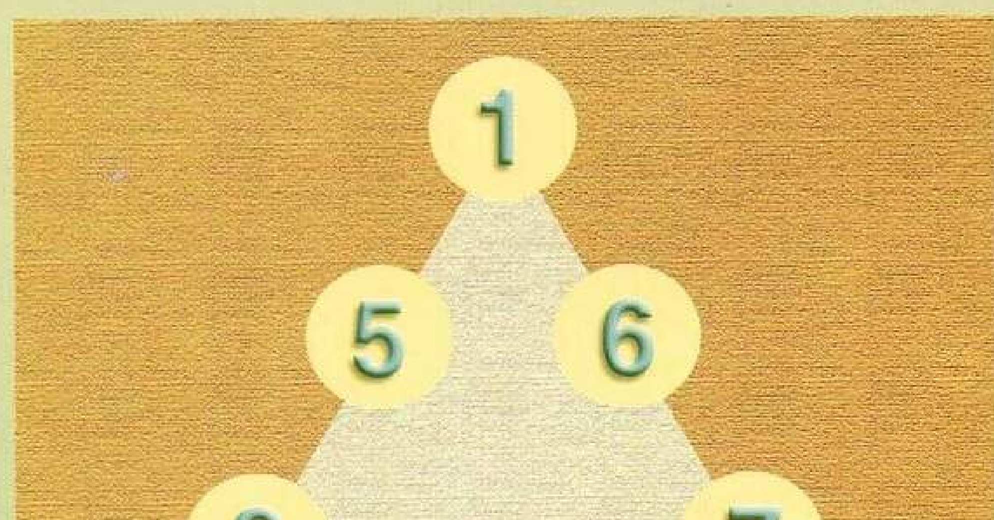
VŨ HỮU BÌNH

NÂNG CAO VÀ PHÁT TRIỂN TOÁN 6

TẬP MỘT



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

VŨ HỮU BÌNH

NÂNG CAO VÀ PHÁT TRIỂN

TOÁN 6

TẬP MỘT

(Tái bản lần thứ mười)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

LỜI NÓI ĐẦU

Cuốn sách **Nâng cao và phát triển Toán 6** *thuộc bộ sách* **Nâng cao và phát triển Toán bậc Trung học cơ sở** *nhằm cung cấp cho bạn đọc, các học sinh khá và giỏi toán, các thầy cô giáo dạy Toán một tài liệu tham khảo đào sâu môn Toán dưới dạng bài tập nâng cao và các chuyên đề có kèm theo bài tập vận dụng.*

Khi biên soạn cuốn sách này, tác giả sử dụng các cuốn : **Toán nâng cao lớp 6** *và* **Một số vấn đề phát triển Toán 6***, đồng thời có chỉnh lí và bổ sung để phù hợp với chương trình năm 2002 của Bộ Giáo dục và Đào tạo.*

Cuốn sách chia thành hai tập :

Tập I gồm các bài tập về số tự nhiên và số nguyên với 9 chuyên đề (Điền chữ số ; Dãy các số viết theo quy luật ; Đếm số ; Sơ lược về tập hợp ; Tìm chữ số tận cùng của một luỹ thừa ; Hệ ghi số với cơ số tuỳ ý ; Một số vấn đề lịch sử về số nguyên tố ; Các vấn đề nâng cao về tính chia hết, ước và bội ; Số chính phương) và các bài tập hình học với một chuyên đề (Tính số điểm, số đường thẳng, số đoạn thẳng).

Tập II gồm các bài tập về phân số với 4 chuyên đề (Dãy các phân số viết theo quy luật ; Bất đẳng thức ; Một số phương pháp giải toán số học ; Toán chuyển động) và các bài tập hình học với một chuyên đề (Tính số đo góc).

Cuối sách có **Bài đọc thêm** *về lịch sử toán học.*

Cuốn sách có những đặc điểm sau :

1. Tất cả các đề mục của chương trình đều có các bài tập tương ứng, đó là các bài tập cơ bản và tiêu biểu để bồi dưỡng học sinh lớp 6 về môn Toán.

2. Thông qua hệ thống bài tập và các chuyên đề, cuốn sách trang bị cho bạn đọc cả kiến thức, kĩ năng lẫn phương pháp suy luận. Trình tự sắp xếp các bài tập, sự phân loại bài tập, sự phân tích lời giải của chúng nhằm giúp bạn đọc không chỉ giải được từng bài mà còn biết cách giải nhiều loại bài trong các bài toán lớp 6 vốn rất đa dạng về thể loại và phong phú về cách giải. Trong cuốn sách có những bài toán vui nhằm gây hứng thú học toán, chúng thực sự mang ý nghĩa của một bài toán với đầy đủ các lập luận cần thiết.

*3. Cuốn sách trình bày các vấn đề đào sâu chương trình môn Toán trong phạm vi các kiến thức học ở lớp 6. Các lời giải được cân nhắc sao cho vừa phù hợp với đặc điểm của học sinh lớp 6, vừa đảm bảo tính chặt chẽ, chính xác mà môn Toán đòi hỏi. Tuy nhiên, khi đề cập đến các vấn đề liên quan đến chương trình, trong cuốn sách còn có những vấn đề khó và những bài toán khó, các bài toán này được ghi kèm dấu *, không yêu cầu các em học* *sinh lớp 6 phải nắm vững ngay tất cả các vấn đề này, các em có thể trở lại nghiên cứu chúng khi học lên các lớp trên.*

4. Để thuận tiện cho bạn đọc, trong sách có một số kí hiệu, chẳng hạn 30 (2) cho biết ví dụ hoặc bài tập 30 ứng với kiến thức của §2 và ∽ để chỉ các ví dụ và bài tập tương ứng ở phần chuyên đề.

5. Cùng với mục đích giúp bạn đọc rèn luyện khả năng giải toán, bên cạnh những bài tập được giải kĩ và được chỉ dẫn về phương pháp, một số bài tập chỉ có những gợi ý cần thiết để bạn đọc tự giải.

Tác giả hi vọng rằng cuốn sách sẽ đem đến cho bạn đọc nhiều điều bổ ích khi nghiên cứu chương trình nâng cao về môn Toán ở lớp 6 và chân thành cảm ơn bạn đọc về những ý kiến đóng góp cho cuốn sách này.

Tác giả

VŨ HỮU BÌNH

PHẦN SỐ HỌC

Phần I

TÓM TẮT LÍ THUYẾT VÀ BÀI TẬP ỨNG DỤNG

Chương I

ÔN TẬP VÀ BỔ TÚC VỀ SỐ TỰ NHIÊN

§1. TẬP HỢP CÁC SỐ TỰ NHIÊN

Khái niệm tập hợp là một khái niệm cơ bản, ta hiểu tập hợp thông qua các ví dụ (xem *Sơ lược về tập hợp* ở phần *Chuyên đề*).

Tập hợp các số 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; ... gọi là tập hợp **N** các số tự nhiên. Ta xác định trên **N** một thứ tự như sau :

a) 0 là số tự nhiên nhỏ nhất ;

b) a < b khi và chỉ khi điểm a ở bên trái điểm b trên tia số.

Để dễ dàng ghi và đọc các số tự nhiên, người ta dùng hệ ghi số : Khi được một số đơn vị nhất định ở một hàng, ta thay nó bằng một đơn vị ở hàng liền trước nó.

Hệ ghi số thường dùng nhất là hệ thập phân. Trong hệ thập phân, người ta dùng mười kí hiệu để ghi số, đó là các chữ số 0, 1, 2, ..., 9, và cứ mười đơn vị ở một hàng thì làm thành một đơn vị ở hàng liền trước nó.

Trong hệ thập phân, ta có :

$\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$;

$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0} = a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + \ldots + a_2.10^2 + a_1.10 + a_0$.

Ví dụ 1. Viết các tập hợp sau rồi tìm số phần tử của mỗi tập hợp đó :

a) Tập hợp A các số tự nhiên x mà 8 : x = 2.

b) Tập hợp B các số tự nhiên x mà x + 3 < 5.

c) Tập hợp C các số tự nhiên x mà x − 2 = x + 2.

d) Tập hợp D các số tự nhiên x mà x : 2 = x : 4.

e) Tập hợp E các số tự nhiên x mà x + 0 = x.

Giải : a) A = {4}, có một phần tử.

b) B = {0 ; 1}, có hai phần tử.

c) C = ∅, không có phần tử nào.

d) D = {0}, có một phần tử.

e) E = {0 ; 1 ; 2 ; 3 ; ...}, có vô số phần tử (E chính là N).

Ví dụ 2. Viết các tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử của nó :

a) Tập hợp A các số tự nhiên có hai chữ số, trong đó chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị là 2.

b) Tập hợp B các số tự nhiên có ba chữ số mà tổng các chữ số bằng 3.

Giải : a) A = {97 ; 86 ; 75 ; 64 ; 53 ; 42 ; 31 ; 20}.

b) B = {300 ; 201 ; 210 ; 102 ; 111 ; 120}.

Ví dụ 3. Tìm số tự nhiên có năm chữ số, biết rằng nếu viết thêm chữ số 2 vào đằng sau số đó thì được số lớn gấp ba lần số có được bằng cách viết thêm chữ số 2 vào đằng trước số đó.

Giải :

Cách 1. Gọi số phải tìm là $\overline{abcde}$, ta có phép nhân :

$$\begin{array}{r} \overline{2abcde} \\ \times \quad 3 \\ \hline \overline{abcde2} \end{array}$$

Lần lượt tìm từng chữ số ở số bị nhân từ phải sang trái : 3e tận cùng 2 nên e = 4, ta có 3 . 4 = 12, nhớ 1 sang hàng chục ;

3d + 1 tận cùng 4 nên d = 1 ;

3c tận cùng 1 nên c = 7, ta có 3 . 7 = 21, nhớ 2 sang hàng nghìn ;

3b + 2 tận cùng 7 nên b = 5, ta có 3 . 5 = 15, nhớ 1 sang hàng chục nghìn ;

3a + 1 tận cùng 5 nên a = 8, ta có 3 . 8 = 24, nhớ 2 sang hàng trăm nghìn ;

3 . 2 + 2 = 8.

Ta được :

$$\begin{array}{r} 285714 \\ \times \quad 3 \\ \hline 857142 \end{array}$$

Cách 2. Đặt $\overline{abcde} = x$, ta có $\overline{abcde2} = 3 . \overline{2abcde}$

$$\begin{aligned} \text{hay} \qquad 10x + 2 &= 3 . (200000 + x) \\ 10x + 2 &= 600000 + 3x \\ 7x &= 599998 \\ x &= 85714. \end{aligned}$$

Số phải tìm là 85714.

Chú ý : 1) Khai thác cách giải 1, ta có bài toán : Tìm số tự nhiên nhỏ nhất có chữ số đầu tiên ở bên trái là 2, khi chuyển chữ số 2 này xuống cuối cùng thì số đó tăng gấp ba lần.

Giải : Gọi số phải tìm là $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1}$, trong đó $a_n = 2$,

ta có :

$$\begin{array}{r} 2\, a_{n-1}\, a_{n-2} \dots a_2\, a_1 \\ \times \qquad 3 \\ \hline a_{n-1}\, a_{n-2} \dots a_2\, a_1\, 2 \end{array}$$

Giải như cách 1 và cứ tiếp tục cho đến khi được chữ số 2 ở số bị nhân thì dừng lại, ta được số nhỏ nhất phải tìm là 285714.

2) Khai thác cách giải 2, ta có bài toán tổng quát : Tìm số tự nhiên có năm chữ số, biết rằng nếu viết thêm một chữ số vào đằng sau số đó thì được số lớn gấp ba lần số có được nếu viết thêm chính chữ số ấy vào đằng trước số đó.

Giải : Đặt $\overline{abcde} = x$, gọi y là chữ số viết thêm vào,

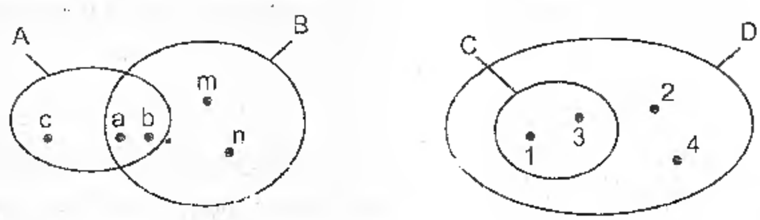
ta có:

$$\begin{aligned} \overline{abcdey} &= 3 . \overline{yabcde} \\ 10x + y &= 3(100000y + x) \\ 7x &= 299999y \\ x &= 42857y. \end{aligned}$$

Do x có năm chữ số nên y chỉ có thể bằng 1 hoặc 2. Với $y = 1$ ta có $x = 42857$; với $y = 2$ ta có $x = 85714$.

BÀI TẬP

1. Các tập hợp A, B, C, D được cho bởi sơ đồ sau (h.1) :



Hình 1

Viết các tập hợp A, B, C, D bằng cách liệt kê các phần tử của tập hợp.

2. Hãy xác định các tập hợp sau bằng cách chỉ ra tính chất đặc trưng của các phần tử thuộc tập hợp đó :

a) A = {1 ; 3 ; 5 ; 7 ; ... ; 49} ;

b) B = {11 ; 22 ; 33 ; 44 ; ... ; 99} ;

c) C = {tháng 1, tháng 3, tháng 5, tháng 7, tháng 8, tháng 10, tháng 12}.

3. Tìm tập hợp các số tự nhiên x, sao cho :

a) $x + 3 = 4$; b) $8 - x = 5$;

c) $x : 2 = 0$; d) $0 : x = 0$;

e) $5 . x = 12$.

4. Tìm các số tự nhiên a và b, sao cho :

$$12 < a < b < 16.$$

5. Viết các số tự nhiên có bốn chữ số trong đó có hai chữ số 3, một chữ số 2, một chữ số 1.

6. Với cả hai chữ số I và X, viết được bao nhiêu số La Mã ? (mỗi chữ số có thể viết nhiều lần, nhưng không viết liên tiếp quá ba lần).

7. a) Dùng ba que diêm, xếp được các số La Mã nào ?

b) Để viết các số La Mã từ 4000 trở lên, chẳng hạn số 19520, người ta viết XIXmDXX (chữ m biểu thị *một nghìn*, m là chữ đầu của từ *mille*, tiếng Latinh là một nghìn). Hãy viết các số sau bằng chữ số La Mã :

7208, 121512.

8. Tìm số tự nhiên có tận cùng bằng 3, biết rằng nếu xoá chữ số hàng đơn vị thì số đó giảm đi 1992 đơn vị.

9. Tìm số tự nhiên có sáu chữ số, biết rằng chữ số hàng đơn vị là 4 và nếu chuyển chữ số đó lên hàng đầu tiên thì số đó tăng gấp bốn lần.

10. Cho bốn chữ số a, b, c, d khác nhau và khác 0. Lập số tự nhiên lớn nhất và số tự nhiên nhỏ nhất có bốn chữ số gồm cả bốn chữ số ấy. Tổng của hai số này bằng 11330. Tìm tổng các chữ số $a + b + c + d$.

11. Cho ba chữ số a, b, c sao cho $0 < a < b < c$.

a) Viết tập hợp A các số tự nhiên có ba chữ số gồm cả ba chữ số a, b, c.

b) Biết tổng hai số nhỏ nhất trong tập hợp A bằng 488. Tìm ba chữ số a, b, c nói trên.

12. Tìm ba chữ số khác nhau và khác 0, biết rằng nếu dùng cả ba chữ số này lập thành các số tự nhiên có ba chữ số thì hai số lớn nhất có tổng bằng 1444.

∽ *Ví dụ :* 50.

Bài tập : 264 đến 268, 274, 275.

§2. CÁC PHÉP TÍNH VỀ SỐ TỰ NHIÊN

Ta xác định trên **N** hai phép toán : phép cộng và phép nhân. Phép cộng có ba tính chất : giao hoán, kết hợp, cộng với số 0. Phép nhân có ba tính chất : giao hoán, kết hợp, nhân với số 1. Giữa phép nhân và phép cộng có quan hệ : phép nhân phân phối đối với phép cộng. Giữa thứ tự và phép toán có quan hệ : $a < b \Rightarrow a + c < b + c$, $a < b \Rightarrow ac < bc$ (với $c > 0$).

Trong phạm vi số tự nhiên, phép trừ chỉ thực hiện được khi số bị trừ lớn hơn hoặc bằng số trừ, phép chia chỉ thực hiện được khi số bị chia chia hết cho số chia. Với mọi cặp số tự nhiên a và b bất kì ($b \neq 0$), bao giờ cũng tồn tại duy nhất hai số tự nhiên q và r sao cho $a = bq + r$ với $0 \leqslant r < b$. Nếu $r = 0$, ta được phép chia hết, khi đó q là thương. Nếu $r \neq 0$, ta được phép chia có dư, khi đó q là thương và r là số dư trong phép chia a cho b.

Ví dụ 4. Cho $A = 137 . 454 + 206$, $B = 453 . 138 - 110$. Không tính giá trị của A và B, hãy chứng tỏ rằng $A = B$.

Giải : Chú ý rằng $454 = 453 + 1$ và $138 = 137 + 1$. Do đó :

$$A = 137 . (453 + 1) + 206 = 137 . 453 + 137 + 206 = 137 . 453 + 343,$$

$$B = 453 . (137 + 1) - 110 = 453 . 137 + 453 - 110 = 137 . 453 + 343.$$

Vậy $A = B$.

Ví dụ 5*. Tìm kết quả của phép nhân :

$$A = \underbrace{33\ldots3}_{50 \text{ chữ số}} . \underbrace{99\ldots9}_{50 \text{ chữ số}}$$

Giải :

Viết $\underbrace{99\ldots9}_{50 \text{ chữ số}}$ thành một hiệu rồi áp dụng tính chất phân phối của phép nhân đối với phép trừ :

$$A = \underbrace{33\ldots3}_{50 \text{ chữ số}} . (1\underbrace{00\ldots00}_{50 \text{ chữ số}} - 1)$$

$$= \underbrace{33\ldots3}_{50 \text{ chữ số}}\underbrace{00\ldots0}_{50 \text{ chữ số}} - \underbrace{33\ldots3}_{50 \text{ chữ số}}$$

Đặt phép tính trừ :

$$\begin{array}{r} 33\ldots3\,3\,00\ldots00 \\ -\qquad\qquad 33\ldots33 \\ \hline \underbrace{33\ldots3}_{49 \text{ chữ số}}\,2\,\underbrace{66\ldots6}_{49 \text{ chữ số}}\,7 \end{array}$$

Vậy $A = \underbrace{33\ldots3}_{49 \text{ chữ số}}\,2\,\underbrace{66\ldots6}_{49 \text{ chữ số}}\,7$.

Ví dụ 6*. Tổng của hai số tự nhiên gấp ba hiệu của chúng. Tìm thương của hai số tự nhiên ấy.

Giải : Cách 1. Gọi hai số tự nhiên đã cho là a và b ($a > b$). Ta có :

$$a + b = 3(a - b)$$

nên $\qquad a + b = 3a - 3b$.

Suy ra $4b = 2a$, tức là $2b = a$.

Vậy $\qquad a : b = 2$.

Cách 2. Gọi hiệu của hai số đã cho là x, tổng của chúng bằng 3x.

Số nhỏ bằng : $\dfrac{3x - x}{2} = x$.

Số lớn bằng : $\dfrac{3x + x}{2} = 2x$.

Thương của hai số : $2x : x = 2$.

Ví dụ 7. Khi chia số tự nhiên a cho 54, ta được số dư là 38. Chia số a cho 18, ta được thương là 14 và còn dư. Tìm số a.

Giải : Từ phép chia thứ nhất ta có $a = 54x + 38$ (1), từ phép chia thứ hai ta có $a = 18 . 14 + r$ (2), trong đó $x, r \in \mathbb{N}$ và $0 < r < 18$. Từ (1) ta có :

$a = 54x + 38 = 18 . 3x + 18 . 2 + 2 = 18 . (3x + 2) + 2$. Như vậy $r = 2$ và $a = 18 . 14 + 2 = 254$.

Ví dụ 8*. Chứng minh rằng A là một luỹ thừa của 2, với :

$$A = 4 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{20}.$$

Giải : $\qquad A = 4 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{20}$

$$2A = 8 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{20} + 2^{21}.$$

Suy ra : $2A - A = 2^{21} + 8 - (4 + 2^2)$

Vậy $\qquad A = 2^{21}$.

BÀI TẬP

Cộng và trừ

13. Có thể viết được hay không chín số vào một bảng vuông 3×3, sao cho : Tổng các số trong ba dòng theo thứ tự bằng 352, 463, 541 ; tổng các số trong ba cột theo thứ tự bằng 335, 687, 234 ?

14. Cho chín số xếp vào 9 ô thành một hàng ngang, trong đó số đầu tiên là 4, số cuối cùng là 8 và tổng ba số ở ba ô liền nhau bất kì bằng 17. Hãy tìm chín số đó.

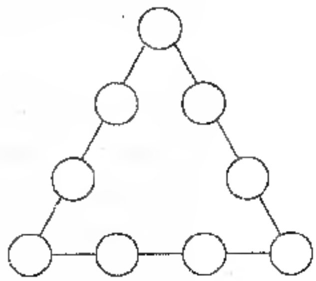
15. Tìm số có ba chữ số, biết rằng chữ số hàng trăm gấp bốn lần chữ số hàng đơn vị và nếu viết số ấy theo thứ tự ngược lại thì nó giảm đi 594 đơn vị.

16. Thay các dấu * bởi các chữ số thích hợp :

$$* * * * - * * * = * *$$

biết rằng số bị trừ, số trừ và hiệu đều không đổi nếu đọc mỗi số từ phải sang trái. (Ví dụ : số 135 nếu đọc từ phải sang trái thì được số 531).

17. Hãy xếp chín số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 vào các hình tròn đặt trên các cạnh của tam giác (h.2), sao cho tổng các số trên cạnh nào của tam giác cũng bằng 17.



Hình 2

18. Hiệu của hai số là 4. Nếu tăng một số gấp ba lần, giữ nguyên số kia thì hiệu của chúng bằng 60. Tìm hai số đó.

Nhân và chia

19. Tìm hai số, biết rằng tổng của chúng gấp 5 lần hiệu của chúng, tích của chúng gấp 24 lần hiệu của chúng.

20. Tìm hai số, biết rằng tổng của chúng gấp 7 lần hiệu của chúng, còn tích của chúng gấp 192 lần hiệu của chúng.

21. Tích của hai số là 6210. Nếu giảm một thừa số đi 7 đơn vị thì tích mới là 5265. Tìm các thừa số của tích.

22. Bạn Bảo làm một phép nhân, trong đó số nhân là 102. Nhưng khi viết số nhân, bạn đã quên không viết chữ số 0 nên tích bị giảm đi 21870 đơn vị so với tích đúng. Tìm số bị nhân của phép nhân đó.

23. Một học sinh nhân 78 với số nhân là số có hai chữ số, trong đó chữ số hàng chục gấp ba lần chữ số hàng đơn vị. Do nhầm lẫn bạn đó viết đổi thứ tự hai chữ số của số nhân, nên tích giảm đi 2808 đơn vị so với tích đúng. Tìm số nhân đúng.

24. Một học sinh nhân một số với 463. Vì bạn đó viết các chữ số tận cùng của các tích riêng ở cùng một cột nên tích bằng 30524. Tìm số bị nhân.

25. Hãy chứng tỏ rằng hiệu sau có thể viết được thành một tích của hai thừa số bằng nhau : 11111111 – 2222.

26. Chỉ ra hai số khác nhau sao cho nếu nhân mỗi số với 7 thì ta được kết quả là các số gồm toàn các chữ số 9.

27*. Tìm kết quả của phép nhân sau :

$$\underbrace{33\ldots3}_{50 \text{ chữ số}} \cdot \underbrace{33\ldots3}_{50 \text{ chữ số}}$$

28. Chứng minh rằng các số sau có thể viết được thành một tích của hai số tự nhiên liên tiếp :

a) 111 222 ; b) 444 222.

29. Tìm hai số tự nhiên có thương bằng 35, biết rằng nếu số bị chia tăng thêm 1056 đơn vị thì thương bằng 57.

Chia có dư

30. Tìm số bị chia và số chia, biết rằng : Thương bằng 6, số dư bằng 49, tổng của số bị chia, số chia và số dư bằng 595.

31. Một phép chia có thương bằng 4, số dư bằng 25. Tổng của số bị chia, số chia và số dư bằng 210. Tìm số bị chia và số chia.

32. Trong một năm, có ít nhất bao nhiêu ngày chủ nhật ? Có nhiều nhất bao nhiêu ngày chủ nhật ?

33. Ngày 19 – 8 – 2002 vào ngày thứ hai. Tính xem ngày 19 – 8 – 1945 vào ngày nào trong tuần ?

34. Tìm thương của một phép chia, biết rằng nếu thêm 15 vào số bị chia và thêm 5 vào số chia thì thương và số dư không đổi.

35. Tìm thương của một phép chia, biết rằng nếu tăng số bị chia 90 đơn vị, tăng số chia 6 đơn vị thì thương và số dư không đổi.

36. Tìm thương của một phép chia, biết rằng nếu tăng số bị chia 73 đơn vị, tăng số chia 4 đơn vị thì thương không đổi, còn số dư tăng 5 đơn vị.

37. Xác định phép chia, biết rằng số bị chia, số chia, thương và số dư là bốn số trong các số sau :

a) 3, 4, 16, 64, 256, 772.

b) 2, 3, 9, 27, 81, 243, 567.

38. Khi chia một số tự nhiên gồm ba chữ số như nhau cho một số tự nhiên gồm ba chữ số như nhau, ta được thương là 2 và còn dư. Nếu xoá một chữ

số ở số bị chia và xoá một chữ số ở số chia thì thương của phép chia vẫn bằng 3 nhưng số dư giảm hơn trước là 100. Tìm số bị chia và số chia lúc đầu.

39. Trong một phép chia có dư, số bị chia gồm bốn chữ số như nhau, số chia gồm ba chữ số như nhau, thương bằng 13 và còn dư. Nếu xoá một chữ số ở số bị chia, xoá một chữ số ở số chia thì thương không đổi, còn số dư giảm hơn trước là 100 đơn vị. Tìm số bị chia và số chia lúc đầu.

Lũy thừa. Phối hợp các phép tính

40. Tính :

a) $4^{10} . 8^{15}$; b) $4^{15} . 5^{30}$; c) $27^{16} : 9^{10}$;

d) $A = \dfrac{72^3 \times 54^2}{108^4}$; e) $B = \dfrac{3^{10} . 11 + 3^{10} . 5}{3^9 . 2^4}$.

41. Tính giá trị của các biểu thức :

a) $\dfrac{2^{10} . 13 + 2^{10} . 65}{2^8 . 104}$;

b) $(1 + 2 + 3 + ... + 100) . (1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 10^2) . (65 . 111 - 13 . 15 . 37)$.

42. Tìm số tự nhiên x, biết rằng :

a) $2^x . 4 = 128$; b) $x^{15} = x$;

c) $(2x + 1)^3 = 125$; d) $(x - 5)^4 = (x - 5)^6$.

43. Cho $A = 3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{100}$.

Tìm số tự nhiên n, biết rằng $2A + 3 = 3^n$.

44. Tìm số tự nhiên có ba chữ số, biết rằng bình phương của chữ số hàng chục bằng tích của hai chữ số kia và số tự nhiên đó trừ đi số gồm ba chữ số ấy viết theo thứ tự ngược lại bằng 495.

45. Tính nhanh :

a) $19 . 64 + 76 . 34$;

b) $35 . 12 + 65 . 13$;

c) $136 . 68 + 16 . 272$;

d) $(2 + 4 + 6 + ... + 100) . (36 . 333 - 108 . 111)$;

e) $19991999 . 1998 - 19981998 . 1999$.

46. Không tính cụ thể các giá trị của A và B, hãy cho biết số nào lớn hơn và lớn hơn bao nhiêu ?

a) $A = 1998 . 1998$; $B = 1996 . 2000$.

b) $A = 2000 . 2000$; $B = 1990 . 2010$.

c) $A = 25 . 33 - 10$; $B = 31 . 26 + 10$.

d) $A = 32 . 53 - 31$; $B = 53 . 31 + 32$.

47. Tìm thương của phép chia sau mà không tính kết quả cụ thể của số bị chia và số chia :

$$\frac{37 . 13 - 13}{24 + 37 . 12}.$$

48. Tính :

a) $A = \dfrac{101 + 100 + 99 + 98 + ... + 3 + 2 + 1}{101 - 100 + 99 - 98 + ... + 3 - 2 + 1}$;

b) $B = \dfrac{3737 . 43 - 4343 . 37}{2 + 4 + 6 + ... + 100}$.

49. Vận dụng tính chất các phép tính để tìm các kết quả bằng cách nhanh chóng :

a) $1990 . 1990 - 1992 . 1988$;

b) $(1374 . 57 + 687 . 86) : (26 . 13 + 74 . 14)$;

c) $(124 . 237 + 152) : (870 + 235 . 122)$;

d) $\dfrac{423134 . 846267 - 423133}{846267 . 423133 + 423134}$.

50. Tìm số tự nhiên a, biết rằng :

a) $697 : \dfrac{15 . a + 364}{a} = 17$;

b) $92 . 4 - 27 = \dfrac{a + 350}{a} + 315$.

51. Tìm số tự nhiên x, biết rằng :

a) $720 : [41 - (2x - 5)] = 2^3 . 5$;

b) $(x + 1) + (x + 2) + (x + 3) + ... + (x + 100) = 5750$.

52. Hãy viết năm dãy tính có kết quả bằng 100, với sáu chữ số 5 cùng với dấu các phép tính (và dấu ngoặc nếu cần).

53. a) Hãy viết dãy tính có kết quả bằng 100, với năm chữ số như nhau cùng với dấu các phép tính (và dấu ngoặc nếu cần).

b) Cũng hỏi như trên với sáu chữ số như nhau.

54. a) Hãy viết dãy tính có kết quả bằng 1000000, với năm chữ số như nhau cùng với dấu các phép tính (và dấu ngoặc nếu cần).

b) Cũng hỏi như trên với sáu chữ số như nhau.

55. Cho số 123456789. Hãy đặt một số dấu "+" và "–" vào giữa các chữ số để kết quả của phép tính bằng 100.

56. Cho số 987654321. Hãy đặt một số dấu "+" và "–" vào giữa các chữ số để kết quả của phép tính bằng :

a) 100 ; b) 99.

∽ *Ví dụ :* 30 đến 32, 34, 39, 42, 43, 45 đến 48, 54 đến 62, 115, 119, 120, 128, 135, 143, 148.

Bài tập : 186 đến 192, 194 đến 197, 200 đến 202, 205 đến 208, 213 đến 216, 218 đến 222, 228 đến 238, 241, 243, 245, 246, 249 đến 251, 253 đến 257, 259 đến 261, 283 đến 286, 288 đến 301, 453, 456, 458, 466, 467, 470, 484, 485, 496, 498 đến 502, 511 đến 516, 518, 521, 522, 524 đến 528, 532 đến 536, 538 đến 545, 547, 556 đến 558, 561 đến 564, 566 đến 571, 574 đến 576, 584.

§3. TÍNH CHẤT CHIA HẾT TRÊN TẬP HỢP SỐ TỰ NHIÊN

Định nghĩa. Cho hai số tự nhiên a và b, trong đó $b \neq 0$. Ta nói a chia hết cho b nếu tồn tại số tự nhiên q sao cho $a = bq$. Khi đó ta còn nói : a là bội của b, hoặc b là ước của a.

Các tính chất chung

1) Bất cứ số nào khác 0 cũng chia hết cho chính nó.

2) Tính chất bắc cầu : Nếu a chia hết cho b và b chia hết cho c thì a chia hết cho c.

3) Số 0 chia hết cho mọi số b khác 0.

4) Bất cứ số nào cũng chia hết cho 1.

Tính chất chia hết của tổng và hiệu

5) Nếu a và b cùng chia hết cho m thì $a + b$ chia hết cho m, $a - b$ chia hết cho m.

Hệ quả : Nếu tổng của hai số chia hết cho m và một trong hai số ấy chia hết cho m thì số còn lại cũng chia hết cho m.

6) Nếu một trong hai số a và b chia hết cho m, số kia không chia hết cho m thì $a + b$ không chia hết cho m, $a - b$ không chia hết cho m.

Tính chất chia hết của tích

7) Nếu một thừa số của tích chia hết cho m thì tích chia hết cho m.

8) Nếu a chia hết cho m và b chia hết cho n thì ab chia hết cho mn.

Hệ quả : Nếu a chia hết cho b thì a^n chia hết cho b^n.

Ví dụ 9. Chứng minh rằng :

a) $\overline{ab} + \overline{ba}$ chia hết cho 11 ;

b) $\overline{ab} - \overline{ba}$ chia hết cho 9 với $a > b$.

Giải : a) $\overline{ab} + \overline{ba} = (10a + b) + (10b + a) = 11a + 11b$, chia hết cho 11.

b) $\overline{ab} - \overline{ba} = (10a + b) - (10b + a) = 9a - 9b$, chia hết cho 9.

Ví dụ 10. Quan sát các ví dụ :

$14 + 19 = 33$ chia hết cho 11, 1419 chia hết cho 11 ; $6 + 49 = 55$ chia hết cho 11, 649 chia hết cho 11.

Hãy rút ra nhận xét và chứng minh nhận xét ấy.

Giải : Nhận xét : Nếu $\overline{ab} + \overline{cd}$ chia hết cho 11 thì $\overline{abcd}$ chia hết cho 11. Thật vậy $\overline{abcd} = 100.\overline{ab} + \overline{cd} = 99.\overline{ab} + (\overline{ab} + \overline{cd})$, chia hết cho 11.

Ví dụ 11. Cho số $\overline{abc}$ chia hết cho 27. Chứng minh rằng số $\overline{bca}$ chia hết cho 27.

Giải : $\overline{abc} \vdots 27$

$\Rightarrow \overline{abc0} \vdots 27$

$\Rightarrow 1000a + \overline{bc0} \vdots 27$

$\Rightarrow 999a + a + \overline{bc0} \vdots 27$

$\Rightarrow 27 . 37a + \overline{bca} \vdots 27.$

Do $27 . 37a \vdots 27$ nên $\overline{bca} \vdots 27$.

BÀI TẬP

57. Có thể chọn được năm số trong dãy số sau để tổng của chúng bằng 70 không ?

a) 1, 2, 3, ..., 29, 30 ;

b) 1, 3, 5, ..., 27, 29.

58. Cho chín số : 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17. Có thể phân chia được hay không chín số trên thành hai nhóm sao cho :

a) Tổng các số thuộc nhóm I gấp đôi tổng các số thuộc nhóm II ?

b) Tổng các số thuộc nhóm I bằng tổng các số thuộc nhóm II ?

59. a) Có ba số tự nhiên nào mà tổng của chúng tận cùng bằng 4, tích của chúng tận cùng bằng 1 hay không ?

b) Có tồn tại hay không bốn số tự nhiên mà tổng của chúng và tích của chúng đều là số lẻ ?

60. Chứng minh rằng không tồn tại các số tự nhiên a, b, c nào mà $a.b.c + a = 333$, $a.b.c + b = 335$, $a.b.c + c = 341$.

61. a) Chứng minh rằng nếu viết thêm vào đằng sau một số tự nhiên có hai chữ số số gồm chính hai chữ số ấy viết theo thứ tự ngược lại thì được một số chia hết cho 11.

b) Cũng chứng minh như trên đối với số tự nhiên có ba chữ số.

62. Chứng minh rằng nếu $\overline{ab} = 2.\overline{cd}$ thì $\overline{abcd}$ chia hết cho 67.

63. Chứng minh rằng :

a) $\overline{abcabc}$ chia hết cho 7, 11 và 13 ;

b) $\overline{abcdeg}$ chia hết cho 23 và 29, biết rằng $\overline{abc} = 2.\overline{deg}$.

64. Chứng minh rằng nếu $\overline{ab} + \overline{cd} + \overline{eg}$ chia hết cho 11 thì $\overline{abcdeg}$ chia hết cho 11.

65. a) Cho $\overline{abc} + \overline{deg}$ chia hết cho 37. Chứng minh rằng $\overline{abcdeg}$ chia hết cho 37.

b) Cho $\overline{abc} - \overline{deg}$ chia hết cho 7. Chứng minh rằng $\overline{abcdeg}$ chia hết cho 7.

c) Cho tám số tự nhiên có ba chữ số. Chứng minh rằng trong tám số đó, tồn tại hai số mà khi viết liên tiếp nhau thì tạo thành một số có sáu chữ số chia hết cho 7.

66. Tìm chữ số a biết rằng $\overline{20a20a20a}$ chia hết cho 7.

67. Cho ba chữ số khác nhau và khác 0. Lập tất cả các số tự nhiên có ba chữ số gồm cả ba chữ số ấy. Chứng minh rằng tổng của chúng chia hết cho 6 và 37.

68. Có hai số tự nhiên x và y nào mà $(x + y)(x - y) = 1002$ hay không ?

69. Tìm số tự nhiên có hai chữ số, sao cho nếu viết nó tiếp sau số 1999 thì ta được một số chia hết cho 37.

70. Cho n là số tự nhiên. Chứng minh rằng :

a) $(n + 10)(n + 15)$ chia hết cho 2 ;

b) $n(n + 1)(n + 2)$ chia hết cho 2 và cho 3 ;

c) $n(n + 1)(2n + 1)$ chia hết cho 2 và cho 3.

71. Tìm các số tự nhiên a và b, sao cho a chia hết cho b và b chia hết cho a.

72. Một học sinh viết các số tự nhiên từ 1 đến $\overline{abc}$. Bạn đó phải viết tất cả m chữ số. Biết rằng m chia hết cho $\overline{abc}$, tìm $\overline{abc}$.

73. Cho chín số tự nhiên viết theo thứ tự giảm dần từ 9 đến 1 :

9 8 7 6 5 4 3 2 1.

Có thể đặt được hay không một số dấu "+" hoặc "−" vào giữa các số đó để kết quả của phép tính bằng :

a) 5 ; b) 6 ?

74. Cho tổng 1 + 2 + 3 + ... + 9. Xóa hai số bất kì rồi thay bằng hiệu của chúng và cứ làm như vậy nhiều lần. Có cách nào làm cho kết quả cuối cùng bằng 0 được hay không ?

75*. Chứng minh rằng tổng các số ghi trên vé xổ số có sáu chữ số mà tổng ba chữ số đầu bằng tổng ba chữ số cuối thì chia hết cho 13 (các chữ số đầu có thể bằng 0).

∽ *Ví dụ :* 41.

Bài tập : 227, 487, 560.

§4. CÁC DẤU HIỆU CHIA HẾT

Gọi A = $\overline{a_na_{n-1}\ldots a_2a_1a_0}$. Ta có :

$A \vdots 2 \Leftrightarrow a_0 \vdots 2$; $A \vdots 5 \Leftrightarrow a_0 \vdots 5$.

$A \vdots 4 \Leftrightarrow \overline{a_1a_0} \vdots 4$; $A \vdots 25 \Leftrightarrow \overline{a_1a_0} \vdots 25$.

$A \vdots 8 \Leftrightarrow \overline{a_2a_1a_0} \vdots 8$; $A \vdots 125 \Leftrightarrow \overline{a_2a_1a_0} \vdots 125$.

$A \vdots 3 \Leftrightarrow a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 \vdots 3$.

$A \vdots 9 \Leftrightarrow a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 \vdots 9$.

Ví dụ 12. Tìm số tự nhiên có bốn chữ số, chia hết cho 5 và cho 27 biết rằng hai chữ số giữa của số đó là 97.

Giải : Gọi n là số phải tìm, n phải tận cùng bằng 0 hoặc 5 và n phải chia hết cho 9. Xét n = $\overline{*975}$ chia hết cho 9 nên * = 6. Thử lại : 6975 không chia hết cho 27.

Xét n = $\overline{*970}$ chia hết cho 9 nên * = 2. Thử lại : 2970 chia hết cho 27. Số phải tìm là 2970.

Ví dụ 13. Hai số tự nhiên a và 2a đều có tổng các chữ số bằng k. Chứng minh rằng a chia hết cho 9.

Giải : Ta biết rằng một số và tổng các chữ số của nó có cùng số dư trong phép chia cho 9, do đó hiệu của chúng chia hết cho 9.

Như vậy : $2a - k ⋮ 9$

và $a - k ⋮ 9.$

Suy ra : $(2a - k) - (a - k) ⋮ 9$

Do đó $a ⋮ 9.$

Ví dụ 14. Chứng minh rằng số gồm 27 chữ số 1 thì chia hết cho 27.

Giải : Gọi A là số gồm 27 chữ số 1, B là số gồm 9 chữ số 1. Lấy A chia cho B ta được thương là

$C = 1\underbrace{0 \ldots 0}_{8 \text{ chữ số}}1\underbrace{0 \ldots 0}_{8 \text{ chữ số}}1$. Như vậy $A = B \,.\, C$ trong đó B chia hết cho 9,

còn C chia hết cho 3. Vậy A chia hết cho 27.

Ví dụ 15. Cho số tự nhiên $\overline{ab}$ bằng ba lần tích các chữ số của nó.

a) Chứng minh rằng b chia hết cho a.

b) Giả sử $b = ka$ $(k \in \mathbf{N})$, chứng minh rằng k là ước của 10.

c) Tìm các số $\overline{ab}$ nói trên.

Giải : a) Theo đề bài : $\overline{ab} = 3ab$

$$\Rightarrow 10a + b = 3ab \qquad (1)$$

$$\Rightarrow 10a + b ⋮ a$$

$$\Rightarrow b ⋮ a.$$

b) Do $b = ka$ nên $k < 10$. Thay $b = ka$ vào (1) :

$$10a + ka = 3a \,.\, ka$$

$$\Rightarrow 10 + k = 3ak \qquad (2)$$

$$\Rightarrow 10 + k ⋮ k$$

$$\Rightarrow 10 ⋮ k.$$

c) Do $k < 10$ nên $k \in \{1 ; 2 ; 5\}$.

Với $k = 1$, thay vào (2) : $11 = 3a$, loại.

Với $k = 2$, thay vào (2) : $12 = 6a \Rightarrow a = 2$;

$b = ka = 2 \,.\, 2 = 4$. Ta có $\overline{ab} = 24 = 3 \,.\, 2 \,.\, 4$

Với $k = 5$, thay vào (2) : $15 = 15a \Rightarrow a = 1$;

$b = ka = 5 \,.\, 1 = 5$. Ta có $\overline{ab} = 15 = 3 \,.\, 1 \,.\, 5$.

Đáp số : 24 và 15.

Chú ý. Cách giải câu c không thông qua các câu a và b :

$$\overline{ab} = 3ab$$
$$\Rightarrow 10a + b = 3ab$$
$$\Rightarrow 10a = 3ab - b$$
$$\Rightarrow 10a = b(3a - 1).$$

Ta thấy 10a chia hết cho 3a − 1, mà a và 3a − 1 nguyên tố cùng nhau (thật vậy, nếu a và 3a − 1 cùng chia hết cho d thì 3a − (3a − 1) chia hết cho d, tức là 1 ⋮ d, vậy d = 1) nên 10 ⋮ 3a − 1.

3a − 1	1	2	5	10
3a	2	3	6	11
a	loại	1	2	loại
b		5	4	

Đáp số : 15 và 24.

Ví dụ 16*. Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng số đó chia hết cho tích các chữ số của nó.

Giải : Gọi số phải tìm là $\overline{ab}$, ta có 10a + b ⋮ ab (1).

Suy ra b ⋮ a. Đặt b = ka (2) thì k < 10 (k ∈ N).

Thay b = ka vào (1) ta có 10a + ka ⋮ aka

⇒ 10a ⋮ ka ⇒ 10 ⋮ k ⇒ k ∈ {1, 2, 5}.

Nếu k = 1 thì b = a. Thay vào (1) ta được 11a ⋮ a^2 ⇒ 11 ⋮ a ⇒ a = 1. Vậy $\overline{ab}$ = 11.

Nếu k = 2 thì b = 2a. Xét các số 12, 24, 36, 48 ta có các số 12, 24, 36 thoả mãn đề bài.

Nếu k = 5 thì b = 5a ⇒ $\overline{ab}$ = 15 : thoả mãn đề bài.

Kết luận : Có 5 số thoả mãn bài toán là 11, 12, 15, 24, 36.

BÀI TẬP

76. Cho A = 13! − 11!

a) A có chia hết cho 2 hay không ?

b) A có chia hết cho 5 hay không ?

c) A có chia hết cho 155 hay không ?

77. Tổng các số tự nhiên từ 1 đến 154 có chia hết cho 2 hay không ? Có chia hết cho 5 hay không ?

78. Cho A = $11^9 + 11^8 + 11^7 + ... + 11 + 1$. Chứng minh rằng A chia hết cho 5.

79. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $n^2 + n + 6$ không chia hết cho 5.

80. Trong các số tự nhiên nhỏ hơn 1000, có bao nhiêu số chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 5 ?

81. Tìm các số tự nhiên chia cho 4 thì dư 1, còn chia cho 25 thì dư 3.

82. Tìm các số tự nhiên chia cho 3 thì dư 3, chia cho 125 thì dư 12.

83. Có phép trừ hai số tự nhiên nào mà số trừ gấp ba lần hiệu và số bị trừ bằng 1030 hay không ?

84. Điền các chữ số thích hợp vào dấu *, sao cho :

a) $\overline{521*}$ chia hết cho 8 ;

b) $\overline{2*8*7}$ chia hết cho 9, biết rằng chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng nghìn là 2.

85. Tìm các chữ số a, b, sao cho :

a) a − b = 4 và $\overline{7a5b1}$ chia hết cho 3.

b) a − b = 6 và $\overline{4a7} + \overline{1b5}$ chia hết cho 9.

86. Tìm số tự nhiên có ba chữ số, chia hết cho 5 và 9, biết rằng chữ số hàng chục bằng trung bình cộng của hai chữ số kia.

87. Tìm hai số tự nhiên chia hết cho 9, biết rằng :

a) Tổng của chúng bằng $\overline{*657}$ và hiệu của chúng bằng $\overline{5*91}$;

b) Tổng của chúng bằng $\overline{513*}$ và số lớn gấp đôi số nhỏ.

88. Bạn An làm phép tính trừ trong đó số bị trừ là số có ba chữ số, số trừ là số gồm chính ba chữ số ấy viết theo thứ tự ngược lại. An tính được hiệu bằng 188. Hãy chứng tỏ rằng An đã tính sai.

89. Tìm số tự nhiên có ba chữ số, chia hết cho 45, biết rằng hiệu giữa số đó và số gồm chính ba chữ số ấy viết theo thứ tự ngược lại bằng 297.

90. Chứng minh rằng :

a) $10^{28} + 8$ chia hết cho 72 ;

b) $8^8 + 2^{20}$ chia hết cho 17.

91. a) Cho A = $2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{60}$. Chứng minh rằng A chia hết cho 3, 7 và 15.

b) Cho B = $3 + 3^3 + 3^5 + ... + 3^{1991}$. Chứng minh rằng B chia hết cho 13 và 41.

92. Chứng minh rằng :

a) $2n + \underbrace{11\ldots1}_{n \text{ chữ số}}$ chia hết cho 3 ;

b) $10^n + 18n - 1$ chia hết cho 27 ;

c) $10^n + 72n - 1$ chia hết cho 81.

93. Chứng minh rằng :

a) Số gồm 81 chữ số 1 thì chia hết cho 81 ;

b) Số gồm 27 nhóm chữ số 10 thì chia hết cho 27.

94. Hai số tự nhiên a và 4a có tổng các chữ số bằng nhau. Chứng minh rằng a chia hết cho 3.

95*. a) Tổng các chữ số của 3^{100} viết trong hệ thập phân có thể bằng 459 hay không ?

b) Tổng các chữ số của 3^{1000} là A, tổng các chữ số của A là B, tổng các chữ số của B là C. Tính C.

96. Cho hai số tự nhiên a và b tuỳ ý có số dư trong phép chia cho 9 theo thứ tự là r_1 và r_2. Chứng minh rằng r_1r_2 và ab có cùng số dư trong phép chia cho 9.

97. Một số tự nhiên chia hết cho 4 có ba chữ số đều chẵn, khác nhau và khác 0. Chứng minh rằng tồn tại cách đổi vị trí các chữ số để được một số mới chia hết cho 4.

98*. Tìm số $\overline{abcd}$, biết rằng số đó chia hết cho tích các số $\overline{ab}$ và $\overline{cd}$.

99*. Tìm số tự nhiên có năm chữ số, biết rằng số đó bằng 45 lần tích các chữ số của nó.

100. Một cửa hàng có 6 hòm hàng với khối lượng 316kg, 327kg, 336kg, 338kg, 349kg, 351kg. Cửa hàng đó đã bán 5 hòm, trong đó khối lượng hàng bán buổi sáng gấp bốn lần khối lượng hàng bán buổi chiều. Hỏi hòm còn lại là hòm nào ?

101. Từ bốn chữ số 1, 2, 3, 4, lập tất cả các số tự nhiên có bốn chữ số gồm cả bốn chữ số ấy. Trong các số đó, có tồn tại hai số nào mà một số chia hết cho số còn lại hay không ?

102*. Chứng minh rằng trong tất cả các số tự nhiên khác nhau có bảy chữ số lập bởi cả bảy chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, không có hai số nào mà một số chia hết cho số còn lại.

Ví dụ : 38, 44, 49, 51, 52, 69.

Bài tập : 193, 203, 204, 209 đến 211, 217, 239, 240, 242, 244, 247, 248, 252, 258, 279 đến 282, 481 đến 483, 486 đến 553, 559.

§5. SỐ NGUYÊN TỐ. HỢP SỐ

Số nguyên tố là số tự nhiên lớn hơn 1, chỉ có hai ước (tức là không có ước nào khác 1 và khác chính nó). Hợp số là số tự nhiên lớn hơn 1, có nhiều hơn hai ước (tức là có ước khác 1 và khác chính nó).

Ví dụ 17. Điền các chữ số thích hợp trong phép phân tích ra thừa số nguyên tố :

$$\begin{array}{r|l} \overline{abcd} & e \\ \overline{fcga} & n \\ \overline{abc} & c \\ \overline{ncf} & \ldots \end{array}$$

Giải : Ta có $\overline{abcd} = e\,.\,n\,.\,\overline{abc} \Rightarrow e\,.\,n = \overline{abcd} : \overline{abc} = 10 \Rightarrow e, n \in \{2\ ;\ 5\}$, $\overline{ncf}\,.\,c = \overline{abc} \Rightarrow n\,.\,c \leqslant 9 \Rightarrow n, c \in \{2\ ;\ 3\}$.

Suy ra $n = 2$, do đó $e = 5$, $c = 3$.

Vì $\overline{fcga}\,.\,5 = \overline{abcd}$ nên $f = 1$.

Vậy $\overline{ncf} = 231$, $\overline{abcd} = \overline{ncf}\,.\,c\,.\,n\,.\,e = 231\,.\,3\,.\,2\,.\,5 = 6930$.

Ta được :

$$\begin{array}{r|l} 6930 & 5 \\ 1386 & 2 \\ 693 & 3 \\ 231 & \ldots \end{array}$$

Ví dụ 18. Tìm số nguyên tố p, sao cho $p + 2$ và $p + 4$ cũng là các số nguyên tố.

Giải : Số p có một trong ba dạng : $3k$, $3k + 1$, $3k + 2$ với $k \in \mathbf{N}^*$.

Nếu $p = 3k$ thì $p = 3$ (vì p là số nguyên tố), khi đó $p + 2 = 5$, $p + 4 = 7$ đều là các số nguyên tố.

Nếu $p = 3k + 1$ thì $p + 2 = 3k + 3$ chia hết cho 3 và lớn hơn 3 nên $p + 2$ là hợp số, trái với đề bài.

Nếu $p = 3k + 2$ thì $p + 4 = 3k + 6$ chia hết cho 3 và lớn hơn 3 nên $p + 4$ là hợp số, trái với đề bài.

Vậy $p = 3$ là giá trị duy nhất phải tìm.

Ví dụ 19. Một số nguyên tố p chia cho 42 có số dư r là hợp số. Tìm số dư r.

Giải : Ta có $p = 42k + r = 2\,.\,3\,.\,7\,k + r$ ($k, r \in \mathbf{N}$, $0 < r < 42$). Vì p là số nguyên tố nên r không chia hết cho 2, 3, 7.

Các hợp số nhỏ hơn 42 và không chia hết cho 2 là 9, 15, 21, 25, 27, 33, 35, 39.

Loại đi các số chia hết cho 3, cho 7, chỉ còn 25. Vậy $r = 25$.

BÀI TẬP

103. Ta biết rằng có 25 số nguyên tố nhỏ hơn 100. Tổng của 25 số nguyên tố đó là số chẵn hay số lẻ ?

104. Tổng của ba số nguyên tố bằng 1012. Tìm số nhỏ nhất trong ba số nguyên tố đó.

105. Tìm bốn số nguyên tố liên tiếp, sao cho tổng của chúng là số nguyên tố.

106. Tổng của hai số nguyên tố có thể bằng 2003 hay không ?

107. Tìm hai số tự nhiên, sao cho tổng và tích của chúng đều là số nguyên tố.

108. Các số sau là số nguyên tố hay hợp số ?

a) $A = 11 \ldots 1$ (2001 chữ số 1) ;

b) $B = 11 \ldots 1$ (2000 chữ số 1) ;

c) $C = 1010101$;

d) $D = 1112111$;

e) $E = 1! + 2! + 3! + \ldots + 100!$;

g) $G = 3 . 5 . 7 . 9 - 28$;

h) $H = 311141111$.

109. Tìm số nguyên tố có ba chữ số, biết rằng nếu viết số đó theo thứ tự ngược lại thì ta được một số là lập phương của một số tự nhiên.

110. Tìm số tự nhiên có bốn chữ số, chữ số hàng nghìn bằng chữ số hàng đơn vị, chữ số hàng trăm bằng chữ số hàng chục và số đó viết được dưới dạng tích của ba số nguyên tố liên tiếp.

111. Tìm số nguyên tố p, sao cho các số sau cũng là số nguyên tố :

a) $p + 2$ và $p + 10$;

b) $p + 10$ và $p + 20$;

c) $p + 2$, $p + 6$, $p + 8$, $p + 12$, $p + 14$.

112. Tìm số nguyên tố, biết rằng số đó bằng tổng của hai số nguyên tố và bằng hiệu của hai số nguyên tố.

113*. Cho ba số nguyên tố lớn hơn 3, trong đó số sau lớn hơn số trước là d đơn vị. Chứng minh rằng d chia hết cho 6.

114. Hai số nguyên tố gọi là sinh đôi nếu chúng là hai số nguyên tố lẻ liên tiếp. Chứng minh rằng một số tự nhiên lớn hơn 3 nằm giữa hai số nguyên tố sinh đôi thì chia hết cho 6.

115. Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Biết $p + 2$ cũng là số nguyên tố. Chứng minh rằng $p + 1$ chia hết cho 6.

116. Cho p và p + 4 là các số nguyên tố (p > 3). Chứng minh rằng p + 8 là hợp số.

117. Cho p và 8p − 1 là các số nguyên tố. Chứng minh rằng 8p + 1 là hợp số.

118. ***Đố vui. Ngày sinh của bạn***

Một ngày đầu năm 2002, Huy viết thư hỏi ngày sinh của Long và nhận được thư trả lời :

– Mình sinh ngày a, tháng b, năm 1900 + c và đến nay d tuổi. Biết rằng a . b . c . d = 59007.

Huy đã tính được ngày sinh của Long và kịp viết thư mừng sinh nhật bạn. Hỏi Long sinh ngày nào ?

119. Một số nguyên tố chia cho 30 có số dư là r. Tìm r biết rằng r không là số nguyên tố.

120. Chứng minh rằng :

a) Số 17 không viết được dưới dạng tổng của ba hợp số khác nhau.

b*) Mọi số lẻ lớn hơn 17 đều viết được dưới dạng tổng của ba hợp số khác nhau.

Ví dụ : 36, 40, 63 đến 68, 92 đến 94, 96, 97, 129.

Bài tập : 223 đến 226, 269, 270, 276, 287, 302 đến 311, 380 đến 385, 387 đến 395.

§6. ƯỚC VÀ BỘI

Bằng cách phân tích một số ra thừa số nguyên tố, ta có thể dễ dàng tìm được ước (ước số) của số đó.

