BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ❇ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ

NĂM THỨ 36 - RA HÀNG THÁNG
Số 6 (264)
1999

Mời bạn dự thi VUI HÈ '99

Những gương mặt, những tấm lòng dành cho *Toán học và Tuổi trẻ*

PGS TRẦN VĂN HẠO sinh ngày 27 tháng 10 năm 1935, quê ở Hưng Nguyên, Nghệ An. Ông bảo vệ luận án Phó tiến sĩ tại trường Đại học Lômônôxôp, Matxcova năm 1963, được phong PGS năm 1980. Ông giảng dạy tại khoa Toán trường Đại học Sư phạm Hà Nội rồi Khoa Toán và khối chuyên toán Đại học Sư phạm Vinh, giám đốc Trung tâm Tin học tại Đại học Sư phạm TP Hồ Chí Minh, ủy viên Ban chấp hành Hội Toán học Việt Nam khóa 1, nay là Phó Chủ tịch kiêm Tổng Thư kí Hội Toán học thành phố Hồ Chí Minh. PGS Trần Văn Hạo là một trong những người sáng lập báo Toán học và Tuổi trẻ và là chủ biên bộ sách giáo khoa toán PTTH do Hội Toán học thành phố Hồ Chí Minh chủ trì.

PTS TẠ HỒNG QUẢNG sinh ngày 21.6.1956 quê tại Hoa Lư, Ninh Bình, từng là cán bộ nghiên cứu của Viện Toán học Việt Nam và nay là phó phòng Công nghệ khí, công ty Chế biến và kinh doanh các sản phẩm khí. Ông nhiều năm là ủy viên Hội đồng biên tập tạp chí Toán học và Tuổi trẻ. Nhớ về THVTT ông nhắc lại những kỉ niệm khi còn học trung học, về những bài toán trên tạp chí mà thầy Nguyễn Công Quỳ giới thiệu với lớp chuyên ĐHSP Hà Nội. Ông viết "Cho đến nay tuy không còn đeo đuổi sự nghiệp toán học nữa nhưng những niềm vui mà tạp chí THVTT mang lại không bao giờ nhạt phai". PTS Tạ Hồng Quảng mong muốn THVTT gần gũi hơn với đông đảo học sinh và giáo viên phổ thông, có thêm những bài viết nhẹ nhàng và hóm hỉnh.

Nhà giáo ưu tú PHẠM NGỌC QUANG sinh ngày 4.3.1950 quê ở Cẩm Vân, Cẩm Thủy, Thanh Hóa. Ông đã giảng dạy ở cấp 3 Quảng Xương 1, trường Sư phạm 10+3 Thanh Hóa và nay là hiệu trưởng trường PTTH Lam Sơn. Ông là ủy viên Ban chấp hành Hội Giảng dạy Toán học phổ thông. Ông đã đào tạo được nhiều học sinh giỏi đạt giải toán quốc gia và quốc tế. Năm 1993 ông là phó trưởng đoàn Việt Nam dự kì thi Toán Quốc tế lần thứ 34. Nghĩ về THVTT ông cho rằng đây là một tạp chí chuyên ngành rất có giá trị, là thước đo, là chuẩn mực để học sinh tự đánh giá đúng năng lực toán học của mình, từ đó vươn lên đạt trình độ cao hơn. Coi THVTT là tài liệu gối đầu giường của mình suốt hơn 20 năm, ông còn tích cực tham gia vào việc viết bài và ra đề trên THVTT.

Nhà giáo TRẦN XUÂN ĐÁNG sinh ngày 5.5.1955, quê ở Hoàng Nam, Nghĩa Hưng, Nam Định. Ông từng là cán bộ giảng dạy trường Đại học tổng hợp Huế, hiện nay là giáo viên trường PTTH chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định. Với niềm say mê toán học sơ cấp ông đã bồi dưỡng được nhiều học sinh giỏi đạt giải toán quốc gia, góp phần vào thành tích chung của đội tuyển Nam Định, một địa phương nhiều năm đạt thành tích cao trong các kì thi học sinh giỏi các môn. Ông là tác giả của nhiều đề toán trên tạp chí THVTT.

Toán học và Tuổi trẻ
Mathematics and Youth

Năm thứ 36
Số 264 (6-1999)
Tòa soạn : 25 Hàn Thuyên, Hà Nội
ĐT : 04.8262477-FAX: (84).4.9714359

TRONG SỐ NÀY

2 **Dành cho Trung học cơ sở - For Lower Secondary Schools**
Tạ Toàn - Đỗ Tiến Hải - Từ bất đẳng thức đại số đến bài toán cực trị hình học

4 **Giải bài kì trước - Solutions of Previous Problems**
Giải các bài của số 260 và T1/THPT; T2/THPT

14 **Đề ra kì này - Problems in this Issue**
T1/264, ..., T10/264, L1/264, L2/264

15 **Tiếng Anh qua các bài toán - English through Math Problems** - *Ngô Việt Trung*

16 Hướng dẫn giải đề thi tuyển sinh môn Toán Đại học Quốc gia Hà Nội 1998

17 *VKT* - Học bổng trung học 3 ASEAN ở Singapo

18 **Diễn đàn dạy học toán - Math Teaching Forum**
Nguyễn Văn Lộc - Hình thành phương pháp giải qua một chuỗi bài toán
Lê Hải Khôi - Về mối quan hệ giữa hai bất đẳng thức Côsi và Becnuli

19 **Nhìn ra thế giới - Around the World**
Vũ Kim Thủy - Vài nét về dạy và học ở Singapo và Malaysia

20 **Dành cho các bạn chuẩn bị thi vào đại học - For University Entrance Preparation**
Nguyễn Lưu - Sử dụng hệ đối xứng kiểu II để giải phương trình

21 **Trả lời bạn đọc - Reader's Letters** - *LTN*

23 **Thông tin hoạt động**
P.V - Đại hội lần thứ tư Hội Toán học Việt Nam
VKT - Vĩnh Phúc với Toán học và Tuổi trẻ

24 **Giải trí toán học - Math Recreation**
Bình Phương : Giải đáp bài Viết số vào hình tròn
Đoàn Kim Sang - Sinh năm nào

Bạn có biết - Do you know
Nguyễn Văn Thiêm - Hình vuông thần kì cấp 8

Bìa 1 : Học sinh Việt Nam học ở trường Anglo - Chinese
Bìa 2 : Những gương mặt, những tấm lòng dành cho Toán học và Tuổi trẻ
Bìa 3 : **Câu lạc bộ - Math Club.** Thi Vui Hè '99
Bìa 4 : Trường PTTH Lam Sơn, Thanh Hóa

Dành cho các bạn
TRUNG HỌC CƠ SỞ

TỪ BẤT ĐẲNG THỨC ĐẠI SỐ ĐẾN BÀI TOÁN CỰC TRỊ HÌNH HỌC

TẠ TOÀN - ĐỖ TIẾN HẢI
(Tp Hồ Chí Minh)

Ta xuất phát từ 2 bất đẳng thức đại số rất quen thuộc sau :

BĐT 1: Với các số dương a, b, c có

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Lời giải.

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) - 9 =$$

$$= 1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1-9 =$$

$$=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}-2\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}-2\right)$$

$$=\frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(b-c)^2}{bc}+\frac{(c-a)^2}{ac} \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a-b = b-c = c-a = 0 \Leftrightarrow a=b=c$.

BĐT2 : Với các số dương a, b, c có

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Lời giải. $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b} =$

$$=\left(\frac{a}{b+c}+1\right)+\left(\frac{b}{c+a}+1\right)+\left(\frac{c}{a+b}+1\right)-3 =$$

$$=(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)-3$$

$$=\frac{1}{2}[(b+c)+(c+a)+(a+b)]\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)-3$$

$\geq \dfrac{9}{2}-3=\dfrac{3}{2}$ do áp dụng BĐT 1.

Đẳng thức xảy ra khi $b+c = c+a = a+b \Leftrightarrow a = b = c$.

Có thể vận dụng 2 bất đẳng thức trên vào giải quyết và sáng tạo ra các bài toán chứa bất đẳng thức hình học hoặc tìm cực trị hình học.

Bài toán 1. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Gọi đường vuông góc từ điểm M nằm trong tam giác đến các cạnh BC, CA, AB lần lượt là MD, ME, MF. Xác định vị trí của M để :

a) $\dfrac{1}{MD}+\dfrac{1}{ME}+\dfrac{1}{MF}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị đó.

b) $\dfrac{1}{MD+ME}+\dfrac{1}{ME+MF}+\dfrac{1}{MF+MD}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị đó.

Lời giải :

Gọi $h=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ là đường cao của tam giác đều ABC và đặt $MD = x$, $ME = y$, $MF = z$. Ta có

$$S_{ABC} = S_{MBC} + S_{MAC} + S_{MAB}$$

$\Leftrightarrow ah = ax + ay + az. \Leftrightarrow x + y + z = h$ không đổi.

a) Áp dụng BĐT 1 có :

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 9 \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq \frac{9}{h}=\frac{6\sqrt{3}}{a}.$$

b) Áp dụng BĐT 2 có :

$$(x+y+y+z+z+x)\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\right) \geq 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x} \geq \frac{9}{2h}=\frac{3\sqrt{3}}{a}.$$

Trong cả 2 trường hợp đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$, lúc đó M là tâm của ΔABC.

Bài toán 2. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC có ba góc nhọn với ba đường cao AA_1, BB_1, CC_1. Chứng minh rằng

a) $\dfrac{AA_1}{HA_1}+\dfrac{BB_1}{HB_1}+\dfrac{CC_1}{HC_1} \geq 9$

b) $\dfrac{HA_1}{HA}+\dfrac{HB_1}{HB}+\dfrac{HC_1}{HC} \geq \dfrac{3}{2}$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải. Gọi diện tích các tam giác ABC, HBC, HAC, HAB lần lượt là S, S_1, S_2, S_3 thì $S = S_1 + S_2 + S_3$.

a) Dễ thấy : $\dfrac{HA_1}{AA_1}=\dfrac{S_1}{S}$; $\dfrac{HB_1}{BB_1}=\dfrac{S_2}{S}$; $\dfrac{HC_1}{CC_1}=\dfrac{S_3}{S}$

Do đó : $\dfrac{HA_1}{AA_1}+\dfrac{HB_1}{BB_1}+\dfrac{HC_1}{CC_1}=1$

Áp dụng BĐT 1 được $\dfrac{AA_1}{HA_1}+\dfrac{BB_1}{HB_1}+\dfrac{CC_1}{HC_1} \geq 9.$

Đẳng thức xảy ra khi $\dfrac{HA_1}{AA_1} = \dfrac{HB_1}{BB_1} = \dfrac{HC_1}{CC_1} = \dfrac{1}{3}$

$\Leftrightarrow S_1 = S_2 = S_3 = \dfrac{S}{3}$, lúc đó H vừa là trực tâm, vừa là trọng tâm ΔABC nên ΔABC là tam giác đều.

b) Từ $\dfrac{HA_1}{AA_1} = \dfrac{S_1}{S}$

$\Rightarrow \dfrac{HA_1}{HA} = \dfrac{HA_1}{AA_1 - HA_1} = \dfrac{S_1}{S - S_1} = \dfrac{S_1}{S_2 + S_3}$

Tương tự : $\dfrac{HB_1}{HB} = \dfrac{S_2}{S_1 + S_3}$; $\dfrac{HC_1}{HC} = \dfrac{S_3}{S_1 + S_2}$

Áp dụng BĐT 2 có $\dfrac{HA_1}{HA} + \dfrac{HB_1}{HB} + \dfrac{HC_1}{HC} \geq \dfrac{3}{2}$.

Lập luận như trên đẳng thức xảy ra khi ΔABC là tam giác đều.

Bài toán 3. Xét tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) với ba đường cao AA_1, BB_1, CC_1 lần lượt cắt (O) lần nữa tại D, E, F. Xác định dạng của tam giác ABC sao cho :

a) $\dfrac{AA_1}{DA_1} + \dfrac{BB_1}{EB_1} + \dfrac{CC_1}{FC_1}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị đó.

b) $\dfrac{AA_1}{AD} + \dfrac{BB_1}{BE} + \dfrac{CC_1}{CF}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị đó.

Hướng dẫn giải.

Gọi H là trực tâm của ΔABC. Dễ dàng chứng minh được $HA_1 = DA_1$; $HB_1 = EB_1$; $HC_1 = FC_1$.

a) Áp dụng bài toán 2. Tổng đang xét đạt giá trị nhỏ nhất là 9 khi ΔABC là tam giác đều.

b) $\dfrac{AD}{AA_1} + \dfrac{BE}{BB_1} + \dfrac{CF}{CC_1} =$

$= 1 + \dfrac{HA_1}{AA_1} + 1 + \dfrac{HB_1}{BB_1} + 1 + \dfrac{HC_1}{CC_1} = 4$

suy ra $\dfrac{AA_1}{AD} + \dfrac{BB_1}{BE} + \dfrac{CC_1}{CF} \geq \dfrac{9}{4}$. Đẳng thức xảy ra khi ΔABC là tam giác đều.

Bài toán 4. Trong các tam giác ngoại tiếp đường tròn (O, r), hãy xác định dạng của tam giác sao cho tổng độ dài ba đường cao đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị đó.

Lời giải. Gọi h_a, h_b, h_c là độ dài các đường cao tương ứng với các cạnh a, b, c của tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (O, r). Lập luận tương tự bài toán 2 được : $\dfrac{r}{h_a} + \dfrac{r}{h_b} + \dfrac{r}{h_c} = 1$

Áp dụng BĐT 1 có :

$h_a + h_b + h_c = (h_a + h_b + h_c)\left(\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}\right) r \geq 9r.$

Đẳng thức xảy ra khi $h_a = h_b = h_c$, lúc đó ΔABC là tam giác đều.

Bài toán 5. Cho tam giác ABC và M là điểm nằm trong tam giác. Kẻ AM, BM, CM cắt các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại A_1, B_1, C_1. Xác định vị trí của điểm M để

a) $\dfrac{AA_1}{MA_1} + \dfrac{BB_1}{MB_1} + \dfrac{CC_1}{MC_1}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị đó.

b) $\dfrac{MA}{MA_1} \cdot \dfrac{MB}{MB_1} \cdot \dfrac{MC}{MC_1}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị đó.

Hướng dẫn giải. Gọi diện tích các tam giác ABC, MBC, MAC, MAB lần lượt là S, S_1, S_2, S_3 thì $S = S_1 + S_2 + S_3$.

a) Lập luận tương tự bài toán 2 có $\dfrac{AA_1}{MA_1} + \dfrac{BB_1}{MB_1} + \dfrac{CC_1}{MC_1} \geq 9$. Đẳng thức xảy ra khi $S_1 = S_2 = S_3 = \dfrac{S}{3}$, lúc đó M là trọng tâm ΔABC.

b) Đặt $\dfrac{AA_1}{MA_1} = x$ thì $\dfrac{MA}{MA_1} = \dfrac{AA_1}{MA_1} - 1 = x - 1$.

Tương tự $\dfrac{MB}{MB_1} = \dfrac{BB_1}{MB_1} - 1 = y - 1$,

$\dfrac{MC}{MC_1} = \dfrac{CC_1}{MC_1} - 1 = z - 1$.

Ta có $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1 \Leftrightarrow xy + yz + zx = xyz$

Từ đó $\dfrac{MA}{MA_1} \cdot \dfrac{MB}{MB_1} \cdot \dfrac{MC}{MC_1} = (x-1)(y-1)(z-1) =$

$xyz - (xy + yz + zx) + x + y + z - 1 = x + y + z - 1 =$

$= (x + y + z)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right) - 1 \geq 9 - 1 = 8.$

Đẳng thức xảy ra khi x=y=z, lúc đó M là trọng tâm ΔABC. (Đây là cách chứng minh khác của bài T5/252 (6/1998) có lời giải ở số 256 (10/1998)).

Bài tập tự luyện. Cho tam giác ABC với các phân giác AA_1, BB_1, CC_1. Gọi a_1, b_1, c_1 lần lượt là các khoảng cách từ A_1 đến AB, B_1 đến BC, C_1 đến CA. Gọi h_a, h_b, h_c lần lượt là độ dài ba đường cao của tam giác kẻ từ A, B, C. Chứng minh rằng :

$$\frac{a_1}{h_a} + \frac{b_1}{h_b} + \frac{c_1}{h_c} \geq \frac{3}{2}$$

/.

Bài T1/260. *Tìm các bộ số nguyên dương (x, y, z) thỏa mãn $x + 2y + 2z = xyz$ (1)*

Lời giải. Trước hết ta thấy vai trò của y, z như nhau nên có thể giả sử $y \le z$ để rút gọn lập luận, đến cuối cùng sẽ bổ sung nghiệm.

Cách 1. a) Với $x = 1$ phương trình (1) trở thành $1 + 2y + 2z = yz \Leftrightarrow (y - 2)(z - 2) = 5 \Rightarrow$ có nghiệm (x, y, z) bằng $(1, 3, 7)$.

b) Với $x \ge 2$, biến đổi

$(1) \Leftrightarrow 2(y+z) = x(yz-1) \ge 2(yz-1)$.

$\Rightarrow yz-y-z-1 \le 0 \Leftrightarrow (y-1)(z-1) \le 2 \Rightarrow y \le 2$.

• Khi $y = 1$, từ (1) có $x+2+2z = xz$ $\Leftrightarrow (x-2)(z-1) = 4 \Rightarrow$ có nghiệm (x, y, z) là $(3, 1, 5)$, $(4, 1, 3)$, $(6, 1, 2)$.

• Khi $y = 2$, từ (1) có $x+4+2z = 2xz \Leftrightarrow$ $(2z-1)(x-1) = 5 \Rightarrow$ có nghiệm (x, y, z) là $(2, 2, 3)$.

Vậy (1) có 10 nghiệm là $(1, 3, 7)$, $(1, 7, 3)$, $(3, 1, 5)$, $(3, 5, 1)$, $(4, 1, 3)$, $(4, 3, 1)$, $(6, 1, 2)$, $(6, 2, 1)$, $(2, 2, 3)$, $(2, 3, 2)$.

Cách 2. $(1) \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{yz} + \frac{2}{xz} + \frac{2}{xy}$ (2)

a) Nếu $z \ge y \ge 3$ thì từ (2) có $1 \le \frac{1}{9} + \frac{2}{3x} + \frac{2}{3x} \Rightarrow \frac{8}{9} \le \frac{4}{3x} \Rightarrow x \le \frac{3}{2} \Rightarrow x = 1$. Với $x = 1$ xét như ở cách 1 có nghiệm (x, y, z) là $(1, 3, 7)$.

b) Xét $z \ge y = 1$ thì từ (2) có $1 = \frac{1}{z} + \frac{2}{xz} + \frac{2}{x}$ (3).

