


TRƯƠNG QUANG ĐỆ

CON SỐ TRONG ĐỜI SỐNG QUANH TA

TẬP MỘT











NHÀ XUẤT BẢN
GIÁO DỤC


Ô TOÁN HỌC

TRƯƠNG QUANG ĐỆ

(Tuyển chọn, phỏng dịch và giới thiệu)

CON SỐ
TRONG ĐỜI SỐNG
QUANH TA

TẬP MỘT

(Tái bản lần thứ nhất)

- *otoanhoc2911@gmail.com* -

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

$\frac{51}{GD - 06}$ 03-2006/CXB/196-1859/GD Mã số: 8H998t6-CPH

LỜI NHÀ XUẤT BẢN

Truyền hình kĩ thuật số, máy ảnh kĩ thuật số, kĩ thuật số và kĩ thuật số..., trong cuộc sống hàng ngày mỗi người chúng ta đều liên quan đến con số : số nhà, số điện thoại, số báo danh, số lượng thức ăn tiêu thụ v.v... và v.v... Các con số quen thuộc với chúng ta đến nỗi không mấy khi ta suy nghĩ đến chúng qua những câu hỏi đơn giản như : "Số là gì ?", "Có bao nhiêu con số ?", "Con số từ đâu đến ?", "Ai đã tìm ra các con số ?", "Kĩ thuật số là gì ?"...

Nhà xuất bản Giáo dục xin giới thiệu 2 tập sách **Con số trong đời sống quanh ta** *do tác giả Trương Quang Đệ sưu tầm, biên soạn và giới thiệu cho chúng ta lịch sử con số từ thủa hồng hoang cho tới hiện nay của văn minh loài người.*

Như một bản trường ca về trí tuệ con người, qua hai tập sách, bạn đọc, nhất là học sinh, sinh viên thuộc các chuyên ngành khác nhau đều tìm thấy những nét thú vị bổ ích, những điều kì thú... cho riêng mình và từ đó thêm yêu môn toán học và sau đó là các ngành kĩ thuật số, tin học...

Rất mong nhận được nhiều ý kiến đóng góp, phê bình của quý vị độc giả.

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

MỤC LỤC

THAY LỜI TỰA

CÁC CON SỐ GIÚP TA KHÁM PHÁ NHỮNG ĐIỀU KÌ THÚ CỦA THIÊN NHIÊN

Trong cuộc sống hàng ngày, các con số quen thuộc với ta đến nỗi không mấy khi ta suy nghĩ đến chúng qua những câu hỏi đơn giản như : "Số là gì ?", "Có bao nhiêu con số ?", "Con số từ đâu đến ?", "Ai đã tìm ra các con số ?", "Kĩ thuật số là gì ?"... Thế mà các tập hợp số (từ số tự nhiên đến số siêu phức), những chữ số Ả-rập, hệ thống đếm theo vị trí của người Lưỡng Hà, chữ số 0 của người Ấn Độ, những số siêu việt π và e, số ảo i, tất cả nói lên trí tuệ tuyệt vời của con người. Nhờ các con số mà nhân loại tiến bộ không ngừng : từ thế giới nguyên thuỷ đến thế giới ngày càng văn minh. Ngày nay, hơn bao giờ hết, các con số bám chặt ta mọi nơi mọi lúc, với các công cụ gọi là kĩ thuật số. Ta tìm thấy kĩ thuật số trong vô tuyến truyền hình, trong máy ảnh, dàn nghe nhạc, thẻ tín dụng... Trên người ta bao giờ cũng sẵn những nhóm số dài dặc như số điện thoại, số fax, số mã Internet, số thẻ tín dụng, số chứng minh nhân dân, số hộ chiếu, số tài khoản ngân hàng...

Bây giờ ta thử kiểm điểm một cách tóm tắt bước tiến của con số qua hàng ngàn năm lịch sử.

Trước hết ta nhớ lại là ta đã làm quen với các con số như thế nào khi ta còn ngồi trên ghế nhà trường. Ở trường tiểu học chúng ta học các số nguyên tự nhiên 1, 2, 3, 4... và chúng ta tập đếm các vật : 1 con mèo, 2 con chim, 3 con ngựa... Đếm tức là đặt tập hợp các vật cần đếm tương ứng một đối một với tập hợp các số tự nhiên, "dán" lên mỗi vật một số tự nhiên.

Lên trung học, ngoài các số tự nhiên, chúng ta học thêm các số "tương đối", tức là các số nguyên dương và âm : +1, +2, +3... –1, –2, –3... Các số nguyên âm xuất hiện trong các phép tính trừ khi số bị trừ bé hơn số trừ, chẳng hạn $3 - 5 = -2$. Trong thực tế, người ta dùng số âm để ghi các món nợ, ghi nhiệt độ dưới không... Rồi chúng ta học các phân số, những con số xuất hiện khi phải chia những vật nguyên ra làm nhiều phần nhỏ. Chẳng hạn chia 2 chiếc bánh cho 7 em bé ($\frac{2}{7}$)... Tập hợp N các số tự nhiên, tập hợp Z các số tương đối (nguyên âm và dương), tập hợp các phân số tạo thành tập hợp Q các số hữu tỉ.

Vẫn ở bậc trung học, ta gặp hai loại số mới. Đó là số vô tỉ (như $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$ ...), nghiệm phương trình đại số kiểu $ax^2 + bx + c = 0$, và số siêu việt π cũng như một số lôgarit khác. Mọi người đều biết π là tỉ số chu vi đường tròn với đường kính, theo công thức $C/(2R) = \pi$ trong đó C là chu vi đường tròn còn R là bán kính của đường tròn ấy. Tập hợp Q cùng với những nghiệm của các phương trình đại số tạo nên tập hợp các số đại số A. Tập hợp này cùng các số siêu việt như π và các lôgarit tạo nên tập hợp R các số thực.

Sinh viên các trường đại học và các học viện cao cấp có dịp làm quen với những số siêu việt mới mà nổi bật nhất là số *e*. Con số này có khai triển thập phân 2,71828... có lịch sử gắn liền với việc gửi tiền lấy lãi gấp đôi với những thời hạn rút ngắn vô hạn. Cũng như người bạn π của nó phát hiện gần bốn ngàn năm nay, số *e* tuy mới nhưng có rất nhiều ứng dụng trong vật lí hoá học, sinh học và lí thuyết xác suất. Hai số π và *e* được tìm thấy trong nhiều hiện tượng thiên nhiên. Các sinh viên đại học còn phải biết một con số khác gọi là số ảo, kí hiệu *i*, coi như $\sqrt{-1}$ ($i^2 = -1$). Một số được viết dưới dạng $a + bi$ (a, b là những số thực) là một số phức. Số phức không tồn tại tường minh hay có tính vật chất trong thiên nhiên. Ngược lại, chúng là một phương tiện trí tuệ kì diệu giúp chúng ta đi con đường ngắn nhất trong khảo sát thiên nhiên. Nhờ số phức mà các kĩ sư điện, các nhà vật lí thuộc lĩnh vực hạt cơ bản, các chuyên gia khí động học có thể giải quyết những bài toán kĩ thuật đặt ra hàng ngày. Theo chân số phức, các số "rộng lớn" hơn lần lượt ra đời. Chẳng hạn các số siêu phức hay quaternion. Một quaternion có dạng $a + bi + cj + dk$ trong đó a, b, c, d là những số thực, còn i, j, k

là những số ảo. Các số siêu phức này được các nhà vật lí đánh giá cao, nhất là những kĩ sư về người máy (rôbốt).

Tóm lại, mỗi lần con người gặp khó khăn trong tính toán, họ sáng tạo ra một loại số mới nhằm khắc phục trở ngại. Ta có thể nhìn sự tiến hoá các con số theo sơ đồ sau :

Các số tự nhiên **N** dùng để đếm 1, 2, 3, ...

Các số nguyên tương đối **Z** dùng để giải các phương trình kiểu $x + 5 = 3$ ($x = -2$).

Các số hữu tỉ **Q** dùng giải các phương trình như $5x - 7 = 0$ ($x = \frac{7}{5}$)

Các số thực **R** dùng để giải các phương trình loại $x^2 = 3$ ($x = \pm\sqrt{3}$), $3^x = 5$ ($x = \frac{\log 5}{\log 3}$) v.v...

Các số phức **C** dùng giải phương trình loại $x^2 + 5 = 0$ ($x = \pm i\sqrt{5}$)

Nhà toán học Thuỵ Sĩ Euler đã phát minh ra một công thức tập hợp một cách thần kì ba số đặc biệt, hai số siêu việt và một số ảo. Công thức đó là :

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Một sản phẩm toán học đẹp đẽ biết bao ! Trí tuệ con người hùng mạnh biết bao !

Trở lại với các số nguyên tự nhiên, ta thấy nó nom đơn giản nhưng có những tính chất hết sức kì lạ. Trước hết đó là một tập hợp vô hạn, tức là không có một số nào lớn hơn bất kì một số khác. Trong nội bộ tập hợp các số tự nhiên ta có các tập hợp con như tập hợp các số chẵn, tập hợp các số lẻ, tập hợp các bình phương các số tự nhiên (1^2, 2^2, 3^2, 4^2, ...), tập hợp các số nguyên tố (một số gọi là nguyên tố khi nó không có ước số nào khác bản thân nó và số 1 : đó là tập hợp (2, 3, 5, 7, 11,...)). Điều kì lạ là lực lượng (hay bản số) của tất cả những tập hợp ấy đều như nhau. Có bao nhiêu phần tử trong **N** (số tự nhiên) thì cũng có bấy nhiêu phần tử trong **P*a*** (số chẵn), trong **I** (số lẻ), trong **P** (số nguyên tố)... Với các tập hợp vô hạn thì toàn thể lại bằng bộ phận ! Ta có thể minh hoạ nghịch lí này bằng câu chuyện mà nhà toán học Đức Hilbert thích thú và thường xuyên kể cho bạn bè nghe.

Nhà nghiệp chủ lớn Georg Cantor có ý tưởng điên rồ xây dựng một khách sạn có số phòng vô hạn đánh số 1, 2, 3... và cứ thế không dứt. Hôm ấy khách sạn đã chật chỗ nhưng một du khách đến muốn thuê một phòng. "Được thôi, người quản lí có tên là Hilbert nói, xin ông vào phòng số 1, còn mọi thứ tôi lo liệu". Viên quản lí mời khách đang ở phòng 1 chuyển sang phòng 2, khách phòng 2 sang phòng 3 và cứ thế cho đến hết lượt. Mọi việc coi như dàn xếp ổn thoả. Ngày hôm sau một chiếc xe ca chở vô hạn du khách đến. "Không hề gì, viên quản lí Hilbert khẳng định, dù khách sạn chật chỗ nhưng các ngài vẫn có phòng như thường!". Rồi Hilbert đề nghị những khách cũ chuyển hết sang các phòng số lẻ, để lại các phòng số chẵn cho khách mới đến.

*

*   *

Chúng tôi tuyển chọn trong 2 tập sách này những bài viết về các con số và sắp xếp chúng theo hệ thống từ đơn giản đến phức tạp, từ cội nguồn đến thời đại ngày nay. Hi vọng quý bạn đọc sẽ tìm thấy ở đây một bản trường ca về trí tuệ loài người, những điều kì thú mà các bạn không hề ngờ tới. Bạn đọc chỉ cần có trình độ toán học vào cuối cấp THCS hoặc đầu cấp THPT là có thể theo dõi dễ dàng những vấn đề nêu ra trong sách. Ngay từ những trang đầu cuốn sách các bạn sẽ thấy một niềm vui chớm nở và khi các bạn đọc xong cuốn sách, chắc chắn các bạn sẽ có một mối cảm tình nồng thắm với toán học nói chung và với các con số nói riêng. Nếu các bạn bỏ chút thì giờ kiên nhẫn giải các bài toán đố và làm các trắc nghiệm đề ra trong sách, trước khi tham khảo lời giải, biết đâu các bạn tạo được cho mình một niềm tin vững chắc vào bản thân trong cuộc sống trí tuệ ngày nay.

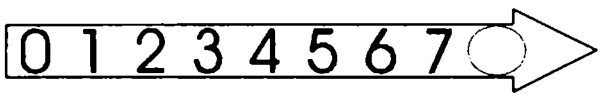
TRƯƠNG QUANG ĐỆ

(Bài nói chuyện tại Nhà Pháp ngữ Tp. Hồ Chí Minh, tháng 9/2003)

KHÁM PHÁ THẾ GIỚI CÁC CON SỐ

N ĐẾN VỚI TA MỘT CÁCH TỰ NHIÊN

Số 0, số 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... Nếu bạn gặp khó khăn trong việc viết đầy đủ dãy số này, bạn nên tham khảo ý kiến một nhà toán học ngay. Bởi lẽ hàng ngày tôi, bạn, chúng ta dùng chúng để đếm những gì quanh ta : 5 ngón tay, 6 kênh truyền hình, 12 tiếng chuông đồng hồ vào đêm khuya... Vì lẽ đó mà người ta có thói quen gọi các số này là số "tự nhiên" hay số "nguyên tự nhiên". Một nhà toán học Đức đáng kính, ông Leopold Kronecker, tin rằng những con số này do Thượng Đế tạo ra ! Nói vậy thôi chứ các nhà toán học thế kỉ XX đã định nghĩa tập hợp số tự nhiên một cách chặt chẽ theo trí tuệ con người. Với tinh thần chính xác khoa học, họ kí hiệu N cho tập hợp các số tự nhiên bao gồm số 0, còn N^* là tập hợp các số tự nhiên không có số 0.



Trên đây là đường thẳng trong vẻ đơn sơ vốn có của nó : mỗi số tự nhiên n đứng sắp hàng sau anh bạn (n-1) của nó. Những con số này trông như những viên ngọc trai liền nhau trên một chuỗi ngọc. Chúng tiến về phía phải hướng đến chốn vô cực.

Vương quốc các số tự nhiên có một thầy phù thuỷ tài giỏi có khả năng làm bất kì việc gì. Đó là số 1 ! Nom thì chẳng ra gì, lại cứng đơ như một thanh củi, nhưng nó là nguồn gốc tạo ra mọi số khác. Bất kì số nào cũng từ số 1 mà ra qua các phép cộng liên tiếp. Chẳng hạn 7 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1. Đối thủ của số 1 là số 0. Số này không có khả năng tạo ra các số khác như số 1, nó chỉ dùng để chỉ sự trống rỗng và bạn có thể thêm nó vào bất kì số nào mà vẫn không có gì thay đổi : 0 + 0 = 0, 1 + 0 = 1 ...

Bây giờ ta quyết định lập một danh sách đầy đủ các số tự nhiên. Trước hết ta tìm cho các số này một giá đỡ, chẳng hạn một đường thẳng trên đó ta sắp chúng lại thành hàng như thể đi diễu hành vậy. Ta gọi giá đỡ này là đường thẳng số (xem hình phía trên). Thoạt đầu nhiệm vụ của ta chẳng có gì khó cả : cứ một điểm trên đường thẳng ta cho một số tự nhiên, một điểm khác cho số tự nhiên khác tiếp theo... Về phía trái ta có số 0. Còn về phía phải ta kết thúc bằng số nào đây ? Số cuối cùng là số gì ? Không có số cuối cùng mới chết chứ ! Chuỗi các số tự nhiên là vô hạn (xem phần tiếp theo). Trong đám các số tự nhiên, có những số có tính chất hết sức kì lạ. Đó là :

Số hoàn hảo

Một số gọi là hoàn hảo nếu nó bằng tổng các ước số "thực sự" (tức là loại trừ trường hợp ước số là bản thân số đó) của chính nó. Như vậy số 6 là hoàn hảo vì 6 = 1 + 2 + 3. Về tính chất của các số hoàn hảo người ta không biết gì nhiều hơn là chúng hết sức hiếm hoi. Đây là một vài số hoàn hảo : 28, 496, 8.128, 33.550.336 ...

Số bằng hữu

Cũng như chim gáy, các số bằng hữu sống theo cặp. Hai số gọi là bằng hữu khi tổng các ước số thực sự của số này chính là số kia. Chẳng hạn hai số 220 và 284 là bằng hữu. Thực vậy, 220 có các ước số 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110. Tổng của chúng là 284. Ngược lại 284 có các ước số thực sự là 1, 2, 4, 71, 142. Tổng của chúng là 220. Pierre de Fermat, nhà toán học Pháp đã phát hiện hai số bằng hữu 17.296 và 18.416 vào thế kỉ XVII.

Số nguyên tố

Số nguyên tố không còn là trò tiêu khiển lặt vặt như hai số trước đã nêu. Dưới con mắt nhà toán học số nguyên tố cũng có tầm quan trọng như các hạt cơ bản đối với nhà vật lí. Chúng như những viên gạch, những khối cơ bản dựa vào đó mà ta xây dựng mọi số tự nhiên không hơn không kém !

Định nghĩa số nguyên tố thực đơn giản : một số nguyên tự nhiên được gọi là "nguyên tố" nếu nó không chia hết cho số nguyên nào, ngoài số 1 và chính nó. Khởi đầu danh sách "thật quá dễ" 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31... (số 1 theo quy ước không được coi là số nguyên tố).

Trước công nguyên ba thế kỉ Euclide đã thấy được rằng số nguyên tố là những ngôi sao sáng. Ông đã chứng minh được điều mà các đồng nghiệp hiện nay của ông đánh giá là định lí cơ bản của số học : mọi số tự nhiên lớn hơn 1 thì hoặc là số nguyên tố, hoặc được biểu đạt bằng tích của những số nguyên tố và cách biểu đạt đó là duy nhất. Thí dụ : 75.900 là tích của 7 số nguyên tố : 75.900 = 2 x 2 x 3 x 5 x 5 x 11 x 23. Biểu thức nằm bên phải dấu bằng được gọi là sự phân tích thành thừa số nguyên tố.

Thế giới các số nguyên tố chứa đầy bí ẩn và những điều đáng kinh ngạc. Chẳng hạn ta thường thấy chúng tạo thành từng cặp "song sinh" khác nhau hai đơn vị như 11 và 13, 17 và 19, 29.669 và 29.671... Hiện nay người ta chưa biết được số lượng các cặp "song sinh" này có vô hạn hay không.

Liệu có số nguyên tố cuối cùng không ? Người ta muốn tin như vậy lắm, vì càng tiến sâu vào tập hợp *N*, các số nguyên tố hiếm dần đi và càng xa rời nhau. Liệu cuối cùng chúng có biến mất đi không ? Không bao giờ ! Lại chính Euclide đã chứng minh rằng danh sách các số nguyên tố là vô hạn.

David Slowinsky, chuyên gia săn lùng số tự nhiên nổi tiếng, dùng máy điện toán *Cray* phát hiện ra số nguyên tố cực lớn chưa hề biết. Tên khổng lồ này được viết dưới dạng $2^{1257787} - 1$. Tức là số 2 nhân với chính nó 1.257.787 lần rồi lấy kết quả trừ đi 1. Con số đó nếu được viết ra sẽ là một con số với 378.632 chữ số sắp thành hàng nối đuôi nhau lấp đầy các trang hai cuốn tạp chí !

Nhưng tìm ra những số nguyên tố khổng lồ như thế để làm gì ? Trước hết việc tìm kiếm này có mục đích thử hiệu năng tính toán của các máy siêu điện toán, thứ đến những con số nguyên tố khổng lồ này được dùng cho việc viết mật thư một cách tuyệt đối an toàn (xem bài về con số và nghề tình báo). Chúng còn được dùng rộng rãi trong kĩ thuật lập mã chỉnh lí những sai sót khi truyền dẫn hình ảnh và dữ liệu (vệ tinh, tàu thăm dò không gian...), trong các bộ phận đọc đĩa CD phân giải cao.

"Cái sàng" do Ératosthène, nhà toán học sống cùng thời với Archimède, phát kiến ra, cho phép lọc ra các số nguyên tố từ 1 đến 100. Người ta loại bỏ liên tiếp các bội số của 2 (cột 2, 4, 6, 8, 10), của 3 (cột 3, 6, 9, 30, 60, 90), của 5 (cột 5) và của 7 (4 đường chéo song song với đường 7 - 14 - 21). 25 số còn lại đều là số nguyên tố (không tính số 1).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

3 TẬP HỢP CÁC SỐ TƯƠNG ĐỐI
(Số nguyên âm và số nguyên dương)

Các số tự nhiên là chuyện quá đơn giản, quá trực giác, chúng thật ngon lành đối với những ai không thích chuyện phiền hà. Chỉ có điều là đến một ngày kia các nhà toán học phải giáp mặt với một bài toán mà các số tự nhiên hiền lành kia không giúp ích gì được. Câu hỏi đơn giản "3 – 5 là cái gì vậy ?" đủ làm cho bạn hết hơi rồi ! Còn nếu bạn thích môn đại số thì xin mời bạn tìm x biết $x + 5 = 3$!

Ái chà, hừm, rắc rối nhỉ !... Bạn sẽ chọn lấy một trong ba thái độ. Hoặc bạn trả lời ngay : "Cái quái gì thế ? Làm gì có chuyện như thế ! Ta bị quỷ Sa-tăng ám ảnh mất rồi ! Phép tính này vô nghĩa vì bị cấm trong tập hợp các số tự nhiên, tức là những số duy nhất có giá trị !". Đó gần như là thái độ của các nhà bác học thời Hi Lạp cổ. Hoặc bạn phát biểu : "3 – 5 cho ta –2. Tôi chấp nhận kết quả này vì nó giúp tôi tìm ra cách giải bài toán. Nhưng tôi chấp nhận một cách miễn cưỡng, vì ý tưởng về các số âm xem ra phi lí lắm !". Nhà toán học Pascal lỗi lạc cũng cho rằng "Không thể có số nào nhỏ hơn số 0 được !". Cuối cùng thái độ thứ ba như sau : "Một số âm thì có gì ghê gớm lắm đâu ! Chẳng phải nó đã có mặt từ lâu trên nhiệt kế, trên các bản đồ hàng hải và trong sổ sách kế toán của các nhà buôn đó sao ?". Sự chấp nhận không do dự ấy là thái độ chủ đạo hiện nay. Số âm là một con số, đơn giản vậy thôi. Các số âm này thuộc về tập hợp Z mà phần dương chính là tập hợp N. Người ta nói rằng N là tập con của Z.

... -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 ...

Đường thẳng số được nới rộng ra bên trái để thâu tóm hết những số âm và mở thêm cánh cửa thứ hai tiến về vô cực.

Như vậy đường thẳng số của ta thoát được mở ra phía vô tận về bên trái (xem hình trên). Đương nhiên các số âm có tính chất hơi khác với những số tự nhiên anh em họ của chúng. Vào thế kỉ XV, một thầy thuốc ở Paris phát biểu quy luật về dấu của các số âm như sau : "*Đem nhân cộng với trừ hay ngược lại thì luôn luôn được trừ. Đem chia cộng với trừ hay trừ với cộng thì luôn luôn được trừ*". Như vậy là bạn đã có lời bài hát, chỉ còn việc tìm ra các nốt nhạc để hát làu làu nữa thôi.

2 LÍ TRÍ CHIẾN THẮNG !

2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
8,9	**9,0**	**9,1**	**9,2**	**9,3**	**9,4**	**9,5**	**9,6**	**9,7**	**9,8**	**9,9**	**10,0**	**10,1**	**10,2**
***,59**	**9,60**	***,61**	**9,62**	**9,63**	**9,64**	**9,65**	**9,66**	**9,67**	**9,68**	**9,69**	**9,70**	**9,71**	**9,72**

Những số hữu tỉ cũng có mặt trên đường thẳng số. Giữa hai số nguyên liên tiếp, ta có đặt vô số những số hữu tỉ có một chữ số thập phân. Cũng theo cách đó, giữa hai số hữu tỉ có một chữ số thập phân ta có thể đặt vô số những số hữu tỉ khác có hai chữ số thập phân, cứ như thế đến vô tận.

Như chúng ta vừa nghiệm thấy qua số tương đối, động cơ thúc đẩy toán học phát triển chính là các bài toán đặt ra. Nếu có những bài chưa giải được, các nhà toán học vò đầu bứt tai buồn bã và buộc phải xem xét lại những định nghĩa ban đầu. Chẳng hạn cho bài toán sau : Giải $3x - 4 = 0$. Dù bạn có rà soát hết thảy những số nguyên dương hay âm, không có số nào nghiệm được phương trình đơn giản kia.

Thế mà có lời giải đấy, và nghiệm của phương trình thuộc một tập hợp số khác, Ta có : $x = \frac{4}{3}$.

Bây giờ ta "mổ xẻ" xem con số mới này một chút : bên trên ta có một số nguyên gọi là tử số (trường hợp đang xét là 4), phía giữa là một thanh ngang biểu thị phép chia, bên dưới là một số nguyên khác gọi là mẫu số (ở đây là số 3). Cả ba phần đó tạo nên một phân số. Đã gần 5.000 năm nay, phân số có vai trò thiết yếu trong việc biểu thị những độ đo mà kết quả không phải là số nguyên. Chẳng hạn trong việc chia một cái bánh ngọt cho bảy người, có con số nào tiện hơn số $\frac{1}{7}$ để chỉ phần của từng người ?

Các con số viết theo kiểu tỉ số (dạng phép chia) của hai số nguyên được gọi là số hữu tỉ (tiếng Pháp : *rationnel*, có gốc là *raison*, trước đây có nghĩa là "chia"). Tập hợp mới này được kí hiệu là Q. Một điều cấm kị quan trọng đối với tập hợp Q : mẫu số của bất kì phân số nào cũng phải khác không. Đối với các nhà toán học, chia một số cho số 0 là bất hợp lệ !

Bạn có thể biến đổi bất kì số nguyên nào thành số hữu tỉ. Chẳng hạn viết số 3 thành $\frac{3}{1}$, bởi vì 3 chia cho 1 vẫn là 3. Số –6 được viết thành $-\frac{6}{1}$... Cái thủ thuật nhỏ kia cho ta thấy rằng tập hợp Q bao hàm cả tập hợp Z và đương nhiên cả N.

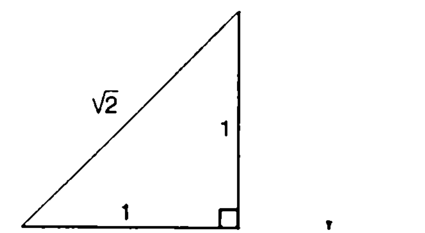
Cần phải phân biệt một số hữu tỉ với phân số biểu đạt nó. Bởi lẽ số hữu tỉ là duy nhất, còn phân số biểu đạt nó thì vô hạn. Chẳng hạn số hữu tỉ $\frac{2}{3}$ có thể biểu thị bằng các phân số $\frac{4}{6}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{10}{15}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{48}{72}$ v.v... Cứ nhân tử số và mẫu số của phân số với cùng một số, ta luôn có $\frac{2}{3}$.

Bạn cũng có thể tính số 2/3 một cách trực tiếp. Dùng một máy tính bỏ túi để tính 2 chia cho 3, máy cho ngay số 0,66666666... Người ta gọi số có dấu phẩy này là phép khai triển thập phân của số 2/3. Phép này rất lợi hại trong việc so sánh các phân số. Chẳng hạn số nào lớn hơn trong hai số $\frac{301}{71}$ và $\frac{174}{41}$? Bạn thử dùng máy tính giải xem sao !

Một số triển khai thập phân kết thúc "sít sao tròn trịa". Chẳng hạn 3/4 cho ta 0,75. Nhưng thông thường các sự triển khai thập phân không mấy khi kết thúc tròn trịa như vậy. Chẳng hạn $\frac{2.530}{7} = 361,(428571)(428571)\ldots$ Ta thấy số các chữ số thập phân là vô hạn, nhưng ở đây có dấu hiệu của một số hữu tỉ, đó là sự lặp lại có tính chu kì một nhóm số nhất định. Nếu bạn thích chơi máy tính, bạn thử tính các số sau : 10/13, 10/27, 10/37, 10/54, 10/81, 10/99, 10/153. Bạn sẽ thấy có những điều hết sức thú vị.

Bạn thử nhìn lại đường thẳng số trên kia. Trước đây bạn nghĩ là đường thẳng ấy chật chỗ rồi ! Sai lầm đấy ! Các số nguyên chỉ rất hiếm hoi mà thôi. Bởi lẽ giữa hai số nguyên nào ta cũng xen vào được vô số những số hữu tỉ !

$\mathcal{R}$ VƯƠNG QUỐC SỐ THỰC



Đường huyền của tam giác trên có giá trị là $\sqrt{2}$. Đó là một số vô tỉ. Hai cạnh còn lại mỗi cạnh bằng 1. $\sqrt{2}$ chiếm vị trí ở điểm chiếu mút đường huyền xuống đường thẳng số.

Ái chà, lại có một bài toán vặt hóc búa nữa ! Nghiệm của phương trình $x^2 = 2$ là gì ? Ta chỉ tốn công mà thôi nếu cứ tìm nghiệm của phương trình này trong các tập hợp *N, Z, Q*.

Cách đây hơn 2.000 năm, bỗng một ngày, nhà toán học Pythagore đã phải đối mặt với bài toán này. Thực ra bài toán được đặt ra cho Pythagore dưới dạng hình học (*xem hình trên*). Nhưng kết quả thì giống nhau : $x^2 = 2$.

Vậy con số nào mà bình phương thì bằng 2 ? Pythagore và các môn đệ ra sức tìm kiếm. Rồi họ đi đến một kết luận bất ngờ làm họ hoang mang : x không thể biểu đạt bằng một tỉ số hai số nguyên, tức là một phân số. Nếu bạn không tin thì cứ thử tìm xem có số hữu tỉ nào mà bình phương bằng 2 hay không. Bạn thử tìm cơ may với các số $(3/2)^2$, $(7/5)^2$, $(41/29)^2$, $(99/70)^2$, $(239/169)^2$... Bạn sẽ không bao giờ tìm ra kết quả như ý !

Quỷ thật ! Đành phải sáng tạo ra một kiểu số mới và một tập hợp số mới chứa những số như vậy. Con số này ẩn dưới một cái que gọi là "căn bậc hai", $\sqrt{2}$ được gọi là "căn bậc hai của 2". Nó là một số "vô tỉ". Tính chất của nó : hễ bình phương lên sẽ bằng 2. Tính chất thứ hai : sự triển khai thập phân là vô hạn và không cho cụm số chu kì : $\sqrt{2}$ = 1,41421356237309504... Ta hãy nhìn vào đuôi số sau dấu phẩy. Ta không thấy sự lặp lại đều đặn một nhóm số nào như trong trường hợp số hữu tỉ. Các chữ số sắp đặt có vẻ hú hoạ. Các số vô tỉ này đúng là kì khôi : chúng gắn liền với sự may rủi cũng như sự vô biên ! Thực vậy, mọi số hữu tỉ có thể được viết dưới dạng một phân số liên tục cứ "đi dần xuống dưới cho đến vô cùng".