Ví dụ 20. Tìm số chia và thương của một phép chia có số bị chia bằng 145, số dư bằng 12 biết rằng thương khác 1 (số chia và thương là các số tự nhiên).

Giải : Gọi x là số chia, a là thương, ta có 145 = ax + 12 (x > 12). Như vậy x là ước của 145 − 12 = 133.

Phân tích ra thừa số nguyên tố : 133 = 7. 19.

Ước của 133 mà lớn hơn 12 là 19 và 133.

Nếu số chia bằng 19 thì thương bằng 7. Nếu số chia bằng 133 thì thương bằng 1, trái với đề bài.

Vậy số chia bằng 19, thương bằng 7.

Ví dụ 21*. Hãy viết số 108 dưới dạng tổng các số tự nhiên liên tiếp lớn hơn 0.

Giải : Giả sử số 108 viết được dưới dạng tổng của k số tự nhiên liên tiếp là $n + 1, n + 2, ..., n + k$ với $k, n \in N$, $k \geqslant 2$, $n + 1 \geqslant 1$. Ta có :

$$(n + 1) + (n + 2) + ... + (n + k) = 108$$

$$\frac{(2n + k + 1) . k}{2} = 108$$

$$(2n + k + 1) . k = 216.$$

Bài toán đưa đến việc tìm các ước của 216. Ta đưa ra hai nhận xét sau để giảm bớt số trường hợp phải xét :

1) $2n + k + 1 > k \geqslant 2$.

2) Hiệu $(2n + k + 1) - k = 2n + 1$, là số lẻ nên trong hai số $2n + k + 1$ và k có một số chẵn, một số lẻ.

Do đó ta chỉ cần tìm ước lẻ của 216, đồng thời trong hai số $2n + k + 1$ và k có tích bằng 216, chọn k là số nhỏ hơn.

Phân tích ra thừa số nguyên tố : $216 = 2^3.3^3$. Ước lẻ của 216 lớn hơn 1 là 3, 9, 27.

Với $k = 3$ thì $2n + k + 1 = 72$, ta được $n = 34$, do đó

$$108 = 35 + 36 + 37.$$

Với $k = 9$ thì $2n + k + 1 = 24$, ta được $n = 7$, do đó

$$108 = 8 + 9 + ... + 16.$$

Với $2n + k + 1 = 27$ thì $k = 8$, ta được $n = 9$, do đó

$$108 = 10 + 11 + ... + 17.$$

BÀI TẬP

121. Tìm các số tự nhiên x và y, sao cho :

a) $(2x + 1)(y - 3) = 10$; b) $(3x - 2)(2y - 3) = 1$;

c) $(x + 1)(2y - 1) = 12$; d) $x + 6 = y(x - 1)$;

e) $x - 3 = y(x + 2)$.

122. Một phép chia số tự nhiên có số bị chia bằng 3193. Tìm số chia và thương của phép chia đó, biết rằng số chia có hai chữ số.

123. Tìm số chia của một phép chia, biết rằng : Số bị chia bằng 236, số dư bằng 15, số chia là số tự nhiên có hai chữ số.

124. Tìm ước của 161 trong khoảng từ 10 đến 150.

125. Tìm hai số tự nhiên liên tiếp có tích bằng 600.

126. Tìm ba số tự nhiên liên tiếp có tích bằng 2730.

127. Tìm ba số lẻ liên tiếp có tích bằng 12075.

128. Một tờ hoá đơn bị dây mực, chỗ dây mực biểu thị bởi dấu *. Hãy phục hồi lại các chữ số bị dây mực (dấu * thay cho một hoặc nhiều chữ số).

Giá mua một hộp bút	:	3200 đồng.
Giá bán một hộp bút	:	*00 đồng.
Số hộp bút đã bán	:	* chiếc.
Thành tiền	:	107300 đồng.

129. Tìm số tự nhiên n, biết rằng :

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = 820.$$

130*. Hãy viết số 100 dưới dạng tổng các số lẻ liên tiếp.

131. *Đố vui. Số nhà của bạn*

Tân và Hùng gặp nhau trong hội nghị học sinh giỏi toán. Tân hỏi số nhà Hùng, Hùng trả lời :

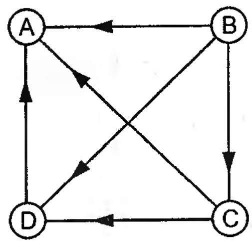
– Nhà mình ở chính giữa đoạn phố, đoạn phố ấy có tổng các số nhà bằng 161.

Nghĩ một chút, Tân nói :

– Bạn ở số nhà 23 chứ gì !

Hỏi Tân đã tìm ra như thế nào ?

132. Đặt bốn số tự nhiên khác nhau, khác 0, nhỏ hơn 100 vào các vị trí A, B, C, D ở hình 3 sao cho mũi tên đi từ một số đến ước của nó và số ở vị trí A có giá trị lớn nhất trong các giá trị nó có thể nhận được.



Hình 3

133. Tìm số tự nhiên n, sao cho :

a) n + 4 chia hết cho n + 1 ;

b) $n^2 + 4$ chia hết cho n + 2 ;

c) 13n chia hết cho n – 1.

134*. Tìm số tự nhiên có ba chữ số, biết rằng nó tăng gấp n lần nếu cộng mỗi chữ số của nó với n (n là số tự nhiên, có thể gồm một hoặc nhiều chữ số).

∽ ***Ví dụ :*** 33, 37, 70, 95.

Bài tập : 199, 212, 312 đến 321, 386.

§7. ƯỚC CHUNG. ƯỚC CHUNG LỚN NHẤT

Ước chung lớn nhất của hai hay nhiều số là số lớn nhất trong tập hợp các ước chung của các số đó. Ước chung lớn nhất của a, b, c được kí hiệu là ƯCLN(a, b, c) hoặc (a, b, c). Ta có : $(a, b) = d \Leftrightarrow$ tồn tại a', b' $\in$ N sao cho $a = da'$, $b = db'$, $(a', b') = 1$.

Ví dụ 22. Tìm số tự nhiên a, biết rằng 264 chia cho a dư 24, còn 363 chia cho a dư 43.

Giải : Số 264 chia cho a dư 24 nên a là ước của $264 - 24 = 240$ và $a > 24$.

Số 363 chia cho a dư 43 nên a là ước của $363 - 43 = 320$ và $a > 43$.

Do đó a là ước chung của 240 và 320, đồng thời $a > 43$.

ƯCLN $(240, 320) = 80$, ước chung lớn hơn 43 là 80. Vậy $a = 80$.

Ví dụ 23. Xác định số chia và thương của một phép chia số tự nhiên biết rằng số bị chia và các số dư được viết như sau :

```
452610 | Số chia
       |--------
 466   | Thương
   210 |
    36 |
```

Giải : Tính các tích riêng của từng chữ số của thương với số chia, ta được : $452 - 46 = 406$; $466 - 2 = 464$; $210 - 36 = 174$. Phép chia có dạng :

```
_452610 | Số chia
  406   |--------
 _466   | Thương
  464   |
   _210 |
    174 |
     36 |
```

Số chia là ước chung của 406, 464, 174 và lớn hơn 46. Từ đó ta tìm được : Số chia là 58, thương là 7803.

BÀI TẬP

135. Tìm số tự nhiên a, biết rằng 398 chia cho a thì dư 38, còn 450 chia cho a thì dư 18.

136. Tìm số tự nhiên a, biết rằng 350 chia cho a thì dư 14, còn 320 chia cho a thì dư 26.

137. Có 100 quyển vở và 90 bút chì được thưởng đều cho một số học sinh, còn lại 4 quyển vở và 18 bút chì không đủ chia đều. Tính số học sinh được thưởng.

138. Phần thưởng cho học sinh của một lớp học gồm 128 vở, 48 bút chì, 192 nhãn vở. Có thể chia được nhiều nhất thành bao nhiêu phần thưởng như nhau, mỗi phần thưởng gồm bao nhiêu vở, bút chì, nhãn vở ?

139. Ba khối 6, 7, 8 theo thứ tự có 300 học sinh, 276 học sinh, 252 học sinh xếp hàng dọc để diễu hành sao cho số hàng dọc của mỗi khối như nhau. Có thể xếp nhiều nhất thành mấy hàng dọc để mỗi khối đều không có ai lẻ hàng ? Khi đó ở mỗi khối có bao nhiêu hàng ngang ?

140. Người ta muốn chia 200 bút bi, 240 bút chì, 320 tẩy thành một số phần thưởng như nhau. Hỏi có thể chia được nhiều nhất là bao nhiêu phần thưởng, mỗi phần thưởng có bao nhiêu bút bi, bút chì, tẩy ?

141. Tìm số chia và thương của một phép chia số tự nhiên có số bị chia bằng 9578 và các số dư liên tiếp là 5, 3, 2.

(Ví dụ trong phép chia

$$\begin{array}{r|l} 1855 & 4 \\ \cline{2-2} 25 & 463 \\ 15 & \\ 3 & \end{array}$$

thì 2, 1, 3 là các số dư liên tiếp).

∽ *Ví dụ :* 35, 51 đến 53, 71, 73 đến 75, 80, 81, 84, 85, 87 đến 91.

Bài tập : 270 đến 273, 277, 278, 325 đến 327, 336 đến 356, 359 đến 362, 365 đến 371, 493.

§8. BỘI CHUNG. BỘI CHUNG NHỎ NHẤT

Bội chung nhỏ nhất của hai hay nhiều số là số nhỏ nhất khác 0 trong tập hợp các bội chung của các số đó. Bội chung nhỏ nhất của a, b, c được kí hiệu là BCNN (a, b, c) hoặc [a, b, c]. Ta có : $[a, b] = m \Leftrightarrow$ tồn tại $x, y \in \mathbf{N}$ sao cho $m = ax$, $m = by$, $(x, y) = 1$.

Ví dụ 24. Tìm số tự nhiên a nhỏ nhất sao cho chia a cho 3, cho 5, cho 7 được số dư theo thứ tự là 2, 3, 4.

Giải : $a = 3m + 2$ $(m \in \mathbf{N}) \Rightarrow 2a = 6m + 4$, chia 3 dư 1.

$a = 5n + 3$ $(n \in \mathbf{N}) \Rightarrow 2a = 10n + 6$, chia 5 dư 1.

$a = 7p + 4$ $(p \in \mathbf{N}) \Rightarrow 2a = 14p + 8$, chia 7 dư 1.

Do đó : $2a - 1 \in BC(3, 5, 7)$. Để a nhỏ nhất thì $2a - 1$ là BCNN (3, 5, 7).

$$\begin{aligned} \text{BCNN}(3, 5, 7) &= 105 \\ 2a - 1 &= 105 \\ 2a &= 106 \\ a &= 53. \end{aligned}$$

Ví dụ 25. Một số tự nhiên chia cho 3 thì dư 1, chia cho 4 thì dư 2, chia cho 5 thì dư 3, chia cho 6 thì dư 4, và chia hết cho 13.

a) Tìm số nhỏ nhất có tính chất trên.

b) Tìm dạng chung của tất cả các số có tính chất trên.

Giải : a) Gọi x là số phải tìm thì x + 2 chia hết cho 3, 4, 5, 6 nên x + 2 là bội chung của 3, 4, 5, 6.

BCNN (3, 4, 5, 6) = 60 nên x + 2 = 60n, do đó x = 60n − 2 (n = 1, 2, 3, ...). Ngoài ra x phải là số nhỏ nhất có tính chất trên và x phải chia hết cho 13.

Lần lượt cho n bằng 1, 2, 3, ... ta thấy đến n = 10 thì x = 598 chia hết cho 13. Số nhỏ nhất phải tìm là 598.

b) Số phải tìm phải thoả mãn hai điều kiện : x + 2 chia hết cho 60 (1), x chia hết cho 13 (2).

Từ (1) suy ra x + 182 chia hết cho 60.

Từ (2) suy ra x + 182 chia hết cho 13.

Vì (13, 60) = 1 nên x + 182 = 780k hay x = 780k − 182 (k = 1, 2, 3, ...). Với k = 1, giá trị nhỏ nhất của x bằng 598.

(Trong cách biến đổi trên, ta lần lượt thêm các bội của 60 vào x + 2, được x + 62, x + 122, x + 182, ..., số 182 chia hết cho 13).

BÀI TẬP

142. Tìm các bội chung của 40, 60, 126 và nhỏ hơn 6000.

143. Một cuộc thi chạy tiếp sức theo vòng tròn gồm nhiều chặng. Biết rằng chu vi đường tròn là 330m, mỗi chặng dài 75m, địa điểm xuất phát và kết thúc cùng một chỗ. Hỏi cuộc thi có ít nhất mấy chặng ?

144. Ba ô tô cùng khởi hành một lúc từ một bến. Thời gian cả đi lẫn về của xe thứ nhất là 40 phút, của xe thứ hai là 50 phút, của xe thứ ba là 30 phút. Khi trở về bến, mỗi xe đều nghỉ 10 phút rồi tiếp tục chạy. Hỏi sau ít nhất bao lâu :

a) Xe thứ nhất và xe thứ hai cùng rời bến ?

b) Xe thứ hai và xe thứ ba cùng rời bến ?

c) Cả ba xe cùng rời bến ?

145. Một đơn vị bộ đội khi xếp hàng 20, 25, 30 đều dư 15, nhưng xếp hàng 41 thì vừa đủ. Tính số người của đơn vị đó biết rằng số người chưa đến 1000.

146. Tìm số tự nhiên có ba chữ số, sao cho chia nó cho 17, cho 25 được các số dư theo thứ tự là 8 và 16.

147. Tìm số tự nhiên n lớn nhất có ba chữ số, sao cho n chia cho 8 thì dư 7, chia cho 31 thì dư 28.

148. Tìm số tự nhiên nhỏ hơn 500, sao cho chia nó cho 15, cho 35 được các số dư theo thứ tự là 8 và 13.

149. a) Tìm số tự nhiên lớn nhất có ba chữ số, sao cho chia nó cho 2, cho 3, cho 4, cho 5, cho 6 ta được các số dư theo thứ tự là 1, 2, 3, 4, 5.

b) Tìm dạng chung của các số tự nhiên a chia cho 4 thì dư 3, chia cho 5 thì dư 4, chia cho 6 thì dư 5, chia hết cho 13.

150. Tìm số tự nhiên nhỏ nhất chia cho 8 dư 6, chia cho 12 dư 10, chia cho 15 dư 13 và chia hết cho 23.

151. Tìm số tự nhiên nhỏ nhất chia cho 8, 10, 15, 20 theo thứ tự dư 5, 7, 12, 17 và chia hết cho 41.

152. Tìm số tự nhiên nhỏ nhất chia cho 5, cho 7, cho 9 có số dư theo thứ tự là 3, 4, 5.

153. Tìm số tự nhiên nhỏ nhất chia cho 3, cho 4, cho 5 có số dư theo thứ tự là 1, 3, 1.

154. Trên đoạn đường dài 4800m có các cột điện trồng cách nhau 60m, nay trồng lại cách nhau 80m. Hỏi có bao nhiêu cột không phải trồng lại, biết rằng ở cả hai đầu đoạn đường đều có cột điện ?

155. Ba con tàu cập bến theo lịch như sau : Tàu I cứ 15 ngày thì cập bến, tàu II cứ 20 ngày thì cập bến, tàu III cứ 12 ngày thì cập bến. Lần đầu cả ba tàu cùng cập bến vào ngày thứ sáu. Hỏi sau đó ít nhất bao lâu, cả ba tàu lại cùng cập bến vào ngày thứ sáu ?

156. Nếu xếp một số sách vào từng túi 10 cuốn thì vừa hết, vào từng túi 12 cuốn thì thừa 2 cuốn, vào từng túi 18 cuốn thì thừa 8 cuốn. Biết rằng số sách trong khoảng từ 715 đến 1000, tính số sách đó.

157. Hai lớp 6A, 6B cùng thu nhặt một số giấy vụn bằng nhau. Trong lớp 6A, một bạn thu được 26kg, còn lại mỗi bạn thu 11kg. Trong lớp 6B, một bạn thu được 25kg, còn lại mỗi bạn thu 10kg. Tính số học sinh mỗi lớp, biết rằng số giấy mỗi lớp thu được trong khoảng từ 200kg đến 300kg.

158. Một thiết bị điện tử phát ra tiếng kêu "bíp" sau mỗi 60 giây, một thiết bị điện tử khác phát ra tiếng kêu "bíp" sau mỗi 62 giây. Cả hai thiết bị này đều phát ra tiếng "bíp" lúc 10 giờ sáng. Tính thời điểm để cả hai cùng phát ra tiếng "bíp" tiếp theo.

159. Có hai chiếc đồng hồ (có kim giờ và kim phút). Trong một ngày, chiếc thứ nhất chạy nhanh 2 phút, chiếc thứ hai chạy chậm 3 phút. Cả hai đồng hồ được lấy lại theo giờ chính xác. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu lâu, cả hai đồng hồ lại cùng chỉ giờ chính xác ?

∽ *Ví dụ :* 76 đến 79, 82, 83, 86.

Bài tập : 322 đến 324, 328 đến 335, 357, 358, 363, 364, 372 đến 376, 494, 495.

Chương II

SỐ NGUYÊN

Tập hợp **Z** các số nguyên gồm các số tự nhiên và các số – 1, – 2, – 3,...

$$\mathbf{Z} = \{... ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ;...\}.$$

Ta xác định trên **Z** một thứ tự như sau : $a < b$ khi và chỉ khi điểm a ở bên trái điểm b trên trục số ($a, b \in \mathbf{Z}$).

Ta xác định trên **Z** hai phép toán : phép cộng và phép nhân. Phép cộng có bốn tính chất : giao hoán, kết hợp, cộng với số 0, cộng với số đối. Phép nhân có ba tính chất : giao hoán, kết hợp, nhân với số 1.

Giữa phép nhân và phép cộng có quan hệ : phép nhân phân phối đối với phép cộng. Giữa thứ tự và phép toán có quan hệ :

$$a < b \Rightarrow a + c < b + c ;$$

$$a < b \Rightarrow ac < bc \text{ với } c > 0 ; ac > bc \text{ với } c < 0.$$

Trừ đi một số là cộng với số đối của số trừ. Phép trừ hai số nguyên bao giờ cũng thực hiện được.

Phép chia chỉ thực hiện được trong phạm vi số nguyên khi số bị chia chia hết cho số chia.

Trong trường hợp a chia hết cho b, ta nói : a là bội của b và b là ước của a. Ước chung (hoặc bội chung) của hai hay nhiều số là ước (hoặc bội) của tất cả các số đó.

§9. THỨ TỰ TRÊN TẬP HỢP SỐ NGUYÊN

160. Điền vào chỗ trống (...) các từ "nhỏ hơn" hoặc "lớn hơn" cho đúng :

a) Mọi số nguyên dương đều ... số 0 ;

b) Mọi số nguyên âm đều ... số 0 ;

c) Mỗi số nguyên dương đều ... mọi số nguyên âm ;

d) Trong hai số nguyên dương, số nào có giá trị tuyệt đối lớn hơn thì số ấy ...

e) Trong hai số nguyên âm, số nào có giá trị tuyệt đối lớn hơn thì số ấy ...

161. Hãy tìm : a) Số nguyên dương lớn nhất có hai chữ số ;

b) Số nguyên âm lớn nhất có hai chữ số.

162. Tính $|b| - |a|$ biết rằng :

a) $a = -3, b = 7$; b) $a = 5, b = -7$; c) $a = 5, b = -5$.

163. Cho số nguyên a. Hãy điền vào chỗ trống các dấu $\geq$, $\leq$, $>$, $<$, $=$ để các khẳng định sau là đúng :

a) $|a|$ ... a với mọi a ; b) $|a|$ ... 0 với mọi a;

c) Nếu $a > 0$ thì a ... $|a|$; d) Nếu $a = 0$ thì a ... $|a|$;

e) Nếu $a < 0$ thì a ... $|a|$.

164. Các khẳng định sau có đúng với mọi số nguyên a và b không ? Cho ví dụ.

a) $|a| = |b| \Rightarrow a = b$; b) $a > b \Rightarrow |a| > |b|$.

§10. CỘNG VÀ TRỪ CÁC SỐ NGUYÊN

Ví dụ 26. Tìm số nguyên x, biết rằng $10 = 10 + 9 + 8 + ... + x$, trong đó vế phải là tổng các số nguyên liên tiếp viết theo thứ tự giảm dần.

Giải : $0 = 9 + 8 + 7 + ... + x$ (1)

$0 = \dfrac{(9 + x) \cdot n}{2}$ với n là số các số hạng ở vế phải của (1).

Ta có $n \neq 0$ suy ra $9 + x = 0$, do đó $x = -9$.

BÀI TẬP

165. Tìm tổng của số nguyên âm nhỏ nhất có một chữ số và số nguyên dương lớn nhất có một chữ số.

166. Điền vào chỗ trống cho đúng :

a) Số đối của một số nguyên âm là một số ...

b) Hai số nguyên đối nhau thì có giá trị tuyệt đối ....

c) Hai số nguyên có giá trị tuyệt đối bằng nhau thì ...

d) Số ... thì nhỏ hơn số đối của nó ;

e) Nếu a ... thì $-a > 0$;

g) Nếu $a < 0$ thì $|a| = ...$

h) Nếu $a < 0$ thì $a + |a| = ...$

167. Tìm số nguyên x, biết rằng :

a) $x + 13 = 5$; b) $x - 1 = -9$;

c) $25 - |x| = 10$; d) $|x - 2| + 7 = 12$;

e) $x + 4$ là số nguyên dương nhỏ nhất ;

g) $10 - x$ là số nguyên âm lớn nhất.

168. a) Cho bảng vuông 3×3 ô như hình bên. Điền số vào các ô trống sao cho tổng các số ở ba dòng một, hai, ba lần lượt bằng -5, 11, 1. Tính tổng các số ở mỗi cột.

-8	7	
5		9
	5	-6

b) Cho bảng vuông 3×3 ô. Có thể điền được hay không chín số nguyên vào chín ô của bảng sao cho tổng các số ở ba dòng lần lượt bằng 5, -3, 2 và tổng các số ở ba cột lần lượt bằng -1, 2, 2 ?

169. a) Có mười ô liên tiếp trong đó ô đầu tiên ghi số 6, ô thứ tám ghi số -4. Hãy điền số vào các ô trống để tổng ba số ở ba ô liền nhau bằng 0.

b) Một bảng vuông 4×4 ô có hai ô ở góc trên ghi số -3 và 2. Hãy điền số vào các ô còn lại, sao cho tổng hai số ở hai ô liền nhau thì bằng nhau (hai ô liền nhau là hai ô có một cạnh chung).

170. Tìm số nguyên x, biết rằng :

$x + (x + 1) + (x + 2) + \ldots + 19 + 20 = 20$, trong đó vế trái là tổng các số nguyên liên tiếp viết theo thứ tự tăng dần.

171. Tìm các số nguyên a, sao cho :

a) $a > -a$; b) $a = -a$; c) $a < -a$.

172. Tìm các số nguyên a, b, c biết rằng : $a + b = 11$, $b + c = 3$, $c + a = 2$.

173. Tìm các số nguyên a, b, c, d biết rằng :

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= 1, \\ a + c + d &= 2, \\ a + b + d &= 3, \\ a + b + c &= 4. \end{aligned}$$

174. Cho $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{49} + x_{50} + x_{51} = 0$ và $x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = \ldots = x_{47} + x_{48} = x_{49} + x_{50} = x_{50} + x_{51} = 1$. Tính x_{50}.

§11. NHÂN CÁC SỐ NGUYÊN

Ví dụ 27. a) Cho bảng vuông 3×3 ô như hình bên.

5	2	-4
-2	-4	-3
-6	5	7

Tìm tích các số ở mỗi dòng, tích các số ở mỗi cột.

b) Viết chín số nguyên khác 0 vào một bảng vuông 3×3. Biết rằng tích các số ở mỗi dòng đều là số âm. Chứng minh rằng luôn luôn tồn tại một cột mà tích các số trong cột ấy là số âm.

Giải : a) Tích các số ở mỗi dòng bằng :

$5 . 2 . (-4) = -40$; $(-2) . (-4) . (-3) = -24$; $(-6) . 5 . 7 = -210$.

Tích các số ở mỗi cột bằng :

$5 . (-2) . (-6) = 60$; $2 . (-4) . 5 = -40$; $(-4) . (-3) . 7 = 84$.

b) Chứng minh bằng phản chứng. Giả sử trong cả ba cột, tích các số ở mỗi cột đều là số dương thì tích chín số của bảng là số dương (1). Theo đề bài tích các số ở mỗi dòng đều là số âm nên tích chín số của bảng là số âm, mâu thuẫn với (1).

Vậy phải tồn tại một cột mà tích các số trong cột ấy là số âm.

Ví dụ 28. Thay các dấu * trong biểu thức $1 * 2 * 3$ bằng dấu các phép tính cộng, trừ, nhân và thêm các dấu ngoặc để được kết quả là : số lớn nhất ; số nhỏ nhất.

Giải : Có hai cách đặt dấu ngoặc :

a) $(1 * 2) * 3$. Xét mọi khả năng thì giá trị lớn nhất là $(1 + 2) . 3 = 9$, giá trị nhỏ nhất là : $(1 - 2) - 3 = -4$.

b) $1 * (2 * 3)$. Trường hợp này giá trị lớn nhất là : $1 + 2 . 3 = 7$, giá trị nhỏ nhất là : $1 - 2 . 3 = -5$.

Như vậy giá trị lớn nhất là 9 ; giá trị nhỏ nhất là -5.

BÀI TẬP

175. Thực hiện các phép tính sau một cách nhanh chóng :

a) $(-14) . (-125) . (+3) . (-8)$;

b) $(-127) . 57 + (-127) . 43$;

c) $(-13) . 34 - 87 . 34$;

d) $(-25) . 68 + (-34) . (-250)$;

e) $A = 1 - 2 + 3 - 4 + ... + 99 - 100$;

g) $B = 1 + 3 - 5 - 7 + 9 + 11 - ... - 397 - 399$;

h) $C = 1 - 2 - 3 + 4 + 5 - 6 - 7 + ... + 97 - 98 - 99 + 100$;

i) $D = 2^{100} - 2^{99} - 2^{98} - ... - 2^2 - 2 - 1$.

176. Thay các dấu * trong biểu thức $1 * 2 * 3 * 4$ bằng dấu các phép tính cộng, trừ, nhân và thêm các dấu ngoặc để được kết quả là : số lớn nhất ; số nhỏ nhất.

177. Tìm số nguyên x, sao cho :

a) $(x - 1)^2 = 0$;

b) $x (x - 1) = 0$;

c) $(x + 1) (x - 2) = 0$.

178. Cho dãy số $a_1, a_2, a_3, ..., a_{100}$ trong đó $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, $a_k = a_{k-2} . a_{k-1}$ $(k \in \mathbb{N}, k \geq 3)$. Tính a_{100}.

§12. TÍNH CHIA HẾT TRÊN TẬP HỢP SỐ NGUYÊN

Ví dụ 29. Số 36 chia cho số nguyên a rồi trừ đi a. Lấy kết quả này chia cho a rồi trừ đi a. Lại lấy kết quả này chia cho a rồi trừ đi a. Cuối cùng ta được số – a. Tìm số a.

Giải : Ta lần lượt được :

$$\left[\left(\frac{36}{a} - a\right) : a - a\right] : a - a = -a$$

$$\left[\left(\frac{36}{a} - a\right) : a - a\right] : a = 0 \ ; \ \left(\frac{36}{a} - a\right) : a - a = 0$$

$$\left(\frac{36}{a} - a\right) : a = a \ ; \quad \frac{36}{a} - a = a^2 \ ; \quad \frac{36}{a} = a^2 + a$$

$36 = a^2 (a + 1)$.

Do $a \in \mathbb{Z}$ nên a^2 là ước của 36. Ta có :

a^2	1	4	9	36
a + 1	36	9	4	1
a	35	8	3	0

So sánh a và a^2 trong bảng, ta chọn a = 3.

Đáp số : a = 3.

BÀI TẬP

179. Tìm các số nguyên x và y, biết rằng :

a) $(x + 2)(y - 3) = 5$;

b) $(x + 1)(xy - 1) = 3$.

180. Tính tổng A + B biết rằng A là tổng các số nguyên âm lẻ có hai chữ số, B là tổng các số nguyên dương chẵn có hai chữ số.

181. Cho $A = 2 - 5 + 8 - 11 + 14 - 17 + ... + 98 - 101$.

a) Viết dạng tổng quát của số hạng thứ n của A ;

b) Tính giá trị của biểu thức A.

182. Cho $A = 1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - ... - 99 - 100$.

a) A có chia hết cho 2, cho 3, cho 5 hay không ?

b) A có bao nhiêu ước nguyên, có bao nhiêu ước tự nhiên ?

183. Cho dãy số 1 ; – 3 ; 5 ; – 7 ; 9 ; – 11 ; 13 ; – 15 ; 17 ; – 19.

Có thể tìm được hay không năm số trong các số trên, sao cho đặt dấu "+" hoặc "–" nối các số đó với nhau, ta được kết quả bằng :

a) 15 ; b) 20 ?

184. Thay các dấu * trong biểu thức 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 bởi các dấu "+" hoặc "–" để giá trị của biểu thức bằng :

a) – 13 ; b) – 4.

185. Tìm số nguyên n, sao cho :

a) n + 5 chia hết cho n – 2 ;

b) 2n + 1 chia hết cho n – 5 ;

c) $n^2 + 3n - 13$ chia hết cho n + 3 ;

d) $n^2 + 3$ chia hết cho n – 1.

Phần II

CHUYÊN ĐỀ

ĐIỀN CHỮ SỐ

Các bài toán về điền chữ số không chỉ yêu cầu kĩ năng tính toán đúng mà còn đòi hỏi cả lập luận chính xác và hợp lí.

Ví dụ 30(2). Thay các chữ bởi các chữ số thích hợp :

$$\begin{array}{r} \overline{abc} \\ +\ \overline{acb} \\ \hline \overline{bca} \end{array}$$

Giải : So sánh cột hàng đơn vị và cột hàng chục, ta thấy c + b có nhớ. Do đó ở cột hàng chục :

$$b + c + 1 \text{ (nhớ)} = 10 + c \Rightarrow b = 9.$$

Ở cột hàng trăm :

$$a + a + 1 \text{ (nhớ)} = 9 \qquad \Rightarrow a = 4.$$

Ở cột hàng đơn vị :

$$c + 9 = 14 \qquad \Rightarrow c = 5.$$

Các chữ số được điền đầy đủ như sau :

$$\begin{array}{r} 495 \\ +\ 459 \\ \hline 954 \end{array}$$

Ví dụ 31(2). Tìm các chữ số a, b, c, biết rằng tổng a + b + c bằng tổng của bốn số chẵn liên tiếp và các chữ số a, b, c thoả mãn cả hai phép trừ sau :

$$\begin{array}{r} \overline{abc} \\ -\ \overline{cba} \\ \hline 99 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \overline{bac} \\ -\ \overline{abc} \\ \hline 270 \end{array}$$

Giải : Xét phép trừ thứ nhất : Ở cột hàng trăm ta có a ≥ c nên phép trừ ở hàng đơn vị và hàng chục có nhớ. Do đó ở cột hàng trăm :

$$a - c - 1 \text{ (nhớ)} = 0 \Rightarrow c = a - 1 \qquad (1)$$

Xét phép trừ thứ hai : Ở cột hàng trăm ta có b > a nên phép trừ ở hàng chục có nhớ. Do đó ở cột hàng trăm :

$$b - a - 1 \text{ (nhớ)} = 2 \Rightarrow a = b - 3 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $c = b - 4$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra :

$$a + b + c = (b - 3) + b + (b - 4) = 3b - 7 \leqslant 20.$$

Số không quá 20 và là tổng của bốn số chẵn liên tiếp có thể bằng :

$$0 + 2 + 4 + 6 = 12 \text{ hoặc } 2 + 4 + 6 + 8 = 20.$$

Trường hợp $3b - 7 = 12$ cho $3b = 19$, loại.

Trường hợp $3b - 7 = 20$ cho $3b = 27$ nên $b = 9$.

Từ đó : $a = 9 - 3 = 6$; $c = 9 - 4 = 5$.

Ta được :

$$\begin{array}{r} 695 \\ -\ 596 \\ \hline 99 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 965 \\ -\ 695 \\ \hline 270 \end{array}$$

Ví dụ 32(2). Thay các dấu * bằng các chữ số thích hợp trong phép chia sau :

$$\begin{array}{l l|l} & *\,*\,*\,*\,* & *\,* \\ \cline{3-3} \text{A} & *\,*\,* & *\,*\,8 \\ \cline{2-2} \text{B} & 0\,0\,0\,*\,* & \\ \text{C} & \quad\quad\;\; *\,* & \\ \cline{2-2} & \quad\quad\;\; 0\,0 & \end{array}$$

Giải : Gọi thương là $\overline{ab8}$, ta thấy a nhân với số chia được tích riêng A có ba chữ số, còn 8 nhân với số chia được tích riêng C có hai chữ số. Do đó $a > 8$, vậy $a = 9$.

Ở dòng B, ta hạ liền hai chữ số ở số bị chia xuống, do đó $b = 0$.

Số chia nhân với 9 được tích riêng A có ba chữ số nên số chia lớn hơn 11. Số chia nhân với 8 được tích riêng C có hai chữ số nên số chia nhỏ hơn 13. Vậy số chia bằng 12.

Số bị chia bằng $908 \,.\, 12 = 10896$. Toàn bộ phép tính là :

$$\begin{array}{r|l} 10896 & 12 \\ \cline{2-2} 108 & 908 \\ \cline{1-1} 00096 & \\ 96 & \\ \cline{1-1} 00 & \end{array}$$

Ví dụ 33(6). Thay các chữ a, b, c bằng các chữ số khác nhau thích hợp trong phép nhân sau :

$$\overline{ab}\,.\,\overline{cc}\,.\,\overline{abc} = \overline{abcabc}.$$

Giải : Biến đổi đẳng thức đã cho thành :

$\overline{ab}\,.\,11\,.\,c = \overline{abcabc} : \overline{abc} = 1001$

$\overline{ab}\,.\,c = 1001 : 11 = 91.$

Phân tích ra thừa số nguyên tố : $91 = 7\,.\,13$, do đó $\overline{ab}\,.\,c$ chỉ có thể là $13\,.\,7$ hoặc $91\,.\,1$.

Trường hợp thứ nhất cho $\overline{ab} = 13$, $c = 7$. Trường hợp thứ hai cho $\overline{ab} = 91$, $c = 1$, loại vì $b = c$.

Vậy ta có $13\,.\,77\,.\,137 = 137137$.

Ví dụ 34(2). Tìm số tự nhiên có ba chữ số, biết rằng trong hai cách viết : viết thêm chữ số 5 vào đằng sau số đó hoặc viết thêm chữ số 1 vào đằng trước số đó thì cách viết thứ nhất cho số lớn gấp năm lần so với cách viết thứ hai.

Giải : Gọi số phải tìm là $\overline{abc}$, ta có :

$$\begin{array}{r} 1\,a\,b\,c \\ \times \quad 5 \\ \hline a\,b\,c\,5 \end{array}$$

Nếu lần lượt tìm từng chữ số, chẳng hạn tìm c ở số bị nhân thì c có thể bằng 1, 3, 5, 7, 9 nên lời giải sẽ phức tạp. Để giải gọn hơn, có thể đặt $\overline{abc} = x$, ta có $(1000 + x)\,.\,5 = 10x + 5$.

Tìm x từ đẳng thức này ta được $x = 999$. Số phải tìm : 999.

Ví dụ 35(7). Điền các chữ số thích hợp vào các chữ trong phép nhân sau :

$$\begin{array}{r} a\,b\,c\,d\,m\,n \\ \times \qquad 2 \\ \hline c\,d\,m\,n\,a\,b \end{array}$$

Giải : Ở bài toán này, nếu tìm lần lượt từng chữ số thì lời giải rất phức tạp. Đặt $\overline{ab} = x$, $\overline{cdmn} = y$, ta có :

$$2\,.\,(10000x + y) = 100y + x$$

$$19999x = 98y$$

$$2857x = 14y.$$

Như vậy 14y chia hết cho 2857, mà $(14, 2857) = 1$ nên y chia hết cho 2857. Chú ý rằng y là số có bốn chữ số nên có các trường hợp : $y = 2857$, $x = 14$; $y = 5714$, $x = 28$; $y = 8571$, $x = 42$. Ta có ba đáp số :

$$\begin{array}{r} 142857 \\ \times \quad 2 \\ \hline 285714 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 285714 \\ \times \quad 2 \\ \hline 571428 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 428571 \\ \times \quad 2 \\ \hline 857142 \end{array}$$

Ví dụ 36(5). Điền các chữ số thích hợp vào các dấu * trong phép nhân sau :

$$** \,.\, ** = ***$$

biết rằng cả hai thừa số đều chẵn và tích là số có ba chữ số như nhau.

Giải : Gọi tích là $\overline{aaa}$, ta có $\overline{aaa} = a . 111 = a . 3 . 37$ nên tích chia hết cho 37, mà 37 là số nguyên tố, do đó phải có một thừa số chia hết cho 37. Thừa số này là số chẵn và có hai chữ số nên bằng 74.

Mặt khác tích chia hết cho 4 (vì mỗi thừa số chia hết cho 2) nên $\overline{aa}$ chia hết cho 4, do đó $a \in \{4 ; 8\}$.

Xét hai trường hợp : 444 : 74 = 6, loại ; 888 : 74 = 12.

Ta có đáp số : 74 . 12 = 888.

Ví dụ 37(6). Tìm các chữ số a và b, biết rằng :

$$900 : (a + b) = \overline{ab}.$$

Giải : Biến đổi đẳng thức đã cho thành phép nhân : $\overline{ab} . (a + b) = 900$. Như vậy $\overline{ab}$ và $a + b$ là các ước của 900. Ta có các nhận xét :

a) $a + b \leqslant 18$;

b) $\overline{ab} < 100$ nên $a + b > 9$;

c) Tích $\overline{ab}\,(a + b)$ chia hết cho 3 nên tồn tại một thừa số chia hết cho 3. Do $\overline{ab}$ và $a + b$ có cùng số dư trong phép chia cho 3 nên cả hai cùng chia hết cho 3.

Từ ba nhận xét đó, ta có $a + b$ bằng 12, hoặc 15, hoặc 18.

Nếu $a + b = 12$ thì $\overline{ab} = 900 : 12 = 75$, thoả mãn $7 + 5 = 12$.

Nếu $a + b = 15$ thì $\overline{ab} = 900 : 15 = 60$, loại.

Nếu $a + b = 18$ thì $\overline{ab} = 900 : 18 = 50$, loại.

Ta có đáp số : $a = 7$, $b = 5$.

Ví dụ 38(4)*. Chứng minh rằng không thể thay các chữ bằng các chữ số để có phép tính đúng :

a) HỌC VUI − VUI HỌC = 1991 (1)

b) TOÁN + LÍ + SỬ + VẼ = 1992 (2).

Giải : a) Hai số HỌC VUI, VUI HỌC có tổng các chữ số như nhau nên có cùng số dư khi chia cho 9, do đó hiệu của chúng chia hết cho 9. Vế trái của (1) chia hết cho 9, còn vế phải không chia hết cho 9. Vậy không thể có phép tính đúng.

b) Chú ý rằng, một số và tổng các chữ số của nó có cùng số dư khi chia cho 9. Do đó số dư của vế trái của (2) khi chia cho 9 bằng số dư của tổng T + O + Á + N + L + Í + S + Ử + V + Ề khi chia cho 9. Ta lại chú ý rằng 10 chữ số trên khác nhau nên tổng của chúng bằng :

$0 + 1 + 2 + ... + 9 = 45$. Tổng này chia hết cho 9, suy ra vế trái của (2) chia hết cho 9, còn vế phải không chia hết cho 9. Vậy không thể có phép tính đúng.

BÀI TẬP

Thay các dấu * và các chữ bởi các chữ số thích hợp (từ bài 186 đến 203) :

186(2). $\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca} = \overline{abc}$.

187(2). a) $\overline{abc} + \overline{ab} + a = 874$;

b) $\overline{abc} + \overline{ab} + a = 1037$.

188(2). a) $\overline{acc} \, . \, b = \overline{dba}$ biết a là chữ số lẻ ;

b) $\overline{ac} \, . \, \overline{ac} = \overline{acc}$;

c) $\overline{ab} \, . \, \overline{ab} = \overline{acc}$;

189(2). a) $\overline{1bac} \, . \, 2 = \overline{abc8}$;

b) $\overline{ab} = 9 \, . \, b$.

190(2). $\overline{abcdeg} \, . \, 4 = \overline{gabcde}$ và $\overline{abcde} + g = 15930$.

191(2). $\overline{abc} - \overline{ca} = \overline{ca} - \overline{ac}$.

192(2). $\overline{abcd} + \overline{abc} = 3576$.

193(4).

$$\begin{array}{r} abcd0 \\ - \quad abcd \\ \hline 3462* \end{array}$$

194(2).

$$\begin{array}{r} **** \\ \times \quad ** \\ \hline **** \\ ***7 \\ \hline ***** \end{array}$$

biết rằng số bị nhân có tổng các chữ số bằng 18 và không đổi khi đọc từ phải sang trái.

195(2). $\overline{ab} \, . \, b = \overline{1ab}$.

196(2). $\overline{260abc} : \overline{abc} = 626$.

197(2).

$$\begin{array}{r} * * * \\ \times \quad 8 * * \\ \hline * * * 9 \\ * * * \\ \hline * * * * * \end{array}$$

198(5). a) $\overline{ab} \cdot \overline{cb} = \overline{ddd}$.

c) $\overline{ab} \cdot \overline{cd} = \overline{bbb}$.

b) $** \cdot * = ***$ biết tích là số có ba chữ số như nhau.

199(6). $\overline{abcdeg} \cdot 6 = \overline{degabc}$.

200(2). $20** : 13 = **7$.

201(2). a)

$$\begin{array}{r|l} * * * * * & * * \\ \cline{2-2} * * & * * 2 \\ \cline{1-1} * * * & \\ * * * & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r|l} * * * * * * * & * * \\ \cline{2-2} * * * & * * 8 * * \\ \cline{1-1} * * & \\ * * & \\ \cline{1-1} * * * & \\ * * * & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

202(2). $\overline{abc} : 11 = a + b + c$.

203(4). $(\overline{ab} + \overline{cd})(\overline{ab} - \overline{cd}) = 2002$.

204(4). Tìm chữ số a và số tự nhiên x, sao cho :

$$(12 + 3x)^2 = \overline{1a96}.$$

205(2). Tìm số tự nhiên có năm chữ số, biết rằng nếu viết thêm chữ số 7 vào đằng trước số đó thì được một số lớn gấp bốn lần so với số có được bằng cách viết thêm chữ số 7 vào sau số đó.

206(2). Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng nếu viết thêm một chữ số 2 vào bên phải và một chữ số 2 vào bên trái của nó thì số ấy tăng gấp 36 lần.

207(2). Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng nếu viết xen vào giữa hai chữ số của nó chính số đó thì số đó tăng gấp 99 lần.

208(2). Tìm số tự nhiên có bốn chữ số, sao cho khi nhân số đó với 4 ta được số gồm bốn chữ số ấy viết theo thứ tự ngược lại.

209(4). Tìm số tự nhiên có bốn chữ số, sao cho nhân nó với 9 ta được số gồm chính các chữ số của số ấy viết theo thứ tự ngược lại.

210(4). Tìm số tự nhiên có năm chữ số, sao cho nhân nó với 9 ta được số gồm chính các chữ số của số ấy viết theo thứ tự ngược lại.

211(4). a) Tìm số tự nhiên có ba chữ số, biết rằng nếu xoá chữ số hàng trăm thì số ấy giảm 9 lần.

b) Giải bài toán trên nếu không cho biết chữ số bị xoá thuộc hàng nào.

212(6). Tìm số tự nhiên n có ba chữ số khác nhau, biết rằng nếu xóa bất kì chữ số nào của nó ta cũng được một số là ước của n.

213(2). Tìm số tự nhiên có bốn chữ số, biết rằng nếu xoá chữ số hàng nghìn thì số ấy giảm 9 lần.

214(2). Tìm số tự nhiên có bốn chữ số, biết rằng chữ số hàng trăm bằng 0 và nếu xoá chữ số 0 đó thì số ấy giảm 9 lần.

215(2). Một số tự nhiên tăng gấp 9 lần nếu viết thêm một chữ số 0 vào giữa các chữ số hàng chục và hàng đơn vị của nó. Tìm số ấy.

216(2). Tìm số tự nhiên A, biết rằng nếu xoá một hoặc nhiều chữ số tận cùng của nó thì được số B mà A = 130B.

217(4)*. Tìm số tự nhiên x có chữ số tận cùng bằng 2, biết rằng x, 2x, 3x đều là các số có ba chữ số và chín chữ số của ba số đó đều khác nhau và khác 0.

218(2)*. Tìm số tự nhiên x có sáu chữ số, biết rằng các tích 2x, 3x, 4x, 5x, 6x cũng là số có sáu chữ số gồm cả sáu chữ số ấy.

a) Cho biết sáu chữ số của số phải tìm là 1, 2, 4, 5, 7, 8.

b) Giải bài toán nếu không cho điều kiện a.

DÃY CÁC SỐ VIẾT THEO QUY LUẬT

I – Dãy cộng

Xét các dãy số sau :

a) Dãy số tự nhiên : 0, 1, 2, 3, ...

b) Dãy số lẻ : 1, 3, 5, 7, ...

c) Dãy các số chia cho 3 dư 1 : 1, 4, 7, 10... .

Trong các dãy số trên, mỗi số hạng, kể từ số hạng thứ hai, đều lớn hơn số hạng đứng liền trước nó cùng một số đơn vị, số đơn vị này là 1 ở dãy a), là 2 ở dãy b), là 3 ở dãy c). Ta gọi các dãy trên là *dãy cộng*.

Xét dãy cộng 4, 7, 10, 13, 16, 19, ... Hiệu giữa hai số liên tiếp của dãy là 3. Số hạng thứ 6 của dãy này là 19, bằng : 4 + (6 – 1).3 ; số hạng thứ 10 của dãy này là 4 + (10 – 1).3 = 31.

Tổng quát, nếu một dãy cộng có số hạng đầu là a_1 và hiệu giữa hai số hạng liên tiếp là d thì số hạng thứ n của dãy cộng đó (kí hiệu a_n) bằng :

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \qquad (1)$$

Để tính tổng các số hạng của dãy cộng

$$4 + 7 + 10 + ... + 25 + 28 + 31 \text{ (gồm 10 số)}$$

ta viết : $A = 4 + 7 + 10 + ... + 25 + 28 + 31$

$A = 31 + 28 + 25 + ... + 10 + 7 + 4$

nên $2A = (4 + 31) + (7 + 28) + ... + (28 + 7) + (31 + 4) = (4 + 31) . 10.$

Do đó $A = \dfrac{(4 + 31) . 10}{2} = 175.$

Tổng quát, nếu một dãy cộng có n số hạng, số hạng đầu là a_1, số hạng cuối là a_n thì tổng của n số hạng đó được tính như sau :

$$S = \frac{(a_1 + a_n) . n}{2} \qquad (2) \quad (*)$$

Trường hợp đặc biệt, tổng của n số tự nhiên liên tiếp bắt đầu từ 1 bằng :

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n + 1)}{2} \qquad (3)$$

Ví dụ 39(2). Bạn Lâm đánh số trang một cuốn sách dày 284 trang bằng dãy số chẵn 2, 4, 6, 8, ...

a) Biết mỗi chữ số viết mất 1 giây. Hỏi bạn Lâm cần bao nhiêu phút để đánh số trang cuốn sách ?

b) Chữ số thứ 300 mà bạn Lâm viết là chữ số nào ?

Giải : a) Dãy 2, 4, 6, 8 có 4 số, gồm 4 chữ số.

Dãy 10, 12, ..., 98 có : (98 − 10) : 2 + 1 = 45 (số), gồm : 2 × 45 = 90 (chữ số).

Dãy 100, 102, ..., 284 có : (284 − 100) : 2 + 1 = 93 (số), gồm : 3 × 93 = 279 (chữ số).

Bạn Lâm phải viết tất cả : 4 + 90 + 279 = 373 (chữ số), hết 373 giây hay 6 phút 13 giây.

b) Viết dãy số chẵn từ 2 đến 98 phải dùng : 4 + 90 = 94 (chữ số), còn lại : 300 − 94 = 206 (chữ số) để viết các số chẵn có ba chữ số kể từ 100.

Ta thấy : 206 : 3 = 68 dư 2. Số chẵn thứ 68 kể từ 100 là :
100 + (68 − 1) . 2 = 234. Hai chữ số tiếp theo là chữ số 2 và 3 thuộc số 236.

Vậy chữ số thứ 300 mà bạn Lâm viết là chữ số 3 thuộc số 236.

(*) Quy tắc dân gian : dĩ đầu, cộng vĩ, chiết bán, nhân chi (lấy số đầu cộng với số cuối, chia đôi, nhân với số số hạng).

Ví dụ 40(5)*. Tìm số tự nhiên n lớn nhất để tích các số tự nhiên từ 1 đến 1000 chia hết cho 5^n.

Giải : Số n lớn nhất phải tìm là số thừa số 5 khi phân tích 1.2.3 ... 1000 ra thừa số nguyên tố. Các thừa số 5 này được chứa trong các bội của 5. Do đó cần tìm số lượng các bội của 5, của 5^2, của 5^3, của 5^4 trong dãy 1, 2, 3, ..., 1000.

Cách 1. Các bội của 5 trong dãy 1, 2, 3, ..., 1000 là 5, 10, ..., 1000 gồm :

$$(1000 - 5) : 5 + 1 = 200 \text{ (số)}.$$

Các bội của 5^2 là 25, 50, ..., 1000 gồm :

$$(1000 - 25) : 25 + 1 = 40 \text{ (số)}.$$

Các bội của 5^3 là 125, 250, ..., 1000 gồm :

$$(1000 - 125) : 125 + 1 = 8 \text{ (số)}.$$

Các bội của 5^4 là 625 gồm 1 số.

Do đó số thừa số 5 khi phân tích 1.2.3 ... 1000 ra thừa số nguyên tố là : 200 + 40 + 8 + 1 = 249.

Số n lớn nhất để tích 1 . 2 . 3 ... 1000 chia hết cho 5^n là 249.

Cách 2. Kể từ 1, cứ 5 số lại có một bội của 5, cứ 5^2 số lại có một bội của 25, cứ 5^3 số lại có một bội của 125, ... Do đó số thừa số 5 khi phân tích 1.2.3...1000 ra thừa số nguyên tố bằng :

$$\frac{1000}{5} + \frac{1000}{5^2} + \frac{1000}{5^3} + \left[\frac{1000}{5^4}\right] = 200 + 40 + 8 + 1 = 249.$$

Tổng quát : Số thừa số a khi phân tích 1 . 2 . 3 ... n ra thừa số nguyên tố là :

$$\left[\frac{n}{a}\right] + \left[\frac{n}{a^2}\right] + \left[\frac{n}{a^3}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{a^k}\right] \quad \text{với k là số mũ lớn nhất sao cho } a^k \leq n.$$

Kí hiệu $\left[\frac{n}{m}\right]$ là số tự nhiên lớn nhất không vượt quá $\frac{n}{m}$ (nếu n chia hết cho m thì $\left[\frac{n}{m}\right]$ là thương đúng, nếu n không chia hết cho m thì $\left[\frac{n}{m}\right]$ là thương hụt, ta gọi $\left[\frac{n}{m}\right]$ là phần nguyên của $\frac{n}{m}$).

Ví dụ 41(3). Có bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 13 trong dãy

$$111,\ 1111,\ \ldots,\ \underbrace{11\ldots1}_{1993 \text{ chữ số}} \qquad (1)\ ?$$

Giải : Số gồm n chữ số 1 chia hết cho 13 khi và chỉ khi n chia hết cho 6. Chọn ra trong dãy (1) các số chia hết cho 13, ta được dãy :

$$\underbrace{11\ldots1}_{6 \text{ chữ số}},\ \underbrace{11\ldots1}_{12 \text{ chữ số}},\ \underbrace{11\ldots1}_{18 \text{ chữ số}},\ \ldots,\ \underbrace{11\ldots1}_{1992 \text{ chữ số}} \qquad (2)$$

Số số hạng của dãy (2) bằng số số hạng của dãy 6, 12, 18, ..., 1992 (3).

Các dãy (1) và (2) không là dãy cộng, còn dãy (3) là dãy cộng. Số số hạng của dãy (3) là $(1992 - 6) : 6 + 1 = 332$.

Do đó dãy (2) có 332 số, tức là có 332 số trong dãy (1) chia hết cho 13.

II - Các dãy khác

Ví dụ 42(2). Tìm số hạng thứ 100 của các dãy được viết theo quy luật :

a) 3, 8, 15, 24, 35, ... (1)

b) 3, 24, 63, 120, 195, ... (2)

c) 1, 3, 6, 10, 15, ... (3)

d) 2, 5, 10, 17, 26, ... (4)

Hướng dẫn : Hai số hạng đầu của các dãy trên có thể viết dưới dạng :

$$1 . 3,\ 2 . 4 \text{ (dãy (1))} ;\ 1 . 3,\ 4 . 6 \text{ (dãy (2))} ;$$

$$\frac{1 . 2}{2}, \frac{2 . 3}{2} \text{ (dãy (3))} ;\ 1 + 1^2,\ 1 + 2^2 \text{ (dãy (4))}.$$

Giải : a) Dãy (1) có thể viết dưới dạng :

$$1.3,\ 2.4,\ 3.5,\ 4.6,\ 5.7,\ \ldots$$

Mỗi số hạng của dãy (1) là một tích của hai thừa số, thừa số thứ hai lớn hơn thừa số thứ nhất là 2 đơn vị. Các thừa số thứ nhất làm thành dãy : 1, 2, 3, 4, 5, ... ; dãy này có số hạng thứ 100 là 100.

Số hạng thứ 100 của dãy (1) bằng : $100 . 102 = 10200$.

b) Dãy (2) có thể viết dưới dạng :

$$1.3,\ 4.6,\ 7.9,\ 10.12,\ 13.15,\ \ldots$$

Số hạng thứ 100 của dãy 1, 4, 7, 10, 13, ... là : $1 + 99.3 = 298$.

Số hạng thứ 100 của dãy (2) bằng : $298 . 300 = 89400$.

c) Dãy (3) có thể viết dưới dạng :

$$\frac{1.2}{2}, \frac{2.3}{2}, \frac{3.4}{2}, \frac{4.5}{2}, \frac{5.6}{2}, \ldots$$

Số hạng thứ 100 của dãy (3) bằng : $\dfrac{100 . 101}{2} = 5050$.

d) Dãy (4) có thể viết dưới dạng :

$$1 + 1^2,\ 1 + 2^2,\ 1 + 3^2,\ 1 + 4^2,\ 1 + 5^2,\ \ldots$$

Số hạng thứ 100 của dãy (4) bằng : $1 + 100^2 = 10001$.

BÀI TẬP

219(2). Tìm chữ số thứ 1000 khi viết liên tiếp liền nhau các số hạng của dãy số lẻ 1, 3, 5, 7, ...

220(2). a) Tính tổng các số lẻ có hai chữ số.

b) Tính tổng các số chẵn có hai chữ số.

221(2). Có số hạng nào của dãy sau tận cùng bằng 2 hay không ?

$$1\ ;\ 1+2\ ;\ 1+2+3\ ;\ 1+2+3+4\ ;\ \ldots$$

222(2). a) Viết liên tiếp các số hạng của dãy số tự nhiên từ 1 đến 100 tạo thành một số A. Tính tổng các chữ số của A.

b) Cũng hỏi như trên nếu viết từ 1 đến 1000000.

223(5). Khi phân tích ra thừa số nguyên tố, số 1000! chứa thừa số nguyên tố 7 với số mũ bằng bao nhiêu ?

224(5). Tích $A = 1.2.3 \ldots 500$ tận cùng bằng bao nhiêu chữ số 0 ?

225(5). a) Tích $B = 38 . 39 . 40 \ldots 74$ có bao nhiêu thừa số 2 khi phân tích ra thừa số nguyên tố ?

b) Tích $C = 31 . 32 . 33 \ldots 90$ có bao nhiêu thừa số 3 khi phân tích ra thừa số nguyên tố ?

