TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964
7 2013
Số 433

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 50
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre

Bình luận

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI A - A_1 (NĂM 2013)

HAI BÀI HÌNH HỌC TRONG KÌ THI APMO NĂM 2013

NGUYỄN BÁ ĐANG
(Hà Nội)

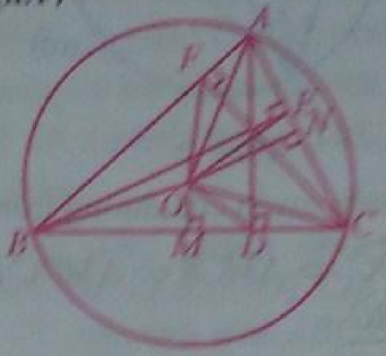
Kì thi Olympic Toán học châu Á - Thái Bình Dương (Asian Pacific Mathematical Olympiad, viết tắt là APMO) được tổ chức lần đầu năm 1989 với bốn nước tham gia là Australia, Hong Kong, Canada, Singapore. Hàng năm, kì thi APMO được tổ chức vào buổi chiều ngày Thứ Hai tuần thứ hai của tháng 3 cho các nước Bắc Mỹ và Nam Mỹ, vào buổi sáng ngày Thứ Ba tuần thứ hai của tháng 3 cho các nước Tây Thái Bình Dương và Châu Á.

Đề thi viết gồm 5 câu, mỗi câu tối đa 7 điểm, thời gian làm bài trong 4 giờ. Thí sinh dự thi không là sinh viên của trường đại học, phải ít hơn 20 tuổi tính đến ngày 1 tháng 7 vào năm cuộc thi được tổ chức. Các nước dự thi APMO, tự tổ chức coi thi và chấm thi sau đó gửi không quá 10 bài thi của thí sinh cho Ban tổ chức để xếp giải. Tổng số Huy chương Vàng, Bạc, và Đồng trong một kì thi APMO không vượt quá $\left[\frac{n+1}{2}\right]$, trong đó n là số thí sinh tham dự APMO.

Việt Nam lần đầu tham dự APMO năm 1996, đã giành được 6 Huy chương Vàng (Hoa Kỳ tham gia năm 1998), tính điểm bình quân nhiều năm Việt Nam đứng ở tốp đầu. Từ năm 2002 cho đến nay Việt Nam không tham gia cuộc thi này nữa. Hiện nay đã có trên 30 nước (chính thức lẫn quan sát viên) tham gia kì thi APMO. Đề thi APMO năm 2013 có hai bài hình, chỉ với kiến thức của THCS là có thể giải được, ngoài ra còn có nhiều lời giải khác. Xin giới thiệu cùng bạn đọc tham khảo.

✪Bài toán 1. (Bài 1 APMO) *Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm O với các đường cao AD, BE, CF. Chứng minh rằng các đường thẳng OA, OF, OB, OD, OC, OE chia tam giác ABC thành ba cặp tam giác có diện tích bằng nhau.*

Lời giải. (h.1)



Hình 1

Gọi M, N lần lượt là trung điểm cạnh BC và cạnh CA.

Khi đó $OM \perp BC$, $ON \perp CA$

$\Rightarrow \widehat{MOB} = \frac{1}{2}\widehat{BOC} = \widehat{BAC}; \widehat{NOA} = \widehat{CBA}.$

Theo giả thiết $BE \perp CA$ nên $\Delta MOB \backsim \Delta EAB$ (g.g), suy ra $\frac{OM}{AE} = \frac{OB}{AB} = \frac{OA}{AB}$ (1)

Tương tự có $\Delta NAO \backsim \Delta DAB$, suy ra

$$\frac{ON}{BD} = \frac{OA}{AB} \quad (2)$$

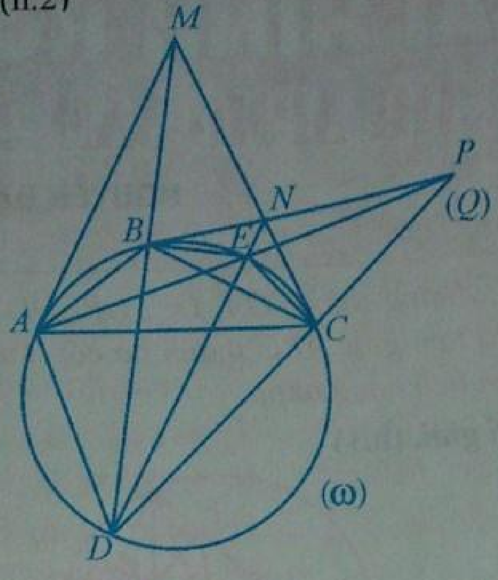
Từ (1) và (2) có $\frac{OM}{AE} = \frac{ON}{BD} \Rightarrow OM.BD = ON.AE.$

Do đó $S_{OBD} = S_{OAE}$.

Chứng minh tương tự ta có $S_{OCD} = S_{OAF}$ và $S_{OCE} = S_{OBF}$. Suy ra điều cần chứng minh. □

✪Bài toán 2. (Bài 5 APMO) *Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp một đường tròn (ω). Điểm M nằm trên tia đối của tia BD sao cho MA, MC là hai tiếp tuyến của đường tròn (ω). Tiếp tuyến tại B của đường tròn (ω) cắt MC tại N và cắt CD tại P, ND cắt đường tròn (ω) tại E. Chứng minh rằng ba điểm A, E, P thẳng hàng.*

Lời giải. (h.2)



Hình 2

Do MC là tiếp tuyến của đường tròn (ω) nên $\widehat{NCB} = \widehat{BDC} \Rightarrow \Delta MCB \backsim \Delta MDC$ (g.g). Suy ra $\dfrac{MC}{MD} = \dfrac{BC}{CD}$.

Do MA là tiếp tuyến của đường tròn (ω) nên tương tự có $\Delta MAB \backsim \Delta MDA$ (g.g).

Suy ra $\dfrac{MA}{MD} = \dfrac{AB}{DA}$. Do $MA = MC$ suy ra $\dfrac{BC}{CD} = \dfrac{AB}{DA} \Leftrightarrow BC.DA = AB.CD$.

Áp dụng định lí Ptolemy với tứ giác $ABCD$ nội tiếp ta có $AB.CD + BC.DA = AC.DB$

$$\Rightarrow BC.DA = \frac{1}{2}AC.DB \Rightarrow \frac{AC}{DA} = \frac{2BC}{DB} \qquad (1)$$

Do NB, NC là tiếp tuyến của đường tròn (ω) nên $\Delta NBE \backsim \Delta NDB$ và $\Delta NCE \backsim \Delta NDC$ (g.g)

suy ra $\dfrac{NB}{ND} = \dfrac{BE}{DB}$, $\dfrac{NC}{ND} = \dfrac{CE}{DC}$. Kết hợp với $NB = NC$ suy ra $\dfrac{BE}{DB} = \dfrac{CE}{DC}$

$\Rightarrow BE.DC = CE.DB$.

Lại áp dụng định lí Ptolemy với tứ giác nội tiếp $BECD$ ta được $BE.DC = CE.DB = \dfrac{1}{2}BC.DE$

$$\Rightarrow \frac{BC}{DB} = \frac{2CE}{DE} \qquad (2)$$

Vì PB là tiếp tuyến của

$\Delta PCB \backsim \Delta PBD$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{PC}{PB} = \frac{PB}{PD} = \frac{CB}{DB} \Rightarrow PC.PD = PB^2.$$

Mặt khác $\dfrac{PC}{PD} = \dfrac{PC.PD}{PD^2} = \left(\dfrac{PB}{PD}\right)^2 = \left(\dfrac{CB}{DB}\right)^2$,

kết hợp với (2) ta có

$$\frac{PC}{PD} = \left(\frac{CB}{DB}\right)^2 = \left(\frac{2CE}{DE}\right)^2 \qquad (3)$$

Giả sử AE cắt đường thẳng CD tại Q thì

$\Delta QEC \backsim \Delta QDA$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{QC}{QA} = \dfrac{EC}{DA}$

$\Delta QDE \backsim \Delta QAC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{QD}{QA} = \dfrac{DE}{AC}$.

Từ đó $\dfrac{QC}{QA} : \dfrac{QD}{QA} = \dfrac{EC}{DA} : \dfrac{DE}{AC}$.

Kết hợp với (1), (2) ta được

$$\frac{QC}{QD} = \frac{EC.AC}{DE.DA} = \frac{EC}{DE}.\frac{4EC}{DE} = \left(\frac{2CE}{DE}\right)^2 \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $\dfrac{PC}{PD} = \dfrac{QC}{QD} \Rightarrow P \equiv Q$.

Do đó ba điểm A, E, P thẳng hàng. ❐

BÀI TẬP

1. Cho tam giác ABC $(AC > AB)$ có BD, CE là hai đường cao cắt nhau tại H và M là trung điểm cạnh BC. Đường thẳng DE cắt BC tại P. Chứng minh rằng PH vuông góc với AM.

2. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), và điểm D thuộc cung BC không chứa điểm A. Đường thẳng Δ thay đổi luôn đi qua trực tâm H của tam giác ABC cắt các đường tròn ngoại tiếp tam giác ABH, ACH lần lượt tại M và N $(M \neq H,\ N \neq H)$. Xác định vị trí của đường thẳng Δ để diện tích tam giác AMN lớn nhất (VMO 2013).

3. Cho tam giác ABC có $AC = 2AB$. Tiếp tuyến tại A và C của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt nhau tại D, BD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại E. Chứng minh rằng tam giác BCE cân.

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10

TRƯỜNG THPT CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

NĂM HỌC 2013-2014

VÒNG 1 *(Thời gian làm bài 120 phút)*

(Dùng cho mọi thí sinh thi vào trường THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)

Câu 1. *(2,5 điểm)*

1) Cho biểu thức

$$Q=\frac{\left(\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^3+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{3a^2+3b\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{ab}-a}{a\sqrt{a}-b\sqrt{a}}$$

với $a>0, b>0, a\neq b$. Chứng minh giá trị của biểu thức Q không phụ thuộc vào a và b.

2) Các số thực a, b, c thỏa mãn $a+b+c=0$. Chứng minh đẳng thức

$$(a^2+b^2+c^2)^2=2(a^4+b^4+c^4).$$

Câu 2. *(2 điểm)*

Cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=-mx+\frac{1}{2m^2}$ (tham số $m\neq 0$).

1) Chứng minh rằng với mỗi $m\neq 0$, đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt.

2) Gọi $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$ là các giao điểm của (d) và (P). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=y_1^2+y_2^2$.

Câu 3. *(1,5 điểm)*

Giả sử a, b, c là các số thực, $a\neq b$ sao cho hai phương trình $x^2+ax+1=0, x^2+cx+b=0$ có nghiệm chung và hai phương trình $x^2+x+a=0$, $x^2+cx+b=0$ có nghiệm chung. Tính $a+b+c$.

Câu 4. *(3 điểm)*

Cho tam giác ABC không cân, có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AA_1, BB_1, CC_1 của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H. Các đường thẳng A_1C_1 và AC cắt nhau tại điểm D. Gọi X là giao điểm thứ hai của đường thẳng BD với đường tròn (O).

1) Chứng minh rằng $DX.DB=DC_1.DA_1$.

2) Gọi M là trung điểm của cạnh AC, chứng minh $DH\perp BM$.

Câu 5. *(1 điểm)*

Các số thực x, y, z thỏa mãn

$$\begin{cases}\sqrt{x+2011}+\sqrt{y+2012}+\sqrt{z+2013}=\sqrt{y+2011}+\sqrt{z+2012}+\sqrt{x+2013}\\ \sqrt{y+2011}+\sqrt{z+2012}+\sqrt{x+2013}=\sqrt{z+2011}+\sqrt{x+2012}+\sqrt{y+2013}\end{cases}$$

Chứng minh rằng $x=y=z$.

VÒNG 2 *(Thời gian làm bài 150 phút)*

(Dùng cho thí sinh thi vào lớp chuyên Toán và lớp chuyên Tin)

Câu 1. *(2,5 điểm)*

1) Các số thực a, b, c thỏa mãn đồng thời hai đẳng thức

i. $(a+b)(b+c)(c+a)=abc$;

ii. $(a^3+b^3)(b^3+c^3)(c^3+a^3)=a^3b^3c^3$.

Chứng minh rằng $abc=0$.

2) Các số thực dương a, b thỏa mãn

$$ab>2013a+2014b.$$

Chứng minh bất đẳng thức

$$a+b>(\sqrt{2013}+\sqrt{2014})^2.$$

Câu 2. *(2 điểm)*

Tìm tất cả các cặp số hữu tỉ $(x\ ;\ y)$ thỏa mãn hệ phương trình $\begin{cases}x^3-2y^3=x+4y\\ 6x^2-19xy+15y^2=1.\end{cases}$

Câu 3. *(1 điểm)*

Với mỗi số nguyên dương n, kí hiệu S_n là tổng của n số nguyên tố đầu tiên ($S_1=2, S_2=2+3$

(Xem tiếp trang 5)

Hướng dẫn giải ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN TRÃI, HẢI DƯƠNG

NĂM HỌC 2012 - 2013

(Đề thi đăng trên TH&TT số 432, tháng 6 năm 2013)

Câu 1. 1) $a^2(b-2c)+b^2(c-a)+2c^2(a-b)+abc$

$=2c^2(a-b)+ab(a-b)-c(a^2-b^2)-ac(a-b)$

$=(a-b)(2c^2-2ac+ab-bc)$

$=(a-b)(2c(c-a)+b(a-c))$

$=(a-b)(a-c)(b-2c).$

2) Từ điều kiện suy ra

$x^3=2y+3\sqrt[3]{y-\sqrt{y^2+1}}.\sqrt[3]{y+\sqrt{y^2+1}}$

$.\left(\sqrt[3]{y-\sqrt{y^2+1}}+\sqrt[3]{y+\sqrt{y^2+1}}\right)$

$\Rightarrow x^3+3x-2y=0$. Ta có

$A=x^4+x^3y+3x^2-2xy+3xy-2y^2+1$

$=x(x^3+3x-2y)+y(x^3+3x-2y)+1=1.$

Câu 2. 1) Biến đổi PT thành

$$((x-2)^2+7)((x^2-4)^2+5)=35 \quad (1)$$

Vế phải của (1) ≥ 35, do đó

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases}(x-2)^2+7=7\\(x^2-4)^2+5=5\end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

2) Biến đổi PT thứ nhất của hệ như sau:

$$\left(x+\sqrt{x^2+2012}\right)2012=2012\left(\sqrt{y^2+2012}-y\right)$$

$$\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+2012}=\sqrt{y^2+2012}-y$$

$$\Leftrightarrow x+y=\sqrt{y^2+2012}-\sqrt{x^2+2012}$$

$$\Leftrightarrow x+y=\frac{y^2-x^2}{\sqrt{y^2+2012}+\sqrt{x^2+2012}}$$

$$\Leftrightarrow (x+y)\frac{\sqrt{y^2+2012}-y+\sqrt{x^2+2012}+x}{\sqrt{y^2+2012}+\sqrt{x^2+2012}}=0$$

Do $\sqrt{y^2+2012}>|y|\geq y,\ \forall y\in\mathbb{R}$;

$\sqrt{x^2+2012}>|x|\geq -x,\ \forall x\in\mathbb{R}$

nên $\sqrt{y^2+2012}-y+\sqrt{x^2+2012}+x>0 \Rightarrow y=-x.$

Thay $y=-x$ vào PT thứ hai của hệ được

$$(x+2)^2+(z-2)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x+2)^2=0\\(z-2)^2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2\\z=2.\end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x;y;z)=(-2;2;2)$.

Câu 3. 1) Xét các khả năng của n

$n=3k$; $n=3k+1$; $n=3k+2$ $(k\in\mathbb{Z})$ đều thấy n^2+n+1 không chia hết cho 9.

2) Giả sử $\exists m\in\mathbb{N}^*$ để phương trình có nghiệm x_1, x_2. Theo định lí Viète $\begin{cases}x_1+x_2=m^2\\x_1x_2=2m+2.\end{cases}$

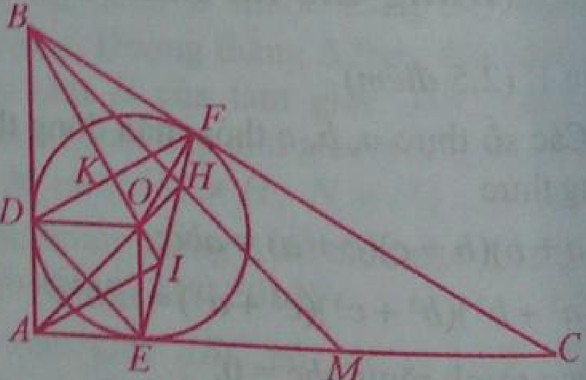
Với $m\in\mathbb{N}^*$, ta có $x_1+x_2\geq 1$ và $x_1.x_2\geq 4$, mà x_1 hoặc x_2 nguyên và $x_1+x_2=m^2\in\mathbb{N}^*$ suy ra $x_1,x_2\in\mathbb{N}^*$. Do đó $(x_1-1)(x_2-1)\geq 0$

$\Leftrightarrow -m^2+2m+3\geq 0 \Leftrightarrow (m+1)(m-3)\leq 0 \Leftrightarrow m\leq 3$

$\Rightarrow m\in\{1;2;3\}$.

Thử lại ta thấy chỉ với $m=3$ thì PT đã cho có nghiệm nguyên. Vậy $m=3$.