Do (3) phải có $x \ge 3$, $z \ge 2$, từ đó $1 \le \frac{1}{z} + \frac{2}{3z} + \frac{2}{3}$ $\Rightarrow \frac{1}{3} \le \frac{5}{3z} \Rightarrow z \le 5 \Rightarrow$ có các nghiệm (x, y, z) là $(6, 1, 2)$, $(4, 1, 3)$, $(3, 1, 5)$.

c) Xét $z \ge y = 2$ thì từ (2) có $1 = \frac{1}{2z} + \frac{2}{xz} + \frac{2}{2x}$ (4).

Do (4) phải có $x \ge 2$, $z \ge 2$, từ đó $1 \le \frac{1}{2z} + \frac{2}{2z} + \frac{2}{4} \Rightarrow$ $\frac{1}{2} \le \frac{3}{2z} \Rightarrow z \le 3 \Rightarrow$ có nghiệm (x, y, z) là $(2, 2, 3)$.

Kết luận : (1) có 10 nghiệm nêu ở cuối cách 1.

Nhận xét. 1) Trong số 199 bài giải gửi về có 101 bài không tìm đủ 10 nghiệm, do xét chưa hết các trường hợp. Mặt khác có một số bạn chưa dựa vào đặc điểm phương trình để hạn chế các phép thử nên giải khá dài (có bạn thử đến 4 trang). Có bạn xét tính chẵn lẻ của x hoặc xét tích yz để giải bài này.

2) Các bạn sau có lời giải tốt :

Sơn La: Chu Tiến Dũng, 9 THCS Chu Văn An, Mai Sơn ; **Thái Nguyên :** *Lê Anh Xuân*, $9A_1$, THCS Độc Lập, *Nguyễn Trung Kiên*, $9A_1$, THCS Chu Văn An, Tp Thái Nguyên, *Dương Việt Cường*, *Vũ Quốc Việt*, $9D_2$, THCS Trung Tâm, Sông Công ; **Phú Thọ:** *Nguyễn Thị Vân Anh*, *Trần Thanh Hải*, $8C_1$, THCS Việt Trì, *Nguyễn Đình Hòa*, *Vương Quốc Tuấn*, *Lê Chí Kiên*, *Đoàn Duy Hào*, 9B THCS Việt Trì ; **Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Hồng Điệp*, 7A, *Vũ Nhật Huy*, 8A, *Hoàng Xuân Quang*, 9A, THCS Vĩnh Tường, *Kim Đình Thái*, *Nguyễn Văn Giáp*, 9B, THCS Yên Lạc, *Lê Kim Thu*, 8A, THCS Hai Bà Trưng, Mê Linh, *Đỗ Trường Giang*, 9A, DTNT Lập Thạch ; **Bắc Giang:** *Đặng Ngọc Dương*, 9A, THCS thị trấn Hiệp Hòa ; **Hà Nội:** *Lê Minh Châu*, *Phạm Bảo Trung*, 9A, THCS Nguyễn Trường Tộ, Nguyễn *Hoàng Thạch*, 9C, THCS Ngọc Lâm, Gia Lâm ; **Hải Dương:** *Vũ Thành Long*, 9A, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách, *Nguyễn Thị Hiếu*, 9B, THCS Chu Văn An, Thanh Hà; **Hải Phòng:** *Lê Quang Huy*, 8B, *Đỗ Ngọc Kiên*, 9D, *Phạm Gia Vĩnh Anh*, 9T PTNK Trần Phú, *Vũ Ngọc Minh*, *Phạm Đức Hiệp*, 9T, THCS Chu Văn An ; **Nam Định:** *Nguyễn Hải Hùng*, $9A_6$, THCS Trần Đăng Ninh ; *Nguyễn Xuân Trường*, *Vũ Văn Hoan*, *Phùng Văn Thắng*, 9D, THCS Ngô Đồng, Giao Thủy ; **Ninh Bình:** *Nguyễn Thanh Hải*, 9B, THCS Trương Hán Siêu, thị xã Ninh Bình; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Việt Hà*, 9B, *Bùi Ngọc Hân*, 9C, THCS Trần Mai Ninh, *Nguyễn Văn Giáp*, 9A, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, *Nguyễn Đức Tài*, 9A, THCS Tây Đô, Vĩnh Lộc ; **Nghệ An:** *Cao Ngọc Cường*, 9A, THCS Diễn Thọ, Diễn Châu ; **Hà Tĩnh:** *Dương Minh Tuấn*, 8A, THCS Nguyễn Tuấn Thiện, Hương Sơn, *Trần Nhật Sinh*, 9A, THCS Phan Huy Chú, Thạch Hà, *Lê Tâm*, 8E, THCS Kỳ Anh ; **Quảng Bình:** *Hoàng Minh Dũng*, HTX Ngói Cầu 4, Thuận Đức, Đồng Hới ; **Quảng Trị:** *Hoàng Đức Hảo*, 9D, THCS Gio Linh ; **Đắc Lắc:** *Hồ Thị Thanh Trang*, 9C, *Nguyễn Huỳnh Quang*, 8C, THCS Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột ; **Quảng Ngãi :** *Phạm Viết Hiệp*, 8I, THCS Trần Hưng Đạo, thị xã Quảng Ngãi ; **Bình Định:** *Trần Quang Ninh*, 9A Quốc học Quy Nhơn ; **Khánh Hòa:** *Trần Trung Duy*, *Nguyễn Hoa Cương*, *Nguyễn Tôn Bảo*, 9_{14}, THCS Thái Nguyên, Nha Trang ; **Đồng Nai:** *Vũ Xuân Ngọc Tín*, 7A, THCS Quang Trung, Tân Phú ; **An Giang:** *Võ Huy Phương*, $9A_1$, THCS Thoại Ngọc Hầu Long Xuyên.

VIỆT HẢI

Bài T2/260. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt[4]{32 - x} - y^2 = -3 \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt{32 - x} + 6y = 24 \end{cases}$$

Lời giải. (của hầu hết các bạn)

Cộng từng vế của hai phương trình ta có :

$(\sqrt{x} + \sqrt{32 - x}) + (\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{32 - x}) =$
$= y^2 - 6y + 21$ (*)

Ta có : $y^2 = 6y + 21 = (y-3)^2 + 12 \ge 12$ với mọi y và đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $y = 3$ (1)

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski ta có với $0 \le x \le 32$ thì $(\sqrt{x}+\sqrt{32-x})^2 \le (1^2+1^2)(x+32-x) = 64 \Rightarrow \sqrt{x}+\sqrt{32-x} \le 8, \forall x \in [0; 32]$ và đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{x} = \sqrt{32-x} \Leftrightarrow x = 16$ (2)

Lại áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski và kết hợp với (2) ta có :

$(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{32-x})^2 \le (1^2+1^2)(\sqrt{x}+\sqrt{32-x}) \le 2.8 = 16 \Rightarrow \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{32-x} \le 4$ với mọi $x \in [0; 32]$ và đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$\sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{32-x} \Leftrightarrow x = 16$ (3)

Từ (2), (3) suy ra

$(\sqrt{x}+\sqrt{32-x})+(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{32-x}) \le 12$ (4)

Từ (1) và (4) dẫn đến : phương trình (*) thỏa mãn khi và chỉ khi (1) và (4) đồng thời trở thành đẳng thức $\Leftrightarrow x = 16$ và $y = 3$.

Thử vào hệ đã cho ta thấy $x = 16$; $y = 3$ thỏa mãn.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $x = 16$; $y = 3$.

Nhận xét. Rất nhiều bạn tham gia giải vài giải theo cách trên. Bạn *Trần Nam Thái*, lớp $9A_1$, THCS Độc lập, TP **Thái Nguyên** nhận xét : bài toán trên thực sự là giải phương trình (*) nên hình thức hệ có thể thay đổi nhiều cách để "trông khó hơn".

LÊ THỐNG NHẤT

Bài T3/260. *Giả sử a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn: a+b+c=4. Chứng minh rằng :*

$$4 \le \sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a} \le 2\sqrt{6}.$$

Lời giải. của *Nguyễn Huỳnh Quang*, 8C, chuyên Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột, **Đắc Lắc**.

Đặt $\sqrt{a+b} = x$; $\sqrt{b+c} = y$; $\sqrt{c+a} = z$ $(x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0)$

Ta có

$3(x^2+y^2+z^2) = (x+y+z)^2+(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$

Vì $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \ge 0$ nên

$3(x^2+y^2+z^2) \ge (x+y+z)^2$

Từ đó có

$x+y+z = \sqrt{(x+y+z)^2} \le \sqrt{3(x^2+y^2+z^2)}$

Hay $\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a} \le \sqrt{3.8} = 2\sqrt{6}$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \dfrac{4}{3}$.

Mặt khác vì $0 \le a+b \le 4$ hay $0 \le \sqrt{a+b} \le 2$.

Nên ta có : $\sqrt{a+b}(\sqrt{a+b}-2) \le 0$

Hay $a+b \le 2\sqrt{a+b}$ (1)

Một cách tương tự có $b+c \le 2\sqrt{b+c}$ (2)

$c+a \le 2\sqrt{c+a}$ (3)

Cộng theo từng vế của (1), (2) và (3) ta được

$4 \le \sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{a+c}$ (đpcm)

Đẳng thức xảy ra khi một trong ba số a, b, c bằng 4 và hai số còn lại bằng không.

Nhận xét. 1. Tất cả các lời giải gửi đến đều đúng.

2. Đa số các bạn chứng minh bất đẳng thức bên phải nhờ áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski cho hai bộ ba số $\sqrt{a+b}$, $\sqrt{b+c}$, $\sqrt{c+a}$ và 1, 1, 1.

3. Các bạn sau đây có lời giải tốt : **Thái Nguyên:** *Trần Nam Thái*, $9A_1$, THCS Độc Lập, Tp. Thái Nguyên ; **Bắc Giang:** *Đặng Ngọc Dương*, 9A, THCS thị trấn Hiệp Hòa ; **Việt Trì:** *Đinh Thái Sơn, Trần Minh Ngọc*, 8C, chuyên Việt Trì; **Vĩnh Phúc:** *Kim Đình Thái, Chu Văn Hoàn*, 9B, THCS Yên Lạc, *Nguyễn Thu Trang*, 8A, THCS Vĩnh Tường ; **Yên Bái:** *Đỗ Trung Kiên*, 9K, Lê Hồng Phong, Tx Yên Bái ; **Hà Nam:** *Nguyễn Anh Đức*, 9B, Trần Phú, Phủ Lý ; **Hà Nội:** *Nguyễn Quang Hải*, 9A, Hoàn Kiếm ; **Hải Phòng:** *Đỗ Ngọc Kiên*, 9D, *Phạm Gia Vĩnh Anh*, 9CT, NK Trần Phú, *Bùi Văn Tuấn*, 8A, Tự Cường, Tiên Lãng ; **Hải Dương:** *Nguyễn Thùy Linh*, 8A, Nguyễn Trãi, Tp. Hải Dương ; **Thái Bình:** *Đinh Thị Thêu*, 8T, Lương Thế Vinh, Tx. Thái Bình ; **Thanh Hóa:** *Bùi Ngọc Hân*, 9C, Trần Mai Ninh, Tp. Thanh Hóa ; **Nghệ An:** *Phan Minh Huệ*, đội 12, Diễn Lộc, Diễn Châu ; **Hà Tĩnh:** *Phan Thanh Nga*, 9, THCS thị trấn Hương Khê, *Lê Tâm*, 8E, Kỳ Anh ; **Quảng Nam:** *Hoàng Anh Chuyên*, 8, Lê Quý Đôn, Tam Kỳ ; **Ninh Thuận:** *Lâm Thị Bích Thủy*, 6T, Võ Thị Sáu; **Khánh Hòa:** *Nguyễn Hoa Cương*, 9^{14}, Thái Nguyên, Nha Trang ; **Bà Rịa - Vũng Tàu :** *Trần Giang*, 9_1, Nguyễn An Ninh; **Đồng Tháp:** *Trần Minh Tùng*, $9A_2$, THCB Tx. Cao Lãnh ; **Trà Vinh:** *Hoàng Thụy Kha*, $9A_1$, PTTH Nguyễn Đống.

4. Một số bạn đã phát biểu các bài toán tổng quát hóa và chứng minh. Thí dụ một dạng tổng quát hóa như sau :

Cho n số thực không âm $x_1, x_2, ..., x_n$ thỏa mãn $x_1 + x_2 ... + x_n = a$ $(a \ge 0)$. Chứng minh rằng :

$(n-1)\sqrt{a} \le \sqrt{a-x_1}+\sqrt{a-x_2}+...+\sqrt{a-x_n} \le \sqrt{n(n-1)a}$

TỐ NGUYÊN

Bài T4/260. *Giả sử a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng :*

$$(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c})\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}}+\frac{1}{\sqrt[3]{b}}+\frac{1}{\sqrt[3]{c}}\right)-\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}} \le 6$$

Lời giải. Không làm mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c$. Đặt $x = \sqrt[3]{a}$; $y = \sqrt[3]{b}$; $z = \sqrt[3]{c}$, ta có $x \ge y \ge z > 0$ (1) và bất đẳng thức cần chứng minh là :

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-\frac{x^3+y^3+z^3}{xyz} \le 6.$$

$\Leftrightarrow (x+y+z)(yz+zx+xy)-(x^3+y^3+z^3) \le 6xyz$

$\Leftrightarrow x^3+y^3+z^3+3xyz \ge x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y$

$\Leftrightarrow x(x^2+yz) + y(y^2+zx) + z(z^2+xy) - x(y^2+zx) -$
$- y(x^2 + yz) - z(zx + zy) \geq 0$

$\Leftrightarrow (x^2+yz)(x-y) + (y^2+zx)(y-x) + z[x(y-z)$
$- z(y-z)] \geq 0$

$\Leftrightarrow (x-y)(x^2+yz-y^2-xz) + z(x-z)(y-z) \geq 0$

$\Leftrightarrow (x-y)^2(x+y-z) + z(x-z)(y-z) \geq 0$

Từ (1) ta có các nhân tử trong các hạng tử ở vế trái đều không âm, suy ra bất đẳng thức đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi cả hai hạng tử ở vế trái đều triệt tiêu nghĩa là khi và chỉ khi $x = y = z$ hay $a = b = c$, đó là khi tam giác ABC đều. *Chú ý :* Từ chứng minh trên ta thấy ngay không nhất thiết a, b c phải là các số đo các cạnh của một tam giác mà chỉ cần đó là ba số dương tùy ý.

Nhận xét. Có 141 bài giải trong đó chỉ có một bài giải sai do bắc cầu hai bất đẳng thức ngược chiều (!). Phần lớn các bạn đều nêu chú ý như trên. Một số bạn nêu bài toán tổng quát. Bạn Phạm Gia Vĩnh Anh 9 CT PTTH NK Trần Phú Hải Phòng đã dùng bất đẳng thức Trêbưsep để chứng minh. Các bạn sau đây có lời giải tốt : **Nghệ An:** *Phan Minh Huệ*, đội 12 Diễn Lộc, Diễn Châu ; **Vĩnh Phúc :** *Phạm Văn Hùng*, 9B chuyên Yên Lạc, *Lê Tuyết Minh, Cao Việt Dũng*, 9A THCS Vĩnh Tường, *Kim Đình Thái*, 9B THCS Yên Lạc ; **Thanh Hóa :** *Bùi Ngọc Hân*, 9C, THCS Trần Mai Ninh, Tp Thanh Hóa, Nguyễn Văn *Giáp*, 9A THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa ; **Hải Phòng:** *Đỗ Ngọc Kiên*, 9D NK Trần Phú, Hải Phòng ; **Nam Định :** *Phạm Ngọc Anh*, 9A, THCS Giao Hà, Giao Thủy, *Nguyễn Hải Hùng*, 9A Trần Đăng Ninh, *Lê Hồng Chinh*, 9A THCS Nghĩa Hưng ; **Thái Nguyên :** *Nguyễn Trung Kiên*, 9A[1], THCS Chu Văn An ; **Hà Tĩnh :** *Phan Thanh Nga*, 7 THCS thị trấn Hương Khê ; **TP Hồ Chí Minh :** *Trần Vĩnh Hưng*, 9B Nguyễn Du, Gò Vấp ; **Quảng Ngãi :** *Phạm Viết Hiệp*, 8I THCS Trần Hưng Đạo, TX Quảng Ngãi ; **Hải Dương :** *Vũ Thành Long*, 9A, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách ; *Lê Anh Đức*, 10A, THPT Nam Sách ; **Khánh Hòa :** *Nguyễn Hoa Cương*, 9[14], THCS Thái Nguyên, Nha Trang.

ĐẶNG VIỄN

Bài T5/260. *Cho tam giác ABC vuông ở A. Trên tia AB lấy điểm E và trên tia AC lấy điểm F sao cho BE = CF = BC. Giả sử M là điểm nằm trên đường tròn đường kính BC.*

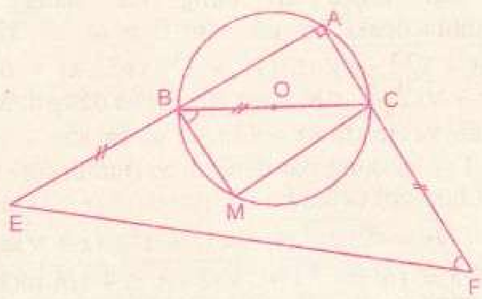
Chứng minh rằng MA + MB + MC ≤ EF.

Xác định điểm M để đẳng thức xảy ra.