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}}$$

Tập hợp tất cả những số hữu tỉ và vô tỉ là tập hợp *R*. Đó là tập hợp các số thực. Bạn chớ băn khoăn gì về từ "số thực". Số ấy cũng hư hư thực thực như bất kì kí hiệu toán nào khác do các nhà toán học nghĩ ra.

Liệu có đủ chỗ cho tất cả số thực trên đường thẳng không ? Đường thẳng ấy chả là chật ních với những số thuộc *N, Z, Q* rồi sao ? Các số hữu tỉ dù có dày đặc đến mấy cũng để thừa vô hạn chỗ trống ! Chính trong các chỗ trống ấy mà các số thực còn lại đến cư ngụ. Bạn thấy không, đây là cố gắng cuối cùng vì từ nay trở đi đường thẳng số xem ra không còn trống chỗ nữa. Không có cách gì sắp thêm số vào đấy nữa. Điều đó xuất phát từ định lí sau : *"Ứng với mỗi điểm trên một đường thẳng ta có thể kết hợp một số thực và chỉ một thôi và ngược lại"*.

SỐ SIÊU VIỆT, MỘT THẾ GIỚI DÀY ĐẶC CƯ DÂN

Khi khảo sát tập hợp các số thực *R*, các nhà toán học phát hiện thấy nhiều bẩy quái vật ! Bây giờ ta trở lại với đường thẳng số để xem chúng ứng xử ra sao.

Làm sao để ghép một số nằm trên đường thẳng số với một hình hình học dựng bằng thước và com-pa ? Trong bước đầu ta ghép một số trên đường thẳng số với một đoạn thẳng có độ dài thể hiện bằng số đó. Theo đó thì số 3 được ghép với một đoạn thẳng có chiều dài là 3cm.

Bước thứ hai : cứ ứng với mỗi số được dựng hình như vậy ta ghép một phương trình có nghiệm là số nói trên. Chẳng hạn bạn dựng phân số 4/5 bằng thước và com-pa rồi bạn gán cho nó phương trình $5x - 4 = 0$ (nghiệm của phương trình $x = 4/5$).

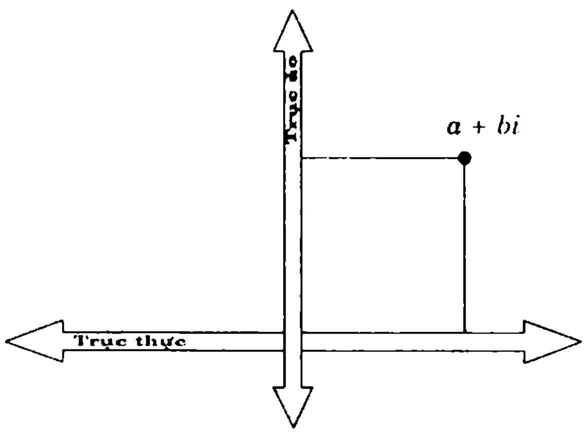
Hoặc giả bạn dựng bằng thước và com-pa số $\sqrt{2}$ rồi bạn gán cho nó phương trình $x^2 - 2 = 0$. Chỉ cần thận trọng dùng những phương trình có hệ số nguyên. Chẳng hạn 5 trong $5x - 4$ là hệ số nguyên, còn 0,7 thì không phải hệ số nguyên.

Bước thứ ba : Đó là bước khẳng định rằng mọi số dựng bằng thước và com-pa nhất thiết phải là nghiệm của phương trình có hệ số nguyên. Những số này thuộc về một tập hợp đặc biệt, tập hợp các số đại số. Tập hợp này bao gồm tất cả những số hữu tỉ như 4/5 và tất cả những số vô tỉ như $\sqrt{2}$.

Bước thứ tư : Một câu hỏi hắc búa : "Liệu tất cả các số thực đều là số đại số hay không ?" Thoạt tiên các nhà chuyên môn trả lời ngay : "Đương nhiên rồi !" Nhưng chu cha ! Vào thế kỉ XVII người ta thấy điều đó không đúng nữa với các số e và π, những siêu sao trong lĩnh vực số (*xem phần* "số π và số e bí hiểm và siêu việt"). Đối với các số này thì không có cách gì dựng chúng bằng thước và com-pa được, cũng không tìm đâu ra cho chúng những phương trình có hệ số nguyên nhận chúng làm nghiệm. Người ta đặt tên cho những con vật bất kham này là số siêu việt, và nghĩ rằng hai con số này là duy nhất trong đội ngũ siêu việt đó.

Nhưng rồi người ta thấy quá sai ! Hiện nay người ta hoảng hốt nhận ra rằng các số siêu việt con rất đông, thậm chí đông hơn cả số đại số vô hạn lần ! Tuy nhiên những số siêu việt không được biết đến nhiều vì khi tính toán, theo định nghĩa, ta chỉ dùng phần lớn là số đại số. Chứng minh rằng một số nào đó là đại số không phải chuyện dễ dàng. Dù sao đối với các nhà nghiên cứu, có một điều đã hiển nhiên : cái lục địa còn tối tăm, bao la và dày đặc dân cư này sẽ dành cho họ những điều ngạc nhiên lí thú !

KHÔNG GIAN PHỨC HỢP



Một số phức không thể biểu thị được trên đường thẳng số. Đối với đội ngũ này cần phải có cả không gian xác định bằng hai trục như hình vẽ trên. Khi chiếu số phức a + bi lên hai trục, bạn phát hiện ngay bản chất hai mặt của số phức : một phần thực a và một phần "ảo" bi

Một nhóm các nhà toán học Ý thế kỉ XVI trong đó có Raffaele Bombelli, đã mất không biết bao thời gian vò đầu bứt tai để giải cho được các phương trình dạng :

$$x^2 + 1 = 0 \quad \text{và} \quad y^2 + 2 = 0$$

Bài toán nom có vẻ đơn giản này cho ta những kết quả bất ngờ : $x^2 = -1$ và $y^2 = -2$, khiến cho nhiều thế hệ các nhà toán học sống trong ác mộng. Làm sao mà bình phương của một số lại là một số âm được ? Làm sao mà x^2 lại bằng -1 được ? Điều đó hoàn toàn trái với quy tắc về dấu trong đại số ! Muốn giải quyết vấn đề liệu có phải phát minh ra con quái vật nào đây ?

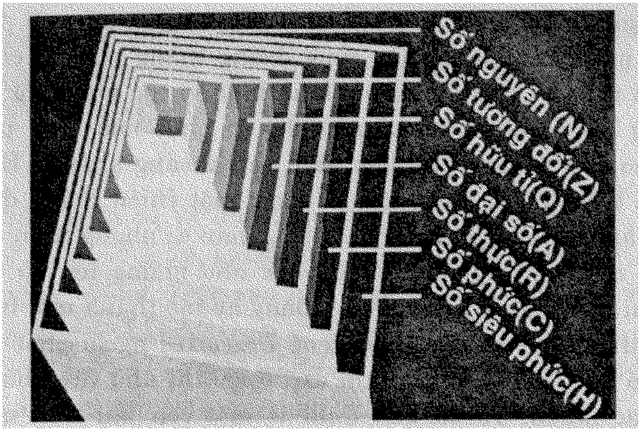
Raffaele Bombelli là người đầu tiên dũng cảm chấp nhận cho một con vật kì quái được gia nhập vào vườn thú các con số, con vật đó là $i = \sqrt{-1}$, sao cho $i^2 = -1$. Như vậy phương trình $x^2 = -1$ có hai nghiệm là i và $-i$. Phương trình còn lại thì có các nghiệm là $i\sqrt{2}$ và $-i\sqrt{2}$. Những nhà toán học ngày xưa không thoải mái lắm với con số i này nên họ gọi nó là số "ảo". Leibnitz nhìn thấy trong số i "*một nơi ẩn náu tuyệt diệu cho linh hồn thần thánh chìm trong cõi tồn tại và phi tồn tại*". Thực ra thì i chỉ là một mặt của vấn đề. Nó là "phần ảo" của một số có tên gọi là "số phức". Dạng tổng quát của số phức là $a + bi$, trong đó a và b là những số thực. Chẳng hạn $3 + 7i$ và $-2 + 4i$ là những số phức. Tóm lại, một số phức là một cặp số (a, b) được coi như là một cá thể đơn nhất. Tập hợp những cặp song sinh dính liền nhau này là tập hợp C các số phức $a + bi$, trong đó a (trong thí dụ trên là 3 và -2) là phần thực, còn bi (trong ví dụ trên là $7i$ và $4i$) là phần ảo. Chú ý rằng nếu $b = 0$, số phức biến thành số thực a, nhận xét nhỏ đó đủ để ta kết luận rằng R là một tập hợp con của C.

Bây giờ ta trở lại đường thẳng số. Biết sắp những số phức vào đâu đây một khi như ta thấy rằng đường thẳng này đã chật ních những số thực ? Dù bạn có dùng kính hiển vi cực mạnh để soi, bạn sẽ không thấy còn "lỗ hổng" nào cho số phức nữa. Vậy phải sắp chúng vào đâu ? Đáp : Bạn hãy nhìn vào khoảng không ! Đúng thế đấy ! Để biểu thị số phức, cần bổ sung một chiều thẳng đứng vào đường thẳng số. Đó quả là một ý tưởng giản dị nhưng thần tình cho phép coi các thành phần của số phức như những toạ độ của một điểm trên mặt phẳng ! Hai đường thẳng ấy tạo thành một hệ toạ độ *Đề-các* (theo tên nhà toán học René Descartes người phát minh ra hệ toạ độ này). Suy cho cùng thì cách biểu thị như vậy không có gì đáng ngạc nhiên. Ta đã biết định vị một con tàu trên mặt biển bằng hai toạ độ là kinh độ và vĩ độ. Vì một số phức có hai mặt : mặt thực và mặt ảo, ta nghĩ ngay đến trục ngang vững chãi trên mặt đất cho mặt thực và trục dọc thẳng tiến lên trời cho mặt ảo.

Lợi ích của số phức vô cùng to lớn. Tập hợp các số này đặc biệt quan trọng đối với những kĩ sư điện tử, các nhà vật lí nghiên cứu hạt cơ bản, các chuyên gia ngành khí động học...

$\mathcal{H}$ TẬP HỢP SỐ SIÊU PHỨC QUATERNION THẦN LINH CỦA MỌI SỐ

Nào, ta chỉ còn một con thú nữa thôi để ngắm trong vườn thú, đó là số siêu phức hay quaternion. Một nhà toán học Ai-len tên là William Rowan Hamilton phát kiến ra số này vào năm 1843. Chính để suy tôn người có công phát kiến mà ta kí hiệu tập hợp các số này là H. Dạng tổng quát của chúng là $a + bi + cj + dk$ trong đó a, b, c, d là những số thực, còn i, j, k là những số ảo. Không thể nào biểu thị các số siêu phức trên một trục toạ độ Đề-các. Phải dùng một hệ quy chiếu bốn chiều trong một không gian mà ta không hình dung nổi, vì ta chỉ cảm nhận được không gian ba chiều mà thôi.



Từ tập hợp N đến tập hợp H, những tập hợp số được giới thiệu trong chương này lồng vào nhau, cái nọ trong cái kia y như những con búp bê Nga. Tập hợp H bản thân nó cũng nằm trong một siêu tập hợp tập hợp những octavion (siêu siêu phức) ta không đề cập ở đây.

Các số siêu phức quaternion này liệu có tồn tại thật sự như một ngôi sao, một con bò cái hay một con sông ? Hamilton không hề đặt vấn đề như thế. Ông ta cần những con số này để giải một số bài toán, chỉ có thế thôi ! Các nhà toán học không quan tâm đến việc các số có quan hệ gì với hiện thực vật chất hay không. Bất luận trường hợp nào các số cũng là sản phẩm trí tuệ của họ mà thôi. Điều kì diệu là trong mọi trường hợp, các nhà vật lí đều tìm thấy ứng dụng thực tế của các con số do các nhà toán học nghĩ ra ! Chẳng hạn số siêu phức quaternion được các nhà vật lí hạt cơ bản và các kĩ sư thiết kế rô-bốt hết sức ham chuộng. Về phương diện này, câu hỏi do Einstein đặt ra khiến ta phải suy nghĩ nhiều : "*Tại sao các môn học vốn là sản phẩm của trí tuệ con người ít phụ thuộc vào kinh nghiệm nhất, lại phù hợp với thực tiễn một cách hoàn hảo như vậy ?*"

CHUYỆN HOANG ĐƯỜNG VỀ LOÀI VẬT BIẾT ĐẾM

Thời xa xưa, có một câu chuyện được truyền tụng từ lãnh địa này đến lãnh địa khác rằng có một vị lãnh chúa tìm cách tống cổ con quạ làm tổ trên tháp chuông toà lâu đài của mình. Nhiều lần ông rình bất ngờ tóm cổ con quạ nhưng không bao giờ thành công. Hễ ông đến gần là quạ liền bay sang đậu ở ngọn cây gần đó, trong tầm nhìn đến tháp chuông và tổ quạ. Khi ông bỏ đi thì quạ lại bay trở về tổ. Vị chủ nhân lâu đài nổi cáu, vò đầu và nghĩ ra một cách. Ông cho gọi một tá điền đến cùng ông trèo lên tháp chuông. Một lát sau ông đi xuống một mình, để lại người tá điền rình bên tổ quạ, tay lăm lăm cây gậy chờ sẵn. Vậy mà con quạ không nhúc nhích gì. Nó chỉ trở về tổ khi người tá điền đã bỏ cuộc. Ông chủ lâu đài liền cho gọi 2 rồi tiếp đến 3 tá điền đến giúp sức. Cứ theo cách như trước mà làm, nhưng kết quả vẫn không thay đổi. Con quạ chỉ trở về tổ khi bọn người kia, khi thì 3, khi thì 4, tất cả đã ra đi. Lần cuối có 5 người vào tháp, sau đó 4 người trở ra. Lần con quạ bay về tổ này... cũng là lần cuối ! Ý nghĩa của câu chuyện vui dân gian này là : loài quạ chỉ biết đếm đến số 4.

Phải đến năm 1904 mới có những nhà khoa học xem xét một cách nghiêm túc vấn đề khả năng cảm nhận số của loài vật qua chuyện con ngựa Hans ở Đức rất nổi tiếng vì có tài tính toán trời phú. Khi người huấn luyện hỏi nó 5 + 2 là bao nhiêu, nó dùng vó gõ 7 lần lên mặt đất. Gã Einstein bốn chân này đã chinh phục lòng tin của tất thảy các bác học trên thế giới. Họ đều cho rằng đây là hiện tượng đột biến khiến con ngựa ấy có tài năng đặc biệt.

Người ta cho rằng con ngựa Hans giống Đức này có biệt tài tính toán.
Chủ của nó (người trong ảnh), không biết thuộc loại "hâm hấp" hay là một tay lừa bịp.

LOÀI VẬT CÓ KHẢ NĂNG TÍNH TOÁN KHÔNG ?

Bốn năm sau, nhà tâm lí học Oskar Pfungst bắt tay nghiên cứu lại trường hợp con ngựa biết đếm. Ông khám phá ra ngay trò bịp. Việc chú ngựa Hans làm phép cộng chỉ đơn giản là nhìn chăm chăm vào chủ của mình. Hans cứ dùng vó gõ xuống đất cho đến khi ông chủ khẽ gật đầu ra hiệu dừng lại đúng lúc cho kết quả chính xác. Thực tình Hans là một con ngựa có tài... nhìn chủ, còn chủ nó thì giờ ta không biết nên gọi là một anh "hâm hấp" hay là một tên bịp bợm.

Vậy là đi đời chuyện con ngựa giỏi đếm. Nhưng vấn đề đặt ra vẫn nguyên vẹn : làm sao để kiểm nghiệm được loài vật có biết đếm hay không ? Trước hết phải xem "đếm" nghĩa là gì đã. Định nghĩa việc đếm tuỳ thuộc vào từng nhà nghiên cứu. Theo Jacques Vauclair, chuyên gia về trí khôn loài vật ở Phòng thí nghiệm khoa thần kinh nhận thức thuộc Trung tâm nghiên cứu khoa học quốc gia Marseille, đếm tức là liên kết hai khái niệm : khái niệm về số bản và khái niệm về số thứ tự. Số bản có ý nghĩa số lượng và giá trị. Bảy viên bi có số lượng lớn hơn 5 viên bi bởi vì bản số cao hơn. Tính thứ bậc tương ứng với số thứ tự, với khái niệm dãy : 1 đi trước 2, 2 đi trước 3 và cứ như vậy. Chính hai khái niệm về giá trị và về thứ bậc cho phép ta tính toán.

Sự cần thiết phải tính toán với những số lượng lớn chắc chắn đã thúc đẩy con người suy nghĩ nhiều về các chữ số. Trong việc này ngành thiên văn có vai trò to lớn. Để điều khiển được các con số "thiên văn", những nhà thông thái Lưỡng Hà, Ấn Độ, May-a làm cho toán học phát triển nhanh. Còn loài vật thì đương nhiên không quan tâm đến việc sao Thổ quay nhanh chậm ra sao. Jacques Vauclair nói : "*Ngược lại, nhiều loài vật phải xoay xở trong không gian và môi trường của mình. Chúng cần có khả năng nào đó về số nhưng chắc chắn không phải là cách đếm như ta*".

"Có bao nhiêu chìa khoá, có mấy bút chì nào, Alex ?"

Nhà nghiên cứu người Mỹ Irène PEPPERBERG dạy cho chú vẹt xám Alex học nói, học cách trả lời cho câu hỏi : "Có bao nhiêu chìa khoá trước mặt ?" Con chim ọ oẹ trả lời đúng hết. Hoan hô ! Nhưng tài năng của nó không có gì ghê gớm cả. Alex chỉ đơn giản dùng một thủ thuật mà ta gọi là "đánh giá bằng mắt nhìn". Để đếm cho đến 4 hay 5 vật đặt trước mắt mình, con người cũng như con vật không cần đếm. Người hay vật chỉ liếc nhìn qua số lượng. Chỉ khi nào số lượng vượt quá 5 thì bắt buộc người ta đếm (Chú ý rằng điều này phù hợp với câu chuyện con quạ kể trên kia). Người ta nhẩm đặt vào vật thứ nhất nhãn đánh số 1, vật thứ hai nhãn đánh số 2... Tên của nhãn cuối cùng chính là số các vật.

Khả năng đếm kiểu này cũng khó mà có được. Trẻ em phải đến tuổi 6, 7 mới có khả năng này. Một vài loài vật xem ra cũng đạt tới trình độ ấy. Chẳng hạn những con chuột của Hank David, nhà nghiên cứu Canada. Những con chuột này phải tìm đúng cái hộp đựng thức ăn dành cho chúng đặt trong một dãy hộp không đựng gì. Nhà nghiên cứu đã khử mùi các hộp để chuột không theo mùi mà tìm ra hộp cần tìm. Rồi người ta xê dịch hộp ra xa nhau, ban đầu cách nhau 50cm sau cách nhau 1m, để chuột không nhận ra vị trí của chúng nữa, hộp thứ hai đựng thức ăn nay chiếm vị trí thứ ba. Nhưng bao giờ chuột cũng tìm thấy hộp đựng thức ăn ! Vậy là chúng có ý thức về số thứ tự các hộp, cho dù hộp đặt ở chỗ nào, tức là nhận ra vị trí tương đối các hộp, và trên mỗi hộp dường như có nhãn chỉ số hiệu.

Nhận định được vị trí của vật trong dãy, chuyện có thể tin được. Nhưng còn tính toán thì sao ? Để suy xét chuyện này ta tìm ứng viên trong số những con vật gần với giống người nhất, đó là loài khỉ.

Nhà nghiên cứu người Mỹ Marc Hauser trong năm 1996 đã làm trắc nghiệm khả năng tính toán của những con khỉ Rhésus trên một hòn đảo ngoài khơi Porto Rico. Ông dùng cà, thứ hoa quả mà bọn khỉ rất thích để nhử chúng vào việc tính toán. Marc Hauser đặt hai quả cà vào một chiếc hộp và chìa hộp trước mặt một con khỉ cho nó thấy, sau đó ông đậy hộp lại và bí mật rút một quả cà ra khỏi hộp. Khi ông mở hộp ra, con khỉ có vẻ ngẩn ngơ. Nó cứ đưa mắt nhìn lui nhìn tới dường như rất ngạc nhiên khi chỉ thấy một quả cà thôi ở chỗ đáng ra phải có hai quả. Marc Hauser suy luận rằng con khỉ đã làm phép tính 1 + 1 = 2 và nó ngơ ngẩn khi chỉ thấy 1 quả cà mà thôi.

KHÔNG NÊN DẠY ĐẾM CHO... MỘT CON KHỈ GIÀ !

Năm 1989, Sally Boysen dạy cho một con tinh tinh cái có tên là Sheba học làm tính. Cô tinh tinh phải chạy qua ba đoạn đường, trên mỗi đoạn có đặt một số đồ vật (tổng số đồ vật không quá 5). Đến đoạn cuối nó phải chỉ vào cái bảng ghi đúng số vòng tròn tương ứng với tổng số đồ vật mà nó đã gặp trên đường đi. Cô bạn của Tarzan này tìm được câu trả lời chính xác cho 80% trường hợp. Sally Boysen thậm chí còn thành công trong thí nghiệm với tinh tinh khi thay đồ vật bằng những con số ghi trên các tấm bìa ! Kết quả tốt đẹp thực, có điều phải dành nhiều tháng cho việc tập luyện.

Jacques Vauclair muốn đi xa hơn. Ông nhận xét : *"Trong các thí nghiệm được thực hiện trên đây, vật quan sát thường là thức ăn, chắc chắn điều ấy tác động đến mắt nhìn của con vật. Hơn nữa, những số* *lượng đồ vật trong thí nghiệm thường rất nhỏ. Con Sheba chẳng hạn biết gần như thuộc lòng những tổ hợp đồ vật thí nghiệm !"*

Jacques Vauclair khởi sự một loạt thí nghiệm mới. Ông giải thích : "*Chúng tôi cho bọn khỉ đầu chó làm việc trên màn hình máy vi tính, những đồ vật không còn là thức ăn nữa. Bọn khỉ làm việc trên những con số lớn đến 10, chúng tôi ra những phép cộng và phép trừ. Chúng tôi còn đo thời gian các con vật cần để trả lời. Trước đó khái niệm thời gian không được ai chú ý, trong khi thực sự đó là dấu hiệu tuyệt vời để xét lao động trí óc*". Quả vậy, bài toán càng khó thì thời gian động não cần nhiều. Khi số lượng vật lớn hơn 5, thời gian dùng để đếm tỉ lệ với số các vật. Khi đo thời gian, nhà nghiên cứu hi vọng chứng minh được rằng bọn khỉ thực sự đếm đồ vật. Những thí nghiệm trên đã đính chính lại niềm tin của Platon rằng cùng với cái cười và lời nói, chỉ có con người mới biết tính toán mà thôi.

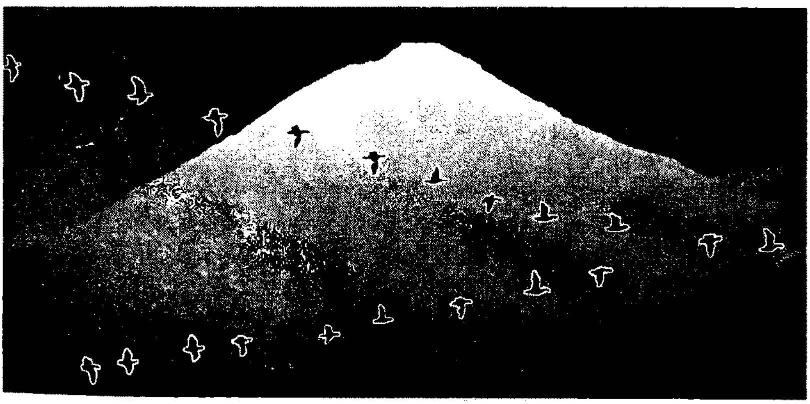
Nhà nghiên cứu Sally Boysen ở Đại học Quốc gia Ohio nghĩ ra một đoạn đường nhiều chặng để kiểm nghiệm khả năng tính toán của con tinh tinh Sheba. Sheba đi từ chậu này tới chậu khác, nhận biết số hoa quả để trong từng chậu. Sau đó nó chỉ con số trên tấm bìa ghi tổng số hoa quả trong các chậu. Có đến 4 trên 5 trường hợp trả lời chính xác ! Sally Boysen tiếp tục yêu cầu Sheba thay hoa quả trong các chậu bằng con số tương ứng. Con siêu tinh tinh một lần nữa có thành tích cao !

NHỮNG CHIẾC MÁY ĐẾM SINH HỌC

Khi một con ong phát hiện một nơi hoa nhuỵ dồi dào, nó lập tức bay về tổ báo tin cho cả đàn biết. Nó bắt đầu một điệu vũ, một thứ ngôn ngữ cơ thể thực thụ. Anh thợ hút mật này qua điệu nhảy không những chỉ cho đồng đội hướng bay đến nơi lấy nhị hoa mà còn chỉ ra khoảng cách đến đó nữa. Khoảng cách ư ? Vậy loài ong biết đo đạc sao ? Liệu ong có làm như chúng ta là đếm những sải chân khi đo chiều dài gian phòng chẳng hạn ? Không đâu. Chúng ta có tật hay gán cho hành động loài vật những từ ngữ dành cho hành động con người. Để ước lượng khoảng cách, ong không đo mà... căn cứ vào năng lượng tiêu hao. Chuyển dịch sang ngôn ngữ con người, thông điệp của con ong sẽ đại loại như sau : "Này chị em ơi ! Có một chùm nhị hoa to bự về bên trái mặt trời một tí, còn khoảng cách đến đó thì bở hơi tai luôn !" Đám chị em lập tức ào ào bay theo hướng đã chỉ và chỉ dừng lại khi thấy sức lực đã cạn kiệt.

Một con chó cái có mười chó con biết ngay lập tức có con nào đi lạc không. Nhưng cũng như loài ong, chó không đếm. Chó mẹ biết phân biệt tiếng kêu của từng chú nhóc. Chó mẹ cũng nhận biết mùi từng đứa con... Qua nghe tiếng hay ngửi mùi mà chó mẹ biết có con chó con nào thiếu vắng. Đó là một số trường hợp trong rất nhiều trường hợp mà đếm . không có nghĩa là đếm !

Các loài chim di cư thì sao ? Chim én không biết khoảng cách giữa Alger (thủ đô Algérie) và Paris là 1 300 km. Đối với loài chim này, khái niệm thời gian là chủ đạo. Nhưng chim không đếm thời gian. Chúng lắng nghe chiếc đồng hồ bên trong cơ thể cực kì nhạy. Đồng hồ đó nói : "Dừng thôi, ngươi đã bay khá lâu rồi, bây giờ ngươi đến nơi rồi đó".



Những con ngỗng Bắc cực này định vị đường đi di cư như thế nào ? Nhiều công trình nghiên cứu loại trừ khả năng đếm của loài này

KHÁCH SẠN ALEPH CỦA HILBERT VÀ CANTOR

Một khách sạn có thể chứa hết nhân loại cộng thêm một người. Một phần miếng bánh mứt kem lớn bằng cả miếng mứt kem. Một đường thẳng chứa hết mọi điểm của toàn vũ trụ. Đó là một thế giới điên khùng, kì quái do Georg Cantor sáng tạo ra để chinh phục cái vô tận. Nào ta đi dạo trên bờ vực thẳm ấy !

Khi tròn 25 tuổi (1870) Georg Cantor đã bắt đầu giảng dạy tại Đại học Halle (Đức)

Một đêm mưa to gió lớn, có một lữ khách bước vào Khách sạn ALEPH[1].

"*Rất tiếc, khách sạn hiện không còn chỗ nào nữa dù nó có vô hạn phòng. Xin ông thông cảm.*" Đó là lời của Hilbert[2], viên quản lí khách sạn. Nhưng nhác thấy người khách có vẻ bơ phờ, mệt mỏi, Hilbert động lòng trắc ẩn.

– Xin ông chờ cho một lát, tôi vừa tìm ra cách có chỗ cho ông.

Thế là viên quản lí bấm chuông tập hợp mọi người trong khách sạn. Khi mọi khách đã có mặt trong đại sảnh, viên quản lí yêu cầu mỗi người hãy chịu khó dọn sang ở phòng có số kế tiếp phòng cũ. Người đang ở phòng số 1 sẽ chuyển sang phòng số 2, người ở số 2 chuyển tiếp sang số 3, người ở số 3 chuyển sang số 4 và cứ thế cho đến vô tận.

– Xong rồi đó thưa ông !

Hilbert vừa nói vừa đưa cho người khách mới chiếc chìa khoá phòng số 1.

