \ln f(x)=2x-x^2+C \Leftrightarrow f(x)=A.e^{2x-x^2}$. Mà $f(0)=1$ suy ra $f(x)=e^{2x-x^2}$.

Ta có $2x-x^2=1-(x^2-2x+1)=1-(x-1)^2 \le 1$. Suy ra $0<e^{2x-x^2}\le e$ và ứng với một giá trị thực $t<1$ thì phương trình $2x-x^2=t$ sẽ có hai nghiệm phân biệt.

Vậy để phương trình $f(x)=m$ có 2 nghiệm phân biệt khi $0<m<e^1=e$.

Câu 7: (THPT Mộ Đức-Quãng Ngãi-lần 1 năm 2017-2018) Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y=x^2$ và hai đường thẳng $y=a$, $y=b$ $(0<a<b)$ (hình vẽ). Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng $y=a$ (phần tô đen); (S_2) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng $y=b$ (phần gạch chéo). Với điều kiện nào sau đây của a và b thì $S_1=S_2$?



A. $b=\sqrt[3]{4}a$. **B.** $b=\sqrt[3]{2}a$. **C.** $b=\sqrt[3]{3}a$. **D.** $b=\sqrt[3]{6}a$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol $(P): y=x^2$ với đường thẳng $y=b$ là

$x^2=b \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{b}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol $(P): y=x^2$ với đường thẳng $y=a$ là

$x^2=a \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{a}$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $y=b$ là

$$S=2\int_0^{\sqrt{b}}(b-x^2)\,\mathrm{d}x=2\left(bx-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{b}}=2\left(b\sqrt{b}-\frac{b\sqrt{b}}{3}\right)=\frac{4b\sqrt{b}}{3}.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $y=a$ (phần tô màu đen)

là $S_1=2\int_0^{\sqrt{a}}(a-x^2)\,\mathrm{d}x=2\left(ax-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{a}}=2\left(a\sqrt{a}-\frac{a\sqrt{a}}{3}\right)=\frac{4a\sqrt{a}}{3}$.

Do đó $S=2S_1 \Leftrightarrow \frac{4b\sqrt{b}}{3}=2.\frac{4a\sqrt{a}}{3} \Leftrightarrow \left(\sqrt{b}\right)^3=2\left(\sqrt{a}\right)^3 \Leftrightarrow \sqrt{b}=\sqrt[3]{2}\sqrt{a} \Leftrightarrow b=\sqrt[3]{4}a$.

Câu 8: **(THPT Hoàng Hoa Thám-Hưng Yên-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục, không âm trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, thỏa mãn $f\left(0\right)=\sqrt{3}$ và $f\left(x\right).f'\left(x\right)=\cos x.\sqrt{1+f^2\left(x\right)}$, $\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$.

A. $m=\frac{\sqrt{21}}{2}$, $M=2\sqrt{2}$.

B. $m=\frac{5}{2}$, $M=3$.

C. $m=\frac{\sqrt{5}}{2}$, $M=\sqrt{3}$.

D. $m=\sqrt{3}$, $M=2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết $f\left(x\right).f'\left(x\right)=\cos x.\sqrt{1+f^2\left(x\right)}$

$\Rightarrow \frac{f\left(x\right).f'\left(x\right)}{\sqrt{1+f^2\left(x\right)}}=\cos x\Rightarrow \int\frac{f\left(x\right).f'\left(x\right)}{\sqrt{1+f^2\left(x\right)}}\mathrm{d}x=\sin x+C$

Đặt $t=\sqrt{1+f^2\left(x\right)}\Rightarrow t^2=1+f^2\left(x\right)\ \Rightarrow t\mathrm{d}t=f\left(x\right)f'\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Thay vào ta được $\int\mathrm{d}t=\sin x+C\Rightarrow t=\sin x+C\Rightarrow\sqrt{1+f^2\left(x\right)}=\sin x+C$.

Do $f\left(0\right)=\sqrt{3}\Rightarrow C=2$.

Vậy $\sqrt{1+f^2\left(x\right)}=\sin x+2\Rightarrow f^2\left(x\right)=\sin^2 x+4\sin x+3$

$\Rightarrow f\left(x\right)=\sqrt{\sin^2 x+4\sin x+3}$, vì hàm số $f\left(x\right)$ liên tục, không âm trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Ta có $\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{1}{2}\le\sin x\le 1$, xét hàm số $g\left(t\right)=t^2+4t+3$ có hoành độ đỉnh $t=-2$ loại.

Suy ra $\max\limits_{\left[\frac{1}{2};1\right]}g\left(t\right)=g\left(1\right)=8$, $\min\limits_{\left[\frac{1}{2};1\right]}g\left(t\right)=g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{21}{4}$.

Suy ra $\max\limits_{\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]}f\left(x\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\sqrt{2}$, $\min\limits_{\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]}f\left(x\right)=g\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{21}}{2}$.

Câu 1: **(THPT Hà Huy Tập-Hà Tĩnh-lần 2 năm 2017-2018)** Giả sử hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục nhận giá trị dương trên $\left(0;+\infty\right)$ và thỏa mãn $f\left(1\right)=1$, $f\left(x\right)=f'\left(x\right).\sqrt{3x+1}$, với mọi $x>0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $3<f\left(5\right)<4$. **B.** $1<f\left(5\right)<2$. **C.** $4<f\left(5\right)<5$. **D.** $2<f\left(5\right)<3$.

Lời giải

Chọn A

Từ $f\left(x\right)=f'\left(x\right).\sqrt{3x+1}$ ta có $\dfrac{f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}$.

Suy ra: $\displaystyle\int\frac{f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x\Rightarrow \ln f\left(x\right)=\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}+C$.

Ta có $\ln f\left(1\right)=\dfrac{2}{3}\sqrt{3.1+1}+C\Leftrightarrow \ln 1=\dfrac{4}{3}+C\Leftrightarrow C=-\dfrac{4}{3}$.

Nên $\ln f\left(x\right)=\dfrac{2}{3}\sqrt{3x+1}-\dfrac{4}{3}\Leftrightarrow f\left(x\right)=\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}-\frac{4}{3}}$.

Vậy $f\left(5\right)=\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\sqrt{3.5+1}-\frac{4}{3}}=\mathrm{e}^{\frac{4}{3}}\in\left(3;4\right)$.

Câu 2: ----------**HẾT**----------**(THPT Phan Châu Trinh-DakLak-lần 2 năm 2017-2018)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$ thỏa mãn $\displaystyle\int_0^1\left[f'\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x=\int_0^1\left(x+1\right)\mathrm{e}^x f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^2-1}{4}$ và $f\left(1\right)=0$.

Tính $\displaystyle\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$

A. $\dfrac{\mathrm{e}-1}{2}$. **B.** $\dfrac{\mathrm{e}^2}{4}$. **C.** $\mathrm{e}-2$. **D.** $\dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

- Tính: $\displaystyle I=\int_0^1\left(x+1\right)\mathrm{e}^x f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\mathrm{e}^x f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int_0^1\mathrm{e}^x f\left(x\right)\mathrm{d}x=J+K$.

Tính $\displaystyle K=\int_0^1\mathrm{e}^x f\left(x\right)\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases}u=\mathrm{e}^x f\left(x\right)\\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\left[\mathrm{e}^x f\left(x\right)+\mathrm{e}^x f'\left(x\right)\right]\mathrm{d}x\\ v=x\end{cases}$

$\displaystyle\Rightarrow K=\left(x\mathrm{e}^x f\left(x\right)\right)\Big|_0^1-\int_0^1\left[x\mathrm{e}^x f\left(x\right)+x\mathrm{e}^x f'\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=-\int_0^1 x\mathrm{e}^x f\left(x\right)\mathrm{d}x-\int_0^1 x\mathrm{e}^x f'\left(x\right)\mathrm{d}x\ \left(\text{do } f\left(1\right)=0\right)$

$\displaystyle\Rightarrow K=-J-\int_0^1 x\mathrm{e}^x f'\left(x\right)\mathrm{d}x\Rightarrow I=J+K=-\int_0^1 x\mathrm{e}^x f'\left(x\right)\mathrm{d}x$.

- Kết hợp giả thiết ta được:

$$\begin{cases} \int_0^1 [f'(x)]^2 \,dx = \dfrac{e^2-1}{4} \\ -\int_0^1 xe^x f'(x)\,dx = \dfrac{e^2-1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_0^1 [f'(x)]^2 \,dx = \dfrac{e^2-1}{4} & (1) \\ 2\int_0^1 xe^x f'(x)\,dx = -\dfrac{e^2-1}{2} & (2) \end{cases}$$

- Mặt khác, ta tính được: $\int_0^1 x^2e^{2x}dx = \dfrac{e^2-1}{4}$ (3).

- Cộng vế với vế các đẳng thức (1), (2), (3) ta được:

$$\int_0^1 \left([f'(x)]^2 + 2xe^x f'(x) + x^2e^{2x}\right)dx = 0 \Leftrightarrow \int_o^1 \left(f'(x) + xe^x\right)^2 dx = 0 \Leftrightarrow \pi\int_o^1 \left(f'(x) + xe^x\right)^2 dx = 0$$

hay thể tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x) + xe^x$, trục Ox, các đường thẳng $x = 0$, $x = 1$ khi quay quanh trục Ox bằng 0

$\Rightarrow f'(x) + xe^x = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -xe^x$

$\Rightarrow f(x) = -\int xe^x dx = (1-x)e^x + C$.

- Lại do $f(1) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = (1-x)e^x$

$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (1-x)e^x dx = \left((1-x)e^x\right)\Big|_0^1 + \int_0^1 e^x dx = -1 + e^x\Big|_0^1 = e - 2$.

Vậy $\int_0^1 f(x)dx = e - 2$.

Câu 3: ----------**HẾT**----------**(THPT Kinh Môn-Hải Dương lần 1 năm 2017-2018)** Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục, dương trên $\mathbb{R}$; thỏa mãn $f(0) = 1$ và $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{x}{x^2+1}$. Khi đó hiệu $T = f\left(2\sqrt{2}\right) - 2f(1)$ thuộc khoảng

A. $(2;3)$. **B.** $(7;9)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(9;12)$.

Lời giải

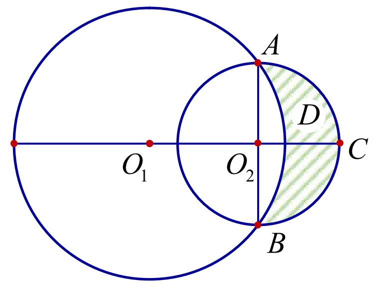
Chọn C

Ta có $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \dfrac{x}{x^2+1}dx \Leftrightarrow \int \dfrac{d\left(f(x)\right)}{f(x)} = \dfrac{1}{2}\int \dfrac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1}$.

Vậy $\ln\left(f(x)\right) = \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C$, mà $f(0) = 1 \Leftrightarrow C = 0$. Do đó $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

Nên $f\left(2\sqrt{2}\right) = 3;\ 2f(1) = 2\sqrt{2} \Rightarrow f\left(2\sqrt{2}\right) - 2f(1) = 3 - 2\sqrt{2} \in (0;1)$.

Câu 4: **(THPT Kinh Môn-Hải Dương lần 1 năm 2017-2018)** Cho hai đường tròn $(O_1;5)$ và $(O_2;3)$ cắt nhau tại hai điểm A, B sao cho AB là một đường kính của đường tròn $(O_2;3)$. Gọi (D) là hình phẳng được giới hạn bởi hai đường tròn (ở ngoài đường tròn lớn, phần được gạch chéo như hình vẽ). Quay (D) quanh trục O_1O_2 ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành.



A. $V = 36\pi$. **B.** $V = \dfrac{68\pi}{3}$. **C.** $V = \dfrac{14\pi}{3}$. **D.** $V = \dfrac{40\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Chọn hệ tọa độ Oxy với $O_2 \equiv O$, $O_2C \equiv Ox$, $O_2A \equiv Oy$.

Cạnh $O_1O_2 = \sqrt{O_1A^2 - O_2A^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \Rightarrow (O_1): (x+4)^2 + y^2 = 25$.

Phương trình đường tròn (O_2): $x^2 + y^2 = 9$.

Kí hiệu (H_1) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{25-(x+4)^2}$, trục Ox, $x = 0$, $x = 1$.

Kí hiệu (H_2) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{9 - x^2}$, trục Ox, $x = 0$, $x = 3$.

Khi đó thể tích V cần tính chính bằng thể tích V_2 của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H_2) xung quanh trục Ox trừ đi thể tích V_1 của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H_1) xung quanh trục Ox.

Ta có $V_2 = \dfrac{1}{2}.\dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{2}{3}\pi.3^3 = 18\pi$.

Lại có $V_1 = \pi\displaystyle\int_0^1 y^2 \mathrm{d}x = \pi\int_0^1 \left[25-(x+4)^2\right]\mathrm{d}x = \pi\left[25x - \dfrac{(x+4)^3}{3}\right]\Bigg|_0^1 = \dfrac{14\pi}{3}$.

Do đó $V = V_2 - V_1 = 18\pi - \dfrac{14\pi}{3} = \dfrac{40\pi}{3}$.

Câu 5: **(THPT Kinh Môn-Hải Dương lần 1 năm 2017-2018)** Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - (2m-1)x^2 + (2-m)x + 2$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

A. $\dfrac{5}{4} < m \le 2$. **B.** $-2 < m < \dfrac{5}{4}$. **C.** $-\dfrac{5}{4} < m < 2$. **D.** $\dfrac{5}{4} < m < 2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = 3x^2 - 2(2m-1)x + 2 - m$

Hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị khi chỉ khi hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị dương.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m-1)^2 - 3(2-m) > 0 \\ \dfrac{2(2m-1)}{3} > 0 \\ \dfrac{2-m}{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - m - 5 > 0 \\ m > \dfrac{1}{2} \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{5}{4} < m < 2$$

Câu 6: **(THPT Chuyên Lam Sơn-Thanh Hóa-lần 2 năm 2017-2018)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm dương, liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(0)=1$ và $3\int_0^1\left[f'(x)[f(x)]^2+\frac{1}{9}\right]\mathrm{d}x \le 2\int_0^1\sqrt{f'(x)}f(x)\mathrm{d}x$. Tính tích phân $\int_0^1[f(x)]^3\mathrm{d}x$:

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{5}{6}$. **D.** $\frac{7}{6}$.

Lời giải

Chọn D

Từ giả thiết suy ra:

$$\int_0^1\left[\left(3\sqrt{f'(x)}f(x)\right)^2-2.3\sqrt{f'(x)}f(x)+1\right]\mathrm{d}x\le 0 \Leftrightarrow \int_0^1\left[3\sqrt{f'(x)}f(x)-1\right]^2\mathrm{d}x\le 0.$$

Suy ra $3\sqrt{f'(x)}f(x)-1=0 \Leftrightarrow \sqrt{f'(x)}f(x)=\frac{1}{3} \Leftrightarrow f'(x).f^2(x)=\frac{1}{9}$.

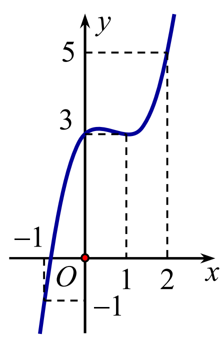
Vì $\left[f^3(x)\right]'=3.f^2(x)f'(x)$ nên suy ra $\left[f^3(x)\right]'=\frac{1}{3} \Rightarrow f^3(x)=\frac{1}{3}x+C$.

Vì $f(0)=1$ nên $f^3(0)=1 \Rightarrow C=1$.

Vậy $\Rightarrow f^3(x)=\frac{1}{3}x+1$.

Suy ra $\int_0^1[f(x)]^3\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\frac{1}{3}x+1\right)\mathrm{d}x=\frac{7}{6}$.

Câu 7: **(THPT Lê Quý Đôn-Hải Phòng lần 1 năm 2017-2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình 2 dưới đây.



