TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964
3 - 2009
Số 381

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 46
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35144272, (04) 35121606
Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn Web: http://www.nxbgd.com.vn/toanhoctuoitre

Chào mừng ngày Quốc tế Phụ nữ 8/3
và ngày thành lập Đoàn Thanh niên Cộng sản Hồ Chí Minh 26/3

Giải đáp:

Ô CHỮ DẠNG ĐỐI XỨNG

(Đề đăng trên THTT số 378, Tháng 12.2008)

1				T	I	Ế	P	X	Ú	C			
2			L	Ậ	P	P	H	Ư	Ơ	N	G		
3		C	Á	C	P	H	É	P	T	Í	N	H	
4			H	Ì	N	H	P	H	Ả	N	G		
5				T	Ậ	P	Đ	I	Ể	M			
6						U	Ố	N					
7					B	Ộ	I	S	Ố				
8				Đ	Ố	I	X	Ứ	N	G			
9					T	H	Ứ	T	Ự				
10				L	I	Ê	N	H	Ợ	P			
11		P	H	Ư	Ơ	N	G	T	R	Ì	N	H	
12				L	Ũ	Y	T	H	Ừ	A			
13		K	H	Ố	I	T	R	Ụ	Đ	Ứ	N	G	
14		H	Ì	N	H	L	Ụ	C	G	I	Á	C	
15	T	A	M	T	H	Ứ	C	B	Ậ	C	H	A	I

Ngoài cách điền như ô chữ bên, có thể điền các thuật ngữ khác, chẳng hạn như:

Hàng 1: NHỊPHÂN, PHÉPTHẾ, PHÉPTRỪ, CHÓPCỤT

Hàng 2: CẠNHHUYỀN, TRỤCHOÀNH, CẦUPHƯƠNG, CÙNGHƯỚNG

Hàng 3: TIACHÉONHAU, PHÉPKÉOTHEO

Hàng 4: ĐỒNGPHẲNG

Hàng 5: ĐỐIĐỈNH, GẦNĐÚNG, QUYĐỒNG

Hàng 6: BỐN, GỐC

Hàng 7: HỘITỤ, ĐẠISỐ, SAISỐ, HAIẨN, CHIẾU

Hàng 10: GÓCNHỌN, DẤUNHÂN, LIÊNTỤC, CHỮNHẬT, THỐNGKÊ, HOÀNHĐỘ, GIẢNƯỚC

Hàng 11: TRƯỜNGHỮUTỈ, PHƯƠNGCHIẾU,

Hàng 12: BÀNTÍNH, BÀITOÁN, NỘITIẾP, NHỊTHỨC, ĐƠNTHỨC, THỂTÍCH, QUỸTÍCH

Hàng 13: LĂNGTRỤXIÊN, CUNGTRÒNLỚN

Hàng 14: HÌNHLỤCLĂNG

Hàng 15: GIẢITÍCHTỔHỢP, GIÁTRỊCỰCTIỂU, GIẢNƯỚCPHÂNSỐ, BIỂUĐỒCHỮNHẬT

Các bạn sau đưa ra được nhiều thuật ngữ: *Vũ Phương Thảo*, 10A1, THPT chuyên Chu Văn An, TP. **Lạng Sơn**, *Phan Đức Minh*, 10A7, THPT Thái Phiên, **Hải Phòng**, *Vũ Thanh Tùng*, 11 Toán, THPT chuyên Lương Văn Tụy, TP. **Ninh Bình**, *Cù Huy Thiện*, 11A1, THPT Nguyễn Văn Trỗi, Lộc Hà, **Hà Tĩnh**, *Nguyễn Thị Thanh Lan*, 11 Trần Nhân Tông, TX. KonTum, **Kon Tum**, *Lang Văn Thành*, Tiên Kỳ, Tân Kỳ, **Nghệ An**, *Phan Lê*, *Hoàng Việt*, 10A1, THPT Lê Hồng Phong, Tây Hòa, **Phú Yên**.

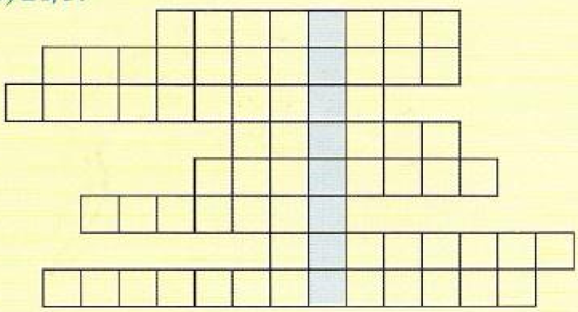
VÂN KHANH

Một số NGÀY HỘI THÁNG BA

Tháng Ba dương lịch là một trong những tháng có nhiều ngày kỉ niệm đáng nhớ, những lễ hội tưởng niệm các anh hùng có công đánh giặc, bảo vệ và xây dựng đất nước ta.

Bạn hãy điền vào các ô chữ: tên của tổ chức, hoặc tên danh nhân được tôn thờ, hoặc địa phương tổ chức lễ hội cùng với chú thích ngắn gọn (về thời kì, công trạng, ...), biết rằng các hàng từ trên xuống dưới tương ứng với tên tỉnh, thành phố và ngày dương lịch (âm lịch) có lễ hội.

1) Hà Nam 2/3 (6/2 ÂL)
2) 8/3
3) TP Hồ Chí Minh 21/3 (25/2 ÂL)
4) Bắc Giang 16/3
5) Hải Phòng 14/3 (18/2 ÂL)
6) Thanh Hóa 17/3 (21/2 ÂL)
7) Hà Nội 1/3 (5/2 ÂL)
8) 26/3.



AN MINH

ĐẶT ẨN PHỤ
CHO NHIỀU BÀI TOÁN THI CHỌN HỌC SINH GIỎI

LÊ BÁ HOÀNG
(Phòng GD - ĐT, Hồng Lĩnh, Hà Tĩnh)

Bài toán chứng minh bất đẳng thức (BĐT) có điều kiện là một trong những dạng toán khó thường gặp trong các Kì thi chọn học sinh giỏi lớp 9 cũng như Kì thi vào các lớp 10 chuyên toán. Học sinh gặp các dạng toán này thường lúng túng không biết phải bắt đầu từ đâu. Bài viết này trình bày phương pháp đổi biến và đặt ẩn phụ để đưa về BĐT đơn giản hơn. Xin mời các bạn tham khảo qua các thí dụ dưới đây.

★**Thí dụ 1.** *Cho ba số thực a, b, c thoả mãn điều kiện $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng*

$$a^2+b^2+c^2 \ge \frac{1}{3}.$$

Lời giải. Đặt $a=\frac{1}{3}+x$, $b=\frac{1}{3}+y$, $c=\frac{1}{3}+z$.

Từ $a+b+c=1$ suy ra $x+y+z=0$. Khi đó

$$a^2+b^2+c^2 \ge \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\left(y+\frac{1}{3}\right)^2+\left(z+\frac{1}{3}\right)^2 \ge \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+\frac{2}{3}(x+y+z) \ge 0$$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 \ge 0$ (luôn đúng). Do đó suy ra đpcm. ❒

★**Thí dụ 2.** *Cho bốn số thực a, b, c, d thoả mãn $a \ge b \ge c \ge d \ge 0$. Chứng minh các bất đẳng thức sau:*

a) $a^2 - b^2 + c^2 \ge (a-b+c)^2$ (1)

b) $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 \ge (a-b+c-d)^2$ (2)

Lời giải. Do $a \ge b$, $c \ge d$ nên tồn tại $x \ge 0$, $y \ge 0$ sao cho $a = b + x$, $c = d + y$. Khi đó

a) (1) $\Leftrightarrow (b+x)^2 - b^2 + c^2 \ge (x+c)^2$

$\Leftrightarrow b^2 + 2bx + x^2 - b^2 + c^2 \ge x^2 + 2cx + c^2$

$\Leftrightarrow 2x(b-c) \ge 0$ (đúng vì $x \ge 0$, $b \ge c$).

b) BĐT (2) tương đương với

$$(b+x)^2 - b^2 + (d+y)^2 - d^2 \ge (x+y)^2$$

$$\Leftrightarrow b^2 + 2bx + x^2 - b^2 + d^2 + 2dy + y^2 - d^2 \ge x^2 + 2xy + y^2$$

$\Leftrightarrow bx + dy \ge xy$. Mặt khác, ta có

$b \ge c \Rightarrow b \ge d + y \Rightarrow bx \ge (d+y)x = dx + xy \ge xy$.

Vậy $bx + dy \ge xy$.

Từ đó BĐT (2) được chứng minh. ❒

★**Thí dụ 3.** *Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thoả mãn $a + b + c = 2$. Chứng minh rằng* $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2$ (1)

Lời giải

Từ giả thiết suy ra $0 < a < 1$, $0 < b < 1$, $0 < c < 1$.

Đặt $a = 1 - x$, $b = 1 - y$, $c = 1 - z$ với $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, $0 < z < 1$. Do $a + b + c = 2$ nên $x + y + z = 1$. Khi đó BĐT (1) tương đương với

$$(1-x)^2+(1-y)^2+(1-z)^2+2(1-x)(1-y)(1-z)<2$$

$$\Leftrightarrow 3 - 2(x+y+z) + x^2 + y^2 + z^2 + 2(1-(x+y+z)+xy+yz+zx-xyz) < 2$$

$$\Leftrightarrow 3 - 2.1 + x^2 + y^2 + z^2 + 2(1 - 1 + xy + yz + xz - xyz) < 2 \text{ (Vì } x+y+z=1)$$

$$\Leftrightarrow (x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz) - 2xyz < 1$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)^2 - 2xyz < 1$$

$\Leftrightarrow 1 - 2xyz < 1 \Leftrightarrow 2xyz > 0$ (hiển nhiên).

Do đó BĐT (1) được chứng minh. ❒

★**Thí dụ 4.** *Cho $a > b > 0$. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{a^2-b^2}+\sqrt{2ab-b^2}>a \qquad (1)$$

Lời giải. Do $a > b > 0$ nên đặt $a = b + x$ $(x > 0)$. Khi đó BĐT (1) tương đương với

$$\sqrt{(b+x)^2-b^2}+\sqrt{2(b+x)b-b^2}>b+x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2bx+x^2}+\sqrt{b^2+2bx}>b+x.$$

Mặt khác, do a, b, x là các số dương nên $\sqrt{2bx+x^2}>\sqrt{x^2}=x$ và $\sqrt{2bx+b^2}>\sqrt{b^2}=b$.

Cộng theo vế hai BĐT trên ta có

$\sqrt{2bx+x^2}+\sqrt{2bx+b^2}>b+x$ (đpcm). ❒

★**Thí dụ 5.** *Cho các số thực a, b, c thuộc khoảng $(0\ ;\ 1)$ thoả mãn*

$$abc=(1-a)(1-b)(1-c) \qquad (1)$$

Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2\ge\frac{3}{4}$ (2)

Lời giải. Từ giả thiết ta suy ra:

• Nếu cả ba số a, b, c đều lớn hơn $\frac{1}{2}$ thì $abc>\frac{1}{8}$ còn $(1-a)(1-b)(1-c)<\frac{1}{8}$, không thoả mãn (1).

• Nếu cả ba số a, b, c đều bé hơn $\frac{1}{2}$ thì $abc<\frac{1}{8}$ còn $(1-a)(1-b)(1-c)>\frac{1}{8}$, không thoả mãn (1).

Vậy trong ba số a, b, c có hai khả năng sau.

Trường hợp 1. Hai số lớn hơn hoặc bằng $\frac{1}{2}$, số còn lại bé hơn hoặc bằng $\frac{1}{2}$, giả sử

$$a\ge\frac{1}{2},\ b\ge\frac{1}{2},\ c\le\frac{1}{2}.$$

Đặt $a=\frac{1}{2}+x$, $b=\frac{1}{2}+y$, $c=\frac{1}{2}-z$, trong đó $0\le x<\frac{1}{2}$; $0\le y<\frac{1}{2}$; $0\le z<\frac{1}{2}$. Khi đó

$$(1)\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}+x\right)\left(\frac{1}{2}+y\right)\left(\frac{1}{2}-z\right)=\left(\frac{1}{2}-x\right)\left(\frac{1}{2}-y\right)\left(\frac{1}{2}+z\right).$$

Dẫn đến $\frac{1}{2}(x+y-z)=2xyz\ge0$ (do $x\ge0$, $y\ge0$, $z\ge0$), suy ra $x+y-z\ge0$ (3)

Mặt khác BĐT (2) tương đương với

$$\left(\frac{1}{2}+x\right)^2+\left(\frac{1}{2}+y\right)^2+\left(\frac{1}{2}-z\right)^2\ge\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow x+y-z+x^2+y^2+z^2\ge0$$

(hiển nhiên đúng theo (3) và $x^2+y^2+z^2\ge0$).

Trường hợp 2. Một số lớn hoặc bằng $\frac{1}{2}$, hai số còn lại bé hơn hoặc bằng $\frac{1}{2}$, giả sử

$$a\ge\frac{1}{2},\ b\le\frac{1}{2},\ c\le\frac{1}{2}.$$

Đặt $a=\frac{1}{2}+x$, $b=\frac{1}{2}-y$, $c=\frac{1}{2}-z$, trong đó $0\le x<\frac{1}{2}$, $0\le y<\frac{1}{2}$, $0\le z<\frac{1}{2}$.

Khi đó biến đổi tương đương (1) ta được

$$-x+y+z=4xyz.$$

Suy ra $-x+y+z=4xyz=2y.2xz\le2.\frac{1}{2}.2xz$ (do $0\le y<\frac{1}{2}$) $\le x^2+z^2\le x^2+y^2+z^2$ (4)

Lại có, BĐT (2) tương đương với

$$\left(\frac{1}{2}+x\right)^2+\left(\frac{1}{2}-y\right)^2+\left(\frac{1}{2}-z\right)^2\ge\frac{3}{4}$$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+(x-y-z)\ge0$ (hiển nhiên theo (4)).

Vậy BĐT (2) được chứng minh. ❒

★**Thí dụ 6.** *Cho các số a, b, c thoả mãn*

$$\begin{cases}a\ge4\ ;b\ge5\ ;c\ge6\\ a^2+b^2+c^2=90.\end{cases}$$

Chứng minh rằng $a+b+c\ge16$.

Lời giải. Đặt $a=4+x$, $b=5+y$, $c=6+z$. Từ giả thiết suy ra $x\ge0$, $y\ge0$, $z\ge0$. Ta giả sử ngược lại $a+b+c<16$, dẫn đến

$$x+y+z<1.$$

(Xem tiếp trang 30)

LỜI GIẢI ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN TRƯỜNG THPT THỰC HÀNH SƯ PHẠM, ĐHSP TP. HỒ CHÍ MINH

NĂM HỌC 2008-2009

(Đề thi đã đăng trên THTT số 380, tháng 2 năm 2009)

Câu 1. Đặt $\sqrt{2x^2+5x+12}=u$; $\sqrt{2x^2+3x+2}=v$.

Ta có $u \geq 0$, $v \geq 0$ và $\begin{cases} u+v=x+5 \\ u^2-v^2=2(x+5). \end{cases}$

Từ đó suy ra $u^2-v^2=2(u+v)$

$\Leftrightarrow (u+v)(u-v-2)=0$

$\Leftrightarrow u+v=0$ hoặc $u-v-2=0$.

• Với $u+v=0 \Rightarrow u=v=0$ (do $u \geq 0$, $v \geq 0$).

Không tồn tại x thoả mãn $u=v=0$.

• Với $u-v-2=0 \Rightarrow u=v+2$, ta có

$$\sqrt{2x^2+5x+12}=\sqrt{2x^2+3x+2}+2.$$

Bình phương hai vế rồi rút gọn ta được

$$\sqrt{2x^2+3x+2}=\frac{x+3}{2}.$$

Với điều kiện $x \geq -3$, bình phương hai vế rồi rút gọn ta được

$7x^2+6x-1=0 \Leftrightarrow x=-1$ hoặc $x=\frac{1}{7}$ (thoả mãn).

Vậy PT đã cho có hai nghiệm $x \in \left\{-1; \frac{1}{7}\right\}$.

Câu 2. Do A và B có tổng các chữ số bằng nhau nên A và B có cùng số dư khi chia cho 9. Suy ra $|A-B| = \underbrace{11 1\cdots 1}_{n \text{ chữ số } 1} \,\vdots\, 9 \Leftrightarrow n \,\vdots\, 9$. Vì $n \in \mathbb{N}^*$ nên giá trị nhỏ nhất có thể của n là 9.

Một cặp số tự nhiên A, B thoả mãn là $A=9012345678$; $B=8901234567$.

Câu 3. Ta có $T=\frac{a}{2-a}+1+\frac{1-a}{1+a}+1-2$

$=\frac{2}{2-a}+\frac{2}{1+a}-2=2\left(\frac{3}{(2-a)(1+a)}-1\right)$

$=2\left(\frac{3}{2+a(1-a)}-1\right) \leq 2\left(\frac{3}{2}-1\right)=1$ (vì $0 \leq a \leq 1$).

Vậy $T_{\max}=1$, đạt được khi và chỉ khi $a=0$ hoặc $a=1$.

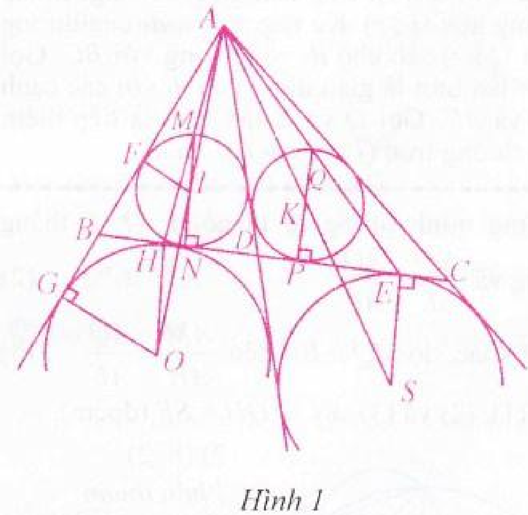
Mặt khác, áp dụng BĐT Cauchy ta có

$$a(1-a) \leq \frac{(a+1-a)^2}{4}=\frac{1}{4}.$$

Suy ra $T \geq 2\left(\frac{3}{2+\frac{1}{4}}-1\right)=\frac{2}{3}$.

Vậy $T_{\min}=\frac{2}{3}$, đạt được khi $a=1-a \Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$.