Câu 4. 1) (h.1)



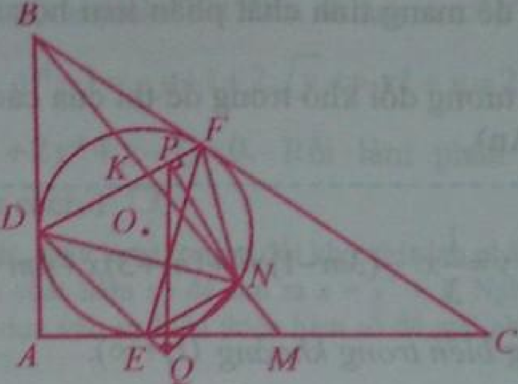
Hình 1

Gọi K là giao điểm của BO với DF thì tam giác IKF vuông tại K.

Có $\widehat{DFE}=\frac{1}{2}\widehat{DOE}=45^o$, nên $\widehat{BIF}=45^o$.

2) Khi $AM=AB$ thì $\widehat{DBH}=\widehat{ABM}=45^o$. Do $\widehat{DFH}=\widehat{DBH}(=45^o)$ nên tứ giác $BDHF$ nội tiếp. Vì thế 5 điểm B, D, O, H, F cùng thuộc đường tròn đường kính BO. Suy ra $OH\perp BM$ mà $OA\perp BM$ nên A, O, H thẳng hàng; $\widehat{BAH}=\widehat{BIH}=45^o$. Do đó tứ giác $ABHI$ nội tiếp

3) (h.2).



Hình 2

Dễ thấy tứ giác $PNQD$ nội tiếp nên $\widehat{QPN}=\widehat{QDN}=\widehat{EFN}$. Tương tự có $\widehat{NQP}=\widehat{NDP}=\widehat{FEN}$. Suy ra $\Delta NEF \backsim \Delta NQP$ (g.g), do đó $\frac{PQ}{EF}=\frac{NQ}{NE}\le 1\Rightarrow PQ\le EF$.

PQ lớn nhất bằng EF khi và chỉ khi $P\equiv F$; $Q\equiv E$ nên DN là đường kính của (O). Cách xác định điểm M: Kẻ đường kính DN của (O), BN cắt AC tại M thì độ dài PQ lớn nhất.

Câu 5. Đặt $x=1+c$, $y=1+b$, $z=1+a$ thì $1\le z\le y\le x\le 2$. Khi đó

$$B=(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=3+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}.$$

Do $\left(1-\frac{x}{y}\right)\left(1-\frac{y}{z}\right)\ge 0\Leftrightarrow \frac{x}{y}+\frac{y}{z}\le\frac{x}{z}+1.$

$\left(1-\frac{z}{y}\right)\left(1-\frac{y}{x}\right)\ge 0\Leftrightarrow \frac{z}{y}+\frac{y}{x}\le\frac{z}{x}+1.$ Suy ra

$B\le 2\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+5$. Đặt $\frac{x}{z}=t$ thì $1\le t\le 2$. Ta có

$$\frac{x}{z}+\frac{z}{x}=t+\frac{1}{t}=\frac{2t^2-5t+2}{2t}+\frac{5}{2}=\frac{(2t-1)(t-2)}{2t}+\frac{5}{2}.$$

Do $1\le t\le 2$ nên $\frac{(2t-1)(t-2)}{2t}\le 0\Rightarrow\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\le\frac{5}{2}.$

Vậy $B\le 2.\frac{5}{2}+5=10.$

Ta thấy $a=b=0$ và $c=1$ thì $B=10$. Vậy giá trị lớn nhất của B là 10.

ĐÀO MINH TÂN (*Hải Dương*)

sưu tầm và giới thiệu

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10... *(Tiếp trang 3)*

$S_3=2+3+5,...)$. Chứng minh rằng trong dãy số $S_1,S_2,S_3,...$ không tồn tại hai số hạng liên tiếp đều là các số chính phương.

Câu 4. (*2,5 điểm*)

Cho tam giác ABC không cân, nội tiếp đường tròn (O), BD là đường phân giác của góc ABC. Đường thẳng BD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai E. Đường tròn (O_1) đường kính DE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai F.

1) Chứng minh rằng đường thẳng đối xứng với đường thẳng BF qua đường thẳng BD đi qua trung điểm của cạnh AC.

2) Biết tam giác ABC vuông tại B, $\widehat{BAC}=60^o$ và bán kính của đường tròn (O) bằng R. Hãy tính bán kính của đường tròn (O_1) theo R.

Câu 5. (*1 điểm*)

Độ dài ba cạnh của tam giác ABC là ba số nguyên tố. Chứng minh rằng diện tích của tam giác ABC không thể là số nguyên.

Câu 6. (*1 điểm*)

Giả sử $a_1,a_2,...,a_{11}$ là các số nguyên dương lớn hơn hay bằng 2, đôi một khác nhau và thỏa mãn $a_1+a_2+...+a_{11}=407$. Tồn tại hay không số nguyên dương n sao cho tổng các số dư của các phép chia n cho 22 số $a_1,a_2,...,a_{11}$, $4a_1,4a_2,...,4a_{11}$ bằng 2012.

NGUYỄN THANH HỒNG

(*GV THPT chuyên ĐHSP Hà Nội*)

Chuẩn bị cho kì thi tốt nghiệp THPT và thi vào Đại học

Bình luận về Đề thi tuyển sinh VÀO ĐẠI HỌC KHỐI A - A$_1$ năm 2013

LTS. Đề thi tuyển sinh vào Đại học Khối A và Khối A$_1$ năm nay phù hợp với chương trình và cấu trúc đề thi tuyển sinh của Bộ Giáo dục và Đào tạo đã ban hành. Kiến thức được trải đều theo ba năm học ở bậc THPT. Có một số câu trong đề mang tính chất phân loại học sinh như **Câu 3, Câu 5, Câu 6, Câu 7b**.
Dưới đây là phần hướng dẫn và nhận xét một số câu tương đối khó trong đề thi của các thầy cô giáo *Thanh Loan* (Hải Dương), *Quang Phúc* (Nghệ An).

CÂU 1b. *Cho hàm số $y=-x^3+3x^2+3mx-1$ (1) với m là tham số thực. Tìm m để hàm số (1) nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.*

Hướng dẫn. Ta có $y'=-3x^2+6x+3m$. Hàm số (1) nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi $y'=-3x^2+6x+3m\le 0, \forall x>0$.

Cách 1. Xảy ra hai trường hợp

1) $\Delta'\le 0$ (vì khi đó $y\le 0, \forall x\in\mathbb{R}$, hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$).

Ta có $\Delta'\le 0 \Leftrightarrow 9+9m\le 0 \Leftrightarrow m\le -1$.

2) PT $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1<x_2\le 0$. Khi đó $x_1+x_2<0$, nhưng trường hợp này không thể vì $x_1+x_2=2>0$. Vậy $m\le -1$.

Cách 2. $y'\le 0, \forall x>0 \Leftrightarrow m\le x^2-2x, x>0$

$\Leftrightarrow m\le \min\limits_{x>0}(x^2-2x)$.

Lập bảng biến thiên hàm số $f(x)=x^2-2x$ trên $(0;+\infty)$.

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$	0 ↘	-1	↗ $+\infty$

Từ bảng biến thiên ta nhận thấy $\min\limits_{x>0} f(x)=-1$.

Vậy $m\le -1$. □

★ **Bài luyện tập.** *Tìm m để hàm số*

$$y=\frac{1}{3}x^3-(3m-1)x^2+(m+3)x+4m-3$$

đồng biến trong khoảng $(1;+\infty)$.

CÂU 3. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x-1}-\sqrt{y^4+2}=y\\ x^2+2x(y-1)+y^2-6y+1=0\end{cases} \quad (x,y\in\mathbb{R}).$$

Hướng dẫn. *Cách 1.* Điều kiện $x\ge 1$.

Biến đổi PT thứ hai thành $(x+y-1)^2=4y$ (1) suy ra $y\ge 0$.

Từ PT thứ nhất ta có

$$\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x-1}=\sqrt{(y^4+1)+1}+\sqrt[4]{(y^4+1)-1} \quad (2)$$

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t+1}+\sqrt[4]{t-1}$ trên $[1;+\infty)$, ta có $f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t+1}}+\dfrac{1}{4\sqrt[4]{(t-1)^3}}>0, \forall t\ge 1$, nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[1;+\infty)$.

Từ PT (2) có $f(x)=f(y^4+1)\Leftrightarrow x=y^4+1$.

Thay vào PT (1) được

$$(y^4+y)^2=4y \Leftrightarrow y(y^7+2y^4+y-4)=0.$$

• Với $y=0$, tìm được $x=1$.

• Với $y^7+2y^4+y-4=0$ (3)

Xét hàm số $g(y)=y^7+2y^4+y-4$ có $g'(y)=7y^6+8y^3+1>0$ với $\forall y\ge 0$, nên hàm số $g(y)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ và $g(1)=0$. Suy ra $y=1$ là nghiệm duy nhất của PT (3). Từ đó $x=2$.

Hệ PT có hai nghiệm $(x\,;y)$ là $(1\,;0)$ và $(2\,;1)$.

Cách 2. Ta coi $x^2+2(y-1)x+y^2-6y+1=0$ là PT bậc hai ẩn x có biệt thức

$$\Delta'=(y-1)^2-(y^2-6y+1)=4y \Rightarrow y\ge 0$$

và do đó $x=-y+1+2\sqrt{y}$ (vì $x\ge 1$). Tương tự cách 1 dựa vào tính chất hàm số suy ra $x=y^4+1$.

Dẫn đến $y^4+1=-y+1+2\sqrt{y} \Leftrightarrow y^4+y=2\sqrt{y}$

$\Leftrightarrow y(y^7+2y^4+y-4)=0$. Rồi làm phần tiếp theo như cách 1. ☐

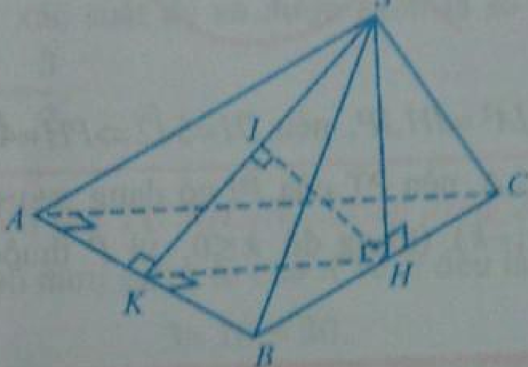
➢**Nhận xét.** Đây là bài tương đối khó, thí sinh phải biết dùng tính chất hàm số để tìm ra $x=y^4+1$. Ngoài ra phải biết dựa vào sự biến thiên hàm số để giải phương trình bậc 7.

★ **Bài luyện tập.** *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} e^{y^2-x^2}=\dfrac{x^2+1}{y^2+1} \\ x^2-2x(y-1)+y^2-6y+4=0. \end{cases}$$

CÂU 5. *Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông tại A, $\widehat{ABC}=30^\circ$, SBC là tam giác đều cạnh a và mặt bên SBC vuông góc với đáy. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABC và khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB).*

Hướng dẫn



• Gọi H là trung điểm của BC thì $SH\perp BC$. Theo giả thiết $\mathrm{mp}(SBC)\perp\mathrm{mp}(ABC)$, nên $SH\perp\mathrm{mp}(ABC)$. Do SBC là tam giác đều cạnh a nên $SH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, suy ra

$$V_{SABC}=\frac{1}{3}SH.S_{ABC}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2}.\frac{a}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a^3}{16}\text{ (đvtt).}$$

• Gọi K là trung điểm của AB thì $HK\perp AB$. Theo định lí ba đường vuông góc ta thấy $SK\perp AB$.

Cách 1. Áp dụng Định lí Pythagore cho tam giác vuông SHK ta có

$$SK^2=SH^2+KH^2=\frac{3a^2}{4}+\frac{a^2}{16}=\frac{13a^2}{16}\Rightarrow SK=\frac{a\sqrt{13}}{4}.$$

Từ đó $S_{SAB}=\dfrac{1}{2}SK.AB=\dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{13}}{4}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a^2\sqrt{39}}{16}$.

Vậy $d(C,(SAB))=\dfrac{3V_{S.ABC}}{S_{SAB}}=\dfrac{a\sqrt{39}}{13}$.

Cách 2. Trong mặt phẳng (SHK) kẻ $HI\perp SK$, dễ chứng minh $HI\perp(SAB)$. Ta có

$$HI=\frac{SH.KH}{\sqrt{SH^2+KH^2}}=a\sqrt{\frac{3}{52}}.$$

Từ đó chú ý rằng $d(C,(SAB))=2HI$ ta được

$$d(C,(SAB))=\frac{a\sqrt{39}}{13}.\ ☐$$

➢**Nhận xét.** +) Ý thứ nhất của câu này khá cơ bản. Mấu chốt để tính được V_{SABC} là việc xác định đường cao SH của hình chóp $S.ABC$ thông qua sự kiện $(SBC)\perp(ABC)$.

+) Ở cách 1 ý thứ 2, ý tưởng tự nhiên là tính diện tích tam giác ASB (bởi vì ta đã tính được V_{SABC}). Ở cách 2 cần có sự liên tưởng đến định lí Thales để nhận ra $d(C,(SAB))=2HI$ (trong đó $HI\perp SK$ và do đó $HI\perp(SAB)$).

★ **Bài luyện tập.** *Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a. Tam giác SAC cân tại S, $\widehat{SBC}=60^\circ$. Mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB).*

CÂU 6. *Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $(a+c)(b+c)=4c^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P=\frac{32a^3}{(b+3c)^3}+\frac{32b^3}{(a+3c)^3}-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}.$$

Hướng dẫn. Từ $(a+c)(b+c)=4c^2$

suy ra $\left(\frac{a}{c}+1\right)\left(\frac{b}{c}+1\right)=4.$

Đặt $x=\frac{a}{c}$, $y=\frac{b}{c}$ thì $(x+1)(y+1)=4$

$\Leftrightarrow xy=3-(x+y); x>0, y>0.$

Đặt $x+y=t\ (t>0)$ thì $xy=3-t; x^2+y^2=t^2+2t-6.$

Do $(x+y)^2\geq 4xy$ nên $t^2\geq 4(3-t)\Leftrightarrow t^2+4t-12\geq 0$ nên $t\geq 2$ (do $t\geq 0$). Ta có

$$P=32\left(\frac{x}{y+3}\right)^3+32\left(\frac{y}{x+3}\right)^3-\sqrt{x^2+y^2}.$$

Áp dụng BĐT $4(m^3+n^3)\geq(m+n)^3$ với $m\geq 0, n\geq 0.$

Ta có $P\geq 8.\left(\frac{x}{y+3}+\frac{y}{x+3}\right)^3-\sqrt{x^2+y^2}$

$=8.\left(\frac{x^2+y^2+3(x+y)}{xy+3(x+y)+9}\right)^3-\sqrt{x^2+y^2}$

$=8.\left(\frac{t^2+5t-6}{2t+12}\right)^3-\sqrt{t^2+2t-6}=(t-1)^3-\sqrt{t^2+2t-6}.$

Xét hàm số $f(t)=(t-1)^3-\sqrt{t^2+2t-6}$ trên $[2;+\infty)$. Ta có $f'(t)=3(t-1)^2-\frac{t+1}{\sqrt{t^2+2t-6}}$

$\geq 3(t-1)^2-\frac{t+1}{2}=g(t)$ (do $\sqrt{t^2+2t-6}\geq 2$ khi $t\geq 2$).

Vì $g'(t)=6(t-1)-\frac{1}{2}>0$ khi $t\geq 2$ nên $g(t)$ là hàm số đồng biến trên $[2;+\infty)$, suy ra

$$g(t)\geq g(2)=3-\frac{3}{2}>0.$$

Do đó $f'(t)>0$ khi $t\geq 2$, hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[2;+\infty)$ nên $P\geq f(t)\geq f(2)=1-\sqrt{2}.$

Khi $a=b=c$ thì $P=1-\sqrt{2}$. Do đó giá trị nhỏ nhất của P là $1-\sqrt{2}$. ❐

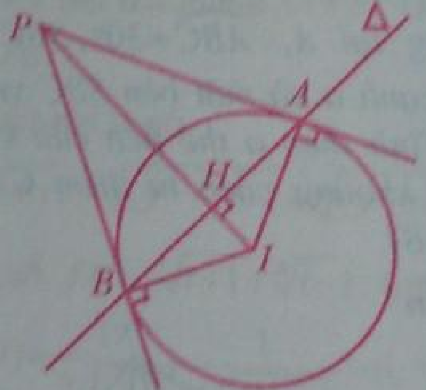
➤**Nhận xét.** Đây là câu phân loại khó nhất của đề thi, đòi hỏi thí sinh phải biết khéo léo đánh giá đưa việc tìm cực trị của biểu thức nhiều biến về tìm cực trị của biểu thức một biến. Đồng thời phải biết khai thác tính đơn điệu của hàm số để chứng minh BĐT.

★ **Bài luyện tập.** *Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện* $(a+2c)(b+2c)=16c^2$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$Q=\frac{128a^4}{(b+6c)^4}+\frac{128b^4}{(a+6c)^4}+\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}.$$

CÂU 7b. *Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường thẳng* $\Delta: x-y=0$. *Đường tròn (C) có bán kính* $R=\sqrt{10}$ *cắt* Δ *tại hai điểm A và B sao cho* $AB=4\sqrt{2}$. *Tiếp tuyến của (C) tại A và B cắt nhau tại một điểm thuộc tia Oy. Viết phương trình đường tròn (C).*

Hướng dẫn. Gọi I là tâm đường tròn (C). Giả sử hai tiếp tuyến của đường tròn (C) cắt nhau tại điểm $P\in Oy, H$ là giao điểm của PI và AB (hình vẽ). Áp dụng Định lí Pythagore cho tam giác vuông AHI có $IH^2=IA^2-AH^2=2$, suy ra $IH=\sqrt{2}.$



Lại có $IA^2=IH.IP$, nên $IH=5\sqrt{2}\Rightarrow PH=4\sqrt{2}.$

Do $PI\perp\Delta$ nên PT của PI có dạng $x+y+k=0$ và $P(0;-k)$ (trong đó $k\leq 0$, vì P thuộc tia Oy).