Lời giải. 1) Nếu M thuộc cung BC (kể cả M trùng với B hoặc C) không chứa A, theo định lí Ptôlêmê ta có $MA.BC = MB.AC + MC.AB$

nên $MA = MB.\dfrac{AC}{BC} + MC.\dfrac{AB}{BC}$

Suy ra $MA + MB + MC =$



$$= MB\left(\frac{AC}{BC}+1\right) + MC\left(\frac{AB}{BC}+1\right)$$

$$= MB.\frac{AC+BC}{BC} + MC.\frac{AB+BC}{BC}$$

$$= MB.\frac{AC+FC}{BC} + MC.\frac{AB+EB}{BC}$$

$$= MB.\frac{AF}{BC} + MC.\frac{AE}{BC} \leq$$

$$\leq \sqrt{(MB^2+MC^2)\left(\frac{AF^2}{BC^2}+\frac{AE^2}{BC^2}\right)}$$

$$= \sqrt{BC^2\left(\frac{AF^2}{BC^2}+\frac{AE^2}{BC^2}\right)} = \sqrt{AF^2+AE^2}$$

$$= \sqrt{EF^2} = EF.$$

Đẳng thức xảy ra khi $\dfrac{MB}{\dfrac{AF}{BC}} = \dfrac{MC}{\dfrac{AE}{BC}}$ hay $\dfrac{MB}{AF} = \dfrac{MC}{AE}$

Khi đó $\Delta MBC \sim \Delta AFE \Leftrightarrow \angle MBC = \angle AFE$

2) Nếu M thuộc cung BC chứa A. Gọi M' là điểm đối xứng của M qua BC. Ta có $MA < M'A$, $MB = M'B$, $MC = M'C$. Áp dụng trường hợp 1 ta có

$MA + MB + MC < M'A + M'B + M'C \leq EF$

Vậy ta luôn có $MA + MB + MC \leq EF$. Khi M thuộc cung BC không chứa A sao cho $\angle MBC = \angle AFE$ thì $MA+MB+MC$ là lớn nhất và bằng EF.

Nhận xét. Giải tốt bài này có các bạn :

Sơn La: *Chu Tiến Dũng*, 9T, TTCLC (THCS Chu Văn An), Mai Sơn ; **Vĩnh Phúc:** *Hoàng Xuân Quang, Cao Việt Dũng, Nguyễn Văn Phúc*, 9A THCS Vĩnh Tường, *Kim Đình Thái*, 9B, THCS Yên Lạc ; **Hải Phòng:** *Vũ Ngọc Minh, Phạm Đức Hiệp*, 9T Chu Văn An, *Vũ Hoàng Hiệp*, 9T PTTH NK Trần Phú ; **Hải Dương:** *Nguyễn Đức Cương, Ngô Xuân Bách*, 9A Nguyễn Trãi, *Nguyễn Thành Nam*, 8A, Nguyễn Trãi, *Vũ Thành Long*, 9A Nguyễn Trãi, Nam Sách ; **Hà Nội:** *Nguyễn Hoàng Thạch*, 9C Ngọc Lâm, Gia Lâm, *Nguyễn Minh Dũng*, 9A, THCS Lê Quý Đôn, Cầu

Giấy, *Trần Nam Trung*, 9A Trưng Nhị ; **Nam Định:** *Nguyễn Hải Hùng*, 9A$_6$ Trần Đăng Ninh, *Trần Quốc Việt*, 9A, THCS Giao Thủy, *Vũ Văn Hoan, Phùng Văn Thắng*, 9D, THCS Ngô Đồng, Giao Thủy ; **Thanh Hóa:** *Bùi Ngọc Hân*, 9C, Trần Mai Ninh, *Đỗ Mạnh Cường*, 9C Lê Quý Đôn, Bỉm Sơn ; **Quảng Ngãi :** *Hồ Từ Thuấn*, THCS Nguyễn Nghiêm ; **Khánh Hòa:** Nguyễn Tôn Bảo, *Hà Nguyên Vũ, Nguyễn Khánh Nam*, 9^{14}, Thái Nguyên, Nha Trang ; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Trần Giang*, 9_1, Nguyễn An Ninh

VŨ KIM THỦY

Bài T6/260. *Xét các hàm số $f: R \Rightarrow R$ thỏa mãn $f(0) = 0$ và $f(x) = f(4-x) = f(14-x)$ với mọi $x \in R$. Hãy tìm số ít nhất các nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ trong đoạn $[-1000, 1000]$.*

Lời giải. *Cách 1.* (*Lê Thị Thanh An*, 12A$_1$, Hai Bà Trưng, **Vĩnh Phúc**).

Theo giả thiết, hàm $f: R \Rightarrow R$ thỏa mãn các điều kiện

$f(0) = 0$, $f(x) = f(4-x)$, $f(x) = f(10+x)$, $\forall x \in R$

Từ đó suy ra

$f(0) = f(4) = 0$, $f(x) = f(x + 10k)$, $\forall k \in Z$

Vậy mọi giá trị $x_1 = 10k$ và $x_2 = 10k + 4$ đều là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.

Trong đoạn $[-1000, 1000]$, số điểm dạng x_1 (không kể bội) bằng $\frac{1000+1000}{10} + 1 = 201$, số điểm dạng x_2 (không kể bội) bằng $\frac{994 + (-996)}{10} + 1 = 200$. Tổng số hai loại là $201+200 = 401$. Vậy số các nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ trong đoạn $[-1000, 1000]$ không ít hơn 401. Điều này đạt được, chẳng hạn khi

$$\begin{cases} f(x)=0, \text{ với } x = 10k \text{ hoặc } x = 10k+4 \\ f(x)=1 \text{ với mọi } x \text{ còn lại} \end{cases}$$

Cách 2. (*Phạm Ngọc Lợi*, 11T, PTTHNK **Hải Dương**).

Từ giả thiết, hàm f thỏa mãn các điều kiện

$f(0) = 0$, $f(x) = f(4-x)$, $f(x) = f(10+x)$, $\forall x \in R$

Từ đó suy ra

$f(0) = f(4) = 0$, $f(10k) = f(4 + 10k)$, $\forall k \in Z$

Xét các tập

$A = \{k \in Z | 10k \in [-1000, 1000]\}$

$B = \{k \in Z\} 4 + 10k \in [-1000, 1000]\}$

$S = \{x \in R\} f(x) = 0, x \in [-1000, 1000]\}$

Ta có

$|S| \geq |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, $|A| = 201$, $|B| = 200$, $A \cap B = \varnothing$.

Vậy số các nghiệm của phương trình $f(x)=0$ trong đoạn $[-1000, 1000]$ không ít hơn 401.

Nhận xét. Đa số các bạn đều xác định đúng đáp số, nhưng thiếu minh họa trường hợp xảy ra dấu đẳng thức.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T7/260. *Giả sử các số x, y thỏa mãn $x^y - y^x = x + y$. Chứng minh rằng chúng thỏa mãn ít nhất một trong hai điều kiện :*

$$|x-y| < 1 \text{ hoặc } x < \frac{15}{4}$$

Lời giải. Chúng ta có ba nhận xét sau :

1) Vì các số x, y chưa được biết cụ thể nên ta phải hiểu x, y là các số thực dương để biểu thức $x^y - y^x$ được xác định.

2) Bốn bạn trong số sáu bạn gửi lời giải tới Tòa soạn đã chỉ ra ví dụ về các số thực dương x, y thỏa mãn $x^y - y^x = x + y$ nhưng lại có cả hai điều kiện $x-y > 1$ và $x \geq \frac{15}{4}$:

Xét hàm số liên tục

$f(t) = 100^t - t^{100} - 100 - t$, $1 \leq t < +\infty$.

Ta có $f(1) = -2 < 0$,

$$\begin{aligned} f(1,01) &= 100^{1,01} - 1,01^{100} - 100 - 1,01 \\ &> 104 - e - 101,01 \\ &> 104 - 2,8 - 101,01 = 0,19 > 0. \end{aligned}$$

$(100^{1,01} = 104,71285...,$

$1,01^{100} = \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} < e < 2,8).$

Do đó theo định lí Bôxanô-Côsi $\exists\ 1 < t_o < 1,01$ mà $f(t_o) = 0$, tức là $x = 100$, $y = t_o$ thỏa mãn (1).

3) Bạn *Phạm Hồng Quân*, 11T, PTTH Nguyễn Trãi - **Hải Dương** đã phát biểu và chứng minh khẳng định sau :

"*Giả sử các số thực dương x, y thỏa mãn $x^y - y^x = x + y$. Chứng minh rằng chúng thỏa mãn ít nhất một trong hai điều kiện :*

$$y - x < 1 \text{ hoặc } x < 3,15".$$

Thật vậy ta sẽ chứng minh nếu $y \geq x + 1 \geq 4,15$ thì

$$x^y - y^x > x + y.$$

Với x thực cố định, $x \geq 3,15$ ta xét hàm số $f(y) = x^y - y^x - x - y$, $y \geq x + 1$.

Ta có $f'(y) = x^y \ln x - xy^{x-1} - 1$

$= (\ln x - 1)x^y + (x^y - y^x) + (y - x)y^{x-1} - 1.$

Chú ý hàm số $\varphi(t) = \frac{\ln t}{t}$, $t \geq 1$ có đạo hàm

$$\varphi'(t) = \frac{1 - \ln t}{t^2} < 0 \text{ nếu } t > e.$$

Bởi vậy từ $e < 3,15 \le x \le y-1$ ta có

$$\frac{\ln x}{x} > \frac{\ln y}{y}$$

Suy ra $x^y > y^x$.

Từ đó $f'(y) > y^{x-1} - 1 > 0 \ \forall y > x+1$

Do đó $f(y)$ là hàm số tăng.

Ta còn phải chứng minh $f(x+1) = x^{x(x+1)} - (x+1)^x - 2x - 1 > 0 \ \forall x \ge 3,15$.

Xét hàm số $g(t) = (t+2)\ln t - (t+1)\ln(t+1)$, $t \ge 3,15$, ta có : $g'(t) = \frac{t+2}{t} - 1 + \ln t - \ln(t+1) = \frac{2}{t} - \ln\left(1+\frac{1}{t}\right) > 0$ do $\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)^t < \ln e = 1 < 2$.

Bởi vậy $g(t)$ là hàm số tăng.

Chú ý $(3.15)^{5,15} = 368,38... > (4,15)^{415} = 367,19...$

Hệ quả $\forall t \ge 3,15 \Rightarrow \ g(t) \ge g(3,15) > 0$.

Do đó $t^{(t+2)} > (t+1)^{(t+1)}, \forall t \ge 3,15$

Từ đó $\forall x \ge 3,15$ có

$$f(x+1) = \frac{x^{x+2}}{x} - (x+1)^x - 2x - 1$$

$$> \frac{(x+1)^{x+1}}{x} - (x+1)^x - 2x - 1 = \frac{(x+1)^x}{x} - 2x - 1$$

$$= \frac{(x+1)^x - 2x^2 - x}{x} > \frac{(x+1)^3 - 2x^2 - x}{x} > 0$$

(đpcm).

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T8/260. *Cho dãy số (x_n) $(n = 1, 2, ...)$ được xác định bởi $x_1 = x_2 = 1$ và*

$$x_{n+2} = \frac{2}{5\pi}x_{n+1}^2 + \frac{2\pi}{5}\sin x_n\ , \quad n \in N^*$$

Chứng minh rằng dãy số (x_n) hội tụ và tìm giới hạn của nó.

Lời giải. (của bạn *Đỗ Quang Dương*, 12T Hoàng Văn Thụ, **Hòa Bình**).

Trước hết ta chứng minh $x_n \in \left(0\,,\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Thật vậy $x_1 = x_2 = 1 \in \left(0\,,\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Giả sử đã có $x_k \in \left(0\,,\ \frac{\pi}{2}\right) \forall k \le n$. Khi đó $x_{n+1} < \frac{2}{5\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{2\pi}{5} = \frac{\pi}{2}$ và $x_{n+1} > 0$. Theo nguyên lí quy nạp ta suy ra $x_n \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \forall n \in N^*$. Xét hàm $f(x) = \frac{2}{5\pi}x^2 + \frac{2\pi}{5}\sin x - x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Ta có $f'(x) = \frac{4}{5\pi}x + \frac{2\pi}{5}\cos x - 1$; $f''(x) = \frac{4}{5\pi} - \frac{2\pi}{5}\sin x \Rightarrow f''(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{2}{\pi^2} \Rightarrow x = x_o = \arcsin\frac{2}{\pi^2}$.

Suy ra $f''(x) > 0$ với $x \in [0, x_o]$ và $f''(x) < 0$ với $x \in \left(x_o, \frac{\pi}{2}\right)$.

Bảng biến thiên của $f'(x)$ trên $[0, \frac{\pi}{2}]$ như sau

x	0		x_o		$\frac{\pi}{2}$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	$\frac{2\pi}{5} - 1$	$\nearrow$		$\searrow$	$-\frac{3}{5}$

Từ đó suy ra tồn tại $x_1 \in \left(x_o, \frac{\pi}{2}\right)$ để $f'(x_1) = 0, f'(x) > 0$ nếu $x \in (0, x_1)$ và $f'(x) < 0$ nếu $x \in \left(x_1, \frac{\pi}{2}\right)$

Vậy bảng biến thiên của $f(x)$ trên $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ như sau :

x	0		x_1		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

Suy ra $f(x) > 0 \ \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ và $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \frac{\pi}{2}$.

Bằng quy nạp dễ chứng minh rằng x_n là dãy không giảm và nếu $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ thì $1 \le a \le \frac{\pi}{2}$ và a thỏa mãn $f(a) = 0$. Từ phân tích ở trên cho ta thấy $a = \frac{\pi}{2}$.

Nhận xét. Đa số bài giải gửi đến đều lập luận thiếu chặt chẽ trong việc chứng minh phương trình

$\frac{2}{5\pi}x^2 + \frac{2\pi}{5}\sin x = x$ có nghiệm duy nhất $x = \frac{\pi}{2}$ trên đoạn $\left[1, \frac{\pi}{2}\right]$.

Các bạn sau đây có lời giải chính xác chặt chẽ :

An Giang: *Nguyễn Anh Tuấn*, 11TL PTTH Thoại Ngọc Hầu, Long Xuyên ; **Hải Dương:** *Phạm Hoàng Hiệp*, 11A$_1$ PTTH Hồng Quang, *Phạm Ngọc Lợi*, 11T, *Bùi Duy Cường*, 11T, PTTH Nguyễn Trãi.

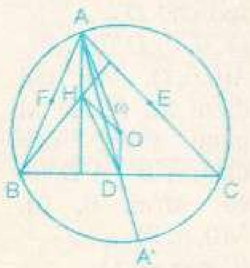
ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T9/260. *Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Gọi H là trực tâm của tam giác và D, E, F lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng :*

$$HD + HE + HF \geq \frac{AD^2 + BE^2 + CF^2}{AD + BE + CF} \quad (*)$$

Lời giải 1. (của *Hoàng Tùng*, 11A toán, ĐHKHTN-ĐHQG **Hà Nội**).

Gọi O và R là tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, ω là trung điểm của OH ; thế thì ω là tâm đường tròn Ơle của tam giác ABC, bán kính $\omega D = \omega E = \omega F = \frac{R}{2}$.



Ta có : $HD + OD \geq 2\omega D = R \Rightarrow HD \geq R - OD$

Tương tự : $HE \geq R - OE$ và $HF \geq R - OF$ và do đó ta được :

$$HD + HE + HF \geq 3R - (OD + OE + OF) \quad (1)$$

Mặt khác, vì tam giác ABC nhọn nên

$OD + OE + OF = R + r$, và $r \leq \frac{R}{2}$ do đó :

$$OD + OE + OF \leq \frac{3}{2}R \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$HD + HE + HF \geq \frac{3}{2}R \quad (3)$$

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, ta có :

$$R.GA = OA.GA \geq \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{GA} = (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA})\,\overrightarrow{GA} = GA^2 + \overrightarrow{OG}.\overrightarrow{GA}.$$

Tương tự : $R.GB \geq GB^2 + \overrightarrow{OG}.\overrightarrow{GB}$, $R.GC \geq GC^2 + \overrightarrow{OG}.\overrightarrow{GC}$. Từ đó suy ra :

$$R(GA + GB + GC) \geq GA^2 + GB^2 + GC^2 \quad (4)$$

Lại vì $\frac{GA}{AD} = \frac{GB}{BE} = \frac{GC}{CF} = \frac{2}{3}$

Thay vào (4), ta được B.Đ.T sau :

$$\frac{3}{2}R \geq \frac{AD^2 + BE^2 + CF^2}{AD + BE + CF} \quad (5)$$

Từ (3) và (5) ta được BĐT kép sau và do đó, thu được (*) :

$$HD + HE + HF \geq \frac{3}{2}R \geq \frac{AD^2 + BE^2 + CF^2}{AD + BE + CF} \quad (**)$$

Dễ thấy rằng đẳng thức đạt được khi và chỉ khi ABC là tam giác đều.

Lời giải 2. (Dựa theo *Nguyễn Đức Trường*, 10A, CT. ĐHSP Vinh, **Nghệ An** và một số bạn khác). Trước hết, cũng thiết lập BĐT (1) như lời giải trên. Sau đó, sử dụng BĐT Ecđốt (vì O nằm trong tam giác nhọn ABC) ta được : $3R = OA + OB + OC \geq 2(OD + OE + OF)$, từ đó cũng được BĐT (2) như trên ($OD + OE + OF \leq \frac{3}{2}R$) và do đó, thu được BĐT (3)

Gọi a, b, c ; m_a, m_b, m_c lần lượt là độ dài các cạnh BC, CA, AB và các đường trung tuyến AD, BE, CF của tam giác ABC, ta chứng minh BĐT sau và 2BĐT tương tự :

$$b^2 + c^2 \leq 4R.m_a \quad (i)$$

Thật vậy, kéo dài AD gặp (O) ở A', ta được :

$AD.DA' = DB.DC = \frac{a^2}{4}$. Từ đó suy ra (áp dụng công thức đường trung tuyến) :

$$2DA'.m_a = \frac{a^2}{2} = b^2 + c^2 - 2m_a^2$$

$$\Rightarrow 2m_a(AD + DA') = b^2 + c^2.$$

Nhưng $AD + DA' = AA' \leq 2R$, nên ta thu được (i).

Cộng vế theo từng vế (i) và hai BĐT tương tự, ta được BĐT sau :

$$m_a + m_b + m_c \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R} \quad (ii)$$

Mặt khác, lại có

$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{4}{3}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)$ Thay vào (ii), ta được BĐT (5) ở trên.

Lời giải 3. (của *Nguyễn Quý Hà*, 10T, PTTH NK Trần Phú, **Hải Phòng**) Trước hết, cũng chứng minh BĐT (i) bằng cách áp dụng định lí hàm số cosin vào tam giác ODA và định lí thứ nhất về đường trung tuyến trong tam giác. Ta có :

$$\cos\angle OAD = \frac{OA^2 + AD^2 - OD^2}{2OA.AD} =$$

$$= \frac{2(AD^2+BD^2)}{4R.m_a} = \frac{b^2+c^2}{4R.m_a} \le 1 \Rightarrow \text{(i)}$$

Từ đó thu được BĐT (ii) như lời giải 2.