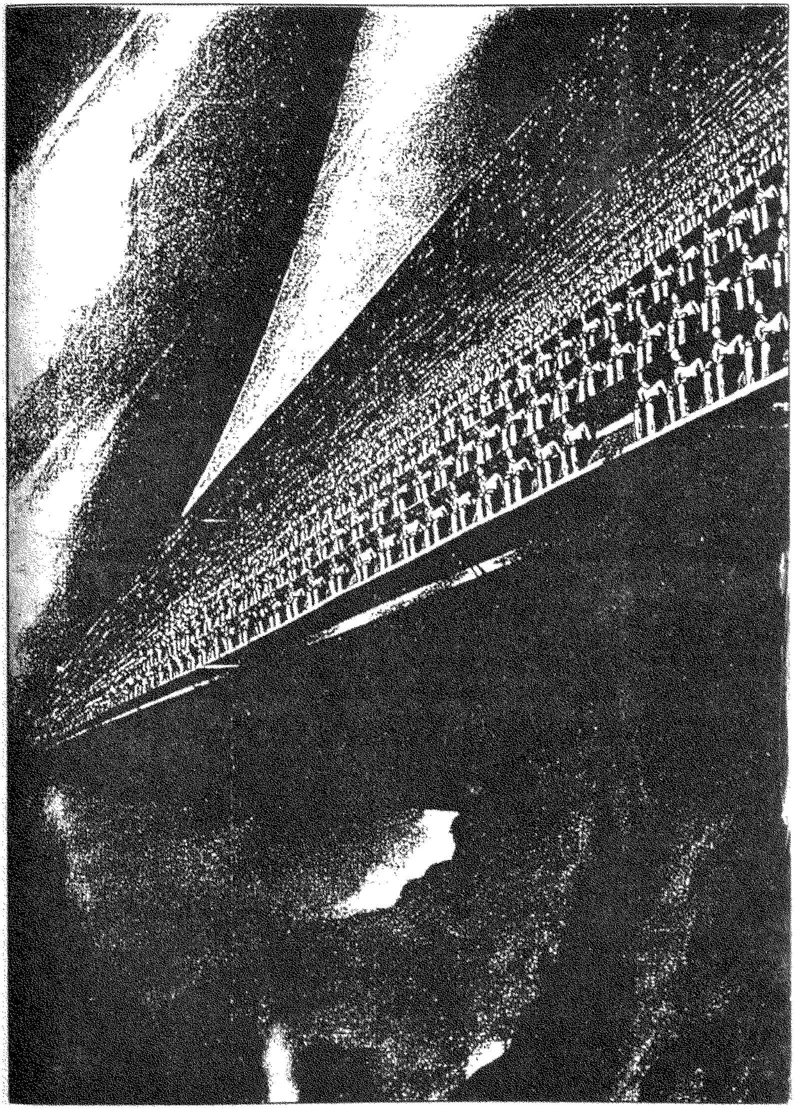
Tối hôm sau chiếc xe ca của Công ti Du lịch Vô hạn đỗ trước khách sạn. Đó là một chiếc xe ca đặc biệt đang chở một lượng khách vô hạn. Vào giờ đó khách sạn vẫn chật hết chỗ. Viên quản lí Hilbert giải quyết chuyện gay cấn này như sau : khách của phòng 1 chuyển sang phòng 2, khách phòng 2 chuyển sang phòng 4, khách phòng 3 chuyển sang phòng 6, khách phòng 4 chuyển sang phòng 8 và cứ thế đến vô tận.

Nhờ cách dàn xếp này mà số khách cũ vô tận được chuyển sang tất tật ở các phòng số chẵn, để lại tất cả các phòng số lẻ cho số vô hạn khách mới đến.

---

[1] *ℵ (đọc là Aleph) - chữ đứng đầu trong bảng chữ cái Hébreu - kí hiệu trong toán học dùng chỉ tập hợp vô cùng vô hạn*

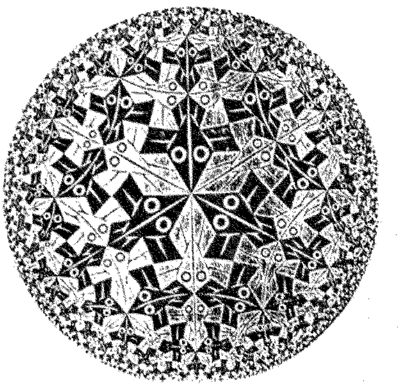
[2] *David Hilbert (1862 – 1943) nhà toán học lỗi lạc Đức người rất thích kể giai thoại này cho sinh viên nghe*

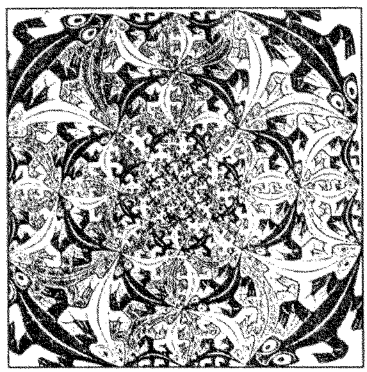


Ngước nhìn về cõi vô tận.
Tranh của danh hoạ Nga Anatoli FOMENKO

ĐẾM NGHĨA LÀ GÌ ?

Câu chuyện trên có vô lí không ? Không ! Nó có vẻ kì quặc, mới lạ, phi thường nhưng không vô lí. Bởi lẽ câu chuyện xảy ra trong một thế giới khác, thế giới toán học trong đó không có khái niệm vô lí. Khách sạn vô cùng tận do "Aleph" quản lí. Aleph không phải vị vương tôn công tử nào hay có gốc gác từ chiến tranh giữa các vì sao, là người ngoài hành tinh hay một siêu máy tính. Khai sinh năm 1893, sản phẩm của bộ óc nhà toán học thiên tài Đức Georg Cantor, aleph là một con số không giống bất kì con số nào khác. Aleph giúp ta mở cánh cửa của một thế giới mới, ở đó 1 + 1 không bằng 2, một phần miếng bánh mứt kem bằng cả tấm bánh. Đó là thế giới của những thứ vô cùng tận và lương tri bình thường bị bấn loạn.

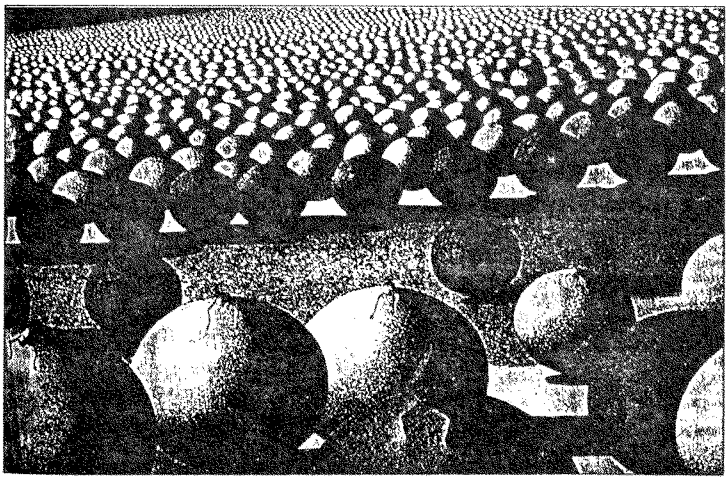




Nhà đồ hoạ người Hà Lan Maurits C. Escher sáng tác rất nhiều tác phẩm hình dung sự vô tận. Trong hình bên trái, ta thấy một mô típ lặp đi lặp lại rất nhiều lần và cứ bé dần đi cho đến giới hạn tột cùng là chu vi của một đường tròn. Hình bên phải thì ngược lại : giới hạn của sự lặp lại là tâm của đường tròn.

Muốn tiếp cận aleph, cần phải đặt ra câu hỏi cơ bản : "Đếm nghĩa là gì ?" Albert Einstein thiên tài cũng như một thành viên bộ tộc *Bochiman* lạc hậu nhất ở sa mạc *Kakahari* đều biết rằng hai bàn tay có cùng một số ngón tay. Đương nhiên điều đó do mắt nhìn, thói quen hay trực giác mang lại. Nhưng nếu họ muốn tin khác, có một cách thật đơn giản và bền vững, đó là phép tương đương một đối một. Cụ thể họ đem đối chiếu từng ngón của hai bàn tay : ngón cái phải với ngón cái trái, ngón trỏ phải với ngón trỏ trái... cho đến ngón út phải với ngón út trái. Không còn ngón tay nào "bơ vơ một mình". Ngón nào cũng tìm được "bồ" của mình. Kết luận : số ngón tay của bàn tay này bằng số ngón tay của bàn tay kia.

Cũng theo cách đó ta nhìn vào một lớp học, trong đó có một số học sinh và một số ghế ngồi. Làm sao để biết số học sinh và số ghế ngồi có bằng nhau không ? Đơn giản thôi : ta bảo học sinh ngồi xuống, nếu không có ghế nào trống, nếu không có em học sinh nào ngồi trên đầu gối em khác, nếu không có học sinh nào phải đứng, ta có thể kết luận rằng hai tập hợp học sinh và tập hợp ghế có chung một số phần tử.



Một tác phẩm khác của Anatoli Fomenko. Tiêu đề bức hoạ : "Các viên bi-a và năng lượng". Phụ đề : "Các hệ thống động và lí thuyết xác suất". Thế cũng được chứ sao ? Người ta cũng tìm thấy trong bức hoạ sự ẩn dụ về tập hợp các số nguyên...

Có bao nhiêu phần tử ? Để trả lời câu hỏi thứ hai này ta đem tập hợp học sinh đối chiếu một - một với tập hợp phổ quát và luôn

luôn sẵn sàng để ta sử dụng. Tập hợp đó là tập hợp các số nguyên hay số "tự nhiên" : 1, 2, 3, 4, 5... Bằng cách đặt tương ứng một đối một tập hợp học sinh và tập hợp các số tự nhiên, ta biết được số học sinh. Chỉ cần nói to lên số tự nhiên cuối cùng khi kết thúc sự tương ứng : 17 học sinh ! 17 được gọi là "bản số" hay "bản" của tập hợp học sinh.

CÓ THỂ ĐẾM CÁI VÔ HẠN !

Phương pháp trên đây được dùng một cách vô thức để đếm bất kì tập hợp vật thể nào, dù có đồ sộ đến mấy. Chẳng hạn, con số khổng lồ nhất mà các nhà vật lí sử dụng là số các nguyên tử chứa trong vũ trụ. Có khoảng chừng 10^{80} nguyên tử. Một con số chưa hề thấy, có tính huyền thoại : con số gồm số 1 đi trước 80 số 0 ! Cứ mất một giây để xướng một số thì cần 10^{80} giây để đếm số nguyên tử. Thế mà từ khi vũ trụ hình thành đến nay, mới chỉ có 10^{20} giây trôi qua ! Không biết bao nhiêu lần vũ trụ tồn tại như thế này mới đủ cho việc đếm các nguyên tử ! Dù sao thì việc này cũng khả thi nếu vũ trụ tồn tại được bền lâu. Có điều chắc chắn là bạn có thể đếm hết được số nguyên tử trong vũ trụ, nhưng bạn không đếm hết được các số tự nhiên. Bởi lẽ giản đơn tập hợp các số tự nhiên là vô hạn. Khi bạn đạt đến 10^{80} rồi, bạn vẫn còn xa với cái vô tận y như lúc bạn còn ở số 1 vậy.

Chà, nói đi nói lại cho lắm mà chẳng được gì nhỉ ? Bạn có thể thắc mắc như vậy. Xin bạn đặt cho mình câu hỏi sau : liệu ta có thể đo được tập hợp các số tự nhiên, cái tập hợp ta dùng để đo đếm kia ? "Lương tri" bảo ta không, bởi vì cho rằng số tự nhiên là vô hạn ấy mà lương tri sai lầm ! Chính lúc này là điểm xuất phát cho những khám phá của Georg Cantor, là nơi khởi sự săn lùng các aleph – các tập hợp vô hạn "có thể đếm được". Nói cách khác, những tập hợp vô hạn đếm được theo cách ta đếm học sinh trong lớp vậy.

PHƯƠNG PHÁP CANTOR

Ta nhớ lại cách đếm nói trên : hai tập hợp có chung một số phần tử (hay có chung số bản) nếu ta có thể đặt chúng tương ứng một đối một. Bây giờ bạn hãy ngồi cho chắc vì lương tri của bạn sẽ lung lay mạnh đó !

Tập hợp số chẵn liệu có lớn bằng các số tự nhiên không ? Lương tri của bạn nói ngay : làm gì được ! Nó chỉ bằng một nửa số nguyên thôi. Bạn sai rồi. Hai tập hợp đó bằng nhau đấy ! Cantor cho ta cách chứng minh như sau :

1	2	3	4	5	6 ...
2	4	6	8	10	12 ...

Nếu sự tương ứng trên không đủ thuyết phục thì bạn hãy thay mỗi số chẵn bằng nhóm nhân tử hoá với số 2. Cụ thể $2 = 1 \times 2$, $4 = 2 \times 2$, $6 = 3 \times 2$... Sự tương ứng trên trở thành :

1	2	3	4	5	6 ...
1×2	2×2	3×2	4×2	5×2	6×2 ...

Viết các số chẵn theo cách ấy, bạn yên tâm một mặt không sợ mất số nào, mặt khác cứ mỗi số chẵn thì có một số nguyên tương ứng cho đến vô tận...

Bạn vẫn còn chưa tin à ? Thế thì đặt thêm câu hỏi nữa đi. Liệu tập hợp các số chính phương* có bằng tập hợp các số tự nhiên không ? Lần này bạn không trả lời ngay là không nữa vì sợ bị hố. Tuy nhiên lương tri của bạn vẫn la ó mà cho rằng các số chính phương thì hiếm hoi hơn là các số tự nhiên. Lại một lần nữa lương tri của bạn nhầm rồi. Có bao nhiêu số tự nhiên thì có bấy nhiêu số chính phương, thế đó, Georg Cantor đã lập sự tương ứng sau đây để thấy rõ :

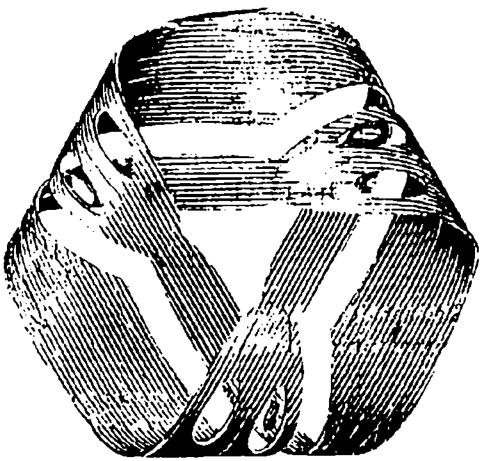
1	2	3	4	5	6 ...
1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2 ...
1	4	9	16	25	36 ...

---

* *Số bình phương của một số tự nhiên. Ví dụ 9 là số chính phương vì là bình phương của 3.*

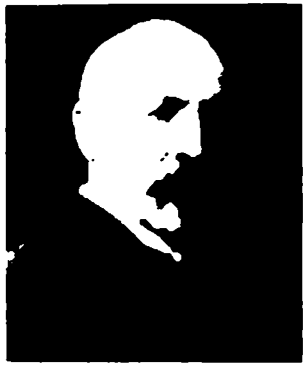
Tóm tắt

Tập hợp vô hạn các số tự nhiên có cùng số phần tử như tập hợp vô hạn các số chẵn, cũng như tập hợp vô hạn các số chính phương. Nói theo thuật ngữ khoa học thì chúng có chung một bản số, vì chúng ta lập được giữa các phần tử của chúng một sự tương ứng một đối một. Sự việc ở đây cũng giống hệt khi ta so sánh số học sinh với số ghế ngồi. Nhưng ta cũng biết rằng tập hợp các số chẵn cũng như tập hợp các số chính phương lại là những bộ phận của tập hợp các số tự nhiên. Từ đó, nào xin chia tay với cái lô-gic thường ngày cũng như vĩnh biệt lương tri thân mến, Cantor đưa ra một kết luận kinh hoàng : đối với các tập hợp vô hạn thì một bộ phận có thể lớn bằng cả toàn thể ! Điều này cũng trở thành đặc điểm để các nhà toán học xem xét liệu một tập hợp có vô hạn hay không.



Một "giải Moebius" dưới con mắt nhìn của Maurits C. Escher. Đó là một vũ trụ có kích thước hữu hạn nhưng từ mặt này sang mặt kia người ta có thể đi mãi không có nơi tận cùng.

CHA ĐẺ CỦA LÍ THUYẾT TẬP HỢP



Georg Cantor lúc 65 tuổi

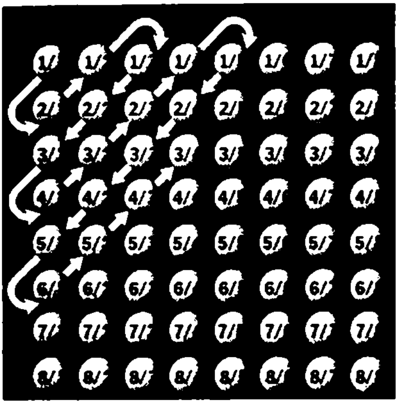
Georg Ferdinand Ludwig Philippe Cantor sinh ở Saint Péterbourg năm 1845. Khi còn nhỏ ông rời nước Nga để về sống ở Đức, học toán và trở thành giảng viên tại Đại học Halle. Vào thời gian ấy ông xây dựng lí thuyết tập hợp làm nền tảng cho hầu hết các môn toán học thế kỉ XX. Những công trình của ông về sự vô hạn gây lo lắng cho các nhà toán học bảo thủ, trong đó có thầy cũ của ông là Léopold Kronecker. Vị giáo sư này công khai cho Cantor là "một tên lang băm trong khoa học" đồng thời là "kẻ làm hư hỏng thanh thiếu niên". Chính bản thân Cantor cũng ngạc nhiên với những khám phá của mình : "Tôi thấy như vậy nhưng tôi không tin đâu", đó là câu ông phát biểu khi nói về sự tương ứng giữa các điểm trên một đoạn thẳng với toàn thể các điểm của mặt phẳng. Bắt đầu từ năm 1884 thần kinh ông bị tổn thương. Ông quả quyết nhận là Thượng Đế "ban" cho ông các số siêu hạn. Từ 1900 trở đi bệnh điên của ông hết phương cứu chữa và ông mất năm 1918.

ALEPH "CHỈ SỐ KHÔNG"

Liệu có số nào đủ lớn để biểu đạt bản số của một tập hợp vô hạn như tập hợp các số tự nhiên ? Số 10^{80}, số các nguyên tử có mặt trong toàn vũ trụ được chăng ? Hay là con số 10^{140} được Đạo Phật gọi là "*asankhieya*" ? Không đâu ! Những con số trông khủng khiếp đó thực ra chẳng có ý nghĩa gì so với vô tận cả ! Vậy thì số nào biểu đạt sự vô hạn đây ?

Aleph chính là số đó ! Chính xác hơn là aleph "chỉ số không", cuối cùng ta cũng tìm ra con thú cho vườn thú của ta ! Cantor phát minh ra số này và dùng chữ cái *Hébreu* (Do Thái) đầu tiên là $\aleph$ để làm kí hiệu cho nó. Cantor gọi số này là số "siêu hạn" hay "bản số siêu hạn". Nếu người ta hỏi bạn có bao nhiêu số tự nhiên. Bạn không có cách trả lời nào khác là có... $\aleph_0$!

NGHỆ THUẬT SẮP XẾP



Mọi việc tóm gọn trong cách sắp xếp những dãy vô tận của tất cả phân số. Mục tiêu là đảm bảo không bỏ sót một phân số nào. Muốn vậy, Cantor có ý tưởng sắp xếp phân số không theo thứ tự từ bé đến lớn của phân số mà theo thứ tự lớn dần của tử số (tức là xếp theo trục dọc của hình vẽ) và theo thứ tự lớn dần của mẫu số (trục ngang trên hình vẽ). Chỉ có chuyện phải viết các phân số dưới dạng một cặp số nguyên rồi đem đặt tương ứng những phân số này với tập hợp các số tự nhiên.

1	2	3	4	5 ..
(1,1)	(2,1)	(1,2)	(1,3)	(2,2)

Kết luận : tập hợp các số hữu tỉ có độ lớn $\aleph_0$.

Môn số học dành cho các aleph không giống tí nào với môn số học ta học ở trường tiểu học. Trông thì có vẻ đơn điệu nhưng thật lí tưởng đối với những ai lười tính toán. Ta xét vài trường hợp :

$$\aleph_0 + 1 = \aleph_0$$

$$\aleph_0 + 10^{80} = \aleph_0$$

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$$

Còn bản cửu chương thì sao ? Chẳng có gì phải lo lắng cả :

$$\aleph_0 \times 1 = \aleph_0$$

$$\aleph_0 \times 2 = \aleph_0$$

$$\aleph_0 \times 3 = \aleph_0$$

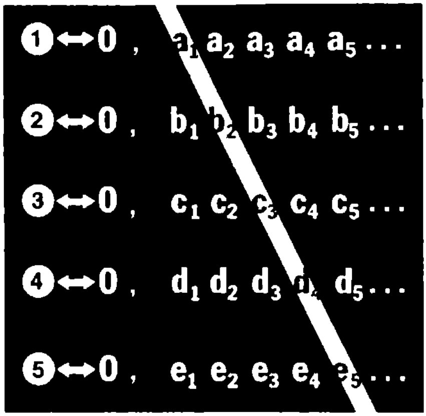
v.v...

PHƯƠNG PHÁP ĐƯỜNG CHÉO

Làm sao đặt tương ứng một đối một các số thực với các số tự nhiên ? Ta hãy xem trường hợp các số thực bao hàm trong khoảng 0 và 1. Cantor nhận xét trước hết rằng những số kiểu này có thể viết dưới dạng một số 0 đi trước một dãy vô tận các số thập phân. Chẳng hạn :

$$\frac{1}{3} = 0,33333333333333333...$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = 0,707106......$$



Bây giờ giả thiết rằng việc đặt tương ứng một đối một thực hiện được. Để tránh chuyện nhầm lẫn ta viết đuôi thập phân bằng các chữ cái chứ không viết bằng chữ số nữa. Như vậy các số thực trong khoảng giữa 0 và 1 sẽ được viết như sau :

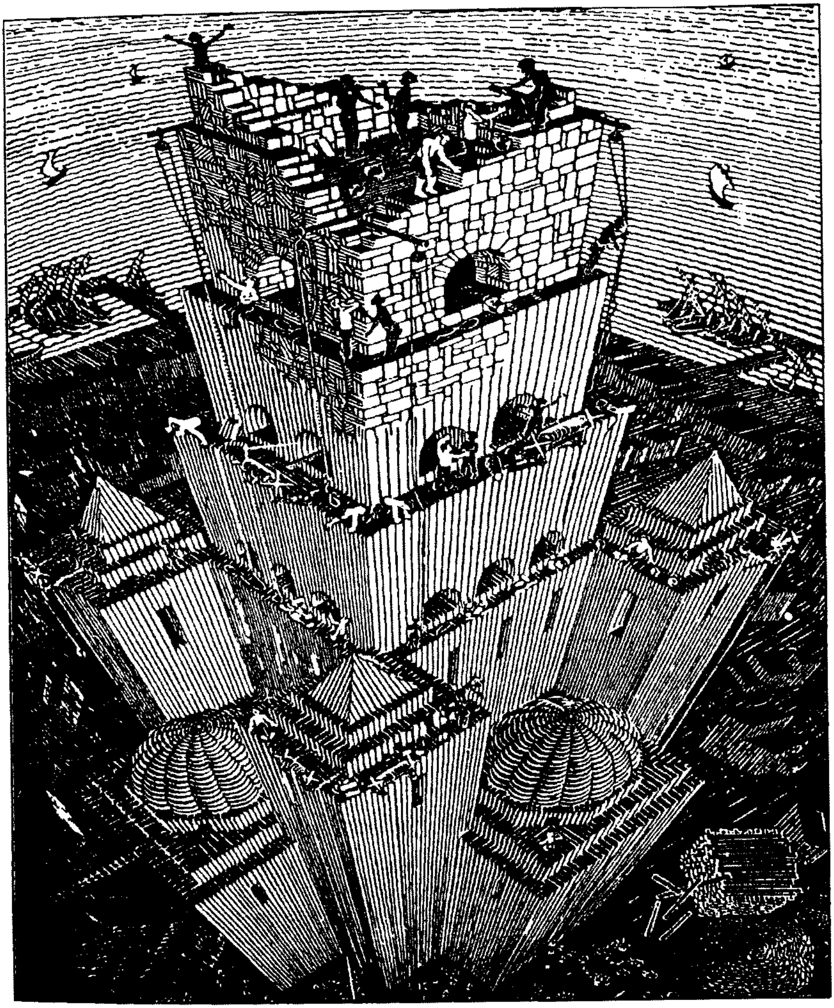
0, $a_1a_2a_3$...   0, $b_1b_2b_3$...   0, $c_1c_2c_3$...   v.v...

Theo giả thiết thì danh sách này chứa hết mọi số thực giữa 0 và 1. Nhưng điều đó sai, vì Cantor lập ra được một số thập phân không có mặt trong danh sách. Cantor kẻ một đường chéo đi qua $a_1b_2c_3$... Rồi ông lập một số mới bằng cách thay a_1 bằng một số khác với a_1, thay b_2 bằng một số khác với b_2, thay c_3 bằng một số khác với c_3... Đương nhiên số mới này cũng là số thực thuộc khoảng giữa 0 và 1, nhưng theo cách xây dựng trên thì nó không thuộc danh sách các số đó. Vậy một số thực không đặt tương ứng được với một số tự nhiên. Ý nghĩa của câu chuyện là như sau : tập hợp các số thực có bản số lớn vô cùng so với $\aleph_0$.

Thế thì còn bình phương ? Quá đơn giản !

$$\aleph_0^2 = \aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$$

Ta cũng có kết quả như vậy với các phép lập phương, nâng lên luỹ thừa bậc cao v.v... Tóm lại : Dầu bạn có chia nhỏ hay phóng đại $\aleph_0$ đến mấy, nó vẫn luôn luôn là $\aleph_0$!



"Tháp Babet" của M. C. Escher. Theo truyền thuyết thì tháp phải cao vô tận. Cantor thành công trong việc xây được tháp số vô tận nhờ có nền móng vững chắc bằng một thứ bê tông kì diệu : phép tương ứng một đối một giữa những phần tử thuộc các tập hợp khác nhau.

CÁCH GIẢI QUYẾT : KHÁCH SẠN VÔ CÙNG TẬN

Môn số học hết sức kì quặc đó có lời giải tiềm ẩn cho nghịch lí về khách sạn vô cùng tận do Hilbert cai quản.

Trong đêm đầu khách sạn hết chỗ : $\aleph_0$

Khách sạn có thể nhận thêm một khách mà không phải tống ai đó ra vỉa hè vì : $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$

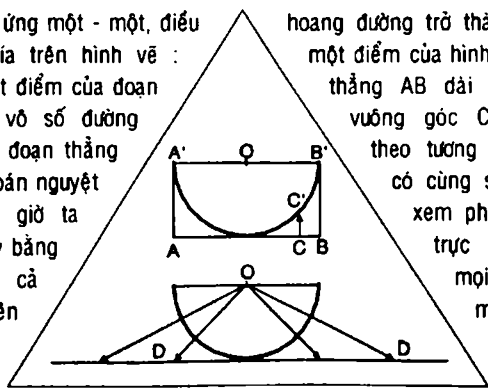
Đêm sau khách sạn vẫn giữ nguyên khách cũ và nhận thêm vô hạn khách mới, việc đó không khó khăn gì vì : $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$

Bạn thấy đó, câu chuyện khách sạn vô cùng tận không phi lí tí nào hết.

Nhưng bạn nói : "*Được rồi, ta có duy nhất một cái vô hạn, đó là $\aleph_0$, bản số của tập hợp các số tự nhiên. Kết luận : Không có gì lớn hơn số đó nữa*". Câu trả lời của Georg Cantor sẽ làm bạn bối rối đó. Không phải chỉ có một cái vô hạn mà có nhiều cái vô hạn ! Có những cái vô hạn lớn hơn những cái vô hạn khác, có cả một thứ bậc vô hạn hẳn hoi cho các số vô hạn !

PHÉP CHIẾU VÔ TẬN

Với sự tương ứng một - một, điều hoang đường trở thành sự thật. Bạn nhìn vào phía trên hình vẽ : một điểm của hình bán nguyệt đều tương ứng một điểm của đoạn thẳng AB dài 3cm. Muốn vậy chỉ cần hạ vô số đường vuông góc CC' từ hình bán nguyệt xuống đoạn thẳng theo tương ứng một - một. Vậy là hình bán nguyệt có cùng số điểm với đoạn thẳng. Bây giờ ta xem phần dưới của hình. Ta hiểu ngay bằng trực giác rằng nếu ta chiếu tất cả mọi điểm của hình bán nguyệt lên một đường thẳng, đường thẳng ấy phải gọi là... vô tận !



Kết luận : Có bao nhiêu điểm trên đoạn thẳng dài 3cm thì có bấy nhiêu điểm trên toàn đường thẳng vô tận !

Ta lại lên đường đi tìm xem có cái gì còn lớn hơn $\aleph_0$ nữa. Liệu tập hợp các số hữu tỉ có bản số lớn hơn $\aleph_0$ chăng ? (Mời bạn xem lại mục số hữu tỉ trong chương Khám phá thế giới các con số). Người ta dễ tin như vậy lắm khi người ta nghĩ đến vô hạn các phân số chứa trong khoảng từ 0 đến 1 : 1/8, 1/4, 1/3, 1/2, 2/3, 3/4, 4/5, 3/8, 7/16, v.v... Cũng có vô số phân số như vậy giữa 3 và 4, giữa 4 và 5, v.v... Cantor có cách sắp xếp tập hợp vô hạn các phân số sao cho một phân số tương ứng với một số tập hợp. Phương pháp đó được mô tả trong khung "Nghệ thuật sắp xếp" trên đây.

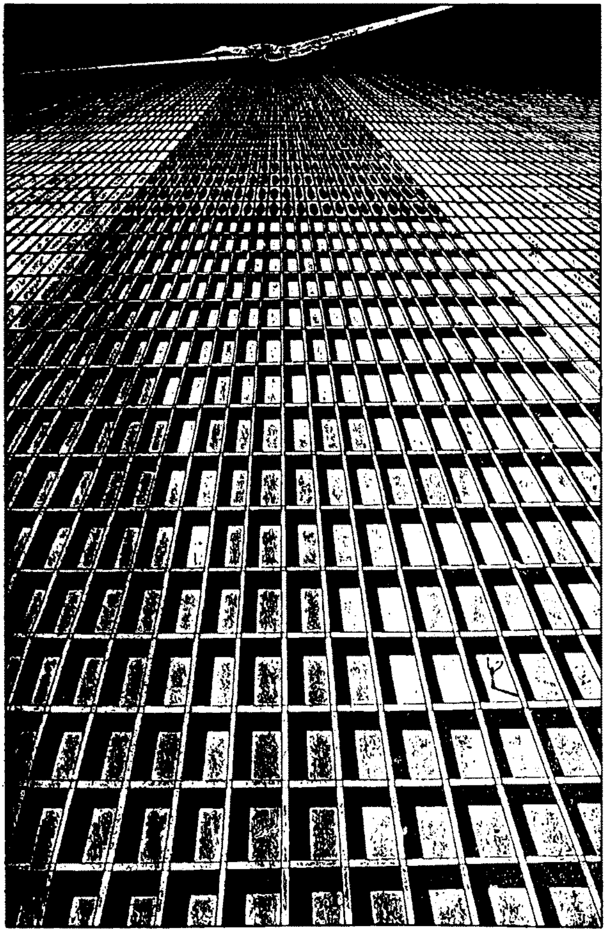
Sau bao nhiêu đêm trằn trọc suy nghĩ, Cantor đã tìm được một tập hợp vô hạn có bản số lớn hơn $\aleph_0$. Tập hợp đó "không đếm được", tức là không có cách nào đặt tương ứng các phần tử của tập hợp này với các phần tử của tập hợp các số tự nhiên, tập hợp đó là tập hợp các số thực và Cantor kí hiệu là C (*xem phần số thực ở chương trước*).