Ta có $PH = d(P;\Delta) = \frac{|k|}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} \Rightarrow k = -8$ (vì $k \le 0$). Với $k=-8$, giả sử $I(a;-a+8)$. Từ điều kiện $d(I;\Delta) = IH = \sqrt{2}$, ta tìm được $a=5$ hoặc $a=3$.

Dễ kiểm tra với $a=3$ thì P và I nằm cùng phía đối với đường thẳng AB (hay Δ) (vô lí). Do đó phương trình đường tròn cần tìm là $(x-5)^2+(y-3)^2=10$. □

➢**Nhận xét.** Để lập được phương trình đường tròn (C) chúng ta phải xác định tọa độ tâm I của nó. Muốn vậy ta khai thác triệt để hai kết quả $d(P;\Delta) = PH = 4\sqrt{2}$ và $d(I;\Delta) = IH = \sqrt{2}$ (trong đó $H = PI \cap AB$). Lưu ý rằng, nếu không để ý đến giả thiết P thuộc tia Oy và không xét vị trí tương đối giữa P và I đối với đường thẳng Δ thì rất có thể đưa ra những đáp án thiếu chính xác.

CÂU 9a. *Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm ba chữ số phân biệt được chọn từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. Xác định số phần tử của S. Chọn ngẫu nhiên một số từ S, tính xác suất để số được chọn là số chẵn.*

Hướng dẫn. • Mỗi cách chọn số gồm ba chữ số phân biệt từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 là một chỉnh hợp chập 3 của 7. Vì vậy số phần tử của S là $A_7^3 = 210$.

• Gọi số cần lập là $x = \overline{abc}$. Vì x là số chẵn nên $c \in \{2;4;6\}$, do đó có 3 cách chọn c. Ứng với mỗi cách chọn c có A_6^2 cách chọn $\overline{ab}$.

Do đó có tất cả $3.A_6^2 = 90$ số chẵn thuộc S.

Vậy xác suất để số được chọn là số chẵn là $\frac{90}{210} = \frac{3}{7}$.

★ **Bài luyện tập.** *Gọi Q là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm bốn chữ số phân biệt được chọn từ các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8. Xác định số phần tử của Q. Chọn ngẫu nhiên một số từ Q, tính xác suất để*

a) Số được chọn là số lẻ.

b) Số được chọn chia hết cho 5.

CÂU 9b. *Cho số phức $z = 1+\sqrt{3}i$. Viết dạng lượng giác của z. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $w = (1+i)z^5$.*

Hướng dẫn. Ta có $z = 1+\sqrt{3}\,i = 2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Suy ra $z^5 = 2^5\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 32\left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$

$$= 16(1-\sqrt{3}i).$$

Do đó $w = (1+i)z^5 = 16(1+i)(1-\sqrt{3}i)$

$$= 16(1+\sqrt{3}) + 16(1-\sqrt{3})i.$$

Vậy số phức w có phần thực là $16(1+\sqrt{3})$ và phần ảo là $16(1-\sqrt{3})$. □

★ **Bài luyện tập.** *Viết dạng lượng giác của số phức z, biết rằng $z + \frac{1}{z} = 1$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức*

$$w = (1-i)\left(z^{2013} + \frac{1}{z^{2013}}\right).$$

SONG ĐỀ TÙ NHÂN....*(Tiếp trang 29)*

thì số năm giảm tù của A và B đều là

$$3 \times 10 = 30.$$

• Nếu A áp dụng chiến lược Z, còn B áp dụng chiến lược T thì số năm giảm tù của A là

$$0 + 9 \times 1 = 9,$$

và số năm giảm tù của B là $5 + 9 \times 1 = 14$.

• Tương tự nếu A áp dụng chiến lược T, còn B áp dụng chiến lược Z thì A được giảm 14 năm tù, B được giảm 9 năm tù.

• Nếu cả A và B đều áp dụng chiến lược T thì số năm giảm tù của A và B đều là $1 \times 10 = 10$.

Như vậy, theo luật giảm án trên khi họ cùng nhau áp dụng chiến lược Z thì số năm giảm án là nhiều nhất.

Do đó chiến lược Z được áp dụng ưu tiên trong chọn lọc tự nhiên.

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 9

Câu 1. 1) Bạn đọc tự giải.

2) Gọi $M_0\ (x_0;y_0)$ là tiếp điểm, ta có PT tiếp tuyến tại M_0 là $y=\dfrac{-2}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\dfrac{x_0+1}{x_0-1}$.

Tam giác tạo bởi hai đường tiệm cận và tiếp tuyến có các đỉnh $A\left(1;\dfrac{x_0+3}{x_0-1}\right)$, $B(2x_0-1;1)$, $I(1;1)$.

Ta có PT

$$\frac{4}{|x_0-1|}+2|x_0-1|+\sqrt{\frac{16}{(x_0-1)^2}+4(x_0-1)^2}=6+2\sqrt{5}.$$

Đặt $\dfrac{4}{|x_0-1|}+2|x_0-1|=t\quad (t\geq 4\sqrt{2})$ thì dẫn đến PT $t+\sqrt{t^2-16}=6+2\sqrt{5}$.

Giải PT trên ta được $t=6$.

Suy ra $x_0\in\{0;\ 2;\ 3;\ -1\}$.

PT các tiếp tuyến cần tìm là

$$y=-2x-1, y=-2x+7, y=\frac{-x}{2}+\frac{7}{2}, y=\frac{-x}{2}-\frac{1}{2}.$$

Câu 2. ĐK $\cos x\neq\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x\neq\dfrac{\pm\pi}{3}+k2\pi$.

$$\text{PT}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2\cos x+1=0\\ \sin x-\sqrt{3}\cos 2x=\sin x(2\cos x-1)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pm 2\pi}{3}+k2\pi\\ \sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin x\end{array}\right.$$

Giải ra đối chiếu ĐK ta tìm được

$$x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi;\ x=\frac{2\pi}{9}+k\frac{2\pi}{3};k\in\mathbb{Z}.$$

Câu 3. Từ PT thứ nhất nhân và chia với biểu thức $\sqrt{x^2+1}-x$ ở vế trái PT này được $y=-x$.

Thay vào PT thứ hai và giải (đặt ẩn phụ hoặc bình phương) ta có $\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=2-\sqrt{2}.\end{array}\right.$

Đáp số $(x\,;y)=(1;-1)$, $(x\,;y)=(2-\sqrt{2};\sqrt{2}-2)$.

Câu 4. $I=\displaystyle\int_1^e\frac{x^2e^{\sqrt{\ln x}}+1}{x^3}dx=\int_1^e\frac{dx}{x^3}+\int_1^e e^{\sqrt{\ln x}}d(\ln x)$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2e^2}+\int_0^1 e^{\sqrt{y}}dy$$

Đặt $t=\sqrt{y}$, sau đó sử dụng tích phân từng phần ta được $I=\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{2e^2}$.

Câu 5. • Từ giả thiết có $SA=a\sqrt{2},\dfrac{NC}{NA}=\dfrac{1}{2}$

$$S_{ABMN}=S_{ABC}-S_{MNC}=\frac{5a^2}{6}.$$

Vậy $V_{S.ABMN}=\dfrac{5a^3\sqrt{2}}{18}$ (đvtt).

• Ta có $\dfrac{SH}{SB}=\dfrac{2}{3}$. Tính $d(H,(SMD))$ bằng cách tính $d(B,(SMD))$. Sử dụng công thức thể tích khối $S.BMD$ để tìm $d(B,(SMD))$.

Đáp số. $d=\dfrac{a}{3}$.

Câu 6. Theo BĐT Bunyakovsky ta có

$$(a^2+b+c)(1+b+c)\geq(a+b+c)^2$$

$$\Rightarrow\frac{a}{\sqrt{a^2+b+c}}\leq\frac{\sqrt{a}\sqrt{a+ab+ac}}{a+b+c}.$$ Do đó

$$F\leq\sum\frac{\sqrt{a}\sqrt{a+ab+ac}}{a+b+c}$$

$$\leq\frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b+c+2ab+2bc+2ca)}}{a+b+c}.$$

Vì $a^2+b^2+c^2=3$ nên $a+b+c\leq a^2+b^2+c^2$, suy ra

$$F\leq\frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b+c)^2}}{a+b+c}=\sqrt{a+b+c}\leq\sqrt{3}$$

$\max F=\sqrt{3}$ đạt được khi $a=b=c=1$.

Câu 7a. Tìm được $B(3;0)$, $C(4;3)$.

Vì đường thẳng Δ có hệ số góc dương nên các điểm B và C nằm cùng phía đối với Δ.

Gọi M là trung điểm BC; H, I, K lần lượt là hình chiếu của B, M, C lên Δ.

Tổng khoảng cách từ B và C đến Δ là

$$BH + CK = 2MI \le 2MA.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $I \equiv A$. Vậy đường thẳng cần tìm đi qua A, nhận $\overrightarrow{MA}$ làm VTPT. Ta có $A(-1;3), \overrightarrow{MA}=\left(-\dfrac{9}{2};\dfrac{3}{2}\right)$ suy ra PT đường thẳng cần tìm là $3x - y + 6 = 0$.

Câu 8a. Ta thấy $I(1;1;1)$ là giao điểm Δ và Δ' và $\overrightarrow{IM}.\left[\overrightarrow{u_\Delta};\overrightarrow{u_{\Delta'}}\right]=0$ suy ra Δ, Δ' và M nằm trong cùng một mặt phẳng.

Gọi $A(1-t\,;\,1+2t\,;\,1+t)$ thuộc Δ, B thỏa mãn $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ có tọa độ $B\left(\dfrac{1+t}{2};2-t;\dfrac{7-t}{2}\right)$.

Vì B thuộc Δ' nên $\dfrac{1+t}{2}=\dfrac{2-t-3}{-2}=\dfrac{7-t-8}{-6}$ $\Leftrightarrow t=-1$.

Vậy $A(2;-1;0)$ và $B(0;3;4)$.

Đường thẳng cần tìm qua A, B có phương trình $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{-2}$.

Câu 9a. Số cách chọn 7 bi là C_{20}^7.

Số cách chọn ra k bi đỏ $(k = 0;\,1;\,2)$ trong số 7 bi đã chọn là $C_{12}^k.C_8^{7-k}$.

Xác suất chọn ra k bi đỏ $(k=0;1;2)$ là

$$P_k=\frac{C_{12}^k.C_8^{7-k}}{C_{20}^7}.$$

Xác suất cần tính $P = P_0 + P_1 + P_2 = \dfrac{101}{1938}$.

Câu 7b. • Đường tròn (C) có tâm $I(2;\,2)$, bán kính $R = 2$.

Đường thẳng Δ qua $M(4;8)$ nên có PT

$$ax+by-(4a+8b)=0\;(a^2+b^2>0).$$

Δ tiếp xúc với $(C) \Leftrightarrow d(I;\Delta) = R$. Từ đó tính được $b=0$; $b=\dfrac{-3}{4}a$.

Suy ra có hai tiếp tuyến $x-4=0$ (d_1) và $4x-3y+8=0\,(d_2)$.

• Ta có $S_{MAIB}=S_1=12$. Đặt $\alpha=\widehat{AIM}$, suy ra $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \alpha=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Diện tích hình quạt góc AIB là

$$S_2=2.\frac{\alpha.\pi R^2}{2\pi}=4\alpha=4\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Vậy diện tích cần tính là

$$S=S_1-S_2=12-4\arccos\frac{1}{\sqrt{10}} \text{ (đvdt).}$$

Câu 8b. Tìm được $M(2;3;3)$ thuộc Δ và $IM \perp \Delta$.

Giả sử (P) là mặt phẳng qua I và song song Δ, H là hình chiếu M lên (P), khi đó $d(\Delta;(P)) = MH \le MI$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $H \equiv I$. Vậy (P) qua I nhận $\overrightarrow{IM}$ làm VTPT (lúc đó hiển nhiên $\Delta\,//\,(P)$).

PT (P) là $x+y-z-5=0$.

Gọi φ là góc giữa (P) và Δ', ta có $\sin\varphi=\dfrac{6}{\sqrt{42}}$. Vậy $\varphi=\arcsin\dfrac{6}{\sqrt{42}}$.

Câu 9b. Xét khai triển

$$(x-1)^n=C_n^0x^n-C_n^1x^{n-1}+C_n^2x^{n-2}-...+(-1)^nC_n^n.$$

Lấy tích phân cận từ 0 đến 1 hai vế được

$$\frac{1}{2014}=\frac{1}{n+1}C_n^0-\frac{1}{n}C_n+\frac{1}{n-1}C_n^2-...+(-1)^n.C_n^n=\frac{(-1)^n}{n+1}$$

suy ra $n = 2013$.

$$P(x)=(1+x)^{2013}.(1+x^3)^{2013}$$

$$(1+x)^{2013}=C_{2013}^0+C_{2013}^1x+C_{2013}^2x^2+...+C_{2013}^{2013}x^{2013}$$

$$(1+x^3)^{2013}=C_{2013}^0+C_{2013}^1x^3+C_{2013}^2x^6+...+C_{2013}^{2013}x^{6039}$$

nên $P(x)=(C_{2013}^0.C_{2013}^1+C_{2013}^0.C_{2013}^3)x^3+Q(x)$, với $Q(x)$ không chứa x^3.

Vậy hệ số x^3 là $C_{2013}^1+C_{2013}^3$.

ĐẶNG HỮU DÂN - TỪ HỮU SƠN

(GV THPT chuyên Hà Tĩnh)

TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC SƠ CẤP

TRÒ CHƠI BỐC CÁC VẬT

ĐẶNG HUY RUẬN
(GV ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Trên bàn có một hay nhiều đống vật với số lượng hữu hạn. Hai đấu thủ A, B thực hiện trò chơi bốc các vật theo những quy tắc xác định và người bốc được vật cuối cùng sẽ chiến thắng (hoặc thua cuộc).

Nếu chỉ có một đống vật, thì trò chơi được gọi là *trò chơi đơn*, còn những trường hợp có nhiều đống vật, thì trò chơi được gọi là *trò chơi hợp*.

Bài viết này sẽ trình bày cách đi cho người đi trước luôn chiến thắng.

I. TRÒ CHƠI ĐƠN

Giả sử có hai số nguyên dương k và n, trong đó $k < n$ và n, $n-1$ không chia hết cho $k+1$.

1. Bài toán

Trên bàn có một đống gồm n vật. Hai đấu thủ A, B thực hiện trò chơi bốc các vật theo quy tắc sau:

- *Người đi trước được xác định ngẫu nhiên (bằng gắp thăm hoặc gieo đồng tiền).*
- *Mỗi người đến lượt phải bốc ít nhất một vật và không được bốc quá k vật.*
- *Người bốc được vật cuối cùng sẽ thắng cuộc (hoặc thua cuộc).*

Hãy đưa ra cách bốc các vật giúp người đi trước chiến thắng, tức bốc được vật cuối cùng (hoặc không phải bốc vật cuối cùng).

2. Cách bốc các vật của người đi trước

- Vì n không chia hết cho $k+1$ thì $n=(k+1)q+r$ với $q, r \in \mathbb{N}^*$ và $1 \le r \le k$.

Giả sử A là người được đi trước và người chiến thắng là người bốc được vật cuối cùng thì lần đầu tiên đấu thủ A phải bốc r vật, để số vật còn lại trên bàn là $(k+1)q$.

Sau đó cứ mỗi lần đấu thủ B bốc s $(1 \le s \le k)$ vật, thì tiếp theo đấu thủ A bốc $k+1-s$ vật, nên số vật còn lại trên bàn sau khi A bốc vẫn chia hết cho $k+1$.

Tiếp tục quá trình bốc các vật này theo cách trên, sau khi đấu thủ A bốc q lần thì trên bàn còn đúng $k+1$ vật, nhưng đến lượt mình đấu thủ B phải bốc ít nhất 1 vật và không được bốc quá k vật, nên sau khi đấu thủ B bốc lần cuối cùng trên bàn còn số vật không nhỏ hơn 1 và không vượt quá k. Khi đó đấu thủ A bốc nốt số vật này và thắng cuộc.

- Đối với trường hợp người A được đi trước chiến thắng khi không phải bốc vật cuối cùng thì người A ở lần đầu bốc số lượng vật bằng số dư nhận được khi chia $n-1$ cho $k+1$. Các lần sau bốc số vật sao cho cộng với số vật người B vừa bốc trước đó đúng bằng $k+1$.

II. TRÒ CHƠI HỢP

1. Tổng digit

Kí hiệu $[m]_{(2)}$ hay gọi "m theo modul 2" là số dư (bằng 0 hay bằng 1) khi chia số nguyên m cho 2.