Câu 4. 1) Đường tròn (I) nội tiếp ΔABD có $F \in AB$, $N \in BC$ là hai tiếp điểm; đường tròn (K) nội tiếp ΔACD tiếp xúc với BC tại P; đường tròn (O) bàng tiếp góc A của ΔABD có $G \in AB$, $H \in BC$ là hai tiếp điểm; đường tròn (S) bàng tiếp góc A của ΔACD tiếp xúc với BC tại E. Kẻ hai đường kính MN và PQ của đường tròn (I) và đường tròn (K) (h. 1).



Hình 1

Ta có $MN \parallel QP$ và $MN = QP$, suy ra $MQ \parallel NP$

Lại có $IF \parallel OG$ (cùng vuông góc với AB) nên

$$\frac{AI}{AO}=\frac{IF}{OG}=\frac{IM}{OH}.$$

Từ đây và do $IM \parallel OH$ suy ra A, M, H thẳng hàng và $\frac{IM}{OH}=\frac{AM}{AH}$ (1)

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN TRƯỜNG THPT CHUYÊN HƯNG YÊN

NĂM HỌC 2008–2009

(Thời gian làm bài: 150 phút)

Câu 1 (*1.5 điểm*). Cho $a_1, a_2, ..., a_{2007}, a_{2008}$ là 2008 số thực thoả mãn

$$a_k = \frac{2k+1}{(k^2+k)^2}, \text{ với } k = 1, 2, 3, ..., 2008.$$

Tính tổng $S_{2008} = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{2007} + a_{2008}$.

Câu 2 (*2 điểm*)

1) Giải phương trình $(x^2-4)^2 + x = 4$.

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3xy - x - y = 3 \\ 3yz - y - z = 13 \\ 3zx - z - x = 5. \end{cases}$$

Câu 3 (*1.5 điểm*). Cho $f(x)$ là một đa thức bậc ba có hệ số nguyên. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ nhận $3-\sqrt{2}$ là một nghiệm thì $f(x)$ cũng có nghiệm là $3+\sqrt{2}$.

Câu 4 (*3 điểm*). Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn $(I\,;r)$. Kẻ tiếp tuyến d_1 của đường tròn $(I\,;r)$ sao cho d_1 song song với BC. Gọi E, F lần lượt là giao điểm của d_1 với các cạnh AB và AC. Gọi D và K lần lượt là tiếp điểm của đường tròn $(I\,;r)$ với BC và d_1.

1) Trên cạnh BC lấy điểm H sao cho $CH = BD$. Chứng minh ba điểm A, K, H thẳng hàng.

2) Kẻ tiếp tuyến d_2 và d_3 của đường tròn $(I\,;r)$ sao cho d_2 song song với AC, còn d_3 song song với BC. Gọi P và Q lần lượt là giao điểm của d_3 với các cạnh BC và AC. Giả sử tam giác ABC có độ dài ba cạnh thay đổi sao cho chu vi của nó bằng $2p$ không đổi. Hãy tìm giá trị lớn nhất của tổng $EF + MN + PQ$.

Câu 5. (*2 điểm*)

1) Cho a, b là các số thực dương thoả mãn $a + b = 1$. Chứng minh rằng $\dfrac{2}{ab} + \dfrac{3}{a^2+b^2} \geq 14$.

2) Trên bảng ghi 2008 dấu cộng và 2009 dấu trừ. Mỗi lần thực hiện ta xoá đi hai dấu và thay bởi dấu cộng nếu hai dấu bị xoá cùng loại và thay bởi dấu trừ nếu hai dấu bị xoá khác loại. Hỏi sau 4016 lần thực hiện như vậy trên bảng còn dấu gì?

NGUYỄN THANH GIANG
(GV THPT chuyên Hưng Yên) giới thiệu

Chứng minh tương tự ta có A, Q, E thẳng hàng và $\dfrac{KQ}{SE} = \dfrac{AQ}{AE}$ (2)

Mặt khác, do $MQ \,//\, BC$ nên $\dfrac{AM}{AH} = \dfrac{AQ}{AE}$ (3)

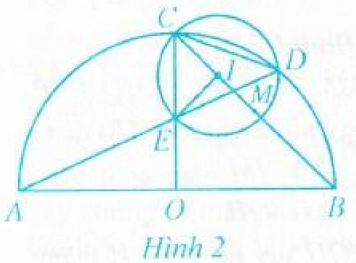
Từ (1), (2) và (3) suy ra $OH = SE$ (đpcm).

2) (h. 2)

Phần thuận.

Do $D \in \overset{\frown}{BC}$ nên $\widehat{CDA} = \frac{1}{2}\widehat{COA} = 45°$.

Mặt khác, $D \in (I)$ nên $\widehat{CIE} = 2\widehat{CDE} = 90°$.



Hình 2

Suy ra $\widehat{ECI} = 45° = \widehat{OCB}$. Khi đó ta thấy I thuộc đoạn CB.

• Khi $D \equiv C$ thì $E \equiv C \Rightarrow I \equiv C$.

• Khi $D \equiv B$ thì $E \equiv O \Rightarrow I \equiv M$ (M là trung điểm cạnh BC).

Vậy I thuộc đoạn thẳng cố định CM.

Phần đảo. Giả sử I' là một điểm bất kì trên đoạn thẳng CM. Vẽ đường tròn tâm I', bán kính CI' cắt cung BC và đoạn OC thứ tự tại D, E. Ta có

$$\widehat{CEI'} = \widehat{ECI'} = 45° \Rightarrow \widehat{CDE} = \frac{1}{2}\widehat{CI'E} = 45° \quad (1)$$

Mặt khác, $\widehat{CDA} = \frac{1}{2}\widehat{COA} = 45°$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra A, E, D thẳng hàng, do đó đường tròn (I') là đường tròn ngoại tiếp ΔCDE.

Vậy quỹ tích tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác CDE là đoạn thẳng CM.

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP. Hồ Chí Minh) giới thiệu.

ĐƯỜNG THẲNG SIMSON mở rộng

PHẠM THỊNH
(GV trường THPT Song ngữ Vũng Tàu, Bà Rịa - Vũng Tàu)

Trước hết chúng ta nhắc lại một kết quả đẹp trong hình học phẳng

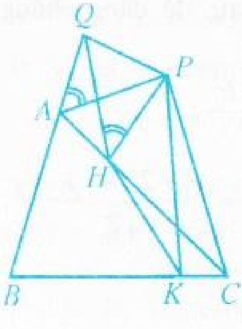
✪Bài toán 1. (*Đường thẳng Simson*)

Gọi Q, H, K theo thứ tự là chân các đường vuông góc hạ từ điểm P trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC đến các cạnh AB, AC, BC. Khi đó ba điểm Q, H, K thẳng hàng.

Lời giải bài toán này đã có trong nhiều tài liệu. Tuy nhiên với kết cấu hoàn mĩ của các yếu tố hình học trong đó đã kích thích chúng tôi tìm đến cội nguồn của các mối liên kết đó. Xin giới thiệu cùng bạn đọc.

✪Bài toán 2. *Giả sử điểm P nằm ngoài tam giác ABC, nhưng không nằm trong phần góc đối đỉnh của các góc A, B, C của tam giác đó. Các điểm Q, H, K theo thứ tự nằm trên các đường thẳng AB, AC, BC sao cho mỗi bộ bốn điểm (P, Q, A, H); (P, H, K, C); (P, Q, B, K) nằm trên một đường tròn. Khi đó* $\widehat{ABC}+\widehat{APC}=\widehat{QHP}+\widehat{PHK}$.

Lời giải. (h. 1). Từ giả thiết ta có $\widehat{QHP}=\widehat{QAP}$, nên $\widehat{QHP}=180^\circ-\widehat{BAP}$ và $\widehat{PHK}=180^\circ-\widehat{PCB}$. Suy ra $\widehat{ABC}+\widehat{APC}=\widehat{QHP}+\widehat{PHK}$ (tổng các góc trong của tứ giác $ABCP$ bằng 360°) (đpcm).



Hình 1

Nhận xét. • Từ kết quả bài toán 2 ta thấy khi P nằm trên cung AC không chứa B của đường tròn (O) ngoại tiếp ΔABC thì do $\widehat{ABC}+\widehat{APC}=180^\circ$ nên $\widehat{QHP}+\widehat{PHK}=180^\circ$. Từ đó ba điểm Q, K, H thẳng hàng. Ta gọi đường thẳng đi qua Q, K, H này là *đường thẳng Simson mở rộng của tam giác ABC* ứng với điểm P và góc $\widehat{PQA}$.

• Ta có mệnh đề đảo của bài toán 2:

Từ một điểm P nằm ngoài ΔABC nhưng không nằm trong phần góc đối đỉnh của các góc A, B, C, ta kẻ các tia theo thứ tự cắt AB, BC, CA tại Q, K, H sao cho mỗi bộ bốn điểm (P, Q, A, H); (P, H, K, C); (P, Q, B, K) cùng nằm trên một đường tròn. Nếu Q, H, K thẳng hàng thì P nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Tiếp tục khai thác tính chất đường thẳng Simson mở rộng vào tứ giác nội tiếp, chúng tôi thu được một kết quả khá đẹp sau đây.

✪Bài toán 3. *Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Từ một điểm M ta vẽ sáu đường thẳng theo thứ tự cắt các đường thẳng AB, BC, CD, DA, AC, BD tại P, Q, R, H, K, T sao cho mỗi bộ năm điểm (M, A, H, P, K); (M, B, P, T, Q); (M, C, R, K, Q); (M, D, R, H, T) nằm trên một đường tròn. Khi đó*

a) Nếu M nằm trên đường tròn (O) thì mỗi bộ ba điểm (P, T, H); (T Q, R); (P, Q, K); (H, K, R) cùng nằm trên một đường thẳng, lần lượt là đường thẳng Simson mở rộng của điểm M đối với các tam giác ABD, BCD, ABC, ADC (h. 2).

b) Nếu M không nằm trên đường tròn (O) và không nằm trong phần góc đối đỉnh của các góc trong của tứ giác ABCD thì các đường thẳng MP, MT, MH theo thứ tự cắt các đường thẳng QK, QR, KR theo ba điểm cùng nằm trên một đường thẳng (đường thẳng Simson mở rộng của điểm M đối với tam giác KQR).

(Áp dụng bài toán 2 ta có lời giải bài toán 3).

(Xem tiếp trang 15)

Chuẩn bị cho kì thi tốt nghiệp THPT và thi vào Đại học

Giới hạn là cơ sở để xây dựng các khái niệm liên tục và đạo hàm của hàm số. Bài viết này giúp các bạn hệ thống lại các dạng toán về giới hạn và các kĩ năng giải các dạng toán đó trong chương trình toán phổ thông, chuẩn bị cho các kì thi tốt nghiệp THPT, thi tuyển sinh vào các trường Đại học, Cao đẳng.

Giới hạn của hàm số và một số dạng toán có liên quan

NGUYỄN ANH DŨNG
(Hà Nội)

$$\lim_{x\to a} f(x)$$

1 Nhắc lại lí thuyết

• Với x là số thực, ta có

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1;\quad \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

Hai giới hạn cơ bản hay được sử dụng là

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}=1 \text{ và}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{x^2}=\frac{a^2}{2},\ a\in\mathbb{R},\ a\neq 0 \qquad (*)$$

Kết quả (*) suy ra từ

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{ax}{2}\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{ax}{2}}{\frac{ax}{2}}\right)^2.\frac{a^2}{2}=\frac{a^2}{2}.$$

• Hàm số $y=f(x)$ liên tục tại điểm $x=x_0$ khi và chỉ khi $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

• Đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ tại điểm $x=x_0$ là giới hạn hữu hạn (nếu có) của $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, kí hiệu là $f'(x_0)$.

• Giới hạn $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, trong đó $f(x)$ và $g(x)$ cùng dần tới 0 khi x tiến tới a, được gọi là giới hạn dạng $\frac{0}{0}$. Đây là giới hạn thường gặp nhất trong chương trình phổ thông.

2 Các dạng toán thường gặp

★***Thí dụ 1.*** *Tìm giới hạn*

$$L_1=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x}{x^2}.$$

Lời giải. Sử dụng công thức (*), ta có

$$L_1=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}+\cos x.\frac{1-\cos 2x}{x^2}\right)$$

$$=\frac{1^2}{2}+\frac{2^2}{2}=\frac{5}{2}.\ \square$$

Lưu ý. Bằng cách tương tự, dễ dàng chứng minh được các kết quả sau

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax\cos bx}{x^2}=\frac{a^2+b^2}{2};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\ldots\cos nx}{x^2}=\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}.$$

★*Thí dụ 2.* Tìm giới hạn

$$L_2 = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\cos x-\cos 3x}-\cos 2x}{x^2}.$$

Lời giải. Biến đổi

$$L_2 = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\cos x-\cos 3x}-1}{x^2}+\frac{1-\cos 2x}{x^2}\right).$$

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\cos x-\cos 3x}-1}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\cos x-\cos 3x}-1}{\cos x-\cos 3x}.\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\cos x-\cos 3x}-1}{\cos x-\cos 3x}.\left(\frac{1-\cos 3x}{x^2}-\frac{1-\cos x}{x^2}\right)$$

Lại có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\cos x-\cos 3x}-1}{\cos x-\cos 3x}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^t-1}{t}=1,$

với $t=\cos x-\cos 3x$ và theo (*) có

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos 3x}{x^2}-\frac{1-\cos x}{x^2}\right)=\frac{3^2}{2}-\frac{1^2}{2}=4.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=2.$$

Do đó $L_2=4+2=6.$ ❐

Lưu ý. Làm tương tự như trên, ta thấy

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}=\frac{b^2-a^2}{2};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\cos ax-\cos bx}-\cos cx}{x^2}=\frac{b^2-a^2}{2}+\frac{c^2}{2}.$$

★*Thí dụ 3.* Tìm giới hạn

$$L_3=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin x+\cos x)}{x}.$$

Lời giải. Ta có

$$L_3=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin x+\cos x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin x+\cos x)^2}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+\sin 2x)}{\sin 2x}.\frac{\sin 2x}{2x}\right).$$

Lại có

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin 2x)}{\sin 2x}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1,$$

với $t=\sin 2x$ và $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}=1$ nên

$L_3=1.\ 1=1.$ ❐

Lưu ý. Khi gặp giới hạn $\dfrac{0}{0}$ dạng $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln f(x)}{g(x)}$, trong nhiều trường hợp ta có thể biến đổi như sau:

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+f(x)-1)}{f(x)-1}.\frac{f(x)-1}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{g(x)}.$$

★*Thí dụ 4.* Tìm giới hạn

$$L_4=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^x.$$

Lời giải. Ta có

$$L_4=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x+1}\right)^x.$$

Đặt $\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{1}{t}$, ta có $x=2t-1$; $x\to+\infty\Leftrightarrow t\to+\infty.$

$$L_4=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t-1}=\lim_{t\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)^2.\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-1}=e^2.$$ ❐

Lưu ý. Khi tìm giới hạn dạng $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)^x$, trong đó $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$, ta làm như sau:

Sử dụng phép đổi biến số thoả mãn $\dfrac{f(x)}{g(x)}=1+\dfrac{1}{t}$; khi đó $x\to+\infty\Leftrightarrow t\to+\infty$; đưa về giới hạn cơ bản $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^t=e.$

★*Thí dụ 5.* Tìm giới hạn

$$L_5=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-x+1}\right).$$

Lời giải. Ta có

$$L_5=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-x\right)-\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)\right).$$

Xét các giới hạn:

*) $A = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-x\right)$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{\sqrt[3]{\left(x^3+3x^2\right)^2}+x\sqrt[3]{x^3+3x^2}+x^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{x}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}}+1} = 1.$$

*) $B = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} = -\frac{1}{2}.$$

Do đó $L_5 = A - B = \frac{3}{2}$. □

Lưu ý. Giả sử $P(x)$ là một đa thức bậc n, ta quy ước coi bậc của $\sqrt[m]{P(x)}$ là $\frac{n}{m}$.

1) Để tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$, trong đó $f(x)$, $g(x)$ là các đa thức hoặc căn của đa thức ta làm như sau: viết $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{f(x)}{x^\alpha}}{\frac{g(x)}{x^\alpha}}$; trong đó α là bậc cao nhất trong $f(x)$ và $g(x)$. Tiếp theo tìm $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^\alpha}$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x^\alpha}$, từ đó suy ra kết quả cần tìm.

2) Để tìm giới hạn

$$L = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{a^3x^3+bx^2+cx+d}-\sqrt{a^2x^2+mx+n}\right)$$

ta biến đổi như sau:

$$L = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{a^3x^3+bx^2+cx+d}-ax\right) - \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{a^2x^2+mx+n}-ax\right);$$

sau đó tính từng giới hạn.

★***Thí dụ 6***. *Tìm m để hàm số sau liên tục tại điểm $x = 1$:*

$$y = f(x) = \begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{2x-1}}{x-1} & khi\ x \neq 1\\ m & khi\ x = 1.\end{cases}$$

Lời giải. Xét giới hạn

$$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{2x-1}}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to1}\left(\frac{\sqrt[3]{x-2}+1}{x-1}+\frac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1}\right) = \frac{4}{3}.$$

(vì $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x-2}+1}{x-1}$

$$= \lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt[3]{x-2}+1\right)} = \frac{1}{3};$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{2(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)} = 1).$$

Do đó hàm số liên tục tại điểm $x = 1$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow m = \frac{4}{3}$. □

Lưu ý. Để tìm giới hạn $L = \lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{f(x)}-\sqrt{g(x)}}{x-a}$ trong đó $\sqrt[3]{f(a)} = \sqrt{g(a)} = M$, ta làm như sau:

Ta viết $L = \lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\sqrt[3]{f(x)}-M}{x-a}+\frac{M-\sqrt{g(x)}}{x-a}\right)$.

Tìm từng giới hạn

$\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{f(x)}-M}{x-a}$; $\lim\limits_{x\to a}\frac{M-\sqrt{g(x)}}{x-a}$,

rồi suy ra kết quả cần tìm.

★***Thí dụ 7***. *Tính đạo hàm hàm số sau tại điểm $x = 0$:*

$$y = f(x) = \begin{cases}\dfrac{e^{\tan x-\sin x}-1}{x^2} & khi\ x \neq 0\\ 0 & khi\ x = 0.\end{cases}$$

(Xem tiếp trang 15)

Thử sức TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 3

(Thời gian làm bài: 180 phút)

I. PHẦN CHUNG

Câu 1 (*2 điểm*)

Cho hàm số $y=\dfrac{(2m-1)x-m^2}{x-1}$ (1)

(m là tham số).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1) ứng với $m=-1$.