Sau đó, áp dụng BĐT (i) vào các tam giác HBC, HCA và HAB với chú ý rằng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác này có cùng bán kính R như đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC ta được $HB^2+HC^2 \le 4R.HD$ và hai BĐT tương tự. Từ đó suy ra :

$$HD+HE+HF \ge \frac{HA^2+HB^2+HC^2}{2R} \qquad \text{(iii)}$$

Thay $HA^2 = R^2-a^2$, $HB^2 = 4R^2-b^2$, $HC^2 = 4R^2-c^2$ vào (iii) và sử dụng BĐT quen thuộc $a^2+b^2+c^2 \le 9R^2$, ta được BĐT sau :

$$HA^2+HB^2+HC^2 \ge 3R^2 \qquad \text{(iv)}$$

Từ (iii) và (iv) ta được BĐT (3) như lời giải 1 ở trên. Mặt khác, ta viết lại $\frac{3}{2}R$ dưới dạng :

$$\frac{3}{2}R = \frac{\frac{4}{3}(a^2+b^2+c^2)}{\frac{a^2+b^2+c^2}{2R}} = \frac{m_a^2+m_b^2+m_c^2}{\frac{a^2+b^2+c^2}{2R}} \quad \text{(v)}$$

Từ (v) và (ii) ta thu được (5) như lời giải (1), và do đó được (**) và (*).

Nhận xét. 1) Ba lời giải nêu trên đều sử dụng những BĐT hình học và chỉ ra thêm 2 BĐT hình học thú vị nữa là (3) và (5) để thu được BĐT kép (**). Đa số các bạn cho lời giải trên cơ sở sử dụng BĐT Trêbưsép. Giả sử $a \ge b \ge c$, sau đó chứng minh các BĐT sau :

$$m_a \le m_b \le m_c\ ; \qquad HD \ge HE \ge HF$$

$HD.AD \ge \overrightarrow{HD}\,.\,\overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}a^2$ và hai BĐT tương tự ;

từ đó suy ra :

$$HD.m_a + HE.m_b + HF.m_c \ge \frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2) =$$

$$= \frac{1}{3}(m_a^2+m_b^2+m_c^2)$$

Áp dụng BĐT Trêbưsép ta được :

$$\frac{1}{3}(HD+HE+HF)(m_a+m_b+m_c) \ge HD.m_a + HE.m_b + HF.m_c.$$

Từ hai BĐT cuối cùng này ta được (*) cần tìm :

2) Bạn *Nguyễn Như Thắng*, $10A_1$, PTCT ĐHSP-ĐHQG **Hà Nội** nhận xét rằng giả thiết tam giác ABC phải nhọn là thừa. Chẳng hạn, như lời giải 3 đã nêu ở trên không đòi hỏi điều kiện gì về tam giác ABC.

3) Nhiều bạn không chỉ ra thật cụ thể dấu đẳng thức ở (*) đạt được khi nào (và chỉ khi nào ?).

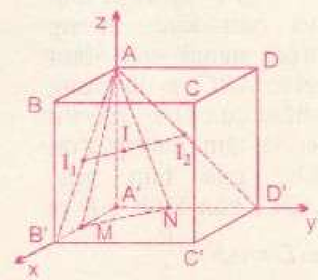
4) Ngoài các bạn đã nêu trên, các bạn sau đây có lời giải tốt :

Hà Nội: *Phạm Đức Hiệp*, 9T, Chu Văn An ; *Hàn Thế Anh*, $10A_2$, PTCT ĐHSP-ĐHQG. **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Trung Lập*, $11A_1$, PTTH chuyên Vĩnh Phúc ; **Thái Nguyên:** *Nguyễn Cao Sơn*, 10T, PTTH NK Thái Nguyên; **Hải Dương:** *Lê Anh Đức*, $10A_1$, PTTH Nam Sách ; **Quảng Trị:** *Trần Việt Anh*, 10T, PTTH chuyên Lê Quý Đôn ; **Đồng Nai:** *Dương Trọng Nghĩa*, $10A_3$, PTTH Ngô Quyền, Biên Hòa ; **TP Hồ Chí Minh:** *Lương Thế Nhân*, 10T, PTNK ĐHQG TP Hồ Chí Minh.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài T10/260. *Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ và mặt cầu (C) nội tiếp hình lập phương đó. Mặt phẳng (P) quay quanh A, tiếp xúc với mặt cầu (C) và cắt hai cạnh $A'B'$ và $A'D'$ lần lượt tại M và N. Tìm tập hợp tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $AA'MN$.*

Lời giải. Lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $O \equiv A'$, $B'(1, 0, 0)$, $D'(0, 1, 0)$, $A(0,0,1)$. Với hai điểm M, N bất kì nằm trong các cạnh $A'B'$, $A'D'$ ta có: $M(m, 0, 0)$, $N(0, n, 0)$ $(0 < m, n < 1)$.



Mặt phẳng (AMN) có phương trình: $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + z = 1$, mặt cầu (C) có phương trình : $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(z-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $AA'MN$ ta có $I\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Vậy mặt phẳng (AMN) tiếp xúc với mặt cầu (C) $\Leftrightarrow$ khoảng cách từ điểm $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ đến mặt phẳng (AMN) bằng $\frac{1}{2}$

$$\frac{\left|\frac{\frac{1}{2}}{m} + \frac{\frac{1}{2}}{n} + \frac{1}{2} - 1\right|}{\sqrt{\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + 1}} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1\right)^2 = \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{mn} \Leftrightarrow m + n = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_I + y_I = \dfrac{1}{2} \\ z_I = \dfrac{1}{2} \qquad (*) \\ 0 < x_I,\ y_I < \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

(*) chứng tỏ rằng quỹ tích của I là đoạn thẳng $I_1 I_2$ trong đó $I_1\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$; $I_2\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ không kể hai điểm I_1, I_2.

Nhận xét. 1) Bài toán này không khó, nhưng khó trình bày, có lẽ vì vậy nên chỉ có 22 bạn tham gia giải.

2) Các bạn sau đây có lời giải tương đối tốt :

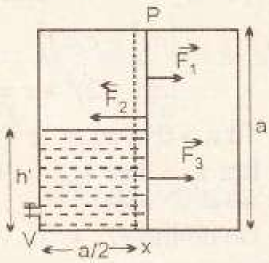
Lâm Đồng: *Tô Thu Hiền*, $11A_2$, PTTH Bảo Lộc ; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Trung Lập*, $11A_1$ chuyên Vĩnh Phúc ; **Hải Dương:** *Phạm Ngọc Lợi*, 11T PTNK Hải Dương ; **Khánh Hòa:** *Trần Tuấn Anh*, 11T, Lê Quý Đôn, Nha Trang

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/260. *Một bình hình lập phương, mỗi cạnh a = 1m, chứa không khí với áp suất bằng áp suất khí quyển $p_o = 10^5 N/m$ và được ngăn đôi bằng một pittông mỏng P. Qua một vòi nước V ở nửa bên trái người ta giữ pittông và cho nước vào ngăn trái một cách từ từ cho đến mức $h = \frac{a}{2}$. Hỏi khi pittông không bị giữ thì nó dịch chuyển một đoạn bằng bao nhiêu ?*

Bỏ qua ma sát giữa pittông và thành bình, bỏ qua áp suất của hơi nước. Bình chứa ở trong điều kiện đẳng nhiệt. Biết $g = 10m/s^2$ và khối lượng riêng của nước $D = 10^3 kg/m^3$;

Hướng dẫn giải. Sau khi buông, pittông dịch chuyển một đoạn x, sau đó hợp lực tác dụng lên nó bằng không và chiều cao của cột nước là h' :



$F_2 = F_1 + F_3$ (1). Ta có $h'\left(\frac{a}{2} + x\right) = h\frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}$

$\Rightarrow h' = \dfrac{a^2}{2a + 4x}$. Suy ra: $F_3 = ah'\left(Dg\dfrac{h'}{2}\right) = \dfrac{Dgah'^2}{2} = \dfrac{Dga^5}{8(a+2x)^2}$

Vì nhiệt độ khí không thay đổi nên :

$p_o\cdot\dfrac{a^3}{2} = p_1\left(\dfrac{a}{2} + x\right)(a - h')a \Rightarrow p_1 = \dfrac{a^3}{a + 2x}\cdot p_o$

$\Rightarrow F_1 = p_1(a - h')a = \dfrac{a^3}{a + 2x}\cdot p_o$

Tương tự $p_2\left(\dfrac{a}{2} - x\right)a^2 = p_o\cdot\dfrac{a^3}{2}$

$\Rightarrow p_2 = \dfrac{a}{a - 2x}\cdot p_o \Rightarrow F_2 = \dfrac{a^3}{a - 2x}\cdot p_o$.

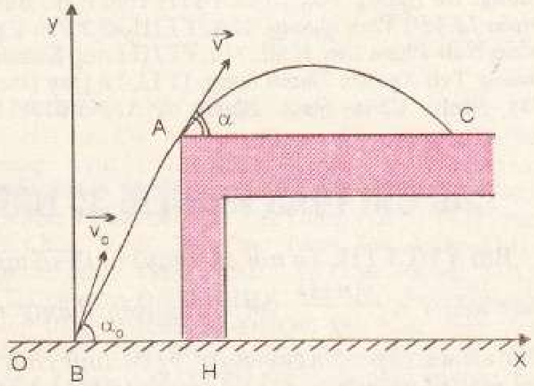
Thay các biểu thức của F_1, F_2, F_3 vào (1), thay số và giải ra ta được $x = 0{,}3087\text{cm} \approx 0{,}31\text{mm}$.

Nhận xét. Các bạn có lời giải đúng và gọn :

Đà Nẵng: *Đỗ Nguyễn Nam Quan*, $12A_2$, *Thái Nguyên*, $10A_2$, PTTH chuyên Lê Quý Đôn; **Hà Nội:** *Lê Minh Tuấn*, $B_0 10^B$ chuyên Lí, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội.

MAI ANH

Bài L2/260. *Em bé ngồi dưới sàn nhà ném một viên bi lên bàn có chiều cao h = 1m với vận tốc $v_o = 2\sqrt{10}m/s$. Để viên bi có thể rơi xuống mặt bàn ở xa nhất so với mép bàn A thì em phải ngồi tại vị trí B cách chân bàn H bao xa ? Lấy $g = 10m/s^2$.*



Hướng dẫn giải. Để bi có thể rơi đến điểm C ở xa mép bàn A nhất thì quỹ đạo của bi phải đi sát mép A (xem hình). Kí hiệu $\vec{v}$ là vectơ vận tốc của bi khi đi qua A, ta có : $v = \sqrt{v_o^2 - 2gh} = 2\sqrt{5}\,m/s$, và góc α mà $\vec{v}$ hợp với mặt bàn tính theo công thức : $A = \dfrac{v^2\sin 2\alpha}{g}$

Muốn cho AC lớn nhất thì $\sin 2\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{4}$. Ta có thành phần theo trục Ox của $\vec{v}$ và $\vec{v_o}$ bằng nhau :

$$v_o\cos\alpha_o = v\cos\alpha \Rightarrow \alpha_o = \frac{\pi}{3}.$$

Phương trình quỹ đạo của bi :

$$y = -\frac{1}{2}\frac{gx^2}{(v_o\cos\alpha_o)^2} + x\,.\,\mathrm{tg}\alpha_o = -\frac{x^2}{2} + \sqrt{3}\,x.$$

Vì quỹ đạo đi qua A nên, tại A, ta có $y = h = 1m$, và từ đó $x_A = BH = \sqrt{3} - 1 = 0{,}732$m (và $x_C = \sqrt{3} + 1 = 2{,}732$m).

Nhận xét. Các bạn có lời giải đúng và gọn :

Đại học KHTN-ĐHQG Hà Nội: *Lê Minh Tuấn*, B_0, 10B, *Lê Cường*, B_0 11A, *Nguyễn Tuấn Đức*, B_0 11A, *Phan Quốc Hưng*, 10B, *Trịnh Trung Kiên*, B_0, 11C, *Đỗ Trọng Hiếu*, 10A, B_0, chuyên Lí ; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Nam Giang*, 10C PTTH Hậu Lộc II, Hậu Lộc ; *Nguyễn Văn Hiếu*, $11B_2$, D_1, PTTH Bỉm Sơn, *Trần Đức Nam*, 11A6, THCB Đào Duy Từ, *Vũ Việt Anh*, $10E_2$, THCB Đào Duy Từ, *Lê Văn Quang*, 11A5, THCB Đào Duy Từ, Tp Thanh Hóa ; **Thái Nguyên:** *Đỗ Lê Thùy*, Lí K10, PTTH NK Thái Nguyên; *Trần Xuân Quý*, 10T, PTTH NK Thái Nguyên ; **Đắc Lắc:** *Nguyễn Danh Thanh*, 11 Lí I, PTTH chuyên Nguyễn Du, Buôn ma Thuột ; **Yên Bái:** *Nguyễn Xuân Cường*, 10A, PTTH chuyên Yên Bái ; **Tuyên Quang:** *Nguyễn Trung Kiên*, $10A_1$, PTTH chuyên Tuyên Quang ; **Tp Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Như Mẫn*, 10 Lí, PTNK Tp Hồ Chí Minh ; **Khánh Hòa:** *Vũ Thái Phú*, 10A5, THCB Lí Tự Trọng, Nha Trang ; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Huy Việt*. 11A1, PTTH số 2, Gia Lương ; **Hưng Yên:** *Bùi Hùng Sơn*, $12A_1$, PTTHCB thị xã Hưng Yên ; **Hải Phòng:** *Đỗ Hoàng Anh*, 10 Lí, PTTH Trần Phú ; **Bình Định:** *Lê Viết Vinh Quang*, 12A, PTTH số 3 Phù Cát; **Đồng Nai:** *Phạm Duy Hoài*, 11*a*, PTTH Long Khánh ; **Quảng Trị:** *Nguyễn Thanh Long*, 11 Lí, Lê Quý Đôn ; **Tây Ninh:** *Châu Quốc Phong*, 11A6, PTTH Lí Thường Kiệt, Hòa Thành ; **Trà Vinh:** *Dương Tấn Khải*, 12A, THCB Trà Vinh ; **Ninh Thuận:** *Nguyễn Trọng Khoa*, $12A_2$, PTTH Chu Văn An, Phan Rang ; **Quảng Bình:** *Trương Quang Trí*, $11A_2$, PTTH CB Lệ Thủy ; *Nguyễn Văn Đồng*, $12A_1$, THCB Đào Duy Từ ; **Hòa Bình:** *Trần Ngọc Lâm*, 10 Lí, *Trịnh Văn Quang*, 12 Chuyên Lí, PTTH NK Hòa Bình; **Đà Nẵng:** *Đỗ Nguyễn Nam Quân*, $10A_2$, PTTH chuyên Lê Quý Đôn, *Phan Văn Tuấn*, PTTH Hòa Bang ; **Hà Tây:** *Nguyễn Đình Khiêm*, 10TN2, PTTH chuyên Nguyễn Huệ ; *Nguyễn Các Hướng*, 10A5, PTTH Thanh Oai A; **Phú Thọ:** *Phan Quỳnh Anh*, 10A3, PTTH Phù Ninh, Phú Lộc ; **Hà Tĩnh:** *Trần Anh Dũng*, *Nguyễn Tiến Thành*, 10 Lí, PTTH NK Hà Tĩnh ; *Nguyễn Văn Hiếu*, 1A, PTTH Hồng Lĩnh ; **Nghệ An:** *Đào Anh Đức*, *Lương Minh Đức*, *Hồ Khánh Nam*, 11 Lí, *Lê Ngọc Tuấn*, 10A3, *Trần Ngọc Lâm*, 10A2, PTTH Phan Bội Châu, Vinh ; *Nguyễn Đức Thuận*, 10A, *Trần Đại Phong*, 11A1, PTTH Huỳnh Thúc Kháng, Vinh ; *Lê Xuân Khánh*, 10A, PTTH Hermanngmeiner, Vinh ; **Quảng Ngãi:** *Phạm Quang Huy*, 12 Lí Hóa, *Phạm Việt Ngoan*, 11 Tin, *Trần Đức Thanh*, 10A1, trường chuyên Lê Khiết ; *Nguyễn Ngọc Tuấn*, 11A2, THCB Đức Phổ I, *Nguyễn Nhật Anh*, 11A1. THCS số 1, Đức Phổ ;

Vĩnh Phúc: *Lê Quốc Hưng*, *Trần Thanh Thọ*, *Trần Văn Thật*, *Hoàng Minh Tuấn*, *Đỗ Văn Tuấn*, 11A3, *Dương Hà Phú*, 10A1, *Phạm Doanh Tuyên*, 12A1, *Nguyễn Công Hưng*, 12A3, PTTH chuyên Vĩnh Phúc;

MAI ANH

CÁC BÀI TOÁN KỈ NIỆM 35 NĂM TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Bài T1/PTTH. *Ta nói số nguyên t là số tam giác nếu* $t = \dfrac{n(n+1)}{2}$ *với số nguyên dương n. Tìm tất cả cặp số nguyên (a, b) có tính chất : với mọi số nguyên t, t là số tam giác khi và chỉ khi at + b là số tam giác (*).*

NGUYỄN MINH ĐỨC
(Hà Nội)

Lời giải. Đầu tiên ta có nhận xét : số nguyên t là số tam giác khi và chỉ khi $8t + 1$ là số chính phương lẻ ≥ 9.

Giả sử cặp số nguyên (a, b) thỏa mãn (*).

Ta sẽ chứng minh $a=1$, $b=0$ (Như vậy cặp số nguyên duy nhất thỏa mãn (*) là cặp số $(1, 0)$).

Ta có $8(at+b)+1 = a(8t+1)+c$, trong đó kí hiệu $c = 8b+1-a$. Do đó tính chất (*) tương đương với tính chất : với mọi $u \in Z$, $u \equiv 1 \pmod 8$, u là số chính phương lẻ ≥ 9 khi và chỉ khi $au+c$ là số chính phương lẻ ≥ 9. (**)

Ta thấy ngay $a > 0$, vì nếu $a < 0$ thì tồn tại số chính phương lẻ $u \geq 9$ mà $au + c < 0$, và nếu $a = 0$, lấy $u = 9$ suy ra c là số chính phương lẻ $c \geq 9$, khi đó $au+c = c$ là số chính phương lẻ với mọi $u \Rightarrow$ tính chất (**) sai.

Xét $v \in N^*$, v lẻ ≥ 3.

t_v, $t_{v+2} \in N^*$ lẻ ≥ 3 thỏa mãn

$$\begin{cases} av^2 + c = t_v^2 \\ a(v+2)^2 + c = t_{v+2}^2 \end{cases} \quad (1)$$

Từ $a > 0$ ta có :

$$\lim_{v \to +\infty} t_v = \lim_{v \to +\infty} t_{v+2} = +\infty$$

Do đó $\lim\limits_{v \to +\infty} (t_v + \sqrt{a}.v) = +\infty$.