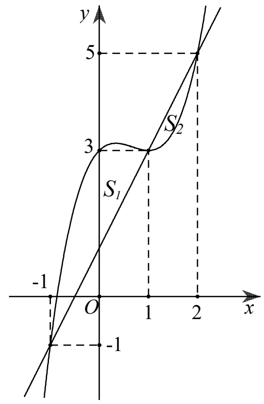
Lập hàm số $g(x)=f(x)-x^2-x$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $g(-1)>g(1)$. **B.** $g(-1)=g(1)$. **C.** $g(1)=g(2)$. **D.** $g(1)>g(2)$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $h(x)=f'(x)-(2x+1)$. Khi đó hàm số $h(x)$ liên tục trên các đoạn $[-1;1]$, $[1;2]$ và có $g(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=h(x)$.



Do đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi $\begin{cases} x=-1 \\ x=1 \\ y=f'(x) \\ y=2x+1 \end{cases}$ là

$S_1=\int_{-1}^{1}\left|f'(x)-(2x+1)\right|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\left[f'(x)-(2x+1)\right]\mathrm{d}x=g(x)\Big|_{-1}^{1}=g(1)-g(-1)$.

Vì $S_1>0$ nên $g(1)>g(-1)$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $\begin{cases} x=1 \\ x=2 \\ y=f'(x) \\ y=2x+1 \end{cases}$ là

$S_2=\int_{1}^{2}\left|f'(x)-(2x+1)\right|\mathrm{d}x=\int_{1}^{2}\left[(2x+1)-f'(x)\right]\mathrm{d}x=-g(x)\Big|_{1}^{2}=g(1)-g(2)$.

Vì $S_2>0$ nên $g(1)>g(2)$.

Câu 8: (THPT Lê Quý Đôn-Quãng Trị-lần 1 năm 2017-2018) Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=4$, $\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x=6$. Tính $I=\int_{-1}^{1} f\left(|2x+1|\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=3$. **B.** $I=5$. **C.** $I=6$. **D.** $I=4$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $u=2x+1 \Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}u$. Khi $x=-1$ thì $u=-1$. Khi $x=1$ thì $u=3$.

Nên $I=\frac{1}{2}\int_{-1}^{3} f\left(|u|\right)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{0} f\left(|u|\right)\mathrm{d}u+\int_{0}^{3} f\left(|u|\right)\mathrm{d}u\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{0} f(-u)\,\mathrm{d}u+\int_{0}^{3} f(u)\,\mathrm{d}u\right)$.

Xét $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=4$. Đặt $x=-u \Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}u$.

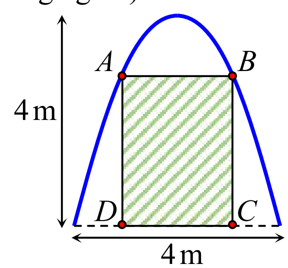
Khi $x=0$ thì $u=0$. Khi $x=1$ thì $u=-1$.

Nên $4=\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=-\int\limits_0^{-1} f\left(-u\right)\mathrm{d}u=\int\limits_{-1}^0 f\left(-u\right)\mathrm{d}u$.

Ta có $\int\limits_0^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x=6\Rightarrow\int\limits_0^3 f\left(u\right)\mathrm{d}u=6$.

Nên $I=\frac{1}{2}\left(\int\limits_{-1}^0 f\left(-u\right)\mathrm{d}u+\int\limits_0^3 f\left(u\right)\mathrm{d}u\right)=\frac{1}{2}\left(4+6\right)=5$.

Câu 9: (THPT Đức THọ-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Trong đợt hội trại "Khi tôi 18" được tổ chức tại trường THPT X, Đoàn trường có thực hiện một dự án ảnh trưng bày trên một pano có dạng parabol như hình vẽ. Biết rằng Đoàn trường sẽ yêu cầu các lớp gửi hình dự thi và dán lên khu vực hình chữ nhật $ABCD$, phần còn lại sẽ được trang trí hoa văn cho phù hợp. Chi phí dán hoa văn là 200.000 đồng cho một m^2 bảng. Hỏi chi phí thấp nhất cho việc hoàn tất hoa văn trên pano sẽ là bao nhiêu (làm tròn đến hàng nghìn)?

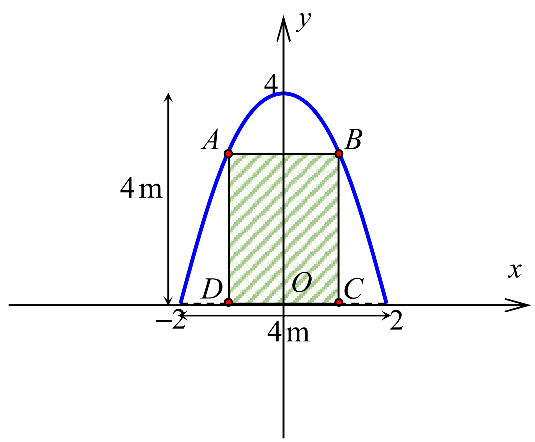


A. 900.000 đồng. **B.** 1.232.000 đồng. **C.** 902.000 đồng. **D.** 1.230.000 đồng.

Lời giải

Chọn C

Đặt hệ trục tọa độ như hình vẽ, khi đó phương trình đường parabol có dạng: $y=ax^2+b$.



Parabol cắt trục tung tại điểm $\left(0;4\right)$ và cắt trục hoành tại $\left(2;0\right)$ nên:

$\begin{cases} b=4 \\ a.2^2+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=4 \end{cases}$.

Do đó, phương trình parabol là $y=-x^2+4$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường parabol và trục hoành là

$S_1=\int\limits_{-2}^2\left(-x^2+4\right)\mathrm{d}x=\left.\left(-\frac{x^3}{3}+4x\right)\right|_{-2}^2=\frac{32}{3}$.

Gọi $C\left(t;0\right)\Rightarrow B\left(t;4-t^2\right)$ với $0<t<2$.

Ta có $CD = 2t$ và $BC = 4 - t^2$. Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là

$S_2 = CD.BC = 2t.\left(4 - t^2\right) = -2t^3 + 8t$.

Diện tích phần trang trí hoa văn là

$S = S_1 - S_2 = \frac{32}{3} - \left(-2t^3 + 8t\right) = 2t^3 - 8t + \frac{32}{3}$.

Xét hàm số $f\left(t\right) = 2t^3 - 8t + \frac{32}{3}$ với $0 < t < 2$.

Ta có $f'\left(t\right) = 6t^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{2}{\sqrt{3}} \in \left(0;2\right) \\ t = -\frac{2}{\sqrt{3}} \notin \left(0;2\right) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{2}{\sqrt{3}}$		2
$f'\left(x\right)$		$-$	0	$+$	
$f\left(x\right)$		$\searrow$	$\frac{96-32\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow$	

Như vậy, diện tích phần trang trí nhỏ nhất là bằng $\frac{96-32\sqrt{3}}{9}\text{m}^2$, khi đó chi phí thấp nhất cho việc hoàn tất hoa văn trên pano sẽ là $\frac{96-32\sqrt{3}}{9}.200000 \approx 902000$ đồng.

Câu 10: ----------**HẾT**----------**(THPT Chuyên Thái Bình-lần 4 năm 2017-2018)** Cho một đa giác $\left(H\right)$ có 60 đỉnh nội tiếp một đường tròn $\left(O\right)$. Người ta lập một tứ giác tùy ý có bốn đỉnh là các đỉnh của $\left(H\right)$. Xác suất để lập được một tứ giác có bốn cạnh đều là đường chéo của $\left(H\right)$ gần với số nào nhất trong các số sau?

A. $85,40\%$. **B.** $13,45\%$. **C.** $40,35\%$. **D.** $80,70\%$.

Lời giải

Chọn D

Số phần tử của không gian mẫu là $n\left(\Omega\right) = C_{60}^4$.

Gọi E là biến cố "lập được một tứ giác có bốn cạnh đều là đường chéo của $\left(H\right)$".

Để chọn ra một tứ giác thỏa mãn đề bài ta làm như sau:

- *Bước 1:* Chọn đỉnh đầu tiên của tứ giác, có 60 cách.
- *Bước 2:*

  Cách 1: Chọn 3 đỉnh còn lại sao cho hai đỉnh bất kỳ của tứ giác cách nhau ít nhất 1 đỉnh. Điều này tương đương với việc ta phải chia $m = 60$ chiếc kẹo cho $n = 4$ đứa trẻ sao cho mỗi đứa trẻ có ít nhất $k = 2$ cái, có $C_{m-n(k-1)-1}^{n-1} = C_{55}^3$ cách, nhưng làm như thế mỗi tứ giác lặp lại 4 lần.

  Cách 2: Đánh số các đỉnh $A_1; A_2; \ldots A_{60}$. Ký hiệu tứ giác cần lập là $ABCD$.

  Nếu $A \equiv A_1$ thì các điểm A, B, C, D cách nhau ít nhất 1 điểm.

Gọi x_1 là số điểm ở giữa A và B $(x_1 \geq 1)$.

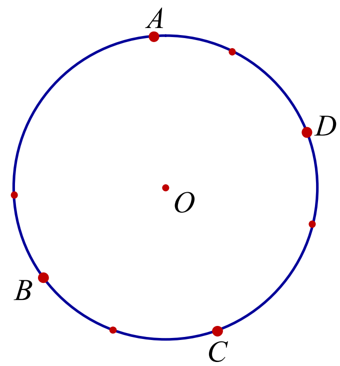
x_2 là số điểm ở giữa B và C $(x_2 \geq 1)$.

x_3 là số điểm ở giữa C và D $(x_3 \geq 1)$.

x_4 là số điểm ở giữa D và A $(x_4 \geq 1)$.

Ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 56 \quad (1) \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 1 \end{cases}$

Số nghiệm dương của phương trình (1) là số cách chọn B, C, D. Khi đó có C_{55}^3 cách, nhưng mỗi tứ giác được lặp lại 4 lần tại một đỉnh.



Suy ra, số phần tử của biến cố E là $n(E) = \dfrac{60.C_{55}^3}{4}$.

Xác suất của biến cố E là $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(\Omega)} = \dfrac{60.C_{55}^3}{4.C_{60}^4} \approx 80,7\%$.

Câu 11: (THPT Chuyên Hùng Vương-Phú Thọ-lần 2 năm 2017-2018) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2(x) - 2\sqrt{2}f(x)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]dx = \frac{2-\pi}{2}$. Tích phân $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$ bằng

A. $\dfrac{\pi}{4}$. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $\dfrac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1 - \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)\right]dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 - \sin 2x)\,dx$

$= \left(x + \dfrac{1}{2}\cos 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi - 2}{2}$.

Do đó: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2(x) - 2\sqrt{2}f(x)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)dx = \frac{2-\pi}{2} + \frac{\pi - 2}{2} = 0$

$\Leftrightarrow \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2(x) - 2\sqrt{2}f(x)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]dx = 0$

$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f(x) - \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right]^2 \mathrm{d}x = 0$

Suy ra $f(x) - \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$, hay $f(x) = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Bởi vậy: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x = -\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$.

Câu 12: (SGD Hà Nội-lần 11 năm 2017-2018) Cho khối trụ có hai đáy là hai hình tròn $(O;R)$ và $(O';R)$, $OO' = 4R$. Trên đường tròn $(O;R)$ lấy hai điểm A, B sao cho $AB = a\sqrt{3}$. Mặt phẳng (P) đi qua A, B cắt đoạn OO' và tạo với đáy một góc $60°$, (P) cắt khối trụ theo thiết diện là một phần của elip. Diện tích thiết diện đó bằng

A. $\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)R^2$. **B.** $\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$. **C.** $\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$. **D.** $\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)R^2$.

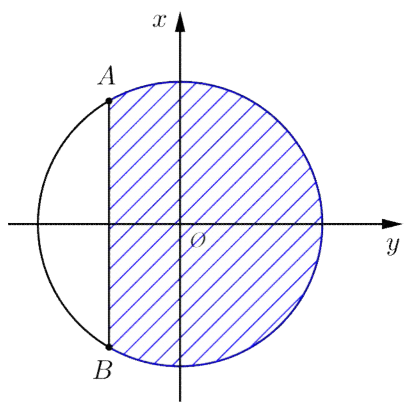
Lời giải

Chọn A

Cách 1: Gọi diện tích cần tìm là S, diện tích của hình này chiếu xuống đáy là S'.

Ta có: $S' = S.\cos 60°$.

Hình chiếu của phần elip xuống đáy là miền sọc xanh như hình vẽ.



Trong ΔAOB ta có: $\cos\widehat{AOB} = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2.OA.OB} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{AOB} = \frac{2\pi}{3}$.

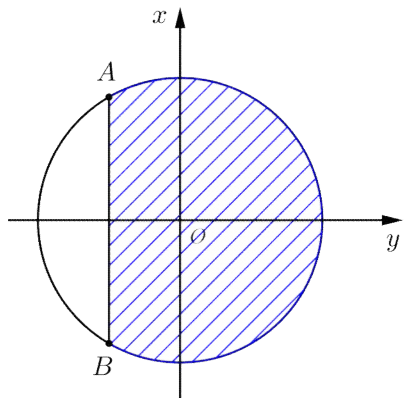
Suy ra: sđ $\overset{\frown}{AOB}$ lớn $= \frac{4\pi}{3}$.

Do đó $S' = S_{\text{quat}AOB} + S_{\Delta AOB} = \frac{\frac{4\pi}{3}}{2\pi}.\pi R^2 + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)R^2 = \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$

Vậy $S = \frac{S'}{\cos 60°} = 2\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2 = \left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)R^2$

Cách 2: Ta có: $\cos\widehat{AOB} = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2.OA.OB} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{AOB} = 120° \Rightarrow OH = \frac{R}{2}$.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ



Suy ra: phương trình đường tròn đáy là $x^2+y^2=R^2 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$.

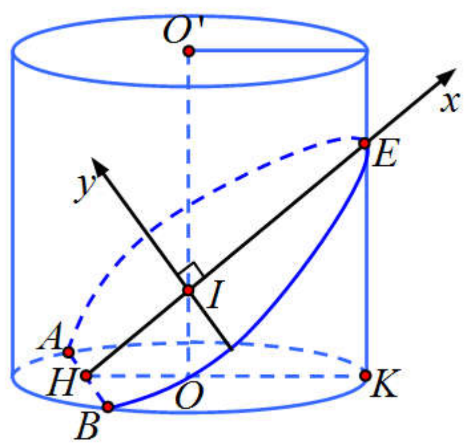
Hình chiếu của phần elip xuống đáy là miền sọc xanh như hình vẽ.

Ta có $S=2\int\limits_{-\frac{R}{2}}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x$. Đặt $x=R.\sin t \Rightarrow S=\left(\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$.

Gọi diện tích phần elip cần tính là S'.

Theo công thức hình chiếu, ta có $S'=\dfrac{S}{\cos 60^\circ}=2S=\left(\dfrac{4\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)R^2$.

Cách 3: Gọi I, H, K, E là các điểm như hình vẽ.



* Ta có: $\widehat{IHO}=60^\circ$

$OH^2=OB^2-BH^2=R^2-\dfrac{3R^2}{4}=\dfrac{R^2}{4}\Rightarrow OH=\dfrac{R}{2}\Rightarrow OI=OH.\tan 60^\circ=\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$,

$IH=\dfrac{OH}{\cos 60^\circ}=R$, $\Delta IOH \sim \Delta EKH$ nên ta có: $\dfrac{IE}{IH}=\dfrac{OK}{OH}=2\Rightarrow IE=2R$.

* Chọn hệ trục tọa độ Ixy như hình vẽ ta có elip (E) có bán trục lớn là $a=IE=2R$ và (E) đi qua $A\left(-R;\dfrac{R\sqrt{3}}{2}\right)$ nên (E) có phương trình là $(E):\dfrac{x^2}{4R^2}+\dfrac{y^2}{R^2}=1$.