226(5). Có bao nhiêu số tự nhiên đồng thời là các số hạng của cả hai dãy sau :

$$3,\ 7,\ 11,\ 15,\ \ldots,\ 407 \qquad (1)$$

$$2,\ 9,\ 16,\ 23,\ \ldots,\ 709 \qquad (2).$$

227(3). Trong dãy số 1, 2, 3, ..., 1990, có thể chọn được nhiều nhất bao nhiêu số để tổng hai số bất kì được chọn chia hết cho 38 ?

228(2)*. Chia dãy số tự nhiên kể từ 1 thành từng nhóm (các số cùng nhóm được đặt trong dấu ngoặc)

(1), (2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9, 10), (11, 12, 13, 14, 15), ...

a) Tìm số hạng đầu tiên của nhóm thứ 100.

b) Tính tổng các số thuộc nhóm thứ 100.

229(2). Cho $S_1 = 1 + 2,$

$$S_2 = 3 + 4 + 5,$$
$$S_3 = 6 + 7 + 8 + 9,$$
$$S_4 = 10 + 11 + 12 + 13 + 14,$$
$$\ldots\ldots$$

Tính S_{100}.

230(2). Tính số hạng thứ 50 của các dãy sau :

a) 1 . 6, 2 . 7, 3 . 8, ...

b) 1 . 4, 4 . 7, 7 . 10, ...

231(2). Cho $A = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{20}$, $B = 3^{21} : 2$.

Tính B – A.

232(2). Cho $A = 1 + 4 + 4^2 + 4^3 + ... + 4^{99}$, $B = 4^{100}$.

Chứng minh rằng $A < \frac{B}{3}$.

233(2). Tính giá trị của biểu thức :

a) $A = 9 + 99 + 999 + ... + \underbrace{99...9}_{50 \text{ chữ số}}$;

a) $B = 9 + 99 + 999 + ... + \underbrace{99...9}_{200 \text{ chữ số}}$.

ĐẾM SỐ

Ví dụ 43(2). Có bao nhiêu số $\overline{abcd}$ mà $\overline{ab} < \overline{cd}$?

Giải : Xét các trường hợp :

Nếu $\overline{ab} = 10$ thì $\overline{cd}$ có thể bằng : 11, 12, ..., 99, có 89 số.

Nếu $\overline{ab} = 11$ thì $\overline{cd}$ có thể bằng : 12, 13, ..., 99, có 88 số.

. . . .

Nếu $\overline{ab} = 97$ thì $\overline{cd}$ có thể bằng : 98, 99, có 2 số.

Nếu $\overline{ab} = 98$ thì $\overline{cd}$ bằng : 99, có 1 số.

Vậy có tất cả : 1 + 2 + 3 + ... + 89 = 4005 (số).

Ví dụ 44(4). Có bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 4 gồm bốn chữ số, chữ số tận cùng bằng 2 ?

Giải : Cách 1. Các số phải đếm có dạng $\overline{abc2}$.

Chữ số a có 9 cách chọn (1, 2, 3, ... , 9).

Với mỗi cách chọn a, chữ số b có 10 cách chọn (0, 1, 2, ..., 9).

Với mỗi cách chọn $\overline{ab}$, chữ số c có 5 cách chọn (1, 3, 5, 7, 9) để tạo với chữ số 2 tận cùng làm thành số chia hết cho 4.

Tất cả có : 9 . 10 . 5 = 450 (số).

Cách 2 (dùng cách lập dãy cộng). Số thoả mãn đề bài nhỏ nhất là 1012, lớn nhất là 9992, cách 20 số lại có một số. Tất cả các số phải đếm lập thành dãy :

1012, 1032, 1052, 1072, 1092, 2012, ..., 9992,

gồm : (9992 − 1012) : 20 + 1 = 450 (số).

Nhận xét : Qua ví dụ trên ta thấy : Nếu việc chọn đối tượng A có thể thực hiện bởi m cách và với mỗi cách chọn của A có thể chọn đối tượng B bởi n cách thì việc chọn A và B theo thứ tự đó có thể thực hiện bởi m . n cách chọn.

Ví dụ 45(2). Có bao nhiêu số tự nhiên có bốn chữ số $\overline{abcd}$, trong đó b − a = 1 ; d − c = 1 ?

Giải : Chữ số a có 8 cách chọn (1, 2, ..., 8), chữ số b có 1 cách chọn (b = a + 1), chữ số c có 9 cách chọn (0, 1, ..., 8), chữ số d có 1 cách chọn (d = c + 1).

Tất cả có : 8 . 1 . 9 . 1 = 72 (số).

Ví dụ 46(2). Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số trong đó có đúng một chữ số 5 ?

Giải : Chia ra ba loại số :

a) Số phải đếm có dạng $\overline{5ab}$: chữ số a có 9 cách chọn (từ 0 đến 9 nhưng khác 5), chữ số b cũng có 9 cách chọn như vậy. Các số thuộc loại này có : 9 . 9 = 81 (số).

b) Số phải đếm có dạng $\overline{a5b}$: Chữ số a có 8 cách chọn (từ 1 đến 9 nhưng khác 5), chữ số b có 9 cách chọn (từ 0 đến 9 nhưng khác 5). Các số thuộc loại này có : 8 . 9 = 72 (số).

c) Số phải đếm có dạng $\overline{ab5}$: Các số thuộc loại này có : 8 . 9 = 72 (số).

Chú ý rằng ba dạng trên bao gồm tất cả các số phải đếm và ba dạng trên là phân biệt nên số lượng các số tự nhiên có ba chữ số trong đó có đúng một chữ số 5 là :

81 + 72 + 72 = 225.

Chú ý : Trong nhiều trường hợp, để đếm các số có tính chất nào đó, ta lại đếm trước hết các số không có tính chất ấy. Xét ví dụ sau :

Ví dụ 47(2)*. Có bao nhiêu số chứa ít nhất một chữ số 1 trong các số tự nhiên :

a) có ba chữ số ; b) từ 1 đến 999.

Giải : a) Ta đếm các số tự nhiên có ba chữ số rồi bớt đi các số ba chữ số không chứa chữ số 1.

Số có ba chữ số là : 100, 101, ..., 999, có 900 số (1). Trong các số trên, số không chứa chữ số 1 có dạng $\overline{abc}$, trong đó a có 8 cách chọn (từ 2 đến 9), b có 9 cách chọn (từ 0 đến 9 nhưng khác 1), c có 9 cách chọn như trên, có : 8 . 9 . 9 = 648 (số) (2).

Vậy số lượng số phải đếm là : 900 − 648 = 252 (số).

b) Ta thêm chữ số 0 vào dãy 1, 2, ..., 999 thành dãy mới 000, 001, ..., 999 để đếm số được dễ dàng.

Trước hết ta đếm các số không chứa chữ số 1 của dãy này : đó là các số có dạng $\overline{abc}$ trong đó mỗi chữ số a, b, c đều có 9 cách chọn (từ 0 đến 9 nhưng khác 1), tất cả có : 9 . 9 . 9 = 729 (số). Vậy số lượng các số từ 1 đến 999 không chứa chữ số 1 có :

729 − 1 = 728 (số).

Số lượng các số từ 1 đến 999 có chứa chữ số 1 là :

999 − 728 = 271 (số).

Ví dụ 48(2)*. Viết 999 số tự nhiên liên tiếp kể từ 1.

Hỏi :

a) Chữ số 2 có mặt bao nhiêu lần ?

b) Chữ số 0 có mặt bao nhiêu lần ?

Giải : a) *Cách 1.* Ta thêm số 0 vào để được 1000 số (việc này không ảnh hưởng gì đến số lượng các chữ số 2 phải đếm). Ở trăm thứ nhất (từ 0 đến 99), chữ số 2 có 10 lần ở hàng đơn vị (thuộc số 2, 12, 22, ..., 92), có 10 lần ở hàng chục (thuộc số 20, 21, ..., 29) nên có 20 lần. Ở các trăm khác cũng vậy, riêng trăm thứ ba (từ 200 đến 299) có thêm 100 chữ số 2 ở hàng trăm. Vậy chữ số 2 có mặt : 20 . 10 + 100 = 300 (lần).

Trong cách này, ta đếm chữ số 2 ở mỗi trăm, trong mỗi trăm lại đếm ở từng hàng đơn vị, tức là "bổ ngang" trước rồi "bổ dọc".

Cách 2 ("bổ dọc" trước rồi "bổ ngang").

Chữ số 2 có ở hàng đơn vị của các số : 2, 12, ..., 992, gồm

(992 − 2) : 10 + 1 = 100 (lần).

Chữ số 2 có ở hàng chục của các số : 20, 21, ..., 29 ; 120, 121, ..., 129 ; ... ; 920, 921, ..., 929, gồm 10 . 10 = 100 (lần).

Chữ số 2 có ở hàng trăm của các số : 200, 201, ..., 299, gồm 100 lần.

Vậy chữ số 2 có tất cả 300 lần.

Cách 3. Bổ sung thêm các chữ số 0 vào để được dãy 000, 001, ..., 999, như vậy số lượng các chữ số 2 không thay đổi. Ta có 1000 số, gồm 3000 chữ số, số lượng mỗi chữ số từ 0 đến 9 đều như nhau. Do đó mỗi chữ số có mặt : 3000 : 10 = 300 (lần).

b) Nếu xét dãy 000, 001, ..., 999 thì chữ số 0 cũng có mặt 300 lần. Sau đó ta bớt đi số chữ số 0 đã viết thêm vào ở hàng trăm 100 lần (thuộc các số từ 000 đến 099), ở hàng chục 10 lần (thuộc các số từ 000 đến 009), ở hàng đơn vị 1 lần (thuộc số 000). Vậy số lượng các chữ số 0 là : 300 – 111 = 189.

BÀI TẬP

234(2). Bạn Tâm đánh số trang của một cuốn vở có 110 trang bằng cách viết dãy số tự nhiên 1, 2, 3, ..., 110. Bạn Tâm phải viết tất cả bao nhiêu chữ số ?

235(2). Một cô nhân viên đánh máy liên tục dãy số chẵn bắt đầu từ 2 : 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...

Cô phải đánh tất cả 2000 chữ số. Tìm chữ số cuối cùng mà cô đã đánh.

236(2). Bạn Mai viết dãy số lẻ 1, 3, 5, ..., 245.

a) Bạn Mai phải viết tất cả bao nhiêu chữ số ?

b) Nếu mỗi chữ số viết mất một giây thì viết đến số 245 mất bao nhiêu giây ? Sau 5 phút, bạn Mai viết đến chữ số nào ?

237(2). Bạn Hùng viết dãy số lẻ 1, 3, 5, 7, ... để đánh số trang một cuốn sách. Tính xem chữ số thứ 200 mà bạn Hùng viết là chữ số nào ?

238(2). Để đánh số trang của một cuốn sách, người ta viết dãy số tự nhiên bắt đầu từ 1 và phải dùng tất cả 1998 chữ số.

a) Hỏi cuốn sách có bao nhiêu trang ?

b) Chữ số thứ 1010 là chữ số nào ?

239(4). Có bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 3, có bốn chữ số và tận cùng bằng 5 ?

240(4). Tuấn muốn đến nhà bạn, nhưng không nhớ số nhà, chỉ biết rằng số nhà của bạn là số chia hết cho 3 và có hai chữ số. Biết số nhà cuối của dãy phố đó là 125. Hỏi Tuấn phải gõ cửa nhiều nhất bao nhiêu số nhà ? (các số nhà không đánh số a, b, ...).

241(2). Tìm số lượng các số tự nhiên có bốn chữ số mà :

a) Số tạo bởi hai chữ số đầu (theo thứ tự ấy) cộng với số tạo bởi hai chữ số cuối (theo thứ tự ấy) nhỏ hơn 100.

b) Số tạo bởi hai chữ số đầu (theo thứ tự ấy) lớn hơn số tạo bởi hai chữ số cuối (theo thứ tự ấy) ?

242(4). Trong các số tự nhiên từ 1 đến 252, xoá các số chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 5, rồi xoá các số chia hết cho 5 nhưng không chia hết cho 2. Còn lại bao nhiêu số ?

243(2). Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số mà :

a) Các chữ số đều chẵn ?

b) Chữ số hàng chục là chữ số lẻ ?

244(4). Có bao nhiêu số tự nhiên có bốn chữ số trong đó :

a) Mỗi chữ số đều chẵn ?

b) Tổng các chữ số là số chẵn ?

245(2). Có bao nhiêu biển số xe máy khác nhau, mỗi số xe lập bởi hai chữ cái đứng đầu và ba chữ số đứng sau ? (bảng chữ cái có 25 chữ, không có biển số 000).

246(2). Trong các số tự nhiên có ba chữ số, có bao nhiêu số :

a) Chứa đúng một chữ số 4 ?

b) Chứa đúng hai chữ số 4 ?

247(4). Có bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 5, có bốn chữ số, có đúng một chữ số 5 ?

248(4). Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số, biết rằng cộng nó với số gồm ba chữ số ấy viết theo thứ tự ngược lại thì được một số chia hết cho 5 ?

249(2). Có bao nhiêu số chẵn có ba chữ số, các chữ số khác nhau ?

250(2). Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số trong đó có ít nhất hai chữ số như nhau ?

251(2). Trong các số tự nhiên có bốn chữ số, có bao nhiêu số trong đó có đúng ba chữ số như nhau ?

252(4). Trong các số tự nhiên có ba chữ số, có bao nhiêu số :

a) Chia hết cho 5, có chứa chữ số 5 ?

b) Chia hết cho 4, có chứa chữ số 4 ?

c) Chia hết cho 3, không chứa chữ số 3 ?

253(2). Viết liên tiếp các số tự nhiên từ 1 đến 999 ta được một số tự nhiên A.

a) Số A có bao nhiêu chữ số ?

b) Tính tổng các chữ số của số A.

254(2)*. Viết dãy số tự nhiên từ 1 đến 999.

a) Chữ số 1 được viết bao nhiêu lần ?

b) Chữ số 0 được viết bao nhiêu lần ?

255(2). Trong các số tự nhiên có ba chữ số, có bao nhiêu số chứa ít nhất một chữ số 4 ?

256(2)*. Trong các số tự nhiên từ 1 đến 10000 :

a) Có bao nhiêu số chứa chữ số 0 ?

b) Số chứa chữ số 1 hay số không chứa chữ số 1 có nhiều hơn ?

257(2). Viết dãy số chẵn 100, 102, ..., 390. Hỏi chữ số 2 được viết bao nhiêu lần ?

258(4). Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, lập tất cả các số tự nhiên có bảy chữ số trong đó mỗi chữ số trên đều có mặt. Chứng minh rằng tổng tất cả các số đó chia hết cho 9.

259(2). Cho ba chữ số a, b, c khác nhau và khác 0. Gọi A là tập hợp các số tự nhiên có ba chữ số lập bởi cả ba chữ số trên.

a) Tập hợp A có bao nhiêu phần tử ?

b) Tính tổng các phần tử của tập hợp A, biết rằng $a + b + c = 17$.

260(2). Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, lập tất cả các số tự nhiên mà mỗi chữ số trên đều có mặt đúng một lần. Tìm tổng các số ấy.

261(2). Tìm tổng các số tự nhiên có ba chữ số lập bởi các chữ số 2, 3, 0, 7 trong đó :

a) Các chữ số có thể giống nhau ;

b) Các chữ số đều khác nhau.

Xem thêm các bài tập về đếm số trong chuyên đề *Sơ lược về tập hợp*.

SƠ LƯỢC VỀ TẬP HỢP

I – Tập hợp và phần tử của tập hợp

Ví dụ 49(4). Có bao nhiêu số tự nhiên từ 10 đến 24 chia hết cho ít nhất một trong hai số 2 và 3 ?

Giải : Trong các số tự nhiên từ 10 đến 24 :

Các số tự nhiên chia hết cho 2 là : 10, 12, 14, ..., 24, gồm :

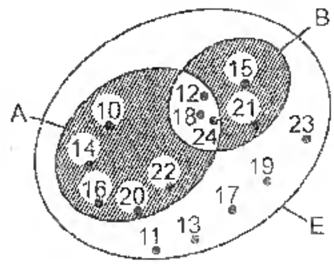
$$(24 - 10) : 2 + 1 = 8 \text{ (số)}.$$

Các số chia hết cho 3 là : 12, 15, 18, 21, 24, gồm 5 số.

Có những số có mặt ở hai dãy trên, đó là các bội của 6 : 12, 18, 24, gồm 3 số.

Vậy có : 8 + 5 − 3 = 10 (số) chia hết cho ít nhất một trong hai số 2 và 3.

Để minh hoạ ví dụ 49, trên hình 4, ta vẽ các vòng tròn A, B, E, trong đó A chứa các số chia hết cho 2, B chứa các số chia hết cho 3, E chứa các số tự nhiên từ 10 đến 24. Như vậy miền gạch sọc chứa các số chỉ chia hết cho một trong các số 2 và 3, miền chấm chấm chứa các số chia hết cho cả 2 và 3. Các số không chia hết cho 2 và không chia hết cho 3 thuộc miền để trắng. Sự minh hoạ này giúp ta hiểu rõ bài toán hơn, thấy rõ quan hệ giữa các tập hợp số chia hết cho 2, chia hết cho 3 trong phạm vi từ 10 đến 24.



Hình 4

Tập hợp là một khái niệm cơ bản không định nghĩa. Ví dụ : Tập hợp các số tự nhiên nhỏ hơn 10, tập hợp các học sinh của một lớp, tập hợp các chữ cái của một dòng, tập hợp các điểm nằm giữa hai điểm A và B.

Mỗi đối tượng (người, vật, số, hình, ...) trong một tập hợp là một phần tử của tập hợp ấy.

Để minh hoạ một tập hợp, người ta vẽ một đường cong kín không tự cắt, mỗi phần tử của tập hợp được biểu diễn bởi một điểm bên trong đường cong đó (xem hình 4). Sơ đồ này được mang tên nhà toán học Anh là Ven (1834 − 1923), người đầu tiên đưa ra cách biểu diễn tập hợp như trên.

Để thuận tiện, ta chấp nhận trường hợp một tập hợp có thể không chứa phần tử nào cả, tập hợp đó được gọi là tập hợp rỗng và kí hiệu bởi ∅. Ví dụ : tập hợp các số chia hết cho 9 và có tổng các chữ số bằng 12.

Trên hình 4, ta thấy mọi phần tử của tập hợp A đều là phần tử của tập hợp E, mọi phần tử của tập hợp B cũng đều là phần tử của tập hợp E. Ta nói A là tập hợp con của E, B là tập hợp con của E, kí hiệu $A \subset E$, $B \subset E$. Ví dụ : Tập hợp các số lẻ là tập hợp con của tập hợp các số tự nhiên.

Ta quy ước rằng tập hợp rỗng là tập hợp con của mọi tập hợp. Đương nhiên, tập hợp nào cũng là tập hợp con của chính nó.

Ví dụ 50(1). Cho tập hợp :

$$A = \{a, b, c, d, e\}.$$

a) Viết các tập hợp con của A có một phần tử.

b) Viết các tập hợp con của A có hai phần tử.

c) Có bao nhiêu tập hợp con của A có ba phần tử ?

d) Có bao nhiêu tập hợp con của A có bốn phần tử ?

e) Tập hợp A có bao nhiêu tập hợp con ?

Giải : a) Các tập hợp con của A có một phần tử là :

$$\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}.$$

b) Các tập hợp con của A có hai phần tử là :

$$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{b, c\},$$
$$\{b, d\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}.$$

c) Ta có nhận xét : Có bao nhiêu tập hợp con của A có hai phần tử thì có bấy nhiêu tập hợp con của A có ba phần tử vì việc *lấy đi* hai phần tử của A ứng với việc *để lại* ba phần tử của A. Chẳng hạn :

Tập hợp con {a, b} ứng với tập hợp con {c, d, e}.

Có 10 tập hợp con của A có hai phần tử. Do đó cũng có 10 tập hợp con của A có ba phần tử.

d) Có 5 tập hợp con của A có một phần tử. Do đó, với nhận xét tương tự như ở câu c, cũng có 5 tập hợp con của A có bốn phần tử.

e) Các tập hợp con của A bao gồm :

- Tập hợp rỗng (không có phần tử nào) ;
- Các tập hợp có một phần tử : 5 tập hợp ;
- Các tập hợp có hai phần tử : 10 tập hợp ;
- Các tập hợp có ba phần tử : 10 tập hợp ;
- Các tập hợp có bốn phần tử : 5 tập hợp ;
- Chính tập hợp A (có năm phần tử).

Vậy số tập hợp con của A là :

$$1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32.$$

Chú ý. Người ta chứng minh được rằng : Nếu một tập hợp có n phần tử thì số tập hợp con của nó là 2^n.

II – Các phép toán trên các tập hợp

Xét các tập hợp A, B, E ở hình 4, ta có :

$A = \{10 ; 12 ; 14 ; 16 ; 18 ; 20 ; 22 ; 24\}$

$B = \{12 ; 15 ; 18 ; 21 ; 24\}$

$E = \{10 ; 11 ; 12 ; ... ; 23 ; 24\}$.

Các số chia hết cho ít nhất một trong các số 2 và 3 thuộc miền gạch sọc hoặc chấm chấm. Đó là hợp của A và B, kí hiệu $A \cup B$. Ta có :

$A \cup B = \{10 ; 12 ; 14 ; 15 ; 16 ; 18 ; 20 ; 21 ; 22 ; 24\}$.

Hợp của hai tập hợp là một tập hợp gồm các phần tử thuộc ít nhất một trong hai tập hợp đó.

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ hoặc } x \in B.$$

Các số vừa chia hết cho 2, vừa chia hết cho 3 thuộc miền chấm chấm. Đó là giao của hai tập hợp A và B, kí hiệu $A \cap B$. Ta có $A \cap B = \{12 ; 18 ; 24\}$. Giao của hai tập hợp là một tập hợp gồm các phần tử chung của hai tập hợp đó.

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ và } x \in B.$$

Ta thấy nếu số phần tử của A là m, số phần tử của B là n, số phần tử của $A \cap B$ là p thì số phần tử của $A \cup B$ là $m + n - p$. Trường hợp $A \cap B = \varnothing$ thì số phần tử của $A \cup B$ là $m + n$.

Ví dụ 51(7). Gọi A là tập hợp các số tự nhiên khác 0, nhỏ hơn 30, chia hết cho 3 ;

B là tập hợp các số tự nhiên khác 0, nhỏ hơn 30, chia hết cho 9 ;

C là tập hợp các số tự nhiên khác 0, nhỏ hơn 30, chia hết cho 5.

a) Tìm các phần tử của $B \cup C$, $A \cap C$, $B \cap C$.

b) Hãy xác định tập hợp $A \cup B$, $A \cap B$.

c) Trong ba tập hợp A, B, C, tập hợp nào là tập hợp con của một trong hai tập hợp còn lại ?

Giải : a) $A = \{3 ; 6 ; 9 ; 12 ; 15 ; 18 ; 21 ; 24 ; 27\}$,

$B = \{9 ; 18 ; 27\}$,

$C = \{5 ; 10 ; 15 ; 20 ; 25\}$.

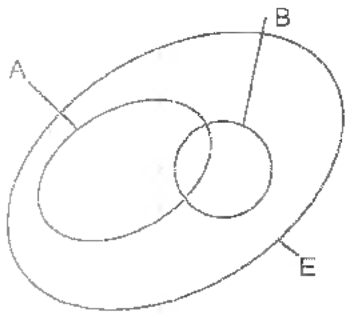
$B \cup C = \{5 ; 9 ; 10 ; 15 ; 18 ; 20 ; 25 ; 27\}$,

$A \cap C = \{15\}$, $B \cap C = \varnothing$.

b) $A \cup B = A$, $A \cap B = B$.

c) $B \subset A$.

Ví dụ 52(7). Có bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số, không chia hết cho số nào trong hai số 3 và 5 ? Tìm tổng của chúng.



Hình 5

Giải : a) Gọi A là tập hợp các số tự nhiên chia hết cho 3 có hai chữ số, B là tập hợp các số tự nhiên chia hết cho 5 có hai chữ số, E là tập hợp các số tự nhiên có hai chữ số (h. 5).

Các số tự nhiên có hai chữ số là 10, 11, ..., 99 gồm 90 số (số phần tử của E). Trong đó có 30 số chia hết cho 3 (số phần tử của A), 18 số chia hết cho 5 (số phần tử của B), 6 số chia hết cho đồng thời cả 3 và 5 (số phần tử của $A \cap B$).

Các số chia hết cho ít nhất một trong hai số 3 và 5 gồm :
$30 + 18 - 6 = 42$ (số) (số phần tử của $A \cup B$).

Các số không chia hết cho số nào trong hai số 3 và 5 gồm : $90 - 42 = 48$ (số).

b) Tổng các số tự nhiên có hai chữ số không chia hết cho số nào trong hai số 3 và 5 là $S = S_1 - (S_2 + S_3 - S_4)$, trong đó :

S_1 là tổng các số có hai chữ số (tổng các số thuộc E),

S_2 là tổng các số chia hết cho 3 có hai chữ số (tổng các số thuộc A),

S_3 là tổng các số chia hết cho 5 có hai chữ số (tổng các số thuộc B),

S_4 là tổng các số chia hết cho đồng thời cả 3 và 5 có hai chữ số (tổng các số thuộc $A \cap B$).

Ta có : $S_1 = \dfrac{(10 + 99).90}{2} = 4905$, $S_2 = \dfrac{(12 + 99).30}{2} = 1665$,

$S_3 = \dfrac{(10 + 95).18}{2} = 945$, $S_4 = \dfrac{(15 + 90).6}{2} = 315$. Do đó :

$S = 4905 - (1665 + 945 - 315) = 2610$.

III – Hai tập hợp bằng nhau

Nếu A là tập hợp con của B và B là tập hợp con của A thì hai tập hợp A và B bằng nhau, kí hiệu A = B. Ví dụ : A là tập hợp các số chẵn chia hết cho 5, B là tập hợp các số tận cùng bằng 0 hoặc A = {a, b, c}, B = {b, a, c}.

Như vậy để chứng tỏ A = B ta có thể chứng minh : Với mọi x thuộc A thì x thuộc B và với mọi x thuộc B thì x thuộc A.

Như vậy để chứng tỏ A = B ta có thể chứng minh : Với mọi x thuộc A thì x thuộc B và với mọi x thuộc B thì x thuộc A.

Ví dụ 53(7). Cho a và b là hai số tự nhiên, A là tập hợp các ước chung của a và b, B là tập hợp các ước chung của 7a + 5b và 4a + 3b. Chứng minh rằng :

a) A = B ;

b) (a, b) = (7a + 5b, 4a + 3b).

Giải : a) Bước 1 : Gọi d ∈ ƯC (a, b), ta sẽ chứng minh rằng d ∈ ƯC (7a + 5b, 4a + 3b).

Thật vậy, a và b chia hết cho d nên 7a + 5b chia hết cho d, 4a + 3b chia hết cho d.

Bước 2 : Gọi d' ∈ ƯC (7a + 5b, 4a + 3b), ta sẽ chứng minh rằng d' ∈ ƯC (a, b).

Thật vậy, 7a + 5b và 4a + 3b chia hết cho d' nên khử b, ta được 3(7a + 5b) − − 5(4a + 3b) chia hết cho d', tức là a chia hết cho d' ; khử a ta được 7(4a + 3b) − − 4(7a + 5b) chia hết cho d', tức là b chia hết cho d'. Vậy d' ∈ ƯC(a, b).

Bước 3 : Kết luận A = B.

b) Ta đã có A = B nên số lớn nhất thuộc A bằng số lớn nhất thuộc B, tức là (a, b) = (7a + 5b, 4a + 3b) (đpcm).

Những ví dụ nêu trong chuyên đề *Sơ lược về tập hợp* cho thấy lí thuyết tập hợp giúp ta nhìn nhận nhiều kiến thức đã học, nhiều sự kiện toán học riêng lẻ theo một quan điểm chung. Thay cho việc nghiên cứu từng đối tượng cụ thể, người ta nghiên cứu tập hợp những đối tượng tổng quát rồi áp dụng các kết quả thu được vào những trường hợp cụ thể. Chính vì thế mà lí thuyết tập hợp đã liên kết được nhiều phân môn của toán học, liên kết được nhiều bộ môn khoa học và trở thành cơ sở của toán học hiện đại.

BÀI TẬP

262(5). Các tập hợp sau được cho bằng cách chỉ rõ tính chất đặc trưng của các phần tử. Hãy viết các tập hợp đó bằng cách liệt kê các phần tử của nó :

a) A = {x ∈ N ; x là số nguyên tố nhỏ hơn 10} ;

b) B = {x ∈ N ; x là số có hai chữ số, chữ số hàng chục gấp ba chữ số hàng đơn vị} ;

c) C = {x ∈ N ; x là ước của 10}.

263(5). Hãy viết các tập hợp sau bằng cách chỉ rõ tính chất đặc trưng của các phần tử thuộc tập hợp đó :

a) A = {1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ; 36 ; 49} ;

b) B = {1 ; 7 ; 13 ; 19 ; 25 ; 31 ; 37} ;

c) C = {2 ; 6 ; 12 ; 20 ; 30}.

264(1). Cho các tập hợp :

A = {1 ; 2 ; 3 ; 4},

B = {3 ; 4 ; 5}.

Viết các tập hợp vừa là tập hợp con của A, vừa là tập hợp con của B.

265(1). Cho A = {a, b, c}. Tìm tất cả các tập hợp con của A.

266(1). Ta gọi A là tập hợp con thực sự của B nếu $A \subset B$ và $A \neq B$. Hãy viết các tập hợp con thực sự của tập hợp B = {1 ; 2 ; 3}.

267(1). Cho tập hợp :

A = {1 ; 2 ; 3 ; 4}.

a) Viết các tập hợp con của A mà mọi phần tử của nó đều là số chẵn.

b) Viết các tập hợp con của A.

268(1). Chứng minh rằng nếu $A \subset B$, $B \subset D$ thì $A \subset D$.

269(5). Trong các số tự nhiên từ 1 đến 100, có bao nhiêu số :

a) Chia hết cho 2 mà không chia hết cho 3 ?

b) Chia hết cho ít nhất một trong hai số 2 và 3 ?

c) Không chia hết cho 2 và không chia hết cho 3 ?

270(7). Trong các số tự nhiên từ 1 đến 1000, có bao nhiêu số:

a) Chia hết cho ít nhất một trong các số 2, 3, 5 ?

b) Không chia hết cho tất cả các số tự nhiên từ 2 đến 5 ?

271(7). Kết quả điều tra ở một lớp học cho thấy : có 20 học sinh thích bóng đá, 17 học sinh thích bơi, 36 học sinh thích bóng chuyền, 14 học sinh thích bóng đá và bơi, 13 học sinh thích bơi và bóng chuyền, 15 học sinh thích bóng đá và bóng chuyền, 10 học sinh thích cả ba môn, 12 học sinh không thích một môn nào.

Tính xem lớp học đó có bao nhiêu học sinh ?

272(7). Trong số 100 học sinh có 75 học sinh thích Toán, 60 học sinh thích Văn.

a) Nếu có 5 học sinh không thích cả Toán lẫn Văn thì có bao nhiêu học sinh thích cả hai môn Văn và Toán ?

b) Có nhiều nhất bao nhiêu học sinh thích cả hai môn Văn và Toán ?

c) Có ít nhất bao nhiêu học sinh thích cả hai môn Văn và Toán ?

273(7). Tổng kết đợt thi đua "100 điểm 10 dâng tặng thầy cô", lớp 6A có 43 bạn được từ 1 điểm 10 trở lên, 39 bạn được từ 2 điểm 10 trở lên, 14 bạn được từ 3 điểm 10 trở lên, 5 bạn được 4 điểm 10, không có ai được trên 4 điểm 10.

Tính xem trong đợt thi đua đó, lớp 6A có bao nhiêu điểm 10 ?

274(1). Tìm các tập hợp bằng nhau trong các tập hợp sau :

a) A = {9 ; 5 ; 3 ; 1 ; 7} ;

b) B là tập hợp các số tự nhiên x mà 5.x = 0 ;

c) C là tập hợp các số lẻ nhỏ hơn 10 ;

d) D là tập hợp các số tự nhiên x mà x : 3 = 0.

275(1). Cho các tập hợp :

A là tập hợp các hình chữ nhật có chiều dài 18m, chiều rộng 10m.

B là tập hợp các hình chữ nhật có chu vi 56m.

C là tập hợp các số chẵn nhỏ hơn 10.

D là tập hợp các số chẵn có một chữ số.

a) Trong các tập hợp trên, có tập hợp nào là tập hợp con của một tập hợp khác ?

b) Trong các tập hợp trên, có hai tập hợp nào bằng nhau ?

276(5). Gọi A là tập hợp các số tự nhiên có ba chữ số trong đó chữ số hàng chục bằng tổng của chữ số hàng trăm và chữ số hàng đơn vị, B là tập hợp các số chia hết cho 11 có ba chữ số. Hai tập hợp A và B có bằng nhau không ?

277(7). Cho a, b ∈ **N**. Chứng minh rằng :

a) (a, b) = (a, a + b) ;

b) (a, b) = (5a + 2b, 7a + 3b) ;

c) $(a, b) = \left(a, \frac{a+b}{2}\right)$ với a, b là các số lẻ.

278(7)*. Cho a, b, c là các số lẻ. Chứng minh rằng :

$$(a, b, c) = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}\right).$$

TÌM CHỮ SỐ TẬN CÙNG CỦA MỘT LUỸ THỪA

I – Tìm một chữ số tận cùng

Ví dụ 54(2). Chứng minh rằng $8^{102} - 2^{102}$ chia hết cho 10.

Giải : Ta thấy một số có tận cùng bằng 6 nâng lên luỹ thừa nào (khác 0) cũng tận cùng bằng 6 (vì nhân hai số có tận cùng bằng 6 với nhau, ta được số có tận cùng bằng 6). Do đó ta biến đổi như sau :

$8^{102} = (8^4)^{25}.\ 8^2 = (...6)^{25}.\ 64 = (...6).\ 64 = ...4,$

$2^{102} = (2^4)^{25}.\ 2^2 = 16^{25}.\ 4 = (...6).\ 4 = ...4.$

Vậy $8^{102} - 2^{102}$ tận cùng bằng 0 nên chia hết cho 10.

Nhận xét : Để tìm chữ số tận cùng của một luỹ thừa, ta chú ý rằng :

– Các số có tận cùng bằng 0, 1, 5, 6 nâng lên luỹ thừa nào (khác 0) cũng tận cùng bằng 0, 1, 5, 6 ;

– Các số có tận cùng bằng 2, 4, 8 nâng lên luỹ thừa 4 thì được số có tận cùng bằng 6 ;

– Các số có tận cùng bằng 3, 7, 9 nâng lên luỹ thừa 4 thì được số có tận cùng bằng 1.

II – Tìm hai chữ số tận cùng

Ví dụ 55(2). Tìm hai chữ số tận cùng của 2^{100}.

Giải : Chú ý rằng : $2^{10} = 1024$, bình phương của số có tận cùng bằng 24 thì tận cùng bằng 76, số có tận cùng bằng 76 nâng lên lũy thừa nào (khác 0) cũng tận cùng bằng 76. Do đó :

$2^{100} = (2^{10})^{10} = 1024^{10} = (1024^2)^5 = (...76)^5 = ...76.$

Vậy hai chữ số tận cùng của 2^{100} là 76.

Ví dụ 56(2). Tìm hai chữ số tận cùng của 7^{1991}.

Giải : Ta thấy : $7^4 = 2401$, số có tận cùng bằng 01 nâng lên luỹ thừa nào cũng tận cùng bằng 01. Do đó:

$7^{1991} = 7^{1988}.\ 7^3 = (7^4)^{497}.\ 343 = (...01)^{497}.\ 343$

$= (...01) \times 343 = ...\ 43.$

Vậy 7^{1991} có hai chữ số tận cùng là 43.

Nhận xét : Để tìm hai chữ số tận cùng của một luỹ thừa, cần chú ý đến những số đặc biệt :

– Các số có tận cùng bằng 01, 25, 76 nâng lên luỹ thừa nào (khác 0) cũng tận cùng bằng 01, 25, 76 ;

– Các số 3^{20} (hoặc 81^5), 7^4, 51^2, 99^2 có tận cùng bằng 01 ;

– Các số 2^{20}, 6^5, 18^4, 24^2, 68^4, 74^2 có tận cùng bằng 76 ;

– Số 26^n $(n > 1)$ có tận cùng bằng 76.

III – Tìm ba chữ số tận cùng trở lên

Cần chú ý rằng các số có tận cùng bằng 001, 376, 625 nâng lên luỹ thừa nào (khác 0) cũng tận cùng bằng 001, 376, 625. Số có tận cùng bằng 0625 nâng lên luỹ thừa nào (khác 0) cũng tận cùng bằng 0625.

Ví dụ 57(2). Tìm bốn chữ số tận cùng của 5^{1992}.

Giải : $5^{1992} = (5^4)^{498} = 0625^{498} = \ldots0625$.

Trên đây là các bài toán tìm chữ số tận cùng của một luỹ thừa giải bằng phương pháp số học ở lớp 6. Vấn đề này sẽ được nghiên cứu đầy đủ hơn bằng cách dùng các hằng đẳng thức được học ở lớp 8.

BÀI TẬP

279(4). Chứng tỏ rằng $17^5 + 24^4 - 13^{21}$ chia hết cho 10.

280(4). Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n :

a) $7^{4n} - 1$ chia hết cho 5 ;

b) $3^{4n+1} + 2$ chia hết cho 5 ;

c) $2^{4n+1} + 3$ chia hết cho 5 ;

d) $2^{4n+2} + 1$ chia hết cho 5 ;

e) $9^{2n+1} + 1$ chia hết cho 10.

281(4). Tìm các số tự nhiên n để $n^{10} + 1$ chia hết cho 10.

282(4). Có tồn tại số tự nhiên n nào để $n^2 + n + 2$ chia hết cho 5 hay không?

283(2)*. Cho số tự nhiên n. Chứng minh rằng :

a) Nếu n tận cùng bằng chữ số chẵn thì n và 6n có chữ số tận cùng như nhau.

b) Nếu n tận cùng bằng chữ số lẻ khác 5 thì n^4 tận cùng bằng 1. Nếu n tận cùng bằng chữ số chẵn khác 0 thì n^4 tận cùng bằng 6.

c) Số n^5 và n có chữ số tận cùng như nhau.

284(2). Trong các số tự nhiên từ 1 đến 10000, có bao nhiêu số có tận cùng bằng 1 mà viết được dưới dạng $8^m + 5^n$ $(m, n \in \mathbf{N})$?

285(2). Cho $A = 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{20}$.

Tìm chữ số tận cùng của A.

286(2). Tìm hai chữ số tận cùng của :

a) 51^{51} ; b) $99^{99^{99}}$; c) 6^{666} ; d) $14^{101} \cdot 16^{101}$.

287(5). Tìm 20 chữ số tận cùng của 100!

HỆ GHI SỐ VỚI CƠ SỐ TUỲ Ý

Chúng ta đã rất quen thuộc với hệ thập phân, tức là hệ ghi số cơ số 10. Tuy nhiên, còn có nhiều hệ ghi số khác như hệ ghi số cơ số 2, hệ ghi số cơ số 5, hệ ghi số cơ số 12, hệ ghi số cơ số 60, ...

I. Hệ ghi số cơ số k

1. Thế nào là hệ ghi số cơ số k ?

Trong hệ ghi số cơ số k, người ta dùng k kí hiệu để ghi số và cứ k đơn vị ở một hàng thì làm thành một đơn vị ở hàng liền trước nó.

Số $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$ trong hệ ghi số cơ số k, kí hiệu $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}_{(k)}$, trong hệ thập phân có giá trị bằng

$$a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \ldots + a_2 k^2 + a_1 k + a_0.$$

2. Đổi một số viết trong hệ ghi số cơ số k thành số viết trong hệ thập phân và ngược lại

Ví dụ 58(2). Đổi số $1203_{(5)}$ thành số viết trong hệ thập phân.

Giải : Cách 1. $1203_{(5)} = 1.5^3 + 2.5^2 + 0.5 + 3 = 178$.

Nhận xét : Ta thấy : $1 . 5^3 + 2 . 5^2 + 0 . 5 + 3$

$= (1 . 5^2 + 2 . 5 + 0) . 5 + 3 = [(1 . 5 + 2) . 5 + 0] . 5 + 3.$

Do đó có thể giải như sau :

Cách 2. Lấy chữ số hàng cao nhất nhân với 5, cộng với chữ số tiếp theo bên phải rồi nhân với 5, cứ tiếp tục như vậy cho đến phép cộng với chữ số hàng đơn vị, ta được kết quả.

$1203_{(5)} = [(1 . 5 + 2) . 5 + 0] . 5 + 3 = 178.$

Ví dụ 59(2). Đổi số 178 trong hệ thập phân thành số viết trong hệ ghi số cơ số 5.

Nhận xét : Chia 178 thành từng nhóm, mỗi nhóm 5 đơn vị, được 35 nhóm, còn dư 3. Chia 35 thành từng nhóm, mỗi nhóm 5 đơn vị, được 7 nhóm, dư 0. Lại chia 7 thành nhóm 5 đơn vị, được 1 nhóm, dư 2. Số 1 không chia thành nhóm 5 đơn vị được nữa. Do đó các số 1, 2, 0, 3 (là thương cuối cùng và các số dư, kể từ số dư cuối cùng trở lên) là các chữ số từ hàng cao đến hàng thấp của số 178 trong hệ ghi số cơ số 5.

Giải : Ta đặt các phép chia liên tiếp như sau :

$$
\begin{array}{rr|r|r|l}
 & 178 & 5 & & \\ \cline{3-3}
\text{hàng đơn vị} & 3 & 35 & 5 & \\ \cline{4-4}
 & & 0 & 7 & 5 \\ \cline{5-5}
 & & & 2 & 1 \rightarrow \text{hàng cao nhất}
\end{array}
$$

Vậy : $178 = 1203_{(5)}$.

Tổng quát, muốn đổi một số viết trong hệ thập phân thành số viết trong hệ ghi số cơ số k, ta lấy số đó chia cho k, rồi lấy thương chia cho k, ..., cứ tiếp tục như vậy cho đến khi thương nhỏ hơn k. Thương cuối cùng và các số dư, kể từ số dư cuối cùng trở lên là các chữ số từ hàng cao đến hàng thấp của số phải tìm.

3. Các phép tính trong hệ ghi số cơ số k

Trong hệ ghi số cơ số k, các phép tính cũng được thực hiện tương tự như trong hệ thập phân, chỉ cần lưu ý rằng :

– Trong phép cộng, nếu kết quả được k thì viết 0 nhớ 1.

– Trong phép trừ, một đơn vị hàng cao đổi thành k đơn vị hàng thấp tiếp theo.

Ví dụ 60(2). Thực hiện các phép tính sau trong hệ ghi số cơ số 8 :

$$5435_{(8)} + 3252_{(8)};\ 1245_{(8)} - 316_{(8)};\ 214_{(8)} . 32_{(8)};\ 356_{(8)} : 13_{(8)}.$$

Giải : (Trong lời giải này, các số đều viết trong hệ ghi số cơ số 8) :

$$\begin{array}{r} 5\,4\,3\,5 \\ +\ \ 3\,2\,5\,3 \\ \hline 10\,7\,1\,0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\,2\,4\,5 \\ -\ \ 3\,1\,6 \\ \hline 7\,2\,7 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2\,1\,4 \\ \times\ \ 3\,2 \\ \hline 4\,3\,0 \\ 6\,4\,4\ \ \\ \hline 7\,0\,7\,0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3\,5\,6 & 13 \\ \cline{2-2} 2\,6\ \ & 25 \\ \cline{1-1} 7\,6 & \\ 6\,7 & \\ \cline{1-1} 7 & \end{array}$$

II – Hệ ghi số cơ số 2

1. Thế nào là hệ ghi số cơ số 2 ?

Một trong các hệ ghi số đáng chú ý là hệ ghi số cơ số 2 (hoặc hệ nhị phân). Trong hệ ghi số này, người ta chỉ dùng hai kí hiệu để ghi số là 0 và 1, và cứ hai đơn vị ở một hàng thì làm thành một đơn vị ở hàng liền trước nó.

Giá trị của số $1011_{(2)}$ trong hệ thập phân là :

$$1011_{(2)} = 1.2^3 + 0.2^2 + 1.2 + 1 = 11.$$

Ví dụ 61(2). An có 15 viên bi đựng trong bốn hộp. Muốn lấy ra một số bi, An chỉ cần lấy ra một số hộp là có đúng số bi định lấy, không thừa không thiếu viên nào. Hỏi mỗi hộp đựng bao nhiêu viên bi ?

Giải : Bốn hàng từ thấp lên cao trong hệ nhị phân là hàng 1, hàng 2, hàng 4, hàng 8. Mọi số từ 1 đến 15 trong hệ thập phân viết trong hệ nhị phân đều có không quá bốn chữ số, ví dụ $15 = 1111_{(2)}$, $14 = 1110_{(2)}$, $13 = 1101_{(2)}$, ...

Như vậy, nếu bốn hộp của An theo thứ tự đựng 1, 2, 4, 8 viên bi thì thỏa mãn yêu cầu của bài toán. Chẳng hạn muốn lấy 14 viên bi thì An chọn các hộp chứa 8, 4, 2 viên bi, muốn lấy 13 viên bi thì An chọn các hộp chứa 8, 4, 1 viên bi.

2. Các phép tính trong hệ nhị phân

Các quy tắc cộng và nhân trong hệ nhị phân rất đơn giản :

$$0 + 0 = 0 \; ; \quad 0 + 1 = 1 \; ; \quad 1 + 0 = 1 \; ; \quad 1 + 1 = 10 \; ;$$
$$0 \,.\, 0 = 0 \; ; \quad 0 \,.\, 1 = 0 \; ; \quad 1 \,.\, 0 = 0 \; ; \quad 1 \,.\, 1 = 1.$$

Rõ ràng ta không cần thuộc "bảng cửu chương" như làm tính trong hệ thập phân.

Ví dụ 62(2). Thực hiện các phép tính sau trong hệ nhị phân :

$$1010_{(2)} + 110_{(2)} ;\; 1001_{(2)} - 110_{(2)} ;\; 1011_{(2)} \,.\, 101_{(2)} ;\; 1010_{(2)} : 11_{(2)}.$$

Giải : (Trong lời giải này, các số đều viết trong hệ nhị phân) :

$$\begin{array}{r} 1010 \\ +\;\; 110 \\ \hline 10000 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1001 \\ -\;\; 110 \\ \hline 11 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1011 \\ \times\quad 101 \\ \hline 1011 \\ 1011 \\ \hline 110111 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1010 & 11 \\ \cline{2-2} 11 & 11 \\ \cline{1-1} 100 & \\ 11 & \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

3. Hệ nhị phân và máy tính điện tử

Đối với chúng ta, thực hiện phép tính trong hệ nhị phân có thể mất nhiều thời gian, nhưng quy tắc tính toán lại rất đơn giản. Hơn nữa, hệ ghi số này chỉ dùng hai kí hiệu (là 0 và 1) có thể cho tương ứng với hai trạng thái khác nhau của dòng điện (là "không" và "có"). Do đó hệ nhị phân được sử dụng trong máy tính điện tử : mỗi kí hiệu 0 hoặc 1 được gọi là một bit (viết tắt của *binary digit* : chữ số nhị phân).

Trong hệ nhị phân, một số bất kì được viết dưới dạng một dãy các kí hiệu 1 và 0, còn trong máy tính điện tử số đó được thể hiện bởi một tổ hợp các tín hiệu điện theo hai loại khác nhau.

Ở máy tính điện tử, trong phép cộng ta đặt thêm các dòng nhớ, trong phép nhân ta chỉ cần dịch các hàng của số bị nhân thì được các tích riêng, các công việc đó đối với máy tính điện tử là hoàn toàn tự động.

Tuy ở bên trong, máy tính điện tử làm việc với hệ nhị phân nhưng vì một số viết dưới dạng nhị phân rất dài nên người ta còn dùng hệ ghi số cơ số 8 (hệ Octal) và hệ ghi số cơ số 16 (hệ Hexa) : một chữ số trong hệ Octal tương đương với một cụm ba chữ số nhị phân (3 bit), một chữ số trong hệ Hexa tương đương với một cụm bốn chữ số nhị phân (4 bit). Một số 8 chữ số nhị phân được gọi là một bai (*byte*). Các loại máy tính điện tử hiện nay thường làm việc với 1 hoặc 2 bai, có loại với 4 bai.

BÀI TẬP

288(2). Đổi các số sau thành số viết trong hệ thập phân :

a) $206_{(7)}$; b) $32075_{(8)}$.

289(2). Đổi các số :

a) 141 trong hệ thập phân thành số viết trong hệ ghi số cơ số 4 ;

b) 19 trong hệ thập phân thành số viết trong hệ nhị phân.

290(2). a) Đổi số $12221_{(3)}$ thành số viết trong hệ ghi số cơ số 9 mà không đổi qua hệ thập phân.

b) Đổi số $758_{(9)}$ thành số viết trong hệ ghi số cơ số 3 mà không đổi qua hệ thập phân.

291(2). Trong hệ ghi số cơ số k nào ta có :

a) $2_{(k)} . 2_{(k)} = 11_{(k)}$? b) $12_{(k)} . 5_{(k)} = 62_{(k)}$?

c) $21_{(k)} . 2_{(k)} = 112_{(k)}$? d) $11_{(k)} . 11_{(k)} = 121_{(k)}$?

292(2). Trong hệ ghi số cơ số k nào thì :

a) $15_{(k)}$ chia hết cho $4_{(k)}$? b) $75_{(k)}$ chia hết cho $7_{(k)}$?

293(2). Thực hiện các phép tính sau trong hệ ghi số cơ số 5 :

a) $144_{(5)} + 330_{(5)}$; b) $1024_{(5)} - 132_{(5)}$; c) $214_{(5)} . 32_{(5)}$; d) $211_{(5)} : 13_{(5)}$.

294(2). Thực hiện các phép tính sau trong hệ nhị phân :

a) $1011_{(2)} + 110_{(2)}$; b) $1100_{(2)} - 101_{(2)}$; c) $110_{(2)} . 11_{(2)}$; d) $1001_{(2)} : 11_{(2)}$.

295(2). Người ta thả một số bèo vào ao thì sau 6 ngày bèo phủ kín mặt ao. Biết rằng cứ sau một ngày thì diện tích bèo phủ tăng gấp đôi. Hỏi :

a) Sau mấy ngày, bèo phủ được một nửa ao ?

b) Sau ngày thứ nhất, bèo phủ được mấy phần của ao ?

296(2). Linh thích chơi tem và có sáu gói tem, các gói này theo thứ tự có 1, 2, 4, 8, 16, 32 chiếc tem. Hãy chứng tỏ rằng nếu bất cứ bạn nào muốn mượn Linh một số tem từ 1 đến 63 thì Linh chỉ cần lấy ra một số gói là có đúng số tem yêu cầu (mà không cần mở một gói nào ra).

297(2). Có thể dùng một cân đĩa có hai đĩa cân với năm quả cân, các quả cân chỉ để ở một đĩa cân, để cân tất cả các vật có khối lượng là một số tự nhiên từ 1kg đến 30kg được không ?

298(2). *Đố vui : Đoán tháng sinh*

Bạn Tú viết lên bảng bốn dòng :

"Tháng Tươi vui" : 8, 9, 10, 11, 12.

"Tháng Bền bỉ" : 4, 5, 6, 7, 12.

"Tháng Hoạt bát" : 2, 3, 6, 7, 10, 11.

"Tháng Mạnh mẽ" : 1, 3, 5, 7, 9, 11.

Một bạn cho biết mình sinh vào tháng Bền bỉ và Hoạt bát, Tú không nhìn bảng mà vẫn đoán được ngay bạn đó sinh vào tháng 6, Tú làm thế nào ?

299(2). Cho $A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{30}$. Viết $A + 1$ dưới dạng một luỹ thừa.

300(2). Theo truyền thuyết, người phát minh ra bàn cờ 64 ô được nhà vua Ấn Độ thưởng cho một phần thưởng tuỳ ý. Ông đã xin vua thưởng cho mình :

1 hạt thóc cho ô thứ nhất,

2 hạt thóc cho ô thứ hai,

4 hạt thóc cho ô thứ ba,

8 hạt thóc cho ô thứ tư,

và cứ tiếp tục như vậy, số hạt thóc ở ô sau gấp đôi số hạt thóc ở ô trước, cho đến ô cuối cùng.

Yêu cầu tưởng như đơn giản, nhưng cả kho thóc của nhà vua cũng không đủ để thưởng. Tính số hạt thóc mà người phát minh ra bàn cờ yêu cầu.

301(2). *Đố vui : Giá tiền con ngựa*

Một lái buôn hí hửng mua được một con ngựa với giá rẻ "chỉ bằng tiền đinh đóng móng ngựa" : mỗi chân ngựa có 5 đinh, chiếc đinh thứ nhất giá 1 xu (1 đồng bằng 100 xu), chiếc đinh thứ hai giá 2 xu, chiếc đinh thứ ba giá 4 xu, chiếc đinh thứ tư giá 8 xu, và cứ như vậy : giá chiếc đinh sau gấp đôi giá chiếc đinh trước.

Hãy tính giá tiền con ngựa theo giao ước trên.

MỘT SỐ VẤN ĐỀ LỊCH SỬ VỀ SỐ NGUYÊN TỐ

Số nguyên tố được nghiên cứu từ nhiều thế kỉ trước Công nguyên nhưng cho đến nay nhiều bài toán về số nguyên tố vẫn chưa được giải quyết trọn vẹn.

I – Sàng Ơ - ra - tô - xten (*Eratosthène*)

Làm thế nào để tìm được tất cả các số nguyên tố trong một giới hạn nào đó, chẳng hạn từ 1 đến 100 ?

Ta làm như sau : Trước hết xoá số 1.

Giữ lại số 2 rồi xoá tất cả các bội của 2 mà lớn hơn 2.

Giữ lại số 3 rồi xoá tất cả các bội của 3 mà lớn hơn 3.

Giữ lại số 5 (số 4 đã bị xoá) rồi xoá tất cả các bội của 5 mà lớn hơn 5.

Giữ lại số 7 (số 6 đã bị xoá) rồi xoá tất cả các bội của 7 mà lớn hơn 7.

Các số 8, 9, 10, đã bị xoá. Không cần xoá tiếp các bội của các số lớn hơn 10 cũng kết luận được rằng không còn hợp số nào nữa.

Thật vậy, giả sử n là một hợp số chia hết cho một số a lớn hơn 10 thì do $n < 100$, $a > 10$ nên n phải chia hết cho một số b nhỏ hơn 10, do đó n đã bị xoá.

Nhà toán học cổ Hi Lạp Ơ - ra - tô - xten (thế kỉ III trước Công nguyên) là người đầu tiên đưa ra cách làm này. Ông viết các số trên giấy cỏ sậy căng trên một cái khung rồi dùi thủng các hợp số được một vật tương tự như cái sàng : các hợp số được sàng qua, các số nguyên tố được giữ lại. Bảng số nguyên tố này được gọi là sàng Ơ - ra - tô - xten.

Ví dụ 63(5). Dùng bảng các số nguyên tố nhỏ hơn 100, hãy nêu cách kiểm tra một số nhỏ hơn 10000 có là số nguyên tố không ? Xét bài toán trên đối với các số 259, 353.

Giải : Cho số $n < 10000$ $(n > 1)$. Nếu n chia hết cho một số k nào đó $(1 < k < n)$ thì n là hợp số. Nếu n không chia hết cho mọi số nguyên tố p $(p^2 \leqslant n)$ thì n là số nguyên tố.

Số 259 chia hết cho 7 nên là hợp số.

Số 353 không chia hết cho tất cả các số nguyên tố p mà $p^2 \leqslant 353$ (đó là các số nguyên tố 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17) nên 353 là số nguyên tố.

II – Sự phân bố số nguyên tố

Từ 1 đến 100 có 25 số nguyên tố, trong trăm thứ hai có 21 số nguyên tố, trong trăm thứ ba có 16 số nguyên tố, ... Trong nghìn đầu tiên có 168 số nguyên tố, trong nghìn thứ hai có 145 số nguyên tố, trong nghìn thứ ba có 127 số nguyên tố, ... Như vậy càng đi xa theo dãy số tự nhiên, các số nguyên tố càng thưa dần.

Ví dụ 64(5). Có tồn tại 1000 số tự nhiên liên tiếp đều là hợp số không ?