Georg Cantor tìm được một thí dụ về tập hợp các số thực trong hình học. Ta lấy một đoạn thẳng 3cm. Nó chứa vô hạn điểm. Thực ra nó cũng chứa một số lượng điểm như một đoạn thẳng khác nhau dài gấp 5 lần nó. Làm sao chứng minh điều đó ? Ta hãy xem cách dựng hình sau đây.

Có một minh hoạ mới cho cái quy tắc tai ác về sự vô hạn : Cái toàn thể không lớn hơn cái bộ phận. Dưới con mắt của nhà toán học, một đoạn thẳng dài 3cm cũng chứa nhiều điểm như đường xích đạo (dài 42.000 km) hay khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trời (150.000.000 km). Nó cũng chứa hết các điểm của toàn vũ trụ !

Ngoài tập hợp các số thực ra, liệu có tập hợp nào lớn hơn, kiểu tập hợp siêu siêu hạn, đại vô hạn bao gồm hết mọi tập hợp vô hạn ? Vào thời điểm hiện nay, các nhà toán học chưa có ý kiến gì, họ không tin có tập hợp siêu hạn cuối cùng. Thôi, ta hãy dừng lại đó, kể ra cũng khá nhức đầu rồi. Ta nghĩ đến Georg Cantor một chút. Ông ta chẳng phải hết sức kinh hoàng vì những phát hiện của bản thân đó sao ? Ngày nay, không một nhà toán học nghiêm túc nào lại loại bỏ môn số học các số siêu hạn. Cái vô tận không làm cho các nhà toán học bối rối sợ hãi như trước thế kỉ XX nữa. David Hilbert, một nhà toán học lớn khác của nước Đức đã đề câu sau lên bia tưởng niệm người cha đẻ của số siêu hạn :

"**KHÔNG AI XUA ĐUỔI TA KHỎI THIÊN ĐƯỜNG DO CANTOR TẠO DỰNG**".



Đây có phải là Khách sạn vô cùng không ? Trông thì giống nhưng không cao bằng, không lớn bằng và cũng không sâu là bao

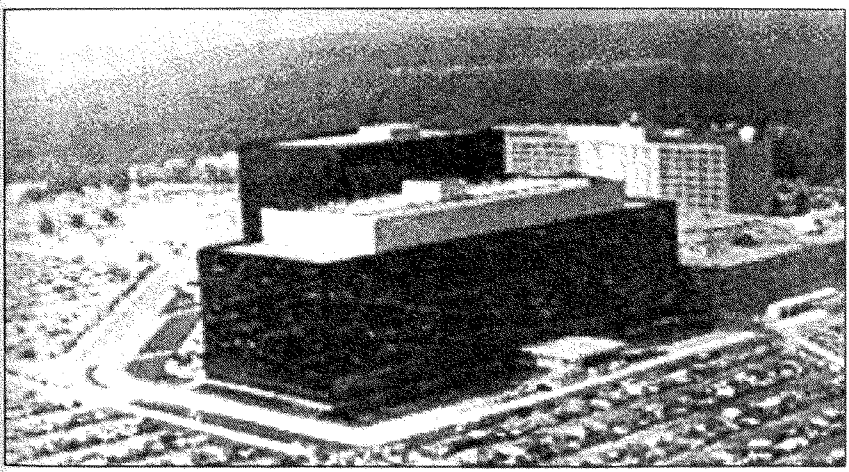
CHUYỆN CÁC ĐIỆP VIÊN XƯA VÀ NAY

Để bắt đầu, các bạn cùng chúng tôi làm thử một phép tính nhẩm : gọi số nhà toán học đang hoạt động trên khắp hành tinh là x, và cứ hàng năm một số y các sinh viên hoàn thành luận văn tốt nghiệp sẽ làm phình thêm đội ngũ đó, ngoại trừ các vị được gọi về Thượng giới, vậy ta sẽ có bao nhiêu nhà toán học với sự tham gia của các vị tân khoa này ? Đương nhiên là $x + y$ rồi, bạn trả lời với một lập luận chặt chẽ. Nhưng khi đếm đi đếm lại tổng số các nhà toán học, ta vẫn thấy thiếu đi một số. Năm này qua năm khác, một bộ phận các nhà toán học mất hút vào thiên nhiên ! Ái chà, biến mất tăm ! Như thể bốc hơi vậy ! Không thấy họ trên các bục giáo sư đại học, chẳng thấy ai làm việc trong các công ti, mà cũng chẳng ai bị người ngoài hành tinh bắt cóc, đơn thuần và giản dị là các bộ óc ấy được tuyển dụng vào các... cơ quan tình báo !

Đó là một sự thật : những điệp viên kiểu James Bond trên khắp hành tinh, hơn cả ý thích sử dụng những máy thu phát-bút máy hay những chiếc ca-mê-ra tí xíu, họ đang say mê tìm tới những người biết giải các phương trình. Cụ thể hơn là họ mải tìm những người giỏi về lí thuyết số. Cái mà người ta trông chờ ở các nhà bác kì tài về các con số không hơn gì là làm sao họ trở thành vô địch về lập và giải mã.

CON CHIẾN MÃ CỦA ĐỘI QUÂN TRONG BÓNG TỐI

Viết theo lối mật ước là cái gì vậy ? Đại khái, chuyện đó y hệt quy trình của kênh truyền hình *Canal Plus*. Kênh này phát ra một mớ hỗn độn hình ảnh mà chỉ có những nơi được phép tức là những người thuê bao mới bắt được sóng rõ nét. Trong lĩnh vực viết theo lối mật ước, một hệ thống mã biến thông điệp thành một văn bản mờ tối và về lí thuyết, chỉ có người nhận thông điệp mới tái tạo được. Thao tác này còn được gọi là "số hoá". Trong nghệ thuật lập mã và giải mã, những tính chất của số tỏ ra cực kì lợi hại và các nhà toán học đi săn lùng những tính chất ấy không mệt mỏi. Lại còn có chuyện này nữa : bộ môn lí thuyết số, một bộ môn toán xưa nay được coi là "thuần tuý" nhất, xa vời nhất với mọi ứng dụng, bỗng trở thành con chiến mã của các cơ quan mật vụ. Suy cho cùng, nếu nghề tình báo không có lối viết mật ước thì chẳng có giá trị gì, thì lối viết mật ước không có lí thuyết số cũng khó mà tiến lên được.



Trụ sở cơ quan NSA ở 9800 Savage Road, gần Washington

Các nhà quân sự, các điệp viên, các nghiệp chủ... ai cũng có những điều bí mật để chuyển đi và ai cũng đòi phải mã hoá thư tín. Vì lẽ đó mà một số nhà toán học biệt vô âm tín. Bao nhiêu người biến đi như vậy ? Đó là chuyện bí hiểm đố ai biết được ! Guy Robin, chuyên gia lí thuyết số, chủ nhiệm bộ môn cao học về viết theo mật ước có nhiều sinh viên theo học ở Đại học Limoges nói : *"Một số sinh viên của tôi được tuyển vào làm việc cho các cơ quan tình báo. Tôi thỉnh thoảng gặp họ trên đường nhưng họ đều câm như hến cả"*. Có nhiều cơ quan tình báo sử dụng đông đảo những bộ óc thông thái và kín đáo này, nhưng đứng đầu danh sách phải kể đến cơ quan NSA (*National Security Agency)* của Mĩ. NSA là cơ quan nhà nước Mĩ lo việc mật mã. NSA có trụ sở gần Washington gồm nhiều khối nhà mênh mông màu xám. Cơ quan này có dáng vẻ bí mật đến nỗi không ai biết ngân sách của nó là bao nhiêu, số người làm việc thực tế nhiều ít ra sao. Trong giới toán học người ta đồn rằng NSA có một đội ngũ riêng cho mình đông đến hàng ngàn đầu óc giỏi giang trong chuyện lập mã. Họ được bảo vệ chặt chẽ trong trung tâm tối mật ở đâu đó trên lãnh thổ Mĩ. NSA rất nuông chiều đám thợ làm toán ấy, trang bị cho họ những máy điện toán đồ sộ nhất thế giới, những phương tiện thông tin liên lạc và nghe trộm tốt nhất (vệ tinh, tàu bè dày đặc ăng-ten, máy bay trang bị máy phát hiện sóng), không có gì họ cần mà không được cung cấp. Tóm lại, những lỗ tai to tướng của NSA săn lùng hết mọi cuộc đàm thoại rôm rả về quân sự, kinh tế và cả chính trị nữa. Và dương nhiên những cuộc thông tin liên lạc đó đã được mã hoá. Stéphane Boltzeyer, chuyên gia về thông tin liên lạc cho rằng lời đồn nói trên không có gì phóng đại. Ông nói : "*Vì tính chất công việc của NSA, tôi không lạ khi họ tuyển dụng hàng ngàn nhà toán học làm việc cho họ. Đó là điều phù hợp với khả năng và nhu cầu của họ*".

MẬT HOÁ MỘT THÔNG ĐIỆP NHƯ THẾ NÀO ?

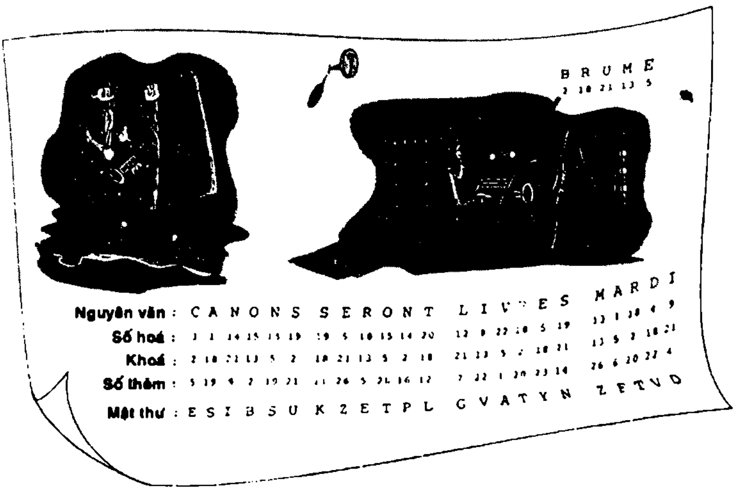
Không phải ngẫu nhiên mà người ta tranh nhau tìm những nghệ sĩ về các con số. Lịch sử ngành mật ước cho biết có sự đua tranh liên tục thường xuyên giữa những nhà lập hệ thống mã hoá và những kẻ ranh ma lần mò ra các chìa khoá mã. Các chuyên gia về mã hoá có hai nhiệm vụ : một mặt họ nghĩ ra những phương tiện truyền tin đảm bảo hoàn toàn kín đáo, mặt khác họ phải tìm ra những phương tiện "bẻ gãy" các khoá mã do đồng nghiệp chế ra. Trong cả hai trường hợp, các chuyên gia lí thuyết số đều làm mưa làm gió.

HÀM MẬT
CHÌA KHOÁ MẬT

Mỗi sự trao đổi thư tín mật, từ thô sơ nhất đến phức tạp nhất, đều dựa trên hai yếu tố : hàm và chìa khoá. Hai yếu tố này được sử dụng trước hết để lập mã, sau đó dùng để giải mã.

Làm sao tránh được việc những yếu tố này đến tai kẻ tò mò ? Có nhiều chiến thuật đến với những ai say mê điều bí hiểm.

Giải pháp thứ nhất : Dùng một hàm mật và một khoá mật. Người nhận muốn hiểu được thông điệp thì phải nắm được điều bí mật song trùng kia, tức là biết trước chìa khoá mật và hàm mật. Điều đó có nghĩa là phải chuyển cho anh ta những thông tin mật này mà không sợ bị đánh cắp. Một hệ thống như vậy thường dành cho giới quân sự và ngoại giao, những giới hay đề cao cảnh giác và có những phương tiện bảo vệ thông tin hùng mạnh.



Chẳng hạn điệp viên X.27 muốn chuyển cho cộng tác viên F.51 thông báo sau : "NGÀY THỨ BA ĐẠI BÁC SẼ ĐƯỢC CHUYỂN TỚI" (nguyên văn tiếng Pháp : CANONS SERONT LIVRVÉS MARDI"). X.27 sẽ dùng một chìa khoá mật, ví dụ chìa khoá BRUME và chuyển khoá này cho F.51 trước.

Thoạt tiên X.27 gán cho mỗi chữ cái trong văn bản bình thường con số chỉ vị trí của chữ cái đó trong bảng chữ cái. Chẳng hạn A = 1, B = 2 v.v... Văn bản lúc đó được chuyển thành số, nhưng chưa phải là văn bản mật. Đó chỉ là "bước chuẩn bị" mã hoá văn bản mà thôi trước khi chuyển nó sang lối viết mật ước trong đó không có dấu chấm câu cũng như khoảng cách giữa hai từ. Chìa khoá cũng phải chuyển thành số : BRUME = 2 18 21 13 5. Bây giờ chỉ còn việc đặt mật ước. Hàm được lựa chọn trong trường hợp này là phép cộng. Người ta đặt sóng đôi bản dịch văn bản thường ra chữ số và chìa khoá (chìa khoá được lặp đi lặp lại nhiều lần nếu cần thiết), rồi người ta cộng các số tương đương lại. Việc đó làm cho chữ cái trong bảng có vị trí bị "lệch" đi những khoảng không đều nhau. Nếu phép cộng cho ta kết quả vượt quá 26, tức là vượt quá số lượng chữ cái trong bảng, cách giải quyết không khó khăn gì. Người ta lại đi từ đầu y như đã xong một vòng trên "mặt đồng hồ".

Trong thực hành, khi gặp kết quả lớn hơn 26, người ta lấy kết quả đó trừ đi 26 và gọi đó là phép cộng với môđun 26. F.51 khi nhận được thông điệp, chỉ việc sử dụng chìa khoá để giải mã bằng cách trừ đi con số trong văn bản mật với con số tương đương của chìa khoá, luôn nhớ là có môđun 26.

Thủ thuật nói trên nom có vẻ dân dã nhưng nếu ta chọn một chìa khoá dài bằng văn bản thì độ bền vững sẽ rất cao, vì những tay "bẻ mã" không dựa vào những nhóm số trùng lặp để moi ra bí mật.

Các hệ thống hoạt động như thế nào ? Để số hoá một thông điệp ta dùng một cặp gồm một hàm và một khoá. Hàm, đó là động cơ : người ta tiến hành một số phép toán cứng nhắc. Chìa khoá cốt để mở công tắc : đó là một chuỗi từ bằng chữ hay bằng số (trong ngành mật ước thì số hay chữ coi như giống nhau). Hoàn toàn có tính cá nhân (người ta có quyền thay đổi thường xuyên). Chìa khoá ngăn cản người nào đó có động cơ như ta có thể cho hệ thống mã của ta hoạt động không phép, nhất là đọc trộm những thư tín mã hoá của ta. Hàm và khoá có nhiều dạng khác nhau và kích cỡ khác nhau. Một số hàm nom ngoài thì ngu xuẩn nhưng thực ra rất khó phá vỡ nếu người ta gán cho nó một chìa khoá cũng dài như văn bản.

Bây giờ để nâng mức độ khó khăn lên một cấp, ta sẽ sử dụng những hàm tinh tế hơn dựa trên tinh thần "máy toán" đó là các algôrit. Algôrit là thuật toán biến đổi các con số, trộn chúng vào nhau, đảo đi đảo lại rồi cắt chúng ra từng nhóm nhỏ. Ví dụ của cách làm này là hệ thống DES (*Data Encryption Standard*). Một nhà nghiên cứu làm việc cho hãng IBM phát kiến ra hệ thống này vào năm 1976. Có trong tay một văn bản, một chìa khoá, thế là tách... tách... tách... lấy ngay algôrit. Gộp gộp cắt cắt, cứ thế cho đến khi xen cái này vào cái kia trọn vẹn. Algôrit DES với 16 phép tính liền nhau cho phép nhảy múa trên văn bản thường để rồi biến nó thành một văn bản mật mà về lí thuyết không tài nào giải mã nếu không có chìa khoá. Không tài nào ? Liệu đấy ! Người ta thì thầm với nhau rằng những tay bợm của NSA đã bẻ khoá được hệ thống này...

HÀM CÔNG KHAI
KHOÁ MẬT

Các nhà toán học phát minh ra những vũ khí tinh tế hơn khi cho ra đời những hàm được coi là "công khai". Hệ thống DES được thiết kế theo mô hình ấy, một hàm công khai dựa trên một algôrit phức tạp. Từ "công khai" có nghĩa là người ta không che dấu algôrit này. Hiệu năng của algôrit là ở chỗ có quá nhiều phép tính rối rắm trên một chìa khoá mật. Lợi ích của hệ thống này là chỉ cần chuyển đi chìa khoá thì có thể người nhận giải mã được.

Algôrit toán học (đóng vai trò một động cơ) biến đổi các thông điệp trên cơ sở những chìa khoá mật. Ngay khi mọi người xông vào khám phá văn bản mật với những hàm công khai kia, về lí thuyết không ai có thể giải mã được.

X 27 tra chìa khoá và khởi động máy, máy sẽ tự động biến đổi thông điệp.

Thông điệp được mã hoá lúc đó chuyển một cách an toàn tới F 51. Anh này đến lượt mình dùng chìa khoá mật cho máy chạy ngược để đọc văn bản.

Chỉ còn một vấn đề tế nhị làm bận tâm các nhà mã hoá bao đời nay : Làm sao mà gửi được chìa khoá tới người sử dụng một cách an toàn ? Rõ ràng đã có việc chuyển đi thì có việc rò rỉ. Làm sao bây giờ ?

RSA, MỘT BỘ MÃ CÓ TÍNH CÁCH MẠNG

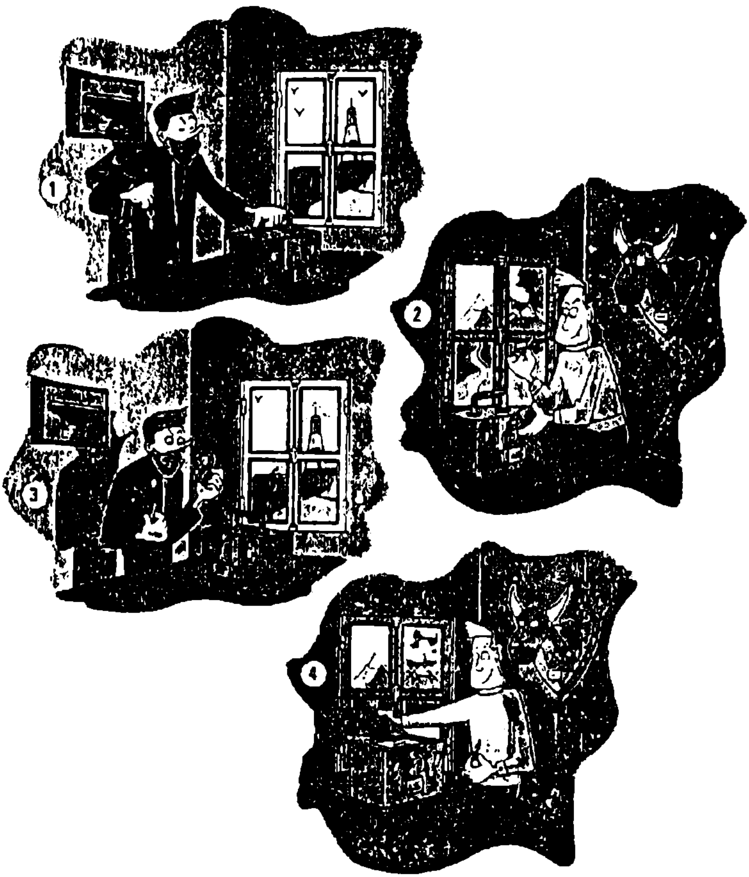
Người ta tự hỏi tại sao không chế tạo ra một hệ thống chìa khoá cái này lồng cái kia, chẳng hạn chìa khoá lớn ai cũng thấy nhưng chứa trong lòng một chìa khoá mật khác ? Người ta sẽ dùng cái khoá đầu để viết mật thư nhưng chính cái chìa khoá sau mới là cốt yếu, bất ngờ. Mọi người ai cũng có thể dùng chìa khoá công khai nói trên để mã hoá bất kì thông điệp nào, nhưng chỉ có tôi mới mở được những thông điệp đó. Ý tưởng tuyệt vời phải không ? Theo Henri Cohen, thành viên Trung tâm nghiên cứu toán học thuộc Đại học Bordeaux thì cần phải xem đó là : "*Một cuộc cách mạng thực sự về quan niệm*". Kể từ nay ai cũng có thể cho lưu hành những niên giám về "chìa khoá công khai" mà ai cũng có thể sử dụng được.

Những con búp-bê Maruska Nga (nhiều con búp-bê gỗ to nhỏ lồng vào nhau) này trong việc mã hoá có sức mạnh ấy từ trò chơi toán học gọi là "hàm-bẫy sập". Trong khi mà các hàm cổ điển sử dụng trong viết mật thư hoạt động thuận nghịch hai chiều (người ta nói chúng có tính đảo ngược được : mã hoá và giải mã trong cùng một hệ thống) thì những hàm mới (hàm-bẫy sập) chặn thang máy lại trên cao và không cho nó trở xuống nữa. Chỉ có kẻ nào có được thêm một tí thông tin, một thứ "vừng ơi" rất đặc biệt mới có thể đảo ngược tình thế để giải mã.

Vậy những "hàm-bẫy sập" này trông giống cái gì ? Ta thử xem cái quan trọng nhất trong những hàm như vậy được dùng trong hệ thống mật thư RSA. Nguyên tắc của hàm này dựa trên một tính chất kì lạ của các số nguyên tố. Giả sử bạn Gudule lấy hai số nguyên tố nào đó nhân với nhau, công bố cho ta kết quả. Kì thay từ tích đó ta không có cách nào đó tìm được hai số nguyên tố mà Gudule đã dùng ! Tất nhiên phải có một điều kiện : hai số nguyên tố ấy phải khá lớn, chẳng hạn mỗi con số chứa đến 100 chữ số (xin đọc là mười tỉ tỉ tỉ... cứ thế mười một lần là xong !). Ta nhân hai số đó lại với nhau, kết quả là một số có 200 chữ số. Đừng cố hình dung con số đó là gì, không có cái gì trong vũ trụ này, ngay cả đến số lượng các hạt cơ bản, có thể nhiều đến thế. Thế mà hiện nay tính toán trên những số như vậy chẳng có gì là phức tạp cả, vấn đề là có máy điện toán hay không mà thôi. Con số gồm hai trăm chữ số kia sẽ được dùng trong phép viết mật thư, chuyện đó không có gì lạ nữa.

HÀM CÔNG KHAI
CHÌA KHOÁ CÔNG KHAI

Đây là trường hợp mà cả hàm lẫn chìa khoá đều có thể tra cứu được trong các cẩm nang. Đương nhiên để mọi thông tin giao lưu tự do như vậy thật là đáng sợ. Nhưng may thay có cách giải quyết cho thông tin không thất thoát được. Chuyển một thông điệp trong hệ thống có chìa khoá công khai chẳng khác nào đặt thông điệp mật đó vào một cái hòm và khoá bằng một ổ khoá. Cái ổ khoá tức là chìa khoá công khai. Chìa khoá dùng để mở ổ khoá này (hình 1) là chìa khoá mật do X.27 nắm giữ và không cho ai biết. Điệp viên F.51 nhận được cái hòm được khoá kia, đặt thêm lên hòm một ổ khoá của riêng mình rồi dùng chìa khoá mật khoá lại và gửi về cho X.27 (h.2). Anh chàng này chỉ việc tháo ổ khoá của mình ra và gửi đi lần thứ ba đến với F.51 (h.3). Điệp viên F.51 chỉ việc lấy chìa khoá mật của mình mở hòm ra để lấy thư mật ra đọc (h.4). Không ai trong hai điệp viên này cần gửi cho người kia chìa khoá mật của mình. Thế mà họ vẫn cứ giao lưu như thường ! Một ví dụ về quy trình đơn giản mà tài tình đó : hệ mật mã RSA. Thoạt tiên cần dùng hai số nguyên tố N và P. Tích của chúng được gọi là X. Đó chính là cái chìa khoá công khai đặt trên hòm đựng thư. Trong thực tiễn, X.27 công bố tích X trong niên giám khoá và người cộng tác chỉ việc dùng tích này để mã hoá các thông điệp gửi đến cho X.27. Mỗi người có thể mã hoá các thông điệp gửi đi cho người kia nhưng không giải mã được. Để chuyển sang một văn bản cần mã hoá, nhất thiết phải làm phép nhân với mô đun. Nhưng không ai, ngoại trừ người nắm giữ các số nguyên tố ban đầu có thể tiến hành phân một số cực kì lớn ra hai số nguyên tố thành phần được.



Bây giờ ta tưởng tượng có ai đó cố giải mã một bức thư mật viết theo "hàm-bẫy sập". Anh ta không có thông tin gì hơn nên sẽ làm theo lối đi ngược quy trình, tức là từ tích hai số nguyên tố đã biết cố tìm ra hai số đó, tức là tìm hai ước số của một số gồm 200 chữ số. Anh ta sẽ dùng đến ba mươi máy điện toán cực mạnh chạy suốt ngày đêm, anh ta cũng chỉ tìm được một số có 100 chữ số trong vòng mười ngày. Phải dùng đến hàng ngàn máy điện toán cực mạnh nối kết với nhau làm việc cật lực trong sáu tháng mới phân chia được một số có 130 chữ số như kỉ lục hiện nay đạt được. Cao hơn số đó thì phải hàng thế kỉ mới giải xong. Đành bó tay thôi ! Kết luận : tích của hai số nguyên tố được sử dụng để mã hoá các văn bản, tích này ai cũng biết, nhưng không một ai ngoài bản thân tôi có khả năng chia nó ra thành hai ước số nguyên tố để có thể giải mã mà đọc văn bản gốc.

Henri Cohen lấy làm kinh ngạc thốt lên : "*Điều kì lạ nhất là không có một nhà toán học nào chứng minh rằng tìm ra công thức để nhân tử hoá là không thể được. Có điều là trong tình hình hiện nay, người ta chưa thấy phương tiện gì cho phép đi xa như vậy*". Rồi Henri Cohen nói tiếp, để uốn nắn cách nói trên : "*Những nhà toán học của cơ quan NSA đương nhiên đang làm việc trên chủ đề này. Có thể họ đã tiến xa rồi cũng nên. Nếu đúng như vậy thì họ cũng không có lí gì la ó trên mái nhà cho người ta nghe. Họ có lợi ích trong việc làm người khác trên thế giới tin rằng hệ thống họ sử dụng là bất khả xâm phạm*".

Mọi chuyên gia đều cố sức tìm ra những hàm ranh mãnh như vậy. Chẳng hạn gần đây người ta tìm ra hàm sử dụng phép luỹ thừa như sau : lấy ba số khá lớn, nâng số thứ nhất lên luỹ thừa số thứ hai, chia kết quả cho số thứ ba kiểu "môđun". Với những phương tiện tính toán hữu hiệu hiện nay thì phép toán trên chẳng có gì đáng sợ cả. Có điều khi nhận được kết quả, chớ dại gì mà đi tìm những số ban đầu... ngoại trừ bạn sống được thêm vài thế kỉ nữa !

MỘT TRONG NHỮNG CHUYỆN ĐƯỢC THUA LỚN CUỐI THẾ KỈ XX VÀ ĐẦU THẾ KỈ XXI

Những hệ thống nói trên thực sự có giá trị như thế nào ? Để đánh giá việc này các ông vua trong lĩnh vực số gặp nhau thường xuyên trong các đại hội. Những chuyên gia làm việc cho các hãng tư hoặc trong các trường đại học giới thiệu những thành tựu mới nhất của họ : bảng algôrit vừa được thiết kế. Họ đưa thành tựu này ra cho các đồng nghiệp xem xét phê phán một cách nghiêm khắc. Thường thì những công trình của những kẻ mới vào nghề bị diệt từ trong trứng nước. Nếu một algôrit bị đồng nghiệp "bẻ gãy" thì sao ? Chỉ có việc vứt nó vào sọt rác thôi ! Tuy vậy một số algôrit cũng còn được dùng cho những việc vặt nào đó. Nhiều hệ thống mã lưu hành trên thị trường không có tính bền vững như hệ RSA nhưng cũng đủ để đáp ứng nhu cầu của các công ti. Stéphane Boltzmeyer phẫn nộ nói : "*Đúng là về an toàn thì những hệ thống*

ấy không có ý nghĩa gì. Ở Mĩ với 200 đô la người ta sẽ mua đủ thứ phần mềm để giải mã hết trọi những hệ thống như vậy". Nói gì thì nói, thế giới nhỏ hẹp những chuyên gia viết mật thư vẫn rình mò xem có al-gô-rit nào do cánh trẻ tạo ra có đủ sắc sảo để làm đảo lộn tình hình không. Trong mỗi kì hội nghị, người ta thấy có những vị đại diện cho các cơ quan tình báo quan trọng. Một ví dụ điển hình là ở hội nghị về khoa viết mật thư tổ chức tại Đại học Bordeaux khoảng đầu năm 1996, nhà toán học Henri Cohen đã thản nhiên nói : *"Trong số 120 chuyên gia tham dự hội nghị đã có tới 10 vị thuộc cơ quan NSA"*.