* Diện tích của thiết diện là $S=2\int\limits_{-R}^{2R}R\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4R^2}}\mathrm{d}x=2R\int\limits_{-R}^{2R}\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4R^2}}\mathrm{d}x$

* Xét tích phân: $I=\int\limits_{-R}^{2R}\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4R^2}}\mathrm{d}x$, đặt $x=2R.\sin t$; $t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ ta được

$$I=\frac{R}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t=\frac{R}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right)R\Rightarrow S=\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2.$$

Câu 13: **(THPT Lê Xoay-Vĩnh phúc-lần 1 năm 2017-2018)** Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(1)=1$, $f(x)=f'(x).\sqrt{3x+1}$, với mọi $x>0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $2<f(5)<3$. **B.** $1<f(5)<2$. **C.** $4<f(5)<5$. **D.** $3<f(5)<4$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x)=f'(x).\sqrt{3x+1}\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{3x+1}}\Rightarrow\int\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\int\frac{\mathrm{d}(f(x))}{f(x)}=\int\frac{1}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x\Leftrightarrow\ln f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}+C\Leftrightarrow f(x)=\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}+C}$

Mà $f(1)=1$ nên $\mathrm{e}^{\frac{4}{3}+C}=1\Leftrightarrow C=-\frac{4}{3}$. Suy ra $f(5)=\mathrm{e}^{\frac{4}{3}}\approx 3,794$.

Câu 14: **----------HẾT----------(THPT Chuyên Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018)** Biết $\int_0^{\pi}\frac{x\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x=\frac{\pi^a}{b}$ trong đó a, b là các số nguyên dương. Tính $P=2a+b$.

A. $P=8$. **B.** $P=10$. **C.** . $P=6$.. **D.** $P=12$.

Lời giải

Chọn A

Xét tích phân $I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x$.

Đặt $x=\pi-t\Rightarrow\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$.

Khi $x=0$ thì $t=\pi$.

Khi $x=\pi$ thì $t=0$.

Ta có $I=-\int_{\pi}^{0}\frac{(\pi-t)\sin^{2018}(\pi-t)}{\sin^{2018}(\pi-t)+\cos^{2018}(\pi-t)}\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x$

$=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x-\int_0^{\pi}\frac{x\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x$

$=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x-I$.

Suy ra $I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x$.

Xét tích phân $J=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x$.

Đặt $x=\frac{\pi}{2}-u\Rightarrow\mathrm{d}x=-\mathrm{d}u$.

Khi $x=\dfrac{\pi}{2}$ thì $u=0$.

Khi $x=\pi$ thì $t=-\dfrac{\pi}{2}$.

Nên $J=-\int\limits_{0}^{-\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin^{2018}\left(\dfrac{\pi}{2}-u\right)}{\sin^{2018}\left(\dfrac{\pi}{2}-u\right)+\cos^{2018}\left(\dfrac{\pi}{2}-u\right)}\mathrm{d}u=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\dfrac{\cos^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x$.

Vì hàm số $f(x)=\dfrac{\cos^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}$ là hàm số chẵn nên:

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\cos^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x$$

Từ đó ta có:

$$I=\frac{\pi}{2}\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\left(\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{4}.$$

Như vậy $a=2$, $b=4$. Do đó $P=2a+b=2.2+4=8$.

Câu 15: (THPT Đặng Thúc Hứa-Nghệ An-lần 1 năm 2017-2018) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định, liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f'(0)=-1$ và $\left[f'(x)\right]^2=f''(x)$. Đặt $T=f(1)-f(0)$, hãy chọn khẳng định đúng?

A. $-2\le T<-1$. **B.** $-1\le T<0$. **C.** $0\le T<1$. **D.** $1\le T<2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $T=f(1)-f(0)=\int\limits_{0}^{1}f'(x)\mathrm{d}x$

Lại có: $\left[f'(x)\right]^2=f''(x)\Leftrightarrow -1=-\dfrac{f''(x)}{\left[f'(x)\right]^2}\Leftrightarrow -1=\left[\dfrac{1}{f'(x)}\right]'$

$\Leftrightarrow -x+c=\dfrac{1}{f'(x)}\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{1}{-x+c}$.

Mà $f'(0)=-1$ nên $c=-1$.

Vậy $T=\int\limits_{0}^{1}f'(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{1}\dfrac{1}{-x-1}\mathrm{d}x=-\ln\left|-x-1\right|\Big|_{0}^{1}=-\ln 2$.

Câu 16: **(THPT Đặng Thúc Hứa-Nghệ An-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$ thỏa mãn $f\left(1\right)=1$, $\int\limits_0^1\left[f'\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{9}{5}$ và $\int\limits_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{5}$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{3}{5}$. **B.** $I=\frac{1}{4}$. **C.** $I=\frac{3}{4}$. **D.** $I=\frac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\sqrt{x}\Rightarrow t^2=x\Rightarrow \mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$. Đổi cận $x=0\Rightarrow t=0;\ x=1\Rightarrow t=1$

Suy ra $\int\limits_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=2\int\limits_0^1 t.f\left(t\right)\mathrm{d}t\Leftrightarrow\int\limits_0^1 t.f\left(t\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{5}$. Do đó $\Leftrightarrow\int\limits_0^1 x.f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{5}$

Mặt khác $\int\limits_0^1 x.f\left(x\right)\mathrm{d}x=\left.\frac{x^2}{2}f\left(x\right)\right|_0^1-\int\limits_0^1\frac{x^2}{2}f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}-\int\limits_0^1\frac{x^2}{2}f'\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Suy ra $\int\limits_0^1\frac{x^2}{2}f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{3}{10}\Rightarrow\int\limits_0^1 x^2f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{3}{5}$

Ta tính được $\int\limits_0^1\left(3x^2\right)^2\mathrm{d}x=\frac{9}{5}$.

Do đó $\int\limits_0^1\left[f'\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x-2\int\limits_0^1 3x^2f'\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_0^1\left(3x^2\right)^2\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow\int\limits_0^1\left(f'\left(x\right)-3x^2\right)^2\mathrm{d}x=0$

$\Leftrightarrow f'\left(x\right)-3x^2=0\Leftrightarrow f'\left(x\right)=3x^2\Leftrightarrow f\left(x\right)=x^3+C$.

Vì $f\left(1\right)=1$ nên $f\left(x\right)=x^3$

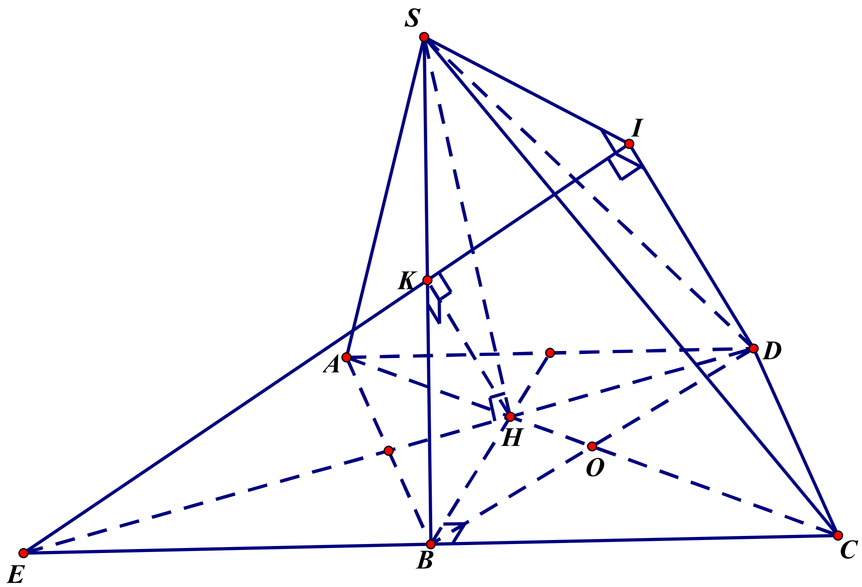
Vậy $I=\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 x^3\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$.

Câu 17: **----------HẾT----------(THPT Chuyên Phan Bội Châu-lần 2 năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm I, cạnh a, góc $\widehat{BAD}=60^\circ$, $SA=SB=SD=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi α là góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $\left(SBC\right)$. Giá trị $\sin\alpha$ bằng

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi O là tâm hình thoi $ABCD$, H là trọng tâm tam giác ABD. Từ $SA = SB = SD$ suy ra $SH \perp (ABCD)$.

Tam giác ABD có $AB = AD = a$ và $\widehat{BAD} = 60^\circ$ nên suy ra tam giác ABD là tam giác đều cạnh a

$\Rightarrow AO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = BH = \dfrac{2}{3}AO = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Do đó $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{15}}{6}$.

Ta có $BH \perp AD \Rightarrow BH \perp BC \Rightarrow BC \perp (SHB)$.

Kẻ $HK \perp SB$ $(K \in SB) \Rightarrow HK \perp (SBC)$.

Trong tam giác SHB vuông tại H, ta có:

$$HK = \frac{SH.BH}{\sqrt{SH^2 + BH^2}} = \frac{\dfrac{a\sqrt{15}}{6}.\dfrac{a\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{15}}{6}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{15}}{9}.$$

Gọi $E = DH \cap BC \Rightarrow \dfrac{DE}{HE} = \dfrac{3}{2}$.

Gọi I là hình chiếu của D trên (SBC), suy ra:

$$\frac{DI}{HK} = \frac{DE}{HE} = \frac{3}{2} \Rightarrow DI = \frac{3}{2}HK = \frac{3}{2}.\frac{a\sqrt{15}}{9} = \frac{a\sqrt{15}}{6}.$$

Ta có $\widehat{(SD;(SBC))} = \widehat{(SD;SI)} = \widehat{DSI} \Rightarrow \widehat{DSI} = \alpha$.

$$\sin\alpha = \sin\widehat{DSI} = \frac{DI}{SD} = \frac{\dfrac{a\sqrt{15}}{6}}{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Câu 18: (THPT Chuyên Trần Phú-Hải Phòng-lần 2 năm 2017-2018) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1$, $\int\limits_0^1 [f'(x)]^2 dx = 9$ và $\int\limits_0^1 x^3 f(x)dx = \frac{1}{2}$. Tích phân $\int\limits_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** $\frac{7}{4}$. **D.** $\frac{6}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int\limits_0^1 [f'(x)]^2 dx = 9 \ (1)$

- Tính $\int\limits_0^1 x^3 f(x)dx = \frac{1}{2}$.

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = x^3.dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = \frac{x^4}{4} \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} = \int\limits_0^1 x^3 f(x)dx = \left(\frac{x^4}{4}.f(x)\right)\Big|_0^1 - \frac{1}{4}\int\limits_0^1 x^4.f'(x)dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\int\limits_0^1 x^4.f'(x)dx$

$\Rightarrow \int\limits_0^1 x^4.f'(x)dx = -1 \Rightarrow 18\int\limits_0^1 x^4.f'(x)dx = -18 \ (2)$

- Lại có: $\int\limits_0^1 x^8 dx = \frac{x^9}{9}\Big|_0^1 = \frac{1}{9} \Rightarrow 81\int\limits_0^1 x^8 dx = 9 \ (3)$

- Cộng vế với vế các đẳng thức (1), (2) và (3) ta được:

$\int\limits_0^1 \left[[f'(x)]^2 + 18x^4.f'(x) + 81x^8\right]dx = 0 \Leftrightarrow \int\limits_0^1 [f'(x)+9x^4]dx = 0 \Leftrightarrow \pi.\int\limits_0^1 [f'(x)+9x^4]dx = 0$

Hay thể tích khối tròn xoay sinh bởi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)+9x^4$, trục hoành Ox, các đường thẳng $x=0$, $x=1$ khi quay quanh Ox bằng 0

$\Rightarrow f'(x)+9x^4 = 0 \Rightarrow f'(x) = -9x^4 \Rightarrow f(x) = \int f'(x).dx = -\frac{9}{5}x^4 + C$.

Lại do $f(1)=1 \Rightarrow C = \frac{14}{5} \Rightarrow f(x) = -\frac{9}{5}x^5 + \frac{14}{5}$

$\Rightarrow \int\limits_0^1 f(x)dx = \int\limits_0^1 \left(-\frac{9}{5}x^5 + \frac{14}{5}\right)dx = \left(-\frac{3}{10}x^6 + \frac{14}{5}x\right)\Big|_0^1 = \frac{5}{2}$.

Câu 19: (PTNK-ĐHQG TP HCM-lần 1 năm 2017-2018) Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1;4]$ và thỏa mãn hệ thức $\begin{cases} f(1)+g(1)=4 \\ g(x) = -x.f'(x); \quad f(x) = -x.g'(x) \end{cases}$. Tính $I = \int\limits_1^4 [f(x)+g(x)]dx$.

A. $8\ln 2$. **B.** $3\ln 2$. **C.** $6\ln 2$. **D.** $4\ln 2$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Ta có $f\left(x\right)+g\left(x\right)=-x\left[f'\left(x\right)+g'\left(x\right)\right] \Leftrightarrow \dfrac{f\left(x\right)+g\left(x\right)}{f'\left(x\right)+g'\left(x\right)}=-\dfrac{1}{x}$

$\Leftrightarrow \int \dfrac{f\left(x\right)+g\left(x\right)}{f'\left(x\right)+g'\left(x\right)}\mathrm{d}x=-\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \Rightarrow \ln\left|f\left(x\right)+g\left(x\right)\right|=-\ln\left|x\right|+C$

Theo giả thiết ta có $C-\ln\left|1\right|=\ln\left|f\left(1\right)+g\left(1\right)\right| \Rightarrow C=\ln 4$.

Suy ra $\left[\begin{array}{l} f\left(x\right)+g\left(x\right)=\dfrac{4}{x} \\ f\left(x\right)+g\left(x\right)=-\dfrac{4}{x}\end{array}\right.$, vì $f\left(1\right)+g\left(1\right)=4$ nên $f\left(x\right)+g\left(x\right)=\dfrac{4}{x}$

$\Rightarrow I=\int\limits_1^4\left[f\left(x\right)+g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=8\ln 2$.

Cách 2: Ta có $f\left(x\right)+g\left(x\right)=-x\left[f'\left(x\right)+g'\left(x\right)\right]$

$\Rightarrow \int\left[f\left(x\right)+g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=-\int x\left[f'\left(x\right)+g'\left(x\right)\right]\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow \int\left[f\left(x\right)+g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=-x\left[f\left(x\right)+g\left(x\right)\right]+\int\left[f\left(x\right)+g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow -x\left[f\left(x\right)+g\left(x\right)\right]=C \Rightarrow f\left(x\right)+g\left(x\right)=-\dfrac{C}{x}$. Vì $f\left(1\right)+g\left(1\right)=-C \Rightarrow C=-4$

Do đó $f\left(x\right)+g\left(x\right)=\dfrac{4}{x}$. Vậy $I=\int\limits_1^4\left[f\left(x\right)+g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=8\ln 2$.

Câu 20: ----------**HẾT**----------**(SGD Phú Thọ – lần 1 - năm 2017 – 2018)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[1;2\right]$ thỏa mãn $\int\limits_1^2\left(x-1\right)^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{3}$, $f\left(2\right)=0$ và $\int\limits_1^2\left[f'\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x=7$. Tính tích phân $I=\int\limits_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{7}{5}$. **B.** $I=-\dfrac{7}{5}$. **C.** $I=-\dfrac{7}{20}$. **D.** $I=\dfrac{7}{20}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $u=f\left(x\right) \Rightarrow \mathrm{d}u=f'\left(x\right)\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}v=\left(x-1\right)^2\mathrm{d}x \Rightarrow v=\dfrac{\left(x-1\right)^3}{3}$

Ta có $-\dfrac{1}{3}=\int\limits_1^2\left(x-1\right)^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{\left(x-1\right)^3}{3}.f\left(x\right)\Bigg|_1^2-\int\limits_1^2\dfrac{\left(x-1\right)^3}{3}f'\left(x\right)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{3}\int\limits_1^2\left(x-1\right)^3 f'\left(x\right)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int\limits_1^2\left(x-1\right)^3 f'\left(x\right)\mathrm{d}x=1 \Rightarrow -\int\limits_1^2 2.7\left(x-1\right)^3 f'\left(x\right)\mathrm{d}x=-14$

Tính được $\int\limits_1^2 49\left(x-1\right)^6\mathrm{d}x=7 \Rightarrow \int\limits_1^2\left[f'\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x-\int\limits_1^2 2.7\left(x-1\right)^3 f'\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_1^2 49\left(x-1\right)^6\mathrm{d}x=0$

$\Rightarrow \int\limits_1^2\left[7\left(x-1\right)^3-f'\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x=0 \Rightarrow f'\left(x\right)=7\left(x-1\right)^3 \Rightarrow f\left(x\right)=\dfrac{7\left(x-1\right)^4}{4}+C$.