Giả sử có n số nguyên không âm $a_1, a_2, ..., a_k, ..., a_n$. Mỗi số a_k đều có biểu diễn nhị phân

$$a_k = 2^0 c_k^0 + 2^1 c_k^1 + ... + 2^i c_k^i + ... + 2^s c_k^s$$

$$= (c_k^0, c_k^1, ..., c_k^i, ..., c_k^s) \quad (1 \le k \le n).$$

Định nghĩa. Vectơ

$$a = \left(\left[\sum_{k=1}^{n} c_k^0 \right]_{(2)}, \left[\sum_{k=1}^{n} c_k^1 \right]_{(2)}, ..., \left[\sum_{k=1}^{n} c_k^i \right]_{(2)}, ..., \left[\sum_{k=1}^{n} c_k^s \right]_{(2)} \right)$$

được gọi là *tổng digit của n số không âm* $a_1, a_2, ..., a_n$, đồng thời kí hiệu bằng

$$a = a_1 \dot{+} a_2 \dot{+} ... \dot{+} a_k \dot{+} ... \dot{+} a_{n-1} \dot{+} a_n$$

★ **Thí dụ**. *Hãy tính các tổng digit* $3 \dot{+} 7$, $5 \dot{+} 9 \dot{+} 11$.

Lời giải. Do 3, 5, 7, 9, 11 có dạng khai triển nhị phân như sau

$3 = (1, 1, 0)$; $5 = (1, 0, 1, 0)$; $7 = (1, 1, 1)$;
$9 = (1, 0, 0, 1)$; $11 = (1, 1, 0, 1)$.

Nên $3 \dotplus 7 = [(1, 1, 0) + (1, 1, 1)]_{(2)}$

$= ([1+1]_{(2)}, [1+1]_{(2)}, [0+1]_{(2)}) = (0,0,1).$

$5 \dotplus 9 \dotplus 11 = [(1, 0, 1, 0) + (1, 0, 0, 1) + (1, 1, 0, 1)]_{(2)}$
$= ([1+1+1]_{(2)}, [0+0+1]_{(2)}, [1+0+0]_{(2)}, [0+1+1]_{(2)})$
$= (1,1,1,0).$ ❐

2. Tổng digit theo vectơ modul

Giả sử $A = (a_1, a_2, ..., a_i, ..., a_n)$ là bộ gồm n số nguyên không âm tùy ý và

$$S = (s_1, s_2, ..., s_i, ..., s_n)$$

là bộ gồm n số nguyên dương bất kì.

Xét dãy gồm n số nguyên không âm

$U = (u_1, u_2, ..., u_i, ..., u_n)$ mà $a_i \equiv u_i \pmod{s_i} (1 \le i \le n)$.

Định nghĩa. Tổng digit

$$u_1 \dotplus u_2 \dotplus ... \dotplus u_i \dotplus u_n$$

được gọi là *tổng digit của bộ A theo vectơ modul S*, đồng thời kí hiệu bằng $T(A, S)$, tức là

$$T(A, S) = u_1 \dotplus u_2 \dotplus ... \dotplus u_i \dotplus ... \dotplus u_n$$

★Thí dụ. *Cho bộ số nguồn $A = (5, 9, 13, 17)$ và bộ số nguyên $S = (2, 3, 5, 6)$. Hãy tính tổng digit của bộ A theo vectơ modul S, tức là tính $T(A, S)$.*

Lời giải. 1) Tính các modul tương ứng

$5 \equiv 1 \pmod 2$; $9 \equiv 0 \pmod 3$;

$13 \equiv 3 \pmod 5$; $17 \equiv 5 \pmod 6$.

2) Tính tổng digit của các phần dư

$1 \dotplus 0 \dotplus 3 \dotplus 5 = [(1, 0, 0) + (0, 0, 0) + (1, 1, 0) + (1, 0, 1)]_{(2)}$
$= ([1+0+1+1]_{(2)}, [0+0+1+0]_{(2)}, [0+0+0+1]_{(2)}) = (1,1,1)$

Vậy $T(A, S) = (1, 1, 1)$. ❐

3. Bài toán

Trên bàn có n đống vật với số lượng tương ứng $k_1, k_2, ..., k_{i-1}, k_i, k_{i+1}, ..., k_n$ $(k_i \in \mathbb{N}^*)$.

Hai đấu thủ A, B thực hiện trò chơi bốc các vật theo các nguyên tắc sau:

- Người đi trước được xác định ngẫu nhiên (bằng gieo đồng tiền hoặc gắp thăm).
- Mỗi người đến lượt chỉ được bốc ở một trong những đống vật, phải bốc ít nhất 1 vật và nếu bốc ở đống thứ i $(1 \le i \le n)$ thì không được bốc quá m_i vật $(1 \le m_i \le k_i)$.
- Người bốc được vật cuối cùng sẽ thắng cuộc.

Tìm điều kiện và nêu cách bốc vật để người đi trước luôn thắng cuộc.

4. Cách bốc các vật của người đi trước chiến thắng

Kí hiệu bộ số lượng của tất cả n đống vật bằng Q.

$Q = (k_1, k_2, ..., k_{i-1}, k_i, k_{i+1}, ..., k_n)$ và
$S = (m_1 + 1, m_2 + 1, ..., m_{i-1} + 1, m_i + 1, m_{i+1} + 1, ..., m_n + 1)$.

Đối với mỗi đống thứ i $(1 \le i \le n)$ tính

$k_i \equiv s_i \pmod{(m_i + 1)}$

(s_i là số dư nhận được khi chia k_i cho $m_i + 1$).

Và tính tổng digit của bộ Q theo vectơ modul S

$T(Q, S) = s_1 \dotplus s_2 \dotplus ... \dotplus s_{i-1} \dotplus s_i \dotplus s_{i+1} \dotplus ... \dotplus s_n$.

Nếu $T(Q, S) \ne 0$ (Kí hiệu $0 := \underbrace{(0, 0, ..., 0)}_{n \text{ số } 0}$) thì người trước sẽ thắng cuộc. Giả sử đấu thủ A đi trước, thì đấu thủ A thực hiện bước thứ nhất: Bốc ở đống i $(1 \le i \le n)$ nào đó số lượng vật cho phép, tức không vượt quá m_i, để số lượng vật còn lại tại đó là k_i', sao cho

$$Q' = (k_1, k_2, ..., k_{i-1}, k'_i, k_{i+1}, ..., k_n)$$

để $T(Q', S) = 0$.

Đến lượt mình đấu thủ B chỉ có thể bốc tại một đống nào đó trong bộ Q' và phải bốc số vật trong phạm vi cho phép.

Kí hiệu bộ số lượng các đống sau khi đấu thủ B bốc bằng R. Khi đó $T(Q, S) \ne 0$, nên đến lượt mình đấu thủ A phải bốc ở đống thứ $(1 \le t \le n)$ nào đó với số lượng không vượt quá m_t, để bộ số lượng R' có $T(R', S) = 0$.

Tiếp tục thực hiện quy trình bốc vật tương tự như trên đấu thủ A sẽ bốc được vật cuối cùng và chiến thắng.

★Thí dụ. *Trên bàn có ba đống bi với số lượng tương ứng là 5 viên, 8 viên và 11 viên*

Hai bạn Anh và Việt thực hiện trò chơi bốc bi theo nguyên tắc sau:

1) Người đi đầu được xác định bằng gieo đồng tiền.

2) Mỗi người đến lượt chỉ được bốc ở một trong những đống còn bi, phải bốc ít nhất 1 viên và

+ Nếu bốc ở đống thứ nhất, thì không được bốc quá 2 viên,

+ Nếu bốc ở đống thứ hai, thì không được bốc quá 3 viên,

+ Nếu bốc ở đống thứ ba, thì không được bốc quá 4 viên.

3) Người bốc được viên cuối cùng sẽ thắng cuộc.

Hỏi nếu bạn Việt được đi trước, thì bạn đó phải có cách bốc bi như thế nào để đảm bảo thắng cuộc ?

Lời giải. Kí hiệu bộ số lượng các bi bằng A_0, tức là $A_0 = (5, 8, 11)$ và

$$S = (2 + 1, 3 + 1, 4 + 1) = (3, 4, 5).$$

Do $5 \equiv 2 \pmod 3), 8 \equiv 0 \pmod 4, 11 \equiv 1 \pmod 5$,

nên $T(A_0, S) = 2 \dotplus 0 \dotplus 1 = [(0,1)+(0,0)+(1,0)]_{(2)}$

$= ([0+0+1]_{(2)}, [1+0+0]_{(2)}) = (1,1) \neq (0,0)$.

• *Lần đầu tiên* bạn *Việt* phải bốc 1 viên ở đống bi thứ nhất và khi đó bộ số lượng các đống bi còn lại là $A_1 = (4,8,11)$.

Do $4 \equiv 1 \pmod 3, 8 \equiv 0 \pmod 4, 11 \equiv 1 \pmod 5$, nên

$T(A_1, S) = 1 \dotplus 0 \dotplus 1 = [(1,0)+(0,0)+(1,0)]_{(2)} = (0,0)$.

• Đến lượt bạn *Anh*, chẳng hạn bạn đó bốc 4 viên ở đống thứ ba. Khi đó bộ số lượng còn lại là $A_2 = (4, 8, 7)$.

Do $4 \equiv 1 \pmod 3, 8 \equiv 0 \pmod 4, 7 \equiv 2 \pmod 5$,

nên $T(A_2, S) = 1 \dotplus 0 \dotplus 2 = [(1,0)+(0,0)+(0,1)]_{(2)}$

$$= (1,1) \neq (0,0).$$

• *Lần thứ hai* bạn *Việt* phải bốc 1 viên hoặc ở đống thứ hai hoặc ở đống thứ ba. Chẳng bạn, bạn *Việt* bốc 1 viên thuộc đống thứ ba, nên bộ số lượng còn lại tương ứng là $A_3 = (4, 8, 6)$.

Do $4 \equiv 1 \pmod 3, 8 \equiv 0 \pmod 4, 6 \equiv 1 \pmod 5$, nên

$T(A_3, S) = 1 \dotplus 0 \dotplus 1 = [(1,0)+(0,0)+(1,0)]_{(2)} = (0,0)$.

• Đến lượt bạn *Anh*, chẳng [illegible] bốc 2 viên ở đống thứ hai. Khi đó bộ số lượng còn lại là $A_4 = (4,6,6)$.

Do $4 \equiv 1 \pmod 3, 6 \equiv 2 \pmod 4, 6 \equiv 1 \pmod 5$, nên

$T(A_4, S) = 1 \dotplus 2 \dotplus 1 = [(1,0)+(0,1)+(1,0)]_{(2)} = (0,1)$.

• *Lần thứ ba*, bạn *Việt* bốc hoặc 2 viên ở đống thứ hai hoặc 3 viên ở đống thứ ba. Chẳng hạn, bạn *Việt* bốc 2 viên ở đống thứ hai. Khi đó bộ số lượng còn lại là $A_5 = (4,4,6)$.

Do $4 \equiv 1 \pmod 3, 4 \equiv 0 \pmod 4, 6 \equiv 1 \pmod 5$, nên

$T(A_5, S) = 1 \dotplus 0 \dotplus 1 = (0,0)$.

• Đến lượt bạn *Anh*, chẳng hạn bạn đó bốc 2 viên ở đống thứ nhất. Khi đó bộ số lượng còn lại là $A_6 = (2,4,6)$.

Do $2 \equiv 2 \pmod 3, 4 \equiv 0 \pmod 4, 6 \equiv 1 \pmod 5$, nên

$T(A_6, S) = 2 \dotplus 0 \dotplus 1 = [(0,1)+(0,0)+(1,0)]_{(2)} = (1,1)$.

• *Lần thứ tư*, bạn *Việt* bốc hoặc 1 viên ở đống thứ nhất hoặc 1 viên ở đống thứ hai. Chẳng hạn, em *Việt* bốc 1 viên ở đống thứ hai. Khi đó bộ số lượng còn lại là $A_7 = (2,3,6)$.

Do $2 \equiv 2 \pmod 3, 3 \equiv 3 \pmod 4, 6 \equiv 1 \pmod 5$, nên

$T(A_7, S) = 2 \dotplus 3 \dotplus 1 = (0,0)$.

• Đến lượt mình, chẳng hạn bạn *Anh* bốc 4 viên ở đống thứ ba, nên bộ số lượng còn lại là $A_8 = (2, 3, 2)$.

Do $2 \equiv 2 \pmod 3, 3 \equiv 3 \pmod 4, 2 \equiv 1 \pmod 5$, nên

$T(A_8, S) = 2 \dotplus 3 \dotplus 2 = (1,1) \neq (0,0)$.

• *Lần thứ năm*, bạn *Việt* bốc cả 3 viên của đống thứ hai. Khi đó số lượng còn lại là $A_9 = (2, 0, 2)$.

Có $T(A_9, S) = 2 \dotplus 0 \dotplus 2 = (0,0)$.

• Đến lượt mình, chẳng hạn em *Anh* bốc cả 2 viên của đống thứ nhất, nên bộ số lượng còn lại là $A_{10} = (0, 0, 2)$, nên

$$T(A_{10}, S) = 0 \dotplus 0 \dotplus 2 = (0,1) \neq (0,0).$$

• *Lần thứ sáu* bạn *Việt* bốc nốt cả 2 viên của đống thứ ba và thắng cuộc.

Câu lạc bộ

Giải đáp
KỈ NIỆM TRÒN CHỤC NĂM SINH CÁC NHÀ TOÁN HỌC

(Đề đăng trên THTT số 429 tháng 3 năm 2013)

Tư liệu về các nhà toán học được sắp xếp đúng như sau

A1	B2	C5	D4
A2	B3	C6	D2
A3	B6	C4	D5
A4	B5	C2	D7
A5	B1	C7	D1
A6	B4	C3	D3
A7	B7	C1	D6

Chú ý rằng C5, C6, C7 có thể đổi chỗ cho nhau.

Các bạn sau có lời giải đúng, được nhận tặng phẩm:

1) *Trần Nhật Quang*, 8H1, THCS Trưng Vương, Hoàn Kiếm, **Hà Nội**.

2) *Mạc Phương Anh*, 10A1 Tin, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội, **Hà Nội**.

3) *Nguyễn Anh Tuấn*, 10C1, THPT Thái Hòa, Nghĩa Đàn, **Nghệ An**.

4) *Trần Xuân Dương*, 11T2, THPT Trưng Vương, TP. Quy Nhơn, **Bình Định**.

5) *Lê Ngô Nhật Huy*, 11/3, THPT Lạc Long Quân, TP.Bến Tre, **Bến Tre**.

6) *Lê Thị Phương Mai*, 11C2, THPT Hồ Thị Kỷ, TP.Cà Mau, **Cà Mau**.

VÂN KHANH

NHỮNG BÃI BIỂN ĐẸP CỦA Việt Nam

Những ngày hè nóng nực khiến mọi người mong muốn tìm đến bãi biển cát mịn với sóng vỗ dập dồn, thoáng mát, non nước hữu tình. Bạn chọn bãi biển nào đây?. Bờ biển Việt Nam dài khoảng 3440 km chưa tính đường viền các đầm vịnh và ven các đảo, nếu tính chi tiết thì dài khoảng 11400 km. Ven biển nước ta có trên 120 bãi biển đẹp, trong đó gần 70 bãi biển thuộc 23 tỉnh, thành phố đã được đưa vào khai thác và trở thành các điểm du lịch nổi tiếng. Nhiều bãi biển đẹp được các văn nhân, vua chúa hoặc ngành văn hóa xếp hạng danh thắng Quốc gia(*), hoặc được các tạp chí du lịch nổi tiếng Quốc tế bình chọn và giới thiệu là bãi biển đẹp(**) trên thế giới. Bạn hãy cho biết các bãi biển dưới đây thuộc các tỉnh, thành phố nào dọc theo bờ biển từ tỉnh Quảng Ninh đến tỉnh Kiên Giang nhé ! (Các từ viết tắt chỉ ra bãi biển thuộc Thành phố, Thị xã, Quận, Huyện nào).

1) Bãi An Bàng**, TP.Hội An
2) Bãi Ba Động, H.Duyên Hải
3) Bãi Bắc Mỹ An, Q.Ngũ Hành Sơn
4) Bãi biển Côn Đảo**, H.Côn Đảo
5) Bãi biển Đồ Sơn, TX.Đồ Sơn
6) Bãi biển Hạ Long**, TP.Hạ Long
7) Bãi biển Hòn Tre, TP.Nha Trang
8) Bãi biển Phạm Văn Đồng, Q.Sơn Trà
9) Bãi Bình Sơn, TP.Phan Rang-Tháp Chàm
10) Bãi Bình Tiên, H.Thuận Bắc
11) Bãi Cà Ná, H.Thuận Nam
12) Bãi Cam Bình, TX.La Gi
13) Bãi Cảnh Dương, H.Phú Lộc
14) Bãi Cát Cò, H.Cát Hải
15) Bãi Cần Thạnh, H.Cần Giờ
16) Bãi Cửa Đại**, TP.Hội An
17) Bãi Cửa Lò, TX.Cửa Lò
18) Bãi Cửa Tùng, H.Vĩnh Linh
19) Bãi Cửa Việt, H.Gio Linh
20) Bãi Dài, H.Cam Lâm
21) Bãi Dài**, H.Phú Quốc

(Xem tiếp trang 30)

CÁC LỚP THCS

Bài T1/433. (Lớp 6) Tìm các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn $x^2+y^3+z^4=90$.

CAO NGỌC TOẢN

(GV THPT Tam Giang, Phong Điền, Thừa Thiên-Huế)

Bài T2/433. (Lớp 7) Cho tam giác đều ABC có AD, BE, CF là các đường cao. Điểm M bất kì nằm trong tam giác ABC. Gọi I, K, L lần lượt là hình chiếu của M trên AD, BE, CF. Chứng minh rằng giá trị của tổng $AI+BK+CL$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.

NGUYỄN ĐỨC TÂN

(TP. Hồ Chí Minh)

Bài T3/433. Cho a, b là các số hữu tỉ thỏa mãn $a^{2013}+b^{2013}=2a^{1006}b^{1006}$. Chứng minh rằng phương trình $x^2+2x+ab=0$ có hai nghiệm hữu tỉ.