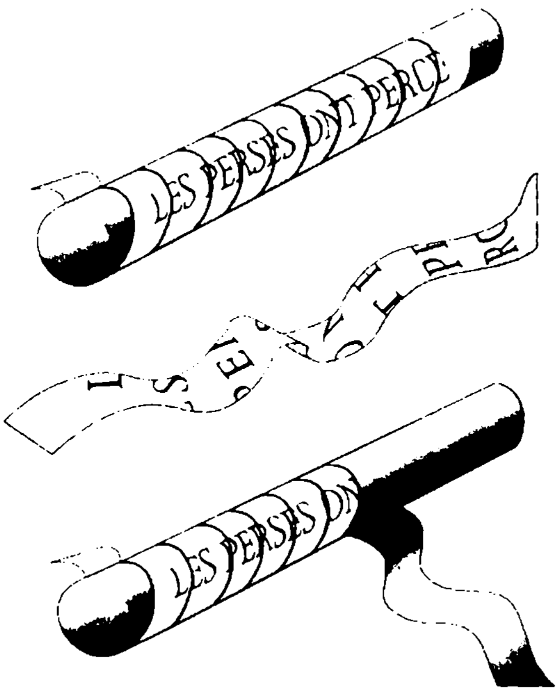
Thực ra tất cả ứng dụng của ngành viết mật thư không chỉ phục vụ riêng cho việc chuyển tin tức quân sự. *"Ngành viết mật thư đâu chỉ dành cho các điệp viên* – Jacques Stern, giám đốc Phòng thí nghiệm tin học thuộc Trường Đại học sư phạm, mỉm cười giải thích – *nó cung cấp cho ta phương tiện để kí lệnh trên Internet, chẳng hạn để nạp hay rút tiền, để kiểm tra có đúng bản thân mình đang sử dụng chương trình hay không"*. Trên thực tế, nhu cầu sử dụng những hệ thống viết mật thư tăng lên theo một tốc độ chóng mặt. Trong tình hình giao lưu tin học tăng vọt, mỗi năm có hàng triệu người tham gia sử dụng Internet, việc bảo đảm cho thông tin cá nhân được an toàn bí mật trở thành vấn đề sống còn của thế kỉ XXI. Một sự được thua đặt ra nhiều vấn đề. Bởi lẽ khi người ta giao lưu rộng rãi người ta dễ bị sơ hở. Để chuyển một tin mật, không có gì an toàn hơn là chuyển trực tiếp bằng miệng không có nhân chứng nào hết. Điện thoại làm giảm an toàn đi nhiều. Những bức thư điện tử gửi trên mạng Internet thì gần như công khai ! Những thư điện tử mà đám dân ghiền gọi là "e-mail" thì cứ y như là bưu thiếp vậy, ai cũng đọc được. Do vậy mà ngành viết thư mật hôm qua còn là mảnh đất riêng của các điệp viên và các nhà quân sự, đang trên đà xen mạnh vào cuộc sống chúng ta. Tội nghiệp cho các nhà toán học ! Họ cứ tưởng họ, bộ môn của họ thuộc loại "thuần tuý", không dính dáng gì đến cuộc sống hàng ngày ! Bỗng nhiên họ bị cuốn hút không cưỡng nổi vào mớ hỗn độn các mạng số. Hơn nữa có một số vấn đề lương tri dằn vặt họ :

mỗi khi khám phá ra được một kĩ thuật mới về viết mật thư, liệu nên công bố ngay cho mọi người biết hay chỉ để dành cho đám quân sự ?

TÓM LƯỢC LỊCH SỬ GIẢI MÃ CÁC MẬT THƯ

CÂY GẬY CỦA DÂN THÀNH SPARTE

Những người dùng mật mã đầu tiên là cư dân của một trong những thành phố thiện chiến nhất Hi Lạp cổ đại, dân thành Sparte. Họ viết văn bản lên những dải băng (làm bằng giấy cói, da) được cuộn thành ống quanh một chiếc gậy gọi là *Scytale*. Khi tháo giấy ra khỏi gậy, không ai đọc được gì ngoài một mớ chữ hỗn độn. Muốn đọc bức mật thư người ta phải dùng một chiếc gậy có đường kính như chiếc gậy để mã hoá văn bản.



HÌNH VUÔNG CỦA POLYBE

Một người dân khác của nước Hi Lạp cổ đã nghĩ ra một hệ thống trong đó người ta thay chữ bằng số. Mỗi chữ cái của văn bản gốc được kết hợp với một tổ hợp có hai chữ số. Theo cách đó thì A tương đương với 1-1, S tương đương với 1-2. Người nhận mật thư chỉ việc dùng bảng để tái tạo văn bản gốc.

	1	2	3	4	5
1	A	B	C	D	E
2	F	G	H	IJ	K
3	L	M	N	O	P
4	Q	R	S	T	U
5	V	W	X	Y	Z

Ví dụ mật thư nhận được viết :

3.1 4.3 2.3 5.3 2.4 5.1 3.3 4.1 1.4 5.4 4.2 5.3 5.4 4.4

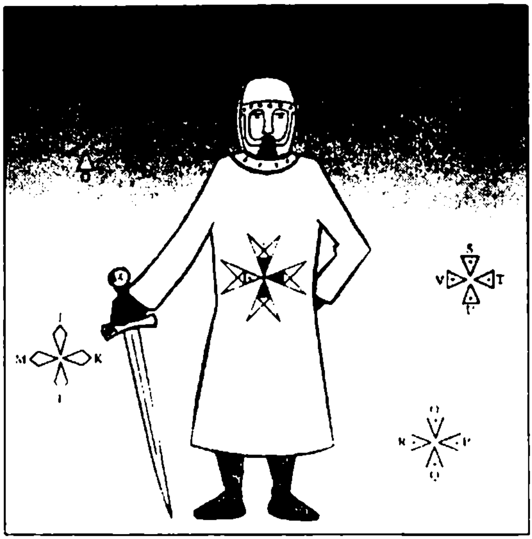
Theo cách giải trên ta được dòng chữ tiếng Pháp là COMPREND QUI PEUT, có nghĩa là "*ai hiểu thì hiểu*".

BỘ MẬT MÃ CỦA JULES CÉCAR

Jules Cécar vĩ đại, trong cuộc chiến xâm chiếm những vùng lãnh thổ thuộc xứ Gaules, có một ý tưởng đơn sơ nhưng hiệu quả cao, đó là chuyển các mật thư bằng cách viết lệch chữ cái đi ba vị trí so với bảng chữ cái thông thường. Theo cách đó thì A trở thành D, B trở thành E... Tên của vĩ nhân này JULES CÉSAR trở thành MXOHV FHVDU.

Từ đó người ta có thói quen gọi những hệ thống viết lệch vị trí chữ cái, dù cho lệch bao nhiêu vị trí chăng nữa, là "bảng chữ cái Jules César".

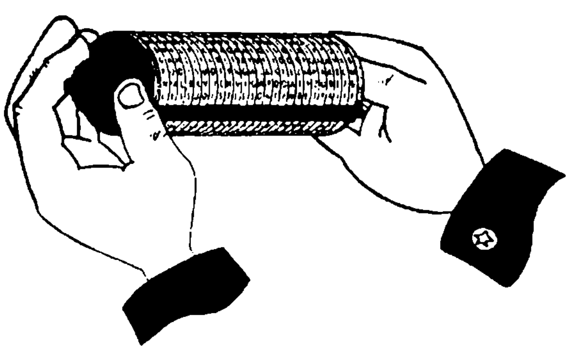
CHỮ SỐ CỦA CÁC HIỆP SĨ DÒNG ĐỀN



Các hiệp sĩ dòng Đền không những thạo nghề cung kiếm mà còn giỏi di chuyển tiền bạc. Họ thường di chuyển những khoản tiền lớn qua lại những vùng loạn lạc. Thay vì chuyển những bao tiền nặng nề, họ nghĩ ra việc chuyển những thư tín dụng thanh toán được ở mọi thương điếm chi nhánh ngoài nước. Dĩ nhiên những thư tín dụng này phải được mã hoá bằng số theo một mã đặc biệt ghi trong biểu tượng của Hội đoàn.

ỐNG HÌNH TRỤ CỦA JEFFERSON

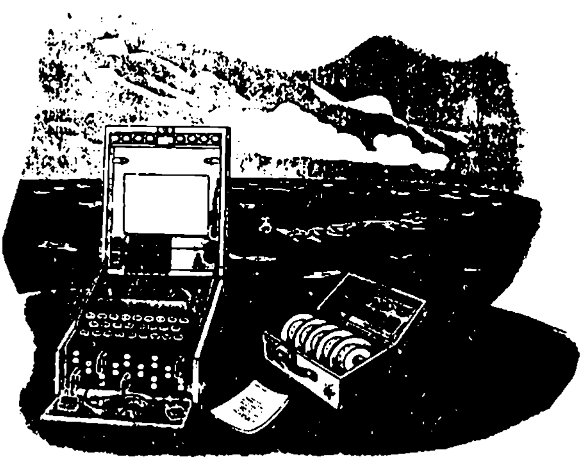
Trước khi trở thành Tổng thống Hợp chủng quốc Hoa Kì, Jefferson là một kẻ láu lỉnh ham làm việc vặt và tìm thú vui trong các chữ số. Ông phát minh ra một hệ thống viết mật thư gồm nhiều bánh xe luồn vào chung một trục. Mỗi bánh xe được khắc bên mặt sườn toàn bộ các chữ cái (26 chữ) hú hoạ không theo thứ tự



nào. Người lập mã dùng một sợi dây cố định một hàng rồi sắp các chữ trong hàng phù hợp với thông điệp mật. Rồi chọn một hàng nào đó chỉ toàn những câu chữ không có nghĩa. Những câu chữ đó chính là thông điệp được mã hoá. Người nhận mật thư có một ống hình trụ tương tự. Anh ta chỉ việc sắp chữ theo mật thư thành hàng. Rồi đưa mắt nhìn xem trên ống hàng nào chứa bức thư mật.

"ENIGMA"

Enigma là cái máy viết mật thư của quân đội Đức quốc xã. Trong Chiến tranh Thế giới lần thứ hai, máy này đã làm cho quân Đồng minh lo sợ. Máy là một hệ thống những đĩa được điều khiển cơ học, có khả năng tạo ra những tổ hợp hết sức phức tạp. Số đĩa càng nhiều thì thông điệp mật càng khó "phá vỡ". Phải nhờ tài trí của một nhóm nhà toán học dưới sự chỉ đạo của Alan Turing, (1912 - 1954 nhà toán học và lô-gic học lớn người Anh. Năm 1936, ông đã sáng chế ra một chiếc máy tiền thân của máy vi tính ngày nay), người ta mới phá được Enigma. Từ đó quân Đồng minh thu được nhiều thắng lợi, nhất là trong cuộc chiến chống tàu ngầm.



VUI MỘT CHÚT :

MỜI BẠN GIẢI MÃ VÀI BỨC MẬT THƯ

Mật thư số 1 :

17 6 8 17 10 9 10 9 10 8 20 9 6 12 10 10 24 25 20 19 5 10

Mật thư số 2 :

10 16 23 18 18 23 23 13 30 18 17 20 18 23 6 23 20 7 6 17 26 23

Chỉ dẫn 1 :

Mật thư số 1 được viết theo phương pháp Jules César (*xem lại mã Jules César ở trang trước*). Chú ý : nhất thiết phải có thông tin trong mật thư này mới giải mã được mật thư số 2.

Mật thư số hai được viết theo một phép nhân có mô-đun. Đây là một câu hỏi và mời bạn cố giải đáp câu hỏi đó.

Chỉ dẫn 2 :

Để gợi ý cho các bạn, chúng tôi nêu ra đây một thí dụ về viết mật thư theo phép nhân có môđun. Chẳng hạn ta muốn mã hoá chữ I, chữ đứng hàng thứ 9 trong bảng chữ cái (tiếng Pháp). Ta chọn chìa khoá lập mã là phép nhân với số 7 môđun 29. Mã chữ I sẽ là "9 x 7 môđun 29". Khai triển tích số trên ta có : 9 x 7 = 63. Ta biết rằng 63 môđun 29 có nghĩa là 63 chia cho 29 và giữ lại số dư. Như vậy 63 : 29 được 2 dư 5. Số 5 sẽ là mã của I.

Chú ý : Muốn giải mã mật thư trên cần dùng một chìa khoá khác, tức là bằng một phép nhân có môđun khác. Theo cách làm trên thì ta tìm số gốc của số 5 như sau : Ta dùng phép nhân với số 25 môđun 29. Như vậy 5 x 25 = 125 và 125 môđun 29 sẽ là 9. Số này là vị thứ của I trong bảng chữ cái. Cuối cùng số 5 trong mật thư chính là chữ cái I.

Tóm tắt : Để lập mã chữ cái I, ta cần có ba con số bí mật : môđun (29), chìa khoá lập mã (7) và chìa khoá giải mã (25).

Lưu ý : Các bài tập trên chỉ dành cho những ai biết tiếng Pháp. Đối với những bạn không thạo tiếng Pháp, xin mời làm bài tập sau :

Mời bạn lập mã cho thông điệp : "HỌ ĐẾN HÀ NỘI CHỦ NHẬT".

Những điều cần biết khi lập mã :

– Bảng chữ cái tiếng Pháp gồm 26 kí tự : A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z được đánh số từ 1 đến 26.

– Người ta thường dùng kiểu Telex để ghi tiếng Việt bằng chữ cái Pháp. Đó là :

AA = Â   EE = Ê   OO = Ô   DD = Đ   W = Ư   OW = Ơ   AW = Ă

Dấu sắc = chữ s   Dấu huyền = chữ f   Dấu hỏi = chữ r

Dấu ngã = chữ x   Dấu nặng = chữ j

– Dữ kiện để lập và giải mã :

Hàm : môđun 29

Chìa khoá lập mã : phép nhân với 7

Chìa khoá giải mã : phép nhân với 25

CHUYỆN DÀI VỀ CÁC CHỮ SỐ

NGƯỜI LƯỠNG HÀ CHIẾM VỊ TRÍ TIÊN PHONG

Từ lúc nào con người tinh khôn (*Homo-sapiens*) biết đếm ? Không có câu trả lời chính xác cho câu hỏi này. Ta biết chắc rằng cách đây 40.000 năm tổ tiên ta biết đếm những con mamut. Một phát hiện khảo cổ cho ta thấy tổ tiên ta ghi chép số lượng các con vật bằng cách khắc những vết lên miếng xương, cành cây hay sắp các viên sỏi thành hàng. Một con mamut ứng với một vạch hay một viên sỏi, một con mamut khác ứng với một vạch khác hay một viên sỏi khác... Tổ tiên người Inca có tiến hoá hơn đôi chút. Họ thắt nút trên những sợi dây. Một con lạc đà : một nút thắt, một con khác : một nút thắt khác... Ngược lại, họ gỡ từng nút một khi đám lạc đà đi ngang qua và biết liệu có con nào bị lạc không. Dù thô thiển và cồng kềnh, cách thức đếm ấy cũng giúp ích nhiều một khi số lượng vật phải đếm ít ỏi.

Ba ngàn năm trăm năm trước Công nguyên, đất nước Lưỡng Hà (suýt soát nước I-rắc ngày nay) khởi sự con tàu Lịch sử. Đất nước đó sáng chế ra chữ viết và xây dựng những đô thành do các vị vua chúa trị vì, nắm trong tay vô số kho tàng đầy ắp hàng hoá. Các nhà khảo cổ phát hiện ở các vùng Uruk và Suse hàng trăm tấm thẻ bằng đất sét trên đó ghi các chữ số đầu tiên của con người !

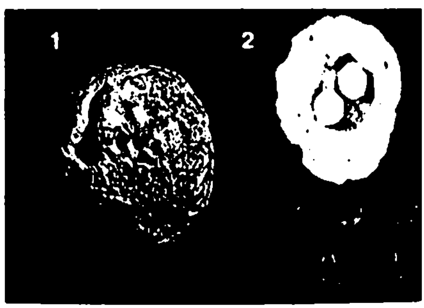
Tất cả chỉ rõ rằng vào thời cổ, hai đô thị đang độ phát triển này cần đo đạc, kiểm kê, kiểm soát những số lượng lúa mì, dầu ăn, súc vật ngày càng đông đảo, mà trước hết là để lưu trữ số liệu. Trong hoàn cảnh ấy, khó mà sử dụng những viên sỏi nhỏ !

Vậy người ta chuyển từ việc sắp các hòn cuội sang việc viết chữ số như thế nào ? Một lần nữa, các nhà khảo cổ gặp may : họ tìm ra những dấu hiệu giúp họ khôi phục lại giai đoạn cơ bản này. Các bạn hãy nhìn những tư liệu dưới đây.

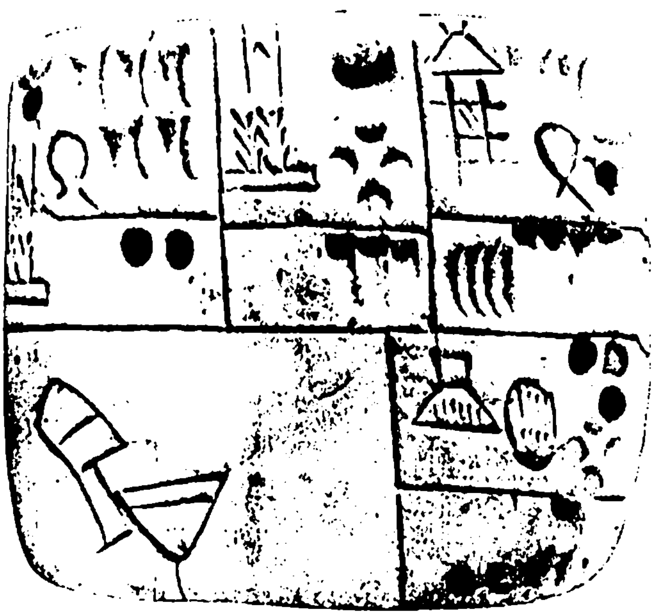
Một viên thư lại Lưỡng Hà đang khắc những kí hiệu hình nêm lên một thẻ đất sét. Ông ta phải học rất lâu để nhớ hàng trăm kí hiệu cho chữ cái và chữ số. Nên nhớ rằng ngày nay ta chỉ cần nhớ 36 kí hiệu thôi : 26 chữ cái và 10 chữ số từ 0 đến 9. Không có gì đáng ngạc nhiên khi việc viết số trong nhiều ngàn năm thuộc về một số ít thơ lại của vua chúa và một số nhà buôn lớn.

(1) Chiếc vỏ này và một số thẻ được phát hiện ở trên vùng đất thuộc đô thị cổ Suse (khoảng 3.300 năm tr. CN). Những chữ số Lưỡng Hà đầu tiên được khắc trên vỏ (các lỗ thủng và các vết khuyết). Các chữ số ấy cho biết số lượng các thẻ đặt bên trong vỏ

(2) Chụp X quang phần bên trong vỏ

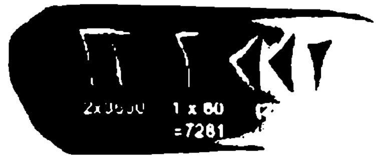


Vào thời gian đầu, vài viên kế toán khôn ngoan nghĩ ra việc thay các hòn cuội bằng những thẻ đất nung có hình dạng và kích thước khác nhau tuỳ theo giá trị : 1, 10, 60, 600, 3.600 v.v... Rồi người ta để những thẻ ấy vào trong một hòn đất sét rỗng (hình 1 và 2), chỉ ra rằng chúng thuộc cùng một tập hợp. Về sau, những thẻ nhỏ này được ép thành vết lên trên hòn đất sét, chắc chắn để việc kiểm tra được dễ dàng, nếu không viên kế toán không có cách nào hơn là đập vỡ hòn đất để làm lại phép tính cộng. Giai đoạn cuối cùng : hòn đất bẹp đi để trở thành một cái thẻ (hình 3). Các viên thơ lại ghi chép dưới dạng hình vẽ và kí hiệu, bằng cây bút sậy khắc trên đất sét mềm, các chủng loại hàng hoá : hạt lúa mì, đầu súc vật v.v... Thay vào chỗ các thẻ là những tổ hợp các lỗ thủng tròn và các vết khuyết : đó là những chữ số đầu tiên.



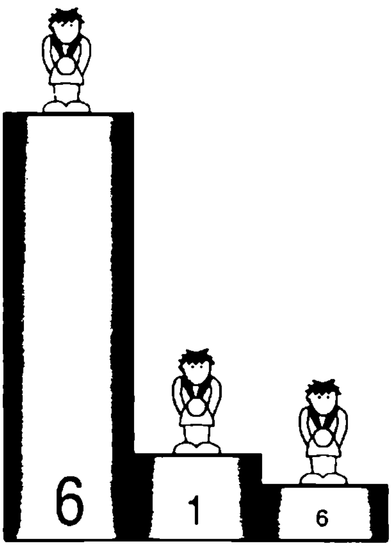
Một tấm thẻ đất sét tìm được ở vùng Uruk (phía nam Lưỡng Hà) có niên đại 3.000 năm trước CN. Những lỗ thủng tròn ghi số lượng. Chắc chắn đó là số lượng lúa mì, vì ta thấy những bông lúa mì được vẽ giữa thẻ và về phía trái

Sau đó phải trải qua 15 thế kỉ nữa mới hoàn thiện được hệ thống đếm như ngày nay ! Hệ thống viết số ngày nay lợi dụng được sự tiến hoá của cách viết bằng "hình nêm" - một cách viết đơn gián hơn nhiều (hình nêm = *cunéiforme*, từ chữ La-tinh *cuneus*, có nghĩa là "góc"). Ta thấy những "cái đinh" to nhỏ, những "đầu dê" và vô vàn tổ hợp của chúng biểu thị vừa là các số vừa là chữ cái hay âm tiết.



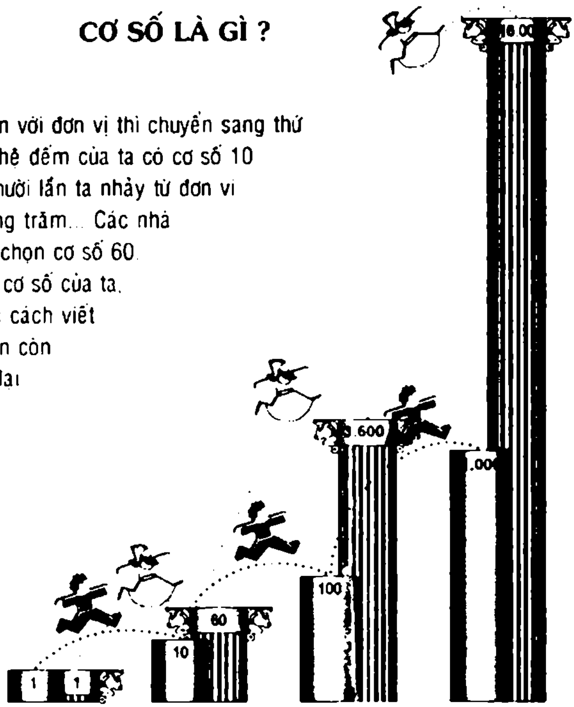
NGUYÊN TẮC VỊ TRÍ

Trong một hệ đếm theo vị trí, một chữ số có những giá trị khác nhau tuỳ theo vị trí của nó trong con số. Khi ta viết 616 chẳng hạn, chữ số 6 nằm bên trái có giá trị 6 x 100, trong khi chữ số 6 nằm bên phải chỉ là 6. Chúng ta hiện nay dùng 10 chữ số, những người Lưỡng Hà ngày xưa chỉ dùng có hai mà thôi. Một đầu dê giá trị 10, một cái đinh giá trị 1 hoặc 60 hoặc 3.600... tuỳ theo vị trí của chúng. Bạn thử đọc xem số này là bao nhiêu.



Nhưng có vấn đề day rứt những viên kế toán Lưỡng Hà, khi viết vội, khó mà phân biệt cái đinh chỉ số 1 với cái đinh chỉ số 60. Về cuối thiên niên kỉ thứ ba trước CN, các nhà bác học đã tìm ra cách giải quyết : nguyên tắc vị trí với cơ số 60 thực thụ.

CƠ SỐ LÀ GÌ ?



Đó là số khi nhân với đơn vị thì chuyển sang thứ hạng sau. Chẳng hạn hệ đếm của ta có cơ số 10 (hay thập phân). Cứ mười lần ta nhảy từ đơn vị đến hàng chục rồi hàng trăm... Các nhà bác học Lưỡng Hà thì chọn cơ số 60. Cơ số này không kém cơ số của ta, dù chúng ta thán phục cách viết số 7.281. Cơ số 60 vẫn còn được dùng trong thời đại hiện nay. Ta dùng hệ thống đó khi nhìn đồng hồ đo thời gian giờ, phút, giây. Ta cũng gặp hệ thống đó trong vòng tròn chia thang 360 độ, tức là bội số của 60.

NGƯỜI AI CẬP VỚI CHỮ TƯỢNG HÌNH VÀ ĐIỀU HUYỀN BÍ

Trong khi những viên kế toán xứ Lưỡng Hà vật lộn với những con số ghi trên thẻ đất sét, những đồng nghiệp Ai Cập của họ dùng mực viết chi chít các số lên giấy cói. Chỉ khác một điều là những thợ lại hai bên bờ sông Nil dùng phép đếm cơ số 10 hay thập phân như chúng ta ngày nay.

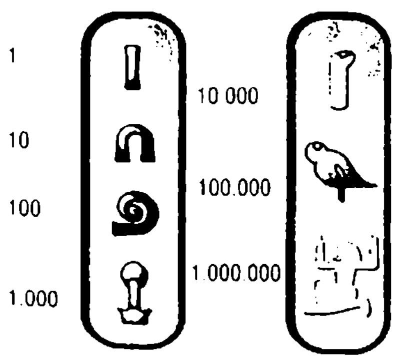
Nói vậy thôi chứ hệ đếm của người Ai Cập không có hiệu năng cao như hệ của Lưỡng Hà. Hệ Ai Cập có nhược điểm lớn : nó tuân thủ nguyên tắc cộng mà không theo vị trí. Điều đó có nghĩa là giá trị của các chữ số không phụ thuộc vị trí của chúng trong con số. Có những kí hiệu khác nhau cho hàng đơn vị, hàng trăm, hàng ngàn, hàng vạn và cứ thế cho đến hàng triệu. Chẳng hạn để biểu thị số 182 theo tượng hình, người ta vẽ một đường xoắn ốc thể hiện hàng trăm, 8 cái quai cho số hàng chục và sau rốt hai que thẳng đứng cho hàng đơn vị. Con số sẽ được đọc là "trăm + tám lần chục + hai lần một". Chúng ta ngày nay chỉ cần ba kí hiệu là viết được 182, còn người Ai Cập cổ cần đến 11 kí hiệu. Do dùng nhiều kí hiệu khác nhau như vậy nên trật tự kí hiệu không quan trọng gì. Ta có thể đọc từ trái sang phải hay từ phải sang trái, thậm chí đọc từ trên xuống hay dưới lên.

Vì không có nhiều tài liệu tìm được như tờ giấy cói Rhind này nên người ta ít biết về sự phát triển tính toán ở Ai Cập so với việc hiểu biết tính toán của người Lưỡng Hà. Thực vậy, người Lưỡng Hà dùng những thẻ bảng đất sét, những thẻ này bền vững hơn giấy cói qua những tác động của thời gian.

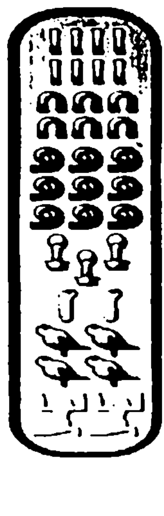
Đám thơ lại dùng que sậy nhúng mực viết. Để viết nhanh họ đơn giản hoá các kí hiệu dần dần và biến chúng thành một hệ thông sơ lược có tên gọi là hệ nghi thức. Tuy vậy trong những dịp long trọng như tang lễ chẳng hạn, người ta vẫn thích dùng hệ tượng hình nguyên vẹn để viết trên các đồ tế lễ.

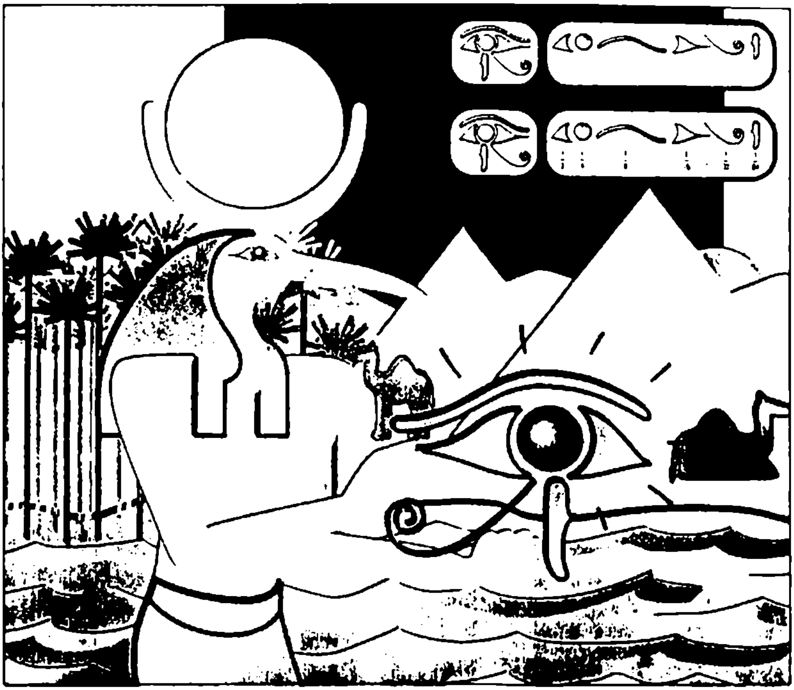
Người ta tính toán như thế nào ở xứ sở các kim tự tháp ? Một tài liệu toán thời cổ Ai Cập mà chúng ta có được, tờ giấy cói *Rhind*, cho phép ta suy luận đôi điều. Phép cộng chẳng có gì khó. Về phép nhân, người Ai Cập cổ có hẳn một bộ kĩ thuật, thủ thuật thông thường nhất là các phép nhân hay chia với 2, rất gần với thủ thuật sử dụng hiện nay trong các máy điện toán !

Người Ai Cập cổ ham mê đo đạc đến điên khùng. Theo nhà sử học Hi Lạp Hérodote thì lí do thật đơn giản : hàng năm lũ xoá hết ranh giới ruộng đồng. Cứ mỗi lần lũ rút đi, người ta phải đo lại đất đai theo chiều dọc, ngang và chéo nữa. Các vị Pharaon theo dõi kĩ việc đo đạc này vì thuế khoá dựa trên diện tích canh tác. Chỉ có điều là số đo ít khi được tròn, nghĩa là được biểu thị bằng số nguyên lần đơn vị đo. Vì lẽ đó mà người Ai Cập cổ vô địch về tính toán trên phân số.



Với 7 con số tượng hình bên trái, bạn thử đọc xem thẻ bên phải ghi con số bao nhiêu ?