Do $f(2)=0 \Rightarrow f(x)=\frac{7(x-1)^4}{4}-\frac{7}{4}$.

Vậy $I=\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_1^2\left[\frac{7(x-1)^4}{4}-\frac{7}{4}\right]\mathrm{d}x=-\frac{7}{5}$.

Câu 21: **(THPT Chuyên ĐH Vinh – lần 1 - năm 2017 – 2018)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\left[f'(x)\right]^2+f(x).f''(x)=15x^4+12x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=f'(0)=1$. Giá trị của $f^2(1)$ bằng

A. $\frac{9}{2}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** 10. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\left(f'(x)\right)^2+f(x).f''(x)=15x^4+12x$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow\left[f'(x).f(x)\right]'=15x^4+12x$, $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow f'(x).f(x)=3x^5+6x^2+C_1$

Do $f(0)=f'(0)=1$ nên ta có $C_1=1$. Do đó: $f'(x).f(x)=3x^5+6x^2+1$

$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}f^2(x)\right)'=3x^5+6x^2+1\Leftrightarrow f^2(x)=x^6+4x^3+2x+C_2$.

Mà $f(0)=1$ nên ta có $C_2=1$. Do đó $f^2(x)=x^6+4x^3+2x+1$.

Vậy $f^2(1)=8$.

Câu 22: **. (THPT Chuyên ĐH Vinh – lần 1 - năm 2017 – 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $f(0)+f(1)=0$. Biết $\int\limits_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$, $\int\limits_0^1 f'(x)\cos(\pi x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$. Tính $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. π. **B.** $\frac{1}{\pi}$. **C.** $\frac{2}{\pi}$. **D.** $\frac{3\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases}u=\cos(\pi x)\\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=-\pi\sin(\pi x)\mathrm{d}x\\ v=f(x)\end{cases}$.

Khi đó: $\int\limits_0^1 f'(x)\cos(\pi x)\mathrm{d}x=\cos(\pi x)f(x)\Big|_0^1+\pi\int\limits_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x$

$=-\left(f(1)+f(0)\right)+\pi\int\limits_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow\int\limits_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$.

Cách 1: Ta có

Tìm k sao cho $\int\limits_0^1\left[f(x)-k\sin(\pi x)\right]^2\mathrm{d}x=0$

Ta có: $\int_0^1 \left[f(x)-k\sin(\pi x)\right]^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x - 2k\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x + k^2\int_0^1 \sin^2(\pi x)\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{2} - k + \frac{k^2}{2} = 0 \Leftrightarrow k = 1$.

Do đó $\int_0^1 \left[f(x)-\sin(\pi x)\right]^2 \mathrm{d}x = 0 \Rightarrow f(x) = \sin(\pi x)$ (do $\left[f(x)-\sin(\pi x)\right]^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$).

Vậy $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \sin(\pi x)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}$.

Cách 2: Sử dụng BĐT Holder.

$$\boxed{\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leq \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x}.$$

Dấu "$=$" xảy ra $\Leftrightarrow f(x) = k.g(x)$, $\forall x \in [a;b]$.

Áp dụng vào bài ta có $\frac{1}{4} = \left[\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x\right]^2 \leq \int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x.\int_0^1 \sin^2(\pi x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$,

suy ra $f(x) = k.\sin(\pi x)$, $k \in \mathbb{R}$.

Mà $\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k\int_0^1 \sin^2(\pi x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = 1 \Rightarrow f(x) = \sin(\pi x)$

Vậy $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \sin(\pi x)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}$.

Câu 23: (THPT Quảng Xương I – Thanh Hóa – năm 2017 – 2018) Cho hàm số $y = f(x) > 0$ xác định, có đạo hàm trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn: $g(x) = 1 + 2018\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, $g(x) = f^2(x)$. Tính $\int_0^1 \sqrt{g(x)}\mathrm{d}x$.

A. $\frac{1011}{2}$. **B.** $\frac{1009}{2}$. **C.** $\frac{2019}{2}$. **D.** 505.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g(x) = 1 + 2018\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \Rightarrow g'(x) = 2018f(x) = 2018\sqrt{g(x)}$

$\Rightarrow \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}} = 2018 \Rightarrow \int_0^t \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}}\mathrm{d}x = 2018\int_0^t \mathrm{d}x \Rightarrow 2\left(\sqrt{g(x)}\right)\Big|_0^t = 2018x\Big|_0^t$

$\Rightarrow 2\left(\sqrt{g(t)} - 1\right) = 2018t$ (do $g(0) = 1$)

$\Rightarrow \sqrt{g(t)} = 1009t + 1$

$\Rightarrow \int_0^1 \sqrt{g(t)}\mathrm{d}t = \left(\frac{1009}{2}t^2 + t\right)\Big|_0^1 = \frac{1011}{2}$.

Câu 24: **(SGD Bắc Giang – năm 2017 – 2018)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$ và $\int_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (x+1)\mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2-1}{4}$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=2-\mathrm{e}$. **B.** $I=\mathrm{e}-2$. **C.** $I=\frac{\mathrm{e}}{2}$. **D.** $I=\frac{\mathrm{e}-1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Xét $A=\int_0^1 (x+1)\mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases} u=f(x) \\ \mathrm{d}v=(x+1)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x \\ v=x\mathrm{e}^x \end{cases}$

Suy ra $A=x\mathrm{e}^x f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1-\mathrm{e}^2}{4}$

Xét $\int_0^1 x^2\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{2x}\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{\mathrm{e}^2-1}{4}$.

Ta có $\int_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x + 2\int_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x^2\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \left(f'(x)+x\mathrm{e}^x\right)^2\mathrm{d}x = 0$

Suy ra $f'(x)+x\mathrm{e}^x=0 \quad \forall x\in[0;1]$ (do $\left(f'(x)+x\mathrm{e}^x\right)^2 \ge 0 \quad \forall x\in[0;1]$)

$\Rightarrow f'(x)=-x\mathrm{e}^x \Rightarrow f(x)=(1-x)\mathrm{e}^x+C$

Do $f(1)=0$ nên $f(x)=(1-x)\mathrm{e}^x$

Vậy $I=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = (2-x)\mathrm{e}^x\Big|_0^1 = \mathrm{e}-2$.

Câu 25: **----------HẾT----------(THPT Chuyên Thoại Ngọc Hầu – An Giang - Lần 3 năm 2017 – 2018)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$ và $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\, f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$. Tính $f(2018\pi)$.

A. -1. **B.** 0. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Bằng công thức tích phân từng phần ta có

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\sin x f(x)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x f'(x)\,\mathrm{d}x$. Suy ra $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x f'(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{4}$.

Hơn nữa ta tính được $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2x-\sin 2x}{4}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{\pi}{4}$.

Do đó: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f'(x)\right]^2 dx + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x f'(x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f'(x)+\sin x\right]^2 dx = 0$.

Suy ra $f'(x) = -\sin x$. Do đó $f(x) = \cos x + C$. Vì $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ nên $C = 0$.

Ta được $f(x) = \cos x \Rightarrow f(2018\pi) = \cos(2018\pi) = 1$.

Câu 26: **----------HẾT----------**Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(x) \in [-1;1]$ với $\forall x \in (0;2)$. Biết $f(0) = f(2) = 1$. Đặt $I = \int_0^2 f(x)dx$, phát biểu nào dưới đây đúng?

A. $I \in (-\infty;0]$. **B.** $I \in (0;1]$. **C.** $I \in [1;+\infty)$. **D.** $I \in (0;1)$.

----------HẾT----------

BẢNG ĐÁP ÁN THAM KHẢO ĐỀ 139

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
A	B	B	A	A	B	D	C	D	A	B	B	B	A	C	A	D	D	C	A	D	A	B	A	B

26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
C	D	D	C	A	C	A	B	C	D	A	C	D	C	A	B	B	B	C	D	A	D	C	A	C

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 27: **(THPT Chuyên Ngữ – Hà Nội - Lần 1 năm 2017 – 2018)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(x)\in[-1;1]$ với $\forall x\in(0;2)$. Biết $f(0)=f(2)=1$. Đặt $I=\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$, phát biểu nào dưới đây đúng?

A. $I\in(-\infty;0]$. **B.** $I\in(0;1]$. **C.** $I\in[1;+\infty)$. **D.** $I\in(0;1)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $I=\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

□ $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=(x-1)f(x)\Big|_0^1-\int\limits_0^1 (x-1)f'(x)\,\mathrm{d}x=1+\int\limits_0^1(1-x)f'(x)\,\mathrm{d}x\ge 1-\int\limits_0^1(1-x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$ (1).

□ $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x=(x-1)f(x)\Big|_1^2-\int\limits_1^2 (x-1)f'(x)\,\mathrm{d}x=1-\int\limits_1^2(x-1)f'(x)\,\mathrm{d}x\ge 1-\int\limits_1^2(1-x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $I\ge\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$.

----------HẾT----------

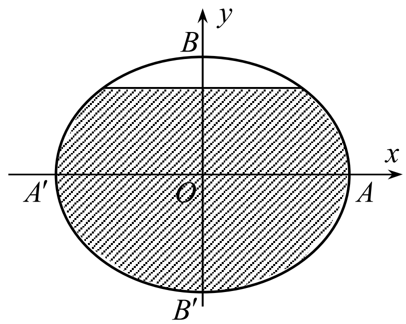
Câu 28: **(THPT Trần Phú – Hà Tĩnh - Lần 2 năm 2017 – 2018)** Một cái thùng đựng dầu có thiết diện ngang (mặt trong của thùng) là một đường elip có trục lớn bằng $1\mathrm{m}$, trục bé bằng $0{,}8\mathrm{m}$, chiều dài (mặt trong của thùng) bằng $3\mathrm{m}$. Được đặt sao cho trục bé nằm theo phương thẳng đứng (như hình bên). Biết chiều cao của dầu hiện có trong thùng (tính từ đáy thùng đến mặt dầu) là $0{,}6\mathrm{m}$. Tính thể tích V của dầu có trong thùng (Kết quả làm tròn đến phần trăm).

A. $V=1{,}52\mathrm{m}^3$. **B.** $V=1{,}31\mathrm{m}^3$. **C.** $V=1{,}27\mathrm{m}^3$. **D.** $V=1{,}19\mathrm{m}^3$.

Lời giải

Chọn A

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Theo đề bài ta có phương trình của Elip là $\dfrac{x^2}{\frac{1}{4}}+\dfrac{y^2}{\frac{4}{25}}=1$.

Gọi M, N lần lượt là giao điểm của dầu với elip.

Gọi S_1 là diện tích của Elip ta có $S_1=\pi ab=\pi\dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{5}=\dfrac{\pi}{5}$.

Gọi S_2 là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi Elip và đường thẳng MN.

Theo đề bài chiều cao của dầu hiện có trong thùng (tính từ đáy thùng đến mặt dầu) là $0{,}6\text{m}$ nên ta có phương trình của đường thẳng MN là $y=\dfrac{1}{5}$.

Mặt khác từ phương trình $\dfrac{x^2}{\frac{1}{4}}+\dfrac{y^2}{\frac{4}{25}}=1$ ta có $y=\dfrac{4}{5}\sqrt{\dfrac{1}{4}-x^2}$.

Do đường thẳng $y=\dfrac{1}{5}$ cắt Elip tại hai điểm M, N có hoành độ lần lượt là $-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ và $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ nên

$$S_2=\int_{-\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}}\left(\frac{4}{5}\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}-\frac{1}{5}\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{5}\int_{-\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}}\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}\,\mathrm{d}x-\frac{\sqrt{3}}{10}.$$

Tính $I=\displaystyle\int_{-\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}}\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}\,\mathrm{d}x$. Đặt $x=\dfrac{1}{2}\sin t\Rightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\cos t\mathrm{d}t$.

Đổi cận: Khi $x=\dfrac{-\sqrt{3}}{4}$ thì $t=-\dfrac{\pi}{3}$; Khi $x=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ thì $t=\dfrac{\pi}{3}$.

Khi đó $I=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}.\frac{1}{2}\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{1}{8}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left(1+\cos 2t\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{8}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Vậy $S_2=\dfrac{4}{5}\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)-\dfrac{\sqrt{3}}{10}=\dfrac{\pi}{15}-\dfrac{\sqrt{3}}{20}$.

Thể tích của dầu trong thùng là $V=\left(\dfrac{\pi}{5}-\dfrac{\pi}{15}+\dfrac{\sqrt{3}}{20}\right).3=1{,}52$.

Câu 29: **(THPT Chuyên Lương Thế Vinh – Đồng Nai – Lần 2 năm 2017 – 2018)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'\left(x\right)\ge x^4+\frac{2}{x^2}-2x$ $\forall x>0$ và $f\left(1\right)=-1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Phương trình $f\left(x\right)=0$ có 1 nghiệm trên $\left(0;1\right)$.

B. Phương trình $f\left(x\right)=0$ có đúng 3 nghiệm trên $\left(0;+\infty\right)$.

C. Phương trình $f\left(x\right)=0$ có 1 nghiệm trên $\left(1;2\right)$.

C. Phương trình $f\left(x\right)=0$ có 1 nghiệm trên $\left(2;5\right)$.

Lời giải

Chọn C

$f'\left(x\right)\ge x^4+\frac{2}{x^2}-2x=\frac{x^6-2x^3+2}{x^2}=\frac{\left(x^3-1\right)^2+1}{x^2}>0$, $\forall x>0$.

$\Rightarrow y=f\left(x\right)$ đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$.

$\Rightarrow f\left(x\right)=0$ có nhiều nhất 1 nghiệm trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$ $\left(1\right)$.

Mặt khác ta có:

$f'\left(x\right)\ge x^4+\frac{2}{x^2}-2x>0$, $\forall x>0\Rightarrow\int\limits_1^2 f'\left(x\right)\mathrm{d}x\ge\int\limits_1^2\left(x^4+\frac{2}{x^2}-2x\right)\mathrm{d}x=\frac{21}{5}$

$\Rightarrow f\left(2\right)-f\left(1\right)\ge\frac{21}{5}\Rightarrow f\left(2\right)\ge\frac{17}{5}$.

Kết hợp giả thiết ta có $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[1;2\right]$ và $f\left(2\right).f\left(1\right)<0$ $\left(2\right)$.

Từ $\left(1\right)$ và $\left(2\right)$ suy ra phương trình $f\left(x\right)=0$ có đúng 1 nghiệm trên khoảng $\left(1;2\right)$.

Câu 30: ----------**HẾT**----------**(SGD Quảng Nam – năm 2017 – 2018)** Cho hàm số chẵn $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_{-1}^{1}\frac{f\left(2x\right)}{1+2^x}\mathrm{d}x=8$. Tính $\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. 2. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 16.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int\limits_{-1}^{1}\frac{f\left(2x\right)}{1+2^x}\mathrm{d}x=8\Leftrightarrow\int\limits_{-2}^{2}\frac{f\left(x\right)}{1+\sqrt{2}^x}\mathrm{d}x=16$.

Đặt $t=-x\Rightarrow\mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$, khi đó $16=I=\int\limits_{-2}^{2}\frac{f\left(x\right)}{1+\sqrt{2}^x}\mathrm{d}x=-\int\limits_{2}^{-2}\frac{f\left(-t\right)}{1+\sqrt{2}^{-t}}\mathrm{d}t=\int\limits_{2}^{-2}\frac{\sqrt{2}^t f\left(t\right)}{1+\sqrt{2}^t}\mathrm{d}t$.

Suy ra $2I=\int\limits_{-2}^{2}\frac{f\left(x\right)}{1+\sqrt{2}^x}\mathrm{d}x+\int\limits_{2}^{-2}\frac{\sqrt{2}^x f\left(x\right)}{1+\sqrt{2}^x}\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x=2\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Vậy $\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=16$.

Câu 31: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa $f(1)=0$, $\int\limits_0^1 (f'(x))^2\,\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{8}$ và $\int\limits_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$. Tính $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $\frac{\pi}{2}$. **B.** π. **C.** $\frac{1}{\pi}$. **D.** $\frac{2}{\pi}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\begin{cases} u=f(x) \\ \mathrm{d}v=\cos\frac{\pi x}{2}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x \\ v=\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2} \end{cases}$

Do đó $\int\limits_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2}f(x)\Big|_0^1-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^1\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)f'(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \int\limits_0^1\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)f'(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{4}$.