2) Tìm m để đồ thị hàm số (1) tiếp xúc với đường thẳng $y=x$.

Câu 2 (*2 điểm*)

1) Giải phương trình

$$\log_2(x(x+9))+\log_2\frac{x+9}{x}=0.$$

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+y^2+\dfrac{2xy}{x+y}=1\\ \sqrt{x+y}=x^2-y. \end{cases}$$

Câu 3 (*1 điểm*)

1) Tìm giới hạn $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{e^{-2x^2}-\sqrt[3]{1+x^2}}$.

2) Tính tích phân $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\,dx}{(\sin x+\cos x)^3}$.

Câu 4 (*1 điểm*)

Cho hình chóp cụt tam giác đều ngoại tiếp một hình cầu bán kính r cho trước. Tính thể tích hình chóp cụt, biết rằng cạnh đáy lớn gấp đôi cạnh đáy nhỏ.

Câu 5 (*1 điểm*)

Cho phương trình $\dfrac{3x^2-1}{\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2x-1}+mx$

(với m là tham số).

Tìm m để phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

II. PHẦN RIÊNG (*Thí sinh chỉ làm một trong hai phần*)

THEO CHƯƠNG TRÌNH CHUẨN

Câu 6a (*2 điểm*)

1) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mp(P) có phương trình $x+y+z+3=0$; đường thẳng d có phương trình $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z}{1}$ và các điểm $A(3;1;1)$; $B(7;3;9)$; $C(2;2;2)$.

a) Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng d và song song với mp(P).

b) Tìm tọa độ điểm M thuộc mp(P) sao cho $|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất.

2) Cho đường tròn (C): $x^2+y^2-6x-2y+1=0$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua $M(0;2)$ và cắt (C) theo một dây cung có độ dài $l=4$.

Câu 7a (*1 điểm*)

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n (với $n>2$), ta có $n^n(n-2)^{n-2}>(n-1)^{2(n-1)}$.

THEO CHƯƠNG TRÌNH NÂNG CAO

Câu 6b (*2 điểm*)

1) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng (α) có phương trình: $3x+2y-z+4=0$ và hai điểm $A(4;0;0)$ và $B(0;4;0)$. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng AB với mặt phẳng (α) và xác định tọa độ điểm K sao cho KI vuông góc với mặt phẳng (α), đồng thời K cách đều gốc tọa độ O và mặt phẳng (α).

2) Cho elip (E) có phương trình $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{25}=1$. Tìm các điểm M thuộc (E) nhìn hai tiêu điểm của elip (E) dưới một góc 120^o.

Câu 7b (*1 điểm*)

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n (với $n\geq 2$), ta có $\ln^2 n>\ln(n-1).\ln(n+1)$.

NGUYỄN VĂN THÔNG
(*GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng*)

Hướng dẫn ôn tập môn Vật lí
THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG NĂM 2009

Chủ đề DÒNG ĐIỆN XOAY CHIỀU

NGUYỄN VĂN THUẬN
(GV trường ĐHSP Hà Nội)

Trong cấu trúc đề thi tuyển sinh Đại học - Cao đẳng năm 2009 của Bộ Giáo dục và Đào tạo về môn Vật lí, phần chung cho tất cả thí sinh về chủ đề ***Dòng điện xoay chiều*** có 9 câu trắc nghiệm. Nội dung kiến thức chủ đề này gồm: Đại cương về dòng điện xoay chiều; Đoạn mạch điện xoay chiều có *R*, *L*, *C* và *R*, *L*, *C* mắc nối tiếp; Cộng hưởng điện; Công suất dòng điện xoay chiều; Hệ số công suất; Máy biến áp; Truyền tải điện năng; Máy phát điện xoay chiều; Động cơ không đồng bộ ba pha.

Dưới đây là một số thí dụ trắc nghiệm đối với chủ đề này.

★**Thí dụ 1.** *Dòng điện chạy qua một đoạn mạch có biểu thức $i = I_0\sin 100\pi t$. Trong khoảng thời gian từ 0s đến 0,01s, cường độ dòng điện tức thời có giá trị bằng $0,5I_0$ vào những thời điểm*

A. $\frac{1}{500}$s và $\frac{2}{500}$s. **B.** $\frac{1}{300}$s và $\frac{4}{300}$s.
C. $\frac{1}{600}$s và $\frac{5}{600}$s. **D.** $\frac{1}{400}$s và $\frac{3}{400}$s.

Hướng dẫn. Ta có $0,5I_0 = I_0\sin 100\pi t$

$\Rightarrow \sin 100\pi t = 0,5$ hay $100\pi t = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

Do đó ta rút ra $t = \frac{3}{600} \pm \frac{2}{600} + 0,02k$ với $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

Với $k = 0$ thì $t = t_- = \frac{3-2}{600} = \frac{1}{600}$(s) và

$t = t_+ = \frac{3+2}{600} = \frac{5}{600}$(s).

Chọn C. ❐

★**Thí dụ 2.** *Đặt vào hai đầu đoạn R, L, C không phân nhánh một hiệu điện thế xoay chiều $u = U_0\sin\omega t$ thì dòng điện trong mạch là $i = I_0\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$. Đoạn mạch điện này luôn luôn có*

A. $Z_L = R$. **B.** $Z_L = Z_C$.
C. $Z_L > Z_C$. **D.** $Z_L < Z_C$.

Hướng dẫn. Theo đề bài thì *i* sớm pha hơn *u* nên đoạn mạch có tính dung kháng, nghĩa là $Z_L < Z_C$.

Chọn D. ❐

★**Thí dụ 3.** *Đặt hiệu điện thế $u = 125\sqrt{2}\sin 100\pi t$(V) lên hai đầu một đoạn mạch gồm điện trở thuần $R = 30\,\Omega$, cuộn dây thuần cảm có độ tự cảm $L = \frac{0,4}{\pi}$H và ampe kế mắc nối tiếp. Biết ampe kế có điện trở nhỏ không đáng kể. Số chỉ của ampe kế là*

A. 2,5A. **B.** 2,0A. **C.** 3,2A. **D.** 1,8A.

Hướng dẫn. Ta có $Z_L = \omega L = 100\pi.\frac{0,4}{\pi} = 40(\Omega)$

$Z = \sqrt{R^2 + Z_L^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50(\Omega)$, suy ra

$I = \frac{U}{Z} = \frac{125}{50} = 2,5(A)$.

Chọn A. ❐

★**Thí dụ 4.** *Đặt vào hai đầu đoạn mạch R, L, C không phân nhánh một hiệu điện thế $u = 220\sqrt{2}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$(V) thì cường độ dòng điện qua đoạn mạch có biểu thức*

$i = 2\sqrt{2}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$ (A). *Công suất tiêu thụ của đoạn mạch này là*

A. 220 W. B. $220\sqrt{2}$ W.

C. 380 W. D. $380\sqrt{2}$ W.

Hướng dẫn. Công suất $P = UI\cos\varphi$ với $\varphi = \varphi_u - \varphi_i = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$.

Vậy $P = 220.2.\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 220\sqrt{2}$ (W).

Chọn B. ❒

★Thí dụ 5. *Một máy biến thế có cuộn sơ cấp 1000 vòng dây được mắc vào mạng điện xoay chiều có hiệu điện thế hiệu dụng 220V. Khi đó hiệu điện thế hiệu dụng ở hai đầu cuộn thứ cấp là 484V. Bỏ qua mọi hao phí của máy biến thế. Số vòng dây của cuộn thứ cấp là*

A. 1500. B. 2000. C. 2200. D. 2500.

Hướng dẫn. Ta có công thức $\frac{n_2}{n_1} = \frac{U_2}{U_1}$

$\Rightarrow n_2 = \frac{U_2}{U_1}n_1 = \frac{484}{220}.1000 = 2200$.

Chọn C. ❒

Dưới đây là một số câu trắc nghiệm về chủ đề ***Dòng điện xoay chiều****, các bạn tự làm.*

Câu 1. Đặt vào hai đầu đoạn mạch điện R, L, C không phân nhánh một hiệu điện thế xoay chiều có tần số 50Hz. Biết điện trở thuần $R = 25\Omega$, cuộn dây thuần cảm có $L = \frac{1}{\pi}$H. Để hiệu điện thế ở hai đầu đoạn mạch trễ pha $\frac{\pi}{4}$ so với cường độ dòng điện thì dung kháng của tụ điện là

A. 175Ω. **B.** 125Ω. **C.** 100Ω. **D.** 150Ω.

Câu 2. Đặt hiệu điện thế $u = U_0\sin\omega t$ vào hai đầu đoạn mạch R, L, C không phân nhánh. Biết độ tự cảm và điện dung được giữ không đổi. Điều chỉnh trị số điện trở R để công suất tiêu thụ của đoạn mạch đạt cực đại. Khi đó hệ số công suất của đoạn mạch bằng

A. 0,85. **B.** 0,5. **C.** 1. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 3. Một máy biến thế có số vòng của cuộn sơ cấp là 5000 và thứ cấp là 1000. Bỏ qua mọi hao phí của máy biến thế. Đặt vào hai đầu cuộn sơ cấp hiệu điện thế xoay chiều có giá trị hiệu dụng 100V thì hiệu điện thế hiệu dụng ở hai đầu cuộn thứ cấp khi để hở có giá trị là

A. 20V. **B.** 40V. **C.** 70V. **D.** 100V.

Câu 4. Cho đoạn mạch điện xoay chiều gồm cuộn dây mắc nối tiếp với tụ điện. Độ lệch pha của hiệu điện thế giữa hai đầu cuộn dây so với cường độ dòng điện trong mạch là $\frac{\pi}{3}$. Hiệu điện thế hiệu dụng giữa hai đầu tụ điện bằng $\sqrt{3}$ lần hiệu điện thế hiệu dụng giữa hai đầu cuộn dây. Độ lệch pha của hiệu điện thế giữa hai đầu cuộn dây so với hiệu điện thế giữa hai đầu đoạn mạch trên là

A. $\frac{\pi}{2}$. **B.** $\frac{\pi}{3}$ **C.** $\frac{2\pi}{3}$. **D.** $-\frac{\pi}{3}$.

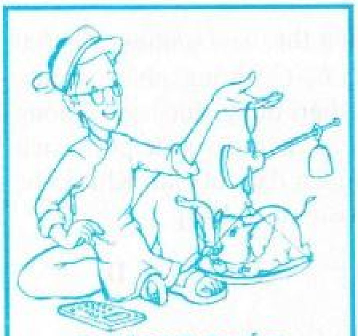
Câu 5. Một đoạn mạch R, L, C không phân nhánh gồm điện trở thuần 100Ω, cuộn dây thuần cảm có hệ số tự cảm $\frac{1}{\pi}$H và tụ điện có điện dung C thay đổi được. Đặt vào hai đầu đoạn mạch hiệu điện thế $u = 200\sqrt{2}\sin 100\pi t$ (V). Thay đổi điện dung C của tụ điện cho đến khi hiệu điện thế giữa hai đầu cuộn dây đạt giá trị cực đại. Giá trị cực đại đó bằng

A. $100\sqrt{2}$ V. **B.** 200V.

C. $220\sqrt{2}$ V. **D.** 220V.

Đáp án kì trước (THTT số 380, tháng 2 năm 2009)

Câu 1: Chọn C ; Câu 2: Chọn C ; Câu 3: Chọn D ; Câu 4: Chọn C ; Câu 5: Chọn D.



PHƯƠNG PHÁP
GIẢI TOÁN

Phương pháp lượng giác hóa có thể áp dụng để giải nhiều dạng bài toán đại số và giải tích khác nhau như: giải phương trình, hệ phương trình, tìm miền giá trị của hàm số, chứng minh bất đẳng thức, tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số hoặc các biểu thức đại số... Nội dung của phương pháp là tìm cách đổi biến lượng giác phù hợp với yêu cầu và giả thiết của bài toán để đưa một biểu thức đại số hoặc một hàm số đại số phức tạp về một biểu thức lượng giác đơn giản và từ đó sử dụng các công thức biến đổi lượng giác quen thuộc để tìm ra lời giải cho bài toán. Bài viết xin trình bày một áp dụng của phương pháp lượng giác hoá để giải một số bài toán khó về giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số hoặc của một biểu thức đại số trong kì thi tuyển sinh Đại học và Cao đẳng năm 2008 vừa qua.

Phương pháp lượng giác hoá

ĐẶNG THANH HẢI
TRẦN TUYẾT THANH
(GV Học viện PKKQ, Sơn Tây – Hà Nội)

Bài toán 1. *Cho hai số thực x, y thay đổi và thoả mãn hệ thức $x^2+y^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $P=\dfrac{2(x^2+6xy)}{1+2xy+2y^2}$.

(Đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng năm 2008 – Khối B)

Lời giải. Do $x^2+y^2=1$, nên tồn tại góc α sao cho $x=\cos\alpha$, $y=\sin\alpha$. Lúc đó

$$P=\frac{2(\cos^2\alpha+6\cos\alpha\sin\alpha)}{1+2\cos\alpha\sin\alpha+2\sin^2\alpha}=\frac{1+\cos2\alpha+6\sin2\alpha}{2+\sin2\alpha-\cos2\alpha}$$

$$\Leftrightarrow(2+\sin2\alpha-\cos2\alpha)P=1+\cos2\alpha+6\sin2\alpha$$

$$\Leftrightarrow(1+P)\cos2\alpha+(6-P)\sin2\alpha=2P-1 \quad (1)$$

Phương trình (1) có nghiệm theo α khi và chỉ khi

$$(1+P)^2+(6-P)^2\ge(2P-1)^2 \Leftrightarrow 2P^2+6P-36\le0$$

$$\Leftrightarrow -6\le P\le3.$$

• Với $P=3$, từ (1) suy ra

$$4\cos2\alpha+3\sin2\alpha=5\Leftrightarrow\frac{4}{5}\cos2\alpha+\frac{3}{5}\sin2\alpha=1 \quad (2)$$

Đặt $\cos\varphi=\dfrac{4}{5}$, $\sin\varphi=\dfrac{3}{5}$ $\left(0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Từ (2) suy ra

$$\cos(2\alpha-\varphi)=1\Leftrightarrow2\alpha-\varphi=2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$$

$\Leftrightarrow\alpha=\dfrac{\varphi}{2}+k\pi$. Do đó

$$\begin{cases}x=\cos\left(\dfrac{\varphi}{2}+k\pi\right)=(-1)^k\cos\dfrac{\varphi}{2}\\ y=\sin\left(\dfrac{\varphi}{2}+k\pi\right)=(-1)^k\sin\dfrac{\varphi}{2}\end{cases}$$

$\Leftrightarrow(x\,;y)=\left(\dfrac{3}{\sqrt{10}};\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)$ (khi k chẵn)

hoặc $(x\,;y)=\left(-\dfrac{3}{\sqrt{10}};-\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)$ (khi k lẻ).

• Với $P=-6$, từ (1) suy ra

$$-5\cos2\alpha+12\sin2\alpha=-13$$

$$\Leftrightarrow\frac{5}{13}\cos2\alpha-\frac{12}{13}\sin2\alpha=1 \quad (3)$$

Đặt $\cos\theta=\dfrac{5}{13}$, $\sin\theta=\dfrac{12}{13}$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Từ (3) suy ra

$$\cos(2\alpha+\theta)=1 \Leftrightarrow \alpha=-\frac{\theta}{2}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Do đó $\begin{cases} x=\cos\left(-\dfrac{\theta}{2}+k\pi\right) \\ y=\sin\left(-\dfrac{\theta}{2}+k\pi\right) \end{cases}$

$\Leftrightarrow (x\,;y)=\left(\dfrac{3}{\sqrt{13}}\,;-\dfrac{2}{\sqrt{13}}\right)$ (khi k chẵn)

hoặc $(x\,;y)=\left(-\dfrac{3}{\sqrt{13}}\,;\dfrac{2}{\sqrt{13}}\right)$ (khi k lẻ).

Từ các kết quả trên suy ra $\min P=-6$ và $\max P=3$. ❒

✪Bài toán 2. *Cho x, y là hai số thực không âm thay đổi. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P=\frac{(x-y)(1-xy)}{(1+x)^2(1+y)^2}.$$

(Đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng năm 2008 – Khối D)

Lời giải. Đặt $x=\tan\alpha$, $y=\tan\beta$, $\left(0\le\alpha,\beta<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Khi đó ta có

$$P=\frac{(\tan\alpha-\tan\beta)(1-\tan\alpha\tan\beta)}{(1+\tan\alpha)^2(1+\tan\beta)^2}$$

$$=\frac{\left(\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}\right)\left(1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}\right)}{\left(1+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2\left(1+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}\right)^2}$$

$$=\frac{(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2(\sin\beta+\cos\beta)^2}$$

$$=\frac{\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)}{(1+\sin2\alpha)(1+\sin2\beta)}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin2\alpha-\sin2\beta}{(1+\sin2\alpha)(1+\sin2\beta)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\sin2\beta}-\frac{1}{1+\sin2\alpha}\right).$$

Do $0\le2\alpha, 2\beta<\pi$ nên $0\le\sin2\alpha\le1$, $0\le\sin2\beta\le1$

suy ra $-\dfrac{1}{4}\le P\le\dfrac{1}{4}$.

Ta có $P=\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin2\beta=0\\ \sin2\alpha=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta=0\\ \alpha=\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$

Suy ra $\begin{cases}x=1\\ y=0.\end{cases}$

Ta có $P=-\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin2\beta=1\\ \sin2\alpha=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta=\dfrac{\pi}{4}\\ \alpha=0\end{cases}$

Suy ra $\begin{cases}x=0\\ y=1.\end{cases}$

Từ các kết quả trên suy ra

$$\min P=-\frac{1}{4},\ \max P=\frac{1}{4}.$$ ❒

✪Bài toán 3. *Cho hai số thực x, y thay đổi và thoả mãn hệ thức $x^2+y^2=2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2(x^3+y^3)-3xy$.*

(Đề thi tuyển sinh Cao đẳng năm 2008 – Khối A, B, D)

Lời giải. Từ giả thiết suy ra

$\left(\dfrac{x}{\sqrt2}\right)^2+\left(\dfrac{y}{\sqrt2}\right)^2=1$, nên tồn tại α sao cho

$$\begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt2}=\cos\alpha\\ \dfrac{y}{\sqrt2}=\sin\alpha\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\sqrt2\cos\alpha\\ y=\sqrt2\sin\alpha.\end{cases}$$

Lúc đó $P=4\sqrt2(\cos^3\alpha+\sin^3\alpha)-6\cos\alpha\sin\alpha$

$=4\sqrt2(\cos\alpha+\sin\alpha)(1-\cos\alpha\sin\alpha)-6\cos\alpha\sin\alpha$

Đặt $t=\cos\alpha+\sin\alpha$ $\left(|t|\le\sqrt2\right) \Rightarrow \cos\alpha\sin\alpha=\dfrac{t^2-1}{2}$.