Giải : Có. Gọi $A = 2 . 3 . 4 \ldots . 1001$. Các số $A + 2$, $A + 3$, ..., $A + 1001$ là 1000 số tự nhiên liên tiếp và rõ ràng đều là hợp số (đpcm).

Một vấn đề được đặt ra : Có những khoảng rất lớn các số tự nhiên liên tiếp đều là hợp số. Vậy có thể đến một lúc nào đó không còn số nguyên tố nữa không ? Có số nguyên tố cuối cùng không ? Từ thế kỉ III trước Công nguyên, nhà toán học cổ HiLạp Ơ - clit *(Euclide)* đã chứng minh rằng : Tập hợp các số nguyên tố là vô hạn.

Ví dụ 65(5)*. Chứng minh rằng không thể có hữu hạn số nguyên tố.

Giải : Giả sử chỉ có hữu hạn số nguyên tố là $p_1, p_2, \ldots, p_n$ trong đó p_n là số lớn nhất trong các số nguyên tố.

Xét số $A = p_1p_2 \ldots p_n + 1$ thì A chia cho mỗi số nguyên tố p_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ đều dư 1 (1).

Mặt khác A là hợp số (vì nó lớn hơn số nguyên tố lớn nhất là p_n) do đó A phải chia hết cho một số nguyên tố nào đó, tức là A chia hết cho một trong các số p_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ (2), mâu thuẫn với (1).

Vậy không thể có hữu hạn số nguyên tố (đpcm).

Qua sự phân bố các số nguyên tố, nhà toán học Pháp Bec - tơ - răng đưa ra dự đoán : Nếu $n > 1$ thì giữa n và 2n có ít nhất một số nguyên tố. Năm 1852, nhà toán học Nga Trê - bư - sép đã chứng minh được mệnh đề này. Ông còn chứng minh được :

Nếu $n > 3$ thì giữa n và $2n - 2$ có ít nhất một số nguyên tố. Ta cũng có mệnh đề sau : Nếu $n > 5$ thì giữa n và 2n có ít nhất hai số nguyên tố.

Ví dụ 66(5)*. Cho số tự nhiên $n > 2$. Chứng minh rằng số $n! - 1$ có ít nhất một ước nguyên tố lớn hơn n.

Giải : Gọi $a = n! - 1$. Do $n > 2$ nên $a > 1$. Mọi số tự nhiên lớn hơn 1 đều có ít nhất một ước nguyên tố. Gọi p là ước nguyên tố của a. Ta sẽ chứng minh rằng $p > n$.

Thật vậy giả sử $p \leqslant n$ thì tích 1.2.3...n chia hết cho p, ta có n! chia hết cho p, mà a chia hết cho p nên 1 chia hết cho p, vô lí.

Chú ý : Từ bài toán trên ta cũng suy ra rằng có vô số số nguyên tố.

III - Công thức cho một số nguyên tố

Ví dụ 67(5). a) Chứng minh rằng mọi số nguyên tố m lớn hơn 3 đều viết được dưới dạng $6n + 1$ hoặc $6n - 1$ ($n \in \mathbb{N}$).

b) Có phải mọi số có dạng $6n \pm 1$ ($n \in \mathbb{N}$) đều là số nguyên tố hay không?

Giải : a) Mỗi số tự nhiên khi chia cho 6 có một trong các số dư 0, 1, 2, 3, 4, 5. Do đó mọi số tự nhiên đều viết được dưới một trong các dạng $6n - 2$, $6n - 1$, $6n$, $6n + 1$, $6n + 2$, $6n + 3$. Vì m là số nguyên tố lớn hơn 3 nên m không chia hết cho 2, không chia hết cho 3, do đó m không có dạng $6n - 2$, $6n$, $6n + 2$, $6n + 3$. Vậy m viết được dưới dạng $6n + 1$ hoặc $6n - 1$ (Ví dụ : $17 = 6 . 3 - 1$, $19 = 6 . 3 + 1$).

b) Không phải mọi số có dạng $6n \pm 1$($n \in \mathbb{N}$) đều là số nguyên tố. Chẳng hạn $6 . 4 + 1 = 25$ không là số nguyên tố (đpcm).

Liệu có một công thức nào mà với mọi giá trị tự nhiên của chữ đều cho ta các số nguyên tố không ? Cho đến nay, người ta chưa tìm thấy một công thức như vậy. Tuy nhiên có một số biểu thức mà với khá nhiều giá trị của chữ, biểu thức đó cho ta các số nguyên tố.

Biểu thức $2n^2 + 29$ cho các giá trị nguyên tố với $n = 0, 1, 2, ..., 28$.

Biểu thức $n^2 + n + 41$ do Ơ - le *(Euler* 1707 - 1783) đưa ra cho các giá trị nguyên tố với $n = 0, 1, 2, ..., 39$ (còn với $n = 40$ thì $40^2 + 40 + 41 = 40 . (40 + 1) + 41$ chia hết cho 41).

Biểu thức $n^2 - 79n + 1601$ cũng cho các giá trị nguyên tố với $n = 0, 1, 2, ..., 79$ (còn với $n = 80$ thì biểu thức bằng 41^2).

Số Phec - ma. Nhà toán học kiêm luật gia Pháp Phec - ma (*Pierre de Fermat* 1601 - 1665) xét biểu thức $2^m + 1$ trong đó $m = 2^n$ với $n = 0, 1, 2, 3, 4$, cho các số nguyên tố $2 + 1 = 3$, $2^2 + 1 = 5$, $2^4 + 1 = 17$, $2^8 + 1 = 257$, $2^{16} + 1 = 65537$. Với $n = 5$, được số $2^{32} + 1 = 4294967297$, Phec - ma cho rằng đó cũng là số nguyên tố và ông đưa ra giả thuyết : Biểu thức $2^m + 1$ với m là một luỹ thừa của 2 cho ta các số nguyên tố.

Ý kiến này đứng vững rất lâu. Mãi đến năm 1732, Ơ - le mới bác bỏ giả thuyết trên bằng cách chỉ ra số $2^{32} + 1$ chia hết cho 641. Đây là một trong các ví dụ điển hình nhất chứng tỏ rằng phép quy nạp không hoàn toàn có thể dẫn đến sai lầm.

Các số có dạng $2^m + 1$ với m là một lũy thừa của 2 được gọi là số Phec - ma.

IV – Biểu diễn một số dưới dạng tổng các số nguyên tố

Năm 1742 nhà toán học Đức Gôn - bách viết thư báo cho Ơ - le biết rằng ông mạo hiểm đưa ra bài toán : *Mọi số tự nhiên lớn hơn 5 đều biểu diễn được dưới dạng tổng của ba số nguyên tố.* Ơ - le trả lời rằng theo ông, *mọi số chẵn lớn hơn 2 đều biểu diễn được dưới dạng tổng của hai số nguyên tố.*

Nếu chứng minh được một trong hai mệnh đề trên thì chứng minh được mệnh đề còn lại. Trong 200 năm, các nhà toán học thế giới không giải được bài toán Gôn - bách – Ơ - le. Đến năm 1937, nhà toán học Liên Xô Vi - nô - gra - đốp đã giải quyết gần trọn vẹn bài toán đó bằng cách chứng minh rằng : *Mọi số lẻ đủ lớn đều có thể biểu diễn được dưới dạng tổng của ba số nguyên tố.*

Cho đến nay, bài toán Gôn - bách – Ơ - le vẫn chưa được chứng minh hoàn toàn.

Ví dụ 68(5). Công nhận mệnh đề nói trên của Ơ - le, hãy chứng minh bài toán Gôn - bách.

Giải : Cho số tự nhiên $n > 5$, ta sẽ chứng minh rằng n viết được dưới dạng tổng của ba số nguyên tố. Xét hai trường hợp :

a) Nếu n chẵn thì $n = 2 + m$ với m chẵn, $m > 3$.

b) Nếu n lẻ thì $n = 3 + m$ với m chẵn, $m > 2$.

Theo mệnh đề Ơ - le, m chẵn, $m > 2$ nên m viết được dưới dạng tổng hai số nguyên tố. Do đó n viết được dưới dạng tổng của ba số nguyên tố.

BÀI TẬP

302(5). Tìm 10 số tự nhiên liên tiếp chứa nhiều số nguyên tố nhất.

303(5). Chứng minh rằng mọi số nguyên tố lớn hơn 2 đều viết được dưới dạng $4n + 1$ hoặc $4n + 3$ ($n \in \mathbf{N}$).

304(5). Cho biểu thức $n = \dfrac{2^p + 1}{3}$. Xét xem với p bằng 3, 5, 7, 9 thì n là số nguyên tố hay hợp số ?

305(5). Số có dạng $M = 2^n - 1$ gọi là số Mec-xen (*Mersenne,* nhà toán học kiêm cha cố Pháp thế kỉ XVII). Xét xem với n bằng 2, 3, 5, 7, 11 thì M là số nguyên tố hay hợp số ?

306(5). Viết các số chẵn từ 20 đến 30 dưới dạng tổng của hai số nguyên tố.

307(7). a) Viết các số 7, 8, 9, 10 thành tổng hai số nguyên tố cùng nhau lớn hơn 1.

b)* Chứng minh rằng mọi số tự nhiên n lớn hơn 6 đều biểu diễn được dưới dạng tổng hai số nguyên tố cùng nhau lớn hơn 1.

(*Hướng dẫn :* Xét hai trường hợp n lẻ và n chẵn).

CÁC VẤN ĐỀ NÂNG CAO VỀ TÍNH CHIA HẾT, ƯỚC VÀ BỘI

I – Dấu hiệu chia hết cho 11

Cho $A = \overline{...a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_o}$.

$A \vdots 11 \Leftrightarrow [(a_o + a_2 + a_4 + ...) - (a_1 + a_3 + a_5 + ...)] \vdots 11.$

Chứng minh :

$A = (a_o + 10^2 a_2 + 10^4 a_4 + ...) + (10a_1 + 10^3 a_3 + 10^5 a_5 + ...)$

Chú ý rằng : $10^2 = 99 + 1$, $10^4 = 9999 + 1$, ..., tổng quát :

10^{2k} = bội 11 + 1, còn $10 = 11 - 1$, $10^3 = 1001 - 1$, $10^5 = 100001 - 1$, ..., tổng quát 10^{2k+1} = bội 11 − 1. Do đó : A = (bội 11 + $a_o + a_2 + a_4 + ...$) + + (bội 11 − $a_1 - a_3 - a_5 - ...$) = bội 11 + $(a_o + a_2 + a_4 + ...) - (a_1 + a_3 + a_5 + ...)$

Như vậy điều kiện cần và đủ để một số chia hết cho 11 là : tổng các chữ số hàng lẻ và tổng các chữ số hàng chẵn của số đó có hiệu chia hết cho 11.

Ví dụ 69(4). Vận dụng dấu hiệu chia hết cho 11 để tìm các chữ số x và y sao cho :

$$A = \overline{62xy427} \text{ chia hết cho } 99.$$

Giải : $A \vdots 99 \Leftrightarrow A \vdots 11$ và $A \vdots 9$.

Tổng các chữ số hàng lẻ của A (từ phải sang trái) là 7 + 4 + x + 6 hay x + 17.

Tổng các chữ số hàng chẵn của A (từ phải sang trái) là 2 + y + 2 hay y + 4. Tổng các chữ số của A là x + y + 21.

$A \vdots 11 \Leftrightarrow (x + 17) - (y + 4) \vdots 11$

$\Leftrightarrow 13 + x - y \vdots 11$

Do đó : $x - y = 9$ (nếu $x > y$)

hoặc $y - x = 2$ (nếu $y > x$)

$A \vdots 9 \Leftrightarrow x + y + 21 \vdots 9 \Leftrightarrow x + y \in \{6 ; 15\}$. Trường hợp $x - y = 9$ cho ta $x = 9$; $y = 0$. Khi đó $x + y = 9$, loại.

Trường hợp $y - x = 2$ thì $y + x$ phải chẵn nên $y + x = 6$. Ta được :

$$x = \frac{6 - 2}{2} = 2 \; ; \; y = 2 + 2 = 4.$$

Đáp số : $x = 2$; $y = 4$;

$A = 6224427$.

II – Số lượng các ước của một số(*)

Nếu dạng phân tích ra thừa số nguyên tố của một số tự nhiên A là $a^x . b^y . c^z ...$ thì số lượng các ước của A bằng $(x+1)(y+1)(z+1)...$

Thật vậy, ước của A là số có dạng mnp... trong đó m có $x + 1$ cách chọn (là $1, a, a^2, ..., a^x$),

n có $y + 1$ cách chọn (là $1, b, b^2, ..., b^y$),

p có $z + 1$ cách chọn (là $1, c, c^2, ..., c^z$), ...

Do đó số lượng các ước của A bằng $(x + 1)(y + 1)(z + 1)...$

Ví dụ 70(6). Tìm số nhỏ nhất có 12 ước.

Giải : Phân tích số phải tìm ra thừa số nguyên tố :

$n = a^x.b^y.c^z...$, ta có $(x + 1)(y + 1)(z + 1) ... = 12$.

$$(x \geqslant y \geqslant z \geqslant ... \geqslant 1).$$

Số 12 có bốn cách viết thành một tích của một hay nhiều thừa số lớn hơn 1 là 12, 6.2, 4.3, 3.2.2. Xét các trường hợp :

a) n chứa một thừa số nguyên tố : Khi đó $x + 1 = 12$ nên $x = 11$. Chọn thừa số nguyên tố nhỏ nhất là 2, ta có số nhỏ nhất trong trường hợp này là 2^{11}.

b) n chứa hai thừa số nguyên tố : Khi đó $(x + 1)(y + 1) = 6 . 2$ hoặc $(x + 1)(y + 1) = 4 . 3$, do đó $x = 5$, $y = 1$ hoặc $x = 3$, $y = 2$. Để n nhỏ nhất ta chọn thừa số nguyên tố nhỏ ứng với số mũ lớn, ta có $n = 2^5 . 3 = 96$ hoặc $n = 2^3 . 3^2 = 72$. Số nhỏ nhất trong trường hợp này là 72.

c) n chứa ba thừa số nguyên tố : Khi đó $(x + 1)(y + 1)(z + 1) = 3 . 2 . 2$ nên $x = 2$, $y = z = 1$. Số nhỏ nhất là $2^2 . 3 . 5 = 60$.

So sánh ba số 2^{11}, 72, 60 trong ba trường hợp, ta thấy số nhỏ nhất có 12 ước số là 60.

(*) Khi nói đến số lượng các ước của một số ở mục này, ta chỉ kể các ước tự nhiên của số đó.

III – Toán về chia hết liên quan đến số nguyên tố, ƯCLN, BCNN

Ngoài các tính chất đã nêu ở §3, với các kiến thức về số nguyên tố, số nguyên tố cùng nhau, ƯCLN, BCNN, ta có thêm một số tính chất về chia hết :

1) Nếu một tích chia hết cho số nguyên tố p thì tồn tại một thừa số của tích chia hết cho p.

Hệ quả : Nếu a^n chia hết cho số nguyên tố p thì a chia hết cho p.

2) Nếu tích ab chia hết cho m trong đó b và m là hai số nguyên tố cùng nhau thì a chia hết cho m.

Thật vậy, phân tích m ra thừa số nguyên tố :

$$m = a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_n^{k_n} \quad (1)$$

Vì ab chia hết cho m nên ab chứa tất cả các thừa số nguyên tố $a_1, a_2, \ldots, a_n$ với số mũ lớn hơn hoặc bằng số mũ của các thừa số nguyên tố đó trong (1). Nhưng b và m nguyên tố cùng nhau nên b không chứa thừa số nguyên tố nào trong các thừa số $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Do đó a chứa tất cả các thừa số $a_1, a_2, \ldots, a_n$ với số mũ lớn hơn hoặc bằng số mũ của các thừa số nguyên tố đó trong (1) tức là a chia hết cho m.

3) Nếu a chia hết cho m và n thì a chia hết cho BCNN của m và n.

Thật vậy, a chia hết cho m và n nên a là bội chung của m và n do đó a chia hết cho BCNN(m, n).

Hệ quả : Nếu a chia hết cho hai số nguyên tố cùng nhau m và n thì a chia hết cho tích mn.

Các tính chất này cung cấp thêm những công cụ mới để chứng minh quan hệ chia hết của các số.

Ví dụ 71(7). Tìm số tự nhiên n sao cho 18n + 3 chia hết cho 7.

Giải : Cách 1.

$$\begin{aligned}
& 18n + 3 \ \vdots\ 7 \\
\Leftrightarrow\ & 14n + 4n + 3 \ \vdots\ 7 \\
\Leftrightarrow\ & 4n + 3 \ \vdots\ 7 \\
\Leftrightarrow\ & 4n + 3 - 7 \ \vdots\ 7 \\
\Leftrightarrow\ & 4n - 4 \ \vdots\ 7 \\
\Leftrightarrow\ & 4(n - 1) \ \vdots\ 7
\end{aligned}$$

Ta lại có (4, 7) = 1 nên $n - 1 \ \vdots\ 7$.

Vậy $n = 7k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$).

Cách 2.

$$\begin{aligned}
& 18n + 3 \ \vdots\ 7 \\
\Leftrightarrow\ & 18n + 3 - 21 \ \vdots\ 7 \\
\Leftrightarrow\ & 18n - 18 \ \vdots\ 7 \\
\Leftrightarrow\ & 18(n - 1) \ \vdots\ 7.
\end{aligned}$$

Ta lại có (18, 7) = 1 nên n − 1 ⋮ 7.

Vậy $n = 7k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$).

Nhận xét. Việc thêm bớt các bội của 7 trong hai cách giải trên nhằm đi đến một biểu thức chia hết cho 7 mà ở đó hệ số của n bằng 1.

Ví dụ 72(5). Tìm số tự nhiên có ba chữ số như nhau, biết rằng số đó có thể viết được dưới dạng tổng các số tự nhiên liên tiếp bắt đầu từ 1.

Giải : Gọi số phải tìm là $\overline{aaa}$, số đó viết được dưới dạng

$1 + 2 + 3 + ... + n$ ($n \in \mathbb{N}$). Ta có : $\frac{n(n+1)}{2} = 111a$, do đó :

$$n(n + 1) = 2 . 3 . 37 . a.$$

Vì $n(n + 1)$ chia hết cho số nguyên tố 37 nên tồn tại một trong hai thừa số n, n + 1 chia hết cho 37. Chú ý rằng n và n + 1 đều nhỏ hơn 74 (vì $\frac{n(n+1)}{2}$ là số có ba chữ số) nên ta xét hai trường hợp :

a) $n = 37$ thì $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{37 . 38}{2} = 703$, loại.

b) $n + 1 = 37$ thì $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{36 . 37}{2} = 666$, thoả mãn bài toán. Vậy số phải tìm là 666, viết được dưới dạng $1 + 2 + 3 + ... + 36$.

Ví dụ 73(7). Cho biết $a + 4b$ chia hết cho 13, ($a, b \in \mathbb{N}$). Chứng minh rằng $10a + b$ chia hết cho 13.

Giải : Đặt $a + 4b = x$; $10a + b = y$. Ta biết $x ⋮ 13$, cần chứng minh $y ⋮ 13$.

Cách 1. Xét biểu thức :

$10x - y = 10(a + 4b) - (10a + b) = 10a + 40b - 10a - b = 39b$.

Như vậy $10x - y ⋮ 13$.

Do $x ⋮ 13$ nên $10x ⋮ 13$. Suy ra $y ⋮ 13$.

Cách 2. Xét biểu thức :

$4y - x = 4(10a + b) - (a + 4b) = 40a + 4b - a - 4b = 39a$.

Như vậy $4y - x ⋮ 13$.

Do $x ⋮ 13$ nên $4y ⋮ 13$. Ta lại có (4, 13) = 1, nên $y ⋮ 13$.

Cách 3. Xét biểu thức :

$3x + y = 3(a + 4b) + (10a + b) = 3a + 12b + 10a + b = 13a + 13b$.

Như vậy $3x + y ⋮ 13$.

Do $x ⋮ 13$ nên $3x ⋮ 13$. Suy ra $y ⋮ 13$.

Cách 4. Xét biểu thức :

$x + 9y = a + 4b + 9(10a + b) = a + 4b + 90a + 9b = 91a + 13b.$

Như vậy $x + 9y \vdots 13$.

Do $x \vdots 13$ nên $9y \vdots 13$. Ta lại có $(9, 13) = 1$, nên $y \vdots 13$.

Nhận xét. Trong các cách giải trên, ta đã đưa ra các biểu thức mà sau khi rút gọn có một số hạng là bội của 13, khi đó số hạng thứ hai (nếu có) cũng là bội của 13.

Hệ số của a ở x là 1, hệ số của a ở y là 10 nên xét biểu thức $10x - y$ nhằm khử a (tức là làm cho hệ số của a bằng 0), xét biểu thức $3x + y$ nhằm tạo ra hệ số của a bằng 13.

Hệ số của b ở x là 4, hệ số của b ở y là 1 nên xét biểu thức $4y - x$ nhằm khử b, xét biểu thức $x + 9y$ nhằm tạo ra hệ số của b bằng 13.

Ví dụ 74(7). Cho một số tự nhiên chia hết cho 7 gồm sáu chữ số. Chứng minh rằng nếu chuyển chữ số tận cùng lên đầu tiên, ta vẫn được một số chia hết cho 7.

Giải : Gọi số chia hết cho 7 đã cho là $X = \overline{abcdeg}$, ta cần chứng minh rằng $Y = \overline{gabcde}$ chia hết cho 7. Đặt $\overline{abcde} = n$ thì $X = 10n + g$, $Y = 100000g + n$.

Cách 1. Với dụng ý làm xuất hiện 21n là một bội của 7, ta xét $2X + Y = 20n + 2g + 100000g + n = 21n + 100002g$. Biểu thức này chia hết cho 7 vì 21 và 100002 đều là bội của 7, mà 2X chia hết cho 7, do đó Y chia hết cho 7.

Cách 2. Với dụng ý khử n, ta xét $10Y - X = 1000000g + 10n - 10n - g = 999999g$, là bội của 7. Ta lại có X chia hết cho 7 suy ra 10Y chia hết cho 7, mà $(10, 7) = 1$ nên Y chia hết cho 7.

Các cách khác. Xét $3Y - X$ để xuất hiện 7n, xét $X + 4Y$ để xuất hiện 14n, ...

Ví dụ 75(7). Tìm các số tự nhiên, biết rằng tích của nó với số tự nhiên liền sau nó có tận cùng là 00.

Giải : Gọi n là số phải tìm, ta có $n(n + 1)$ chia hết cho 100. Xét hai trường hợp :

a) Có một trong các thừa số n, $n + 1$ chia hết cho 100 : Khi đó n là số tận cùng 00 hoặc 99.

b) Không có thừa số nào chia hết cho 100 : Chú ý rằng $(n, n + 1) = 1$ nên trong n và $n + 1$ có một số chia hết cho 25, số kia chia hết cho 4. Có hai khả năng : Nếu n chia hết cho 25, $n + 1$ chia hết cho 4 thì xét n có tận cùng 25, 50, 75, chọn n có tận cùng 75 để $n + 1$ chia hết cho 4. Nếu $n + 1$

chia hết cho 5, n chia hết cho 4 thì xét n + 1 có tận cùng 25, 50 75, chọn n + 1 có tận cùng 25 để n chia hết cho 4.

Vậy các số tự nhiên phải tìm là các số có tận cùng 00, hoặc 99, hoặc 75, hoặc 24.

Ví dụ 76(8). Thêm ba chữ số vào đằng sau số 523 để được số chia hết cho các số 6, 7, 8, 9.

Giải : Số phải tìm $\overline{523***}$ chia hết cho 6, 7, 8, 9 nên phải chia hết cho 504, là BCNN (6, 7, 8, 9).

Xét số 523999 chia cho 504 dư 343. Do đó ta có các số :

$$523999 - 343 = 523656,$$

$$523656 - 504 = 523152.$$

Đó là hai số phải tìm.

Ví dụ 77(8). Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì $(p - 1)(p + 1)$ chia hết cho 24.

Giải

Ta có $(p - 1)p(p + 1) \vdots 3$ mà $(p, 3) = 1$ nên

$$(p - 1)(p + 1) \vdots 3 \qquad (1)$$

p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ, $p - 1$ và $p + 1$ là hai số chẵn liên tiếp. Trong hai số chẵn liên tiếp, có một số là bội của 4 nên tích của chúng chia hết cho 8 (2).

Từ (1) và (2) suy ra $(p - 1)(p + 1)$ chia hết cho hai số nguyên tố cùng nhau 3 và 8.

Vậy $(p - 1)(p + 1) \vdots 24$.

IV - Tìm số bị chia biết các số chia và số dư trong hai phép chia

Ví dụ 78(8). Tìm số tự nhiên nhỏ nhất khi chia cho 5 thì dư 1, chia cho 7 thì dư 5.

Giải : Gọi n là số chia cho 5 dư 1, chia cho 7 dư 5.

Cách 1. Vì n không chia hết cho 35 nên n có dạng $35k + r$ ($k, r \in \mathbf{N}$, $r < 35$), trong đó r chia 5 dư 1, chia 7 dư 5.

Số nhỏ hơn 35 chia cho 7 dư 5 là 5, 12, 19, 26, 33, trong đó chỉ có 26 chia cho 5 dư 1. Vậy $r = 26$.

Số nhỏ nhất có dạng $35k + 26$ là 26.

Cách 2. Ta có $n - 1 \vdots 5 \Rightarrow n - 1 + 10 \vdots 5 \Rightarrow n + 9 \vdots 5$ (1). Ta có $n - 5 \vdots 7$ $\Rightarrow n - 5 + 14 \vdots 7 \Rightarrow n + 9 \vdots 7$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $n + 9 \vdots 35$.

Số n nhỏ nhất có tính chất trên là $n = 26$.

Cách 3. $n = 5x + 1 = 7y + 5 \Rightarrow 5x = 5y + 2y + 4 \Rightarrow 2(y + 2) \vdots 5 \Rightarrow y + 2 \vdots 5$. Giá trị nhỏ nhất của y bằng 3, giá trị nhỏ nhất của n bằng $7.3 + 5 = 26$.

Ví dụ 79(8)*. Tìm số tự nhiên n có bốn chữ số sao cho chia n cho 131 thì dư 112, chia n cho 132 thì dư 98.

Giải : Cách 1. Ta có $131x + 112 = 132y + 98 \Rightarrow$

$\Rightarrow 131x = 131y + y - 14 \Rightarrow y - 14 \vdots 131 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 131k + 14$ ($k \in \mathbf{N}$)

$\Rightarrow n = 132 . (131k + 14) + 98 = 132 . 131k + 1946$.

Do n có bốn chữ số nên $k = 0$, $n = 1946$.

Cách 2. Từ $131x = 131y + y - 14$ suy ra

$131(x - y) = y - 14$. Nếu $x > y$ thì $y - 14 \geqslant 131 \Rightarrow y \geqslant 145 \Rightarrow$ n có nhiều hơn bốn chữ số.

Vậy $x = y$, do đó $y = 14$, $n = 1946$.

Cách 3. Ta có $n = 131x + 112$ nên

$$132n = 131 . 132x + 14784 \qquad (1)$$

Mặt khác $n = 132y + 98$ nên

$$131n = 131 . 132y + 12838 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $132n - 131n = 131 . 132(x - y) + 1946$
$\Rightarrow n = 131 . 132(x - y) + 1946$.

Vì n có bốn chữ số nên $n = 1946$.

V – Các bài toán về ƯCLN, BCNN

1) Tìm hai số trong đó biết ƯCLN của chúng

Ví dụ 80(7). Tìm hai số tự nhiên, biết rằng tổng của chúng bằng 84, ƯCLN của chúng bằng 6.

Giải : Gọi hai số phải tìm là a và b ($a \leqslant b$). Ta có $(a, b) = 6$ nên $a = 6a'$, $b = 6b'$ trong đó $(a', b') = 1$ ($a, b, a', b' \in \mathbf{N}$).

Do $a + b = 84$ nên $6(a' + b') = 84$ suy ra $a' + b' = 14$.

Chọn cặp số a', b' nguyên tố cùng nhau có tổng bằng 14 ($a' \leqslant b'$), ta được :

a'	1	3	5
b'	13	11	9

Do đó

a	6	18	30
b	78	66	54

Ví dụ 81(7). Tìm hai số tự nhiên có tích bằng 300, ƯCLN bằng 5.

Giải : Gọi hai số phải tìm là a và b ($a \leqslant b$).

Ta có $(a, b) = 5$ nên $a = 5a'$, $b = 5b'$ trong đó $(a', b') = 1$.

Do $ab = 300$ nên $25a'b' = 300$ suy ra $a'b' = 12 = 4 . 3$.

Chọn cặp số a', b' nguyên tố cùng nhau có tích bằng 12 $(a' \leqslant b')$ ta được :

a'	1	3
b'	12	4

Do đó

a	5	15
b	60	20

2) Các bài toán phối hợp giữa BCNN của các số với ƯCLN của chúng

Ví dụ 82(8). Cho $a = 1980$, $b = 2100$.

a) Tìm (a, b) và [a, b].

b)* So sánh [a, b] . (a, b) với ab. Chứng minh nhận xét đó đối với hai số tự nhiên a và b khác 0 tùy ý.

Giải : a) $1980 = 2^2 . 3^2 . 5 . 11$, $2100 = 2^2 . 3 . 5^2 . 7$.

ƯCLN $(1980, 2100) = 2^2 . 3 . 5 = 60$,

BCNN $(1980, 2100) = 2^2 . 3^2 . 5^2 . 7 . 11 = 69300$.

b) [1980, 2100] . (1980, 2100) = 1980 . 2100 (đều bằng 4158000). Ta sẽ chứng minh rằng [a, b] . (a, b) = a . b.

Cách 1. Trong cách giải này, các thừa số riêng cũng được coi như các thừa số chung, chẳng hạn a chứa thừa số 11, b không chứa thừa số 11 thì ta coi như b chứa thừa số 11 với số mũ bằng 0. Với cách viết này, trong ví dụ trên ta có :

$$1980 = 2^2 . 3^2 . 5 . 7^0 . 11,$$

$$2100 = 2^2 . 3 . 5^2 . 7 . 11^0,$$

(1980, 2100) là tích các thừa số chung với số mũ nhỏ nhất $2^2 . 3 . 5 . 7^0 . 11^0 = 60$.

[1980, 2100] là tích các thừa số chung với số mũ lớn nhất

$$2^2 . 3^2 . 5^2 . 7 . 11 = 69300.$$

Bây giờ ta chứng minh trong trường hợp tổng quát :

$$[a, b] . (a, b) = a . b \qquad (1).$$

Khi phân tích ra thừa số nguyên tố, các thừa số nguyên tố ở hai vế của (1) chính là các thừa số nguyên tố có trong a và b. Ta sẽ chứng tỏ rằng hai vế chứa các thừa số nguyên tố như nhau với số mũ tương ứng bằng nhau.

Gọi p là thừa số nguyên tố tuỳ ý trong các thừa số nguyên tố như vậy. Giả sử số mũ của p trong a là x, số mũ của p trong b là y trong đó x và y có thể bằng 0. Không mất tính tổng quát, giả sử rằng $x \geqslant y$. Khi đó vế phải của (1) chứa p với số mũ $x + y$. Còn ở vế trái, [a, b] chứa p với số mũ x, (a, b) chứa p với số mũ y nên vế trái cũng chứa p với số mũ $x + y$.

Cách 2. Gọi $d = (a, b)$ thì $a = da'$, $b = db'$ (1), trong đó $(a', b') = 1$.

Đặt $\frac{ab}{d} = m$ (2), ta cần chứng minh rằng $[a, b] = m$.

Để chứng minh điều này, cần chứng tỏ tồn tại các số tự nhiên x, y sao cho $m = ax$, $m = by$ và $(x, y) = 1$.

Thật vậy từ (1) và (2) suy ra $m = a \cdot \frac{b}{d} = ab'$,

$m = b \cdot \frac{a}{d} = ba'$. Do đó, ta chọn $x = b'$, $y = a'$, thế thì $(x, y) = 1$ vì $(a', b') = 1$.

Vậy $\frac{ab}{d} = [a, b]$, tức là $[a, b] \cdot (a, b) = ab$.

Ví dụ 83(8). Tìm hai số tự nhiên biết rằng ƯCLN của chúng bằng 10, BCNN của chúng bằng 900.

Giải : Gọi các số phải tìm là a và b, giả sử $a \leq b$. Ta có $(a, b) = 10$ nên $a = 10a'$, $b = 10b'$, $(a', b') = 1$, $a' \leq b'$. Do đó $ab = 100a'b'$ (1). Mặt khác $ab = [a, b].(a, b) = 900.10 = 9000$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $a'b' = 90$. Ta có các trường hợp :

a'	1	2	5	9
b'	90	45	18	10

Do đó

a	10	20	50	90
b	900	450	180	100

3) Tìm ƯCLN của hai số bằng thuật toán Ơ-clit

Ví dụ 84(7)*. Cho hai số tự nhiên a và b $(a > b)$.

a) Chứng minh rằng nếu a chia hết cho b thì $(a, b) = b$.

b) Chứng minh rằng nếu a không chia hết cho b thì ƯCLN của hai số bằng ƯCLN của số nhỏ và số dư trong phép chia số lớn cho số nhỏ.

c) Dùng các nhận xét trên để tìm ƯCLN (72, 56).

Giải : a) Mọi ước chung của a và b hiển nhiên là ước của b. Đảo lại, do a chia hết cho b nên b là ước chung của a và b. Vậy $(a, b) = b$.

b) Gọi r là số dư trong phép chia a cho b $(a > b)$. Ta có $a = bk + r$ $(k \in N)$, cần chứng minh rằng $(a, b) = (b, r)$.

Thật vậy, nếu a và b cùng chia hết cho d thì r chia hết cho d, do đó ước chung của a và b cũng là ước chung của b và r (1). Đảo lại nếu b và r cùng chia hết cho d thì a chia hết cho d, do đó ước chung của b và r cũng là ước chung của a và b (2). Từ (1) và (2) suy ra tập hợp các ước chung của a và b và tập hợp các ước chung của b và r bằng nhau. Do đó hai số lớn nhất trong hai tập hợp đó cũng bằng nhau, tức là $(a, b) = (b, r)$.

c) 72 chia 56 dư 16 nên (72, 56) = (56, 16) ;

56 chia 16 dư 8 nên (56, 16) = (16, 8) ;

16 chia hết cho 8 nên (16, 8) = 8. Vậy (72, 56) = 8.

Nhận xét : Giả sử a không chia hết cho b và a chia cho b dư r_1, b chia cho r_1 dư r_2, r_1 chia cho r_2 dư r_3, ..., r_{n-2} chia cho r_{n-1} dư r_n, r_{n-1} chia cho r_n dư 0 (dãy số b, r_1, r_2, ..., r_n là dãy số tự nhiên giảm dần nên số phép chia là hữu hạn do đó quá trình trên phải kết thúc với một số dư bằng 0). Theo chứng minh ở ví dụ trên ta có $(a, b) = (b, r_1) = (r_1, r_2) = \ldots = (r_{n-1}, r_n) = r_n$ (vì r_{n-1} chia hết cho r_n).

Như vậy ƯCLN (a, b) là số chia cuối cùng trong dãy các phép chia liên tiếp a cho b, b cho r_1, r_1 cho r_2, ... trong đó r_1, r_2, ... là số dư trong các phép chia theo thứ tự trên.

Trong thực hành người ta đặt tính như sau :

		72	56
	56	16	1
16	8	3	
0	2		

Việc thực hiện một dãy phép chia liên tiếp như trên được gọi là thuật toán Ơ-clit.

Trường hợp tìm ƯCLN của ba số, ta tìm ƯCLN của hai số rồi tìm ƯCLN của kết quả với số thứ ba.

Ví dụ 85(7). Tìm ƯCLN (A, B), biết rằng A là số gồm 1991 chữ số 2, B là số gồm 8 chữ số 2.

Giải : Ta có 1991 chia cho 8 dư 7, còn 8 chia cho 7 dư 1.

Theo thuật toán Ơ-clit : $(A, B) = (\underbrace{22\ldots2}_{1991\text{ chữ số}}, \underbrace{22\ldots2}_{8\text{ chữ số}}) = (\underbrace{22\ldots2}_{8\text{ chữ số}}, \underbrace{22\ldots2}_{7\text{ chữ số}}) =$

$$= (\underbrace{22\ldots2}_{7\text{ chữ số}}, 2) = 2.$$

Ví dụ 86(8)*. Tìm hai số, biết rằng bội chung nhỏ nhất của chúng và ước chung lớn nhất của chúng có tổng bằng 19.

Giải : Gọi a và b là hai số phải tìm, d là ƯCLN(a, b).

$$\text{ƯCLN }(a, b) = d \Leftrightarrow \begin{cases} a = da' \\ b = db' \\ (a', b') = 1 \end{cases}$$

$$\text{BCNN}(a, b) = \frac{a \,.\, b}{\text{ƯCLN}(a, b)} = \frac{da' \,.\, db'}{d} = da'b'.$$

Theo đề bài : BCNN(a, b) + ƯCLN(a, b) = 19

nên $\quad da'b' + d = 19$

suy ra $\quad d(a'b' + 1) = 19.$

Do đó $a'b' + 1$ là ước của 19, và $a'b' + 1 \geqslant 2$.

Giả sử $a \geqslant b$ thì $a' \geqslant b'$. Ta được :

d	a'b' + 1	a' . b'	a'	b'	a	b
1	19	$18 = 2 . 3^2$	18	1	18	1
			9	2	9	2

Đáp số : 18 và 1 ; 9 và 2.

4) Hai số nguyên tố cùng nhau

Hai số nguyên tố cùng nhau là hai số có ƯCLN bằng 1. Nói cách khác, chúng chỉ có ước chung duy nhất là 1.

Ví dụ 87(7). Chứng minh rằng :

a) Hai số tự nhiên liên tiếp (khác 0) là hai số nguyên tố cùng nhau.

b) Hai số lẻ liên tiếp là hai số nguyên tố cùng nhau.

c) $2n + 1$ và $3n + 1$ ($n \in \mathbf{N}$) là hai số nguyên tố cùng nhau.

Giải : a) Gọi $d \in$ ƯC $(n, n + 1) \Rightarrow (n + 1) - n \vdots d \Rightarrow 1 \vdots d \Rightarrow d = 1$. Vậy n và n + 1 là hai số nguyên tố cùng nhau.

b) Gọi $d \in$ ƯC $(2n + 1, 2n + 3) \Rightarrow (2n + 3) - (2n + 1) \vdots d \Rightarrow 2 \vdots d \Rightarrow d \in \{1 ; 2\}$.

Nhưng $d \neq 2$ vì d là ước của số lẻ. Vậy d = 1.

c) Gọi $d \in$ ƯC $(2n + 1, 3n + 1) \Rightarrow 3(2n + 1) - 2(3n + 1) \vdots d \Rightarrow 1 \vdots d \Rightarrow d = 1$.

Ví dụ 88(7). Cho a và b là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng các số sau cũng là hai số nguyên tố cùng nhau :

a) a và a + b ; b) a^2 và a + b ; c) ab và a + b.

Giải : a) Gọi $d \in$ ƯC $(a, a + b) \Rightarrow (a + b) - a \vdots d \Rightarrow b \vdots d$. Ta lại có $a \vdots d$ nên $d \in$ ƯC(a, b), do đó d = 1 (vì a và b là hai số nguyên tố cùng nhau). Vậy (a, a + b) = 1.

b) Giả sử a^2 và a + b cùng chia hết cho số nguyên tố d thì a chia hết cho d, do đó b cũng chia hết cho d. Như vậy a và b cùng chia hết cho số nguyên tố d, trái với giả thiết (a, b) = 1.

Vậy a^2 và $a + b$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

c) Giả sử ab và $a + b$ cùng chia hết cho số nguyên tố d. Tồn tại một trong hai thừa số a và b, chẳng hạn là a, chia hết cho d, do đó b cũng chia hết cho d, trái với $(a, b) = 1$.

Vậy $(ab, a + b) = 1$.

Ví dụ 89(7). Tìm số tự nhiên n để các số $9n + 24$ và $3n + 4$ là các số nguyên tố cùng nhau.

Giải : Giả sử $9n + 24$ và $3n + 4$ cùng chia hết cho số nguyên tố d thì

$$9n + 24 - 3(3n + 4) \vdots d \Rightarrow 12 \vdots d \Rightarrow d \in \{2 ; 3\}.$$

Điều kiện để $(9n + 24, 3n + 4) = 1$ là $d \neq 2$ và $d \neq 3$. Hiển nhiên $d \neq 3$ vì $3n + 4$ không chia hết cho 3. Muốn $d \neq 2$ phải có ít nhất một trong hai số $9n + 24$ và $3n + 4$ không chia hết cho 2. Ta thấy :

$9n + 24$ là số lẻ $\Leftrightarrow 9n$ lẻ $\Leftrightarrow n$ lẻ,

$3n + 4$ là số lẻ $\Leftrightarrow 3n$ lẻ $\Leftrightarrow n$ lẻ.

Vậy điều kiện để $(9n + 24, 3n + 4) = 1$ là n là số lẻ.

5) Tìm ƯCLN của các biểu thức số

Ví dụ 90(7). Tìm ƯCLN của $2n - 1$ và $9n + 4$ $(n \in \mathbf{N})$.

Giải : Gọi $d \in$ ƯC$(2n - 1, 9n + 4) \Rightarrow 2(9n + 4) - 9(2n - 1) \vdots d \Rightarrow 17 \vdots d \Rightarrow d \in \{1 ; 17\}$.

Ta có $2n - 1 \vdots 17 \Leftrightarrow 2n - 18 \vdots 17 \Leftrightarrow 2(n - 9) \vdots 17 \Leftrightarrow n - 9 \vdots 17 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow n = 17k + 9 \ (k \in \mathbf{N}).$$

Nếu $n = 17k + 9$ thì $2n - 1 \vdots 17$, và

$9n + 4 = 9.(17k + 9) + 4 =$ bội $17 + 85 \vdots 17$, do đó $(2n - 1, 9n + 4) = 17$.

Nếu $n \neq 17k + 9$ thì $2n - 1$ không chia hết cho 17, do đó $(2n - 1, 9n + 4) = 1$.

Ví dụ 91(7)*. Tìm ƯCLN của $\frac{n(n+1)}{2}$ và $2n + 1$ $(n \in \mathbf{N}^*)$.

Giải : Gọi $d \in$ ƯC $\left(\frac{n(n+1)}{2}, 2n + 1\right)$ thì $n(n + 1) \vdots d$ và $2n + 1 \vdots d$.

Suy ra $n(2n + 1) - n(n + 1) \vdots d$ tức là $n^2 \vdots d$.

Từ $n(n + 1) \vdots d$ và $n^2 \vdots d$ suy ra $n \vdots d$. Ta lại có $2n + 1 \vdots d$, do đó $1 \vdots d$, nên $d = 1$.

Vậy ƯCLN của $\frac{n(n+1)}{2}$ và $2n + 1$ bằng 1.

BÀI TẬP

308(4). a) Tìm chữ số a để $\underbrace{\overline{8a58a5...8a5}}_{9 \text{ lần } 8a5}$ chia hết cho 11.

b) Tìm các chữ số a, b, c, d và *, sao cho

$$\overline{abcd0} + \overline{abcd} = \overline{5482*}.$$

309(4). Thay các dấu * bởi các chữ số thích hợp để :

a) 53*7 chia hết cho 11 ;

b) 859*4 chia hết cho 11 ;

c) 81*372 chia hết cho 11 ;

d) *1994* chia hết cho 88 ;

e)* *1994* chia hết cho 99.

310(4). Chứng minh rằng số 192021...7980 (viết liên tiếp các số tự nhiên từ 19 đến 80) chia hết cho 9 và chia hết cho 11.

311(4). Cho một số tự nhiên chia hết cho 11 gồm bốn chữ số khác nhau và khác 0. Chứng minh rằng có thể đổi vị trí các chữ số để được bảy số mới chia hết cho 11.

312(6). Cho a = $13^{13} . 17^{17}$. Trong các số 13a, 17a, 19a, số nào có nhiều ước nhất ?

313(6). Tìm số tự nhiên n có 48 ước, biết rằng n phân tích ra thừa số nguyên tố có dạng $2^x . 3^y$ trong đó x + y = 12.

314(6). Tìm số tự nhiên A, biết rằng : A chia hết cho 5, chia hết cho 49 và có 10 ước.

315(6). Tìm số tự nhiên nhỏ nhất có 6 ước.

316(6). Tìm số tự nhiên nhỏ nhất có :

a) 10 ước ; b) 21 ước ; c) 8 ước.

317(6)*. Tìm số tự nhiên khác 0 nhỏ hơn 60 có nhiều ước nhất.

318(6). Số n có tổng các ước bằng 2n gọi là số hoàn chỉnh (hoặc hoàn hảo, hoàn toàn, hoàn thiện).

a) Chứng minh rằng số 28 là số hoàn chỉnh.

b) Chứng minh nếu n là số hoàn chỉnh thì tổng nghịch đảo các ước của n bằng 2.

c) Tìm số hoàn chỉnh n biết rằng dạng phân tích của n ra thừa số nguyên tố là n = 2p ; n = 2^2p ; n = 2^4p với p là số nguyên tố lớn hơn 2.

319(6). Tìm tổng các ước của mỗi số 220 và 284 không kể chính số đó.

320(6). Số tự nhiên n có 54 ước. Chứng minh rằng tích các ước của n bằng n^{27}.

321(6)*. Số tự nhiên n có 39 ước. Chứng minh rằng :

a) n là bình phương của một số tự nhiên a ;

b) Tích các ước của n bằng a^{39}.

322(8). Cho a là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $(a - 1)(a + 4)$ chia hết cho 6.

323(8). Chứng minh rằng tích của bốn số tự nhiên liên tiếp thì chia hết cho 24.

324(8). Chứng minh rằng tích của ba số chẵn liên tiếp thì chia hết cho 48.

325(7). a) ƯCLN của hai số tự nhiên bằng 4, số nhỏ bằng 8. Tìm số lớn.

b) ƯCLN của hai số tự nhiên bằng 16, số lớn bằng 96. Tìm số nhỏ.

326(7). Tìm hai số tự nhiên, biết rằng :

a) Hiệu của chúng bằng 84, ƯCLN bằng 28, các số đó trong khoảng từ 300 đến 440.

b) Hiệu của chúng bằng 48, ƯCLN bằng 12.

327(7). Tìm hai số tự nhiên :

a) Có tích bằng 720, ƯCLN bằng 6.

b) Có tích bằng 4050, ƯCLN bằng 3.

328(8). Tìm hai số tự nhiên :

a) Có tích bằng 2700, BCNN bằng 900.

b) Có tích bằng 9000, BCNN bằng 900.

329(8). BCNN của hai số tự nhiên bằng 770, một số bằng 14. Tìm số kia.

Tìm hai số tự nhiên a và b (bài 330, 331, 332), biết rằng :

330(8). a) $ab = 360$, $[a, b] = 60$.

b) $(a, b) = 12$, $[a, b] = 72$.

c) $(a, b) = 6$, $[a, b] = 180$.

d) $(a, b) = 15$, $[a, b] = 2100(a, b)$.

e) $ab = 180$, $[a, b] = 20(a, b)$.

331(8)*. a) $[a, b] + (a, b) = 55$;

b) $[a, b] - (a, b) = 5$;

c) $[a, b] - (a, b) = 35$.

332(8)*. $a + b = 30$, $[a, b] = 6(a, b)$.

333(8). *Đố vui : Tuổi và năm sinh*

Đến năm 2010, số tuổi và số năm sinh của Hoàng có BCNN gấp 133 lần ƯCLN. Tính năm sinh của Hoàng.

334(8)*. Tìm hai số tự nhiên có ƯCLN bằng 12, biết rằng : hai số ấy, ƯCLN của chúng, BCNN của chúng là bốn số khác nhau và đều có hai chữ số.

335(8). Cho a = 123456789, b = 987654321.

Chứng minh rằng :

a) (a, b) = 9 ;

b)*. [a, b] chia cho 11 dư 4.

336(7). Tìm ƯCLN của các số sau bằng thuật toán Ơ-clit :

a) (187231, 165148) ;

b) $(\underbrace{11\ldots1}_{100\text{ chữ số}}, \underbrace{11\ldots1}_{8\text{ chữ số}})$.

337(7). a) Tìm ƯCLN của tất cả các số tự nhiên có chín chữ số, gồm các chữ số từ 1 đến 9.

b) Tìm ƯCLN của tất cả các số tự nhiên có sáu chữ số, gồm các chữ số từ 1 đến 6.

338(7). Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n, các số sau là hai số nguyên tố cùng nhau :

a) 7n + 10 và 5n + 7 ;

b) 2n + 3 và 4n + 8.

339(7). Cho a và b là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng các số sau cũng là hai số nguyên tố cùng nhau :

a) b và a − b (a > b) ;

b) $a^2 + b^2$ và ab.

340(7). Chứng minh rằng nếu số c nguyên tố cùng nhau với a và với b thì c nguyên tố cùng nhau với tích ab.

341(7). Tìm số tự nhiên n, sao cho :

a) 4n − 5 chia hết cho 13 ;

b) 5n + 1 chia hết cho 7 ;

c) 25n + 3 chia hết cho 53.

342(7). Tìm số tự nhiên n để các số sau nguyên tố cùng nhau :

a) 4n + 3 và 2n + 3 ; b) 7n + 13 và 2n + 4 ;

c) 9n + 24 và 3n + 4 ; d) 18n + 3 và 21n + 7.

343(7). Chứng minh rằng có vô số số tự nhiên n để n + 15 và n + 72 là hai số nguyên tố cùng nhau.

344(7). Tìm ƯCLN của :

a) Hai số chẵn khác 0 liên tiếp ;

b) $\overline{ab} + \overline{ba}$ và 33.

345(7). Cho (a, b) = 1. Tìm :

a) (a + b, a − b) ;   b) (7a + 9b, 3a + 8b).

346(7). Tìm ƯCLN của 7n + 3 và 8n − 1 ($n \in \mathbf{N}^*$).

Khi nào hai số đó nguyên tố cùng nhau ? Tìm n trong khoảng từ 40 đến 90 để chúng không nguyên tố cùng nhau.

347(7). Cho một số tự nhiên chia hết cho 7 có ba chữ số trong đó chữ số hàng chục bằng chữ số hàng đơn vị. Chứng minh rằng tổng các chữ số của nó chia hết cho 7.

348(7). Cho biết 3a + 2b chia hết cho 17 (a, b ∈ **N**). Chứng minh rằng 10a + b chia hết cho 17.

349(7). Cho biết a − 5b chia hết cho 17 (a, b ∈ **N**). Chứng minh rằng 10a + b chia hết cho 17.

350(7). a) Chứng minh rằng : Nếu 3x + 5y chia hết cho 7 thì x + 4y chia hết cho 7 (x, y ∈ **N**). Điều ngược lại có đúng không ?

b) Chứng minh rằng : Nếu 2x + 3y chia hết cho 17 thì 9x + 5y chia hết cho 17 (x, y ∈ **N**). Điều ngược lại có đúng không ?

351(7). Cho một số tự nhiên chia hết cho 37 có ba chữ số. Chứng minh rằng bằng cách hoán vị vòng quanh các chữ số, ta được hai số nữa cũng chia hết cho 37.

352(7). Cho một số tự nhiên chia hết cho 7 gồm sáu chữ số. Chứng minh rằng nếu chuyển chữ số đầu xuống cuối cùng, ta vẫn được một số chia hết cho 7.

353(7). Cho số $\overline{abcdeg}$ chia hết cho 37. Chứng minh rằng :

a) Các số thu được bằng các hoán vị vòng quanh các chữ số của số đã cho cũng chia hết cho 37.

b) Nếu đổi chỗ a và d, ta vẫn được một số chia hết cho 37. Còn có thể đổi chỗ hai chữ số nào cho nhau mà vẫn được một số chia hết cho 37 ?

354(7). Điền vào dấu * các chữ số thích hợp để :

a) $\overline{4*77}$ chia hết cho 13 ;

b) $\overline{2*43*5}$ chia hết cho 1375 ;

c) $\overline{579***}$ chia hết cho 5, 7, 9.

355(7). Điền các chữ số thích hợp vào các chữ để :

a) $\overline{aba}$ chia hết cho 33 ;

b) $\overline{ab} + \overline{ba}$ chia hết cho 7 ;

c) $\overline{ab} + \overline{ba}$ chia hết cho 15.

356(7). a) Tìm $x \in N^*$ để $11 . 2x$ chia hết cho $2x - 1$.

b) Tìm $x, y \in N^*$ để $154x = (4x + 1)y$.

357(8). Tìm số tự nhiên nhỏ nhất gồm toàn chữ số 1 sao cho nó chia hết cho số gồm 100 chữ số 3.

358(8). Cho số $A = 10101 \ldots 0101$ gồm n chữ số 1 (chữ số đầu và cuối là 1, các chữ số 1 và 0 xen kẽ nhau). Tìm n sao cho :

a) A chia hết cho 99 ; b) A chia hết cho 9999.

359(7). Tìm số tự nhiên x, biết rằng trong ba số 36, 45, x, bất cứ số nào cũng là ước của tích hai số kia.

360(7). Số 5135 chia hết cho 13, hiệu $135 - 5 = 130$ chia hết cho 13. Số 25146 chia hết cho 11, hiệu $146 - 25 = 121$ chia hết cho 11. Số 45759 chia hết cho 7, hiệu $759 - 45 = 714$ chia hết cho 7.

Hãy phát biểu thành bài toán và chứng minh bài toán đó.

361(7). Số 4564 chia hết cho 7, hiệu $456 - 4 . 2 = 448$, hiệu $44 - 8 . 2 = 28$ chia hết cho 7. Số 4011 chia hết cho 7, hiệu $401 - 1 . 2 = 399$, hiệu $39 - 9 . 2 = 21$ chia hết cho 7.

Hãy phát biểu thành bài toán và chứng minh bài toán đó.

362(7). Chứng minh rằng dấu hiệu chia hết cho 7 của số $\overline{abcdeg}$ là $g + 3e + 2d - c - 3b - 2a$ chia hết cho 7 (ví dụ số 45759 chia hết cho 7 vì :

$9 . 1 + 5 . 3 + 7 . 2 - 5 . 1 - 4 . 3 = 21$ chia hết cho 7).

363(8). Tìm số tự nhiên n có hai chữ số sao cho 2n là bình phương của một số tự nhiên, 3n là lập phương của một số tự nhiên.

364(8). Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất khác 0, sao cho :

n chia cho 2 được bình phương của một số tự nhiên ;

n chia cho 3 được lập phương của một số tự nhiên ;

n chia cho 5 được luỹ thừa bậc năm của một số tự nhiên.

365(7). Tìm hai số tự nhiên liên tiếp có hai chữ số, biết rằng một số chia hết cho 4, số kia chia hết cho 25.

366(7). Tìm số tự nhiên có hai chữ số, sao cho bình phương của nó cũng tận cùng bởi hai chữ số ấy theo thứ tự đó.

367(7). Tìm hai số tự nhiên liên tiếp có ba chữ số, biết rằng một số chia hết cho 125, số kia chia hết cho 8.

368(7). Tìm hai số tự nhiên liên tiếp có tích là số sáu chữ số, trong đó ba chữ số tận cùng bằng 0.

369(7). Tìm số tự nhiên n có ba chữ số, sao cho ba chữ số tận cùng của n^2 tạo thành chính số n.

370(7). *Đố vui : Năm Tân Mùi*

Trong buổi họp mặt đầu xuân Tân Mùi 1991, bạn Thuỷ đố các bạn điền các chữ số vào dòng chữ sau :

$$\text{MÙI} \times \text{MÙI} = \text{TÂN MÙI}.$$

Bạn hãy trả lời giúp.

371(7). Tìm số tự nhiên có ba chữ số, biết rằng nếu nhân nó với số gồm ba chữ số ấy viết theo thứ tự ngược lại thì ta được tích là số có sáu chữ số, trong đó hai chữ số tận cùng bằng 0.

372(8)*. Chứng minh rằng $(a, b) = (a + b, [a, b])$.

373(8). Tìm dạng chung của các số tự nhiên n, sao cho n chia cho 30 thì dư 7, n chia cho 40 thì dư 17.

374(8). Tìm số tự nhiên nhỏ nhất, sao cho chia nó cho 29 thì dư 5, chia nó cho 31 thì dư 28.

375(8). Tìm số tự nhiên có bốn chữ số, sao cho chia nó cho 8 thì dư 7, chia nó cho 125 thì dư 4.