Lại có: $\int\limits_0^1\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow I=\int\limits_0^1\left(-\frac{2}{\pi}.f'(x)\right)^2\mathrm{d}x-2\left(-\frac{2}{\pi}\right)\int\limits_0^1\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)f'(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^1\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\mathrm{d}x$

$=\int\limits_0^1\left(-\frac{2}{\pi}f'(x)-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^2\mathrm{d}x=\frac{4}{\pi^2}\frac{\pi^2}{8}-\frac{2}{\pi}.\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}=0$

Vì $\left(-\frac{2}{\pi}f'(x)-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^2\geq 0$ trên đoạn $[0;1]$ nên

$\int\limits_0^1\left(-\frac{2}{\pi}f'(x)-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^2\mathrm{d}x=0 \Leftrightarrow -\frac{2}{\pi}f'(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \Leftrightarrow f'(x)=-\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

Suy ra $f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)+C$ mà $f(1)=0$ do đó $f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}$.

Câu 32: **(THPT Chuyên ĐH Vinh – Lần 2 – năm 2017 – 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[0;\,1]$ thỏa mãn $\int\limits_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=0$ và $\max\limits_{[0;\,1]}|f(x)|=1$. Tích phân $I=\int\limits_0^1 \mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{d}x$ thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $\left(-\infty;\,-\frac{5}{4}\right)$. **B.** $\left(\frac{3}{2};\,\mathrm{e}-1\right)$. **C.** $\left(-\frac{5}{4};\,\frac{3}{2}\right)$. **D.** $(\mathrm{e}-1;\,+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Với mọi $a\in[0;1]$, ta có $0=\int\limits_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=a\int\limits_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 axf(x)\,\mathrm{d}x$

Kí hiệu $I(a)=\int_0^1(\mathrm{e}^x-ax)\mathrm{d}x$.

Khi đó, với mọi $a\in[0;1]$ ta có

$$\left|\int_0^1\mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_0^1\mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 axf(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_0^1(\mathrm{e}^x-ax)f(x)\mathrm{d}x\right|\le\int_0^1|\mathrm{e}^x-ax|.|f(x)|\mathrm{d}x$$

$$\le\int_0^1|\mathrm{e}^x-ax|.\max_{x\in[0;1]}|f(x)|\mathrm{d}x=\int_0^1|\mathrm{e}^x-ax|\mathrm{d}x=I(a).$$

Suy ra $\left|\int_0^1\mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x\right|\le\min_{a\in[0;1]}I(a)$

Mặt khác

Với mọi $a\in[0;1]$ ta có $I(a)=\int_0^1|\mathrm{e}^x-ax|\mathrm{d}x=\int_0^1(\mathrm{e}^x-ax)\mathrm{d}x=\left(\mathrm{e}^x-\frac{a}{2}x^2\right)\Big|_0^1=\mathrm{e}-\frac{a}{2}-1$

$\min_{a\in[0;1]}I(a)=\mathrm{e}-\frac{3}{2}\Rightarrow\left|\int_0^1\mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x\right|\le\mathrm{e}-\frac{3}{2}\approx1,22$.

Vậy $I\in\left(-\frac{5}{4};\frac{3}{2}\right)$.

Câu 33: (SGD Nam Định – năm 2017 – 2018) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ và $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}}f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}$, $\int_0^{\frac{\pi}{4}}f'(x)\sin 2x\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{4}$. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{8}}f(2x)\mathrm{d}x$

A. $I=1$. **B.** $I=\frac{1}{2}$. **C.** $I=2$. **D.** $I=\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Tính $\int_0^{\frac{\pi}{4}}f'(x)\sin 2x\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{4}$. Đặt $\begin{cases}\sin 2x=u\\ f'(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}v\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\cos 2x\mathrm{d}x=\mathrm{d}u\\ f(x)=v\end{cases}$, khi đó

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}f'(x)\sin 2x\mathrm{d}x=\sin 2x.f(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-2\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)\cos 2x\mathrm{d}x$$

$$=\sin\frac{\pi}{2}.f\left(\frac{\pi}{4}\right)-\sin 0.f(0)-2\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)\cos 2x\mathrm{d}x=-2\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)\cos 2x\mathrm{d}x.$$

Theo đề bài ta có $\int_0^{\frac{\pi}{4}}f'(x)\sin 2x\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{4}\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)\cos 2x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}$.

Mặt khác ta lại có $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}$.

Do $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[f(x)-\cos 2x\right]^2 \mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[f^2(x)-2f(x).\cos 2x+\cos^2 2x\right]\mathrm{d}x \quad =\left(\frac{\pi}{8}-2\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{8}\right)=0$ nên $f(x)=\cos 2x$.

Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{8}}\cos 4x\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\sin 4x\Big|_0^{\frac{\pi}{8}}=\frac{1}{4}$.

Câu 1: **(THPT Chuyên Nguyễn Quang Diệu – Đồng Tháp – Lần 5 năm 2017 – 2018)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\mathrm{d}x = 4$, $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x = 2$. Giá trị của tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(5;9)$. **B.** $(3;6)$. **C.** $(\sqrt{2};5)$. **D.** $(1;4)$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $x = \tan t \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{1}{\cos^2 t}\mathrm{d}t = (1+\tan^2 t)\mathrm{d}t$

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$

Khi đó $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 t.f(\tan t)}{\tan^2 t+1}(\tan^2 t+1)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 t.f(\tan t)\mathrm{d}t$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1\right).f(\tan t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(\tan t)}{\cos^2 t}\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan t)\mathrm{d}t$.

Suy ra $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(\tan t)}{\cos^2 t}\mathrm{d}t = 6$

Đặt $x = \tan t \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{1}{\cos^2 t}\mathrm{d}t$

Đổi cận $t = 0 \Rightarrow x = 0$; $t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 1$.

Câu 2: Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(\tan t)}{\cos^2 t}\mathrm{d}t = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$. Vậy $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 6$.**(THPT Chuyên Thái Bình – Thái Bình – Lần 5 năm 2017 – 2018)** Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$; $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(3) = \frac{2}{3}$ và $[f'(x)]^2 = (x+1).f(x)$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $2613 < f^2(8) < 2614$. **B.** $2614 < f^2(8) < 2615$.

C. $2618 < f^2(8) < 2619$. **D.** $2616 < f^2(8) < 2617$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên suy ra $f'(x) \geq 0, \forall x \in (0;+\infty)$.

Mặt khác $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ nên

$[f'(x)]^2 = (x+1)f(x) \Rightarrow f'(x) = \sqrt{(x+1)f(x)}$, $\forall x \in (0;+\infty)$

$\Rightarrow \dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = \sqrt{(x+1)}$, $\forall x \in (0;+\infty)$;

$\Rightarrow \int \dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = \int \sqrt{(x+1)} dx \Rightarrow \sqrt{f(x)} = \dfrac{1}{3}\sqrt{(x+1)^3} + C$;

Từ $f(3) = \dfrac{3}{2}$ suy ra $C = \sqrt{\dfrac{2}{3}} - \dfrac{8}{3}$

Như vậy $f(x) = \left(\dfrac{1}{3}\sqrt{(x+1)^3} + \sqrt{\dfrac{2}{3}} - \dfrac{8}{3}\right)^2$

Bởi thế:

$$f(8) = \left(\dfrac{1}{3}\sqrt{(8+1)^3} + \sqrt{\dfrac{2}{3}} - \dfrac{8}{3}\right)^2 = \left(9 + \sqrt{\dfrac{2}{3}} - \dfrac{8}{3}\right)^2 \Rightarrow f^2(8) = \left(9 + \sqrt{\dfrac{2}{3}} - \dfrac{8}{3}\right)^4 \approx 2613,26.$$

---------HẾT---------

Câu 3: (THPT Chuyên Hùng Vương – Gia Lai – Lần 2 năm 2017 – 2018) Cho parabol $(P): y = x^2$ và một đường thẳng d thay đổi cắt (P) tại hai điểm A, B sao cho $AB = 2018$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng d. Tìm giá trị lớn nhất S_{max} của S.

A. $S_{max} = \dfrac{2018^3+1}{6}$. **B.** $S_{max} = \dfrac{2018^3}{3}$. **C.** $S_{max} = \dfrac{2018^3-1}{6}$. **D.** $S_{max} = \dfrac{2018^3}{6}$.

Lời giải

Chọn D

Giả sử $A(a;a^2)$; $B(b;b^2)(b > a)$ sao cho $AB = 2018$.

Phương trình đường thẳng d là: $y = (a+b)x - ab$. Khi đó

$$S = \int_a^b \left|(a+b)x - ab - x^2\right| \mathrm{d}x = \int_a^b \left((a+b)x - ab - x^2\right) \mathrm{d}x = \dfrac{1}{6}(b-a)^3.$$

Vì $AB = 2018 \Leftrightarrow (b-a)^2 + (b^2-a^2)^2 = 2018^2 \Leftrightarrow (b-a)^2\left(1+(b+a)^2\right) = 2018^2$.

$\Rightarrow (b-a)^2 \le 2018^2 \Rightarrow |b-a| = b-a \le 2018 \Rightarrow S \le \dfrac{2018^3}{6}$. Vậy $S_{\max} = \dfrac{2018^3}{6}$ khi $a = -1009$ và $b = 1009$.

Câu 4: (THPT Chuyên Lương Thế Vinh - Hà Nội – Lần 2 năm 2017 – 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f'(x).\mathrm{e}^{f^3(x)-x^2-1} - \dfrac{2x}{f^2(x)} = 0$ và $f(0) = 1$. Tích phân $\int_0^{\sqrt{7}} x.f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{7}}{3}$. **B.** $\dfrac{15}{4}$. **C.** $\dfrac{45}{8}$. **D.** $\dfrac{5\sqrt{7}}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $3f'(x).\mathrm{e}^{f^3(x)-x^2-1} - \dfrac{2x}{f^2(x)} = 0 \Leftrightarrow 3f^2(x).f'(x).\mathrm{e}^{f^3(x)} = 2x.\mathrm{e}^{x^2+1}$

Suy ra $\mathrm{e}^{f^3(x)}=\mathrm{e}^{x^2+1}+C$. Mặt khác, vì $f(0)=1$ nên $C=0$.

Do đó $\mathrm{e}^{f^3(x)}=\mathrm{e}^{x^2+1}\Leftrightarrow f^3(x)=x^2+1\Leftrightarrow f(x)=\sqrt[3]{x^2+1}$.

Vậy $\int\limits_0^{\sqrt{7}} x.f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\sqrt{7}} x.\sqrt[3]{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{7}}\sqrt[3]{x^2+1}\,\mathrm{d}\left(x^2+1\right)=\frac{3}{8}\left[\left(x^2+1\right)\sqrt[3]{x^2+1}\right]\Big|_0^{\sqrt{7}}=\frac{45}{8}$.

Câu 5: (THPT Chuyên Lương Thế Vinh - Hà Nội – Lần 2 năm 2017 – 2018) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f(x)+f(2-x)=2(x-1)\mathrm{e}^{x^2-2x+1}+4$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ ta được kết quả:

A. $I=\mathrm{e}+4$. **B.** $I=8$. **C.** $I=2$. **D.** $I=\mathrm{e}+2$.

Đề ban đầu bị sai vì khi thay $x=0$ và $x=2$ vào ta thấy mâu thuẫn nên tôi đã sửa lại đề

Lời giải

Chọn C

Theo giả thuyết ta có $\int\limits_0^2\left[3f(x)+f(2-x)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_0^2\left[2(x-1)\mathrm{e}^{x^2-2x+1}+4\right]\mathrm{d}x$ $(*)$.

Ta tính $\int\limits_0^2 f(2-x)\,\mathrm{d}x=-\int\limits_0^2 f(2-x)\,\mathrm{d}(2-x)=\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Vì vậy $\int\limits_0^2\left[3f(x)+f(2-x)\right]\mathrm{d}x=4\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Hơn nữa $\int\limits_0^2 2(x-1)e^{x^2-2x+1}\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 \mathrm{e}^{x^2-2x+1}\mathrm{d}\left(x^2-2x+1\right)=\mathrm{e}^{x^2-2x+1}\Big|_0^2=0$ và $\int\limits_0^2 4\mathrm{d}x=8$.

Câu 6: Suy ra $4\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=8\Leftrightarrow\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=2$. **(SGD Hà Tĩnh – Lần 2 năm 2017 – 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0;-1\}$ thỏa mãn điều kiện $f(1)=-2\ln 2$ và $x(x+1).f'(x)+f(x)=x^2+x$. Giá trị $f(2)=a+b\ln 3$, với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính a^2+b^2.

A. $\frac{25}{4}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{13}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Từ giả thiết, ta có $x(x+1).f'(x)+f(x)=x^2+x\Leftrightarrow\frac{x}{x+1}.f'(x)+\frac{1}{(x+1)^2}f(x)=\frac{x}{x+1}$

$\Leftrightarrow\left[\frac{x}{x+1}.f(x)\right]'=\frac{x}{x+1}$, với $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0;-1\}$.

Suy ra $\frac{x}{x+1}.f(x)=\int\frac{x}{x+1}\mathrm{d}x$ hay $\frac{x}{x+1}.f(x)=x-\ln|x+1|+C$.

Mặt khác, ta có $f(1)=-2\ln 2$ nên $C=-1$. Do đó $\frac{x}{x+1}.f(x)=x-\ln|x+1|-1$.

Với $x=2$ thì $\frac{2}{3}.f(2)=1-\ln 3\Leftrightarrow f(2)=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\ln 3$. Suy ra $a=\frac{3}{2}$ và $b=-\frac{3}{2}$.

Vậy $a^2+b^2=\dfrac{9}{2}$.

Câu 7: (THPT Chuyên Võ Nguyên Giáp – Quảng Bình - năm 2017-2018) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f'(x)\le 1$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=0$. Tìm giá trị lớn nhất của $f(1)$

A. $\dfrac{2\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}$. **B.** $\dfrac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}$. **C.** $\mathrm{e}-1$. **D.** $2\mathrm{e}-1$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $\forall x\in\mathbb{R}$,

$$f(x)+f'(x)\le 1\Leftrightarrow \mathrm{e}^x f(x)+\mathrm{e}^x f'(x)\le \mathrm{e}^x \Leftrightarrow \left[\mathrm{e}^x f(x)\right]'\le\left(\mathrm{e}^x\right)' \Leftrightarrow \int_0^1\left[\mathrm{e}^x f(x)\right]'\mathrm{d}x\le\int_0^1\left(\mathrm{e}^x\right)'\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \left[\mathrm{e}^x f(x)\right]\Big|_0^1\le \mathrm{e}^x\Big|_0^1 \Leftrightarrow \mathrm{e}.f(1)\le \mathrm{e}-1\Leftrightarrow f(1)\le\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}.$$

Do đó giá trị lớn nhất của $f(1)$ là $\dfrac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}$.

Câu 8: ---------HẾT---------Tính tổng $T=\dfrac{C_{2018}^0}{3}-\dfrac{C_{2018}^1}{4}+\dfrac{C_{2018}^2}{5}-\dfrac{C_{2018}^3}{6}+\cdots-\dfrac{C_{2018}^{2017}}{2020}+\dfrac{C_{2018}^{2018}}{2021}$.

A. $\dfrac{1}{4121202989}$. **B.** $\dfrac{1}{4121202990}$. **C.** $\dfrac{1}{4121202992}$. **D.** $\dfrac{1}{4121202991}$.

Câu 9: Tính tổng $T=\dfrac{C_{2018}^0}{3}-\dfrac{C_{2018}^1}{4}+\dfrac{C_{2018}^2}{5}-\dfrac{C_{2018}^3}{6}+\cdots-\dfrac{C_{2018}^{2017}}{2020}+\dfrac{C_{2018}^{2018}}{2021}$.

A. $\dfrac{1}{4121202989}$. **B.** $\dfrac{1}{4121202990}$. **C.** $\dfrac{1}{4121202992}$. **D.** $\dfrac{1}{4121202991}$.

