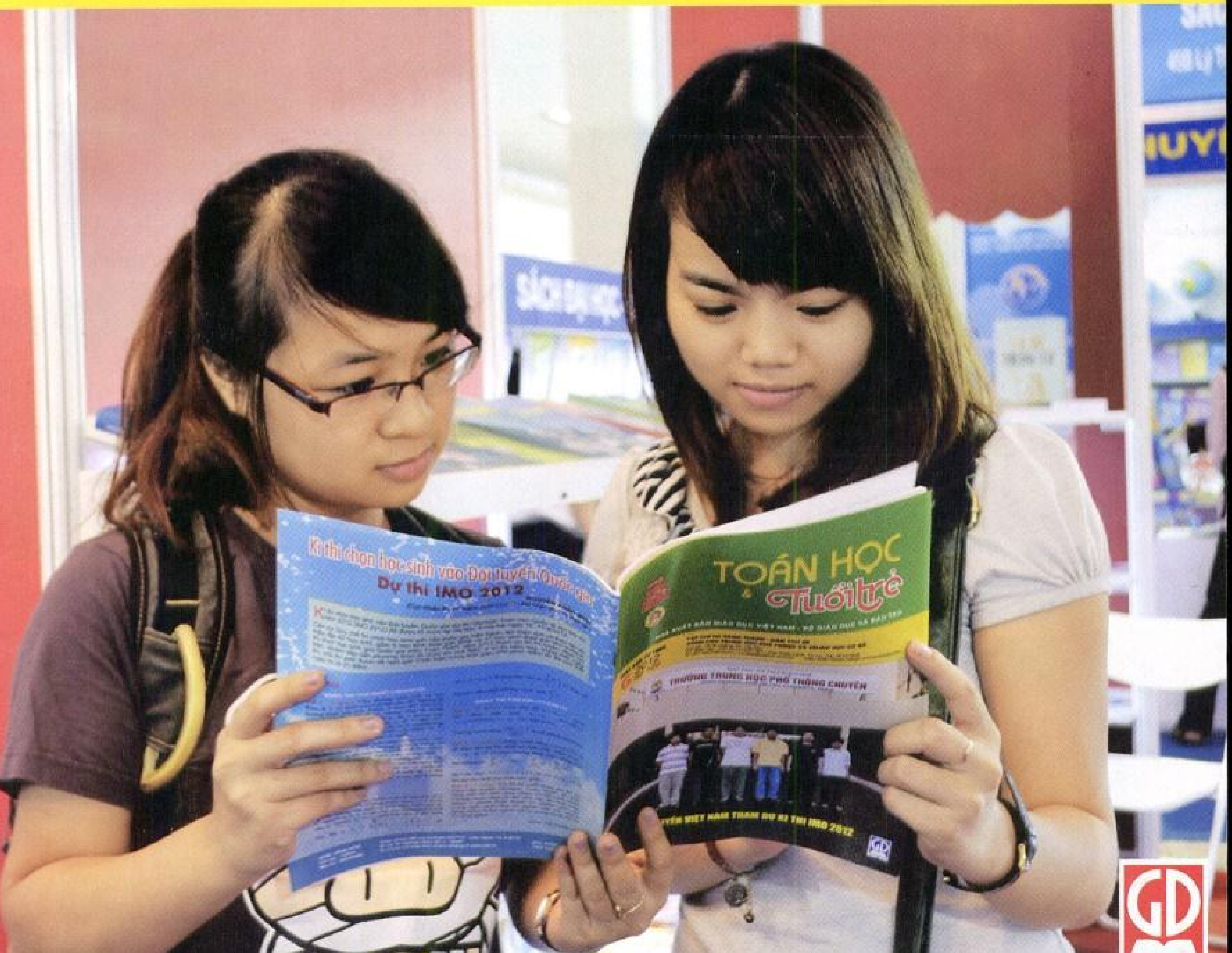
TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964
10 2012
Số 424

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 49
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606
Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn Web: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre



Mừng sinh nhật Toán học & Tuổi trẻ
15 - 10 - 2012

DÀNH CHO TRUNG HỌC CƠ SỞ

TÌM HIỂU SÂU HƠN VỀ MỘT BÀI TOÁN HÌNH HỌC

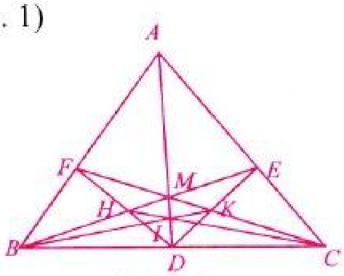
NGUYỄN NGỌC GIANG
(TP. Hồ Chí Minh)

Có bài toán mà lời giải không hề đơn giản bởi lời giải của nó phải trải qua nhiều khâu trung gian. Tuy vậy, đôi lúc bài toán đó lại đem đến cho chúng ta nhiều điều thật thú vị. Những mối quan hệ ẩn tàng và mối quan hệ tường minh làm cho ta khá bất ngờ. Chúng ta hãy thử khám phá những điều vừa nói qua bài toán sau.

✪Bài toán 1. (T4/285 – TH&TT)

Cho tam giác ABC với điểm M nằm trong tam giác. Các tia AM, BM, CM cắt các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại D, E, F. Gọi K là giao điểm của DE và CM, H là giao điểm của DF và BM. Chứng minh rằng các đường thẳng AD, BK, CH đồng quy.

Lời giải. (h. 1)



Hình 1

Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác AMC (với bộ ba điểm thẳng hàng E, K, D) và tam giác BMC (với bộ ba điểm thẳng hàng F, H, D) ta có

$$\frac{KM}{KC}\cdot\frac{EC}{EA}\cdot\frac{DA}{DM}=1;$$

$$\frac{BH}{HM}\cdot\frac{DM}{DA}\cdot\frac{FA}{FB}=1.$$

Suy ra $\dfrac{KM}{KC}=\dfrac{EA}{EC}\cdot\dfrac{DM}{DA};\ \dfrac{BH}{HM}=\dfrac{FB}{FA}\cdot\dfrac{DA}{DM}$ (1)

Sử dụng định lí Ceva thuận cho tam giác ABC với bộ ba đường thẳng đồng quy AD, BE, CF

ta có $\dfrac{CD}{BD}\cdot\dfrac{BF}{FA}\cdot\dfrac{AE}{EC}=1.$

Từ đó $\dfrac{CD}{BD}=\dfrac{FA}{BF}\cdot\dfrac{EC}{AE}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có

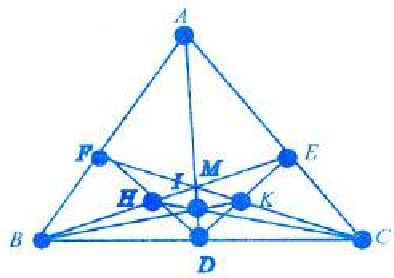
$$\frac{KM}{KC}\cdot\frac{BH}{HM}\cdot\frac{CD}{BD}=1.$$

Theo định lí Ceva đảo ta thấy BK, CH, MD đồng quy. Vậy AD, BK, CH đồng quy. ❐

Bài toán này là một bài toán tương đối khó vì phép chứng minh của nó sử dụng hai lần định lí Menelaus và một lần định lí Ceva. Bây giờ ta sẽ đi tìm hiểu những ẩn chứa bên trong bài toán, đó là đi tìm ứng dụng thực tế của bài toán. Chúng ta biết rằng đi tìm ứng dụng thực tế của bài toán luôn là một việc làm vô cùng quan trọng nhưng không phải lúc nào ta cũng làm được điều này. Xét (h. 1), gọi I là điểm đồng quy của ba đường thẳng AM, CH, BK. Ta có các bộ ba điểm thẳng hàng là AFB ; AID ; AEC ; FKC ; FHD ; BHE ; BIK ; BDC ; DKE ; CIH. Nghĩa là với 9 điểm như hình 1 ta có 10 bộ ba điểm thẳng hàng. Từ đây ta đề xuất được bài toán thực tế như sau.

✪Bài toán 2. *Trong một vườn cây ăn quả có 9 cây. Hãy trồng cây thành 10 hàng, mỗi hàng có 3 cây.*

Chúng ta đã có một ứng dụng thực tế của bài toán 1, đó là ứng dụng trong việc trồng cây thẳng hàng (h. 2).



Hình 2

Từ (h. 2) ta thấy hình lục giác $AFHIKE$ thỏa mãn điều kiện ba đường chéo AI, EH, FK đồng quy tại điểm M đồng thời các đường thẳng AF, EH, KI đồng quy tại B; các đường thẳng HI, FK, AE đồng quy tại C; các đường thẳng FH, AI, EK đồng quy tại D. Tức là ta đã chứng minh được bài toán sau.

✪**Bài toán 3** (T9/245 – TH&TT)

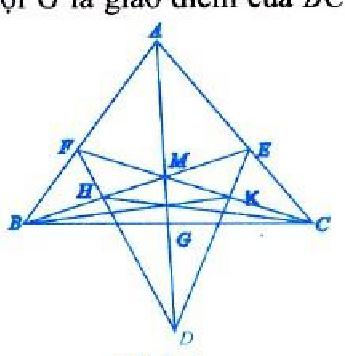
Tồn tại một hình lục giác ABCDEF sao cho ba đường chéo AD, BE, CF đồng quy, đồng thời các đường thẳng AD, BC, FE đồng quy tại điểm I ; các đường thẳng BE, CD, AF đồng quy tại điểm J ; các đường thẳng CF, DE, BA đồng quy tại điểm K sao cho ba điểm I, J, K thẳng hàng không ? Tại sao ?

Sau đây là bài toán tổng quát của Bài toán 1.

✪**Bài toán 4.** (Tổng quát của Bài toán 1)

Cho tam giác ABC. D là điểm bất kì không thuộc các đường thẳng AB, AC. M là điểm thuộc AD (M khác A, M khác D). BM, CM lần lượt cắt AC và AB tại E và F. DE, DF lần lượt cắt CM, BM tại K và H. Chứng minh rằng các đường thẳng CH, AD, BK đồng quy.

Lời giải. Gọi G là giao điểm của BC với AD. (h. 3).



Hình 3

Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác AMB với bộ ba điểm thẳng hàng F, H, D, ta có

$$\frac{DM}{DA}\cdot\frac{FA}{FB}\cdot\frac{HB}{HM}=1 \qquad (1)$$

Sử dụng định lí Menelaus cho tam giác AMC với bộ ba điểm thẳng hàng E, K, D, ta có

$$\frac{DM}{DA}\cdot\frac{EA}{EC}\cdot\frac{KC}{KM}=1 \qquad (2)$$

Chia (1) cho (2) theo vế ta được

$$\frac{EC}{EA}\cdot\frac{FA}{FB}=\frac{KC}{KM}\cdot\frac{HM}{HB} \qquad (3)$$

Vì ba đường thẳng AG, BE, CF đồng quy nên

$$\frac{GB}{GC}\cdot\frac{EC}{EA}\cdot\frac{FA}{FB}=1.$$

Hay $$\frac{EC}{EA}\cdot\frac{FA}{FB}=\frac{GC}{GB} \qquad (4)$$

Thay (4) vào (3) ta có

$$\frac{GC}{GB}=\frac{KC}{KM}\cdot\frac{HM}{HB}\Rightarrow\frac{GB}{GC}\cdot\frac{KC}{KM}\cdot\frac{HM}{HB}=1.$$

Theo định lí Ceva đảo thì ba đường thẳng CH, AD, BK đồng quy. ❐

Phải chăng, Bài toán 1 tổng quát như thế đã là mức cao nhất ? Câu trả lời là chưa. Ta có bài toán tổng quát của Bài toán 3 như sau.

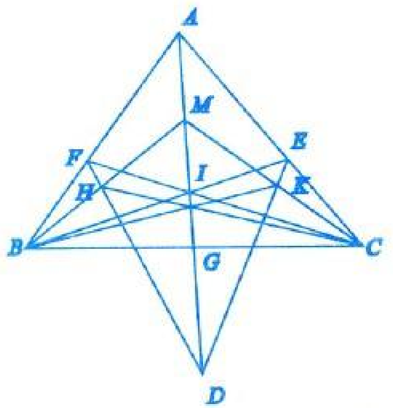
Bài toán 5 (Tổng quát của Bài toán 3)

Cho tam giác ABC. D là điểm bất kì không thuộc các đường thẳng AB, AC. M là điểm thuộc AD (M khác A, M khác D). Gọi I là điểm thuộc AD (I khác A, D và khác giao điểm của AD với BC). BI, CI lần lượt cắt AC và AB tại E và F. DE, DF lần lượt cắt CM, BM tại K và H. Chứng minh rằng các đường thẳng CH, AD, BK đồng quy.

Lời giải. Gọi G là giao điểm của BC với AD (h. 4).

Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác AMB với bộ ba điểm thẳng hàng F, H, D, ta có

$$\frac{DM}{DA}\cdot\frac{FA}{FB}\cdot\frac{HB}{HM}=1 \qquad (1)$$



Hình 4

Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác AMC với bộ ba điểm thẳng hàng E, K, D, ta có

$$\frac{DM}{DA}\cdot\frac{EA}{EC}\cdot\frac{KC}{KM}=1 \qquad (2)$$

Chia (1) cho (2) theo vế ta được

$$\frac{EC}{EA}\cdot\frac{FA}{FB}=\frac{KC}{KM}\cdot\frac{HM}{HB} \qquad (3)$$

Theo giả thiết AG, BE, CF đồng quy nên

$$\frac{GB}{GC}\cdot\frac{EC}{EA}\cdot\frac{FA}{FB}=1.$$

Hay $$\frac{EC}{EA}\cdot\frac{FA}{FB}=\frac{GC}{GB} \qquad (4)$$

Thay (4) vào (3) ta có

$$\frac{GC}{GB}=\frac{KC}{KM}\cdot\frac{HM}{HB}\Rightarrow\frac{GB}{GC}\cdot\frac{KC}{KM}\cdot\frac{HM}{HB}=1.$$

Theo định lí Ceva đảo ta có ba đường thẳng CH, AD, BK đồng quy. ❐

Chú ý. Khi M trùng với I thì Bài toán 4 trở thành Bài toán 3.

Chúng ta đã có những khám phá thú vị xoay quanh một bài toán. Ẩn chứa trong bài toán là những kết quả khá bất ngờ. Chúng ta đã tìm được mối quan hệ giữa bài toán thực tế và bài toán hình học, cũng như bài toán mở rộng của bài toán ban đầu. Bài viết này cần có gì trao đổi thêm ? Mong được sự chia sẻ của bạn đọc.

BÀI TẬP

1. Cho tam giác ABC. D là điểm bất kì không thuộc các đường thẳng AB, AC và BC. M là điểm thuộc AD (M khác A, M khác D). Gọi I là điểm thuộc AD (I khác A, D và khác giao điểm của AD với BC). BI, CI lần lượt cắt AC và AB tại E và F. DE, DF lần lượt cắt CM, BM tại K và H. AH và AK lần lượt cắt DB và DC tại P và Q. Chứng minh rằng ba đường thẳng CP, AD, BQ đồng quy.

2. Cho hai tam giác chung đáy AB là APB và AP_1B. M, N, N_1, M_1 lần lượt là các điểm trên AP, BP, BP_1, AP_1 sao cho MN, AB, M_1N_1 đồng quy tại C. Biết AN cắt BM tại Q ; AN_1 cắt BM_1 tại Q_1. Chứng minh rằng giao điểm D của hai đường chéo PQ và P_1Q_1 cũng nằm trên AB.

3. Cho tam giác ABC, D là điểm bất kì không thuộc AB hay AC, M là điểm trên đường thẳng AD (M khác A, M khác D). Gọi I, K là các điểm tương ứng trên MB, MC (I khác M và B ; K khác M và C). Gọi P, Q là các giao điểm tương ứng của các tia DI, DK với các cạnh AB, AC. Chứng minh rằng ba đường thẳng PQ, IK và BC đôi một song song hoặc đồng quy.

NHẮN TIN

• Các bạn được nêu tên trên các chuyên mục *Sai lầm ở đâu*? của Tạp chí TH&TT số 423, tháng 9 năm 2012 hãy gửi địa chỉ mới của mình về Tòa soạn.

• Các bạn có bài viết đăng trên cuốn sách *Tuyển chọn theo chuyên đề Toán học và tuổi trẻ Quyển 6* gửi gấp địa chỉ mới của mình về Tòa soạn để nhận sách biếu.

THTT

Hướng dẫn giải Đề thi tuyển sinh vào lớp 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU, NGHỆ AN

NĂM HỌC 2012 - 2013

(Đề thi đã đăng trên TH&TT số 423, tháng 9 năm 2012)

Câu 1. a) ĐK $x \geq -1$. Nhận thấy $x=0$ không là nghiệm PT. Với $x \neq 0$, ta có

$x(5-x)=2x\left(\sqrt{x+1}-1\right) \Leftrightarrow 2\sqrt{x+1}=7-x.$

Đáp số. Phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$.

b) Nhân hai vế của PT đầu với 2 rồi cộng theo vế với PT thứ hai ta được

$x^2+y^2-2xy+4x-4y+4=0$

$\Leftrightarrow (x-y+2)^2=0 \Leftrightarrow y=x+2.$

Đáp số. Hệ PT có hai nghiệm $(x;y)$ là

$$\left(\frac{-5-\sqrt{21}}{2};\frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right),\left(\frac{-5+\sqrt{21}}{2};\frac{-1+\sqrt{21}}{2}\right).$$

Câu 2. $2^x+1=y^2 \Leftrightarrow 2^x=(y+1)(y-1)$. Đặt $y+1=2^m$, $y-1=2^n$ $(m,n\in\mathbb{N}; m>n)$. thì $2^m-2^n=2$; $x=m+n$. *Đáp số.* $x=3; y=3$.

Câu 3. Đặt $a=\frac{1}{x}, b=\frac{1}{y}, c=\frac{1}{z}$, thì a, b, c là các số dương, $a+b+c=1$, và BĐT trở thành

$\sqrt{a+bc}+\sqrt{b+ca}+\sqrt{c+ab}\geq 1+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$ (*)

Ta có $\sqrt{a+bc}=\sqrt{a(a+b+c)+bc}$

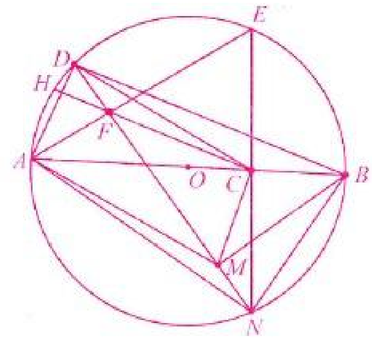
$\geq \sqrt{a^2+2a\sqrt{bc}+bc}=a+\sqrt{bc}.$

Tương tự $\sqrt{b+ca}\geq b+\sqrt{ca}; \sqrt{c+ab}\geq c+\sqrt{ab}.$

Từ đó suy ra BĐT (*).