376(8). *Bài toán Hàn Tín điểm binh*

Hàn Tín là một tướng giỏi đã giúp Lưu Bang lập nên nhà Hán bên Trung Quốc. Khi điểm binh, muốn biết số quân, ông cho xếp hàng 3, hàng 5, hàng 7 rồi tính số người lẻ hàng. Nếu số người lẻ hàng thứ tự là a, b, c thì số quân bằng

$$70a + 21b + 15c \pm \text{bội } 105.$$

a) Tính số quân trong khoảng 2200 – 2400 nếu xếp hàng 3 thì dư 1, xếp hàng 5 thì dư 2, xếp hàng 7 thì dư 6.

b) Giải thích cách làm trên.

SỐ CHÍNH PHƯƠNG

Số chính phương là bình phương của một số tự nhiên. Với kiến thức của lớp 6, ta chứng minh được một số tính chất sau :

1) Số chính phương chỉ có thể tận cùng bằng 0, 1, 4, 5, 6, 9 ; không thể tận cùng bằng 2, 3, 7, 8.

2) Khi phân tích ra thừa số nguyên tố, số chính phương chỉ chứa các thừa số nguyên tố với số mũ chẵn, không chứa thừa số nguyên tố với số mũ lẻ.

Thật vậy, giả sử $A = k^2$ và $k = a^x b^y c^z \ldots$ (a, b, c, ... là số nguyên tố) thì $A = (a^x b^y c^z \ldots)^2 = a^{2x} b^{2y} c^{2z} \ldots$

Từ tính chất này suy ra :

– Số chính phương chia hết cho 2 thì phải chia hết cho 4.

– Số chính phương chia hết cho 3 thì phải chia hết cho 9.

– Số chính phương chia hết cho 5 thì phải chia hết cho 25.

– Số chính phương chia hết cho 8 thì phải chia hết cho 16.

3) Số lượng các ước của một số chính phương là số lẻ. Đảo lại, một số có số lượng các ước là số lẻ thì số đó là số chính phương.

Thật vậy, nếu $A = 1$ thì A là số chính phương có một ước. Ta giả sử số $A > 1$ có dạng phân tích ra thừa số nguyên tố là $A = a^x b^y c^z \ldots$ thì số lượng các ước của nó bằng $(x + 1)(y + 1)(z + 1)\ldots$

a) Nếu A là số chính phương thì x, y, z, ... chẵn, nên $x + 1$, $y + 1$, $z + 1$, ... lẻ, vậy số lượng các ước của A là số lẻ.

b) Nếu số lượng các ước của A là số lẻ thì $(x + 1)(y + 1)(z + 1)\ldots$ lẻ, do đó các thừa số $x + 1$, $y + 1$, $z + 1$, ... đều lẻ, suy ra x, y, z, ... chẵn.

Đặt $x = 2x'$, $y = 2y'$, $z = 2z'$, ... $(x', y', z', \ldots \in \mathbb{N})$ thì $A = (a^{x'} b^{y'} c^{z'})^2$ nên A là số chính phương.

Ví dụ 92(5). Tìm số nguyên tố $\overline{ab}$ $(a > b > 0)$ sao cho $\overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương.

Giải : $\overline{ab} - \overline{ba} = (10a + b) - (10b + a) = 9a - 9b$

$$= 9(a - b) = 3^2(a - b).$$

Do $\overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương nên $a - b$ là số chính phương.

Ta thấy $1 \leq a - b \leq 8$ nên $a - b \in \{1 ; 4\}$.

Với $a - b = 1$ thì $\overline{ab} \in \{21 ; 32 ; 43 ; 54 ; 65 ; 76 ; 87 ; 98\}$. Loại các hợp số 21, 32, 54, 65, 76, 87, 98, còn 43 là số nguyên tố.

Với $a - b = 4$ thì $\overline{ab} \in \{51 ; 62 ; 73 ; 84 ; 95\}$. Loại các hợp số 51, 62, 84, 95, còn 73 là số nguyên tố.

Vậy $\overline{ab}$ bằng 43 hoặc 73.

Khi đó : $43 - 34 = 9 = 3^2$ và $73 - 37 = 36 = 6^2$.

Ví dụ 93(5). Tìm số chính phương có bốn chữ số, được viết bởi các chữ số 3, 6, 8, 8.

Giải : Gọi n^2 là số chính phương phải tìm.

Số chính phương không tận cùng bằng 3, 8 do đó n^2 phải tận cùng bằng 6.

Số có tận cùng bằng 86 thì chia hết cho 2, không chia hết cho 4 nên không là số chính phương. Vậy n^2 có tận cùng bằng 36.

Số chính phương đó là $8836 = 94^2$.

Ví dụ 94(5). Một số tự nhiên gồm một số chữ số 0 và sáu chữ số 6 có thể là một số chính phương không ?

Giải : Giả sử n^2 là số chính phương gồm một số chữ số 0 và sáu chữ số 6.

Nếu n^2 tận cùng bằng 0 thì nó phải tận cùng bằng một số chẵn chữ số 0. Ta bỏ tất cả các chữ số 0 tận cùng này đi thì số còn lại tận cùng bằng 6 và cũng phải là một số chính phương. Xét hai trường hợp : số còn lại tận cùng 06 hoặc tận cùng 66. Các số này không là số chính phương (vì chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4).

Nếu n^2 tận cùng bằng 6 thì cũng lập luận như trên dẫn đến mâu thuẫn.

Vậy số có tính chất như đề bài nêu lên không thể là một số chính phương.

Ví dụ 95(6). Viết liên tiếp từ 1 đến 12 được số A = 1234 ... 1112. Số A có thể có 81 ước được không ?

Giải : Số lượng các ước của A là 81, là một số lẻ, nên A là số chính phương (1). Mặt khác, tổng các chữ số của A bằng 51 nên A chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9, do đó A không là số chính phương (2), mâu thuẫn với (1).

Vậy A không thể có 81 ước.

Ví dụ 96(5). Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng nếu nhân nó với 135 thì ta được một số chính phương.

Giải : Gọi số phải tìm là n, ta có $135n = a^2$ ($a \in \mathbf{N}$) hay $3^3 . 5 . n = a^2$. Số chính phương chỉ chứa các thừa số nguyên tố với số mũ chẵn nên $n = 3 . 5 . k^2$ ($k \in \mathbf{N}$).

Với $k = 1$ thì $n = 15$, với $k = 2$ thì $n = 60$, với $k \geqslant 3$ thì $n \geqslant 135$, có nhiều hơn hai chữ số, loại.

Vậy số phải tìm là 15 hoặc 60.

Ví dụ 97(5)*. Tìm số chính phương có bốn chữ số sao cho hai chữ số đầu giống nhau, hai chữ số cuối giống nhau.

Giải : Cách 1. Gọi số chính phương phải tìm là $n^2 = \overline{aabb}$ ($a, b \in \mathbf{N}$, $1 \leqslant a \leqslant 9$, $0 \leqslant b \leqslant 9$).

Ta có $n^2 = \overline{aabb} = 1100a + 11b = 11 . (100a + b) = 11 . (99a + a + b)$ (1). Do đó $99a + a + b$ chia hết cho 11 nên $a + b$ chia hết cho 11, vậy $a + b = 11$.

Thay a + b = 11 vào (1) được $n^2 = 11 . (99a + 11) = 11^2 . (9a + 1)$. Do đó 9a + 1 phải là số chính phương.

Thử với a = 1, 2, 3, ..., 9 chỉ có a = 7 cho $9a + 1 = 8^2$ là số chính phương.

Vậy a = 7, suy ra b = 4. Ta có $7744 = 11^2 . 8^2 = 88^2$.

Chú ý : Có thể không cần thử bằng cách làm như sau :

Đặt $9a + 1 = d^2$ (1), ta có $9a = d^2 - 1 = (d + 1)(d - 1)$.

Vì $(d + 1) - (d - 1) = 2$ nên hai thừa số này không có ước chung là 3. Vậy một thừa số phải bằng bội của 9. Hơn nữa từ (1) suy ra d chỉ có một chữ số (vì $a \leqslant 9$ hay $9a + 1 < 100$). Do đó $d - 1 < 9$ và $d + 1 = 9$, $d = 8$. Thay vào (1), a = 7, b = 11 − 7 = 4.

Cách 2. Biến đổi $n^2 = \overline{aabb} = 11 . (100a + b) = 11 . \overline{a0b}$, do đó $\overline{a0b} = 11k^2$ ($k \in \mathbb{N}$).

Ta có $100 \leqslant 11k^2 \leqslant 909 \Rightarrow 9\frac{1}{11} \leqslant k^2 \leqslant 82\frac{7}{11} \Rightarrow 4 \leqslant k \leqslant 9$.

Lần lượt cho k bằng 4, 5, 6, 7, 8, 9 ta được $\overline{a0b} = 11k^2$ thứ tự bằng 176, 275, 396, 539, 704, 891, chỉ có số 704 có chữ số hàng chục bằng 0.

Vậy k = 8 và $\overline{aabb} = 11 . 11 . 8^2 = 88^2 = 7744$.

BÀI TẬP

377(5). Các tổng sau có là số chính phương hay không ?

a) $A = 3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{20}$;

b) $B = 11 + 11^2 + 11^3$;

c) $10^{10} + 8$;

d) $100! + 7$;

e) $10^{10} + 5$;

g) $10^{100} + 10^{50} + 1$.

378(5). Các số sau có là số chính phương hay không ?

a) A = 2004000 ; b) $B = 2001^{2001}$.

379(5). Chứng tỏ rằng các số sau không là số chính phương :

a) $\overline{abab}$; b) $\overline{abcabc}$; c)* $\overline{ababab}$

380(5). Chứng tỏ rằng tổng sau không là số chính phương :

$$A = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$$

381(5). Cho bốn chữ số 0, 2, 3, 4. Tìm số chính phương có bốn chữ số gồm cả bốn chữ số trên.

382(5). Tìm số chính phương có bốn chữ số gồm cả bốn chữ số 7, 4, 2, 0.

383(5). Tìm số chính phương có bốn chữ số gồm cả bốn chữ số 0, 2, 3, 5.

384(5). Cho một số tự nhiên gồm 15 chữ số 2. Có cách nào viết thêm các chữ số 0 vào vị trí tùy ý để số mới tạo thành là một số chính phương hay không ?

385(5). Một số tự nhiên gồm có một chữ số 1, hai chữ số 2, ba chữ số 3, bốn chữ số 4 có thể là một số chính phương hay không ?

386(6). Viết dãy số tự nhiên từ 1 đến 101 làm thành một số A.

a) A có là hợp số hay không ?

b) A có là số chính phương hay không ?

c) A có thể có 35 ước hay không ?

387(5). Từ năm chữ số 1, 2, 3, 4, 5, lập tất cả các số tự nhiên có năm chữ số gồm cả năm chữ số ấy. Trong các số đó, có số nào là số chính phương không ? Có số nào chia hết cho 11 không ?

388(5). Tìm số tự nhiên n có hai chữ số, biết rằng 2n + 1 và 3n + 1 đều là các số chính phương.

389(5). Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng nếu nhân nó với 45 thì ta được một số chính phương.

390(5). a) Các số tự nhiên n và 2n có tổng các chữ số bằng nhau. Chứng minh rằng n chia hết cho 9.

b)* Tìm số chính phương n có ba chữ số, biết rằng n chia hết cho 5 và nếu nhân n với 2 thì tổng các chữ số của nó không đổi.

391(5). Tìm số tự nhiên có hai chữ số, sao cho nếu cộng nó với số gồm hai chữ số ấy viết theo thứ tự ngược lại thì ta được một số chính phương.

392(5). Tìm số chính phương có bốn chữ số, biết rằng : các chữ số hàng trăm, hàng nghìn, hàng chục, hàng đơn vị theo thứ tự đó làm thành bốn số tự nhiên liên tiếp tăng dần.

393(5). Tìm số chính phương có bốn chữ số, biết rằng chữ số hàng nghìn bằng chữ số hàng đơn vị và số chính phương đó viết được dưới dạng $(5n + 4)^2$ với $n \in \mathbf{N}$.

394(5)*. Cho số tự nhiên A gồm 100 chữ số 1, số tự nhiên B gồm 50 chữ số 2. Chứng minh rằng A − B là một số chính phương.

395(5). Tìm số tự nhiên n (n > 0) sao cho tổng

$$1! + 2! + 3! + \ldots + n! \text{ là một số chính phương.}$$

PHẦN HÌNH HỌC

Phần I

TÓM TẮT LÍ THUYẾT VÀ BÀI TẬP ỨNG DỤNG

Chương I
ĐOẠN THẲNG

§1. ĐIỂM VÀ ĐƯỜNG THẲNG

Trong mục này, cần chú ý đến :

1. Ba hình hình học không định nghĩa : điểm, đường thẳng, mặt phẳng.

2. Hai tính chất cơ bản :

– *Tính chất về sự xác định đường thẳng* : Có một đường thẳng và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt.

– *Tính chất về thứ tự của ba điểm trên đường thẳng* : Trong ba điểm thẳng hàng, có một điểm và chỉ một điểm nằm giữa hai điểm còn lại.

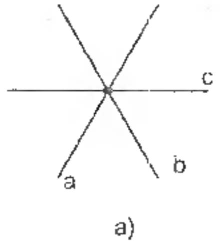
3. Một quan hệ hình học không định nghĩa : Điểm nằm giữa hai điểm khác.

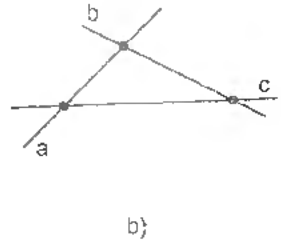
4. Một quan hệ hình học được định nghĩa : Ba điểm thẳng hàng.

Ví dụ 1. Cho hai đường thẳng cắt nhau. Nếu vẽ thêm một đường thẳng thứ ba cắt cả hai đường thẳng trên thì số giao điểm của các đường thẳng thay đổi thế nào ?

Giải. Nếu đường thẳng thứ ba đi qua giao điểm của hai đường thẳng trước thì số giao điểm không đổi (h. 6a).

Nếu đường thẳng thứ ba không đi qua giao điểm của hai đường thẳng trước thì số giao điểm tăng thêm 2 (h. 6b).





Hình 6

Ví dụ 2. Giải thích vì sao hai đường thẳng phân biệt hoặc có một điểm chung, hoặc không có điểm chung nào.

Giải : Nếu hai đường thẳng có hai điểm chung thì chúng trùng nhau. Do đó, hai đường thẳng phân biệt không có đến hai điểm chung : hoặc chúng có một điểm chung, hoặc chúng không có điểm chung nào.

BÀI TẬP

1. Cho bốn điểm A, B, C, D trong đó ba điểm A, B, C thẳng hàng, ba điểm B, C, D thẳng hàng. Giải thích vì sao bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường thẳng.

2. Vẽ năm điểm A, B, C, D, O sao cho ba điểm A, B, C thẳng hàng, ba điểm B, C, D thẳng hàng, ba điểm C, D, O không thẳng hàng.

a) Giải thích vì sao ba điểm A, B, D thẳng hàng.

b) Kẻ các đường thẳng, mỗi đường thẳng đi qua ít nhất hai điểm trong năm điểm nói trên. Kể tên các đường thẳng trong hình vẽ (các đường thẳng trùng nhau chỉ kể là một đường thẳng).

3. Cho các điểm A, B, C, D, E thuộc một đường thẳng theo thứ tự ấy. Điểm C nằm giữa hai điểm nào ? Điểm C không nằm giữa hai điểm nào ?

4. Cho A, B, C là ba điểm thẳng hàng. Điểm nào nằm giữa hai điểm còn lại nếu A không nằm giữa hai điểm B và C, B không nằm giữa hai điểm A và C ?

5. Cho bốn điểm A, B, C, D trong đó điểm B nằm giữa hai điểm A và C, điểm B nằm giữa hai điểm A và D. Có thể khẳng định rằng điểm D nằm giữa hai điểm B và C hay không ?

6. a) Hãy xếp 10 điểm thành 5 hàng, mỗi hàng có 4 điểm.

b) Hãy xếp 7 điểm thành 6 hàng, mỗi hàng có 3 điểm.

c) Người ta trồng 12 cây thành 6 hàng, mỗi hàng có 4 cây. Vẽ sơ đồ vị trí của 12 cây đó.

∽ *Ví dụ :* 11, 12.

Bài tập : 26 đến 31, 34.

§2. TIA. ĐOẠN THẲNG

Trong mục này, cần chú ý đến :

1. Một tính chất cơ bản :

Tính chất về sự xác định tia : Mỗi điểm O trên đường thẳng chia đường thẳng thành hai phần, trong đó điểm O không nằm giữa hai điểm thuộc cùng một phần, điểm O nằm giữa hai điểm thuộc hai phần khác nhau.

2. Hai hình hình học được định nghĩa :

– Tia Ox là hình gồm điểm O và một phần đường thẳng bị chia ra bởi điểm O.

– Đoạn thẳng AB là hình gồm điểm A, điểm B và tất cả các điểm nằm giữa A và B.

Ví dụ 3. Cho ba điểm A, B, C trong đó hai tia BA và BC đối nhau. Trong ba điểm A, B, C, điểm nào nằm giữa hai điểm còn lại ?

Giải : Điểm gốc B của hai tia đối nhau BA, BC nằm giữa hai điểm còn lại A và C (h. 7).

Chú ý : Cần nhớ kết quả này (mà không cần vẽ hình) để nhận ra một điểm nằm giữa hai điểm khác.

Hình 7

Ví dụ 4. Điểm B nằm giữa hai điểm A và C. Tìm các tia đối nhau, các tia trùng nhau.

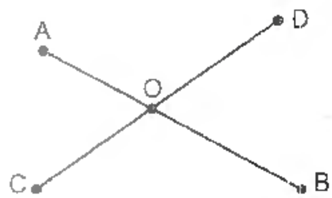
Giải (h. 7) : Các tia BA và BC đối nhau, các tia AB và AC trùng nhau, các tia CA và CB trùng nhau.

Chú ý : Cần nhớ kết quả này (mà không cần vẽ hình) để nhận ra hai tia trùng nhau hoặc đối nhau.

Ví dụ 5. Cho hai đoạn thẳng AB và CD cắt nhau tại điểm O nằm giữa hai đầu của mỗi đoạn thẳng trên.

a) Kể tên các đoạn thẳng có trong hình vẽ.

b) Điểm O là điểm chung của hai đoạn thẳng nào ?



Hình 8

Giải (h. 8)

a) Trên hình vẽ có sáu đoạn thẳng : OA, OB, OC, OD, AB, CD.

b) Điểm O là điểm chung của các cặp đoạn thẳng :

OA và OB,	OB và OC,	OC và OD,	OD và AB,
OA và OC,	OB và OD,	OC và AB,	AB và CD.
OA và OD,	OB và CD,		
OA và CD,			

BÀI TẬP

7. Gọi O là một điểm của đường thẳng xy. Vẽ điểm A thuộc tia Ox, vẽ các điểm B và C thuộc tia Oy sao cho C nằm giữa O và B.

a) Trên hình vẽ có bao nhiêu tia, bao nhiêu đoạn thẳng ?

b) Kể tên các cặp tia đối nhau.

8. Cho năm điểm A, B, C, M, N, sao cho : Điểm C nằm giữa hai điểm A và B, điểm M nằm giữa hai điểm A và C, điểm N nằm giữa hai điểm C và B. Khi đó :

a) Tia CM trùng với tia nào ? Tại sao ?

b) Tia CN trùng với tia nào ? Tại sao ?

c) Vì sao điểm C nằm giữa hai điểm M và N ?

9. Cho điểm B nằm giữa hai điểm A và C, điểm C nằm giữa hai điểm B và D. Vì sao điểm B nằm giữa hai điểm A và D ?

Hướng dẫn : Chứng tỏ rằng BA và BD là hai tia đối nhau.

10. Cho điểm B nằm giữa hai điểm A và C, điểm D nằm giữa hai điểm B và C. Hỏi điểm D có nằm giữa hai điểm A và B không ? Vì sao ?

11. Cho điểm B nằm giữa hai điểm A và C, điểm D thuộc tia BC và không trùng B. Hỏi điểm B có nằm giữa hai điểm A và D không ? Vì sao ?

12. Cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Hãy vẽ đường thẳng a không đi qua A, B, C sao cho đường thẳng a :

a) Cắt hai đoạn thẳng AB và AC ;

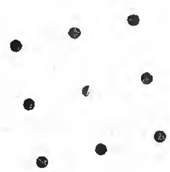
b) Không cắt mỗi đoạn thẳng AB, AC, BC.

13. a) Vẽ sáu đoạn thẳng sao cho mỗi đoạn thẳng cắt đúng ba đoạn thẳng khác.

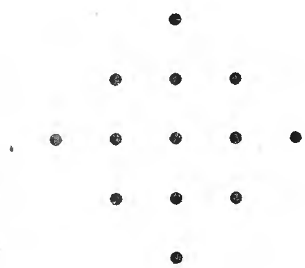
b)* Vẽ tám đoạn thẳng sao cho mỗi đoạn thẳng cắt đúng ba đoạn thẳng khác.

14. a) Trên hình 9 có 9 điểm. Không nhấc bút khỏi giấy, hãy vẽ bốn đoạn thẳng đi qua tất cả 9 điểm ấy.

b) Trên hình 10 có 13 điểm. Không nhấc bút khỏi giấy, hãy vẽ năm đoạn thẳng đi qua tất cả 13 điểm ấy.



Hình 9



Hình 10

Ví dụ : 13.

Bài tập : 32, 33.

3. ĐỘ DÀI ĐOẠN THẲNG. VẼ ĐOẠN THẲNG CHO BIẾT ĐỘ DÀI

Trong mục này, cần chú ý đến :

1. Hai tính chất cơ bản :

– *Tính chất về độ dài đoạn thẳng :* Mỗi đoạn thẳng có một độ dài xác định. Độ dài đoạn thẳng là một số dương.

– *Tính chất về cộng độ dài đoạn thẳng :* Nếu điểm M nằm giữa hai điểm A và B thì AM + MB = AB. Ngược lại nếu AM + MB = AB thì điểm M nằm giữa hai điểm A và B.

2. Một quan hệ hình học được định nghĩa : Hai đoạn thẳng bằng nhau.

3. Để giải thích điểm A nằm giữa hai điểm O và B, ta có thể dùng nhận xét : Nếu hai điểm A và B thuộc tia Ox sao cho OA < OB thì điểm A nằm giữa hai điểm O và B.

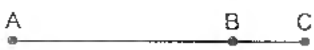
Ví dụ 6. Cho đoạn thẳng AB = 3cm. Điểm C thuộc đường thẳng AB sao cho BC = 1cm. Tính độ dài của đoạn thẳng AC.

Giải : Xét hai trường hợp :

a) C thuộc tia đối của tia BA (h. 11a) :

Hai tia BA, BC đối nhau ⇒ B nằm giữa A và C

⇒ AB + BC = AC ⇒ 3 + 1 = AC ⇒ AC = 4cm.



Hình 11

b) C thuộc tia BA, khi đó C nằm giữa A và B (vì BC < BA) (h. 11b) : AC + CB = AB ⇒ AC + 1 = 3 ⇒ AC = 3 – 1 = 2(cm).

Ví dụ 7. Ba điểm A, B, C có thẳng hàng không, nếu :

a) AB = 3cm, AC = 4cm, BC = 7cm ?

b) AB = 3cm, AC = 4cm, BC = 5cm ?

Giải : a) AB + AC = 3 + 4 = 7(cm) nên AB + AC = BC. Vì vậy A nằm giữa B và C. Do đó ba điểm A, B, C thẳng hàng.

b) Giả sử ba điểm A, B, C thẳng hàng thì phải có một điểm nằm giữa hai điểm còn lại. Nếu A nằm giữa B và C thì BA + AC = BC ⇒ 3 + 4 = 5, vô lí. Nếu B nằm giữa A và C thì AB + BC = AC ⇒ 3 + 5 = 4, vô lí. Nếu C nằm giữa A và B thì AC + CB = AB ⇒ 4 + 5 = 3, vô lí.

Vậy ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

Ví dụ 8. Chứng tỏ rằng nếu hai điểm A và B cùng thuộc tia Ox và OA < OB thì điểm A nằm giữa hai điểm O và B.

Giải (h. 12) : Các điểm A, B không trùng O thuộc tia Ox nên ba điểm O, A, B thẳng hàng. Trong ba điểm thẳng hàng, có một và chỉ một điểm nằm giữa hai điểm còn lại. Ta sẽ chứng tỏ rằng không thể có trường hợp O hoặc B nằm giữa hai điểm còn lại.

Hình 12

Thật vậy, các điểm A, B không trùng O và thuộc tia Ox nên O không nằm giữa A và B. Điểm B cũng không nằm giữa hai điểm kia vì nếu B nằm giữa O và A thì OB + BA = OA nên OA > OB, trái với đề bài.

Do đó A nằm giữa O và B.

BÀI TẬP

15. Ba điểm A, B, C có thẳng hàng hay không nếu AB = 4cm, AC = 5cm, BC = 6cm ?

16. Cho đoạn thẳng AB. Trên tia đối của tia AB lấy điểm C, trên tia đối của tia BA lấy điểm D sao cho BD = AC. Chứng tỏ rằng CB = AD.

17. Cho đoạn thẳng AB có độ dài 8cm. Trên tia AB lấy điểm C sao cho AC = 2cm, trên tia BA lấy điểm D sao cho BD = 3cm. Tính độ dài CB, CD.

18. Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng. Biết rằng AB = 5cm, BC = 2cm. Tính độ dài AC.

§4. TRUNG ĐIỂM CỦA ĐOẠN THẲNG

Trung điểm của đoạn thẳng là điểm nằm giữa hai đầu của đoạn thẳng và cách đều hai đầu ấy.

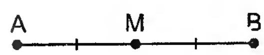
Ví dụ 9. Cho điểm M là trung điểm của đoạn thẳng AB. Chứng tỏ rằng $AM = \frac{1}{2}AB$.

Giải (h. 13)

M là trung điểm của AB

$\Rightarrow$ M nằm giữa A và B

$\Rightarrow$ AM + MB = AB (1)



Hình 13

M là trung điểm của AB $\Rightarrow$ AM = MB (2)

Từ (1) và (2) : $AM + AM = AB$

$$\Rightarrow 2AM = AB \Rightarrow AM = \frac{1}{2} AB.$$

Ví dụ 10. Cho đoạn thẳng AB có độ dài a. Trên tia AB lấy điểm M sao cho $AM = \frac{a}{2}$. Hãy chứng tỏ rằng điểm M là trung điểm của AB.

Giải (h. 14). Gọi N là trung điểm của AB thì $AN = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$.

Hình 14

Ta lại có $AM = \frac{a}{2}$ nên $AM = AN$.

Các điểm M, N thuộc tia AB và $AM = AN$ nên $M \equiv N$.

Vậy M là trung điểm của AB.

BÀI TẬP

19. Cho đoạn thẳng AB = 5cm, điểm C nằm giữa A và B, các điểm D và E theo thứ tự là trung điểm của AC và CB. Tính độ dài DE.

20. Cho đoạn thẳng AB = 5cm, điểm C nằm giữa A và B sao cho AC = 2cm, các điểm D và E theo thứ tự là trung điểm của AC và CB. Gọi I là trung điểm của DE. Tính các độ dài DE, CI.

21. Cho đoạn thẳng AB = 1m. Lấy A_1 là trung điểm của AB, A_2 là trung điểm của AA_1, A_3 là trung điểm của AA_2, ... Cứ tiếp tục như vậy cho đến A_{20} là trung điểm của AA_{19}. Tính độ dài AA_{20}.

22. Cho đoạn thẳng AB = a, điểm C nằm giữa A và B, điểm M là trung điểm của AC, điểm N là trung điểm của CB.

a) Hãy chứng tỏ rằng $MN = \frac{a}{2}$.

b) Kết quả ở câu a còn đúng hay không nếu điểm C thuộc đường thẳng AB?

23. Cho điểm C thuộc đoạn thẳng AB có CA = a, CB = b. Gọi I là trung điểm của AB. Tính độ dài IC.

24. Cho điểm C thuộc đường thẳng AB nhưng không thuộc đoạn thẳng AB. Biết CA = a, CB = b. Gọi I là trung điểm của AB. Tính độ dài IC.

Phần II

CHUYÊN ĐỀ

TÍNH SỐ ĐIỂM, SỐ ĐƯỜNG THẲNG, SỐ ĐOẠN THẲNG

Để đếm số điểm, số đường thẳng, số đoạn thẳng, trong nhiều trường hợp ta không thể đếm trực tiếp mà phải dùng lập luận.

Ví dụ 11(1). a) Cho 100 điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm ta vẽ một đường thẳng. Có tất cả bao nhiêu đường thẳng ?

b) Cũng hỏi như câu a nếu trong 100 điểm đó có đúng ba điểm thẳng hàng.

Giải : a) Chọn một điểm. Qua điểm đó và từng điểm trong 99 điểm còn lại, ta vẽ được 99 đường thẳng. Làm như vậy với 100 điểm, ta được $99 . 100$ đường thẳng. Nhưng mỗi đường thẳng đã được tính hai lần, do đó tất cả chỉ có $99 . 100 : 2 = 4950$ đường thẳng.

Chú ý : Tổng quát, nếu có n điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng thì số đường thẳng có $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

b) Cách 1. Giả sử không có ba điểm nào thẳng hàng thì có 4950 đường thẳng. Vì có ba điểm thẳng hàng nên số đường thẳng giảm đi : $3 - 1 = 2$ (nếu ba điểm không thẳng hàng thì vẽ được 3 đường thẳng, nếu ba điểm thẳng hàng thì chỉ vẽ được 1 đường thẳng). Vậy có : $4950 - 2 = 4948$ (đường thẳng).

Cách 2. Chia 100 điểm thành hai tập hợp : tập hợp A gồm 3 điểm thẳng hàng, tập hợp B gồm 97 điểm còn lại.

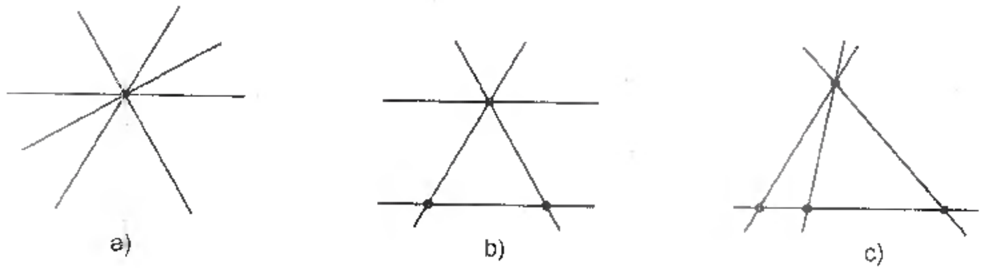
Số đường thẳng trong tập hợp A là 1, số đường thẳng trong tập hợp B là $\dfrac{97 . 96}{2}$, số đường thẳng đi qua một điểm thuộc tập hợp A và một điểm thuộc tập hợp B là $97 . 3$.

Cộng lại ta được : $1 + 4656 + 291 = 4948$ (đường thẳng).

Ví dụ 12(1). Trên mặt phẳng có bốn đường thẳng. Số giao điểm của các đường thẳng có thể bằng bao nhiêu ?

Giải : Bài toán đòi hỏi phải xét đủ các trường hợp :

a) Bốn đường thẳng đồng quy : có 1 giao điểm (h. 15a).



Hình 15

b) Có đúng ba đường thẳng đồng quy :

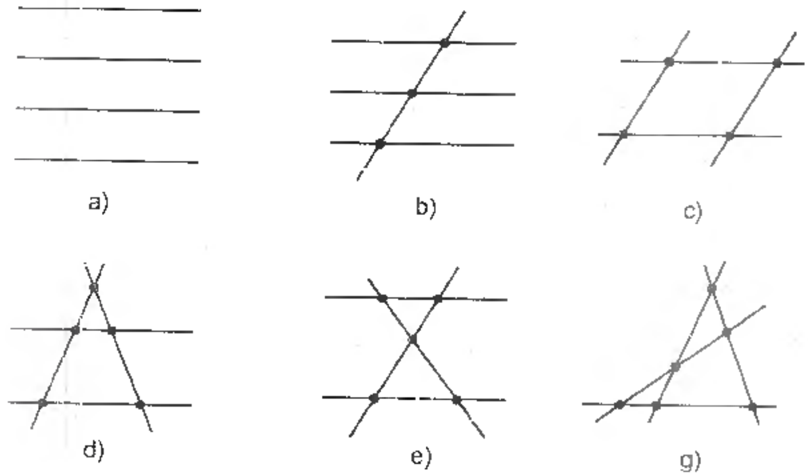
– Có hai đường thẳng song song : 3 giao điểm (h. 15b).

– Không có hai đường thẳng nào song song : 4 giao điểm (h. 15c).

c) Không có ba đường thẳng nào đồng quy :

– Bốn đường thẳng song song : 0 giao điểm (h. 16a)

– Có đúng ba đường thẳng song song : 3 giao điểm (h. 16b)



Hình 16

– Có hai cặp đường thẳng song song : 4 giao điểm (h. 16c).

– Có đúng một cặp đường thẳng song song : 5 giao điểm (h. 16d, e).

– Không có hai đường thẳng nào song song : 6 giao điểm (h. 16g).

Ví dụ 13(2). Cho n điểm ($n \geqslant 2$). Nối từng cặp hai điểm trong n điểm đó thành các đoạn thẳng.

a) Hỏi có bao nhiêu đoạn thẳng nếu trong n điểm đó không có ba điểm nào thẳng hàng ?

b) Hỏi có bao nhiêu đoạn thẳng nếu trong n điểm đó có đúng ba điểm thẳng hàng ?

c) Tính n biết rằng có tất cả 1770 đoạn thẳng.

Giải : a) Chọn một điểm. Nối điểm đó với từng điểm trong n - 1 điểm còn lại, ta vẽ được n - 1 đoạn thẳng. Làm như vậy với n điểm, ta được n(n - 1) đoạn thẳng. Nhưng mỗi đoạn thẳng đã được tính hai lần, do đó tất cả chỉ có $\frac{n(n-1)}{2}$ đoạn thẳng.

b) Tuy trong hình vẽ có ba điểm thẳng hàng, nhưng số đoạn thẳng phải đếm vẫn không thay đổi, do đó vẫn có $\frac{n(n-1)}{2}$ đoạn thẳng.

c) Ta có : $\frac{n(n-1)}{2} = 1770$. Do đó :

$$n(n-1) = 2 . 1770 = 2^2 . 3 . 5 . 59 = 60 . 59.$$

Suy ra : n = 60.

BÀI TẬP

25(1). Cho n điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ $(n \geq 2)$ trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm, ta kẻ một đường thẳng.

a) Kể tên các đường thẳng trên hình vẽ nếu n = 4.

b) Tính số đường thẳng trên hình vẽ nếu n = 20.

c) Tính số đường thẳng theo n.

d) Tính n biết số đường thẳng kẻ được là 1128.

e) Số đường thẳng có thể bằng 2004 được không ?

26(1). Cho 100 điểm trong đó có đúng bốn điểm thẳng hàng, ngoài ra không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm ta vẽ một đường thẳng. Hỏi có tất cả bao nhiêu đường thẳng ?

27(1). Cho n điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm ta vẽ một đường thẳng. Biết rằng có tất cả 105 đường thẳng. Tính n.

28(1). Cho bốn điểm, bất cứ hai điểm nào cũng có ít nhất một đường thẳng đi qua. Có thể có bao nhiêu đường thẳng trong hình vẽ ?

29(1) a) Cho ba đường thẳng cắt nhau đôi một. Hỏi có thể có bao nhiêu giao điểm trong hình vẽ ?

b) Vẽ ba đường thẳng sao cho số giao điểm (của hai hoặc của ba đường thẳng) lần lượt là 0, 1, 2, 3.

30(1)*. Cho 101 đường thẳng trong đó bất cứ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau, không có ba đường thẳng nào đồng quy. Tính số giao điểm của chúng.

31(1)*. Cho n đường thẳng trong đó bất cứ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau, không có ba đường thẳng nào đồng quy. Biết rằng số giao điểm của các đường thẳng đó là 780. Tính n.

32(2). Cho 10 điểm. Nối từng cặp hai điểm trong 10 điểm đó thành các đoạn thẳng. Tính số đoạn thẳng mà hai mút thuộc tập 10 điểm đã cho nếu trong các điểm đã cho :

a) Không có ba điểm nào thẳng hàng ;

b) Có đúng ba điểm thẳng hàng.

33(2). Cho n điểm. Nối từng cặp hai điểm trong n điểm đó thành các đoạn thẳng. Tính n biết rằng có tất cả 435 đoạn thẳng.

34(1). Một đường thẳng chia mặt phẳng thành hai miền. Hỏi :

a) Hai đường thẳng có thể chia mặt phẳng thành mấy miền ?

b) Ba đường thẳng có thể chia mặt phẳng thành mấy miền ?

c) Bốn đường thẳng chia mặt phẳng nhiều nhất thành mấy miền ?

LỜI GIẢI HOẶC CHỈ DẪN

ÔN TẬP VÀ BỔ TÚC VỀ SỐ TỰ NHIÊN

1. A = {a, b, c} ; B = {a, b, m, n}

C = {1 ; 3} ; D = {1 ; 2 ; 3 ; 4}.

2. a) A là tập hợp các số lẻ nhỏ hơn 50.

b) B là tập hợp các số tự nhiên có hai chữ số, các chữ số giống nhau.

c) C là tập hợp các tháng có 31 ngày của năm dương lịch.

3. a) {1} ; b) {3} ; c) {0}

d) **N*** ; e) ∅.

4. Có ba đáp số : a = 13 ; b = 14 ;

a = 13 ; b = 15 ;

a = 14 ; b = 15.

5. Có 12 số :

– Chữ số 3 đứng đầu : 3312, 3321, 3213, 3231, 3123, 3132.

– Chữ số 2 đứng đầu : 2133, 2313, 2331.

– Chữ số 1 đứng đầu : 1233, 1323, 1332.

6. Các số chứa một chữ số X là : IX, XI, XII, XIII.

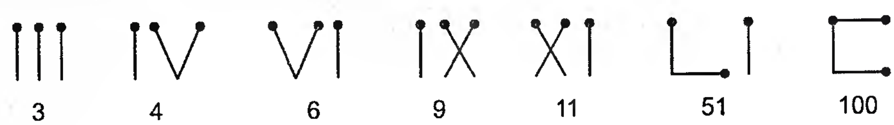
Các số chứa hai chữ số X là : XIX, XXI, XXII, XXIII.

Các số chứa ba chữ số X là : XXIX, XXXI, XXXII, XXXIII.

Số chứa bốn chữ số X là : XXXIX.

Tổng cộng có 13 số.

7. a) Ghi được bảy số :



b) VIImCCIII, CXXImDXII.

8. Biểu thị số còn lại sau khi xoá chữ số 3 là một phần thì số phải tìm gồm 10 phần và 3 đơn vị, hiệu của chúng bằng 1992.

Đáp số : Số phải tìm là 2213.

9. *Đáp số :* 102564.

10. Giả sử $a > b > c > d > 0$. Số lớn nhất : $\overline{abcd}$, số nhỏ nhất : $\overline{dcba}$. Xét tổng :

$$\begin{array}{r} a\;b\;c\;d \\ +\;d\;c\;b\;a \\ \hline 1\;1\;3\;3\;0 \end{array}$$

Lần lượt chứng tỏ : $d + a = 10$, $c + b = 12$.

Suy ra : $a + b + c + d = 22$.

11. a) $A = \{\overline{abc}, \overline{acb}, \overline{bac}, \overline{bca}, \overline{cab}, \overline{cba}\}$

b)
$$\begin{array}{r} a\;b\;c \\ +\;a\;c\;b \\ \hline 4\;8\;8 \end{array}$$

Xét phép cộng ở cột hàng đơn vị và cột hàng chục, ta thấy $c + b$ không có nhớ. Do đó : $c + b = 8$; $a + a = 4$. Suy ra : $a = 2$.

Từ $2 < b < c$ và $b + c = 8$, ta được : $b = 3$; $c = 5$.

Vậy $a = 2$; $b = 3$; $c = 5$.

12. Gọi các chữ số phải tìm là a, b, c trong đó $a > b > c > 0$. Hai số lớn nhất lập bởi cả ba chữ số trên là $\overline{abc}$ và $\overline{acb}$, ta có $\overline{abc} + \overline{acb} = 1444$.

So sánh các cột đơn vị và cột hàng chục, ta thấy phép cộng $c + b$ không có nhớ. Vậy $c + b = 4$, mà $b > c > 0$ nên $b = 3$, $c = 1$.

Xét cột hàng trăm : $a + a = 14$ nên $a = 7$. Ba chữ số phải tìm là 7, 3, 1.

13. Tổng các số trong bảng tính theo ba dòng bằng 1356, tổng các số trong bảng tính theo ba cột lại bằng 1256. Không có chín số nào như vậy.

14. Gọi các số ở các ô thứ hai, ba, tư là a, b, c, ta có : 4 a b c * * * * 8. Do $4 + a + b = a + b + c$ nên $c = 4$. Như vậy cứ cách hai ô, các số được viết lặp lại. Ta điền sơ bộ được :

4 * 84 * 84 * 8.

Sử dụng tiếp điều kiện tổng ba số ở ba ô liền nhau bằng 17, ta được kết quả :

4 5 8 4 5 8 4 5 8.

15. Xét hai trường hợp :

$$\begin{array}{r} 4\;a\;1 \\ -\;1\;a\;4 \\ \hline 5\;9\;4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8\;a\;2 \\ -\;2\;a\;8 \\ \hline 5\;9\;4 \end{array}$$

Trường hợp thứ nhất loại, trường hợp thứ hai đúng với mọi a. Có 10 số thoả mãn bài toán là : 802, 812, 822, 832, 842, 852, 862, 872, 882, 892.

16. $\overline{abba} + \overline{cdc} = \overline{ee}$

Lần lượt tìm được : $a = 1$, $c = 9$, $e = 2$, $b = 0$, $d = 7$.

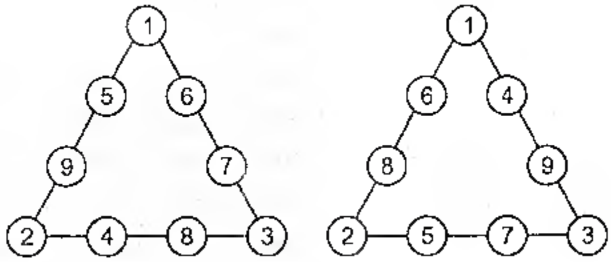
Ta có : $1001 - 979 = 22$.

17. Tổng các số từ 1 đến 9 bằng : $1 + 2 + 3 + ... + 9 = 45$.

Tổng trên ít hơn ba lần tổng các số ở mỗi cạnh là :

$$17 . 3 - 45 = 6.$$

Do đó tổng ba số ở đỉnh tam giác là 6. Các số có thể xếp như hình 17.



Hình 17

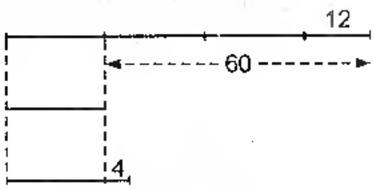
18. Xét hai trường hợp :

a) Số bị trừ tăng gấp ba

Số bị trừ × 3

Số trừ

Số bị trừ



Hai lần số trừ :

$60 - 12 = 48$.

Số trừ : $48 : 2 = 24$.

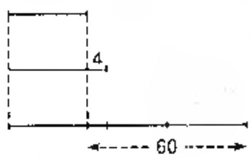
Số bị trừ : $24 + 4 = 28$.

b) Số trừ tăng gấp ba

Số trừ :

Số bị trừ :

Số trừ × 3 :



Hai lần số trừ :

$60 + 4 = 64$.

Số trừ : $64 : 2 = 32$.

Số bị trừ : $32 + 4 = 36$.

19. Gọi hiệu của hai số là a thì tổng của chúng bằng 5a, tích của chúng bằng 24a.

Số nhỏ bằng : $(5a - a) : 2 = 2a$.

Số lớn bằng : $(5a + a) : 2 = 3a$.

Số nhỏ : $\dfrac{24a}{3a} = 8$.

Số lớn : $\dfrac{24a}{2a} = 12$.

20. *Đáp số :* Số lớn : 64. Số nhỏ : 48.

21. Số bị nhân : 135. Số nhân : 46.

22. Bảo chỉ nhân số bị nhân với 12, như vậy tích bị giảm đi : 102 − 12 = 90 lần số bị nhân hay 21870. Vậy số bị nhân bằng 243.

23. *Đáp số :* 62.

24. Do đặt sai vị trí các tích riêng nên bạn học sinh đó chỉ nhân số bị nhân với 4 + 6 + 3. Vậy số bị nhân bằng :

$$30524 : 13 = 2348.$$

25. $11111111 - 2222 = 1111 \,.\, 10001 - 1111 \,.\, 2 = 1111 \,.\, 9999$

$$= 1111 \,.\, 3 \,.\, 3333 = 3333 \,.\, 3333.$$

26. Lấy 9 chia cho 7, sau đó bổ sung vào số bị chia các chữ số 9 cho đến khi được số dư bằng 0, ta được số bị chia gồm sáu chữ số 9, thương bằng 142857.

Tiếp tục bổ sung các chữ số 9 vào số bị chia, ta được số thứ hai là 142857142857.

Hai số phải tìm là : 142857 và 142857142857.

27. Biến đổi :

$$\underbrace{33\ldots3}_{50 \text{ chữ số}} \,.\, \underbrace{33\ldots3}_{50 \text{ chữ số}} = \underbrace{11\ldots1}_{50 \text{ chữ số}} \,.\, 3 \,.\, \underbrace{33\ldots3}_{50 \text{ chữ số}} = \underbrace{11\ldots1}_{50 \text{ chữ số}} \,.\, \underbrace{99\ldots9}_{50 \text{ chữ số}}$$

Giải tiếp như ví dụ 5.

Đáp số : $\underbrace{11\ldots1}_{49 \text{ chữ số}}\,0\,\underbrace{88\ldots8}_{49 \text{ chữ số}}\,9$

28. a) Ta có nhận xét : 111222 : 111 = 1002. Do đó :

$$\begin{aligned} 111222 &= 111 \,.\, 1002 \\ &= 111 \,.\, 3 \,.\, 334 \\ &= 333 \,.\, 334. \end{aligned}$$

b) Chia 444222 cho 222 được 2001. Do đó :

$$\begin{aligned} 444222 &= 222 \,.\, 2001 \\ &= 222 \,.\, 3 \,.\, 667 \\ &= 666 \,.\, 667. \end{aligned}$$

29. Số bị chia bằng 35 lần số chia. Nếu tăng thêm 1056 thì số bị chia bằng 57 lần số chia. Vậy 1056 bằng :

$$57 - 35 = 22 \text{ (lần số chia)}.$$

Số chia : 1056 : 22 = 48.

Số bị chia : 48 . 35 = 1680.

30. *Đáp số :* 475 và 71.

31. *Đáp số :* 153 và 32.

32. Ta thấy rằng 365 : 7 = 52 (dư 1) nên trong một năm có ít nhất 52 ngày chủ nhật.

366 : 7 = 52 (dư 2) nên trong một năm có nhiều nhất 53 ngày chủ nhật.

33. Từ 19 – 8 – 1945 đến 19 – 8 – 2002 có 57 năm, trong đó có 14 năm nhuận, gồm 365 . 57 + 14 = 20819 (ngày), tức là 2974 tuần, lẻ 1 ngày.

Vậy ngày 19 – 8 – 1945 vào chủ nhật.

34. Gọi a và b là số bị chia và số chia lúc đầu, x và r là thương và số dư của phép chia đó. Ta có a = bx + r (1) và a + 15 = (b + 5)x + r (2).

Lấy (2) trừ (1) ta được 15 = 5x, do đó x = 3.

35. *Đáp số :* Thương của phép chia là 15.

36. *Đáp số :* Thương là 17.

37. Ta thấy thương khác 0 nên số bị chia lớn hơn số chia. Ta lần lượt thấy :

a) 3 không là số chia vì các số lớn hơn 3 trong các số đã cho đều chia 3 dư 1, mà 1 không thuộc các số đã cho.

4 không là số chia vì các số lớn hơn 4 trong các số đã cho đều chia hết cho 4, mà 0 không thuộc các số đã cho. Cũng vậy, các số 16 và 64 cũng không là số chia.

Xét số chia là 256, số bị chia là 772, ta có : 772 chia cho 256 được 3 dư 4. Bốn số trên thuộc các số đã cho. Vậy số bị chia là 772, số chia là 256, thương là 3, số dư là 4.

b) Nếu số chia bằng 2 thì số dư bằng 1, không có mặt trong dãy số đã cho.

Chú ý rằng 243 và 567 đều chia hết cho 81 nên nếu số chia bằng 3, 9, 27, 81 thì số dư bằng 0, cũng không có mặt trong dãy số đã cho.

Vậy số chia bằng 243, số bị chia bằng 567, thương bằng 2, số dư bằng 81.

38. Gọi số bị chia lúc đầu là $\overline{aaa}$, số chia lúc đầu là $\overline{bbb}$, số dư lúc đầu là r. Ta có :

$$\overline{aaa} = 2 . \overline{bbb} + r \qquad (1)$$

$$\overline{aa} = 2 . \overline{bb} + r - 100 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$\overline{aaa} - \overline{aa} = 2(\overline{bbb} - \overline{bb}) + 100$$

$$\Rightarrow \overline{a00} = 2 . \overline{b00} + 100$$

$$\Rightarrow a = 2b + 1.$$

Ta có :

b	1	2	3	4
a	3	5	7	9

Thử từng trường hợp, ta được ba đáp số :

555 và 222 ; 777 và 333 ; 999 và 444.

39. Gọi số bị chia lúc đầu là $\overline{aaaa}$, số chia lúc đầu là $\overline{bbb}$, số dư lúc đầu là r. Ta có :

$$\overline{aaaa} = 13.\overline{bbb} + r \qquad (1)$$
$$\overline{aaa} = 13.\overline{bb} + r - 100 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$\overline{a000} = 13.\ \overline{b00} + 100$$
$$\overline{a0} = 13b + 1.$$

Như vậy 13b tận cùng bằng 9 nên b = 3, do đó $\overline{a0} = 40$.

Số bị chia và số chia lúc đầu là 4444 và 333.

40. a) $4^{10}.8^{15} = 2^{20}.2^{45} = 2^{65}$.

b) 10^{30} ; c) 3^{28}.

d) $A = \dfrac{(2^3.3^2)^3.(3^3.2)^2}{(2^2.3^3)^4} = \dfrac{2^9.3^6.3^6.2^2}{2^8.3^{12}} = 2^3 = 8.$

e) $B = \dfrac{3^{10}.(11+5)}{3^9.2^4} = \dfrac{3^{10}.16}{3^9.16} = 3.$

41. a) *Đáp số* : 3.

b) Có một thừa số bằng 0. *Đáp số* : 0.

42. a) x = 5 ; b) x = 0 hoặc x = 1.

c) x = 2 ; d) x = 5 hoặc x = 6.

43. Ta có : $A = 3 + 3^2 + ... + 3^{99} + 3^{100}$ (1)

$3A = 3^2 + 3^3 + ... + 3^{100} + 3^{101}$ (2)

Lấy (2) trừ (1) được : $2A = 3^{101} - 3$.

Do đó $2A + 3 = 3^{101}$. Theo đề bài, $2A + 3 = 3^n$.

Vậy n = 101.

44. Gọi số tự nhiên phải tìm là $\overline{abc}$ ($1 \leqslant a \leqslant 9$; $0 \leqslant b, c \leqslant 9$).

Số viết theo thứ tự ngược lại là $\overline{cba}$.

Ta có : $\overline{abc} - \overline{cba} = 495$

$$(100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = 495$$
$$99a - 99c = 495$$
$$a - c = 5$$

Xét các số : $\overline{5b0}$, $\overline{6b1}$, $\overline{7b2}$, $\overline{8b3}$, $\overline{9b4}$

chỉ có : $\overline{5b0}$ có $b^2 = 0.5 = 0$ cho b = 0

và $\overline{9b4}$ có $b^2 = 4.9 = 36$ cho b = 6.

Đáp số : 500 và 964.

45. a) $19 . 64 + 76 . 34 = 38 . 32 + 38 . 68$

$= 38 . (32 + 68) = 38 . 100 = 3800.$

b) $35 . 12 + 65 . 13 = 35 . 12 + 65 . (12 + 1)$

$= 35 . 12 + 65 . 12 + 65 = 12 . (35 + 65) + 65$

$= 1200 + 65 = 1265.$

c) $136 . 68 + 16 . 272 = 136 . 68 + 32 . 136$

$= 136 . (68 + 32) = 136 . 100 = 13600.$

d) 0.

e) 0.

46. a) $A = 1998 . 1998 = 1998 . (1996 + 2) = 1998 . 1996 + 1998 . 2$

$B = 1996 . 2000 = 1996 . (1998 + 2) = 1996 . 1998 + 1996 . 2$

A lớn hơn B là : $(1998 - 1996) . 2$, tức là 4.

b) A lớn hơn B là 100.

c) $A = 25 . (31 + 2) - 10 = 25 . 31 + 25 . 2 - 10 = 25 . 31 + 40$

$B = 31 . (25 + 1) + 10 = 31 . 25 + 31 + 10 = 31 . 25 + 41.$

A nhỏ hơn B là 1.

d) A nhỏ hơn B là 10.

47. Biến đổi số bị chia để được số chia.

Đáp số : 1.

48. a) *Đáp số :* 101.

b) $3737 . 43 - 4343 . 37 = 37 . 101 . 43 - 43 . 101 . 37 = 0.$

Số bị chia bằng 0, số chia khác 0 nên thương bằng 0.

49. a) *Đáp số :* 4.

b) Số bị chia bằng : $1374 . 57 + 1374 . 43 = 1374 . (57 + 43) = = 1374 . 100 = 137400.$

Số chia bằng : $26 . 13 + 74 . (13 + 1) = 26 . 13 + 74 . 13 + 74 =$

$= (26 + 74) . 13 + 74 = 1300 + 74 = 1374.$

Đáp số : 100.

c) *Đáp số :* 1.

d) *Đáp số :* 1.

50. a) $\dfrac{15 . a + 364}{a} = 697 : 17 = 41$

$15 + \dfrac{364}{a} = 41$

$\dfrac{364}{a} = 41 - 15 = 26.$

$a = 364 : 26 = 14.$

b) *Đáp số :* a = 14.

51. a) x = 14 ; b) x = 7.

52. $55 + 55 - (5 + 5) = 100$

$(5 . 5 - 5) . 5 - (5 - 5) = 100$

$(5 + 5) . (5 + 5) . (5 : 5) = 100$

$(5 + 5 + 5) . 5 + 5 . 5 = 100$

$(555 - 55) : 5 = 100.$

53. a) $5 . 5 . (5 - 5 : 5)$; $5 . 5 . 5 - 5 . 5$

$(5 + 5 + 5 + 5) . 5$; $111 - 11$; $33 . 3 + 3 : 3.$

b) $\dfrac{222 - 22}{2}$; $\dfrac{333 - 33}{3}$; ... ; $\dfrac{999 - 99}{9}$;

$99 + \dfrac{99}{99}$; $55 + 55 - (5 + 5)$;

$(5 . 5 - 5) . 5 + (5 - 5)$; $(5 + 5) . (5 + 5) . \dfrac{5}{5}$;

$(5 + 5 + 5) . 5 + 5 . 5.$

54. a) $(5 + 5)^5 . (5 + 5)$; $(5 + 5)^{5+5:5}$; $\left(\dfrac{66 - 6}{6}\right)^6.$

b) $\left(3 . 3 + \dfrac{3}{3}\right)^{3+3}$; $\left(\dfrac{33 - 3}{3}\right)^{3+3}$;

$\left(33 . 3 + \dfrac{3}{3}\right)^3$; $\left(6 + 6 - \dfrac{6+6}{6}\right)^6.$

55. $1 + 2 + 3 - 4 + 5 + 6 + 78 + 9 = 100$

$1 + 2 + 34 - 5 + 67 - 8 + 9 = 100$

$1 + 23 - 4 + 56 + 7 + 8 + 9 = 100$

$1 + 23 - 4 + 5 + 6 + 78 - 9 = 100$

$12 + 3 - 4 + 5 + 67 + 8 + 9 = 100$

$12 + 3 + 4 + 5 - 6 - 7 + 89 = 100$

$12 - 3 - 4 + 5 - 6 + 7 + 89 = 100$

$123 + 4 - 5 + 67 - 89 = 100$

$123 - 4 - 5 - 6 - 7 + 8 - 9 = 100$

$123 + 45 - 67 + 8 - 9 = 100$

$123 - 45 - 67 + 89 = 100.$

56. a) $98 - 76 + 54 + 3 + 21 = 100$

$98 + 7 - 6 + 5 - 4 + 3 - 2 - 1 = 100$

$98 - 7 + 6 + 5 - 4 + 3 - 2 + 1 = 100$

$98 + 7 - 6 + 5 - 4 - 3 + 2 + 1 = 100$

$98 - 7 + 6 - 5 + 4 + 3 + 2 - 1 = 100$

$98 + 7 + 6 - 5 - 4 - 3 + 2 - 1 = 100$

$98 - 7 - 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 100$

$9 + 8 + 76 + 5 + 4 - 3 + 2 - 1 = 100$

$9 + 8 + 76 + 5 - 4 + 3 + 2 + 1 = 100$

$9 - 8 + 76 + 54 - 32 + 1 = 100$.

b) $9 + 8 + 7 + 65 + 4 + 3 + 2 + 1 = 99$

$9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 43 + 21 = 99$.