Nhưng $c = (t_v + \sqrt{a}.v).(t_v - \sqrt{a}.v)$ (2)

Suy ra $\lim\limits_{v \to +\infty} (t_v - \sqrt{a}.v) = 0$

Bởi vậy $\lim\limits_{v \to +\infty} (t_{v+2} - t_v) = 2\sqrt{a}$. (3)

Chú ý $t_{v+2} - t_v$, $v = 3, 5, 7, \ldots$ là dãy các số nguyên nên từ (3) suy ra trừ một số hữu hạn số v thì $t_{v+2} - t_v = 2\sqrt{a}$.

Hệ quả $\sqrt{a} \in N^*$.

Kết hợp với (2) và nhận xét rằng nếu $t_v - \sqrt{a}.v \neq 0$ thì $|t_v - \sqrt{a}.v| \geq 1$ ta nhận được $c = 0$.

Tức là $b = \dfrac{a-1}{8}$

$b \in Z \Rightarrow a$ là số chính phương lẻ.

Nhưng nếu $a \geq 3^2$ thì (**) sai với $u = 1$.

Vậy $a = 1, b = 0$ (đpcm).

Nhận xét. Trong gần 200 bạn gửi lời giải tới Tòa soạn rất nhiều bạn mắc sai lầm : $at + b$ là số tam giác suy ra t là số tam giác, chưa kiểm tra $t \in Z$?! (dẫn đến sai lầm sau : tồn tại các số tam giác p, q mà $aq+b = 1$, $ap + b = 3$, do 1 và 3 là các số tam giác. Suy ra $a(p - q) = 2$ và do $p - q \geq 2$ nên ta có $a = 1$!)

2. Bạn Lý Minh Tuấn, 12T, PTNK ĐHQG Thành phố Hồ Chí Minh có nhận xét rất đúng là : nếu bài toán chỉ yêu cầu "với mọi số tam giác t, $at+b$ cũng là số tam giác" thì theo chứng minh trên các cặp số (a, b) cần tìm là hoặc $a = 0$, b là số tam giác tùy ý, hoặc a là số chính phương lẻ tùy ý, $b = \dfrac{a-1}{8}$.

3. Các bạn sau có lời giải tốt, hoàn chỉnh hơn cả : **Hòa Bình:** *Đỗ Quang Dương*, 12T, Hoàng Văn Thụ; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Duy Tân*, $12A_1$, PTTH chuyên; **Hải Dương:** *Đào Văn Huy*, 10T, PTTH Nguyễn Trãi, *Phạm Hoàng Hiệp*, $11A_1$, PTTH Hồng Quang; **Nam Định:** *Phạm Ngọc Hưng*, 11T, PTTH Lê Hồng Phong; **Thái Bình:** *Lê Thành Công*, 10T, PTTH chuyên ; **TP Hồ Chí Minh:** *Phạm Ngọc Huy, Nguyễn Cẩm Thạch, Trần Quang Vinh*, PTNK - ĐHQG.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T2/THPT. *Cho ΔABC có :*

$$m_a + m_b + m_c = \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c)$$

Chứng minh rằng xảy ra ít nhất một trong ba đẳng thức sau :

$$m_a = \frac{\sqrt{3}}{2}a,\ m_b = \frac{\sqrt{3}}{2}b,\ m_c = \frac{\sqrt{3}}{2}c.$$

NGUYỄN MINH HÀ
(*Hà Nội*)

Lời giải. (của nhiều bạn). Theo giả thiết :

$$m_a + m_b + m_c = \frac{\sqrt{3}}{2}a + \sqrt{3}b + \frac{\sqrt{3}}{2}c \quad (1)$$

Mặt khác, ta đã biết

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$$

$$\Rightarrow m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = $$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)^2 \quad (2)$$

Từ (1), (2) dễ dàng suy ra :

$$m_bm_c + m_cm_a + m_am_b =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}b.\frac{\sqrt{3}}{2}c + \frac{\sqrt{3}}{2}c.\frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}a.\frac{\sqrt{3}}{2}b$$

Bình phương hai vế của (3) và áp dụng công thức tính độ dài trung tuyến ta có :

$$m_am_bm_c = \frac{\sqrt{3}}{2}a.\frac{\sqrt{3}}{2}b.\frac{\sqrt{3}}{2}c \quad (4)$$

Từ (1), (3), (4) theo định lí Viet suy ra ba số : m_a, m_b, m_c và ba số $\frac{\sqrt{3}}{2}a$, $\frac{\sqrt{3}}{2}b$, $\frac{\sqrt{3}}{2}c$ cùng là ba nghiệm của một phương trình bậc ba.

Giả sử $a \leq b \leq c$ ta có : $\frac{\sqrt{3}}{2}a \leq \frac{\sqrt{3}}{2}b \leq \frac{\sqrt{3}}{2}c$

Theo một kết quả quen thuộc của hình học phẳng ta có : $m_c \leq m_b \leq m_a$.

Từ các nhận xét trên ta có : $m_c = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, $m_b = \frac{\sqrt{3}}{2}b$; $m_a = \frac{\sqrt{3}}{2}c$. Vậy : $m_b = \frac{\sqrt{3}}{2}b$ (đpcm).

Nhận xét. 1) Có 165 bạn tham gia giải bài này, 19 bạn giải sai. Các bạn sau đây có lời giải tốt. **Tuyên Quang:** *Nguyễn Hoàng Minh*, $11B_1$, PTTH chuyên; **Thanh Hóa:** *Mai Như Ngọc*, $11A_6$, PTTH Ba Đình, Nga Sơn; **Nghệ An:** *Chu Việt Tuấn*, $11A_1$, PTTH Phan Bội Châu, Vinh; **Hà Tây:** *Phạn Lạc Linh*, PTTH Nguyễn Huệ; **Vĩnh Phúc:** *Vũ Văn Phong*, $11A_1$, PTTH chuyên; **ĐHSP-ĐHQG Hà Nội:** *Phạm Quang Bình*, $10A_1$; **ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội:** *Hàn Thế Anh*, $10A_1$; **Hải Phòng:** *Nguyễn Anh Quân, Ngô Quang Thông*, 10T, PTTH NK Trần Phú; **ĐHQG Tp Hồ Chí Minh:** *Trần Thượng Văn Du*; **ĐHKH Huế:** *Lê Văn Hóa*, 12T.

2) Để đi đến đẳng thức : $m_am_bm_c = \frac{\sqrt{3}}{2}a.\frac{\sqrt{3}}{2}b.\frac{\sqrt{3}}{2}c$ nhiều bạn đã dùng các nhận xét sau :

* m_a, m_b, m_c là độ dài ba cạnh của một tam giác và tam giác đó có diện tích bằng $\frac{3}{4}$ diện tích tam giác ABC. *Các công thức tính diện tích tam giác.

3) Một vài bạn đã đi từ đẳng thức :

$$m_a + m_b + m_c = \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c) \text{ đến đẳng thức :}$$

$$\left(m_a - \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)\left(m_b - \frac{\sqrt{3}}{2}b\right)\left(m_c - \frac{\sqrt{3}}{2}c\right) = 0$$

bằng những biến đổi đại số trực tiếp và như vậy đã giải được bài toán mà không cần dùng đến định lí Viet.

NGUYỄN MINH HÀ

ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/264. Tìm dãy số tự nhiên liên tiếp có nhiều số hạng nhất sao cho mỗi số hạng trong dãy là tổng của 2 số nguyên tố.

VŨ ĐỨC SƠN
(Hà Nội)

Bài T2/264. Giải phương trình :

$$\frac{(x-1)^4}{(x^2-3)^2}+(x^2-3)^4+\frac{1}{(x-1)^2}=3x^2-2x-5$$

NGUYỄN PHÚ YÊN
(Long An)

Bài T3/264. Giả sử a, b, c là các số dương và x, y, z là các số thuộc đoạn $\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$ thỏa mãn $a+b+c=x+y+z=1$. Chứng minh rằng : $ax+by+cz \geq 8abc$. Đẳng thức xảy ra khi nào ?

PHẠM NGỌC QUANG
(Thanh Hóa)

Bài T4/264. Một đường tròn tâm Q tiếp xúc với đoạn thẳng AB tại điểm C nằm giữa A và B. Tia Ax tiếp xúc với đường tròn (Q) tại D (D khác C). Trên tia Ax lấy điểm M. Đường thẳng qua Q vuông góc với BM cắt CD tại E. Tia AE cắt BM tại F. Chứng minh rằng điểm F luôn nằm trên một tia cố định khi M (M khác A) di động trên tia Ax.

TRẦN LUẬN
(Hà Nội)

Bài T5/264. Cho tam giác ABC với $AB > AC$ và các trung tuyến BM, CN. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{2}(AB-AC) < BM - CN < \frac{3}{2}(AB-AC)$$

NGUYỄN MINH HÀ
(Hà Nội)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/264. Chứng minh rằng tổng các bình phương của tất cả các ước số của số tự nhiên n ($n > 2$) nhỏ hơn $n^2 . \sqrt{n}$.

TRẦN DUY HINH
(Bình Định)

Bài T7/264. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $\sqrt{x}+2\sqrt{y}$, trong đó x, y là các số không âm thỏa mãn $x^3+y^3=1$

VÕ GIANG GIAI
(Tp Hồ Chí Minh)

Bài T8/264. Cho hai đa thức

$$f(x)=x^4-(1+e^2)x+e^2 \text{ và } g(x)=x^4-1$$

(e là cơ số của lôgarit tự nhiên)

Chứng minh rằng với các số dương a, b phân biệt thỏa mãn $a^b=b^a$ thì $f(a).f(b)<0$ và $g(a).g(b)>0$.

HOÀNG NGỌC CẢNH
(Hà Tĩnh)

Bài T9/264. Gọi P là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Các tia AP, BP, CP cắt đường tròn (O, R) ngoại tiếp ΔABC lần lượt tại A_1, B_1, C_1. Chứng minh rằng :

a) $PA_1+PB_1+PC_1 \geq PA+PB+PC$

b) $\dfrac{1}{PA_1}+\dfrac{1}{PB_1}+\dfrac{1}{PC_1} \geq \dfrac{3}{R}$

NGUYỄN MINH PHƯƠNG *(Phú Thọ)*
NGUYỄN XUÂN HÙNG *(Thanh Hóa)*

Bài T10/264. Trên cạnh CD của hình tứ diện $ABCD$ lấy điểm N (N khác C, D). Kí hiệu $p(XYZ)$ là chu vi ΔXYZ. Chứng minh rằng :

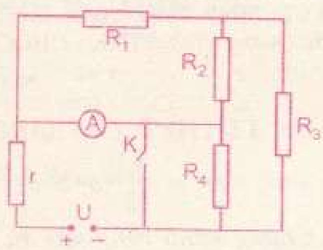
a) $NC.p(DAB)+ND.p(CAB)>CD.p(NAB)$

b) $\dfrac{NC}{ND}=\left|\dfrac{CA^2-CB^2}{DA^2-DB^2}\right|$ khi $NA=NB$.

ĐỖ THANH HÂN *(Minh Hải)*
HỒ QUANG VINH *(Nghệ An)*

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/264. Cho mạch điện như hình vẽ. U không đổi ; $R_1=18R$; $R_2=9R$; $R_3=4R$; $R_4=15R$. Bỏ qua điện trở của dây nối, khóa K và ampe kế. Khi K đóng ampe kế chỉ $3A$, công suất tiêu thụ trên r lớn gấp 4 lần công suất tiêu thụ cũng trên r khi K mở. Xác định số chỉ của ampe kế khi K mở.



LẠI THẾ HIỂN
(Hà Nội)

Bài L2/264. Con lắc đơn gồm vật khối lượng m treo vào sợi dây không giãn dài 0,9 (m). Thả con lắc từ vị trí nằm ngang không có vận tốc ban đầu. Khi lực căng của dây $T=mg$ thì dây treo vật bị đứt. Vật rơi xuống cắm vào đất một khoảng $h'=5cm$ so với mặt đất. Thời gian từ khi vật chạm đất đến khi dừng lại $t=0{,}01$ (s). Coi lực cản của đất là không đổi. Bỏ qua sức cản không khí, lấy $g=10m/s^2$. Tính khoảng cách từ vị trí nằm ngang của con lắc đến mặt đất.

ĐỖ QUỐC HÙNG
(Vĩnh Phúc)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/264. Find the longest sequence of consecutive natural numbers such that each term is a sum of two prime numbers.

T2/264. Solve the equation

$$\frac{(x-1)^4}{(x^2-3)^2}+(x^2-3)^4+\frac{1}{(x-1)^2}=3x^2-2x-5.$$

T3/264. Prove that $ax+by+cz \geq 8abc$ for positive numbers a, b, c satisfying $a+b+c=1$ and numbers x, y, z $\left(x, y, z \in \left[0; \frac{1}{2}\right]\right)$ satisfying $x+y+z=1$.

When does equality occur ?

T4/264. A circle with center Q touches the line AB at a point C between A and B. The ray Ax touches the circle (Q) at D (distinct from C). M is a point on the ray Ax. The line, passing through Q, perpendicular to BM, cuts CD at E. The ray AE cuts BM at F. Prove that F lies on a fixed ray when M moves along the ray Ax (M distinct from A).

T5/264. Let be given a triangle ABC with $AB > AC$, and let BM, CN be its two medians. Prove that

$$\frac{1}{2}(AB-AC) < BM-CN < \frac{3}{2}(AB-AC).$$

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS.

T6/264. Prove that the sum of squares of all divisors of a natural number n ($n > 2$) is less than $n^2 . \sqrt{n}$.

T7/264. Find the greatest value of the expression $\sqrt{x}+2\sqrt{y}$ where x, y are non-negative numbers satisfying $x^3+y^3=1$.

T8/264. Consider the polynomials $f(x)=x^4-(1+e^2)x+e^2$ and $g(x)=x^4-1$. (e is the base of natural logarithms). Prove that for distinct positive numbers a, b satisfying $a^b = b^a$, we have

$$f(a)f(b) < 0 \text{ and } g(a)g(b) > 0.$$

T9/264. Let P be the incenter of a triangle ABC. The rays AP, BP, CP cut the circumcircle (O, R) of triangle ABC respectively at A_1, B_1, C_1. Prove that :

i) $PA_1+PB_1+PC_1 \geq PA+PB+PC$,

ii) $\frac{1}{PA_1}+\frac{1}{PB_1}+\frac{1}{PC_1} \geq \frac{3}{R}$.

T10/264. N is a point on the edge CD of a tetrahedron $ABCD$ (N is distinct from C and D). Let $p(XYZ)$ denote the perimeter of triangle XYZ. Prove that :

i) $NC.p(DAB)+ND.p(CAB) > CD.p(NAB)$,

ii) $\frac{NC}{ND}=\left|\frac{CA^2-CB^2}{DA^2-DB^2}\right|$ when $NA = NB$.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 18

Problem. For any number x let $[x]$ denote, as usual, the integral part of x. Solve the equation

$$x^3-[x]=3.$$

Solution. Let $\{x\}$ be the fractional part of $[x]$, that is, $\{x\}=x-[x]$. It is clear that $0 \leq \{x\} < 1$. Thus, we may rewrite the equation in the form

$x^3-x+\{x\}=3$.

It follows that $x^3-x=3-\{x\}$. Hence

$$2 < x^3-x \leq 3.$$

If $x \geq 2$, then

$$x^3-x=x(x^2-1) \geq 2(4-1)=6.$$

If $0 < x \leq 1$, we have

$$x^3-x < x^3 \leq 1.$$

If $-1 < x \leq 0$, we have

$$x^3-x < -x < 1.$$

If $x \leq -1$, then

$$x^3-x=x(x^2-1) \leq 0.$$

So we can conclude that $1 < x < 2$. Hence $[x]=1$. Now the original equation takes the from

$$x^3-1=3.$$

Therefore, it has the unique solution $x=\sqrt[3]{4}$.

Từ mới.

usual = thông thường (tính từ)
as usual = như thông lệ
part = phần, bộ phận
solve = giải
fractional = phân số (tính từ)
that is = tức là, có nghĩa là (thành ngữ)
clear = rõ ràng
thus = vì vậy
conclude = kết luận (động từ)
original = gốc, ban đầu, khởi thủy (tính từ)
unique = duy nhất

NGÔ VIỆT TRUNG

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH MÔN TOÁN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI - 1998

Đề thi đăng số 263 (5/99)

CÂU I. Bạn đọc tự giải.

CÂU II. 1. Giải phương trình :

$$2\text{tg}x + \text{cotg}2x = 2\sin 2x + \frac{1}{\sin 2x}$$

* Tập xác định: $\begin{cases}\cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}$ $(k \in Z)$

- Đặt $\text{tg}x = t$, do $x \neq k\frac{\pi}{2}$ nên $t \neq 0$, dẫn tới :

$t^4 - 3t^2 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 3$ hoặc $t^2 = 0$ (loại)

$t^2 = 3 \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow \text{tg}x = \pm\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in Z).$

2. Nhân hai vế với 4 và áp dụng công thức góc nhân ba dẫn tới :

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2} \qquad (*)$$

- BĐT (*) rất quen thuộc, bạn đọc tự chứng minh.

CÂU III. 1. Tập xác định :

$$\begin{cases}x^2 + 3x + 2 > 0 \\ x^2 + 7x + 12 > 0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow x \in (-\infty ; -4) \cup (-3 ; -2) \cup (-1 ; +\infty).$

Khi đó ta có :

$\log_2(x+1)(x+4)(x+2)(x+3) = \log_2 24.$

$\Leftrightarrow (x^2+5x+4)(x^2+5x+6) = 24$

* Đặt $x^2+5x = t$ dễ dàng tìm được $t_1 = 0$, $t_2 = -10$.

Với $t_1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = -5$: thỏa mãn. Với $t_2 = -10 \Leftrightarrow x^2+5x+10=0$: vô nghiệm.

2. Áp dụng định lí Viet ta được :

$x_1 + x_2 + x_3 = 1$

$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = a$

$x_1x_2x_3 = -b$

Có $a^2 = (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)^2$

$= x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2 + 2x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3)$

$= x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2 - 2b$

$\geq x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3) - 2b = -b - 2b = -3b.$

$\Rightarrow a^2 + 3b \geq 0$

* Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1x_2 = x_2x_3 = x_3x_1$, vô lý vì 3 nghiệm là phân biệt.

Vậy $a^2 + 3b > 0$.