ĐINH VĂN ĐÔNG

(GV THCS Thanh An, Thanh Hà, Hải Dương)

Bài T4/433. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=(x^4+y^4+z^4)\left(\frac{1}{x^4}+\frac{1}{y^4}+\frac{1}{z^4}\right)$, trong đó x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x+y\le z$.

DƯƠNG VĂN SƠN

(GV THPT Hà Huy Tập, TP. Vinh, Nghệ An)

Bài T5/433. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH. Trên tia đối của tia HA lấy điểm D sao cho $HA=2HD$. Gọi E là điểm đối xứng của B qua D; I là trung điểm của AC; DI và EI cắt BC lần lượt tại M và K. Chứng minh rằng $\widehat{MDK}=\widehat{MCD}$.

NGUYỄN DŨNG

(GV THCS Bắc Bình 1, Bình Thuận)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/433. Giải phương trình

$$\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{27\sqrt{2}}{8}(x-1)^2\sqrt{x-1}.$$

VŨ HỒNG PHONG

(GV THPT Tiên Du 1, Bắc Ninh)

Bài T7/433. Tứ giác lồi $ABCD$ có diện tích S nội tiếp đường tròn bán kính R và độ dài các cạnh $AB=a, BC=b, CD=c, DA=d, AC=e$. Giả sử tồn tại một đường tròn tiếp xúc với tia đối của các tia BA, DA, CD, CB. Chứng minh các hệ thức

a) $R=\dfrac{Se}{p^2-e^2}$;

b) $a^2+b^2+c^2+d^2+\dfrac{8SR}{e}=2p^2$;

trong đó $2p=a+b+c+d$.

HỒ QUANG VINH

(Hà Nội)

Bài T8/433. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$\alpha(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)-\beta(\cos^3 A+\cos^3 B+\cos^3 C)$$

trong đó A, B, C là độ lớn ba góc của một tam giác nhọn và α, β là hai số dương cho trước.

NGUYỄN SƠN HÀ

(GV THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/433. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy xét các bát giác lồi thỏa mãn: có tất cả các góc bằng nhau, các đỉnh có tọa độ nguyên, tồn tại cạnh song song với trục Ox, trên biên của bát giác có 16 điểm nguyên kể cả đỉnh. Tìm diện tích lớn nhất của bát giác lồi thỏa mãn điều kiện trên.

TRẦN QUỐC TUẤN

(GV THPT chuyên Biên Hòa - Hà Nam)

Bài T10/433. Tìm tất cả các hàm số liên tục $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$(x+y)f(x+y)=xf(x)+yf(y)+2xy,\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

KIỀU ĐÌNH MINH

(GV THPT chuyên

$a_{n+1} = |a_n - 2^{1-n}|, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong Số 2, Bắc Ninh)

Bài T12/433. Cho tam giác ABC vuông tại C và nội tiếp đường tròn (O). Điểm M chạy trên (O) và khác A, B, C; N là điểm đối xứng của M qua AB; P là hình chiếu của N trên AC; MP lại cắt (O) tại Q. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ luôn nằm trên một đường tròn cố định.

TRẦN QUỐC LUẬT

(GV THPT chuyên Hà Tĩnh)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/433. Một quả cầu đồng chất, nhẵn, có khối lượng M nằm trên bàn nằm ngang. Người ta cắt quả cầu thành hai phần bằng nhau bằng một mặt phẳng đứng, sau đó ghép lại bằng sợi dây theo đường tròn lớn nằm ngang.

a) Tính lực căng dây nhỏ nhất. Biết trọng tâm của vật đồng chất hình bán cầu, có bán kính R nằm trên trục đối xứng của vật, cách tâm bán cầu khoảng $\frac{3R}{8}$.

b) Giải bài toán với trường hợp quả cầu được cắt thành bốn phần bằng nhau bằng hai mặt phẳng đứng.

TRẦN KHÁNH HẢI

(Thừa Thiên - Huế)

Bài L2/433. Nguồn điện có suất điện động $\mathscr{E} = 36$V, điện trở trong $r = 30\Omega$ được dùng để thắp sáng các đèn ghi 6V - 3W.

a) Có bao nhiêu cách mắc các đèn đối xứng để chúng sáng bình thường?

b) Trong các cách mắc trên, cách nào có số đèn nhiều nhất? ít nhất?

NGUYỄN VĂN THUẬN

(GV ĐH Kĩ thuật Công nghệ TP.Hồ Chí Minh)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/433. (For 6th grade) Find all positive integers x, y, z such that $x^2 + y^3 + z^4 = 90$.

T2/433. (For 7th grade) Let ABC be an equilateral triangle whose altitudes are AD, BE, and CF. Suppose M is an arbitrary point inside triangle ABC. I, K, L are the perpendicular feet from M to AD, BE, CF. Prove that the sum $AI + BK + CL$ does not depend on the position of M.

T3/433. The rational numbers a, b satisfy the identity $a^{2013} + b^{2013} = 2a^{1006}b^{1006}$. Prove that the equation $x^2 + 2x + ab = 0$ has two rational solutions.

T4/433. Find the minimum value of the expression

$P = (x^4 + y^4 + z^4)\left(\frac{1}{x^4} + \frac{1}{y^4} + \frac{1}{z^4}\right)$, where x, y, z are positive real numbers that satisfy $x + y \le z$.

T5/433. Let AH be the altitude from A of right triangle ABC, right angle at A. Point D on the opposite ray of HA such that $HA = 2HD$. Point E is the reflection of B through D; I is the midpoint of AC; DI and EI meet BC at M and K respectively. Prove that $\widehat{MDK} = \widehat{MCD}$.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/433. Solve the equation

$$\sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{27\sqrt{2}}{8}(x-1)^2\sqrt{x-1}.$$

T7/433. A convex quadrilateral $ABCD$ with area S is inscribed in a circle whose radius is R and $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = e$. If there exists a circle touching all the opposite rays of the rays BA, DA, CD, and CB, prove that

a) $R = \frac{S.e}{p^2 - e^2}$;

(Xem tiếp trang 28)

★ Bài T1/429. *Tìm độ dài cạnh hình vuông. Biết rằng nó là số nguyên; diện tích của hình vuông là số nguyên có 4 chữ số, trong đó các chữ số hàng đơn vị, hàng chục và hàng trăm giống nhau.*

Lời giải. Theo giả thiết diện tích hình vuông cạnh x là số (viết trong hệ thập phân) có dạng $\overline{accc}=x^2$ với $a \neq 0$. Chữ số tận cùng c của số chính phương chỉ có thể là 0, 1, 4, 5, 6, 9 (*)

Ta xét chữ số c lẻ hoặc chẵn.

a) Nếu c là chữ số lẻ thì x là số lẻ, nên

$$\overline{accc}=x^2=(2k+1)^2=4k(k+1)+1.$$

Vì $\overline{accc}=100\overline{ac}+\overline{cc}$ nên chỉ cần xét $\overline{cc}=11c=8c+3c$. Số này chia cho 4 phải dư 1 nên c chia cho 4 dư 3, tức là c bằng 3 hoặc 7, nhưng theo (*) điều này không xảy ra.

b) Nếu c là chữ số chẵn thì x là số chẵn nên

$$\overline{accc}=x^2=(2k)^2=4k^2.$$

Từ đó $\overline{cc}=11c$ phải chia hết cho 4, suy ra c bằng 0 hoặc 4 (theo (*) c không thể là 8).

• Với $c=0$ thì $\overline{a000}=10^2.2.5.a=x^2$, nhưng không có chữ số a nào thỏa mãn điều này.

• Với $c=4$ ta có $\overline{a444}=x^2$.

Nếu x chia hết cho 3 thì x^2 chia hết cho 9, suy ra $a+12$ phải chia hết cho 9, do đó $a=6$, nhưng số $6444=6^2.179$ không là số chính phương.

Nếu x không ... dư 1, do đó a chỉ có thể là 1, 4, 7. Các số 4444 và 7444 không là số chính phương, còn lại $1444=38^2$.

Vậy cạnh hình vuông bằng 38 (đơn vị dài). □

➤**Nhận xét.** Nhiều bạn viết dài do thử quá nhiều trường hợp. Các bạn sau có lời giải đúng, gọn:

Phú Thọ: *Nguyễn Dương Hoàng Anh, Trần Minh Hiếu, Nguyễn Quang Đại Dương, Quách Mai Hương, Lê Nguyễn Quỳnh Trang, Nguyễn Phương Thảo A*, 6C, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, *Đỗ Trọng Tấn, Trần Quốc Lập, Bùi Hồng Thái, Nguyễn Hoàng Phi, Đào Mạnh Hùng*, 6A3, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Văn Quyền, Nguyễn Quang Sáng, Nguyễn Hà Anh*, 6A1, *Đỗ Lê Huyền Ngọc*, 6A3, *Trần Đức Huy, Nguyễn Hữu Tùng, Lê Đức Mạnh, Nguyễn Kim Đức, Kim Đình Hợp*, 6A5, THCS Yên Lạc, *Nguyễn Khánh Linh, Nguyễn Vương Huy, Nguyễn Thành Vinh, Nguyễn Tường Vy*, 6A1, THCS và THPT Hai Bà Trưng, TX Phúc Yên; **Nghệ An:** *Phan Đàm Tùng Lâm*, 6A3, THCS Trà Lân, Con Cuông, *Nguyễn Văn Mạnh, Nguyễn Tất Đức, Trịnh Thị Kim Chi, Trần Lê Hiệp, Nguyễn Thu Giang, Nguyễn Thị Như Quỳnh*, 6A *Nguyễn Thùy Dung*, 6B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** *Trần Lê Trà My*, 6C, THCS Xuân Diệu, TTr Nghèn, Can Lộc.

VIỆT HẢI

★ Bài T2/429. *Tìm $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ biết rằng $2a_1=3a_2; 2a_3=3a_4; 5a_4=2a_5; 2a_5=5a_6; 2a_6=3a_7$; $2a_7=3a_1$ và $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=400$.*

Lời giải. Từ $2a_7=3a_1$ suy ra $a_7=\frac{3}{2}a_1$;

$$2a_6=3a_7 \Rightarrow a_6=\frac{3}{2}a_7=\frac{3}{2}.\frac{3}{2}a_1=\frac{9}{4}a_1;$$

$$2a_5=5a_6 \Rightarrow a_5=\frac{5}{2}a_6=\frac{5}{2}.\frac{9}{4}a_1=\frac{45}{8}a_1;$$

$$5a_4=2a_5 \Rightarrow a_4=\frac{2}{5}a_5=\frac{2}{5}.\frac{45}{8}a_1=\frac{9}{4}a_1;$$

$$2a_3=3a_4 \Rightarrow a_3=\frac{3}{2}a_4=\frac{3}{2}.\frac{9}{4}a_1=\frac{27}{8}a_1;$$

$$2a_1=3a_2 \Rightarrow a_2=\frac{2}{3}a_1.$$

Từ các kết quả trên và giả thiết suy ra

$$a_1+\frac{2}{3}a_1+\frac{27}{8}a_1+\frac{9}{4}a_1+\frac{45}{8}a_1+\frac{9}{4}a_1+\frac{3}{2}a_1=400$$

$$\Leftrightarrow\left(1+\frac{2}{3}+\frac{27}{8}+\frac{9}{4}+\frac{45}{8}+\frac{9}{4}+\frac{3}{2}\right)a_1=400$$

$$\Leftrightarrow\frac{50}{3}a_1=400\Leftrightarrow a_1=400.\frac{3}{50}=24.$$ Từ đó

$$a_2=\frac{2}{3}.24=16;\ a_3=\frac{27}{8}.24=81;\ a_4=\frac{9}{4}.24=54;$$

$$a_5=\frac{45}{8}.24=135;\ a_6=\frac{9}{4}.24=54;\ a_7=\frac{3}{2}.24=36.\ \square$$

➢**Nhận xét.** 1) Nhiều bạn tham gia giải và tìm ra kết quả đúng. Ngoài cách giải trên đây, một số bạn còn dùng phương pháp quy đồng mẫu số và áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, cũng tìm ra kết quả như trên.

2) Các bạn sau đây có lời giải ngắn gọn và rõ ràng:

Phú Thọ: *Bùi Ngọc Tâm, Trần Minh Hiếu, Lê Nguyễn Quỳnh Trang, Nguyễn Dương Hoàng Anh*, 6C, THCS Văn Lang, Việt Trì; *Khổng Xuân Bách, Nguyễn Tiến Long*, 7A1, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc**: *Nguyễn Hà Anh*, 6A1, *Phạm Hoàng Ly, Đỗ Thị Thu Phương, Nguyễn Thị Minh Huyền*, 7A1, THCS Yên Lạc; **Hà Nội**: *Đỗ Tiến Anh*, 7A4, THCS Ngô Sỹ Liên, *Tạ Lê Ngọc Sáng*, 6E, THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam; **Nghệ An**: *Nguyễn Văn Mạnh*, 6A, *Nguyễn Thùy Dung*, 6B, *Nguyễn Huy Hoàng*, 7C, *Đặng Quang Thắng*, 7D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Cao Đức Thông*, 7A, *Lê Bá Việt*, 7B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Hà Tĩnh**: *Phan Thị Nhật Lệ*, 6C, *Nguyễn Thị Thu Hiền*, 7D, THCS Xuân Diệu, Can Lộc; **Quảng Ngãi**: *Võ Quang Phú Thời, Phạm Thiên Trang, Nguyễn Thị Hạ Vy, Trương Thị Mai Trâm, Đỗ Thị Thanh Truyền*, 7A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; *Nguyễn Thị Kim Nguyên, Trần Thị Mỹ Ninh, Nguyễn Phan Trà My*, 7A, THCS Nghĩa Mỹ; **TP.Hồ Chí Minh**: *Tô Yên Khanh*, 7/2, THCS Bạch Đằng, Quận 3.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★**Bài T3/429.** *Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn phương trình*

$$x^2(x^2+y^2)=y^{p+1} \quad (*)$$

trong đó p là số nguyên tố.

Lời giải. Đặt $x^2=t$, $t\geq 0$. Khi đó (*) có dạng

$$t^2+y^2t-y^{p+1}=0\Rightarrow\Delta_t=y^4+4y^{p+1}.$$

• Nếu $p=2$ thì $\Delta_t=y^4+4y^3=y^2.y(y+4)$.

$x\in\mathbb{Z}\Rightarrow t\in\mathbb{Z}\Rightarrow\Delta_t$ phải là số chính phương

$$\Rightarrow y(y+4)=a^2\ (a\in\mathbb{Z})\Leftrightarrow y^2+4y-a^2=0$$

$$\Leftrightarrow(y+2-a)(y+2+a)=4.$$

Do $(y+2-a)-(y+2+a)=-2a\,\vdots\,2$ nên $y+2-a$ và $y+2+a$ có cùng tính chẵn lẻ.

Do đó ta có $\left[\begin{array}{l}y+2-a=y+2+a=2\\ y+2-a=y+2+a=-2\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=a=0\\ y=-4;a=0.\end{array}\right.$$

Với $y=0$, thì $t=0$ suy ra $x=0$.

Với $y=-4$ thì $t=-8$ (không thỏa mãn $t\geq 0$).

• Nếu $p\geq 3$, đặt $p=2n+1$, $n\in\mathbb{N}, n\geq 1$. Khi đó $\Delta_t=y^4+4y^{2n+2}=y^4(1+4y^{2n-2})$.

Để Δ_t là số chính phương thì

$$1+4y^{2n-2}=m^2\ (m\in\mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow(m-2y^{n-1})(m+2y^{n-1})=1.$$

Vì $m-2y^{n-1}$ và $m+2y^{n-1}$ cùng tính chẵn lẻ nên

$$\left[\begin{array}{l}m-2y^{n-1}=m+2y^{n-1}=1\\ m-2y^{n-1}=m+2y^{n-1}=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=0;m=1\\ y=0;m=-1.\end{array}\right.$$

Với $y=0$ ta tìm được $x=0$. Vậy cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình (*) là $(0; 0)$. $\square$

➢**Nhận xét.** 1) Đây là bài toán khá hay về phương trình nghiệm nguyên, điểm mấu chốt của bài toán là biết vận dụng tính chất của lũy thừa bậc chẵn.

2) Các bạn sau có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Nguyễn Thị Hiền, Hoàng Thị Lan, Tô Minh Ngọc, Nguyễn Thị Tú Linh, Nguyễn Hữu Huy*, 8A1, THCS Yên Lạc; **Phú Thọ**: *Nguyễn Đức Thuận*, 8A3, THCS Lâm Thao.

TRẦN HỮU NAM

★**Bài T4/429.** *Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=xy+yz+zx-xyz$, trong đó x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=3$.*

Lời giải. Do vai trò của x, y, z là như nhau, nên không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $x\geq y\geq z\geq 0$. Khi đó

$$3=x^2+t^2+z^2\geq 3z^2 \Rightarrow z^2\leq 1 \Rightarrow 0\leq z\leq 1.$$

Suy ra $P=xy(1-z)+yz+zx\geq 0.$

$P=0$ chẳng hạn khi $x=\sqrt{3}; y=z=0.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 0.