Vào cuối thiên niên kỉ thứ nhất, những vị thầy tu Ai Cập, với tâm hồn thi sĩ và ham chuộng điều bí ẩn, đã mượn giai đoạn đẫm máu trong thần thoại của mình để diễn tả việc các phân số dùng trong đo đạc dung tích. Thần Chết Osiris sau khi lấy em gái mình là Isis, bị người em trai là thần Bạo lực Seth, giết chết vì ghen tuông. Người con trai của Osiris, thần Diều hâu Horus, khi đã khôn lớn, quyết báo thù cho mẹ mình. Horus thách thức Seth thi đấu. Người chú độc ác này móc một con mắt của cháu mình rồi cắt thành sáu mảnh. Một phiên toà thần thánh giao cho thần Kế toán là Thot nhiệm vụ khâu mắt lại cho Horus. Thot gán cho mỗi mảnh mắt một giá trị (xem hình trên). Lông mày : 1/8, hai khoé mắt : 1/16 và 1/2, tròng : 1/4, hai vết thẫm : 1/32 và 1/64. Tất cả là 63/64. Nhờ các thần giúp sức mà công việc ổn thoả : Phần 1/64 bị thiếu được Thot nhờ những viên kế toán thân cận lấy ở mắt mình hiến tặng

PHÉP NHÂN CỦA NGƯỜI AI CẬP

Những thầy kí sông Nil là những người đầu tiên sử dụng phép nhân gọi là phép "gấp đôi liên tiếp". Ta hãy xem phép nhân 15 × 84 được thực hiện ra sao theo cách sau :

	1	15
	2	30
\	4	60 -
	8	120
\	16	240 -
	32	480
\	64	960 -
	128	1920

Trong cột bên phải người ta viết số 15 và trong cột bên trái số 1. Người ta liên tiếp gấp đôi các số lên và chỉ dừng lại khi về phía phải xuất hiện một số lớn hơn 84. Trong cột trái người ta đánh dấu bằng một thanh xiên những số có tổng số là 84. Trên cột phải người ta đánh dấu những số thuộc hàng có thanh xiên. Cộng các số đó lại ta có kết quả phép nhân. Đó là : 15 × 84 = 1.260. Đó là tổng các số 60, 240 và 960.

Lợi ích của phương pháp này : chỉ cần học bản tính nhân cho 2 mà thôi.

NGƯỜI HI LẠP, NGƯỜI LA MÃ ĐÂU CÓ KHIẾU VỀ CON SỐ

Nhiều thế kỉ sau người Ai Cập, trên bờ phía Bắc Địa Trung Hải, người Hi Lạp và người La Mã bắt đầu xây dựng lịch sử, mỗi nơi có cách riêng của mình. Tài năng của họ chói sáng lịch sử cổ đại. Nhưng trong lĩnh vực số thì sao ?

Quả thực người Hi Lạp và La Mã chẳng có gì để người Lưỡng Hà cất mũ chào ngưỡng mộ. Người La Mã thuộc loại đặc biệt dốt tính toán. Hệ đếm của họ tồi đến nỗi chỉ cần làm một phép toán đơn giản mà đã thấy khó nhọc quá chừng rồi

HỆ ĐẾM LA MÃ

Những số từ 1 đến 4.999 được ghi theo nguyên tắc cộng. Nhưng để tiết kiệm kí hiệu, người La Mã cũng sử dụng nguyên tắc trừ, chẳng hạn 4 được viết là IV, tức là 5 – 1. Để viết những số lớn hơn 5.000 cần dựa vào những quy ước mới. Chẳng hạn thanh ngang trên số nào thì số ấy được nhân lên 1.000 lần. Số nào được đóng khung thì được nhân lên 100.000 lần.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X

XX	20	D	500
XXX	30	M	1.000
XL	40	$\overline{V}$	5.000
L	50	$\overline{X}$	10.000
LX	60	$\overline{C}$	100.000
C	100	$\boxed{X}$	1.000.000

VIẾT SỐ 1996 NHƯ THẾ NÀO ?

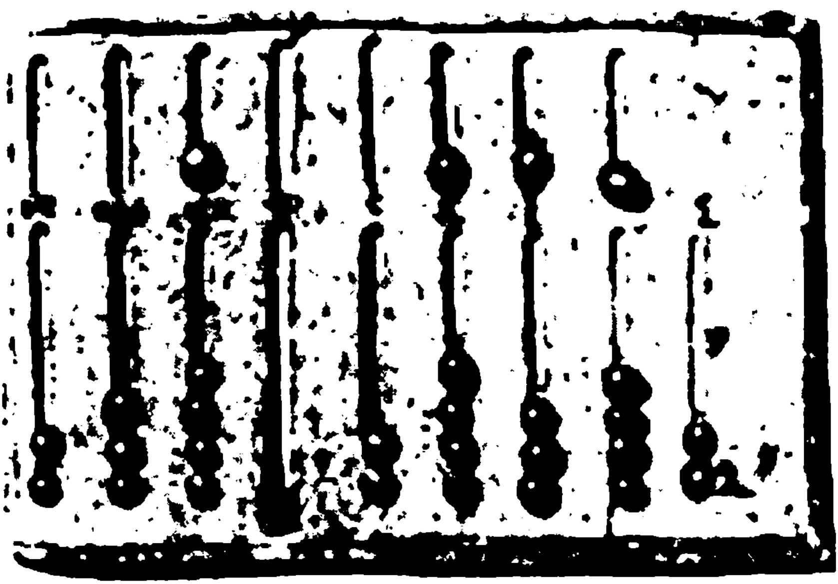
Đây thực sự là một bài toán đố. Đặt chữ M cho 1.000. Lại thêm một M nữa nhưng đi sau chữ C để biểu thị 900 (1000 – 900). Một chữ C đi sau chữ X để chỉ 90. Một chữ V chỉ số 5 và một thanh dọc chỉ đơn vị. Kết quả : MCMXCVI

Thêm một bài toán nữa ? Mời bạn viết theo cách La Mã số 159 128.456.

(Xem Giải đáp Phần A trang 106)

Đồng bào của César tạo ra những con số dài lòng thòng vì lặp đi lặp lại các kí hiệu. Các con số La Mã được viết theo nguyên tắc cộng, ít hiệu quả hơn nhiều so với cách viết theo vị trí của người Lưỡng Hà. Người La Mã không có cơ số, họ chuyển từ hạng đơn vị sang các hạng sau bằng cách nhân thay phiên với 5 và 2. Bạn thử làm mà xem !

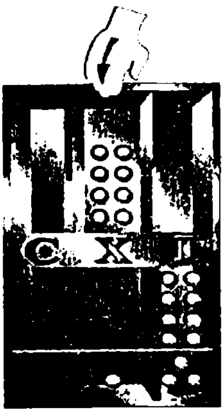
Thực tế thì các chữ số La Mã có ứng dụng rất hạn hẹp. Người ta dùng chữ số La Mã để tóm tắt một con số "ghi bằng chữ" cồng kềnh về năm tháng, một số tiền phải trả... Khi làm tính, người ta dùng cách khác : bàn tính.



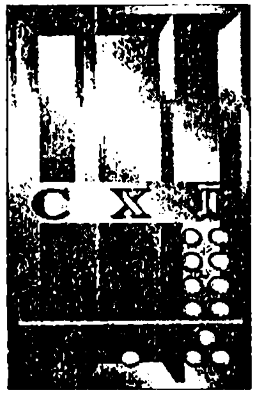
Bản tính là một hệ thống tính toán theo cột có gắn những đồng khuy tròn. Nhiều bản tính La Mã làm theo kiểu thu nhỏ có những hạt tròn chạy trong các rãnh.

Trên bàn tính, thay vì các chữ số, người ta dùng những cái khuy tròn chuyển dịch được từ cột này sang cột khác trong tính toán. Những khuy tròn đó phần lớn là những viên sỏi. Từ đó từ *calculus* (viên sỏi nhỏ) trong tiếng La-tinh trở thành từ chỉ môn tính toán. Nhưng ngay với bàn tính, các phép tính cộng và tính nhân đòi hỏi rất nhiều thao tác.

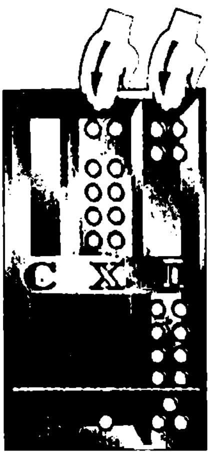
BÀN TÍNH LÀM PHÉP NHÂN



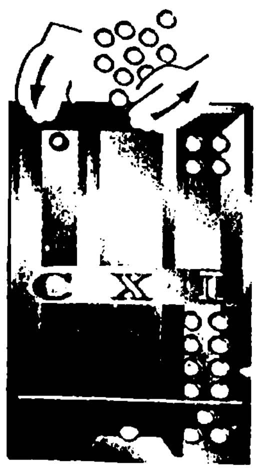
Ta thử nhân 8 với 13. Trong hai hàng dưới cùng người ta đặt hai con số phải nhân : 8 khuy màu xanh trong cột đơn vị để chỉ số VIII. Về phía dưới người ta đặt 1 khuy hồng trong cột hàng chục và 3 khuy xanh trong hàng đơn vị để chỉ XIII.



Người ta tính tích thứ nhất 8 lần 1 khuy hồng, tức là 8 lần 10 = 80. Trong những hàng phía trên người ta đặt 8 khuy hồng.



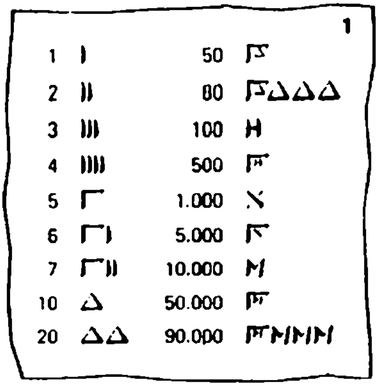
Người ta chuyển sang tích thứ hai : 8 lần 3 = 24. Người ta thêm vào bên trên 2 khuy hồng và 2 khuy xanh.



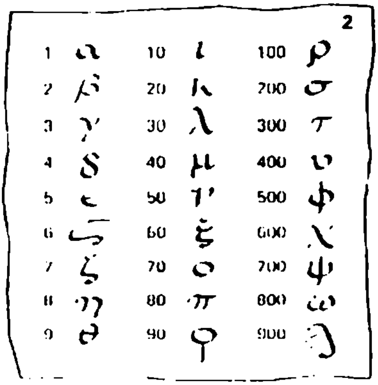
Để kết thúc, người ta thay 10 khuy hồng cột hàng chục bằng 1 khuy tím đặt vào cột hàng trăm. Cuối cùng người ta hiểu vấn đề như sau : VIII nhân XIII thành CIV (104). Cứ theo cung cách này thì biết đến bao giờ mới nhân được 548.237 cho 2.591 ?

CÁCH VIẾT SỐ CỦA NGƯỜI HI LẠP

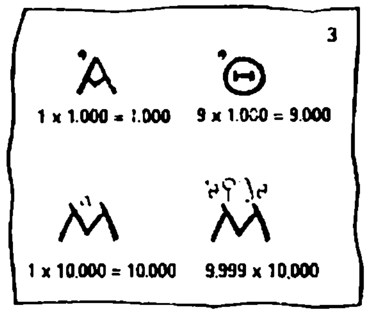
Trong cách viết số gọi là "cách viết của thành Athène" (h.1), người Hi Lạp vừa viết theo cách cộng vừa viết theo cách nhân. Chẳng hạn để viết số 50, người ta lồng kí hiệu chỉ số 10 vào trong kí hiệu chỉ số 5 (5 x 10 = 50).



Người Hi Lạp về sau còn dùng thêm một cách viết khác, gọi là hệ ionie (h.2). Hệ này dựa trên nguyên tắc cộng và sử dụng các chữ của bảng chữ cái Hi Lạp



(chữ alpha đầu bảng ứng với số 1). Để viết những số từ 1.000 đến 9.999, người ta đặt một dấu nhỏ kiểu dấu phẩy bên cạnh các số từ 1 đến 9. Kể từ số miriat (10.000) các số được viết bằng chữ M với những chữ cái chỉ các số tương ứng phía trên đầu chữ ấy (h.3).



Về phía bên kia biển Adriatique, những người Hi Lạp cũng lấn cấn trong ngõ cụt. Cách viết số đầu tiên của họ, gọi là cách của thành Athènes (h.1 phía trên), cũng bất tiện như cách của người La Mã và không thể tính toán gì với những số viết theo những cách ấy. Về sau người Hi Lạp sao chép cách viết số của người Do Thái và người Phénicie, tạo nên một hệ thống thứ hai có tên là "hệ chữ cái". Trong hệ thống ấy, các chữ số được viết theo các chữ trong bảng chữ cái. Nhưng rồi hệ này cũng chẳng hiệu quả hơn bao nhiêu.

Theo các nhà chuyên môn thì một trong những lí do khiến người Hi Lạp thiên về hình học mà lơ là đại số là hệ chữ số kém cói của họ. Trong hình học thành tựu của họ quả là rực rỡ.

Tuy vậy có hai người xứng đáng cứu vãn danh dự của người Hi Lạp, đó là Archimède và Diophante. Archimède sống ở Syracuse, trên đảo Sicile, từ 287 đến 212 tr. CN. Ngoài công việc của một kĩ sư tài năng và một nhà hình học giỏi, ông là một trong những người đầu tiên suy ngẫm về khái niệm số. Ông phát minh ra một hệ thống cho phép ghi những số cực lớn, lớn hơn bất kì số nào biết được vào thời đó. Theo cách ấy ông đã tính số lượng các hạt cát chứa trong một hình cầu có kích thước bằng cả vũ trụ theo quan niệm của người Hi Lạp. Số hạt cát đó, theo cách viết trong hệ thập phân của ta ngày nay sẽ là : 10^{52} !

Diophante ở Alexandrie là một ngôi sao sáng trong lịch sử. Người ta không biết gì nhiều về ông, ngoài việc ông viết một cuốn sách toán vào cuối thế kỉ thứ ba sau CN. Thay vì viết về hình học, môn thế mạnh của người Hi Lạp, Diophante bí hiểm đã tạo ra một ngành toán học mới, đó là thuật tìm giá trị bằng số của mọi ẩn số trong một bài toán. Trường hợp Diophante là duy nhất trong lịch sử các ngành khoa học : không có công trình nào đi trước công trình của ông, không có ai vạch đường cho ông, ông như đến từ chốn hư vô và lại biến mất vào hư vô vậy ! Bảy trăm năm sau, các bản thảo công trình bị lãng quên của ông được người Á-rập tìm thấy và họ đặt tên là *algèbre* (Đại số).

NHỮNG BÀI TOÁN CỦA DIOPHANTE

Diophante viết nhiều công trình số học về cách giải những bài toán có gốc hình học. Ông xây dựng những phương trình cho các bài toán ấy và tìm lời giải. Diophante đặt điều kiện là những lời giải phải là số nguyên hay số hữu tỉ.

Một ví dụ đơn giản về phương trình Diophante : Tìm một tam giác vuông có tổng diện tích và đường huyền là một số bình phương còn chu vi là một số lập phương.

Diophante mở đầu bằng dự đoán rằng một cạnh góc vuông bằng 2. Nếu ta gọi cạnh góc vuông kia là a và cạnh huyền là c thì ta có $a^2 + 4 = c^2$. Như vậy thì đó là một định lí cũ mèm của Pythagore rồi, thế thì ta có quyển cẩu cứu rồi bởi vì đây là tam giác vuông. Cạnh tam giác là a và tổng cạnh và huyền là a + c. Đó là một số bình phương (như đề bài toán ra) mà ta kí hiệu là y^2 Vậy $a + c = y^2$. Mặt khác chu vi a + c + 2 là một số lập phương. Gọi số đó là x^3 thì $a + c + 2 = x^3$. Thay a + c bằng y^2 ta có $y^2 + 2 = x^3$ Hoặc $y^2 = x^3 - 2$, ta suy ra kết quả x = 3 và y = 5 tức là a = 12,42 và c = 12,58. Nhưng vào thời đó Diophante suy ra kết quả một cách mò mẫm.

Những bài toán như trên làm phát sinh ra lí thuyết về phương trình Diophante và hình học Diophante. Hai ngành này hiện nay là những ngành nghiên cứu hết sức năng động trong toán học.

ẤN ĐỘ : PHÁT KIẾN RA SỐ 0 THẬT THẦN TÌNH !

Những điều trình bày trên đây cho thấy mỗi nền văn minh cổ đại đều có khả năng tạo cho mình một hệ chữ số. Theo Jim Ritter, một nhà nghiên cứu lịch sử khoa học, "*hệ chữ số nào cũng có ưu điểm và nhược điểm. Không có dấu hiệu nhỏ nào cho thấy dân tộc này giỏi hay kém tính toán hơn dân tộc kia. Mỗi dân tộc xoay xở tìm cách thoả mãn nhu cầu của mình*". Tóm lại trong cuộc chạy đua về tạo chữ số, không có dân tộc nào siêu việt cũng không có dân tộc nào yếu kém. Tuy nhiên, về phương diện chữ số này, có một nền văn minh mà ta phải chịu ơn hơn cả, đó là nền văn minh Ấn Độ.

Thiên tài của dân tộc này là phối hợp ba ý tưởng lớn : nguyên tắc vị trí mà người Lưỡng Hà quen dùng, nguyên tắc chỉ sử dụng 9 kí hiệu gọi là chữ số, và cuối cùng là phát kiến vĩ đại về số 0.

Kí hiệu chỉ số "không" xuất hiện ở Ấn Độ vào đầu thế kỉ thứ VI đúng vào lúc các học giả chấp nhận hệ đếm theo vị trí. Hiện nay ta cũng khó mà thẩm định được tác dụng huyền diệu của phát kiến này.

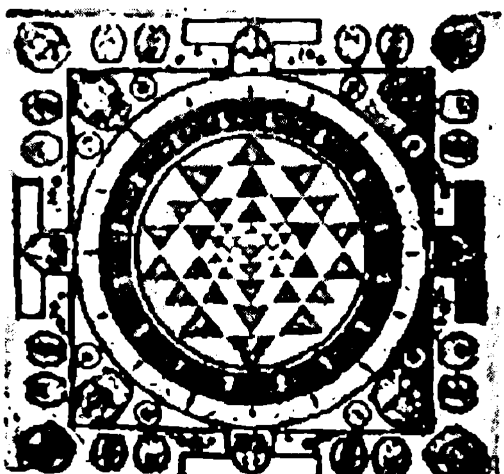
Ta cứ hình dung trong chốc lát rằng nếu ta không có con số tròn tròn kia. Bạn đọc một bức thư trong đó người ta ghi số 3 và số 1 cách nhau một khoảng mơ hồ. Số đó là số gì vậy ? Ba chục và một đơn vị (31) hay ba trăm và một đơn vị (301) hay ba trăm và một chục (310) ? Tóm lại là chẳng biết nghĩ thế nào cho đúng.

Muốn cho cách viết các số theo vị trí tiến hành trôi chảy thì nhất thiết phải có kí hiệu chỉ sự vắng mặt của chữ số ở cột đơn vị, cột hàng chục, cột hàng trăm v.v... Đánh dấu sự vắng mặt : bạn có hình dung được cấp độ trừu tượng hoá phải có để nghĩ ra một kí hiệu thay cho một chữ số không tồn tại không ? Đó chính là ý nghĩa đầu tiên của số 0 của người Ấn Độ được ghi trong tiếng Phạn là *shûnya* (trống rỗng).

Thần Sáng Tạo Brahma đang cưỡi con ngỗng Hamsa. Vị thần này, cũng như tất cả những vị thần khác của Ấn Độ, thường được gắn liền với những suy tư về số phức tạp.

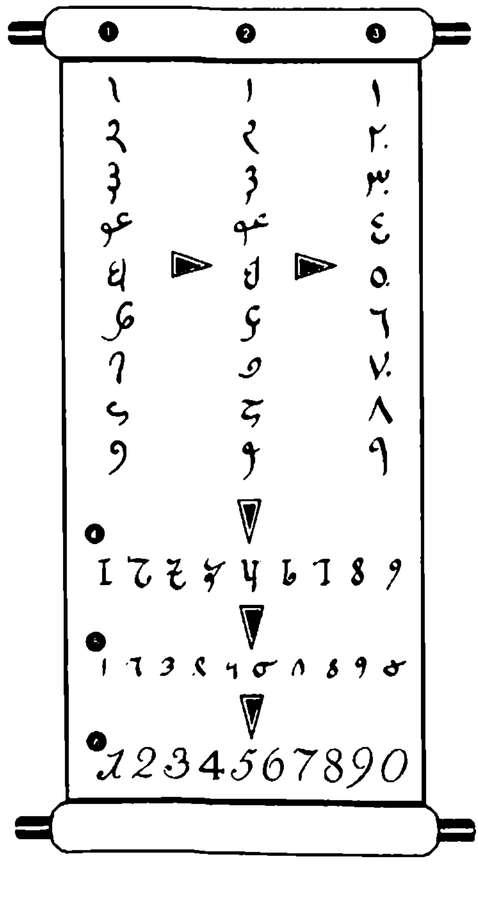
Người Ấn Độ còn đi xa hơn trong việc sử dụng số 0. Từ thế kỉ thứ VII trở đi, số 0 ngoài việc dùng để chỉ chữ số khuyết trong cách viết các con số, trở thành một chữ số đầy đủ ý nghĩa như những chữ số khác. Kí hiệu 0 biểu thị một số lượng, đó là "số lượng rỗng". Số 0 có những tính chất đặc biệt trong những phép tính số học. Năm 628, trong cuốn sách nhan đề "*Brahma - sphuta - siddhârta*", nhà bác học Brahmagupta định nghĩa số 0 như kết quả của phép trừ một số cho chính số đó, tức là $a - a = 0$. Nhà bác học này còn đưa ra những tính chất sau : "*Khi người ta thêm số 0 (shûnya) vào một số hay bớt nó đi từ số đó, số đó không đổi* (...)". Điều đó hiện nay được hiểu là $a + 0 = a$; $a - 0 = a$. Brahmagupta còn phát biểu là số 0 nhân với một số nào đó cho kết quả là 0, $a \times 0 = 0$. Ngày nay ta nói rằng số 0 là phần tử trung tính của phép cộng và phép trừ, nó là phần tử hấp thu của phép nhân.

Người Ấn Độ còn dùng "số không" của họ như là một thuật toán số học : nếu ta thêm kí hiệu 0 vào cuối một con số, con số đó được nhân với cơ số đếm, tức là gấp lên 10 lần trong hệ thập phân Ấn Độ. Như vậy, khi nhân 128 với 10, ta chỉ việc viết thêm 0 vào cuối số : $128 \times 10 = 1.280$.



Hình "sriyantra" là một hình hình học dùng cho các tu sĩ Hin-đu suy ngẫm. Đó là một tập hợp những hình lồng vào nhau tam giác, đa giác, hình tròn, tất cả bao bọc một điểm trung tâm. Đây là một chứng cớ nữa về mối liên hệ chặt chẽ giữa toán học và tôn giáo ở Ấn Độ thời cổ đại.

Bây giờ ta thử xem người Ấn Độ đạt đến hệ đếm với 10 kí hiệu trong đó có kí hiệu 0 như thế nào. Đó là một câu chuyện dài. Khởi đầu là những suy ngẫm về tôn giáo và thiên văn của các thầy tu trên những con số, có số lớn đến 10^{421}. Số này biểu thị bằng số 1 đi trước 421 số 0 ! Để ghi lại những số như vậy các nhà bác học dùng một cách đếm bằng lời trong tiếng Phạn. Hệ thống này tỏ ra có hiệu quả vì đó là một hệ theo vị trí, có điều là nó chẳng giúp ích gì cho tính toán vì nó được ghi bằng ... từ ngữ chứ không bằng số !



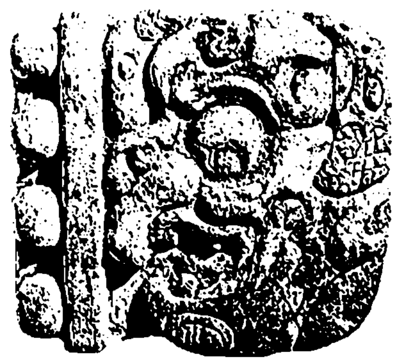
Người Ấn Độ dùng những chữ số "brahmi" để viết số theo vị trí (cột 1). Người Ả-rập dùng lại các chữ ấy có biến hoá chút ít (cột 2). Trong thế giới Ả-rập hiện nay người ta dùng các chữ số như cột 3. Người Châu Âu đến lượt mình sao chép các chữ số Ả-rập dạng cổ rồi nhanh chóng cải biến chúng. Hàng 4 chỉ cách viết vào năm 976, hàng 5 cách viết thế kỉ XIII, cuối cùng hàng 6 chỉ cách viết thế kỉ XVIII. Từ thế kỉ này trở đi chữ số được xác định vĩnh viễn trong nghề in ấn.

Muốn tính toán, người Ấn dùng một hệ khác, đó là hệ "*brâhmi*". Hệ này có tính thực tiễn cao : 9 kí hiệu cho phép tính toán trên bàn tính. Nhưng hệ này cũng còn bất tiện vì nó theo nguyên tắc cộng chứ không theo vị trí.

Không biết ai đã nảy sinh ý nghĩ phối hợp hai cách nói trên tồn tại song song và chỉ giữ lại những khía cạnh hiệu lực của mỗi hệ, tức là lập ra một hệ mới trong đó dùng nguyên tắc vị trí với 9 kí hiệu ghi chữ số. Có thể là cũng vị thiên tài ấy nghĩ ra cách thay chữ "*shûnya*" bằng một kí hiệu, kí hiệu thứ mười, kí hiệu cuối cùng dưới dạng một vòng tròn nhỏ.

NGƯỜI MAY-A CŨNG TÌM RA ĐƯỢC SỐ KHÔNG

Bài viết trên đây kể lại nguồn gốc chữ số mà những người châu Âu sử dụng từ một ngàn năm nay. Nhưng không vì thế mà ta quên công lao người May-a, thuộc một nền văn minh khác và độc lập với Ấn Độ, đã tìm ra số không và một cách viết theo vị trí có cơ số 20. Người May-a sống ở Trung Mỹ, hoàn toàn không được lục địa cũ biết đến. Vào thế kỉ thứ III, trước người Ấn 3 thế kỉ, những nhà bác học May-a đã phát triển một nghệ thuật tính toán sâu sắc. Điểm mạnh của người May-a là lịch và thiên văn. Những con số không của họ - họ có nhiều số không – có dạng sò hến vẽ trên giấy thảo mộc và dáng những cái đầu chạm trên đá ! Một trong những số không dùng để vị trí trống trong cách viết số, y như số không của ta. Một số không khác chỉ ngày đầu các tháng. Ngày 1 tháng giêng được viết là "0 Pop" theo tiếng May-a. Theo André Cauty, nhà nghiên cứu lịch sử khoa học, người May-a đã biết dùng các chữ số, kể cả số không, như là thuật toán chuyển một thời điểm này sang một thời điểm khác. Chẳng hạn +1 tuần chuyển ngày 3 tháng bảy sang ngày 10 tháng bảy.

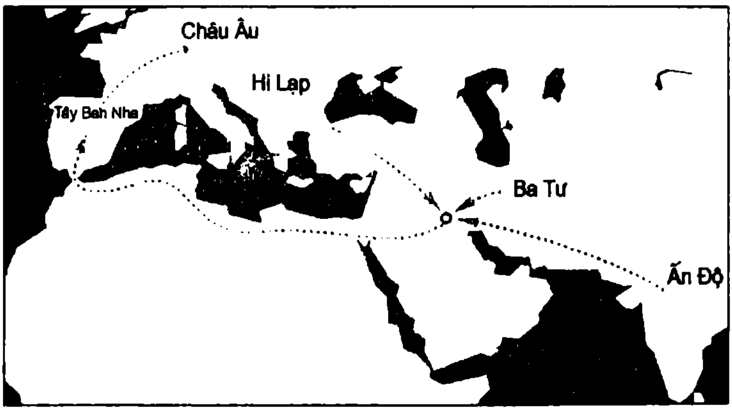


Tượng cái đầu khắc chìm này biểu thị một trong các đơn vị thời gian : ngày, tháng, năm... theo lịch May-a. Thanh dọc cạnh bốn điểm là một trong những kí hiệu cho chữ số 9.

PHƯƠNG TÂY SAO CHÉP CHỮ SỐ CỦA NGƯỜI Ả-RẬP

Các nhà sử học mời ta tham gia trò chơi đi tìm kho báu. Mà của báu gì vậy ? Tất nhiên đó là hệ thống chữ số Ấn Độ. Điểm xuất phát : Phía Bắc Ấn Độ. Chặng thứ nhất đi về phía Đông dẫn đến nước Trung Hoa để tìm ra vừa là hệ thống chữ số Ấn Độ vừa là Kinh Phật. Ta đi tiếp về phía Tây, nơi người Ả-rập sử dụng và chuyển hệ chữ số đó cho láng giềng Châu Âu của họ (xem bản đồ dưới đây). Ta tạm dừng chân đôi chút ở mảnh đất đạo Hồi này.

ĐẾ CHẾ Ả-RẬP THẾ KỈ THỨ X



Khoa học Ả-rập thời Trung cổ phát triển một phần nhờ có những nền văn minh xung quanh như Hi Lạp, Ba Tư và Ấn Độ. Từ Bagdad được xem là thủ đô của Đế chế Ả-rập, các nhà thông thái đã làm lan toả kiến thức mới của mình sang Châu Âu thông qua nước Tây Ban Nha theo Hồi giáo.

Gần một thế kỉ sau khi nhà tiên tri Mahomet qua đời (năm 632), những bộ lạc vùng Aribie chinh phục được một đế chế rộng lớn chạy từ Ấn Độ đến Tây Ban Nha xuyên qua Bắc Phi và Nam Ý. Bắt đầu từ thế kỉ VIII, thành Bagdad có một nền khoa học rực rỡ và ảnh hưởng mạnh đến các đô thị khác như Le Caire, Kairouan, Fès, Cordoue người ta đua nhau dịch các tác phẩm của các nhà thông thái Hi Lạp và Ấn Độ. Các vị vua chúa không tiếc tiền bạc để lập ra các viện hàn lâm cũng như những thư viện lớn, nơi tập trung làm việc của nhiều nhà thông thái mọi miền của đế chế.

Bức hoạ thu nhỏ của thế kỉ XV này cho ta thấy một buổi học thiên văn ở Ba Tư. Người Ba Tư đã cống hiến nhiều trong việc truyền bá khoa học gọi là "Ả-rập".

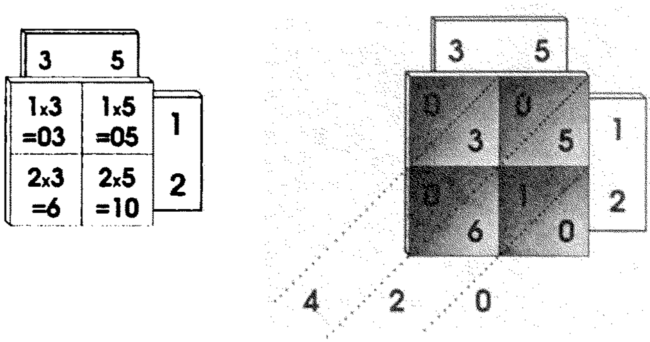
Tương truyền rằng người Ả-rập phát hiện ra cách viết chữ Ấn Độ vào năm 773 thông qua việc một du khách dâng tặng vua Al-Mansur một bảng lượng giác. Vào thời đó, người Ả-rập còn dùng một cách viết chữ số kém cỏi bằng cách dùng chữ cái để ghi số. Điều đáng chú ý là ngay lập tức các nhà thông thái thấy ngay lợi ích của cách viết chữ số dùng chỉ mười kí hiệu cộng với cách viết vị trí.