Câu 4.

a) Ta có $\widehat{ACH}=\widehat{AND}$ (cùng bằng $\widehat{ABD}$), hay $\widehat{ANF}=\widehat{ACF}$, do đó tứ giác $AFCN$ nội tiếp, suy ra $\widehat{CND}=\widehat{BAE}$. Lại có $\widehat{BAE}=\widehat{DAE}=\widehat{DNE}$ nên $\widehat{CND}=\widehat{END}$. Do đó ba điểm N, C, E thẳng hàng.



b) Qua C kẻ $CM//AD$ $(M\in DN)$ rồi chứng minh tứ giác $BCMN$ nội tiếp. Suy ra $\widehat{CBM}=\widehat{END}$; $\widehat{CMB}=\widehat{ENB}$. Mặt khác $\widehat{END}=\widehat{ENB}$ $\Rightarrow \widehat{CBM}=\widehat{CMB} \Rightarrow CB=CM$. Lại có $CB=AD$ (gt) nên $AD=CM$. Do đó tứ giác $ADCM$ là hình bình hành, suy ra DN đi qua trung điểm AC.

Câu 5. Giả sử không có hai cạnh nào của tứ giác bằng nhau. Gọi độ dài các cạnh của tứ giác là a, b, c, d $(a, b, c, d\in\mathbb{N}^*)$ với $a>b>c>d$ (*)

Do tứ giác lồi nên $a<b+c+d<3a$,

suy ra $2a<a+b+c+d<4a$.

Từ giả thiết ta thấy $a+b+c+d$ chia hết cho các số a, b, c, d, nên $a+b+c+d=3a$ (1)

Đặt $a+b+c+d=mb$ với $m\in\mathbb{N}^*$ (2)

$a+b+c+d=nc$ với $n\in\mathbb{N}^*$ (3)

Do $a>b>c$ nên $n>m>3 \Rightarrow n\geq 5, m\geq 4$.

Cộng theo vế (1), (2), (3) được

$3(a+b+c+d)=3a+mb+nc\geq 3a+4b+5c$

$\Rightarrow (b-d)+2(c-d)\leq 0$, mâu thuẫn với (*)

Vậy tứ giác có ít nhất hai cạnh bằng nhau.

THÁI VIẾT THẢO
(Sở GD&ĐT Nghệ An)
Sưu tầm và giới thiệu

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN LỚP 9 TỈNH HƯNG YÊN

NĂM HỌC 2011 - 2012

(*Thời gian làm bài: 150 phút*)

Câu 1 (2 *điểm*)

1) Cho hàm số $f(x)=(x^4+\sqrt{2}.x-7)^{2012}$. Tính $f(a)$ với

$$a=(4+\sqrt{15})(\sqrt{5}-\sqrt{3})\sqrt{4-\sqrt{15}}.$$

2) Cho parabol $(P): y=x^2$. Trên parabol (P) lấy hai điểm A_1, A_2 sao cho $\widehat{A_1OA_2}=90^\circ$ (O là gốc tọa độ). Hình chiếu vuông góc của A_1, A_2 lên trục hoành lần lượt là B_1, B_2. Chứng minh rằng $OB_1.OB_2=1$.

Câu 2 (2 *điểm*)

1) Cho phương trình $x^2-3mx-m=0$ (m là tham số) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A=\frac{m^2}{x_2^2+3mx_1+3m}+\frac{x_1^2+3mx_2+3m}{m^2}.$$

2) Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x^4-2y^4-x^2y^2-4x^2-7y^2-5=0.$$

Câu 3 (2 *điểm*)

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+\dfrac{2xy}{x+y}=1 \\ \sqrt{x+y}=x^2-y. \end{cases}$

2) Giải phương trình

$$(3x+1)\sqrt{2x^2-1}=5x^2+\frac{3}{2}x-3.$$

Câu 4 (3 *điểm*)

1) Cho đường tròn tâm O có đường kính CD là đường cao của tam giác ABC vuông tại C. Đường tròn (O) cắt các cạnh AC, BC lần lượt tại E, F. Gọi M là giao điểm của (O) với BE (M khác E). Hai đường thẳng AC, MF cắt nhau tại K; EF và BK cắt nhau tại P.

a) Chứng minh các điểm B, M, F, P cùng nằm trên một đường tròn.

b) Tính số đo các góc của tam giác ABC khi ba điểm D, M, P thẳng hàng.

2) Cho tam giác ABC vuông tại C, $\widehat{BAC}=60^\circ$. và độ dài đường trung tuyến $BD=\dfrac{3a}{4}$. Tính diện tích tam giác ABC theo a.

Câu 5 (1 *điểm*)

Trên mặt phẳng cho sáu đường tròn có bán kính bằng nhau và có điểm chung. Chứng minh rằng ít nhất một trong sáu đường tròn này chứa tâm của một đường tròn khác trong chúng.

PHẠM TRUNG KIÊN
(GV THCS Hồ Tùng Mậu, Ân Thi, Hưng Yên)
Sưu tầm và giới thiệu

Chuẩn bị cho kì thi tốt nghiệp THPT và thi vào Đại học

MỘT SỐ LƯU Ý KHI GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH CÓ CHỨA THAM SỐ

VÕ HỮU HÀ
(GV THPT Cẩm Xuyên, Hà Tĩnh)

Giải hệ phương trình (HPT) là dạng toán thường gặp trong các đề thi tuyển sinh vào Đại học, Cao đẳng. Việc giải HPT đặc biệt là HPT chứa tham số thường gây nhiều khó khăn cho học sinh, bởi điều kiện của ẩn trong các bài toán này là rất chặt và việc tìm điều kiện của các ẩn là bước quan trọng nhất của bài toán. Trong bài viết này chúng tôi xin nêu một số vấn đề về tìm điều kiện có nghiệm của HPT chứa tham số.

I. KIẾN THỨC VÀ KĨ NĂNG CƠ BẢN

1) Cho hai số thực $x, y \in D$ có tổng bằng S và tích bằng P. Khi đó $S^2 \geq 4P$ và x, y là các nghiệm thuộc D của phương trình $X^2-SX+P=0$.

2) Cho đường cong $(C): y = f(x)$ và đường thẳng $d: y = m$. Khi đó số giao điểm của đường thẳng d và đường cong (C) là số nghiệm của phương trình $f(x) = m$.

3) Kĩ năng khảo sát, lập bảng biến thiên của các hàm số.

II. CÁC THÍ DỤ ÁP DỤNG

★**Thí dụ 1.** *Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm:*
$$\begin{cases} x+2y=2 \\ x^2+y^2=m. \end{cases} \quad (1)$$

Lời giải. HPT trên tương đương với
$$\begin{cases} x=2-2y & (1.1) \\ 5y^2-8y+4-m=0 & (1.2) \end{cases}$$

HPT (1) có nghiệm khi và chỉ khi PT (1.2) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = 5m-4 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \dfrac{4}{5}$. ❒

Lưu ý. PT (1.1) biểu thị mỗi $x \in \mathbb{R}$ tương ứng với một giá trị của y nên chỉ cần tìm điều kiện để PT (1.2) có nghiệm $x \in \mathbb{R}$.

★**Thí dụ 2.** *Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm:*
$$\begin{cases} \sqrt{x-2}+2\sqrt{y+3}=2 \\ x+y=m. \end{cases} \quad (2)$$

Lời giải. Điều kiện $x \geq 2, y \geq -3$.

Đặt $u=\sqrt{x-2}, v=\sqrt{y+3}$, $(u \geq 0, v \geq 0)$, suy ra $u+2v=2$, $u \leq 2, v \leq 1$.

HPT (2) trở thành
$$\begin{cases} u+2v=2 \\ u^2+v^2-1=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=2-2v & (2.1) \\ 5v^2-8v+3=m & (2.2) \end{cases}$$

HPT (2) có nghiệm khi và chỉ khi PT (2.2) có nghiệm $v \in [0;1]$.

Xét hàm số $f(v)=5v^2-8v+3, v \in [0;1]$ có $f'(v)=10v-8$. Ta có bảng biến thiên

v	0		$\frac{4}{5}$		1
$f'(v)$		$-$	0	$+$	
$f(v)$	3	$\searrow$	$-\frac{1}{5}$	$\nearrow$	0

Từ bảng biến thiên ta có $f(v) \in \left[-\dfrac{1}{5};3\right]$ với $v \in [0;1]$. Vậy $-\dfrac{1}{5} \leq m \leq 3$. ❒

Lưu ý

• PT (2.1) biểu thị mỗi $v \in [0;1]$ tương ứng với một giá trị của u nên cần tìm điều kiện để PT (2.2) có nghiệm $v \in [0;1]$.

• Đa số học sinh thường quên đi điều kiện của ẩn nên vẫn giải theo thí dụ 1.

• Học sinh dễ nhầm chỉ cần điều kiện là $v \geq 0$, nên dẫn đến kết quả sai.

★Thí dụ 3. *Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm:*

$$\begin{cases} 3(x^2+y^2)-2xy-2(x+y)=15 \\ x^2+y^2=m. \end{cases} \quad (3)$$

Lời giải. Đặt $S = x + y$, $P = xy$, với $S^2 \geq 4P$, ta có hệ $\begin{cases} 3S^2-2S-8P-15=0 & (3.1) \\ 4S^2-8P=4m & (3.2) \end{cases}$

$\text{PT}(3.1) \Leftrightarrow 3S^2-2S=8P+15 \leq 2S^2+15$ nên $S^2-2S-15 \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq S \leq 5.$

Từ (3.1) và (3.2) suy ra $S^2+2S+15=4m.$

HPT (3) có nghiệm khi và chỉ khi PT $S^2+2S+15=4m$ có nghiệm thỏa mãn $-3 \leq S \leq 5$.

Xét hàm số $f(S)=S^2+2S+15$ với $S \in [-3;5]$.

Lập bảng biến thiên của hàm $f(S)$ trên $[-3\,;5]$ tìm được $f(S) \in [14;50]$ suy ra $m \in \left[\frac{7}{2};\frac{25}{2}\right]$. ❒

Lưu ý. Khi tìm điều kiện của *S*, ta phải khai thác triệt để điều kiện $S^2 \geq 4P$.

★Thí dụ 4. *Tìm m để hệ phương trình*

$$\begin{cases} xy(x+y)=3(x+y)+xy \\ x^2+y^2+3xy-(m-5)(x+y)-xy(x+y)+m+33=0 \end{cases} \quad (4)$$

có nghiệm dương.

Lời giải. Đặt $S=x+y, P=xy$, với *S*, *P* dương và $S^2 \geq 4P$, ta có hệ

$$\begin{cases} SP=3S+P \\ S^2+P-(m-5)S-SP+m+33=0. \end{cases}$$

Nhận thấy $S \neq 1$.

Ta có $\frac{3S}{S-1}=P \leq \frac{S^2}{4} \Leftrightarrow \frac{S^3-S^2-12S}{4(S-1)} \geq 0$

$\Leftrightarrow S \in (0;1) \cup [4;+\infty)$, vì $S>0$ và $S \neq 1$.

Lại có $\frac{3S}{S-1}=P>0 \Leftrightarrow S \in (-\infty;0) \cup (1;+\infty)$.

Do đó HPT (4) có nghiệm khi và chỉ khi PT $m=\frac{S^2+2S+33}{S-1}$ có nghiệm $S \in [4;+\infty)$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{S^2+2S+33}{S-1}$, $S \in [4;+\infty)$.

Lập bảng biến thiên hàm *f*(*S*) trên $[4\,;+\infty]$ suy ra $m \in [16;+\infty)$. ❒

Lưu ý

• Khi giải hệ (4), học sinh chỉ quan tâm điều kiện $S^2 \geq 4P$ và *S*, *P* dương nên kết quả dẫn đến $S \in (0;1) \cup [4;+\infty)$, nhưng đúng phải là $S \in [4;+\infty)$.

• Sử dụng các kết quả của lời giải bài toán này chúng ta có thể trả lời các câu hỏi như: Tìm *m* để HPT có nghiệm duy nhất; tìm *m* để HPT có 4 nghiệm phân biệt,...

★Thí dụ 5. *Biện luận theo m số nghiệm của hệ phương trình* $\begin{cases} xy+x+y=m \\ x^2+y^2=m \end{cases}$ (5)

Lời giải

Đặt $S=x+y, P=xy$, với $S^2 \geq 4P$, ta có hệ

$$\begin{cases} S+P=m \\ S^2-2P=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2-S-3P=0 & (5.1) \\ S^2+2S=3m & (5.2) \end{cases}$$

Ta có $(5.1) \Leftrightarrow 4S^2-4S=12P \leq 3S^2$

$\Leftrightarrow S^2-4S \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq S \leq 4$.

Nhận xét

• $S^2=4P \Leftrightarrow S=0$ hoặc $S=4$, khi đó mỗi cặp (*S;P*) có một nghiệm $(x_0;y_0)$ duy nhất (vì $x_0=y_0$).

• $S^2>4P \Leftrightarrow 0<S<4$, khi đó mỗi cặp (*S;P*) có hai nghiệm $(x_0;y_0)$ và $(y_0;x_0)$.

Từ hệ (5) suy ra phương trình $S^2+2S=3m$, với $0\le S\le 4$.

Xét hàm số $f(t)=t^2+2t,\ t\in[0;4]$.

Lập bảng biến thiên suy ra mỗi $m\in[0;8]$ có duy nhất một nghiệm S. Do đó

- Với $m=0$ hoặc $m=8$, hệ (5) có nghiệm duy nhất.
- Với $m<0$ hoặc $m>8$, hệ (5) vô nghiệm.
- Với $0<m<8$, hệ (5) có hai nghiệm phân biệt.

Lưu ý. Khi giải hệ (5), học sinh cần biến đổi làm xuất hiện một phương trình không chứa tham số để tìm điều kiện của S và một phương trình chứa một ẩn (S hoặc P) để tìm giá trị của tham số m.

★ Thí dụ 6. *Tìm m để hệ phương trình*

$$\begin{cases}x+y=4xy\\ x^2+y^2-7xy=m\end{cases}\qquad(6)$$

có nghiệm thoả mãn $0<x\le 1,\ 0<y\le 1$.

Lời giải. Đặt $S=x+y, P=xy$, $S^2\ge 4P$, khi đó HPT trở thành

$$\begin{cases}S=4P\\ S^2-9P=m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}S=4P\\ 16P^2-9P=m.\end{cases}$$

Theo định lí Viète đảo, x, y là các nghiệm thuộc $(0;1]$ của PT $t^2-4Pt+P=0$.

Cần tìm P để PT $t^2-4Pt+P=0$ có hai nghiệm trong $(0;1]\Leftrightarrow P=\dfrac{t^2}{4t-1}$ có hai nghiệm trong $(0;1]$, (vì $t=\dfrac{1}{4}$ không phải là nghiệm).

Xét hàm số $g(t)=\dfrac{t^2}{4t-1},\ t\in(0;1]$ suy ra PT $P=\dfrac{t^2}{4t-1}$ có hai nghiệm trong $(0;1]\Leftrightarrow P\in\left[\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{3}\right]$.

HPT (6) có nghiệm $\Leftrightarrow 16P^2-9P=m$ có nghiệm $P\in\left[\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{3}\right]$.

Xét hàm số $g(P)=16P^2-9P,\ P\in\left[\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{3}\right]$.

Lập bảng biến thiên hàm $g(P)$ trên $\left[\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{3}\right]$ suy ra $m\in\left[-\dfrac{81}{64};-\dfrac{11}{9}\right]$. ❒

Lưu ý. Nếu theo lối mòn để giải bài toán trên thì không thể tìm được điều kiện của P, vì với bài toán này điều kiện của P rất chặt.

★ Thí dụ 7. *Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:*

$$\begin{cases}y^2=x^3-4x^2+mx\\ x^2=y^3-4y^2+my\end{cases}\qquad(7)$$

Lời giải. Từ HPT (7) suy ra

$$(x-y)\left(x^2+y^2+xy-3(x+y)+m\right)=0.$$

Với $x=y$ thay vào (7) ta có $x(x^2-5x+m)=0$.

Dễ thấy hệ có nghiệm $x=y=0$, nên hệ (7) có nghiệm duy nhất khi các PT $x^2-5x+m=0$ và $x^2+y^2+xy-3(x+y)+m=0$ có nghiệm duy nhất $x=y=0$ hoặc vô nghiệm.

- *Trường hợp 1.* Nếu $x=y=0$, từ phương trình $x^2-5x+m=0$ suy ra $m=0$ khi đó $x=0$ và $x=5$, do đó hệ không có nghiệm duy nhất (không thoả mãn).
- *Trường hợp 2.* Nếu PT $x^2-5x+m=0$ vô nghiệm thì $\Delta_1=25-4m<0\Leftrightarrow m>\dfrac{25}{4}$, khi đó PT $x^2+y^2+xy-3(x+y)+m=0$ vô nghiệm. Thật vậy xét $x^2+(y-3)x+y^2-3y+m=0$ (xem PT ẩn x, tham số y), ta có $\Delta_2=-3(y-1)^2+12-4m<0$ (thỏa mãn).

Vậy $m>\dfrac{25}{4}$. ❒

(Xem tiếp trang 13)

Thử sức TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 1

(*Thời gian làm bài: 180 phút*)

PHẦN CHUNG

Câu I (2 *điểm*) Cho hàm số

$y=(m-2)x^3-(3m-6)x^2-1+m=0 \quad (C)$

(m là tham số thực).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m=3$.

2) Tìm m để hàm số (C) có cực đại và cực tiểu sao cho đường thẳng qua điểm cực đại và điểm cực tiểu vuông góc với đường thẳng d: $y=\frac{1}{2}x+9$.

Câu II (2 *điểm*) 1) Giải phương trình

$-2\sin^3 x+2\sqrt{3}\cos^3 x+3\sin x-2\sqrt{3}\cos x=0.$

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y-1+\dfrac{1}{\sqrt{2x+y}}=0 \\ \dfrac{1}{x+y+1}+\sqrt{2x+y}=2. \end{cases}$

Câu III. (1 *điểm*) Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\frac{1}{x^4+x^2+1}$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x=1$. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra do hình phẳng trên quay quanh trục Oy.

Câu IV (1 *điểm*) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A, SB vuông góc với đáy, $BC=a$, $SB=2a$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB, SC. Tính độ dài đoạn thẳng MN và khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và BC.

Câu V (1 *điểm*) Cho $a\ge 0, b\ge 0, c\ge 0$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}}\ge 3\sqrt{2}.$$

PHẦN RIÊNG

(*Thí sinh chỉ được chọn một trong 2 phần A hoặc B*)

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu VIa (2 *điểm*)

1) Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho $C(5;4)$, đường thẳng d: $x-2y+11=0$ đi qua A và song song với BC, đường phân giác trong AD có phương trình $3x+y-9=0$. Viết phương trình các cạnh còn lại của tam giác ABC.

2) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0;0;4)$, $B(2;0;0)$ và hình cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z+2=0$. Viết phương trình mặt cầu (S') qua O, A, B và tiếp xúc với mặt cầu (S).

Câu VIIa (1 *điểm*) Tìm m để phương trình sau có đúng một nghiệm phức:

$z^3+(i-2m)z^2+(m^2-2m-2mi)z+m^2i-2mi=0,$

biết rằng phương trình có một nghiệm thuần ảo.

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu VIb (2 *điểm*)

1) Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho đường thẳng $d: x-y+1=0$ và đường tròn $(C): x^2+y^2-4x-2y-4=0$ có tâm là I. Tìm tọa độ điểm M thuộc d để từ M có thể kẻ được hai đường thẳng tiếp xúc với (C) tại A, B sao cho tứ giác $IMAB$ là hình vuông.

2) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng d : $\frac{x}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{2}$ và hình cầu (S) có phương trình

$$x^2+y^2+z^2-2x-4y+8z+16=0.$$

Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và tiếp xúc với mặt cầu (S).

Câu VIIb (1 *điểm*) Giải phương trình

$$3\sqrt{5^x-4}+\sqrt{5^x+4}=2\sqrt{3}.\sqrt[4]{25^x-16}.$$

LÂM QUỐC TOÀN
(*GV THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai, Sóc Trăng*)

BẠN ĐỌC TÌM TÒI

XUNG QUANH BÀI TOÁN CHIA KẸO CỦA EULER

NGUYỄN THỊ NGỌC ÁNH
(GV THPT chuyên Thái Nguyên)

Xuất phát từ một bài toán "Có n chiếc kẹo giống nhau chia cho m em bé. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chia kẹo?". Bài toán tưởng chừng rất đơn giản nhưng lại là một bài toán khó đối với nhiều học sinh. Trong đề thi học sinh giỏi Quốc gia năm nay có một bài tổ hợp mà lời giải của nó có thể trình bày nhờ vận dụng kết quả bài toán chia kẹo của Euler. Bài viết nhỏ này giới thiệu cho các em bài toán chia kẹo của Euler và một số ứng dụng của nó.

(Bạn đọc có thể xem thêm Bài toán chia kẹo này ở: *Bài toán về vé hạnh phúc* đăng trên *Tuyển chọn theo chuyên đề Toán học và Tuổi trẻ Quyển 6,* trang 187).

1. Từ bài toán thực tế suy ra kết quả bài toán chia kẹo của Euler

Chúng ta đều biết, trong một chuỗi nhị phân, các phần tử nhận một trong hai giá trị 0 hoặc 1. Số dãy nhị phân thỏa mãn có độ dài n và trong mỗi dãy có đúng k $(0 \le k \le n)$ phần tử nhận giá trị bằng 1 là C_n^k.

Bài toán mở đầu

Cho một lưới gồm các ô vuông. Các nút được đánh số từ 0 đến m theo chiều từ trái sang phải và từ 0 đến n theo chiều từ dưới lên trên. Hỏi có bao nhiêu đường đi khác nhau từ nút (0 ; 0) đến nút (m ; n) nếu chỉ cho phép đi trên cạnh các ô vuông theo chiều từ trái sáng phải hoặc từ dưới lên trên?

Lời giải. Một đường đi như thế được xem gồm $(m + n)$ đoạn (mỗi đoạn là một cạnh ô vuông). Tại mỗi đoạn chỉ được chọn một trong hai giá trị đi lên (ta mã hoá là 1) hay sang phải (ta mã hoá là 0) Số đoạn đi lên đúng bằng n và số đoạn sang phải đúng bằng m. Bài toán dẫn đến việc tìm xem có bao nhiêu dãy nhị phân có độ dài $(m + n)$ trong đó có đúng n thành phần có giá trị bằng 1.

Kết quả cần tìm là C_{m+n}^n.

Ta cho một hạt chuyển động trên một đường đi thoả mãn yêu cầu bài toán trên (tức là xuất phát từ điểm (0 ; 0), kết thúc tại điểm $(m ; n)$ và chỉ được phép đi lên hoặc sang phải). Gọi x_{i+1} là số đoạn mà hạt đó đi lên theo đường thẳng đứng có chỉ số i $(i=\overline{1,m})$. Khi đó, số đường đi thoả mãn chính bằng số nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1 + x_2 + ... + x_{m+1} = n$. Số nghiệm đó bằng C_{n+m}^m.

Bài toán chia kẹo của Euler

Có n chiếc kẹo giống nhau chia cho m em bé. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chia kẹo?

Hay chính là bài toán:

Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1 + x_2 + ... + x_m = n$ $(m, n \in \mathbb{N})$.

Theo bài toán mở đầu, số nghiệm cần tìm là C_{m+n-1}^{m-1}.

2. Các bài toán phát triển

✪**Bài toán 1.** *Tìm số nghiệm nguyên của phương trình* $a + b + c + d = 17$ *với* $a \ge 1$, $b \ge 2$, $c \ge 3$, $d \ge 4$.

Lời giải. Đặt $x = a - 1, y = b - 2, z = c - 3, t = d - 4$.

Khi đó yêu cầu bài toán trở thành:

Tìm số nghiệm nguyên không âm của PT

$$x + y + z + t = 7.$$

Kết quả cần tìm là $C_{10}^3 = 120$ (nghiệm). ❒

Tổng quát hơn, ta có

Bài toán 2. *Cho các số tự nhiên n, λ_1, λ_2, ..., λ_m. Tìm số nghiệm nguyên của phương trình $x_1+x_2+...+x_m=n$ thoả mãn $x_i \geq \lambda_i$, $\forall i=\overline{1,m}$.*

Lời giải. Với mỗi i, đặt $y_i = x_i - \lambda_i$ và gọi $\lambda = \lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_m$. Khi đó yêu cầu bài toán trở thành tìm số nghiệm nguyên không âm của PT $y_1+y_2+\ldots+y_m=n-\lambda$.

* Nếu $\lambda < n$ thì PT có $C_{m+n-\lambda-1}^{m-1}$ nghiệm.

* Nếu $\lambda = n$ thì PT có duy nhất một nghiệm.

* Nếu $\lambda > n$ thì PT vô nghiệm. ❒

Bài toán 3. *Tìm số nghiệm nguyên của hệ*

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=17 \\ 3\leq x_i \leq 5, \quad \forall i=\overline{1,4}. \end{cases}$$

Lời giải. Đặt $y_i = x_i - 3, \forall i=\overline{1,4}$. Từ giả thiết suy ra $0 \leq y_i \leq 2$; $\forall i=\overline{1,4}$. Ta có hệ

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} y_1+y_2+y_3+y_4=5 \quad (1) \\ 0\leq y_i \leq 2, \quad \forall i=\overline{1,4}. \end{cases}$$

Gọi X là tập tất cả các nghiệm nguyên không âm của PT (1). Khi đó $|X| = C_8^3$.

Gọi A, B, C, D lần lượt là tập tất cả các nghiệm nguyên của bốn hệ

$$\begin{cases} y_1+y_2+y_3+y_4=5 \\ y_i \geq 3 \end{cases}$$

với mỗi $i \in \{1;2;3;4\}$. Theo Bài toán 2, ta có

$|A|=|B|=|C|=|D|=C_5^3$

$|A\cap B|=|A\cap C|=|A\cap D|=|B\cap C|=|B\cap D|=|C\cap D|=0$

$|A\cap B\cap C|=|A\cap C\cap D|=|B\cap C\cap D|=|A\cap B\cap D|=0$

$|A\cap B\cap C\cap D|=0.$

Theo nguyên lí bù trừ ta có số nghiệm của hệ (I) bằng

$$|X|-(|A|+|B|+|C|+|D|-|A\cap B|-|A\cap C|$$
$$-|A\cap D|-|B\cap C|-|B\cap D|-|C\cap D|$$
$$+|A\cap B\cap C|+|A\cap C\cap D|+|B\cap C\cap D|$$
$$+|A\cap B\cap D|-|A\cap B\cap C\cap D|)$$
$$=C_8^3-4C_5^3=16.$$

Vậy có 16 nghiệm thoả mãn yêu cầu bài toán. ❒

Bài toán 4. *Tìm số các nghiệm nguyên không âm của bất PT*

$$x_1+x_2+x_3+x_4 \leq 11.$$

Nhận xét. Đứng trước bài toán này nhiều học sinh sẽ đưa về việc xét mười hai PT dạng

$$x_1+x_2+x_3+x_4=i \qquad (i=\overline{0,11})$$

Số nghiệm cần tìm bằng $\sum_{i=0}^{11} C_{3+i}^3 = 1365$ (nghiệm).

Ta vẫn giải được theo cách trên nếu thay số 11 bởi một số nguyên lớn hơn nhưng mất thời gian vào việc tính toán. Sau đây là cách giải có tính sáng tạo hơn.

Lời giải. Số nghiệm cần tìm bằng số nghiệm nguyên không âm của PT

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=11.$$

Dễ thấy, kết quả là $C_{15}^4=1365$ (nghiệm).

Từ kết quả của Bài toán 4 ta có thể rút ra kết luận:

Số nghiệm nguyên không âm của bất PT $x_1+x_2+...+x_m \leq n \,(n, m \in \mathbb{N})$ bằng C_{m+n}^m.

Bài toán 5. *Tìm số nghiệm nguyên không âm của hệ*

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4 \leq 10 \\ x_1 \leq 3. \end{cases}$$

Lời giải. Số nghiệm cần tìm bằng số nghiệm nguyên không âm của hệ

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=10 \\ x_1 \leq 3. \end{cases}$$

Ta lần lượt cho x_1 nhận các giá trị 0; 1; 2; 3 và sử dụng kết quả bài toán chia kẹo Euler thu được số nghiệm cần tìm bằng

$$C_{13}^3+C_{12}^3+C_{11}^3+C_{10}^3=791 \text{ (nghiệm)}. ❒$$

Bạn đọc có thể tiếp tục phát triển các bài toán bằng cách thêm bớt các điều kiện cho các ẩn x_i, từ đó khám phá ra những bài toán mới, cách giải mới độc đáo và thú vị.

3. Ứng dụng kết quả bài toán chia kẹo của Euler vào một số bài toán thực tế

✪**Bài toán 6.** *Có n vật giống hệt nhau và m hộp phân biệt ($n \geq m, n, m \in \mathbb{N}^*$).*

a) Hỏi có bao nhiêu cách phân phối hết n vật đó vào m hộp đã cho?

b) Hỏi có bao nhiêu cách phân phối hết n vật đó vào m hộp đã cho sao cho mỗi hộp có ít nhất một vật?

Lời giải. Đánh số các hộp theo thứ tự từ 1 đến m. Giả sử ta đã phân phối hết n vật vào m hộp đã cho. Gọi x_i là số vật được phân phối cho hộp thứ i, với $i = \overline{1, m}$.

a) Số cách phân phối thỏa mãn bằng số nghiệm nguyên không âm của PT $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n$ và bằng C_{m+n-1}^{m-1} (cách) (theo Bài toán chia kẹo Euler).

b) Số cách phân phối thỏa mãn mỗi hộp có ít nhất một vật bằng số nghiệm nguyên của hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n \\ x_i \geq 1, \quad \forall i = \overline{1, m}. \end{cases}$$

Kết quả cần tìm là C_{n-1}^{m-1} (theo Bài toán 2). ❒

✪**Bài toán 7.** *Tìm số cách chọn ra r số phân biệt từ n số nguyên dương đầu tiên sao cho trong sự lựa chọn đó không chứa 2 số nguyên liên tiếp.*

Lời giải. Sắp xếp n số nguyên dương đầu tiên thành một hàng theo thứ tự tăng bắt đầu từ 1. Nếu một số được chọn thì đặt biểu tượng Y dưới số đó, nếu không chọn thì đặt biểu tượng N dưới số đó. Gọi x_1 là số lượng số có biểu tượng N đứng trước biểu tượng Y đầu tiên; x_2 là số lượng số có biểu tượng N giữa biểu tượng Y đầu tiên và biểu tượng Y thứ hai,... , x_r là số lượng số có biểu tượng N giữa biểu tượng Y thứ $r - 1$ và biểu tượng Y thứ r; x_{r+1} là số lượng số đứng sau biểu tượng Y thứ r. Khi đó có một *tương ứng một - một* giữa những sự lựa chọn chấp nhận được với những nghiệm nguyên của PT

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{r+1} = n - r$$

với $x_1 \geq 0, x_{r+1} \geq 0, x_i \geq 1$; ($\forall i = \overline{2, r}$).

Theo Bài toán 2, kết quả cần tìm là C_{n-r+1}^{r} cách lựa chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán. ❒

✪**Bài toán 8.** (*VMO - 2012*)

Cho một nhóm gồm 5 cô gái, kí hiệu là G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 và 12 chàng trai. Có 17 chiếc ghế được sắp thành một hàng ngang. Người ta xếp nhóm người đã cho ngồi vào các chiếc ghế đó sao cho các điều kiện sau được đồng thời thoả mãn

1) Mỗi ghế có đúng một người ngồi;

2) Thứ tự ngồi của các cô gái, xét từ trái qua phải, là G_1, G_2, G_3, G_4, G_5;

3) Giữa G_1 và G_2 có ít nhất 3 chàng trai;

4) Giữa G_4 và G_5 có ít nhất 1 chàng trai và nhiều nhất 4 chàng trai;

Hỏi có tất cả bao nhiêu các xếp như vậy?

(Hai cách xếp được coi là khác nhau nếu tồn tại một chiếc ghế mà người ngồi ở chiếc ghế đó trong hai cách xếp là khác nhau).

Lời giải. Đánh số các ghế từ trái qua phải theo thứ tự từ 1 đến 17.

Gọi x_1 là số chàng trai được xếp bên trái G_1, x_2 là số chàng trai được xếp ở giữa G_1 và G_2, x_3 là số chàng trai được xếp ở giữa G_2 và G_3, x_4 là số chàng trai được xếp ở giữa G_3 và G_4, x_5 là số chàng trai được xếp ở giữa G_4 và G_5, x_6 là số chàng trai được xếp bên phải G_5.

Khi đó, ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 12 \\ x_2 \geq 3 \\ 1 \leq x_5 \leq 4. \end{cases}$$

Đặt $y_2 = x_2 - 3$ và $y_5 = x_5 - 1$.

Số cách phân ghế cho các cô gái bằng số nghiệm nguyên không âm của hệ

$$\begin{cases} x_1 + y_2 + x_3 + x_4 + y_5 + x_6 = 8 \\ y_5 \leq 3. \end{cases}$$

Ta lần lượt cho y_5 nhận các giá trị 0; 1; 2; 3 và áp dụng kết quả bài toán chia kẹo Euler thu được kết quả là

$$C_{12}^4 + C_{11}^4 + C_{10}^4 + C_9^4 = 1161 \text{ (cách)}.$$

Vì 12 chàng trai có thể hoán đổi vị trí cho nhau nên số cách xếp thoả mãn yêu cầu bài toán bằng 12! 1161 (cách). ❐

✪Bài toán 9. *Giả sử có x_i vật giống nhau có cùng kí hiệu i, ($i=\overline{1,m}$) và n hộp phân biệt. Hỏi có bao nhiêu cách phân phối hết các vật đã cho vào n hộp sao cho hộp thứ j được nhận ít nhất q_{ij} vật mang kí hiệu i, ($i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$)?*

Lời giải. Ta phân phối hết các vật mang kí hiệu 1 vào n hộp , sau đó đến lượt các vật mang kí hiệu 2, 3,…, m.

Gọi $q_i = \sum_{j=1}^{n} q_{ij}$ $\left(i=\overline{1,m}\right)$. Có $C_{x_i-q_i+n-1}^{n-1}$ cách phân phối hết các vật mang kí hiệu i. Theo quy tắc nhân, có $\prod_{i=1}^{m} C_{x_i-q_i+n-1}^{n-1}$ cách phân phối thỏa mãn yêu cầu bài toán. ❐

BÀI TẬP

1. Xét một tập hợp X gồm n số tự nhiên liên tiếp. Ta gọi mỗi tập con của X gồm p số tự nhiên liên tiếp là một "p- khối". Có bao nhiêu cách lấy ra m "p- khối" từ X sao cho m khối này đôi một không giao nhau?

2. Cho tập hợp $A = \{1; 2; 3; \ldots; 18\}$. Có bao nhiêu cách chọn ra năm số trong tập A sao cho hiệu của hai số bất kì trong năm số đó không nhỏ hơn 2?

3. Một cửa hàng có m loại kem khác nhau. Một khách hàng cần mua n cốc kem ở đó. Hỏi rằng

a) Người khách hàng đó có tất cả bao nhiêu sự lựa chọn?

b) Người khách hàng đó có tất cả bao nhiêu sự lựa chọn sao cho cả m loại kem đều có mặt trong mỗi sự lựa chọn?

4. Có bao nhiêu số nguyên dương nhỏ hơn 1000000 mà có tổng bằng 15?

5. Một học sinh muốn lọt vào đội tuyển đi thi toán phải qua 4 kì thi và phải đạt ít nhất 17 điểm, nhưng không có kì thi nào bị điểm 2 hoặc 1. Hỏi có bao nhiêu cách tiến hành 4 kì thi đó để em học sinh đó chắc chắn lọt vào đội tuyển?

(Hai cách tiến hành được xem là khác nhau nếu có ít nhất một kì thi nhận được số điểm khác nhau và mỗi kì thi có thể đạt điểm là số nguyên từ 1 đến 5).

6. Có 12 cái hộp khác nhau được đánh số từ 1 đến 12 và 8 viên bi giống nhau. Hỏi có bao nhiêu cách xếp 8 viên bi vào 12 hộp sao cho tổng số các viên bi trong các hộp số 1, 2, 3 là chẵn, còn tổng các viên bi trong các hộp 4, 5, 6 là lẻ?

MỘT SỐ LƯU Ý *(Tiếp trang 8)*

Lưu ý. Hệ phương trình (7) đã được một số sách giải theo cách truyền thống là sử dụng điều kiện cần và điều kiện đủ, tuy nhiên cách giải trong bài viết này tỏ ra ngắn gọn mà vẫn đảm bảo tính lôgic và chặt chẽ của bài toán.

BÀI TẬP

1. Tìm m để hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+y^2+xy=3 \\ x^4+y^4+4xy-x^3y^3=m \end{cases}$$

có nghiệm.