Ta có $P=4\sqrt2t\left(1-\dfrac{t^2-1}{2}\right)-3(t^2-1)$

$=2\sqrt2t(3-t^2)-3(t^2-1)=-2\sqrt2t^3-3t^2+6\sqrt2t+3.$

Suy ra $P' = -6\sqrt{2}t^2 - 6t + 6\sqrt{2}$.

$$P' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -\sqrt{2} \\ t = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right. \text{(Thoả mãn } |t| \le \sqrt{2}\text{)}.$$

Từ đó ta có bảng biến thiên:

t	$-\sqrt{2}$		$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$		$\sqrt{2}$
P'	0	+	0	−	
P	-7	$\nearrow$	$\dfrac{13}{2}$	$\searrow$	1

Từ bảng biến thiên suy ra

- $\max P = \dfrac{13}{2} \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos\alpha + \sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

$\Leftrightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{4} \pm \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$. Do đó

$$\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4} \pm \dfrac{\pi}{3}\right) \\ y = \sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} \pm \dfrac{\pi}{3}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x\,;y) = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}; \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$$

hoặc $(x\,;y) = \left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}; \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$.

- $\min P = -7 \Leftrightarrow t = -\sqrt{2} \Leftrightarrow \cos\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right) = -1$

$$\Leftrightarrow \alpha - \frac{\pi}{4} = (2k+1)\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi.$$

Nên $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + (2k+1)\pi\right) \\ y = \sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + (2k+1)\pi\right) \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1. \square \end{cases}$$

*

* *

Để luyện tập, mời các bạn giải các bài toán sau bằng phương pháp lượng giác hóa:

1) Cho các số thực x, y, z, t thoả mãn điều kiện $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z^2 + t^2 = 16 \\ xt + yz \ge 12. \end{cases}$

Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x + z$.

2) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{1 + x^6}{(1+x^2)^3}$.

3) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{3\sqrt{x+3} + 4\sqrt{1-x} + 1}{4\sqrt{x+3} + 3\sqrt{1-x} + 1}.$$

4) Các số thực a, b, c thoả mãn điều kiện $abc + a + c = b$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2}.$$

5) Trong các nghiệm thực x, y của bất phương trình $\log_{x^2+y^2}(x+y) \ge 1$. Hãy tìm nghiệm sao cho biểu thức $P = x + 2y$ đạt giá trị lớn nhất.

GIỚI HẠN... (Tiếp trang 8)

Lời giải. Xét giới hạn

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan x-\sin x}-1}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan x-\sin x}-1}{\tan x-\sin x}.\frac{\tan x-\sin x}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

(vì $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan x-\sin x}-1}{\tan x-\sin x} = \lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t} = 1,$

với $t = \tan x - \sin x$ và

$\tan x - \sin x = \frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x} = \frac{\sin^3 x}{\cos x(1+\cos x)}$, nên

$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3.\frac{1}{\cos x(1+\cos x)} = \frac{1}{2}$).

Do đó $f'(0) = \frac{1}{2}$. □

BÀI TỰ LUYỆN TẬP

1) Tìm $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{4\cos^2 x-1}{3x-\pi}$.

2) Tìm $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^x$.

3) Tìm $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x-1}-\sqrt[3]{8x^3-5x^2+3}\right)$

4) Tìm $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{4\cos^2 x-3}{6x-\pi}$.

5) Tìm $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sqrt{x+1}-1}$.

6) Tìm $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{\tan x}$.

7) Tìm m để hàm số sau liên tục tại điểm $x = \frac{\pi}{3}$:

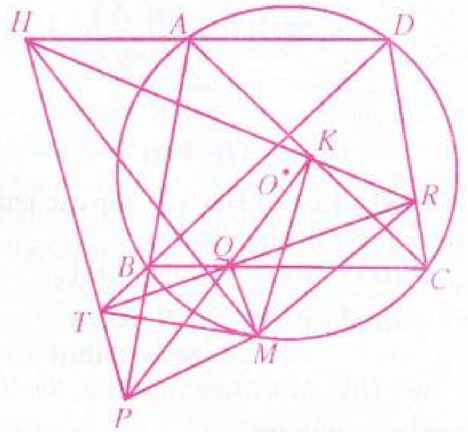
$$y = f(x) = \begin{cases} \frac{\tan x - 3\cot x}{3x-\pi} & \text{khi } x \neq \frac{\pi}{3} \\ m & \text{khi } x = \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

8) Tính đạo hàm hàm số sau tại điểm $x = 0$:

$$y = f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(\cos 2x)}{\sin x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0. \end{cases}$$

ĐƯỜNG THẲNG SIMSON...

(Tiếp trang 5)



Hình 2

Ta còn có bài toán tương tự về đường thẳng Simson ứng với hai điểm trên đường tròn được phát biểu như sau:

✪**Bài toán 4.** *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O); M và N là hai điểm trên đường tròn. Gọi d và Δ là hai đường thẳng Simson mở rộng ứng với các điểm M, N và góc $\widehat{MAN}$. Chứng minh rằng góc tạo bởi d và Δ hoặc bằng $\widehat{MAN}$ hoặc bằng $180^o - \widehat{MAN}$.* (Bạn đọc tự chứng minh).

Chú ý. Khi M, N đối xứng nhau qua O thì hai đường thẳng d và Δ vuông góc với nhau. Kết quả này đã có trong nhiều tài liệu.

CÁC LỚP THCS

Bài T1/381. (Lớp 6) Hãy sắp xếp các phân số sau theo thứ tự từ nhỏ đến lớn

$$\frac{1005}{2002}, \frac{1007}{2006}, \frac{1009}{2010}, \frac{1011}{2014}.$$

TRẦN VĂN HINH
(GV THCS Nam Giang, Nam Trực, Nam Định)

Bài T2/381. (Lớp 7) Cho tam giác ABC cân tại A. Lấy điểm M trong tam giác sao cho $\widehat{MAC} = \widehat{MBA} = \widehat{MCB}$. Hãy so sánh diện tích hai tam giác ABM và CBM.

NGUYỄN KHÁNH NGUYÊN
(GV THCS Hồng Bàng, Hải Phòng)

Bài T3/381. Tính tổng của tất cả các phân số có dạng $\frac{a}{b}$ trong đó a, b là các ước số tự nhiên của 27000 và ƯSCLN $(a, b) = 1$.

TRẦN BÁ DUY LINH
(GV THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long)

Bài T4/381. Cho các số a, b, c thỏa mãn $a > 0, b > c, a^2 = bc, a + b + c = abc$.
Chứng minh rằng
$a \geq \sqrt{3}, b \geq \sqrt{3}, 0 < c \leq \sqrt{3}$.

NGUYỄN THỊ HIỀN
(Y5C , ĐH Y Khoa Hà Nội)

Bài T5/381. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90^\circ$ và $\widehat{BCD} < 90^\circ$. Trên tia đối của tia AC lấy điểm E sao cho DA là tia phân giác của góc BDE. Gọi M là điểm tùy ý nằm giữa D và E, trên tia đối của tia BE lấy điểm N sao cho $\widehat{NCB} = \widehat{MCD}$. Chứng minh rằng MC là tia phân giác của góc DMN.

HUỲNH THANH TÂM
(CB Bưu điện An Nhơn, Bình Định)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/381. Chứng minh rằng phương trình $x^3 + 3y^3 = 5$ có vô số nghiệm hữu tỉ.

NGUYỄN VĂN NHIỆM
(GV THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa)

Bài T7/381. Giả sử a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác, chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{\sqrt{ab+ac}} + \frac{1}{\sqrt{bc+ba}} + \frac{1}{\sqrt{ca+cb}} \geq \frac{1}{\sqrt{a^2+bc}} + \frac{1}{\sqrt{b^2+ac}} + \frac{1}{\sqrt{c^2+ab}}.$$

ĐOÀN VĂN SOAN
(GV THPT Lý Thường Kiệt, Việt Yên, Bắc Giang)

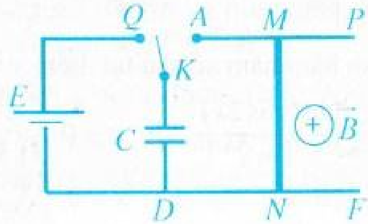
Bài T8/381. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích của các mặt $ABCD$, $ABB'A'$, $ADD'A'$. Biết tổng bình phương diện tích của tất cả các mặt của tứ diện $AB'CD'$ bằng 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = 2\left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3}\right) + 3(S_1 + S_2 + S_3).$$

NGUYỄN MINH NHIÊN
(GV THPT Quế Võ số 1, Bắc Ninh)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/381. Trên mặt phẳng nằm ngang có hệ như hình vẽ. Cho biết nguồn điện có suất điện động E, tụ điện có điện dung C. AP và DF là hai thanh kim loại dài, đặt song song với nhau, cách nhau một khoảng d. Thanh dẫn MN có khối lượng m, chiều dài d, tựa trên hai thanh kim loại và có thể chuyển động tịnh tiến dọc theo hai thanh đó. Hệ được đặt trong từ trường đều có cảm ứng từ $\vec{B}$ hướng thẳng đứng vuông góc với mặt phẳng khung dây. Ban đầu khóa K ở chốt Q. Sau khoảng thời gian đủ lớn chuyển khóa K sang chốt A.



(Xem tiếp trang 27)

CUỘC THI GIẢI TOÁN

KỈ NIỆM 45 NĂM TẠP CHÍ TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ

THE M&Y 45th ANNIVERSARY CONTEST

LTS. Cuộc thi giải toán đặc biệt kỉ niệm 45 năm tạp chí THTT sẽ đăng đề thi từ số báo 381 (3.2009) đến số 385 (7.2009). Mỗi số gồm 4 đề toán: 2 đề dành cho các lớp THCS (T1/THCS), 2 đề dành cho các lớp THPT (T1/THPT) Thời hạn nhận bài là 2 tháng, tính từ cuối tháng của số báo có đăng đề. Mỗi bài giải viết trên một tờ giấy riêng, ghi rõ họ tên, trường, lớp (có thể để chung phong bì). Ngoài phong bì ghi rõ: ***Bài dự thi giải toán 45 năm THTT*** *có dán tem. Bài giải sẽ đăng lần lượt từ số 385 (7.2009) đến số 389 (11.2009). Kết quả cuộc thi được công bố trên số 390 (12.2009) và trao giải vào Lễ kỉ niệm 45 năm THTT. Có giải thưởng tập thể dành cho trường có nhiều học sinh tham gia. Rất mong được nhiều bạn trẻ yêu toán tham gia cuộc thi này.*

Bài T1/THCS. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$5a^2 + 4b^2 + 3c^2 + 2abc = 60.$$

Chứng minh rằng $a + b + c \leq 60$.

TRỊNH XUÂN TÌNH
(GV THPT Phú Xuyên B, Hà Nội)

Bài T2/THCS. Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp được một đường tròn và điểm P nằm trong tứ giác sao cho AP, DP tương ứng cắt đoạn BC tại S, R. Chứng minh rằng tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác ABS, DCR, PAD, PSR cùng nằm trên một đường tròn.

TRẦN QUANG HÙNG
(Hà Nội)

Bài T1/THPT. Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = -1;\ u_2 = -2 \\ n.u_{n+2} - (3n-1)u_{n+1} + 2(n+1)u_n = 3 \quad (n \in \mathbb{N}^*). \end{cases}$$

Đặt $S = \sum_{n=1}^{2009} u_n + 2(2^{2009} - 1)$.

Chứng minh rằng S chia hết cho 2009.

ĐẬU THANH KỲ
(GV THPT Diễn Châu IV, Nghệ An)

Bài T2/THPT. Cho hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Các đường thẳng a, b theo thứ tự là đường trung trực của các đoạn OC, OD. Điểm M nằm trên đường tròn (O). Đường thẳng MA cắt b tại E, đường thẳng MB cắt a tại F. Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định khi điểm M di động trên đường tròn (O).

NGUYỄN MINH HÀ
(GV khối THPT chuyên ĐHSP Hà Nội

T1/Junior. Let a, b, c be positive real numbers such that

$$5a^2 + 4b^2 + 3c^2 + 2abc = 60.$$

Prove the inequality $a + b + c \leq 60$.

T2/Junior. A point P is chosen inside a tangential quadrilateral $ABCD$ such that AP and DP meet BC at S and R respectively. Prove that the incenters of the triangles ABS, DCR, PAD, PSR lie on the same circle.

T1/Senior Let (u_n) be a sequence given recursively as follows:

$$\begin{cases} u_1 = -1;\ u_2 = -2 \\ n.u_{n+2} - (3n-1)u_{n+1} + 2(n+1)u_n = 3 \quad (n \in \mathbb{N}^*). \end{cases}$$

Let $S = \sum_{n=1}^{2009} u_n + 2(2^{2009} - 1)$.

Prove that S is divisible by 2009.

T2/Senior. Let $ABCD$ be a quadrilateral inscribed in a circle (O) and let a, b be the perpendicular bisectors of the line segments OC, OD respectively. M is a point on the circle (O). The line MA meets b at E, the line MB meets a at F. Prove that the line EF is always tangent to a fixed circle when M moves on the circle (O).

Translated by LE MINH HA

★ **Bài T1/377.** *Cho*

$$A=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2007}+\frac{1}{2008};$$

$$B=\frac{2007}{1}+\frac{2006}{2}+\frac{2005}{3}+...+\frac{2}{2006}+\frac{1}{2007}.$$

Tính $\frac{B}{A}$.

Lời giải. Tách 2007 bằng tổng của 2007 số 1 và biến đổi như sau

$$B=\frac{2007}{1}+\frac{2006}{2}+\frac{2005}{3}+...+\frac{2}{2006}+\frac{1}{2007}$$

$$=\left(1+\frac{2006}{2}\right)+\left(1+\frac{2005}{3}\right)+...+\left(1+\frac{2}{2006}\right)$$

$$+\left(1+\frac{1}{2007}\right)+1$$

$$=\frac{2008}{2}+\frac{2008}{3}+...+\frac{2008}{2006}+\frac{2008}{2007}+\frac{2008}{2008}$$

$$=2008\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2006}+\frac{1}{2007}+\frac{1}{2008}\right)$$

$$=2008.A.$$

Suy ra $\frac{B}{A}=2008$. □

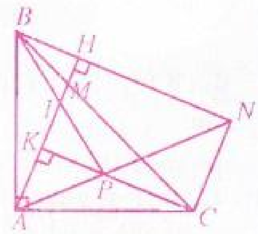
Nhận xét. 1) Có thể biến đổi mỗi số hạng của B thành dạng $\frac{2008-n}{n}=\frac{2008}{n}-1$ với $n = 1, 2, ..., 2007$ rồi chọn 2008 làm thừa số chung.

2) Các bạn sau có lời giải đúng, gọn:

Phú Thọ: *Nguyễn Thanh Tâm, Nguyễn Minh Đạt*, 6B, THCS Tân Phú, Tân Sơn, *Nguyễn Thị Mỹ Linh*, 6A1, *Tạ Diệu Ly, Cao Trung Đức, Nguyễn Tiến Thành*, 6A3, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Thị Trang*, 6B THCS Vĩnh Tường, *Nguyễn Tú Anh, Phạm Thị Vân Anh, Nguyễn Minh Tuấn, Nguyễn Thành Công, Nguyễn Văn Hải A, Nguyễn Tấn Dũng, Nguyễn Đức Đại*, 6A1, THCS Yên Lạc, *Phạm Hoàng Dũng, Nguyễn Minh Phương, Hoàng Hải Đăng, Ngô Thị Châu Giang, Đỗ Thị Thùy Linh, Phạm Thị Hồng Duyên, Lê Thị Việt Hà, Nguyễn Minh Trung, Lê Nguyễn Hà An*, 6A1, THCS Hai Bà Trưng, TX. Phúc Yên; **Hà Nam:** *Lê Minh Đức*, 6C, THCS Đinh Công Tráng, Thanh Bình, Thanh Liêm; **Nam Định:** *Lưu Thị Thúy Nga*, 6B, THCS Hải Hậu; **Hải Phòng:** *Bùi Lê Công*, 6D4, THCS Đà Nẵng, Ngô Quyền; **Nghệ An:** *Võ Duy Văn, Lê Hồ Minh Tuấn, Hồ Thị Thủy, Trần Thị Thu Hằng, Nguyễn Đăng Nguyên*, 6A, *Đặng Văn Hoàng, Nguyễn Hồ Hải Chinh, Phạm Văn Quyến, Chu Thành Cương, Chu Ngọc Hoàng*, 6B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; *Phan Hoàng Thanh Tùng*, 6D, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, *Nguyễn Công Chính*, 6A, THCS Lê Hồng Phong, Hưng Nguyên, *Nguyễn Văn Cường*, 6D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Thị Quỳnh Như*, 6/1, *Trần Thị Thu Hảo*, 6/2, THCS Nam Hà, TP. Hà Tĩnh; *Nguyễn Thị Vân Anh*, 6B, THCS Bình An, An Lộc, *Lê Hoàng Long*, 6/1, THCS Mỹ Châu, *Thái Nguyễn Ngọc Uyên*, 6B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, *Nguyễn Trường Sơn*, 6B, THCS TTr. Kỳ Anh; **Đà Nẵng:** *Cao Mỹ Duyên*, 6/1, THCS Nguyễn Khuyến, Hải Châu.