57. a) Có, chẳng hạn : $12 + 13 + 14 + 15 + 16 = 70$.

b) Không. Tổng của năm số lẻ là một số lẻ, không thể bằng 70.

58. a) Có, chẳng hạn :

Nhóm I : $1 + 3 + 5 + 13 + 15 + 17 = 54$.

Nhóm II : $7 + 9 + 11 = 27$.

b) Không. Tổng của chín số lẻ là một số lẻ, không chia hết cho 2.

59. a) Giả sử có ba số tự nhiên có tổng tận cùng bằng 4, tích tận cùng bằng 1. Tích là số lẻ nên cả ba số đều lẻ, khi đó tổng của chúng là số lẻ, không thể tận cùng bằng 4.

Vậy không tồn tại ba số tự nhiên như vậy.

b) Không tồn tại, vì nếu tích của bốn số là số lẻ thì cả bốn số đều lẻ, khi đó tổng của chúng là số chẵn.

60. Từ $a.b.c + a = 333$ suy ra a là số lẻ. Tương tự b và c cũng là số lẻ. Nhưng khi đó $a.b.c + a$ là số chẵn, vô lí.

61. a) $\overline{abba} = 1001a + 110b$ chia hết cho 11.

b) $\overline{abccba} = 100001a + 10010b + 1100c$ chia hết cho 11.

62. $\overline{abcd} = 100.\overline{ab} + \overline{cd} = 201.\overline{cd}$ chia hết cho 67.

63. a) $\overline{abcabc} = 1000.\overline{abc} + \overline{abc} = 1001.\overline{abc}$ chia hết cho 7, 11, 13.

b) $\overline{abcdeg} = 1000.\overline{abc} + \overline{deg} = 2001.\overline{deg}$ chia hết cho 23, 29.

64. $\overline{abcdeg} = 10000.\overline{ab} + 100.\overline{cd} + \overline{eg} = 9999.\overline{ab} + 99.\overline{cd} + (\overline{ab} + \overline{cd} + \overline{eg})$ chia hết cho 11.

65. a) $\overline{abcdeg} = 1000.\overline{abc} + \overline{deg} = 999.\overline{abc} + (\overline{abc} + \overline{deg})$ chia hết cho 37.

b) $\overline{abcdeg} = 1000.\overline{abc} + \overline{deg} = 1001.\overline{abc} - (\overline{abc} - \overline{deg})$ chia hết cho 7.

c) Trong tám số, tồn tại hai số có cùng số dư trong phép chia cho 7. Sau đó áp dụng kết quả của câu b.

66. $n = \overline{20a20a20a} = \overline{20a20a} \,.\, 1000 + \overline{20a} = (\overline{20a} \,.\, 1000 + \overline{20a}) \,.\, 1000 + \overline{20a} =$
$= 1001 \,.\, \overline{20a} \,.\, 1000 + \overline{20a}$.

Theo đề bài n chia hết cho 7, mà 1001 chia hết cho 7 nên $\overline{20a}$ chia hết cho 7.

Ta có $\overline{20a} = 196 + (4 + a)$, chia hết cho 7 nên $4 + a$ chia hết cho 7. Vậy $a = 3$.

67. Gọi ba chữ số là a, b, c. Tổng các số theo đề bài bằng $222 \,.\, (a + b + c)$, chia hết cho 6 và 37.

68. Giả sử tồn tại các số tự nhiên x và y mà

$$(x + y)(x - y) = 1002 \qquad (1)$$

Không thể xảy ra trường hợp trong x và y có một số chẵn, một số lẻ vì nếu xảy ra thì $x + y$ và $x - y$ đều lẻ nên tích $(x + y)(x - y)$ là số lẻ, trái với (1).

Vậy x và y phải cùng chẵn hoặc cùng lẻ. Khi đó $x + y$ và $x - y$ đều chẵn nên tích $(x + y)(x - y)$ chia hết cho 4, trong khi đó 1002 không chia hết cho 4, vô lí.

Vậy không tồn tại các số tự nhiên x và y mà $(x + y)(x - y) = 1002$.

69. Gọi số phải tìm là $\overline{ab}$. Ta có :

$$\overline{1999ab} \;\vdots\; 37$$
$$\Rightarrow 199900 + \overline{ab} \;\vdots\; 37$$
$$\Rightarrow 5402 \,.\, 37 + 26 + \overline{ab} \;\vdots\; 37$$
$$\Rightarrow 26 + \overline{ab} \;\vdots\; 37.$$

Vậy $\overline{ab} \in \{11 \,;\, 48 \,;\, 85\}$.

70. a) Xét hai trường hợp : n chẵn và n lẻ.

b) c) Xét ba trường hợp : $n = 3k$, $n = 3k + 1$, $n = 3k + 2$ $(k \in \mathbf{N})$.

71. *Cách 1.* $a \;\vdots\; b \Rightarrow a = bk_1$ $(k_1 \in \mathbf{N})$; $b \neq 0$.

$b \;\vdots\; a \Rightarrow b = ak_2$ $(k_2 \in \mathbf{N})$; $a \neq 0$.

Suy ra : $a = bk_1 = ak_2k_1 \Rightarrow k_2k_1 = 1 \Rightarrow k_1 = k_2 = 1$. Vậy : a và b là hai số tự nhiên bằng nhau và khác 0.

Cách 2. $a \;\vdots\; b \Rightarrow a \geqslant b$; $b \neq 0$.

$b \;\vdots\; a \Rightarrow b \geqslant a$; $a \neq 0$.

Suy ra : $a \geqslant b \geqslant a$. Vậy $a = b \neq 0$.

72. Số chữ số để viết từ 1 đến $\overline{abc}$ là :

$$m = 1 \,.\, 9 + 2 \,.\, 90 + 3 \,.\, (\overline{abc} - 99) = 3 \,.\, \overline{abc} - 108.$$

Ta có $3 \,.\, \overline{abc} - 108$ chia hết cho $\overline{abc}$ nên 108 chia hết cho $\overline{abc}$. Vậy $\overline{abc} = 108$.

73. Được, chẳng hạn :

$$9 - 8 + 7 - 6 + 5 - 4 + 3 - 2 + 1 = 5$$

$$9 - 8 + 7 - 6 + 5 + 4 - 3 - 2 - 1 = 5.$$

b) Không thể đặt được :

Cách 1. Dù đặt dấu "+" và "−" như thế nào thì dãy tính cũng viết được dưới dạng :

$$d = (9 * 8) * (7 * 6) * (5 * 4) * (3 * 2) * 1.$$

Tổng hoặc hiệu của hai số tự nhiên liên tiếp là số lẻ nên mỗi dấu ngoặc là một số lẻ, do đó d là một số lẻ, không thể bằng 6.

Cách 2. Giả sử ta đặt dấu "+" giữa các số đã cho thì dãy tính bằng :

$$9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45.$$

Cứ mỗi lần thay dấu "+" trước số a bởi dấu "−" thì dãy tính giảm đi 2a, tức là giảm đi một số chẵn.

Số 45 trừ đi số chẵn một lần hay nhiều lần bao giờ cũng được một số lẻ, không thể có kết quả bằng 6.

Vậy không thể đặt các dấu "+" hoặc "−" vào giữa các số đã cho để kết quả bằng 6.

74. Tổng lúc đầu bằng 45, là số lẻ. Mỗi lần xoá hai số a, b bất kì rồi thay bằng hiệu của chúng thì tổng giảm đi : $(a + b) - (a - b) = 2b$, là số chẵn. Do đó tổng mới luôn luôn là số lẻ. Vậy không bao giờ ta được kết quả bằng 0.

75. *Cách 1.* Chia các vé xổ số thành hai loại : các vé dạng $\overline{abcabc}$ và các vé dạng $\overline{abcdeg}$ mà $\overline{abc} \neq \overline{deg}$ (ví dụ 812650).

Mỗi vé thuộc dạng thứ nhất đều chia hết cho 13. Ghép hai vé thuộc dạng thứ hai là $\overline{abcdeg}$ và $\overline{degabc}$ thành một cặp, tổng hai số này bằng $1001 . \overline{abc} + 1001 . \overline{deg}$, chia hết cho 13.

Cách 2. Ghép mỗi vé số A với vé số $A' = 999999 - A$ thì $A' \neq A$ và cũng có tính chất như số A (là tổng ba chữ số đầu cũng bằng tổng ba chữ số cuối) ta thấy $A + A' = 999999$ chia hết cho 13.

(Ví dụ nếu $A = 812650$ thì $A' = 187349$, nếu $A = 982748$ thì $A' = 017251$, tổng $A + A'$ chia hết cho 13).

76. Ta thấy 13! và 11! có tận cùng bằng 0 vì chúng đều chứa thừa số 10. Do đó $A \vdots 2$, $A \vdots 5$.

Để chứng minh $A \vdots 155$, ta viết A dưới dạng :

$$A = 13! - 11! = 11!(12 . 13 - 1) = 11! . 155.$$

77. Gọi A là tổng các số tự nhiên từ 1 đến 154.

$$A = \frac{(1 + 154) . 154}{2} = 155 . 77$$

A không chia hết cho 2 ; A chia hết cho 5.

78. A tận cùng bằng 0 nên chia hết cho 5.

79. Ta thấy $n^2 + n = n(n + 1)$. Tích của hai số tự nhiên liên tiếp chỉ tận cùng bằng 0, 2, 6. Do đó $n^2 + n + 6$ chỉ tận cùng bằng 6, 8, 2, không chia hết cho 5.

80. Các số chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 5 có tận cùng bằng 2, 4, 6, 8 ; mỗi chục có bốn số.

Từ 0 đến 999 có 100 chục nên có :

$$4 . 100 = 400 \text{ (số)}$$

Vậy trong các số tự nhiên nhỏ hơn 1000, có 400 số chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 5.

81. Các số chia hết cho 25 có tận cùng bằng 00, 25, 50, 75 nên các số chia cho 25 dư 3 có tận cùng bằng 03, 28, 53, 78.

Các số chia hết cho 4 có hai chữ số tận cùng tạo thành số chia hết cho 4 nên số chia cho 4 dư 1 có hai số tận cùng tạo thành số chia cho 4 dư 1. Trong các số 03, 28, 53, 78, chỉ có số 53 chia cho 4 dư 1.

Vậy các số chia cho 4 thì dư 1, chia cho 25 thì dư 3 là các số có tận cùng bằng 53.

82. Trước hết tìm các số chia cho 125 thì dư 12, đó là các số có tận cùng là 012, 137, 262, 512, 637, 762, 887. Trong các số trên, chọn ra số chia cho 8 dư 3.

Đáp số : Các số có tận cùng bằng 387.

83. Không có phép trừ hai số tự nhiên như đề bài. Giải thích : Nếu số trừ gấp ba lần hiệu thì số bị trừ chia hết cho 4, mà 1030 không chia hết cho 4.

84. a) 5216 ; b) 24867.

85. a) Số $\overline{7a5b1} \vdots 3 \Rightarrow 7 + a + 5 + b + 1 \vdots 3 \Rightarrow 13 + a + b \vdots 3 \Rightarrow a + b$ chia cho 3 dư 2 (1).

Ta có $a - b = 4$ nên :

$$4 \leq a \leq 9$$

$$0 \leq b \leq 5$$

Suy ra $4 \leq a + b \leq 14$ (2)

Mặt khác $a - b$ là số chẵn nên $a + b$ là số chẵn (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra : $a + b \in \{8 ; 14\}$.

Với $a + b = 8$; $a - b = 4$ ta được : $a = 6$; $b = 2$.

Với $a + b = 14$; $a - b = 4$ ta được : $a = 9$; $b = 5$.

b) $\overline{4a7} + \overline{1b5} \vdots 9 \Rightarrow 512 + 10(a + b) \vdots 9$

$\Rightarrow 504 + 8 + 9(a + b) + a + b \vdots 9 \Rightarrow a + b$ chia cho 9 dư 1.

Do $a + b \geqslant a - b = 6$ nên $a + b = 10$. Từ đó tìm được :

$$a = 8 ; \quad b = 2.$$

86. Gọi số phải tìm là $\overline{abc}$. Do $a + b + c$ chia hết cho 9 và $2b = a + c$ nên $3b$ chia hết cho 9, suy ra b chia hết cho 3. Như vậy $b \in \{0 ; 3 ; 6 ; 9\}$. Do $\overline{abc} \vdots 5$ nên $c \in \{0 ; 5\}$.

Xét các số $\overline{ab0}$ với $a = 2b$, ta được số 630.

Xét các số $\overline{ab5}$ với $a = 2b - 5$, ta được số 135 và 765.

87. a) Tổng hai số bằng 9657, hiệu của chúng bằng 5391. Các số đó là 7524 và 2133.

b) Tổng của hai số phải tìm là số chia hết cho 9 nên có thể bằng 5130 hoặc 5139.

Nếu tổng hai số bằng 5130 thì số nhỏ bằng : $5130 : 3 = 1710$, số lớn bằng 3420, thoả mãn bài toán.

Nếu tổng hai số bằng 5139 thì số nhỏ bằng : $5139 : 3 = 1713$, loại vì không chia hết cho 9.

Đáp số : 1710 và 3420.

88. Chú ý rằng số bị trừ và số trừ có cùng số dư trong phép chia cho 9 nên hiệu phải chia hết cho 9.

Chú ý. Bỏ từ "ngược lại" trong đề bài, bài toán vẫn đúng.

89. Gọi số phải tìm là $\overline{abc}$, ta tìm được $a - c = 3$.

Đáp số : 360 ; 855.

90. a) Số $10^{28} + 8$ chia hết cho 9 (vì tổng các chữ số bằng 9) chia hết cho 8 (vì tận cùng bằng 008) nên chia hết cho 72.

b) $8^8 + 2^{20} = (2^3)^8 + 2^{20} = 2^{24} + 2^{20} = 2^{20}.(2^4 + 1) = 2^{20}.17$.

Vậy $8^8 + 2^{20}$ chia hết cho 17.

91. a) Viết A dưới dạng : $A = 2.(1 + 2) + 2^3.(1 + 2) + \ldots$

hoặc $\quad A = 2.(1 + 2 + 2^2) + 2^4.(1 + 2 + 2^2) + \ldots$

hoặc $\quad A = 2.(1 + 2 + 2^2 + 2^3) + 2^5.(1 + 2 + 2^2 + 2^3) + \ldots$

b) B có 996 số hạng, 996 chia hết cho 4, cho 3.

Chia B thành từng nhóm ba số hạng, mỗi nhóm chia hết cho $1 + 3^2 + 3^4 = 91$ nên B chia hết cho 13.

Chia B thành từng nhóm bốn số hạng, mỗi nhóm chia hết cho $1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 = 820$ nên B chia hết cho 41.

92. Chú ý rằng số n và số có tổng các chữ số bằng n có cùng số dư trong phép chia cho 9, do đó $\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ chữ số}} - n$ chia hết cho 9.

a) $2n + \underbrace{11\ldots1}_{n \text{ chữ số}} = 3n + (\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ chữ số}} - n)$ chia hết cho 3.

b) $10^n + 18n - 1 = 10^n - 1 - 9n + 27n =$

$= \underbrace{99\ldots9}_{n \text{ chữ số}} - 9n + 27n = 9.(\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ chữ số}} - n) + 27n$ chia hết cho 27.

c) $10^n + 72n - 1 = 10^n - 1 - 9n + 81n =$

$= \underbrace{99\ldots9}_{n \text{ chữ số}} - 9n + 81n = 9.(\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ chữ số}} - n) + 81n$ chia hết cho 81.

93. a) Gọi $A = \underbrace{11\ldots1}_{81 \text{ chữ số}}$, $B = \underbrace{11\ldots1}_{9 \text{ chữ số}}$. Đặt $C = A : B$ thì

$C = 1\underbrace{0\ldots0}_{8 \text{ chữ số}}1\underbrace{0\ldots0}_{8 \text{ chữ số}}1\ldots\underbrace{0\ldots0}_{8 \text{ chữ số}}1$ gồm 9 chữ số 1 và 64 chữ số 0, chia hết cho 9.

Ta thấy $A = B.C$ mà B và C cùng chia hết cho 9, vậy A chia hết cho 81.

b) Gọi $A = 1010\ldots10$ (27 cặp chữ số 10), $B = 1010\ldots10$ (9 cặp chữ số 10). Đặt $C = A : B$; chứng minh rằng $B \vdots 9$, $C \vdots 3$.

94. Giải tương tự ví dụ 13.

95. a) $3^{100} = 9^{50}$. Số chữ số của 3^{100} không quá 50 nên tổng các chữ số của nó không quá : $9.50 = 450$, không thể bằng 459.

b) Số 3^{1000} (tức là 9^{500}) có không quá 500 chữ số. Kí hiệu tổng các chữ số của n là S(n), ta có

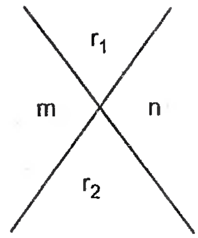
$A = S(3^{1000}) \leq 9.500 = 4500$, $B = S(A) < 4 + 9 + 9 + 9 = 31$. Chú ý rằng 3^{1000} chia hết cho 9 nên A, B, C đều chia hết cho 9. Suy ra $B \in \{9 ; 18 ; 27\}$, trong cả ba trường hợp ta đều có $C = S(B) = 9$.

96. Ta có a = bội 9 + r_1, b = bội 9 + r_2. Để chứng minh r_1r_2 và ab có cùng số dư trong phép chia cho 9, ta sẽ chứng tỏ rằng $ab - r_1r_2$ chia hết cho 9.

Thật vậy $ab - r_1r_2$ = (bội 9 + r_1)(bội 9 + r_2) $- r_1r_2$ = bội 9(bội 9 + r_2) + r_1(bội 9 + r_2) $- r_1r_2$ = bội 9 + $r_1r_2 - r_1r_2$ = bội 9.

Chú ý : Nhận xét trên cho ta một cách kiểm tra kết quả phép nhân. Chẳng hạn cần kiểm tra kết quả phép nhân sau : $438.23 = 9974$. Ta có $r_1 = 6$, $r_2 = 5$, $r_1r_2 = 30$, chia 9 dư 3. Còn $ab = 9974$ chia 9 dư 2. Vậy chắc chắn là phép nhân làm sai.

Trong thực hành ta thường thử kết quả phép nhân bằng cách viết r_1, r_2, m, n như hình 18, trong đó m là số dư của $r_1 r_2$ khi chia cho 9, n là số dư của ab khi chia cho 9. Nếu $m = n$ thì có nhiều khả năng là phép nhân làm đúng. Nếu $m \neq n$ thì chắc chắn là phép nhân làm sai.



Hình 18

Nhận xét trên cũng cho ta cách kiểm tra kết quả của phép chia.

97. Chứng minh rằng nếu $\overline{abc}$ chia hết cho 4 thì số $\overline{bac}$ chia hết cho 4.

98. Xét $\overline{abcd} \vdots \overline{ab} . \overline{cd}$. Đặt $\overline{ab} = m$, $\overline{cd} = n$ thì $100m + n \vdots mn$ (1). Do đó $n \vdots m$. Đặt $n = km$ (2) với $k \in \mathbb{N}$, $k < 10$, thay vào (1) ta được

$$100m + km \vdots mkm \Rightarrow 100 + k \vdots km$$

$$\Rightarrow \quad 100 \vdots k \Rightarrow k \in \{1 ; 2 ; 4 ; 5\} \text{ (vì } k < 10).$$

Thay k bằng 1, 2, 4, 5 vào (2) và (1) ta được hai giá trị thoả mãn bài toán là $1734 \vdots 17 . 34$ và $1352 \vdots 13 . 52$.

99. Gọi $n = \overline{abcde} = 45 . a . b . c . d . e$.

$n \vdots 5$ mà $e \neq 0$ nên $e = 5 \Rightarrow n$ lẻ $\Rightarrow a, b, c, d$ lẻ.

Suy ra $n \vdots 25 \Rightarrow d = 7$ (vì d lẻ).

$n \vdots 9 \Rightarrow a + b + c + 12 \vdots 9 \Rightarrow a + b + c + 3 \vdots 9$

$\Rightarrow a + b + c \in \{6 ; 15 ; 24\}$. Chú ý rằng $a + b + c$ là số lẻ nên

$$a + b + c = 15 \qquad (1).$$

Ta thấy $45 . a . b . c . 7 . 5 < 100000 \Rightarrow a . b . c \leq 63$ (2).

Từ (1) suy ra $a, b, c \in \{9 ; 5 ; 1\}, \{9 ; 3 ; 3\}, \{7 ; 7 ; 1\}, \{7 ; 5 ; 3\}, \{5 ; 5 ; 5\}$. Do (2) nên chỉ cần xét $\{9 ; 5 ; 1\}$ và $\{7 ; 7 ; 1\}$. Trong trường hợp đầu ta có $a . b . c = 45$, $n = 45 . 45 . 35 = 70875$, loại. Trong trường hợp sau ta có $a . b . c = 49$ $\Rightarrow n = 45 . 49 . 35 = 77175$ thoả mãn đề bài.

Vậy số phải tìm là 77175.

100. Tổng khối lượng hàng là 2017kg, là một số chia cho 5 dư 2, số kilôgam hàng đã bán là một số chia hết cho 5 nên số kilôgam hàng còn lại phải là một số chia cho 5 dư 2. Do đó hòm còn lại chứa 327kg.

101. Số lớn nhất được lập là 4321, số nhỏ nhất là 1234. Nếu tồn tại hai số được lập là x và y mà $x \vdots y$ thì thương bằng 2 hoặc 3.

Cách 1. Nếu thương bằng 2 thì các chữ số của x phải là 2, 4, 6, 8, trái với đề bài. Nếu thương bằng 3 thì x chia hết cho 3, trái với đề bài vì tổng các chữ số của x bằng 10.

Cách 2. Chú ý rằng x và y có tổng các chữ số bằng 10 nên là các số chia cho 9 dư 1 (1). Nếu thương của phép chia x cho y bằng 2, bằng 3 thì số bị chia x chia cho 9 thứ tự dư 2, dư 3, trái với (1).

Vậy không tồn tại hai số nào mà một số chia hết cho số còn lại.

102. Chú ý rằng các số được lập có tổng các chữ số bằng 28, là số chia cho 9 dư 1. Giải tương tự như cách 2 của bài trên.

103. Trong 25 số nguyên tố (từ 2 đến 97) có một số chẵn duy nhất, còn 24 số kia là các số lẻ. Do đó tổng của 25 số đó là số chẵn.

104. Trong ba số nguyên tố có tổng bằng 1012, phải có một số chẵn, là số 2 ; đó là số nhỏ nhất trong ba số nguyên tố trên.

105. *Đáp số :* 2, 3, 5, 7.

106. Tổng của hai số nguyên tố bằng 2003, là số lẻ, nên một trong hai số nguyên tố phải là 2. Khi đó số kia là 2001, số này là hợp số. Vậy không tồn tại hai số nguyên tố có tổng bằng 2003.

107. Tích của hai số tự nhiên là số nguyên tố nên một số là 1, số còn lại (kí hiệu a) là số nguyên tố.

Theo đề bài, $1 + a$ cũng là số nguyên tố. Xét hai trường hợp :

– Nếu $1 + a$ là số lẻ thì a là số chẵn. Do a là số nguyên tố nên $a = 2$.

– Nếu $1 + a$ là số chẵn thì $1 + a = 2$ (vì $1 + a$ là số nguyên tố). Khi đó $a = 1$, không là số nguyên tố : loại.

Đáp số : Hai số tự nhiên phải tìm là 1 và 2.

108. Tất cả đều là hợp số.

a) $A \vdots 3$.

b) $B \vdots 11$.

c) $C \vdots 101$.

d) $D = 1112111 = 1111000 + 1111 \vdots 1111$.

e) $E \vdots 3$ vì $1! + 2! = 3 \vdots 3$, còn $3! + ... + 100!$ cũng chia hết cho 3.

g) Số $3 . 5 . 7 . 9 - 28$ chia hết cho 7.

h) Số $311141111 = 311110000 + 31111$ chia hết cho 31111.

109. Xét các số có ba chữ số là lập phương của một số tự nhiên, đó là 125, 216, 343, 512, 729, chỉ có số 125 thoả mãn bài toán (521 là số nguyên tố). *Đáp số :* 521.

110. Số $n = \overline{abba}$ chia hết cho 11 lại là tích của ba số nguyên tố nên một trong các số nguyên tố này phải là 11. Xét các tích $5 . 7 . 11 = 385$ (loại) ; $7 . 11 . 13 = 1001$ (đúng) ; $11 . 13 . 17 = 2431$ (loại).

111. a) b) *Đáp số :* $p = 3$. Xét p dưới các dạng : $p = 3k$, $p = 3k + 1$, $p = 3k + 2$ ($k \in \mathbf{N}$).

c) *Đáp số :* $p = 5$. Xét p dưới các dạng : $5k$, $5k + 1$, $5k + 2$, $5k + 3$, $5k + 4$ ($k \in \mathbf{N}$).

112. Gọi a, b, c, d, e là các số nguyên tố sao cho $a = b + c = d - e$ (giả sử $b \geq c$).

Chứng tỏ rằng $c = e = 2$, nên b, a, d là ba số lẻ liên tiếp, sau đó chứng tỏ rằng $b = 3$.

Số nguyên tố phải tìm là 5 ($5 = 3 + 2 = 7 - 2$).

113. Các số nguyên tố lớn hơn 3 có dạng $3k + 1$ hoặc $3k + 2$ ($k \in \mathbf{N}$). Có ba số mà chỉ có hai dạng nên tồn tại hai số thuộc cùng một dạng, hiệu của chúng (là d hoặc 2d) chia hết cho 3, do đó d chia hết cho 3. Mặt khác d chia hết cho 2 vì d là hiệu của hai số lẻ. Vậy d chia hết cho 6.

114. Gọi hai số nguyên tố sinh đôi là p và $p + 2$. Chứng minh rằng $p + 1$ chia hết cho 2 và chia hết cho 3.

115. p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p lẻ, do đó $p + 1 \vdots 2$ (1).

p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên có dạng $3k + 1$ hoặc $3k + 2$ ($k \in \mathbf{N}$). Dạng $p = 3k + 1$ không xảy ra. Dạng $p = 3k + 2$ cho ta $p + 1 \vdots 3$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $p + 1 \vdots 6$.

116. p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p có dạng $3k + 1$ hoặc $3k + 2$ ($k \in \mathbf{N}$). Nếu $p = 3k + 2$ thì $p + 4$ là hợp số, trái với đề bài. Vậy p có dạng $3k + 1$, khi đó $p + 8$ là hợp số.

117. Xét p dưới dạng : $3k$ (khi đó $p = 3$), $3k + 1$, $3k + 2$ ($k \in \mathbf{N}$). Dạng thứ ba không thoả mãn đề bài (vì khi đó $8p - 1$ là hợp số), hai dạng trên đều cho $8p + 1$ là hợp số.

118. Ta có $abcd = 59007$, $c + d = 102$, $1 \leq a \leq 31$, $1 \leq b \leq 12$.

Phân tích ra thừa số nguyên tố : $abcd = 3 . 13 . 17 . 89$. Trong các ước của abcd, chỉ có hai số 13 và 89 có tổng bằng 102. Tuổi của Long không thể là 89, vậy $d = 13$, $c = 89$. Còn lại $ab = 3 . 17$. Do $b \leq 12$ nên $b = 3$, $a = 17$.

Long sinh ngày 17 – 3 – 1989.

119. Giải tương tự như ví dụ 19. *Đáp số :* $r = 1$.

120. a) Tổng của ba hợp số khác nhau nhỏ nhất bằng :

$$4 + 6 + 8 = 18.$$

b) Gọi $2k + 1$ là một số lẻ bất kì lớn hơn 17. Ta luôn có $2k + 1 = 4 + 9 + (2k - 12)$. Cần chứng minh rằng $2k - 12$ là hợp số chẵn (hiển nhiên) lớn hơn 4 (dễ chứng minh).

121. a) x và y là các số tự nhiên nên $2x + 1$ và $y - 3$ là các ước của 10 ($y > 3$).

Các ước của 10 là 1, 2, 5, 10.

$2x + 1$ là số lẻ nên :

$2x + 1$	$y - 3$	x	y
1	10	0	13
5	2	2	5

Đáp số : $x = 0$; $y = 13$
và $x = 2$; $y = 5$.

b)

$3x - 2$	$2y - 3$	x	y
1	1	1	2

c)

$2y - 1$	$x + 1$	x	y
1	12	11	1
3	4	3	2

d) $x + 6 \vdots x - 1$

$\Rightarrow x - 1 + 7 \vdots x - 1$

$\Rightarrow 7 \vdots x - 1$.

Đáp số : $x = 2$; $y = 8$ và $x = 8$; $y = 2$.

e) *Đáp số :* $x = 3$; $y = 0$.

122. Số chia bằng 31, thương bằng 103.

123. *Đáp số :* 17.

124. *Đáp số :* 23.

125. Phân tích 600 ra thừa số nguyên tố :

$$600 = 2^3 . 3 . 5^2.$$

Ghép các thừa số lại để được tích của hai số tự nhiên liên tiếp :

$$2^3 . 3 . 5^2 = (2^3 . 3) . 5^2 = 24 . 25.$$

Đáp số : 24 và 25.

126. $2730 = 2 . 3 . 5 . 7 . 13 = 13 . 14 . 15$.

127. $12075 = 3 . 5^2 . 7 . 23 = 21 . 23 . 25$.

128. Bán x hộp bút với giá y trăm đồng một hộp, được 1073 trăm đồng nên $x . y = 1073$. Như vậy y là ước của 1073 và $y > 32$.

Phân tích ra thừa số nguyên tố : $1073 = 29 . 37$. Loại trường hợp $y = 1073$ không thực tế, ta được $y = 37$.

Vậy giá bán một hộp bút là 3700 đồng, số hộp bút đã bán là 29 chiếc.

129. Ta có : $\dfrac{n(n+1)}{2} = 820$

$\Rightarrow n(n+1) = 1640.$

Tìm được $n = 40$.

130. Giả sử số 100 viết được dưới dạng k số lẻ liên tiếp là $n + 2$, $n + 4$, ..., $n + 2k$, ta có : $(n + 2) + (n + 4) + ... + (n + 2k) = 100$ với n lẻ, $k > 1$.

Có hai đáp số : $49 + 51$ và $1 + 3 + ... + 19$.

131. Tổng các số nhà bằng 161, là số lẻ nên các số nhà đều lẻ và số số nhà cũng lẻ. Gọi số nhà của Hùng (ở chính giữa đoạn phố) là x, số số nhà là n. Trung bình cộng của hai số nhà cách đều nhà Hùng cũng bằng x. Ta có $x . n = 161$.

Phân tích ra thừa số nguyên tố : $161 = 7 . 23$. Loại trường hợp đoạn phố có 23 số nhà, số nhà ở giữa là 7. Vậy đoạn phố có 7 số nhà, số nhà ở giữa là 23. Đó là số nhà của Hùng.

132. Gọi bốn số ở vị trí A, B, C, D là a, b, c, d. Theo chiều mũi tên thì b là số lớn nhất. Ta có $b \leqslant 99 \Rightarrow c \leqslant 49 \Rightarrow d \leqslant 24 \Rightarrow a \leqslant 12$.

Giá trị lớn nhất của a mà ta chọn là 12, khi đó $d = 24$, $c = 48$, $b = 96$.

133. a) $n = 0$; $n = 2$.

b) $n^2 + 4 \vdots n + 2 \Rightarrow n(n + 2) - 2(n + 2) + 8 \vdots n + 2$

$\Rightarrow 8 \vdots n + 2$.

Đáp số : $n = 0$; 2 ; 6.

c) $13(n - 1) + 13 \vdots n - 1 \Rightarrow 13 \vdots n - 1$.

Đáp số : $n = 2$; $n = 14$.

134. Gọi số phải tìm là $\overline{abc}$, ta có $\overline{abc} + 100n + 10n + n = \overline{abc}.n$. Suy ra $\overline{abc} \vdots n$. Đặt $\overline{abc} = n.k$ $(k \in \mathbb{N})$ thì

$$nk + 111n = nkn.$$

Chia hai vế cho $n \neq 0$ ta được $k + 111 = nk$ tức là $111 = k(n - 1)$. Như vậy k và $n - 1$ là ước của 111.

Bài toán có 4 đáp số :

k	n − 1	n	$\overline{abc}$
1	111	112	112
3	37	38	114
37	3	4	148
111	1	2	222

135. Ta thấy : $398 - 38 = 360 \vdots a$; $a > 38$

$450 - 18 = 432 \vdots a$; $a > 18$.

Vậy a là ước chung của 360 và 420, đồng thời $a > 38$.

Phân tích ra thừa số nguyên tố :

$$360 = 2^3 . 3^2 . 5$$

$$432 = 2^4 . 3^3$$

ƯCLN $(360, 432) = 2^3 . 3^2 = 72$.

Ước chung của 360 và 432 mà lớn hơn 38 là 72.

Vậy $a = 72$.

136. $a \in$ ƯC (336, 294) và $a > 26$.

Đáp số : $a = 42$.

137. Số học sinh là ước chung của $100 - 4 = 96$ và $90 - 18 = 72$, đồng thời lớn hơn 18. *Đáp số :* 24 học sinh.

138. Số phần thưởng lớn nhất là ƯCLN (128, 48, 192).

Đáp số : Chia được nhiều nhất thành 16 phần thưởng, mỗi phần gồm 8 vở, 3 bút chì, 12 nhãn vở.

139. Số hàng dọc nhiều nhất là ƯCLN (300, 276, 252).

Đáp số : Xếp được nhiều nhất thành 12 hàng dọc. Khi đó, khối 6 có 25 hàng ngang, khối 7 có 23 hàng ngang, khối 8 có 21 hàng ngang.

140. Số phần thưởng phải tìm là ƯCLN (200, 240, 320) = 40. Mỗi phần thưởng có 5 bút bi, 6 bút chì, 8 tẩy.

141. Số chia : 18, thương : 532.

142. *Đáp số :* 2520, 5040.

143. Chiều dài ngắn nhất của đường chạy tính bằng mét là BCNN(330, 75) = 1650 gồm $1650 : 75 = 22$ chặng.

144. a) 5 giờ ; b) 2 giờ ; c) 10 giờ.

145. *Đáp số :* 615 người.

146. Gọi số phải tìm là n.

$$n + 9 \in BC\ (17, 25).$$

Từ đó $b = 425k - 9$.

Đáp số : 416 và 841.

147. $n + 1 \vdots 8 \Rightarrow n + 1 + 64 \vdots 8 \Rightarrow n + 65 \vdots 8$ (1)

$n + 3 \vdots 31 \Rightarrow n + 3 + 62 \vdots 31 \Rightarrow n + 65 \vdots 31$ (2).

Từ (1) và (2) : $n + 65 \vdots$ BCNN (8, 31)

$\Rightarrow n + 65 \vdots 248$

$\Rightarrow n = 248k - 65$ $(k \in N^*)$

Với $k = 3$ thì $n = 679$;

Với $k = 4$ thì $n = 927$;

Với $k = 5$ thì $n = 1175$.

Để n là số lớn nhất có ba chữ số, ta chọn $n = 927$.

148. Gọi số phải tìm là n, ta tìm được $n + 22 \in BC(15, 35)$.

Đáp số : 83, 188, 293, 398.

149. a) Gọi số phải tìm là n.

Ta có $n + 1 \in BC(2, 3, 4, 5, 6)$.

Từ đó $n = 60k - 1$ $(k \in \mathbf{N})$.

Đáp số : $n = 959$.

b) $a + 1$ chia hết cho 4, cho 5, cho 6, nên $a + 1 \vdots BCNN(4, 5, 6)$, tức là $a + 1 \vdots 60$.

Biến đổi :

$a + 1 \vdots 60 \Rightarrow a + 1 - 300 \vdots 60 \Rightarrow a - 299 \vdots 60$ (1)

$a \vdots 13 \Rightarrow a - 13 . 23 \vdots 13 \Rightarrow a - 299 \vdots 13$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $a - 299 \vdots BCNN(60, 13) \Rightarrow a - 299 \vdots 780$.

Dạng chung của a là : $a = 780k + 299$ $(k \in \mathbf{N})$.

150. Gọi n là số phải tìm.

$$n + 2 \in BC(8, 12, 15).$$

Do đó $n = 120k - 2$ $(k \in \mathbf{N}^*)$.

Lần lượt cho k bằng 1, 2, 3, ... đến $k = 5$ thì được 598 là bội của 13.
Đáp số : n nhỏ nhất bằng 598.

151. *Đáp số :* 4797.

152. Gọi a là số phải tìm. Số 2a chia cho 5, cho 7, cho 9 đều dư 1.

$2a - 1$ là $BCNN(5, 7, 9)$.

Đáp số : $a = 158$.

153. Gọi a là số phải tìm. Số 2a chia cho 3, cho 4, cho 5 đều dư 2.

$2a - 2$ là $BCNN(3, 4, 5) = 60$.

Đáp số : $a = 31$.

154. Khoảng cách giữa hai cột liên tiếp không phải trồng lại (tính bằng mét) là bội chung nhỏ nhất của 60 và 80, tức là 240m.

Số cột không phải trồng lại :

$$\frac{4800}{240} + 1 = 21 \text{ (cột)}.$$

155. Số ngày phải tìm là BCNN (15, 20, 12, 7).

Đáp số : 420 ngày.

156. Gọi số sách là x thì $x + 10 \in BC(10, 12, 18)$ và $715 \leqslant x \leqslant 1000$. *Đáp số :* $x = 890$.

157. Gọi số giấy mỗi lớp thu được là x (kg) thì $x - 26 \vdots 11$, $x - 25 \vdots 10$, do đó $x - 15 \in BC(11, 10)$, ngoài ra $200 \leqslant x \leqslant 300$. Ta tìm được $x = 235$, do đó lớp 6A có 20 học sinh, lớp 6B có 22 học sinh.

158. BCNN(60, 62) = 31 . 60.

Thời gian để cả hai thiết bị cùng phát ra tiếng "bíp" tiếp theo là 31 . 60 giây hay 31 phút. Lúc đó là 10 giờ 31 phút.

159. Đồng hồ thứ nhất lấy lại giờ chính xác khi nó chạy nhanh được 12 giờ, tức là 720 phút, như vậy nó lại chỉ đúng giờ sau : 720 : 2 = 360 (ngày).

Đồng hồ thứ hai lấy lại giờ chính xác khi nó chạy chậm được 12 giờ, tức là 720 phút, như vậy nó lại chỉ đúng giờ sau : 720 : 3 = 240 (ngày).

Số ngày ít nhất để cả hai đồng hồ cùng chỉ giờ đúng là BCNN (360, 240) = 720.

Đáp số : 720 ngày.

SỐ NGUYÊN

160. a) lớn hơn ; b) nhỏ hơn ; c) lớn hơn ; d) lớn hơn ; e) nhỏ hơn.

161. a) 99 ; b) -10.

162. a) 4 ; b) 1 ; c) 0.

163. a) $|a| \geqslant a$; b) $|a| \geqslant 0$; c) Nếu $a > 0$ thì $a = |a|$;

d) Nếu $a = 0$ thì $a = |a|$; e) Nếu $a < 0$ thì $a < |a|$.

164. a) Sai, ví dụ : $a = 5$, $b = -5$.

b) Sai, ví dụ : $a = 3$, $b = -10$.

165. $(-9) + 9 = 0$.

166. a) nguyên dương ; b) bằng nhau ; c) bằng nhau hoặc đối nhau ;

d) nguyên âm ; e) $a < 0$; g) $-a$; h) 0.

167. a) -8 ; b) -8 ; c) ± 15 ;

d) 7 hoặc -3 ; e) -3 ; g) 11.

168. a) Các số phải điền vào các dòng một, hai, ba theo thứ tự là -4 ; -3 ; 2. Tổng các số ở các cột một, hai, ba theo thứ tự bằng -1 ; 9 ; -1.

b) Không thể điền được như vậy, vì không có chín số nào mà cộng theo các dòng được : $5 + (-3) + 2 = 4$, cộng theo các cột được : $-1 + 2 + 2 = 3$.

169. a) Điền vào các ô trống các số a, b, c, d, e, g, h, i :

6	a	b	c	d	e	g	– 4	h	i

6	a	b	6	d	e	6	– 4	h	6

6	– 4	b	6	– 4	e	6	– 4	h	6

6	– 4	– 2	6	– 4	– 2	6	– 4	– 2	6

Ta có $6 + a + b = = a + b + c$ suy ra $c = 6$. Do đó cứ cách hai ô, các số lại được viết lặp lại. Với nhận xét này, ta điền sơ bộ vào bảng.

Lặp lại nhận xét trên đối với số – 4, cuối cùng ta điền được đầy đủ như ở bảng trên.

b) Nhận xét rằng cứ cách một ô, các số lại được lặp lại.

170. $x = -19$.

171. Xét các trường hợp :

$a > 0$ thì $-a < 0$ nên $a > -a$;

$a = 0$ thì $-a = 0$ nên $a = -a$;

$a < 0$ thì $-a > 0$ nên $a < -a$.

Đáp số : a) a nguyên dương ; b) $a = 0$; c) a nguyên âm.

172. $a = 5$, $b = 6$, $c = -3$.

173. Lần lượt tính được $b = -1$, $c = -2$, $d = -3$. Do đó $a = 1 - (-1 - 2 - 3) = 7$.

174. Ta có $(x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) + \ldots + (x_{49} + x_{50}) = 1 \,.\, 25 = 25$.

Do đó $x_{51} = -25$. Vậy $x_{50} = 1 - x_{51} = 26$.

175. a) $-42 \,.\, 1000 = -42000$; b) $-127 \,.\, (57 + 43) = -127 \,.\, 100 = -12700$.

c) -3400 ; d) $(-25) \,.\, 68 + 68 \,.\, 125 = 68 \,.\, 100 = 6800$.

e) Cộng từng nhóm hai số, ta được $(-1) \,.\, 50 = -50$.

g) Cộng từng nhóm bốn số, ta được $(-8) \,.\, 50 = -400$.

h) Cộng từng nhóm bốn số, ta được $0 \,.\, 25 = 0$.

i) $D = 2^{100} - (2^{99} + 2^{98} + 2^{97} + \ldots + 2 + 1)$

Đặt M là biểu thức trong dấu ngoặc, ta có :

$$2M = 2^{100} + 2^{99} + 2^{98} + \ldots + 2^2 + 2$$

$$M = 2^{99} + 2^{98} + \ldots + 2^2 + 2 + 1.$$

Suy ra $M = 2^{100} - 1$.

Vậy $D = 2^{100} - (2^{100} - 1) = 1$.

176. Có 5 cách đặt dấu ngoặc : $[(1 * 2) * 3] * 4$;

$[1 * (2 * 3)] * 4$; $(1 * 2) * (3 * 4)$; $1 * [(2 * 3) * 4]$;

$1 * [2 * (3 * 4)]$.

Giá trị lớn nhất là 36 khi $[(1 + 2) . 3] . 4 = 36$ hoặc

$$(1 + 2) . (3 . 4) = 36.$$

Giá trị nhỏ nhất là -23 khi $1 - [(2 . 3) . 4] = -23$ hoặc

$$1 - [2 . (3 . 4)] = -23.$$

177. a) 1 ; b) 0 hoặc 1 ; c) -1 hoặc 2.

178. Số thứ ba bằng -1, số thứ tư bằng 1. Như vậy các số 1, -1, -1 được lặp lại tuần hoàn. Do đó : $a_1 = a_4 = a_7 = \ldots = a_{100}$. Vậy $a_{100} = 1$.

179. a) $x + 2$ là ước của 5. Lần lượt cho $x + 2$ bằng 1, -1, 5, -5, ta được x bằng -1, -3, 3, -7. Các cặp số (x ; y) bằng $(-1 ; 8)$, $(-3 ; -2)$, $(3; 4)$, $(-7 ; 2)$.

b) Có ba cặp số $(-2 ; 1)$, $(2 ; 1)$, $(-4 ; 0)$.

180. $A = -11 - 13 - 15 - \ldots - 99$,

$B = 10 + 12 + 14 + \ldots + 98.$

Do đó $A + B = \underbrace{(-1) + (-1) + \ldots + (-1)}_{45 \text{ số hạng}} = (-1) . 45 = -45.$

181. a) A gồm các số chia cho 3 dư 2, tức là chia cho 3 thiếu 1, các số này mang dấu "+" nếu n lẻ và mang dấu "−" nếu n chẵn. Dạng tổng quát của số hạng thứ n của A là $(-1)^{n+1}(3n - 1)$, $n \in \mathbf{N}^*$.

b) Gộp thành từng nhóm hai số được $(-3) . 17 = -51$.

182. a) Gộp thành từng nhóm bốn số, ta được 25 nhóm, mỗi nhóm bằng -4. Do đó $A = -100$. Vì thế A chia hết cho 2, chia hết cho 5, không chia hết cho 3.

b) Xét $100 = 2^2 . 5^2$ nên A có 9 ước tự nhiên, có 18 ước nguyên (± 1, ± 2, ± 4, ± 5, ± 10, ± 20, ± 25, ± 50, ± 100).

183. a) Được, chẳng hạn : $1 + 5 - (-7) + (-15) + 17 = 15$.

b) Không được, vì tổng của 5 số lẻ là một số lẻ, không thể bằng 20.

184. Nếu thay mọi dấu * bởi dấu − thì biểu thức bằng :

$$1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9 = 1 - 44 = -43.$$

a) Cần tăng thêm 30 để biểu thức bằng -13. Muốn vậy thay dấu "−" trước các số 7 và 8 bởi dấu "+" ta được :

$$1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 + 7 + 8 - 9 = -13.$$

b) Biểu thức $1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9$ có giá trị bằng -43, là một số lẻ. Mỗi lần thay một dấu "−" đằng trước một số a nào đó trong biểu thức bởi dấu "+" thì giá trị của biểu thức tăng thêm 2a (là một số chẵn). Do đó giá trị của biểu thức mới vẫn là số lẻ, không thể bằng -4.

185. a) $(n - 2) + 7 \vdots n - 2$ nên $7 \vdots n - 2$.

Đáp số : n bằng $-5, 1, 3, 9$.

b) $2n + 1 \vdots n - 5 \Rightarrow 2(n - 5) + 11 \vdots n - 5 \Rightarrow 11 \vdots n - 5$.

Đáp số : n bằng $-6, 4, 6, 16$.

c) $13 \vdots n + 3$. *Đáp số* : n bằng $-16, -4, -2, 10$.

d) $n^2 + 3 \vdots n - 1 \Rightarrow n(n - 1) + (n - 1) + 4 \vdots n - 1 \Rightarrow 4 \vdots n - 1$.

Đáp số : n bằng $-3, -1, 0, 2, 3, 5$.

ĐIỀN CHỮ SỐ

186. Cùng bớt $\overline{bc}$ ta được :

$$\overline{ab} + \overline{ca} = \overline{a00}.$$

Lần lượt tìm được : $a = 1, b = 9, c = 8$.

187. a) Đổi chỗ các chữ số ở cùng một cột :

$$\begin{array}{r} a\,b\,c \\ +\quad a\,b \\ a \\ \hline 8\,7\,4 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} a\,a\,a \\ b\,b \\ c \\ \hline 8\,7\,4 \end{array}$$

Do $\overline{bb} + c < 110$ nên :

$$874 \geqslant \overline{aaa} > 874 - 110 = 764 \Rightarrow \overline{aaa} = 777.$$

Suy ra : $\overline{bb} + c = 874 - 777 = 97$.

Ta có : $97 \geqslant \overline{bb} > 97 - 10 = 87 \Rightarrow \overline{bb} = 88$.

Do đó : $c = 97 - 88 = 9$.

Ta được : $789 + 78 + 7 = 874$.

b) Viết đẳng thức thành : $\overline{aaa} + \overline{bb} + c = 1037$ rồi lần lượt tìm $a = 9$, $b = 3$, $c = 5$.

188. a) a là chữ số lẻ nên b và c cũng lẻ. Ta lại có b và c khác 1 và 5 để $a \neq c$. Vậy $b, c \in \{3 ; 7 ; 9\}$.

Lần lượt xét b bằng 9 ; 7 ; 3 và chú ý rằng a, b, c lẻ, khác nhau.

Đáp số : $177 . 3 = 531$.

b) $\overline{ac} . \overline{ac} = \overline{acc}$.

Thực hiện phép chia $\overline{acc}$ cho $\overline{ac}$ được 10. Vậy $c = 0$; $a = 1$.

Đáp số : $10 . 10 = 100$.

c) Xét chữ số đầu tiên bên trái của các thừa số và tích, ta có $a . a \leqslant a$ nên $a = 1$.

Ta có : $\overline{1b} . \overline{1b} = \overline{1cc}$.

Ta thấy $b \leqslant 4$ vì nếu $b \geqslant 5$ thì :

$\overline{1b} . \overline{2b} \geqslant 15 . 15 = 225 > \overline{1cc}$. Xét các tích 10 . 10, 11 . 11, 12 . 12, 13 . 13, 14 . 14, ta có đáp số : 12 . 12 = 144.

189. a) Đặt $\overline{abc} = A$ thì :

$$(1000 + A) . 2 = 10A + 8$$
$$2000 + 2A = 10A + 8$$
$$1992 = 8A$$
$$A = 249.$$

Đáp số : 1249 . 2 = 2498.

b) Chuyển thành phép trừ : $\overline{ab} = \overline{b0} - b$.

Đáp số : 45 = 9 . 5.

190. Đặt $\overline{abcde} = A$ thì :

$$(10A + g) . 4 = 100000g + A \qquad (1)$$

và $$A + g = 15390 \qquad (2)$$

Từ (1) ta được : A = 2564g.

Đưa về bài toán tìm hai số biết tổng và tỉ số, được : g = 6 ; A = 15384.

191. $\overline{abc} - \overline{ca} = \overline{ca} - \overline{ac}$ (1).

Vế phải của (1) nhỏ hơn 100 nên $\overline{abc} - \overline{ca} < 100$, do đó a = 1. Ta có :

$$\overline{1bc} - \overline{c1} = \overline{c1} - \overline{1c} \qquad (2).$$

Xét vế phải của (2) : c > 1. Phép trừ ở cột đơn vị của vế phải là 11 − c, phép trừ ở cột đơn vị của vế trái là c − 1. Do đó c − 1 = 11 − c, suy ra c = 6.

Ta có : 106 − 61 = 61 − 16.

192. $3576 - \overline{abc} = \overline{abcd}$.

Thêm chữ số d vào cuối của số bị trừ và số trừ :

$$\overline{3576d} - \overline{abcd} = \overline{abcd0}$$
$$\Rightarrow \overline{3576d} = 11 . \overline{abcd}.$$

Thực hiện phép chia $\overline{3576d}$ cho 11, ta tìm được d = 1. Từ đó ta tìm được $\overline{abc} = 325$.

Đáp số : 3251 + 325 = 3576.

193. Chú ý rằng hiệu chia hết cho 9.

Đáp số : 38470 − 3847 = 34623.

194.

$$\begin{array}{r} \overline{abba} \\ \times \quad \overline{cd} \\ \hline (1) \quad ****\\ (2)\ ***7 \\ \hline ***** \end{array}$$

Xét tích riêng (2)

$$\begin{array}{r} \overline{abba} \\ \times \quad c \\ \hline ***7 \end{array}$$

Ta thấy ac < 10 mà ac tận cùng bằng 7 nên ac = 7.

Xét hai trường hợp :

– Trường hợp a = 1 ; c = 7 : khi đó b = 8 (do a + b = 9), ta có : 1881 . 7 được tích riêng (2) có năm chữ số, loại.

– Trường hợp a = 7 ; c = 1 : khi đó d = 1 (để tích riêng (1) có bốn chữ số), thoả mãn đề bài :

$$\begin{array}{r} 7227 \\ \times \quad 11 \\ \hline 7227 \\ 7227 \\ \hline 79497 \end{array}$$

195. Ta thấy : $\overline{1ab} \vdots \overline{ab}$

$\Rightarrow 100 + \overline{ab} \vdots \overline{ab}$

$\Rightarrow 100 \vdots \overline{ab}$

$\Rightarrow \overline{ab} \in \{10 ; 20 ; 25 ; 50\}$.

Dễ thấy $b \neq 0$ nên $\overline{ab} = 25$.

Thử :

25 . 5 = 125, đúng.

Đáp số : 25 . 5 = 125.

196. Áp dụng tính chất chia một tổng cho một số :

$(260000 + \overline{abc}) : \overline{abc} = 626$

$260000 : \overline{abc} + 1 = 626$

$260000 : \overline{abc} = 625$

$\overline{abc} = 260000 : 625$

$\overline{abc} = 416$.

Vậy : 260416 : 416 = 626.

197. Chữ số hàng chục của số nhân bằng 0, chữ số đơn vị của số nhân bằng 9 (bạn đọc tự giải thích). Gọi số bị nhân là $\overline{abc}$. Để tích riêng thứ nhất tận cùng bằng 9 thì c = 1. Để tích riêng thứ hai có ba chữ số thì a = 1.

Số bị nhân là $\overline{1b1}$. Chú ý rằng $\overline{1b1}$. 9 được số có bốn chữ số nên b > 1, còn $\overline{1b1}$. 8 được số có ba chữ số nên b < 3, do đó b = 2.

Số bị nhân là 121, số nhân là 809, tích là 97889.

198. a) $\overline{ab}\,.\,\overline{cb} = \overline{ddd} = d\,.\,111 = 3\,.\,3\,.\,37$.

Hai số $\overline{ab}$ và $\overline{cb}$ có tích chia hết cho số nguyên tố 37 nên tồn tại một số chia hết cho 37, giả sử $\overline{ab}$ ⋮ 37. Khi đó $\overline{ab} \in \{37\ ;\ 74\}$.

Nếu $\overline{ab} = 37$ thì $37\,.\,\overline{c7} = 999$. Khi đó $\overline{c7} = 999 : 37 = 27$.

Nếu $\overline{ab} = 74$ thì $74\,.\,\overline{c4} = 666$. Khi đó $\overline{c4} = 666 : 74 = 9$, loại.

Đáp số : 37 . 27 = 999.

b) Tích chia hết cho 111 nên chia hết cho các số nguyên tố 3 và 37. Do đó số bị nhân chia hết cho 37 (bằng 37 hoặc 74), số nhân chia hết cho 3.

Có 6 đáp số : 37 . 3 = 111 ; 37 . 6 = 222 ; 37 . 9 = 333 ; 74 . 3 = 222, 74 . 6 = 444 ; 74 . 9 = 666.

c) Có 2 đáp số : 37 . 21 = 777 ; 15 . 37 = 555.

199. Đặt $\overline{abc} = x$, $\overline{deg} = y$ thì $6(1000x + y) = 1000y + x$, suy ra $857x = 142y$. Chú ý rằng (857, 142) = 1 nên y chia hết cho 857 và bằng 857, còn x = 142.

Ta có : 142857 . 6 = 857142.

200. Thương $\overline{**7} \geqslant \dfrac{2000}{13} \Rightarrow \overline{**7} > 153$. Mặt khác $\overline{**7} \leqslant \dfrac{2099}{13}$

$\Rightarrow \overline{**7} \leqslant 161$. Do đó $\overline{**7} = 157$.