2. Tìm m để hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+y^2-xy=1 \\ m\left(x^2+y^2+1\right)=x^4+y^4+1 \end{cases}$$

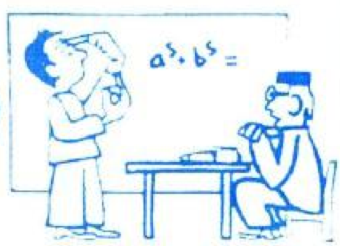
có nghiệm.

3. Chứng minh rằng hệ phương trình

$$\begin{cases} 7x+y=\dfrac{m}{x^2} \\ 7y+x=\dfrac{m}{y^2} \end{cases}$$

có nghiệm duy nhất khi $m>0$. Hỏi điều đó có đúng không khi $m \le 0$?

DIỄN ĐÀN DẠY HỌC TOÁN



KĨ THUẬT CHỌN HỆ SỐ ĐIỀU CHỈNH KHI SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

PHẠM VĂN HOẰNG
(GV THPT Kim Liên, Hà Nội)

Phương pháp tích phân từng phần được sử dụng rộng rãi trong chương trình phổ thông và tỏ ra rất hiệu quả khi giải một số tích phân mà hàm số dưới dấu tích phân là tích của hai hàm khác nhau.

$$\int_a^b u\mathrm{d}v = (u.v)\Big|_a^b - \int_a^b v\mathrm{d}u$$

trong đó $u = f_1(x), \mathrm{d}v = f_2(x)\mathrm{d}x$.

Suy ra $v = \int f_2(x)\mathrm{d}x$ nên $v(x)$ xác định không duy nhất, các hàm số $v(x)$ có thể sai khác một hằng số $\alpha(\alpha \in \mathbb{R})$, $v(x) = v_0(x) + \alpha$. Căn cứ vào mỗi bài toán cụ thể ta có cách xác định $v(x)$ phù hợp sao cho tích phân $\int_a^b v\mathrm{d}u$ là đơn giản, dễ dàng tính được. Đây chính là kĩ thuật chọn $v(x)$ thông qua hệ số điều chỉnh α.

★Thí dụ 1. *Tính tích phân* $I_1 = \int_1^3 \frac{3+\ln x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x.$

Phân tích. Khi gặp bài toán này, học sinh thường giải như sau

Đặt $\begin{cases} u = 3 + \ln x \\ \mathrm{d}v = \dfrac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v = -\dfrac{1}{x+1}. \end{cases}$

Do đó $I_1 = \left(-\dfrac{1}{x+1}(3+\ln x)\right)\Bigg|_1^3 + \int_1^3 \dfrac{1}{x(x+1)}\mathrm{d}x.$

Việc tính tích phân $\int_1^3 \frac{1}{x(x+1)}\mathrm{d}x$ hơi phức tạp.

Dùng hệ số điều chỉnh, ta có thể giải gọn hơn.

Lời giải. Dùng hệ số điều chỉnh $\alpha = 1$.

Đặt $\begin{cases} u = 3 + \ln x \\ \mathrm{d}v = \dfrac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{-1}{x+1} + 1 = \dfrac{x}{x+1} \end{cases}$

thì $I_1 = \left(\dfrac{x}{x+1}(3+\ln x)\right)\Bigg|_1^3 - \int_1^3 \dfrac{1}{x+1}\mathrm{d}x$

$$= \frac{3}{4} + \frac{3}{4}\ln 3 - \ln|x+1|\Big|_1^3 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4}\ln 3 - \ln 2. \ \square$$

★Thí dụ 2. *Tính tích phân*

$$I_2 = \int_0^1 x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x.$$

Lời giải. Dùng hệ số điều chỉnh $\alpha = \frac{1}{2}$, ta có thể giải gọn như sau

Đặt $\begin{cases} u = \ln(x^2+1) \\ \mathrm{d}v = x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{x^2+1}{2} \end{cases}$

thì $I_2 = \left(\dfrac{x^2+1}{2}\ln(x^2+1)\right)\Bigg|_0^1 - \int_0^1 x\mathrm{d}x$

$$= \ln 2 - \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \ln 2 - \frac{1}{2}. \ \square$$

★Thí dụ 3. *Tính tích phân*

$$I_3 = \int_0^1 \frac{\ln(2x^2+4x+1)}{(x+1)^3}\mathrm{d}x.$$

Lời giải. Dùng hệ số điều chỉnh $\alpha = 1$, ta có thể giải ngắn gọn như sau

Đặt $\begin{cases} u = \ln(2x^2+4x+1) \\ \mathrm{d}v = \dfrac{1}{(x+1)^3}\mathrm{d}x \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{4x+4}{2x^2+4x+1}\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{-1}{2(x+1)^2} + 1 = \dfrac{2x^2+4x+1}{2(x+1)^2}. \end{cases}$$

Khi đó

$$I_3 = \left(\frac{2x^2+4x+1}{2(x+1)^2}\ln(2x^2+4x+1)\right)\Bigg|_0^1 - \int_0^1 \frac{2}{x+1}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{7}{8}\ln 7 - \int_0^1 \frac{2}{(x+1)}\mathrm{d}x = \frac{7}{8}\ln 7 - 2\ln|x+1|\Big|_0^1$$

$$= \frac{7}{8}\ln 7 - 2\ln 2. \ \square$$

★Thí dụ 4. *Tính tích phân*

$$I_4 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x + \cos x)}{\sin^2 x}\mathrm{d}x.$$

Phân tích. Thông thường học sinh làm như sau

Đặt $\begin{cases} u = \ln(\sin x + \cos x) \\ \mathrm{d}v = \dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x \\ v = -\cot x \end{cases}$

Khi đó $I_4 = \left(-\cot x \ln(\sin x + \cos x)\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$$+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cot x(\cos x - \sin x)}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x.$$

Sau đó để tính $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cot x(\cos x - \sin x)}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x$ ta phải dùng phương pháp đổi biến và rất phức tạp khi tính toán. Trong trường hợp này, kĩ thuật điều chỉnh hệ số giúp bài toán gọn hơn và đơn giản trong tính toán.

Lời giải. Sử dụng hệ số điều chỉnh $\alpha = -1$, ta có lời giải gọn như sau

Đặt $\begin{cases} u = \ln(\sin x + \cos x) \\ \mathrm{d}v = \dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x \\ v = -\cot x - 1 = \dfrac{-\cos x - \sin x}{\sin x}. \end{cases}$$

Ta có

$$I_4 = \left(-(\cot x + 1)\ln(\sin x + \cos x)\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \sin x}{\sin x}\mathrm{d}x$$

$$= 2\ln\sqrt{2} + \left(\ln|\sin x| - x\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2\ln\sqrt{2} + \left(-\frac{\pi}{2}\right) - \left(\ln\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -\frac{\pi}{4} + 3\ln\sqrt{2}. \ \square$$

Nhận xét. Kĩ thuật trên rất có hiệu quả khi tính các tích phân dạng

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\ln(a\sin x + b\cos x)}{\sin^2 x}\mathrm{d}x \ ; \ \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\ln(a\sin x + b\cos x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

với cách chọn $\alpha = \dfrac{-a}{b}$ hoặc $\dfrac{a}{b}$.

★Thí dụ 5. *Tính tích phân*

$$I_5 = \int_0^1 \frac{3x+4}{(2x+1)^2(5x+3)}\mathrm{d}x.$$

Lời giải. Sử dụng hệ số điều chỉnh $\alpha = -\dfrac{5}{2}$.

(Xem tiếp trang 28)

CÁC LỚP THCS

Bài T1/424. (Lớp 6). Tìm tất cả các số gồm hai chữ số sao cho khi nhân số đó với 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 thì tổng các chữ số của chúng đều bằng nhau.

TRƯƠNG QUANG AN
(GV THCS Nghĩa Thắng, Tư Nghĩa, Quảng Ngãi)

Bài T2/424. (Lớp 7)

Cho $S=\frac{2}{2013+1}+\frac{2^2}{2013^2+1}+\frac{2^3}{2013^{2^2}+1}+\ldots+\frac{2^{n+1}}{2013^{2^n}+1}+\ldots+\frac{2^{2014}}{2013^{2^{2013}}+1}$.

So sánh S với $\frac{1}{1006}$.

TẠ MINH HIẾU
(GV THCS Yên Lạc, Vĩnh Phúc)

Bài T3/424. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$(y-2)x^2+(y^2-6y+8)x=y^2-5y+62.$$

CAO NGỌC TOẢN
(GV THPT Tam Giang, Phong Điền, Thừa Thiên - Huế)

Bài T4/424. Cho x, y là các số hữu tỉ thỏa mãn đẳng thức $x^2+y^2+\left(\frac{xy+1}{x+y}\right)^2=2$. Chứng minh rằng $\sqrt{1+xy}$ là một số hữu tỉ.

TRẦN VĂN HẠNH
(GV ĐH Phạm Văn Đồng, Quảng Ngãi)

Bài T5/424. Giả sử O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD của tứ giác lồi $ABCD$. Gọi E, F, H lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ B, C, O đến AD. Chứng minh rằng

$$AD.BE.CF \le AC.BD.OH.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

HỒ QUANG VINH
(Hà Nội)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/424. Xét các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3+5}{a^3(b+c)}+\frac{b^3+5}{b^3(c+a)}+\frac{c^3+5}{c^3(a+b)}\ge 9.$$

VŨ VĂN BẮC
(GV THPT A Nghĩa Hưng, Nam Định)

Bài T7/424. Giải phương trình

$$\left(x^3+\frac{1}{x^3}+1\right)^4=3\left(x^4+\frac{1}{x^4}+1\right)^3.$$

TRẦN MINH HIỀN
(GV THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước)

Bài T8/424. Cho tam giác ABC có góc BAC nhỏ hơn 90^o. Giả sử P là một điểm thuộc miền trong tam giác ABC sao cho $\widehat{BAP}=\widehat{ACP}$ và $\widehat{CAP}=\widehat{ABP}$. Gọi M và N lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABP và ACP, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}+\frac{1}{AP}.$$

PHẠM VĂN THUẬN
(GV ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/424. Giải phương trình

$$[x]^3+2x^2=x^3+2[x]^2.$$

Kí hiệu $[t]$ chỉ số nguyên lớn nhất không lớn hơn số thực t.

NGUYỄN TUẤN NGỌC
(GV THPT chuyên Tiền Giang)

Bài T10/424. Cho một hình vuông có cạnh bằng 1. Bên trong hình vuông này có n $(n\in\mathbb{N}^*)$ hình tròn có tổng diện tích lớn hơn $n-1$. Chứng minh rằng tồn tại một điểm của hình vuông nằm trong tất cả các hình tròn này.

VŨ ĐÌNH HÒA
(GV ĐHSP Hà Nội)

Bài T11/424. Cho phương trình $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$ có n nghiệm số phân biệt. Chứng minh rằng

$$\frac{n-1}{n}>\frac{2a_0a_2}{a_1^2}.$$

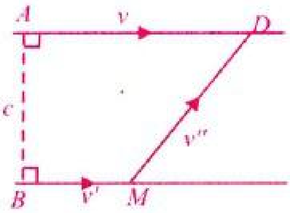
BÙI VĂN DIỆU
(GV THCS Bảo Linh, Định Hóa, Thái Nguyên)

Bài T12/424. Cho tam giác ABC với đường tròn ngoại tiếp (O), đường tròn nội tiếp (I), tâm đường tròn bàng tiếp góc A là I_a. Đường thẳng AI cắt BC tại D. Đường thẳng BI cắt CA tại E. Đường thẳng qua I vuông góc với OI_a cắt AC tại M. Chứng minh rằng DE đi qua trung điểm của đoạn thẳng IM.

TRẦN QUANG HÙNG
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

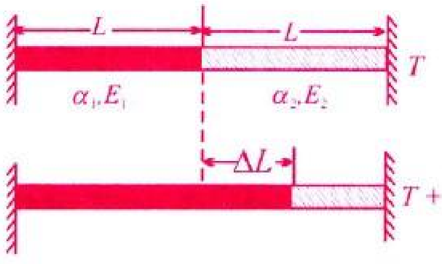
Bài L1/424. Cho sơ đồ như hình vẽ bên. Người thứ nhất đi từ A tới D với vận tốc $v = 4$ m/s và mất một khoảng thời gian là t. Người thứ hai đi từ B tới M với vận tốc $v' = 13$ m/s, rồi từ M tới D với vận tốc $v'' = 5$ m/s. Hai người khởi hành cùng một lúc và gặp nhau tại D. Cho $c = 540$ m, $AD // BM$ và $AB \perp AD$. Hãy tìm



1) Khoảng thời gian t nhỏ nhất.
2) Độ dài AD, BM và MD.

NGUYỄN QUANG HẬU
(Hà Nội)

Bài L2/424. Hai thanh vật liệu khác nhau nhưng có cùng một độ dài L và tiết diện ngang S, được ghép hai đầu với nhau còn hai đầu kia cố định bằng các giá đỡ (hình vẽ). Nhiệt độ của chúng là T và không có sức căng ban đầu. Người ta nung chúng nóng lên để nhiệt độ cả hai thanh tăng lên thêm là ΔT.



a) Chứng minh rằng mặt tiếp xúc giữa hai thanh di chuyển một đoạn $\Delta L = \left(\dfrac{\alpha_1 E_1 - \alpha_2 E_2}{E_1 + E_2}\right) L\Delta T$, trong đó α_1, α_2 là hệ số nở dài và E_1, E_2 là suất Young của các vật liệu. Bỏ qua độ biến thiên của tiết diện ngang.

b) Tính lực căng tại mặt tiếp xúc khi tăng nhiệt độ lên ΔT.

NGUYỄN VĂN THUẬN
(GV ĐHSP Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/424. (For 6th grade). Find all 2-digit numbers such that when multiplied by 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, the sum of the digits of the resulting numbers are equal.

T2/424. (For 7th grade).

Let $S = \dfrac{2}{2013+1} + \dfrac{2^2}{2012^2+1} + \dfrac{2^3}{2013^{2^2}+1} + \ldots + \dfrac{2^{n+1}}{2013^{2^n}+1} + \ldots + \dfrac{2^{2014}}{2013^{2^{2013}}+1}$.

Which number is greater? S or $\dfrac{1}{1006}$?

T3/424. Find all integer solutions of the equation

$$(y-2)x^2 + (y^2-6y+8)x = y^2 - 5y + 62.$$

T4/424. Let x, y be two rational numbers such that $x^2 + y^2 + \left(\dfrac{xy+1}{x+y}\right)^2 = 2$. Prove that $\sqrt{1+xy}$ is also a rational number.

T5/424. Let O denote the point of intersection of the two diagonals AC and BD of a convex quadrilateral $ABCD$. Let E, F, H be the feet of the altitudes from B, C and O respectively onto AD. Prove that

$$AD.BE.CF \le AC.BD.OH.$$

When does equality holds?

(Xem tiếp trang 28)

★Bài T1/420. *Tìm các giá trị nguyên của biểu thức* $f(x;y)=\dfrac{x^2+x+2}{xy-1}$*, trong đó x, y là các số nguyên dương.*

Lời giải. Điều kiện để biểu thức $f(x\ ;\ y)$ có nghĩa là $xy \neq 1$. Xét các trường hợp sau

1) Với $x = 1$ và $y \geq 2$ thì $f(1\ ;\ y)=\dfrac{4}{y-1}$. Để $f(1\ ;\ y)$ nguyên thì $y-1$ phải là ước số của 4, hay y có thể là 2, 3, 5. Ta có
$f(1\ ;\ 2)=4, f(1\ ;\ 3)=2, f(1;\ 5)=1$.

2) Với $y = 1$ và $x \geq 2$ thì
$$f(x;1)=\frac{x^2+x+2}{x-1}=x+2+\frac{4}{x-1}.$$

Để $f(x\ ;\ 1)$ nguyên thì $x-1$ phải là ước số nguyên dương của 4, hay x có thể là 2, 3, 5. Ta có $f(2\ ;\ 1)=8, f(3;\ 1)=7, f(5\ ;\ 1)=8$.

3) Với $x \geq 2$ và $y \geq 2$ thì
$$y.f(x;y)=\frac{x^2y+xy+2y}{xy-1}=x+1+\frac{2y+x+1}{xy-1}.$$

Để $f(x\ ;\ y)$ nguyên thì $\dfrac{2y+x+1}{xy-1}=k$ là số nguyên dương (do $xy-1 \geq 3$).

• Nếu $k = 1$ thì $2y + x + 1 = xy - 1$

$\Leftrightarrow xy - 2y - (x-2) = 4 \Leftrightarrow (x-2)(y-1) = 4$.

Ta có $f(3\ ;\ 5)=1, f(4\ ;\ 3)=2, f(6\ ;\ 2)=4$.

• Nếu $k \geq 2$ thì $2y + x + 1 \geq 2xy - 2$
$\Leftrightarrow 2xy - 2y - (x-1) \leq 4 \Leftrightarrow (x-1)(2y-1) \leq 4$.

Với $y \geq 3$ và $x \geq 2$ thì BĐT trên không xảy ra. Với $y = 2$ thì $x = 2$, lúc đó k không nguyên.

Vậy với các số nguyên dương x, y thì biểu thức $f(x\ ;\ y)=\dfrac{x^2+x+2}{xy-1}$ có thể lấy giá trị nguyên là 1, 2, 4, 7, 8. □

➤**Nhận xét.** 1) Một số bạn không nêu điều kiện $xy \neq 1$, hoặc bỏ qua trường hợp $x = y = 2$.

2) Các bạn sau có lời giải tốt:

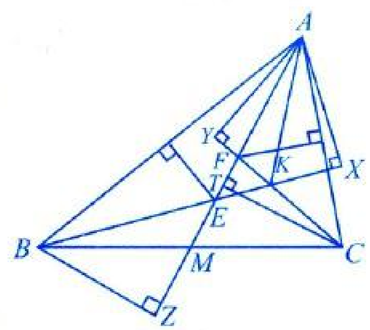
Quảng Ngãi: *Võ Quang Phú Thời, Nguyễn Tấn Phúc*, 6A, THCS Hành Phước, *Nguyễn Tấn Trung*, 6H, THCS Huỳnh Thúc Kháng, *Nguyễn Đại Dương*, 6B, THCS Kim Vang, *Đỗ Trần Công Phương, Nguyễn Thị Thúy Liên*, 5B, *Lê Thị Nhật Phượng, Nguyễn Thị Minh Thư*, 5C, TH Số 1 Hành Phước, *Trịnh Thị Hiệp*, 5B, TH Số 2 Hành Phước, Nghĩa Hành.

VIỆT HẢI

★Bài T2/420. *Cho tam giác ABC nhọn, không cân tại A. Đường trung trực của các cạnh AB, AC theo thứ tự cắt trung tuyến AM tại E, F. Gọi giao điểm của BE và CF là K. Chứng minh rằng* $\widehat{AKB}=\widehat{AKC}, \widehat{MAB}=\widehat{KAC}$.