VIỆT HẢI

★ **Bài T2/377.** *Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi M là điểm tuỳ ý trên cạnh BC (M khác B, M khác C và M không là trung điểm của cạnh BC). Từ B, C kẻ các đường thẳng theo thứ tự vuông góc với AM tại H và K. Qua C kẻ đường thẳng song song với AM cắt BH tại N, AN cắt CK tại P, BP cắt AM tại I. Chứng minh rằng IB = IP.*



Lời giải. Có hai trường hợp xảy ra là $BM > CM$ và $BM < CM$. Cả hai trường hợp đó, ta đều chứng minh như sau :

Hai tam giác vuông BHA và AKC có $AB = AC$ (do ΔABC vuông cân), $\widehat{BAH}=\widehat{ACK}$ (vì cùng phụ với $\widehat{CAH}$).

Vậy $\Delta BHA = \Delta AKC$, suy ra $BH = AK$ và $AH = CK$ (*)

Lại có tứ giác $CKHN$ là hình chữ nhật (vì có bốn góc vuông) nên $CK = HN$.

Kết hợp với (*), ta được $AH = HN$ hay tam giác AHN vuông cân tại H, suy ra $\widehat{KAP}=45^0$, do đó tam giác AKP vuông cân tại K , dẫn đến $AK = KP$.

Kết hợp với (*), suy ra $BH = KP$. Hai tam giác vuông BHI và PKI có $BH = PK$, $\widehat{BIH} = \widehat{PIK}$ (đối đỉnh) nên bằng nhau, do đó $BI = IP$. ❐

Nhận xét. 1) Có rất nhiều bạn đã gửi bài giải về tòa soạn và đa số các bạn đều giải đúng. Các bạn nên lưu ý thêm ở hai điều sau :

+ Cần vẽ hình chính xác và rõ ràng.

+ Khi viết các kí hiệu $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ (hoặc $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$), cần lưu ý thứ tự các đỉnh sao cho tương ứng (để $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$, $\widehat{C} = \widehat{C'}$).

2) Các bạn sau có lời giải tốt hơn cả:

Hà Tĩnh: *Bùi Thị Phương Mai*, 7A, *Đặng Thị Huyền Trang*, 7C, THCS Xuân Diệu, Can Lộc; **Phú Thọ**: *Đào Khánh Linh*, 8A1, THCS Lâm Thao; **Bắc Giang:** *Hoàng Thu Vân*, 7A1, THCS Ngô Sĩ Liên; **Bắc Ninh**: *Nguyễn Thị Hương Lý*, 7A1, THCS Đông Thọ, Yên Phong, *Nguyễn Hữu Dũng*, *Nguyễn Văn Kiên*, 7A, *Nguyễn Huy Giang*, 7B, THCS Hàn Thuyên, Lương Tài; **Hà Nội**: *Nguyễn Hoàng Nam*, 7C, THCS Thạch Thất, *Nguyễn Thị Ngọc Hà*, 6A1, THCS Tế Tiêu, Mỹ Đức, *Đặng Thắng Lợi* 8B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa; **Nghệ An**: *Vũ Văn Tuệ*, 8A1, *Hồ Khánh Duy*, *Hoàng Danh Thắng*, 7A, *Chu Thành Cương*, *Phạm Văn Quyền*, *Chu Ngọc Hoàng*, 6B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, *Phan Thanh Tùng*, 7D, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, *Nguyễn Công Chính*, 6A, THCS Lê Hồng Phong, Hưng Nguyên; **Quảng Trị**: *Nguyễn Kim*, 7A, THCS Phan Đình Phùng.

PHAN THỊ MINH NGUYỆT

★ Bài T3/377. *Cho a, b, c, d, e là các số tự nhiên thoả mãn*

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + e^4 = 2009^{2008}.$$

Chứng minh rằng abcde chia hết cho 10^4.

Lời giải. (*Theo một số bạn*)

Dễ thấy rằng với số tự nhiên n tùy ý thì:

• n^2 chia 8 dư 0, 1, hoặc 4. Do đó n^4 chia 8 dư 0 hoặc 1 (1)

• n^2 chia 5 dư 0, 1 hoặc 4. Do đó n^4 chia 5 dư 0 hoặc 1 (2)

Trở lại với bài toán, ta có:

2009 chia 8 dư 1 nên 2009^{2008} chia 8 dư 1. Do đó $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + e^4$ chia 8 dư 1. Kết hợp với (1) suy ra 4 trong 5 số: a^4, b^4, c^4, d^4, d^4, e^4 chia hết cho 8, số còn lại chia 8 dư 1. Vậy trong các số tự nhiên a, b, c, d có 4 số chẵn. Do đó $abcde \,\vdots\, 2^4$ (3)

Tương tự, vì 2009^{2008} chia 5 dư 1 nên $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + e^4$ chia 5 dư 1. Kết hợp với (2) suy ra 4 trong 5 số: a^4, b^4, c^4, d^4, d^4, e^4 chia hết cho 5, số còn lại chia 5 dư 1. Vậy trong các số tự nhiên a, b, c, d, e có 4 số chia hết cho 5. Vậy $abcde \,\vdots\, 5^4$ (4)

Do $(2^4, 5^4) = 1$, từ (3), (4) suy ra $abcde \,\vdots\, 10^4$. ❐

Nhận xét. 1) Bài toán này được nhiều bạn chứng minh như sau:

• Với $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$ thì $n^4 \,\vdots\, 16$; với $n = 2k + 1$ thì n^4 chia 16 dư 1.

• Với $n = 5k$, $k \in \mathbb{N}$ thì $n^4 \,\vdots\, 5$, với $n = 5k \pm 1$, $n = 5k \pm 2$ thì n^4 chia 5 dư 1.

Lập luận như lời giải trên, cũng suy ra được: *Trong 5 số a, b, c, d, e có 4 số chẵn và có 4 số chia hết cho 5.* Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

2) Hầu hết các bạn đều giải được bài toán, một vài bạn lập luận không chính xác. Các bạn có lời giải tốt là:

Bắc Ninh: *Nguyễn Hữu Dũng*, 7A, *Nguyễn Huy Giang*, 7B, *Chu Hương Giang*, 9A, THCS Hàn Thuyên, Lương Tài, *Nguyễn Thị Hương Lý*, 7A1, THCS Đông Thọ, Yên Phong; **Phú Thọ:** *Đặng Duy Linh*, 9E, THCS Văn Lang, Việt Trì; **Vĩnh Phúc:** *Phạm Quang Liêm*, 7A1, *Nguyễn Tuấn Anh Quân*, 9A1, THCS Yên Lạc; **Hải Phòng:** *Hoàng Ngọc Mai*, 8A1, THCS Hồng Bàng; **Nghệ An:** *Nguyễn Bá Khánh Hòa*, 6B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, *Nguyễn Văn Tiến*, 8D, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Quảng Trị:** *Nguyễn Trường Sinh*, 9A, THCS Phan Đình Phùng, TX. Đông Hà, *Nguyễn Hữu Ánh* , 9I, THCS Thành Cổ, TX. Quảng Trị.

TRẦN HỮU NAM

★ Bài T4/377. *Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn* $a \geq b \geq c$. *Chứng minh bất đẳng thức*

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0.$$

Lời giải. *Cách 1.* (*Theo đa số các bạn*).

Nhận thấy

$$\begin{aligned}&(a^3b+b^3c+c^3a)-(ab^3+bc^3+ca^3)\\&= ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-b^2+b^2-a^2)\\&= (a^2-b^2)(ab-ca)+(b^2-c^2)(bc-ca)\\&= (a-b)(b-c)(a^2+ab)+(b-c)(b-a)(bc+c^2)\\&= (a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c).\end{aligned}$$

Do $a \geq b \geq c > 0$ nên $(a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c) \geq 0$.

Từ đó suy ra

$$a^3b+b^3c+c^3a \geq ab^3+bc^3+ca^3 \qquad (1)$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương, ta có
$a^3b+ab^3 \ge 2a^2b^2$; $b^3c+bc^3 \ge 2b^2c^2$;
$c^3a+ca^3 \ge 2c^2a^2$ nên

$$(a^3b+b^3c+c^3a)+(ab^3+bc^3+ca^3) \ge 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra
$2(a^3b+b^3c+c^3a) \ge 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$.

Từ đó suy ra
$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a) \ge 0$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Cách 2. Ta có $a \ge b \ge c > 0$ nên
$a^2b(a-b) \ge ab^2(a-b)$; $c^2a(c-a) \ge abc(c-a)$.
Do đó $a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)$
$\ge ab^2(a-b)+b^2c(b-c)+abc(c-a)$
$= b(a-b)(b-c)(a-c) \ge 0$. ❐

Nhận xét. 1) Rất nhiều bạn tham gia giải bài này, nhưng không ít bạn lập luận thiếu chính xác, chẳng hạn như

Từ $a > b$, $c > d$ suy ra $a-c > b-d$ (!); $ac > bd$ (!)

Từ $a \ge b \ge c$ suy ra $b+c-a > 0$ (!).

Có bạn sử dụng BĐT hoán vị $a_1 \ge a_2 \ge a_3$, $b_1 \le b_2 \le b_3$
$a_1b_2 + a_2b_2 + a_3b_3 \le a_1b_3 + a_2b_1 + a_3b_2$ vào giải.

Đặc biệt, bạn *Lê Văn Tú*, 9A2, THPT Yên Lạc, **Vĩnh Phúc** đã nêu và giải được bài toán tổng quát như sau:

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a \ge b \ge c$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n luôn có
$a^nb(a-b)+b^nc(b-c)+c^na(c-a) \ge 0$.

2) Ngoài bạn *Tú*, các bạn sau đây có lời giải chặt chẽ và gọn gàng:

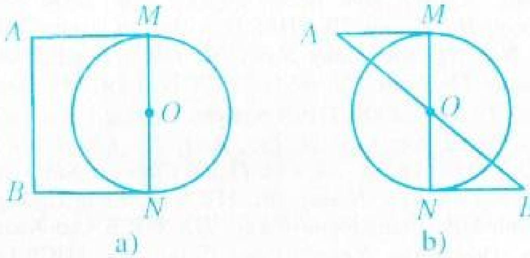
Phú Thọ: *Nguyễn Quốc Hùng*, 9E, THCS Văn Lang, Việt Trì, *Quản Thị Huệ Thu, Kim Huyền Trang, Hà Thị Huyền Trang*, 9A1, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Lê Ngọc Mĩ Linh*, 8C, THCS Tam Dương, *Hà Trung Hiếu*, 8A, *Kim Văn Cương, Nguyễn Quyết Tiến*, 9C, THCS Vĩnh Tường; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Hữu Dũng*, 7A, THCS Hàn Thuyên, Lương Tài, *Trần Thị Ngọc*, 9B, THCS Từ Sơn; **Nam Định:** *Đỗ Thị Thu Hiền*, 9A1, THCS Nghĩa Hưng; **Nghệ An:** *Hoàng Danh Thắng, Lê Ngọc Nguyên*, 7A, *Vũ Văn Tuệ*, 8A, *Đặng Văn Hoàng*, 6B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, *Nguyễn Văn Thắng, Nguyễn Văn Hoàng, Phạm Phú Nguyên*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Vũ Hồng Ái*, 9B, *Hoàng Thị Nguyệt Hà*, 7D, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, *Trương Thị Hiền*, 9H, THCS Bạch Ngọc, Đô Lương; **Quảng Trị:** *Nguyễn Kim*, 7A, *Nguyễn Trường Sinh*, 9A, THCS Phan Đình Phùng, TX. Đông Hà; **Quảng Ngãi:** *Hồ Tấn Vũ*, 8A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★Bài T5/377. *Từ hai điểm A và B (A khác B) nằm ngoài đường tròn (O) kẻ các tiếp tuyến AM, BN tới đường tròn (M, N là các tiếp điểm, M khác N). Chứng minh rằng, nếu AM = BN thì đường thẳng MN hoặc song song với AB hoặc đi qua trung điểm của AB.*

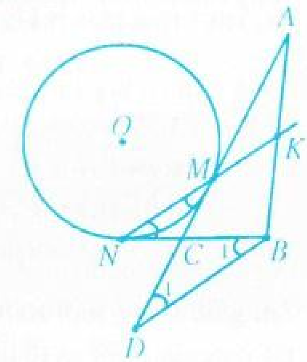
Lời giải. a) Xét trường hợp $AM // BN$:

Vì $AM = BN$ nên hoặc tứ giác $AMNB$ hoặc tứ giác $AMBN$ là hình bình hành, suy ra MN hoặc song song với AB hoặc đi qua trung điểm của AB (h.1a, 1b)



Hình 1

b) Xét trường hợp AM cắt BN tại C. Nếu đường thẳng MN không song song với AB thì nó phải cắt AB chẳng hạn tại K (h. 2). Trên tia AM lấy điểm D ($D \ne A$) sao cho $MD = MA$.



Hình 2

Vì $MC = NC$ và $MD = BN$ ($= MA$) nên $CB = CD$, tức là tam giác BCD cân tại C, do đó $\widehat{B_1} = \widehat{D_1} = \widehat{CMN} = \widehat{CNM}$, suy ra $MN // BD$.
Mặt khác, do $MA = MD$ nên MK là đường trung bình của tam giác ABD. Vậy K là trung điểm của AB. ❐

Nhận xét. 1) Bài toán này có nhiều cách giải (với trường hợp b). Ngoài cách giải trên đây, có thể kẻ qua B đường thẳng song song với MA, cắt MN tại D. Dễ dàng chứng minh được $AMBD$ là hình bình hành rồi suy ra MN đi qua trung điểm của AB.

2) Một số bạn xét thiếu trường hợp $AM//BN$ hoặc có xét đến nhưng chỉ vẽ hình 1a hoặc 1b.

3) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Bắc Ninh: *Lê Nguyễn Hải Anh*, 9A, THCS Yên Phong, *Chu Hương Giang*, 9A, THCS Hàn Thuyên, Lương Tài; **Vĩnh Phúc:** *Bùi Thị Ngọc Mai, Nguyễn Thị Kim Oanh, Nguyễn Minh Hiếu, Nguyễn Trọng Hiệp, Nguyễn Thị Huệ, Nguyễn Ngân Giang, Lê Thị Sơn, Phan Thị Khánh Linh, Kiều Quốc Thái, Phạm Quang Liêm, Nguyễn Thị Thoan*, 7A1, THCS Yên Lạc; **Khánh Hòa:** *Vũ Ngọc Cương*, 8/6, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh; **Quảng Ngãi:** *Hồ Tấn Vũ*, 8A, *Đặng Đình Đường*, 9A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Ngọc Quang*, 9P2, THCS Ngô Sĩ Liên, Q. Tân Bình; **Bình Định:** *Nguyễn Thị Bạch Tuyết*, 9A6, THCS Phước Hưng, Tuy Phước, *Lê Trung Vinh*, 8A7, THCS Bồng Sơn, Hoài Nhơn; **Kiên Giang:** *Trần Văn Hợi*, 9/1, THCS Mai Thị Hồng Hạnh, h. Rồng Giềng.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★ **Bài T6/377.** *Một số được gọi là **số đẹp** nếu nó là hợp số và không chia hết cho 2, 3, 5 (ví dụ ba số 49, 77, 91 là ba **số đẹp** nhỏ nhất). Hỏi có tất cả bao nhiêu **số đẹp** nhỏ hơn 1000?*

Lời giải. Xét tập hợp các số tự nhiên nhỏ hơn 1000. Ta quy ước kí hiệu $|M|$ là số phần tử của tập hợp hữu hạn M và $[x]$ là số nguyên lớn nhất không lớn hơn x.

Trước hết lưu ý rằng, nếu n là số nguyên dương bất kì nhỏ hơn 999 và trong tập hợp $\{1,2,3,...,999\}$ có k số chia hết cho n thì

$$kn \le 999 < (k+1)n \Rightarrow k = \left[\frac{999}{n}\right].$$

Gọi A, B, C tương ứng là tập hợp các số chia hết cho 2, 3, 5.

Số phần tử của mỗi tập hợp là

$$|A| = \left[\frac{999}{2}\right] = 499;\ |B| = \left[\frac{999}{3}\right] = 333;$$

$$|C| = \left[\frac{999}{5}\right] = 199.$$

Tập hợp các số chia hết cho 6 là $A \cap B$

$$\Rightarrow |A \cap B| = \left[\frac{999}{6}\right] = 166.$$

Tập hợp các số chia hết cho 10 là $A \cap C$

$$\Rightarrow |A \cap C| = \left[\frac{999}{10}\right] = 99.$$

Tập hợp các số chia hết cho 15 là $B \cap C$

$$\Rightarrow |B \cap C| = \left[\frac{999}{15}\right] = 66.$$

Tập hợp các số chia hết cho 30 là $A \cap B \cap C$

$$\Rightarrow |A \cap B \cap C| = \left[\frac{999}{30}\right] = 33.$$

Dễ thấy tập hợp các số chia hết cho ít nhất một trong ba số 2, 3, 5 là $A \cup B \cup C$ và

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Hay $|A \cup B \cup C|$

$$= 499 + 333 + 199 - 166 - 99 - 66 + 33 = 733.$$

Do đó số các số tự nhiên nhỏ hơn 100 và không chia hết cho cả ba số 2, 3, 5 là $999 - 733 = 266$.

Trong tập hợp 266 số trên có cả số 1 và các số nguyên tố khác 2, 3, 5. Ta biết rằng có tất cả 165 số nguyên tố nhỏ hơn 1000 và khác 2, 3, 5.

Vậy số *số đẹp* phải tìm là $266 - (165 + 1) = 100$. □

Nhận xét. 1) Hầu hết các bạn làm bài đúng đều giải như trên. Một số bạn cho kết quả thiếu vì không để ý rằng ba số 2, 3, 5 thuộc tập hợp $A \cup B \cup C$; hoặc cho kết quả thừa vì tính cả 1 là *số đẹp*!