Lời giải

Chọn B

Xét khai triển $(1-x)^{2018}=C_{2018}^0-C_{2018}^1x+C_{2018}^2x^2+\ldots+C_{2018}^{2018}x^{2018}$

$\Rightarrow x^2(1-x)^{2018}=C_{2018}^0x^2-C_{2018}^1x^3+C_{2018}^2x^4+\ldots+C_{2018}^{2018}x^{2020}$ (1)

Ta tính $I=\int_0^1 x^2(1-x)^{2018}\,\mathrm{d}x$, đặt $t=1-x$, $\mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$, đổi cận $x=0\Rightarrow t=1$, $x=1\Rightarrow t=0$

$$I=\int_0^1(1-t)^2t^{2018}\mathrm{d}t=\int_0^1\left(t^{2018}-2t^{2019}+t^{2020}\right)\mathrm{d}t=\left(\frac{t^{2019}}{2019}-2\frac{t^{2020}}{2020}+\frac{t^{2021}}{2021}\right)\Bigg|_0^1$$

$$=\frac{1}{2019}-\frac{1}{1010}+\frac{1}{2021}=\frac{1}{4121202990}.$$

Lấy tích phân hai vế của (1) ta được

$$\int_0^1 x^2(1-x)^{2018}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left(C_{2018}^0x^2-C_{2018}^1x^3+C_{2018}^2x^4+\ldots+C_{2018}^{2018}x^{2020}\right)\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{4121202990}=\left(C_{2018}^0\frac{x^3}{3}-C_{2018}^1\frac{x^4}{4}+C_{2018}^2\frac{x^5}{5}+\ldots+C_{2018}^{2018}\frac{x^{2021}}{2021}\right)\Bigg|_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4121202990} = C_{2018}^{0}\frac{1}{3} - C_{2018}^{1}\frac{1}{4} + C_{2018}^{2}\frac{1}{5} + ... + C_{2018}^{2018}\frac{1}{2021}.$$

Vậy $T = \frac{C_{2018}^{0}}{3} - \frac{C_{2018}^{1}}{4} + \frac{C_{2018}^{2}}{5} - \frac{C_{2018}^{3}}{6} + \cdots - \frac{C_{2018}^{2017}}{2020} + \frac{C_{2018}^{2018}}{2021} = \frac{1}{4121202990}$.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$. Có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(1) = \mathrm{e}$ và $(x+2)f(x) = xf'(x) - x^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Tính $f(2)$.

A. $4\mathrm{e}^2 - 4\mathrm{e} + 4$.
B. $4\mathrm{e}^2 - 2\mathrm{e} + 1$.
C. $2\mathrm{e}^3 - 2\mathrm{e} + 2$.
D. $4\mathrm{e}^2 + 4\mathrm{e} - 4$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $(x+2)f(x) = xf'(x) - x^3 \Leftrightarrow \frac{xf'(x) - (x+2)f(x)}{x^3} = 1 \Leftrightarrow \left[\frac{\mathrm{e}^{-x}f(x)}{x^2}\right]' = \mathrm{e}^{-x}$

Suy ra $\int\limits_1^2 \left[\frac{\mathrm{e}^{-x}f(x)}{x^2}\right]' \mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{e}^{-2}f(2)}{2^2} - \frac{\mathrm{e}^{-1}f(1)}{1^2} = -\left[\mathrm{e}^{-2} - \mathrm{e}^{-1}\right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{e}^{-2}f(2)}{4} - \frac{\mathrm{e}^{-1}f(1)}{1} = \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-2}$$

$$\Leftrightarrow f(2) = 4\left[\mathrm{e}f(1) + \mathrm{e} - 1\right] = 4\mathrm{e}^2 + 4\mathrm{e} - 4.$$

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(0) = 0$. Biết $\int\limits_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x = \frac{9}{2}$ và $\int\limits_0^1 f'(x)\cos\frac{\pi x}{2}\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{4}$. Tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{\pi}$.
B. $\frac{4}{\pi}$.
C. $\frac{6}{\pi}$.
D. $\frac{2}{\pi}$.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(0) = 0$. Biết $\int\limits_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x = \frac{9}{2}$ và $\int\limits_0^1 f'(x)\cos\frac{\pi x}{2}\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{4}$. Tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{\pi}$.
B. $\frac{4}{\pi}$.
C. $\frac{6}{\pi}$.
D. $\frac{2}{\pi}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int\limits_0^1 f'(x)\cos\frac{\pi x}{2}\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \cos\frac{\pi x}{2}\mathrm{d}\left(f(x)\right)$

$$= \cos\frac{\pi x}{2}.f(x)\Big|_0^1 + \int\limits_0^1 \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi x}{2}.f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi}{2}\int\limits_0^1 \sin\frac{\pi x}{2}.f(x)\mathrm{d}x.$$

Suy ra $\int\limits_0^1 \sin\frac{\pi x}{2}.f(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{2}$

Mặt khác $\int\limits_0^1 \left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (1-\cos\pi x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.

Do đó $\int\limits_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x - 2\int\limits_0^1 3\sin\frac{\pi x}{2}.f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_0^1\left[3\sin\frac{\pi x}{2}\right]^2\mathrm{d}x = 0$.

hay $\int\limits_0^1\left[f(x) - 3\sin\frac{\pi x}{2}\right]^2\mathrm{d}x = 0$ suy ra $f(x) = 3\sin\frac{\pi x}{2}$.

Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 3\sin\frac{\pi x}{2}\mathrm{d}x = -\frac{6}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}\Big|_0^1 = \frac{6}{\pi}$.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0;1)$ và $f(x)\neq 0$, $\forall x\in(0;1)$. Biết rằng $f\left(\frac{1}{2}\right) = a$, $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = b$ và $x + xf'(x) = 2f(x) - 4$, $\forall x\in(0;1)$. Tính tích phân $I = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x.\cos x + 2\sin 2x}{f^2(\sin x)}\mathrm{d}x$ theo a và b.

A. $I = \frac{3a+b}{4ab}$. **B.** $I = \frac{3b+a}{4ab}$. **C.** $I = \frac{3b-a}{4ab}$. **D.** $I = \frac{3a-b}{4ab}$.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0;1)$ và $f(x)\neq 0$, $\forall x\in(0;1)$. Biết rằng $f\left(\frac{1}{2}\right) = a$, $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = b$ và $x + xf'(x) = 2f(x) - 4$, $\forall x\in(0;1)$. Tính tích phân $I = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x.\cos x + 2\sin 2x}{f^2(\sin x)}\mathrm{d}x$ theo a và b.

A. $I = \frac{3a+b}{4ab}$. **B.** $I = \frac{3b+a}{4ab}$. **C.** $I = \frac{3b-a}{4ab}$. **D.** $I = \frac{3a-b}{4ab}$.

Lời giải

Chọn D

$\forall x\in(0;1)$ ta có:

$x + xf'(x) = 2f(x) - 4 \Leftrightarrow x + 4 = 2f(x) - xf'(x) \Rightarrow x^2 + 4x = 2xf(x) - x^2f'(x)$

$\Leftrightarrow \frac{x^2+4x}{f^2(x)} = \frac{2xf(x) - x^2f'(x)}{f^2(x)} \Leftrightarrow \frac{x^2+4x}{f^2(x)} = \left(\frac{x^2}{f(x)}\right)'$.

Tính $I = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x.\cos x + 2\sin 2x}{f^2(\sin x)}\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x.\cos x + 4\sin x.\cos x}{f^2(\sin x)}\mathrm{d}x$

Đặt $t = \sin x \Rightarrow \mathrm{d}t = \cos x\mathrm{d}x$, đổi cận $x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$, $x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{t^2+4t}{f^2(t)}\mathrm{d}t=\frac{t^2}{f(t)}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{f\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{3}{4b}-\frac{1}{4a}=\frac{3a-b}{4ab}$.

Câu 15: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, không âm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x).f'(x)=2x\sqrt{(f(x))^2+1}$ và $f(0)=0$. Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[1;3]$ lần lượt là

A. $M=20$; $m=2$.
B. $M=4\sqrt{11}$; $m=\sqrt{3}$.
C. $M=20$; $m=\sqrt{2}$.
D. $M=3\sqrt{11}$; $m=\sqrt{3}$.

Câu 16: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, không âm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x).f'(x)=2x\sqrt{(f(x))^2+1}$ và $f(0)=0$. Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[1;3]$ lần lượt là

A. $M=20$; $m=2$.
B. $M=4\sqrt{11}$; $m=\sqrt{3}$.
C. $M=20$; $m=\sqrt{2}$.
D. $M=3\sqrt{11}$; $m=\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x).f'(x)=2x\sqrt{(f(x))^2+1}\Leftrightarrow\frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{(f(x))^2+1}}=2x$.

Lấy nguyên hàm hai vế ta có $\sqrt{(f(x))^2+1}=x^2+C$, do $f(0)=0$ nên $C=1$.

Vậy $f(x)=\sqrt{x^4+2x^2}=x\sqrt{x^2+2}$ trên đoạn $[1;3]$.

Ta có $f'(x)=\sqrt{x^2+2}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}>0$ với mọi $x\in[1;3]$ nên $f(x)$ đồng biến trên $[1;3]$.

Vậy $M=f(3)=3\sqrt{11}$; $m=f(1)=\sqrt{3}$.

Câu 17: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x.\cos x$, với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=0$. Giá trị của tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}x.f'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{\pi}{4}$.
B. $\frac{1}{4}$.
C. $\frac{\pi}{4}$.
D. $-\frac{1}{4}$.

Câu 18: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x.\cos x$, với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=0$. Giá trị của tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}x.f'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{\pi}{4}$.
B. $\frac{1}{4}$.
C. $\frac{\pi}{4}$.
D. $-\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Theo giả thiết, $f\left(0\right)=0$ và $f\left(x\right)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x.\cos x$ nên

$f\left(0\right)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

Ta có:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x.f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}\left[f\left(x\right)\right]=\left[xf\left(x\right)\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(x\right)\mathrm{d}x$$

Suy ra: $I=-\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Mặt khác, ta có:

$$f\left(x\right)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x.\cos x \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x.\cos x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$$

Suy ra: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(x\right)\mathrm{d}x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$

Vậy $I=-\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(x\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}$.

Câu 19: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$, thỏa mãn $\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_0^1 xf\left(x\right)\mathrm{d}x=1$ và $\int_0^1\left[f\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x=4$. Giá trị của tích phân $\int_0^1\left[f\left(x\right)\right]^3\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 80.

Câu 20: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$, thỏa mãn $\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_0^1 xf\left(x\right)\mathrm{d}x=1$ và $\int_0^1\left[f\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x=4$. Giá trị của tích phân $\int_0^1\left[f\left(x\right)\right]^3\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 80.

Lời giải

Chọn C

Xét $\int_0^1\left[f\left(x\right)+\left(ax+b\right)\right]^2\mathrm{d}x=\int_0^1\left[f\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x+2\int_0^1\left[f\left(x\right).\left(ax+b\right)\right]\mathrm{d}x+\int_0^1\left(ax+b\right)^2\mathrm{d}x$

$=4+2a\int_0^1 xf\left(x\right)\mathrm{d}x+2b\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{3a}\left(ax+b\right)^3\Big|_0^1=4+2\left(a+b\right)+\frac{a^2}{3}+ab+b^2$.

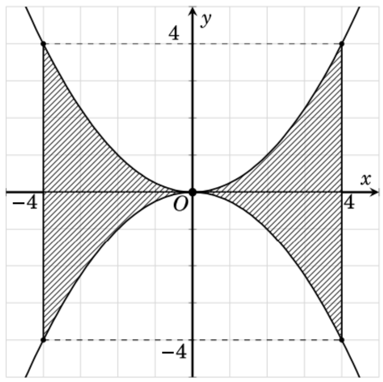
Cần xác định a, b để $\frac{a^2}{3}+\left(2+b\right)a+b^2+2b+4=0$

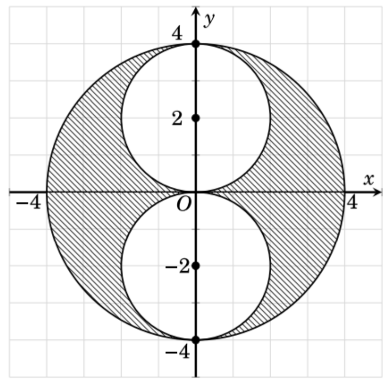
Ta có: $\Delta=b^2+4b+4-\frac{4}{3}\left(b^2+2b+4\right)=\frac{-\left(b-2\right)^2}{3}\le 0\Rightarrow b=2\Rightarrow a=-6$.

Khi đó: $\int_0^1\left[f\left(x\right)+\left(-6x+2\right)\right]^2\mathrm{d}x=0\Rightarrow f\left(x\right)=6x-2$

Suy ra $\int_0^1 \left[f(x)\right]^3 \mathrm{d}x = \int_0^1 (6x-2)^3 \mathrm{d}x = \frac{1}{24}(6x-2)^4\Big|_0^1 = 10$.

Câu 21: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi (H_1) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\frac{x^2}{4}$, $y=-\frac{x^2}{4}$, $x=-4$, $x=4$ và hình (H_2) là hình gồm các điểm $(x;y)$ thỏa: $x^2+y^2\le 16$, $x^2+(y-2)^2\ge 4$, $x^2+(y+2)^2\ge 4$.

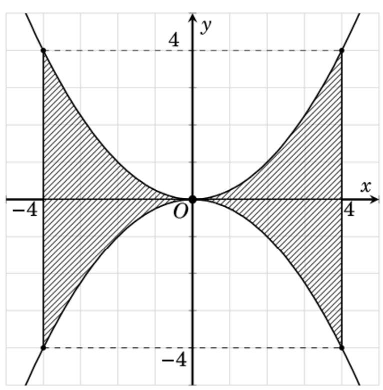


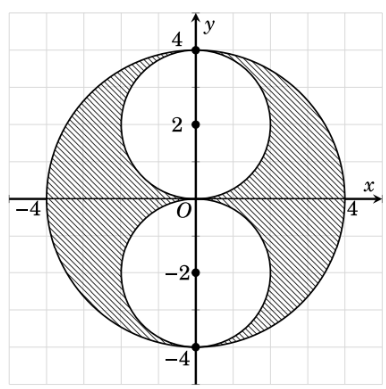


Cho (H_1) và (H_2) quay quanh trục Oy ta được các vật thể có thể tích lần lượt là V_1, V_2. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $V_1 = V_2$. **B.** $V_1 = \frac{1}{2}V_2$. **C.** $V_1 = 2V_2$. **D.** $V_1 = \frac{2}{3}V_2$

Câu 22: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi (H_1) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\frac{x^2}{4}$, $y=-\frac{x^2}{4}$, $x=-4$, $x=4$ và hình (H_2) là hình gồm các điểm $(x;y)$ thỏa: $x^2+y^2\le 16$, $x^2+(y-2)^2\ge 4$, $x^2+(y+2)^2\ge 4$.





Cho (H_1) và (H_2) quay quanh trục Oy ta được các vật thể có thể tích lần lượt là V_1, V_2. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $V_1 = V_2$. **B.** $V_1 = \frac{1}{2}V_2$. **C.** $V_1 = 2V_2$. **D.** $V_1 = \frac{2}{3}V_2$

Hướng dẫn giải

Chọn A

• Thể tích khối trụ bán kính $r=4$, chiều cao $h=8$ là: $\mathrm{V}=\pi r^2 h = \pi.4^2.8 = 128\pi$.

• Thể tích giới hạn bởi Parabol $y=\frac{x^2}{4}$, trục tung, đường thẳng $y=4$ quay quanh Oy là:

$\Rightarrow V_{(P)} = \pi\int\limits_0^4 x^2 \mathrm{d}y = \pi\int\limits_0^4 4y\mathrm{d}y = 32\pi$.

Suy ra thể tích $\left(H_1\right)$ là: $V_1 = V - 2.V_{(P)} = 128\pi - 2.32\pi = 64\pi$.