Lời giải. Không mất tính tổng quát giả sử $AB > AC$.

• Gọi X, Y theo thứ tự là chân đường vuông góc hạ từ A tới BE, CF; Z, T theo thứ tự là chân đường vuông góc hạ từ B, C tới AM (h. 1).

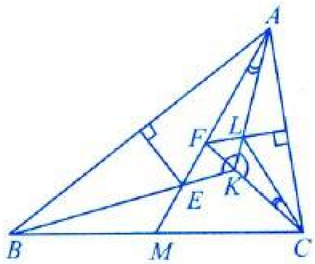


Hình 1

Tam giác ABE cân tại E; $\Delta MBZ = \Delta MCT$; tam giác ACF cân tại F, ta có $AX = BZ = CT = AY$.

Suy ra $\widehat{AKX}=\widehat{AKY}$. Do đó $\widehat{AKB}=180^\circ-\widehat{AKX}$ $=180^\circ-\widehat{AKY}=\widehat{AKC}$.

• Gọi L là giao của AK và trung trực của AC (h. 2). Ta có $\widehat{AKB}=\widehat{AKC}$. Dễ thấy $\widehat{LAF}=\widehat{LCF}$, suy ra $\widehat{AEB}=\widehat{ALC}$.



Hình 2

Từ các tam giác AEB, ALC theo thứ tự cân tại E, L, suy ra $\widehat{MAB}=\widehat{KAC}$. ❐

➢**Nhận xét.** 1) Bài toán chỉ cần giả thiết góc A nhọn, các kết quả vẫn đúng. Khi góc A nhọn thì $AM > BM$, $AM > CM$, các giao điểm E, F đều thuộc đoạn AM.

2) Có ít bạn tham gia giải bài này. Các bạn có lời giải tốt: **Nam Định:** *Phạm Quang Huy*, 7A4, THCS Trần Đăng Ninh, TP. Nam Định; **Quảng Ngãi:** *Vũ Thi Thi, Nguyễn Thị Hạ Vy*, 7A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; *Trần Thị Mỹ Ninh*, 7A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★Bài T3/420. *Tìm tất cả các bộ ba số nguyên (x; y; z) thỏa mãn đẳng thức*

$$2xy+6yz+3zx-|x-2y-z|=x^2+4y^2+9z^2-1 \quad (1)$$

Lời giải. Ta có

$$(1)\Leftrightarrow 2x^2+8y^2+18z^2-4xy-12yz-6zx=2\left(1-|x-2y-z|\right)$$

$$\Leftrightarrow (x-2y)^2+(2y-3z)^2+(3z-x)^2=2\left(1-|x-2y-z|\right) \quad (2)$$

Vì $(x-2y)^2\ge 0$, $(2y-3z)^2\ge 0$, $(3z-x)^2\ge 0$ nên từ (2) suy ra $|x-2y-z|\le 1$.

Mặt khác, do $x,y,z\in\mathbb{Z}$ nên $|x-2y-z|=0$ hoặc $|x-2y-z|=1$.

• Với $|x-2y-z|=1$, khi đó từ (2) có $x=2y=3z$.

Suy ra $|z|=1\Rightarrow y=\pm\frac{3}{2}\notin\mathbb{Z}$ (loại).

• Với $|x-2y-z|=0$, tức là $x-2y-z=0$, khi đó (2) có dạng

$$z^2+(2y-3z)^2+4(z-y)^2=2 \quad (3)$$

Do $z^2\ge 0$, $(2y-3z)^2\ge 0$ nên $0\le 4(z-y)^2\le 2$. Mặt khác $4(z-y)^2 \vdots 4$ nên $4(z-y)^2=0$ hay $z=y$. Thay vào (3) ta được $z^2=1$.

Với $z=1$ suy ra $y=1$, $x=3$.

Với $z=-1$ suy ra $y=-1$, $x=-3$.

Thử lại thấy hai bộ số $(x\,;\,y;\,z)$ là $(3\,;\,1\,;\,1)$ và $(-3\,;-1\,;-1)$ đều thỏa mãn (1). ❐

➢**Nhận xét.** 1) Có thể viết (3) dưới dạng PT bậc hai theo ẩn z (hoặc y). Từ ĐK để PT này có nghiệm là $\Delta\ge 0$, ta sẽ tìm được z, y và x.

2) Các bạn có lời giải tốt là:

Bắc Ninh: *Chu Văn Trang*, 9A, THCS Yên Phong; **Vĩnh Phúc:** *Hoàng Thị Minh Anh*, 8A, *Nguyễn Thị Nga*, 8A, THCS Yên Lạc; **Phú Thọ:** *Bùi Tuấn Nam*, 9A, THCS Lương Lỗ, Thanh Ba; **Hải Dương:** *Mạc Phương Anh*, 9A, THCS Chu Văn An, Sao Đỏ, Chí Linh; **Hà Nội:** *Nguyễn Trường Sơn*, 9A1, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai; **Hà Nam:** *Đỗ Đăng Dương*, 9A, THCS Đinh Công Tráng, Thanh Liêm; **Bình Định:** *Võ Thế Duy*, 9A1, THCS TTr. Phù Mỹ; **Vĩnh Long:** *Đoàn Hoàng Gia Bảo*, 7/11, THCS Lê Quý Đôn.

TRẦN HỮU NAM

★Bài T4/420. *Với mỗi số nguyên dương n (n = 1, 2, ...), đặt* $a_n=\frac{4n}{n^4+4}$. *Chứng minh rằng*

$$a_1+a_2+\ldots+a_n<\frac{3}{2}.$$

Lời giải. (Theo đa số các bạn). Ta có

$$n^4+4=(n^2+2)^2=(2n)^2-(n^2-2n+2)(n^2+2n+2)$$

nên $$a_n=\frac{4n}{n^4+4}=\frac{1}{n^2-2n+2}-\frac{1}{n^2+2n+2}=\frac{1}{(n-1)^2+1}-\frac{1}{(n+1)^2+1}.$$

Kí hiệu $\varphi(x)=\frac{1}{x^2+1}$ thì $a_k=\varphi(k-1)-\varphi(k+1)$ $(k = 1, 2, ..., n)$.

Từ đó cho $k = 1, 2, ..., n$ rồi cộng theo vế ta được

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=\varphi(0)-\varphi(2)+\varphi(1)-\varphi(3)+\ldots+\varphi(n-1)-\varphi(n+1)$$

$$=\varphi(0)+\varphi(1)-\varphi(n)-\varphi(n+1)$$

$$=1+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{(n+1)^2+1}\right)<\frac{3}{2} \text{ (đpcm)}. ❐$$

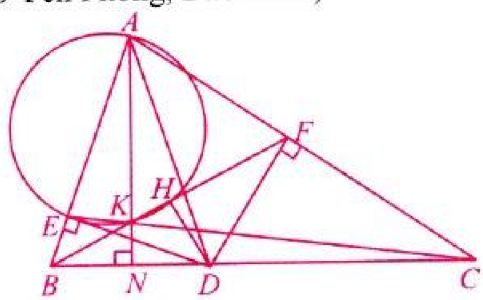
➢**Nhận xét.** Bài này có nhiều bạn gửi bài giải và đa số đều giải theo cách trên. Tuy nhiên, một số bạn còn đánh giá nhầm $a_1+a_2+...+a_n=\frac{3}{2}-\frac{1}{n^2+2n+1}$ (!).

Tuyên dương các bạn sau đây có lời giải tốt: **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Thị Nga*, 7A1, *Trương Thị Hoài Thu*, *Nguyễn Thị Nga*, 8A, *Nguyễn Việt Anh*, 9A, THCS Yên Lạc; *Đỗ Đức Hoàng*, 9C, THCS Vĩnh Yên; **Phú Thọ:** *Nguyễn Đình Mậu*, 8A3, THCS Lâm Thao; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Thị Mừng*, 8A, THCS Yên Phong; **Hải Dương:** *Mạc Phương Anh*, 9A, THCS Chu Văn An, Chí Linh; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Thị Khánh Linh*, 8B, THCS Đức Thọ, *Nguyễn Thị Trà*, 8D, THCS Liên Hương, Vũ Quang, *Phạm Trung Dũng*, 9E, THCS Bắc Hồng, Hồng Lĩnh; **Nghệ An:** *Nguyễn Tài Thiên*, 8D, THCS Đặng Thai Mai, Vinh; **Quảng Ngãi:** *Cao Thị Thúy Điểm*, *Nguyễn Thị Mỹ Chi*, 8A, *Nguyễn Thủy Phượng*, 9A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành, *Trần Thị Mỹ Ninh*, 8A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa; **Phú Yên:** *Trần Đỗ Bảo Huân*, 8B, THCS Nguyễn Thị Định.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★Bài T5/420. *Cho tam giác nhọn ABC, tia phân giác trong của góc BAC cắt BC tại D. Gọi E, F thứ tự là hình chiếu vuông góc của D trên AB và AC, K là giao điểm của CE và BF, H là giao điểm của BF với đường tròn ngoại tiếp tam giác AEK. Chứng minh rằng DH vuông góc với BF.*

Lời giải. (Theo bạn *Chu Văn Trang*, 9A, THCS Yên Phong, **Bắc Ninh**)



Kẻ AN vuông góc với BC ($N\in BC$), suy ra các tứ giác $AEND$ và $AFDN$ nội tiếp, từ đó $BD.BN=BE.BA$; $CN.CD=CF.CA$

$$\Rightarrow \frac{DB}{DC}.\frac{NB}{NC}=\frac{AB}{AC}.\frac{BE}{CF}\Rightarrow\frac{NB}{NC}=\frac{BE}{CF}$$

$$\Rightarrow \frac{NB}{NC}.\frac{FC}{FA}.\frac{EE}{EB}=1 \text{ (do } AE=AF).$$

Theo định lí Ceva đảo ta có AN, CE, BF đồng quy tại K, hay $AK\perp BC$ tại N. Từ đó $BK.BH=BE.BA=BN.BD$ nên tứ giác $KNDH$ nội tiếp, suy ra $\widehat{KHD}=\widehat{KND}=90^\circ$ do đó $DH\perp BF$ (đpcm). □

➢**Nhận xét.** Ngoài bạn *Trang* các bạn sau cũng có lời giải ngắn gọn: **Phú Thọ:** *Phạm Ngọc Hải*, 8A3, THCS Lâm Thao; **Quảng Ngãi:** *Trần Thị Mỹ Ninh*, 9A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa; *Nguyễn Thúy Phượng*, 9A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành.

THANH THANH

★Bài T6/420. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} x+6\sqrt{xy}-y=6 & (1)\\ x+\dfrac{6(x^3+y^3)}{x^2+xy+y^2}-\sqrt{2(x^2+y^2)}=3 & (2)\end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases} xy\ge 0\\ x^2+xy+y^2\ne 0.\end{cases}$

Nếu $x=0$ hoặc $y=0$ thì hệ vô nghiệm.

Nếu $x\le 0, y\le 0$ (x, y không đồng thời bằng 0) thì vế trái của (2) âm, PT (2) không thỏa mãn. Do đó $x>0, y>0$.

Vì $2\sqrt{xy}\le x+y$ nên từ PT (1) suy ra

$$6=x+6\sqrt{xy}-y\le x+3(x+y)-y=4x+2y$$

$\Rightarrow 2x+y\ge 3$ (3). Mặt khác, ta có

$$xy\le\frac{x^2+y^2}{2}\Rightarrow x^2+xy+y^2\le\frac{3(x^2+y^2)}{2}$$

$$\Rightarrow\frac{3(x^3+y^3)}{x^2+xy+y^2}\ge\frac{2(x^3+y^3)}{x^2+y^2} \quad (4)$$

Ta chứng minh rằng

$$\frac{2(x^3+y^3)}{x^2+y^2}\ge\sqrt{2(x^2+y^2)} \quad (5)$$

Thật vậy BĐT (5) tương đương với

$$2(x^3+y^3)^2\ge(x^2+y^2)^3$$

$$\Leftrightarrow x^6+y^6+4x^3y^3\ge 3x^4y^2+3x^2y^4 \quad (6)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$x^6+x^3y^3+x^3y^3\ge 3\sqrt[3]{x^{12}y^6}=3x^4y^2,$$

$$y^6+x^3y^3+x^3y^3\ge 3\sqrt[3]{x^6y^{12}}=3x^2y^4.$$

Cộng theo vế hai BĐT trên ta được (6), từ đó suy ra (5).

Từ (4) và (5) suy ra $\frac{3(x^3+y^3)}{x^2+xy+y^2}\ge\sqrt{2(x^2+y^2)}$.

Kết hợp với PT(2) và lưu ý rằng $\sqrt{2(x^2+y^2)}\ge x+y$, ta được

$$3 = x + \frac{6(x^3+y^3)}{x^2+xy+y^2} - \sqrt{2(x^2+y^2)}$$
$$\geq x + \sqrt{2(x^2+y^2)} \geq x + (x+y) = 2x+y \quad (7)$$

Từ (3) và (7) suy ra $2x+y=3$ và $x=y$.

Ta được $x=y=1$ (thỏa mãn các điều kiện của bài toán). Vậy hệ có nghiệm duy nhất là $(x;y)=(1;1)$. ❒

➢**Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hưng Yên: *Nguyễn Trung Hiếu*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thái Nguyên**: *Tạ Văn Tuấn*, THPT Lương Phú, Phú Bình; **Quảng Trị**: *Trần Đức Anh*, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đồng Tháp**: *Bùi Trần Hải Đăng*, 11T, *Trần Chí Thiện*, *Dương Minh Chí*, 12T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Quảng Nam**: *Huỳnh Bảo Trung*, 10/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Đăk Lăk**: *Nguyễn Tiến Mạnh*, 11 Toán, *Nguyễn Thanh Hải*, 12 Toán, THPT chuyên Nguyễn Du; **Nghệ An**: *Nguyễn Thị Quỳnh Lan*, 10T1, THPT Đô Lương; **Bến Tre**: *Lê Thị Minh Thảo*, 11 Toán, THPT chuyên Bến Tre; **Cà Mau**: *Lưu Giang Nam*, 10T1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển.

NGUYỄN ANH DŨNG

★Bài T7/420. *Cho a, b, c là các số thực không âm có tổng bằng 1. Chứng minh rằng*

$$(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2) \geq \left(\frac{10}{9}\right)^3.$$

Lời giải. Ta có

$$(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)$$
$$= a^2+b^2+c^2+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2c^2+1$$
$$= 1-2(ab+bc+ca)+(ab+bc+ca)^2-2abc + a^2b^2c^2+1$$
$$= (ab+bc+ca-1)^2+(1-abc)^2 \quad (1)$$

Mặt khác, sử dụng BĐT Cauchy cho các số không âm ta có

$$abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = \frac{1}{27} \Rightarrow (1-abc)^2 \geq \left(\frac{26}{27}\right)^2 \quad (2)$$

$$ab+bc+ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow (1-ab-bc-ca)^2 \geq \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra

$$(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2) \geq \frac{4}{9} + \left(\frac{26}{27}\right)^2 = \left(\frac{10}{9}\right)^3.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$. ❒

➢**Nhận xét.** 1) Ngoài cách giải trên, ta có thể đưa BĐT cần chứng minh về dạng

$$\ln(1+a^2)+\ln(1+b^2)+\ln(1+c^2) \geq 3\ln\frac{10}{9}.$$

Sau đó khảo sát hàm số $f(t)=\ln(1+t^2)-\frac{3}{5}t$ $(t\in[0;1])$.

2) Bài toán này có thể mở rộng bằng nhiều cách, xin nêu lên một mở rộng như sau. *Chứng minh rằng*

$$(1+a_1^2)(1+a_2^2)\ldots(1+a_n^2) \geq \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n,\ \text{với } a_i \geq 0,\ i=1,2,\ldots,n$$

và $a_1+a_2+\ldots+a_n=1$.

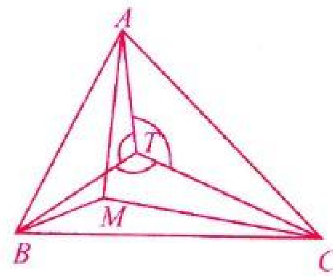
3) Các bạn sau có lời giải tốt:

Hà Nội: *Nguyễn Duy Khánh*, 12A1, THPT Ba Vì; *Nguyễn Trung Hiếu*, 12T, THPT Chu Văn An; *Vũ Thị Mỹ Hạnh*, 12 A1 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Thái Bình:** *Trần Trí Dũng*, 12A1, THPT Đông Thuỵ Anh, Thái Thuỵ; *Nguyễn Mạnh Tuấn*, 12A1, THPT Quỳnh Côi, Quỳnh Phụ; *Nguyễn Hải Linh Chi*, 11T1, *Trần Trung Hiếu*, 11T2, THPT chuyên Thái Bình; **Phú Thọ:** *Bùi Tuấn Nam*, 9A, THCS Lương Lỗ, Thanh Ba; *Nguyễn Đình Mậu*, 8A3, THCS Lâm Thao; **Nghệ An:** *Chu Tự Tài*, 11A12, THPT Diễn Châu 2; *Lê Hoàng Hiệp*, *Trần Trung Hiếu*, 11A1, THPT Thái Hoà.

NGUYỄN THANH HỒNG

★Bài T8/420. *Cho tam giác ABC có diện tích S. Gọi x, y, z lần lượt là khoảng cách từ một điểm M trong tam giác đến ba đỉnh A, B, C. Chứng minh rằng $(x+y+z)^2 \geq 4\sqrt{3}S$. Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Lời giải.



Trường hợp 1. Max $(A, B, C) < 120^o$. Khi đó tồn tại điểm T trong tam giác ABC sao cho $\widehat{BTC}=\widehat{ATC}=\widehat{ATB}=120^o$ (điểm T được gọi là *điểm Torricelli* của tam giác ABC) và dễ thấy $\frac{\overrightarrow{TA}}{TA}+\frac{\overrightarrow{TB}}{TB}+\frac{\overrightarrow{TC}}{TC}=\vec{0}$.

Từ đó $MA+MB+MC$

$$= \frac{TA.MA}{TA}+\frac{TB.MB}{TB}+\frac{TC.MC}{TC}$$
$$\geq \frac{\overrightarrow{TA}.\overrightarrow{MA}}{TA}+\frac{\overrightarrow{TB}.\overrightarrow{MB}}{TB}+\frac{\overrightarrow{TC}.\overrightarrow{MC}}{TC}$$
$$= \left(\frac{\overrightarrow{TA}}{TA}+\frac{\overrightarrow{TB}}{TB}+\frac{\overrightarrow{TC}}{TC}\right)\overrightarrow{MT}+TA+TB+TC.$$

Suy ra $MA + MB + MC \geq TA + TB + TC$.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv T$. Ta có

$$S = S_{BTC} + S_{CTA} + S_{ATB} = \frac{\sqrt{3}}{4}(TB.TC + TC.TA + TA.TB)$$

$$\leq \frac{\sqrt{3}}{4}.\frac{(TA+TB+TC)^2}{3} = \frac{1}{4\sqrt{3}}(TA+TB+TC)^2.$$

Suy ra $(TA+TB+TC)^2 \geq 4\sqrt{3}.S$, do đó $(x+y+z)^2 \geq 4\sqrt{3}.S$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều và M là tâm của tam giác đều đó.