Các bạn sau đây có lời giải tốt :

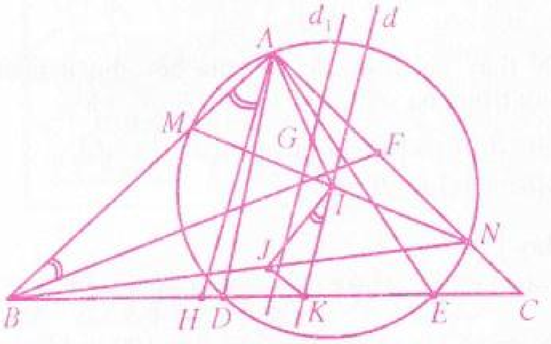
Vĩnh Phúc: *Kim Đình Sơn*, 11A1, *Nguyễn Ngọc Trung*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Bắc Ninh:** *Trần Anh Tuấn*, 11A1, THPT Thuận Thành 1, Bắc Ninh; **Hà Nội:** *Đào Trọng Anh*, 11A4, THPT Nguyễn Gia Thiều, Long Biên; **Ninh Bình:** *Bùi Thị Hoa*, 9A, THCS Đồng Giao, TX Tam Điệp, *Vũ Thanh Tùng*, 11 Toán, THPT chuyên Lương Văn Tụy; **Hải Dương:** *Nguyễn Tuấn Dũng*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Trãi, TP Hải Dương; **Thanh Hoá:** *Phạm Quang Anh*, 10T, THPT chuyên Lam Sơn, TP Thanh Hoá; **Nghệ An:** *Vũ Thị Thu Hà*, 10A1, khối THPT chuyên Đại học Vinh, *Lê Trung Hiếu*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP Vinh; **Thừa Thiên Huế:** *Hồ Đắc Minh Nhật*, 11 Toán, THPT Quốc Học Huế; **Quảng Ngãi:** *Lê Nguyên Khánh*, 11 toán, THPT chuyên Lê Khiết; **Bình Định:** *Nguyễn Đông Tiến*, 10T, THPT chuyên Lê Quí Đôn, TP Quy Nhơn; **Đồng Tháp:** *Trần Minh Đô*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Đình Chiểu; **Bến Tre:** *Lê Phúc Lữ*, 12 Toán, THPT chuyên Bến Tre.

NGUYỄN ANH DŨNG

★ **Bài T7/377.** *Cho tam giác ABC và hai điểm D, E trên cạnh BC sao cho* $\frac{BD}{CD} = 2.\frac{CE}{BE}$.

Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE cắt AB, và AC tương ứng tại M và N. Chứng minh rằng trọng tâm tam giác AMN luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi D, E di động trên cạnh BC.

Lời giải.



Từ hệ thức lượng trong đường tròn, ta có $BM.BA = BD.BE$; $CN.CA = CD.CE$.

Kết hợp với giả thiết đề bài ta thấy

$$\frac{BM}{CN}.\frac{BA}{CA}=\frac{BD}{CD}.\frac{BE}{CE}=2.$$

Suy ra $\frac{BM}{CN}=2\left(\frac{CA}{BA}\right)=k$ (k là một số dương xác định).

Gọi I, J và K theo thứ tự là trung điểm của MN, BN và BC. Khi đó $\frac{IJ}{JK}=\frac{BM}{CN}=k$ và $\widehat{IJK}=\widehat{BAC}$.

Trên cạnh AC lấy điểm F sao cho $\frac{AB}{AF}=k$, lúc đó $\frac{IJ}{JK}=\frac{AB}{AF}$. Từ đó $\Delta ABF \backsim \Delta JIK$, dẫn đến $\widehat{JIK}=\widehat{ABF}$.

Trên cạnh BC lấy điểm H sao cho $\widehat{BAH}=\widehat{ABF}$ thì lúc này $\widehat{JIK}=\widehat{BAH}$, mà $IJ//AB$ nên $IK//AH$. Do đó I nằm trên đường thẳng d đi qua K, song song với AH. Gọi G là trọng tâm ΔAMN. Khi đó $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$, suy ra G nằm trên đường thẳng d_1, ảnh của đường thẳng d qua phép vị tự tâm A, tỉ số $\frac{2}{3}$. Rõ ràng đường thẳng d_1 là cố định, ta có điều cần chứng minh. ❐

Nhận xét. 1) Với cách giải tương tự như trên, ta có thể giải bài toán tổng quát hơn với điều kiện $\frac{BD}{CD}=\lambda.\frac{CE}{BE}$, trong đó λ là một số thực dương tùy ý cho trước.

2) Tất cả các lời giải gửi về Tòa soạn đều đúng. Hầu hết các bạn đều sử dụng *phương pháp vectơ* để giải bài toán này. Sau đây là các bạn có lời giải gọn hơn cả:

Hà Nội: *Vũ Đình Long*, 10A1 Toán, *Phạm Đình Khánh*, 10A2 Toán, *Tạ Ngọc Cảnh*, 11A1 Toán, *Trần Nhật Tân*, 12A1 Toán, khối THPT chuyên, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội, *Mai Anh Bằng*, 10 Toán, *Nguyễn Ngọc Long*, 10A2, *Nguyễn Đức Mạnh*, 10T2, khối THPT chuyên, ĐHSP Hà Nội; **Bắc Ninh:** *Trần Anh Tuấn*, 11A1, THPT Thuận Thành 1; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Mạnh Quân*, *Nguyễn Ngọc Trung*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Nam Định:** *Trần Trọng Huy*, 10 Toán, *Trần Thu Thủy*, 11 Toán, THPT chuyên *Lê Hồng Phong*; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Cường*, 6D, *Nguyễn Văn Thắng*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Quang Tài Anh Phú*, *Nguyễn Văn Minh*, 10A1, *Nguyễn An Tịnh*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, *Nguyễn Thanh Tú*, 11A1, khối THPT chuyên ĐH Vinh, TP. Vinh; **Đà Nẵng:** *Nguyễn Tăng Thành*, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bình Định:** *Nguyễn Đông Tiến*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quy Nhơn; **Phú Yên:** *Nguyễn Phước Thịnh*, 10 Toán 1, THPT Lương Văn Chánh, TP. Tuy Hòa; **Tiền Giang:** *Nguyễn Nhật Trường*, 11K2, THPT chuyên Tiền Giang, TP. Mỹ Tho; **Bến Tre:** *Lê Phúc Lữ*, 12 Toán, THPT chuyên Bến Tre.

HỒ QUANG VINH

★ **Bài T8/377.** *Tìm số thực k nhỏ nhất sao cho với mọi số thực không âm a, b, c ta luôn có bất đẳng thức*

$$\frac{a+b+c}{3}\le\sqrt[3]{abc}+k.\max\{|a-b|,|b-c|,|c-a|\}\ (1)$$

Lời giải. Vì BĐT (1) đúng với mọi a, b, c nên nếu chọn $a=b>0$ và $c=0$ thì (1) trở thành

$$\frac{2a}{3}\le k.a,\text{ suy ra } k\ge\frac{2}{3}.$$

Ta sẽ chứng minh $k=\frac{2}{3}$ là số nhỏ nhất cần tìm, tức là, với mọi số thực không âm a, b, c luôn có

$$\frac{a+b+c}{3}\le\sqrt[3]{abc}+\frac{2}{3}.\max\{|a-b|,|b-c|,|c-a|\}\ (2)$$

Thật vậy, với $k = \frac{2}{3}$, không giảm tính tổng quát có thể giả sử $a \geq b \geq c$. Khi đó

$$\max\{|a-b|, |b-c|, |c-a|\} = a-c.$$

BĐT (2) tương đương với

$$\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt[3]{abc} + \frac{2}{3}(a-c) \Leftrightarrow b+3c \leq a+3\sqrt[3]{abc}$$

(đúng do từ $a \geq b \geq c$ suy ra $3c \leq 3\sqrt[3]{abc}$).

Do đó BĐT (2) đúng với mọi số thực dương a, b, c. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc trong ba số a, b, c có hai số bằng nhau, số còn lại bằng 0.

Vậy số k nhỏ nhất thoả mãn bài toán là $\frac{2}{3}$. □

Nhận xét. 1) Đa số các bạn tham gia gửi bài về TS đều cho lời giải đúng. Nhiều bạn quên xét khi nào đẳng thức xảy ra.

2) Bằng kĩ thuật tương tự như trên, các bạn *Nguyễn Sơn Tùng*, 12A2, THPT Ngô Quyền, Châu Sơn, Ba Vì, **Hà Nội**: *Phan Tiến Dũng, Đinh Trung Đức*, 10A1, K49, khối THPT chuyên, ĐH Vinh, **Nghệ An**: *Phan Thị Thu Hằng*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc** đã chứng minh bài toán tổng quát: *Tìm số thực k nhỏ nhất sao cho với mọi số thực không âm a_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) ta luôn có*

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \leq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} + k.\max\{|a_1-a_2|, |a_2-a_3|, \ldots, |a_n-a_1|\}$$

Đáp số, $k_{\min} = \frac{n-1}{n}$.

Đặc biệt bạn *Hằng* đã phân tích mở rộng bài toán khá sâu sắc.

3) Ngoài các bạn *Tùng, Dũng, Đức, Hằng*, những bạn sau đây có lời giải khá tốt:

Hải Phòng: *Vũ Văn Tuấn*, 12A2, THPT Vĩnh Bảo; **Hà Nội:** *Vũ Minh Thắng*, 11 Toán 1, khối THPT chuyên, ĐHSP Hà Nội; **Hà Nam:** *Trần Trung Kiên*, 11 Toán, THPT chuyên Hà Nam; **Nam Định:** *Trần Trọng Huy*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hà Tĩnh:** *Lê Quang Bình*, 10 Toán 2, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Đồng Tháp:** *Trần Minh Đô*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Đình Chiểu.

NGUYỄN THANH HỒNG

★ Bài T9/377. *Tìm các số thực x, y, z sao cho*

$$x^6+y^6+z^6-6(x^4+y^4+z^4)+10(x^2+y^2+z^2)$$
$$-2(x^3y+y^3z+z^3x)+6(xy+yz+zx)=0.$$

Lời giải. (Theo bạn *Hồ Phi Nhạn*, 10CT, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **TP. Hồ Chí Minh**).

Biến đổi vế trái thành

$$P = (x^3-3x-y)^2+(y^3-3y-z)^2+(z^3-3z-x)^2.$$

Do đó $P = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^3-3x \\ x = z^3-3z \\ z = y^3-3y \end{cases}$ (A)

Nếu $x > 2$ thì $y = x(x^2-3) > 2$ suy ra $z = y(y^2-3) > 2$.

Từ đó cộng theo vế ba phương trình của hệ (A) ta có

$$\begin{aligned} 0 &= x^3+y^3+z^3-4x-4y-4z \\ &= x(x^2-4)+y(y^2-4)+z(z^2-4) > 0. \end{aligned}$$

Mâu thuẫn.

Tương tự với $x < -2$ ta cũng có mâu thuẫn.

Vậy $|x| \leq 2$. Đặt $x = 2\cos t$ $(0 \leq t \leq \pi)$.

Suy ra
$$\begin{aligned} y &= 2(4\cos^3 t-3\cos t) = 2\cos 3t \\ z &= 2(4\cos^3 3t-3\cos 3t) = 2\cos 9t \\ x &= 2(4\cos^3 9t-3\cos 9t) = 2\cos 27t. \end{aligned}$$

Dẫn đến $\cos t = \cos 27t$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{k\pi}{13}\ (k=0,1,2,\ldots,13) \\ t = \frac{i\pi}{14}\ (i=0,1,2,\ldots,14). \end{array}\right.$$

Ngược lại, dễ kiểm tra rằng nếu $\cos t = 2\cos 27t$ thì bộ $(x ; y ; z) = (2\cos t ; 2\cos 3t ; 2\cos 9t)$ thỏa mãn hệ (A).

Thành thử các bộ số $(x ; y ; z)$ thỏa mãn đề bài là $(2\cos t; 2\cos 3t ; 2\cos 9t)$ với $t = \frac{k\pi}{13}$ ($k = 0, 1, \ldots, 13$) hoặc $t = \frac{i\pi}{14}$ ($i = 0, 1, 2, \ldots, 14$). □

Nhận xét. 1) Khá đông bạn tham gia giải bài này nhưng rất tiếc chỉ có một số bạn làm đúng là các bạn sau đây:

Vĩnh Phúc: *Phan Quốc Khánh, Lưu Thị Thùy Dung*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Nam:** *Trần Trung Kiên*, 11 Toán, THPT chuyên Hà Nam; **Hải Dương:** *Lê Văn Huỳnh*, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Thái Bình:** *Phạm Tuấn Anh*, THPT Thái Phúc, Thái Thụy; **Đà Nẵng:** *Nguyễn Tăng Thành*, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP Đà Nẵng; **Kon Tum:** *Cao Thanh Hải*, 11A1, THPT chuyên Kon Tum; **Cần Thơ:** *Lê Đại Thành*, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★Bài T10/377. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện*

$$f(x^3-y)+2y(3f^2(x)+y^2)=f(y+f(x))\ (1)$$

$\forall x,y\in\mathbb{R}$.

Lời giải. (*Theo đa số các bạn*).

Thay $y=x^3$ vào (1) ta được

$f(0)+2x^3(3f^2(x)+x^6)=f(x^3+f(x)),\forall x\in\mathbb{R}$. (2)

Tiếp tục thay $y=-f(x)$ vào (1), ta thu được

$f(x^3+f(x))+2f(x)(3f^2(x)+f^2(x))=f(0),\forall x\in\mathbb{R}$

hay $f(x^3+f(x))=8f^3(x)+f(0),\ \forall x\in\mathbb{R}$. (3)

Từ các đẳng thức (2) và (3), ta suy ra

$f(0)+2x^3(3f^2(x)+x^6)=8f^3(x)+f(0),\forall x\in\mathbb{R}$

hay $(f(x)-x^3)(4f^2(x)+f(x)x^3+x^6)=0,$
$\forall x\in\mathbb{R}$. (4)

Nhận xét rằng $4f^2(x)+f(x)x^3+x^6$

$$=\left(2f(x)+\frac{x^3}{4}\right)^2+\frac{15x^6}{16}>0,\ \forall x\neq 0.$$

Do đó (4) $\Leftrightarrow f(x)=x^3,\forall x\in\mathbb{R}$.

Thử hàm này vào điều kiện bài toán, ta thấy thỏa mãn. Vậy hàm số cần tìm có dạng $f(x)=x^3,\ x\in\mathbb{R}$. ❐

⊲Nhận xét. Đây là dạng toán phương trình hàm với cặp biến tự do. Rất nhiều bạn tham gia giải bài toán này và tất cả đều giải đúng theo cách đã trình bày ở trên.

NGUYỄN VĂN MẬU

★Bài T11/377. *Cho dãy số (u_n), $(n=1,2,\dots)$ được xác định bởi $u_1=u_2=1$, $u_{n+1}=4u_n-5u_{n-1}$ với mọi $n\geq 2$. Chứng minh rằng với mọi số thực $a>\sqrt{5}$, ta đều có $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{u_n}{a^n}\right)=0$.*

Lời giải. Xét $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$ mà $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{5}}$. Đặt $v_n=(\sqrt{5})^{n-1}.(\cos(n-1)\varphi-\sin(n-1)\varphi),n\in\mathbb{N}^*$.

Ta có $v_1=v_2=1$ và

$$4v_n-5v_{n-1}=4.(\sqrt{5})^{n-1}(\cos(n-1)\varphi-\sin(n-1)\varphi)$$
$$-(\sqrt{5})^n.(\cos(n-2)\varphi-\sin(n-2)\varphi)$$

$$=4.(\sqrt{5})^{n-1}(\cos n\varphi.\cos\varphi+\sin n\varphi.\sin\varphi$$
$$-\sin n\varphi.\cos\varphi+\cos n\varphi.\sin\varphi)-(\sqrt{5})^n\times$$
$$\times(\cos n\varphi.\cos 2\varphi+\sin n\varphi.\sin 2\varphi-\sin n\varphi.\cos 2\varphi$$
$$+\cos n\varphi.\sin 2\varphi)$$

$$=4.(\sqrt{5})^{n-1}\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\cos n\varphi-\frac{1}{\sqrt{5}}\sin n\varphi\right)$$
$$-(\sqrt{5})^n.\left(\frac{7}{5}.\cos n\varphi+\frac{1}{5}\sin n\varphi\right)$$

$$=(\sqrt{5})^{n-2}(5\cos n\varphi-5\sin n\varphi)$$

$$=(\sqrt{5})^n.(\cos n\varphi-\sin n\varphi)=v_{n+1}.$$

(Chú ý $\cos 2\varphi=2\cos^2\varphi-1=\frac{3}{5}$,

$\sin 2\varphi=2.\sin\varphi.\cos\varphi=\frac{4}{5}$)

Do đó $u_n=v_n$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

Bởi vậy với mọi số thực $a>\sqrt{5}$,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{a^n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{\sqrt{5}}{a}\right)^n.(\cos(n-1)\varphi-\sin(n-1)\varphi)\right)$$

$=0$. ❐

⊲Nhận xét. Dãy số (v_n) được tìm ra từ phương trình đặc trưng $x^2-4x+5=0$. Tất cả các bạn học sinh gửi lời giải tới tòa soạn đều giải đúng, theo cách giải trên. Trong đó có các bạn học sinh nữ sau:

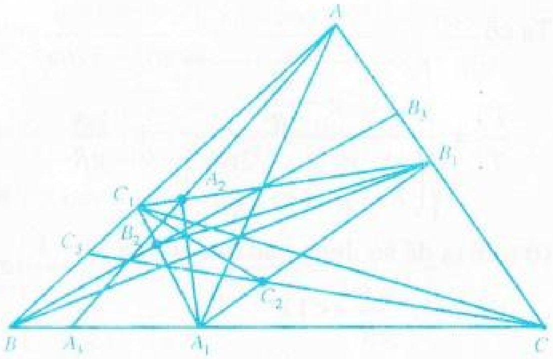
Vĩnh Phúc: *Lưu Thị Thùy Dung, Nguyễn Thị Thu Hằng*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Nam Định:** *Trần Thị Hồng Vân*, 12A, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hà Tĩnh:** *Đặng Thị Bảo Ngọc*, 11T, THPT NK Hà Tĩnh; **Vĩnh Long:** *Nguyễn Thị Phượng Linh*, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Bến Tre:** *Dương Thị Hồng Châu*, 12T, THPT chuyên Bến Tre.

Xin chúc mừng các bạn nhân ngày Quốc tế Phụ nữ 8-3.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★Bài T12/377. *Trên các cạnh của tam giác ABC lấy các điểm A_1, B_1, C_1 với $A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$, $C_1 \in AB$ sao cho AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy. Trên các cạnh của tam giác $A_1B_1C_1$ lấy các điểm A_2, B_2, C_2 với $A_2 \in B_1C_1$, $B_2 \in A_1C_1$, $C_2 \in A_1B_1$. Chứng minh rằng AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy khi và chỉ khi A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 đồng quy.*

Lời giải. Gọi A_3, B_3, C_3 là giao điểm của AA_2, BB_2, CC_2 với BC, CA, AB theo thứ tự (hình vẽ).