Mặt khác $P=xy(1-z)+z(y+x)$. Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số không âm, ta có

$$xy\leq \frac{x^2+y^2}{2}=\frac{3-z^2}{2};$$

$$x+y=x.1+y.1\leq \frac{x^2+1}{2}+\frac{y^2+1}{2}=\frac{5-z^2}{2}.$$

Do đó $P\leq \dfrac{(3-z^2)(1-z)}{2}+\dfrac{z(5-z^2)}{2}$

$$=\frac{3-z^2+2z}{2}=\frac{4-(z-1)^2}{2}\leq 2.$$

$P=2$ chẳng hạn khi $x=y=z=1$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 2. ❐

➤**Nhận xét.** 1) Việc tìm giá trị lớn nhất của P có thể làm cách khác như sau: Trong ba số $x-1, y-1$ và $z-1$ luôn có hai số không âm hoặc không dương nên tích của hai số đó không âm. Chẳng hạn $(x-1)(y-1)\geq 0$, mà $z\geq 0$ nên $(x-1)(y-1)z\geq 0 \Leftrightarrow xyz\geq xz+yz-z.$

Suy ra $P\leq xy+yz+zx-(xz+yz-z)=xy+z$

$$\leq \frac{x^2+y^2}{2}+\frac{z^2+1}{2}=\frac{x^2+y^2+z^2+1}{2}=2.$$

$P=2$ tại $x=y=z=1$.

2) Một số bạn đã sử dụng BĐT Cauchy cho ba số hoặc BĐT Schur (mà không chứng minh) là vượt quá chương trình của cấp THCS.

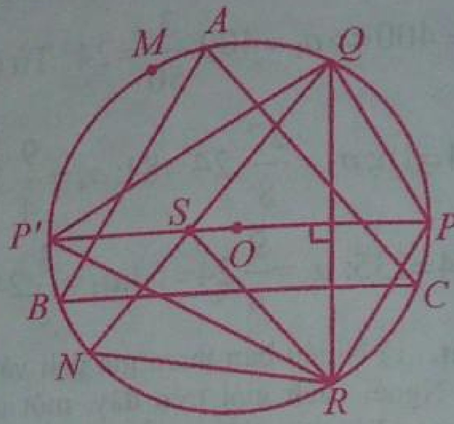
Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt:

Phú Thọ: *Nguyễn Đức Thuận*, 8A3, *Quản Đức Bình*, 8A2, THCS Lâm Thao; **Hà Nam**: *Hoàng Đức Mạnh*, 9A, THCS Đinh Công Tráng, Thanh Liêm; **Nghệ An**: *Nguyễn Thùy Dung*, 6B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Thanh Hóa**: *Lê Quang Dũng*, 8D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; **Quảng Ngãi**: *Trần Thị Mỹ Ninh*, 9A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa; **TP.Hồ Chí Minh**: *Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy*, 9A1, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, Quận 1.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★**Bài T5/429.** *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có các góc $\widehat{BAC}=70^\circ$ và $\widehat{ACB}=50^\circ$. Trên (O) ta lấy năm điểm M, N, P, Q và R sao cho $PA=AB=BR$, $QB=BC=CM$ và $NC=CA=AN$. Gọi S là giao điểm của dây cung NQ và đường kính PP' của (O). Chứng minh rằng $\Delta NRS \backsim \Delta NQR$.*

Lời giải. (Theo bạn *Phan Đức Nhật Minh*, 9A, THCS TTr Sông Thao, Cẩm Khê, **Phú Thọ**).



Trong lời giải này, khi viết sđ $\overset{\frown}{XY}$ được hiểu là sđ $\overset{\frown}{XY}<180^\circ$.

Từ giả thiết $\widehat{BAC}=70^\circ, \widehat{ACB}=50^\circ$ ta có sđ $\overset{\frown}{BC}=140^\circ$; sđ $\overset{\frown}{AB}=100^\circ$; sđ $\overset{\frown}{AC}=120^\circ$.

Do $PA=AB=BR$ nên sđ $\overset{\frown}{PA}$ = sđ $\overset{\frown}{AB}$ = sđ $\overset{\frown}{BR}=100^\circ$; từ $QB=BC=CM$, suy ra sđ $\overset{\frown}{QB}$ = sđ $\overset{\frown}{BC}$ = sđ $\overset{\frown}{CM}=140^\circ$; từ $NC=CA=AN$, suy ra sđ $\overset{\frown}{NC}$ = sđ $\overset{\frown}{CA}$ = sđ $\overset{\frown}{AN}=120^\circ$.

Do đó sđ $\overset{\frown}{CR}$ = sđ $\overset{\frown}{BC}$ − sđ $\overset{\frown}{BR}=40^\circ$, suy ra sđ $\overset{\frown}{NR}$ = sđ $\overset{\frown}{CN}$ − sđ $\overset{\frown}{CR}=80^\circ$.

sđ $\overset{\frown}{QR}=360^\circ$ − sđ $\overset{\frown}{QB}$ − sđ $\overset{\frown}{BR}=120^\circ$.

sđ $\overset{\frown}{PR}=360^\circ$ − sđ $\overset{\frown}{AP}$ − sđ $\overset{\frown}{AB}$ − sđ $\overset{\frown}{BR}=60^\circ$.

Suy ra sđ $\overset{\frown}{PQ}$ = sđ $\overset{\frown}{QR}$ − sđ $\overset{\frown}{PR}=60^\circ$.

Vì vậy $\overset{\frown}{PQ}=\overset{\frown}{PR}\Rightarrow PQ=PR$. Từ đó dễ thấy $QR\perp PP'$, suy ra $SQ=SR$, hay tam giác SQR cân tại S. Vậy nên

$$\widehat{QSR}=180^\circ-2\widehat{NQR}=180^\circ-\text{sđ}\,\overset{\frown}{NR}=100^\circ.$$

Mặt khác $\widehat{QSR}=\widehat{SNR}+\widehat{SRN}=\dfrac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{QR}+\widehat{SRN}$ $=60^\circ+\widehat{SRN}\Rightarrow \widehat{SRN}=40^\circ$.

Suy ra $\widehat{SRN}=\widehat{RQN}=40^\circ$.

Từ đó $\Delta NRS \backsim \Delta NQR$ (g.g). ☐

➢Nhận xét. Số lời giải gửi về Toà soạn không nhiều. Ngoài bạn *Minh*, các bạn sau cũng có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Nguyễn Hữu Huy*, 8A1, THCS Yên Lạc; **Phú Thọ**: *Nguyễn Đức Thuận*, 8A3, THCS Lâm Thao; **Thanh Hóa**: *Nguyễn Hữu Hoàng*, 8B, THCS Trần Phú, Nông Cống; **Nghệ An**: *Phạm Hồng Quân*, 9A1, THCS Nghi Hương, TX Cửa Lò, *Ngô Thị Trà*, *Phạm Thị Thùy Trang*, 9A, THCS Hòa Hiếu II, TX.Thái Hòa.

HỒ QUANG VINH

★Bài T6/429. *Giải phương trình*

$$x^3-3x=\sqrt{x+2}.$$

Lời giải. Điều kiện $x\geq -2$.

Nếu $x>2$ ta có $x^3-3x=x+x(x^2-4)$

$$=x+x(x-2)(x+2)>x>\sqrt{x+2}$$

nên khi $x>2$ phương trình đã cho vô nghiệm.

Vậy $-2\leq x\leq 2$. Đặt $x=2\cos\alpha$, với $0\leq\alpha\leq\pi$. Khi đó phương trình đã cho trở thành

$$8\cos^3\alpha-6\cos\alpha=\sqrt{2+2\cos\alpha}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 3\alpha=2\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| \qquad (*)$$

Do $0\leq\alpha\leq\pi$, nên $\cos\frac{\alpha}{2}\geq 0$, từ (*) ta suy ra

$$\cos 3\alpha=\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3\alpha=\dfrac{\alpha}{2}+k2\pi\\ 3\alpha=-\dfrac{\alpha}{2}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\alpha=\dfrac{k4\pi}{5}\\ \alpha=\dfrac{k4\pi}{7}\end{array}\right. \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Do $0\leq\alpha\leq\pi$, nên từ trên ta suy ra $\alpha=0;\alpha=\frac{4\pi}{5};\alpha=\frac{4\pi}{7}$. Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là

$$x=2;x=2\cos\frac{4\pi}{5};x=2\cos\frac{4\pi}{7}.\ ☐$$

➢Nhận xét. Các lời giải đúng phần lớn đều đi theo hướng tương tự như trên. Một số bạn đưa PT đã cho về dạng thích hợp để nhân với biểu thức liên hợp hoặc dùng kiến thức về hàm số để khẳng định PT không có nghiệm nếu $x>2$. Các bạn chú ý giải mỗi bài vào một tờ hoặc một số tờ giấy riêng, ghi tên và địa chỉ lên mỗi bài giải. Tòa soạn chỉ chấm các bài giải của cá nhân.

Tuyên dương một số các bạn có lời giải tốt:

Hà Nam: *Đỗ Đăng Dương*, 9A, THCS Đinh Công Tráng, Thanh Liêm; *Trương Trung Kiên*, THPT chuyên Biên Hòa; **Hoà Bình**: *Đỗ Quang Vinh*; *Nguyễn Sỹ An*; *Đinh Chung Mừng*, 10 Toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ; **Phú Thọ**: *Bùi Tuấn Linh*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hùng Vương; **Nam Định**: *Nguyễn Hằng*, 11B1, THPT A Hải Hậu; *Nguyễn Văn Đạo*, 10 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thái Bình**: *Hạ Thị Xuân*, 10 Tin, THPT chuyên Thái Bình; **Thanh Hóa**: *Tạ Đình Quyền*, 10A7, THPT chuyên Lương Đắc Bằng; **Nghệ An**: *Đặng Đình Lâm*, 10A1, THPT chuyên ĐH Vinh, *Hồ Thị Thúy Nga*, 11A1, THPT Thái Hòa; **Hà Tĩnh**: *Nguyễn Thị Thùy Linh*, 10A1, THPT Hương Khê; **Quảng Bình**: *Trương Quang Cảnh*, 10 Toán, THPT chuyên Quảng Bình; **Quảng Ngãi**: *Nguyễn Quang Tính*, 10 Toán 2, THPT chuyên Lê Khiết; **Phú Yên**: *Đoàn Phú Thiện*, 10A1, THPT Lê Hồng Phong; **Đồng Tháp**: *Nguyễn Thành Đạt*, 11A8, THPT TP.Cao Lãnh, *Nguyễn Thành Thi*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Bến Tre**: *Từ Nhật Quang*, 10 Toán, THPT chuyên Bến Tre; **Tiền Giang**: *Nguyễn Minh Thành*, 10 Toán, THPT chuyên Tiền Giang; **Cà Mau**: *Lưu Giang Nam*; *Lê Minh Phương*, 11T1; *Lý Thành*, 12T1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển.

TẠ NGỌC TRÍ

★Bài T7/429. *Tính các góc của tam giác ABC sao cho biểu thức*

$$T=-3\tan\frac{C}{2}+4\left(\sin^2 A-\sin^2 B\right)$$

đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải. Từ $2\sin^2 A=1-\cos 2A$;

$$2\sin^2 B=1-\cos 2B$$

và lưu ý rằng $\sin(A+B)=\sin C>0$; $\sin(A-B)\leq 1$;

ta có $4\left(\sin^2 A-\sin^2 B\right)=2\left(\cos 2B-\cos 2A\right)$

$$=4\sin(A+B)\sin(A-B)$$

$$=4\sin C\sin(A-B)\leq 4\sin C.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\sin(A-B)=1$. Do đó

$$T=-3\tan\frac{C}{2}+4\left(\sin^2 A-\sin^2 B\right)$$

$$\leq -3\tan\frac{C}{2}+4\sin C \qquad (1$$

Đặt $t=\tan\dfrac{C}{2}$, ta có $t>0$; $\sin C=\dfrac{2t}{1+t^2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $T\le -3t+\dfrac{8t}{1+t^2}$.

Xét hàm số $f(t)=-3t+\dfrac{8t}{1+t^2},\ t\in(0;+\infty)$;

$$f'(t)=-3+\frac{8(1-t^2)}{(1+t^2)^2}=\frac{(1-3t^2)(t^2+5)}{(1+t^2)^2};$$

$f'(t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $(t>0)$. Ta có

t	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\infty$
$f'(t)$	+		−
$f(t)$	$0\ \nearrow$	$\sqrt{3}$	$\searrow\ -\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $T\le\sqrt{3}$.

$T=\sqrt{3}\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, do đó

$$\begin{cases}\sin(A-B)=1\\ \tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A-B=90^\circ\\ \dfrac{C}{2}=30^\circ\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=105^\circ\\ B=15^\circ\\ C=60^\circ.\end{cases}$$

Vậy $\max T=\sqrt{3}$, khi $A=105^\circ; B=15^\circ; C=60^\circ$. ❒

➤**Nhận xét.** 1) Hầu hết các bạn giải bài toán theo cách trên. Một số bạn đến bất đẳng thức (1), đã xét hàm số $f(C)=-3\tan\dfrac{C}{2}+4\sin C$. Làm như vậy dài và phức tạp hơn. Có thể chứng minh bất đẳng thức $-3t+\dfrac{8t}{1+t^2}\le\sqrt{3}$ $(t>0)$ bằng các phép biến đổi tương đương. Tuy nhiên, việc đưa ra bất đẳng thức này là không tự nhiên.

2) Các bạn sau đây có bài giải tốt :

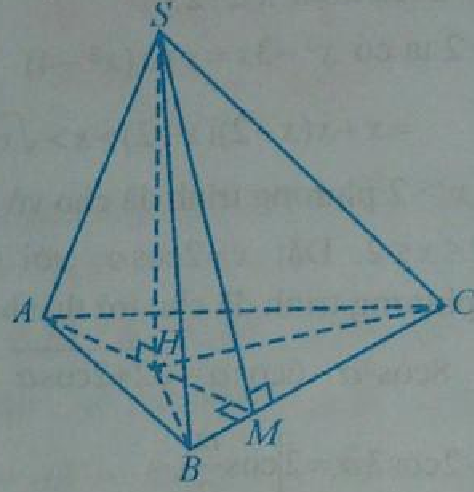
Hà Nội: *Kiều Hoàng Anh*, 11A1, THPT Quốc Oai; **Thanh Hóa**: *Lê Thị Quỳnh*, 11C1, THPT Hoằng Hóa IV; **Nghệ An**: *Phạm Đức Toàn*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Gia Lai**: *Vũ Văn Quý*, 11A1, THPT Nguyễn Chí Thanh, Pleiku; **Cà Mau**: *Lưu Giang Nam*, 11T1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển; **Hưng Yên**: *Nguyễn Thị Việt Hà*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thái Nguyên**: *Nguyễn Văn Tuyến*, $11A_{11}K25$, THPT Đồng Hỷ, TP Thái Nguyên.

NGUYỄN ANH DŨNG

★**Bài T8/429.** *Cho hình chóp S.ABC có SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau, SA=a, SB=b, SC = c. Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng ABC. Chứng minh rằng*

$$aS_{HBC}+bS_{HAC}+cS_{HAB}\le\frac{abc\sqrt{3}}{2}.$$

Lời giải. Gọi M là giao điểm của AH với BC.



Ta có $SH\perp(ABC)$ nên $SH\perp BC$, $SA\perp(SBC)$ nên $SA\perp BC$. Suy ra $BC\perp(SAH)$, dẫn đến $BC\perp AM$, $BC\perp SM$. Khi đó, theo định lí hình chiếu, $\dfrac{S_{HBC}}{S_{SBC}}=\cos\widehat{SMH}=\sin\widehat{SAH}=\dfrac{SH}{SA}$.

Tương tự có $\dfrac{S_{HCA}}{S_{SCA}}=\dfrac{SH}{SB}$; $\dfrac{S_{HAB}}{S_{SAB}}=\dfrac{SH}{SC}$.

Suy ra $aS_{HBC}+bS_{HAC}+cS_{HAB}$

$$=\frac{abc}{2}\left(\frac{SH}{SA}+\frac{SH}{SB}+\frac{SH}{SC}\right)\qquad(1)$$

Mặt khác, theo BĐT Bunyakovsky có

$$\left(\frac{SH}{SA}+\frac{SH}{SB}+\frac{SH}{SC}\right)^2\le3\left(\frac{SH^2}{SA^2}+\frac{SH^2}{SB^2}+\frac{SH^2}{SC^2}\right)=3.$$

Suy ra $\dfrac{SH}{SA}+\dfrac{SH}{SB}+\dfrac{SH}{SC}\le\sqrt{3}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. ❒

➤**Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải tốt:

Thái Bình: *Nguyễn Hải Linh Chi*, *Nguyễn Đình An*, 11 Toán 1, THPT chuyên Thái Bình; **Hà Nội**: *Kiều Hoàng Anh*, 11A1, THPT Quốc Oai; **Thanh Hoá**: *Nguyễn Thanh Bình*, 11C1, THPT Hoằng Hoá; **Nghệ An**: *Nguyễn Hồng Quân*, 11T3, THPT Hà Huy Tập, TP. Vinh; *Lê Hồng Đức*, *Nguyễn Văn Sơn*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Long An**: *Chu Thị Thu Hiền*, 10T, THPT chuyên Long An; **Bình Định**: *Nguyễn Văn Hải*, 11B, THPT Tây Sơn.

NGUYỄN THANH HỒNG

★Bài T9/429. *Cho p là số nguyên tố lẻ và hai số nguyên dương x, y thay đổi thỏa mãn* $\sqrt{x}+\sqrt{y}\le\sqrt{2p}$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $A=\sqrt{2p}-\sqrt{x}-\sqrt{y}$.

Lời giải. (Theo bạn *Nguyễn Hải Linh Chi*, 11 Toán 1, THPT chuyên Thái Bình, **Thái Bình**).

Từ điều kiện suy ra $A\ge 0$.

Nếu $A=0$ thì $y=(\sqrt{2p}-\sqrt{x})^2=2p+x-2\sqrt{2px}$ nên $2px$ là số chính phương. Ta có $2px=k^2$ $(k\in\mathbb{N})\Rightarrow k\,\vdots\, p,\ k\,\vdots\,2$ tức là $k=2pt$ $(t\in\mathbb{N})$. Suy ra $x=2pt^2\Rightarrow x\ge 2p$. Điều này không xảy ra vì $x<2p$.