Trường hợp 2. $\text{Max}(A, B, C) \geq 120^o$. Không mất tính tổng quát, giả sử $\widehat{BAC} \geq 120^o$. Lúc đó

$$MA + MB + MC = MA + \frac{MB.AB}{AB} + \frac{MC.AC}{AC}$$

$$\geq MA + \frac{\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AC}}{AC}.$$

Suy ra $MA + MB + MC$

$$\geq MA + \overrightarrow{MA}\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC}\right) + AB + AC \qquad (1)$$

Mặt khác $\left|\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC}\right| \leq 1$ (do $\widehat{BAC} \geq 120^o$),

nên $$MA + \overrightarrow{MA}\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC}\right) \geq 0 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $MA + MB + MC \geq AB + AC$.
Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv A$. Vì $\widehat{BAC} \geq 120^o$ nên $\sin A \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$, suy ra $4\sqrt{3}.S = 4\sqrt{3}.\frac{1}{2}AB.AC\sin A$ $< 4AB.AC \leq (AB+AC)^2$.

Do đó $(x+y+z)^2 > 4\sqrt{3}.S$.

Từ hai trường hợp trên ta có $(x+y+z)^2 \geq 4\sqrt{3}S$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều và M là tâm của tam giác đều đó. ❒

➤**Nhận xét.** 1) Nhiều bạn giải bài **T8/420** bằng cách trực tiếp sử dụng Bổ đề sau:
Nếu M là điểm nằm trong tam giác ABC thì

$$(MA + MB + MC)^2 \geq \sqrt{3}(a.MA + b.MB + c.MC),$$

trong đó $BC = a$, $AC = b$, $AC = c$.
Phép chứng minh Bổ đề này đã được giới thiệu trên Tạp chí TH&TT số 415, tháng 1 năm 2012, trang 24.
2) Các bạn sau có lời giải tốt:
Phú Thọ: *Bùi Tuấn Nam*, 9A, THCS Lương Lỗ, Thanh Ba; **Vĩnh Phúc:** *Hoàng Đỗ Kiên, Vũ Thị Quỳnh Anh, Trần Đình Hùng*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hưng Yên:** *Nguyễn Trung Hiếu*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thái Bình:** *Nguyễn Hải Linh Chi, Trần Hồng Quân*, 11 Toán 1, *Trần Trung Hiếu*, 11 Toán 2, THPT chuyên Thái Bình, *Bùi Đình Hiếu*, 11A1, THPT Quỳnh Côi, Quỳnh Phụ; **Nghệ An:** *Trần Trung Hiếu, Lê Hoàng Hiệp*, 11A1, THPT Thái Hòa, *Chu Tự Tài, Trương Tuấn Anh*, 11A12, THPT Diễn Châu 2; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Mậu Thành*, 12 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Thanh Hóa:** *Trương Văn Cường*, 11A3, THPT Lương Đắc Bằng, Hoằng Hóa; **Đà Nẵng:** *Thái Bình Nguyên*, 10A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bình Định:** *Nguyễn Văn Hải*, 11B, THPT Tây Sơn; **Phú Yên:** *Nguyễn Việt Dũng*, 11T1, THPT Phan Bội Châu, Sơn Hòa; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Thành Thi, Bùi Trần Hải Đăng*, 11T, *Trần Chí Thiện*, 12T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, TP. Cao Lãnh; **Đồng Nai:** *Phạm Văn Minh*, 11 Toán, THPT Lương Thế Vinh; **Bến Tre:** *Lê Thị Minh Thảo*, 11 Toán, THPT chuyên Bến Tre.

HỒ QUANG VINH

★**Bài T9/420.** *Cho một tập hợp khác rỗng $S \subseteq \mathbb{Z}$ thỏa mãn các điều kiện sau*

(i) Tồn tại hai phần tử $a, b \in S$ mà

$$(a, b) = (a-2, b-2) = 1.$$

(ii) Nếu $x, y \in S$ thì $x^2 - y \in S$ (x, y không nhất thiết khác nhau). Chứng minh rằng $S = \mathbb{Z}$.

(Kí hiệu (a, b) chỉ ước chung lớn nhất của hai số nguyên a và b).

Lời giải. Kí hiệu $A = \{a \mid a \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $\forall y \in S \Rightarrow y + a \in S,\ y - a \in S\}$. Rõ ràng $0 \in A$.

• Nếu $m, n \in A$ thì $m + n \in A$, $m - n \in A$ (suy ra từ định nghĩa của A),

• Nếu $m, n \in A$ thì tồn tại $x, y \in \mathbb{Z}$ sao cho $x.m + y.n = d$, với $d = (m, n)$. Do đó suy ra từ nhận xét trên thì $d \in A$.

Ta sẽ chứng minh $1 \in A$ (và hệ quả là $S = \mathbb{Z}$).
Giả sử $x, y, t \in S$. Từ giả thiết (ii) ta có $x^2 - t \in S \Rightarrow y^2 - (x^2 - t) \in S \Rightarrow t - (x^2 - y^2) \in S$.
Tương tự có $t + (x^2 - y^2) = x^2 - (y^2 - t) \in S$.

Bởi vậy $x^2 - y^2 \in A$ với mọi $x, y \in S$.

Xét $a, b \in S$ thỏa mãn giả thiết (i). Theo nhận xét trên ta có $a^2 - b^2 \in A$.

Theo giả thiết $a^2 - b \in S, a^2 - a \in S$

$\Rightarrow (a^2 - b)^2 - (a^2 - a)^2 \in A$,

$(a^2 - b)^2 - (a^2 - a)^2 = (a - b)(2a^2 - a - b)$

$\Rightarrow 2a^2(a - b) = (a - b)(2a^2 - a - b) + (a^2 - b^2) \in A.$

Tương tự $2b^2(b-a) \in A$. Chú ý rằng $(a,b)=1$ nên $\left(2a^2(a-b), 2b^2(b-a)\right) = 2(a-b) \in A$.

Vì $(a, b) = 1$ nên trong hai số a, b có ít nhất một số lẻ. Không mất tính tổng quát, giả sử a lẻ.

Khi đó $(a^2-a)^2 - a^2 = a^3(a-2) \in A$ và

$(a^3(a-2), 2(a-b)) = \left(a^3(a-2), a-b\right)$ (do a lẻ)

$= 1 \in A$ (do $(a, b) = 1 \Rightarrow (a, a-b) = 1$.

$(a-2, b-2) = 1 \Rightarrow (a-2, (a-2)-(b-2)) = 1 \Rightarrow (a-2, a-b) = 1$).

Khẳng định của bài toán đã được chứng minh. ❒

➢**Nhận xét.** Đây là bài toán về Tập hợp - Số học hay, khó. Chỉ có bạn *Hoàng Đỗ Kiên*, 11A1, THPT chuyên **Vĩnh Phúc** có lời giải đúng.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★**Bài T10/420.** *Tìm số k lớn nhất sao cho*

$$\sqrt{a+2b+3c}+\sqrt{b+2c+3a}+\sqrt{c+2a+3b} \geq k(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}) \quad (1)$$

đúng với mọi số dương a, b, c.

Lời giải. (Theo đa số các bạn).

Khi $a=b=c>0$, từ (1) ta thấy $3\sqrt{6a} \geq 3k\sqrt{a}$. Suy ra $k \leq \sqrt{6}$. Ta chứng minh giá trị lớn nhất của k là $\sqrt{6}$.

Áp dụng BĐT Bunyakovsky cho hai bộ số $(1;\sqrt{2};\sqrt{3})$ và $(\sqrt{a};\sqrt{2b};\sqrt{3c})$ ta được

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{2}\sqrt{2b}+\sqrt{3}\sqrt{3c}\right)^2 \leq (1+2+3)(a+2b+3c)$$

hay $\sqrt{6(a+2b+3c)} \geq \sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c}$ (2)

Tương tự, ta cũng có

$$\sqrt{6(b+2c+3a)} \geq \sqrt{b}+2\sqrt{c}+3\sqrt{a} \quad (3)$$

$$\sqrt{6(c+2a+3b)} \geq \sqrt{c}+2\sqrt{a}+3\sqrt{b} \quad (4)$$

Từ (2), (3) và (4), suy ra

$$\sqrt{a+2b+3c}+\sqrt{b+2c+3a}+\sqrt{c+2a+3b} \geq \sqrt{6}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}).$$

Kết luận. $k=\sqrt{6}$ là số lớn nhất để bất đẳng thức (1) đúng với mọi số dương a, b, c. ❒

➢**Nhận xét.** Đa số các bạn đều giải theo cách trình bày ở trên. Có một số bạn cấp THCS (lớp 9) cũng tham gia giải bài này. Một số bạn sử dụng trực tiếp BĐT Minkowsky cho ngay kết quả cần tìm.

Danh sách các bạn sau đây có lời giải đúng:

Phú Thọ: *Nguyễn Tiến Dũng, Nguyễn Đình Mậu, Nguyễn Huy Tuyển*, 8A3, THCS Lâm Thao, *Bùi Tuấn Nam*, 9A, THCS Lương Lỗ, Thanh Ba; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Văn Sơn*, 10A1, THPT Sông Lô, *Bùi Hồng Phương*, 10A1, *Vũ Thị Quỳnh Anh, Hoàng Đỗ Kiên, Trần Đình Hùng*, 11A1, *Dương Phước Thọ*, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Nội:** *Nguyễn Duy Khánh*, 12A1, THPT Ba Vì, *Vũ Thị Mỹ Hạnh*, 12A1, THPT chuyên KHTN, *Nguyễn Đình Tùng*, 10T1, THPT chuyên ĐHSP, *Nguyễn Trường Sơn*, 9A1, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai; **Hòa Bình:** *Đặng Hữu Hiếu*, 12T, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ; **Thái Bình:** *Nguyễn Hải Linh Chi, Trần Hồng Quân*, 11T1, *Trần Trung Hiếu*, 11T2, THPT chuyên Thái Bình, Bùi Đình Hiếu, 11A1, *Nguyễn Mạnh Tuấn*, 12A1, THPT Quỳnh Côi; **Hưng Yên:** *Nguyễn Thị Việt Hà, Nguyễn Trung Hiếu*, 10T1, *Dương Mạnh Cường*, 12T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Nam Định:** *Trần Thị Thu Hằng*, 10T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thanh Hóa:** *Hoàng Huy Hiệu*, 11A1, *Phạm Kỳ Anh, Trương Vương Cương*, 10A3, THPT Lương Đắc Bằng, Hoằng Hóa; **Nghệ An:** *Trương Tuấn Anh, Chu Tự Tài*, 11A12, THPT Diễn Châu 2, *Hồ Thị Thúy Nga*, 10A1, *Lê Hoàng Hiệp*, 11A1, THPT TX. Thái Hòa; **Hà Tĩnh:** *Phạm Trung Dũng*, 9E, THCS Hồng Lĩnh, *Nguyễn Thị Thùy Linh*, 10A1, THPT Hương Khê, *Nguyễn Mậu Thành*, 12T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Trị:** *Hồ Phước Bảo*, 11T, THPT Lê Quý Đôn; **An Giang:** *Lưu Hoàng Phúc*, 10T2, THPT chuyên Thoại Ngọc Hầu; **Bình Định:** *Võ Thế Duy*, 9A1, THCS TT Phù Mỹ; **Cà Mau:** *Lưu Giang Nam*, 10T1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển; **Đăk Lăk:** *Hồ Thuận, Nguyễn Thanh Hải*, 12CT, THPT chuyên Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột; **Đồng Nai:** *Phạm Văn Minh*, 11T, THPT chuyên Lương Thế Vinh; **Đồng Tháp:** *Lê Nhất Duy*, 11A8, THPT Cao Lãnh, *Bùi Trần Hải Đăng, Nguyễn Thành Thi*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Phú Yên:** *Nguyễn Việt Dũng*, 11T1, THPT Phan Bội Châu, Sơn Hòa, *Lê Nhật Thăng*, 12T, THPT chuyên Lương Văn Chánh.

NGUYỄN VĂN MẬU

★**Bài T11/420.** *Cho dãy* (x_n) $(n = 1, 2, ...)$ *được xác định như sau*

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1001}{1003} \\ x_{n+1} = x_n - x_n^2 + x_n^3 - x_n^4 + ... + x_n^{2011} - x_n^{2012}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Hãy tìm $\lim\limits_{n\to+\infty}(nx_n)$.

Lời giải. (Theo bạn *Nguyễn Mậu Thành*, 12 Toán, THPT chuyên **Hà Tĩnh**). Ta có

$$x_{n+1} = x_n\left(1 - x_n + x_n^2 - \ldots - x_n^{2011}\right) = \frac{x_n\left(1 - x_n^{2012}\right)}{1 + x_n} \quad (1)$$

Ta chứng minh $0 < x_n < 1$.

Thật vậy, với $n = 1$ khẳng định đúng. Giả sử khẳng định đúng với n. Suy ra $0 < \frac{1 - x_n^{2012}}{1 + x_n} < 1$.

Vậy từ (1) suy ra $x_{n+1} < x_n < 1$ (2)

Từ (2) ta có dãy (x_n) giảm và bị chặn dưới bởi 0. Do đó tồn tại $\lim x_n = a$.

Qua giới hạn hai vế của (1) ta được

$a = \frac{a(1 - a^{2012})}{1 + a} \Rightarrow a = 0$. Vậy $\lim x_n = 0$.

Để tìm $\lim(nx_n)$ ta sử dụng bổ đề sau đây (còn gọi là định lí trung bình Cesaro).

***Bổ đề**. Cho dãy (u_n) thỏa mãn $\lim u_n = a$. Khi đó $\lim \frac{u_1 + \ldots + u_n}{n} = a$.*

Chứng minh. Không giảm tổng quát, giả sử $a = 0$ (Nếu $a \neq 0$ thì ta xét dãy $u'_n = u_n - a$).

Cho $\varepsilon > 0, \exists n_0$ sao cho $|u_n| < \varepsilon, \forall n \geq n_0$.

Ta có $\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} u_i}{n}\right| \leq \frac{\left|\sum_{i=1}^{n_0-1} u_i\right|}{n} + \frac{\sum_{i=n_0}^{n} |u_i|}{n} \leq \frac{\left|\sum_{i=1}^{n_0-1} u_i\right|}{n} + \varepsilon.$

Chọn n đủ lớn $(n \geq n_1)$ sao cho $\frac{\left|\sum_{i=1}^{n_0-1} u_i\right|}{n} < \varepsilon$.

Ta được $\frac{\left|\sum_{i=1}^{n} u_i\right|}{n} < 2\varepsilon, \forall n \geq \max(n_0, n_1)$.

Vậy $\lim \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i}{n} = 0$ (đpcm).

Trở lại bài toán, xét dãy (u_n) với $u_n = \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}$.

Ta có $u_n = \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} = \frac{1 + x_n}{x_n\left(1 - x_n^{2012}\right)} - \frac{1}{x_n}$

$= \frac{1}{1 - x_n^{2012}} + \frac{x_n^{2011}}{1 - x_n^{2012}} = \frac{1 + x_n^{2011}}{1 - x_n^{2012}}$.

Do $\lim x_n = 0$, nên $\lim u_n = 1$ (3)

Theo Bổ đề vừa chứng minh

$$\lim \frac{u_1 + \ldots + u_n}{n} = 1 \Leftrightarrow \lim\left(\frac{1}{nx_{n+1}} - \frac{1}{nx_1}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \lim \frac{1}{nx_{n+1}} = 1 \Leftrightarrow \lim \frac{n+1}{n} \frac{1}{(n+1)x_{n+1}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \lim \frac{1}{nx_n} = 1 \Leftrightarrow \lim nx_n = 1. \ \square$$

➤**Nhận xét.** 1) Một số bạn phát biểu và chứng minh định lí Stolz, sau đó áp dụng định lí Stolz ta có

$$\lim \frac{(n+1) - n}{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}} = \frac{1}{1} = 1 \text{ (do (3))}.$$

Do đó $\lim \frac{n}{\frac{1}{x_n}} = \lim(nx_n) = 1$.

2) Nếu không dùng định lí Stolz có thể giải bài toán bằng cách chứng minh

$$\frac{n}{n + 2 + \sqrt{2n}} < nx_n < \frac{n}{n+1}, \quad \forall n = 1,2\ldots$$

Từ đó dùng nguyên lí kẹp ta được $\lim(nx_n) = 1$.

3) Các bạn sau có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Hoàng Đỗ Kiên*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Hưng Yên:** *Dương Mạnh Cường, Nguyễn Thị Việt Hà*, 12T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thừa Thiên - Huế:** *Nguyễn Quốc Hùng*, 11 chuyên Toán, THPT Quốc học Huế; **Đồng Nai:** *Phạm Văn Minh*, 11 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh; **Thái Bình:** *Trương Trung Quyết*, 11 Toán, THPT chuyên Thái Bình; **Hoà Bình:** *Đặng Hữu Hiếu*, 12 Toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

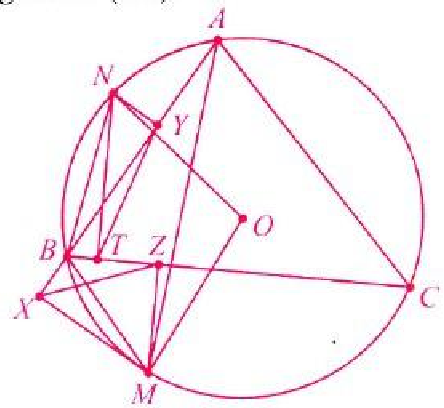
★**Bài T12/420.** *Cho bốn điểm A, B, C, D khác nhau và cùng nằm trên một đường tròn tâm O. Gọi I, J theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của C xuống đường thẳng AB và AD; K, L theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của D xuống đường thẳng BC và BA; N là trung điểm của CD; M là giao điểm của đường thẳng IJ và KL. Giả sử đường thẳng IJ và OD cắt nhau tại E, đường thẳng KL và OC cắt nhau tại F. Chứng minh năm điểm M, N, O, E và F cùng nằm trên một đường tròn.*

Lời giải. *Bổ đề 1.* Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Hai điểm M, N thuộc (O).

s_M, s_N theo thứ tự là đường thẳng Simson của M, N đối với tam giác ABC. Khi đó

$$(s_M, s_N) \equiv \frac{1}{2}(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OM})(\mathrm{mod}\,\pi).$$

Chứng minh. (h.1).