Chú ý rằng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy, ta có

$$\frac{A_3B}{A_3C}\cdot\frac{B_3C}{B_3A}\cdot\frac{C_3A}{C_3B}=\frac{S_{A_2AB}}{S_{A_2AC}}\cdot\frac{S_{B_2BC}}{S_{B_2BA}}\cdot\frac{S_{C_2CA}}{S_{C_2CB}}$$

$$=\frac{S_{A_2AB}}{S_{A_2AC_1}}\cdot\frac{S_{A_2AC_1}}{S_{A_2AB_1}}\cdot\frac{S_{A_2AB_1}}{S_{A_2AC}}$$

$$\times\frac{S_{B_2BC}}{S_{B_2BA_1}}\cdot\frac{S_{B_2BA_1}}{S_{B_2BC_1}}\cdot\frac{S_{B_2BC_1}}{S_{B_2BA}}\cdot\frac{S_{C_2CA}}{S_{C_2CB_1}}\cdot\frac{S_{C_2CB_1}}{S_{C_2CA_1}}\cdot\frac{S_{C_2CA_1}}{S_{C_2CB}}$$

$$=\frac{AB}{AC_1}\cdot\frac{A_2C_1}{A_2B_1}\cdot\frac{AB_1}{AC}\cdot\frac{BC}{BA_1}\cdot\frac{B_2A_1}{B_2C_1}$$

$$\times\frac{BC_1}{BA}\cdot\frac{CA}{CB_1}\cdot\frac{C_2B_1}{C_2A_1}\cdot\frac{CA_1}{CB}$$

$$=\frac{A_2C_1}{A_2B_1}\cdot\frac{B_2A_1}{B_2C_1}\cdot\frac{C_2B_1}{C_2A_1}\cdot\frac{CA_1}{BA_1}\cdot\frac{BC_1}{AC_1}\cdot\frac{AB_1}{CB_1}$$

$$=\frac{A_2C_1}{A_2B_1}\cdot\frac{B_2A_1}{B_2C_1}\cdot\frac{C_2B_1}{C_2A_1}.1=\frac{A_2C_1}{A_2B_1}\cdot\frac{B_2A_1}{B_2C_1}\cdot\frac{C_2B_1}{C_2A_1}.$$

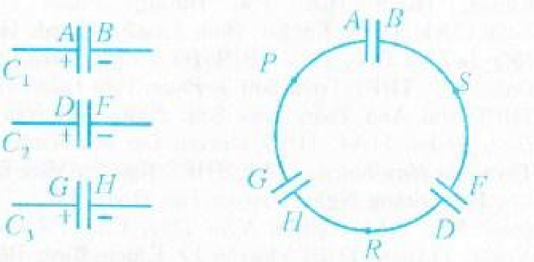
Vậy AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy khi và chỉ khi A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 đồng quy.□

Nhận xét. 1) Bài toán này có rất nhiều bạn tham gia giải và đều giải đúng với nhiều phương án tính toán khác nhau.

2) Xin nêu tên một số bạn có lời giải tốt: **Phú Yên:** *Phan Minh Trí*, 10T, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Văn Quý*, 10T, THPT chuyên Bắc Ninh; **Đà Nẵng:** *Lê Đình Toàn*, $11A_1$, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Mạnh Quân*, $10A_1$, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **TP Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Hồng Sơn*, 12T, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Nam Định:** *Nguyễn Ngọc An*, 10T, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thanh Hoá:** *Đào Quang Hoà*, 10T, THPT chuyên Lam Sơn; *Trần Thị Hồng Diệu*, 11E, THPT Hà Trung; **Hà Nội:** *Nguyễn Thị Ngọc Anh, Nguyễn Đức Mạnh*, $10T_2$, Khối THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, *Trần Nhật Tân*, $12T_1$, *Tạ Ngọc Cảnh*, $11T_2$, Khối THPT chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội.

NGUYỄN MINH HÀ

★Bài L1/377. *Cho ba tụ điện có điện dung và điện tích thứ tự là $C_1 = 2\,\mu F$, $Q_1 = 40\,\mu C$; $C_2 = 5\,\mu F$, $Q_2 = 30\,\mu C$; $C_3 = 4\,\mu F$, $Q_3 = 20\,\mu C$. Các bản cực A, D và G mang điện tích dương. Mắc các tụ điện trên theo hình 1. Hãy tính các hiệu điện thế U_{PR}, U_{RS}, U_{SP}.*

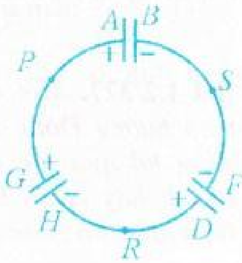


Hình 1

Lời giải. Từ hình 2 ta có

$$U_{PS} = U_{PR} + U_{RS}$$

$$\Rightarrow \frac{Q_A}{C_1} = \frac{Q_G}{C_3} + \frac{Q_D}{C_2} \quad (1)$$



Hình 2

Theo định luật bảo toàn điện tích ta có

$Q_A + Q_G = Q_1 + Q_3$

$= 40 + 20 = 60(\mu C)$

và $Q_H + Q_D = Q_D - Q_G = Q_2 - Q_3 = 30 - 20 = 10(\mu C)$.

Suy ra $Q_A = 60 - Q_G$; $Q_D = 10 + Q_G$.

Thay vào (1), ta có

$$\frac{60-Q_G}{2}=\frac{Q_G}{4}+\frac{10+Q_G}{5}.$$

Tính toán ta được

$Q_G=\frac{560}{19}\approx 29{,}47(\mu C)$; $Q_A\approx 30{,}53(\mu C)$; $Q_D\approx 39{,}47(\mu C)$.

Vậy $U_{PR}=\frac{Q_G}{C_3}\approx\frac{29{,}47}{4}\approx 7{,}37(V)$

$U_{RS}=\frac{Q_D}{C_2}\approx\frac{39{,}47}{5}\approx 7{,}89(V)$

$U_{PS}=\frac{Q_A}{C_1}\approx\frac{30{,}53}{2}\approx 15{,}26(V)$;

$U_{PS}=-U_{SP}\Rightarrow U_{SP}\approx -15{,}26V$. ☐

⋖Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Nguyễn Hải Quân*, 11A1, *Vũ Ngọc Khánh*, 11A10, THPT chuyên Vĩnh Phúc, *Nguyễn Văn Đông*, 12A1, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch; **Bắc Giang**: *Nguyễn Văn Thiệu*, 11A4 - K62, THPT Ngô Sĩ Liên; **Bắc Ninh**: *Nguyễn Đức Khải*, 12Toán, THPT chuyên Bắc Ninh, *Mẫn Văn Vinh*, 11A0, THPT Yên Phong I; **Hà Nội**: *Nguyễn Thị Hạnh*, 11A1, THPT Phùng Khắc Khoan, Thạch Thất; **Hải Dương**: *Phạm Đình Tuấn*,12A1, THPT Kẻ Sặt, Bình Giang; **Thanh Hoá**: Nguyễn *Văn Đức*, 11G, THPT Hà Trung, *Đàm Triệu Đạt*, 11B1, THPT Triệu Sơn 3, *Phạm Văn Tuấn*, 12A, THPT Mai Anh Tuấn, Nga Sơn; **Nghệ An**: *Nguyễn Đình Nhâm*, 11A4, THPT chuyên Đại học Vinh; **Hà Tĩnh**: *Cù Huy Thiện*, 11A1, THPT Nguyễn Văn Trỗi, Lộc Hà; **Quảng Ngãi**: *Nguyễn Tấn Đông*, 11Lí, *Trần Quốc Bảo*, 11Lí, *Nguyễn Ngọc Duy*, 12Lí, *Phạm Hồ Nghĩa*, 11Toán, THPT chuyên Lê Khiết; **Bình Định**: *Phan Đăng Thành*, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định; **Kon Tum**: *Nguyễn Đức Đông*, 11A1, THPT chuyên Kon Tum.

NGUYỄN VĂN THUẬN

Bài L2/377. *Một con tàu đi dọc Xích Đạo theo hướng Đông với vận tốc 45 km/h. Hỏi đồng hồ quả lắc đặt trên con tàu sẽ chạy nhanh hay chậm bao nhiêu sau 3 giờ? Giả thiết đồng hồ chạy đúng khi tàu đứng yên ?*

Lời giải. Khi con tàu đứng yên, con lắc chịu tác dụng của hai lực: trọng lực mg và lực quán tính li tâm $\frac{mv_0^2}{R}$, trong đó v_0 là vận tốc của một điểm trên Xích Đạo trong chuyển động tự quay quanh tâm Trái Đất; R là bán kính Trái Đất. Chu kì dao động của con lắc là

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g-\frac{v_0^2}{R}}}.$$

Khi con tàu chuyển động dọc Xích Đạo theo hướng đông với vận tốc v, chu kì dao động của con lắc bằng

$$T'=2\pi\sqrt{\frac{l}{g-\frac{(v_0+v)^2}{R}}}\approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g-\frac{v_0^2+2v_0v}{R}}}.$$

Ta có

$$\frac{T'}{T}=\sqrt{\frac{g-\frac{v_0^2}{R}}{\left(g-\frac{v_0^2}{R}\right)\left(1-\frac{2v_0v}{gR}\right)}}\approx 1+\frac{v_0v}{gR}.$$

(ở trên ta đã sử dụng các ước lượng

$v<<v_0$; $\frac{v_0v}{gR}<<1$).

Nhận xét rằng $T'>T$ nên đồng hồ chạy chậm đi. Sau 3 giờ, đồng hồ chạy chậm là

$$\tau=\frac{\Delta t}{T}.(T'-T)=\Delta t.\frac{v_0v}{gR}.$$

Do $v_0=\frac{2\pi R}{T_0}$ nên ta được

$$\tau=\Delta t.\frac{2\pi.v}{gT_0}=3.\frac{2\pi.12{,}5}{10.24}\approx 1(s).$$ ☐

⋖Nhận xét. Những bạn sau đây có lời giải tốt:
Quảng Ngãi: *Nguyễn Tấn Đông, Trần Quốc Bảo*, 11 Lí, THPT chuyên Lê Khiết.

NGUYỄN XUÂN QUANG

Nhắn tin

Các bạn đoạt giải của *Cuộc thi Giải Toán và Vật lí trên tạp chí THTT năm học 2007 - 2008* (đặc biệt là các bạn lớp 9 và 12) nếu chưa gửi địa chỉ mới hãy gửi gấp tới Tòa soạn để nhận Giải thưởng và Giấy khen.

THTT

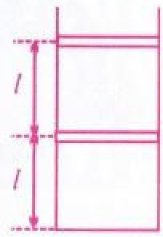
ĐỀ RA... *(Tiếp trang 16)*

1) Khóa K chuyển sang chốt A, sau một thời gian ngắn thì thanh MN đạt vận tốc ổn định. Giải thích hiện tượng trên và tính vận tốc ổn định của thanh MN khi đó.

2) Tính nhiệt lượng tổng cộng tỏa ra trong mạch sau khi đóng khóa K vào chốt A. Bỏ qua mọi ma sát, xem điện trở của mạch là đủ lớn.

PHẠM XUÂN MAI
(GV THPT chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương)

Bài L2/381. Hai pittông có chiều dài không đáng kể, khối lượng bằng nhau và bằng m được đặt trong một xilanh thẳng đứng chứa khí và đang ở trạng thái cân bằng nhiệt động như hình vẽ. Pittông trên được đẩy chậm để nén khí cho đến khi nó đi qua vị trí ban đầu của pittông dưới.



1) Hỏi khi đó pittông dưới đang ở vị trí nào? Cho tiết diện ngang của xilanh là S, áp suất khí quyển là p_0. Bỏ qua mọi ma sát, coi nhiệt độ khí không thay đổi.

2) Tính công đã thực hiện.

ĐỖ TUẤN
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/381. (For 6th grade) Rearrange the following rational numbers in increasing order.

$$\frac{1005}{2002}, \frac{1007}{2006}, \frac{1009}{2010}, \frac{1011}{2014}.$$

T2/381. (For 7th grade) In an isosceles triangle ABC (at vertex A), choose a point M such that $\widehat{MAC} = \widehat{MBA} = \widehat{MCB}$. Compare the areas of the triangles ABM and CBM.

T3/381. Determine the sum of all rational numbers of the form $\frac{a}{b}$ where a, b are natural divisors of 27000 and $\gcd(a, b) = 1$.

T4/381. Given a, b, c such that
$a > 0,\ b > c,\ a^2 = bc,\ a + b + c = abc.$
Prove the inequalities
$a \geq \sqrt{3},\ b \geq \sqrt{3},\ 0 < c \leq \sqrt{3}.$

T5/381. Let $ABCD$ be a quadrilateral where $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90^\circ$ and $\widehat{BCD} < 90^\circ$. Choose a point E on the opposite ray of AC such that DA is the angle-bisector of BDE. Let M be chosen arbitrarily between D and E, choose another point N on the opposite ray of BE such that $\widehat{NCB} = \widehat{MCD}$. Prove that MC is the angle-bisector of DMN.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/381. Prove that the equation $x^3 + 3y^3 = 5$ has infinitely many rational solutions.

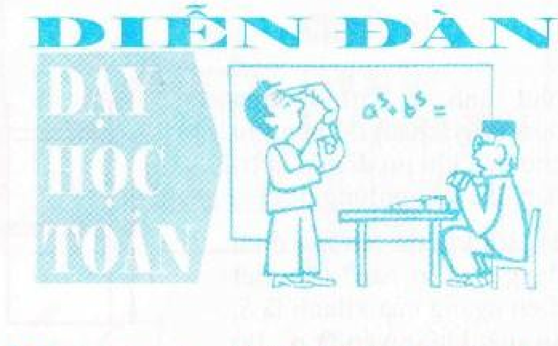
T7/381. If a, b, c are the length of the sides of a triangle, prove that

$$\frac{1}{\sqrt{ab+ac}} + \frac{1}{\sqrt{bc+ba}} + \frac{1}{\sqrt{ca+cb}} \geq \frac{1}{\sqrt{a^2+bc}} + \frac{1}{\sqrt{b^2+ac}} + \frac{1}{\sqrt{c^2+ab}}.$$

T8/381. Let $ABCD.A'B'C'D'$ be a parallelepiped and let S_1, S_2, S_3 denote the areas of the sides $ABCD$, $ABB'A'$, and $ADD'A'$ respectively. Given that the sum of squares of the areas of all sides of the tetrahedron $AB'CD'$ equals 3, find the smallest possible value of the following expression:

$$T = 2\left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3}\right) + 3(S_1 + S_2 + S_3).$$

Translated by LE MINH HA



Kể từ năm học 2008 – 2009 sách giáo khoa Hình học 12 có những thay đổi. Phần ***Phương pháp tọa độ trong không gian*** *giờ đây đã cắt bỏ phần* ***Phương trình tổng quát của đường thẳng*** *và* ***phương trình chùm mặt phẳng****. Chùm mặt phẳng là một công cụ mạnh và rất hữu hiệu giúp giải quyết các bài toán về viết phương trình của một mặt phẳng (P) mà có giả thiết (P) chứa một đường thẳng (d) nào đó. Vậy với các bài toán về viết phương trình mặt phẳng mà từ trước đến nay ta phải dùng đến chùm mặt phẳng thì giờ đây phải giải quyết như thế nào? Câu trả lời là có nhiều hướng để giải quyết, tùy thuộc vào giả thiết của bài toán ấy. Trong bài viết này chúng tôi giới thiệu một phương pháp có tính chất tổng quát để giải quyết các bài toán mà trước đây phải dùng đến phương pháp chùm mặt phẳng.*

PHƯƠNG PHÁP VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG KHI KHÔNG DÙNG PHƯƠNG TRÌNH CHÙM MẶT PHẲNG

NGUYỄN VĂN QUÍ
(GV THPT chuyên Bến Tre)

A. PHƯƠNG PHÁP

Giả sử yêu cầu của đề bài là *viết phương trình của mặt phẳng* (P), biết rằng (P) *chứa đường thẳng* d (Còn có thêm giả thiết khác nữa).

Ta thực hiện theo các bước sau:

+ Tìm một điểm $M(x_0\,;y_0\,;z_0)\in d$.

+ Tìm một vectơ chỉ phương (VTCP) của d, giả sử là $\vec{v}=(a;b;c)$.

+ Phương trình mặt phẳng (P) có dạng
$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$
$(A^2+B^2+C^2\neq 0)$ (1)

+ Dùng điều kiện $\vec{v}\perp\vec{n}$ với $\vec{n}=(A;B;C)$, ta được $aA+b.B+c.C=0$ (2)

Trong ba hệ số A, B, C, từ (2) có thể rút một hệ số theo hai hệ số còn lại rồi thay vào (1). Khi đó PT (1) chỉ còn chứa hai hệ số (chẳng hạn A và B), tiếp tục sử dụng giả thiết còn lại để xác định chúng.

B. CÁC BÀI TOÁN MINH HỌA

Bài toán 1. *Lập phương trình của mặt phẳng (P) đi qua đường thẳng*

$$d:\frac{x-13}{-1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{4}$$

và tiếp xúc với mặt cầu (S):
$x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-67=0$.

Lời giải. Cách giải theo phương pháp cũ (dùng chùm mặt phẳng)

Ta nhận thấy PT mặt cầu (S) là

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^3=81.$$

Vậy (S) có tâm I (1 ; 2 ; 3), bán kính $R=9$ và nhận mặt phẳng (P) đi qua đường thẳng d làm một tiếp diện nên $d(I,(P))=9$ (*).

Do đó bài toán lập phương trình tiếp diện tương đương với bài toán lập phương trình mặt phẳng (P) trong chùm mặt phẳng đi qua d và thỏa mãn điều kiện (*).

Ta có PT đường thẳng tổng quát của d là

$$\begin{cases} x+y-12 = 0 \\ 4x+z-52=0. \end{cases}$$

Phương trình của mp(P) chứa d có dạng:

$\lambda(x+y-12)+\mu(4x+z-52)=0$ với $\lambda^2+\mu^2 \neq 0$.

$\Leftrightarrow (\lambda+4\mu)x+\lambda y+\mu z-12\lambda-52\mu=0$.

Ta có

$$d(I,(P))=9 \Leftrightarrow \frac{|-9\lambda-45\mu|}{\sqrt{2\lambda^2+17\mu^2+8\lambda\mu}}=9.$$

$$\Leftrightarrow -\lambda^2+2\lambda\mu+8\mu^2=0.$$

Chọn $\lambda=1$, ta có $-1+2\mu+8\mu^2=0$.