Vậy $A>0$, suy ra $\sqrt{x}+\sqrt{y}<\sqrt{2p}$.

Gọi z là số nguyên dương nhỏ nhất lớn hơn $2\sqrt{xy}$ (tức là $z=[2\sqrt{xy}]+1$). Ta có

- $z^2>4xy\Rightarrow z^2-1\ge 4xy\Rightarrow 2\sqrt{xy}\le\sqrt{z^2-1}$ (1)
- $2\sqrt{xy}+x+y=(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2<2p\Rightarrow x+y<2p-2\sqrt{xy}$ $<2p-z$ (do định nghĩa của z) (2)
- $4\sqrt{xy}\le(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2<2p\Rightarrow 2\sqrt{xy}<p\Rightarrow z\le p$ (3) (do định nghĩa của z).

Từ (1), (2) và (3) ta có

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=x+y+2\sqrt{xy}\le 2p-z+\sqrt{z^2-1}$$
$$=2p-(z-\sqrt{z^2-1});$$

$$2p-\frac{1}{z+\sqrt{z^2-1}}\le 2p-\frac{1}{p+\sqrt{p^2-1}}=2p-(p-\sqrt{p^2-1})$$

$$=p+\sqrt{p^2-1}=\left(\sqrt{\frac{p-1}{2}}+\sqrt{\frac{p+1}{2}}\right)^2$$

$$\Rightarrow\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{\frac{p-1}{2}}+\sqrt{\frac{p+1}{2}}.$$

Do đó $A\ge\sqrt{2p}-\sqrt{\frac{p-1}{2}}-\sqrt{\frac{p+1}{2}}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}z^2-1=4xy\\ z=2p-x-y\\ z=p\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4xy=p^2-1\\ x+y=p\\ z=p\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{p-1}{2}\\ y=\dfrac{p+1}{2}.\end{cases}$$

Vậy $\min A=\sqrt{2p}-\sqrt{\frac{p-1}{2}}-\sqrt{\frac{p+1}{2}}$. □

➤**Nhận xét.** Ngoài bạn *Chi*, tuyên dương các bạn có lời giải đúng:

Hưng Yên: *Nguyễn Trung Hiếu*, *Nguyễn Thị Việt Hà*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thái Bình**: *Trịnh Thị Thùy Dương*, 11 Toán 1, THPT chuyên Thái Bình; **Nghệ An**: *Nguyễn Văn Sơn*, 11, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP.Vinh; **Bình Định**: *Huỳnh Mạnh Diễn*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Thanh Hóa**: *Lê Văn Hưng*, 11T, THPT chuyên Lam Sơn.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★Bài T10/429. *Tồn tại hay không hàm số* $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ *thỏa mãn điều kiện*

$$f(mf(n))=n+f(2013m),\ \forall m,n\in\mathbb{N}^*\ (1)?$$

Lời giải. Trước hết, ta chứng minh nếu f thỏa mãn (1) thì f là đơn ánh trong $\mathbb{N}^*$. Thật vậy, nếu $f(n_1)=f(n_2)$ với $n_1,n_2\in\mathbb{N}^*$ thì từ (1) ta có

$f(mf(n_1))=f(mf(n_2)),\forall m\in\mathbb{N}^*$ hay

$n_1+f(2013m)=n_2+f(2013m)\Leftrightarrow n_1=n_2$.

Trong (1) cho $m=2013$ ta được

$$f(2013f(n))=n+f(2013^2)\text{ với }\forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Tiếp theo, trong (1) thay m bởi $f(m)$ ta nhận được

$$f(f(m)f(n))=n+f(2013f(m))$$
$$=n+m+f(2013^2)=f(2013f(m+n)),\forall m\in\mathbb{N}^*.$$

Từ tính đơn ánh của f suy ra

$$f(m)f(n)=2013f(m+n),\ \forall m,n\in\mathbb{N}^*.$$

Do đó $f(1)f(n)=2013f(n+1)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ hay

$$f(n+1)=\frac{f(1)}{2013}f(n)=...=\left(\frac{f(1)}{2013}\right)^n f(1),\ n\in\mathbb{N}^*.$$

Suy ra $f(n)=2013a^n$, trong đó $a=\frac{f(1)}{2013}$.

Thử lại, ta thấy hàm số dạng này không thỏa mãn (1).

Vậy không tồn tại hàm số $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện (1).□

➢**Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải đây có lời giải đúng:

Hưng Yên: *Nguyễn Trung Hiếu, Nguyễn Thị Việt Hà*, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Nội**: *Nguyễn Đình Thịnh*, 11A1, THPT Quốc Oai; **Thái Bình**: *Nguyễn Hải Linh Chi, Nguyễn Đình An, Trịnh Thị Thùy Dương*, 11T1, THPT chuyên Thái Bình; **Nam Định**: *Nguyễn Văn Đạo, Vũ Hoàng Diệu*, 11T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thái Nguyên**: *Tạ Văn Tuấn*, 11A1, THPT Lương Phú; **Hòa Bình**: *Lê Đức Việt*, 11T, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ; **Thanh Hóa**: *Lê Văn Hưng, Trần Thị Mỹ Linh*, 11T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An**: *Nguyễn Văn Sơn*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Hà Tĩnh**: *Nguyễn Thị Việt Hà*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Đăk Lăk**: *Nguyễn Tiến Điệp*, 10T1, THPT Ngô Gia Tự; **Phú Yên**: *Bùi Lê Ngọc Mĩn*, 11S3, THPT Dân lập Duy Tân; **Bà Rịa-Vũng Tàu**: *Tô Thái Ngọc Anh*, 10T1, *Đỗ Nguyễn Hoàng Anh*, 11T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Cà Mau**: *Lưu Giang Nam*, 11T1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển.

NGUYỄN VĂN MẬU

★**Bài T11/429.** *Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn* $\max\{a,b,c\}\le 4\min\{a,b,c\}$. *Chứng minh rằng*

$$2(a+b+c)(ab+bc+ca)^2 \ge 9abc(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca).$$

Lời giải. Ta có

$$2(a+b+c)(ab+bc+ca)^2-9abc(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$$
$$=2(ab+bc+ca)((a+b+c)(ab+bc+ca)-9abc)$$
$$-9abc(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca))$$
$$=2(ab+bc+ca)(a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2)$$
$$-\frac{9}{2}abc((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2)$$
$$=\frac{1}{2}(S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2),$$

trong đó $S_a=4(ab+bc+ca)a-9abc$;

$$S_b=4(ab+bc+ca)b-9abc;$$
$$S_c=4(ab+bc+ca)c-9abc.$$

Do vai trò của a, b, c trong bài toán như nhau, không mất tính tổng quát ta giả sử $c\le b\le a$. Theo giả thiết thì $a\le 4c$.

Ta có $S_c\le S_b\le S_a,\ S_b=b(c(4b-a)+4a(b-c))\ge 0$

và $S_b+S_c=4ab^2+4b^2c+4bc^2+4c^2a-10abc$

$$=4a(b-c)^2+2bc(2b+2c-a)\ge 0.$$

Bởi vậy $S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2$

$$=S_a(b-c)^2+S_b((a-b)+(b-c))^2+S_c(a-b)^2$$
$$=(S_a+S_b)(b-c)^2+2S_b(a-b)(b-c)+(S_b+S_c)(a-b)^2\ge 0.$$

Bất đẳng thức đã cho được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi hoặc $a=b=c$ hoặc $b=c=\frac{a}{4}$ và các hoán vị. □

➢**Nhận xét.** Đây là bài toán bất đẳng thức hay có nhiều biến đổi theo giả thiết $a\le 4c$. Các bạn sau có lời giải tốt:

Hưng Yên: *Nguyễn Trung Hiếu*, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thái Nguyên**: *Nguyễn Văn Tuyến*, $11A_{11}$ K25, THPT Đồng Hỷ; **Thái Bình**: *Nguyễn Hải Linh Chi, Trịnh Thị Thùy Dương*, 11T1, THPT chuyên Thái Bình; **Nghệ An**: *Phạm Trung Dũng*, 10A1, THPT chuyên ĐH Vinh; **Đà Nẵng**: *Nguyễn Ngọc Bảo*, 10A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★**Bài T12/429.** *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O; I là tâm đường tròn nội tiếp. AI, BI, CI theo thứ tự lại cắt (O) tại* A_1, B_1, C_1. A_1C_1, A_1B_1 *theo thứ tự cắt BC tại M, N.* B_1A_1, B_1C_1 *theo thứ tự cắt CA tại P, Q.* C_1B_1, C_1A_1 *theo thứ tự cắt AB tại R, S.*

Chứng minh rằng $S_{MNPQRS}\le\frac{2}{3}S_{A_1B_1C_1}$.

Lời giải. Ta thấy bài trên là trường hợp đặc biệt của bài toán sau.

Bài T12'. *Cho tam giác ABC và điểm* $I=\left[\frac{A}{\alpha},\frac{B}{\beta},\frac{C}{\gamma}\right]$ $(0<\alpha,\beta,\gamma<\frac{1}{2};\sum\alpha=1)$.

Các cặp điểm M, N; P, Q; R, S theo thứ tự thuộc các cạnh BC, CA, AB sao cho SP, NR, QM cùng đi qua I và theo thứ tự song song với BC, CA, AB. Các đường thẳng SM, NP, QR theo thứ tự cắt các đường thẳng NP, QR, SM tại A_1, B_1, C_1. Chứng minh rằng

$$S_{MNPQRS} \le \frac{2}{3} S_{A_1B_1C_1}.$$

Chú ý. Kí hiệu $\left[\frac{A_1}{\alpha_1}, \frac{A_2}{\alpha_2}, ..., \frac{A_n}{\alpha_2}\right]$ là tâm tỉ cự của hệ điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ với các trọng lượng tương ứng là $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ (Bạn đọc xem thêm bài *Các thuật toán biến đổi tâm tỉ cự trong hình học phẳng*, TH&TT số 403 (1/2011) và số 404 (2/2011)).

Để giải bài **T12'**, ta cần có hai bổ đề.

Bổ đề 1. Cho tam giác ABC và điểm $I = \left[\frac{A}{\alpha}, \frac{B}{\beta}, \frac{C}{\gamma}\right]$ $(\sum\alpha = 1)$. $X = AI \cap BC$. Khi đó $\frac{\overline{IX}}{\overline{IA}} = -\frac{\alpha}{1-\alpha}$; $\frac{\overline{XI}}{\overline{XA}} = \alpha$.

Chứng minh. Qua phép chiếu song song phương BC xuống đường thẳng AI, ta có

$$I = \left[\frac{A}{\alpha}, \frac{X}{\beta}, \frac{X}{\gamma}\right] = \left[\frac{A}{\alpha}, \frac{X}{\beta+\gamma}\right] = \left[\frac{A}{\alpha}, \frac{X}{1-\alpha}\right].$$

Do đó $\frac{\overline{IX}}{\overline{IA}} = \frac{\alpha}{1-\alpha}; \frac{\overline{XI}}{\overline{XA}} = \frac{-\overline{IX}}{\overline{IA}-\overline{IX}} = \frac{\alpha}{1-\alpha+\alpha} = \alpha.$

Bổ đề 2. Nếu $0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{1}{2}; \sum\alpha = 1$ thì

$$\sum\frac{\alpha^3}{1-2\alpha} \ge \frac{1}{2}\left(1 - \sum\beta\gamma\right).$$

Chứng minh. Theo BĐT Cauchy-Schwarz và BĐT Cauchy, có

$$\sum\frac{\alpha^3}{1-2\alpha} = \frac{\left(\sum\alpha - 2\alpha^2\right)\left(\sum\frac{\alpha^4}{\alpha-2\alpha^2}\right)}{\sum\alpha - 2\sum\alpha^2}$$

$$\ge \frac{\left(\sum\alpha^2\right)^2}{\sum\alpha - 2\sum\alpha^2} = \frac{\left(\sum\alpha^2\right)^2}{1-2\sum\alpha^2}$$

$$= \frac{\left(\sum\alpha^2\right)^2}{1-2\sum\alpha^2} + \left(1-2\sum\alpha^2\right) - \left(1-2\sum\alpha^2\right)$$

$$= 2\sqrt{\frac{\left(\sum\alpha^2\right)^2}{1-2\sum\alpha^2}.\left(1-2\sum\alpha^2\right)} - \left(1-2\sum\alpha^2\right) = 4\sum\alpha^2 - 1$$

$$= \frac{1}{2}\left(8\sum\alpha^2 - 2\right) = \frac{1}{2}\left(8\sum\alpha^2 - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\sum\alpha\right)^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{15}{2}\sum\alpha^2 - \frac{3}{2} - \sum\beta\gamma\right) \ge \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}\left(\sum\alpha\right)^2 - \frac{3}{2} - \sum\beta\gamma\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \sum\beta\gamma\right).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\alpha = \beta = \gamma$.

Trở lại giải bài toán **T12'**.

Không mất tính tổng quát giả sử tam giác ABC có hướng dương. Đặt $X = AI \cap BC$.

Vì $SI \,//\, MX$ nên theo định lí Thales

$$\frac{\overline{MA_1}}{\overline{MS}} = \frac{\overline{XA_1}}{\overline{XI}} \quad (1)$$

Vì các tam giác ASP và IMN có các cạnh tương ứng song song và $A_1 = SM \cap PN$, nên phép vị tự tâm A_1 tỉ số $\frac{\overline{MN}}{\overline{SP}} = \frac{\alpha}{\beta+\gamma} = \frac{\alpha}{1-\alpha}$ biến A thành I. Theo Bổ đề 1, suy ra

$$\frac{\overline{A_1I}}{\overline{A_1A}} = \frac{\alpha}{1-\alpha} = -\frac{\overline{IX}}{\overline{IA}} = \frac{\overline{IX}}{\overline{AI}}.$$

Do đó $\frac{\overline{A_1X}}{\overline{A_1I}} = \frac{\overline{A_1I}+\overline{IX}}{\overline{A_1A}+\overline{AI}} = \frac{\alpha}{1-\alpha}$. Suy ra

$$\frac{\overline{XA_1}}{\overline{XI}} = -\frac{\overline{A_1X}}{\overline{XI}} = -\frac{\overline{A_1X}}{\overline{A_1I}-\overline{A_1X}} = -\frac{\alpha}{1-2\alpha} \quad (2)$$

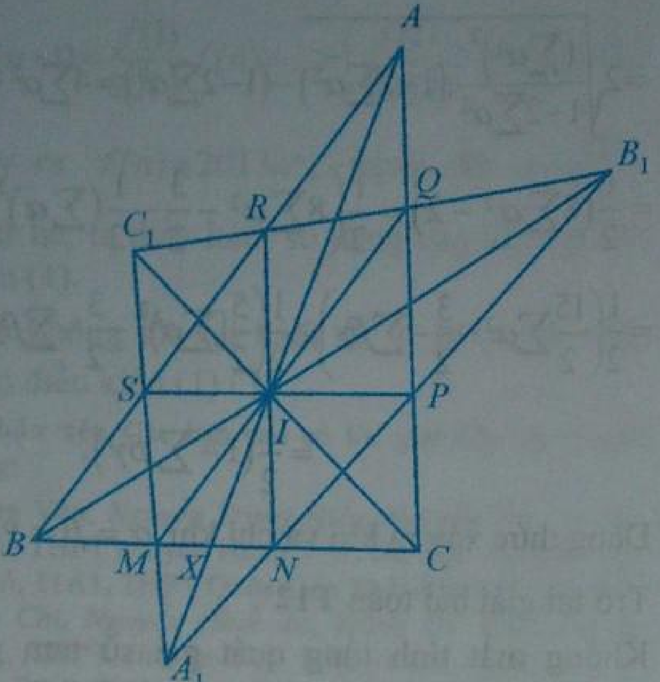
Từ (1) và (2) suy ra $\overline{MA_1} = -\frac{\alpha}{1-2\alpha}.\overline{MS}$ (3)

Vì $\alpha < \frac{1}{2}$ nên $-\frac{\alpha}{1-2\alpha} < 0$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra A_1 thuộc tia đối của tia MS. Tương tự C_1 thuộc tia đối của tia SM.

Vậy S, M thuộc đoạn A_1C_1.

Tương tự N, P thuộc đoạn A_1B_1 và Q, R thuộc đoạn B_1C_1. Vậy lục giác $MNPQRS$ nằm trong tam giác $A_1B_1C_1$ (5)



Tương tự với (3), ta có $\overline{NA_1} = -\dfrac{\alpha}{1-2\alpha}.\overline{NP}$ (6)

Từ (3) và (6), theo định lí Thales, chú ý đến Bổ đề 1, suy ra

$$\begin{cases} \overrightarrow{MA_1} = \dfrac{\alpha}{1-2\alpha}.\left(\overrightarrow{BS} - \overrightarrow{BM}\right) = \dfrac{\alpha}{1-2\alpha}.\left(\alpha\overrightarrow{BA} - \gamma\overrightarrow{BC}\right) \\ \overrightarrow{NA_1} = \dfrac{\alpha}{1-2\alpha}.\left(\overrightarrow{CP} - \overrightarrow{CN}\right) = \dfrac{\alpha}{1-2\alpha}.\left(\alpha\overrightarrow{CA} - \beta\overrightarrow{CB}\right). \end{cases}$$

Kết hợp với tam giác A_1NM có hướng dương, ta có $S_{A_1NM} = S[A_1NM]$

$$= \frac{1}{2}.\frac{\alpha^2}{(1-2\alpha)^2}\left(\alpha\overrightarrow{CA} - \beta\overrightarrow{CB}\right) \wedge \left(\alpha\overrightarrow{BA} - \gamma\overrightarrow{BC}\right)$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{\alpha^2}{(1-2\alpha)^2}\left(\alpha^2\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{BA} - \alpha\beta\overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{BA} - \alpha\gamma\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{BC}\right)$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{\alpha^2}{(1-2\alpha)^2}\left(-\alpha^2\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} + \alpha\beta\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA} + \alpha\gamma\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB}\right)$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{\alpha^3}{(1-2\alpha)^2}(-\alpha + \beta + \gamma).2S[ABC]$$

$$= \frac{\alpha^3}{(1-2\alpha)^2}(1-2\alpha).S_{ABC}$$

$= \dfrac{\alpha^3}{1-2\alpha}S_{ABC}$. Tương tự ta cũng có

$$\sum S_{A_1NM} = \left(\sum \frac{\alpha^3}{1-2\alpha}\right)S_{ABC} \qquad (7)$$

Lại theo định lí Thales và chú ý đến Bổ đề 1, ta có $\overrightarrow{AR} = \beta\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AQ} = \gamma\overrightarrow{AC}$.