Hình 1

Gọi X, Y theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M, N trên AB; Z, T theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M, N trên BC.

Dễ thấy các bộ bốn điểm B, M, X, Z; B, N, Y, T cùng thuộc một đường tròn.

Vậy $(s_M, s_N) \equiv (XZ, YT)(\mathrm{mod}\,\pi)$ (vì $s_M \equiv XZ$; $s_N \equiv YT$)

$\equiv (XZ, XB) + (YB, YT)(\mathrm{mod}\,\pi)$

$\equiv (MZ, MB) + (NB, NT)(\mathrm{mod}\,\pi)$

(vì $M \in (XZB)$; $N \in (YBT)$)

$\equiv (NT, MB) + (NB, NT)(\mathrm{mod}\,\pi)$ (vì $MZ // NT$)

$\equiv (NB, MB)(\mathrm{mod}\,\pi) \equiv \frac{1}{2}(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OM})(\mathrm{mod}\,\pi)$.

Chú ý. Bổ đề 1 vẫn đúng khi một trong hai điểm M, N hoặc cả hai điểm M, N là các đỉnh của tam giác ABC.

Bổ đề 2. Cho tam giác ABC, trực tâm H, nội tiếp đường tròn (O). M là một điểm trên (O). X, Y, Z theo thứ tự là ảnh của M qua các phép đối xứng trục R_{BC}, R_{CA}, R_{AB}. Khi đó H, X, Y, Z cùng thuộc một đường thẳng.

Chứng minh (h.2).

Bỏ qua trường hợp tam giác ABC vuông.
Giả sử AH cắt BC tại A_1; cắt (O) tại điểm thứ hai A_2. Tương tự ta có các điểm B_1, B_2; C_1, C_2. Theo giả thiết, $R_{CA}(M) = Y$; $R_{AB}(M) = Z$ (1)

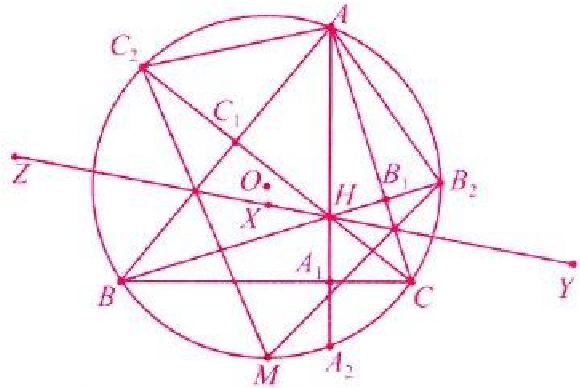
Dễ thấy $R_{BC}(H) = A_2$; $R_{CA}(H) = B_2$; $R_{AB}(H) = C_2$ (2)

Vậy $(HY, HZ) \equiv (HY, HA) + (HA, HZ)(\mathrm{mod}\,\pi)$

$\equiv (B_2A, B_2M) + (C_2M, C_2A)(\mathrm{mod}\,\pi)$ (vì (1), (2))

$\equiv (C_2A, C_2M) + (C_2M, C_2A)(\mathrm{mod}\,\pi)$

(vì $C_2 \in (B_2AM)$ $\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,\pi)$.



Hình 2

Do đó H, Y, Z thẳng hàng. Tương tự H, Z, X thẳng hàng. Tóm lại H, X, Y, Z thẳng hàng.

Chú ý. 1) Đường thẳng đi qua các điểm H, X, Y, Z được gọi là *đường thẳng Steiner* của M đối với tam giác ABC.

2) Đường thẳng Steiner của M đối với tam giác ABC là ảnh của đường thẳng Simson của M đối với tam giác ABC qua phép vị tự tâm M tỉ số 2.

3) Đường thẳng Simson của điểm M đối với tam giác ABC đi qua trung điểm của MH.

Trở lại giải bài toán **T12/420** (h.3).

Bỏ qua trường hợp đơn giản O, C, D thẳng hàng.

Rõ ràng IJ, DL theo thứ tự là đường thẳng Simson của C, D với tam giác ABD (1)

CI, KL theo thứ tự là đường thẳng Simson của C, D với tam giác DAB (2)

Từ (1) và (2), chú ý rằng $DL // CI$, theo Bổ đề 1, ta có

$(ME, MF) \equiv (IJ, KL)$

$\equiv (IJ, DL) + (DL, CI) + (CI, KL)(\mathrm{mod}\,\pi)$

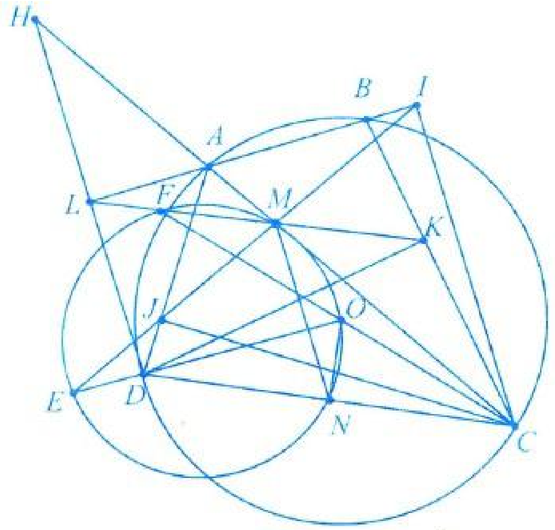
$\equiv \frac{1}{2}(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OC}) + 0 + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OC}) \equiv (\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OC})(\mathrm{mod}\,\pi)$

$\equiv (OD, OC) \equiv (OE, OF)(\mathrm{mod}\,\pi)$.

Do đó M, E, F, O cùng thuộc một đường tròn (3)

Vì $OC = OD$, $NC = ND$ nên

$(ON, OD) \equiv \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})(\mathrm{mod}\,\pi)$ (4)



Hình 3

Gọi H là trực tâm của tam giác ABD.

Theo chú ý 3 thì M là trung điểm của CH.

Kết hợp với N là trung điểm của CD, suy ra MN // HD hay $MN//LD$ (5)

Vậy $(ON, OE) \equiv (ON, OD) \pmod{\pi}$

$\equiv \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) \pmod{\pi}$ (do (4))

$\equiv (LD, IJ) \pmod{\pi}$ (vì (1) và Bổ đề 1)

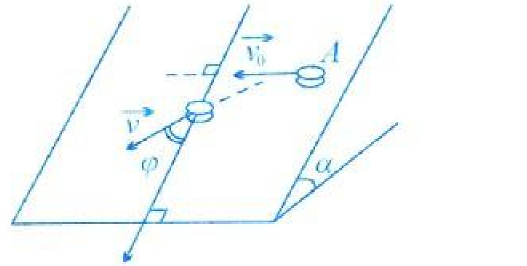
$\equiv (MN, ME) \pmod{\pi}$ (vì (5)).

Do đó O, N, E, M cùng thuộc một đường tròn (6). Từ (3) và (6) suy ra đpcm. ❒

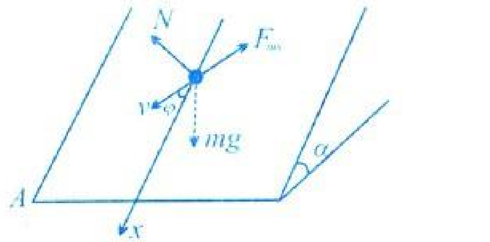
➢**Nhận xét.** Khá nhiều bạn tham gia giải nhưng chỉ có năm bạn có ý thức sử dụng góc định hướng như một công cụ không thể thay thế trong lời giải của mình. Tuy nhiên, vì không có sự hiểu biết đầy đủ về góc định hướng nên lời giải của cả năm bạn đều không hoàn chỉnh. Các bạn đó là **Nam Định:** *Vũ Tuấn Anh*, $11T_2$, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hưng Yên:** *Nguyễn Trung Hiếu*, $10T_1$, THPT chuyên Hưng Yên; **Nghệ An:** *Chu Tự Tài*, $11A_{12}$, THPT Diễn Châu 2; **Đồng Nai:** *Phạm Văn Minh*, 11T, THPT chuyên Lương Thế Vinh; **Hà Nội:** *Nguyễn Đình Tùng*, 10T1, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội.

NGUYỄN MINH HÀ

★**Bài L1/420.** *Người ta truyền vận tốc v_0 cho một vòng đệm nhỏ A đặt trên mặt phẳng nghiêng góc α với mặt nằm ngang (hình vẽ). Xác định vận tốc của vòng đệm theo góc φ, biết hệ số ma sát $\mu = \tan\alpha$ và ban đầu $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$.*



Lời giải.



Chọn trục x hướng dọc theo đường dốc chính của mặt phẳng nghiêng như hình vẽ. Trong quá trình chuyển động vật chịu tác dụng của các lực: trọng lực mg, phản lực N vuông góc với mặt phẳng nghiêng, và lực ma sát trượt F_{ms} luôn ngược hướng vận tốc.

Xét thời điểm vận tốc của vòng đệm lập với trục x góc φ. Theo phương vuông góc với mặt phẳng nghiêng vật không chuyển động nên

$$N = mg\cos\alpha \qquad (1)$$

PT chuyển động của vật theo phương vận tốc:

$$mg\sin\alpha.\cos\varphi - F_{ms} = ma_t \qquad (2)$$

trong đó $F_{ms} = \mu N$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra

$$a_t = g\sin\alpha(\cos\varphi - 1) \qquad (4)$$

Phương trình chuyển động dọc theo trục x:

$$mg\sin\alpha - F_{ms}\cos\varphi = ma_x \qquad (5)$$

Từ (1), (3) và (5) suy ra

$$a_x = g\sin\alpha(1 - \cos\varphi) \qquad (6)$$

Nhận thấy rằng $a_t = -a_x$, nghĩa là $\frac{dv}{dt} = -\frac{dv_x}{dt}$ $\Rightarrow dv = -dv_x \Rightarrow v = -v_x + c$, trong đó hằng số c xác định từ điều kiện ban đầu, khi $t = 0$ thì $v = v_0$ và $v_x = 0$, do đó $v = -v_x + v_0$ (7)

Mặt khác $v_x = v.\cos\varphi$, thay vào (7) ta tìm được

$$v = \frac{v_0}{1+\cos\varphi}. \square$$

➢**Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải đúng:

Nghệ An: *Chu Tự Tài,* 11A12, THPT Diễn Châu II; *Nguyễn Văn Trung,* 11A3K40, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Đồng Tháp:** *Huỳnh Thanh Dư,* THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu.

NGUYỄN XUÂN QUANG

★**Bài L2/420.** *Một thấu kính hội tụ O_1 tiêu cực f_1 = 15cm đặt trước một thấu kính phân kì O_2 tiêu cự f_2 = –21cm. Hai thấu kính cách nhau $l = O_1O_2$ = 18cm và có cùng trục chính. Một vật AB đặt trước thấu kính hội tụ, vuông góc với trục chính, điểm A nằm trên trục chính.*

a) Phải đặt vật AB trong khoảng nào trước O_1 để ảnh cuối cùng A_2B_2 tạo bởi hệ hai thấu kính này ngược chiều với vật AB?

b) Xác định vị trí của AB để ảnh A_2B_2 cao gấp đôi vật AB.

c) Xác định vị trí của AB để ảnh A_2B_2 cao bằng một nửa vật AB.

Lời giải. Sơ đồ tạo ảnh

$$\begin{array}{ccccc} AB & \xrightarrow{O_1} & A_1B_1 & \xrightarrow{O_2} & A_2B_2 \\ d_1 & & d'_1 \; d_2 & & d'_2 \end{array}$$

Gọi k_1, k_2, và k lần lượt là độ phóng đại của các thấu kính O_1, O_2 và của hệ hai thấu kính O_1, O_2. Ta có

$$k_1 = -\frac{d'_1}{d_1} = \frac{f_1 - d'_1}{f_1} = \frac{f_1}{f_1 - d_1}$$

$$k_2 = -\frac{d'_2}{d_2} = \frac{f_2 - d'_2}{f_2} = \frac{f_2}{f_2 - d_2}$$

$$k = k_1k_2 = \frac{f_1f_2}{(f_1-d_1)(f_2-d_2)} \quad (1)$$

Từ công thức $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d'_1} = \frac{1}{f_1}$ suy ra

$$d'_1 = \frac{f_1d_1}{d_1 - f_1} \quad (2)$$

Mặt khác thì $l = d'_1 + d_2$, suy ra $d_2 = l - d'_1$ (3)

Thay (2), (3) vào (1) và rút gọn ta được

$$k = \frac{f_1f_2}{d_1(l - f_1 - f_2) + f_1(f_2 - l)} \quad (4)$$

Thay số vào (4): $k = \frac{315}{585 - 24d_1}$ (5)

a) Để ảnh A_2B_2 tạo bởi hệ hai thấu kính ngược chiều với vật AB thì $k < 0$. Từ (5) ta tìm được $k = \frac{315}{585 - 24d_1} < 0$ suy ra $d_1 > 24,375\text{cm}$.

b) Để ảnh A_2B_2 tạo bởi hệ hai thấu kính cao gấp đôi vật thì $|k| = 2$ hay $k = \pm 2$ và $d'_1 > 0$.

- Khi $k = 2$ thì từ (5) suy ra $d_1 = 17,8125\text{cm}$.
- Khi $k = -2$ thì từ (5) suy ra $d_1 = 30,9375\text{cm}$.

c) Để ảnh A_2B_2 tạo bởi hệ hai thấu kính cao bằng nửa vật thì $|k| = \frac{1}{2}$ hay $k = \pm\frac{1}{2}$ và $d'_1 > 0$.

- Khi $k = \frac{1}{2}$ thì từ (5) suy ra $d_1 = -1,875\text{cm}$, loại vì $d'_1 < 0$.
- Khi $k = -\frac{1}{2}$ thì từ (5) suy ra $d_1 = 50,625\text{cm}$. $\square$

➢**Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Nghệ An: *Trịnh An Bình*, 11A1, THPT Thái Hòa; **Hà Nam:** *Trần Xuân Thái*, 11A2, THPT A Duy Tiên; **Đồng Tháp:** *Huỳnh Thanh Dư*, 11 Lí, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Thái Nguyên**: *Tạ Văn Tuấn*, 11A1, THPT Lương Phú; **Bắc Ninh:** *Trần Anh Tài*, 9A, THCS Yên Phong; **Thái Bình:** *Vũ Xuân Ngung*, 11A1, THPT Tây Thái Thụy; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Thị Thùy Linh*, 10A1, THPT Hương Khê, *Ông Khắc Chính*, 11 Lí, THPT chuyên Hà Tĩnh.

NGUYỄN VĂN THUẬN

ĐỌC LẠI CHO ĐÚNG

Trên TH&TT số 423, tháng 9 năm 2012, trong mục Đề ra kì này (trang 16) xin đọc lại đề bài T4/423 như sau:

Cho hàm số f thỏa mãn $f\left(1+\frac{\sqrt{2}}{x}\right) = \frac{(1+\sqrt{2011})x^2 + 2\sqrt{2}x + 2}{x^2}$ *xác định với mọi x khác 0. Tính* $f\left(\sqrt{2012 - \sqrt{2011}}\right)$.

Thành thật xin lỗi bạn đọc.

THTT

PROBLEMS... (Tiếp trang 17)

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/424. a, b, c are positive real numbers satisfying $abc = 1$. Prove that

$$\frac{a^3+5}{a^3(b+c)}+\frac{b^3+5}{b^3(c+a)}+\frac{c^3+5}{c^3(a+b)}\ge 9.$$

T7/424. Solve for x

$$\left(x^3+\frac{1}{x^3}+1\right)^4=3\left(x^4+\frac{1}{x^4}+1\right)^3.$$

T8/424. Let ABC be a triangle with acute angle A. Point P inside the triangle ABC such that $\widehat{BAP}=\widehat{ACP}$ and $\widehat{CAP}=\widehat{ABP}$. Let M and N be the incenters of triangles ABP and ACP respectively, R is the circumradius of triangle AMN. Prove that

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}+\frac{1}{AP}.$$

TOWARD MATHEMATICAL OLYMPIAD

T9/424. Solve for x

$$[x]^3+2x^2=x^3+2[x]^2,$$

where $[t]$ denotes the largest integer not exceeding t.

T10/424. In the interior of a unit square, there are $n\,(n\in\mathbb{N}^*)$ circles whose sum of areas is greater than $n-1$. Prove that the circles has at least a common point of intersection.

T11/424. Given that the following equation $a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n=0$ has n distinct roots. Prove that

$$\frac{n-1}{n}>\frac{2a_0a_2}{a_1^2}.$$

T12/424. Let O, I and I_a denote the circumcenter, incenter and excenter in the angle A of a triangle ABC. AI meets BC at D. BI meets CA at E. The line through I and perpendicular to OI_a intersects AC at M. Prove that DE passes through the midpoint of line segment IM.

Translated by LE MINH HA

KĨ THUẬT... (Tiếp trang 15)

Đặt $\begin{cases} u=\dfrac{3x+4}{5x+3} \\ dv=\dfrac{1}{(2x+1)^2}dx \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{-11}{(5x+3)^2}dx \\ v=-\dfrac{1}{2(2x+1)}-\dfrac{5}{2}=-\dfrac{5x+3}{2x+1}. \end{cases}$

Suy ra

$$I_5=\left(-\frac{3x+4}{2x+1}\right)\Bigg|_0^1-\int_0^1\frac{11}{(2x+1)(5x+3)}dx$$

$$=\frac{5}{3}+11\int_0^1\left(\frac{5}{5x+3}-\frac{2}{2x+1}\right)dx$$

$$=\frac{5}{3}+\left(\ln|5x+3|-\ln|2x+1|\right)\Big|_0^1=\frac{5}{3}+11\ln\frac{8}{9}.\ \square$$

Cuối cùng là một số bài tập với ý tưởng sử dụng kĩ thuật điều chỉnh hệ số giúp các bạn tự luyện tập.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Tính các tích phân sau

1. $\displaystyle\int_2^3\ln(x^2-x)dx$.

2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(\sin x+\cos x)}{\cos^2 x}dx$.

3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(2\sin x+\cos x)}{\cos^2 x}dx$.

4. $\displaystyle\int_1^e\frac{\ln(x^3+3x^2+3x-2)}{(x+1)^4}dx$.

5. $\displaystyle\int_{-1}^0\frac{3x+1}{4x^3+28x^2+65x+50}dx$.