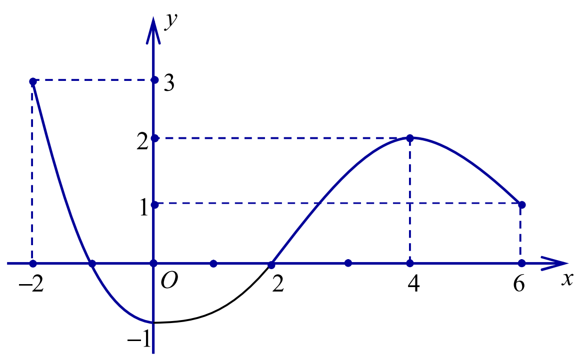
• Thể tích khối cầu bán kính $R = 4$: $V_L = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{256}{3}\pi$.

• Thể tích khối cầu bán kính $r = 2$: $V_N = \dfrac{4}{3}\pi 2^3 = \dfrac{32}{3}\pi$

Suy ra thể tích $\left(\mathrm{H}_2\right)$ là: $V_2 = V_L - 2.V_N = \dfrac{256\pi}{3} - \dfrac{2.32\pi}{3} = 64\pi$.

Vậy $r = 2$: $V_1 = V_2$.

Câu 23: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'\left(x\right)$ trên đoạn $\left[-2;6\right]$ như hình vẽ. Tìm khẳng định đúng.



A. $\max\limits_{[-2;6]} y = f\left(-2\right)$. **B.** $\max\limits_{[-2;6]} y = f\left(2\right)$. **C.** $\max\limits_{[-2;6]} y = f\left(6\right)$. **D.** $\max\limits_{[-2;6]} y = f\left(-1\right)$.

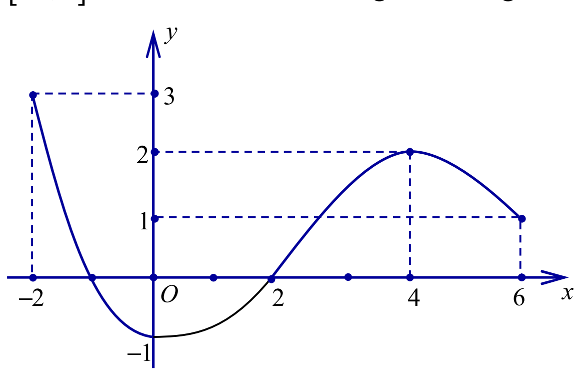
BẢNG ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
B	A	A	C	B	B	A	B	B	B	C	B	D	A	A	A	A	C	B	D	C	B	D	A	A

26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
B	A	B	C	A	A	C	B	B	A	D	C	D	D	C	A	C	D	B	C	D	A	D	A	C

HƯỚNG DẪN GIẢI.

Câu 24: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'\left(x\right)$ trên đoạn $\left[-2;6\right]$ như hình vẽ. Tìm khẳng định đúng.



A. $\max\limits_{[-2;6]} y = f\left(-2\right)$. **B.** $\max\limits_{[-2;6]} y = f\left(2\right)$. **C.** $\max\limits_{[-2;6]} y = f\left(6\right)$. **D.** $\max\limits_{[-2;6]} y = f\left(-1\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có bảng biến thiên:

x	-2		-1		2		6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(-2)$	$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$f(6)$

Từ bảng biến thiên suy ra $\max\limits_{[-2;6]} y = \max\left\{f(-1); f(6)\right\}$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1$ và $x = 2$ là

$S_1 = -\int\limits_{-1}^{2} f'(x)\,\mathrm{d}x = -f(x)\Big|_{-1}^{2} = f(-1) - f(2)$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 2$ và $x = 6$ là

$S_2 = \int\limits_{2}^{6} f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\Big|_{2}^{6} = f(6) - f(2)$.

Từ hình vẽ suy ra $S_2 > S_1 \Rightarrow f(6) - f(2) > f(-1) - f(2) \Leftrightarrow f(6) > f(-1)$.

Câu 25: Vậy $\max\limits_{[-2;6]} y = \max\left\{f(-1); f(6)\right\} = f(6)$.Cho tích phân $I = \int\limits_{\frac{1}{12}}^{12} \left(1 + x - \frac{1}{x}\right).\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}.\mathrm{d}x = \frac{a}{b}.\mathrm{e}^{\frac{c}{d}}$, trong đó a, b, c, d là các số nguyên dương và các phân số $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Tính $bc - ad$.

A. 24. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** 12. **D.** 1.

Câu 26: Cho tích phân $I = \int\limits_{\frac{1}{12}}^{12} \left(1 + x - \frac{1}{x}\right).\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}.\mathrm{d}x = \frac{a}{b}.\mathrm{e}^{\frac{c}{d}}$, trong đó a, b, c, d là các số nguyên dương và các phân số $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Tính $bc - ad$.

A. 24. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** 12. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

- Ta có: $I = \int\limits_{\frac{1}{12}}^{12} \left(1 + x - \frac{1}{x}\right).\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}.\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{1}{12}}^{12} \mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}.\mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{1}{12}}^{12} \left(x - \frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}.\mathrm{d}x = J + K$

- Tính $J = \int\limits_{\frac{1}{12}}^{12} \mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}.\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = \mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}} \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}.\mathrm{d}x \\ v = x \end{cases}$

$\Rightarrow J = \left(x.e^{x+\frac{1}{x}} \right)\Bigg|_{\frac{1}{12}}^{12} - \int\limits_{\frac{1}{12}}^{12} \left(x - \frac{1}{x} \right).e^{x+\frac{1}{x}}.dx = 12.e^{\frac{145}{12}} - \frac{1}{12}.e^{\frac{145}{12}} - K = \frac{143}{12}.e^{\frac{145}{12}} - K$

$\Rightarrow I = J + K = \frac{143}{12}.e^{\frac{145}{12}}$.

- Theo giả thiết: $I = \frac{a}{b}.e^{\frac{c}{d}}$ với a, b, c, d là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ là các phân số tối giản nên $\frac{a}{b} = \frac{143}{12}$ và $\frac{c}{d} = \frac{145}{12} \Rightarrow a = 143$, $b = 12$, $c = 145$, $d = 12$.

Vậy $bc - ad = 24$.

Câu 27: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) > 0$, $\forall x \in [1;2]$ và $\int\limits_1^2 \frac{[f'(x)]^3}{x^4}dx = \frac{7}{375}$. Biết $f(1) = 1$, $f(2) = \frac{22}{15}$, tính $I = \int\limits_1^2 f(x)dx$.

A. $P = \frac{71}{60}$. **B.** $P = \frac{6}{5}$. **C.** $P = \frac{73}{60}$. **D.** $P = \frac{37}{30}$.

Câu 28: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) > 0$, $\forall x \in [1;2]$ và $\int\limits_1^2 \frac{[f'(x)]^3}{x^4}dx = \frac{7}{375}$. Biết $f(1) = 1$, $f(2) = \frac{22}{15}$, tính $I = \int\limits_1^2 f(x)dx$.

A. $P = \frac{71}{60}$. **B.** $P = \frac{6}{5}$. **C.** $P = \frac{73}{60}$. **D.** $P = \frac{37}{30}$.

Lời giải

Chọn A

+) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{[f'(x)]^3}{x^4} + \frac{x^2}{125} + \frac{x^2}{125} \ge 3\sqrt[3]{\frac{[f'(x)]^3}{x^4}.\frac{x^2}{125}.\frac{x^2}{125}} = \frac{3f'(x)}{25}$$

Lấy tích phân hai vế BĐT trên ta có: $\int\limits_1^2 \frac{[f'(x)]^3}{x^4}dx + 2\int\limits_1^2 \frac{x^2}{125}dx \ge \int\limits_1^2 \frac{3f'(x)}{25}dx$

$$\Leftrightarrow \int\limits_1^2 \frac{[f'(x)]^3}{x^4}dx + 2.\frac{7}{375} \ge \frac{3}{25}[f(2) - f(1)] \Leftrightarrow \int\limits_1^2 \frac{[f'(x)]^3}{x^4}dx \ge \frac{7}{375}.$$

Kết hợp với giả thiết ta có dấu "=" của BĐT trên xảy ra

$$\frac{[f'(x)]^3}{x^4} = \frac{x^2}{125} \Leftrightarrow [f'(x)]^3 = \frac{x^6}{125} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{x^2}{5} \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{15} + C.$$

Mà $f(1) = 1 \Rightarrow 1 = \frac{1}{15} + C \Rightarrow C = \frac{14}{15} \Rightarrow f(1) = \frac{x^3 + 14}{15}$

+) Ta có $I = \int\limits_1^2 \frac{x^3 + 14}{15}dx = \frac{71}{60}$.

Câu 29: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ và thỏa mãn $2f(3x)+3f\left(\frac{2}{x}\right)=-\frac{15x}{2}$,

$\int_3^9 f(x)\,dx=k$. Tính $I=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f\left(\frac{1}{x}\right)dx$ theo k.

A. $I=-\frac{45+k}{9}$. **B.** $I=\frac{45-k}{9}$. **C.** $I=\frac{45+k}{9}$. **D.** $I=\frac{45-2k}{9}$.

Câu 30: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ và thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x^2+x^4}$, $f(1)=a$, $f(-2)=b$.

Giá trị của biểu thức $f(-1)-f(2)$ bằng

A. $b-a$. **B.** $a+b$. **C.** $a-b$. **D.** $-a-b$.

Câu 31: Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4\cos 2x+3\sin 2x)\ln(\cos x+2\sin x)\,dx=c\ln 2-\frac{a}{b}$, trong đó a, b, $c\in\mathbb{N}^*$, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $T=a+b+c$.

A. $T=9$. **B.** $T=-11$. **C.** $T=5$. **D.** $T=7$.

Câu 32: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ và thỏa mãn $2f(3x)+3f\left(\frac{2}{x}\right)=-\frac{15x}{2}$,

$\int_3^9 f(x)\,dx=k$. Tính $I=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f\left(\frac{1}{x}\right)dx$ theo k.

A. $I=-\frac{45+k}{9}$. **B.** $I=\frac{45-k}{9}$. **C.** $I=\frac{45+k}{9}$. **D.** $I=\frac{45-2k}{9}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=2x \Rightarrow dx=\frac{1}{2}dt$. Đổi cận $\left|\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}\Rightarrow t=1 \\ x=\frac{3}{2}\Rightarrow t=3 \end{array}\right.$.

Khi đó $I=\frac{1}{2}\int_1^3 f\left(\frac{2}{t}\right)dx$.

Mà $2f(3x)+3f\left(\frac{2}{x}\right)=-\frac{15x}{2} \Leftrightarrow f\left(\frac{2}{x}\right)=-\frac{5x}{2}-\frac{2}{3}f(3x)$

Nên $I=\frac{1}{2}\int_1^3\left[-\frac{5x}{2}-\frac{2}{3}f(3x)\right]dx=-\frac{5}{4}\int_1^3 x\,dx-\frac{1}{3}\int_1^3 f(3x)\,dx=-5-\frac{1}{3}\int_1^3 f(3x)\,dx$ (*)

Đặt $u=3x \Rightarrow dx=\frac{1}{3}dx$. Đổi cận $\left|\begin{array}{l} x=1\Rightarrow u=3 \\ x=3\Rightarrow t=9 \end{array}\right.$.

Khi đó $I=-5-\frac{1}{9}\int_3^9 f(t)\,dt=-5-\frac{k}{9}=-\frac{45+k}{9}$.

Câu 33: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ và thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x^2+x^4}$, $f(1)=a$, $f(-2)=b$. Giá trị của biểu thức $f(-1)-f(2)$ bằng

A. $b-a$. **B.** $a+b$. **C.** $a-b$. **D.** $-a-b$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(-x)=\dfrac{1}{(-x)^2+(-x)^4}=\dfrac{1}{x^2+x^4}=f'(x)$ nên $f'(x)$ là hàm chẵn.

Do đó $\int\limits_{-2}^{-1} f'(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{1}^{2} f'(x)\,\mathrm{d}x$.

Suy ra $f(-1)-f(2)=f(-1)-f(-2)+f(-2)-f(1)+f(1)-f(2)$

$=\int\limits_{-2}^{-1} f'(x)\,\mathrm{d}x+b-a-\int\limits_{1}^{2} f'(x)\,\mathrm{d}x=b-a$.

Câu 34: Cho $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}(4\cos 2x+3\sin 2x)\ln(\cos x+2\sin x)\,\mathrm{d}x=c\ln 2-\dfrac{a}{b}$, trong đó a, b, $c\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $T=a+b+c$.

A. $T=9$. **B.** $T=-11$. **C.** $T=5$. **D.** $T=7$.

Lời giải

Chọn A

$I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}(4\cos 2x+3\sin 2x)\ln(\cos x+2\sin x)\,\mathrm{d}x$

$=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}2(\cos x+2\sin x)(2\cos x-\sin x)\ln(\cos x+2\sin x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\cos x+2\sin x\Rightarrow \mathrm{d}t=(-\sin x+2\cos x)\,\mathrm{d}x$.

Với $x=0$ thì $t=1$.

Với $x=\dfrac{\pi}{2}$ thì $t=2$.

Suy ra $I=\int\limits_{1}^{2}2t\ln t\,\mathrm{d}t=\int\limits_{1}^{2}\ln t\,\mathrm{d}(t^2)=\left(t^2.\ln t\right)\Big|_1^2-\int\limits_{1}^{2}t\,\mathrm{d}t=4\ln 2-\dfrac{t^2}{2}\Big|_1^2=4\ln 2-\dfrac{3}{2}$.

Vậy $\begin{cases}a=3\\b=2\\c=4\end{cases}\Rightarrow T=a+b+c=9$.

Câu 35: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn $f'(0)=9$ và $9f''(x)+\left[f'(x)-x\right]^2=9$. Tính $T=f(1)-f(0)$.

A. $T=2+9\ln 2$. **B.** $T=9$. **C.** $T=\dfrac{1}{2}+9\ln 2$. **D.** $T=2-9\ln 2$.

----------HẾT----------

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
A	B	A	A	B	A	A	B	D	C	A	C	D	C	B	D	C	C	A	A	C	A	A	A	D

26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

C	C	B	D	D	C	D	D	B	C	A	D	A	C	A	B	B	B	C	C	B	B	A	A	C

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 36: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn $f'(0)=9$ và $9f''(x)+\left[f'(x)-x\right]^2=9$. Tính $T=f(1)-f(0)$.

A. $T=2+9\ln 2$. **B.** $T=9$. **C.** $T=\frac{1}{2}+9\ln 2$. **D.** $T=2-9\ln 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $9f''(x)+\left[f'(x)-x\right]^2=9 \Rightarrow 9\left(f''(x)-1\right)=-\left[f'(x)-x\right]^2 \Rightarrow -\frac{f''(x)-1}{\left[f'(x)-x\right]^2}=\frac{1}{9}$.

Lấy nguyên hàm hai vế $-\int \frac{f''(x)-1}{\left[f'(x)-x\right]^2}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{9}\mathrm{d}x \Rightarrow \frac{1}{f'(x)-x}=\frac{x}{9}+C$.

Do $f'(0)=9$ nên $C=\frac{1}{9}$ suy ra $f'(x)-x=\frac{9}{x+1}$ $\Rightarrow f'(x)=\frac{9}{x+1}+x$

Vậy $T=f(1)-f(0)=\int_0^1\left(\frac{9}{x+1}+x\right)\mathrm{d}x$ $=\left.\left(9\ln|x+1|+\frac{x^2}{2}\right)\right|_0^1$ $=9\ln 2+\frac{1}{2}$.

----------HẾT----------

Câu 37: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;2]$. Biết $f(0)=1$ và $f(x).f(2-x)=\mathrm{e}^{2x^2-4x}$, với mọi $x\in[0;2]$. Tính tích phân $I=\int_0^2\frac{\left(x^3-3x^2\right)f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$.

A. $I=-\frac{16}{3}$. **B.** $I=-\frac{16}{5}$. **C.** $I=-\frac{14}{3}$. **D.** $I=-\frac{32}{5}$.

Câu 38: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;2]$. Biết $f(0)=1$ và $f(x).f(2-x)=\mathrm{e}^{2x^2-4x}$, với mọi $x\in[0;2]$. Tính tích phân $I=\int_0^2\frac{\left(x^3-3x^2\right)f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$.