Lợi ích càng thấy rõ khi người ta đồng thời khám phá những công trình của nhà bác học Hi Lạp Diophante. Người ta làm cho môn đại số tiến những bước khổng lồ. Từ tiếng Pháp *algèbre (đại số)* đến từ tiếng Ả-rập *al-geber* có nghĩa là "đặt lại đúng chỗ" (trong việc sắp các số hạng của một phương trình về một phía đối với dấu =).

Vào thế kỉ thứ IX hệ thống chữ số Ấn Độ được một nhà toán học có tầm cỡ, Mohammed Al-Khuwarizmi, quan tâm. Nhà toán học gốc Ba Tư này viết cuốn sách bán chạy có đầu đề là "*Sách về cách tính toán Ấn Độ*". Nhờ sách được sao chép nhiều lần, cách viết chữ số Ấn Độ được phổ biến rộng rãi.

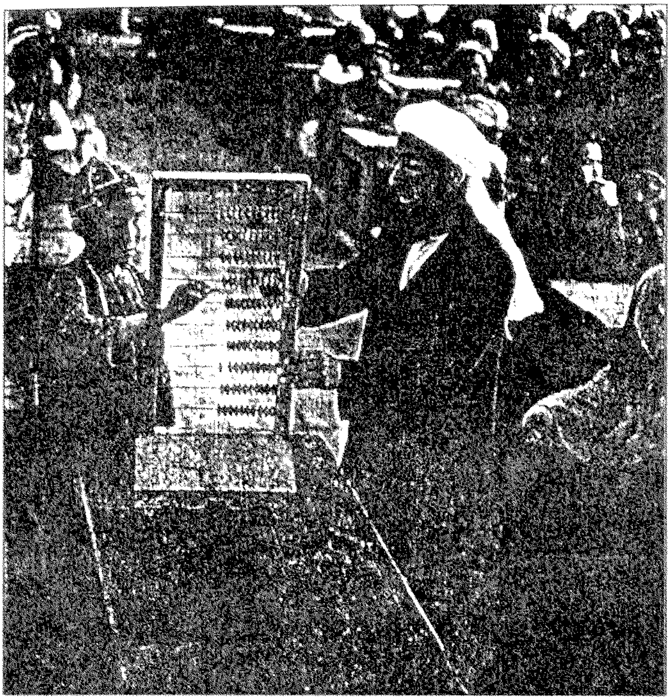
Cũng như những nhà thông thái Ấn Độ trước đó, trong một thời gian dài những người làm tính Ả-rập làm thẳng những con tính trên cát hoặc trên những tấm thẻ phủ bụi. Trong lúc mà ở Maghreb thủ thuật ấy cứ duy trì mãi thì ở Phía Đông nó được nhanh chóng thay thế bằng những phương pháp tiên tiến hơn vay mượn từ môn số học Ấn Độ.

PHÉP NHÂN KIỂU BỨC MÀNH



Phép nhân "kiểu bức mành" này chắc chắn được người Ả-rập phát minh vào thế kỉ thứ VIII. Cuối thời Trung cổ, nó được truyền bá sang Châu Âu. Cách nhân khá đơn giản : người ta viết các số nhân với nhau phía trên và về một bên của một bảng kẻ ô vuông. Trong ví dụ bên cạnh ta có 35 x 12. Rồi trong mỗi nửa ô vuông người ta ghi những kết quả các tích trung gian. Cuối cùng chỉ cần cộng các chữ số theo đường chéo và chú ý nhớ.

Về sau người Ả-rập đóng vai trò trung gian giữa Ấn Độ và châu Âu. Châu Âu lúc đó vô cùng yếu kém. Khoa học làm sao phát triển được khi khắp nơi quân rợ xâm lăng và nạn đói hoành hành. Những vị thầy tu là những người có văn hoá cao nhất cũng chỉ đếm bằng đầu ngón tay và tính toán trên những bàn tính cổ lỗ dùng khuy tròn.



Trong những ngôi trường làng ở vùng Trung Á, người ta vẫn dạy tính toán bằng bàn tính gảy kiểu cổ. Những bàn tính gảy này hoạt động cùng nguyên tắc với các bàn tính khác. Bàn tính gảy xuất hiện ở Trung Quốc vào thế kỉ thứ IX và hiện nay vẫn còn được 1/3 nhân loại sử dụng !

Vào cuối thế kỉ X xuất hiện một nhân vật đặc biệt : Gerbert d'Aurillac. Vốn tính tò mò ham hiểu biết, vị thầy tu người Pháp này tiến hành một chuyến viếng thăm Tây Ban Nha trong ba năm, đất nước này lúc ấy bị người Ả-rập chiếm cứ hết hai phần ba lãnh thổ. Gerbert học cách tính toán kiểu Ấn Độ. Trở lại Pháp, vị thầy tu này áp dụng những kiến thức mới vào chiếc bàn tính La Mã cổ mà người châu Âu còn sử dụng. Ông thay các khuy tròn trong từng cột bằng một thẻ duy nhất, trên thẻ ghi chữ số "Ả-rập" tương đương. Năm 999 Gerbert trở thành Giáo hoàng dưới tên gọi Sylvestre Đệ nhị, toàn Châu Âu chỉ nhờ cơ hội này mới biết đến cách tính toán với các chữ số Ả-rập – Ấn Độ.

Nhưng không có chuyện gì xảy ra cả. Sáng kiến của Gerbert không hợp gu mọi người. Đặc biệt không hợp với những vị chức sắc Nhà thờ Thiên Chúa vốn đã quen với bàn tính cũ và không chấp nhận việc Gerbert vay mượn chữ số của bọn ngoại đạo ! Trong một thời gian dài Gerbert bị coi là kẻ phù thuỷ nhiều tà thuật. Thực ra lí do chính lại ở chỗ khác : Châu Âu thời đó chậm phát triển đến nỗi chẳng ai cần chữ số Ả-rập làm gì. Cái bàn tính La Mã cổ lỗ kia đủ dùng cho nền thương mại èo uột và một nền khoa học còn sơ khai.

Gerbert d'Aurillac, nhâm chức Giáo hoàng dưới tên gọi Sylvestre II, sau chuyến đi thăm Tây Ban Nha năm 970 đã mang về cho Giáo hội hệ thống viết chữ số Ả-rập – Ấn Độ

NHỮNG BIẾN HOÁ CỦA MỘT TỪ

Từ ngữ theo thời gian trải qua những chặng đường quanh co khúc khuỷu. Chẳng hạn trường hợp từ *shûnya* của tiếng Phạn được người Ấn Độ dùng để chỉ số không, phát kiến đẹp nhất của họ. Khi người Ả-rập phát hiện ra hệ chữ số Ấn Độ, họ dịch *shûnya* thành sifr, có nghĩa là "rỗng". Vào thời kì các cuộc Thập Tự Chinh từ *sifr* lang bạt khắp Châu Âu và ít nhiều mang màu sắc La-tinh hơn : *sifra, cyfra, zyphra, zephirum*... Từ thế kỉ XV trở đi, một trong những từ trên dần dà được dùng để chỉ toàn thể các kí hiệu của hệ đếm Ả-rập – Ấn Độ. Hiện nay từ *chiffre* của Pháp, từ *ziffer* của Đức, từ *cifra* của Tây Ban Nha và Ý mang nghĩa ấy.

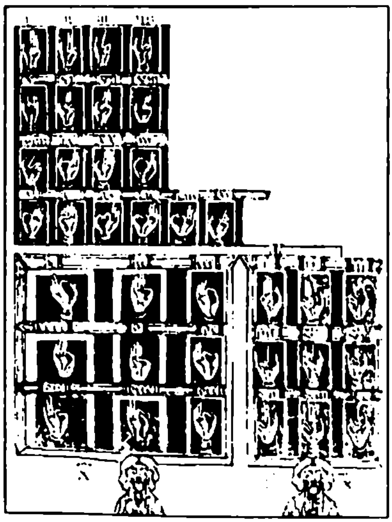
Về phần mình từ *zepherum* do nhà toán học người Ý là Fibonacci sử dụng từ thế kỉ XIII đã tạo ra từ *ziphero* trong tiếng Ý chỉ số không và được rút gọn thành *zero*. Về sau người Pháp, người Tây Ban Nha (*cero*) và người Anh nhận *zero* để chỉ số không nhưng người Đức vẫn thích dùng từ *null*.

Vào thế kỉ XII có những chuyển biến lớn. Sự tiếp xúc giữa Châu Âu và thế giới Hồi giáo tăng lên nhiều thông qua các cuộc Thập Tự Chinh, cuộc chinh phục của Tây Ban Nha và giao thương phát triển. Tại Tây Ban Nha thời đó, các tác phẩm của Euclide, Aristote, Archimède cũng như nhiều công trình của các nhà thông thái Ả-rập như Al Khuwarizmi, Ibu Sina... đều đã được dịch và phổ biến rộng rãi. Người châu Âu bấy giờ mới thấy khao khát hiểu biết toán học và thiên văn, họ khám phá lại những gì Gerbert mang lại quá sớm. Những cách thức tính toán với các chữ số "Ả-rập" bắt đầu ra sức tung hoành dưới tên gọi "*algorisme*", do cách đọc sai tên nhà toán học Al Khuwarizmi.

Vào đầu thế kỉ XIII, Léonard de Pise, một nhà toán học lớn người Ý thường được gọi là Fibonacci, thúc đẩy mạnh trào lưu dùng số Ả-rập. Nhà toán học trẻ này đã học toán ở Algérie trong một cửa hiệu thực phẩm. Rồi anh ta đi sang Trung Đông. Năm 1202, khi trở về Ý, anh ta viết cuốn sách nhan đề "*Liber abaci*".

Bức tranh này mô tả sự chọn lựa của Nữ thần Số học : người tính toán kiểu "algorisme" dùng số Ả-rập đã thắng người dùng bàn tính để tính toán theo kiểu cũ. Bức tranh được vẽ năm 1503 nhưng về thực tế cuộc tranh chấp giữa hai phương pháp phải đến năm 1789 mới chấm dứt, lúc đó Quốc hội lập hiến ban bố lệnh xoá bỏ cách tính toán trên bàn tính.

Trong cuốn sách này Fibonacci giải thích mọi quy tắc tính toán "bằng bút" sử dụng 9 chữ số Ả-rập và chữ số không. Cuốn sách bán chạy như tôm tươi trong giới mê "*algorisme*". Nhưng những kẻ thủ cựu khư khư dùng bàn tính La Mã cũ vẫn chưa chịu thua. Chỉ riêng ở Pháp, sự tranh chấp cãi cọ kéo dài trong nhiều thế kỉ, mãi cho đến... Cách mạng 1789 mới chấm dứt ! Cách mạng cấm triệt để việc tính toán trên bàn tính La Mã trong trường học và trong các cơ quan nhà nước.



Nhà thần học Đức Raban Maur (780 - 876) trình bày trong bản thảo này một thủ thuật viết con số cho phép dùng hai bàn tay để đếm đến số 9.999. Ở Châu Âu trong nhiều thế kỉ người ta dùng những cách thức tương tự trong tính toán.

TRẮC NGHIỆM :

BẠN CÓ HIỂU BIẾT NHIỀU VỀ CÁC CHỮ SỐ KHÔNG ?

Tác giả bài trắc nghiệm dưới đây dựa trên cuốn sách "Lịch sử các chữ số trên thế giới" của Georges Ifrah mà soạn ra 8 câu hỏi. Nếu bạn trả lời đúng cho hơn 6 câu, bạn là người coi như am tường chữ số rồi, bạn không cần học hỏi gì thêm. Nếu bạn trả lời đúng cho từ 3 đến 5 câu, bạn cũng thuộc vào loại khá. Nếu bạn chỉ trả lời đúng cho vài ba câu thôi thì bạn nên cố gắng học hỏi nghiêm túc qua sách vở tài liệu để có dịp giải đáp thắc mắc cho anh em, chị em hoặc bạn hữu gần xa.

1. Người Cromagnon chưa biết đếm.

a. Đúng

b. Sai

2. Người La Mã dùng chữ cái M để ghi số 1.000, L cho 50, X cho 10, V cho 5 và I, II, III cho các số 1, 2, 3. Trong hệ thống này số 87.000 sẽ được ghi như thế nào ?

a. Họ viết LXXXVII tiếp đó là 87 chữ M.

b. Với những con số quá lớn họ dùng chữ Hi Lạp để ghi.

c. Họ dùng một kí hiệu cho phép tránh sự lặp lại nhiều lần chữ cái M.

3. Theo bạn, những chữ số mà ta đang dùng ...

a. do người Ả-rập phát minh

b. suy từ hệ đếm của người Trung Hoa

c. do người Lưỡng Hà phát minh

d. do người Ấn Độ phát minh

4. Ngày 12 / 11 / 1945 người ta tổ chức một cuộc tranh tài giữa một bên là nhà vô địch người Nhật về sử dụng bàn tính và anh lính Mĩ Thomas Ian, chuyên gia máy điện toán. Ai làm các phép cộng, trừ, nhân, chia các hàng số gồm từ 3 đến 6 chữ số nhanh hơn và không sai lầm thì thắng cuộc. Vậy theo bạn ai đã chiến thắng ?

a. Anh lính Mĩ

b. Nhà vô địch Nhật bản

c. Không ai thắng ai

5. Vào thế kỉ XVI, Michel de Montaigne - thị trưởng Bordeaux và tác giả nổi tiếng của bộ sách *"Tiểu luận"* - được đánh giá là người thông thái nhất nước vào thời đó. Thế nhưng ông không có khả năng làm một phép cộng hay phép trừ mà ngày nay một em nhỏ 7 tuổi làm một cách dễ dàng.

a. Đúng

b. Sai

6. Một huyền thoại Ấn Độ kể rằng một vị vua muốn thưởng cho một thần dân có công của mình bất kì thứ gì mà người đó mong muốn. Thế mà kẻ thần dân kia chỉ xin một phần thưởng quá khiêm tốn khiến nhà vua kinh ngạc. Phần thưởng đó như sau : Trên ô đầu của bảng Chaturanga (bàn cờ cổ nhất ở Ấn Độ) xin đặt 1 hạt lúa mì, trên ô thứ hai 2 hạt, trên ô thứ ba 4 hạt, trên ô thứ tư 8 hạt, trên ô thứ năm 16 hạt và cứ như thế cho đến ô cuối thứ 64. Vậy giữa nhà vua và vị thần dân kia ai giỏi tính toán hơn ?

a. Vị thần dân

b. Nhà vua

7. Năm 1867 ở xứ Piémont (Ý) có người tên là Giacomo Inaudi tính toán như thần. Khi lên 7 tuổi anh ta đã tính nhẩm được những bài toán hắc búa một cách dễ dàng đáng kinh ngạc. Bạn có thể hình dung được tầm cỡ năng lực anh ta thế nào không ?

a. Trong vòng 2 phút đồng hồ anh ta tính được bất kì phép cộng trừ nhân chia nào với các số có 4 chữ số.

b. Trong vòng 1 phút anh ta làm xong các phép tính với các số có 8 chữ số.

c. Trong vòng chưa đến 35 giây anh ta tính xong những phép tính gồm đến 19 chữ số.

8. Ta thường đếm mọi thứ theo các số chục, trăm, ngàn. Vậy sao trên đồng hồ một giờ có 60 phút và trên đường tròn lại chia thành 360 độ ?

a. Đó là tàn dư của phép đếm cổ xưa của người Sumérien.

b. Các việc chia trên đây là tuỳ tiện, không theo lô-gích nào.

c. Nếu một giờ chia thành 100 phút, mỗi phút chia thành 100 giây thì các đơn vị thời gian ấy sẽ quá ngắn.

VÀI TRÒ CHƠI ĐỘNG NÃO BỔ ÍCH

1. NGƯỜI ĐƯA THƯ HAY CHỮ VÀ GIỎI TOÁN !

Sáng nào cũng vậy, người bưu tá đến đưa thư cho bác Nipol, nguyên là giáo viên toán. Hai người hay đố nhau toán để rèn cho đầu óc luôn tinh tường. Hôm đó bác Nipol ra cho người đưa thư bài toán như sau :

– Tôi có ba đứa con gái. Lấy số tuổi của chúng đem nhân với nhau thì bằng 36, nếu đem cộng lại thì bằng số nhà trước mặt. Nào ông tính đi !

Người đưa thư suy nghĩ một lúc lâu rồi rụt rè nói :

– Tôi muốn có thêm một chi tiết.

Bác Nipol đáp :

– Đúng rồi, tôi quên bảo là đứa đầu có tóc màu vàng óng.

– Người đưa thư nói ngay lập tức tuổi của từng cô gái. Bạn thử xem người đưa thư tính toán như thế nào và tuổi của mỗi cô gái là bao nhiêu.

2. NHỮNG CON SỐ PHƯỢNG HOÀNG

Việc gì sẽ xảy ra nếu ta đem số 052631578947368421 (chà khiếp quá !) nhân với một số bất kì trong khoảng từ 2 đến 18 ? Giải thích tại sao số đó có tên là con số "phượng hoàng" ?

3. TUỔI CỦA VIÊN ĐẠI UÝ

Bạn có biết những bài toán về cái mâu không ? Những bài này được dùng trong các trò chơi tìm dấu vết, câu đố và các cuộc thi tài khác. Mâu là thứ vũ khí được dùng vào các thế kỉ XV và XVI. Bài toán như sau :

Vào một ngày cuối tháng "đáng nhớ" trong Chiến tranh Thế giới lần thứ nhất, một viên đạn đại bác nổ tung làm lộ ra bộ hài cốt của một viên đại uý. Người ta nhân tuổi của viên đại uý khi chết trận với 1/4 số năm kể từ ngày viên đại uý chết cho đến khi viên đạn nổ, với chiều dài của cái mâu tính bằng bộ (1 bộ ≈ 30cm) được tìm thấy bên cạnh bộ xương, kết quả là 471.569. Bây giờ mời bạn phân số trên thành thừa số nguyên tố và trả lời câu hỏi : viên đại uý kia là ai vậy ?

4. CỨ DƯ MỘT HOÀI !

Có một số n hễ cứ đem chia cho 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 hay 10 số dư vẫn là 1 ! Dù sao số n này vẫn không vượt quá 2.500. Đó là số gì vậy ?

5. CHA MẸ UỐNG, CON CÁI ĐẾM

Những người láng giềng của bác Nipol thích tiệc tùng hội hè. Tối nào cũng vậy người ta nghe tiếng mở nút chai đì đùng và tiếng chạm cốc lanh canh. Tối thứ bảy vừa rồi có tiếng chạm cốc vang lên 28 lần. Bác Nipol gái vốn tính tò mò liền hỏi ông chồng giỏi toán của mình :

– Họ có bao nhiêu người thế ?

Chiều chủ nhật, "Lại nhậu tiếp rồi !", một tiếng nút chai nổ tung rồi tiếng chạm cốc lanh canh. Ở nhà bác Nipol chẳng ai nói gì nhưng bác trai máy móc đếm những tiếng chạm cốc. Một hồi sau những thực khách ấy lại chạm cốc tiễn. Một người ra về. Vị khách vừa đi thì một tiếng nút chai nổ, người ta lại chạm cốc. Lần này bác Nipol nhận xét :

– Có 5 tiếng chạm cốc ít hơn lần trước...

Bác chưa nói dứt câu thì cậu con trai, mắt vẫn như dán vào tờ tạp chí, cho biết ngay con số khách tham gia ăn nhậu...

6. CHUỖI SỐ LÀM TA ĐIÊN ĐẦU

Ta xét một dãy số có vô hạn số hạng kiểu "chả bao giờ dừng" :

$$+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1\ldots$$

và cố tính xem tổng là bao nhiêu. Đến đó thì mọi việc xem như loạn cả lên.

Bác Nipol, giáo viên toán vốn tính nóng nảy, nói ngay :

– Lũ ngốc kia, có thế mà tính không ra ! Chỉ cần nhóm các số lại từng cặp là xong.

Ta thử làm theo bác ấy xem sao.

$$S = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + ...$$

$$S = 0 + 0 + 0 + 0 ... = 0$$

$$S = 0$$

Một học sinh thuộc diện "cá biệt" đang đứng đội sổ trong lớp rít lên :

– Thầy, thầy, em cũng nhóm các số như vậy nhưng em thấy khác lắm ! Nè :

$$S = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - - (1 - 1) - ...$$

$$S = 1 - 0 - 0 - 0...$$

Vậy $S = 1$!

Đứa ngồi cạnh nó giơ tay :

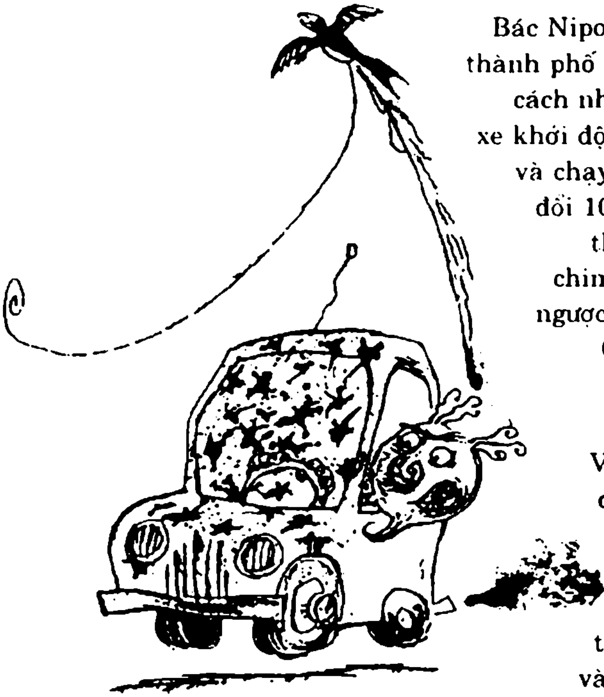
– Thưa thầy, em làm đơn giản hơn nhiều, em chẳng nhóm gì cả, nhóm làm chi cho mệt ! Em chỉ thêm có một ngoặc đơn thôi.

$$S = 1 - (1 + 1 - 1 + 1 + 1...) = 1 - S$$

Như vậy em có $S = 1 - S$, từ đó suy ra $2S = 1$, tức là $S = \frac{1}{2}$

Vậy ai đúng ai sai đây ? $S = 0$, 1 hay $S = \frac{1}{2}$? Chỉ biết rằng thầy Nipol cứ ngây ra như tượng gỗ. Thầy về nhà lục hết sách toán ra tra cứu và ngạc nhiên thấy học sinh của mình đã xướng lại một bài toán nổi tiếng thời xưa.

7. CHIM ÉN BAY



Bác Nipol vẫn đều đặn đi từ thành phố A đến thành phố B cách nhau 100km. Bác cho xe khởi động vào thời điểm h và chạy với vận tốc không đổi 100km/giờ. Cũng vào thời điểm h một con chim én vỗ cánh bay đi ngược chiều với chiếc xe. Chú én này bay với vận tốc không đổi 120 km/giờ.

Vừa lúc gặp chiếc xe chim én lập tức bay trở lại thành phố B. Khi đến B én ta lại bay trở lại phía chiếc xe và cứ thế nhiều lần...

Câu hỏi : Chim én bay được một khoảng bao nhiêu khi bác Nipol đến được thành phố B ?

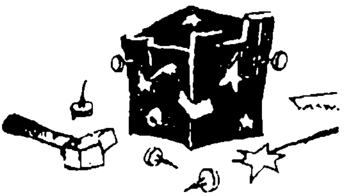
8. LẬP PHƯƠNG KÌ THÚ

Lập phương của một số n là lấy n nhân với chính nó, sau đó lấy kết quả nhân với n một lần nữa. Nói cách khác, $n^3 = n \times n \times n$. Chẳng hạn $3^3 = 3 \times 3 \times 3$. Bạn nhớ lại chưa ? Bây giờ bạn sẽ ngạc nhiên thú vị khi tính những tổng sau đây. Ta gọi đó là những số lập phương kì thú.

$1^3 + 5^3 + 3^3$ và $3^3 + 7^3 + 1^3$...

9. CHẾ TẠO HÌNH VUÔNG THẦN KÌ

Người Trung Hoa đã biết những hình vuông này rất lâu trước Công nguyên. Nhưng hình vuông ấy tiếp tục hấp dẫn những nhà toán học lớn như Piere de Fermat và Léonard Euler.

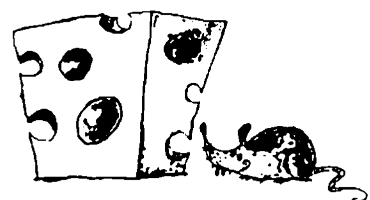


Lấy một hình vuông đã được cắt thành n^2 ô vuông. Một cạnh hình vuông như vậy được chia thành n đoạn : "n gọi là bộ của hình vuông thần kì". Chẳng hạn một hình vuông có 6^2 ô (36 ô) được gọi là "hình vuông bộ 6". Trong mỗi ô ta ghi một con số. Nếu tổng số các dòng, các cột, các đường chéo đều như nhau thì hình vuông là thần kì. Tổng số duy nhất ấy được gọi là "số thần kì".

Bây giờ mời bạn bắt tay chế tạo một hình vuông thần kì đi. Bạn chọn hình vuông đơn giản nhất thuộc bộ ba. Nó sẽ chứa 9 chữ số 1 đến 9 trong các ô sao cho tổng số các dòng, các cột, các đường chéo đều như nhau.

10. HÌNH VUÔNG CÓ Ô TRỐNG

Tự mình đơn thương độc mã xây dựng lấy một hình vuông thần kì đó quả là niềm vui thực sự to lớn. Tuy vậy thường để xem đầu óc có minh mẫn hay không, người ta chỉ cần tìm cách điền một số ô để trống trong hình vuông. Liệu có dễ quá không ?



6	45					
49		19		28	30	1
9	13	26	34			
7			25		17	43
	32					
10	20	31	29	22		40
	5	11	47			

Còn phải xem đã ! Trong khi chờ câu trả lời cho câu hỏi trên, ta thử điền số vào các ô trống của hình vuông bên cạnh. Chú ý rằng hình vuông này chứa các số từ 1 đến 49.

11. HAI BẰNG MỘT, MỘT BẰNG KHÔNG, MUỐN SAO ĐƯỢC VẬY !

Tự điển Larousse cho biết : "Từ đại số - *algèbre* - đến từ tiếng Ả-rập *algebar*, là nghệ thuật tính những đại lượng được biểu thị bằng các chữ cái và kèm theo các dấu + hoặc – ...".

Vậy đó, trong các cách viết đại số, mỗi chữ cái thay thế một số mà người ta chưa muốn nêu rõ giá trị. Đại số cũng là phương tiện siêu việt để giản lược : ta cứ thử giải xem những bài toán về vòi nước chảy vào các bồn nước mà không dùng đại số xem sao !

Dưới đây là một vài ví dụ minh hoạ cho những tính năng của đại số. Và môn này cũng có những nguy hiểm của nó !

Đây là một ví dụ kinh điển, biết cho vui tí thôi. Nhớ rằng trong ví dụ các phép tính hay các dấu đều đúng, không có gì bất cẩn.

Ta luôn luôn có : $2 = 1 + 1$

Nhân hai vế với $(2 - 1)$

Ta được : $2(2 - 1) = (1 + 1)(2 - 1)$.

Khai triển các vế :

$$2 \times 2 - 2 \times 1 = 1 \times 2 + 1 \times 2 - 1 \times 1 - 1 \times 1$$

Chuyển 1×2 **ở vế bên phải về bên trái, ta có :**

$$2 \times 2 - 2 \times 1 - 1 \times 2 = 1 \times 2 - 1 \times 1 - 1 \times 1$$

Đặt thành thừa số chung :

$$2 \times (2 - 1 - 1) = 1 \times (2 - 1 - 1)$$

Giản lược hai vế cho thừa số chung $(2 - 1 - 1)$ ta có : $2 = 1$.

Bởi vì đại số cho phép ta khái quát hoá, ta thấy kết quả trên sẽ đúng cho mọi số a, b bất kì. Đúng thế đó, đúng thế mà ! Bạn có thể làm cho bố mẹ mình phát hoảng khi chứng minh cho họ thấy $2 = 1$ hoặc $1 = 0$.

Đương nhiên là có chuyện xạo đâu đó, bạn thử xem nó ở đâu ?

12. BẠN BAO NHIÊU TUỔI ?

Người con trai của bác Nipol là sinh viên toán. Khi được hỏi bao nhiêu tuổi, anh đã trả lời như sau : "Lấy tuổi của tôi ba năm sau nhân ba lên, bớt đi ba lần tuổi của tôi cách đây ba năm, bạn sẽ biết tuổi của tôi hiện nay ?"

13. GIA ĐÌNH ĐÔNG ĐẢO

Mathilde tuyên bố :

– Tôi có số anh em trai ít hơn số chị em gái là hai người.

Luc, em trai của Mathilde phát biểu :

– Tôi có số chị em gái nhiều gấp hai lần số anh em trai.

Vậy có mấy anh chị em tất cả ?

14. ĐƠN GIẢN MÀ CHẾT NGƯỜI ĐÓ !

Có bài toán như sau : "Một chai sâm banh nguyên vẹn giá là 70 quan. Rượu sâm banh trong chai giá hơn chai không là 60 quan. Vậy chai không giá bao nhiêu ?"

15. GĂNG TAY VÀ MÀU SẮC

Một cái hòm đựng 10 đôi tất đen và 10 đôi tất trắng. Tối thiểu cần lấy hú hoạ bao nhiêu lần để có một đôi tất thích hợp ?

Quá dễ phải không ? Nếu bạn thích thì ta tiếp tục chơi.

Một hòm khác đựng 10 đôi găng trắng và 10 đôi găng đen. Tối thiểu phải rút hú hoạ mấy lần để có một đôi găng thích hợp ?