Tìm được $\mu=-\frac{1}{2}$ hoặc $\mu=\frac{1}{4}$.

- $\lambda=1$; $\mu=-\frac{1}{2}$ có PT tiếp diện thứ nhất (P_1): $-2x+2y-z+28=0$.
- $\lambda=1$; $\mu=\frac{1}{4}$ có PT tiếp diện thứ hai (P_2): $8x+4y+z-100=0$. ❒

Cách giải theo phương pháp không dùng chùm mặt phẳng

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=9$.

Đường thẳng d có VTCP $\vec{v}=(-1;1;4)$ và đi qua $M(13;-1;0)$.

Do mặt phẳng (P) chứa điểm M, nên phương trình của (P) có dạng

$$A(x-13)+B(y+1)+Cz=0$$

với $A^2+B^2+C^2 \neq 0$.

Dùng điều kiện $\vec{v}\perp\vec{n}$, với $\vec{n}=(A;B;C)$, ta được $-A+B+4C=0$.

Thay $A=B+4C$ vào phương trình của (P), ta được

(P): $(B+4C)x+By+Cz-12B-52C=0$.

(P) tiếp xúc với (S) $\Leftrightarrow d(I,(P))=9$

$\Leftrightarrow |B+5C|=\sqrt{2B^2+8BC+17C^2}$

$$\Leftrightarrow B^2-2BC-8C^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B=4C \\ B=-2C. \end{array}\right.$$

Thay vào PT (P) ta được kết quả

(P_1): $-2x+2y-z+28=0$;

(P_2): $8x+4y+z-100=0$. ❒

Bài toán 2. *Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa giao tuyến d của hai mặt phẳng (Q) và (R) với*

(Q): $x+y+z-3=0$,

(R): $2x+y+z-4=0$

và tạo với mp(Oxy) một góc $60°$.

Lời giải. Dễ thấy, đường thẳng d đi qua điểm $M(1;1;1)$ và có VTCP $\vec{v}=(0;1;-1)$.

Do mp (P) đi qua điểm M nên phương trình của (P) có dạng

$$A(x-1)+B(y-1)+B(z-1)=0$$

với $A^2+B^2+C^2 \neq 0$.

Do (P) chứa d nên $\vec{v}\perp\vec{n}$, ở đó $\vec{n}=(A;B;C)$ $\Leftrightarrow B-C=0 \Leftrightarrow B=C$.

Vậy (P): $A(x-1)+B(y-1)+B(z-1)=0$.

Mặt phẳng (Oxy) có VTPT $\vec{k}=(0;0;1)$. Theo giả thiết, ta có

$$\cos 60^o = |\cos(\vec{n},\vec{k})| \Leftrightarrow \frac{1}{2}=\frac{|B|}{\sqrt{A^2+2B^2}}$$

$$\Leftrightarrow A^2-2B^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A=\sqrt{2}B \\ A=-\sqrt{2}B. \end{array}\right.$$

Vậy tìm được hai mặt phẳng là

(P_1): $\sqrt{2}x+y+z-\sqrt{2}-2=0$;

(P_2): $\sqrt{2}x-y-z-\sqrt{2}+2=0$. ❒

Bài toán 3. *Viết phương trình mặt phẳng (R) đi qua đường thẳng d:* $\begin{cases} x=-t \\ y=-1+2t \ (t\in\mathbb{R}) \\ z=2+t \end{cases}$ *và tạo với mặt phẳng (P): $2x-y-2z-2=0$ một góc nhỏ nhất.*

Lời giải. Dễ thấy, đường thẳng d đi qua điểm $M(0;-1;2)$ và có VTCP $\vec{v}=(-1;2;1)$.

Do mp (R) đi qua điểm M, nên phương trình (R) có dạng

$$A(x-0)+B(y+1)+C(z-2)=0$$

với $A^2+B^2+C^2 \neq 0$.

Do (R) chứa d nên $\vec{v} \perp \vec{n}$, với $\vec{n}=(A;B;C)$
$\Leftrightarrow -A+2B+C=0 \Leftrightarrow A=2B+C$.

Gọi α là góc tạo bởi (R) và (P), ta có
$$\cos\alpha=\frac{|B|}{\sqrt{5B^2+4BC+2C^2}}.$$

- Nếu $B=0$ thì $\alpha=90^0$.
- Nếu $B\neq 0$, đặt $m=\dfrac{C}{B}$ ta có

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2m^2+4m+5}}=\frac{1}{\sqrt{2(m+1)^2+3}}\le\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

α nhỏ nhất $\Leftrightarrow \cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow m=-1 \Leftrightarrow B=-C$.

Vậy PT mặt phẳng(P): $x+y-z+3=0$. ❒

Nhận xét. 1) Phương pháp trên có tính chất tổng quát, có thể vận dụng để giải các bài toán về viết phương trình của mp (P) với giả thiết là (P) chứa đường thẳng d với phương trình của d là phương trình tham số hoặc chính tắc hay d là giao tuyến của hai mặt phẳng.

2) Nếu các bạn muốn dùng phương trình chùm mặt phẳng thì có thể trình bày theo cách sau đây:

Cụ thể ta giải lại **Bài toán 2** ở trên:

Xét phương trình
$m(x+y+z-3)+n(2x+y+z-4)=0$ (*)
$(m^2+n^2\neq 0)$.

Ta sẽ chứng tỏ phương trình (*) là phương trình của một mặt phẳng chứa d. Thật vậy, ta có
(*) $\Leftrightarrow (m+2n)x+(m+n)y+(m+n)z-3m-4n=0$.

Đặt $A=m+2n$, $B=m+n$, $C=m+n$. Do $m^2+n^2\neq 0$ nên dễ dàng suy ra $A^2+B^2+C^2\neq 0$. Vậy (*) là phương trình của một mặt phẳng, ta gọi mặt phẳng này là (P). Gọi $M(x\,;\,y\,;\,z)$ là điểm bất kì thuộc d, ta thấy tọa độ của M cũng thỏa mãn (*). Vậy M thuộc (P). Điều này chứng tỏ mặt phẳng (P) chứa d. Tiếp tục lập luận như trên ta sẽ chọn được các giá trị của m và n thích hợp và đi đến kết quả.

ĐẶT ẨN PHỤ... *(Tiếp trang 2)*

Mặt khác từ $a^2+b^2+c^2=90$
$\Leftrightarrow (x+4)^2+(y+5)^2+(6+z)^2=90$
$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+8x+10y+12z=13$ (1)

Do $0\le x+y+z<1 \Leftrightarrow (x+y+z)^2<1$
$\Rightarrow x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)<1$
$\Rightarrow x^2+y^2+z^2<1$ (vì $x\ge 0;\, y\ge 0;\, z\ge 0$).

Khi đó ta có
$x^2+y^2+z^2+8x+10y+12z$
$=(x^2+y^2+z^2)+12(x+y+z)-4x-2y<1+12=13$.

Điều này mâu thuẫn với đẳng thức (1).

Từ đó ta có điều cần chứng minh. ❒

Để bạn đọc tiếp thu được bài viết, xin mời các bạn hãy giải các bài tập dưới đây.

1. Cho n số $a_1, a_2, \cdots, a_n$ thỏa mãn điều kiện $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$. Chứng minh rằng
$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\ge\frac{1}{n}.$$

2. Chứng minh rằng:
Nếu $a\ge 3$, $b\ge 3$, $a^2+b^2\ge 25$ thì $a+b\ge 7$.

3. Cho $a>c>0$, $b>c$. Chứng minh rằng
$$\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}\le\sqrt{ab}.$$

4. Cho ba số a, b, c thoả mãn $0\le a\le 2$, $0\le b\le 2$, $0\le c\le 2$ và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng
a) $a^2+b^2+c^2\le 5$; b) $a^3+b^3+c^3\le 9$.

5. Cho $P=(a+b)(b+c)(c+a)-abc$ với a, b, c là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu $a+b+c$ chia hết cho 4 thì P chia hết cho 4.
(*Gợi ý.* Đặt $a+b+c=4k$ với k là số nguyên).

6. Cho bốn số a, b, c, d thuộc khoảng $(0\,;\,1)$ thoả mãn điều kiện
$$(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)=abcd.$$
Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2+d^2\ge 1$.

GIẢI NHỮNG PHƯƠNG TRÌNH BẬC 6

Phương trình (PT) bậc cao hơn hoặc bằng 5 tổng quát không giải được bằng căn thức. Vậy những PT nào thì có thể giải được? Và phân loại chúng như thế nào? Trường hợp PT bậc 6 vừa được giải quyết.

Lịch sử của việc giải các PT bằng căn thức thuộc loại cổ điển nhất trong toán học. Lúc đầu, có bài toán *Giải những phương trình đa thức*, trong đó phải tìm số hoặc những số x thoả mãn đẳng thức dạng $P(x) = 0$. Vế trái $P(x)$ là một đa thức với hệ số thực, chẳng hạn phương trình $7x^4 + 3x^2 - x + 8 = 0$. "Bậc" của PT là giá trị lớn nhất của số mũ mà ẩn số được nâng lên, trong thí dụ trên, bậc của PT là 4.

Cái khó của việc giải các PT đa thức phụ thuộc vào bậc của phương trình cần giải. Cách đây hơn 3000 năm, người Babylon đã để lại cho chúng ta những ván bằng đất sét có ghi những bài toán (có thể là dành cho học sinh), những bài toán này, giải thích theo ngôn ngữ hiện đại, là giải các PT bậc 2. Phải chờ đến thời Phục hưng ở Ý mới có những PT bậc 3 và bậc 4 giải được một cách tổng quát. Vào thế kỉ XVI, *Nicolo Tartaglia* cho những công thức tổng quát để giải những PT đó. Lịch sử của các công thức đó là một chuỗi tố cáo việc lấy kết quả của nhau, *Ferome Cardan* lấy kết quả của *Tartaglia*, chính *Tartaglia* đã lấy kết quả của *Scipio del Ferro* về PT bậc 3.

N. Tartaglia
(1499 – 1557)

Tuy nhiên, không có ai sau đó có thể giải được những phương trình bậc cao hơn. Vào thế kỉ XIX, Nhà toán học *Niels Abel* (1802 – 1829) (Na Uy), đã đưa ra một thí dụ về PT bậc 5 không giải được bằng căn thức, tức là với PT này các nghiệm không biểu thị được dưới dạng tổng, tích, thương hoặc căn của những số thực. Nói cách khác, bạn có thể hỗn hợp tuỳ ý muốn các kí hiệu toán học để tạo thành những số phức tạp như

$$\frac{\left(\sqrt{1+\sqrt{2}}+\sqrt{2+3\sqrt{13/4}}\right)}{(3+\sqrt{33})},$$

không bao giờ bạn có được một trong những nghiệm của PT mà *Abel* đề xuất.

E. Galois
(1811 – 1832)

Ít lâu sau, nhà toán học người Pháp *Evariste Galois* sáng lập ra lí thuyết mang tên ông, từ đó chứng minh chặt chẽ rằng PT bậc lớn hơn hay bằng 5 tổng quát không giải được bằng căn thức. Từ đây, các nhà toán học mới không chú tâm tìm tòi những công thức nghiệm cho PT bậc 5 hoặc những PT bậc lớn hơn 5.

Hết chuyện? Không! Năm 1991, *David Dummit*, trường Đại học Vermont nhận xét rằng, ngay cả khi người ta không thể giải tất cả các PT bậc 5 bằng căn thức, vẫn có một số PT có thể giải được. *David Dummit* thiết lập danh mục chung những PT đó và cho những công thức để giải chúng. *Caroll Bowell* và *Lawrence Glasser*, trường Đại học Clarkson ở bang NewYork thì quan tâm đến PT bậc 6. Họ cho danh mục tất cả các PT đa thức bậc 6 giải được bằng căn thức (không nhiều) và cả những công thức nghiệm tương ứng. Những công thức này rất phức tạp, có cấu trúc làm nhớ lại những công thức đã biết về PT bậc 3.

Bây giờ còn phải tìm cách giải quyết những PT bậc cao hơn. Như vậy câu chuyện giải những phương trình bằng căn thức vẫn chưa kết thúc.

NGUYỄN VĂN THIÊM

(Theo *La Recherche* tháng 7 – 8 .2005)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

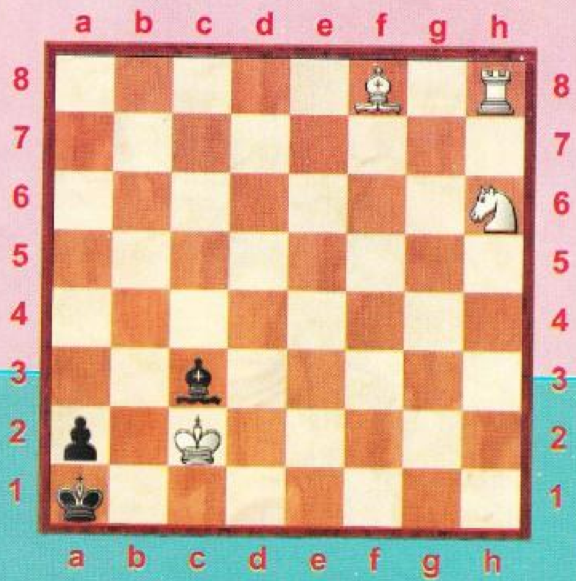
XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 381(3.2009)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.35121607
ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35144272, 04.35121606
Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn

TRONG SỐ NÀY

Biên tập : NGUYỄN THANH HỒNG, HỒ QUANG VINH.
Trị sự, phát hành : HOÀNG THÀNH ĐỨC, VŨ ANH THƯ
Mĩ thuật : MINH THƠ
Chế bản : NGUYỄN THỊ OANH

Giải trí toán học

Mời các bạn tham gia
thế cờ sau
trên bàn cờ châu Âu.



Kì I. ***TRẮNG ĐI TRƯỚC CHIẾU HẾT SAU BA NƯỚC***

LÊ THANH TÚ
(Đại kiện tướng Quốc tế)

TRÂU lớn hơn BÒ

Trâu, bò gặm cỏ non xanh,
Nghé, bê tung tăng cạnh mẹ
Thì thầm nàng Xuân hỏi bé:
Tại sao bò nhỏ hơn trâu?

Bé cười có khó gì đâu,
Trâu đen là mẹ của nghé,
Bê vàng là con bò mẹ,
Mà nghé lại lớn hơn bê.

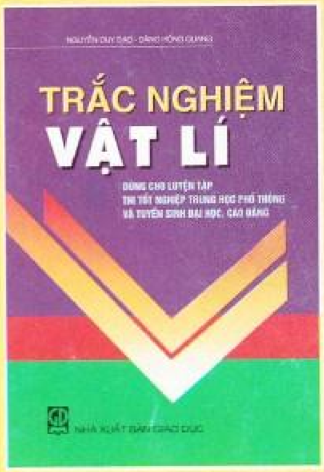
Nàng Xuân khen bé giỏi ghê.

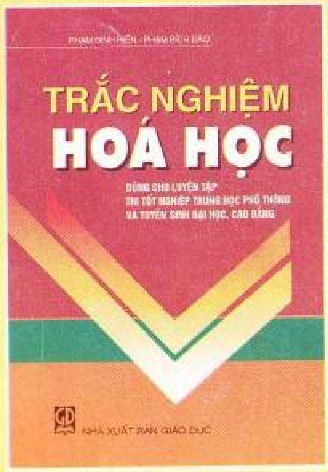
PHAN CUNG ĐỨC
(Khoa Toán, ĐHKHTN Hà Nội)

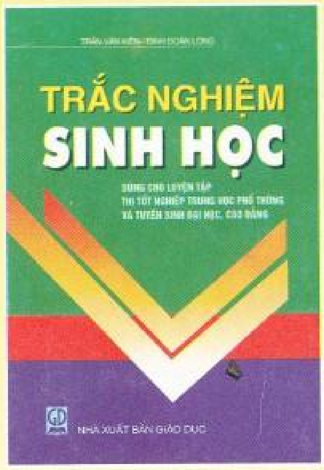
ĐÓN ĐỌC

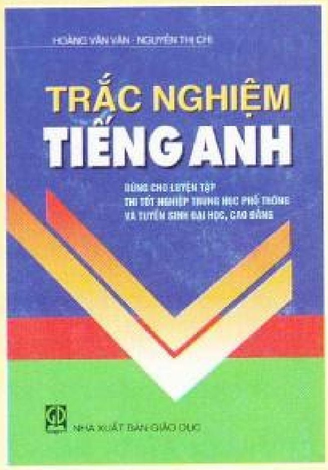
Cục Khảo thí và Kiểm định chất lượng giáo dục đã phối hợp với Nhà xuất bản Giáo dục xuất bản và phát hành rộng rãi :

BỘ SÁCH DÙNG ĐỂ ÔN THI TỐT NGHIỆP TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG 2009









Nhà xuất bản Giáo dục hi vọng bộ sách trên sẽ là tài liệu tham khảo hữu ích, giúp các em học sinh làm quen với những đề thi trắc nghiệm và có phương pháp làm bài thi hiệu quả nhất !

Bộ sách được phát hành rộng rãi tại các công ty Sách - Thiết bị trường học, ở các địa phương, các cửa hàng sách của Nhà xuất bản Giáo dục :

- **Miền Bắc** : Công ty CP Sách dân tộc - tầng 2 - số 25 Hàn Thuyên - Hà Nội - Điện thoại (Fax): (04) 3 824 6923.
- **Miền Trung** : Công ty CP sách Giáo dục tại TP. Đà Nẵng - số 78 Pasteur - TP. Đà Nẵng - Điện thoại: (0511) 3 849 051.
- **Miền Nam** : Công ty CP sách Giáo dục tại TP. Hồ Chí Minh - số 240 Trần Bình Trọng - Q.5 - TP. HCM Điện thoại: (08) 3 832 3557.

Các đơn vị đặt mua xin liên hệ : Điện thoại (Fax): (04) 3 824 6923 ; Email: Sales@sachdantoc.com.vn

ISSN : 0866-8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT03M9

Giấy phép XB số 67/GP-BVHTT cấp ngày 15.6.2004
In tại Công ty CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ, Hà Nội
In xong và nộp lưu chiểu tháng 3 năm 2009

Giá : 6000 đồng
Sáu nghìn đồng