CÂU IV.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3 - \sqrt{3x-2}}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{(x^3-1) + (1-\sqrt{3x-2})}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1} + \lim_{x\to1}\frac{1-\sqrt{3x-2}}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to1}(x^2+x+1) + \lim_{x\to1}\frac{1-(3x-2)}{(x-1)(1+\sqrt{3x-2})} =$$

$$= \lim_{x\to1}(x^2+x+1) + \lim_{x\to1}\frac{-3}{1+\sqrt{3x-2}}$$

$$= 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

CÂU V.

1. Đường thẳng AB là giao của hai mặt phẳng $z = 0$ và $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$. Suy ra phương trình của chùm mặt phẳng qua AB là :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 + \alpha z = 0 \qquad (1)$$

Điểm D có tọa độ $D\ (a, b, c)$, để mặt phẳng (1) qua D ta phải có $\alpha = -\frac{1}{c}$. Vậy phương trình mặt phẳng (ABD) là:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \frac{z}{c} - 1 = 0 \qquad (2)$$

Khoảng cách từ $C\ (0 ; 0 ; c)$ đến mặt phẳng (ABD) :

$$h = \frac{\left|-\frac{c}{c} - 1\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} = \frac{2abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$$

2. Đường thẳng $CH \perp mp(ABD)$ có phương trình tham số là :

$$x = \frac{1}{a}t,\ y = \frac{1}{b}t,\ z = -\frac{1}{c}t + c \qquad (3)$$

Để tìm giao điểm H ta phải thay (3) vào (2) :

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}t - \frac{1}{c}\left(-\frac{1}{c}t + c\right) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{2a^2b^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \qquad (4)$$

Thay (4) vào (3) ta được tọa độ của H là :

$$x_H = \frac{ab^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2},$$

$$y_H = \frac{2a^2bc^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2},$$

$$z_H = \frac{c(b^2c^2 + c^2a^2 - a^2b^2)}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$$

Để $H \in mp(xOy)$ phải có $z_H = 0$

$\Rightarrow b^2c^2 + c^2a^2 = a^2b^2$

CÂU VIa.

$$I = \int_0^1 \frac{e^x dx}{e^x(e^x+1)} = \int_0^1 \frac{de^x}{e^x(e^x+1)}$$

Đặt $t = e^x$ ta có :

$$I = \int_1^e \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)dt = \ln\frac{t}{t+1}\Big|_1^e = $$

$$= \ln\frac{2e}{e+1}.$$

Câu VIb. (ban A)- Bạn đọc tự chứng minh $tg\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3} = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$

Do $z = (2+\sqrt{3}) + i$ nên $tg\varphi = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = tg\frac{\pi}{12}$ và do z thuộc góc phần tư thứ nhất nên suy ra $\arg z = \varphi = \frac{\pi}{12} + 2k\pi\ (k \in \mathbf{Z})$.

CÂU VIb. (ban B)

Họ nguyên hàm của $f(x) = x(1-x)^{20} = x(x-1)^{20}$ là :

$$F(x) = \frac{(x-1)^{21}(21x+1)}{462} + C$$

HỌC BỔNG TRUNG HỌC 3 ASEAN Ở SINGAPO

Bắt đầu từ 1996 phối hợp với Bộ Giáo dục Việt Nam, Bộ Giáo dục Singapo đã tuyển chọn các học sinh giỏi lớp 9 Việt Nam sang Singapo học Phổ thông trung học 3, 4 và tiền đại học, theo học bổng ASEAN. Các học sinh giỏi được các tỉnh chọn cử đi thi, mỗi tỉnh chọn 2 học sinh. Bài thi gồm có một bài trắc nghiệm trí thông minh, một bài thi tiếng Anh, một bài thi Toán (viết bằng tiếng Anh) và một cuộc phỏng vấn ngắn. Năm 1996 đã có 4 học sinh nam và 4 học sinh nữ trúng tuyển. Ảnh bìa là trường Anglo - Chinese nơi 4 học sinh nam Việt Nam học từ 1996. Năm 1997 có 13 học sinh và 1998 có 21 học sinh Việt Nam được sang Singapo. Năm 1999 đã có 90 hồ sơ được gửi cho các tỉnh chọn 90 học sinh về Hà Nội dự thi. Kì thi dự kiến tổ chức vào tháng 7, 8. Năm học mới ở Singapo bắt đầu vào ngày 2 tháng 1 năm sau.

VKT

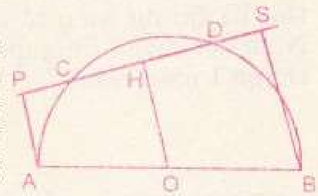
Diễn đàn DẠY VÀ HỌC TOÁN

HÌNH THÀNH PHƯƠNG PHÁP GIẢI QUA MỘT CHUỖI BÀI TOÁN

NGUYỄN VĂN LỘC
(GV trường ĐHSP Vinh, Nghệ An)

Trong dạy học giải các bài toán, mỗi bài toán không chỉ là mục đích mà còn là phương tiện của dạy học, nghĩa là sau khi giải xong mỗi bài toán cần lưu ý chuyển từ tri thức *nội dung* thành tri thức *phương pháp* để học sinh *nhìn thấy* sự thống nhất trong ý tưởng lời giải của các bài toán. Dưới đây là một chuỗi bài toán minh họa cho ý kiến trên.

Bài 1. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và một dây cung CD. Vẽ AP và BS vuông góc với CD tại P và S. Chứng minh $PC = DS$ (Bài 1, tr.10, Hình học 9)



Tri thức về *phương pháp* để giải bài 1 là "Để chứng minh hai đoạn thẳng PC và DS trên một đường thẳng là bằng nhau, ta chứng minh CD và PS có chung trung điểm". Nếu trên hình không vẽ đoạn thẳng $OH \perp CD$ thì học sinh khó thấy hướng giải. Ý tưởng về phương pháp này có thể sử dụng để giải các bài toán sau.

Bài 2. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và dây cung CD. Từ C và D vẽ các đường thẳng vuông góc với CD cắt AB lần lượt tại E và F. Chứng minh $AE = BF$.

Bài 3 (Bài toán đảo của bài 2).

Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Trên đoạn AB xác định hai điểm E và F sao cho $AE = BF$. Qua E và F vẽ hai đường thẳng song song với nhau lần lượt cắt nửa đường tròn tại C và D. Chứng minh $ECDF$ là hình thang vuông.

Bài 4. Cho đường tròn (O), đường kính AB cắt dây cung CD. Vẽ AM, BN vuông góc với CD tại M và N. Chứng minh $CM = DN$.

Bài 5. Cho điểm K nằm giữa hai điểm A và B. Lấy AB, AK, KB làm đường kính dựng các đường tròn có tâm lần lượt là O, O_1, O_2. Qua K vẽ cát tuyến cắt đường tròn (O) tại C, D và cắt các đường tròn (O_1) và (O_2) lần lượt tại M và N. Chứng minh $CM = DN$.

Bài 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hypebol (H) : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. $(a>b>0)$. Đường thẳng (Δ) : $Ax+By+C = 0$ $(A^2+B^2 > 0)$ cắt hypebol (H) tại M, N và cắt hai đường tiệm cận của (H) tại P, Q. Chứng minh $MP = NQ$./.

Về mối quan hệ giữa hai bất đẳng thức CÔSI và BECNULI

LÊ HẢI KHÔI
(Hà Nội)

Bất đẳng thức Côsi :

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n},\ \forall a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0,$$

$\forall n \in \mathbf{N}^*$ (1)

Bất đẳng thức Becnuli :

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx,\ \forall x \geq -1,\ \forall n \in \mathbf{N}^* \quad (2)$$

Như chúng ta đã biết có nhiều cách chứng minh các bất đẳng thức này : trực tiếp hay gián tiếp, dài hay ngắn, đơn giản hay phức tạp, v.v... Dưới đây trình bày cách chứng minh bất đẳng thức này nhờ bất đẳng thức kia.

Giả sử có bất đẳng thức Côsi, ta cần chứng minh (2). Nếu $1 + nx \leq 0$ thì do vế trái của (2) không âm nên bất đẳng thức đúng. Trong trường hợp $1 + nx > 0$, xét n-1 số 1 và số $1 + nx$, theo bất đẳng thức Côsi ta có :

$$\frac{1 + 1 + \ldots + 1 + (1 + nx)}{n} \geq \sqrt[n]{1.1\ldots1.(1 + nx)},$$

tức là được (2).

Ngược lại, giả sử có bất đẳng thức Becnuli ta cần chứng minh (1). Đặt $1+x = t$, ta có thể viết (2) dưới dạng :

$$t^j \geq 1 + j(t - 1),\ \forall t \geq 0,\ \forall j \in \mathbf{N}^*, \text{ hay là}$$

$$t^j \geq jt - (j - 1),\ \forall t \geq 0,\ \forall j \in \mathbf{N}^*. \quad (3)$$

Xét n số không âm $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Trong trường hợp có một số nào đó bằng 0 bất đẳng thức (1) là hiển nhiên, do đó có thể giả thiết rằng $a_j > 0$, $\forall j = 1, 2, \ldots, n$.

Kí hiệu $S_j = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_j}{j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Khi đó các bất đẳng thức (3) với $t = \dfrac{S_j}{S_{j-1}}$, $j = 2, \ldots, n$

cho ta $\left(\dfrac{S_j}{S_{j-1}}\right)^j \geq j\,\dfrac{S_j}{S_{j-1}} - (j - 1)$.

Do đó, $S_j^j \geq \left[\, jS_j - (j - 1)S_{j-1}\right] S_{j-1}^{j-1} = a_j S_{j-1}^{j-1}$, $j = 2, 3, \ldots, n$.

Vậy là chúng ta có :

$$S_n^n \geq a_n S_{n-1}^{n-1} \geq a_n a_{n-1} S_{n-2}^{n-2} \geq \ldots \geq a_n a_{n-1} \ldots a_2 S_1 = a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1. \quad (4)$$

Thay $S_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ vào (4) và khai căn ta được bất đẳng thức Côsi./.

VÀI NÉT VỀ DẠY VÀ HỌC Ở SINGAPO VÀ MALAYSIA

VŨ KIM THỦY

Singapo là một quốc đảo chỉ rộng 646km^2 với 3 triệu dân. Thế nhưng khu trường phổ thông trung học Trung-Anh lại rộng bằng cỡ trường Đại học Sư phạm Hà Nội của ta. Trong trường có một sân vận động lớn, 2 bể bơi đạt tiêu chuẩn thi đấu thể thao và đủ các loại sân bóng chuyền, bóng rổ, cầu lông, ... Singapo có 14 trường trung học tất cả. Ở mỗi trường đều học 2 ngoại ngữ chính trong ba thứ tiếng Anh, Trung, Pháp và có thể thêm thứ tiếng khác tùy học sinh chọn. Học sinh Singapo học trung học xong thì thi tốt nghiệp và dùng kết quả này để tuyển chọn vào các trường tiền đại học. Hệ tiền đại học học trong 2 năm. Hết hệ tiền đại học thì vào đại học. Đại học ở Singapo chỉ chia làm năm khối chính : Tự nhiên, Xã hội, Luật, Y, Kinh tế.

Malaysia tuy bình quân đầu người thấp hơn Singapo nhưng cũng là một con rồng châu Á. Malaysia có tòa tháp đôi cao nhất thế giới, có tháp truyền hình cao thứ tư thế giới, có cầu qua eo biển ra đảo Pênang dài tới 13km. Malaysia và Singapo đều có sân bay vào loại hiện đại nhất thế giới với quy mô 100 cửa.

Với điều kiện kinh tế như vậy nên cả 2 nước đều có tiềm lực để đầu tư cho Giáo dục. Cũng có người cho rằng sở dĩ Singapo được như ngày hôm nay là vì cách đây ba thập kỉ đã có chiến lược đúng về con người. Các cuộc thi Olimpic toán Quốc tế, cả 2 nước này đều chưa đạt thành tích cao. Đó là ở mũi nhọn. Còn trong cuộc điều tra gần đây trên một số nước có nền giáo dục phát triển việc dạy toán ở đây được đánh giá là phát triển nhất, kết quả xếp số 1.

Ở cấp trung học sách toán ở Singapo chia làm 2 loại phục vụ 2 môn tạm dịch là Toán và Toán nâng cao. Sách in khổ 19×27, khá dày và màu sắc đẹp. Sách toán của Malaysia cũng vậy nhưng khác là còn có sách in bằng tiếng Ba-hasa. Sách của Singapo là sách chỉ dùng Anh ngữ ở tất cả các môn học.

Không chia thành các môn học Số, Đại, Hình... như Việt Nam, sách ở hai nước này chỉ gọi là Toán. Các phần trong sách được chia thành các vấn đề và có rất nhiều nội dung được trình bày. Các khái niệm gắn kết với cuộc sống được học đầy đủ như lãi đơn, lãi kép, tỉ xích trên bản đồ, biểu đồ cột, biểu đồ tròn, tiền và tỉ giá, các bài toán vận tốc - thời gian... Dĩ nhiên các khái niệm khác như các phép biến hình, vectơ, định thức, ma trận, đạo hàm, vi phân, tích phân... đều có cả.

Chúng được sắp xếp thứ tự khác với Việt Nam và chia thành hàng chục vấn đề trong một năm học chứ không chia thành 3, 4 chương một môn như ở ta. Nhìn chung ít có các chứng minh khó. Các bài tập tính toán rất được chú trọng. Học sinh được học sử dụng thành thạo máy tính bỏ túi và máy vi tính để học toán. Rất nhiều phần mềm phục vụ cho việc dạy và học toán. Khi lên lớp dạy việc sử dụng máy thì máy tính cầm tay hay máy vi tính của thầy giáo đều được chiếu lên màn hình lớn để học sinh dễ theo dõi. Hầu hết các trường đều có phòng Toán. Tại đây, học sinh có đủ các mô hình, bảng biểu, các đồ vật để học và chơi theo kiểu toán. Ở hai nước này không có hệ thống trường lớp chuyên Toán như Việt Nam. Các học sinh giỏi tham gia các Câu lạc bộ về Toán, học sinh tự xét khả năng của mình để đăng kí thi học sinh giỏi. Các học sinh đạt kết quả trong các kì thi đó được tặng những kỉ niệm chương rất đẹp (thường là bằng kim loại, có tên học sinh in trên đó).

Khác với đề thi ở Việt Nam, đề thi của hai nước này thường dài. Đề thi thường gồm cả trắc nghiệm và cả tự luận. Trung bình một bài thi phải gồm 20 bài toán trở lên. Bởi thế trong đề thi có thể bao gồm được hầu hết các vấn đề đã học trong chương trình. Trong năm học rất ít có bài kiểm tra. Các bài kiểm tra tùy theo yêu cầu của môn hay từng thời gian mà cho điểm tối đa khác nhau từ 20 đến 100 điểm. Sau đó tùy số % đạt được mà phân ra A, B, C hoặc A_1, B_2, C_3... Mỗi bài kiểm tra được tính là bao nhiêu % nhất định cho điểm tổng kết cuối cùng. Thi cử ở đây khá nặng vì học 1 học kì thì thi chương trình 1 học kì, hết 2 học kì thì chương trình cả 2 học kì đều phải học, cứ như thế, không được bỏ phần nào. Nhiều trường trung học ở Singapo còn gửi kết quả các kì thi quan trọng về trường đại học Cambrit ở Anh để chấm. Học sinh ở Singapo thích được học đại học ở Anh.

Nhiều hoạt động ngoài trời như đo, vẽ, khảo sát, làm báo cáo thường xuyên và tập trình bày trước lớp đã giúp cho học sinh của 2 nước này phát triển toàn diện và rất tự tin.

Có thể nói rằng những bài tập trên **Toán học và Tuổi trẻ** của Việt Nam là quá khó với các bạn Singapo và Malaysia nhưng lên đại học và ra đời thì chưa hẳn sinh viên Việt Nam còn giữ được vị thế như trong các kì thi Olimpic toán. Đó cũng là một câu hỏi cần tìm lời giải đáp./.

DÀNH CHO CÁC BẠN CHUẨN BỊ THI VÀO ĐẠI HỌC

SỬ DỤNG HỆ ĐỐI XỨNG 2 ẨN KIỂU II ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

NGUYỄN LƯU
(Trường PTTH năng khiếu Hà Tĩnh)

Bài viết này trình bày một số phương trình ở bậc phổ thông trung học mà cách giải trực tiếp chúng phức tạp. Nếu biết dựa vào tính chất của các hàm số ngược, sử dụng các phép đặt ẩn phụ thích hợp ta có thể đưa về một hệ đối xứng kiểu II với cách giải quen thuộc.

Ví dụ 1. Giải phương trình $(8\cos^3 x + 1)^3 = 162\cos x - 27$

Giải. Đặt $2\cos x = X$ (*), $|X| \le 2$ có

$$(X^3+1)^3 = 81X - 27.$$

Tiếp tục đặt $X^3 + 1 = 3Y$

Khi đó có hệ $\begin{cases} X^3 + 1 = 3Y & (1) \\ Y^3 + 1 = 3X & (2) \end{cases}$

Nếu $X > Y$ thì $X^3 + 1 > Y^3 + 1$ nên từ (1) và (2) ta có $3Y > 3X$ hay $Y > X$, mâu thuẫn. Nếu $X < Y$ thì các bất đẳng thức trên cùng đổi chiều nên cũng không thỏa mãn. Do đó $X = Y$. Từ đó ta có $X^3 - 3X + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 3x = -\dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \ (k \in Z)$$

Từ cách giải bài toán trên ta có thể giải lớp phương trình dạng :

$$[(f(x))^3 + 1]^3 = 81f(x) - 27$$

Ví dụ 2. Chứng minh rằng với mọi a phương trình $a^3\cos^4 x + \sin x - a = 0$ luôn có nghiệm.

Giải. Phương trình đã cho tương đương với :

$$a^3(1 - \sin^2 x)^2 + \sin x - a = 0$$

$$\Leftrightarrow a(a - a\sin^2 x)^2 + \sin x - a = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = a - a(a - a.\sin^2 x)^2$$

Đặt $\sin x = t$ với $t \in [-1 ; 1]$ ta có :

$$t = a - a(a - at^2)^2.$$

Tiếp tục đặt $u = a - at^2$.

Khi đó ta có hệ :

$$\begin{cases} u = a - at^2 \\ t = a - au^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u-t)[(u+t)a - 1] = 0 \\ u = a - at^2 \end{cases}$$

Hệ tương đương với tuyển 2 hệ sau

$$\begin{cases} u = t \\ at^2 + t - a = 0 \ (*) \end{cases} \quad \text{(I)}$$

$$\begin{cases} (u+t)a - 1 = 0 \\ u = a - at^2 \end{cases} \quad \text{(II)}$$

Xét (I) : Gọi vế trái của (*) là $f(t)$ thì $f(-1).f(1) = -1 < 0$ với mọi a. Do tính chất liên tục của $f(t)$ nên (*) luôn có nghiệm $t \in (-1 ; 1)$. Suy ra với $u=t$ phương trình đã cho có nghiệm với mọi a (do đó không cần xét (II) nữa).