A. $I=-\frac{16}{3}$. **B.** $I=-\frac{16}{5}$. **C.** $I=-\frac{14}{3}$. **D.** $I=-\frac{32}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Theo giả thiết, ta có $f(x).f(2-x)=\mathrm{e}^{2x^2-4x}$ và $f(x)$ nhận giá trị dương nên

$\ln\left[f(x).f(2-x)\right]=\ln \mathrm{e}^{2x^2+4x} \Leftrightarrow \ln f(x)+\ln f(2-x)=2x^2-4x$.

Mặt khác, với $x=0$, ta có $f(0).f(2)=1$ và $f(0)=1$ nên $f(2)=1$.

Xét $I=\int_0^2\frac{\left(x^3-3x^2\right)f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$, ta có $I=\int_0^2\left(x^3-3x^2\right).\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases} u = x^3 - 3x^2 \\ dv = \dfrac{f'(x)}{f(x)}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (3x^2 - 6x)dx \\ v = \ln f(x) \end{cases}$

Suy ra $I = \left[(x^3 - 3x^2)\ln f(x)\right]\Big|_0^2 - \int_0^2 (3x^2 - 6x).\ln f(x)dx = -\int_0^2 (3x^2 - 6x).\ln f(x)dx \ (1)$.

Đến đây, đổi biến $x = 2 - t \Rightarrow dx = -dt$. Khi $x = 0 \to t = 2$ và $x = 2 \to t = 0$.

Ta có $I = -\int_2^0 (3t^2 - 6t).\ln f(2-t)(-dt) = -\int_0^2 (3t^2 - 6t).\ln f(2-t)dt$

Vì tích phân không phụ thuộc vào biến nên $I = -\int_0^2 (3x^2 - 6x).\ln f(2-x)dx \ (2)$.

Từ (1) và (2) ta cộng vế theo vế, ta được $2I = -\int_0^2 (3x^2 - 6x).\left[\ln f(x) + \ln f(2-x)\right]dx$

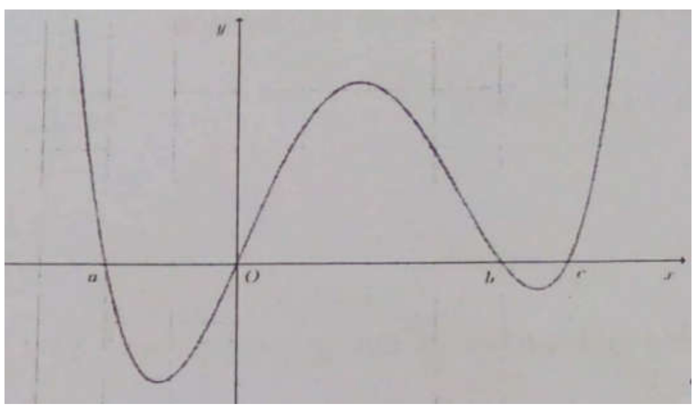
Hay $I = -\dfrac{1}{2}\int_0^2 (3x^2 - 6x).(2x^2 - 4x)dx = -\dfrac{16}{5}$.

Cách 2 (Trắc nghiệm)

Chọn hàm số $f(x) = e^{x^2 - 2x}$, khi đó:

$I = \int_0^2 \dfrac{(x^3 - 3x^2).e^{x^2-2x}.(2x-2)}{e^{x^2-2x}}dx = \int_0^2 (x^3 - 3x^2).(2x-2)dx = \dfrac{-16}{5}$.

Câu 39: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây. Biết phương trình $f'(x) = 0$ có bốn nghiệm phân biệt a, 0, b, c với $a < 0 < b < c$.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

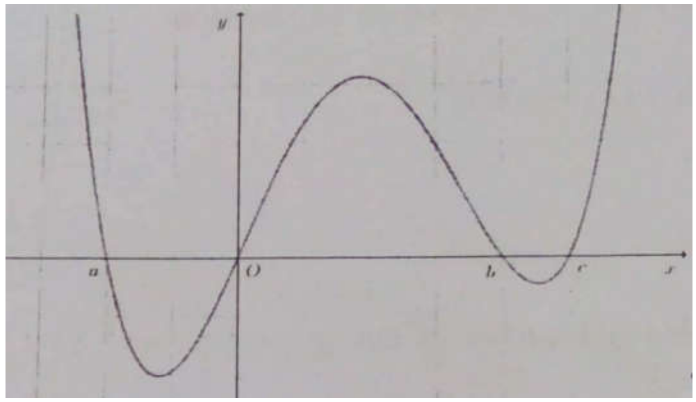
A. $f(b) > f(a) > f(c)$.
B. $f(c) > f(b) > f(a)$.
C. $f(b) > f(c) > f(a)$.
D. $f(c) > f(a) > f(b)$.

Câu 40: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, thỏa mãn $f'(x) = \dfrac{1}{x^3 + x^5}$, $f(1) = a$ và $f(-2) = b$.

Tính $f(-1) + f(2)$.

A. $f(-1) + f(2) = -a - b$.
B. $f(-1) + f(2) = a - b$.
C. $f(-1) + f(2) = a + b$.
D. $f(-1) + f(2) = b - a$.

Câu 41: Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây. Biết phương trình $f'(x)=0$ có bốn nghiệm phân biệt a, 0, b, c với $a<0<b<c$.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f(b)>f(a)>f(c)$.

B. $f(c)>f(b)>f(a)$.

C. $f(b)>f(c)>f(a)$.

D. $f(c)>f(a)>f(b)$.

Lời giải

Chọn C

+ Từ hình vẽ ta thấy: $f'(x)<0$ khi $x\in(b;c)$; $f'(x)>0$ khi $x>c$ nên có $f(b)>f(c)$.

+ Ta lại có: $\int\limits_a^0[-f'(x)]dx<\int\limits_0^b f'(x)dx-\int\limits_b^c[-f'(x)]dx \Leftrightarrow \int\limits_a^0[-f'(x)]dx<\int\limits_0^c f'(x)dx$

$\Rightarrow[-f(x)]\Big|_a^0<f(x)\Big|_0^c \Rightarrow -f(0)+f(a)<f(c)-f(0)\Rightarrow f(a)<f(c)$.

+ Vậy $f(b)>f(c)>f(a)$.

Câu 42: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{x^3+x^5}$, $f(1)=a$ và $f(-2)=b$. Tính $f(-1)+f(2)$.

A. $f(-1)+f(2)=-a-b$.

B. $f(-1)+f(2)=a-b$.

C. $f(-1)+f(2)=a+b$.

D. $f(-1)+f(2)=b-a$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(-x)=\dfrac{1}{(-x)^3+(-x)^5}=-\dfrac{1}{x^3+x^5}=-f'(x)$ nên $f'(x)$ là hàm lẻ.

Do đó $\int\limits_{-2}^{2}f'(x)\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow\int\limits_{-2}^{-1}f'(x)\mathrm{d}x=-\int\limits_{1}^{2}f'(x)\mathrm{d}x$.

Suy ra $f(-1)-f(-2)=-f(2)+f(1)\Rightarrow f(-1)+f(2)=f(-2)+f(1)=a+b$.

Câu 43: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f(2)=\frac{1}{15}$ và $f'(x)+(2x+4)f^2(x)=0$. Tính $f(1)+f(2)+f(3)$.

A. $\frac{7}{15}$. **B.** $\frac{11}{15}$. **C.** $\frac{11}{30}$. **D.** $\frac{7}{30}$.

Câu 44: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f(2)=\frac{1}{15}$ và $f'(x)+(2x+4)f^2(x)=0$. Tính $f(1)+f(2)+f(3)$.

A. $\frac{7}{15}$. **B.** $\frac{11}{15}$. **C.** $\frac{11}{30}$. **D.** $\frac{7}{30}$.

Lời giải

Chọn D

Vì $f'(x)+(2x+4)f^2(x)=0$ và $f(x)>0$, với mọi $x\in(0;+\infty)$ nên ta có $-\frac{f'(x)}{f^2(x)}=2x+4$.

Suy ra $\frac{1}{f(x)}=x^2+4x+C$. Mặt khác $f(2)=\frac{1}{15}$ nên $C=3$ hay $f(x)=\frac{1}{x^2+4x+3}$.

Do đó $f(1)+f(2)+f(3)=\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}=\frac{7}{30}$.

Câu 45: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa

$$\begin{cases} f(0)=f'(0)=1; \\ f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy(x+y)-1,\ \forall x,y\in\mathbb{R} \end{cases}.$$

Tính $\int_0^1 f(x-1)dx$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{7}{4}$.

Câu 46: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp 2 liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả $\begin{cases} f(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}, \\ f(0)=f'(0)=1, \\ xy^2+y'^2=yy'', \forall x\in\mathbb{R}. \end{cases}$.

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\frac{1}{2}<\ln f(1)<1$. **B.** $0<\ln f(1)<\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{3}{2}<\ln f(1)<2$. **D.** $1<\ln f(1)<\frac{3}{2}$.

Câu 47: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa

$$\begin{cases} f(0)=f'(0)=1; \\ f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy(x+y)-1,\ \forall x,y\in\mathbb{R} \end{cases}.$$

Tính $\int_0^1 f(x-1)dx$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{7}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Lấy đạo hàm theo hàm số y

$f'(x+y)=f'(y)+3x^2+6xy$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Cho $y=0\Rightarrow f'(x)=f'(0)+3x^2 \Rightarrow f'(x)=1+3x^2$

Vậy $f(x)=\int f'(x)dx=x^3+x+C$ mà $f(0)=1\Rightarrow C=1$ suy ra $f(x)=x^3+x+1$.

$$\int\limits_0^1 f(x-1)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^0 f(x)dx=\int\limits_{-1}^0\left(x^3+x+1\right)dx=\left.\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+x\right)\right|_{-1}^0=-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{4}.$$

Câu 48: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp 2 liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả $\begin{cases} f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}, \\ f(0)=f'(0)=1, \\ xy^2+y'^2=yy'',\forall x\in\mathbb{R}. \end{cases}$.

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\frac{1}{2}<\ln f(1)<1$. **B.** $0<\ln f(1)<\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{3}{2}<\ln f(1)<2$. **D.** $1<\ln f(1)<\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $xy^2+y'^2=yy''\Leftrightarrow\frac{y''y-y'^2}{y^2}=x\Leftrightarrow\left(\frac{y'}{y}\right)'=x\Leftrightarrow\frac{y'}{y}=\frac{x^2}{2}+C$ hay $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{x^2}{2}+C$.

Lại có $f(0)=f'(0)=1\Rightarrow C=1$.

Ta có $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{x^2}{2}+1\Leftrightarrow\int\limits_0^1\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(\frac{x^2}{2}+1\right)\mathrm{d}x\Leftrightarrow\left.\ln\left(f(x)\right)\right|_0^1=\frac{7}{6}\Leftrightarrow\ln f(1)=\frac{7}{6}$.

$\Rightarrow 1<\ln\left(f(1)\right)<\frac{3}{2}$.

Câu 49: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$. Biết $f(0)=1$ và $f(x)f(2-x)=\mathrm{e}^{2x^2-4x}$ với mọi $x\in[0;2]$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^2\frac{\left(x^3-3x^2\right)f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$.

A. $I=-\frac{14}{3}$. **B.** $I=-\frac{32}{5}$. **C.** $I=-\frac{16}{3}$. **D.** $I=-\frac{16}{5}$.

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
D	B	A	C	A	A	D	B	D	B	A	A	C	C	B	A	D	A	C	B	C	C	B	B	C

26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
B	A	B	D	C	A	C	A	C	B	A	A	B	D	D	B	A	D	D	D	B	A	C	C	D

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 50: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$. Biết $f(0)=1$ và $f(x)f(2-x)=\mathrm{e}^{2x^2-4x}$ với mọi $x\in[0;2]$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^2\frac{\left(x^3-3x^2\right)f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$.

A. $I=-\frac{14}{3}$. **B.** $I=-\frac{32}{5}$. **C.** $I=-\frac{16}{3}$. **D.** $I=-\frac{16}{5}$.

Lời giải

Chọn D

$f\left(x\right)f\left(2-x\right)=e^{2x^2-4x}$ suy ra $f\left(0\right)f\left(2\right)=e^0\Rightarrow f\left(2\right)=1$.

Đặt $\begin{cases} u=x^3-3x^2 \\ dv=\dfrac{f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}dx \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} du=\left(3x^2-6x\right)dx \\ v=\ln f\left(x\right) \end{cases}$

Khi đó $I=\left(x^3-3x^2\right)\ln f\left(x\right)\Big|_0^2-\int\limits_0^2\left(3x^2-6x\right)\ln f\left(x\right)dx=-\int\limits_0^2\left(3x^2-6x\right)\ln f\left(x\right)dx=-J$.

Tính J:

Đặt $x=2-t\Rightarrow J=\int\limits_0^2\left(3t^2-6t\right)\ln f\left(2-t\right)dt=\int\limits_0^2\left(3x^2-6x\right)\ln f\left(2-x\right)dx$.

Vậy $I+J=\int\limits_0^2\left(3x^2-6x\right)\ln f\left(x\right)dx+\int\limits_0^2\left(3x^2-6x\right)\ln f\left(2-x\right)dx$

$=\int\limits_0^2\left(3x^2-6x\right)\ln\left[f\left(x\right)f\left(2-x\right)\right]dx=\int\limits_0^2\left(3x^2-6x\right)\ln\left(e^{2x^2-4x}\right)dx$

Câu 51: $=\int\limits_0^2\left(3x^2-6x\right)\left(2x^2-4x\right)dx=\dfrac{32}{5}$ mà $I=-J\Rightarrow -2I=\dfrac{32}{5}\Leftrightarrow I=-\dfrac{16}{5}$.Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$ thoả mãn $\int\limits_0^1 x^2f\left(x\right)dx=0$ và $\max\limits_{[0;1]}\left|f\left(x\right)\right|=6$. Giá trị lớn nhất của tích phân $\int\limits_0^1 x^3f\left(x\right)dx$ bằng

A. $\dfrac{1}{8}$. **B.** $\dfrac{3\left(2-\sqrt[3]{4}\right)}{4}$. **C.** $\dfrac{2-\sqrt[3]{4}}{16}$. **D.** $\dfrac{1}{24}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.A	3.D	4.C	5.D	6.A	7.A	8.C	9.C	10.B
11.D	12.B	13.A	14.D	15.C	16.D	17.A	18.B	19.A	20.D
21.C	22	23.A	24.A	25.B	26.B	27.A	28.D	29.D	30.B
31.A	32.A	33.C	34.A	35.A	36.D	37.C	38.B	39.C	40.B
41.C	42.D	43.B	44.B	45.B	46.A	47.D	48.D	49.A	50.B

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 52: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$ thoả mãn $\int\limits_0^1 x^2f\left(x\right)dx=0$ và $\max\limits_{[0;1]}\left|f\left(x\right)\right|=6$. Giá trị lớn nhất của tích phân $\int\limits_0^1 x^3f\left(x\right)dx$ bằng

A. $\frac{1}{8}$. **B.** $\frac{3\left(2-\sqrt[3]{4}\right)}{4}$. **C.** $\frac{2-\sqrt[3]{4}}{16}$. **D.** $\frac{1}{24}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f\left(x\right)\le 6,\ \forall x\in\left[0;1\right]$.

Xét $I=\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}6x^3\mathrm{d}x-\int_{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}^1 6x^3\mathrm{d}x+\int_0^1 x^3f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}x^3\left(6+f\left(x\right)\right)\mathrm{d}x-\int_{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}^1 x^3\left(6-f\left(x\right)\right)\mathrm{d}x$.

Suy ra $I\le\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}x^2\left(6+f\left(x\right)\right)\mathrm{d}x-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\int_{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}^1 x^2\left(6-f\left(x\right)\right)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow\frac{3}{2\sqrt[3]{2}}-\frac{3}{2}+\int_0^1 x^3f\left(x\right)\mathrm{d}x\le\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}6x^2\mathrm{d}x-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\int_{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}^1 6x^2\mathrm{d}x+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\int_0^1 x^2f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow\frac{3}{2\sqrt[3]{2}}-\frac{3}{2}+\int_0^1 x^3f\left(x\right)\mathrm{d}x\le 0\Rightarrow\int_0^1 x^3f\left(x\right)\mathrm{d}x\le\frac{3\left(2-\sqrt[3]{4}\right)}{4}$.