ĐÁP ÁN CUỘC THI ĐỐ VUI NGÀY HÈ 2012 Đợt 2

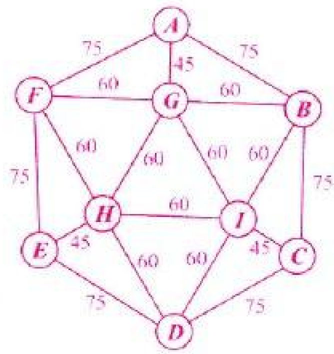
Bài 4. HÌNH NÀO PHÙ HỢP

Vì ở mỗi dòng và mỗi cột, tất cả các hình tròn (to, nhỏ), các hình vuông (to, nhỏ) đều được tô đen một lần. Ở cột thứ nhất, ta có hình tròn nhỏ, hình tròn to và hình vuông nhỏ đã được bôi đen một lần nên hình phù hợp để đặt vào vị trí số **1** là hình **A** (có hình vuông to được bôi đen). Ở dòng thứ nhất tương tự như vậy, ta được hình **B** là phù hợp để đặt vào vị trí số **2.**

TUẤN MINH

Bài 5. ĐƯỜNG ĐI TUẦN

Tổng độ dài của các con đường đi trong nhà máy là $75\times6+60\times9+45\times3=1125$ mét. Từ phòng trực A, bác bảo vệ phải đi tuần đêm đến hết mọi con đường rồi sau cùng trở về đúng phòng trực thì bác không thể đi qua tất cả các con đường chỉ một lần được, vì có 6 địa điểm có số lẻ đường đi đến (A, C, E, G, H, I) phải có con đường đi lại lần nữa. Do vậy, ta chỉ ra một lộ trình đi sao cho có 3 con đường phải đi hai lần đều có độ dài là 45 mét để quãng đường đi của bác bảo vệ là ngắn nhất: $1125+3\times45=1260$ mét. Có nhiều lộ trình đi, chẳng hạn



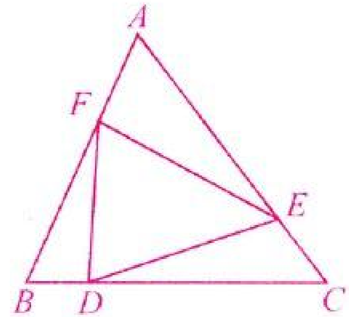
$A\to B\to C\to D\to E\to F\to A\to G\to B\to I$
$\to C\to I\to D\to H\to E\to H\to F\to G\to H$
$\to I\to G\to A.$

Hoặc
$A\to F\to H\to E\to F\to G\to H\to E\to D\to H$
$\to I\to D\to C\to I\to G\to B\to I\to C\to B$
$\to A\to G\to A.$

Hoặc
$A\to B\to I\to D\to H\to F\to G\to B\to C\to I$
$\to G\to H\to I\to C\to D\to E\to H\to E\to F$
$\to A\to G\to A$ ...

GIA LINH

Bài 6. PHÂN CHIA MẢNH VƯỜN



Theo giả thiết (xem hình vẽ) có $S_{DEF}=25$, $S_{AFE}=15$, $S_{CED}=12$, $S_{BDF}=8$ với cùng đơn vị diện tích. Từ đó $S_{ABC}=60$.

Đặt $\dfrac{AF}{AB}=x,\ \dfrac{BD}{BC}=y,\ \dfrac{CE}{CA}=z$ thì

$$\frac{8}{60}=\frac{S_{BDF}}{S_{BCA}}=\frac{BF.BD}{BA.BC}=\frac{AB-AF}{BA}.\frac{BD}{BC}=(1-x)y$$

hay là $(1-x)y=\dfrac{2}{15}$ (1)

Tương tự từ $\dfrac{S_{CED}}{S_{CAB}}=\dfrac{12}{60}$ suy ra $(1-y)z=\dfrac{1}{5}$ (2)

Từ $\dfrac{S_{AFE}}{S_{ABC}}=\dfrac{15}{60}$ suy ra $(1-z)x=\dfrac{1}{4}$ (3)

Từ (2) và (3), rút y và x theo z rồi thay vào (1) được phương trình bậc hai của z. Giải phương trình này được hai nghiệm $z_1=\dfrac{1}{4}$ và $z_2=\dfrac{9}{13}$.

Từ đó tính được $x_1=\dfrac{1}{3}$, $y_1=\dfrac{1}{5}$ và $x_2=\dfrac{13}{16}$, $y_2=\dfrac{32}{45}$. Bài toán có hai nghiệm.

ĐAN QUỲNH

DANH SÁCH CÁC BẠN ĐOẠT GIẢI CUỘC THI ĐỐ VUI NGÀY HÈ 2012

Giải nhất (1 giải)

Đỗ Nguyễn Hoàng Anh, 10A1, THPT Hắc Dịch, Tân Thành, **Bà Rịa - Vũng Tàu.**

Giải Nhì (1 giải)

Nguyễn Văn Cao, 10A1, THPT Sáng Sơn, **Vĩnh Phúc.**

Giải Ba (3 giải)

1) *Đặng Hữu Hiếu*, 11T, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, **Hòa Bình.**

2) *Lê Thị Minh Thảo*, 11 Toán, THPT chuyên Bến Tre, **Bến Tre**.

3) *Nguyễn Tiến Hoàng Sơn*, 11T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Bà Rịa - Vũng Tàu**.

Giải Khuyến khích (9 giải)

1) *Phạm Quốc Đạt*, 10 Toán 1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Bà Rịa - Vũng Tàu.**

2) *Vương Quốc Nghĩa*, 10T, THPT chuyên Bạc Liêu, **Bạc Liêu.**

3) *Phùng Mạnh Hùng*, 10T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định.**

4) *Phan Bá Đạt*, 11/1, THPT Dương Quang Đông, **Trà Vinh**.

5) *Vũ Thị Thanh Hiền*, 10T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định**.

6) *Bùi Đình Hiếu*, 11A1, THPT Quỳnh Côi, Quỳnh Phụ, **Thái Bình.**

7) *Thiệu Hồng Thái*, 10A, THPT chuyên Quang Trung, **Bình Phước**.

8) *Vũ Thùy Linh*, 7A3, THCS Lâm Thao, **Phú Thọ**.

9) *Trương Kim Ánh Ngọc*, 10A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng, **Cần Thơ**.

Các bạn nhớ gửi nhanh địa chỉ mới của mình về Tòa soạn để nhận Giấy Chứng nhận và tặng phẩm của Tạp chí.

THTT

TRIỂN LÃM - HỘI CHỢ SÁCH QUỐC TẾ VIỆT NAM LẦN THỨ IV

Được tổ chức định kì 2 năm/lần, Triển lãm - Hội chợ Sách Quốc tế Việt Nam lần thứ IV năm 2012 (kéo dài từ 17/9 - 21/9 tại Trung tâm Hội chợ Triển lãm Giảng Võ, Hà Nội) là một trong những hoạt động có ý nghĩa nhất trong chuỗi những hoạt động nhân dịp kỉ niệm 60 năm thành lập ngành Xuất bản – In – Phát hành Sách Việt Nam (1952 – 2012).

Với sự tham gia đông đảo của các Nhà xuất bản, các Cơ sở In, Công ty phát hành Sách trong và ngoài nước; các Hiệp hội xuất bản Sách Châu Á - Thái Bình Dương, Hiệp hội xuất bản Đông Nam Á.... Đây thực sự trở thành ngày hội của văn hóa đọc, của những người làm công tác xuất bản in, phát hành sách, và là ngày hội của tri thức.

Hội chợ Sách Quốc tế Việt Nam lần thứ IV có khoảng 160 gian hàng của các đơn vị, nhà xuất bản trong và ngoài nước tham gia với hàng trăm nghìn xuất bản phẩm và văn hóa phẩm trong đó có khoảng hơn 30 triệu bản sách thuộc nhiều lĩnh vực được chọn và thẩm định bởi các chuyên gia hàng đầu về lĩnh vực xuất bản. Ngoài ra, đây còn là nơi giới thiệu các sản phẩm về công nghệ thông tin dành cho mọi lứa tuổi, các thiết bị giáo dục dùng cho giảng dạy, học tập và phát triển khả năng tư duy,... Ngoài hoạt động chính, Hội chợ còn tổ chức nhiều hoạt động bên lề khác như: hội thảo, tư vấn, giao dịch bản quyền, diễn đàn kêu gọi đầu tư, giao lưu giữa các tác giả và bạn đọc,...

Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam tham gia Triển lãm - Hội chợ với trên 1500 đầu sách có hình thức đẹp, có nội dung phong phú, bổ ích được trưng bày gồm các loại: sách giáo khoa, sách tham khảo, sách dân tộc, sách dạy nghề, sách mầm non, sách dịch, từ điển giáo dục, Tạp chí...; trong đó có nhiều cuốn đã đoạt giải Vàng, giải Bạc sách hay, sách đẹp do Hội Xuất bản Việt Nam tổ chức hàng năm. Gian hàng của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam đã thu hút được đông đảo độc giả thuộc nhiều lứa tuổi khác nhau.

THANH LOAN

(*Nguồn: http//trithucthoidai*)

Câu lạc bộ

DI SẢN THẾ GIỚI Tại Việt Nam

Đến nay một số quần thể di tích tại Việt Nam đã được Tổ chức Giáo dục, Khoa học và Văn hóa của Liên Hiệp Quốc (UNESCO) công nhận là Di sản thế giới (thỏa mãn ít nhất một trong một số tiêu chuẩn đề ra) như Di sản thiên nhiên thế giới (DSTNTG), Di sản văn hóa thế giới (DSVHTG), Di sản địa chất thế giới (DSĐCTG), và một quần thể di tích được Hội đồng Tư vấn Mạng lưới Công viên địa chất toàn cầu của UNESCO công nhận là Công viên địa chất toàn cầu (CVĐCTC). Bạn hãy sắp xếp các tư liệu tìm được dưới đây cho đúng nhé! Chú ý rằng có một quần thể di tích được công nhận hai danh hiệu.

A. Tên quần thể di tích

A1. Cao nguyên đá Đồng Văn
A2. Khu thánh địa Mỹ Sơn
A3. Khu Trung tâm Hoàng thành Thăng Long
A4. Phố cổ Hội An
A5. Quần thể di tích Cố đô Huế
A6. Thành Nhà Hồ
A7. Vịnh Hạ Long
A8. Vườn Quốc gia Phong Nha - Kẻ Bàng

B. Tỉnh, thành phố (huyện)

B1. Hà Nội
B2. Hà Giang
B3. Quảng Bình
B4. Quảng Nam (Duy Xuyên)
B5. Quảng Nam
B6. Quảng Ninh
B7. Thanh Hóa
B8. Thừa Thiên – Huế

C. Năm được công nhận là Di sản thế giới

C1. DSVHTG 12/1993
C2. DSTNTG 12/1994
C3. DSVHTG 12/1999
C4. DSVHTG 12/1999
C5. DSĐCTG 12/2000
C6. DSTNTG 7/2003
C7. DSVHTG 8/2010
C8. CVĐCTC 10/2010
C9. DSVHTG 6/2011

VÂN KHANH

Giải đáp: NHỮNG SỰ KIỆN NỔI BẬT TRONG CÁCH MẠNG THÁNG 8

(Đề đăng trên THTT số 421, tháng 7 năm 2012)

A1 B4 C3	**A4 B3 C8**	**A7 B8 C7**
A2 B1 C2	**A5 B5 C9**	**A8 B6 C6**
A3 B2 C1	**A6 B7 C4**	**A9 B9 C5**

Có thể đổi chỗ **C4** với **C5**. Xin sửa lại: **C9**. Sơn Dương, Tuyên Quang.

Các bạn sau có lời giải đúng, được nhận tặng phẩm:

1) *Nguyễn Quang Trọng*, 11A1, THPT Tây Tiền Hải, **Thái Bình**;

2) *Văn Sỹ Kiên*, 11A1, THPT Hoàng Mai, Quỳnh Mai, Quỳnh Lưu, **Nghệ An**

3) *Lê Huỳnh Đức*, 11C1, THPT Nam Đàn 1, **Nghệ An.**

4) *Lê Duy Khánh*, 11A5, THPT chuyên ĐH Vinh, **Nghệ An**

5) *Dương Minh Chí*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, TP. Cao Lãnh, **Đồng Tháp.**

6) *Lưu Giang Nam*, 10T1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển, **Cà Mau**.

7) *Nguyễn Minh Tuyền*, 8/6, THCS Lê Ngọc Hân, TP. Mỹ Tho, **Tiền Giang.**

AN MINH

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 424 (10.2012)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.35121607
ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35121606
Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

TRONG SỐ NÀY

Ảnh bìa 1. *Phan Ngọc Quang* (NXBGD Việt Nam)

Biên tập : NGUYỄN PHÚC, TẠ NGỌC TRÍ
Trị sự, phát hành : NGUYỄN KHOA ĐIỀM, VŨ ANH THƯ
Mĩ thuật : QUỐC HIỆP, THANH LONG
Chế bản : NGUYỄN THỊ OANH

TRƯỜNG THPT CẨM XUYÊN, HÀ TĨNH

Nửa thế kỉ XÂY DỰNG VÀ PHÁT TRIỂN

Thầy HOÀNG QUỐC DŨNG
Hiệu trưởng Nhà trường

Trường cấp III Cẩm Xuyên (nay là Trường THPT Cẩm Xuyên) được thành lập năm 1962 là một trong những ngôi trường thành lập sớm nhất của tỉnh Hà Tĩnh nhằm đào tạo, bồi dưỡng cho học sinh các huyện phía nam của tỉnh, tạo nguồn lực cán bộ cho công cuộc xây dựng và bảo vệ Tổ Quốc XHCN.

Buổi đầu thành lập trường chỉ có 3 lớp và 9 giáo viên, với nhà học nứa lá sơ sài. Đến nay trường có 44 lớp với 110 cán bộ, giáo viên và cở sở vật chất khang trang kiên cố, đủ điều kiện để học tập và giải trí cho học sinh.

Trải qua 50 năm xây dựng và trưởng thành, mặc dù còn nhiều khó khăn song thầy và trò nhà trường đã vượt lên để thi đua dạy tốt- học tốt và đạt được những thành tích đáng tự hào.

1. Chất lượng đào tạo

Trường đã có 14 học sinh dự thi HSG Quốc gia; trong các kì thi HSG cấp tỉnh trường luôn xếp tốp đầu khối THPT trong toàn tỉnh, đặc biệt là các đội tuyển Toán. Nhiều năm trường được xếp vào tốp 200 trường có tỉ lệ học sinh đỗ Đại học cao nhất cả nước, và nhiều học sinh đỗ Thủ khoa các trường Đại học danh tiếng. Cùng với nhiệm vụ dạy học là nhiệm vụ xây dựng và bảo vệ Tổ Quốc, các thế hệ giáo viên, học sinh của trường đã hăng hái lên đường nhập ngũ, từ mái trường này ra đi đã có gần 180 giáo viên và học sinh vĩnh viễn nằm lại ở các chiến trường như thầy giáo *Chu Đức*, các học sinh *Hoàng Kim Định, Đậu Xuân Đắc*, …. Nhiều học sinh sau khi ra trường phấn đấu trở thành những Giáo sư, Tiến sĩ, các nhà khoa học hàng đầu, đã và đang giữ những trọng trách quan trọng trong các trường Đại học, Cao Đẳng và trong các lĩnh vực kinh tế xã hội như: TS *Đặng Quốc Tiến* - Nguyên Thứ trưởng Bộ Nội vụ, TS *Phạm Hùng*-Anh hùng Lao động-Tổng giám đốc Tổng Công ty LILAMA, GS.TS *Trần Văn Thiện* - Nguyên Viện trưởng Viện Dân số - Nhân lực TP Hồ Chí Minh, GS.TS *Đặng Quốc Phú* - Nguyên Viện trưởng Viện Điện lạnh ĐH Bách Khoa Hà Nội, *Nguyễn Văn Mão* - Nguyên Chủ tịch UBND tỉnh Hà Tĩnh, Thiếu tướng *Nguyễn Đức Tới* - Chỉ huy trưởng Bộ chỉ huy Quân sự Hà Tĩnh, Thiếu tướng *Trần Viết Bằng* - Cục trưởng Cục chính trị - Tổng cục Hậu cần, TS *Phạm Văn Tuấn* - Tổng giám đốc Tổng Công ty HANVICO, TS.BS *Hoàng Văn Lý* - Phó giám đốc Bệnh viện Hữu Nghị Việt Xô,...

2. Những phần thưởng cao quý

TẬP THỂ. Nhiều năm liền trường đạt danh hiệu tập thể Tiên tiến Xuất sắc cấp tỉnh; được Chủ tịch nước tặng Huân chương Lao động Hạng Ba năm 2002 và tặng Huân chương Lao động Hạng Nhì năm 2012; được công nhận Trường chuẩn Quốc gia năm 2010. Đoàn trường được Trung ương Đoàn tặng Bằng khen; Công đoàn nhà trường được Công đoàn Giáo dục Việt Nam tặng Bằng khen; Đảng bộ được công nhận Đảng bộ trong sạch vững mạnh tiêu biểu.

CÁ NHÂN. Nhiều giáo viên của trường đã trưởng thành làm lãnh đạo chủ chốt của ngành và của các cấp chính quyền, nhiều người đã trở thành Nhà giáo Ưu tú, học lên tiến sĩ như: Thầy *Bùi Xuân Huyến* - Nguyên Giám đốc Sở Văn hoá- Thông tin Hà Tĩnh, NGƯT *Trần Ninh*-Nguyên Trưởng phòng Đào tạo-Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Tĩnh, NGƯT *Trần Văn Quán* - Nguyên Trưởng Phòng Giáo dục Cẩm Xuyên, NGƯT *Thái Văn Tình* - Nguyên Hiệu trưởng Trường THPT Châu Long, An Giang, NGƯT *Võ Duy Quỳ*- Nguyên Tổ trưởng Tổ Sinh học, NGƯT *Nguyễn Đăng Ái* - Nguyên Hiệu trưởng Trường THPT chuyên Hà Tĩnh, TS *Phan Huy Dũng* - Giảng viên Đại học Vinh, thầy *Hồ Việt Anh* - Hiệu trưởng Trường Cao đẳng Văn hóa Thể thao và Du lịch Hà Tĩnh,.... Hàng năm có từ 10-15 giáo viên đạt CSTĐ cấp cơ sở và cấp tỉnh.

Làm nên những thành công trên của Trường THPT Cẩm Xuyên trong 50 năm qua trước hết là nhờ sự quan tâm, lãnh đạo của các cấp, các ngành và sự nổ lực phấn đấu kiên cường, bền bỉ của các thế hệ lãnh đạo, giáo viên và học sinh nhà trường. Năm học 2012-2013 đã bắt đầu, trong không khí của những ngày đầu năm học mới các thế hệ thầy giáo, cô giáo và học sinh nhà trường đang hướng về ngày hội trường 50 năm vào tháng 11 năm 2012.

ISSN : 0866-8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT10M2

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 10 năm 2012

Giá: 8000 đồng
Tám nghìn đồng