Kết hợp với tam giác ARQ có hướng dương, suy ra $S_{ARQ} = S[ARQ] = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AR} \wedge \overrightarrow{AQ}$

$= \beta\gamma.\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \beta\gamma S[ABC] = \beta\gamma S_{ABC}$.

Tương tự $\sum S_{ARQ} = \left(\sum \beta\gamma\right)S_{ABC}$.

Do đó $S_{MNPQRS} = S_{ABC} - \sum S_{ARQ}$

$$= \left(1 - \sum \beta\gamma\right)S_{ABC} \qquad (8)$$

Từ (7) và (8), theo Bổ đề 2, suy ra $\sum S_{A_1NM} \geq \dfrac{1}{2}S_{MNPQRS}$. Từ (5) ta thấy

$$S_{A_1B_1C_1} = S_{MNPQRS} + \sum S_{A_1NM} \geq \frac{3}{2}S_{MNPQRS}.$$

Nghĩa là $S_{MNPQRS} \leq \dfrac{2}{3}S_{A_1B_1C_1}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma$ hay I là trọng tâm của tam giác ABC. □

➢**Nhận xét.** 1) Nhiều bạn nhận thấy rằng bài toán **T12/429** chính là một phần của bài toán **T12/423**.

2) Tác giả phép chứng minh Bổ đề 2 là *Nguyễn Sơn Hà*, giáo viên Trường THPT chuyên ĐHSP Hà Nội.

3) Dễ dàng chứng minh bất đẳng thức $1 \geq 3\sum \beta\gamma$.

Từ đó suy ra $S_{MNPQRS} \geq \dfrac{2}{3}S_{ABC}$.

Đẳng thức xảy ra khi I là trọng tâm của tam giác ABC.

4) Dễ dàng chứng minh các bất đẳng thức

$\sum \dfrac{\alpha^3}{1-2\alpha} \geq 1 - 2\sum \beta\gamma; \sum \dfrac{\alpha^2(1-\alpha)}{1-2\alpha} \geq 1 - \sum \beta\gamma$. Từ đó suy ra $3S_{MNPQRS} \leq S_{ABC} + S_{A_1B_1C_1} \leq S_{AC_1BA_1CB_1}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi I là trọng tâm của tam giác ABC.

5) Có 15 bạn tham gia giải bài toán này và cùng cho lời giải đúng. Xin nêu tên 14 bạn (1 bạn không ghi tên). **Thái Nguyên**: *Nguyễn Văn Tuyến*, $11A_{11}K25$, THPT Đồng Hỷ; **Hưng Yên**: *Trần Bá Trung*, 10T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Nam**: *Lê Anh Tuấn*, 10A1, THPT chuyên ban Hà Nam; **Phú Thọ**: *Nguyễn Anh Hào*, 7A1, THCS Lâm Thao; **Thanh Hoá**: *Trương Văn Cường*, 11A3, THPT Lương Đắc Bằng, Hoằng Hoá; **Hà Nội**: *Nguyễn Đình Thịnh*, 11A1, THPT Thanh Oai B;

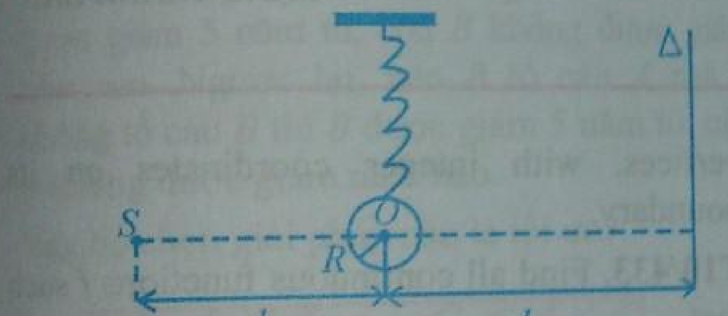
Nghệ ... ...ọc, 10T1, Lê Anh Phi, 10T2, THPT Đô Lương 1, *Nguyễn Văn Sơn*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, *Đặng Đình Lâm*, 10A1, THPT chuyên ĐH Vinh; **Hà Tĩnh**: *Nguyễn Thị Thuỳ Linh*, 10A1, THPT Hương Khê; **Phú Yên**: *Đoàn Phú Thiện*, 10A1, THPT Lê Hồng Phong, *Bùi Lê Ngọc Min*, 11S3, THPT Dân lập Duy Tân; **Long An**: *Nguyễn Hồng Hà Vi*, 10T1, THPT chuyên Long An.

NGUYỄN MINH HÀ

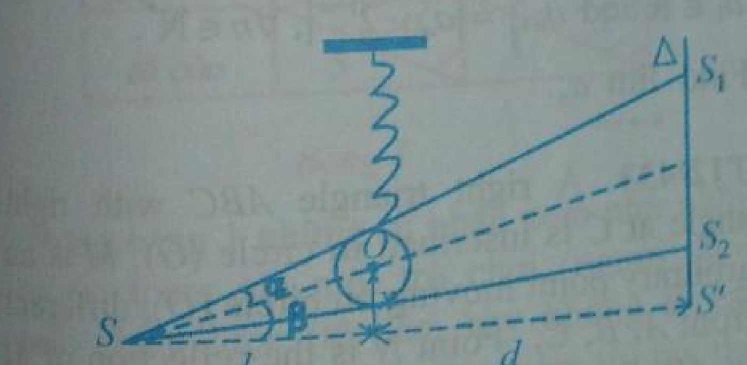
★Bài L1/429. *Một con lắc lò xo có độ cứng k, được đặt thẳng đứng. Vật treo khối lượng m, có dạng hình cầu, bán kính R. Chọn gốc O tại vị trí cân bằng. Ở hai phía của vật, người ta đặt một nguồn sáng S và màn chắn Δ. Nguồn sáng tạo bóng của vật ở trên màn chắn. Cho biết S cách O một khoảng l ($l > R$), O cách Δ một khoảng d. Kích thích cho con lắc dao động điều hòa.*

a) *Tính độ dài bóng của vật theo li độ x.*

b) *Cho* $k = 100$ N/m, $m = 1$kg, $l = d = 3$cm, $R = 1$cm. *Tại vị trí vật có vận tốc* $v = 4\sqrt{10}$ cm/s *thì bóng có chiều dài* $l_b = \frac{3\sqrt{17}}{2}$ cm. *Tính biên độ dao động của vật.*



Lời giải. a) Khi vật ở li độ x thì bóng của nó có chiều dài S_1S_2.



Từ hình vẽ ta có

$$S_1S_2 = S'S_1 - S'S_2 = \left(\tan(\alpha+\beta) - \tan(\beta-\alpha)\right)$$

$$= (l+d)\left(\tan(\alpha+\beta) - \tan(\beta-\alpha)\right)$$

$$= 2(l+d)\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 2\beta}.$$

Cũng từ hình vẽ dễ dàng tính được

$$\sin\alpha = \frac{R}{\sqrt{l^2+x^2}};\ \cos\alpha = \sqrt{\frac{l^2+x^2-R^2}{l^2+x^2}};$$

$$\sin\beta = \frac{x}{\sqrt{l^2+x^2}};\ \cos\beta = \frac{l}{\sqrt{l^2+x^2}}.$$

Thay vào trên ta tính được

$$S_1S_2 = \frac{2(l+d)R\sqrt{l^2+x^2-R^2}}{l^2-R^2} \qquad (1)$$

b) Tại vị trí bóng có chiều dài $S_1S_2 = \frac{3\sqrt{17}}{2}$ cm, thay vào (1) ta tìm được $x^2 = 9$.

Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng

$$\frac{kA^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{mv^2+kx^2}{k}}.$$

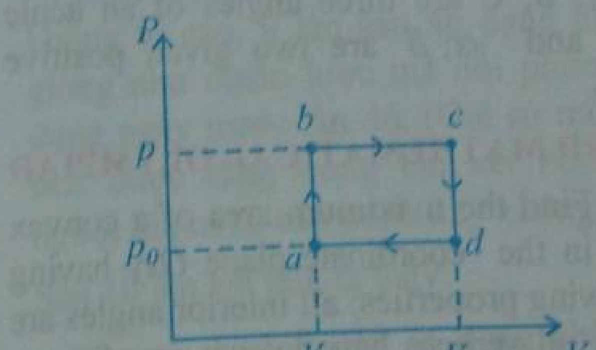
Thay số ta được $A \approx 3,26$cm. ☐

➤Nhận xét. Các bạn sau có lời giải đúng:

Hòa Bình: *Đặng Hữu Hiếu*, 12 Toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ; **Thanh Hóa**: *Lê Đình Cảnh*, 12B1, THPT Triệu Sơn I; **Quảng Ngãi**: *Nguyễn Nhật Hân*, 11 Lí, THPT chuyên Lê Khiết.

NGUYỄN XUÂN QUANG

★Bài L2/429. *Một mol khí lí tưởng đơn nguyên tử được dùng làm chất công tác của một động cơ theo chu trình như hình vẽ. Giả thiết rằng* $p = 2p_0, V = 2V_0, p_0 = 1,01.10^5$ Pa, $V_0 = 0,0225$m^3.



a) *Tính công thực hiện trong một chu trình.*

b) Xác định nhiệt lượng hệ nhận được trong một chu trình ứng với thời kì giãn abc.

c) Tính hiệu suất của động cơ.

d) Hiệu suất Carnot của một động cơ hoạt động giữa hai nhiệt độ cao nhất và thấp nhất của chu trình bằng bao nhiêu? So sánh nó với hiệu suất tính ở câu c.

Lời giải. a) Công thực hiện trong một chu trình bằng diện tích giới hạn trên đồ thị p

$$A = (p - p_0)(V - V_0) = p_0V_0$$

(do $p = 2p_0$, $V = 2V_0$).

b) Quá trình ab là quá trình tăng đẳng tích, nhiệt lượng hệ nhận được

$$Q_{ab} = \frac{3}{2}(RT_b - RT_a) = \frac{3}{2}(p_bV_b - p_aV_a)$$

$$= \frac{3}{2}(pV_0 - p_0V_0) = \frac{3}{2}p_0V_0.$$

Quá trình bc là quá trình giãn đẳng áp, nhiệt lượng hệ nhận được

$$Q_{bc} = \frac{5}{2}(RT_c - RT_b) = \frac{5}{2}(p_cV_c - p_bV_b)$$

$$= \frac{5}{2}(pV - pV_0) = 5p_0V_0.$$

Nhiệt lượng tổng cộng hệ nhận được trong một chu trình là

$$Q = Q_{ab} + Q_{bc} = \frac{13}{2}p_0V_0.$$

c) Hiệu suất của động cơ

$$H = \frac{A}{Q} = \frac{p_0V_0}{\frac{13}{2}p_0V_0} = \frac{2}{13}.$$

d) Trong chu trình $abcda$, nhiệt độ cao nhất là T_c và nhiệt độ thấp nhất là T_a. Hiệu suất chu trình Carnot tương ứng với hai nhiệt độ đó là

$$H_c = 1 - \frac{T_a}{T_c} = \frac{3}{4} \Rightarrow H_c = 75\%.$$

So sánh ta thấy $H_c > H$. □

➤**Nhận xét.** *Trong số các bạn gửi bài, các bạn sau có lời giải đúng:*

Hưng Yên: *Hoàng Công Minh*, 11A2, THPT Khoái Châu; **Thanh Hoá:** *Lê Đình Cảnh*, 12B1, THPT Triệu Sơn 1; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Nhật Hãn*, 11 Lí, THPT chuyên Lê Khiết; **Nghệ An:** *Nguyễn Nhật Tân*, 11T1, THPT Anh Sơn 1.

ĐẶNG THANH HẢI

PROBLEMS...(*Tiếp trang 17*)

b) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \frac{8SR}{e} = 2p^2$;

where $2p = a + b + c + d$.

T8/433. Find the maximum value of the expression

$$\alpha(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) - \beta(\cos^3 A + \cos^3 B + \cos^3 C)$$

where A, B, C are three angles of an acute triangle and α, β are two given positive numbers.

TOWARD MATHEMATICAL OLYMPIAD

T9/433. Find the maximum area of a convex octagon in the coordinate plane Oxy having the following properties: all interior angles are the same, all vertices have integer coordinates, there exists a side that is parallel to the axis Ox, there are exactly 16 points, including the vertices, with integer coordinates on its boundary.

T10/433. Find all continuous functions f such that

$$(x+y)f(x+y) = xf(x) + yf(y) + 2xy, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

T11/433. Let (a_n) be a sequence where $a_1 \in \mathbb{R}$ and $a_{n+1} = |a_n - 2^{1-n}|, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Find $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$.

T12/433. A right triangle ABC with right angle at C is inscribed in circle (O). M is an arbitrary point moving on circle (O), different from A, B, C; Point N is the reflection of M in AB; P is the perpendicular foot of N to AC; MP meets (O) at a second point Q. Prove that the circumcenter of triangle APQ lies on a fixed circle.

SONG ĐỀ TÙ NHÂN DƯỚI GÓC NHÌN TOÁN HỌC

PHAN THANH QUANG
(TP. Hồ Chí Minh)

Song đề tù nhân nổi tiếng từ cuối Thế kỉ XIX, nay lại được nhắc đến trong lĩnh vực di truyền học, khi xét đến cơ chế của sự chọn lọc tự nhiên.

Giả sử hai người *A* và *B* bị tình nghi vì cùng một tội, bị giam ở hai phòng khác nhau, không thể liên hệ với nhau được. Người xét hỏi *A* và *B* (hoặc *B* và *A*) liên tiếp nhau yêu cầu mỗi người quyết định sự lựa chọn theo luật giảm án sau đây:

- Nếu *A* và *B* không tố cáo lẫn nhau (thông đồng nhau) thì mỗi người được giảm 3 năm tù.
- Nếu *A* và *B* tố cáo lẫn nhau thì mỗi người được giảm 1 năm tù.
- Nếu *A* tố cáo *B* mà *B* không tố cáo *A* thì *A* được giảm 5 năm tù, còn *B* không được giảm năm nào. Ngược lại, nếu *B* tố cáo *A* mà *A* không tố cáo *B* thì *B* được giảm 5 năm tù, còn *A* không được giảm năm nào.

Vậy họ chọn giải pháp nào là tối ưu?

A \ B	không tố cáo	tố cáo
không tố cáo	3 / 3	0 / 5
tố cáo	5 / 0	1 / 1

Bảng 1

Trong bảng 1 những tù nhân xem như những người tham gia một trò chơi (người chơi), mỗi chiến lược (tố cáo, hay không tố cáo) đem lại một lợi ích (số năm giảm tù) tùy theo chiến lược của người kia.

Nếu tố cáo, người đó sẽ được giảm 5 năm (hoặc 1 năm tù), tùy theo người kia không tố cáo (hoặc tố cáo).

Nếu không tố cáo, người đó sẽ được giảm 3 năm (hoặc 0 năm tù), tùy theo người kia không tố cáo (hoặc tố cáo).

Vậy thì, chiến lược cá nhân tốt hơn là tố cáo. Nhưng oái oăm ở chỗ nếu cả hai cùng tố cáo thì không lợi bằng họ có thể thông đồng nhau để không tố cáo lẫn nhau. Mâu thuẫn này là gốc của song đề.

Trong thực tế, chiến lược tố cáo (chủ động) đem lại lợi ích lớn hơn chiến lược không tố cáo (bị động). Do đó trong cơ chế chọn lọc tự nhiên, chiến lược này được sinh vật "*chọn lựa*".

A \ B	chiến lược Z	chiến lược T
chiến lược Z	30 / 30	9 / 14
chiến lược T	14 / 9	10 / 10

Bảng 2

Giả sử trong 10 lần xét hỏi *A*, 10 lần xét hỏi *B* luân phiên nhau hai người bị bắt *A* và *B* sử dụng chiến lược *Z* và chiến lược *T* (Bảng 2) như sau:

- Chiến lược *T*: Cả 10 lần xét hỏi đều áp dụng chiến lược tố cáo.

- Chiến lược *Z*: Lần đầu áp dụng chiến lược không tố cáo, 9 lần sau áp dụng chiến lược giống như chiến lược mà đối phương đã áp dụng ngay trước lần đó. (Giả sử mỗi tù nhân biết được rằng trong lần xét hỏi trước đó người kia có tố cáo mình hay không).

Sau 10 lần xét hỏi, ta thấy:

- Nếu cả *A* và *B* đều áp dụng chiến lược Z (nghĩa là cả 10 lần *A* và *B* đều không tố cáo nhau)

(*Xem tiếp trang 9*