Ví dụ 3. Giải phương trình : $\sin x = \arcsin x$

Giải. Đặt $\arcsin x = y$. Điều kiện : $|x| \le 1$; $|y| \le 1$ ta có hệ :

$$\begin{cases} \sin x = y \\ \sin y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = y \\ \sin x - \sin y = y - x \end{cases}$$

Vì $x, y \in [-1 ; 1]$ nên :

Nếu $x > y$ thì $\sin x - \sin y > 0 > y - x$

Nếu $x < y$ thì $\sin x - \sin y < 0 < y - x$

Vậy hệ đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases} y = x \\ \sin x = x \ (*) \\ |x| \le 1 \ ; \ |y| \le 1 \end{cases}$$

Xét hàm số $f(x) = \sin x - x$ với $x \in [-1 ; 1]$

$f'(x) = \cos x - 1 \le 0 \Rightarrow$ hàm số luôn nghịch biến trên R nên (*) $\Leftrightarrow f(x) = f(0) \Leftrightarrow x = 0$. Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Ví dụ 4. Giải phương trình :

$$\ln(\sin x + 1) = e^{\sin x} - 1$$

Giải. Điều kiện : $\sin x \ne -1$

$$\Leftrightarrow x \ne -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

Đặt $\sin x = t$ với $-1 < t \le 1$ ta có phương trình : $\ln(t+1) = e^t - 1$. Lại đặt $\ln(t+1) = y \Rightarrow t + 1 = e^y$ ta được hệ :

$$\begin{cases} e^t = y + 1 \\ e^y = t + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^t = y + 1 \\ e^t - e^y = y - t \ (*) \end{cases}$$

Nếu $t > y$ thì $e^t - e^y > 0 > y - t$

Nếu $t < y$ thì $e^t - e^y < 0 < y - t$

Vậy (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} y = t \\ e^t = t + 1 \ (**) \end{cases}$

(Xem tiếp trang 22)

Trả lời bạn đọc

? 1) Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số ngược nhau thì phương trình $f(x) = g(x)$ có tương đương với phương trình $f(x) = x$ không ? Khi đi thi đại học có được sử dụng không ?

N.K.H (Hà Nội)

2) Tại sao trong bài "Thêm một ứng dụng của hàm số ngược" (số tháng 3 năm 1998), tác giả lại phải thêm điều kiện $f(x)$ hoặc $f^{-1}(x)$ đồng biến để có $f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x \\ x \in D_f \cap D_{f^{-1}} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} f^{-1}(x) = x \\ x \in D_f \cap D_{f^{-1}} \end{cases}$

Em cảm thấy thừa giả thiết này ?

Trần Thái Hà

(11A₁, THCB Uông Bí, Quảng Ninh)

Đáp: Đây không chỉ là băn khoăn của 2 bạn, mà rất nhiều bạn đều có chung ý nghĩ này. Trước hết lưu ý các bạn là những định lí không có trong sách giáo khoa (phần lí thuyết) thì khi làm bài thi các bạn không được sử dụng mà chưa phát biểu và chứng minh lại. Giả thiết $f(x)$ hoặc $f^{-1}(x)$ đồng biến là *không thể thiếu được.*

Thí dụ : hàm số $y = f(x) = -x$ nghịch biến với $x \in R$ và có hàm số ngược $y = f^{-1}(x) = -x$ với $x \in R$. Xét phương trình $f(x) = f^{-1}(x)$ tức là $-x = -x$ thỏa mãn với mọi $x \in R$, nhưng phương trình $f(x) = x$ tức là $-x = x$ chỉ có nghiệm $x = 0$.

? 1) Trong một số tài liệu có viết $\vec{a} \,//\, \vec{b}$. Như vậy đúng hay sai ?

Lê Đức Hưng

(PTTH Đô Lương 3, Nghệ An)

2) Có phép chia một vectơ cho một vectơ không ? Tại sao trong chương trình không thấy nói đến mà nhiều tài liệu vẫn viết $\frac{\vec{a}}{\vec{b}}$?

Phạm Đức Toàn

(10P - PTTH Marie Curie - TPHCM)

Đáp: Không có quan hệ "hai vectơ song song với nhau" và phép toán "vectơ chia cho vectơ". Tuy nhiên nhiều người đang viết một cách "lạm dụng" các kí hiệu $\vec{a} \,//\, \vec{b}$ và $\frac{\vec{a}}{\vec{b}}$. Các bạn nên tránh viết kiểu như vậy khi đi thi và mong các tác giả, các nhà biên tập lưu ý điều này để tránh hoang mang cho người đọc, dẫn đến học sinh có thể bị mất điểm khi trình bày bài thi.

? Lời giải thí dụ 1 ở mục "Dành cho các bạn chuẩn bị thi vào đại học" (số tháng 10, năm 1998) là sai có phải không ? Em thấy hàm số $y = x + \sqrt{1 - x^2} - a$ có $y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$ mà $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ thuộc $[-1\,,\,1]$ nên bảng biến thiên phải khác và kết quả sẽ khác.

Nguyễn Thành Trung

(12A, PTTH Yên Lạc, Vĩnh Phúc)

Đáp: Lời giải đăng trên tạp chí là đúng. Em có biết em sai ở đâu không ? Khi em giải phương trình $y' = 0$ dẫn đến $\sqrt{1 - x^2} = x$ em đã thiếu điều kiện $x \ge 0$ khi bình phương hai vế. Lưu ý rằng $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \ge 0 \\ a = b^2 \end{cases}$ Mong các bạn đi thi chớ quên khi gặp tình huống này.

? Có sách viết $|A| = \begin{cases} A \text{ nếu } A \ge 0 \\ -A \text{ nếu } A < 0 \end{cases}$

nhưng có sách lại viết $|A| = \left[\begin{array}{l} A \text{ nếu } A \ge 0 \\ -A \text{ nếu } A < 0 \end{array}\right.$

Tương tự có sách viết $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \text{ nếu } x \ge 0 \\ 2 \text{ nếu } x < 0 \end{cases}$

có sách lại viết $f(x) = \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} \text{ nếu } x \ge 0 \\ 2 \text{ nếu } x < 0 \end{array}\right.$

Cách viết nào đúng ?

Lê Thanh Tùng

(10K, PTTH Hậu Lộc, Thanh Hóa)

Đáp: Không được viết theo cách viết thứ hai. Đề nghị các tác giả lưu ý và các em tránh dùng kí hiệu sai. Cách viết trong *sách giáo khoa* là chuẩn.

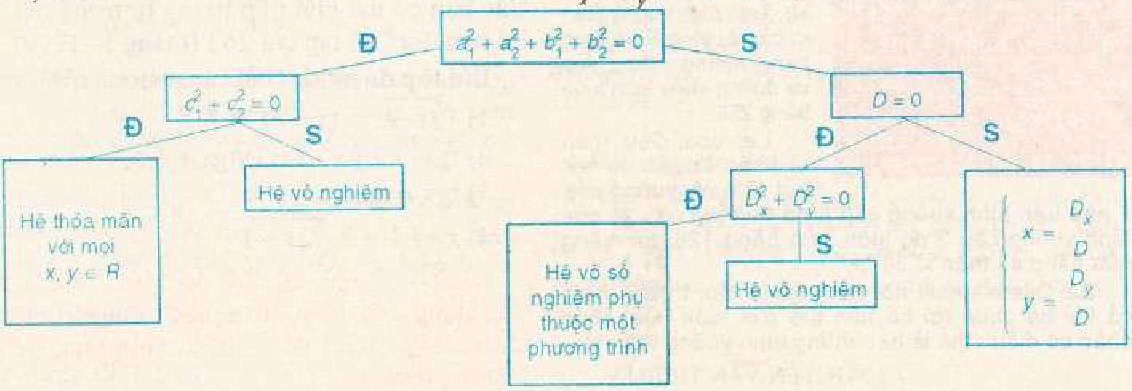
? Khi giải và biện luận hệ $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ nhiều tài liệu nói rằng với $D = D_x = D_y = 0$ thì hệ vô số nghiệm, nhưng hệ $\begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ 0x + 0y = 1 \end{cases}$ có $D = D_x = D_y = 0$ lại vô nghiệm !

Lại còn việc ứng dụng vào xét vị trí tương đối của hai đường thẳng $a_1x + b_1y = c_1$ và $a_2x + b_2y = c_2$ nữa ! Mong tòa soạn giải thích sớm !

Nguyễn Thanh Quang

(GV Toán, PTTH Vạn Tường, Bình Sơn, Quảng Ngãi)

Đáp: Xin lỗi bạn vì đến bây giờ TS mới trả lời. Nhiều tài liệu hiện nay xét thiếu khả năng $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0$ nên mới dẫn đến sự hiểu sai khi $D = D_x = D_y = 0$. Để minh bạch, xin đưa ra sơ đồ biện luận :



Khi áp dụng bài toán biện luận hệ vào bài toán biện luận vị trí tương đối của 2 đường thẳng thì phải lưu ý điều kiện tồn tại các đường thẳng là $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$ và $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$ để tránh rơi vào tình trạng luẩn quẩn. Bạn có thể cùng anh em giải và biện luận bài toán trong đề 30 của Bộ đề thi tuyển sinh để rõ ràng hơn.

? Bài toán : "Gọi E là tập hợp các số gồm 2 chữ số khác nhau được lập từ các phần tử của tập hợp $G = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$. Lấy ngẫu nhiên đồng thời 2 phần tử của E. Tính xác suất của biến cố A : được 2 số mà tổng chia hết cho 9". Bài này đã được giải đại ý là : "Không gian mẫu E có 36 phần tử. Lấy 2 phần tử của E thì có $C_{36}^2 = 630$ cách. Như vậy không gian mẫu F gồm các phần tử có dạng $X = \{\overline{ab} ; \overline{cd}\}$ với $\overline{ab}, \overline{cd} \in E$ và $\overline{ab} \neq \overline{cd}$ sẽ có 630 phần tử. Vì $\overline{ab} + \overline{cd} \vdots 9 \Rightarrow a+b+c+d \vdots 9$ nên ta tìm số các tập con $\{a ; b ; c ; d\}$ của G thỏa mãn điều kiện này thì được 4 tập con $\{3 ; 4 ; 5 ; 6\}$; $\{0 ; 1 ; 2; 6\}$; $\{0 ; 1 ; 3 ; 5\}$; $\{0 ; 2 ; 3 ; 4\}$. Sau đó lại chia mỗi tập con này thành 2 tập con không giao nhau gồm 2 phần tử. Từ đó dẫn đến số phần tử của biến cố A là 30 nên xác suất cần tìm là $P(A) = 30/630$". Em thấy lời giải đã yêu cầu a, b, c, d khác nhau ; trong khi đó rất có thể xảy ra $a = c$ hoặc $b = d$, để $\overline{ab} \neq \overline{cd}$ thì chỉ cần $a \neq c$ hoặc $b \neq d$ là đủ. Như thế số phần tử của biến cố A sẽ phải là 46 và $P(A) = 46/430$. Lời giải mà em gửi đến TS lại trong một cuốn sách đáng tin cậy. Ý kiến của TS thế nào ? hãy cho em biết gấp, vì sắp thi rồi.

Trần Hoàng Anh
74, Đường Láng, Hà Nội

Đáp: Ý kiến rất đúng. TS đã trao đổi với cán bộ biên tập cuốn sách này. Cám ơn em đã phát hiện. Chúc em thi tốt.

L.T.N

HÌNH VUÔNG ...

(Tiếp theo trang 24)

...Còn việc giải những hình vuông siêu thần kì chỉ cần đến logic hoạt bát và sắc sảo đến kì lạ, cùng với tính trực giác rất mạnh của nhà nữ toán học cao tuổi Kathleen Ollerenshaw. Cách đây khoảng 15 năm, bà đã bắt đầu viết công trình đầu tiên về những hình vuông cấp 4 và 8, theo một phương pháp dựng tổng quát. Tất cả những tính chất của hình vuông thần kì đều có trên những hình vuông siêu thần kì cấp cao, như hình vuông cấp 8 (hình bên), dựng theo phương pháp của Kathleen Ollerenshaw (nay 86 tuổi, đang chuẩn bị viết hồi kí). Trên hình vuông thần kì cấp 8, tổng 8 số theo hàng ngang, hàng dọc và đường chéo luôn luôn bằng 252.

0	62	2	60	11	53	9	55
15	49	13	51	4	58	6	56
16	46	18	44	27	37	25	39
31	33	29	35	20	42	22	40
52	10	54	8	63	1	61	3
59	5	57	7	48	14	50	12
36	26	38	24	47	17	45	19
43	21	41	23	32	30	34	28

Lại còn điều thần kì khác là nếu ta xét bất kì hình vuông cấp 2 nào trên hình vuông cấp 8 đó thì tổng các số của hình vuông cấp 2 đó luôn luôn bằng 126, tức bằng nửa hằng số thần kì 252.

Bà Ollerenshaw nói rằng trong mọi trường hợp, cả khi bà chưa rời bỏ hẳn thế giới toán học, chắc chắn có điều : thế là hết những hình vuông thần kì.

NGUYỄN VĂN THIÊM
(theo Sciences et Avenir tháng 12.1998)

SỬ DỤNG ...

(Tiếp theo trang 20)

Xét hàm số $f(t) = e^t - t - 1$ với $t \neq -1$

$f'(t) = e^t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 0.$

Lập bảng biến thiên

t	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$	‖	$\searrow$	0	$\nearrow$	

Từ đó $t = 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình (**). $\Rightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$ $(k \in Z)$

Tương tự như ví dụ 1 ta có thể giải lớp phương trình dạng : $\ln[f(x) + 1] = e^{f(x)} - 1$

Ví dụ 5. Cho $f(x) = x^2 + 2x + m$. Biện luận số nghiệm của phương trình $f(f(x)) = x$.

Giải. Đặt $y = f(x)$ ta có hệ

$$\begin{cases} f(y) = x \\ f(x) = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 2y + m = x \\ x^2 + 2x + m = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x + m = y \\ y^2 - x^2 + 3y - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x + m = y \ (1) \\ (y - x)(y + x + 3) = 0 \ (2) \end{cases}$$

Thế (1) vào (2) ta có phương trình đã cho tương đương với

$$(x^2+x+m)(x^2+3x+m+3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -x^2 - x \\ m = -x^2 - 3x - 3 \end{array} \right.$$

Số nghiệm của phương trình ban đầu đúng bằng số điểm chung của đường thẳng $y = m$ với hợp của 2 đồ thị $y = -x^2 - x$ và $y = -x^2 - 3x - 3$. Các bạn có thể giải tiếp tương tự trong bài "trả lời bạn đọc" số tạp chí 263 (tháng 5 -1999).

Bài tập đề nghị: Giải các phương trình sau:

1) $\sqrt[3]{x-9} = (x-3)^3 + 6$

2) $\mathrm{tg}x^2 - 2\mathrm{tg}x - 3 = \sqrt{\mathrm{tg}x + 3}$

3) $\mathrm{tg}x = \mathrm{arctg}x$

4) $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x - 1}$

LTS. Các bạn có thể đọc bài "Thêm một ứng dụng của hàm số ngược" đăng trong tạp chí số 249 (3/98) để có cách nhìn khác về các phương trình này./.

ĐẠI HỘI LẦN THỨ TƯ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Ngày 30 tháng 5 năm 1999, Hội Toán học Việt Nam đã tổ chức Đại hội Đại biểu toàn quốc lần thứ tư tại Học viện Kỹ thuật Quân sự (Nghĩa Đô, Hà Nội). Đại hội đã được đón tiếp nhiều vị khách quý : Viện sĩ Vũ Tuyên Hoàng, Chủ tịch và PGS. PTS Hồ Uy Liêm, Tổng Thư ký Liên hiệp các hội Khoa học và Kỹ thuật Việt Nam... Về dự đại hội có 164 đại biểu, trong đó có 112 đại biểu có học vị PTS, TS ; 26 đại biểu là GS và 50 đại biểu là PGS. Các đại biểu ở khắp mọi miền đất nước, trong đó có những trung tâm hoạt động nghiên cứu và giảng dạy toán học lớn như : Hà Nội, TP Hồ Chí Minh, Thừa Thiên Huế, Nghệ An, Bình Định, v.v...

GS. TS Đỗ Long Vân, Chủ tịch Hội Toán học Việt Nam đã đọc bài diễn văn quan trọng đánh giá tình hình chung về vị trí của Toán học trong sự phát triển của xã hội loài người trong giai đoạn hiện nay, sự phát triển của nền toán học Việt Nam trong giai đoạn vừa qua và các nguyên nhân lớn tác động đến sự phát triển của Toán học Việt Nam trong mấy chục năm qua.Tuy nhiên, GS cũng đã chỉ ra những yếu kém của nền toán học nước ta cũng như những khó khăn, xuống cấp, thậm chí có nguy cơ tụt hậu và hậu quả của tình hình này. Bài diễn văn đã nêu lên những hoạt động chính của Hội trong nhiệm kỳ qua, những cố gắng của Hội trong việc phát triển các Chi hội địa phương, Chi hội chuyên ngành, tổ chức các sinh hoạt học thuật, nghề nghiệp một cách sôi động. Nhiều Hội nghị, Hội thảo quốc gia và quốc tế đã được tổ chức tại nhiều nơi trên đất nước thu hút không chỉ các nhà nghiên cứu trong nước mà còn được sự quan tâm, tham gia của nhiều nhà nghiên cứu ở nước ngoài. Niềm vinh hạnh lớn và niềm tự hào của cả cộng đồng toán học là cố GS. Lê Văn Thiêm và GS. Hoàng Tụy đã được Nhà nước tặng Giải thưởng Hồ Chí Minh đợt I. Đại hội đánh giá những cố gắng lớn của các tạp chí Acta Mathematica Vietnamica, Vietnam Journal of Mathematics, Toán học và Tuổi trẻ. Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ trong những năm gần đây đã có nhiều cải tiến đáng kể cả về nội dung và hình thức đáp ứng đông đảo bạn đọc và đã được nhận hai Huân chương Lao động hạng nhì.

Đại hội cũng khẳng định thành tích của học sinh Việt Nam trong các kỳ thi Olympic toán quốc tế, những cố gắng của nhiều sinh viên các trường đại học trong các kỳ thi Olympic toán trong nước.