Số bị chia : 157 . 13 = 2041.

201. a) 10098 : 99 = 102.

b) 1089708 : 12 = 90809.

202. Ta có $\overline{abc} = 11(a + b + c)$.

Cách 1. Viết phép tính dưới dạng sau :

$$\begin{array}{r} \overline{aa} \\ +\ \overline{bb} \\ \overline{cc} \\ \hline \overline{abc} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} \overline{aa} \\ +\ \overline{cb} \\ \hline \overline{a00} \end{array} \Rightarrow a = 1 \Rightarrow \begin{array}{r} 11 \\ +\ \overline{cb} \\ \hline 100 \end{array} \Rightarrow \overline{cb} = 89.$$

Vậy 198 : 11 = 1 + 9 + 8.

Cách 2. 100a + 10b + c = 11a + 11b + 11c

$\Rightarrow 89a = 10c + b \Rightarrow 89a = \overline{cb} \Rightarrow a = 1,\ \overline{cb} = 89$.

203. Không tồn tại hai số $\overline{ab}$ và $\overline{cd}$, xem bài 68.

204. $(12 + 3x)^2 = [3(4 + x)]^2 = 9(4 + x)^2$. Như vậy $\overline{1a96}$ chia hết cho 9 $\Rightarrow$ $a = 2$. Suy ra $(4 + x)^2 = 1296 : 9 = 144 = 12^2$.

Đáp số : $a = 2$; $x = 8$.

205. *Đáp số :* 17948.

206. *Đáp số :* 77.

207. *Cách 1.* Viết $\overline{aabb} = 99 . \overline{ab}$ thành $\overline{aabb} + \overline{ab} = \overline{ab00}$.

Cách 2. $\overline{aabb} = 99 . \overline{ab}$

$\Rightarrow 1100a + 11b = 990a + 99b$

$\Rightarrow 110a = 88b$

$\Rightarrow 5a = 4b \Rightarrow a = 4, b = 5.$

208. Xét phép nhân :

$$\begin{array}{r} a\,b\,c\,d \\ \times \quad 4 \\ \hline d\,c\,b\,a \end{array}$$

4d tận cùng bằng a nên a chẵn, ta lại có $4a < 10$ nên $a = 2$.

Ta được :

$$\begin{array}{r} 2\,b\,c\,d \\ \times \quad 4 \\ \hline d\,c\,b\,2 \end{array}$$

$d \geqslant 2 . 4 = 8$, mà 4d tận cùng bằng 2 nên $d = 8$. Ta được :

$$\begin{array}{r} 2\,b\,c\,8 \\ \times \quad 4 \\ \hline 8\,c\,b\,2 \end{array}$$

$4c + 3$ tận cùng bằng b nên b lẻ, ta lại có $4b < 10$ nên $b = 1$.

$4c + 3$ tận cùng bằng 1 nên 4c tận cùng bằng 8. Suy ra $c \in \{2 ; 7\}$

$c = 2$ không thoả mãn bài toán, $c = 7$ cho số phải tìm là : 2178. Thử lại : $2178 . 4 = 8712$.

209. Gọi số phải tìm là $\overline{abcd}$. Ta có phép nhân (1).

$$\begin{array}{r} a\,b\,c\,d \\ \times \quad 9 \\ \hline d\,c\,b\,a \end{array} \quad (1)$$

Từ (1) ta tìm được :

$a = 1$; $d = 9$.

Ta có phép nhân (2).

$$\begin{array}{r} 1\,b\,c\,9 \\ \times \quad 9 \\ \hline 9\,c\,b\,1 \end{array} \quad (2)$$

Từ (2) : $b < 2$ vì nếu $b \geqslant 2$ thì tích có năm chữ số.

Xét $b = 1$ thì $c = 7$ (để $\overline{9c11} \vdots 9$), khi đó $1179 . 9$ có năm chữ số, loại.

Xét $b = 0$ thì $c = 8$ (để $\overline{9c01} \vdots 9$), khi đó $1089 . 9 = 9801$, thoả mãn đề bài.

Đáp số : 1089.

210. Gọi số phải tìm là $\overline{abcde}$. Lần lượt tìm được $a = 1$; $e = 9$. Ta có phép nhân (1).

$$\begin{array}{r} 1\,b\,c\,d\,9 \\ \times \quad\quad 9 \\ \hline 9\,d\,c\,b\,1 \end{array} \quad (1)$$

Từ (1) ta tìm được $b < 2$ và $9d + 8$ tận cùng b.

Xét $b = 1$ thì $9d + 8$ tận cùng $1 \Rightarrow 9d$ tận cùng 3 $\Rightarrow d = 7$, loại vì khi $b = 1$ thì chữ số d ở tích phải bằng 9.

Xét $b = 0$ thì $9d + 8$ tận cùng $0 \Rightarrow 9d$ tận cùng $2 \Rightarrow d = 8$. Khi đó tích là $\overline{98c01}$. Để tích chia hết cho 9 thì $c = 0$ hoặc $c = 9$. Thử :

$$10089 . 9 = 90801, \text{ loại.}$$

$$10989 . 9 = 98901, \text{ đúng.}$$

Đáp số : 10989.

211. a) $\overline{abc} = 9 . \overline{bc} \Rightarrow 100a + \overline{bc} = 9 . \overline{bc}$

$8 . \overline{bc} = 100a \Rightarrow 2 . \overline{bc} = 25a.$

Như vậy $\overline{bc} \vdots 25$. Có 3 đáp số : 225, 450, 675.

b) Nếu xoá chữ số tận cùng thì số ban đầu giảm từ 10 lần trở lên.

Nếu xoá chữ số hàng chục : có 4 đáp số là 135, 225, 315, 405.

Nếu xoá chữ số hàng trăm : có 3 đáp số như câu a.

212. Gọi $n = \overline{abc}$.

Số $\overline{abc}$ xoá c được $\overline{ab}$. Ta có : $\overline{abc} \vdots \overline{ab} \Rightarrow c = 0$.

Số $\overline{ab0}$ xoá b được $\overline{a0}$. Ta có : $\overline{ab0} \vdots \overline{a0} \Rightarrow \overline{ab} \vdots a$

$$\Rightarrow b \vdots a \qquad (1)$$

Số $\overline{ab0}$ xoá a được $\overline{b0}$. Ta có : $\overline{ab0} \vdots \overline{b0} \Rightarrow \overline{ab} \vdots b$

$$\Rightarrow 10a + b \vdots b \Rightarrow 10a \vdots b \qquad (2)$$

Từ (1), đặt $b = ka$ ($k \in \mathbf{N}$). Thay $b = ka$ vào (2) :

$$10a \vdots ka \Rightarrow 10 \vdots k.$$

Do $b \neq a$ nên $k \in \{2 ; 5\}$.

Với $k = 2$ ta có $\overline{abc}$ bằng 120 ; 240 ; 360 ; 480.

Với $k = 5$ ta có $\overline{abc}$ bằng 150.

213. $\overline{abcd} = 9 . \overline{bcd}$. Đặt $\overline{bcd} = x$, ta có :

$1000a + x = 9x \Rightarrow 1000a = 8x \Rightarrow x = 125a.$

Lần lượt cho a từ 1 đến 7 ta được 7 đáp số : 1125, 2250, 3375, 4500, 5625, 6750, 7875.

214. Có 3 đáp số : 2025, 4050, 6075.

215. *Đáp số :* 45.

216. Gọi C là số tạo bởi k chữ số tận cùng bị xoá của A, ta có $A = 10^k . B + C$, do đó $10^k . B + C = 130B$.

Như vậy $10^k . B \leqslant 130B \Rightarrow k = 1, k = 2$.

Với $k = 1$ thì $10B + C = 130B \Rightarrow C = 120B$ và C có một chữ số, loại.

Với $k = 2$ thì $100B + C = 130B \Rightarrow C = 30B$ và C có hai chữ số. Vậy C bằng 30 ; 60 ; 90.

Có 3 số thoả mãn bài toán là 130 ; 260 ; 390.

217. Đặt $x = \overline{ab2}$. Ta có :

$$\begin{array}{r} x = a\,b\,2 \\ \times\quad 2 \\ \hline 2x = c\,d\,4 \end{array} \quad (1) \qquad\qquad \begin{array}{r} x = a\,b\,2 \\ \times\quad 3 \\ \hline 3x = e\,g\,6 \end{array} \quad (2)$$

a, b, c, d, e, g khác nhau và nhận các giá trị 1, 3, 5, 7, 8, 9.

Dễ thấy d chẵn nên $d = 8$. Từ (1) suy ra $b = 9$. Từ (2) suy ra $g = 7$. Do đó $a, c, e \in \{1 ; 3 ; 5\}$.

Dễ thấy $a < c < e$ nên $a = 1$; $c = 3$; $e = 5$. Thử lại :

$$\begin{array}{r} 1\,9\,2 \\ \times\quad 2 \\ \hline 3\,8\,4 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 1\,9\,2 \\ \times\quad 3 \\ \hline 5\,7\,6 \end{array}$$

218. a) Ta có :

$$\begin{aligned} x &= * * * * * * \\ 2x &= * * * * * * \\ 3x &= * * * * * * \\ 4x &= * * * * * * \\ 5x &= * * * * * * \\ 6x &= * * * * * * \end{aligned}$$

Ta chú ý rằng trong sáu số trên, hiệu của hai số bất kì là một trong sáu số ấy. Mỗi chữ số 1, 2, 4, 5, 7, 8 không thể có mặt hai lần ở cùng một cột. Thật vậy, nếu một chữ số a có ở cùng một cột của số 5x và 2x chẳng hạn thì hiệu của hai số này (là 3x) phải có chữ số 0 hoặc 9 ở cột đó (chữ số 0 ứng với trường hợp phép trừ không có nhớ ở cột bên phải sang, chữ số 9 ứng với trường hợp ngược lại). Điều này vô lí vì các chữ số 0 và 9 không thuộc tập hợp các chữ số đã cho.

Do đó mỗi chữ số 1, 2, 4, 5, 7, 8 có mặt đúng một lần ở mỗi cột. Tổng các chữ số ở mỗi cột bằng :

$1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8 = 27$. Suy ra :

$$x + 2x + 3x + 4x + 5x + 6x = 27 . 111111$$
$$21x = 2999997$$
$$x = 142857.$$

Các số 2x, 3x, 4x, 5x, 6x thứ tự bằng 285714, 428571, 571428, 714285, 857142.

b) Gọi $x = \overline{abcdeg}$. Ta có a = 1 để 6x vẫn có sáu chữ số.

Xét sáu số x, 2x, 3x, 4x, 5x, 6x, chữ số đầu tiên của số sau lớn hơn chữ số đầu tiên của số trước ít nhất là 1 nên sáu chữ số đầu tiên của sáu số trên đều khác nhau và khác 0.

Các chữ số đầu tiên này cũng là các chữ số của x, do đó sáu chữ số của x đều khác nhau, khác 0, trong đó có chữ số 1.

Các chữ số tận cùng của x, 2x, 3x, 4x, 5x, 6x cũng phải khác nhau (vì nếu có hai số tận cùng giống nhau thì hiệu của chúng tận cùng bằng 0, tức là có một trong sáu số tận cùng bằng 0, trái với nhận xét ở trên). Do đó phải có một số tận cùng bằng 1.

Các số 2x, 4x, 5x, 6x hiển nhiên không tận cùng bằng 1, còn x cũng vậy vì chữ số đầu tiên của x đã bằng 1.

Vậy 3x tận cùng bằng 1, do đó x tận cùng bằng 7. Suy ra 2x, 3x, 4x, 5x, 6x theo thứ tự tận cùng bằng 4, 1, 8, 5, 2.

Như vậy số x gồm sáu chữ số 4, 1, 8, 5, 2, 7. Sau đó giải tiếp như câu a.

DÃY CÁC SỐ VIẾT THEO QUY LUẬT

219. Đó là chữ số 0 thuộc số 703.

220. a) 2475 ; b) 2430.

221. Số hạng thứ n của dãy bằng $\frac{n(n+1)}{2}$.

Nếu số hạng thứ n của dãy có chữ số tận cùng bằng 2 thì n(n + 1) tận cùng bằng 4. Điều này vô lí vì n(n + 1) chỉ tận cùng bằng 0, hoặc 2, hoặc 6.

Vậy không có số hạng nào của dãy tận cùng bằng 2.

222. a) Ta bổ sung thêm số 0 vào vị trí đầu tiên của dãy số (không làm kết quả bị thay đổi). Tạm chưa xét số 100. Từ 0 đến 99 có 100 số, ghép thành 50 cặp : 0 và 99, 1 và 98, 2 và 97, ... mỗi cặp có tổng các chữ số bằng 18. Tổng các chữ số của 50 cặp bằng : 18 . 50 = 9 . 100 = 900. Thêm số 100 có tổng các chữ số bằng 1. *Đáp số :* 901.

b) *Đáp số :* 27000001.

223. Ta nhớ lại : $1000! = 1 . 2 . 3 \ldots 999 . 1000$

Trong dãy số 1, 2, 3, ..., 999, 1000 :

– Các bội của 7 là 7, 14, 21, ..., 994 ; gồm : $\dfrac{994 - 7}{7} + 1 = 142$ (số).

– Các bội của 7^2 là 49, 98, 137, ..., 980 ; gồm : $\dfrac{980 - 49}{49} + 1 = 20$ (số).

– Các bội của 7^3 là 343, 686 ; gồm 2 số.

– Không có bội của 7^4.

Như vậy khi phân tích ra thừa số nguyên tố, 1000! chứa thừa số 7 với số mũ : $142 + 20 + 2 = 164$.

224. *Đáp số :* 124.

225. a) $B = \dfrac{1.2.3\ldots74}{1.2.3\ldots37} = 1.3.5\ldots73.\dfrac{2.4.6\ldots74}{1.2.3\ldots37} =$

$= (1.3.5\ldots73).2^{37}$ nên B chứa 37 thừa số 2.

b) $C = \dfrac{1.2.3\ldots90}{1.2.3\ldots30}(1.4.7\ldots88)(2.5.8\ldots89).\dfrac{3.6.9\ldots90}{1.2.3\ldots30} =$

$= (1.4.7\ldots88).(2.5.8\ldots89).3^{30}$.

Biểu thức trong dấu ngoặc thứ nhất là tích của các số chia cho 3 dư 1, biểu thức trong dấu ngoặc thứ hai là tích của các số chia cho 3 dư 2, do đó C chứa 30 thừa số 3.

Chú ý : Tổng quát, khi phân tích ra thừa số nguyên tố, tích $(n + 1)(n + 2)\ldots(2n)$ chứa n thừa số 2, tích $(n + 1)(n + 2)\ldots(3n)$ chứa n thừa số 3.

226. Dãy (1) gồm các số chia cho 4 dư 3, dãy (2) gồm các số chia cho 7 dư 2. Gọi số phải tìm là n thì $n - 3 \vdots 4$, $n - 2 \vdots 7$ nên $n - 3 + 8 \vdots 4$, $n - 2 + 7 \vdots 7$ suy ra $n + 5 \vdots 28 \Rightarrow n = 28k - 5$.

Do $3 \leq n \leq 407$ nên k = 1, 2, ... , 14. Vậy có 14 số phải tìm.

227. Cần đếm các số lẻ chia hết cho 19 trong dãy 1, 2, 3, ..., 1990. Đó là các số 19, 57, ..., 1957, gồm $(1957 - 19) : 38 + 1 = 52$ (số).

228. a) Nhóm thứ nhất có 1 số, nhóm thứ hai có 2 số, nhóm thứ ba có 3 số, ..., nhóm thứ 99 có 99 số. Như vậy trước nhóm thứ 100 có $1 + 2 + 3 + \ldots + 99 = 4950$ (số). Số hạng đầu của nhóm thứ 100 là 4951.

b) Nhóm thứ 100 có 100 số, số đầu tiên của nhóm là 4951, số cuối cùng của nhóm là : 4951 + 99 = 5050. Tổng các số của nhóm này bằng :

$$(4951 + 5050) . 100 : 2 = 500050.$$

229. Chú ý rằng số số hạng của S_1, S_2, ..., S_{99} theo thứ tự bằng 2, 3, 4, ..., 100.

Đáp số : $S_{100} = 515100$.

230. a) $50 . 55 = 2750$.

b) $148 . 151 = 22348$.

231. $A = 1 + 3 + 3^2 + ... + 3^{20}$ (1)

$3A = 3 + 3^2 + ... + 3^{20} + 3^{21}$ (2)

Lấy (2) trừ (1) được $2A = 3^{21} - 1$. Còn $2B = 3^{21}$. Do đó $2B - 2A = 1 \Rightarrow B - A = \frac{1}{2}$.

232. $3A = 4^{100} - 1 < B$ nên $A < \frac{B}{3}$.

233. a) $A = 9 + 99 + 999 + ... + \underbrace{99...9}_{50 \text{ chữ số}}$

$$= 10 - 1 + 10^2 - 1 + 10^3 - 1 + ... + 10^{50} - 1$$

$$= 10 + 10^2 + 10^3 + ... + 10^{50} - 50$$

$$= \underbrace{11...1}_{50 \text{ chữ số } 1}0 - 50$$

$$= \underbrace{11...1}_{48 \text{ chữ số } 1}060.$$

b) $B = \underbrace{11...1}_{200 \text{ chữ số } 1}0 - 200 = \underbrace{11...1}_{197 \text{ chữ số } 1}0910.$

ĐẾM SỐ

234. *Đáp số :* 222 chữ số.

235. Chữ số thứ 2000 là chữ số 6 của số 1276.

236. a) 314 chữ số.

b) Viết tất cả hết 314 giây. Sau 5 phút, bạn Mai viết đến chữ số 2 của số 237.

237. Từ 1 đến 9 có : $\frac{9 - 1}{2} + 1 = 5$ (số lẻ), gồm : $1 . 5 = 5$ (chữ số).

Từ 11 đến 99 có : $\frac{99 - 11}{2} + 1 = 45$ (số lẻ), gồm : $2 . 45 = 90$ (chữ số).

Từ 101 đến 999 có : $\frac{999 - 101}{2} + 1 = 450$ (số lẻ), gồm : $3 . 450 = 1350$ (chữ số).

Như vậy chữ số thứ 200 rơi vào số lẻ có ba chữ số vì

$$5 + 90 < 200 < 5 + 90 + 1350.$$

Ta thấy : $200 - (5 + 90) = 105$; $105 : 3 = 35$.

Do đó chữ số thứ 200 là chữ số hàng đơn vị của số lẻ thứ 35 kể từ 101. Số lẻ đó là :

$$101 + (35 - 1) . 2 = 169.$$

Vậy chữ số thứ 200 là chữ số 9 của số 169.

238. a) Cuốn sách có 702 trang.

b) Chữ số thứ 1010 là chữ số 7 của số 374.

239. 300 số.

240. Dãy số lẻ chia hết cho 3 và có hai chữ số là :

$$15, 21, 27, ..., 99$$

gồm $(99 - 15) : 6 + 1 = 15$ (số).

Tuấn phải gõ cửa nhiều nhất 15 số nhà.

241. a) Các số phải đếm có dạng $\overline{abcd}$ trong đó $\overline{ab} + \overline{cd} < 100$.

Đáp số : 4095 số.

b) Có 4905 số. Chú ý rằng nếu hai chữ số đầu là 10 thì hai chữ số cuối có thể là 00, 01, 02, ..., 09.

242. Các số phải xoá có tận cùng 2, 4, 6, 8, 5. Mỗi chục xoá 5 số, còn lại 5 số. Từ 1 đến 250 có 25 chục, còn lại $5 . 25 = 125$ (số). Xét các số 251, 252, số 251 được giữ lại.

Vậy còn lại 126 số.

243. a) Các số phải đếm có dạng $\overline{abc}$ trong đó a nhận 4 giá trị, b nhận 5 giá trị, c nhận 5 giá trị. Có : $4 . 5 . 5 = 100$ (số)

b) Có $9 . 5 . 10 = 450$ (số).

244. a) Có $4 . 5 . 5 . 5 = 500$ (số).

b) Các số phải đếm có dạng $\overline{abcd}$ trong đó a có 9 cách chọn, b có 10 cách chọn, c có 10 cách chọn, d có 5 cách chọn (nếu a + b + c lẻ thì d = 1, 3, 5, 7, 9 ; còn nếu a + b + c chẵn thì d = 0, 2, 4, 6, 8). Vậy có : $9 . 10 . 10 . 5 = 4500$ (số).

245. Có 25 . 25 cách lập kí hiệu gồm hai chữ cái. Có 999 cách lập số từ 001 đến 999. Tất cả có : 25 . 25 . 999 = 624375 (biển số xe).

246. a) Các số phải đếm gồm ba dạng :

$\overline{4bc}$ có 9 . 9 = 81 (số)

$\overline{a4c}$ có 8 . 9 = 72 (số)

$\overline{ab4}$ có 8 . 9 = 72 (số).

Tất cả có : 81 + 72 + 72 = 225 (số).

b) Các số phải đếm gồm ba dạng : $\overline{44c}$, $\overline{4b4}$, $\overline{a44}$, có 26 số.

247. Xét bốn dạng $\overline{5ab0}$, $\overline{a5b0}$, $\overline{ab50}$, $\overline{abc5}$, có

$$81 + 72 + 72 + 648 = 873 \text{ (số)}.$$

248. Các số phải đếm có dạng $\overline{abc}$. Ta có $\overline{abc} + \overline{cba} \vdots 5$. Với mỗi cách chọn $\overline{ab}$ (từ 10 đến 99) thì c có 2 cách chọn phụ thuộc vào a (nếu a = 5k thì c bằng 0 hoặc 5, nếu a = 5k + 1 thì c bằng 4 hoặc 9, nếu a = 5k + 2 thì c bằng 3 hoặc 8, nếu a = 5k + 3 thì c bằng 2 hoặc 7, nếu a = 5k + 4 thì c bằng 1 hoặc 6). Vậy có : 90 . 2 = 180 (số).

249. Các số phải đếm có dạng $\overline{abc}$. Nếu c = 0 thì a có 9 cách chọn (từ 1 đến 9), b có 8 cách chọn (từ 1 đến 9, khác a).

Nếu c = 2, 4, 6, 8 thì a có 8 cách chọn (từ 1 đến 9, khác c), b có 8 cách chọn (từ 0 đến 9, khác a và c).

Vậy có : 9 . 8 + 8 . 8 . 4 = 328 (số).

250. Đếm số có ba chữ số rồi bớt đi số có ba chữ số khác nhau. *Đáp số :* 252 số.

251. Các số phải đếm gồm bốn dạng :

– Dạng $\overline{baaa}$: Chữ số b có 9 cách chọn (từ 1 đến 9), chữ số a có 9 cách chọn (từ 0 đến 9 nhưng khác b). Có : 9 . 9 = 81 (số).

– Dạng $\overline{abaa}$, dạng $\overline{aaba}$, dạng $\overline{aaab}$: Ở mỗi dạng này, chữ số a có 9 cách chọn, chữ số b có 9 cách chọn (khác a). Mỗi dạng có : 9 . 9 = 81 (số).

Tất cả có : 81 . 4 = 324 (số).

252. a) Số có ba chữ số, chia hết cho 5 gồm 180 số. Trong đó số không chứa chữ số 5 có dạng $\overline{abc}$, a có 8 cách chọn, b có 9 cách chọn, c có 1 cách chọn (là 0) gồm 8 . 9 = 72 (số).

Vậy có : 180 − 72 = 108 (số phải đếm).

b) Số có ba chữ số, chia hết cho 4 gồm 225 số. Trong đó số không chứa chữ số 4 có dạng $\overline{abc}$, a có 8 cách chọn, b có 9 cách chọn, c có 2 cách chọn (nếu b chẵn thì c bằng 0 hoặc 8, nếu b lẻ thì c bằng 2 hoặc 6), gồm : $8 . 9 . 2 = 144$ (số).

Có : $225 - 144 = 81$ (số phải đếm).

c) Số phải tìm có dạng $\overline{abc}$, a có 8 cách chọn, b có 9 cách chọn, c có 3 cách chọn (nếu $a + b = 3k$ thì $c = 0, 6, 9$; nếu $a + b = 3k + 1$ thì $c = 2, 5, 8$; nếu $a + b = 3k + 2$ thì $c = 1, 4, 7$), có : $8 . 9 . 3 = 216$ (số).

253. a) Từ 1 đến 9 có 9 số, gồm : $1 . 9 = 9$ (chữ số)

Từ 10 đến 99 có 90 số, gồm : $2 . 90 = 180$ (chữ số)

Từ 100 đến 999 có 900 số, gồm : $3 . 900 = 2700$ (chữ số)

Số A có : $9 + 180 + 2700 = 2889$ (chữ số)

b) *Cách 1.* Giả sử ta viết số B là các số tự nhiên từ 000 đến 999 (mỗi số đều viết bởi ba chữ số), thế thì tổng các chữ số của B cũng bằng tổng các chữ số của A.

B có : $3 . 1000 = 3000$ (chữ số), mỗi chữ số từ 0 đến 9 đều có mặt :

$$3000 : 10 = 300 \text{ (lần)}.$$

Tổng các chữ số của B (và cũng là của A) :

$$(0 + 1 + 2 + ... + 9) . 300 = 45 . 300 = 13500.$$

Cách 2. Xét dãy số tự nhiên từ 0 đến 999 :

$$0, 1, 2, ..., 998, 999 \qquad (1)$$

Tổng các chữ số của dãy (1) chính là tổng các chữ số của A.

Dãy (1) gồm 1000 số. Ghép 1000 số này thành 500 cặp :

0 và 999 ; 1 và 998 ; 2 và 997 ; ... tổng quát : a và $999 - a$.

Ở mỗi cặp, phép trừ $999 - a$ ở mỗi cột (hàng đơn vị, hàng chục, hàng trăm) đều không có nhớ, do đó tổng các chữ số của $999 - a$ cộng với tổng các chữ số của a bằng tổng các chữ số của 999, tức là bằng 27.

Tổng các chữ số của dãy (1), tức là tổng các chữ số của A :

$$27 . 500 = 13500.$$

254. a) *Cách 1 và cách 2.* Giải theo phương pháp ở ví dụ 48.

Cách 3. Cần đếm số chữ số 1 trong dãy :

$$1, 2, 3, ..., 999 \qquad (1)$$

Ta xét dãy :

$$000, 001, 002, ..., 999 \qquad (2)$$

Số chữ số 1 trong hai dãy như nhau. Ở dãy (2) có 1000 số, mỗi số gồm ba chữ số, số lượng mỗi chữ số từ 0 đến 9 đều như nhau. Mỗi chữ số (từ 0 đến 9) đều có mặt :

$$3 . 1000 : 10 = 300 \text{ (lần)}$$

Vậy ở dãy (1), chữ số 1 cũng được viết 300 lần.

b) Ở dãy (2), chữ số 0 có mặt 300 lần.

So với dãy (1) thì ở dãy (2) ta đã viết thêm các chữ số 0 :

- Vào hàng trăm 100 lần (chữ số hàng trăm của các số từ 000 đến 099) ;
- Vào hàng chục 10 lần (chữ số hàng chục của các số từ 000 đến 009) ;
- Vào hàng đơn vị 1 lần (chữ số hàng đơn vị của số 000).

Vậy chữ số 0 ở dãy (1) được viết là :

$$300 - 111 = 189 \text{ (lần)}.$$

255. Dãy số tự nhiên có ba chữ số gồm 900 số. Ta tính xem trong dãy đó có bao nhiêu số *không chứa chữ số 4*, có 648 số (cách giải, xem ví dụ 47). Các số phải đếm có : 900 − 648 = 252 (số).

256. a) Trước hết ta đếm các số không chứa chữ số 0 : Từ 1 đến 9 có 9 số, từ 10 đến 99 có $9 . 9 = 81$ (số), từ 100 đến 999 có $9^3 = 729$ (số), từ 1000 đến 9999 có $9^4 = 6561$ (số), số 10000 không đếm vì có chứa chữ số 0.

Vậy có 7380 số không chứa chữ số 0. Còn lại : 10000 − 7380 = 2620 (số) có chứa chữ số 0.

b) Có 3440 số chứa chữ số 1 (giải như ví dụ 47). Số không chứa chữ số 1 có nhiều hơn số chứa chữ số 1.

257. Chữ số 2 có ở hàng đơn vị 29 lần, ở hàng chục 15 lần, ở hàng trăm 50 lần, tổng cộng 94 lần.

258. Có $7 . 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1$ số, mỗi chữ số có mặt ở mỗi hàng : $6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 720$ (lần), mà 720 chia hết cho 9.

259. a) Tập hợp A có 6 phần tử.

b) Ở mỗi hàng đơn vị, chục, trăm, mỗi chữ số a, b, c có mặt 2 lần.

Tổng các chữ số ở mỗi hàng :

$$(a + b + c) . 2 = 17 . 2 = 34.$$

Tổng các phần tử của A :

$$34 . 111 = 3774.$$

260. Lập được : 4 . 3 . 2 . 1 = 24 số tự nhiên gồm cả bốn chữ số 1, 2, 3, 4. Mỗi chữ số có mặt 6 lần ở mỗi hàng. Tổng của 24 số nói trên bằng :

$$60 + 600 + 6000 + 60000 = 66660.$$

261. a) Có 3 . 4 . 4 = 48 (số). Mỗi chữ số 2, 3, 7 xuất hiện ở hàng trăm : 48 : 3 =16 (lần), mỗi chữ số 2, 3, 0, 7 xuất hiện ở hàng chục cũng như ở hàng đơn vị : 48 : 4 = 12 (lần). Do đó tổng phải tìm bằng :

$$(2 + 3 + 7).(1600 + 120 + 12) = 20784.$$

b) *Đáp số :* $(2 + 3 + 7).(600 + 40 + 4) = 7728$.

SƠ LƯỢC VỀ TẬP HỢP

262. a) $A = \{2 ; 3 ; 5 ; 7\}$; b) $B = \{31 ; 62 ; 93\}$;

c) $C = \{1 ; 2 ; 5 ; 10\}$.

263. a) $A = \{x \mid x = n^2 ; n \in \mathbf{N} ; 1 \leq n \leq 7\}$.

b) $B = \{x \mid x = 6n + 1 ; n \in \mathbf{N} ; 0 \leq n \leq 6\}$.

c) $C = \{x \mid x = n(n + 1) ; n \in \mathbf{N} ; 1 \leq n \leq 5\}$.

264. Có bốn tập hợp : $\varnothing$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{3 ; 4\}$.

265. Có tám tập hợp con : $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b ; c\}$, $\{a ; b ; c\}$.

266. Có bảy tập hợp con thực sự của B là :

$$\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1 ; 2\}, \{1 ; 3\}, \{2 ; 3\}.$$

267. a) Có ba tập hợp : $\{2\}$, $\{4\}$, $\{2 ; 4\}$.

b) Tập hợp A có 16 tập hợp con là :

– Tập hợp rỗng $\varnothing$.

– Các tập hợp gồm một phần tử : có 4 tập hợp là $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$.

– Các tập hợp gồm hai phần tử : có 6 tập hợp là $\{1 ; 2\}$, $\{1 ; 3\}$, $\{1 ; 4\}$, $\{2 ; 3\}$, $\{2 ; 4\}$, $\{3 ; 4\}$

– Các tập hợp gồm ba phần tử : có 4 tập hợp là $\{2 ; 3 ; 4\}$, $\{1 ; 3 ; 4\}$, $\{1 ; 2 ; 4\}$, $\{1 ; 2 ; 3\}$.

– Chính tập hợp A.

268. $A \subset B$ nên với mọi $x \in A$ thì $x \in B$.

$B \subset D$ nên với mọi $x \in B$ thì $x \in D$.

Như vậy : với mọi $x \in A$ thì $x \in D$, do đó $A \subset D$.

269. a) Có 50 số chia hết cho 2, loại đi 16 số chia hết cho 3, còn 34 số.

b) Có 33 số chia hết cho 3. Thêm vào 34 số đếm ở câu a. *Đáp số :* 67 số.

c) Có tất cả 100 số, loại đi 67 số đếm ở câu b, còn 33 số.

270. a) Gọi A, B, C, D, E, G, H là tập hợp các số từ 1 đến 1000 mà theo thứ tự chia hết cho 2, chia hết cho 3, chia hết cho 5, chia hết cho 2 và 3, chia hết cho 2 và 5, chia hết cho 3 và 5, chia hết cho cả ba số (h. 19). Số phần tử của các tập hợp đó theo thứ tự bằng s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7.

Ta có : $s_1 = 1000 : 2 = 500$,

$s_2 = [1000 : 3] = 333$,

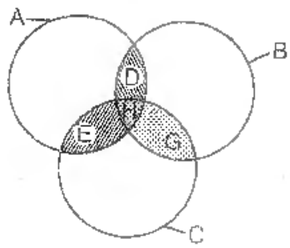
$s_3 = 1000 : 5 = 200$,

$s_4 = [1000 : 6] = 166$,

$s_5 = 1000 : 10 = 100$,

$s_6 = [1000 : 15] = 66$,

$s_7 = [1000 : 30] = 33$.



Hình 19

Các số phải tìm gồm :

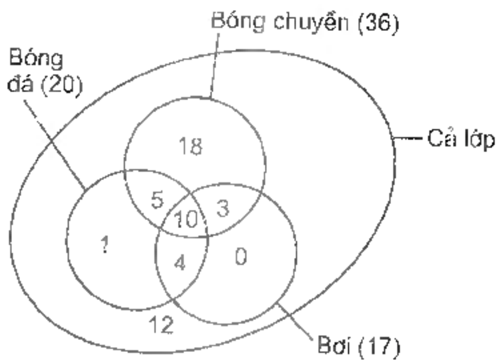
$$s_1 + s_2 + s_3 - s_4 - s_5 - s_6 + s_7 = 734 \text{ (số)}.$$

b) Còn lại : $1000 - 734 = 266$ (số).

271. (h. 20)

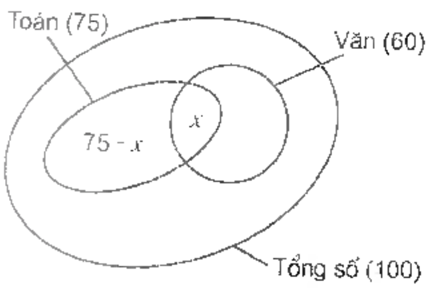
Cách 1. Ta có thể điền vào trong hình số lượng phần tử của các tập hợp. Lần lượt điền vào sơ đồ ở hình 20 các số 10, 4, 3, 5, 1, 0, 18, 12. Lớp học có 53 học sinh.

Cách 2. Số học sinh thích ít nhất một môn là : $20 + 17 + 36 - 14 - 13 - 15 + 10 = 41$ (học sinh). Số học sinh cả lớp : $31 + 12 = 53$ (học sinh).



Hình 20

272. (h. 21) Gọi số học sinh thích cả hai môn Văn và Toán là x, số học sinh thích Toán mà không thích Văn là $75 - x$.



Hình 21

a) Ta có :

$75 - x + 60 + 5 = 100$

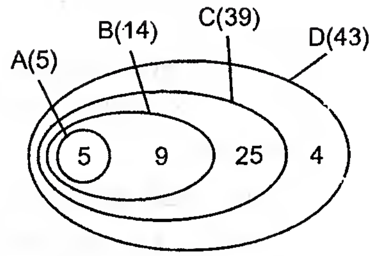
$x = 40$.

Có 40 học sinh thích cả hai môn.

b) 60 học sinh (nếu tất cả số thích Văn đều thích toán).

c) $75 - x + 60 \leqslant 100 \Rightarrow x \geqslant 35$. Có ít nhất 35 học sinh thích cả hai môn Văn và Toán.

273. Gọi tập hợp các học sinh đạt ít nhất 4, 3, 2, 1 điểm 10 theo thứ tự là A, B, C, D. Theo đề bài các tập hợp này gồm 5, 14, 39, 43 người. Ta có $A \subset B \subset C \subset D$ (xem h. 22).



Hình 22

Số học sinh đạt 1 điểm 10 là : 43 - 39 = 4.

Số học sinh đạt 2 điểm 10 là : 39 - 14 = 25.

Số học sinh đạt 3 điểm 10 là : 14 - 5 = 9.

Số điểm 10 của lớp 6A đạt được là :

$$1 . 4 + 2 . 25 + 3 . 9 + 4 . 5 = 101.$$

274. A = C, B = D.

275. a) $A \subset B$, $C \subset D$, $D \subset C$.

b) C = D.

276. Không, chẳng hạn 209 thuộc B nhưng không thuộc A.

277. a), b). Bạn đọc tự giải.

c) Trước hết ta thấy a, b là số lẻ nên $\frac{a+b}{2} \in \mathbf{N}$. Gọi $d \in ƯC(a, b)$ thì $a \vdots d$, $b \vdots d$ nên $a + b \vdots d$. Suy ra $2 . \frac{a+b}{2} \vdots d$ mà d lẻ nên $\frac{a+b}{2} \vdots d$. Vậy $d \in ƯC\left(a, \frac{a+b}{2}\right)$.

Gọi $d' \in ƯC\left(a, \frac{a+b}{2}\right)$ thì $a \vdots d'$, $\frac{a+b}{2} \vdots d'$.

Suy ra $a + b \vdots d'$, do đó $b \vdots d'$. Vậy $d' \in ƯC(a, b)$.

Tập hợp các ước chung của a và b bằng tập hợp các ước chung của a và $\frac{a+b}{2}$.

Vậy $(a, b) = \left(a, \frac{a+b}{2}\right)$.

278. Giải tương tự như bài 277c.

TÌM CHỮ SỐ TẬN CÙNG CỦA MỘT LŨY THỪA

279. Chữ số tận cùng bằng 0.

280. a) $7^{4n} - 1 = (7^4)^n - 1 = 2401^n - 1 = \overline{\ldots 1} - 1$, tận cùng bằng 0. Vậy $7^{4n} - 1 \vdots 5$.

b) $3^{4n+1} + 2 = (3^4)^n . 3 + 2 = 81^n . 3 + 2 = \overline{\ldots 1} . 3 + 2$, tận cùng bằng 5.

Vậy $3^{4n+1} + 2$ chia hết cho 5.

c) $2^{4n+1} + 3 = (2^4)^n . 2 + 3 = 16^n . 2 + 3 = \overline{...6} . 2 + 3$ tận cùng bằng 5, chia hết cho 5.

d) $2^{4n+2} + 1$ tận cùng bằng 5.

e) $9^{2n+1} + 1 = (9^2)^n . 9 + 1 = 81^n . 9 + 1 = \overline{...1} . 9 + 1$, tận cùng bằng 0, chia hết cho 10.

281. n tận cùng bằng 3 hoặc 7.

282. Không. Lần lượt xét n tận cùng bằng 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 thì $n^2 + n + 2$ chỉ tận cùng bằng 2, 4, 8.

283. a) *Cách 1.* Xét từng trường hợp n tận cùng bằng 0, 2, 4, 6, 8 thì 6n cũng tận cùng như vậy.

Cách 2. Xét hiệu $6n - n = 5n \vdots 10$ vì n chẵn.

b) Nếu n tận cùng bằng 1 hoặc 9 thì n^2 tận cùng bằng 1, do đó n^4 tận cùng bằng 1.

Nếu n tận cùng bằng 3 hoặc 7 thì n^2 tận cùng bằng 9, do đó n^4 tận cùng bằng 1.

Nếu n tận cùng bằng 4 hoặc 6 thì n^2 tận cùng bằng 6, do đó n^4 tận cùng bằng 6.

Nếu n tận cùng bằng 2 hoặc 8 thì n^2 tận cùng bằng 4, do đó n^4 tận cùng bằng 6.

c) Nếu n tận cùng bằng 0 hoặc 5 thì n^5 cũng tận cùng như vậy.

Nếu n tận cùng bằng 1, 3, 7, 9 thì n^4 tận cùng bằng 1 (câu b). Ta có $n^5 = n^4 . n = \overline{...1} . n$ nên chữ số tận cùng của n^5 và của n như nhau.

Nếu n tận cùng bằng 2, 4, 6, 8 thì n^4 tận cùng bằng 6 (câu b). Ta có $n^5 = n^4 . n = ...6 . n$ nên chữ số tận cùng của n^5 và của 6n như nhau. Nhưng chữ số tận cùng của 6n và của n như nhau (câu a). Vậy chữ số tận cùng của n^5 và của n như nhau.

Chú ý : Dùng kiến thức của lớp 8 có thể giải câu c bằng cách chứng minh $n^5 - n \vdots 10$, tức là $n(n^2 + 1)(n^2 - 1) \vdots 10$.

Thật vậy, n^2 là số chính phương nên không tận cùng bằng 2, 3, 7, 8 tức là chia cho 5 không thể dư 2 hay 3. Nếu $n^2 \vdots 5$ thì $n \vdots 5$. Nếu n^2 chia 5 dư 1 thì $n^2 - 1 \vdots 5$. Nếu n^2 chia 5 dư 4 thì $n^2 + 1 \vdots 5$. Do đó $n(n^2 + 1)(n^2 - 1) \vdots 5$ tức là $n^5 - n \vdots 5$. Dễ dàng chứng minh được $n^5 - n \vdots 2$. Vậy $n^5 - n \vdots 10$.

284. Ta thấy 5^n tận cùng bằng 5, do đó 8^m phải tận cùng bằng 6. Xét các lũy thừa của 8 ta thấy $8^2 = 64$, $8^3 = 512$, $8^4 = 4096$, $8^5 > 10000$. Vậy các số phải đếm có dạng $8^4 + 5^n$ với n = 1, 2, 3, 4, 5. Có 5 số.

285. *Cách 1.* Chứng minh rằng A ⋮ 5 bằng cách nhóm A thành từng nhóm bốn số. Ta lại có A ⋮ 2 nên A ⋮ 10. Vậy A tận cùng bằng 0.

Cách 2. Hãy chứng minh rằng $A = 2^{21} - 2$ (xem ví dụ 8).

$A = 2^{21} - 2 = (2^4)^5 . 2 - 2 = 16^5 . 2 - 2 = \overline{\ldots 6} . 2 - 2$, tận cùng bằng 0.

286. a) $51^{51} = (51^2)^{25} . 51 = (\overline{\ldots 01})^{25} . 51 = (\overline{\ldots 01}) . 51 = \overline{\ldots 51}$.

b) $99^{99^{99}} = 99^{2k+1} = (99^2)^k . 99 = (\overline{\ldots 01})^k . 99 = (\overline{\ldots 01}) . 99 = \overline{\ldots 99}$.

c) $6^{666} = (6^5)^{133} . 6 = (\ldots 76)^{133} . 6 = (\overline{\ldots 76}) . 6 = \ldots 56$.

d) $14^{101} . 16^{101} = (14 . 16)^{101} = 224^{101} = (224^2)^{50} . 224 =$

$= (\overline{\ldots 76})^{50} . 224 = (\overline{\ldots 76}) . 224 = \overline{\ldots 24}$.

287. Ta còn chứng minh được 100! tận cùng bằng 24 chữ số 0. Thật vậy số thừa số 5 trong 100! bằng $\frac{100}{5} + \frac{100}{25} = 24$. Số thừa số 2 trong 100! lớn hơn 24 (cụ thể là bằng : $\frac{100}{2} + \frac{100}{4} + \frac{110}{8} + \left[\frac{100}{16}\right] + \left[\frac{100}{32}\right] + \left[\frac{100}{64}\right] = 50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97$).

Tích của mỗi cặp thừa số 5 và 2 tận cùng bằng một chữ số 0. Do đó 100! tận cùng bằng 24 chữ số 0.

Xem ví dụ 40.

HỆ GHI SỐ VỚI CƠ SỐ TUỲ Ý

288. a) 104 ; b) 13373.

289. a) $2031_{(4)}$; b) $10011_{(2)}$.

290. a) $12221_{(3)} = 1 . 3^4 + 2 . 3^3 + 2 . 3^2 + 2 . 3 + 1$

$= 1 . 9^2 + (2 . 3 + 2) . 3^2 + (2 . 3 + 1) = 1 . 9^2 + 8 . 9 + 7 = 187_{(9)}$.

b) $758_{(9)} = 7 . 9^2 + 5 . 9 + 8 = (2 . 3 + 1) . 3^4 + (1 . 3 + 2) . 3^2 + (2 . 3 + 2)$

$= 2 . 3^5 + 1 . 3^4 + 1 . 3^3 + 2 . 3^2 + 2 . 3 + 2 = 211222_{(3)}$.

291. a) $2 . 2 = 11_{(k)}$ với $k > 2$. Chuyển sang hệ thập phân :

$4 = k + 1$. Vậy $k = 3$.

b) $k = 8$.

c) $21_{(k)} . 2 = 112_{(k)}$ với $k > 2$. Chuyển sang hệ thập phân :

$(2k + 1).2 = k^2 + k + 2 \Rightarrow 4k + 2 = k^2 + k + 2$

$\Rightarrow 3k = k^2$. Vì $k \neq 0$ nên $k = 3$.

d) $11_{(k)} . 11_{(k)} = 121_{(k)}$ với $k > 2$. Chuyển sang hệ thập phân :

$(k + 1)(k + 1) = k^2 + 2k + 1$.

$k(k + 1) + (k + 1) = k^2 + 2k + 1$

$k^2 + 2k + 1 = k^2 + 2k + 1$, đúng với mọi $k > 2$.

292. a) $15_{(k)} \vdots 4$ với $k > 5$. Chuyển sang hệ thập phân : $k + 5 \vdots 4$, do đó $k + 1 \vdots 4$. Vậy $k = 4n + 3$ với $n = 1, 2, 3, ...$

b) Không có hệ ghi số nào như vậy.

293 a) $1024_{(5)}$; b) $342_{(5)}$; c) $13003_{(5)}$; d) $12_{(5)}$.

294. a) $10001_{(2)}$; b) $111_{(2)}$; c) $10010_{(2)}$; d) $11_{(2)}$.

295. a) 5 ngày ; b) $\frac{1}{32}$.

296. Số 63 viết trong hệ nhị phân là $111111_{(2)}$. Do đó mỗi số từ 1 đến 63 đều viết trong hệ nhị phân bởi không quá sáu chữ số, nên là tổng của một hay nhiều số trong sáu số 32, 16, 8, 4, 2, 1.

297. Chọn năm quả cân có khối lượng 1kg, 2kg, 4kg, 8kg, 16kg thì cân được mọi vật có khối lượng là một số tự nhiên từ 1kg đến 30kg.

298. Tú lập bảng số dựa vào hệ nhị phân. Mỗi số từ 1 đến 12 viết trong hệ nhị phân đều có không quá bốn chữ số. Bốn dòng tháng sinh từ trên xuống ứng với các hàng 8, 4, 2, 1 của hệ nhị phân. Để dễ nhớ, và để khỏi lộ bí mật, các hàng đó được mang tên Tươi vui, Bền bỉ, Hoạt bát, Mạnh mẽ (có chữ cái đầu tiên trùng với các chữ cái đầu tiên của Tám, Bốn, Hai, Một).

Chẳng hạn $6 = 110_{(2)}$. Số 6 trong hệ nhị phân có đơn vị hàng 4, hàng 2, không có đơn vị hàng 1. Tú đã viết số 6 vào các dòng Bền bỉ, Hoạt bát, không viết vào các dòng còn lại. Khi một bạn cho biết tháng sinh của mình có ở dòng Bền bỉ, Hoạt bát, Tú chỉ cần lấy 4 + 2 thành 6, chính là tháng sinh của bạn đó.

299. *Cách 1.* $A = 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{30}$.

$$2A = 2 + 2^2 + ... + 2^{30} + 2^{31}.$$

Suy ra : $A = 2^{31} - 1$.

Vậy : $A + 1 = 2^{31}$.

Cách 2. Dùng hệ nhị phân :

$$A = \underbrace{111\ldots1}_{\text{31 chữ số 1}}{}_{(2)}$$

$$A + 1 = 1\underbrace{00\ldots0}_{\text{31 chữ số 0}}{}_{(2)} = 2^{31}.$$

300. Gọi số hạt thóc phải tìm là A. Ta có :

$$A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{63}$$

Ta tính được : $A = 2^{64} - 1$.

(Số thóc này rất lớn, nếu rải đều trên mặt Trái Đất thì được một lớp thóc dày 9mm).

301. Gọi giá tiền 20 chiếc đinh đóng móng ngựa là S.

Cách 1. $S = 1 + 2 + ... + 2^{18} + 2^{19}$ (1)

$2S = 2 + 2^2 + ... + 2^{19} + 2^{20}$ (2)

Lấy (2) trừ (1) được : $S = 2^{20} - 1 = 1048575$ (xu)

$= 10485,75$ (đồng)

Cách 2. Viết S trong hệ nhị phân được $S = \underbrace{11...1}_{20 \text{ chữ số}}{}_{(2)}$ nên

$S + 1 = 1\underbrace{00...0}_{20 \text{ chữ số } 0}{}_{(2)}$. Trong hệ thập phân thì $S + 1 = 2^{20}$, vậy $S = 2^{20} - 1$.

MỘT SỐ VẤN ĐỀ LỊCH SỬ VỀ SỐ NGUYÊN TỐ

302. Xét dãy 10 số tự nhiên liên tiếp k, k + 1, ..., k + 9. Nếu k = 2 thì dãy chứa 5 số nguyên tố. Nếu k bằng 0, hoặc 1, hoặc 3 thì dãy chứa 4 số nguyên tố. Nếu $k \geqslant 4$ thì trong 10 số của dãy có 5 số chẵn lớn hơn 2, có 5 số lẻ liên tiếp lớn hơn 3 trong đó tồn tại một bội của 3, tức là có ít nhất 6 hợp số, nên có nhiều nhất 4 số nguyên tố.

Vậy 2, 3, 4, ..., 11 là mười số phải tìm.

303. Số nguyên tố lớn hơn 2 không có dạng 4n và 4n + 2, nên có dạng 4n + 1 hoặc 4n + 3.

304. Với p bằng 3, 5, 7 thì n là số nguyên tố. Với p = 9 thì $n = 171 \vdots 3$.

Chú ý : Với mọi số nguyên tố p ($3 \leqslant p \leqslant 31$), n đều là số nguyên tố.

305. Với n bằng 2, 3, 5, 7 thì M theo thứ tự bằng 3, 7, 31, 127, là các số nguyên tố. Với n = 11 thì M = 2047 = 23 . 89.

Chú ý. Với n bằng 2, 3, 5, 7, 13, 19, 31, 61 thì M là số nguyên tố. Có hay không có vô số số nguyên tố Mec - xen cũng như có hay không có vô số số nguyên tố Phec - ma, đó là những bài toán chưa có lời giải.

306. Bạn đọc tự giải.

307. a) 7 = 3 + 4, 8 = 3 + 5, 9 = 4 + 5, 10 = 3 + 7.

b) Xét hai trường hợp :

– Trường hợp n lẻ ($n = 2k + 1$, $k \in \mathbf{N}$) : Viết n dưới dạng $n = k + (k + 1)$. Do $n > 6$ nên $k + 1 > k > 1$. Sau đó chứng minh rằng $(k, k + 1) = 1$.

– Trường hợp n chẵn : Lại xét hai trường hợp :

Nếu $n = 4k$ ($k \in \mathbf{N}$) thì viết n dưới dạng :

$n = (2k - 1) + (2k + 1)$. Do $n > 6$ nên $k > 1 \Rightarrow 2k + 1 > 2k - 1 > 1$.

Sau đó chứng minh rằng $(2k - 1, 2k + 1) = 1$.

Nếu $n = 4k + 2$ ($k \in \mathbf{N}$) thì viết n dưới dạng :

$n = (2k - 1) + (2k + 3)$. Do $n > 6$ nên $k > 1 \Rightarrow 2k + 3 > 2k - 1 > 1$.

Sau đó chứng minh rằng $(2k - 1, 2k + 3) = 1$.

CÁC VẤN ĐỀ NÂNG CAO VỀ TÍNH CHIA HẾT, ƯỚC VÀ BỘI

308. a) Chứng minh rằng $\overline{8a5}$ chia hết cho 11, do đó $a = 2$.

b) Tổng chia hết cho 11. *Đáp số :* $49840 + 4984 = 54824$.

309. a) $(7 + 3) - (* + 5) \vdots 11$. *Đáp số :* $* = 5$.

b) $(4 + 9 + 8) - (* + 5) \vdots 11$. *Đáp số :* $* = 5$.

c) $(7 + * + 8) - (2 + 3 + 1) \vdots 11$. *Đáp số :* $* = 2$.

d) $\overline{x1994y} \vdots 8 \Rightarrow y = 4$.

$\overline{x19944} \vdots 11 \Rightarrow x = 1$.

e) $A = \overline{x1994y} \vdots 99 \Leftrightarrow A \vdots 11$ và $A \vdots 9$.

Từ $A \vdots 11$ tìm được $x - y = 8$ hoặc $y - x = 3$.

Từ $A \vdots 9$ tìm được $x + y = 4$ hoặc $x + y = 13$.

Ta chú ý rằng $x + y$ và $x - y$ phải cùng chẵn hoặc cùng lẻ.

Trường hợp $x - y = 8$; $x + y = 4$ loại.

Trường hợp $y - x = 3$; $y + x = 13$ cho ta $x = 5$; $y = 8$.

Đáp số : 519948.

310. Gọi $n = 192021 \ldots 7980$. Tính tổng các chữ số hàng chẵn (kể từ phải sang trái), ta được : $1 + (2 + 3 + \ldots + 7) . 10 + 8 = 279$. Tính tổng các chữ số hàng lẻ, được : $9 + (1 + 2 + \ldots + 9) . 6 = 279$. Do đó n chia hết cho 11.

Tổng các chữ số của n bằng : $279 . 2 = 558$, do đó n chia hết cho 9.

311. Ta biết rằng $\overline{abcd} \vdots 11 \Leftrightarrow (a + c) - (b + d) \vdots 11$.

Nếu đặt a và c ở vị trí hàng nghìn và hàng chục thì có 2 cách đặt a và c, có 2 cách đặt b và d nên có 2 . 2 = 4 (số) chia hết cho 11 (là $\overline{abcd}$, $\overline{adcb}$, $\overline{cbad}$, $\overline{cdab}$).

Nếu đặt b và d ở vị trí hàng nghìn và hàng chục thì cũng có 4 số nữa chia hết cho 11.

Vậy có thêm 7 số mới chia hết cho 11.

312. Số 19a có nhiều ước nhất.

313. Ta có $(x + 1)(y + 1) = 48$ và $x + y = 12$.

Đáp số : Số phải tìm là $2^5 . 3^7$.

314. $A \vdots 5$, $A \vdots 49$ nên A chứa các thừa số nguyên tố 5 và 7. Số 10 chỉ có một cách viết thành một tích của hai thừa số lớn hơn 1 là 5 . 2 (và không thể viết thành một tích của nhiều hơn hai thừa số lớn hơn 1). Do đó :

$$A = 5^x . 7^y \text{ với } x \geq 1 \ ; \ y \geq 2.$$

A có 10 ước nên : $(x + 1)(y + 1) = 10$.

Suy ra : $x + 1 = 2$; $y + 1 = 5$.

Vậy : $x = 1$; $y = 4$; $A = 5 . 7^4 = 12005$.

315. Ta biết rằng : Nếu số A phân tích ra thừa số nguyên tố được $a^x b^y c^z$... thì A có $(x + 1)(y + 1)(z + 1)$ ... ước.

Viết 6 thành một tích của một hay nhiều thừa số lớn hơn 1 ta được : 6 và 3 . 2. Xét các trường hợp :

a) A chứa một thừa số nguyên tố : A = a.

Do $x + 1 = 6$ nên $x = 5$. Do đó $A = a^5$. Chọn a nhỏ nhất là 2, ta có số nhỏ nhất trong trường hợp này là $2^5 = 32$.

b) A chứa hai thừa số nguyên tố : $A = a^x . b^y$

Do $x + 1 = 3$; $y + 1 = 2$ (giả sử $x \geq y$) ta được $x = 2$; $y = 1$. Do đó $A = a^2 b$. Để A nhỏ nhất ta chọn thừa số nguyên tố nhỏ ứng với số mũ lớn, ta có $2^2 . 3 = 12$.

So sánh hai trường hợp trên, ta thấy 12 < 32. Vậy số nhỏ nhất có 6 ước là 12.

316. a) Xét các dạng a^9 và a^4b.

Đáp số : Số nhỏ nhất là 48.

b) *Đáp số :* $2^6 . 3^2 = 576$.

c) *Đáp số :* $2^3 . 3 = 24$.