16. TÀU XUYÊN ĐẠI TÂY DƯƠNG

Người ta đồn rằng Edouard Lucas có lần đề nghị một hội nghị toán học nghiêm túc giải bài toán sau :

"Hàng ngày vào cùng một giờ, một con tàu rời cảng Le Harve đi về New York trong khi một con tàu khác rời New York đi về Le Harve. Một con tàu như vậy sẽ gặp mấy con tàu khác đi ngược chiều ngoài khơi ? Biết rằng mỗi con tàu đi một chuyến mất đúng 7 ngày chiều đi cũng như chiều trở về."

17. LỢI NHUẬN

Bạn phải cẩn thận với loại bài toán này. Ít khi người ta trả lời được đúng ngay. Thường trong mỗi gia đình ít khi mọi người có câu trả lời như nhau. Bài toán như sau :

Một nhà buôn đồ cổ mua một chiếc đồng hồ cũ giá 100 quan. Ông ta bán lại với giá 120 quan. Sau đó ông mua lại với giá 140 quan. Rồi lại bán với giá 160 quan. Hỏi : Ông ta thu lợi nhuận được bao nhiêu ?

18. MỘT QUAN NỮA BIẾN ĐI ĐÂU ?

Chuyện này xảy ra khi nước Pháp còn chế độ nghĩa vụ quân sự.

Ba tay "nghĩa vụ" vào quán uống nước ngọt, mỗi người uống một li giá 10 quan. Họ trả 30 quan rồi đi.

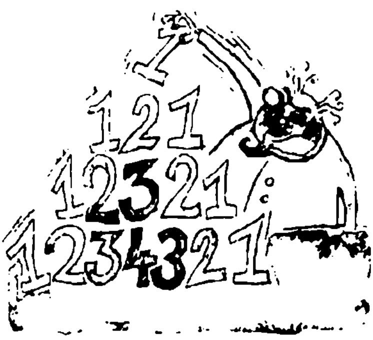
Ông chủ quán cũng có con đi nghĩa vụ, nghĩ bụng : "Mấy tay nghĩa vụ này trông có vẻ con nhà nghèo. Mình trả lại cho bọn họ 5 quan là phải". Ông ta đưa tiền cho chị giúp việc, bảo chị đuổi theo đám tân binh để trả lại tiền.

Trên đường đi chị giúp việc cân nhắc tình hình : "Làm sao ba người lại có thể chia nhau 5 quan được ? Bọn họ lại có cho mình tiền boa đâu ! Chẳng có ai lo cho mình bằng bản thân mình cả ! Dứt khoát là vậy rồi ! Mình sẽ giữ lại cho mình 2 quan và đưa cho họ 3 quan là ổn". Rồi chị ta làm y như vậy.

Bây giờ ta kiểm lại sự việc : mỗi anh quân dịch bỏ ra 9 quan, cả ba anh là 3 x 9 = 27 quan. Cộng vào đó 2 quan do chị giúp việc chiếm lấy, vị chi 27 + 2 = 29 quan cả thảy. Trời đất ! Thế còn 1 quan nữa biến đi đâu ?

19. CÓ VẺ NHƯ THUỘC VỀ MỘT NHÀ

Những con số dưới đây có gì giống nhau ? Người ta cố tình sắp chúng thành một tháp trông khá hấp dẫn đấy chứ !



a = 1
b = 121
c = 12321
d = 1234321
e = 123454321
f = 12345654321
g = 1234567654321
h = 123456787654321
i = 12345678987654321

20. X = HUYỀN BÍ

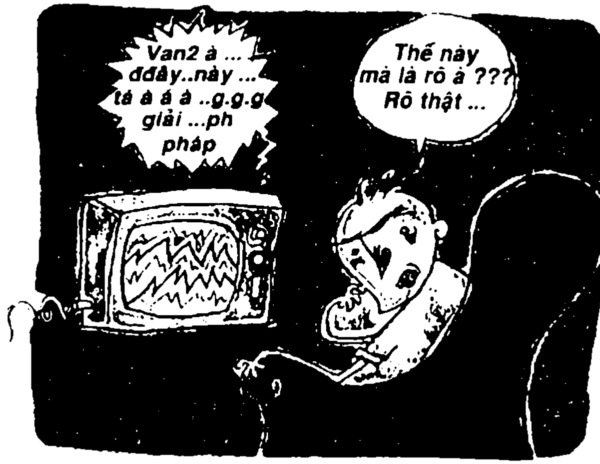
Bình phương của x gồm một số 1, một số 6 và một số 9. Bạn hình dung điều đó còn đúng cho cả $x + 1$ nữa. Vậy x là bao nhiêu ?

21. NHỮNG SỐ NGUYÊN BÍ HIỂM

3.024 là tích của 4 số nguyên liên tiếp. Đó là những số nào ?

22. XIN CỨ GIẢI MÃ CHO !

Mọi người đều biết những bài toán đố dưới dạng những phép toán điền các số đó. Dưới đây là một bài như thế, ta thử làm cho vui !



Mỗi chữ cái biểu thị một chữ số. Chữ cái giống nhau thì chữ số cũng giống nhau. Hai chữ cái khác nhau thì biểu thị hai chữ số khác nhau... Phép tính thu được cho là đúng. Ta xem đây như là một bản mật mã !

$$\begin{array}{cccccc} & & S & E & N & D \\ + & & M & O & R & E \\ \hline & M & O & N & E & Y \end{array}$$

GIẢI ĐÁP

A. CHƯƠNG V

Giải đáp trang 73 : $\boxed{\mathrm{MDXI}}$ $\overline{\mathrm{XXVIII}}$ CDLVI

Các câu hỏi trắc nghiệm

1.b. Người Cromagnon đã biết đếm. Căn cứ vào các chứng cứ khảo cổ (những cục xương có niên đại từ 33.000 đến 27.000 năm trước CN), các nhà nghiên cứu thời tiền sử cho biết người Cromagnon đã có chút ít khái niệm về đếm. Có những đoạn xương mang các vạch dùng để đếm vật gì đó. Người ta cũng biết nhóm các vạch thành 5 cái một như 5 ngón tay trên bàn tay vậy.

2.c. Quy ước thông dụng nhất là số nào có một gạch ngang trên đầu sẽ được nhân lên 1.000 lần. Như vậy số 87.000 sẽ được viết thành $\overline{\mathrm{LXXXVII}}$. Một số người viết theo kiểu khác : LXXXVII.M. Muốn gấp giá trị lên 100.000 người ta viết con số trong một hình chữ nhật không có đáy dưới. Chẳng hạn viết 1.200.000 thành $\boxed{\mathrm{XII}}$. Các cách viết đó thường gây nhầm lẫn. Người ta kể rằng hoàng đế Tibère chỉ cho trả 500.000 đồng cho một khoản nợ đúng ra là 50.000.000 đồng vì ông cho rằng ông chỉ thấy một gạch ngang chứ không thấy hình khung chữ nhật nào !

3.d. Người phương Tây chỉ thấy họ vay mượn hệ thống chữ số trực tiếp từ người Ả-rập. Nhưng người Ả-rập không giấu diếm gì việc họ mượn hệ thống ấy từ người Ấn Độ. Ngay tên gọi các chữ số cũng có nguồn gốc Ấn Độ rất rõ : Tiếng Phạn gọi 2 là *dvi* , 3 là *tri*, 6 là *shat*, 7 là *sapta*, 8 là *ashta*, 9 là *nava*.

4.b. Trong 5 cuộc tỉ thí thì nhà vô địch Nhật bản thắng 4 cuộc, chỉ nhường cho đối thủ cuộc thi về phép nhân. Các nhà chuyên môn tin học cho rằng nếu hiện nay ta tổ chức thi giữa máy điện toán dù hùng mạnh đến mấy và nhà vô địch bàn tính thì cái bàn tính cổ lỗ vẫn dành phần thắng (ít ra là đối với hai phép cộng, trừ). Lí do ư ? Dễ thấy thôi ! Nếu bạn nhìn tốc độ tay bạn lướt trên bàn phím máy điện toán, bạn sẽ thấy tốc độ này thua hẳn tốc độ các « bàn tay vàng » trên bàn tính cổ lỗ !

5.a. Trong tập II của bộ *Tiểu luận*, Montaigne khiêm tốn thú nhận rằng ông không biết tính toán bằng thẻ (cách tính phổ biến thời đó), cũng không biết tính trên giấy bằng các chữ số Á-rập. Không chỉ riêng Montaigne "yếu kém" như vậy ! Ngay đến thế kỉ XVII, hầu như ai cũng phải nhờ đến những kẻ tính toán chuyên nghiệp. Chỉ những nhà số học có tầm cỡ mới dám làm những phép chia hay phép nhân phức tạp. Thời gian để họ tính toán cũng vô cùng dài dặc.

6.a. Tất nhiên là kẻ thần dân tính giỏi hơn ! Một nhà số học dược nhà vua triệu đến để tính toán cho biết nhà vua phải trả cho thần dân kia 18 tỉ tỉ, 440 triệu tỉ, 744 ngàn tỉ, 73 tỉ, 709 triệu, 551 ngàn 615 hạt thóc. Nhà số học kia khuyên nhà vua chỉ trao thưởng cho thần dân kia nếu ông ta tự mình đếm lấy toàn bộ hạt thóc !

7.c. Ngày 8 / 2 / 1892, tại Viện Hàn Lâm Khoa Học Paris, Giacomo Inaudi quả thực chỉ dùng chưa đến 35 giây để làm phép trừ sau :

1.248.126.138.234.128.010 – 4.123.547.238.445.523.831

Người ta cũng đặt cho ông ta mấy câu hỏi : Ngày 4 / 3 / 1892 là ngày thứ mấy ? Số gì có lập phương cộng với bình phương của nó cho số 3.600 ? Giacomo trả lời nhanh như khi làm toán. Tuy vậy người ta phát hiện ông ta khó lắm mới nhớ nổi một chuyện ngụ ngôn đơn giản.

8.a. Những người Sumétien không đếm theo hệ thập phân mà thường đếm theo hệ 60. Giả thuyết có vẻ chắc chắn đáng tin nhất là người Sumétien khi đếm sử dụng ngón tay cái chỉ vào các ngấn trên các ngón còn lại. Cách đếm này phổ biến ở các nước Châu Á, Trung Cận Đông và Bắc Phi. Theo cách đếm này, bốn ngón tay trừ ngón cái có tất cả 12 ngấn, mỗi bàn tay có 5 ngón, vậy cơ sở đếm 60 xuất phát từ đó mà ra. Có thể người Su-mê-riên trong thời gian đầu chỉ dùng hệ đếm 12. Chúng ta ngày nay còn thừa hưởng hệ đếm 12 khi đếm trứng hay sò mua bán ngoài chợ.

B. CHƯƠNG VI

1. Chỉ dẫn thứ nhất : "Tích của số tuổi ba cô gái là 36". Rõ ràng bạn phải phân 36 thành ba thành tố theo mọi cách có thể có. Chỉ dẫn thứ hai : "Tổng các tuổi bằng số nhà phía trước". Như vậy bạn cần đem những thành tố tìm được cộng lại với nhau. Mò mẫm một lúc, nhưng cũng có thể tiến hành một cách hệ thống, ta đi đến kết quả sau :

36 = 1	1	36	Có tổng là 36 + 1 +1 =	38
36 = 1	2	18		21
36 = 1	3	12		16
36 = 1	4	9		14
36 = 1	6	6		13
36 = 2	2	9		13
36 = 2	3	6	11	
36 = 3	3	4	10	

Đó là lời giải có thể áp dụng cho bài toán. Tất nhiên trường hợp một cô chị 36 với hai cô em song sinh 1 tuổi có vẻ kì cục nhưng không thể loại trừ ngay. Bạn hãy xem kĩ các tổng và trở lại với đề toán... Đây rồi ! Đề toán nhấn mạnh đến sự ngập ngừng của viên bưu tá. Ông này không thể nói ngay kết quả vì lẽ sau : có hai tổng y hệt nhau làm ông ta lúng túng. Ông ta phải hỏi thêm một thông tin phụ. Ta kết luận ngay rằng số nhà phía trước là 13 và viên bưu tá biết được trong ba cô có mỗi một cô gái lớn mà thôi. Vậy ra có cô gái lớn 9 tuổi và hai cô song sinh 2 tuổi.

2. Bạn thử nhân đi mà xem. Phép nhân với 2 thì có thể làm nhẩm được và bạn có ngay số 105.263.157.894.736.842.

Bạn so sánh số ấy với số đã cho. Vẫn những chữ số ấy theo nhau trong cùng một thứ tự. Và kết quả cứ như vậy cho phép nhân số đã cho với bất kì số nào bé hơn hay bằng 18. Quả là kì diệu ! Có điều không kém kì diệu là những số như vậy không hiếm. Người ta gọi những số như vậy là số "phượng hoàng". Theo truyền thuyết phương Tây, phượng hoàng là loài chim huyền thoại có thể sống lại từ đống tro tàn. Bây giờ bạn thử nhân số đó với 19 xem sao. Bạn sẽ được đền bù xứng đáng !

3. Số 471.569 được phân thành tích các số nguyên tố như sau : $7 \times 23 \times 29 \times 101$. Bốn số phải tìm là như vậy. Vấn đề là xem chúng biểu thị cái gì.

– Chiều dài của cái mâu chỉ có thể là 7 bộ (chừng 2,5m).

– "$\frac{1}{4}$ số năm" chỉ có thể là 101 bởi lẽ vị anh hùng của chúng ta hi sinh 404 năm trước Chiến tranh Thế giới lần thứ nhất.

– "Cái ngày đáng nhớ" là ngày gì ? Đó phải là ngày 29 tháng 2 chỉ năm nhuận mới có, cứ bốn năm một lần. Vả lại trong thời gian Thế chiến thứ nhất 1914-1918, ta chỉ có một năm nhuận, đó là năm 1916. Như vậy quả trái phá nổ đúng vào ngày 29 tháng 2 năm 1916.

– Còn viên đại uý hi sinh vào tuổi 23, trước năm 1916 đến 404 năm, tức là vào năm $1916 - 404 = 1512$.

– Nếu bạn hỏi thầy dạy sử ! Thầy sẽ cho ta biết rằng vào năm 1512 có trận Ravenne ở Ý. Trong trận này có đại uý Gaston de Foix là người chiến thắng nhưng đã hi sinh trên đường truy kích quân địch.

4. Nếu như chia n cho các số từ 2 đến 10 mà cứ dư 1 hoài thì ta suy ra ngay rằng số $(n-1)$ sẽ chia hết cho các số từ 2 đến 10, tức là không còn dư gì hết. Vấn đề là mày mò tìm ra một số $(n-1)$ khá gần với 2.500 mà thôi. Sau đây là một phương pháp tìm số $(n-1)$. Từ nhận xét trên ta có : $(n-1) = k \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10$.

Hệ số k nói lên rằng $(n-1)$ là một bội của các số từ 2 đến 10. Chú ý rằng : $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, $6 = 2 \times 3$, $8 = 2^3$, $10 = 2 \times 5$, ta có $(n-1) =$ $= k \times 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 = k \times 2.520$. Như vậy có bao nhiêu k thì có bấy nhiêu lời giải. Nhưng vì số n phải gần nhất với 2.500 nên ta chỉ chọn được $k = 1$ mà thôi. Từ đó ta thấy $(n-1) = 2.520$, vậy $n = 2521$.

5. Hôm đó là tối thứ bảy. Nếu số thực khách là n thì mỗi người chạm cốc với $(n-1)$ người khác. Tại sao $(n-1)$? Bởi lẽ không ai chạm cốc với chính mình cả. Cần phải tách mình ra khỏi tổng thể. Số lần chạm cốc sẽ là :

$$n(n-1)/2$$

Ta phải chia cho 2 vì nếu Paul chạm cốc với Jules và Jules chạm cốc với Paul thì cũng chỉ một lần thôi.

Như vậy ta có $n(n-1)/2 = 28$. Suy ra $n(n-1) = 2 \times 28 = 56$. Vì n và $(n-1)$ là hai số nguyên liền nhau nên ta tìm hai số nguyên liền nhau có tích là 56. Chẳng phải mò mẫm gì lâu ta cũng thấy đó là 7 và 8. Câu trả lời như sau : tối thứ bảy bên nhà láng giềng của gia đình Nipol có 8 khách nhậu.

Tối chủ nhật : Cậu Futé con trai bác Nipol giải ra bài toán ! Chẳng phải tính toán gì phức tạp, cậu ta lí luận rằng nếu người ta nghe tiếng chạm cốc ít đi 5 lần tức là "kẻ ra về" đã chạm cốc với 5 người còn ở lại. Như vậy hôm đó có tất cả 6 thực khách đến nhậu bên nhà láng giềng.

6. Từ lâu chuỗi số này được xem như nơi phát sinh nhiều nghịch lí. Môn toán giải tích (không nằm trong khuôn khổ cuốn sách này) chứng minh rằng chuỗi nói trên không phải là chuỗi hội tụ. Nói cách khác chuỗi đó không cho một kết quả nào nhất định. Bác Nipol và hai người học trò vừa đúng mà vừa sai cùng một lúc. Điều đáng ngạc nhiên vô cùng là nhà toán học lớn Wilhelm Leibnitz, sau khi phát hiện ra các tổng S = 1 và S = 0 và chỉ hai tổng đó thôi, đã kết luận ngay rằng xác suất để mỗi giá trị xuất hiện như nhau, và do đó giá trị trung bình là 1/2 !

7. Bạn chớ vò đầu suy nghĩ làm gì cho mệt, vứt bỏ luôn cả máy tính đi ! Chả việc gì mà tính tổng các đoạn đường chim én bay. Chuyện đơn giản hơn thế nhiều.

– Bác Nipol đi hết đoạn đường trong 1 giờ, bác đi được 100km vì vận tốc của bác là 100km/giờ.

Chim én bay trong 1 giờ, với vận tốc không đổi là 120km/giờ, vậy nó bay được 120km.

8. Bạn đã tìm ra được rằng : $1^3 + 5^3 + 3^3 = 153$

$$3^3 + 7^3 + 1^3 = 371$$

Nhìn kĩ lại hai số này, trông kì quá nhỉ ! Kết quả có bất ngờ không ? Nhưng bạn chớ vội khái quát cho các trường hợp khác nhé!

9. Tất nhiên ta có thể xây dựng hình vuông mầu nhiệm bằng cách mò mẫm, nhưng thế thì không có gì oai phong cả. Đấy là chưa nghĩ đến chuyện chán giữa chừng rồi bỏ cuộc ! Nếu có đầu óc phương pháp một tí, đời ta sẽ nhẹ nhàng đi biết mấy. Sau đây là cách thức giúp bạn muốn lập ra bao nhiêu hình vuông mầu nhiệm tuỳ thích. Đây là một hình vuông bộ ba. Ta hãy tìm số mầu nhiệm của nó. Tổng 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45 phải lấp đầy các ô vuông. Ta có ba hàng (ba cột) có tổng số bằng nhau.

Do đó số mầu nhiệm sẽ là : $\dfrac{45}{3} = 15$. Dưới đây là bảng những chữ số có tổng ba chữ số bằng 15 :

4	9	2
3	5	7
8	1	6

9, 5, 1	8, 4, 3
9, 4, 2	7, 6, 2
8, 6, 1	7, 5, 3
8, 5, 2	6, 5, 4

B	C	B
C	A	C
B	C	B

Chú ý rằng ta có ba kiểu ô A, B, C. Chữ số trong ô A phải có mặt trong bốn tổng (1 hàng, 1 cột và 2 đường chéo). Ta thấy trong bảng trên có số 5 độc nhất đáp ứng tiêu chí ấy.

Những chữ số của ô B phải xuất hiện trong ba tổng. Ta cần có 4 số như vậy. Trong bảng danh sách ta có 2, 4, 6 và 8. Vậy ta dùng những số này mà ghi vào mút các đường chéo.

Những chữ số thuộc ô C chỉ xuất hiện cho hai tổng mà thôi. Hơn nữa đó là những chữ số chưa dùng đến. Đó là 1, 3, 7 và 9. Ta đưa chúng vào các ô C.

Như vậy là ta có một lời giải. Muốn có nhiều lời giải khác ta cho quay các số quanh tâm A hay lấy đối xứng qua tâm A cũng như qua một đường chéo, một hàng hay một cột đi qua tâm. Bằng phương pháp ấy, bạn có thể tạo bao nhiêu hình vuông mầu nhiệm tuỳ thích.

10. Trước tiên cần tìm "con số mầu nhiệm" đã. Muốn vậy cần tính "tổng của các tổng"

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 48 + 49$$

6	45	39		42		
49	27	19	21	28	30	1
9	13	26	34	15		
7	33	14	25	36	17	43
46	32	35	16	24		4
10	20	31	29	22	23	40
48	5	11	47	8		

Tất nhiên bạn có thể tính tổng này một cách thông thường trực tiếp. Nhưng ta có một phương pháp đẹp dè do một... chú nhóc 6 tuổi tìm ra ! Chú nhóc đó có tên là Carl Friedrich Gauss về sau trở thành một nhà toán học lớn của mọi thời đại. Để phạt cả lớp học, thầy giáo buộc mọi người tính tổng các số từ 1 đến 100, tất nhiên là bằng tay. Chỉ cần vài chục giây cậu Gauss có ngay lời giải.

Cậu đã tính như sau : Góp một số đầu dãy và một số cuối dãy ta có 1 + 99 = 100, 2 + 98 = 100, 3 + 97 = 100 và cứ như vậy ta lặp lại 49 lần. Lúc đó còn sót số 50 ở khúc giữa và số 100 ở phía cuối. Vậy S = 49 · 100 + 100 + 50 = 5.050

Ta dùng lí luận ấy cho trường hợp của ta thì có S = 1 + 2 +...+ + 49 = 1.225. Bây giờ ta tiến hành như sau :

– Tất cả có 7 hàng có tổng như nhau nên mỗi hàng sẽ là 1225/7 = 175.

– Mọi ô trống cứ thế mà suy ra là ... bao nhiêu, việc đó quá dễ rồi !

11. Cái tai quái nằm trong câu cuối của lập luận "ta hãy giản lược hai vế ...". Thế nhưng "giản lược" có nghĩa là "chia cho"... Mà chia cho gì đã chứ ? Cho 2 – 1 – 1, tức là 0. Phép chia đó cho kết quả vô định, tức là bao nhiêu cũng được. Nói chung chia cho 0 là một việc không làm được !

12. Việc này đành phải sử dụng đại số đôi tí vậy. Gọi x là tuổi của chàng trai hiện nay, ba năm sau tuổi đó là $x + 3$, ba năm trước là $x - 3$. Theo lời cậu Nipol, ta có phương trình :

$$3(x + 3) - 3(x - 3) = x$$

Tức là $3x + 9 - 3x + 9 = x$. Từ đó suy ra : $x = 18$.

Bài 13

Lần này bạn phải giáp mặt với 2 ẩn : f là số con gái và g là số con trai.

– Mathilde nói : "Tôi có số anh em trai ít hơn số chị em gái là 2 người". Điều đó có nghĩa là $f - 1 - 2 = g$ (1) (bản thân Mathilde là gái nên số chị em của cô ta là $f - 1$).

Luc nói : "Tôi có số chị em gái nhiều hơn hai lần số anh em trai". Tức là $f = 2(g - 1)$ (2) (vì bản thân Luc là trai nên số anh em trai chỉ còn $g - 1$).

Thay các giá trị trong (1) vào (2) ta có : $f = 2(f - 1 - 2 - 1)$ tức là $f = 2(f - 4)$. Suy ra dễ dàng $f = 8$. Và cũng từ (2) suy ra $g = 5$. Gia đình ấy có 8 cô gái và 5 cậu con trai.

14. Không, chắc chắn là không, cái chai ấy không có giá trị là 10 quan ! Bởi lẽ nếu vậy thì rượu sâm banh sẽ có giá là $10 + 60 = 70$ quan và lúc đó cả rượu lẫn chai sẽ là $70 + 10 = 80$ quan ! Điều đó cho ta thấy trong số 10 quan kia, giá chai không được tính đến hai lần. Như vậy chai không giá 5 quan, giá rượu cao hơn 60 quan, tức là cả chai lẫn rượu là $60 + 5 = 65$ quan. Bây giờ nếu dùng đại số ta thấy sự việc giản tiện hơn nhiều. Gọi x là giá chai không, ta có x (chai không) + $(x + 60)$ (có rượu) = 70. Suy ra $2x = 70 - 60 = 10$. Vậy $x = 5$.

15. Cứ lấy ra 3 chiếc tất thế nào cũng có hai chiếc đồng màu ! Quả vậy, nếu chiếc đầu màu trắng và chiếc thứ hai đen thì chiếc thứ ba phải trắng hoặc đen. Đối với găng tay thì phiền hơn, cần rút ra hai chiếc không những đồng màu mà còn cần một trái một phải ! Ta hình dung trường hợp xấu nhất : ta rút được 10 găng trắng và 10 găng đen nhưng đều tay trái cả ! Trong trường hợp này không dùng được đôi nào cả. Chỉ có việc rút cho đến 21 găng mới được !

16. Cần phải phân tích kĩ đầu đề.

– "Ngoài khơi" có nghĩa là không tính đến con tàu cập bến vào lúc con tàu ta quan tâm xuất phát. Cũng không tính đến con tàu xuất phát khi có tàu cập bến.

– Vào lúc tàu xuất phát có một con tàu cập (không tính), 6 tàu ngoài khơi và 1 rời cảng về phía bên kia Đại Tây Dương. Như vậy tổng số là 7 tàu mà con tàu của ta gặp ngoài khơi.

– Con tàu của ta còn gặp những con tàu khác xuất phát 1, 2, 3... 6 ngày sau khi nó rời bến. Có cả thảy 6 tàu. Tàu thứ 7 như ta nói là không tính. Tóm lại 7 + 6 = 13 tàu.

17. Đúng, về thực tế có nhiều người tỏ ra băn khoăn khi giải bài này. Nhưng chuyện quá giản dị nếu xem người buôn đồ cổ này thực hiện hai việc độc lập với nhau về thương mại. Mỗi việc mang lại cho ông ta một mối lợi là 20 quan. Lợi nhuận tổng hợp hai vụ là 2 × 20 = 40 quan.

Bạn chưa tin à ? Nếu vậy mời bạn tính đi !

Lợi nhuận = Toàn bộ phần thu – Toàn bộ phần chi

Lợi nhuận = (120 + 160) – (100 + 140) = 280 – 240 = 40 quan.

18. Một điều cần nhắc nhở về ý thức con người : điều nguy hiểm là mỗi lần gặp bài toán khó người ta hay "phát minh" ra những giả định không dính dáng gì đến dữ kiện bài toán cả. Trong trường hợp này vấn đề còn tồi tệ hơn : người ta cứ xăm xăm làm tính trong lúc có chuyện gì đặt ra đâu !

Quả vậy, để xem thử tiền đã biến đi đâu, ta cần thêm vào chỗ 27 quan của đám tân binh trả cho nhà hàng khoản 3 quan mà chủ trả lại. Phép cộng 27 + 2 không do đâu mà ra cả ! Chỉ lừa nhau cho vui thôi.

19. Tất cả đều là những số chính phương ! Tức là chúng từ số nguyên bình phương mà ra. Nhưng không phải từ bất kì số nguyên nào, phải là số do chữ số 1 tạo thành. Chẳng hạn 121 là bình phương của 11, 12.321 là bình phương của 111, 1.234.321 là bình phương của 1111...

20. Những số do các chữ số 1, 6, 9 tạo thành không nhiều lắm đâu. Ta có thể liệt kê chúng ra hết :

169	619	916
196	691	961

Giữa các số này chỉ có ba số là chính phương. Bạn có thể dùng máy tính nhỏ mà kiểm tra lại : $169 = 13^2$, $196 = 14^2$, $961 = 31^2$.

Từ đó suy ra 13 lời giải cho bài toán.

21. Ta nhìn kĩ số 3.024.

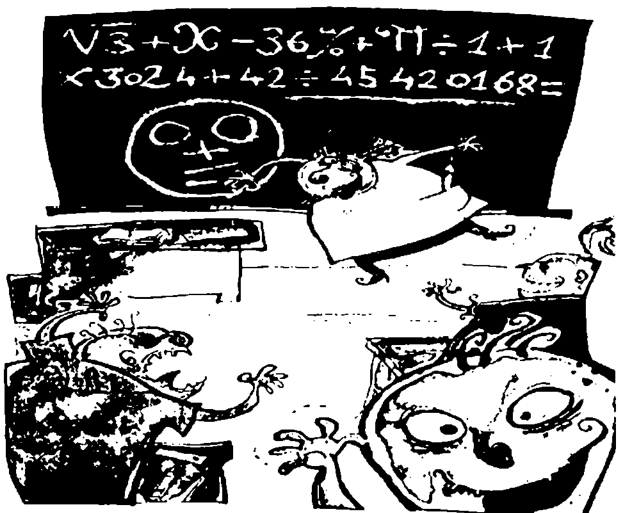
– Thông tin đầu : Số này tận cùng là 4, không chia hết cho 5 cũng như 10.

– Thông tin thứ hai : bốn con số phải tìm đều bé hơn 10, bởi vì $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10.000$ là số lớn hơn nhiều so với 3.024.

– Như vậy chỉ còn khả năng : một là $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ (loại bỏ), hai là $6 \times 9 \times 8 \times 9 = 3.024$ (đúng rồi !).

22.

$$\begin{array}{r} S\;E\;N\;D \\ +\;M\;O\;R\;E \\ \hline M\;O\;N\;E\;Y \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9\;5\;6\;7 \\ +\;1\;0\;8\;5 \\ \hline 1\;0\;6\;5\;2 \end{array}$$



Chịu trách nhiệm xuất bản :
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm nội dung :
Phó Tổng Giám đốc kiêm Giám đốc NXBGD tại TP. Hồ Chí Minh
VŨ BÁ HOÀ

Biên tập nội dung và tái bản
TRẦN QUỐC HẢI

Biên tập kĩ -mĩ thuật :
TRẦN THÀNH TOÀN

Minh hoạ và làm bìa :
MINH HẢI

Sửa bản in :
XUÂN PHƯƠNG

Sắp chữ tại :
PHÒNG SẮP CHỮ ĐIỆN TỬ - NXBGD TẠI TP HCM

CON SỐ TRONG ĐỜI SỐNG QUANH TA - TẬP 1
Mã số : 8H998t6 - CPH

In 3.000 bản, khổ 14,3 x 20,3 cm, tại **Trường Công Nhân Kỹ Thuật In Tại TP. Hồ Chí Minh**. 35 Trần Quốc Toản, Quận 3, TP. Hồ Chí Minh. Số in : 13/HĐGC. Số xuất bản : 03-2006/CXB/196-1859/GD. In xong và nộp lưu chiểu tháng 5 năm 2006.

8 934980 420904

Giá : 6.400đ