Đại hội đã đưa ra những định hướng lớn cho hoạt động của Hội trong nhiệm kỳ tới (1999-2004) và góp ý sửa đổi Điều lệ của Hội cho thích hợp với giai đoạn mới.

Nhiều đại biểu đã sôi nổi góp ý về các mặt hoạt động của Hội và mong rằng Hội ngày càng có vị trí xứng đáng trong sự nghiệp phát triển của đất nước. Đại hội đã bầu ra Ban Chấp hành Trung ương Hội của nhiệm kỳ mới gồm 17 người và bầu trực tiếp Chủ tịch, Tổng Thư ký Hội, GS. TS Đỗ Long Vân và GS. TS Phạm Thế Long đã được tái cử vào hai chức vụ quan trọng này.

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ xin chúc mừng thành công của Đại hội và mong rằng trong giai đoạn mới, Hội Toán học Việt Nam sẽ quan tâm hơn, có nhiều biện pháp đầu tư để tạp chí ngày càng phát triển.

P.V.

VĨNH PHÚC với TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Sáng 19.5.1999 tỉnh Vĩnh Phúc đã tổ chức lễ phát thưởng cho học sinh giỏi, các giáo viên có học sinh giỏi và ra mắt Ban chấp hành lâm thời Hội khuyến học. Dự buổi lễ có Bí thư tỉnh ủy, Phó chủ tịch UBND tỉnh, các Giám đốc các sở và lãnh đạo các ban, ngành trong tỉnh.

Với 47 giải quốc gia Vĩnh Phúc là một trong những địa phương có thành tích cao trong kì thi năm nay. Đội tuyển toán có 3 giải nhì và 4 giải ba. 8 học sinh được chọn thi vòng 2 ở các môn Toán, Vật lí, Hóa học, Sinh học. Năm học này Vĩnh Phúc tổ chức cho học sinh tiểu học thi học sinh giỏi từ tất cả các trường, lên cấp huyện rồi tỉnh. Học sinh lớp 9 được đăng kí thi giỏi nhiều môn.

Vĩnh Phúc rất chú trọng tới phong trào giải toán trên Toán học và Tuổi trẻ. Tổng kết năm 1998 có 5 học sinh Vĩnh Phúc được nhận giải thưởng của THVTT. Trong buổi lễ phát thưởng này tỉnh đã tặng mỗi học sinh được giải THVTT một bằng khen và phần thưởng 100000đ. Tạp chí THVTT cũng đã tặng quà cho 5 bạn.

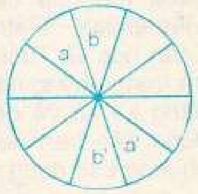
Với khoảng 700 độc giả thường xuyên làm việc với tạp chí THVTT, Vĩnh Phúc là địa phương đang có nhiều bạn đọc của THVTT. Đặc biệt Vĩnh Tường và Yên Lạc là hai huyện có nhiều bạn gửi bài giải cho mục Giải bài kì trước.

VKT

Giải đáp bài

VIẾT SỐ VÀO HÌNH TRÒN

Giả sử trong hai hình quạt kề nhau ta viết hai số a, b và trong hai hình quạt đối xứng qua tâm hình tròn viết hai số a', b' thì theo giả thiết phải có : $a+b = a'+b'$. Giả sử $a > a'$ thì $b' > b$ và $a-a' = b'-b$. Từ đó suy ra hiệu số dương của mỗi cặp số đối xứng là một số không đổi.



Kí hiệu các số được viết từ 1 đến 10 là a_i và a'_i, $a_i > a'_i$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) ta có :
$a_1 - a'_1 = a_2 - a'_2 = a_3 - a_3 = a_4 - a'_4 = a_5 - a'_5 = k$.

Nếu k chẵn thì cặp a_i, a'_i phải cùng chẵn hay cùng lẻ nên không thể có 5 số chẵn, 5 số lẻ. Mặt khác k phải nhỏ hơn các số a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 nên k chỉ có thể lấy giá trị là 1, 3, 5. Thử thấy k=3 không thỏa mãn.

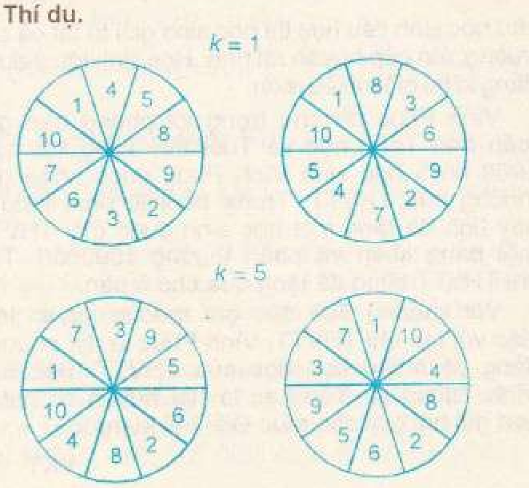
Với k=1 có các cặp (1,2), (3,4), (5,6), (7,8), (9,10).

Với k=5 có các cặp (1,6), (2,7), (3,8), (4,9), (5,10).

Xét k=1. Vì các số nằm trên vòng tròn nên không mất tính tổng quát, đầu tiên ta chọn cố định cặp (1,2) và xét các số đứng kề theo chiều kim đồng hồ. Số đứng kề với a'_1=1 phải là số lớn trong 4 cặp số còn lại nên có 4 cách chọn, gọi số đó là a_2. Số đứng kề với a_2 phải là số nhỏ trong 3 cặp số còn lại nên có 3 cách chọn, gọi số đó là a'_3. Số đứng kề a'_3 phải là số lớn trong 2 cặp số còn lại nên có 2 cách chọn, gọi số đó là a_4. Số đứng kề a_4 phải là số nhỏ trong 1 cặp số còn lại nên có 1 cách chọn. Như vậy có 4.3.2.1 = 4! = 24 cách viết.

Tương tự với k=5 có 24 cách viết. Tổng cộng là 48 cách viết số vào hình tròn.

Thí dụ.



Nhận xét. 1. Hai bạn *Cao Ngọc Cường*, 9A, Diễn Thọ, Diễn Châu, **Nghệ An** và *Phạm Minh Tuấn*, 11A$_1$, chuyên thị xã Cao Lãnh, **Đồng Tháp** có đáp án là 48 cách viết số. Bạn Tuấn in ra đủ 48 cách viết. Bạn *Trần Minh Quang*, 10T, ĐHSP Vinh, **Nghệ An** đã cho một chương trình máy tính để viết ra 42 cách. Bạn *Tô Thị Xâm* T3, ĐHSP Quy Nhơn, **Bình Định** nêu hướng giải và 48 cách viết.

Bạn *Đặng Bình Phương*, 9A$_6$, Trần Đăng Ninh, **Nam Định** đưa ra được 32 cách viết số. Các bạn *Phạm Thanh Bình*, 10A13, Thái Phiên, **Hải Phòng**, *Lê Thị Hòa*, 10T, Nguyễn Huệ, **Hà Tây**, *Phạm Cung Sơn*, 8E, Đặng Thái Mai, TP Vinh, **Nghệ An**, *Huỳnh Anh Vũ*, 8/2, Nguyễn Khuyến, **Đà Nẵng** đã đưa ra được 24 cách viết.

2. Rất nhiều bạn gửi đáp án đúng với số lượng từ 1 cho đến 20 cách viết.

BÌNH PHƯƠNG

SINH NĂM NÀO ?

Trong đợt hội giảng toàn tỉnh vừa qua các học sinh làm quen với một cô giáo dạy toán và muốn biết tuổi của cô. Cô giáo nói : "Nếu đọc ngược số năm sinh của tôi thì được một số có 4 chữ số. Lấy số đó trừ đi số năm sinh của tôi thì được một kết quả lớn gấp 2 lần kết quả khi ta cũng làm như thế với năm tôi 16 tuổi".

Em nào giỏi toán hãy giải đáp hộ.

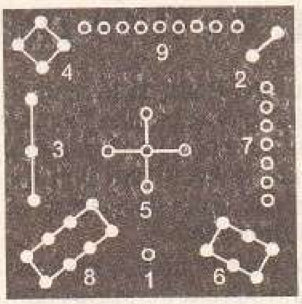
ĐOÀN KIM SANG

BẠN CÓ BIẾT

Hình vuông thần kì cấp 8

Chúng ta đều đã biết hình vuông thần kì cấp 3 (hình bên), trong đó tổng ba số theo hàng dọc, hàng ngang, đường chéo đều bằng 15. Theo truyền thuyết, hình vuông này có từ thế kỉ 23 trước công nguyên, tương ứng với biểu đồ sông LuO, Trung quốc, trên mai rùa thần (xem hình). Đó là hình vuông thần kì duy nhất còn lại.

4	9	2
3	5	7
8	1	6



Sau định lí Fermat và phỏng đoán của Kepler, bài toán về những hình vuông siêu thần kì cấp cao hơn cũng là một pháo đài toán học đã được giải quyết. Khác với hai trường hợp đầu, trường hợp bài toán hình vuông cấp cao không sử dụng đến máy điện toán. Hiệu lực và tốc độ tính nhanh của máy điện toán chỉ cần đến đúng lúc để tăng nhanh vài trình tự tính toán...

(Xem tiếp trang 22)

Thi Vui Hè '99

Mùa hè đã sang. Bạn sẽ chơi hay học ? Câu lạc bộ xin mời các bạn hãy tham gia cuộc thi Vui Hè 1999 với tinh thần chơi mà học. Đề thi gồm 6 câu được đăng trong hai số tạp chí 264 và 265 (tháng 6 và 7). Kết quả cuộc thi sẽ công bố vào dịp đầu năm học mới. Bài dự thi của các bạn học sinh ngoài địa chỉ lớp, trường, huyện, thành, tỉnh ; nhớ ghi cho địa chỉ nơi ở. Tất cả những ai yêu thích (dù không là học sinh) đều có thể tham gia dự thi, xin ghi rõ địa chỉ cơ quan hoặc nơi ở.

Câu 1. Số trong câu nào ?

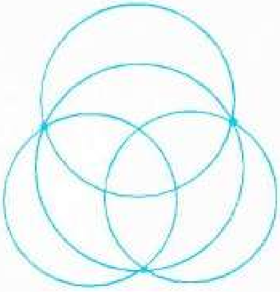
Trong bảng ô vuông ở hình bên, có những ô đã ghi một con số nào đó, có những ô bị tô màu và còn những ô trống.

1					1			
	3				1			
		1				5		
		7						
			9			10		
3		7		9				

Bạn hãy điền vào các ô trống mỗi ô đúng một từ sao cho mỗi dòng trong bảng là một câu quen thuộc (đọc cả các số và các từ trong dòng).

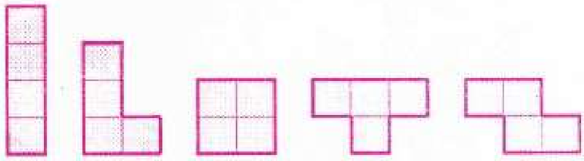
Câu 2. Đánh số các miền.

Có 4 đường tròn trên mặt phẳng chia mặt phẳng thành 11 phần, trong đó có 10 miền kín (như hình bên). Các bạn thử đánh số từ 1 đến 10 vào trong các miền kín sao cho tổng các số trong mỗi hình tròn là như nhau.



Câu 3. Ghép hình

Khi ghép 4 ô vuông bằng nhau được các hình chữ I, L, O, T, Z như hình dưới



Bạn hãy tìm *nhiều cách* để ghép 2 hình, mỗi hình được ghép bởi hình chữ *I, L, O, T, Z*, thành một hình chữ nhật 5 dòng 8 cột (diện tích 40 ô vuông).

KẾT QUẢ SỐ 262

Tất cả các "nhà phân tích" đều phát hiện đúng "bệnh" của lời giải 1 và khẳng định sự đúng đắn của lời giải 2.

Sai lầm của lời giải thứ hai, khi cho $\sqrt[3]{1-2\sqrt{6}} = \sqrt[6]{(1-2\sqrt{6})^2}$.

Ta có thể thấy ngay $\sqrt[3]{1-2\sqrt{6}} < 0 < \sqrt[6]{(1-2\sqrt{6})^2}$. Cần lưu ý rằng : $\sqrt[6]{(1-2\sqrt{6})^2} = \sqrt[3]{|1-2\sqrt{6}|} = \sqrt[3]{2\sqrt{6}-1}$.

Vì quá nhiều bạn "trúng" nên xin "bốc thăm" để được 5 bạn may mắn hơn : *Nguyễn Hoàng Phương*, 8C, THCS chuyên Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột ; *Nguyễn Trọng Quý*, lớp T1D, ĐHSP TP Hồ Chí Minh ; *Bùi Hồng Phong*, 12A, THPT Nghĩa Hưng B, Nghĩa Hưng, Nam Định ; *Trần Quang Anh*, 9A, THCS Ngô Mây, Phù Cát, Bình Định ; *Vương Duy Hữu*, 7A, trường phổ thông dân tộc nội trú huyện Vị Xuyên, Hà Giang.

KIHIVI

KỲ NÀY

MỘT TÍNH CHẤT MỚI CỦA TAM GIÁC ?

Với tam giác *ABC* bất kì, ta có thể chứng minh được : $\cos A.\cos B.\cos C = -1$. Thật vậy : với điểm *O* bất kì nằm trong tam giác, ta dựng các vectơ đơn vị $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ có gốc là *O* và lần lượt vuông góc với *AB, AC, BC*. Khi đó ta có :

$\vec{e_1}.\vec{e_2} = |\vec{e_1}|.|\vec{e_2}|.\cos(\vec{e_1}, \vec{e_2})$

$= \cos(\pi - A) = -\cos A$ (1)

Tương tự :

$\vec{e_2}.\vec{e_3} = -\cos C$ (2) và $\vec{e_3}.\vec{e_1} = -\cos B$ (3).

Nhân từng vế của (1), (2), (3) có :

$\cos A.\cos B.\cos C = -\vec{e_1}.\vec{e_2}.\vec{e_2}.\vec{e_3}.\vec{e_3}.\vec{e_1}$

$= -|\vec{e_1}|^2.|\vec{e_2}|^2.|\vec{e_3}|^2 = -1$

Phải chăng đây là tính chất mới trong tam giác ?

NGUYỄN QUANG HƯNG
Lớp Toán 4A, ĐHSP Huế

Trường PTTH Lam Sơn - Thanh Hóa

Collège Thanh Hóa được thành lập 9/1931, đến năm 1943 đổi tên thành Collège Đào Duy Từ. Năm 1950 đổi tên thành trường phổ thông cấp 3 Lam Sơn. Trường tự hào là nơi đào tạo những tài năng đã thành đạt, tiêu biểu là Trần Mai Ninh, Thôi Hữu, Lê Văn Giang, Nguyễn Trinh Tiếp, Phan Diễn, Nguyễn Văn Hiệu, Vũ Tuyên Hoàng, Đỗ Nguyên Phương, Lương Ngọc Toản, Nguyễn Dy Niên, Đoàn Quỳnh, Nguyễn Tài Lương, Trần Quốc Vượng, Nguyễn Khắc Dương...

Những thầy giáo giỏi từng giảng dạy ở trường Lam Sơn như : Đoàn Nồng, Đinh Xuân Lâm, Trịnh Ngọc Thái, Cao Hữu Nhu, Lê Thước, Lê Hải Châu, Vũ Lê Thống ...

Từ khi đảm nhận đào tạo khối học sinh năng khiếu đến nay, trường có 620 giải Quốc gia và đặc biệt có 17 học sinh dự thi Olympic Quốc tế 5 môn : Toán, Lý, Hóa, Sinh, Tin. Có 13 học sinh đoạt giải Olympic Quốc tế là : Nguyễn Thúc Anh (Toán-1984), Nguyễn Văn Quang (Toán-1987), Phạm Hưng (Lý - 1987), Vũ Xuân Hạ (Toán-1990), Đỗ Ngọc Minh và Ngô Diên Hy (Toán-1991), Bùi Anh Vân (Toán-1993), Cao Văn Hạnh (Toán-1995), Nguyễn Duy Hùng và Nguyễn Như Thông (Hóa-1996), Bùi Thanh Vân (Sinh-1996), Vũ Thị Lan Hương (Hóa-1998), Đỗ Quang Yên (Toán-1998); Các thầy giáo có công bồi dưỡng học sinh đoạt giải Quốc tế là : Phạm Ngọc Quang (Toán), Nguyễn Anh Dũng (Toán), Lưu Xuân Tình (Toán), Lê Văn Hoành (Lý), Lê Văn Quỳnh (Hóa), Cao Giang (Hóa), Trần Kiên (Sinh)... Hàng năm trường có khoảng 60 giải học sinh giỏi quốc gia THPT. Nhiều học sinh của khối chuyên Lam Sơn đã bảo vệ thành công luận án tiến sĩ, phó tiến sĩ, hiện nay đang giữ các trọng trách ở các trường đại học, các viện nghiên cứu, các cơ quan trung ương và lãnh đạo tỉnh Thanh Hóa.

Năm 1995 trường được Nhà nước tặng thưởng Huân chương lao động hạng nhì. Các lớp chuyên toán đầu tiên của tỉnh Thanh Hóa được đặt tại trường cấp 3 Lam Sơn vào năm 1968. Các thầy giáo đã và đang dạy chuyên toán PTTH Lam Sơn là : Trần Lê Chức, Dương Tiến Vinh, Đỗ Khắc Vinh, Mỵ Duy Thọ, Phạm Ngọc Quang, Nguyễn Anh Dũng, Hoàng Khắc Thành, Lưu Xuân Tình, Nguyễn Thanh Hùng, Ngô Đức Minh, Đào Hồng Anh, Đỗ Đức Bình, Nguyễn Xuân Hùng, Nguyễn Viết Long. Từ năm 1968 đến nay có 90 giải Quốc gia môn toán lớp 12 và 50 giải Quốc gia môn toán lớp 9.

Hiện nay tổ Toán - Tin học có 19 giáo viên, thầy giáo Nguyễn Văn Hưng làm tổ trưởng. Nhà giáo ưu tú Phạm Ngọc Quang - hiệu trưởng nhà trường trưởng thành từ một giáo viên dạy chuyên toán.

Các thầy giáo Phạm Ngọc Quang, Nguyễn Anh Dũng, Lưu Xuân Tình, Nguyễn Xuân Hùng, Ngô Đức Minh thường xuyên cộng tác với Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ.

ISSN : 0866-0853
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT66M9

Chế bản tại Tòa soạn
In tại Nhà máy in Diên Hồng, 57 Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 6 năm 1999

Giá : 3.000đ
Ba nghìn đồng