317. Gọi n là số nhỏ hơn 60. Trước hết ta tìm xem n có nhiều nhất là bao nhiêu ước. Xét bốn trường hợp :

a) n chứa một thừa số nguyên tố ($n = a^x$) : Xét 2^x (chọn a nhỏ nhất để được số mũ lớn nhất), ta thấy : $2^5 < 60 < 2^6$. Số 2^5 có 6 ước.

b) n chứa hai thừa số nguyên tố ($n = a^x . b^y$) : Xét $2^x . 3^y$ (chọn a, b nhỏ nhất để được số mũ lớn nhất), ta có :

$2^4 . 3 < 60 < 2^5 . 3$. Số $2^4 . 3$ có 10 ước.

$2^2 . 3^2 < 60 < 2^3 . 3^2$. Số $2^2 . 3^2$ có 9 ước.

$2 . 3^3 < 60 < 2^2 . 3^3$. Số $2 . 3^3$ có 8 ước.

c) n chứa ba thừa số nguyên tố : Xét $2^x . 3^y . 5^z$ ta có :

$2 . 3 . 5 < 60 = 2^2 . 3 . 5$. Số 2 . 3 . 5 có 8 ước.

d) n chứa bốn thừa số nguyên tố trở lên : Không xảy ra trường hợp này vì $2 . 3 . 5 . 7 > 60$.

Như vậy n có nhiều nhất là 10 ước, khi đó n chứa hai thừa số nguyên tố.

Bây giờ ta tìm tất cả các số có 10 ước. Vì 10 = 5 . 2 nên $n = a^4 . b$. Ta đã có $2^4 . 3 = 48$ thoả mãn bài toán, còn $2^4 . 5 > 60$.

Vậy trong các số nhỏ hơn 60 thì số 48 là số duy nhất có nhiều ước nhất (có 10 ước).

318. a) 1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56.

b) Gọi các ước của n là $d_1, d_2, ..., d_k$ thì $\frac{n}{d_1}, \frac{n}{d_2}, ..., \frac{n}{d_k}$ là tất cả các ước của n. Ta có : $d_1 + d_2 + ... + d_k = 2n$ nên $\frac{n}{d_1} + \frac{n}{d_2} + ... + \frac{n}{d_k} = 2n$, do đó $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + ... + \frac{1}{d_k} = 2$.

c) Số n = 2p có 4 ước là 1, 2, p, 2p. Do n là số hoàn chỉnh nên 2n = 1 + 2 + p + 2p (1). Thay n = 2p vào (1) được 4p = 3 + 3p, do đó p = 3, n = 6.

Với $n = 2^2p$ ta có đáp số n = 28.

Với $n = 2^4p$ ta có đáp số n = 496.

Chú ý : Người ta chứng minh được rằng nếu $2^n - 1$ là số nguyên tố thì $2^{n-1}(2^n - 1)$ là số hoàn chỉnh (1). Ví dụ các số sau là số hoàn chỉnh : $2(2^2 - 1) = 6$, $2^2(2^3 - 1) = 28$, $2^4(2^5 - 1) = 496$,...

Số nguyên tố dạng $2^n - 1$ gọi là số nguyên tố Mec - xen (xem bài tập 305). Ơ - le đã chứng minh rằng số hoàn chỉnh chẵn có dạng (1) và chỉ có dạng đó. Cho đến nay người ta chưa biết rằng có tồn tại số hoàn chỉnh lẻ hay không.

319. Số $220 = 2^2 . 5 . 11$ có 12 ước, tổng các ước của 220 không kể chính nó bằng 284 (bạn đọc tự tính).

Số $284 = 2^2 . 71$ có 6 ước, tổng các ước của 284 không kể chính nó bằng 220.

Chú ý : Cặp số 220 và 284 có tính chất : Số này bằng tổng các ước của số kia (không kể chính số ấy). Người ta gọi cặp số như vậy là cặp số bạn bè (hoặc cặp số thân mật) Cặp số bạn bè nhỏ nhất là 220 và 284, tiếp theo là 1184 và 1210.

320. Gọi các ước của n theo thứ tự lớn dần là $d_1, d_2, ..., d_{54}$.

Ta có $d_1.d_{54} = d_2.d_{53} = ... = d_{27}.d_{28} = n$. Do đó tích các ước của n bằng n^{27}.

321. a) Số lượng các ước của n là số lẻ nên n là số chính phương (xem chuyên đề *Số chính phương*), vậy $n = a^2$ $(a \in \mathbf{N})$.

b) Gọi các ước của n theo thứ tự tăng dần là $d_1, d_2, ..., d_{39}$. Ta có $d_1.d_{39} = d_2.d_{38} = ... = d_{19}.d_{21} = n = a^2$, còn $(d_{20})^2 = n = a^2$ nên $d_{20} = a$. Vậy $d_1d_2... d_{39} = a^{38}.a = a^{39}$.

322. Chứng minh rằng $(a - 1)(a + 4)$ chia hết cho 2 và chia hết cho 3.

323. Gọi bốn số tự nhiên liên tiếp là n, $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$. Chứng minh rằng tích $n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$ chia hết cho 3 và chia hết cho 8.

324. Gọi ba số chẵn liên tiếp là $2a$, $2a + 2$, $2a + 4$ $(a \in \mathbf{N})$. Xét tích :

$$2a(2a + 2)(2a + 4) = 8a(a + 1)(a + 2).$$

Chứng minh rằng $a(a + 1)(a + 2)$ chia hết cho 3 và chia hết cho 2.

325. a) Gọi số lớn là $a = 4k$ $(k \in \mathbf{N})$. Do số nhỏ là $8 = 4 . 2$ nên $k > 2$ và $(k, 2) = 1$. Vậy $k = 2n + 1$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ do đó số lớn có dạng $4(2n + 1)$.

b) *Đáp số :* 16 hoặc 80.

326. a) Gọi hai số phải tìm là a và b, ta có : $a - b = 84$, $a = 28a'$, $b = 28b'$ trong đó $(a', b') = 1$, suy ra $a' - b' = 3$.

Do $300 \leqslant b < a \leqslant 400$ nên $11 \leqslant b' < a' \leqslant 15$.

Trường hợp $a' = 15$, $b' = 12$ loại vì trái với $(a', b') = 1$.

Trường hợp $a' = 14$, $b' = 11$ cho $a = 392$, $b = 308$.

b) Có vô số đáp số : $a = 12a'$, $b = 12b'$ với $a' = 2n + 5$, $b' = 2n + 1$ $(n \in \mathbf{N})$.

327. a) *Đáp số :* (120, 6), (30, 24).

b) Có 4 cặp số : (3, 1350), (6, 675), (27, 150), (54, 75).

328. a) Gọi hai số phải tìm là a và b.

$$\text{ƯCLN}(a, b) = \frac{a . b}{\text{BCNN}(a, b)} = \frac{2700}{900} = 3$$

$$\text{ƯCLN}(a, b) = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3a' \\ b = 3b' \\ (a', b') = 1 \end{cases}$$

Theo đề bài : a.b = 2700

nên $3a' . 3b' = 2700$

suy ra $a' . b' = 300 = 2^2 . 3 . 5^2$.

Giả sử a ≥ b thì a' ≥ b'. Chọn hai số a', b' có tích bằng 300, nguyên tố cùng nhau, a' ≥ b', ta được :

a'	300	100	75	25
b'	1	3	4	12

Suy ra :

a	900	300	225	75
b	3	9	12	36

Đáp số : 900 và 3 ; 300 và 9 ; 225 và 12 ; 75 và 36.

b) *Đáp số :* 900 và 10 ; 450 và 20 ;

180 và 50 ; 100 và 90.

329. Gọi số phải tìm là x, thì [14, x] = 770. Ta có : 770 = x . k (k ∈ **N**), 770 = 14 . 55, (k, 55) = 1, do đó k là ước của 14.

Vậy k bằng : 1, 2, 7, 14, tương ứng x bằng : 770, 385, 110, 55.

330. a) (a, b) = ab : [a, b] = 360 : 60 = 6.

Đặt a = 6a', b = 6b' trong đó (a', b') = 1, a' ≤ b' (giả sử a ≤ b).

Do ab = 360 nên a'b' = 10. Vậy a' = 1, b' = 10 hoặc a' = 2, b' = 5.

Tương ứng ta có : a = 6, b = 60 hoặc a = 12, b = 30.

b) ƯCLN (a, b) = 12 $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 12a' \\ b = 12b' \\ (a', b') = 1 \end{cases}$

Ta có : a.b = ƯCLN(a, b).BCNN(a, b) = 12 . 72

nên $12a' . 12b' = 12 . 72$

suy ra $a'b' = 6$.

Giả sử a ≥ b thì a' ≥ b'. Chọn hai số a', b' có tích bằng 6, nguyên tố cùng nhau, a' ≥ b', ta được :

a'	6	3
b'	1	2

Do đó :

a	72	36
b	12	24

Đáp số : 72 và 12 ;

36 và 24.

c) *Đáp số :* 180 và 6 ; 90 và 12 ;

60 và 18 ; 36 và 30.

d) *Đáp số :* 8 cặp (15, 31500), (45, 10500), (60, 7875), (105, 4500), (180, 2625), (315, 1500), (375, 1260), (420, 1125).

e) Gọi d = (a, b) thì d . [a, b] = a . b = 180 do đó d . 20 . d = 180 suy ra d = 3.

Đáp số : 2 cặp : (3, 60) và (12, 15).

331. a) Gọi a = da', b = db', (a', b') = 1. Ta có :

$[a, b] = \dfrac{ab}{d} = da'b'$. Theo đề bài, ta có : da'b' + d = 55 hay d(a'b' + 1) = 55.

Như vậy a'b' + 1 là ước của 55, mặt khác a'b' + 1 $\geqslant$ 2.

Ta có lần lượt :

d	a'b' + 1	a'b'	a'	b'	a	b
11	5	$4 = 2^2$	1	4	11	44
5	11	10 = 2 . 5	1	10	5	50
			2	5	10	25
1	55	$54 = 2 . 3^3$	1	54	1	54
			2	27	2	27

b) Giải tương tự câu a) ta được : d(a'b' – 1) = 5. Từ đó :

d	a'b' – 1	a'b'	a'	b'	a	b
1	5	6	6	1	6	1
			3	2	3	2
5	1	2	2	1	10	5

c) Có 6 cặp số (1, 36), (4, 9), (5, 40), (7, 42), (14, 21), (35, 70).

332. Gọi (a, b) = d thì a = da', b = db', (a', b') = 1, do đó $ab = d^2a'b' \Rightarrow d . 6d = d^2a'b' \Rightarrow a'b' = 6$. Giả sử a $\leqslant$ b thì a' $\leqslant$ b', ta có a' = 1, b' = 6 hoặc a' = 2, b' = 3.

Chú ý rằng a + b = d(a' + b') nên 30 = d(a' + b') do đó a' + b' là ước của 30. Vì thế loại trường hợp a' = 1, b' = 6. Trường hợp a' = 2, b' = 3 cho ta d = 6, a = 12, b = 18.

Cặp số phải tìm là 12 và 18.

333. Gọi tuổi của Hoàng là a, năm sinh là b thì a + b = 2010, [a, b] = 133(a, b). Giải như bài trên. Hoàng sinh năm 1995.

334. Gọi hai số phải tìm là a và b (giả sử a < b) Ta có (a, b) = 12 nên a = 12a', b = 12b', (a', b') = 1, a' < b'.

Ta cũng có $[a, b] = ab : (a, b) = 12a'b'$.

Theo đề bài $a \neq 12$, $b \neq 12$ nên $b' > a' > 1$, $[a, b] < 100$ nên $a'b' \leqslant 8$.

Nếu $a' \geqslant 3$ thì $b' \geqslant 4$, do đó $a'b' \geqslant 12$, loại. Vậy $a' = 2$.

Xét $b' \geqslant 5$ thì $a'b' \geqslant 10$, loại, còn $b' = 4$ thì $(a', b') = 2$, loại.

Vậy $b' = 3$.

Do đó $a = 24$, $b = 36$. Còn $(a, b) = 12$, $[a, b] = 72$.

335. a) Ta thấy $b - 8a = 9$. Gọi $d \in ƯC(a, b)$ thì $9 \vdots d$. Mặt khác, a và b cùng chia hết cho 9. Vậy $(a, b) = 9$.

b) $[a, b] = \dfrac{ab}{9}$. Ta thấy $\dfrac{a}{9} = 13717421$, số này có dạng bội 11 + 3, còn b có dạng bội 11 + 5. Do đó $[a, b] = \dfrac{a}{9} \cdot b$ có dạng (bội 11 + 3)(bội 11 + 5) = bội 11 + 4.

336. a) 1 ; b) 1111.

337. a) Hiệu hai số 123456798 và 123456789 bằng 9, nên ƯCLN phải tìm chỉ có thể là 1, 3, 9. Chú ý rằng mọi số có chín chữ số gồm các chữ số từ 1 đến 9 đều chia hết cho 9. Vậy ƯCLN phải tìm bằng 9.

b) ƯCLN phải tìm bằng 3.

338. a) Gọi $d \in ƯC\,(7n + 10, 5n + 7)$ thì

$5(7n + 10) - 7(5n + 7) \vdots d \Rightarrow 1 \vdots d \Rightarrow d = 1$.

b) Gọi d là ƯCLN$(2n + 3, 4n + 8)$.

$(4n + 8) - 2(2n + 3) \vdots d \Rightarrow 2 \vdots d$.

Do d là ước của số lẻ $2n + 3$ nên $d = 1$.

339. a) Gọi $d \in ƯC(b, a - b)$ thì $a - b \vdots d$, $b \vdots d$, do đó $a \vdots d$. Ta có $(a, b) = 1$ nên $d = 1$.

b) Giả sử $a^2 + b^2$ và ab cùng chia hết cho số nguyên tố d thì vô lí.

340. Giả sử ab và c cùng chia hết cho số nguyên tố d thì vô lí.

341. a) $\quad 4n - 5 \vdots 13$

$\Rightarrow 4n - 5 + 13 \vdots 13$

$\Rightarrow 4n + 8 \vdots 13$

$\Rightarrow 4(n + 2) \vdots 13$.

Do $(4, 13) = 1$ nên $n + 2 \vdots 13$.

Đáp số : $n = 13k - 2$ ($k \in \mathbf{N}^*$).

b) *Đáp số :* $n = 7k - 3$ ($k \in \mathbf{N}^*$).

c) $25n + 3 \vdots 53 \Rightarrow 25n + 3 - 53 \vdots 53$.

Đáp số : $n = 53k + 2$ ($k \in \mathbf{N}$).

342. a) n không chia hết cho 3.

b) n là số chẵn.

c) n là số lẻ.

d) Giả sử $18n + 3$ và $21n + 7$ cùng chia hết cho số nguyên tố d thì $6(21n + 7) - 7(18n + 3) \vdots d \Rightarrow 21 \vdots d$.

Vậy $d \in \{3 ; 7\}$.

Hiển nhiên $d \neq 3$ vì $21n + 7$ không chia hết cho 3. Như vậy $(18n + 3, 21n + 7) \neq 1$ $\Leftrightarrow 18n + 3 \vdots 7$ (còn $21n + 7$ luôn chia hết cho 7) $\Leftrightarrow 18n + 3 - 21 \vdots 7 \Leftrightarrow 18(n - 1) \vdots 7$ $\Leftrightarrow n - 1 \vdots 7$.

Vậy nếu $n \neq 7k + 1$ ($k \in \mathbf{N}$) thì $(18n + 3, 21n + 7) = 1$.

343. Bài toán không yêu cầu tìm mọi giá trị của n mà chỉ cần chỉ ra vô số giá trị của n để $(n + 15, n + 72) = 1$. Do đó ngoài cách giải như ở bài trên, có thể giải như sau :

Gọi $d \in ƯC(n + 15, n + 72)$ thì $57 \vdots d$. Do $n + 15 \vdots d$, $57 \vdots d$ nên nếu tồn tại n sao cho $n + 15 = 57k + 1$ thì $d = 1$. Nếu ta chọn $n = 57k - 14$ ($k = 1, 2, 3, ...$) thì $(n + 15, n + 72) = 1$, rõ ràng có vô số giá trị của n.

344. a) 2.

b) ƯCLN $(\overline{ab} + \overline{ba}, 33)$ bằng 33 nếu $a + b \vdots 3$, bằng 11 trong trường hợp còn lại.

345. a) ƯCLN $(a + b, a - b)$ bằng 2 nếu a và b cùng lẻ, bằng 1 nếu trong a và b có một số chẵn, một số lẻ.

b) 1 hoặc 29.

346. $(7n + 3, 8n - 1)$ bằng 1 hoặc 31.

Nếu $n \neq 31k + 4$ ($k \in \mathbf{N}$) thì $(7n + 3, 8n - 1) = 1$.

Với $40 < n < 90$, ta có $n = 66$ thì $(7n + 3, 8n - 1) = 31$.

347. Ta có $X = \overline{abb} = 100a + 11b$ chia hết cho 7. Cần chứng minh $Y = a + 2b$ chia hết cho 7. Xét $3X + Y$.

348. Đặt $3a + 2b = x$; $10a + b = y$. Cần chứng minh $y \vdots 17$.

Có thể xét các biểu thức : $2y - x$, $8x + y$, $9x - y$, $10x - 3y$, ...

349. Đặt $a - 5b = x$; $10a + b = y$.

Có thể xét các biểu thức : $y - 10x$, $x + 5y$, ...

350. Điều ngược lại ở hai câu a) và b) đều đúng.

a) Xét $2(3x + 5y) + (x + 4y)$.

b) Xét $4(2x + 3y) + (9x + 5y)$.

351. Cho $\overline{abc} \vdots 37$, chứng minh rằng $\overline{bca}$, $\overline{cab}$ cũng chia hết cho 37.

352. Ta có $X = \overline{abcdeg} = 100000a + n$ chia hết cho 7(với $n = \overline{bcdeg}$). Cần chứng minh rằng $Y = \overline{bcdega} = 10n + a$ chia hết cho 7.

Có thể giải bằng nhiều cách : xét $4X + Y$, hoặc $3X - Y$, hoặc $10X - Y$ ...

Chú ý : a) Từ bài toán trên, ta có bài toán sau : Cho sáu chữ số xếp thành vòng tròn. Biết rằng đọc từ một chữ số nào đó theo chiều kim đồng hồ, ta được một số có sáu chữ số chia hết cho 7. Chứng minh rằng đọc từ một chữ số bất kì theo chiều kim đồng hồ, ta cũng được số sáu chữ số chia hết cho 7.

b) Khi xét $10X - Y$, ta được $999999a$, số này chia hết cho 7, 11, 13, 37. Do đó bài toán cũng đúng nếu thay 7 bởi 11, 13 hoặc 37.

353. a) Xem chú ý a và b của bài trên.

b) Ta có $\overline{abcdeg} \vdots 37 \Leftrightarrow \overline{abc} + \overline{deg} \vdots 37$ (dễ chứng minh)

$\Leftrightarrow 100(a + d) + 10(b + e) + (c + g) \vdots 37$.

Như vậy đổi chỗ a và d, ta vẫn được số chia hết cho 37. Đổi chỗ b và e, hoặc c và g, ta cũng vẫn được số chia hết cho 37.

Nhận xét : Nếu $\overline{abcdeg} \vdots 37$ thì đổi chỗ a và d, hoặc b và e, hoặc c và g, số mới vẫn chia hết cho 37. Ta có tất cả $2 . 2 . 2 = 8$ số chia hết cho 37.

Theo câu a, các số $\overline{bcdega}$ và $\overline{cdegab}$ cũng chia hết cho 37. Như vậy ta có thêm 16 số nữa cũng chia hết cho 37.

Do đó nếu số $\overline{abcdeg}$ chia hết cho 37 thì bằng cách đổi chỗ các chữ số, ta có thêm 23 số nữa cũng chia hết cho 37.

(Chú ý rằng khi hoán vị vòng quanh các chữ số của số $\overline{abcdeg}$ được hai dạng bcdega và cdegab, ta không kể tiếp ba dạng degabc, egabcd, gabcde vì ba dạng này trùng với dạng khi đổi chỗ a và d, b và e, c và g của số ban đầu).

354. a) $\overline{4x77} \vdots 13 \Rightarrow 4077 + 100x \vdots 13$

$\Rightarrow 4069 + 104x + 8 - 4x \vdots 13 \Rightarrow 4(2 - x) \vdots 13 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 2$. Số 4277 chia hết cho 13.

b) Số $\overline{2x43y5} \vdots 1375$ nên cần chia hết cho 125 (tìm được $y = 7$), chia hết cho 11 (tìm được $x = 5$).

c) 579915, 579600, 579285.

355. a) 858, 363.

b) $a + b \vdots 7$. Có 11 đáp số : 61 + 16, 52 + 25, 43 + 34, 95 + 59, 86 + 68 (và các hoán vị của các tổng trên), 77 + 77.

c) 96 + 69, 87 + 78 (và các hoán vị của các tổng trên).

356. a) $11.2x \vdots 2x - 1$ mà $(2x, 2x - 1) = 1$ nên $11 \vdots 2x - 1$.

Đáp số : $x = 1$, $x = 6$.

b) $x = 19$, $y = 38$.

357. Đó là số gồm 300 chữ số 1.

358. Chú ý rằng tổng các chữ số hàng lẻ của A bằng n và tổng các chữ số của A cũng bằng n.

a) n chia hết cho 99.

b) So với trường hợp a, cần thêm điều kiện $A \vdots 101$, do đó cần thêm điều kiện n chẵn. Vậy n phải chia hết cho 198.

359. $36x \vdots 45 \Rightarrow 4x \vdots 5$, $45x \vdots 36 \Rightarrow 5x \vdots 4$, vậy $x = 20k$ ($k = 1, 2, 3, ...$). Theo đề bài $36 . 45 \vdots 20k$ nên $81 \vdots k$.

Đáp số : 20, 60, 180, 540, 1620.

360. Một số chia hết cho 7, 11, 13 khi và chỉ khi hiệu của số tạo bởi ba chữ số tận cùng và số nghìn là số chia hết cho 7, 11, 13.

361. Một số chia hết cho 7 khi và chỉ khi hiệu của số chục và 2 lần chữ số đơn vị là số chia hết cho 7.

Chứng minh : Gọi số chục là n, chữ số đơn vị là a.

Ta có $X = 10n + a$, $Y = n - 2a$.

Xét $2X + Y = 20n + 2a + n - 2a = 21n \vdots 7$ (1).

Nếu $Y \vdots 7$ thì từ (1) suy ra $2X \vdots 7$, do đó $X \vdots 7$.

Nếu $X \vdots 7$ thì từ (1) suy ra $Y \vdots 7$.

362. $\overline{abcdeg} = 100000a + 10000b + 1000c + 100d + 10e + g =$

$= 100002a - 2a + 10003b - 3b + 1001c - c + 98d + 2d +$

$+ 7e + 3e + g =$ bội $7 - 2a - 3b - c + 2d + 3e + g$.

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

363. Giả sử $2n = a^2$ (1), $3n = b^3$ (2) ; $a, b \in \mathbf{N}$.

Từ (1) : $a^2 \vdots 2 \Rightarrow a \vdots 2 \Rightarrow a^2 \vdots 4 \Rightarrow 2n \vdots 4 \Rightarrow n \vdots 2$.

Từ (2) : $b^3 \vdots n \Rightarrow b^3 \vdots 2 \Rightarrow b \vdots 2 \Rightarrow b^3 \vdots 8 \Rightarrow 3n \vdots 8$.

Do $(3, 8) = 1$ nên $n \vdots 8$ (3)

Từ (2) : $b^3 \vdots 3 \Rightarrow b \vdots 3 \Rightarrow b^3 \vdots 27 \Rightarrow n \vdots 9$ (4)

Từ (3) và (4) : $n \vdots 72$. Do n có hai chữ số nên $n = 72$.

$2 . 72 = 144 = 12^2$; $3 . 72 = 216 = 6^3$.

364. Ta thấy n phải chia hết cho 2, cho 3, cho 5.

Đặt $n = 2^x.3^y.5^z$. Khi đó :

$$n : 2 = 2^{x-1} . 3^y . 5^z = a^2 \quad (1)$$

$$n : 3 = 2^x . 3^{y-1} . 5^z = b^3 \quad (2)$$

$$n : 5 = 2^x . 3^y . 5^{z-1} = c^5 \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta thấy :

$x - 1 \vdots 2$, $x \vdots 3$, $x \vdots 5$. Để x nhỏ nhất ta chọn $x = 15$.

$y \vdots 2$, $y - 1 \vdots 3$, $y \vdots 5$. Để y nhỏ nhất ta chọn $y = 10$.

$z \vdots 2$, $z \vdots 3$, $z - 1 \vdots 5$. Để z nhỏ nhất ta chọn $z = 6$.

Vậy $n = 2^{15} . 3^{10} . 5^6$.

365. *Đáp số :* 24 và 25 ; 75 và 76.

366. Gọi số phải tìm là n, ta có $n^2 - n \vdots 100$ nên

$$n(n - 1) \vdots 100 \ (10 \leqslant n \leqslant 99).$$

Đáp số : $n = 25$, $n = 76$.

367. Gọi hai số tự nhiên liên tiếp phải tìm là n và n + 1.

Xét hai trường hợp :

a) $n \vdots 125$ và $n + 1 \vdots 8$.

n là số lẻ có ba chữ số và chia hết cho 125 nên

$$n \in \{125 ; 375 ; 625 ; 875\}.$$

Khi đó $n + 1 \in \{126 ; 376 ; 626 ; 876\}$. Trong các số trên, chỉ có $376 \vdots 8$.

Hai số phải tìm là 375 và 376.

b) $n + 1 \vdots 125$ và $n \vdots 8$.

n + 1 là số lẻ có ba chữ số và chia hết cho 125 nên

$$n + 1 \in \{125 ; 375 ; 625 ; 875\}.$$

Khi đó $n \in \{124 ; 374 ; 624 ; 874\}$. Trong các số trên, chỉ có $624 \vdots 8$. Hai số phải tìm là 624 và 625.

Kết luận : Có hai đáp số : 375 và 376 ;

624 và 625.

368. Gọi hai số tự nhiên phải tìm là n và n + 1, ta có

$$n(n + 1) \vdots 1000.$$

Có 3 đáp số : 999 và 1000, 375 và 376, 624 và 625.

369. $n^2 - n \vdots 1000$ hay $n(n - 1) \vdots 1000$. Trường hợp $n \vdots 125$, $n - 1 \vdots 8$ cho $n = 625$. Trường hợp $n - 1 \vdots 125$, $n \vdots 8$ cho $n = 376$.

370. Đặt MÙI = n, ta có $n^2 = 1000 . \text{TÂN} + n$ hay $n^2 - n \vdots 1000$, tức là $n(n - 1) \vdots 1000$.

Giải tương tự bài trên, ta có đáp số : 625 . 625 = 390625.

371. Gọi A là số phải tìm, B là số viết từ A theo thứ tự ngược lại. Theo đề bài thì A và B đều tận cùng khác 0.

Tích A.B $\vdots$ 100 mà A và B tận cùng khác 0 nên trong A và B phải có một số chia hết cho 25, số kia chia hết cho 4.

Giả sử A $\vdots$ 25 thì A có dạng $\overline{a25}$, $\overline{a75}$. Tương ứng B có dạng $\overline{52a}$, $\overline{57a}$. Do B phải chia hết cho 4 nên B = 524, 528, 572, 576.

372. Gọi (a, b) = d, [a, b] = m, cần chứng minh

$$(a + b, m) = d \ (1).$$

Ta có a = da', b = db', (a', b') = 1 nên a + b = d(a' + b') (2).

Ta cũng có $m = \dfrac{ab}{d} = da'b'$ (3).

Nhận xét (2) và (3), ta thấy rằng để chứng minh (1), chỉ cần chứng minh (a' + b', a'b') = 1. Hãy chứng tỏ rằng nếu a' + b' và a'b' có ước nguyên tố là p thì sẽ mâu thuẫn với (a', b') = 1.

373. *Cách 1.* $n - 7 \vdots 30 \Rightarrow n + 23 \vdots 30$, $n - 17 \vdots 40 \Rightarrow$

$\Rightarrow n + 23 \vdots 40$. Vậy $n + 23 \vdots 120$. Do đó $n = 120k - 23$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

Cách 2. $n - 7 \vdots 30$, $n - 17 \vdots 40 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4(n - 7) - 3(n - 17) \vdots 120 \Rightarrow n + 23 \vdots 120$.

374. Gọi số phải tìm là n, ta có $n = 29x + 5 = 31y + 28$ ($x, y \in \mathbf{N}$) $\Rightarrow$ $29x = 29y + 2y + 23 \Rightarrow 2y + 23 \vdots 29$. Để n nhỏ nhất, ta chọn y nhỏ nhất, vậy y = 3. Khi đó n = 121.

375. Gọi n là số phải tìm thì $n - 4 \vdots 125$, mặt khác n là số lẻ, do đó n − 4 có tận cùng bằng 125, 375, 625, 875. Suy ra n có tận cùng bằng 129, 379, 629, 879. Kiểm tra tiếp điều kiện n chia cho 8 dư 7, ta được n là số có tận cùng bằng 879.

Có 9 số thoả mãn đề bài là 1879, 2879, ..., 9879.

376. a) $70 . 1 + 21 . 2 + 15 . 6 \pm$ bội $105 = 202 \pm$ bội 105.

Đáp số : 2302.

b) Gọi số quân là n.

$n = 3x + a \Rightarrow 70n = 210x + 70a$ (1)

$n = 5y + b \Rightarrow 21n = 105y + 21b$ (2)

$n = 7z + c \Rightarrow 15n = 105z + 15c$ (3)

Cộng (1), (2), (3) được $106n = 70a + 21b + 15c$ + bội 105 suy ra

$n = 70a + 21b + 15c \pm$ bội 105.

SỐ CHÍNH PHƯƠNG

377. a) Ta biết rằng số chính phương chia hết cho 3 thì phải chia hết cho 9. A chia hết cho 3, nhưng chia cho 9 dư 3, do đó A không là số chính phương.

b) B tận cùng bằng 3 nên không là số chính phương.

c) Không là số chính phương vì tận cùng bằng 8.

d) Không là số chính phương vì tận cùng bằng 7.

e) $10^{10} + 5$ chia hết cho 5 nhưng không chia hết cho 25 nên không là số chính phương.

g) $10^{100} + 10^{50} + 1$ chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9 nên không là số chính phương.

378. a) Số chính phương tận cùng bằng 0 phải chứa thừa số nguyên tố 2 và 5 với số mũ chẵn, do đó nó phải tận cùng bởi một số chẵn chữ số 0. Vậy A không là số chính phương.

b) Biến đổi $B = 2001^{2001} = (2001^{1000})^2 . 2001$.

Số 2001 không là số chính phương (vì nó chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9). Vậy B không là số chính phương.

379. a) $n^2 = \overline{abab} = 101 . \overline{ab} \Rightarrow \overline{ab} \; \vdots \; 101$, vô lí.

b) $n^2 = \overline{abcabc} = 1001 . \overline{abc} = 7 . 11 . 13 . \overline{abc} \Rightarrow \overline{abc} \; \vdots \; 1001$, vô lí.

c) $n^2 = \overline{ababab} = \overline{ab} . 10101 = \overline{ab} . 3 . 7 . 13 . 37 \Rightarrow \overline{ab} \; \vdots \; 10101$, vô lí.

380. $A = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 111a + 111b + 111c$

$$= 3 . 37 . (a + b + c).$$

Ta biết rằng số chính phương phải chứa thừa số nguyên tố với số mũ chẵn, do đó $a + b + c$ phải bằng $37k^2$ ($k \in \mathbf{N}$). Điều này vô lí vì $3 \leqslant a + b + c \leqslant 27$.

Vậy A không là số chính phương.

381. Số chính phương không tận cùng bằng 2, bằng 3.

Số chính phương tận cùng bằng 0 thì phải tận cùng bằng 00.

Do đó số chính phương n^2 lập bởi bốn chữ số 0, 2, 3, 4 phải tận cùng bằng 4.

Số chính phương chia hết cho 2 thì phải chia hết cho 4, do đó n^2 tận cùng bằng 04 hoặc 24. Xét các số 2304, 3204, 3024 ta thấy :

$$2304 = 48^2 ;$$

$$54^2 = 2916 < 3024 < 3025 = 55^2 ;$$

$$56^2 = 3136 < 3204 < 3249 = 57^2.$$

Vậy số chính phương phải tìm là 2304.

382. *Đáp số :* $2704 = 52^2$.

383. Đáp số : $3025 = 55^2$.

384. Không, vì số mới tạo thành chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9.

385. Không, lí do như bài trên.

386. a) Tổng các chữ số của A bằng 903 nên $A \vdots 3$, do đó là hợp số.

b) A chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9 nên không là số chính phương.

c) A không là số chính phương nên số lượng các ước của A không thể là số lẻ.

387. Tổng các chữ số của mỗi số lập được là 15, chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9, nên mỗi số lập được đều không là số chính phương. Các số đó cũng không chia hết cho 11 vì tổng các chữ số của mỗi số là số lẻ.

388. Ta có $10 \leqslant n \leqslant 99$ nên $21 \leqslant 2n + 1 \leqslant 199$. Tìm số chính phương lẻ $(2n + 1)$ trong khoảng trên được 25, 49, 81, 121, 169. Tương ứng số n bằng 12, 24, 40, 60, 84, số $3n + 1$ bằng 37, 73, 121, 181, 253, chỉ có 121 là số chính phương. *Đáp số :* $n = 40$.

389. *Đáp số :* 20, 45, 80.

390. a) Gọi tổng các chữ số của số n và của số 2n bằng k, ta có $n - k \vdots 9$, $2n - k \vdots 9$, do đó $(2n - k) - (n - k) \vdots 9$ tức là $n \vdots 9$.

b) Số chính phương phải tìm chia hết cho 5, cho 9 và có ba chữ số. Có hai đáp số : 225 và 900.

391. Gọi số phải tìm là $\overline{ab}$, ta có $\overline{ab} + \overline{ba} = n^2$ $(n \in \mathbf{N})$.

$\Rightarrow 11a + 11b = n^2 \Rightarrow 11(a + b) = n^2 \Rightarrow a + b \vdots 11 \Rightarrow a + b = 11$.

Có 8 đáp số : 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92.

392. Giả sử $n^2 = \overline{(a + 1)a(a + 2)(a + 3)}$. Chữ số tận cùng $a + 3$ của số chính phương chỉ có thể bằng 4, 5, 6, 9.

Tương ứng ta có n^2 bằng 2134, 3245, 4356, 7689.

Chỉ có $4356 = 66^2$, còn ba trường hợp kia bị loại.

393. Số $5n + 4$ tận cùng bằng 4 hoặc 9. Xét hai trường hợp :

a) Trường hợp $5n + 4$ tận cùng bằng 4 thì $(5n + 4)^2$ tận cùng bằng 6. Cần tìm số có dạng $\overline{6 * * 6}$ là bình phương của một số tận cùng bằng 4. Không có số nào thoả mãn điều kiện trên vì

$$74^2 = 5476 < \overline{6 * * 6} < 7056 = 84^2.$$

b) Trường hợp $5n + 4$ tận cùng bằng 9 thì $(5n + 4)^2$ tận cùng bằng 1. Cần tìm số có dạng $\overline{1 * * 1}$ là bình phương của một số tận cùng bằng 9. Ta thấy $29^2 = 841 < \overline{1 * * 1} < 2401 = 49^2$, còn $39^2 = 1521$.

Vậy số chính phương phải tìm là 1521.

394. Đặt $C = \underbrace{11\ldots1}_{\text{50 chữ số}}$ thì $B = 2C$, còn $A = \underbrace{11\ldots1}_{\text{50 chữ số}}\underbrace{00\ldots0}_{\text{50 chữ số}} + \underbrace{11\ldots1}_{\text{50 chữ số}} =$

$= C.10^{50} + C$. Do đó $A - B = C.10^{50} + C - 2C = C.10^{50} - C =$

$= C(10^{50} - 1)$. Ta lại có $10^{50} - 1 = \underbrace{99\ldots9}_{\text{50 chữ số}} = 9C$.

Vậy $A - B = C\,.\,9C = 9C^2 = (3C)^2 = (\underbrace{33\ldots3}_{\text{50 chữ số}})^2$, là số chính phương.

395. Với $n = 1$ thì $1! = 1 = 1^2$.

Với $n = 2$ thì $1! + 2! = 3$, không là số chính phương.

Với $n = 3$ thì $1! + 2! + 3! = 9 = 3^2$.

Với $n \geq 4$ thì $1! + 2! + \ldots + n!$ tận cùng bằng 3 nên không là số chính phương (Thật vậy $1! + 2! + 3! + 4! = 33$, còn $5!, 6!, \ldots$ đều tận cùng bằng 0).

Có hai đáp số : $n = 1$, $n = 3$.

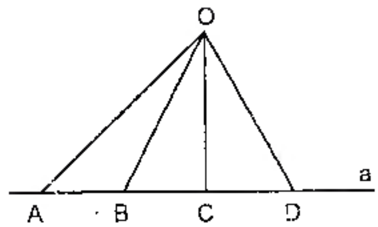
HÌNH HỌC

1. Bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc đường thẳng BC.

2. (h. 23).

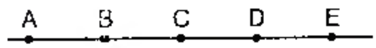
a) Ba điểm A, B, D cùng thuộc đường thẳng BC.

b) Các đường thẳng AB, AC, AD, BC, BD, CD trùng nhau, kí hiệu là đường thẳng a. Có năm đường thẳng : OA, OB, OC, OD và a.



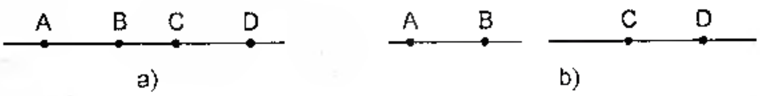
Hình 23

3. (h. 24). Điểm C nằm giữa hai điểm A và D, A và E, B và D, B và E.



Hình 24

4. Trong ba điểm thẳng hàng, có một và chỉ một điểm nằm giữa hai điểm còn lại. Điểm A không nằm giữa hai điểm còn lại, điểm B không nằm giữa hai điểm còn lại, vậy điểm C nằm giữa hai điểm còn lại.



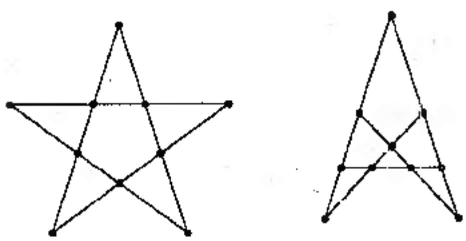
Hình 25

5. Hình 25 b) thoả mãn đề bài nhưng D không nằm giữa B và C.

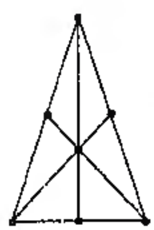
6. a) Xem hình 26.

b) Xem hình 27.

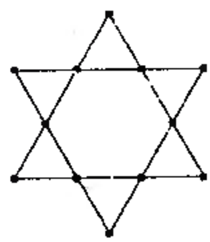
c) Xem hình 28.



Hình 26



Hình 27



Hình 28

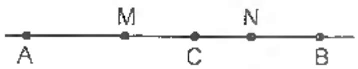
7. (h. 29).

a) Có 8 tia, có 6 đoạn thẳng.

b) Có 4 cặp tia đối nhau : Ax và Ay,
Ox và Oy,
Cx và Cy,
Bx và By.

Hình 29

8. (h. 30) : a) Các tia CM và CA trùng nhau vì M nằm giữa A và C (1).



Hình 30

b) Các tia CN và CB trùng nhau vì N nằm giữa C và B (2).

c) C nằm giữa A và B nên các tia CA và CB đối nhau (3). Từ (1), (2), (3) suy ra các tia CM và CN đối nhau, do đó C nằm giữa M và N.

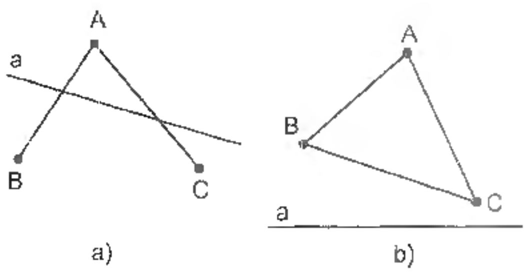
9. Ta sẽ chứng tỏ rằng các tia BA và BD là đối nhau. Thật vậy, B nằm giữa A và C nên các tia BA và BC đối nhau (1), C nằm giữa B và D nên các tia BC và BD trùng nhau (2). Từ (1) và (2) suy ra các tia BA và BD đối nhau, do đó B nằm giữa A và D.

10. Điểm D không nằm giữa hai điểm A và B. Hãy chứng tỏ rằng các tia BA và BD là đối nhau.

11. Điểm B nằm giữa hai điểm A và D. Thật vậy, B nằm giữa A và C nên các tia BA và BC đối nhau, D thuộc tia BC nên các tia BC và BD trùng nhau. Vậy các tia BA, BD là đối nhau, do đó B nằm giữa A và D.

12. a) Xem hình 31a.

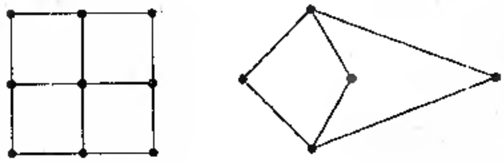
b) Xem hình 31b.



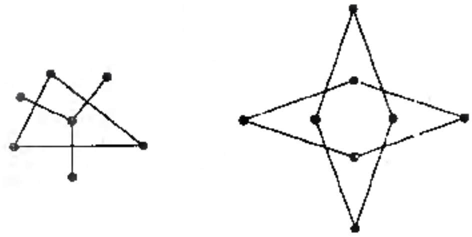
Hình 31

13. a) Xem hình 32.

b) Xem hình 33.

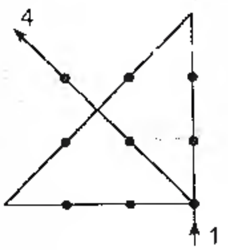


Hình 32

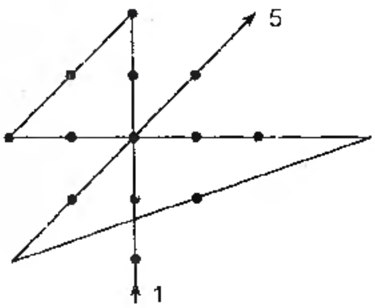


Hình 33

14. a) Xem hình 34. Chú ý rằng các đoạn thẳng thứ nhất và thứ hai phải vẽ vượt ra ngoài điểm đã cho.

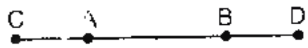


Hình 34



Hình 35

b) Xem hình 35. Chú ý rằng các đoạn thẳng thứ ba và thứ tư phải vẽ vượt ra ngoài điểm đã cho.



Hình 36

15. Ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Giải tương tự câu b) của ví dụ 7.

16. (h. 36) Các tia AC và AB đối nhau nên A nằm giữa C và B, suy ra CA + AB = CB (1). Các tia BA và BD đối nhau nên B nằm giữa A và D, suy ra AB + BD = AD (2). Ta lại có CA = BD (3). Từ (1), (2), (3) suy ra CB = AD.

17. (h. 37) Các điểm C và B thuộc tia AB mà AC < AB nên C nằm giữa A và B ⇒ AC + CB = AB ⇒ 2 + CB = 8 ⇒ CB = 6(cm).

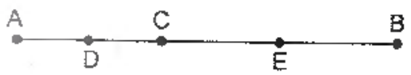
Hình 37

Các điểm C và D thuộc tia BA mà BD < BC nên D nằm giữa B và C ⇒ BD + DC = BC ⇒ 3 + DC = 6 ⇒ DC = 3 (cm).

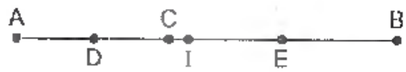
18. Xét hai trường hợp : C thuộc tia BA (khi đó AC = 3cm) hoặc thuộc tia đối của tia BA (khi đó AC = 7cm).

19. (h. 38) $DE = DC + CE = \dfrac{AC}{2} + \dfrac{CB}{2} =$

$$= \frac{AC + CB}{2} = \frac{AB}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5 \text{ (cm)}.$$



Hình 38



Hình 39

20. (h. 39) CB = AB – AC = 5 – 2 = 3 (cm).

$DE = DC + CE = \dfrac{AC}{2} + \dfrac{CB}{2} = 1 + 1{,}5 = 2{,}5$ (cm)

I là trung điểm của DE ⇒ $DI = \dfrac{DE}{2} = \dfrac{2{,}5}{2} = 1{,}25$ (cm)

CI = DI – DC = 1,25 – 1 = 0,25 (cm).

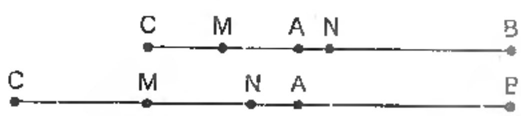
21. (h. 40)

Hình 40

$AA_1 = \dfrac{1}{2}AB,\quad AA_2 = \dfrac{1}{2^2}AB,\quad AA_3 = \dfrac{1}{2^3}AB,\ \ldots,\ AA_{20} = \dfrac{1}{2^{20}}AB = \dfrac{1}{2^{20}}$ (m).

22. a) Bạn đọc tự giải.

b) Trường hợp C thuộc tia đối của tia AB (h. 41) :



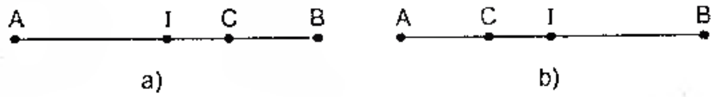
Hình 41

Ta có $CM = \frac{CA}{2}$, $CN = \frac{CB}{2}$, $CA < CB \Rightarrow M$ nằm giữa C và N. Do đó :

$MN = CN - CM = \frac{CB}{2} - \frac{CA}{2} = \frac{CB - CA}{2} = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$. Kết quả ở câu a vẫn đúng.

Trường hợp C thuộc tia đối của tia BA, kết quả ở câu a vẫn đúng. Giải tương tự như trên.

23. Trường hợp $a > b$ (h. 42a) : $IC = IB - CB = \frac{a+b}{2} - b = \frac{a-b}{2}$.



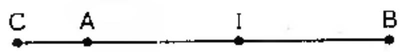
Hình 42

– Trường hợp $a < b$ (h. 42b) : Giải tương tự như trên, $IC = \frac{b-a}{2}$.

– Trường hợp $a = b$ thì $I \equiv C$.

24. – Trường hợp C thuộc tia đối của tia AB (h. 43) :

$IC = CA + AI = a + \frac{AB}{2} = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$.



Hình 43

– Trường hợp C thuộc tia đối của tia BA : Giải tương tự như trên, $IC = \frac{a+b}{2}$.

CHUYÊN ĐỀ

25. a) Có 6 đường thẳng : A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_2A_3, A_2A_4, A_3A_4.

b) Có : 20 . 19 : 2 = 190 (đường thẳng).

c) Có : $\frac{n(n-1)}{2}$ đường thẳng.

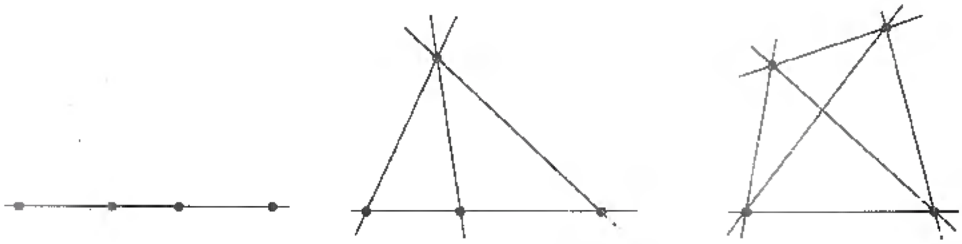
d) Giải $\frac{n(n-1)}{2} = 1128$, được $n = 48$.

e) Giải $\frac{n(n-1)}{2} = 2004$. Không tìm được số tự nhiên n nào thoả mãn $n(n-1) = 4008$ (vì tích hai số tự nhiên liên tiếp không tận cùng bằng 8).

26. Có 4945 đường thẳng. Giải tương tự ví dụ 11b.

27. Ta có $\frac{n(n-1)}{2} = 105$ nên $n(n-1) = 210 = 2.3.5.7 = 15.14$. Vậy $n = 15$.

28. Nếu cả bốn điểm thẳng hàng thì có một đường thẳng (h. 44a). Nếu chỉ có ba điểm thẳng hàng thì có 4 đường thẳng (h. 44b). Nếu không có ba điểm nào thẳng hàng thì có 6 đường thẳng (h. 44c).

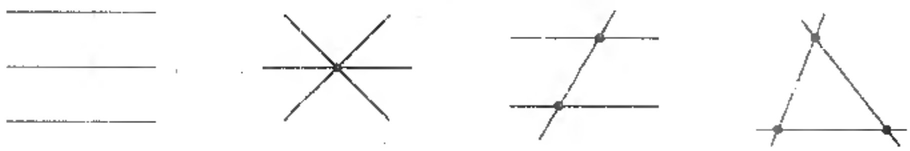


a) b) c)

Hình 44

29. a) Nếu ba đường thẳng đồng quy thì có 1 giao điểm (h. 45b). Nếu ba đường thẳng đó không đồng quy thì có 3 giao điểm (h. 45d).

b) Xem hình 45.



a) b) c) d)

Hình 45

30. Mỗi đường thẳng cắt 100 đường thẳng còn lại tạo nên 100 giao điểm. Có 101 đường thẳng nên có 101 . 100 giao điểm, nhưng mỗi giao điểm đã được tính hai lần nên chỉ có :

$$101.100 : 2 = 5050 \text{ (giao điểm)}.$$

Chú ý : Tổng quát với n đường thẳng, có $\frac{n(n-1)}{2}$ giao điểm.

31. Từ $\frac{n(n-1)}{2} = 780$, ta tính được $n = 40$.

32. a) Số đoạn thẳng có : $10.9 : 2 = 45$.

Chú ý : Tổng quát với n điểm, số đoạn thẳng là $\frac{n(n-1)}{2}$.

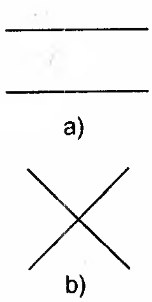
b) Điều kiện có đúng ba điểm thẳng hàng không ảnh hưởng gì đến số đoạn thẳng đếm được.

33. *Đáp số :* n = 30.

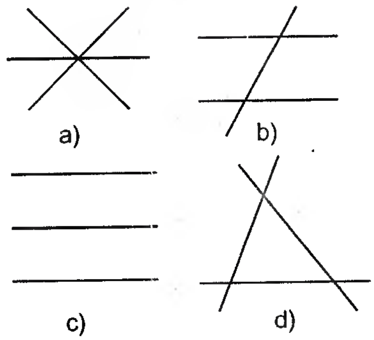
34. a) 3 hoặc 4 miền (h. 46).

b) 4, 6 hoặc 7 miền (h. 47).

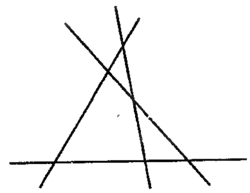
c) 11 miền (h. 48).



Hình 46



Hình 47



Hình 48

Chú ý : Tổng quát, n đường thẳng chia mặt phẳng nhiều nhất thành $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ miền.

Thật vậy, mặt phẳng bị chia thành nhiều miền nhất khi không có hai đường thẳng nào song song, không có ba đường thẳng nào đồng quy. Một đường thẳng chia mặt phẳng thành 2 miền. Đường thẳng thứ hai cắt đường thẳng trước, bị chia thành 2 tia nên tạo thêm 2 miền mới. Đường thẳng thứ ba cắt 2 đường thẳng trước, bị chia thành 2 tia và 1 đoạn thẳng nên tạo thêm 3 miền mới... Cứ như vậy, đường thẳng thứ n cắt n − 1 đường thẳng trước, bị chia thành 2 tia và n − 2 đoạn thẳng nên tạo thêm n miền mới. Vậy số miền có :

$$2 + 2 + 3 + 4 + ... + n = 1 + (1 + 2 + 3 + ... + n) =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + 1.$$

MỤC LỤC

Trang

Lời nói đầu 3

PHẦN SỐ HỌC

Phần I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT VÀ BÀI TẬP ỨNG DỤNG

Chương I. ÔN TẬP VÀ BỔ TÚC VỀ SỐ TỰ NHIÊN

§1. Tập hợp các số tự nhiên 5

§2. Các phép tính về số tự nhiên 9

§3. Tính chất chia hết trên tập hợp số tự nhiên 15

§4. Các dấu hiệu chia hết 18

§5. Số nguyên tố. Hợp số 23

§6. Ước và bội 25

§7 Ước chung. Ước chung lớn nhất 28

§8. Bội chung. Bội chung nhỏ nhất 29

Chương II. SỐ NGUYÊN

§9. Thứ tự trên tập hợp số nguyên 32

§10. Cộng và trừ các số nguyên 33

§11. Nhân các số nguyên 34

§12. Tính chia hết trên tập hợp số nguyên 36

Phần II. CHUYÊN ĐỀ

Điền chữ số 38

Dãy các số viết theo quy luật 44

I – Dãy cộng 44

II – Các dãy khác 47

Đếm số 49

Sơ lược về tập hợp 54

I –Tập hợp và phần tử của tập hợp 54

II – Các phép toán trên các tập hợp 57

III – Hai tập hợp bằng nhau 58

Tìm chữ số tận cùng của một luỹ thừa 62

I – Tìm một chữ số tận cùng 62

II – Tìm hai chữ số tận cùng 62

III – Tìm ba chữ số tận cùng trở lên 63

Hệ ghi số với cơ số tuỳ ý . . . 64
I – Hệ ghi số cơ số k . . . 64
II – Hệ ghi số cơ số 2 . . . 65
Một số vấn đề lịch sử về số nguyên tố . . . 68
I – Sàng Ơ - ra - tô - xten . . . 68
II – Sự phân bố số nguyên tố . . . 69
III – Công thức cho một số nguyên tố . . . 70
IV – Biểu diễn một số dưới dạng tổng các số nguyên tố . . . 71
Các vấn đề nâng cao về tính chia hết, ước và bội . . . 72
I – Dấu hiệu chia hết cho 11 . . . 72
II – Số lượng các ước của một số . . . 73
III – Toán về chia hết liên quan đến số nguyên tố, ƯCLN, BCNN . . . 74
IV – Tìm số bị chia biết các số chia và số dư trong hai phép chia . . . 77
V – Các bài toán về ƯCLN, BCNN . . . 78
Số chính phương . . . 89

PHẦN HÌNH HỌC

Phần I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT VÀ BÀI TẬP ỨNG DỤNG

Chương I. ĐOẠN THẲNG

§1. Điểm và đường thẳng . . . 94
§2. Tia. Đoạn thẳng . . . 95
§3. Độ dài đoạn thẳng. Vẽ đoạn thẳng cho biết độ dài . . . 98
§4. Trung điểm của đoạn thẳng . . . 99

Phần II. CHUYÊN ĐỀ

Tính số điểm, số đường thẳng, số đoạn thẳng . . . 101
LỜI GIẢI HOẶC CHỈ DẪN . . . 105

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Chủ tịch Hội đồng Thành viên kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Tổng biên tập kiêm Phó Tổng Giám đốc NGUYỄN QUÝ THAO

Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm nội dung:
Phó Tổng biên tập PHAN XUÂN THÀNH
Giám đốc CTCP Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội PHAN KẾ THÁI

Biên tập lần đầu:
PHẠM THỊ BẠCH NGỌC
Biên tập tái bản:
NGUYỄN THỊ NGUYÊN THÚY
Trình bày bìa:
TẠ TRỌNG TRÍ
Sửa bản in:
NGUYỄN THỊ NGUYÊN THÚY
Chế bản:
NGUYỄN TRỌNG THIỆP

Công ty cổ phần Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội -
Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam giữ quyền công bố tác phẩm

NÂNG CAO VÀ PHÁT TRIỂN TOÁN 6 - TẬP MỘT

Mã số: T6T21h2 - TTS

Số đăng ký KHXB: 57 - 2012/CXB/521 - 23/GD

In 7.000 bản (56TK), khổ 17 x 24 cm, tại CTCP In Khoa học Công nghệ mới

Địa chỉ: Số 181 Lạc Long Quân, Nghĩa Đô, Cầu Giấy, Hà Nội

In xong và nộp lưu chiểu tháng 7 năm 2012.